NOTAS DE AULA - II

⇒ Generalização da decomposição de B&N

• Seja y_t um processo ARIMA(p,1,q) com drift. Então segue que:

$$\Phi_p(L)\Delta y_t = a_0 + \Theta_q(L)\varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \Phi_p^{-1}(L)a_0 + \Phi_p^{-1}(L)\Theta_q(L)\varepsilon_t$$

• Sejam: $a_0^1 = \dfrac{a_0}{1-\varphi_1-\ldots-\varphi_p}; \quad \psi(L) \hat{=} \dfrac{\Theta(L)}{\Phi(L)}$

• Segue, portanto que:

$$\Delta y_t = a_0^1 + \Psi(L)\varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = a_0^1 + u_t, u_t = \Psi(L)\varepsilon_t$$

$$y_t = a_0^1 + y_{t-1} + u_t$$

$$y_t = y_0 + a_0^1 t + \sum_{i=1}^{t} u_i$$

• Projetemos esta eq. s-passos à frente:

$$y_{t+s} = y_0 + a_0^1(t+s) + \sum_{i=1}^{t+s} u_i$$

$$y_{t+s} = y_t + a_0^1 s + \sum_{i=t+1}^{t+s} u_i$$

• Concentremo-nos agora no último termo desta expressão. Lembremos que:

$$u_t = \Psi(L)\varepsilon_t = (1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L + \Psi_1 L^2 + \ldots)\varepsilon_t$$

$$u_t = \varepsilon_t + \Psi_1\varepsilon_{t-1} + \Psi_2\varepsilon_{t-2} + \ldots$$

$$u_{t+i} = \varepsilon_{t+i} + \Psi_1\varepsilon_{t+i-1} + \Psi_2\varepsilon_{t+i-2} + \ldots$$

- Segue portanto que:

$$\sum_{i=1}^{s} u_{t+i} = \sum_{i=1}^{s}\varepsilon_{t+i} + \psi_1\sum_{i=1}^{s}\varepsilon_{t+i-1} + \psi_2\sum_{i=1}^{s}\varepsilon_{t+i-2} + \ldots$$

$$= (\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3} + \ldots + \varepsilon_{t+s}) + \psi_1(\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3} + \ldots + \varepsilon_{t+s-1})$$

$$+\psi_2(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3} + \ldots + \varepsilon_{t+s-2}) + \ldots + \psi_s(\varepsilon_{t+1-s} + \varepsilon_{t+2-s} + \ldots + \varepsilon_t) +$$

$$+\psi_{s+1}(\varepsilon_{t-s} + \varepsilon_{t+1-s} + \ldots + \varepsilon_{t-1}) + \ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\varepsilon_{t+i} + \varepsilon_t\sum_{i=1}^{s}\psi_i + \varepsilon_{t-1}\sum_{i=2}^{s+1}\psi_i + \varepsilon_{t-2}\sum_{i=3}^{s+2}\psi_i + \ldots$$

- A projeção de y, s-passos à frente, será dada por:

$$y_{t+s} = y_0 + a_0^1(t+s) + \sum_{i=1}^{s} u_{t+i}$$

$$y_{t+s} = y_t + a_0^1 s + \left(\sum_{i=1}^{s}\varepsilon_{t+i} + \varepsilon_t\sum_{i=1}^{s}\psi_i + \varepsilon_{t-1}\sum_{i=2}^{s+1}\psi_i + \varepsilon_{t-2}\sum_{i=3}^{s+2}\psi_i + \ldots\right)$$

- Finalmente, avaliando $E(y_{t+s}|Y_{\mathbf{t}})$, chega-se à:

$$\hat{y}_{t+s/t} = y_t + a_0' s + \left(\varepsilon_t\sum_{i=1}^{s}\psi_i + \varepsilon_{t-1}\sum_{i=2}^{s+1}\psi_i + \varepsilon_{t-2}\sum_{i=3}^{s+2}\psi_i + \ldots\right)$$

- Finalmente utilizando a definição de tendência estocástica na decomposição de B&N (B&N-I):

$$\mu_t = \lim_{s\to\infty}(\hat{y}_{t+s/t} - a_0^1 s) = y_t + \varepsilon_t \sum_{i=1}^{\infty}\psi_i + \varepsilon_{t-1}\sum_{i=2}^{\infty}\psi_i + \varepsilon_{t-2}\sum_{i=3}^{\infty}\psi_i + \ldots$$

- Operacionalmente, a decomposição de B&N pode ser efetuada a partir de outro caminho (B&N-II):

$$y_{t+s} = \Delta y_{t+s} + \Delta y_{t+s-1} + \ldots + \Delta y_{t+1} + y_t$$

$$\lim_{s\to\infty}\hat{y}_{t+s/t} = \lim_{s\to\infty}(\Delta\hat{y}_{t+s/t} + \Delta\hat{y}_{t+s-1/t} + \ldots + \Delta\hat{y}_{t+1/t}) + y_t$$

Portanto:

$$\mu_t = \lim_{s\to\infty}(\hat{y}_{t+s/t} - a_0^1 s) = \lim_{s\to\infty}[(\Delta\hat{y}_{t+s/t} + \Delta\hat{y}_{t+s-1/t} + \ldots + \Delta\hat{y}_{t+1/t}) + y_t - a_0^1 s].$$

- A componente irregular/ciclo será calculada usando que $e_t \triangleq y_t - \mu_t$.

- Na prática B&N-I será mais adequado para estimar processos ARIMA(0,1,q), enquanto que B&N-II para estimar processos ARIMA(p,1,q).

- EXEMPLO: y ~ ARIMA(0,1,1)

$\Rightarrow$ Por B&N-I

$$y_t = y_{t-1} + a_0 + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$
$$\Psi_1 = \theta, \Psi_i = 0, i \geq 2.$$
$$\mu_t = \lim_{s\to\infty}(\hat{y}_{t+s/t} - a_0^1 s) = y_t + \varepsilon_t \sum_{i=1}^{\infty}\psi_i + \varepsilon_{t-1}\sum_{i=2}^{\infty}\psi_i + \varepsilon_{t-2}\sum_{i=3}^{\infty}\psi_i + \ldots$$
$$\mu_t = y_t + \varepsilon_t\theta$$

$\Rightarrow$ Por B&N-II

$$\hat{y}_{t+s/t} = (\Delta\hat{y}_{t+s/t} + \Delta\hat{y}_{t+s-1/t} + \ldots + \Delta\hat{y}_{t+1/t}) + y_t$$

$$s = 1 \quad \Delta\hat{y}_{t+1/t} = E_t(\Delta y_{t+1}) = \hat{y}_{t+1/t} - y_t = (a_0 + y_t + \theta\varepsilon_t) - y_t = a_0 + \theta\varepsilon_t$$
$$s = 2 \quad \Delta\hat{y}_{t+2/t} = E_t(\Delta y_{t+2}) = \hat{y}_{t+2./t} - \hat{y}_{t+1/t}$$
$$= (2a_0 + y_t + \theta\varepsilon) - (a_0 + y_t + \theta\varepsilon_t) = a_0$$
...
$$s = s \quad \Delta\hat{y}_{t+s/t} = E_t(\Delta y_{t+s}) = \hat{y}_{t+s/t} - \hat{y}_{t+s-1/t} = a_0$$
$$\text{portanto} \quad \sum_{i=1}^{s}\Delta\hat{y}_{t+i/t} = sa_0 + \varepsilon_t\theta.$$

$$\mu_t = \lim_{s\to\infty}(\hat{y}_{t+s/t} - a_0^1 s) = \lim_{s\to\infty}[(\Delta\hat{y}_{t+s/t} + \Delta\hat{y}_{t+s-1/t} + \ldots + \Delta\hat{y}_{t+1/t}) + y_t - a_0^1 s]$$
$$= \lim_{s\to\infty}[\sum_{i=1}^{s}\Delta\hat{y}_{t+i/t} + (y_t - a_0^1 s)] = \lim_{s\to\infty}[sa_0^1 + \varepsilon_t\theta + (y_t - a_0^1 s)] =$$
$$= y_t + \varepsilon_t\theta.$$

- Decomposição de B&N na prática:

i. identifica e estima um modelo ARMA(p,q) para Δy, obtendo valores para

$$a_0^1 \text{ e } \psi(L) \hat{=} \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}$$

ii. usando o modelo estimado, avaliar para cada t e s:

$$\hat{y}_{t+s/t},\ t = 1,2,\ldots,T;\ s = 1,2,\ldots,\infty$$

iii. para cada valor de t construir as somas, usando s=100.

$$\sum_{i=1}^{s} \Delta\hat{y}_{t+i/t} + y_t$$

Ex: y= log(r_t / r_{t-1}), onde r_t é taxa de câmbio yen/dólar.

$$\text{modelo estimado: } y_t \sim \text{ARIMA}(0,1,1)$$
$$\Delta y_t = -0.0116 + \varepsilon_t + 0.3683\ \varepsilon_{t-1}$$

Por uma questão de generalidade iremos utilizar B&N-II.

$$\mu_t = \lim_{s\to\infty}[\sum_{i=1}^{s} \Delta\hat{y}_{t+i/t} + (y_t - a_0^1 s)]$$

$$\Delta\hat{y}_{t+1/t} = -0.0116 + 0.3696\varepsilon_t$$

$$\Delta\hat{y}_{t+2/t} = -0.0116$$

...

$$\Delta\hat{y}_{t+100/t} = -0.0116$$

$$\sum_{i=1}^{100} \Delta\hat{y}_{t+i/t} = 100(-0.0116) + 0.3696\varepsilon_t = -1.16 + 0.3696\varepsilon_t$$

$$\text{Por tan to} \quad \mu_t = \lim_{s\to\infty}[\sum_{i=1}^{s} \Delta\hat{y}_{t+i/t} + (y_t - a_0^1 s)]$$

$$= -1.16 + 0.3696\varepsilon_t + y_t - 0.0116\ 100$$

$$= 0.3696\varepsilon_t + y_t$$

⇒ **Observações gerais sobre a decomposição de B&N:**

i. sempre existirá para um processo I(1).

ii. as inovações que impactam a tendência e o ciclo são perfeitamente correlacionadas, o que para alguns faz sentido econômico.

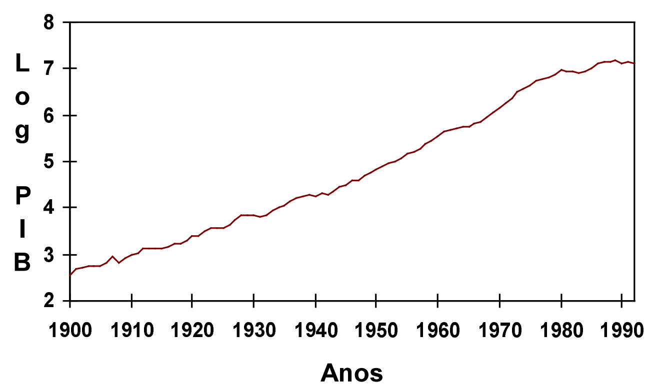
Ex: os choques do petróleo nos EUA - afetaram, simultaneamente, o potencial de crescimento de longo prazo do PIB (tendência) e os movimentos de curto prazo do PIB (ciclo).

iii. é um filtro assimétrico, pois somente utiliza a observação corrente e o passado para estimar a tendência corrente.

Esta característica contrasta o filtro B&N, um filtro de previsão, com a tendência de um ME, que é um alisamento exponencial.

- EX: série anual do PIB brasileiro, entre 1900 e 1992. Os valores do PIB entre 1900 e 1946 foram estimados por Haddad (1974) e a partir de 1947, os dados foram obtidos do IBGE.

Fig 1. Ln do Produto Interno Brasileiro
(1900-1992)



- A seguir apresentaremos a estimativa da componente cíclica e de tendência usando TS e a decomposição de B&N.

⇒ Tendência determinística

$$y_t = -100.69 + 0.0542\,t$$
$$\quad (1.256) \qquad (0.000645)$$

Fig 3. Tendência Determinística

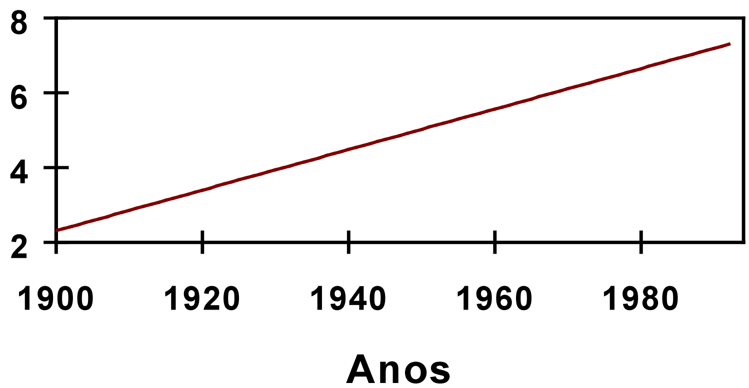
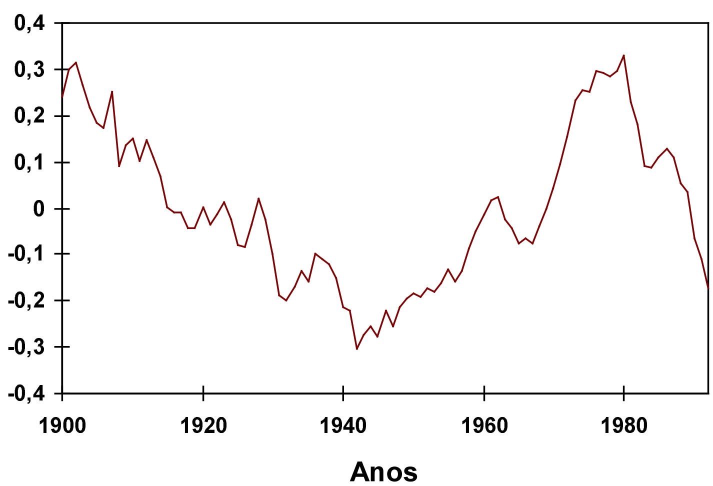


Fig 2. Ciclo Determinístico



- O gráfico sugere a existência de um ciclo com período maior do que o ciclo de Kondratieff que tem uma duração de 40 a 60 anos.

⇒ Tendência estocástica: decomposição de B&N

- O seguinte modelo ARMA foi encontrado para a primeira diferença do log da série do PIB

$$(1\text{-}0.0653\ L)\Delta \log Y_t = \varepsilon_t$$

- Entretanto o coeficiente autorregressivo não é significante, indicando que a série segue um passeio aleatório.

Fig 5. Tendência de Beveridge - Nelson

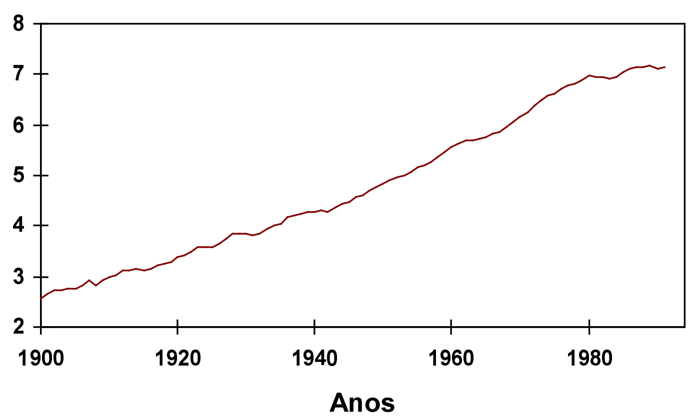
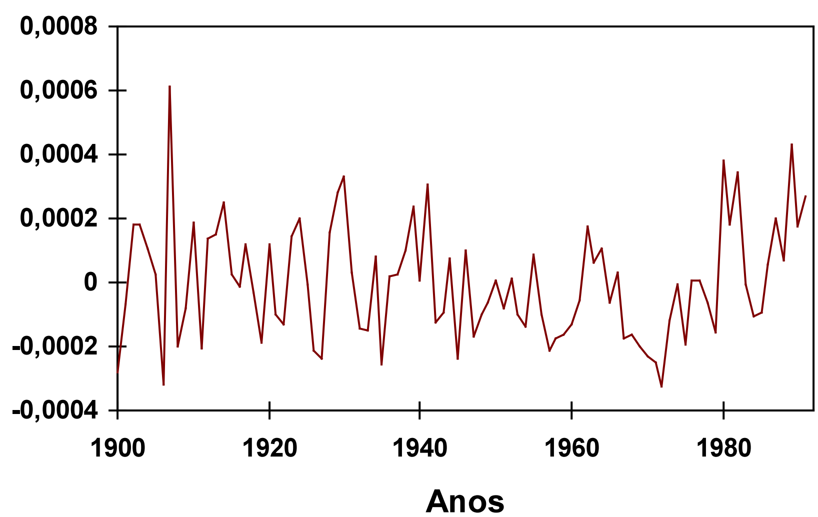


Fig 4. Ciclo de Beveridge-Nelson



- O gráfico indica claramente que a componente cíclica é desprezível, contrariando a evidência do modelo determinístico !

- Portanto, a partir do procedimento de B&N podemos concluir que não existe componente cíclica no PIB brasileiro, e que portanto, os choques monetários e fiscais, direcionados a esta componente são ineficazes, devendo o governo se preocupar com as medidas de impacto de longo termo, tais como: investimentos em educação, tecnologia e produtividade.

⇒ Outras decomposições de tendência/ciclo

iv. modelo de nível local c/ drift (Harvey)

$$-\text{eq. das observ.:} \quad y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2_\varepsilon) \qquad (I)$$

$$-\text{eq. do estado:} \quad \mu_t = a_0 + \mu_{t-1} + \eta_t \quad \eta_t \sim N(0,\sigma^2_n) \qquad (II)$$

$$\text{onde } E(\varepsilon_t \eta_s) = 0, \ \forall\ t,s.$$

- Observe que, contrário, a decomposição de B&N, as componentes nível e irregular são <u>descorrrelatadas</u>.

- Resolvendo cada uma das eqs.acima segue que:

$$\mu_t = \mu_0 + a_0 t + \sum_{i=1}^{t} \eta_i, \ \text{portanto}$$

$$y_t = \mu_0 + a_0 t + \sum_{i=1}^{t} \eta_i + \varepsilon_t.$$

- Vamos agora provar que μ é realmente a tendência estocástica deste modelo, embora isso seja óbvio, por construção.

$$y_{t+s} = \mu_0 + a_0(t+s) + \sum_{i=1}^{t+s} \eta_i + \varepsilon_{t+s}$$

$$y_{t+s} = (y_t - \varepsilon_t) + a_0 s + \sum_{i=1}^{s} \eta_{t+i} + \varepsilon_{t+s}$$

$$y_{t+s} = \mu_t + a_0 s + \sum_{i=1}^{s} \eta_{t+i} + \varepsilon_{t+s}$$

donde segue que:

$$\hat{y}_{t+s/t} = \hat{\mu}_t + a_0 s.$$

- Portanto

$$\lim_{s\to\infty}(\hat{y}_{t+s/t} - a_0 s) = \mu_t .$$

- A questão agora é saber como estimar μ_t.

- Apresentaremos, inicialmente, um procedimento heurístico para estimar μ_t.

- A verdadeira solução para este problema de estimação, como veremos, será dado pelo filtro de Kalman, a partir do qual poder-se-á obter a estimativa suavizada da tendência.

$\Rightarrow$ Estimação de μ_t

- Diferenciando a eq (I), obtemos a seguinte equação, a qual denominamos de parametrização original:

$$\Delta y_t^{(0)} = \Delta\mu_t + \Delta\varepsilon_t = a_0 + \eta_t + \Delta\varepsilon_t$$

donde segue que:

$$E(\Delta y_t^{(0)}) = a_0$$

$$Var(\Delta y_t^{(0)}) = \sigma_n^2 + 2\sigma_\varepsilon^2 \qquad \text{(a)}$$

$$\begin{aligned} Cov(\Delta y_t^{(0)}, \Delta y_{t+1}^{(0)}) &= -\sigma_\varepsilon^2 \quad i = 1 \qquad \text{(b)} \\ &= 0 \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

- Das propriedades (a) e (b) segue que Δy ~ MA(1), ou seja, y ~ ARIMA(0,1,1).

- Portanto podemos reescrever Δy como um processo MA(1) com drift:

$$\Delta y_t = a_0 + e_t + \theta e_{t-1}, \quad e_t \sim N(0,\sigma_e^2)$$

donde segue que:

$$\mathrm{Var}(\Delta y_t) = (1+\theta^2)\sigma_e^2 \quad (a1)$$

$$\mathrm{Cov}(\Delta y_t, \Delta y_{t-1}) = \theta\sigma_e^2 \quad (b1)$$

- Na prática, assumimos que Δy pode ser a aproximado por um MA(1) com drift. A partir destes parâmetros iremos obter os parâmetros do modelo de nível local.

- Isto é conseguido igualando-se as eqs (a e a1) e (b e b1):

$$a = a1: \quad (1+\theta^2)\sigma_e^2 = \sigma_n^2 + 2\sigma_\varepsilon^2$$

$$b = b1: \quad \theta\sigma_e^2 = -\sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{portanto} \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = -\hat{\theta}\hat{\sigma}_e^2 \quad \Rightarrow \quad \theta \in (-1,0)$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \hat{\sigma}_e^2(1+\hat{\theta})^2$$

- O problema é como obter ε e η. Utilizaremos a previsão 1 passo à frente:

- Utilizando o modelo original:

$$\Delta y_{(t)}^{(0)} = a_0 + \eta_t + \Delta\varepsilon_t$$
$$y_t^{(0)} = y_{t-1}^{(0)} + a_0 + \eta_t + \Delta\varepsilon_t$$
$$y_{t+1}^{(0)} = y_t^{(0)} + a_0 + \eta_{t+1} + (\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t)$$
$$\hat{y}_{t+1/t}^{(0)} = y_t^{(0)} + a_0 - \varepsilon_t \quad \text{(i - a)}$$

- Utilizando o modelo MA(1):

$$\Delta y_t^{(e)} = a_0 + e_t + \theta e_{t-1}$$
$$\hat{y}_{t+1/t}^{(e)} = y_t + a_0 + \theta e_t \quad \text{(ii - a)}$$

- Finalmente igualando (i-a) com (ii-a), obtemos ε_t

$$\hat{\varepsilon}_t = -\hat{\theta}\hat{e}_t \quad \text{onde} \quad \hat{e}_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1}.$$

- Para obter η_t utilizaremos a previsão de Δy_t

$$\Delta y_t^{(0)} = a_0 + \eta_t - \Delta\varepsilon_t$$
$$\eta_t = \Delta y_t^{(0)} - a_0 - \Delta\varepsilon_t$$

$$\eta_t = (y_t - y_{t-1}) - a_0 - (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}), \ onde \ \ \varepsilon_t = -\theta e_t \ \text{ e } \ e_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1}.$$
$$\hat{\eta}_t = (y_t - y_{t-1}) - \hat{a}_0 + \hat{\theta}(\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1}), \quad t = 2, \ldots, T$$

- Finalmente, para obter μ_t utilizamos a eq. do estado do modelo de nível local:

$$\mu_t = a_0 + \mu_{t-1} + \eta_t$$
$$\hat{\mu}_t = \hat{a}_0 + \hat{\mu}_{t-1} + \hat{\eta}_t$$
onde $\hat{\eta}_t$ é dado pela expressão anterior.

• Finalmente, cabe observar que se considerássemos uma estrutura de correlação contemporânea entre os distúrbios:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t \eta_s) &= q, \quad t = s \\ &= 0, \ \forall\, t \neq s \end{aligned}$$

o modelo não seria identificável, i.e, a partir dos parâmetros da representação MA não poderíamos chegra, de forma inequívoca, aos parâmetros do modelo estrutural !

v. O Filtro de Hodrick-Prescott (HP):

- O filtro de HP (1980) foi originalmente desenvolvido com o objetivo de separar a componente de tendência da componente cíclica de séries macroeconômicas americanas, com ênfase no PIB.

- A decomposição do filtro de HP é a seguinte:

$$y_t = \mu_t + c_t$$

onde μ_t é a tendência, e c_t o ciclo.

- O filtro de HP propõe um procedimento para se obter μ_t , a partir do qual podemos obter c_t, simplesmente utilizando que $c_t = y_t - \mu_t$ (de forma análoga a decomposição de B&N).

- Este filtro é construído nos pressupostos de que:

  - a componente de tendência varia suavemente no tempo;
  - para longos períodos a componente cíclica tem média próxima de zero;

- A tendência é estimada por uma técnica de alisamento empregada na Atuária:

$$H = \min_{\{\mu_t\}_{t=-1}^{T}} \left\{ \sum_{t=1}^{T} (y_t - \mu_t)^2 + \lambda \sum_{t=1}^{T} [(\mu_t - \mu_{t-1}) - (\mu_{t-1} - \mu_{t-2})]^2 \right\}$$

- O primeiro somatório representa a fidelidade entre os valores observados e a tendência e o segundo somatório a suavidade da tendência.

- Variando o parâmetro λ alteramos o *trade-off* entre o grau de ajuste da tendência aos dados e a sua suavidade.

- Observe que se a série estiver em log, então o termo do segundo somatório pode ser interpretado como a variação na taxa de crescimento da ST.

- Se $\lambda \to \infty$, então a solução do filtro de HP converge para uma tendência determinística (processo TS), pois nesta situação a suavização será máxima.

Prova: se $\lambda \to \infty$, no ótimo, a primeiras diferenças de μ devem estar arbitrariamente perto de um valor fixo β. Isto é:

$$\mu_t - \mu_{t-1} = \beta \quad \therefore \mu_t = \mu_0 + \beta t$$

- Quanto a escolha ótima do λ , baseado na visão a priori de que a componente cíclica responda por 5% da variação da ST e que a variação da taxa de crescimento seja de 1/8 em um trimestre, os autores chegam a um valor de λ=1600.

- Para resolver o problema de minimização do filtro de HP devemos encontrar os μ's que satisfazem as condições necessárias para minimização , isto é,

$$\frac{\partial H}{\partial \mu_t} = 0, \quad t = 1,2,\ldots,T$$

- Após alguma álgebra é possível mostrar que a estimativa da tendência e ciclo serão dadas por:

$$\mu_t = \frac{\lambda^{-1}}{\lambda^{-1} + (1-L)^2(1-L^{-1})^2} y_t, \quad t = 1,2,\ldots,T$$

$$c_t = \frac{(1-L)^2(1-L^{-1})^2}{\lambda^{-1} + (1-L)^2(1-L^{-1})^2} y_t$$

- A componente cíclica, ou simplesmente o filtro HP, pode ser visto como uma filtro que elimina frequências baixas (passa alto).

- A potência da função de transferência do filtro HP é dada por:

$$H_{HP}(\omega) = \left| \frac{4\lambda[1-\cos(\omega)]^2}{4\lambda[1-\cos(\omega)]^2 + 1} \right|^2$$

- Mais especificamente, pode-se demonstrar que o filtro HP com λ=1600, quando aplicado a dados trimestrais, elimina as freqüências superiores a 32 trimestres, ou seja, à 8 anos, o período padrão de um ciclo de atividade econômica (*business cycle*).

- O filtro HP tem sido alvo de críticas por muitos pesquisadores (Harvey & Jaeger(1993), Cogley & Nason(1995), entre outros), os quais alegam a produção de ciclos espúrios em ST macroeconômicas não-estacionárias ou quase não-estacionárias (efeito Slutzky).

⇒ Ex: filtro de HP aplicado ao log do PIB brasileiro

- O filtro de HP foi ajustado utilizando-se a sua equivalência com um determinado modelo estrutural (a ser demonstrado).

Fig 10. Tendência de Hodrick e Prescott
Log-PIB 1900-1992

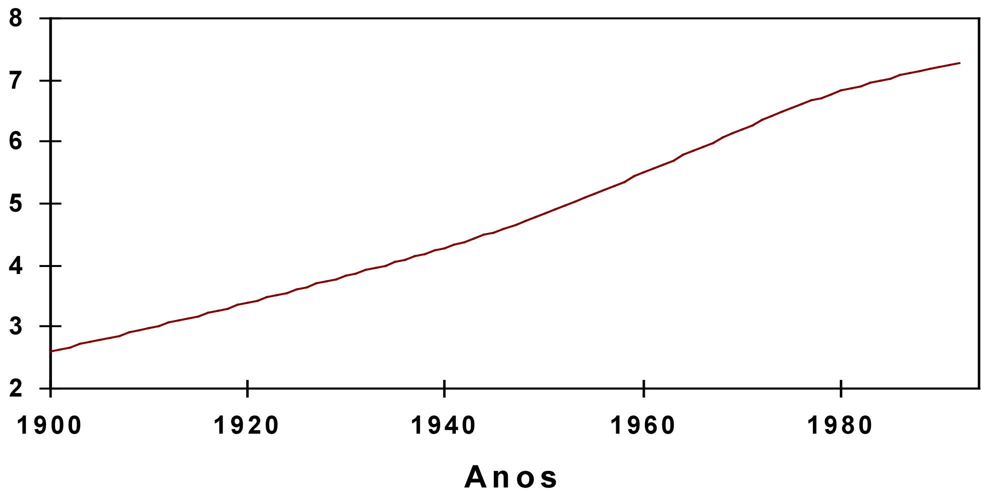
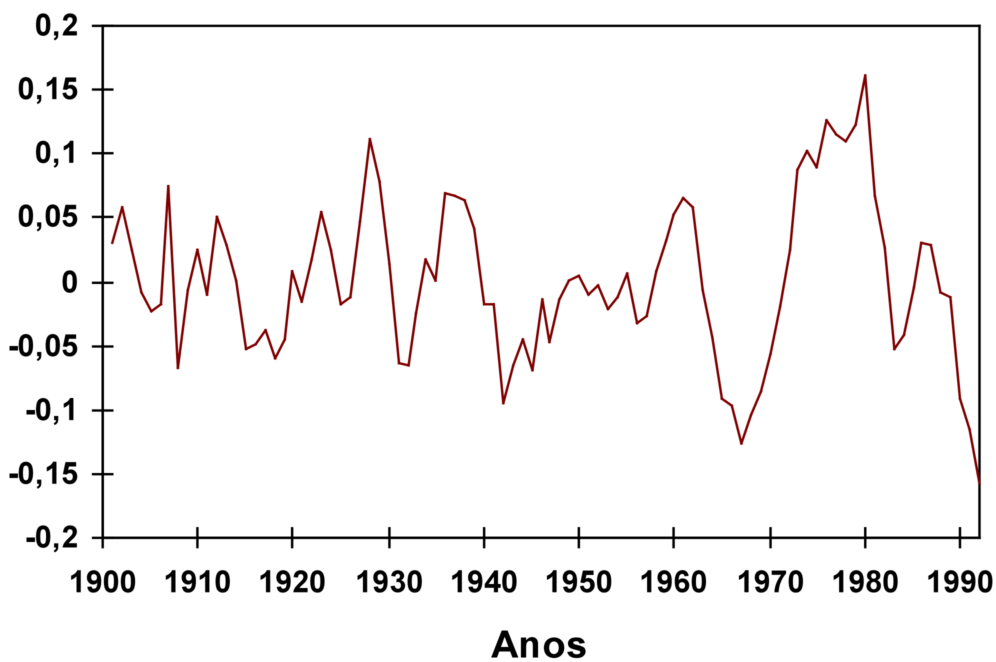


Fig 9. Ciclo de Hodrick-Prescott



- A componente cíclica estimada pelo filtro HP varia de -0,1575 a 0,1592 que é aproximadamente:

  - 337,6 vezes maior do que a estimativa obtida pela decomposição de B&N;
  - 2 vezes maior do que a estimativa obtida pelo modelo estrutural com tendência e ciclo;
  - metade da amplitude do ciclo determinístico.

- A tendência estimada pelo filtro de HP é bem mais suave do que a tendência estimada pelo modelo estrutural com tendência e ciclo (ainda não mostrado).

- É possível demonstrar que o filtro HP pode ser obtido como um caso especial de um modelo estrutural com tendência linear estocástica (MLL).

- No programa STAMP o filtro HP pode ser estimado diretamente a partir, através das seguintes opções:

Data ⇒ Transformations ⇒ HP detrending