NOTAS DE AULA - V

- Este modelo servirá de base para a introdução de sazonalidade estocástica nos ME. A idéia é a seguinte:

$\sum_{j=1}^{s}\gamma_j = 0 \therefore \sum_{j=0}^{s-1}\gamma_{t-j} = 0.$ A versão estocástica será dada por:

$$\sum_{j=0}^{s-1}\gamma_{t-j} = \omega_t,\ \omega_t \sim \text{NID}(0,\sigma^2_\omega),\ \text{ou}$$

$$\gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1}\gamma_{t-j} + \omega_t, \qquad \omega_t \sim \text{NID}(0,\sigma^2_\omega).$$

- Portanto, o modelo com TLL e sazonalidade estocástica, por dummies ,denominado do Modelo Estrutural Básico, será dado por:

$$
\begin{aligned}
&-eq.\ das\ observ.: && y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t && \varepsilon_t \sim \text{N}(0,\sigma^2_\varepsilon) \\
&-eq.\ do\ estado: && \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t && \eta_t \sim N(0,\sigma^2_n) \\
& && \beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t && \zeta_t \sim \text{N}(0,\sigma^2_\xi) \\
& && \gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1}\gamma_{t-j} + \omega_t && \omega_t \sim N(0,\sigma^2_\omega)
\end{aligned}
$$

onde:

$$E(\varepsilon_t\eta_s) = E(\varepsilon_t\zeta_s) = E(\varepsilon_t\omega_t) = 0,\ \ \forall\ t,s.$$

$$E(\varepsilon_t\alpha_0) = E(\eta_t\alpha_0) = E(\zeta_t\alpha_0) = E(\omega_t\alpha_0) = 0,\ \forall\ t.$$

$$Se\ \alpha_t = (\mu_t,\ \beta_t, \gamma_t, ..., \gamma_{t-s+1})',\ então\ \ \alpha_o \sim N(a_0, P_0).$$

Forma reduzida do Modelo Estrutural Básico

- Inicialmente iremos considerar alguns operadores de diferenciação sazonal:

$$\Delta_s = 1 - L^s$$

$$S_s(L) = 1 + L^1 + L^2 + \ldots + L^{s-1}. \text{ Portanto:}$$

$$\Delta S_s(L) = (1 - L)(1 + L^1 + L^2 + \ldots + L^{s-1}) = 1 - L^s = \Delta_s.$$

- Segue que:

$$\gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t$$

$$= -[\gamma_{t-1} + \gamma_{t-2} + \ \ldots \ + \gamma_{t-(s-1)}] + \omega_t$$

$$\gamma_t + \gamma_{t-1} + \gamma_{t-2} + \ \ldots \ + \gamma_{t-s+1} = \omega_t$$

$$(1 + L^1 + L^2 + \ldots + L^{s-1})\gamma_t = \omega_t$$

$$S_s(L)\ \gamma_t = \omega_t$$

- Seja o MEB:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2_\varepsilon)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \qquad \eta_t \sim N(0, \sigma^2_n)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \qquad \zeta_t \sim N(0, \sigma^2_\xi)$$

$$\gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t \qquad \omega_t \sim N(0, \sigma^2_\omega)$$

- Diferenciando a 1a eq. de forma a torná-la um processo estacionário:

$$\Delta y_t = \Delta\mu_t + \Delta\gamma_t + \Delta\varepsilon_t = \beta_{t-1} + \eta_t + \Delta\gamma_t + \Delta\varepsilon_t$$
$$\Delta^2 y_t = \Delta\beta_{t-1} + \Delta\eta_t + \Delta^2\gamma_t + \Delta^2\varepsilon_t$$
$$\Delta^2 y_t = \xi_{t-1} + \Delta\eta_t + \Delta^2\gamma_t + \Delta^2\varepsilon_t$$
$$S(L)\Delta^2 y_t = S(L)\xi_{t-1} + S(L)\Delta\eta_t + \Delta^2 S(L)\gamma_t + \Delta^2 S(L)\varepsilon_t,$$
$$\text{mas } \Delta_s = \Delta\, S(L), \text{ portanto segue que:}$$

$$\Delta\,\Delta_s y_t = \Delta_s\eta_t + \Delta\,\Delta_s\varepsilon_t + \Delta^2\omega_t + S(L)\xi_{t-1}.$$

- É fácil mostrar que o processo no lado direito da igualdade é um MA(s+1):

$$\gamma(0)=2\sigma_\eta^2+S\sigma_\zeta^2+6\sigma_\omega^2+4\sigma_\varepsilon^2$$
$$\gamma(1)=(s-1)\sigma_\zeta^2-4\sigma_\omega^2-2\sigma_\varepsilon^2$$
$$\gamma(2)=(s-2)\gamma_\zeta^2+\sigma_\omega^2$$
$$\gamma(k)=(s-k)\sigma_\zeta^2 \quad k=3\ldots,s-2$$
$$\gamma(s-1)=\sigma_\zeta^2+\sigma_\varepsilon^2$$
$$\gamma(s)=-\sigma_\eta^2-2\sigma_\varepsilon^2$$
$$\gamma(s+1)=\sigma_\varepsilon^2$$
$$\gamma(k)=0, \quad k\geq s+2$$

- Portanto a forma reduzida de um MEB é um processo MA(s+1).

- Pergunta-se: qual o modelo SARIMA que é equivalente a este processo ? Seja o modelo SARIMA(0,1,1)(0,1,1)$_s$, também conhecido como o modelo airline:

$\Delta \Delta_s y_t = (1+\theta L)(1+\Theta L^s)\varepsilon_t$. Segue que a FAC será dada por:

$$
\begin{aligned}
&\gamma(0) = (1+\theta^2)(1+\Theta^2)\sigma^2 \\
&\gamma(1) = \theta(1+\Theta^2)\sigma^2 \\
&\gamma(k) = 0 \quad k = 2,\ldots,s-2 \\
&\gamma(s-1) = \theta\Theta\sigma^2 \\
&\gamma(s) = \Theta(1+\theta^2)\sigma^2 \\
&\gamma(s+1) = \theta\Theta\sigma \\
&\gamma(k) = 0,\ k \geq s+2
\end{aligned}
$$

- Portanto a FAC da forma reduzida do MEB é diferente da FAC do modelo airline, devido aos “vazios” na FAC deste último.

- Para se obter o modelo airline como um caso particular da forma reduzida do MEB devemos impor as seguintes restrições

$$\Rightarrow \sigma_\zeta^2 = \sigma_\omega^2 = 0,\ o\ que\ implica\ em:$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta \Delta_s y_t = \Delta_s \eta_t + \Delta \Delta_s \varepsilon_t \\
&\Delta\Delta_s y_t = \Delta_s(\eta_t + \Delta\varepsilon_t),\ \text{onde } Z_t = \eta_t + \Delta\varepsilon_t \sim MA(1),\ \text{i.e.,} \\
&\Delta\Delta_s y_t = \Delta_s(\theta' e_{t-1} + e_t) = \Delta_s(1+\theta' L)e_t = (1+\theta' L)(1-L^s)e_t.
\end{aligned}
$$

- Comparando com o modelo airline:

$$\Delta \Delta_s y_t = (1+\theta L)(1+\Theta L^s)\varepsilon_t .$$

- Portanto podemos estabelecer a seguinte relação entre as duas abordagens:

$$\text{forma reduzida do MEB}(\sigma^2_\zeta = \sigma^2_\omega = 0) \Leftrightarrow \text{airline} \quad (\Theta = -1)$$

- Harvey: em ST relativamente curtas é bem provável que σ^2_ζ e $\sigma^2_\omega = 0$. Mas p/ ST longas, este comportamento não necessariamente será verdade, fazendo com que modelo airline seja uma aproximação inadequada para a forma reduzida do MEB.

⇒ Modelo para Ciclos

- Ciclos são flutuações no nível de uma variável (econômica, física etc), que ocorrem de forma recorrente, com periodicidade aproximadamente regular, sempre superior a um ano.

- A importância da separação das componentes de ciclo e tendência em ST econômicas já foi discutida.

- Inclusive alguns procedimentos já foram apresentados:

  - decomposição de Beveridge & Nelson;
  - filtro de Hoddrick-Prescott.

- Iremos agora apresentar como os ME tratam a componente cíclica.

- A idéia central é utilizar o modelo de componente sazonal na forma trigonométrica, considerando apenas o harmônico fundamental.

- Iremos, inicialmente, considerar a versão determinística do modelo com uma componente cíclica:

$$y_t = \psi_t + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$$

$$\psi_t = \alpha \cos(\lambda_c t) + \beta \sin(\lambda_c t)$$

onde $\lambda_c = \dfrac{2\pi}{T}$ é a frequência em radianos do ciclo.

- Neste modelo os parâmetros fixos e desconhecidos (hiperparâmetros) são α, β e λ (ou T) que devem ser estimados.

- Observe, entretanto que, típicamente λ (ou T) é desconhecido. Assim sendo duas estratégias de estimação são possíveis:

i. estimar T separadamente pelo periodograma, tornando a estimação dos outros parâmetros factível por MQO;

ii. estimar T, conjuntamente com os outros parâmetros, através de MQ não-lineares.

- Conforme enunciado, a componente ciclica nos ME é dada por:

$$y_t = \psi_t + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\lambda_c & \sin\lambda_c \\ -\sin\lambda_c & \cos\lambda_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_t \\ k_t^* \end{pmatrix}$$

onde:

- $\lambda_c = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência em radianos, $0 < \lambda_c < \pi$;

- k_t^* e k_t são dois ruídos brancos, descorrelatados, tal que $k_t^*, k_t \sim N(0,\sigma_k^2)$;

- $|\rho| < 1$, é uma cte de amortecimento, e assim o processo do ciclo será estacionário.

- Observem que:

i. o ciclo estocástico torna-se um processo AR(1) se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pi$.

ii. o objetivo da cte de amortecimento ρ é contrabalançar o efeito dos choques externos k e k*.

- A componente cíclica é dada por:

$$\psi_t = \rho[\cos\lambda_c \psi_{t-1} + \sin\lambda_c \psi^*_{t-1}] + k_t.$$

- Impondo estacionariedade, segue que:

$E(\psi_t) = 0$ e

$(1-\rho^2)Var(\psi_t) = (1-\rho^2)\sigma^2_\psi = \sigma^2_k.$

Portanto os parâmetros desconhecidos são ρ e σ^2_ψ.

Se $\rho \to 1$, então $\sigma^2_k \to 0$, e assim o ciclo torna-se não estocástico, mas estacionário, com expressão:

$$\psi_t = \psi_0 \cos\lambda_c t + \psi^*_0 \sin\lambda_c t, \quad t = 1,2,\ldots T, \text{ onde}$$

$$\psi_0, \psi^*_0 \sim (0, \sigma^2_\psi), \; E(\psi_0 \psi^*_0) = 0.$$

- Colocando o modelo em EE:

$$\begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi^*_t \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\lambda_c & \sin\lambda_c \\ -\sin\lambda_c & \cos\lambda_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi^*_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_t \\ k^*_t \end{pmatrix}$$

Na forma vetorial :

$$\psi_t = A\psi_{t-1} + K_t,$$

$$A = \rho \begin{pmatrix} \cos\lambda_c & \sin\lambda_c \\ -\sin\lambda_c & \cos\lambda_c \end{pmatrix}$$

$$\psi_t = (\psi_t, \psi^*_t)', K_t = k_t, k^*_t \; '$$

- Função de previsão

$$\psi_{t+s} = A^s \psi_t + \sum_{i=1}^{s} A^{s-i} K_{t+i},$$

$$\hat{\psi}_{t+s|t} = E(\psi_{t+s}|\mathbf{Y_t}) = A^s E(\psi_t|\mathbf{Y_t}) = A^s \hat{\psi}_{t|t}, \text{ onde}$$

$$A^s = \rho^s \begin{pmatrix} \cos\lambda_c & \sin\lambda_c \\ -\sin\lambda_c & \cos\lambda_c \end{pmatrix}^s = \rho^s \begin{pmatrix} \cos(s\lambda_c) & \sin(s\lambda_c) \\ -\sin(s\lambda_c) & \cos(s\lambda_c) \end{pmatrix}.$$

Portanto: $\hat{\psi}_{t+s|t} = \rho^s \cos(s\lambda_c)\hat{\psi}_{t|t} + \rho^s \sin(s\lambda_c)\hat{\psi}^*_{t|t}$.

$\{\hat{\psi}_{t|t}, \hat{\psi}^*_{t|t}\}$ obtidos a partir da atualização do FK.

- Observe que qdo $s \to \infty$ a função de previsão do ciclo vai para zero, indicando que na presença da componente de tendência, esta dominará a previsão.

- Forma reduzida:

$$\psi_t = A\psi_t + K_t$$

$$\psi_t = (I - AL)^{-1} K_t$$

$$\psi_t = \begin{pmatrix} 1-\rho L\cos\lambda_c & -\rho L \sin(\lambda_c) \\ \rho L \sin\lambda_c & 1-\rho L\cos(\lambda_c) \end{pmatrix}^{-1} K_t$$

$$= \frac{1}{(1-2\rho L\cos\lambda_c + \rho^2 L^2)} \begin{pmatrix} 1-\rho L\cos\lambda_c & \rho L \sin\lambda_c \\ -\rho L\sin\lambda_c & 1-\rho L\cos\lambda_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t \\ k_t^* \end{pmatrix}.$$

- Portanto a forma reduzida de um ME com ciclo será dada por:

$$y_t = \psi_t + \varepsilon_t$$

$$y_t = \frac{1}{(1\text{-}2\rho L\cos\lambda_c + \rho^2 L^2)}[(1\text{-}\ \rho L\cos\lambda_c)k_t + (\rho L\sin\lambda_c)k_t^*] + \varepsilon_t$$

$$y_t - 2\,\rho\,\cos\lambda_c\ y_{t-1} + \rho^2\ y_{t-2} = k_t - \rho\,\cos\lambda_c k_{t-1} + \rho\,\sin\lambda_c k_{t-1}^* + \varepsilon_t - 2\,\rho\,\cos\lambda_c\ \varepsilon_{t-1} + \rho^2\ \varepsilon_{t-2}$$

- Ou seja a forma reduzida de um ME c/ ciclo é um ARMA(2,2).

- Modelo estrutural com tendência e ciclo:

$$y_t = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}\mu_t \\ \beta_t \\ \psi_t \\ \psi_t^*\end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix}\mu_t \\ \beta_t \\ \psi_t \\ \psi_t^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\cos\lambda_c & \rho\sin\lambda_c \\ 0 & 0 & \rho\sin\lambda_c & \rho\cos\lambda_c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^*\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\eta_t \\ \xi_t \\ k_t \\ k_t^*\end{pmatrix}$$

$$\text{hiperparâmetros: } \Psi = (\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2, \rho, \lambda_c, \sigma_\psi^2) \quad \sigma_k^2 = (1-\rho^2)\sigma_\psi^2.$$

- Qual será a forma UCARIMA do modelo de tendência com ciclo ?

$\Rightarrow$ Variáveis Explicativas e Intervenções

- Em muitas situações de modelagem estrutural de ST é importante incorporar, junto às componentes, o efeito de variáveis explicativas e intervenções.

- O modelo resultante torna-se um misto de séries temporais e regressão, e espera-se que possua um maior poder preditivo do que o modelo sem regressores.

- Deve-se observar, entretanto, que ao se introduzir variáveis explicativas as componentes, de uma certa forma, perdem a sua interpretação original.

- A título de ilustração considere o modelo LLT c/ variável explicativa, onde este último efeito é fixo no tempo.

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + \delta_t x_t + \varepsilon_t \\
\mu_t &= \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \\
\beta_t &= \beta_{t-1} + \zeta_t \\
\delta_t &= \delta_{t-1}
\end{aligned}
$$

- Colocando o modelo acima na forma de EE:

$$
y_t = \begin{matrix} 1 & 0 & x_t \end{matrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t
$$

$$
\begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \delta_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \end{bmatrix}
$$

- Observe que essencialmente o que ocorre é que o vetor de estado é aumentado ao introduzirmos variáveis explicativas/intervenções.

- Assim sendo, os parâmetros associados às variáveis explicativas/intervenções serão estimados pelo FK. Observe, entretanto, que eles são fixos no tempo.

- A inicialização de δ_t pode ser feita pelo modo difuso, e nesse caso o vetor de estado inicial possui a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix}, k \begin{bmatrix} P_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

- Pode-se mostrar que a estimativa de δ_t pelo FK é equivalente a sua estimativa por MQ recursivos.

- Embora não esteja implementado na versão atual do STAMP, é possível supor que os parâmetros associados às variáveis explicativas/intervenções sejam variantes no tempo. Ver por exemplo, o modelo dinâmico de análise de estilo proposto por Pizzinga.