2ª parte (P2)

Resumo Notas de Aula I

→ Em MEE

ST = Tendência + ciclo + sazonalidade + irregular

a) Macroeconomia I

Duas componentes tendência + irregular/ciclo

Economia afetada por 2 tipos de choques.

- permanentes: efeito permanente na série

- transientes: efeito passageiro

⇒ Tendência: associada a choques permanentes
não estacionária por construção

Transitórios: estacionário por construção

b) Macroeconomia II

Três componentes: tendência + sazonalidade + irregular

c) Meteorologia:

Três componentes: tendência + ciclo + irregular

- componentes de uma ST = fatos estilizados
↳ ver p/ séries financeiras.

- componentes são normalmente estocásticas (locais)
(× determinísticas - globais)

- Estudos empíricos ⇒ Artigo Nelson e Plosser
p/ séries econômicas, mais adequado considerar componentes estocásticas.

- Nos modelos ME ⇒ componentes estimadas recursivamente via FK
ou suavização

Modelo de Tendência

- Tendência: difícil definição
  (componente de baixa frequência,
  apresenta maior suavidade quando estimada.

- Classificação:
  - Determinística: função determ. do tempo
    (TS)
    trend stationary
  - Estocástica: DS.

a) Tend. Determinística:

$$y_t = \sum_{j=0}^{d} \beta_j t^j + \psi(L) a_t \quad , \quad a_t \sim N(0, \sigma^2)$$

polinômio (normalmente até 2º grau)

onde $\psi(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j$ (ao invés de considerar RB, usa ARMA)

erro se propaga → quando colocamos apenas RB ainda pode haver correlação.

$$\Rightarrow E[y_t] = E\left[\sum_{j=0}^{d} \beta_j t^j\right] + E[\psi(L) a_t] =$$

$$= \sum_{j=0}^{d} \beta_j t^j$$

$$\text{var}[y_t] = \text{var}[\psi(L) a_t] =$$

$$= \text{var}[a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots]$$

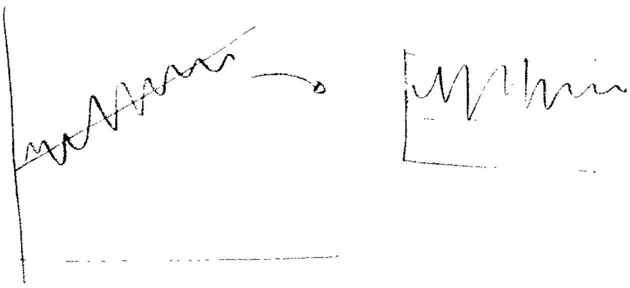
$$= \underbrace{[1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots]}_{\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2\right)\sigma_a^2} \sigma_a^2$$

$$\gamma(k) = \sigma^2 (\psi_k \psi_0 + \psi_{k+1}\psi_1 + \dots)$$

obs 1: poderíamos ter $\log y_t$ ao invés de y_t

obs 2: função polinomial normalmente até grau 2.

obs 3. quanto mais suave for a tendência ⇒ maior é o ciclo
(flutuação em torno da tendência)

 $\Rightarrow$ fica + acentuado o ciclo

Obs 4. Não é adequado pois nas séries econômicas, tendência é essencialmente estocástica.

Obs 5: Modelo típico de Séries Temporais: parte estacionária ARMA
" ñ " é TS

A cov e autocov vem do ARMA

→ <u>Caso Particular</u>

$d = 1$ e $a_t \sim AR(1)$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_t$$

• Para a_t:

$$a_t = \phi a_{t-1} + \varepsilon_t \therefore (1-\phi L) a_t = \varepsilon_t$$
$$\therefore a_t = \frac{\varepsilon_t}{1-\phi L}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} E[a_t] = 0 \\ var[a_t] = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \\ \rho(k) = \phi^k \end{array}\right\} \text{processo AR(1) s/ tendência}$$

• Para y_t:

$$E[y_t] = \beta_0 + \beta_1 t$$
$$var[y_t] = var[a_t] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$
$$\rho(y_t, y_{t-k}) = \phi^k$$

• Previsão s-passos a frente

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_t$$
$$y_{t+s} = \beta_0 + \beta_1 (t+s) + a_{t+s}$$

$\therefore \quad \hat{y}_{t+s|t} = E[y_{t+s} \mid \underset{\sim}{Y_t}] =$

$$= \hat\beta_0 + \hat\beta_1(t+s) + E[a_{t+s} \mid Y_t]$$

Atenção: iterando a_t, temos

$$a_t = \phi a_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$a_{t+1} = \phi a_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$a_{t+2} = \phi a_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$$

$$= \phi^2 a_t + \phi \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$$

$$\Rightarrow E[a_{t+s} \mid \underset{\sim}{Y_t}] = \phi^2 a_t$$

Logo:

$$\hat{y}_{t+s|t} = \hat\beta_0 + \hat\beta_1(t+s) + a_t\phi^2$$ — contribuição $\to 0$ quando $s \to \infty$.

$$= \underbrace{(\hat\beta_0 + \hat\beta_1 t) + a_t}_{y_t} + \hat\beta_1 s + a_t\phi^2 - a_t$$

$$= y_t + \hat\beta_1 s + (\phi^2 - 1)a_t$$

Fazer

$$\text{var}[e_{t+s|t}] = \frac{\sigma^2(1-\phi^{2s})}{(1-\phi^2)} \qquad s = 1, 2, \ldots$$

$\downarrow$

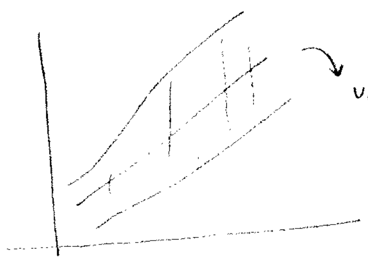
erro de previsão
s passos à frente

Obs: Da parte estacionária $\Rightarrow$ média condicional converge p/ média incondicional

$$E[a_t] = 0$$

No caso da variância $\Rightarrow$ limite assintótico é do ARMA

$$\text{var} \to \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$



variância aumenta e estabiliza.

- Para retirar tendência do processo, efetuamos regressão por MQO

$$y_t^* = y_t - (\hat\beta_0 + \hat\beta_1 t) = \hat{a}_t$$

Não é recomendado tirar tendência por 1ª diferença em processos TS.

introduz raiz unitária

Nesse caso, teríamos:

$$w_t = y_t - y_{t-1}$$

$$= (1-L)\,y_t = (1-L)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \frac{\varepsilon_t}{1-\phi L}\right) =$$

$$= \beta_1(t-(t-1)) + \frac{\varepsilon_t}{1-\phi L}(1-L)$$

$$= \beta_1 + (1-L)\frac{\varepsilon_t}{1-\phi L}$$

$$(1-\phi L)(1-L)\,y_t = (1-\phi)\,\beta_1 + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

$$= (1-\phi)\,\beta_1 + (1-L)\,\varepsilon_t$$

ARIMA (1,1,1) com raiz unitária ($\theta = 1$)

=) Operação de tirar tendência por primeira diferença não é adequada p/ tendência TS pois implica em MA não inversível, não desejável do ponto de vista estatístico

Por quê?

obs: se processo TS genérico c/ polinômio de grau d, precisaríamos diferenciar a série d vezes, introduzindo MA c/ d raízes unitárias

— ‖ —

obs: Processos TS foram muito usados p/ var. macroeconômicas nos anos 70/80

$$y_t = a + bt + e_t \quad \text{onde } e_t \sim ARMA(p,q)$$

Estimava-se por MQO e ciclo era resíduo do modelo

=) Problema:

- componente cíclica fica super-dimensionada, podendo gerar ciclos espúrios.
- no processo TS, choques possuem efeito transiente (só afetam processo no tempo t)

Não são carregados p/ outros instantes. Pode se propagar um pouco, mas "morre" rapidamente (velocidade depende de ϕ)

Em Economia, choques são normalmente permanentes até p/ justificar a tendência (aumento população, inovações tecnológicas)

só pode ser capturado por tendência

b) Tendência Estocástica (processos DS) → difference stationary (estacionário c/ 1ª diferença)

i) Passeio Aleatório (RW)

(ex: preços de ativos na Bolsa)

$$\boxed{y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t}$$ (AR com $\phi = 1$) ⇒ Não tem cond. de equilíbrio

onde $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$

Iterando y_t:

$y_{t+1} = y_t + \varepsilon_{t+1}$

$y_{t+2} = y_{t+1} + \varepsilon_{t+2} = y_t + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$

$\Rightarrow \boxed{y_t = y_0 + \sum_{t=1}^{t} \varepsilon_i}$: choques não são mais transientes. carregados ao longo do tempo.

Logo: $E[y_t] = 0$ (se $y_0 = 0$) → Não é atrator pois processo ñ estacionári

$var[y_t] = t\sigma^2$ → cresce no tempo.

$\rho(y_t, y_{t-k}) = \left(1 - \frac{k}{t}\right)^{1/2}$ → muda ao longo do tempo

Calcular

obs: Para retirar tendência, efetuamos nº de diferenciações adequado

$\Delta y_t = \varepsilon_t$

obs: $y_t \sim I(d)$

significa que $\Delta^d y_t$ é estacionária (ñ precisa ser RB, apenas estacionária 2ª o

Ex: IBovespa: $I(1)$

retornos IBOV: $I(0)$

ii) Passeio Aleatório c/ Drift

(ex: PIB, M1, preços no mercado etc.)

$$\boxed{y_t = a_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t}$$

Iterando y_t:

$y_1 = a_0 + y_0 + \varepsilon_1$

$y_2 = a_0 + y_1 + \varepsilon_2 = y_0 + 2a_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$\ldots \boxed{y_t = a_0 + a_0 t + \sum^{t} \varepsilon_i}$

Logo: $E[y_t] = y_0 + a_0 t$ (parece tendência determinística, mas var cresce no tempo, não é ok.)

$var(y_t) = t\sigma^2$

$\rho(y_t, y_{t-k}) = \left(1 - \frac{k}{t}\right)^{1/2}$

- Previsão s passos à frente:

$$y_{t+s} = y_0 + a_0(t+s) + \sum_{i=1}^{t+s} \varepsilon_i$$

$$= \underbrace{y_0 + a_0 t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i}_{y_t} + a_0 s + \sum_{i=t+1}^{t+s} \varepsilon_i$$

$$= y_t + a_0 s + \sum_{i=t+1}^{s} \varepsilon_i$$

<u>Obs</u>: Num passeio aleatório, choques possuem efeito permanente

$$\frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_i} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, t+s-1)$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+s|t} = E[y_{t+s} | Y_t] = y_t + a_0 s$$

$$var[e_{t+s|t}] = E\left[(y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t})^2\right] =$$

$$= var\left(\sum_{i=t+1}^{t+s} \varepsilon_i\right) = s\sigma^2 \qquad s = 1, 2, \dots$$

erro de previsão s passos à frente

aumento da variância $\Rightarrow$ tendência não tem sustentação estatística.

<u>Obs</u>: Relação $\frac{\text{drift}}{\text{variância}}$ define a sustentabilidade da tendência

($y_t = y_0 + a_0 t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \Rightarrow$ se var for pequena, $y_0 + a_0 t$ pode dominar)

fazer pg 26, 27, 28, 29, 30 (fazer caderno tb)

Notas de Aula III (final 04/05 e aula 11/05)

→ Modelos Estruturais

- Abordagem de componentes não observáveis
- Série temporal decomposta em componentes ortogonais que tem interpretação direta
  (ex: tendência, sazonalidade e ciclo)
- componentes são processos estocásticos (evoluem no tempo)
- Neste arcabouço, há transição suave entre TS e DS
  É geral p/ caracterizar os 2 tipos.
  (vai se ajustar naturalmente por conta das variâncias)

Diagrama Geral

eq. das obs: $y_t = \underbrace{\mu_t}_{\text{tend.}} + \underbrace{\gamma_t}_{\text{saz.}} + \underbrace{\psi_t}_{\text{ciclo}} + \varepsilon_t$

eqs. dos estados: μ_t
γ_t
ψ_t

Para processo DS

componentes locais

Para Processo TS

componentes globais
(estimados por MQO)
caso particular dos ME

$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$

$\mu_t = a + bt$

$\gamma_t = \Sigma(\gamma_j \cos wt + \gamma_j^* \operatorname{sen} wt)$

$\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$

⇒ ME podem ser vistos como modelos de regressão onde os regressores são funções do tempo (t, $\cos wt$, $\operatorname{sen} wt$) e os coeficientes dos regressores (a, b, γ, γ^*) evoluem estocasticamente no tempo.

- Para estimar vetor de estado $\alpha_t = \{\mu_t, \gamma_t, \psi_t\}'$, usa FK
(estimação condicional ao conj. de info: previsão, atualização, filtragem.

Modelos de Tendência

Tendência: componente que domina a previsão a-passos a frente

a) Modelo de Nível local

Tend. estocástica adequado p/ o caso de nível não ser cte.

ex: Desemprego no Brasil

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t & \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t & \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \end{cases}$$

onde $E[\varepsilon_t \eta_s) = 0 \quad \forall\, t, s$

$E(\varepsilon_t \mu_1) = E(\eta_t \mu_1) = 0 \quad \forall t$

$\mu_1 \sim N(a_1, P_1)$

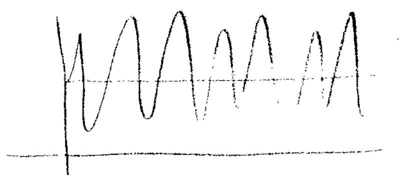
- Razão sinal ruído

$q = \sigma_\eta^2 / \sigma_\varepsilon^2 \qquad 0 < q < \infty$ (importante p/ ser explorado na questão da verossimilhança)

É o parâmetro que governa a suavidade da componente de nível local em relação ao ruído do modelo.

- se q grande (> 1) ⇒ variação do nível supera variação do ruído

componente muito instável



- se q pequeno (< 1) ⇒ nível do processo fica engolfado pelo ruído.

mais interessante.

obs: quando $q = 0 \Rightarrow \mu_{t+1} = \mu_t \;\forall t \Rightarrow y_t = a + \varepsilon_t$ (variação em torno de cte)

Casos Particulares

a) $\sigma_\eta^2 = 0 \Rightarrow q = 0$

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} = \mu$$

$\Rightarrow$ Nível é cte, a ser estimado por MQO

$$\hat{\mu} = \left(\frac{1}{t}\right) \sum_{i=1}^{t} y_i$$

- Equação de previsão

$$\hat{\mu}_{t+s|t} = \hat{\mu}_t$$
$$var(y_{t+s|t}) = \sigma^2$$

mostrar

b) $\sigma_\varepsilon^2 = 0$

$$y_t = \mu_t \quad \text{(choque é zero)}$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t$$

$\Rightarrow y_t = y_{t-1} + \eta_t$: Passeio Aleatório

- Equação de previsão

$$\hat{y}_{t+s|t} = y_t$$
$$var[y_{t+s|t}] = s\sigma^2$$

mostrar

Caso Geral

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t \end{cases}$$

Iterando μ_t: $\mu_1 = \mu_0 + \eta_1$

$$\mu_2 = \mu_1 + \eta_2 = \mu_0 + \eta_1 + \eta_2$$
$$\vdots$$
$$\mu_t = \mu_0 + \sum_{i=1}^{t} \eta_i$$

Logo: $E(y_t) = E[\mu_t] = E(\mu_0) = a_0$

$var[y_t] = var(\mu_0) + var[\sum_{i=1}^{t} \eta_i] + var(\varepsilon_t)$

$\Rightarrow var(y_t) = p_0 + t\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2$

} processo não é estacionário

- Previsão s-passos à frente:

$$y_{t+s} = \mu_{t+s} + \varepsilon_{t+s}$$

$$\mu_{t+s} = \mu_t + \sum_{i=1}^{s} \eta_{t+i} \quad \text{(da iteração)}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+s|t} = E[y_{t+s} | \underset{\sim}{Y}_t]$$
$$= E[\mu_{t+s} | \underset{\sim}{Y}_t]$$
$$= E[\mu_t | \underset{\sim}{Y}_t] = \hat{\mu}_{t|t} \text{ (estimado pelo FK)} \Rightarrow \text{passo de atualização}$$

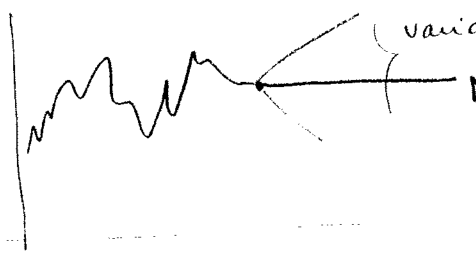
$$\text{var}[y_{t+s|t}] = s\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{var}[e_{t+s}] = \text{var}[y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t}]$$
$$= \text{var}\left[(\mu_{t+s} + \varepsilon_{t+s}) - (\hat{\mu}_{t|t})\right]$$
$$= \text{var}\left[\left(\mu_t + \sum_{i=1}^{s} \eta_{t-i} + \varepsilon_{t+s}\right) - \hat{\mu}_{t|t}\right] =$$
$$= \text{var}\left[(\mu_t - \mu_{t|t}) - \sum_{i=1}^{s} \eta_{t+i} + \varepsilon_{t+s}\right]$$

$$\Rightarrow \text{var}[e_{t+s|t}] = E(e_{t+s}^2 | \underset{\sim}{Y}_t)$$
$$= E\left[(\mu_t - \mu_{t|t})^2 | \underset{\sim}{Y}_t\right) + \sum_{i=1}^{s} E[\eta_{t+i}^2] + E[\varepsilon_{t+s}^2]$$
$$= \underbrace{P_{t|t} + s\sigma_\eta^2}_{\text{vem da incerteza do estado}} + \underbrace{\sigma_\varepsilon^2}_{\text{vem do choque}}$$

- Previsão 1 passo à frente é um EWMA

$$\hat{y}_{t+1|t} = E[y_{t+1} | \underset{\sim}{Y}_t) = (1-\lambda_t) y_t + \lambda_t \hat{y}_{t|t-1}$$



obs: vantagem do MNL sobre

$y_t = \mu + \varepsilon_t$
↳ média

Em $\mu = \frac{1}{T} \sum y_i \Rightarrow$ ponderamos todo mundo igual

Com MNL: EWMA
(pesos decaem p/ obs + antigas)

- Resumo p/ MNL

Nível	σ_ε^2	σ_η^2
cte.	*	0
nível local	*	*
passeio aleatório	0	*

- Forma Reduzida

- Devemos tomar diferenças no ME até torná-lo estacionário
- Devemos achar um equivalente ARIMA(p,d,q) com restrições adicionais nos parâmetros

Todo modelo ARIMA, por construção, é identificável.
Devemos escrever ME sob forma ARIMA p/ ver se é identificável ou não.
(identificável em termos de estimação de parâmetros)

Caso geral da Forma Reduzida

$$\boxed{\Phi_p(L)\,\Delta^d y_t = c + \Theta_q(L)\,\varepsilon_t \Rightarrow \text{ARIMA}(p,d,q)+c}$$

Para MNL:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t$$

→ Tira 1ª diferença:

$$\left.\begin{aligned}\Delta y_t &= \Delta\mu_t + \varepsilon_t\\ \Delta\mu_t &= \eta_t\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\Delta y_t = \eta_t + \Delta\varepsilon_t}$$

- É uma CL de processos estacionários
- logo Δy_t é estacionário
- Devemos procurar forma ARIMA equivalente a esta transformação

→ Dado que Δy_t é estacionário, devemos ver se equivale a que forma ARIMA equivale.
Como saber: ver FAC

→ calcula $E(\cdot)$, $var(\cdot)$ e $cov(\cdot)$

$$E[\Delta y_t] = 0$$

$$var[\Delta y_t] = var(\eta_t) + var(\Delta \varepsilon_t)$$
$$= \sigma_\eta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2$$

$k=1$: $cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-1}) = E[\Delta y_t \, \Delta y_{t-1}]$
$$= E[(\eta_t + \Delta\varepsilon_t)(\eta_{t-1} + \Delta\varepsilon_{t-1})]$$
$$= E[(\eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\eta_{t-1} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})]$$
$$= -\sigma_\varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \rho(1) = \frac{-\sigma_\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2}$$

$k=2$: $cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-2}) = E[\Delta y_t \, \Delta y_{t-2}]$
$$= E[(\eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\eta_{t-2} + \varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-3})]$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-k}) = 0 \qquad k \geq 2$$

Logo: processo é um MA(1) → FAC ≠ 0 p/ k = 1
(Δy_t) FAC = 0 p/ k ≥ 2.

Obs: se Δy_t é MA(1)
⇒ y_t é ARIMA (0,1,1)
↓
1ª diferença cas vira MA

Obs: modelos ARMA

$$MA(q) \Rightarrow \rho(k) = \begin{cases} \neq 0 & k = 1, 2, \ldots, q \\ = 0 & k = q+1, \ldots \end{cases}$$

$$AR(q) \Rightarrow \rho(k) = \begin{cases} \text{exponencial ou} \\ \text{senóide amortecida} \end{cases}$$

$$FAC: \rho(k) = \frac{cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-k})}{var(\Delta y_t)}$$

Continuando...

→ Devemos tomar um ARMA genérico e identificar parâmetros e equações p/ calculá-los ($E(\cdot)$, $var(\cdot)$, $cov(\cdot)$ etc.)

No caderno:

Seja $Z_t \sim MA(1) \Rightarrow Z_t = \omega_t + \theta\omega_{t-1}$, $\omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2)$

$$\begin{cases} E[Z_t] = 0 \\ var[Z_t] = (1+\theta^2)\sigma_\omega^2 \\ \gamma(1) = E[Z_t \cdot Z_{t-1}] = \theta\sigma_\omega^2 \Rightarrow \rho(1) = \dfrac{\theta}{(1+\theta^2)} \end{cases}$$

obs p/ MA1

- $E[Z_t^2] = E[(\omega_t + \theta\omega_{t-1})^2]$

$$= E[\omega_t^2 + \theta^2\omega_{t-1}^2 + \theta\omega_t\omega_{t-1}]$$

$$= E(\omega_t^2) + \theta^2 E[\omega_{t-1}^2] = \sigma_\omega^2(1+\theta^2)$$

- $E[Z_t \cdot Z_{t-1}] = E[(\omega_t + \theta\omega_{t-1})(\omega_{t-1} + \theta\omega_{t-2})]$

$$= \theta\sigma_\omega^2$$

Temos então que

para Δy_t

$E[\Delta y_t] = 0$

$Var[\Delta y_t] = -\sigma_\varepsilon^2$

$$\rho_{\Delta y_t}(1) = \frac{-\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\eta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2} = \frac{-1}{q+2}$$

($\div$ por σ_ε^2) onde $q = \dfrac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\varepsilon^2}$

$\Downarrow$

2 parâmetros: q, σ_ε^2

e 2 eqs p/ determinar (var e $\rho(1)$)

para Z_t

$E[Z_t] = 0$

$var[Z_t] = (1+\theta^2)\sigma_\omega^2$

$$\rho_{Z_t}(1) = \frac{\theta}{(1+\theta^2)}$$

$\Downarrow$

2 parâmetros: θ, σ_ω^2

e 2 eqs. p/ determinar (var e $\rho(1)$)

Queremos verificar que tipo de restrições a forma reduzida do ME implica no seu ARMA equivalente

ou seja p/ Δy_t: $0 < q < \infty$ } como se relacionam?
p/ Z: $-1 < \theta < 1$

Igualando as FAC's:

$$\frac{\theta}{(1+\theta^2)} = \frac{-1}{q+2} \Rightarrow \theta(q+2) = -(1+\theta^2)$$

$$\theta^2 + (q+2)\theta + 1 = 0$$

$$\theta = -\frac{(q+2) \pm \sqrt{(q+2)^2 - 4}}{2} \quad \text{onde } q \in (0, \infty)$$

Fazendo $q \to 0$: $\theta = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$

$q \to \infty$: $\theta = 0$ (usar truque algébrico) Fazer

Logo: Espaço Paramétrico será restrito: $-1 < \theta < 0$.

Obs 1: Se realmente acreditamos que o modelo que melhor se adequa é um MNL, isto implica em $\Delta y_t \sim MA(1) \Rightarrow$ restrição sobre θ é natural.

Obs 2: Se supusermos

$$E[\varepsilon_t \eta_s] = \sigma^2_{\varepsilon\eta} \quad \text{(não são mais descorrelatados)}$$

calculemos novamente $E(\Delta y_t)$, $var(\Delta y_t)$, $\gamma_{\Delta y_t}(1)$

$$\Delta y_t = \eta_t + \Delta \varepsilon_t$$

$\Rightarrow$ • $E[\Delta y_t] = 0$ (não é afetado pela nova hipótese)

• $var[\Delta y_t] = E[(\Delta y_t)^2] =$

$= E[\eta_t^2 + (\Delta\varepsilon_t)^2 + 2\eta_t \Delta\varepsilon_t] =$

$= E[\eta_t^2] + E[(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2] + 2E[\eta_t(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})] =$

$= \sigma^2_\eta + 2\sigma^2_\varepsilon + 2\sigma_{\varepsilon\eta}$ — dúvida (não é apenas $\sigma_{\varepsilon\eta}$)

• $\gamma_{\Delta y_t}(1) = E[\Delta y_t \, \Delta y_{t-1}]$

$= E[(\eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\eta_{t-1} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})]$

$= -\sigma^2_\varepsilon$ (tb não é afetado por ~~nova~~ suposições)

Temos:

Para Δy_t:
3 parâmetros
$\sigma^2_\eta, \sigma^2_\varepsilon, \sigma_{\varepsilon\eta}$

Para z_t
2 parâmetros
θ e σ^2_ω

$\Rightarrow$ modelo com covariância entre os choques não é identificável

Obs 3: Conceito de modelo identificável: diz respeito a estimar os parâmetros (não é a mesma coisa de observável, que tem a ver com as componentes).

- FORMA UCARIMA

Representa um passo intermediário entre a forma estrutural e a reduzida.

Para o MNL:

$\Delta y_t = \eta_t + \Delta \varepsilon_t$

$\therefore\ y_t = \underbrace{\frac{\eta_t}{\Delta}}_{\text{tendência}} + \varepsilon_t$

$y_t = T_t + \varepsilon_t \Rightarrow$ componentes tendência e irregular

Para T_t, temos:

$T_t = \frac{\eta_t}{\Delta} \therefore \Delta T_t = \eta_t \therefore T_t = T_{t-1} + \eta_t \Rightarrow$ tendência é um passeio aleatório (ARIMA (0,1,0))

Obs: Utilidade da forma UCARIMA está na possibilidade de representar um modelo de CNO como a soma de processos ARIMA (p,d,q)

b) Modelo de Tendência Local

Tendência linear estocástica, adequado p/ capturar tendências em ST de agregados macroeconômicos (PIB, Prod. Ind.), séries associadas a crescimento populacional, preços e salários (nominais) etc.

—

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t & \varepsilon_t \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2) \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t & \eta_t \sim N(0,\sigma_\eta^2) \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t & \zeta_t \sim N(0,\sigma_\zeta^2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ μ_t é a tendência (nível + inclinação)

$\Rightarrow$ β_t é a inclinação estocástica (crescimento do nível)

onde $E[\varepsilon_t \eta_s] = E[\eta_t \zeta_s] = E[\varepsilon_t \zeta_s] = 0 \quad \forall\, t, s$

$E[\varepsilon_t \alpha_0] = E[\eta_t \alpha_0] = E[\zeta_t \alpha_0] = 0$

e $\alpha_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_0 \sim N(a_0, P_0)$

- Razões sinal ruído

Nesse caso, definimos 2 razões sinal ruído, uma p/ cada componente do MLL

$$q_\eta = \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\varepsilon^2} \qquad q_\zeta = \frac{\sigma_\zeta^2}{\sigma_\varepsilon^2}$$

$\Rightarrow$ Interpretação das componentes

- μ_t: é a tendência linear estocástica da série (+ complicada do que apenas um RW)
  é modificada por 2 choques: σ_η^2 e σ_ζ^2

- β_t: é a inclinação estocástica da série
  se a série estiver em log $\Rightarrow$ $100\beta_t\%$ é a tx. de crescimento instantâneo de y_t

Casos particulares

(i) $\sigma_\eta^2 = \sigma_\zeta^2 = 0$

Tendência se torna determinística

$\Rightarrow y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$ onde $\alpha = \mu_0$ e $\beta = \beta_0$

pois: $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$

$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1}$ $\rightarrow$ $\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_0$ $\therefore$ $\mu_1 = \mu_0 + \beta_0$

$\beta_t = \beta_{t-1} = \beta_0$

$\mu_2 = \mu_1 + \beta_0 = \mu_0 + 2\beta_0$

$\vdots$

$\mu_t = \mu_0 + t\beta_0$

$\Rightarrow y_t = \mu_0 + \beta t + \varepsilon_t$

obs: Se fizermos estimativa e obtivermos $\sigma^2 = 10^{-5}$ (muito baixa)
$\Rightarrow$ pode-se desconsiderar estocasticidade da componente

(ii) $\sigma_\zeta^2 = 0$, $\sigma_\eta^2 \neq 0$

$$\Rightarrow \mu_t = \mu_{t-1} + \beta + \eta_t$$: RW com drift

$\beta_t = \beta_{t-1} = \beta$

(iii) $\sigma_\eta^2 = 0$, $\sigma_\zeta^2 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} \rightarrow \mu_t \text{ dita tendência suave} \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \end{cases}$$

Se tiramos a 1ª e a 2ª diferenças:

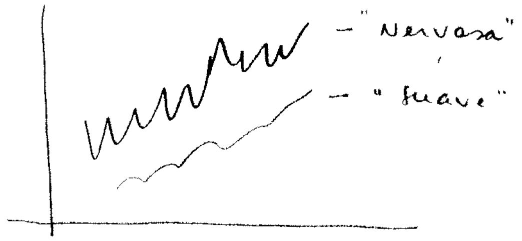
$$\Delta\mu_t = \beta_{t-1}$$

$$\Delta^2\mu_t = \Delta\beta_{t-1} = \zeta_{t-1}$$

$\Rightarrow$ Processo terá tendência suave.

A 2ª derivada da componente de tendência é um ruído bco. Portanto, tendência é uma "integral" dupla de um RB, o que a torna suave, pois cada operação de integral equivale a um filtro passa baixo. (estuda)

(elimina componentes de alta frequência)



$$\frac{d^2\mu_t}{dt^2} = \zeta_t \Rightarrow \mu_t = \iint \zeta_{t-1}\, dt$$

obs (Relação com filtro HP $\Rightarrow$ depois)

$\rightarrow$

- Forma de Espaço de Estado

$$y_t = (1 \quad 0)\begin{pmatrix}\mu_t \\ \beta_t\end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\mu_t \\ \beta_t\end{pmatrix}}_{\alpha_t:\, m\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{T:\, m\times m}\begin{pmatrix}\mu_{t-1} \\ \beta_{t-1}\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{R:\, m\times r}\underbrace{\begin{pmatrix}\eta_t \\ \zeta_t\end{pmatrix}}_{r\times 1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t \\ \alpha_t = T\alpha_{t-1} + \eta_t \end{array}\right.$$

Obs: Nesse caso $m=r$, ou seja, número de choques é igual ao número de componentes (mas poderia ser menor).

- Funçaõ de previsaõ

(Naõ tem a ver c/ FK, vem a partir da equaçaõ do modelo)

Duas formas de fazer:

I) $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$

$$y_{t+k} = \mu_{t+k} + \varepsilon_{t+k}$$

$$\therefore \hat{y}_{t+k|t} = E[y_{t+k} \mid \underset{\sim}{Y}_t] =$$
$$= E[\mu_{t+k} \mid \underset{\sim}{Y}_t] + \underbrace{E[\varepsilon_{t+k} \mid \underset{\sim}{Y}_t]}_{0}$$

Iterando μ_t:

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$$
$$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_{t+1}$$
$$\mu_{t+2} = \mu_{t+1} + \beta_{t+1} + \eta_{t+2}$$
$$= \mu_t + \beta_t + \beta_{t+1} + \eta_{t+1} + \eta_{t+2}$$
$$\vdots$$
$$\mu_{t+k} = \mu_t + \sum_{i=0}^{k}\beta_{t+i} + \sum_{i=1}^{k}\eta_{t+i}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+k|t} = E[\mu_{t+k} \mid \underset{\sim}{Y}_t] =$$
$$= \underbrace{E[\mu_t \mid \underset{\sim}{Y}_t]}_{\hat{\mu}_{t|t}} + \sum_{i=0}^{k}\underbrace{E[\beta_{t+i} \mid \underset{\sim}{Y}_t]}_{\hat{\beta}_{t|t}}$$
$$= \hat{\mu}_{t|t} + k\,\hat{\beta}_{t|t}$$

II) $y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t$

$$\hat{y}_{t+k|t} = Z\, E[\alpha_{t+k} | \underset{\sim}{y_t})$$

Temos que, iterando:

$$\alpha_t = T\alpha_{t-1} + \eta_t$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{t+k} = T^k \alpha_t + (\dots \times \eta_{t+k})$$

$$\therefore E[\alpha_{t+k} | \underset{\sim}{y_t}) = T^k \underbrace{E[\alpha_t | \underset{\sim}{y_t})}_{\text{vem do FK}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k} \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{t|t} \\ \hat{\beta}_{t|t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{t|t} \\ \hat{\beta}_{t|t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{t|t} + k\hat{\beta}_{t|t} \\ \hat{\beta}_{t|t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+k|t} = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{t|t} + k\hat{\beta}_{t|t} \\ \hat{\beta}_{t|t} \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \boxed{\hat{y}_{t+k|t} = \hat{\mu}_{t|t} + k\hat{\beta}_{t|t}}$$

$\Rightarrow$ equação de tendência linear

Fazer $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} \hat{\mu}_{t|t} \\ \hat{\beta}_{t|t} \end{matrix}\right\}$ serão dadas por amortecimento exponencial simples.

<u>Obs</u>: Nessas equações, trabalharemos com $\hat{\Psi}$ (hiperparâmetros fixos conhecidos, estimados) $\Rightarrow$ plug-in

A incerteza a respeito de $\hat{\Psi}$ não é transmitida para as componentes calculadas com FK.

- <u>MSE da previsão</u>

$$MSE[\hat{y}_{t+k|t}) = E[y_{t+k} - \hat{y}_{t+k|t}]^2$$

Para este modelo:

$$y_{t+k} = \mu_{t+k} + \varepsilon_{t+k}$$

$$\hat{y}_{t+k|t} = \hat{\mu}_{t|t} + k\hat{\beta}_{t|t}$$

$$\Rightarrow \quad MSE[\hat{y}_{t+k|t}] = E\left[\left(\mu_{t+k} + \varepsilon_{t+k} - \hat{\mu}_{t|t} - k\hat{\beta}_{t|t}\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\left(\left(\mu_{t+k} - \hat{\mu}_{t|t}\right) + \varepsilon_{t+k} - k\hat{\beta}_{t|t}\right)^2\right]$$

$$= \quad \dots$$

fazer

Matricialmente, temos:

$$\cdot \; MSE[\hat{y}_{t+k|t}] = E\left[\left(Z\alpha_{t+k} + \varepsilon_t - Z\alpha_{t+k|t}\right)^2\right]$$

$$= E\left[Z(\alpha_{t+k} - \alpha_{t+k|t})(\alpha_{t+k} - \alpha_{t+k|t})' Z'\right] + \sigma_\varepsilon^2$$

$$= Z \underbrace{E\left[(\alpha_{t+k} - \alpha_{t+k|t})(\alpha_{t+k} - \alpha_{t+k|t})'\right]}_{MSE[\hat{\alpha}_{t+k|t}]} Z' + \sigma_\varepsilon^2$$

fazer.

Iterando $\hat{\alpha}_{t+k|t} = T^s \alpha_{t|t} + \Sigma$

$$\Rightarrow \quad MSE[\hat{y}_{t+k|t}] = Z T^s P_{t|t} T^{s'} Z'$$

fazer

- Forma reduzida

Relembrando: o objetivo é obter modelo estacionário e ver se pode ser escrito como modelo ARIMA.
Nesse caso, ver qual modelo ARIMA pode representar o ME e verificar questões do modelo ser identificável.

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \end{cases}$$

- Tomando 1ª diferença:

$$\Delta y_t = \Delta \mu_t + \Delta \varepsilon_t$$

$$\Delta \mu_t = \beta_{t-1} + \eta_t$$

$$\Delta \beta = \zeta_t$$

$$\therefore \quad \Delta y_t = \beta_{t-1} + \eta_t + \Delta \varepsilon_t$$ (ainda não é estac. por causa de β_{t-1})
β_t é um RW

- Tomando 2ª diferença:

$$\Delta^2 y_t = \Delta \beta_{t-1} + \Delta \eta_t + \Delta^2 \varepsilon_t$$

$$= \zeta_{t-1} + \Delta \eta_t + \Delta^2 \varepsilon_t$$ $\Rightarrow$ é estacionário
só há RB do lado direito

- Agora precisamos identificar o modelo ARIMA ao qual se relaciona.
Precisamos calcular FAC's.

Seja $w_t = \zeta_{t-1} + \Delta \eta_t + \Delta^2 \varepsilon_t$

$$\therefore \quad E[w_t] = 0$$

$$\text{var}[w_t] = E\left[(\zeta_{t-1} + \eta_t - \eta_{t-1} + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})^2\right]$$ (atenção!)

$$= \text{var}[\zeta_{t-1}] + 2\,\text{var}[\eta_t] + 6\,\text{var}[\varepsilon_t] =$$

$$= \sigma_\zeta^2 + 2\sigma_\eta^2 + 6\sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{cov}(w_t, w_{t-k})$$
$\hookrightarrow$ fazendo $k = 1, 2, 3 \ldots$

$$\cdot\ cov[w_t \cdot w_{t-1}] = E\,[(\zeta_{t-1} + \Delta\eta_t + \Delta^2\varepsilon_t)(\zeta_{t-2} + \Delta\eta_{t-1} + \Delta^2\varepsilon_{t-1})]$$

$$= E[(\zeta_{t-1} + \eta_t - \eta_{t-1} + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})(\zeta_{t-2} + \eta_{t-1} - \eta_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - 2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3})]$$

$$= -\sigma_\eta^2 - 4\sigma_\varepsilon^2$$

$$\cdot\ cov(w_t \cdot w_{t-2}) = E\,[(\zeta_{t-1} + \eta_t - \eta_{t-1} + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})(\zeta_{t-3} + \eta_{t-2} - \eta_{t-3} + \varepsilon_{t-2} - 2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-4})]$$

$$= \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow\quad cov[w_t, w_{t-k}) = \begin{cases} -\sigma_\eta^2 - 4\sigma_\varepsilon^2 & , k=1 \\ \sigma_\varepsilon^2 & , k=2 \\ 0 & , k \geq 3 \quad \Rightarrow MA(2) \end{cases}$$

Logo: $w_t = \Delta^2 y_t \sim MA(2)$

$\Rightarrow y_t \sim ARIMA(0,2,2)$ com 3 hiperparâmetros: $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\zeta^2$

<u>obs</u>: Para as correlações em funçaõ de q_η e q_ζ, temos:

$$\rho(k) = \frac{cov(w_t, w_{t-k})}{var(w_t)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-\sigma_\eta^2 - 4\sigma_\varepsilon^2}{2\sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 + 6\sigma_\varepsilon^2} = \dfrac{-q_\eta - 4}{2q_\eta + q_\zeta + 6} & k=1 \\ = \dfrac{1}{2q_\eta + q_\zeta + 6} & k=2 \\ = 0 & k \geq 3. \end{cases}$$

$\cdot$ Seja $z_t \sim MA(2)$

$z_t = \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2}$: precisaremos de 3 equações p/ estimar os parâmetros

onde $e_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$\Rightarrow$ var, $\gamma(1)$ e $\gamma(2)$

e igualaremos com as

$E[z_t] = 0$

$var[z_t] = E[z_t^2] = E[(\theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + e_t)^2]$

$= \theta_1^2 \sigma_e^2 + \theta_2^2 \sigma_e^2 + \sigma_e^2 =$

$= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_e^2$

$\gamma_z(1) = E[z_t \cdot z_{t-1}] =$

$= E[(\theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + e_t)(\theta_1 e_{t-2} + \theta_2 e_{t-3} + e_{t-1})] =$

$= \theta_1 \sigma_e^2 + \theta_1 \theta_2 \sigma_e^2 =$

$= (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_e^2$

$\gamma_z(2) = E[z_t \cdot z_{t-2}] =$

$= E[(\theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + e_t)(\theta_1 e_{t-3} + \theta_2 e_{t-4} + e_{t-2})]$

$= \theta_2 \sigma_e^2$

Temos então que

para Δy_t

$E[\Delta y_t] = 0$

$var[\Delta y_t] = \sigma_\zeta^2 + 2\sigma_\eta^2 + 6\sigma_\varepsilon^2$

$= 6 + q_\zeta + 2q_\eta$

$\rho(1) = \dfrac{-(4 + q_\eta)}{6 + q_\zeta + 2q_\eta}$

$\rho(2) = \dfrac{1}{6 + q_\zeta + 2q_\eta}$

$\Downarrow$

Daqui, temos que

$\dfrac{\rho(1)}{\rho(2)} = -(4 + q_\eta)$

para z_t

$E[z_t] = 0$

$var[z_t] = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_e^2$

$\gamma(1) = (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_e^2$

$\gamma(2) = \theta_2 \sigma_\varepsilon^2$

$\Downarrow$

Daqui, temos que

$\dfrac{\rho(1)}{\rho(2)} = \dfrac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{\theta_2}$

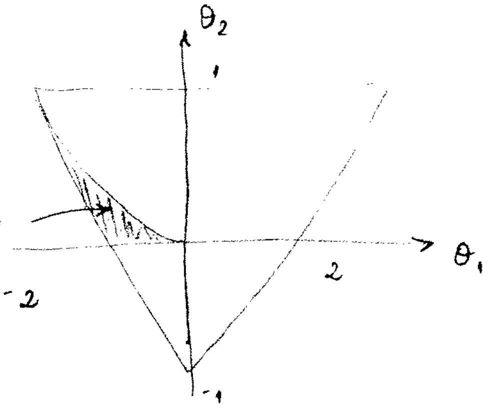
$\theta_1 \dfrac{(1 + \theta_2)}{\theta_2} = -(4 + q_\eta)$

Para que o MA(2) seja invertível, temos algumas restrições sobre os parâmetros θ_1 e θ_2.

$$z_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2)\, \omega_t$$

$$\Rightarrow \Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 = 0 \equiv |L_i| > 1 \quad , i = 1, 2$$

se mapearmos esta restrição no plano $\theta_1 \times \theta_2$



colocando restrições de igualdade com o MLL

- Se acharmos então θ_1 e θ_2 fora da região hachurada

$\Rightarrow$ não será bom aproximar modelo por MLL

- Para os casos particulares do MLL:

  - se $\sigma^2_\zeta = 0$ (inclinação fixa) $\Rightarrow$ $\dfrac{\theta_1 (1+\theta_2)}{\theta_2} = -4$

θ_1, θ_2 estarão na região de não invertibilidade

  - se $\sigma^2_\zeta > 0$ e $\sigma^2_\eta = 0$ (tendência suave) $\Rightarrow$ modelo sempre invertível

provar!

→ FORMA UCARIMA

fazer

Outros modelos de tendência estocástica

Podemos estender este procedimento p/ outros modelos de tendência.

- quadrática
- amortecida
- curva de crescimento.

Ex: Tendência linear amortecida

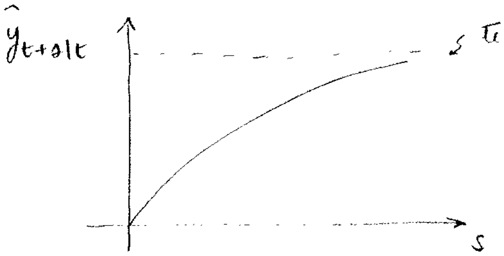
$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$$

$$\beta_t = \phi \beta_{t-1} + \zeta_t \Rightarrow AR(1) \qquad |\phi|<1.$$

Demonstra-se que função de previsão deste modelo é:

$$\hat{y}_{t+s|t} = \hat{\mu}_t + \hat{\beta}_t \left[\frac{(1-\phi^s)}{1-\phi} \right] \longrightarrow \text{Fazer}$$



terá valor assintótico. (ver lista 2)

Pode sempre trabalhar com esta forma e deixar que ϕ seja estimado (se $\phi = 1$, não há valor assintótico).

ϕ aparecerá na matriz T: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$

Notas de aula IV (final 11/05 e aula 18/05 e aula 25/05)

- Sazonalidade: flutuações periódicas dentro do período de 1 ano
  - período + ou - regular
  - associadas a clima ou convenções sociais

- s: período de sazonalidade
  tempo que flutuação leva p/ se repetir

  4: séries trimestrais
  12: " mensais
  52: " semanais

Obs: se a série for diária, pode haver + de um tipo de sazonalidade ($s = 365$, diária e $s = 7$, semanal)

- Diferença entre sazonalidade e ciclo: no período

sazonalidade: dentro de 1 ano; questões climáticas e sociais

ciclo: periodicidade e amplitude não são tão bem definidos (ex: ciclos econômicos). P/ fenômenos naturais, há + regularidade.

- Componente sazonal pode ser indesejável.
  O que é sazonal ⇒ é esperado.
  pode ser necessário retirar da série p/ ter + clareza na visualização de outras componentes (ex: tendência)

- Ajustamento sazonal ou dessazonalização:
  processo de retirada/filtragem da comp. sazonal de uma ST

$$y_t^{(a)} = y_t - \gamma_t$$ → p/ saber se série foi dessazonalizada ⇒ ver pela FAC se há ciclo em $k = 12$ ~~estudar~~

Atenção: $y_t^{(a)}$ não é a tendência!
Ainda há o erro

$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \Rightarrow y_t^{(a)} = \mu_t + \varepsilon_t$: picos de sazonalidade retirados da série, mas μ_t sozinho é

• Procedimentos p/ ajuste:

- model based: modelos estruturais (SEATS/TRAMO)
- métodos semi-heurísticos: X12 ARIMA – (IBGE)

• Escalas da sazonalidade:

aditiva, multiplicativa ou mista

1) Aditiva: padrão nos modelos lineares

amplitude se mantém ± constante ao longo do tempo.

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$$

↳ comp. sazonal ou fator sazonal

$$\therefore\ y_t^{(a)} = y_t - \hat{\gamma}_t = \hat{\mu}_t + \hat{\varepsilon}_t$$

2) Multiplicativa: padrão X12 ARIMA

amplitude aumenta ao longo do tempo (ex: série Airline)

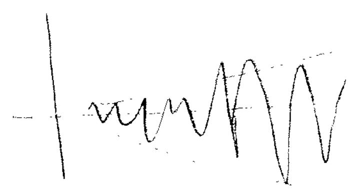
modelo não linear (pois componentes se multiplicam), mas pode ser obtido modelo linear ajustando p/ o log da série.

$$y_t = \mu_t \cdot \gamma_t \cdot \varepsilon_t$$

$$\therefore\ y_t^{(a)} = \frac{y_t}{\hat{\gamma}_t} = \hat{\mu}_t \cdot \hat{\varepsilon}_t$$

Obs: se não souber se modelo a priori é aditivo ou multiplicativo, usa aditivo p/ y_t e faz teste a posteriori com resíduos.

Se obtiver p/ resíduos:



⇒ precisa usar log (variância no final da série é maior)

⇒ transformando multiplicativo em aditivo

$$\ln y_t = \ln \mu_t + \ln \gamma_t + \ln \varepsilon_t$$

$$\therefore\ y_t' = \mu_t' + \gamma_t' + \varepsilon_t' \quad \text{(modelo efetivamente ajustado)}$$

Mas queremos: dessazonalizar a série original, não o seu log.

$$y_t^{(a)} = \underbrace{\frac{y_t}{\gamma_t}}_{\mu_t \cdot \varepsilon_t} = \frac{\exp(y_t')}{\exp(\hat{\gamma}_t')}$$

Obs: Interpretação do fator sazonal multiplicativo γ_t

$$100\left(\frac{\hat{y}_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\mu}_t}\right) = 100\left(\frac{\hat{\gamma}_t\hat{\mu}_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\mu}_t}\right) = 100(\hat{\gamma}_t - 1) = 100(e^{\hat{\gamma}_t'} - 1)$$

Ex: ajustando um ME ao log da série $\Rightarrow$ encontramos fator sazonal $= 0{,}3 = \hat{\gamma}_t'$

Como $e^{0,3} = 1{,}35 \Rightarrow$ no mês de janeiro a série, em média, tem um aumento de 35% em relação à sua tendência.

$\Rightarrow$ Por que a transformação logarítmica é indicada em algumas situações?

(a) lineariza o modelo (linear nas componentes)

(b) traz simetria aos resíduos: se resíduos possuem dist. assimétrica, transf logarítmica pode torná-la $\cong$ simétrica. contribui p/ ñ rejeição da hipótese de normalidade.

(c) muda a escala

Não é importante p/ ME

se $y_t \sim I(1)$

$\Delta \log y_t \sim I(0)$: é estacionário

$$\Delta \log y_t = \log\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right) = \log\left(1 + \Delta y_t / y_{t-1}\right)$$

$$\cong \Delta y_t / y_{t-1} \quad \text{se } \Delta y_t << y_{t-1}$$

$\Rightarrow$ escala passa a ser de variação relativa ou %

(d) estabiliza a variância:

para um tipo especial de heterocedasticidade, a transf. logarít. estabiliza a variância

Prova: supor

$$y_t = \mu_t \gamma_t \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim \text{lognormal}\left(\exp\left(\tfrac{1}{2\sigma^2}\right), \exp(2\sigma^2) - \exp(\sigma^2)\right)$$

$\Rightarrow$ • $E[y_t|\mu_t\gamma_t] = \mu_t\gamma_t\, E[\varepsilon_t]$

$= \mu_t\gamma_t \exp(1/2\sigma^2)$

• $var[y_t|\mu_t\gamma_t] = (\mu_t\gamma_t)^2[\exp(2\sigma^2) - \exp(\sigma^2)]$

$= (\mu_t\gamma_t)^2 \exp(\sigma^2)[\exp(\sigma^2) - 1]$

$\propto E[y_t|\mu_t\gamma_t]^2$ dúvida

ou seja:

Na escala original $\Rightarrow$ y é heterocedástica

Qual a transf. adequada p/ estabilizar a variância de y?

Seja a transf.

$z_t = h(y_t)$

$var(z_t|\mu_t\gamma_t) = var(h(y_t|\mu_t\gamma_t))$

Expansão de Taylor em torno de $w_t = E[y_t|\mu_t\gamma_t]$

$\Rightarrow$ $z_t = h(y_t) \simeq \underset{cte}{h(w_t)} + h'(w_t)(y_t - w_t)$

$var(h(y_t)|\mu_t\gamma_t) \simeq [h'(w_t)]^2 \cdot var[y_t|\mu_t\gamma_t] = cte.$ (é o que queremos)

Se escolhermos $z_t = \log(y_t)$

$\therefore h(w_t) = \log(w_t)$

$\Rightarrow$ $var(\log(y_t)|\mu_t\gamma_t) = \left[\frac{1}{w_t}\right]^2 var[y_t|\mu_t\gamma_t] \propto E[y_t|\mu_t\gamma_t]^2$

dúvida

<u>Conclusão</u>: Transformação logarítmica estabiliza a variância se a lei da variância for do tipo

$var[y_t|\mu_t\gamma_t] \propto E[(y_t)|\mu_t\gamma_t]^2.$

— " —

$\rightarrow$ Cada mês tem fator sazonal $\Rightarrow$ sazonalidade determinística
(conceito que varia entre os meses do ano)

$\rightarrow$ Fatores a cada mês variam, são dinâmicos, $\Rightarrow$ sazonalidade estocástica
(varia p/ o mesmo mês)

$\Rightarrow$ benefício de se trabalhar com MLG

aula 18/05

Tratamento de Sazonalidade em Modelos Estatísticos

obs: • Primeiro trataremos no contexto determinístico.
(será caso particular da estocástica quando $\sigma^2 \to 0$)

• No caso de ST, usamos p. ex ARIMA 12

$$y_t = \phi y_{t-1} + \underbrace{\phi_{12} y_{t-12}} + \varepsilon_t$$

sazonalidade é tratada internamente
não dá p/ filtrar ⇒ não usaremos no contexto MEE

⇒ Três procedimentos p/ o controle da sazonalidade

(i) variáveis dummy
(ii) funções trigonométricas
} apenas estes são adequados p/ tratamento nos ME.

(iii) variável endógena defasada: y_{t-s}

1) Sazonalidade por variáveis dummy.

(é o mais simples de ser implementado)

- o coeficiente de cada dummy representa o fator sazonal do mês, trimestre etc. de interesse

Exemplo: Seja ST trimestral ($s=4$)

Modelo inicial seria

$$\begin{cases} y_t = \beta + \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \gamma_4 D_{4t} + \varepsilon_t \quad , t = 1, 2, \dots T \\ D_{it} = 1 \quad \text{se } i = t \quad , i = 1, 2, 3, 4 \\ \quad\quad 0 \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

Não é exatamente $i = t$, mas $t \sim i$

obs: • β intercepto, tratado como uma cte no lugar da tendência (foco agora é na sazonalidade)

• $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$: variáveis explicativas

• uma dummy p/ cada trimestre.

	t	D_{1t}	D_{2t}	D_{3t}	D_{4t}
2010	Q1	1	0	0	0
	Q2	0	1	0	0
	Q3	0	0	1	0
	Q4	0	0	0	1
2011	Q1		⋮		
	Q2		etc.		
	Q3				
	Q4				
	⋮				

$$y_t = \beta + \sum_{j=1}^{4} \gamma_j \cdot D_{jt} + \varepsilon_t$$

$$= (\beta \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4) \begin{pmatrix} 1 \\ D_{1t} \\ D_{2t} \\ D_{3t} \\ D_{4t} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

Problema: Modelo apresenta multicolinearidade perfeita
(um dos regressores pode ser obtido como CL dos outros)

$\Rightarrow$ Não podemos colocar ~~tantas~~ dummies quantos períodos sazonais

Não será possível dessa forma resolver problema por MQ
(matriz $X'X$ não será invertível).

No exemplo:

$$y_t = \beta' x_t + \varepsilon_t \quad , \; t = 1, 2, \dots T$$

onde $\beta' = (\beta \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4)$

$$x_t = \begin{pmatrix} 1 \\ D_{1t} \\ D_{2t} \\ D_{3t} \\ D_{4t} \end{pmatrix}$$

$$Y_{T\times 1} = X_{T\times K} \cdot \beta_{K\times 1} + \varepsilon_{T\times 1}$$: Na notação matricial

onde: $X = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & X_{2T} & X_{3T} & \cdots & X_{kT} \end{bmatrix}$

No exemplo: $X_{kt} = (1 \quad D_{1t} \quad D_{2t} \quad D_{3t} \quad D_{4t})$

Supondo $T = 6$: 6 observações, temos:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & D_{11} & D_{21} & D_{31} & D_{41} \\ 1 & D_{12} & D_{22} & D_{32} & D_{42} \\ 1 & D_{13} & D_{23} & D_{33} & D_{43} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & & & & \\ 1 & D_{16} & D_{26} & D_{36} & D_{46} \end{pmatrix}^{T \quad K}_{6\times 5}$$

$$\therefore \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{6\times 5}$$

$\Rightarrow X_{1t} = X_{2t} + X_{3t} + X_{4t} + X_{5t} \quad \forall t$

multicolinearidade perfeita entre os regressores

Soluçaõ de MQO para o estimador é:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} T & \Sigma X_{2t} & \Sigma X_{3t} & \cdots & \Sigma X_{kt} \\ \Sigma X_{2t} & \Sigma X_{2t}^2 & \Sigma X_{2t}X_{3t} & \cdots & \Sigma X_{2t}X_{kt} \\ \vdots & & & & \\ \Sigma X_{kt} & & \cdots & & \Sigma X_{kt}^2 \end{pmatrix}$$

: somas de 0 e 1.

$\Rightarrow$ primeira linha da matriz $X'X$ será = soma das outras linhas

No ex: $X'X = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nexists (X'X)^{-1}$

Para evitar multicolinearidade perfeita

⇒ introduzir algum tipo de restrição nos parâmetros do modelo.

∴ Resulta em diferentes parametrizações

Os parâmetros são os γ's (fatores sazonais). ⇒ Haverá alguma relação entre eles.

Cada parametrização irá estimar γ's a partir de um patamar ≠

Poder preditivo e previsões serão os mesmos independente da parametrização.

⇒ Dependendo do nível tomado como referência, parâmetros serão diferentes, mas previsões serão as mesmas.

(a) Parametrização 1

restrição $\boxed{\text{Faz um dos coeficientes } \gamma_j = 0}$

⇒ uma das dummies terá sua regressão abandonada

A escolha de qual é arbitrária

Se abandonarmos D_{4t} (dummy do 4º trimestre), temos:

modelo: $y_t = \beta + \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \varepsilon_t \quad , t = 1, 2, \ldots, T$

obs: Fazemos $\gamma_4 = 0$ ∴ $D_{4t} = 0 \ \forall t$.

4º trimestre é caracterizado qdo $D_{1t} = D_{2t} = D_{3t} = 0$ ($D_{4t} = 1$) corresponderia a

Se refizermos contas ⇒ não haverá + multicolinearidade perfeita

$$D_{jt} = \begin{cases} 1 & t = j,\ j+s,\ j+2s, \ldots, \quad j = 1, 2, 3 \\ 0 & t \neq j,\ j+s,\ j+2s \ldots \end{cases}$$

obs: Sob Normalidade, estimador MV = estimador MQO

Pelo método dos momentos: fazer

- Para o 4º trimestre:

$$E[y_t \mid \underset{\sim}{x}_t] = E[y_t \mid D_{1t}, D_{2t}, D_{3t} = 0] = \beta$$

$$\therefore \boxed{\hat{\beta} = \bar{y}_4}$$

onde $\bar{y}_j$: média amostral do trim.

- Para os outros trimestres

$$E[y_t \mid D_{jt} = 1] = \beta + \gamma_j \ \therefore \ \hat{\gamma}_j = \bar{y}_j - \beta \ \therefore \boxed{\hat{\gamma}_j = \bar{y}_j - \bar{y}_4} \quad j = 1, 2, 3$$

- Para os trimestres (exceto 4º).

$$E[y_t \mid D_{jt}] = \alpha + \theta_j \quad \therefore \quad \hat{\theta}_j = E[y_t \mid D_{jt}] - \alpha \qquad j = 1, 2, 3$$

- Para o 4º trimestre

$$E[y_t \mid D_{4t}] = \alpha - \underbrace{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}_{\theta_4} = \alpha + \theta_4 \quad \therefore \quad \hat{\theta}_4 = E[y_t \mid D_{4t}] - \alpha$$

Restrições:

como $\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4 = 0$

$$\Rightarrow \left(E[y_1 \mid D_{1t}] - \alpha\right) + \left(E[y_2 \mid D_{2t}] - \alpha\right) + \left(E[y_3 \mid D_{3t}] - \alpha\right) + \left(E[y_4 \mid D_{4t}] - \alpha\right) = 0$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{4} E[y_t \mid D_{jt}] - 4\alpha = 0.$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} E[y_t \mid D_{jt}]$$

Pelo método dos momentos:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} \bar{y}_j \qquad \text{onde } \bar{y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{t=1}^{n_j} y_t^{(j)}$$: média amostral no trimestre j

Obs: usamos n_j pois podemos ter uma amostra desbalanceada (pode ter nº diferente de obs p/ 1º, 2º, 3º, 4º tri)

Obs: Média total da série

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} y_t \qquad \text{onde } n = \sum_{j=1}^{4} n_j$$

Se amostra for balanceada: $\bar{y} = \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} \bar{y}_j}_{\hat{\alpha}}$

Nesse caso: $\hat{\alpha} = \bar{y}$

Ou seja:

$$\hat{\theta}_j = E[y_t \mid D_{jt}] - \alpha, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$\therefore \boxed{\hat{\theta}_j = \bar{y}_j - \bar{y} \qquad j = 1, 2, 3, 4}$$ $\Rightarrow$ fator sazonal de cada trimestre é medido em relação à média da série

ATENÇÃO: Ver observação de exs. numéricos pg. 15, 16, 17, 18

⇒ Na verdade:

$\hat{\beta}$: média aritmética do 4º tri

Nos outros trimestres ⇒ vê-se há flutuação sazonal
(em relação ao 4º tri, trimestre basal)

(b) Parametrização 2

Restrição | Abandona o intercepto | e coloca uma dummy p/ cada período

(Mesma estrutura anterior, mas agora sai intercepto)

Modelo. $y_t = \delta_1 D_{1t} + \delta_2 D_{2t} + \delta_3 D_{3t} + \delta_4 D_{4t} + \varepsilon_t$ (Fatores sazonais renomeados como δ's)

$$D_{jt} = \begin{cases} 1 & t=j,\ t=j+s,\ t=j+2s \ \cdots \quad j=1,2,3,4 \\ 0 & t\neq j,\ t\neq j+s,\ t\neq j+2s \ \ldots \end{cases}$$

Fazer

Pelo método dos momentos:

Para todos os trimestres

$$E[y_t \mid D_{jt}] = \delta_j \Rightarrow \hat{\delta}_j = \bar{y}_j \quad , j=1,2,3,4$$

onde $\bar{y}_j$ é a média amostral de cada tri.

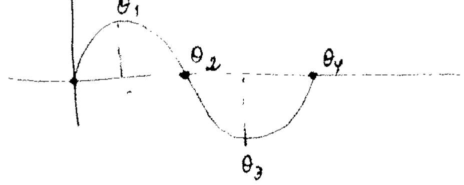
(c) Parametrização 3

Restrição | A soma dos coeficientes de sazonalidade é zero no período sazonal.

$$\sum_{j=1}^{s} \theta_j = 0 \quad \therefore \quad \theta_s = -\left(\sum_{j=1}^{s-1} \theta_j\right) \Rightarrow \text{(Fatores sazonais renomeados como } \theta_j)$$

(É a parametrização adotada nos ME's)

Algo como:



⇒ No período: $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=0$.

Modelo: $y_t = \alpha + \sum_{j=1}^{s-1} \theta_j D_{jt} + \varepsilon_t \quad , t=1,2,\ldots T$

$$D_{jt} = \begin{cases} 1 & t=j,\ j+s,\ldots \\ 0 & t\neq j,\ j+s, \\ -1 & t=s,\ 2s,\ 3s \end{cases}$$

No exemplo, equivale a:

1ºQ: $y_t = \alpha + \theta_1 + \varepsilon_t$

2ºQ: $y_t = \alpha + \theta_2 + \varepsilon_t$

3ºQ: $y_t = \alpha + \theta_3 + \varepsilon_t$

4ºQ: $y_t = \alpha + (-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3) + \varepsilon_t$

$\Rightarrow$ Usando parametrização 3:

O modelo determinístico com restrição dada pela soma dos fatores = 0:

Base p/ introdução da sazonalidade estocástica nos ME.

Determinístico: $\sum_{j=1}^{s}\gamma_j = 0 \;\therefore\; \boxed{\sum_{j=1}^{s-1}\gamma_{t-j} = 0}$ Dúvida $\gamma_s = -\sum_{j=1}^{s-1}\gamma_j$

Estocástico: $\sum_{j=1}^{s-1}\gamma_{t-j} = w_t$, $w_t \sim N(0, \sigma_w^2)$

ou $\gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1}\gamma_{t-j} + w_t$

$\rightarrow$ Para o modelo com MNL e sazonalidade estocástica por dummies a ideia é:

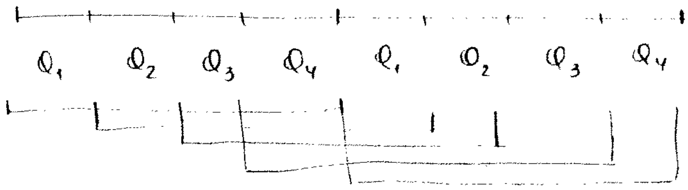
$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \\ \gamma_t = ? \end{cases}$$

$\Rightarrow$ como explicitaremos?

desenvolvendo

O ponto de partida é a parametrização 3:

$$\sum_{j=1}^{s}\gamma_j = 0$$



No caso determinístico, se andarmos sempre 4 tri p/ frente, teremos somatório = 0

Para $s = 4$: $\boxed{\sum_{j=0}^{s-1}\gamma_{t-j} = 0}$

pois $\gamma_t + \gamma_{t-1} + \gamma_{t-2} + \gamma_{t-3} = 0 \;\therefore$ qualquer que seja t, cobrimos o período.

Para os ME, caso de sazonalidade estocástica, teremos:

$$\sum_{j=0}^{s-1} \gamma_{t-j} = \omega_t \quad \text{onde} \quad \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2) \quad : \text{flutuação estocástica}$$

$$\left(\text{onde} \quad E\left[\sum_{j=0}^{s-1} \gamma_{t-j}\right] = 0 \right)$$

obs: γ do ME não corresponde a γ determinístico (que naquele caso eram $\times$ por dummies)

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t} \quad (*)$$

Dummies aqui no ME ficam implícitas

Não teremos mais D_{1t}, D_{2t} etc.

Teremos apenas γ_t correspondente ao período em que estamos trabalhando

P/ o MNL com sazonalidade, teremos:

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \\ \gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t \end{cases}$$

Por ex, supondo dados trimestrais, a ideia da equação $(*)$ é:

t	$t+1$
Q1 2010	Q2 2010
$\gamma_{1,t}$	$\gamma_{2,t+1}$
$\gamma_{2,t}$	$\gamma_{3,t+1}$
$\gamma_{3,t}$	$\gamma_{4,t+1}$
$\gamma_{4,t}$	$\gamma_{1,t+1}$

rearrumando os fatores sazonais no trimestre

como $\gamma_{1,t+1} = -\gamma_{4,t}$ e $\gamma_{1,t} + \gamma_{2,t} + \gamma_{3,t} + \gamma_{4,t} = 0$

$\therefore \gamma_{4,t} = -(\gamma_{1,t} + \gamma_{2,t} + \gamma_{3,t})$,

temos:

$$\begin{cases} \gamma_{1,t+1} = -\gamma_{1,t} - \gamma_{2,t} - \gamma_{3,t} \\ \gamma_{2,t+1} = \gamma_{1,t} \\ \gamma_{3,t+1} = \gamma_{2,t} \end{cases}$$

Na FEE, podemos escrever:

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,t} \\ \gamma_{2,t} \\ \gamma_{3,t} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,t+1} \\ \gamma_{2,t+1} \\ \gamma_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1t} \\ \gamma_{2t} \\ \gamma_{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Na equação (*), teríamos:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t \Rightarrow \gamma_t = -\gamma_{t-1} - \gamma_{t-2} - \gamma_{t-3} + \omega_t$$

$$\underline{\text{ou}} \quad \gamma_{t+1} = -\gamma_t - \gamma_{t-1} - \gamma_{t-2} + \omega_t$$

Na FEE, temos:

$$y_t = \overset{\text{só sazonalidade}}{\gamma_t} + \varepsilon_t$$

$$\gamma_{t+1} = -\gamma_t - \gamma_{t-1} - \gamma_{t-2} + \omega_t$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{t+1} \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nenhuma parametrização}} \begin{pmatrix} \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como sabemos nesse caso quando periodicidade se repete? É pelo nº de defasagens?

obs 1: Esta é a forma + simples de incluir sazonalidade no ME

obs 2: γ_t se refere ao fator sazonal do instante corrente.

obs 3: Se considerarmos tendência $\Rightarrow$ matriz T será diagonal em blocos.

obs 4: Não há influência da componente de tendência na sazonalidade e vice-versa.

Modelo Estrutural Básico (MEB)

MLL + sazonalidade estocástica

$$
\begin{cases}
y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t & \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \\
\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t & \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \\
\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t & \zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2) \\
\gamma_t = \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t & \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2)
\end{cases}
$$

$\Rightarrow$ dimensão dos estados:

$$\underset{\mu_t}{1} + \underset{\beta_t}{1} + \underset{\text{sazonalidade}}{s-1} = s+1$$

onde: $E[\varepsilon_t \eta_s] = E[\varepsilon_t \zeta_s] = E[\varepsilon_t \omega_s] = 0 \quad \forall t, s$?

$E[\varepsilon_t \alpha_0] = E[\eta_t \alpha_0] = E[\zeta_t \alpha_0] + E[\omega_t \alpha_0] = 0 \quad \forall t$

Se $\alpha_t = (\mu_t, \beta_t, \underbrace{\gamma_t, \gamma_{t-1}, \gamma_{t-2}}_{\text{se } s=4:\ \text{entram 3 componentes no vetor de estado}})'$, então $\alpha_0 \sim N(a_0, P_0)$

obs: Ruídos das componentes são descorrelatados entre si. Onde entra a suposição?

Exemplo. Seja $s=4$, a FEE será

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \end{pmatrix} + \varepsilon_t \quad , \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\text{diagonal em blocos}} \begin{pmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \\ \gamma_{t-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \\ \omega_t \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\omega^2 \end{pmatrix}$$

Funções de Previsão

$$\hat{y}_{t+s|t} = E[y_{t+s} | Y_t] = z' E[\alpha_{t+s} | Y_t]$$

$$= z' \alpha_{t+s|t} =$$

$$= \hat{\mu}_{t+s|t} + \hat{\gamma}_{t+s|t}$$

$$= \hat{\mu}_{t|t} + s\hat{\beta}_{t|t} + \hat{\gamma}_{t+s|t}$$

onde $\hat{\gamma}_{t+s|t} = \hat{\gamma}_{t-S+s|t}$ $\quad s = 1, 2, 3, \ldots$

↓

só vai ser projetado p/ aquele período o último fator sazonal estimado p/ um período correspondente.

⇒ o fator sazonal projetado p/ um trimestre é igual à última estimativa obtida pelo FK.

Nas previsões, trabalhamos de forma determinística. É um tipo de amortecimento exponencial onde pesos são calculados por MV

— " —

2) Sazonalidade por Variáveis Trigonométricas

⇒ Aproximar a componente sazonal através de uma soma de séries trigonométricas.

Obs: Teorema de Fourier

$f(t)$ função regular por partes (nº finito de descontinuidades)

⇒ admite expansão em séries trigonométricas

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (\gamma_j \cos jt + \gamma_j^* \operatorname{sen} jt)$$

↳ útil p/ representar funções periódicas, como por exemplo, a componente sazonal de uma ST.

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{S/2} (\gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j t)$$

onde $\lambda_j = 2\pi j / S$, $j = 1, 2, 3, \ldots, S/2$

S : período da série (ex: 4, 12 etc.)

$S/2 = \begin{cases} S/2 & S \text{ par} \end{cases}$

Obs1: No caso de dummies, os γ's são os próprios fatores sazonais variam com o tempo e a leitura dos fatores é direta (γ's $= \gamma_1, \gamma_2 \ldots$)

Obs2. No caso de funções trigonométricas, a leitura do fator sazonal não é direta. A sazonalidade será a soma de senos e cossenos γ_j's serão estimados mas fator sazonal será dado por $\gamma_t = \sum \gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \text{sen}\, \lambda_j$

obs 3. • $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s}$ são os harmônicos

Cada harmônico executa j ciclos completos no período da função

• $\lambda_1 = \frac{2\pi}{s}$ é a frequência fundamental (1º harmônico)

Exemplo: $y_t = \gamma_t + \varepsilon_t$

$(s = 4)$ $\gamma_t = \sum_{j=1}^{2} \left[\gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* \text{sen}(\lambda_j t) \right]$

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{s} = \frac{2\pi j}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot j \qquad j = 1, 2$$

Abrindo expressão para γ_t:

$$\gamma_t = \left[\gamma_1 \cos(\lambda_1 t) + \gamma_1^* \text{sen}(\lambda_1 t) \right] + \left[\gamma_2 \cos(\lambda_2 t) + \gamma_2^* \underbrace{\text{sen}(\lambda_2 t)}_{0} \right]$$

$\lambda_1 = \pi/2$

$\lambda_2 = \pi$ (obs: $\text{sen}(\pi t) = 0 \ \forall t$)

$$\therefore \gamma_t = \left[\gamma_1 \cos(\lambda_1 t) + \gamma_1^* \text{sen}(\lambda_1 t) \right] + \gamma_2 \cos(\lambda_2 t)$$

$$\therefore y_t = \gamma_1 \underbrace{\cos(\lambda_1 t)}_{X_{1t}} + \gamma_1^* \underbrace{\text{sen}(\lambda_1 t)}_{X_{2t}} + \gamma_2 \underbrace{\cos(\lambda_2 t)}_{X_{3t}} + \varepsilon_t$$

⇒ Precisaremos estimar 3 parâmetros associados a sazonalidade (por MQO)

γ_1, γ_1^* e γ_2 ⇒ mesmo nº de parâmetros quando trabalhamos com dummies

obs: γ_1, γ_1^* e γ_2 não são fatores sazonais

Os fatores serão dados por:

$$\gamma_t = \hat{\gamma}_1 \cos \frac{\pi}{2} t + \hat{\gamma}_1^* \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t + \hat{\gamma}_2 \cos \pi t$$

Na série trimestral:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\circ} Q \to t=1 \\ 2^{\circ} Q \to t=2 \\ 3^{\circ} Q \to t=3 \\ 4^{\circ} Q \to t=4 \\ 1^{\circ} Q \to t=5 \end{array}\right\} \text{1 ciclo.}$$

Para $t=1 \Rightarrow \gamma_1$ será o fator sazonal
(que deverá ser numericamente igual no modelo determinístico por dummies da param. iii)

Obs: Qto + bem comportada for a série em relação à sazonalidade, menos harmônicos são necessários p/ compor.
Os 1os harmônicos ditarão o comportamento nesse caso.
Qto + " usarmos ⇒ mais estranho é o comportamento sazonal
(se harmônicos + altos ñ forem muito importantes ⇒ não serão estatisticamente relevantes, mas ñ serão abandonados)

→ Modelo determinístico com tend. e sazonalidade

$$y_t = \underbrace{\beta_1 + \beta_2 t}_{\mu_t} + \underbrace{\sum_{j=1}^{s/2} (\gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j t)}_{\gamma_t} + \varepsilon_t$$

Observações:

- p/ s par e $j = s/2 \Rightarrow \operatorname{sen} \lambda_j t = \operatorname{sen} \pi t = 0 \quad \forall t$ (com $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s}$)

  $\Rightarrow \exists$ apenas $\underset{\text{do cosseno}}{s/2} + (s-1)/2 = s-1$ parâmetros de sazonalidade p/ estimar por MQO (como nas dummies)

- Calculados γ_j e $\gamma_j^* \Rightarrow$ calcula-se fator sazonal

$$\gamma_t = \Sigma (\gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j t)$$

provar

- Se usarmos todos os harmônicos na SF: estimativa por dummies = " na SF...

(ova) • Usando ident trigonométricas, pode-se demonstrar que:

$$\sum_{j=0}^{s-1} \gamma_{t-j} = 0$$

→ **Modelo c/ sf na forma EE**

Precisamos de uma forma recursiva p/ fatores sazonais

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$$

onde $\gamma_t = \sum_{j=1}^{s/2} \gamma_{jt}$ onde $\gamma_{jt} = \gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* \operatorname{sen}(\lambda_j t)$ (a)

Queremos γ_{jt+1} como função de γ_{jt}

• Ainda p/ γ_{jt}, temos:

$$\gamma_{jt} = \begin{cases} \gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* \operatorname{sen}(\lambda_j t) & \text{p/ } j = 1 \text{ a } \frac{s}{2} - 1 \\ \gamma_{s/2} \cos(\lambda_{s/2} t) & \text{p/ } j = s/2 \end{cases} \quad (b)$$

• Fazendo $t = t+1$ na expressão (a) p/ obter fórmula recursiva p/ γ_{jt}

$$\gamma_{jt+1} = \gamma_j \cos \lambda_j (t+1) + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j (t+1)$$

$$= \gamma_j \cos(\lambda_j t + \lambda_j) + \gamma_j^* \operatorname{sen}(\lambda_j t + \lambda_j)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \end{aligned}}$$

$$\gamma_{jt+1} = \gamma_j [\cos \lambda_j t \cos \lambda_j - \operatorname{sen} \lambda_j t \operatorname{sen} \lambda_j] + \gamma_j^* [\operatorname{sen} \lambda_j t \cos \lambda_j + \cos \lambda_j t \operatorname{sen} \lambda_j)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \lambda_j & \operatorname{sen} \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j t \\ -\gamma_j \operatorname{sen} \lambda_j t + \gamma_j^* \cos \lambda_j t \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \gamma_{jt} \\ \Rightarrow \gamma_{jt}^* \end{matrix} \quad (c)$$

(aparece por construção) Não tem significado prático

$$\gamma_{jt+1} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_j & \operatorname{sen} \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma_{jt}^* \end{pmatrix} \quad (d)$$

⇒ fórmula de recursão.

- De forma análoga, fazendo $t = t+1$ em (c) p/ obter fórmula recursiva p/ γ_{jt}^*

$$\gamma_{jt}^* = -\gamma_j \operatorname{sen} \lambda_j t + \gamma_j^* \cos \lambda_j t$$

$$\therefore \gamma_{jt+1}^* = -\gamma_j \operatorname{sen} \lambda_j (t+1) + \gamma_j^* \cos \lambda_j (t+1) =$$

$$= -\gamma_j \operatorname{sen}(\lambda_j t + \lambda_j) + \gamma_j^* \cos(\lambda_j t + \lambda_j) =$$

$$= -\gamma_j \left[\operatorname{sen} \lambda_j t \cos \lambda_j + \operatorname{sen} \lambda_j \cos \lambda_j t\right] + \gamma_j^* \left[\cos \lambda_j t \cos \lambda_j - \operatorname{sen} \lambda_j t \operatorname{sen} \lambda_j\right]$$

$$= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \lambda_j & \cos \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j t \\ -\gamma_j \operatorname{sen} \lambda_j t + \gamma_j^* \cos \lambda_j t \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \gamma_{jt} \\ \Rightarrow \gamma_{jt}^* \end{matrix}$$

$$\gamma_{j,t+1}^* = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \lambda_j & \cos \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma_{jt}^* \end{pmatrix} \quad (e)$$

Na forma determinística (juntando (d) e (e)):

$$\begin{pmatrix} \gamma_{jt+1} \\ \gamma_{jt+1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_j & \operatorname{sen} \lambda_j \\ -\operatorname{sen} \lambda_j & \cos \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma_{jt}^* \end{pmatrix}$$

Na forma estocástica, adicionando um termo aleatório (e fazendo $t = t-1$):

$$\begin{pmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma_{jt}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_j & \operatorname{sen} \lambda_j \\ -\operatorname{sen} \lambda_j & \cos \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{jt-1} \\ \gamma_{jt-1}^* \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} w_t \\ w_t^* \end{pmatrix}}_{\text{choque para que } \gamma_{jt} \text{ seja estocástico}}$$

w_t e $w_t^* \sim N(0, \sigma_w^2)$

Obs 1: - γ_{jt}^* só aparece p/ compor γ_{jt} (que é o que interessa p/ calcular o fator sazonal).

- se $\sigma_w^2 = 0 \Rightarrow$ sazonalidade determinística
- w_t e w_t^*: mesma variância
- Atenção com notação!

γ_t: fator sazonal

γ_j e γ_j^*: coeficientes na versão determinística

" " " " estocástica

→ <u>MEB</u>

Modelo Estrutural Básico com sazonalidade em SF.

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \qquad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \qquad \zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2)$$

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{s/2} \gamma_{jt}$$ (obs: compon. do vetor de estado são γ_{jt})

$$\begin{pmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma_{jt}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_j & \operatorname{sen} \lambda_j \\ -\operatorname{sen} \lambda_j & \cos \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{j,t-1} \\ \gamma_{j,t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_t \\ \omega_t^* \end{pmatrix}, \quad \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2)$$

onde $E[\varepsilon_t \eta_s] = E[\varepsilon_t \zeta_s] = E[\varepsilon_t \omega_s] = 0 \quad \forall\, t, s$

$E[\varepsilon_t \alpha_0] = E[\eta_t \alpha_0] = E[\omega_t \alpha_0] = 0 \quad \forall\, t$

se $\alpha_t = (\mu_t, \beta_t, \gamma_t, \ldots, \gamma_{t-s+1})' \Rightarrow \alpha_0 \sim N(a_0, P_0)$

<u>Exemplo</u>: se $s = 12$

$$\gamma_t = \underbrace{\gamma_{1t} + \gamma_{2t} + \gamma_{3t} + \gamma_{4t} + \gamma_{5t} + \gamma_{6t}}$$

estes fatores aparecerão no vetor de estado junto com $\gamma_{1t}^*, \gamma_{2t}^*, \gamma_{3t}^*, \gamma_{4t}^*, \gamma_{5t}^*$

(γ_{6t}^* não entra pois $\operatorname{sen} \pi t = 0$)

Notas de Aula V (25/05)

Sazonalidade Estocástica nos ME

a determinística é caso particular quando $\sigma_\omega^2 = 0$.

Trabalhando com modelagem por dummies p/ o MEB, temos.

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \xi_t \\ \gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t \end{cases}$$

μ_t, β_t } tend. linear stocástica

γ_t } saz. stocástica

→ Forma reduzida de um MEB : é identificável
muito conhecidos

Mas qual SARIMA equivalente? SARIMA $(p,d,q) \times (P,D,Q)$

- Operador de diferenciação sazonal

$$\boxed{\Delta_s \hat{=} I - L^s}$$

onde s é a frequência da sazonalidade (mensal, trimestral etc.)

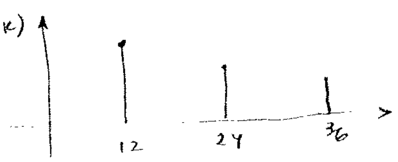
Obs 1: se sazonalidade fosse determinística:

$\Delta_s y_t = y_t - y_{t-s}$ ⇒ operação tirará totalmente a sazonalida

Obs 2: Só se deve operar a sazonalidade stocástica após diferenciá-la em relação à tendência

Exemplo:

- Para modelo não estac. na sazonalidade, temos decaimento lento nos períodos $s, 2s, \ldots$



- Após aplicação de Δ_s ⇒ decaimento rápido

Obs 3. Estacionariedade ⇒ importante no contexto B&J
No contexto ME não é necessário (nem p/ tendência), mas vamos precisar trabalhar por conta da forma reduzida

- **Operador $S_s(L)$**

$$S_s(L) = 1 + L^1 + L^2 + \dots + L^{s-1}$$

$$\therefore \Delta S_s(L) = (1-L)(1 + L^1 + L^2 + \dots + L^{s-1})$$

$$= 1 + \cancel{L^1} + \cancel{L^2} + \dots + \cancel{L^{s-1}} - \cancel{L} - \cancel{L^2} - \dots - L^s =$$

$$= 1 - L^s = \Delta_s$$

Obs 1: operadores comutam

Ex: $\underbrace{S_s(L)\,\Delta}_{\Delta S_s(L)} \Delta y_t = \Delta_s \Delta y_t$

- **Forma reduzida do MEB**

Vai diferenciando equação p/ y_t até torná-la estacionária
Pára quando obtiver do lado direito apenas funções dos erros.

$$\Delta y_t = \underbrace{\Delta \mu_t}_{\beta_{t-1} + \eta_t} + \Delta \gamma_t + \Delta \varepsilon_t$$

$$\therefore \Delta^2 y_t = \underbrace{\Delta \beta_{t-1}}_{\zeta_{t-1}} + \Delta \eta_t + \Delta^2 \gamma_t + \Delta^2 \varepsilon_t$$

$$\boxed{\Delta^2 y_t = \zeta_{t-1} + \Delta \eta_t + \Delta^2 \gamma_t + \Delta^2 \varepsilon_t} \quad (a)$$

Para a componente sazonal:

$$\gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t$$

$$\therefore \gamma_t + \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} = \omega_t$$

$$\gamma_t + \gamma_{t-1} + \dots + \gamma_{t-s+1} = \omega_t$$

$$S_s(L)\,\gamma_t = \omega_t$$ ⇒ outra forma de escrever equação p/ a comp sazonal

de (a), aplicando $S_s(L)$:

$$S_s(L)\,\Delta^2 y_t = S_s(L)\,\zeta_{t-1} + S_s(L)\,\Delta\eta_t + S_s(L)\,\Delta^2\gamma_t + S_s(L)\,\Delta^2\varepsilon_t$$

Como operadores comutam:

$$\Delta\underbrace{\Delta S_s(L)}_{\Delta_s} y_t = S_s(L)\,\zeta_{t-1} + \underbrace{\Delta S_s(L)}_{\Delta_s}\eta_t + \Delta^2 \underbrace{S_s(L)\gamma_t}_{\omega_t} + \Delta \underbrace{\Delta S_s(L)}_{\Delta_s}\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\Delta_s y_t = \underbrace{\Delta_s\eta_t}_{\text{gera 2 termos}} + \underbrace{\Delta\Delta_s\varepsilon_t}_{\text{gera 4 termos}} + \underbrace{\Delta^2\omega_t}_{\text{gera 3 termos}} + \underbrace{S(L)\,\zeta_{t-1}}_{\text{gera s termos}}}$$

$\Rightarrow$ Processo do lado direito é estacionário em q coef. 2

É um $MA(s+1)$

Para mostrar, calcula-se a FAC: irá se anular bruscamente após $s+1$

$$\underbrace{\Delta\Delta_s y_t}_{\omega_t} \sim MA(s+1)$$

$\downarrow$

FAC se anula após $s+1$.

Temos $s+2$ equações (de $\gamma(0)$ a $\gamma(s+1)$) e $s+2$ parâmetros p/ estimar.

Da apostila

$$\gamma(0) = 2\sigma_\eta^2 + 4\sigma_\varepsilon^2 + 6\sigma_\omega^2 + s\sigma_\zeta^2$$

$$\gamma(1) = (s-1)\,\sigma_\zeta^2 - 4\sigma_\omega^2 - 2\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(2) = (s-2)\,\sigma_\zeta^2 + \sigma_\omega^2$$

$$\gamma(k) = (s-k)\,\sigma_\zeta^2 \qquad k = 3,\dots,s-2$$

Fazer

$$\gamma(s-1) = \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(s) = -\sigma_\eta^2 - 2\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(s+1) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(k) = 0 \qquad k \geq s+2.$$

Pergunta: Qual modelo SARIMA que é equivalente a este processo?

Se quisermos equivalência c/ AIRLINE, quais restrições precisaremos impor aos parâmetros?

Airline: SARIMA $(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$ $\Rightarrow$ FAC $\neq$ em $\begin{cases} q=1 \\ q=s-1 \\ q=s \\ q=s+1 \end{cases}$

Forma geral: $\Delta\Delta_s y_t = (1-\Theta_1 L^s)(1-\theta_1 L)\varepsilon_t$

$= \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \Theta_1 \varepsilon_{t-s} + \theta_1\Theta_1 \varepsilon_{t-(s+1)}$

$\gamma(0) = (1+\theta_1^2+\Theta_1^2+\theta_1^2\Theta_1^2)\,\sigma_\varepsilon^2$

$\gamma(1) = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1\Theta_1\sigma_\varepsilon^2$

$\gamma(k) = 0 \quad k = 2, \ldots, s-2$

$\gamma(s-1) = \ldots$

$\gamma(s) = \ldots$

$\gamma(s+1) = \ldots$

$\gamma(k) = 0 \quad k \geq s+2$

Vamos precisar ter $\sigma_\zeta^2 = 0$ e $\sigma_\omega^2 = 0$.

E nesse caso teremos $\Theta_1 = 1$.

provar

Modelo p/ ciclos (aula 25/05)

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \varepsilon_t$$

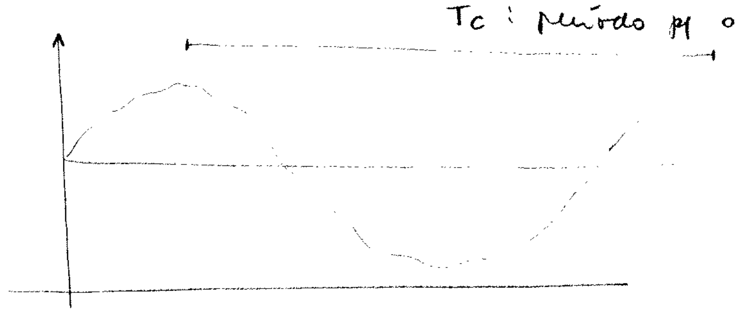
$\downarrow$

ciclos são flutuações no nível que ocorrem de forma recorrente, com periodicidade $\simeq$ regular > 1 ano.

(Flutuações sobre tendência de LP)

→ Versão Determinística

T_c : período p/ o qual ciclo se repete.



(idéia é usar modelo de componente sazonal na forma trigonométrica, considerando apenas o harmônico fundamental)

⇒ Para cada ciclo, trabalharemos com 1 frequência

$$y_t = \mu + \psi_t + \varepsilon_t$$

$$\psi_t = \alpha \cos \lambda_c t + \beta \operatorname{sen} \lambda_c t$$

onde $\lambda_c = \dfrac{2\pi}{T_c}$: frequência.

⇒ Temos que estimar α, β e $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{estimação não linear}}}{\underline{\lambda \text{ (ou } T)}}$

obs: Se conhecêssemos T, estimaríamos trivialmente por MQO. Como não conhecemos, duas opções.

- estima T separadamente pelo periodograma e outros parâmetros por MQO
- estima tudo junto por MQO não lineares.

MQO seria: $S(\mu, \alpha, \beta, T) = \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - (\mu + \cos(2\pi/T)t + \text{sen}(2\pi/T)t) \right)^2$.

Obs 2: Para sazonalidade, ME foi:

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \gamma_t = \sum_{t=1}^{s/2} \gamma_{jt} \quad \to j = 1 \text{ a } s/2 : \text{ várias frequências} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma_{jt}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda & \text{sen}\,\lambda \\ -\text{sen}\,\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{jt-1} \\ \gamma_{jt-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_t \\ \omega_t^* \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Para ciclo, apenas $j=1$ (uma frequência)

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \varepsilon_t$$

Matriz T (se μ_t = cte.)

$$\begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\lambda_c & \text{sen}\,\lambda_c \\ -\text{sen}\,\lambda_c & \cos\lambda_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_t \\ k_t^* \end{pmatrix}$$

k_t, k_t^*: RB descorrelatados $\sim N(0, \sigma_k^2)$

$|\rho| < 1 \Rightarrow$ contribui p/ amortecimento do choque (cte. de amortecimento)

$\lambda_c = 2\pi / T_c \Rightarrow$ frequência.

Atenção!

(i) Se $\lambda_c = 0$ ou $\lambda_c = \pi \Rightarrow$ ciclo se torna AR(1)

$$\begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_t \\ k_t^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi_t = \rho \psi_{t-1} + k_t \quad : \text{AR}(1)$$

(i) cte. de amortecimento faz choque se esvair c/ o tempo

$\to$ Componente cíclica estocástica

$$\psi_t = \rho [\cos\lambda_c \psi_{t-1} + \text{sen}\,\lambda_c \psi_{t-1}^*) + k_t \qquad \psi_t \sim N(0, \sigma_\psi^2)$$

Impondo estacionariedade: $\longrightarrow$ $\psi_t = \rho \cos\lambda_c \psi_{t-1} + \rho \,\text{sen}\,\lambda_c \psi^*_{t-1} + k_t$ (obs)

$var(\psi_t) = \rho^2(\cos^2)\, var(\psi_t) + \rho^2(\text{sen}^2)\, var(\psi_t) + var(k_t)$

$var(\psi_t) = (\cos^2 + \text{sen}^2)\rho^2\, var(\psi_t) + var(k_t)$

$\sigma^2_k = (1-\rho^2)\sigma^2$

$E[\psi_t] = 0$

$var[\psi_t] = cte. \Rightarrow (1-\rho^2)\, var(\psi) = (1-\rho^2)\sigma^2_\psi = \sigma^2_k$

? Dúvida

Parâmetros desconhecidos: ρ e σ^2_ψ

Se $\rho \to 1$: $\sigma^2_k \to 0 \Rightarrow$ ciclo se torna estacionário

$\psi_t = \psi_0 \cos\lambda_c t + \psi_0^* \,\text{sen}\,\lambda_c t$ onde $\psi_0 \sim N(0, \sigma^2_\psi)$

— // —

Modelo de ciclo na forma EE

$$\begin{pmatrix}\psi_t\\ \psi_t^*\end{pmatrix} = \underbrace{\rho\begin{pmatrix}\cos\lambda_c & \text{sen}\,\lambda_c\\ -\text{sen}\,\lambda_c & \cos\lambda_c\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\psi_{t-1}\\ \psi^*_{t-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_t\\ k_t^*\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\psi}_t = A\,\underset{\sim}{\psi}_{t-1} + \underset{\sim}{k}_t \quad \text{onde} \quad \underset{\sim}{\psi}_t = \begin{pmatrix}\psi_t\\ \psi_{t-1}\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Processo AR(1) vetorial}$$

- Função de Previsão

$$\underset{\sim}{\psi}_{t+s} = A^s \psi_t + \sum_{i=1}^{s} A^{s-i} k_{t+i} \quad : \text{escrevendo de forma recursiva.}$$

$$\therefore \hat{\underset{\sim}{\psi}}_{t+s|t} = E[\underset{\sim}{\psi}_{t+s} \mid \underset{\sim}{y}_t] = A^s E[\psi_t \mid y_t]$$

$$= A^s \underset{\sim}{\psi}_{t|t}$$

$$\text{onde } A^s = \rho^s\begin{pmatrix}\cos\lambda_c & \text{sen}\,\lambda_c\\ -\text{sen}\,\lambda_c & \cos\lambda_c\end{pmatrix}^s$$

$$= \rho^s\begin{pmatrix}\cos(s)\lambda_c & \text{sen}\, s\lambda_c\\ -\text{sen}\, s\lambda_c & \cos s\lambda_c\end{pmatrix}$$

$$\therefore \psi_{t+s|t} = \rho^s \cos s\lambda_c\, \psi_{t|t} + \rho^s\, \text{sen}\, s\lambda_c\, \psi^*_{t|t}$$

Se $\rho = 1$: soma de senos e cossenos

$0 < |\rho| < 1$: senóide amortecida.

obs: se $s \to \infty$: $\psi_{t+s|t} = 0$: componente de tendência

→ Forma reduzida

$$\underset{\sim}{\Psi}_t = A\underset{\sim}{\Psi}_{t-1} + k_t \quad : \text{ processo AR(1) vetorial}$$

$$\therefore (I - AL)\underset{\sim}{\Psi}_t = k_t$$

tira uma diferença p/ tornar estacionário

$$\therefore \underset{\sim}{\Psi}_t = (I - AL)^{-1} k_t$$

$$\text{onde } A = \rho \begin{pmatrix} \cos\lambda_c & \operatorname{sen}\lambda_c \\ -\operatorname{sen}\lambda_c & \cos\lambda_c \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underset{\sim}{\Psi}_t = \begin{pmatrix} 1-\rho\cos\lambda_c L & -\rho\operatorname{sen}\lambda_c L \\ \rho\operatorname{sen}\lambda_c L & 1-\rho\cos\lambda_c L \end{pmatrix}^{-1} k_t$$

$$\therefore \underset{\sim}{\Psi}_t = \frac{1}{(1-\rho\cos\lambda_c L)^2 + \rho^2(\operatorname{sen}\lambda_c L)^2} \begin{pmatrix} & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t \\ k_t^* \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1 - 2\rho\cos\lambda_c L + \rho^2(\cos\lambda_c L)^2 + \rho^2(\operatorname{sen}\lambda_c L)^2} \begin{pmatrix} & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t \\ k_t^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_t \\ \Psi_t^* \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - 2\rho\cos\lambda_c L + \rho^2 L^2} \begin{pmatrix} 1-\rho\cos\lambda_c L & \rho\operatorname{sen}\lambda_c L \\ -\rho\operatorname{sen}\lambda_c L & 1-\rho\cos\lambda_c L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t \\ k_t^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Psi_t = \frac{1}{1 - 2\rho\cos\lambda_c L + \rho^2 L^2} \left[(1-\rho\cos\lambda_c L) k_t + (\rho\operatorname{sen}\lambda_c L) k_t^* \right)$$

Aula 01/06

Variáveis Explicativas e Intervenções em ME

$\underset{\sim}{x}_t = (x_{1t} \quad x_{2t} \quad \dots \quad x_{kt}) \sim k\times 1 \Rightarrow$ vetor de variáveis explicativas.

$\underset{\sim}{\gamma} = (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_k) \sim k\times 1 \Rightarrow$ vetor de parâmetros

Exemplo.
$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \underset{\sim}{\gamma}' x_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t \\ \beta_{t+1} = \beta_t + \xi_t \end{cases}$$

Há duas formas de introduzir variáveis explicativas em modelos estruturais:

1). Escreve o modelo na forma

$$y_t = z_t x_t + c_t + \varepsilon_t \quad \text{onde } c_t = \underset{\sim}{\gamma}' x_t$$

$\Rightarrow$ escreve variável explicativa como cte. somada ao modelo.

onde $\underset{\sim}{\gamma}$: parâmetros fixos associados a x_t

- As inovações serão funções dos parâmetros originais $\psi = (\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2)$, mas tb de $\underset{\sim}{\gamma}$.

$$v_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1} = y_t - (z_t a_t + c_t)$$

$$\therefore v_t = v_t(\psi, \gamma)$$

- Escreve a função de verossimilhança e maximiza em γ tb.

$$\ell(\psi, \gamma) \sim -\frac{1}{2} \sum \left(\ln F_t + \frac{v_t^2}{F_t} \right)$$

Obs: Tb é possível concentrar a verossimilhança em relação a γ e resolver o problema de otimização por MQ Generalizado.

2). Incorpora γ no vetor de estados

$$y_t = \mu_t + \underset{\sim}{\gamma}' x_t + \varepsilon_t$$

- Nesse caso γ_t vira variável de estado (γ : $k \times 1$ → k componentes novas no vetor de estado).

$$y_t = \underbrace{(1 \quad 0 \quad \underset{\sim}{x}_t)}_{1 \times k} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \underbrace{\gamma_t}_{k \times 1} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \underset{\sim}{0} \\ 0 & 1 & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \xi_t \end{pmatrix}$$

obs. consideramos aqui $\underset{\sim}{\gamma}_{t+1} = \underset{\sim}{\gamma}_t$ (não há variação)
mas poderíamos considerar variação, por exemplo:

$$\underset{\sim}{\gamma}_{t+1} = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\gamma}_t + \underset{\sim}{\omega}_t \Rightarrow \text{VAR}(1)$$

$\omega_t \sim N(0, Q_\omega)$ onde Q_ω cheia (covariâncias no choque)

Mesmo que $\underset{\sim}{\gamma}_t$ varie, precisamos especificar como varia no tempo sua equação de evolução, estrutura.

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,t+1} \\ \gamma_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1t} \\ \gamma_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{1t} \\ \omega_{2t} \end{pmatrix}$$

- Pode-se mostrar que as estimativas de $\underset{\sim}{\gamma}$ obtidas via FK no passo de atualização são equivalentes à MQ recursivos

ver

$$\underset{\sim}{\gamma}_t = \underset{\sim}{\gamma}_{t-1} + (\quad)$$

— " —

Atenção no uso de variáveis explicativas

- Se o objetivo inicial for extrair as componentes não observáveis de uma série
  - ⇒ Não devemos colocar variáveis explicativas
    Elas concorrem com as componentes.
    Se forem incluídas, componentes não terão mais a mesma interpretação
- Se o objetivo for previsão, a inclusão de variáveis explicativas pode melhorar o modelo.

Procedimento:

- Faz modelo s/ variável explicativa e roda.
- Olha resíduos
  Se ainda não é RB ⇒ pode incluir variável explicativa
  (ainda assim significado das componentes pode mudar)

Outro exemplo de uso:

- Podemos querer separar a influência de ≠ fatores na sazonalidade

(i) $y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$ onde $\hat{\gamma}_t$: sazonalidade total (temperatura + feriados)

(ii) $y_t = \mu_t + \gamma_t + \delta x_t + \varepsilon_t$ onde x_t: temperatura
$\hat{\gamma}_t$: sazon. por conta de feriados.

(variável explicativa pode ser uma dummy)

Variável explicativas p/ Intervenção

Se no procedimento rodamos modelo e análise de resíduos apresenta problema (ex outliers)

⇒ Modela intervenção c/ variável explicativa a posteriori
(o que é atípico só será identificado após rodar o modelo)

obs: i) mesmo o que parece atípico antes de rodar o modelo pode acabar sendo absorvido por ele.

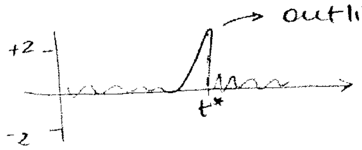
ii) análise de intervenção só pode ser feita a posteriori

→ Tipos de variáveis usadas na análise de intervenção:

Dependerá a análise de resíduos na inovação padronizada.

$$\nu_t^* = \frac{\nu_t}{F_t^{1/2}} \sim N(0,1)$$

Exs:



→ outlier: observação atípica

- coloca dummy em t^* p/ melhor ajuste do modelo in-sample
- ponto atípico pode estar comprometendo modelo no que se refere a heterocedasticidade, normalidade etc.

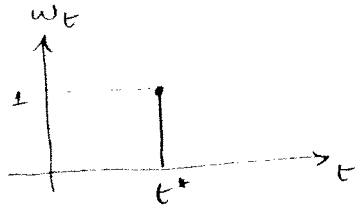
Modelos p/ funções de intervenção

$$y_t = \underbrace{\mu_t}_{\text{tendência}} + \underbrace{\gamma_t}_{\text{sazon.}} + \lambda \underbrace{w_t}_{\text{funções de intervenção}} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{erro}}$$

Para w_t, podemos ter:

(a) <u>pulso</u>

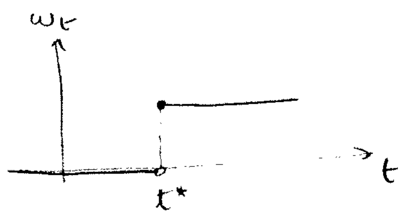
$$w_t = \begin{cases} 1 & t = t^* \\ 0 & t \neq t^* \end{cases}$$



caracteriza efeitos <u>transitórios</u> na série que apenas afetam em $t = t^*$

(b) <u>escada</u>

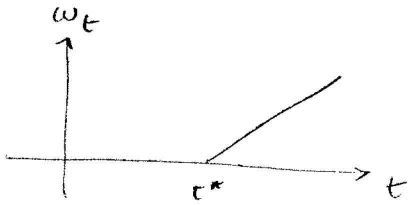
$$w_t = \begin{cases} 0 & t < t^* \\ 1 & t \geq t^* \end{cases}$$



caracteriza mudanças no nível da série, que representam efeitos permanentes (equivale a um pulso no nível da série)

(c) <u>mudança de inclinação</u>

$$w_t = \begin{cases} 0 & t < t^* \\ t - t^* & t \geq t^* \end{cases}$$

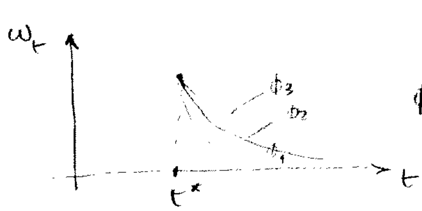


(d) <u>pulso decaindo gradualmente</u>

$$w_t = \begin{cases} 0 & t < t^* \\ \phi^{t-t^*} & t \geq t^* \end{cases}, \quad |\phi| < 1$$

onde ϕ é o fator de desconto

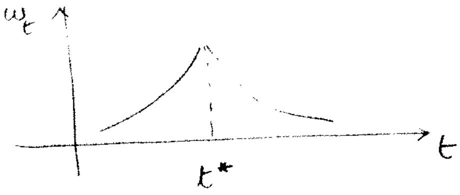
Quanto + perto é o valor de ϕ de 1 $\Rightarrow$ mais lento é o decaimento



$\phi_3 > \phi_2 > \phi_1$

(e) pulso crescendo lentamente e decaindo lentamente

$$\omega_t = \begin{cases} \phi_1^{t^*-t} & t \le t^* \\ \phi_2^{t^*-t} & t > t^* \end{cases}$$



Se $\phi_1 = \phi_2$: subida e descida são simétricos.

Obs importante

Distinguir entre efeito permanente e transiente.

Transiente: afeta apenas observações naquele período t.

Permanente: há uma mudança de estrutura.

Análise de resíduos de inovação ⇒ nem sempre permite distinguir efeito permanente x transiente

⇒ Nos ME: nos possibilita olhar resíduos no nível das variáveis de estado.

Obs: No MNL, efeito transiente em η_t é permanente em y_t

cont. aula 01/06

Diagnósticos

- Modelo: $y_t = Z_t \alpha_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t \qquad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

- Hipóteses:

i) $\begin{cases} \text{linearidade das componentes} \\ \text{aditividade} \end{cases}$

ii) ε_t : Normal
Homocedástico
Descorrelatado : $E[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}] = 0 \quad \forall s \neq 0$

- Método de ajuste : R^2, MAPE, RMSE etc.
(aderência)

→ Para verificar linearidade:

Queremos: $y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$

se modelo for $y_t = \mu_t \gamma_t \varepsilon_t$ ⇒ isso pode ser verificado visualmente
(sazonalidade vai aumentando tb em amplitude)
se não identificar visualmente
⇒ olha resíduos

→ Para verificar ε_t:

$\varepsilon_t = y_t - Z_t \alpha_t$

mas ε_t não é observado

$\Rightarrow \hat{\varepsilon}_t = y_t - Z_t \hat{\alpha}_{t|t-1} = \nu_t$

∴ inovação ν_t é estimativa de ε_t

Sabemos que $\begin{vmatrix} E[\nu_t] = 0 \\ E[\nu_t^2] = F_t \end{vmatrix}$

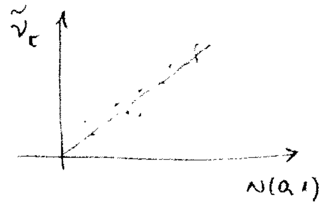
$\Rightarrow$ inovação padronizada: $\tilde{\nu}_t = \dfrac{\hat{\nu}_t}{\hat{F}_t^{1/2}} \sim N(0,1)$ tb deverá ser submetido a teste.

obs: um dos diagnósticos é testar $Var(\tilde{\nu}) \simeq 1$

• Normalidade:

a) histograma

b) Q-Q plot



Dispersão dos pontos em reta 45º com alguma variabilidade estatística

c) Testes estatísticos:

• Jarque-Bera (simetria e curtose)

$$JB = \frac{n}{6}(\hat{S}-0)^2 + \frac{n}{24}(\hat{K}-3)^2 \sim \chi^2(2)$$

• A Darling (relação entre densidade empírica e sob Ho (teórica))

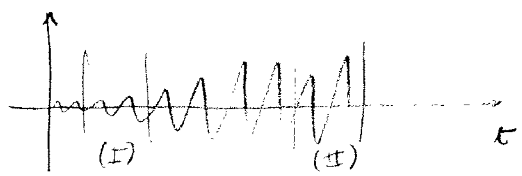
$$AD = \int \frac{(F_n - F_0)^2}{F_0(1-F_0)}\, dF$$

⇒ Tem mais poder do que JB.

• Homocedasticidade: (variância do erro cte.)

O que pode ser feito?

a) Se modelo multiplicativo e ajustarmos modelo aditivo, teremos p/ resíduos



: amplitude da inovação vai aumentando no tempo.

Teste no Stamp:

• Toma parte da amostra no início (I) e no final (II)

• Calcula estimativa $\hat{\sigma}^2_I$ e $\hat{\sigma}^2_{II}$

$$H(h): \frac{\sigma^2_{(II)}/\sigma^2}{\hat{\sigma}^2_{(I)}/\sigma^2} \sim F(h,h)$$

onde h é o tamanho da amostra em (I) e (II)

$$H_0: \sigma^2_F = \sigma^2_I$$

$$H_1: \sigma^2_F = \sigma^2_I$$

A estatística de teste $H(h)$ pode ser reescrita como:

$$H(h) = \sum_{t=T-h+1}^{T} v_t^2 \Big/ \sum_{t=d+1}^{d+1+h} v_t^2$$ onde d é o nº de variáveis não estacionárias

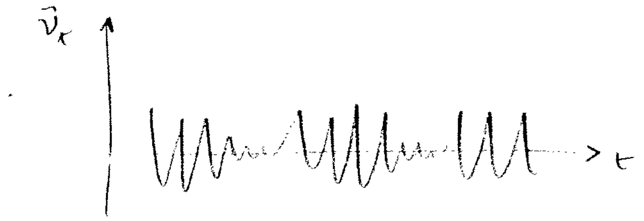
$$h = \left(\frac{T-d}{3}\right)$$ ⇒ tamanho de cada amostra tirando o meio da série

Resultado: Se rejeitar H_0, indica que $\text{var}(II) > \text{var}(I)$

Solução: Trabalha com $\underline{\underline{\log}}$.

b) Pode ser que comportamento da heterocedasticidade seja outro.

Ex: Retorno de ações



⇒ Teria que fazer teste ARCH

$$v_t^2 = \beta_0 + \beta_1 v_{t-1}^2 + \dots + \beta_n v_{t-n}^2$$

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = 0.$$

$$LM = nR^2 \overset{a}{\sim} \chi^2(n)$$

Nesse caso, mesmo rejeitando H_0, log não funciona.

- Descorrelação

De forma mais geral, devemos olhar a dependência serial

Para avaliar dependência linear:

I) FAC: medidas, não teóricas.

II) Ljung-Box

a) $H_0: \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(m) = 0$

H_a: caso contrário

$$Q(m) = T(T-2) + \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j^2}{(T-j)} \sim \chi^2(d)$$

onde $d = m - \underbrace{n}_{\text{nº de parâmetros estimados}} + 1$

p/ série trimestral: $m = 8$
mensal: $m = 15$ } p/ pegar sazonalidade 12.

e r_j: autocorrelações das inovações

b) Para saber se há tb. efeito ARCH, outra possibilidade é trabalhar c/ estatística Ljung-Box p/ v_t^2

Teste Q p/ v_t^2 $\Rightarrow$ $v_t^2 = \alpha + \beta v_{t-1}^2 + \varepsilon_t$

$\text{corr}(v_t^2, v_{t-1}^2) \neq 0.$

aula 08/06 (e final de 01/06)

Resíduos Auxiliares como ferramenta de Diagnóstico

- Inovação: $\nu_t = \hat{\varepsilon}_{t|t-1} = \hat{y}_{t|t-1}$

- Resíduos Auxiliares:

construir 2 tipos de resíduos, além da inovação

Específicos de ME, a partir do algoritmo de suavização

calculados a cada instante t.

Notação
$y = y_n = y_T$
$= (y_1, y_2, \dots y_{T=N})$

$\hat{\varepsilon}_t = E[\varepsilon_t | y]$: valor esperado suavizado de ε_t

$\hat{\eta}_t = E[\eta_t | y]$: valor " " de η_t (choque em μ_t)

obs: Não olha choques das componentes β_t ou δ_t.
Em princípio, poderia até definir, mas é pouco usado.
Mudança de nível está comumente associada a μ_t.

(motivar?)

Usando algoritmo de suavização:

Para $\hat{\varepsilon}_t$ → $\boxed{\hat{\varepsilon}_t = H_t \mu_t}$, $t = n, n-1, \dots, 1$

onde $\mu_t = F_t^{-1} \nu_t - K_t' r_t$ (r_t da suavização)

$H_t = E[\varepsilon_t \varepsilon_t']$ ($= \sigma_\varepsilon^2$ no caso univariado)

$\boxed{var[\varepsilon_t | y] = H_t - H_t D_t H_t}$

onde $D_t = F_t^{-1} + K_t' + N_t K_t$ (N_t da suavização)

Para $\hat{\eta}_t$ → $\boxed{\hat{\eta}_t = Q_t R_t' r_t}$

$\boxed{var[\eta_t | y] = Q_t - Q_t R_t' N_t R_t Q_t}$

⇒ Estimativas suavizadas dos erros:

(1) são intra-correlacionadas

(2) são inter-correlacionadas

Portanto, não compartilham características dos resíduos de inovação. Isso porque são suavizadas, têm conjunto de informação em comum nos seus cálculos. Isso nos trará problema no diagnósticos pois são ferramentas (não usadas em testes estatísticos)

Estratégia:

Usar $\hat{\eta}_t$ e $\hat{\varepsilon}_t$ para distinguir entre choques transientes e choques permanentes em y_t de forma a melhor caracterizar as análises de intervenção.

(Ajuste posterior, depois de observar comportamento do modelo)

choque: detecção de padrão anormal em resíduos (obs. atípica).

Exemplo: Supor MNL

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t \Rightarrow \mu_t = \mu_1 + \sum_{i=1}^{t} \eta_i$$

Há 2 tipos de choques:

(a) Em ε_t: transiente

~~Afetará apenas~~ y_t em t

~~outlier tratado via função pulso~~

$$D_t = \begin{cases} 1 & t = t^* \\ 0 & t \neq t^* \end{cases} \Rightarrow y_t = \mu_t + \delta D_t + \varepsilon_t$$

(b) Em η_t: dada recursividade em μ_t, em virtude de sua natureza markoviana e raiz unitária, um choque em η_j, $1 \leq j \leq t$ será incorporado a μ_t de forma permanente e, assim, afeta y_t também de forma permanente.

obs: Não é permanente eterno.
Pode ir se compensando com η_t subsequentes.
Dependendo do nível do choque, pode ir sendo carregado.

Como fazer na prática?

Roda programa, calculando $\hat{\varepsilon}_t$ e $\hat{\eta}_t$

Detectar períodos onde $\hat{\varepsilon}_t \geq k\sigma_{\hat{\varepsilon}_t}$ e $\hat{\eta}_t \geq k\sigma_{\eta_t}$

- Se detectar em $\hat{\varepsilon}_t \Rightarrow$ coloca função pulso e estima parâmetro δ.

  É uma "ajuda" externa ao modelo, melhora estatísticas in-sample.

- Se detectar em $\hat{\eta}_t \Rightarrow$ trata função pulso em μ_t ou escada em y_t

Supondo que em $t = t^*$ há um choque em η_{t^*}

Portanto, η_{t^*} é grande $= k\sigma_\eta$, $k = 2, 2{,}5, 3, \ldots$

(Normalmente fazemos $k > 2$)

Para $t \geq t^*$, μ_t conterá este choque:

$$y_t = \mu_1 + \eta_t^* + \eta_{t-1} + \ldots + \eta_1 \quad , \quad t = t^*$$

$$y_t = \mu_1 + \eta_t + \eta_{t^*} + \ldots + \eta_1 \quad , \quad t > t^*$$

$\Rightarrow$ Para $t \geq t^*$: y_t mudará de nível de forma permanente

Ao detectarmos "outlier" em $\hat{\eta}_t$, podemos tratá-lo como:

(i) via função pulso em μ_t

(ii) via função escada em $\begin{cases} 1 & t \geq t^* \\ 0 & t < t^* \end{cases}$ em y_t

(i)

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \delta D_t + \eta_t$$
$$D_t = \begin{cases} 1 & t = t^* \\ 0 & t \neq t^* \end{cases}$$

(ii)

$$y_t = \mu_t + \delta E_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t$$
$$E_t = \begin{cases} 1 & t \geq t^* \\ 0 & t < t^* \end{cases}$$

(cont. aula 08/06)

Modelos Estruturais Multivariados

- Generalização de modelos estruturais univariados.
- Mais complexos em relação à estimação (FK e MV), identificação paramétrica, interpretação e diagnósticos.

→ Modelos univariados:

$$y_{1t} = \mu_{1t} + \gamma_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

diagnósticos sobre resíduos:

inovação padronizada ⇒ $\dfrac{\nu_{1t}}{F_{1t}^{1/2}} = \dfrac{y_{1t} - \tilde{y}_{1t|t-1}}{F_{1t}^{1/2}}$

testes JB, Ljung Box etc.

→ Modelos multivariados:

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{\mu}_t + \underset{\sim}{\gamma}_t + \underset{\sim}{\varepsilon}_t$$

inovação padronizada: $\nu_t = \begin{pmatrix} \nu_{1t} \\ \nu_{2t} \end{pmatrix} \sim N(0, \underset{\sim}{F}_t)$

diagnósticos precisam ser bi, tri, multivariados (cada marginal será univariada, mas testes univariados não são suficientes)

- Motivação p/ modelos multivariados

flexibilidade: estimar componentes comuns entre ST's

melhora inferência / previsões / simulações

$$z_t = f(y_{1t}, y_{2t})$$ ⇒ resultado / variável z_t é variável comum de 2 fatores de risco.

Se tratar y_{1t} e y_{2t} de forma separada, perde possibilidade de ter influências diretas entre as duas.

1) Modelo SUTSE (Seemingly unrelated TS equations)

$$\underset{p\times 1}{y_t} = \mu_t + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim N(0, \underset{p\times p}{\Sigma_\varepsilon})$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \quad , \quad \eta_t \sim N(0, \underset{p\times p}{\Sigma_\eta})$$

obs: N° de parâmetros é grande quando n aumenta
(matrizes Σ tem var/covar)

Ex: se $p = 2 \Rightarrow$ 3 par de Σ_ε
3 par de Σ_η

se $p = 5 \Rightarrow$ 15 par de Σ_ε
15 par de Σ_η

n° par $= \underbrace{n}_{var} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{covar}$

Exemplo: $p = 2$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_t \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \\ \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} & \sigma^2_{\varepsilon_2} \end{pmatrix}\right)$$

$$\eta_t \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2_{\eta_1} & \sigma_{\eta_1\eta_2} \\ \sigma_{\eta_1\eta_2} & \sigma^2_{\eta_2} \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,t+1} \\ \mu_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \end{pmatrix}$$

y_{1t} só depende de μ_{1t}
y_{2t} " " de μ_{2t}

No SUTSE: v.a's não se comunicam explicitamente.
A comunicação vem das covariâncias

No caso 2x2 ⇒ 6 parâmetros
SUTSE é de difícil estimação.

Objetivo: montar modelo SUTSE mais simples, com menos parâmetros

↓

No modelo geral, cada y só depende de sua componente e de seu erro.
A dependência vem da estrutura de matrizes var/covar
P/ diminuir o nº de parâmetros, colocamos restrições.

Definição: Modelo Homogêneo

= Processo estocástico de 2ª ordem, p-variado, é dito homogêneo se todas as combinações lineares de suas componentes possuem as mesmas propriedades de 2ª ordem.

$y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{pt})$ é homogêneo se

se y não for estacionário

$\forall \underset{\sim}{\alpha} \in \mathbb{R}^p$, processo univariado $z_t = \nabla^d(\underset{\sim}{\alpha}' y_t)$ possui FAC independente de $\underset{\sim}{\alpha}$.

(como cls independem de $\underset{\sim}{\alpha} \Rightarrow$ FAC tb não depende).

Ex: $z_t = 1 y_{1t} + 2 y_{2t}$
$= 0{,}5 y_{1t} + 0{,}7 y_{2t}$ } possuem mesma FAC.

Proposição 1: Se y_t segue um SUTSE de nível local, então y_t será homogêneo se e só se:

$$\underset{\sim}{\Sigma}_\eta = q \, \underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon \quad , \quad q \in \mathbb{R}^+$$

obs: Para $p=5$

SUTSE Geral: $\Psi = 30$ par.

SUTSE Homogêneo: $\Psi = 15+1$ par

Mostrar:

$$\begin{cases} y_{it} = \mu_{it} + \varepsilon_{it} \\ \mu_{it} = \mu_{it} + \eta_{it} \end{cases} \Rightarrow \Delta y_{it} = \eta_{i,t-1} + \Delta\varepsilon_{it}$$

dúvida: não entra aqui termo de correlação? σ_{η_1,η_2} $\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$

$E[\Delta y_{it}] = 0$

$E[\Delta y_{it}^2] = \sigma^2_{\eta_i} + 2\sigma^2_{\varepsilon_i}$

$E[\Delta y_{it}, \Delta y_{i,t-1}] = -\sigma^2_{\varepsilon_i} \Rightarrow \rho_{\Delta y_i}(1) = \dfrac{-\sigma^2_{\varepsilon_i}}{\sigma^2_{\eta_i} + 2\sigma^2_{\varepsilon_i}}$

$$\rho_{\Delta y_i} = \frac{-\sigma^2_{\varepsilon_i}}{q\sigma^2_{\varepsilon_i} + 2\sigma^2_{\varepsilon_i}} = -\frac{1}{q+2} \Rightarrow \text{independe de } i$$

?

$$z_t = \nabla(\alpha_1 y_{1t} + \alpha_2 y_{2t})$$

$$= \alpha_1 \nabla y_{1t} + \alpha_2 \nabla y_{2t}$$

$$= \alpha_1(\eta_{1t} + \Delta\varepsilon_{1t}) + \alpha_2(\eta_{2t} + \Delta\varepsilon_{2t})$$

$$= \alpha_1(\eta_{1t} + \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{1,t-1}) + \alpha_2(\eta_{2t} + \varepsilon_{2t} - \varepsilon_{2t-1})$$

$$\gamma_0 = \alpha_1^2 \sigma^2_{\eta_1} + 2\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_1} + \alpha_2^2\sigma^2_{\eta_2} + 2\alpha_2^2\sigma^2_{\varepsilon_2} + \alpha_1\alpha_2\sigma_{\eta_1\eta_2} + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$\gamma_1 = E\left[\left(\alpha_1(\eta_{1t-1} + \varepsilon_{1t-1} - \varepsilon_{1t-2}) + \alpha_2(\eta_{2t-1} + \varepsilon_{2t-1} - \varepsilon_{2t-2})\right)\left(\dots\right)_t\right]$$

$$= -\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_1} - \alpha_2^2\sigma^2_{\eta_1} + 2\alpha_1\alpha_1\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} + \alpha_1\alpha_2\sigma_{\eta_1\eta_2}$$

$$=$$

Prova ida: Se SUTSE homogêneo $\Rightarrow \underset{\sim}{\Sigma}_\eta = q\,\underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon$

Para CL de y_{1t} e y_{2t} $\Rightarrow z_t = \Delta(\alpha' y)$, achamos:

$$\gamma(0) = \alpha_1^2\sigma^2_{\eta_{1t}} + \alpha_2^2\sigma_{\eta_{2t}} + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{\eta_1\eta_2} + 2\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_{1t}} + 2\alpha_2^2\sigma^2_{\varepsilon_{2t}} + 4\alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$= \alpha_1^2(\sigma^2_{\eta_{1t}} + 2\sigma^2_{\varepsilon_{1t}}) + \alpha_2^2(\sigma_{\eta_{2t}} + 2\sigma^2_{\varepsilon_{2t}}) + 2\alpha_1\alpha_2(\sigma_{\eta_1\eta_2} + 2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2})$$

$$\gamma(1) = -\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_1} - \alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \alpha_2^2\sigma^2_{\varepsilon_2}$$

$$= \alpha_1^2(-\sigma^2_{\varepsilon_1}) + \alpha_2^2(-\sigma^2_{\varepsilon_2}) + 2\alpha_1\alpha_2(-\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2})$$

Prova volta: se $\Sigma_\eta = q\,\Sigma_{\tilde{\varepsilon}} \Rightarrow$ SUTSE homogêneo

<u>M $p = 2$</u>

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,t+1} \\ \mu_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix}$$

Seja $\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Rightarrow z_t = \Delta(\tilde{\alpha}' y) = \Delta(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$$= \alpha_1 \Delta y_{1t} + \alpha_2 \Delta y_{2t}$$

Mas $\Delta y_{1t} = \Delta \mu_{1t} + \Delta \varepsilon_{1t} = \eta_{1t} + \Delta \varepsilon_{1t}$

$\Delta y_{2t} = \Delta \mu_{2t} + \Delta \varepsilon_{2t} = \eta_{2t} + \Delta \varepsilon_{t}$

$$\Rightarrow z_t = \alpha_1(\eta_{1t} + \Delta\varepsilon_{1t}) + \alpha_2(\eta_{2t} + \Delta\varepsilon_{2t}) = \alpha_1\eta_{1t} + \alpha_2\eta_{2t} + \alpha_1\varepsilon_{1t} - \alpha_1\varepsilon_{1t-1} + \alpha_2\varepsilon_{2t} - \alpha_2\varepsilon_{2t-1}$$

$$\gamma(0) = E[z_t^2] = \alpha_1^2\sigma^2_{\eta_{1t}} + \alpha_2^2\sigma^2_{\eta_{2t}} + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{\eta_1\eta_2} + 2\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_{1t}} + 2\alpha_2^2\sigma^2_{\varepsilon_{2t}} + \cancel{2}4\alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$= \alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_1}(q+2) + \alpha_2^2\sigma^2_{\varepsilon_2}(q+2) + \alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(q+2)$$

$$= (q+2)\left[\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_1} + \alpha_2^2\sigma^2_{\varepsilon_2} + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right]$$

$$\gamma(1) = E\big[(\alpha_1\eta_{1t} + \alpha_1\varepsilon_{1t} - \alpha_1\varepsilon_{1t-1} + \alpha_2\eta_{2t} + \alpha_2\varepsilon_{2t} - \alpha_2\varepsilon_{2,t-1})$$
$$(\alpha_1\eta_{1t-1} + \alpha_1\varepsilon_{1t-1} - \alpha_1\varepsilon_{1t-2} + \alpha_2\eta_{2t-1} + \alpha_2\varepsilon_{2t-1} - \alpha_2\varepsilon_{2t-2})\big]$$

$$= -\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_1} - \alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \alpha_2^2\sigma^2_{\varepsilon_2} =$$

$$= -\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_1} - 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \alpha_2\sigma^2_{\varepsilon_2}$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = -\frac{1}{q+2}.$$

— " —

Se ρ_1 independe de $\alpha \Rightarrow \rho_1 = f(\sigma^2_{\varepsilon_i}, \sigma^2_{\eta_i})$

Se FAC da CL independe dos parâmetros, $\tilde{\Sigma}_\eta = q\,\tilde{\Sigma}_\varepsilon$

usar $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$

já calculados.

Proposição 2: Se y_t segue um SUTSE com j tipos de componentes ortogonais (ex: $\mu_t, \delta_t, \psi_t \ldots$), então y será homogêneo sss:

$$\underset{jp\times jp}{\Sigma_\eta} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\eta_1} & & 0 \\ & \Sigma_{\eta_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \Sigma_{\eta_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\Sigma_{\varepsilon_1} & & 0 \\ & q\Sigma_{\varepsilon_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & q\Sigma_{\varepsilon_j} \end{pmatrix}$$

cada uma é que é em blocos.

dúvida

ε vai de 1 a p

onde $\underset{p\times 1}{\Sigma_\varepsilon} = h\,\Sigma_*$? dúvida

(como processos de cada componente são ortogonais, só há comunicação

Propriedades Empíricas de PH's

(i) Pode haver teorias "a priori" que justifiquem a adoção de estrutura de proporção entre as covariâncias

(ii) As recursões de Kalman podem ser implementadas para cada uma das p-equações separadamente

(iii) Há menos risco de não identificação paramétrica pela baixa dimensão de ψ

↳ Processo homogêneo é sempre identificável

(iv) Estimação por MV é mais simples.

MNL SUTSE HOMOGÊNEO

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t & \varepsilon_t \sim N(0, \Sigma_\varepsilon) \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t & \eta_t \sim N(0, \Sigma_\eta) \end{cases}$$

$$\Sigma_\eta = q\,\Sigma_\varepsilon$$

Para $p = 2$

$$\begin{pmatrix} \sigma^2_{\eta_1} & \sigma_{\eta_1\eta_2} \\ \sigma_{\eta_1\eta_2} & \sigma^2_{\eta_2} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \\ \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} & \sigma^2_{\varepsilon_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_{it} = \mu_{it} + \varepsilon_{it} \\ \mu_{it+1} = \mu_{it} + \eta_{it} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta y_{it} = \eta_{it} + \Delta \varepsilon_{it}$$

$$E[\Delta y_{it}] = 0$$

$$E[\Delta y^2_{it}] = \sigma^2_{\eta_i} + 2\sigma^2_{\varepsilon_i}$$

$$E[\Delta y_{it}, \Delta y_{it-1}] = E[(\eta_{it} + \varepsilon_{it} - \varepsilon_{it-1})(\eta_{it-1} + \varepsilon_{it-1} - \varepsilon_{it-2})]$$

$$= -\sigma^2_{\varepsilon_i}$$

Por homogeneidade $\Rightarrow \sigma^2_{\eta_i} = q\,\sigma^2_{\varepsilon_i}$

$$\Rightarrow \rho(1) = \frac{-\sigma^2_{\varepsilon_i}}{\sigma^2_{\varepsilon_i}(q+2)} = -\frac{1}{q+2} \Rightarrow \text{independe de } i$$

Logo: qualquer cl de y_{it} $\Rightarrow$ independerá de α_1, α_2
FAC.

- Conclusão:

Na forma reduzida do SUTSE homogêneo, as séries possuem a mesma dinâmica.

$\Rightarrow$ modelo bem restritivo

Dúvida
No modelo homogêneo, x'nis são sempre co-integradas?

como relacionar?

- Estimação

Vetor de parâmetros

$$\psi = (\sigma^2_{\varepsilon_1}, \sigma^2_{\varepsilon_2}, \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}, q)$$

Informação: $\underset{\sim}{y}_{t-1} = (\underset{\sim}{y}_{1,t-1}, \underset{\sim}{y}_{2,t-1})$

$$\ell(\psi) = \log L(\psi) = \sum_{t=1}^{n} \log p(y_{1t}, y_{2t} \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}) \longrightarrow \text{densidade conjunta bivariada}$$

$\to p(\underbrace{y_{1t}, y_{2t}}_{\underset{\sim}{y}_t} \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = ?$ Normal bivariada

$$y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t$$

$$E[y_t \mid Y_{t-1}] = Z\, E[\alpha_t \mid Y_{t-1}] = Z a_t$$

$$\text{var}[y_t \mid Y_{t-1}] = \text{var}[Z\alpha_t + \varepsilon_t \mid Y_{t-1}] = Z P_t Z' + H_t = F_t$$

$$p(y_t \mid Y_{t-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |F_t|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \underbrace{(y_t - Za_t)'}_{v_t} F_t^{-1} \underbrace{(y_t - Za_t)}_{v_t} \right\}$$

onde $p = 2$

$$\therefore \ell(\psi) = \sum_{t=1}^{n} \log \left[\frac{1}{(2\pi) |F_t|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} v_t' F_t v_t \right\} \right]$$

- Tratando com inicialização exata

$$\ell(\psi) = -n \log 2\pi \underbrace{- \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{d} w_t}_{} \underbrace{- \frac{1}{2} \sum_{t=d+1}^{n} \log |F_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=d+1}^{n} v_t' F_t^{-1} v_t}_{\text{Não são afetados pela inicialização exata}}$$

$$w_t = \begin{cases} \log |F_{\infty,t}| & \text{se } F_{\infty,t} \text{ é pd} \\ \log |F_{*,t}| + v_t^{(0)\prime} F_{*,t}^{-1} v_t^{(0)}, & F_{\infty,t} = 0 \end{cases}$$

Dúvida
Nesse caso SUTSE MNL
⇒ quantas componentes ñ estacionárias? apenas 1 p/ cada y ou considera p?

- Tratando com inicialização difusa por Big kappa

Não haverá na função de veros. o termo de Σw_t.

Calcularemos a função a partir de $t=1$

ler → e $(n-1)\log 2\pi$

Aula 15/06

→ Generalizações da Estrutura SUTSE

- Incorporar outros componentes: tend. linear estocástica, sazonalidade, ciclo etc.
- Supor ortogonalidade entre componentes de ≠ interpretações
- Exemplo: modelo c/ nível e ciclo e $p=2$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \quad \text{onde } \varepsilon_t \sim N(0, \underbrace{\Sigma_\varepsilon}_{3 \text{ parâmetros}})$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,t+1} \\ \mu_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix} \quad \text{onde } \eta_t \sim N(0, \underbrace{\Sigma_\eta}_{3 \text{ parâmetros}})$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,t+1} \\ \beta_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_{1t} \\ \zeta_{2t} \end{pmatrix} \quad \text{onde } \zeta_t \sim N(0, \underbrace{\Sigma_\zeta}_{3 \text{ parâmetros}})$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{1,t+1} \\ \psi_{2,t+1} \\ \psi^*_{1,t+1} \\ \psi^*_{2,t+1} \end{pmatrix} = \left[\rho \begin{bmatrix} \cos\lambda_c & \operatorname{sen}\lambda_c \\ -\operatorname{sen}\lambda_c & \cos\lambda_c \end{bmatrix} \otimes I_2 \right] \begin{pmatrix} \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \\ \psi^*_{1t} \\ \psi^*_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa_{1t} \\ \kappa_{2t} \\ \kappa^*_{1t} \\ \kappa^*_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \rho[\quad] & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \rho[\quad] \end{bmatrix}_{4\times 4} \qquad \text{onde } \underset{\sim}{\kappa_t} \sim N(0, \underbrace{\Sigma_\kappa}_{3 \text{ parâmetros}}) \text{ (pois } \sigma^2_\kappa = \sigma^2_{\kappa^*})$$

$\lambda_c = \dfrac{2\pi}{T_c} \Rightarrow$ a mesma p/ ψ_1 e ψ_2

$0 < \rho < 1$

Escrevendo o modelo acima na forma EE:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{Z_{(2\times 8)}} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \\ \psi^*_{1t} \\ \psi^*_{2t} \end{pmatrix}_{(8\times 1)} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix} \mu_{1,t+1} \\ \mu_{2,t+1} \\ \beta_{1,t+1} \\ \beta_{2,t+1} \\ \psi_{1,t+1} \\ \psi_{2,t+1} \\ \psi^*_{1,t+1} \\ \psi^*_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \underset{\sim}{0} & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & a & 0 & b & 0 \\ & \underset{\sim}{0} & & & 0 & a & 0 & b \\ & & & & c & 0 & a & 0 \\ & & & & 0 & c & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \\ \psi^*_{1t} \\ \psi^*_{2t} \end{pmatrix} + I_8 \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \\ \zeta_{1t} \\ \zeta_{2t} \\ k_{1t} \\ k_{2t} \\ k^*_{1t} \\ k^*_{2t} \end{pmatrix}
$$

$$
\left.\begin{aligned} a &= \rho \cos \lambda_c \\ b &= \rho \operatorname{sen} \lambda_c \\ c &= -\rho \operatorname{sen} \lambda_c \end{aligned}\right\} \quad c = -b
$$

As matrizes do sistema univariado equivalente serão:

$$
Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix} \qquad R = I_4
$$

Desta forma, temos que:

$$
\cdot\ Z_u \otimes I_{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{dimensão} \\ \text{de } p}}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\shortparallel \\ Z \text{ do multiva-} \\ \text{riado}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}
$$

$$
\cdot\ T_u \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & a \end{pmatrix}
$$

De forma geral:

$$\underset{\sim}{y}_t = (Z_U \otimes I_p)\underset{\sim}{\alpha}_t + \varepsilon_t \quad , \varepsilon_t \sim N(0, \underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon)$$

$$\underset{\sim}{\alpha}_{t+1} = (T_U \otimes I_p)\underset{\sim}{\alpha}_t + (R_U \otimes I_p)\eta_t \ , \ \eta_t \sim N(0, \underset{\sim}{\Sigma}_\eta)$$

Dúvida: matriz é cheia entre componentes?

ou apenas entre comp. equivalentes das séries?

→ Fatores comuns e cointegração

- Generalização do SUTSE: admitir que as séries têm certas propriedades em comum.
  - considerações a priori p/ decidir que componentes são candidatos a ter fatores comuns.

- Idéia p/ MNL bivariado:

(I)
$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{\varepsilon}_t \sim N(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon)$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t-1} \\ \mu_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix} \qquad \eta_t \sim N(0, \Sigma_\eta)$$

onde $\underset{\sim}{\Sigma}_\eta = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\eta_1} & \rho_\eta \sigma_{\eta_1}\sigma_{\eta_2} \\ \rho\sigma_{\eta_1}\sigma_{\eta_2} & \sigma^2_{\eta_2} \end{pmatrix}$

Obs: Nenhuma componente de uma série é transferida p/ outra. Dependência vem do fato que matrizes são cheias.

Modelo pode ser reescrito como:

(II)
$$\begin{aligned} y_{1t} &= \mu_{1t} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} &= \pi\mu_{1t} + \bar{\mu}_t + \varepsilon_{2t} \\ \mu_{1t} &= \mu_{1,t-1} + \eta_{1t} \\ \bar{\mu}_t &= \bar{\mu}_{t-1} + \bar{\eta}_t \end{aligned}$$

onde $\pi = \rho \dfrac{\sigma_{\eta_2}}{\sigma_{\eta_1}}$

$$\mathrm{var}\begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \bar{\eta}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\eta_1} & 0 \\ 0 & (1-\rho_\eta^2)\sigma^2_{\eta_2} \end{pmatrix}$$

⇒ Modelo equivalente onde Σ_η é diagonal.

Sistemas (I) e (II) são equivalentes pois: Dúvida Calcula FAC

provar!

(i) a estrutura de dependência dos y's permanece inalterada

(ii) a previsão dos y_t's e a função de verossimilhança permanecem inalteradas.

$\Rightarrow$ Sistema (II) é nova parametrização de (I) mas preserva características importantes.

É obtido através de transformação

$$\underset{\sim}{\alpha}_t = \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\alpha}_t^* \quad \text{onde } \det(B) \neq 0. \quad \Rightarrow \text{transformação não singular do vetor de estados}$$

Através desta nova parametrização, fica + explícita a identificação de componentes comuns.

Prova:

Da apostila

(a) Seja $\eta_{2t} = \pi\eta_{1t} + \bar{\eta}_t$ onde $\pi = \rho_\eta \dfrac{\sigma_{\eta_2}}{\sigma_{\eta_1}}$

(ou $\boxed{\bar{\eta}_t = \eta_{2t} - \pi\eta_{1t}}$)

Escreve $\bar{\eta}_t$ e calcula $E(\cdot)$, var$(\cdot)$ cov $[\eta_{1t}, \bar{\eta}_t]$

$\Rightarrow$ • $E[\bar{\eta}_t] = E[\eta_{2t} - \pi\eta_{1t}] = 0.$

• $\operatorname{cov}[\eta_{1t}, \bar{\eta}_t] = E(\eta_{1t}\bar{\eta}_t)$

$$= E[\eta_{1t}(\eta_{2t} - \pi\eta_{1t})]$$

$$= E[\eta_{1t}\eta_{2t}] - \pi E(\eta_{1t}^2)$$

$$= \rho_\eta\sigma_{1\eta}\sigma_{2\eta} - \left(\rho_\eta\frac{\sigma_{2\eta}}{\sigma_{1\eta}}\right)\sigma_{1\eta}^2 = 0.$$

• $\operatorname{var}(\bar{\eta}_t) = \operatorname{var}[\eta_{2t} - \pi\eta_{1t}]$

$$= \operatorname{var}[\eta_{2t}] + \pi^2\operatorname{var}[\eta_{1t}] - 2\pi\operatorname{cov}[\eta_{1t}, \eta_{2t}]$$

$$= \sigma_{\eta_2}^2 + \pi^2\sigma_{\eta_1}^2 - 2\pi\sigma_{\eta_1\eta_2}$$

$$= \sigma_{\eta_2}^2 + \rho_\eta^2\frac{\sigma_{\eta_2}^2}{\sigma_{\eta_1}^2}\cdot\sigma_{\eta_1}^2 - 2\rho_\eta\frac{\sigma_{\eta_2}}{\cancel{\sigma_{\eta_1}}}\rho_\eta\cancel{\sigma_{\eta_1}}\sigma_{\eta_2}$$

$$= \sigma_{\eta_2}^2 - \rho_\eta^2\sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\eta_2}^2(1 - \rho_\eta^2)$$

Logo: $\operatorname{cov}\begin{pmatrix}\eta_{1t}\\ \bar\eta_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{\eta_1}^2 & 0\\ 0 & \sigma_{\eta_2}^2(1-\rho_\eta^2)\end{pmatrix}$

(b) Escreve μ_{2t} c/ $\bar\eta_t$ na expressão.

Por outro lado:

$$\mu_{2t} = \mu_{2t-1} + \eta_{2t}$$
$$= \mu_{2,t-1} + \bar\eta_t + \pi\eta_{1,t}$$ escreve η_{1t} como expressão de μ_{1t}
$$= \mu_{2,t-1} + \bar\eta_t + \pi(\mu_{1,t} - \mu_{1,t-1})$$
$$\mu_{2t} - \pi\mu_{1t} = (\mu_{2,t-1} - \pi\mu_{1,t-1}) + \bar\eta_t$$

(c) Escreve $\bar\mu_t$

Seja $\bar\mu_t = \mu_{2t} - \pi\mu_{1t}$

$\therefore\ \bar\mu_t = \bar\mu_{t-1} + \bar\eta_t$

(d) Escreve y_{2t} como f(x) de μ_{1t} e $\bar\mu_t$

Então:

$$y_{2t} = \mu_{2t} + \varepsilon_{2t}$$
$$= \bar\mu_t + \pi\mu_{1t} + \varepsilon_{2t}$$

Logo, podemos escrever o modelo como:

$$\begin{cases} y_{1t} = \mu_{1t} + \varepsilon_{1t}\\ y_{2t} = \pi\mu_{1t} + \bar\mu_t + \varepsilon_{2t}\\ \mu_{1t} = \mu_{1t-1} + \eta_{1t}\\ \bar\mu_t = \bar\mu_{t-1} + \bar\eta_t\end{cases}$$

onde $\operatorname{cov}\begin{bmatrix}\eta_{1t}\\ \bar\eta_t\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{\eta_1}^2 & 0\\ 0 & \sigma_{\eta_2}^2(1-\rho_\eta^2)\end{pmatrix}$

<u>Do caderno</u>

(a) Escreve $\bar\eta_t$

Seja $\bar\eta_t = \eta_{2t} - \pi\eta_{1t}$ onde $\pi = \rho_\eta \dfrac{\sigma_{\eta_2}^2}{\sigma_{\eta_1}^2}$

$\therefore\ \eta_{2t} = \bar\eta_t + \pi\eta_{1t}$

(b) Escreve μ_2

$$\rightarrow \mu_{2t} = \mu_{2t-1} + \eta_{2t}$$
$$= \mu_{2t-1} + \bar\eta_t + \pi\eta_{1t}$$

(c) escreve η_{1t}

$$\therefore \mu_{2t} = \mu_{2,t-1} + \pi(\mu_{1t} - \mu_{1,t-1}) + \bar{\eta}_t$$

$$\mu_{2t} - \pi\mu_{1t} = (\mu_{2t-1} - \pi\mu_{t-1}) + \bar{\eta}_t$$

$$\therefore \bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1} + \bar{\eta}_t \quad \text{onde } \bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{2t} - \pi\bar{\mu}_{1t}$$

(d) escreve vetor de estado.

$\Rightarrow$ Logo, podemos escrever

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \bar{\mu}_t \end{pmatrix}}_{\alpha_t^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix}}_{\alpha_t}$$

$\Rightarrow \alpha_t^* = B\alpha_t$ onde $\det B = 1$: transformação não singular.

Prova propriedades (i) e (ii)

(i) Estrutura de dependência dos y_{it} permanece inalterada

No novo sistema

Dúvida

$$\begin{cases} y_{1t} = \mu_{1t} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \pi\mu_{1t} + \bar{\mu}_t + \varepsilon_{2t} \\ \mu_{1t} = \mu_{1t-1} + \eta_{1t} \\ \bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1} + \bar{\eta}_t \end{cases}$$

FAC Para y_{1t}

$$z_t = \Delta y_{1t} = \eta_{1t} + \Delta\varepsilon_{1t}$$

$$\gamma_0(z_t) = \sigma^2_{\eta_1} + 2\sigma^2_{\varepsilon_1}$$

$$\gamma_1(z_t) = -\sigma^2_{\varepsilon_1}$$

FAC Para y_{2t}

$$x_t = \Delta y_{2t} = \pi\Delta\mu_{1t} + \Delta\bar{\mu}_t + \Delta\varepsilon_{2t}$$

$$= \pi\eta_{1t} + \bar{\eta}_t + \Delta\varepsilon_{2t}$$

$$* \quad \gamma_0(x_t) = \pi^2\sigma^2_{\eta_1} + \sigma^2_{\bar{\eta}} + 2\sigma^2_{\varepsilon_2}$$

mas $\sigma^2_{\bar{\eta}} = var[\bar{\eta}.] = var[\eta_2 - \pi\eta_1]$

$$= \sigma^2_{\eta_2} + \pi^2\sigma^2_{\eta_1} - 2\pi\rho\sigma_{\eta_1}\sigma_{\eta_2}$$

$$= \sigma^2_{\eta_2} + \pi^2\sigma^2_{\eta_1} - 2\pi\,.\,\pi\sigma^2_{\eta_1}$$

$$= \sigma^2_{\eta_2} - \pi^2\sigma^2_{\eta_1}$$

$\pi = \rho\dfrac{\sigma_{\eta_2}}{\sigma_{\eta_1}}$

$\therefore \rho = \pi\dfrac{\sigma_{\eta_1}}{\sigma_{\eta_2}}$

$\therefore \gamma_0(x_t) = \sigma^2_{\eta_2} + 2\sigma^2_{\varepsilon_2}$

* $\gamma_1(x_t) = cov[\Delta y_{2,t}, \Delta y_{2,t-1}]$

$$= cov[\pi\eta_{1t} + \bar{\eta}_t + \Delta\varepsilon_{2t}\,;\, \pi\eta_{1t-1} + \bar{\eta}_{t-1} + \Delta\varepsilon_{2t-1}]$$

$$= -\sigma^2_{\varepsilon_2}$$

E $cov(y_{1t}, y_{2t})$

$$cov(\Delta y_{1t}, \Delta y_{2t}) = cov[(\eta_{1t} + \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{1t-1}), (\pi\eta_{1t} + \bar{\eta}_t + \varepsilon_{2t} - \varepsilon_{2t-1})]$$

$$= \pi\sigma^2_{\eta_1} + \underbrace{cov(\cancel{\eta_{1t}}, \bar{\eta}_t)}_{0} + cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) + cov(\varepsilon_{1,t-1}, \varepsilon_{2,t-1})$$

$$= \pi\sigma^2_{\eta_1} + 0 + 2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \pi\sigma^2_{\eta_1} + 2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

ou $cov(\Delta y_{1t}, \Delta y_{2t}) = cov[(\eta_{1t} + \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{1t-1}), (\eta_{2t} + \varepsilon_{2t} - \varepsilon_{2t-1})]$

$$= cov(\eta_{1t}, \eta_{2t}) + 2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$= \sigma_{\eta_1\eta_2} + 2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

mas $\pi\sigma^2_{\eta_1} = \rho\dfrac{\sigma_{\eta_2}}{\sigma_{\eta_1}}\cdot\sigma^2_{\eta_1} = \rho\sigma_{\eta_2}\sigma_{\eta_1} = \sigma_{\eta_1\eta_2}$ ok!

(ii) Previsão dos y_t's e função de verossimilhança permanecem inalteradas.

Na forma EE

mam.

(I) $y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Z} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} \mu_{1t-1} \\ \mu_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix}$$

Param. (II)

$$\underset{\sim}{y}_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \bar{\mu}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \bar{\mu}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{1t-1} \\ \bar{\mu}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \bar{\eta}_t \end{pmatrix}$$

Seja o modelo original na forma EE

$$\begin{cases} \underset{\sim}{y}_t = Z \underset{\sim}{\alpha}_t + \underset{\sim}{\varepsilon}_t \\ \underset{\sim}{\alpha}_t = T \underset{\sim}{\alpha}_{t-1} + R \eta_t \end{cases}$$

Seja $\alpha_t^* = B \alpha_t$

Ver lista 1

provar

ou

Dada nova parametrização:

$$\begin{cases} y_{1t} = \mu_{1t} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \pi \mu_{1t} + \bar{\mu}_t + \varepsilon_{2t} \\ \mu_{1t} = \mu_{1t-1} + \eta_{1t} \\ \bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1} + \bar{\eta}_t \end{cases} \qquad cov\begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \bar{\eta}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\eta_1} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\eta_1}(1-\rho^2_\eta) \end{pmatrix}$$

- se $\rho^2_\eta = \pm 1 \Rightarrow Var(\bar{\eta}_t) = 0$

$\therefore \bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1} \Rightarrow$ constante $\forall t$

Teremos apenas uma componente de tendência comum (μ^+_t)

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{1t} = \mu^+_t + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \pi \mu^+_t + \bar{\mu} + \varepsilon_{2t} \\ \mu^+_t = \mu^+_{t-1} + \eta^+_t \qquad \text{onde } \eta^+_t \sim N(0, \sigma^2_{\eta_1}) \end{cases}$$

- Nesse caso, se $\pi = 1$ $\left(\text{mas } \pi = \rho \dfrac{\sigma_{\eta_1}}{\sigma_{\eta_2}} \right)$

$$\left. \begin{aligned} y_{1t} &= \mu^+_t + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} &= \mu^+_t + \bar{\mu} + \varepsilon_{2t} \end{aligned} \right\rangle \mu_{1t} - \mu_{2t} = \bar{\mu}$$

Diferença entre duas tendências é constante $= \bar{\mu} \ \forall t$

$\Rightarrow$ Modelo de <u>balanced growth</u>

- Se ainda $\bar{\mu} = 0$: $\mu_{1t} = \mu_{2t}$

$\Rightarrow$ Tendências <u>idênticas</u>

— // —

A parte

Co-integração

Processo estocástico p-variado $\underset{\sim}{y_t} = (y_{1t} \; y_{2t} \; \dots \; y_{pt})$ é dito co-integrado de ordens $\underline{d}$ e $\underline{b}$, $b \leq d$, i.e.

$\underset{\sim}{y_t} \sim CI(d, b)$ se

(i) $y_{jt} \sim I(d)$, $j = 1, 2, \dots, p$: cada um dos elementos é integrado da mesma ordem (ou seja: mesmo nº de vezes a diferenciar p/ se tornar estacionário)

(ii) $\exists \underset{\sim}{\alpha} \in \mathbb{R}^p - \{0\}$ tal que $\underset{\sim}{\alpha}' y_t \sim I(d-b)$: combinação linear precisa ter ordem de integração menor do que cada série individualmente

Exemplo:

Se $y_{jt} \sim I(1)$ e são CI $\Rightarrow \exists \underset{\sim}{\alpha}' y \sim I(0)$: existe CL das séries que será estacionária
ou seja $d = 1$ $(b = 1)$

→ Intuição:

- Séries não estacionárias não tem atrator
- Mas há uma classe que pode variar de forma não estacionária porém c/ alguma sincronia, não divergem muito por conta de forças econômicas comuns
- Conceito p/ séries multivariadas ñ estacionárias (Não se aplica a séries estacionárias. Nesse caso fala-se em correlação)

Exs: Títulos da dívida c/ maturidades ≠s.
Petróleo, gasolina e diesel
consumo e renda agregada.

⇒ O fato de ser co-integrado ocorre por conta de um fator comum (componente comum entre as séries)

No modelo (I) reparametrizado com $\rho = \pm 1$

$$\begin{cases} y_{1t} = \mu_t^+ + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \pi \mu_t^+ + \bar{\mu} + \varepsilon_{2t} \\ \mu_t^+ = \mu_{t-1}^+ + \eta_t^+ \end{cases}$$

y_{1t} e y_{2t} não são estacionárias pois μ_t^+ é RW.

$\Rightarrow$ y_{1t} e y_{2t} são $I(1)$

Para verificarmos se y_{1t} e y_{2t} são CI.

- Já sabemos que têm d comum: $d = 1$ (ambas são $I(1)$)
- Precisamos ver se $\exists \alpha' y_t \sim I(0)$ estacionário

Ou seja, queremos: $\alpha_1 y_{1t} + \alpha_2 y_{2t} \sim I(0)$

onde α_1, α_2 são arbitrários

Escolhendo $\begin{cases} \alpha_1 = -\pi \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad -\pi y_{1t} + y_{2t} = -\pi(\mu_t^+ + \varepsilon_{1t}) + \pi \mu_t^+ + \bar{\mu} + \varepsilon_{2t} =$$

$$= -\pi \mu_t^+ - \pi \varepsilon_{1t} + \pi \mu_t^+ + \bar{\mu} + \varepsilon_{2t} =$$

$$= \varepsilon_{2t} - \pi \varepsilon_{1t} + \bar{\mu} \sim I(0) \quad \text{é estacionário.}$$

Logo: Para $\rho = 1$, temos condição suficiente p/ existência de componente comum (séries ficam co-integradas)

$\Rightarrow$ Portanto, de forma equivalente ao modelo acima:

$$\begin{cases} y_{1t} = \mu_t^+ + \varepsilon_{1t} & t = 1, \dots, T \\ y_{2t} = \pi y_{1t} + \bar{\mu} + \varepsilon_t \end{cases}$$

Este modelo pode ser estimado diretamente.

Esta formulação permite estimar π por regressão de y_{2t} em y_{1t} e formular TH p/ verificar se de fato são co-integradas.

Dúvida

apostila pág 10.

aula 15/06 (final) + 22/06

Modelo de Nível Local Multivariado

1) SUTSE irrestrito

$$\begin{cases} \underset{p\times 1}{\underset{\sim}{y}_t} = \underset{p\times 1}{\underset{\sim}{\mu}_t} + \underset{\sim}{\varepsilon}_t \quad , \quad \underset{\sim}{\varepsilon}_t \sim N(0, \underbrace{\Sigma_\varepsilon}_{p\times p}) \\ \underset{\sim}{\mu}_t = \underset{\sim}{\mu}_{t-1} + \underset{\sim}{\eta}_t \quad , \quad \underset{\sim}{\eta}_t \sim N(0, \underbrace{\Sigma_\eta}_{p\times p}) \end{cases}$$

ε_t e η_t são independentes $\forall t$

uma componente p/ cada y : $p\times 1$

obs ⇒ Modelo + geral no que diz respeito a parâmetros.
Muitos parâmetros p/ estimar, o que gera problemas na estimação/converg.
Uma simplificação é usar modelo homogêneo — Dúvida: relação?

- Considere a seguinte partição:

$$\Sigma_\eta = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

onde Σ_η tem posto cheio

$\Sigma_{11} \sim k\times k$

$\Sigma_{12} \sim r\times k$ onde $r = p-k$

Particionando todas as variáveis do problema de forma correspondente

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad y_{1t}, \varepsilon_{1t}: k\times 1; \quad y_{2t}, \varepsilon_{2t}: r\times 1$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t-1} \\ \mu_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix} \qquad \mu_{1t}, \eta_{1t}: k\times 1; \quad \mu_{2t}, \eta_{2t}: r\times 1$$

Seja $L \triangleq \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -\Pi & I_r \end{pmatrix}$ ⟶ equivalente à matriz B p/ transformar α_t em α_t^+ e enxergar fator comum.

obs: usaremos L p/ efetuar transformações não singulares p/ preservar propriedades fundamentais inalteradas e conseguir reescrever/avaliar a existência de componentes comuns/co-integração.

→ Multiplicando a equação de estado por L, temos:

$$L\begin{pmatrix}\mu_{1t}\\ \mu_{2t}\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}\mu_{1,t-1}\\ \mu_{2,t-1}\end{pmatrix} + L\begin{pmatrix}\eta_{1t}\\ \eta_{2t}\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}I_k & 0\\ -\pi & I_n\end{pmatrix}}_{n\times k}\begin{pmatrix}\overset{k\times 1}{\mu_{1t}}\\ \mu_{2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_k & 0\\ -\pi & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_{1,t-1}\\ \mu_{2,t-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}I_k & 0\\ -\pi & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{1t}\\ \eta_{2t}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\mu_{1t} = \mu_{1t-1} + \eta_{1t} & (k\times 1)\\ -\pi\mu_{1t} + \mu_{2t} = -\pi\mu_{1,t-1} + \mu_{2t-1} - \pi\eta_{1t} + \eta_{2t} & (n\times 1)\end{cases}$$

Seja $\bar{\mu}_t = \mu_{2t} - \pi\mu_{1t}$ $(n\times 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\mu_{1t} = \mu_{1,t-1} + \eta_{1t} & (k\times 1)\\ \bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1} + \bar{\eta}_t & (n\times 1)\end{cases} \Rightarrow L\begin{pmatrix}\mu_{1t}\\ \mu_{2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_{1t}\\ \bar{\mu}_t\end{pmatrix}$$

→ Para a equação de observação, podemos escrever:

$$y_t = \begin{pmatrix}y_{1t}\\ y_{2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_{1t}\\ \mu_{2t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{pmatrix}$$

$$= L^{-1}\underbrace{L\begin{pmatrix}\mu_{1t}\\ \mu_{2t}\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}\mu_{1t}\\ \bar{\mu}_t\end{pmatrix}} + \begin{pmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{pmatrix} =$$

$$= L^{-1}\begin{pmatrix}\mu_{1t}\\ \bar{\mu}_t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{pmatrix}$$

onde $L^{-1} = \frac{1}{\underset{\downarrow\ 1}{\det L}}\begin{pmatrix}I_k & \pi\\ 0 & I_n\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow y_t = \begin{pmatrix}y_{1t}\\ y_{2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_k & \pi\\ 0 & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_{1t}\\ \bar{\mu}_t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{pmatrix}$$

Na nova parametrização temos:

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & \pi \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \bar{\mu}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \bar{\mu}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t-1} \\ \bar{\mu}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \bar{\eta}_t \end{pmatrix} \qquad \text{onde } \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \bar{\eta}_t \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Sigma_{\eta^*} \right)$$

onde $\Pi = \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1}$

dúvida: é definido a priori?

Escolhido p/ matriz de cov diagonal

Calculemos Σ_{η^*}

$$\eta^* = L\eta \qquad (\text{ou } \mu^* = L\mu)$$

$$\text{cov}[L\eta] = L \Sigma_\eta L'$$

$$= \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -\Pi & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & -\Pi' \\ 0 & I_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ -\Pi\Sigma_{11} + \Sigma_{21} & -\Pi\Sigma_{12} + \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & -\Pi' \\ 0 & I_n \end{pmatrix} =$$

$$-\Pi\Sigma_{11} + \Sigma_{21} = -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{11} + \Sigma_{21} = 0$$

$$\text{cov}[L\eta] = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ 0 & -\Pi\Sigma_{12} + \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & -\Pi' \\ 0 & I_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & -\Sigma_{11}\Pi' + \Sigma_{12} \\ 0 & -\Pi\Sigma_{12} + \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$$-\Sigma_{11}\left(\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\right)' + \Sigma_{12} =$$

$$= -\Sigma_{11}\left(\Sigma_{11}^{-1}\right)'\Sigma_{21}' + \Sigma_{12} =$$

$$= -\Sigma_{12} + \Sigma_{12} = 0.$$

$$= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & -\Pi\Sigma_{12} + \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$$-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} + \Sigma_{22} =$$

$$= \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$$

Logo: $\text{cov}[L\eta] = \text{cov}[\eta^*] = \Sigma_{\eta^*} = \text{cov}\begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \bar{\eta}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{\bar{\eta}} \end{pmatrix}$

onde $\Sigma_{\bar{\eta}} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$

2) Parametrização do SUTSE

Renomeando $\mu_{1t} = \mu_t^+$, o modelo reparametrizado pode ser reescrito como:

$$y_{1t} = \mu_t^+ + \varepsilon_{1t}$$
$$y_{2t} = \pi\mu_t^+ + \bar{\mu}_t + \varepsilon_{2t}$$
$$\mu_t^+ = \mu_{t-1}^+ + \eta_t^+ \qquad \eta_t^+ \sim N(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{\Sigma}_{\eta^+}) \qquad \text{onde } \Sigma_{\eta^+} = \Sigma_{11}$$
$$\bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1} + \bar{\eta}_t \qquad \bar{\eta}_t \sim N(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{\Sigma}_{\bar{\eta}}) \qquad \text{onde } \Sigma_{\bar{\eta}} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$$

$$\text{e} \quad \text{cov}\begin{pmatrix} \eta_t^+ \\ \bar{\eta}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\eta^+} & 0 \\ 0 & \Sigma_{\bar{\eta}} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

Esta parametrização está pronta p/ discutir a questão de componentes comuns.

3) Modelo com níveis comuns.

Agora: queremos condições suficientes p/ existência de componentes comuns

(No caso do MNL, estamos buscando no nível)

Devemos olhar posto $\underline{\underline{\Sigma_\eta}}$: se tiver posto cheio, não há componentes comuns. (todas são LI)

$\Rightarrow$ Se posto $(\Sigma_\eta) = K < p \Rightarrow \mu_t^+$ contém $\underline{\underline{K}}$ níveis comuns.

com Σ_η^+ pd e $\Sigma_{\bar{\eta}} = 0$, $\underline{\underline{\text{teremos}}}$:

dúvida:
posto $\Sigma_\eta = K < p$
implica
em μ_t^+ K níveis
comuns $\underline{\underline{e}}$ $\Sigma_{\bar{\eta}} = 0$?
ou se $\Sigma_{\bar{\eta}} = 0$ tb é
que μ_t^+ tem K comuns?

$\underline{\underline{\text{Dúvida}}}$:
se $\Sigma_{\bar{\eta}} = 0$ de Σ_η
o posto já
não é cheio!

$$(II')\quad \begin{cases} y_{1t} = \mu_t^+ + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \Pi \mu_t^+ + \bar{\mu} + \varepsilon_{2t} \\ \underset{k}{\mu_t^+} = \mu_{t-1}^+ + \eta_t^+ \end{cases}$$

onde $\eta_t^+ \sim N(0, \Sigma_\eta^+)$ ⇒ apenas k componentes evoluem segundo processo PA.

⇒ Esta é uma forma específica do MNL onde as primeiras k componentes são direcionadas por μ_t^+ e outras (p-k) são CL de μ_t^+

Assim, na prática, para determinar se um ME possui "componentes comuns", observa-se o posto da matriz covariância dos choques dessa componente (no caso p = 2 ⇔ $\rho_{\eta_1,\eta_2} = 1$

Partindo de um SUTSE genérico, p/ ver se há comp. comuns

⇒ olha posto Σ_η

dúvida: p/ parametriza?

p/ $p = 2$: $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\rho} = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$

se $\hat{\rho} \simeq 1$: há uma componente comum.

obs: p/ p = 2: podemos ter até uma comp. comum.
p/ p genérico: " " k comp. comuns.

Nyblom e Harvey (2001) ⇒ testes formais p/ verificar existência de comp. comuns no arcabouço de ME

MODELOS ROTACIONADOS

Modelo (IIa) não é de fácil implementação.

Como componentes NO não são únicas, podemos procurar outro conjunto de " que apresentem melhor interpretação

Do modelo (IIa), podemos escrever

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k \\ \pi \end{pmatrix} \mu_t^+ + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\mu_t^+ = \mu_{t-1}^+ + \eta_t^+ \qquad \eta_t^+ \sim NID(0, \Sigma_\eta^+)$$

seja $\mu_t^* = (\Sigma_{\eta^+})^{-1/2} \mu_t^+$ a nova componente

$$\Rightarrow \mu_t^+ = (\Sigma_{\eta^+})^{1/2} \mu_t^*$$

Substituindo na eq. de estado:

$$(\Sigma_{\eta^+})^{1/2} \mu_t^* = (\Sigma_{\eta^+})^{1/2} \mu_{t-1}^* + \eta_t^+$$

Fazendo tb: $\eta_t^+ = (\Sigma_{\eta^+})^{1/2} \eta_t^*$

$$\Rightarrow (\Sigma_{\eta^+})^{1/2} \mu_t^* = (\Sigma_{\eta^+})^{1/2} \mu_{t-1}^* + (\Sigma_{\eta^+})^{1/2} \eta_t^*$$

$$\therefore \boxed{\mu_t^* = \mu_{t-1}^* + \eta_t^*} \qquad \text{onde } \eta_t^* \sim N(0, \underbrace{(\Sigma_{\eta^+})^{-1/2} \Sigma_{\eta^+} (\Sigma_{\eta^+})^{1/2}}_{I_k})$$

$$\sim N(0, I_k)$$

Na eq. de observação:

$$y_t = \begin{pmatrix} I_k \\ \pi \end{pmatrix} \mu_t^+ + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$= \begin{pmatrix} I_k \\ \pi \end{pmatrix} \Sigma_{\eta^+}^{1/2} \mu_t^* + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

Seja $\pi^{+} = (I, \pi')'$

$\Theta = \pi^{+} \Sigma_\eta^{-1/2}$

$\mu_\theta = (0, \bar{\mu}')'$

Então y_t pode ser reescrito como.

$$\begin{cases} y_t = \Theta \mu_t^* + \mu_\theta + \varepsilon_t & \varepsilon_t \sim N(0, \Sigma_\varepsilon) \\ \mu_t^* = \mu_{t-1}^* + \eta_t^* & \eta_t^* \sim N(0, I_k) \end{cases}$$

Fatores comuns nas sas mais correlatados e têm variância unitária

$\Rightarrow$ Este é o ponto de partida p/ começarmos a fazer rotações (a partir da obtenção de componentes ortogonais)

· Se $(\Sigma_{\eta^+})^{1/2}$ for triangular superior $\Rightarrow$ Θ será tal que $\theta_{ij} = 0$ p/ $j > i$