Estudo e Comentários Adicionais

p/ P1

Exemplos de MEE

Modelo Geral

$$Y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t$$ equação de medida (ou observação).

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + c_t + R_t \eta_t$$ equação dos estados

<u>Caderno</u>

Ex 1) $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \Rightarrow AR(2)$

<u>repr. 1</u>

$$y_t = (1 \quad 0)\underbrace{\begin{pmatrix} y_t \\ \phi_2 y_{t-1} \end{pmatrix}}_{\alpha_t}$$

y_t aparece no y e AR

$y_t | y_{t-1}$ aparece no α

ε_t aparece no erro.

$$\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ \phi_2 y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 \\ \phi_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_t \\ \phi_2 y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\varepsilon_{t+1}$$

<u>repr. 2</u>

$$y_t = (1 \quad 0)\underbrace{\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}}_{\alpha_t}$$

$$\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\varepsilon_{t+1}$$

Ex 2) $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \Rightarrow AR(p)$

$$y_t = (1 \ 0 \ 0 \dots 0)\underbrace{\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{pmatrix}}_{\alpha_t}$$

$$\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ y_t \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & & \phi_{p-1} & \phi_p \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \\ y_{t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\varepsilon_{t+1}$$

Ex 3) $y_t = \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow$ MA (1)

MA

- y_t aparece no y e no α

ε_t aparece no α e no erro

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ \theta \varepsilon_t \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ \theta \varepsilon_{t+1} \end{pmatrix}}_{\alpha_{t+1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ \theta \varepsilon_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \varepsilon_{t+1}$$

$\boxed{\text{fica } \cancel{\theta \varepsilon_{t+1}} = \theta \varepsilon_t \text{ ?}}$

Ex 4) $y_t = \phi y_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

y_t aparece no y e no α

y_{t-1} " no α

ε_t aparece no α e no erro

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ \phi y_{t-1} \\ \theta \varepsilon_t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ \phi y_t \\ \theta \varepsilon_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi & 0 & 1 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ \phi y_{t-1} \\ \theta \varepsilon_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \theta \end{pmatrix} \varepsilon_{t+1}$$

$\boxed{\text{fica } \cancel{\theta \varepsilon_{t+1}} = \theta \varepsilon_t}$

para relacionar c o do MA

Ex 5) Regressão múltipla.

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T' = \begin{pmatrix} \phi & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T'Z' = \begin{pmatrix} \phi & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} \phi & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^2 & \phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \phi & \phi & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{2'} = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 & \phi \\ \phi^2 & 0 & \phi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^2 \\ \phi^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hamilton $\quad \xi \equiv \alpha$

$F \equiv T$

estado fixa

estado $\quad \xi_{t+1} = F\xi_t + v_{t+1} \qquad (v_t \equiv R_t \eta_t)$

obs $\quad y_t = H'\xi_t + A'x_t + w_t \qquad (A'x_t \equiv c_t)$

exógena $\qquad (w_t \equiv \varepsilon_t)$

notações

v_t e w_t : ruído bco.

$E[v_t w_t'] = 0$

$E[v_t v_\tau'] = \begin{cases} Q & t=\tau \\ 0 & t\neq\tau \end{cases} \qquad Q: r\times r$

$E[w_t w_\tau'] = \begin{cases} R & t=\tau \\ 0 & t\neq\tau \end{cases} \qquad R: n\times n$

$E[v_t \xi_1'] = 0 \quad \forall t$

$E(w_t \xi_t') = 0 \quad \forall t$

Ex1) $(y_{t+1} - \mu) = \phi_1(y_t - \mu) + \phi_2(y_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(y_{t-p+1} - \mu) + \varepsilon_{t+1}$

$\to$ AR(p)

$E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & t=\tau \\ 0 & t\neq\tau \end{cases}$

aparecem em α_t: y_t, y_{t-1}, ..., y_{t-p}

$\alpha_t^* = \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix}$ ou melhor $\alpha_t = \begin{bmatrix} y_t - \mu \\ y_{t-1} - \mu \\ \vdots \\ y_{t-p+1} - \mu \end{bmatrix}$

obs: $y_t = \mu + (1 \quad 0 \ \dots \ 0) \begin{bmatrix} y_t - \mu \\ y_{t-1} - \mu \\ \vdots \\ y_{t-p+1} - \mu \end{bmatrix}$

estado:

$$\begin{bmatrix} y_{t+1}-\mu \\ y_t-\mu \\ y_{t-1}-\mu \\ \vdots \\ y_{t-p+2}-\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t-\mu \\ y_{t-1}-\mu \\ y_{t-2}-\mu \\ \vdots \\ y_{t-p+1}-\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Identidade

Ex. 2)

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \quad \to \quad MA(1)$$

em α entra ε_t, ε_{t-1}.

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y_t = \mu + \begin{bmatrix} 1 & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

?

Ex. 3) ARMA (p,q) ou ARMA(r, r+1)

$$y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1}-\mu) + \phi_2(y_{t-2}-\mu) + \ldots + \phi_r(y_{t-r}-\mu) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_{r-1}\varepsilon_{t-r+1}$$

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} y_t-\mu \\ \cancel{y_{t-1}-\mu} \\ \vdots \\ y_{t-r}-\mu \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{\cdot} \end{bmatrix} \qquad \alpha_t = \begin{bmatrix} y_t-\mu \\ y_{t-1}-\mu \\ \vdots \\ y_{t-r}-\mu \end{bmatrix}$$

estado.

$$\begin{bmatrix} y_{t+1}-\mu \\ y_t-\mu \\ \vdots \\ y_{t-r+1}-\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{r-1} & \phi_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t-\mu \\ y_{t-1}-\mu \\ \vdots \\ y_{t-r}-\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

obs

$$y_t-\mu = \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t-\mu \\ y_{t-1}-\mu \\ \vdots \\ y_{t-r}-\mu \end{bmatrix}$$

dúvida: ARMA

---

estado

$$\begin{bmatrix} \alpha_{t+1,1} \\ \alpha_{t+1,2} \\ \alpha_{t+1,3} \\ \vdots \\ \alpha_{t+1,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{r-1} & \phi_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{t,1} \\ \alpha_{t,2} \\ \vdots \\ \alpha_{t,r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

1ª linha: $\alpha_{t+1,1} = \phi_1 \alpha_{t,1} + \phi_2 \alpha_{t,2} + \cdots + \phi_r \alpha_{t,r} + \varepsilon_{t+1}$

2ª linha $\alpha_{t+1,2} = \alpha_{t,1} = L\,\alpha_{t+1,1}$

3ª linha $\alpha_{t+1,3} = \alpha_{t,2} = \alpha_{t-1,1} = L^2 \alpha_{t+1,1}$

jª linha $\alpha_{t+1,j} = L^{j-1} \alpha_{t+1,1}$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{t+1,1} \\ \alpha_{t+1,2} \\ \alpha_{t+1,3} \\ \vdots \\ \alpha_{t+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \cdots & \phi_{n-1} & \phi_n \\ 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L\,\alpha_{t+1,1} \\ L^2\alpha_{t+1,1} \\ L^3\alpha_{t+1,1} \\ \vdots \\ L^n\alpha_{t+1,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, a 1ª linha pode ser escrita como:

$$\alpha_{t+1,1} = L\,\phi_1\alpha_{t+1,1} + L^2\phi_2\alpha_{t+1,1} + \dots + L^n\phi_n\alpha_{t+1,1} + \varepsilon_{t+1}$$

$$\boxed{(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\dots-\phi_n L^n)\,\alpha_{t+1,1} = \varepsilon_{t+1}}$$

Obs

$$y_t = \mu + \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{t,1} \\ \alpha_{t,2} \\ \vdots \\ \alpha_{t,n-1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} = \alpha_{t-1,1} = L\alpha_{t,1} \\ = \alpha_{t-n,1} = L^{n-1}\alpha_{t,1} \end{matrix}$$

$$= \mu + \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{t,1} \\ L\alpha_{t,1} \\ \vdots \\ L^{n-1}\alpha_{t,1} \end{bmatrix}$$

$$y_t = \mu + (1 + L\theta_1 + L^2\theta_2 + \dots L^{n-1}\theta_{n-1})\,\alpha_{t,1}$$

$$\boxed{(y_t-\mu) = (1+L\theta_1+L^2\theta_2+\dots+L^{n-1}\theta_{n-1})\,\alpha_{t-1}}$$

multiplicando ambos os lados por

$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\dots-\phi_n L^n)$, temos:

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\dots\phi_n L^n)(y_t-\mu) = (1+L\theta_1+L^2\theta_2+\dots L^{n-1}\theta_{n-1})\times$$
$$\times((1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\dots\phi_n L^n).\alpha_{t,1}$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots \phi_r L^r)(y_t - \mu) = (1 + L\theta_1 + L\theta_2 + \dots + L^{r-1}\theta_{r-1})\varepsilon_t$$

$\downarrow$

que reproduz ARMA.

$$y_t - \mu = \phi_1 (y_{t-1} - \mu) + \phi_2 (y_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_r (y_{t-r} - \mu)$$

$$+ \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_{r-1} \varepsilon_{t-r+1}.$$

Passo a passo: Estacionariedade de α e de y

Estacionariedade de α

1) Define estacionariedade de 2ª ordem p/ α_t

2) Faz c e R (e T) invariantes no tempo e escreve α_{t+1} recursivamente

$$\alpha_{t+1} = (I+T+\dots T^{t-1})c + T^t\alpha_1 + \sum_{i=0}^{t-1} R^i \eta_{t-i}$$

3) Calcula $E[\alpha_{t+1}]$

3.1) Escreve $E(\cdot)$

3.2) Avalia condições p/ $E(\alpha_{t+1})$ indep. de t

3.3) Supondo autovalores de T distintos ⇒ escreve decomp. espectral e apresenta $T^i = F\Lambda^i F^T$

3.4) Reescreve $E(\alpha_{t+1})$ usando decomp. espectral

3.5) Calcula componente $F\Lambda^t F a_1$ (comb. linear de λ_i^t)

3.6) Olha cada componente de $E[\alpha_{t+1}]$ e faz $t \to \infty$: $|\lambda_i| < 1$

3.7) Calcula $\lim_{t\to\infty} E[\alpha_{t+1}] = (I-T)^{-1}c$

4) Calcula $\Gamma_\alpha(h,t)$, escrevendo α_{t+1} e α_{t+h+1} recursivamente

4.1) Definição de $\Gamma_\alpha(h,t)$ ⇒ desenvolve expressão, anula termos cruzados e lembrar $E[(\alpha_1 - a_1)(\alpha_1 - a_1)'] = P_1$

4.2) Avalia componente $T^t P_1 T^{t+h'}$ pela decomp. espectral, fazendo $|\lambda_i| < 1$ e $t \to \infty$: vai $\to 0$.

4.3) Toma $\lim_{t\to\infty} \Gamma_\alpha(h,t)$: fica apenas produto dos somatórios

4.4) Calcula $E[\eta_{t-i}\eta'_{t+h-j}]$ p/ cada termo do somatório e vê que é ϕ ($\neq 0$) p/ $j = i+h$

4.5) Vai restar Σ em i de 0 a $t-1$ e onde tem j coloca $i+h$

4.6) Usa novamente decomposição espectral de T

4.7) Como $|\lambda_i| < 1$ ⇒ somatório converge

4.8) Verificar produto de matriz para o caso $m=2$.

5) Provado $|\lambda_i(T)|$ cond. nec. e suf.

Estacionariedade de y:

1) Define estacionariedade de y_t

2) Faz Z e d invariantes no tempo

3) Calcula $E[y_t]$ em função de $E(\alpha_t)$

4) logo, se α_t estacionário $\Rightarrow E(y_t)$ cte.

5) calcula $\Gamma_y(h,t)$ em função de $\Gamma_x(h,t)$

6) calcula componentes $\Rightarrow$ termos cruzados $=0$ pois recursivamente α_t é função de ε_i

7) Escreve forma final da $\Gamma_y(h,t) = \begin{cases} Z\Gamma_\alpha(h,t)Z' & \text{se } h \neq 0 \\ Z\Gamma_\alpha(0,t)Z' + H & \text{se } h = 0 \end{cases}$

Passo a Passo: Representações $\neq$s q mesma verossim. e previsões

1) considera matrizes inv. no tempo, $c=d=0$ e escrever a representação

2) se $\alpha_t^* = B\alpha_t$ e $\det B \neq 0 \Rightarrow Z^* = ZB^{-1}$

iguala y_t

3) Escreve $\underbrace{E[\alpha_t^* | \tilde{Y}_{t-1}]}_{a_t^*} = B\,E(\alpha_t | \tilde{Y}_{t-1}) = Ba_t$

4) Escreve $P_t^* = BP_tB'$

5) Escreve função de veros.

Definição de $L(\psi) = \prod p(y_t | Y_{t-1})$ preditiva

Mostra que preditiva $\sim N(Za_t, F_t)$

Escreve $L(\psi)$ e $\ell(\psi)$ em função de v_t

7) Escreve $v_t^* = v_t$ e $F_t^* = F_t$

8) verossimilhanças iguais

9) função de previsões.

Lista 1

1) Considerando forma em EE linear e Gaussiana

$$y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t \qquad t = 1, 2, \ldots, n$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + c_t + R_t \eta_t$$

onde $\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} H_t & 0 \\ 0 & Q_t \end{pmatrix} \right)$

$$E[\varepsilon_t \eta_t'] = 0 \quad \forall t \qquad \alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$$

$$E[\varepsilon_t \alpha_1'] = E[\eta_t \alpha_1'] = 0 \quad \forall t$$

Provar que cond. necessária e suficiente p/ estado e, consequentemente, variável observável, seja estacionário de 2ª ordem é que $|\lambda_i(T)| < 1$ $i = 1 \ldots m$

T: invariante no tempo.

Ver artigos aula passada

Prova

Fazer demo:
- estacionariedade
- de $\alpha \Rightarrow y$
- exercício 4
- observabilidade
- (da lista 1)
- Exs nível local + C
- Exs tendência local
- ler livro
- ver códigos
- concentrada difusa
- Resumo parte nova (ver previsão $y_{t+1|t}$)

c/ falta ext. intercâmbio
- Email p/ estágio
- Email Murilo

- equações de filtro

Nos códigos:
- Ver IC
- ver previsões dentro / fora da amostra

1ª Parte. Prova da estacionariedade de α

1) Define estacionariedade de 2ª ordem p/ α_t

Se α_t é estacionário de 2ª ordem:

(i) $E[\alpha_t] = \mu_\alpha \quad \forall t, \quad \mu_\alpha < \infty$

(ii) $E[(\alpha_t - E[\alpha_t])(\alpha_t - E[\alpha_t])'] = \Gamma_\alpha(h) \quad \forall t, \ \forall h = 0, 1, \ldots$

2) Faz c e R (e T) invariantes no tempo e escreve α_{t+1} recursivamente

$$\alpha_{t+1} = c + T\alpha_t + R\eta_t$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = c + T\alpha_1 + R\eta_1$$

$$\alpha_3 = c + T\alpha_2 + R\eta_2$$
$$= c + T(c + T\alpha_1 + R\eta_1) + R\eta_2$$
$$= (I + T)c + T^2\alpha_1 + TR\eta_1 + R\eta_2$$

$$\alpha_4 = c + T\alpha_3 + R\eta_3$$
$$= c + T[(I+T)c + T^2\alpha_1 + TR\eta_1 + R\eta_2] + R\eta_3$$
$$= (I + T + T^2)c + T^3\alpha_1 + T^2R\eta_1 + TR\eta_2 + R\eta_3$$

$\vdots$

Nas equações $t=3$, $t+1=4$, $t-1=2$

$$\alpha_{t+1} = (I + T + T^2 + \ldots + T^{t-1})c + T^t\alpha_1 + \sum_{i=0}^{t-1} T^i R\eta_{t-i}$$

3) calcula $E[\alpha_{t+1}]$ p/ cond. (i) estacionariedade

3.1)

$$E[\alpha_{t+1}] = E\left[(I+T+\ldots+T^{t-1}) \right] c + T^t \, E[\alpha_1] + \sum_{i=0}^{t-1} T^i R \, E[\underbrace{\eta_{t-i}}_{0}]$$

$$= (I+T+\ldots+T^{t-1})\, c + T^t \, a_1$$

3.2) Avaliar condiçõs p/ $E[\alpha_{t+1}]$ independente de t.

3.3) Supondo autovalores de T distintos, usar decomp. espectral e apresentar $T^i = F\Lambda^i F'$

$TF_i = \lambda_i F_i$ onde F_i: autovetor
λ_i: autovalor $i=1\ldots m$

Pela decomposição espectral, podemos escrever

$T = F\Lambda F'$ onde F: matriz dos autovetores de T
Λ: " diagonal dos autovalores de T

Prova-se ainda que

$T^i = F\Lambda^i F'$

3.4) Reescrever $E[\alpha_{t+1})$ usando decomp. espectral

$$E[\alpha_{t+1}) = (I+T+\ldots+T^{t-1})\, c + F\Lambda^t F' a_1$$

3.5) calcula componente $F\Lambda^t F' a_1$ (c.l. de λ_i^t)

$$\cdot \; F\Lambda^t F' a_1 = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \vdots & & & \\ f_{m1} & \cdots & & f_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & & & \\ & \lambda_2^t & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} & \cdots & f^{1m} \\ \vdots & & & \\ f^{m1} & \cdots & & f^{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{11}\lambda_1^t + \delta_{12}\lambda_2^t + \ldots + \delta_{1m}\lambda_m^t \\ \vdots \\ \delta_{m1}\lambda_1^t + \ldots + \delta_{mm}\lambda_m^t \end{pmatrix}$$

onde $\delta_{ij} = f(f_{ij} f^{ij} a_{ij})$
↓
não depende de t

3.6) Olhar cada componente de $E[\alpha_{t+1})$ e fazer $t \to \infty$ p/ $|\lambda_i| < 1$

Para cada componente

$E[\alpha_{t+1,i}) = \delta_{i1}\lambda_1^t + \ldots + \delta_{im}\lambda_m^t$ ⇒ depende explicitamente de t
mas se $|\lambda_i| < 1$, quando $t \to \infty$
⇒ $E[\alpha_{t+1}] \to 0$.

3.7) Calcula $\lim_{t\to\infty} E[\alpha_{t+1}] = (I-T)c$

$$\lim_{t\to\infty} E[\alpha_{t+1}] = \lim_{t\to\infty} (I+T+\dots+T^{t-1})c$$

$$= (I-T)^{-1}c \quad : \text{cte.}$$

4) 4.1) Calcula $\Gamma_\alpha(h,t)$ p/ cond (ii) de estacionariedade, colocando α de forma recursiva.

$$\Gamma_\alpha(h,t) = E\left[(\alpha_{t+1} - E[\alpha_{t+1}])(\alpha_{t+h} - E[\alpha_{t+h+1}])'\right]$$

Sabemos que:

$$\alpha_{t+1} = \overbrace{(I+T\dots+T^{t-1})c}^{K} + T^t\alpha_1 + \sum_{t=0}^{t-1} T^i R\eta_{t-i}$$

$$E[\alpha_{t+1}] = E[\alpha_{t+h+1}] = K + T^t a_1$$

$$\Rightarrow \Gamma_\alpha(h,t) = E\Big[\big(\cancel{K} + T^t\alpha_1 + \sum_{t=0}^{t-1} T^i R\eta_{t-i} - \cancel{K} - T^t a_1\big)$$
$$\big(\cancel{K} + T^{t+h}\alpha_1 + \sum_{t=0}^{t+h-1} T^i R\eta_{t-i} - T^{t+h}a_1 - \cancel{K}\big)'\Big]$$

a) desenvolve expressões e anula termos cruzados

b) escreve $E[(\alpha_1-a_1)(\alpha_1-a_1)'] = P_1$

$$= E\Big[\Big(T^t(\alpha_1-a_1) + \sum_{t=0}^{t-1} T^i R\eta_{t-i}\Big)\Big((\alpha_1-a_1)'T^{t+h'} + \sum_{t=0}^{t+h-1}\eta'_{t-i}R'T^{i'}\Big)\Big]$$

$$= E\left[T^t(\alpha_1-a_1)(\alpha_1-a_1)'T^{t+h'}\right] + T^t E\Big[(\alpha_1-a_1)\cdot\sum_{t=0}^{t+h-1}\eta'_{t-i}R'T^{i'}\Big] +$$
$$+ E\Big[\Big(\sum_{t=0}^{t-1}T^iR\eta_{t-i}\Big)(\alpha_1-a_1)'\Big]T^{t+h'} +$$
$$+ E\Big[\Big(\sum_{t=0}^{t-1}T^iR\eta_{t-i}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{t+h-1}\eta'_{t-i}R'T^{i'}\Big)\Big]$$

$$= T^tP_1T^{t+h'} + E\Big[\Big(\sum_{i=0}^{t-1}T^iR\eta_{t-i}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{t-1}\eta'_{t-j}R'T^{j'}\Big)\Big]$$

4.2) Avalia componente $T^tP_1T^{t+h'}$ pela decomp. spectral, fazendo $|\lambda_i|<1$ e tomando $\lim_{t\to\infty}$

Sabemos que $T^t = F\Lambda^tF'$

Como $|\lambda_i|<1$:

$$\lim_{t\to\infty} T^tP_1T^{t+h'} = 0.$$

4.3) Toma $\lim_{t\to\infty} \Gamma_\alpha(h,t)$ → fica apenas produto dos somatórios (passa $E(.)$ p/ dentro)

$$\lim_{t\to\infty} \Gamma_\alpha(h,t) = \lim_{t\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{t+h-1} \left(T^i R\, E\left[\eta_{t-i}\eta'_{t+h-j}\right] R' T^{j'} \right) \right)$$

4.4) calcula $E\left[\eta_{t-i}\eta'_{t+h-j}\right]$ para cada termo do somatório e vê que é Q ($\neq 0$) p/ $j = i+h$.

$$\Rightarrow E\left[\eta_{t-i}\eta'_{t+h-j}\right] = 0 \quad \text{se} \quad t-i \neq t+h-j$$

$$= Q \quad \text{se} \quad t-i = t+h-j \Rightarrow j = i+h$$

4.5) vai restar Σ em i de 0 a $t-1$ e onde tem j coloca $i+h$:

$$\lim_{t\to\infty} \Gamma_\alpha(h,t) = \lim_{t\to\infty} \left[\sum_{i=0}^{t-1} T^i R Q R' T^{i+h'} \right]$$

4.6) usa novamente decomp. spectral de T

$$\lim_{t\to\infty} \Gamma_\alpha(h,t) = \lim_{t\to\infty} \left[\sum_{i=0}^{t-1} F \Lambda^i \underbrace{F' R Q R' F'}_{S} \Lambda^{i+h} F \right]$$

$$\left[\Sigma F \Lambda^i S \Lambda^{i+h} F \right]$$

4.7) como $|\lambda_i| < 1$ ⇒ somatório converge

Como $|\lambda_i| < 1$ ⇒ Σ infinito converge

4.8) Verificar produto de matriz p/ o caso $m = 2$

5) Provado $|\lambda_i(T)|$ é cond. nec. e suf. p/ estado estacionário.

<u>2ª Parte</u> : Prova da estacionariedade de y

1) Define estacionariedade p/ y

Se y_t é estacionário

(i) $E[y_t] = \mu_y \quad \forall t \quad (\mu_y < \infty)$

(ii) $\Gamma_y(h,t) = \Gamma_y(h) \quad \forall t, \quad h = 0, 1, \ldots,$

2) Faz Z e d invariantes no tempo

Seja $Z_t = Z$ e $d_t = d$

3) Calcula $E[y_t]$ em funçaõ de $E(\alpha_t)$

$$E[y_t] = E[Z\alpha_t + d + \varepsilon_t]$$
$$= Z\,E[\alpha_t] + d \quad \Rightarrow \text{ depende explicitamente de } E[\alpha_t]$$

4) Logo: se α_t estacionário: $E(\alpha_t) = \mu_\alpha \Rightarrow E[y_t] = Z\mu_\alpha + d$

5) Calcula $\Gamma_y(h,t)$ em funçaõ de $\Gamma_\alpha(h,t)$

$$\Gamma_y(h,t) = E\left[(y_t - E[y_t])(y_{t+h} - E[y_{t+h}])'\right] =$$
$$= E\left[(Z\alpha_t + \varepsilon_t - Z\,E[\alpha_t])(Z\alpha_{t+h} + \varepsilon_{t+h} - Z\,E[\alpha_{t+h}])'\right] =$$
$$= E\left[(Z(\alpha_t - E(\alpha_t)) + \varepsilon_t)(Z(\alpha_{t+h} - E[\alpha_{t+h}]) + \varepsilon_{t+h})'\right] =$$
$$= E\left[Z(\alpha_t - E[\alpha_t])(\alpha_t - E[\alpha_t])'Z'\right] + E\left[Z(\alpha_t - E[\alpha_t])\,\varepsilon_t'\right] +$$
$$+ E\left[\varepsilon_t(\alpha_{t+h} - E[\alpha_{t+h}])'Z'\right] + E\left[\varepsilon_t\varepsilon_{t+h}'\right]$$

6) Calcula componentes: termos cruzados seraõ nulos pois recursivamente p/ α_t seraõ funçaõ de $(\alpha_1, \eta's) \times \varepsilon_t = 0$.

- $E\left[Z(\alpha_t + E[\alpha_t])(\alpha_{t+h} - E[\alpha_{t+h}])'Z'\right] = Z'\,\Gamma_\alpha(h,t)\,Z$

- $E[\varepsilon_t\varepsilon_{t+h}'] = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq 0 \\ H & \text{se } h = 0 \end{cases}$

7) Escreve forma final da $\Gamma_y(h,t)$ como funçaõ de $\Gamma_\alpha(h,t)$ e conclui

$$\Rightarrow \Gamma_y(h,t) = \begin{cases} Z\,\Gamma_\alpha(h,t)\,Z' & \text{se } h \neq 0 \\ Z\,\Gamma_\alpha(h,t)\,Z' + H & \text{se } h = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ depende explicitamente de } \Gamma_\alpha(h,t)$$

lista 1 - ex. 4

4) Duas representações diferentes p/ um mesmo modelo

α_t e α_t^* ⇒ dois vetores de estado próprios

Sendo $\alpha_t^* = B\alpha_t$ $(\det B \neq 0)$

⇒ funções de verossimilhança e funções de previsão são =s.

(1) Considerar matrizes inv. no tempo, spg, e $c = d = 0$, escrever os sistemas

$$(I) \begin{cases} y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t \\ \alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t \end{cases} \qquad (II) \begin{cases} y_t = Z^*\alpha_t^* + \varepsilon_t \\ \alpha_{t+1}^* = T^*\alpha_t^* + R^*\eta_t^* \end{cases}$$

(2) Se $\alpha_t^* = B\alpha_t$ ⇒ iguala os y_t e acha $Z^* = ZB^{-1}$

$\alpha_t^* = B\alpha_t \therefore y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t = Z^*(B\alpha_t) + \varepsilon_t$

$\therefore Z\alpha_t = Z^*B\alpha_t$

Como $\det B \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1} \therefore \boxed{Z^* = ZB^{-1}}$

(3) Escreve $E[\alpha_t^* | \underset{\sim}{Y}_{t-1}]$ sabendo que $E(\alpha_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = a_t$

$E[\alpha_t^* | \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = E[B\alpha_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1})$

$\therefore a_t^* = B a_t$

(4) Escreve $V[\alpha_t^* | \underset{\sim}{Y}_{t-1}]$ sabendo que $V[\alpha_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = P_t$

$V[\alpha_t^* | \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = V[B\alpha_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1})$

$= B\, V[\alpha_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1})\, B'$

$\therefore P_t^* = B P_t B'$

(6) Escreve funções de verossimilhança / log de veros.

$L(\psi) = p(y_1, y_2 \ldots y_n ; \psi)$

saber → $= \prod_{i=1}^{n} p(y_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1} ; \psi)$ onde $p(y_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1})$ é a densidade preditiva

(6.1) Toma representação 1 e escreve $E(y_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = Za_t$.

$var(y_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = ZP_tZ' + H = F_t$

$E[y_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = E[Z\alpha_t + \varepsilon_t | Y_{t-1})$

$= Za_t$.

$$\text{var}[y_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = \text{var}[Z\alpha_t + \varepsilon_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1})$$

$$= E\left[(Z\alpha_t + \varepsilon_t - Za_t)(Z\alpha_t + \varepsilon_t - Za_t)' \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}\right] =$$

$$= E\left[(Z(\alpha_t - a_t) + \varepsilon_t)(Z(\alpha_t - a_t) + \varepsilon_t)' \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}\right) =$$

$$= E\left[(Z(\alpha_t - a_t) + \varepsilon_t)((\alpha_t - a_t)'Z' + \varepsilon_t') \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}\right) =$$

$$= \underbrace{Z\, \underset{t-1}{E}\left[(\alpha_t - a_t)(\alpha_t - a_t)'\right] Z'}_{P_t} + Z\, \underset{t-1}{E}\left[(\alpha_t - a_t)\varepsilon_t'\right] + \underset{t-1}{E}\left[\varepsilon_t(\alpha_t - a_t)'\right]Z' + \underset{t-1}{E}\left[\varepsilon_t \varepsilon_t'\right)$$

(Escrevendo recursivamente α_t:

$$\alpha_t = T\alpha_{t-1} + R\eta_{t-1}$$

$$\alpha_2 = T\alpha_1 + R\eta_1$$

$$\alpha_3 = T\alpha_2 + R\eta_2 = T(T\alpha_1 + R\eta_1) + R\eta_2$$

$$= T^2\alpha_1 + TR\eta_1 + R\eta_2$$

$$\alpha_4 = T\alpha_3 + R\eta_3 = T(T^2\alpha_1 + TR\eta_1 + R\eta_2) + R\eta_3$$

$$= T^3\alpha_1 + T^2R\eta_1 + TR\eta_2 + R\eta_3$$

$$\alpha_t = T^{t-1}\alpha_1 + \sum_{i=0}^{t-2} T^i R\eta_{t-i}$$

$$\Rightarrow E\left[(\alpha_t - a_t)\varepsilon_t'\right] =$$

$$E\left[\left(T^{t-1}\alpha_1 + \sum_{i=0}^{t-2} T^i R\eta_{t-i} - a_t\right)\varepsilon_t'\right] =$$

$$= T^{t-1}E\left[\cancel{\alpha_1}\varepsilon_t'\right) + \sum_{i=0}^{t-2} T^i R E\left[\cancel{\eta_{t-i}}\,\varepsilon_t'\right] - a_t E(\cancel{\varepsilon_t}) = 0.$$

Logo: $\text{var}[y_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = ZP_tZ' + H = F_t$

(6.2) Como $y_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1} \sim N \Rightarrow p(y_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}) \sim N(Za_t, F_t)$

(6.3) Escreve fórmula da Normal multivariada em fçaõ de v_t

$$p(y_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|F_t|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\underbrace{(y_t - Za_t)'}_{v_t} F_t^{-1} \underbrace{(y_t - Za_t)}_{v_t}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|F_t|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} v_t' F_t^{-1} v_t\right\}$$

$$= (2\pi)^{-p/2}|F_t|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} v_t' F_t v_t\right\}$$

(6.4) Escreve $L(\Psi)$ e $\ell(\Psi)$

$$\text{como } L(\Psi) = \prod_{t=1}^{n} (2\pi)^{-p/2} |F_t|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} v_t' F_t^{-1} v_t\right\}$$

$$\Rightarrow \ell(\Psi) = \log(L(\Psi)) = -\frac{np}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\log|F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t\right)$$

(7) Escreve v_t^* e F_t^* em funçaõ de v_t e F_t $\Rightarrow v_t^* = v_t$ e $F_t^* = F_t$

$$\to v_t^* = y_t - Z^* a_t^*$$

$$= y_t - (ZB^{-1})(Ba_t) = y_t - Za_t \Rightarrow \boxed{v_t^* = v_t}$$

$$\to F_t^* = Z^* P_t^* Z^{*'} + H$$

$$= (ZB^{-1})(BP_tB')(ZB^{-1})' + H$$

$$= ZB^{-1}BP_tB'(B')^{-1}Z' + H$$

$$= ZP_tZ' + H = F_t$$

(8) Logo: $\ell^*(\Psi) = \ell(\Psi)$

(9) Funçaõ de previsaõ

$$\hat{y}_{t+s|t} = E[y_{t+s} | \underset{\sim}{y}_t)$$

$$= E[Z\alpha_{t+s} + \varepsilon_{t+s} | \underset{\sim}{y}_t]$$

$$= Za_{t+s|t}$$

ou $\hat{y}_{t+s|t} = E[Z^*\alpha^*_{t+s} + \varepsilon_{t+s} | \underset{\sim}{y}_t)$

$$= E[ZB^{-1}B\alpha_{t+s} + \varepsilon_{t+s} | \underset{\sim}{y}_t)$$

$$= Za_{t+s|t}$$

Prova da cond. de observabilidade $\Rightarrow$ det $M' \neq 0$.

1) Escreve sistema invariante no tempo na forma

$$y_t = Z\alpha_t$$
$$\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t$$

2) Definição de observabilidade: sistema é dito observável se α_0 pode ser determinado por conjunto de medidas de y

3) Faz $\eta_t = 0 \ \forall t$

4) Escreve α_{t+1} recursivamente em função de α_0

$$\alpha_{t+1} = T\alpha_t$$

$$\alpha_1 = T\alpha_0$$
$$\alpha_2 = T\alpha_1 = T^2\alpha_0 \Rightarrow \boxed{\alpha_t = T^t\alpha_0}$$

5) Escreve y_t em função de α_0

$$y_t = Z\alpha_t \therefore \boxed{y_t = ZT^t\alpha_0}$$

6) y conj de medidas de $t = 0$ a $\underline{m}$: escreve matriz $M = \begin{pmatrix} Z \\ ZT \\ \vdots \\ ZT^m \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= Z\alpha_0 \\ y_1 &= ZT\alpha_0 \\ &\vdots \\ y_m &= ZT^{m-1}\alpha_0 \end{aligned}\right\} \quad \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{M}\alpha_0 \quad \text{onde} \quad M = \begin{pmatrix} Z \\ ZT \\ \vdots \\ ZT^{m-1} \end{pmatrix}$$

7) Para α_0 determinado de forma única $\Rightarrow$ posto $M = m$

Equivale a posto $M' = m \Rightarrow \det(Z' \ T'Z' \ldots \ T^{m-1\prime}Z') \neq 0$.

$\Rightarrow$ Atenção: A questão da observabilidade é obrigatória p/ estimação dos parâmetros.

Estudo p/ prova.

Modelo de nível local → modelo de tendência estocástica p/ ST onde nível não é cte.

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \end{cases}$$ (e se $\mu_{t+1} = \varphi\mu_t + \eta_t$?)

→ Forma de Espaço Estados

Já está onde $Z = 1$ $R = 1$
$T = 1$
$H = \sigma_\varepsilon^2$
$Q = \sigma_\eta^2$

- É estacionário?

Não!
Como coeficiente de $\mu_t = 1$ ⇒ raiz unitária
É um RW.

- É observável?

Sim!
Pois $Z = 1$ é como se det $M \neq 1$.

→ Características e Casos Particulares

- Razão sinal ruído

$q = \sigma_\eta^2 / \sigma_\varepsilon^2$ ⇒ importante p/ ser explorado nas questões da versão

É um parâmetro que governa a suavidade da componente de nível local.

se $q > 1$ ⇒ $\sigma_\eta^2 > \sigma_\varepsilon^2$: variação do nível supera a variação do ruído

se $q < 1$ ⇒ $\sigma_\eta^2 < \sigma_\varepsilon^2$: nível do processo é "engolido" pelo do ruído.

- Casos Particulares:

a) $q = 0 \Rightarrow \sigma_\eta^2 = 0 \therefore \mu_{t+1} = \mu_t = a$

⇒ $y_t = a + \varepsilon_t$: oscilação em torno de nível cte.

a ⇒ estimado por MQO

$\hat{a} = \left(\frac{1}{t}\right) \sum_{i=1}^{t} y_i$

Funçaõ de previsaõ

$$\hat{y}_{t+s|t} = E[y_{t+s} | \underset{\sim}{Y}_t)$$

$$= E[a + \varepsilon_{t+s} | \underset{\sim}{Y}_t)$$

$$= \hat{a}_t$$

$$var(\hat{y}_{t+s|t}) = E[(y_{t+s} - E(y_{t+s} | \hat{Y}_t))(y_{t+s} - E[y_{t+s} | \hat{Y}_t)')]$$

$$= E[(y_{t+s} - E[y_{t+s} | \hat{Y}_t))^2]$$

$$= E[\varepsilon_{t+s}^2 | \hat{Y}_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

b) $\sigma_\varepsilon^2 = 0$

$$y_t = \mu_t$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \Rightarrow \mu_2 = \mu_1 + \eta_1$$

$$\mu_3 = \mu_2 + \eta_2 = \mu_1 + \eta_1 + \eta_2$$

$$\vdots$$

$$\mu_t = \mu_1 + \sum_{i=1}^{t} \eta_i \qquad \Rightarrow y \text{ é passeio aleatório}$$

Funçaõ previsaõ:

$$\hat{y}_{t+s|t} = E[y_{t+s} | \underset{\sim}{Y}_t) =$$

$$= E[\mu_1 + \sum_{i=1}^{t+s} \eta_i | \underset{\sim}{Y}_t]$$

$$= E[\mu_1 + \sum_{i=1}^{t} \eta_i + \sum_{i=t+1}^{t+s} \eta_i | \underset{\sim}{Y}_t)$$

$$= E[y_t + \sum_{i=t+1}^{t+s} | \underset{\sim}{Y}_t) = y_t$$

$$var[\hat{y}_{t+s} | \underset{\sim}{Y}_t) =$$

$$E[(y_{t+s} - E(y_{t+s} | y_t))^2$$

$$E[(y_{t+s} - y_t)^2] = E[\sum_{i=1}^{s} \eta_i | \underset{\sim}{Y}_t) = s\sigma_\eta^2$$

→ Funções de Previsões do MNL

$$\hat{y}_{t+s|t} = E[y_{t+s} | \underset{\sim}{Y}_t]$$

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \Rightarrow \mu_2 = \mu_1 + \eta_1$$

$$\mu_3 = \mu_2 + \eta_2 = \mu_1 + \eta_1 + \eta_2$$

$$\vdots$$

$$\mu_t = \mu_1 + \sum_{i=1}^{t} \eta_i$$

$$\Rightarrow y_t = \mu_1 + \sum_{i=1}^{t} \eta_i + \varepsilon_t$$

obs: $E[y_t] = E[\mu_1] = a_1$

$\text{var}[y_t] = \underbrace{\text{var}[\mu_1 | \tilde{Y}_{t-1}]}_{P_1} + t\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 = P_1 + t\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2$

atenção!

atenção E incondicional é $E[y_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1}]$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+s|t} = E\left[\mu_1 + \sum_{i=1}^{t+s} \eta_i + \varepsilon_{t+s} \,\middle|\, \underset{\sim}{Y}_t\right]$$

$$= E\Big[\underbrace{\Big(\mu_1 + \sum_{i=1}^{t} \eta_i\Big)}_{\mu_t} + \sum_{i=t+1}^{t+s} \eta_i + \varepsilon_{t+s} \,\Big|\, \underset{\sim}{Y}_t\Big]$$

$$= E[\mu_t | \underset{\sim}{Y}_t] = \hat{\mu}_{t|t} \Rightarrow \text{estimado pelo FK.}$$

$$\text{Var}[\hat{y}_{t+s|t}] = \text{var}[(y_{t+s} - E[\hat{y}_{t+s} | \underset{\sim}{Y}_t])]$$

$$= \text{var}\Big[\Big(\mu_t + \sum_{i=t+1}^{t+s} \eta_i + \varepsilon_{t+s} - \hat{\mu}_t\Big)\Big]$$

$$= \text{var}\Big[(\mu_t - \hat{\mu}_t) + \sum_{i=1}^{s} \eta_i + \varepsilon_{t+s}\Big]$$

$$= P_{t|t} + s\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

→ FK Previsões / Atualizações

$Z = 1 \qquad Q = \sigma_\eta^2$

$T = 1 \qquad H = \sigma_\varepsilon^2$

$R = 1$

$$\Rightarrow \quad \nu_t = y_t - a_t$$

$$F_t = P_t + H_t = P_t + \sigma_\varepsilon^2$$

$$K_t = P_t F_t^{-1} = \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}$$

$$L_t = 1 - K_t = 1 - \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}$$

$$M_t = P_t$$

Logo: • $a_{t|t} = a_t + P_t \cdot \dfrac{1}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} (y_t - a_t)$

$$= a_t + \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} (y_t - a_t)$$

$$= \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} y_t + \left(1 - \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}\right) a_t \qquad \Rightarrow \text{EWMA}$$

• $P_{t|t} = P_t - \dfrac{P_t^2}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \dfrac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}$

$$\Rightarrow \quad a_{t+1} = a_{t|t} = \lambda y_t + (1-\lambda) a_t$$

$$P_{t+1} = P_{t|t} + \sigma_\eta^2 = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} + \sigma_\eta^2$$

Logo: funções de previsão $\rightarrow$ fazer sempre dps. do FK

$$E[y_{t+s} | \underset{\sim}{Y_t}) = E[\mu_{t+s} + \varepsilon_{t+s} | Y_t]$$

$$= E[\mu_t + \sum_{i=1}^{s} \eta_i + \varepsilon_{t+s} | Y_t)$$

$$= E[\mu_t | \underset{\sim}{Y_t}) = a_{t|t}$$

$$Var[y_{t+s} | \underset{\sim}{Y_t}) = E[(\mu_t + \sum_{i=1}^{s} \eta_i + \varepsilon_{t+s} - a_{t|t})^2$$

$$= P_{t|t} + s\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2.$$

→ FK 2 em 1

$$a_{t+1} = Ta_t + k_t v_t$$

$$= a_t + \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} (y_t - a_t)$$

∴ Já sai direto no EWMA

→ Suavização:

· $r_{t-1} = Z' F_t^{-1} v_t + L_t' r_t$ e $\hat{\alpha}_t = a_t + P_t r_{t-1}$

$$\therefore r_{t-1} = \frac{1}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}(y_t - a_t) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} r_t$$

$t = n$: Fazemos $r_n = 0 \Rightarrow r_{n-1} = \frac{1}{P_n + \sigma_\varepsilon^2}(y_n - a_n)$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}_n = a_n + \underbrace{\frac{P_n}{P_n + \sigma_\varepsilon^2}}_{K_n}(y_n - a_n)$$ — equivalente a a_n do FK

$t = n-1$: $r_{n-2} = \frac{1}{P_{n-1} + \sigma_{n-1}^2}(y_{n-1} - a_{n-1}) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} r_{n-1}$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}_{n-1} = \ldots$$

→ Observações Faltantes entre $t = \tau$ e $t = \tau^* - 1$

· Usando FK: $\nexists y_t \Rightarrow v_t = 0,\ F_t = 0,\ K_t = 0.$

Última observação: y_{t-1}.

Eqs:
$$\begin{cases} a_{t|t} = a_t \\ P_{t|t} = P_t \\ a_{t+1} = Ta_{t|t} = Ta_t \\ P_{t+1} = TP_{t|t}T' + RQ_tR' \end{cases}$$

Para MNL

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{t|t} = a_t \\ P_{t|t} = P_t \\ a_{t+1} = a_t \\ P_{t+1} = P_{t|t} + \sigma_\eta^2 = \\ \quad = P_t + \sigma_\eta^2 \end{cases}$$

Para $t = \tau \Rightarrow$ Calculamos a_τ com base na info em $\tau - 1$

A partir daí $\Rightarrow$ $t = \tau+1 \Rightarrow a_{\tau+1} = a_\tau$

$t = \tau+2 \Rightarrow a_{\tau+2} = a_{\tau+1} = a_\tau$

$\vdots$

$t = \tau^* \Rightarrow a_{\tau^*} = a_{\tau^*-1} = a_\tau$ $\Rightarrow \hat{y}_t = a_\tau$

$a_{\tau+j} = a_\tau$

· variância em $t = \tau \Rightarrow$ calculamos P_τ

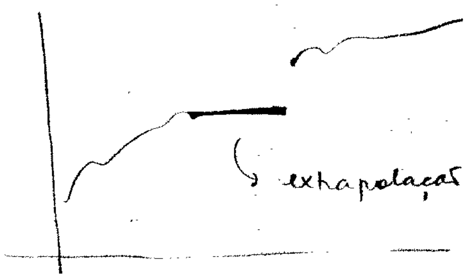
A partir daí: $t = \tau+1 \Rightarrow P_{\tau+1} = P_\tau + \sigma_\eta^2$

$t = \tau+2 \Rightarrow P_{\tau+2} = P_{\tau+1} + \sigma_\eta^2 = P_\tau + 2\sigma_\eta^2$

$\vdots$

$t = \tau^* \Rightarrow P_{\tau^*} = P_\tau + (\tau^* - \tau)\sigma_\eta^2$

$P_{\tau+j} = P_\tau + j\sigma_\eta^2$



↳ extrapolação. Na lista: variância dá um pico.

Ver!

· Usando suavizador

$\nexists y_t \Rightarrow v_t = 0,\ F_t = 0,\ K_t = 0,\ L_t = T_t$

Eqs:

$\hat{\alpha}_t = a_t + P_t r_{t-1}$

$r_{t-1} = L_t' r_t = T' r_t$

$V_t = P_t - P_t N_{t-1} P_t$

$N_{t-1} = \underbrace{Z_t' \cancel{F_t^{-1}} Z_t}_{0} + L_t' N_t L_t = T' N_t T$

Para MNL

DO FK

$\hat{\alpha}_t = a_t + P_t r_{t-1}$

$r_{t-1} = r_t$

$V_t = P_t - P_t N_{t-1} P_t = P_t - P_t^2 N_{t-1}$

$N_{t-1} = N_t$

Começa em $t = \tau^*$

A partir daí $\Rightarrow$ $r_{\tau^*-1} = r_{\tau^*}$

$r_{\tau^*-2} = r_{\tau^*}$

$\vdots$

$r_{\tau-1} = r_{\tau^*}$

Para $\tau \leq \tau+j \leq \tau^* - 1$

$\hat{\alpha}_{\tau+j} = a_\tau + (P_\tau + j\sigma_\eta^2) r_{\tau^*}$

$= \underbrace{(a_\tau + P_\tau r_{\tau^*})}_{A} + \underbrace{(r_{\tau^*}\sigma_\eta^2)}_{B} j$

$\therefore \quad \hat{\alpha}_{\tau} = A$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\alpha}_{\tau+1} &= A + B \\ \hat{\alpha}_{\tau+2} &= A + 2B \end{aligned}\right\} \text{ eq. de uma reta}$$

$$\hat{\alpha}_{\tau^*-1} = A + (\tau^* - 1 - \tau) B.$$

Inicialização do FK

→ uma componente não estacionária

1) Prior difusa, por Big kappa:

$$\alpha_1 \sim N(0, k) \qquad k \to \infty.$$

Rodamos FK padrão até obter dist. própria

$$v_t = y_t - a_t \qquad\qquad a_{t+1} = a_t + \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}(y_t - a_t)$$

$$F_t = P_t + \sigma_\varepsilon^2$$

$$K_t = \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}$$

$$L_t = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}$$

$$P_{t+1} = \sigma_\varepsilon^2 \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} + \sigma_\eta^2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 + \frac{P_1}{P_1 + \sigma_\varepsilon^2}(y_1 - a_1) \quad \therefore \quad a_2 = y_1 \\ P_2 &= \sigma_\varepsilon^2 \cdot \frac{P_1}{P_1 + \sigma_\varepsilon^2} + \sigma_\eta^2 \quad \therefore \quad P_2 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 \end{aligned}\right\} \text{ dist. própria}$$

Função de veros.: $\ell^{bk}(\psi) = -\underbrace{\frac{(n-1)}{2}}_{\log(2\pi)} - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n} \log\left(|F_t| + v_t^2/F_t\right)$

$$v_t^2/F_t = \frac{(y_t - a_t)^2}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}$$

2) Inicialização Exata

$\alpha_1 = \delta$

onde $A = 1$

$P_{\infty,1} = 1$

↓ tem que zerar

vai zerar em $t=2 \Rightarrow$ a partir de $t=2$ podemos usar

Nesse caso, usamos log verossimilhança difusa:

$$l_d(\psi) = \lim_{K \to \infty} \left(\log L(\psi) + \frac{1}{2} \log K \right)$$

$$= \lim_{P_1 \to \infty} \left(\log L(\psi) + \frac{1}{2} \log P_1 \right)$$

$$= \lim_{P_1 \to \infty} \left[-\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \left(\log F_t + \frac{v_t^2}{F_t} \right) + \frac{1}{2} \log P_1 \right]$$

$$= \lim_{P_1 \to \infty} \left[-\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \left(\log F_1 + \frac{v_1^2}{F_1} \right) + \frac{1}{2} \log P_1 - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^{n} \left(\log F_t + \frac{v_t^2}{F_t} \right) \right]$$

$$= \lim_{P_1 \to \infty} \left[-\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \left(\log \frac{F_1}{P_1} + \frac{v_1^2}{F_1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^{n} \left(\log F_t + \frac{v_t^2}{F_t} \right) \right]$$

$F_1 = P_1 + \sigma_\varepsilon^2$

$$\boxed{l_d(\psi) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^{n} \left(\log F_t + \frac{v_t^2}{F_t} \right)} + \lim_{P_1 \to \infty} \left(\underbrace{\log \frac{P_1 + \sigma_\varepsilon^2}{P_1}}_{0} + \underbrace{\frac{v_1^2}{P_1 + \sigma_\varepsilon^2}}_{0} \right)$$

Concentração da verossimilhança:

Conveniente reparametrização p/ diminuir a busca numérica

Escrevemos $q = \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\varepsilon^2} \therefore \sigma_\eta^2 = q\sigma_\varepsilon^2$

Calculamos F_t^* e P_t^* como $F_t^* = \frac{F_t}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{P_t}{\sigma_\varepsilon^2} + 1 = P_t^* + 1$

Escrevemos FK reparametrizado

$$v_t = y_t - a_t$$

$$F_t^* = P_t^* + 1$$

$$a_{t+1} = a_t + k_t v_t$$

$$P_{t+1}^* = P_t^*(1 - k_t) + q$$

A log veros. difusa concentrada é obtida subst. $F_t \to \sigma_\varepsilon^2 F_t^*$ e $\sigma_\varepsilon^2 P_t^*$:

$$l_{dc}(\psi) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\left(\log \sigma_\varepsilon^2 F_t^* + \frac{v_t^2}{\sigma_\varepsilon^2 F_t^*}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{(n-1)}{2}\log \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\left(\log F_t^* + \frac{v_t^2}{\sigma_\varepsilon^2 F_t^*}\right)$$

$\downarrow$ Maximizamos com respeito a σ_ε^2

RESUMO

→ Inicialização prior difusa
Big kappa ($P_1 = K \to \infty$) } p/ $t=2 \Rightarrow$ dist. própria

Poderia inicialização exata: dá mesma coisa

Pode começar a computar FK e despreza o 1º cálculo

$\Rightarrow$ escreve $L(\psi)$ aproximada desmontando 1ª obs.

→ log verossim. difusa

$$l_d(\psi) = \lim_{P_1 \to \infty} \left(\log L(\psi) + \frac{1}{2} \log P_1 \right)$$

⋮ desenvolve e chega a:

$$= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^{n} \left(\log F_t + \frac{v_t^2}{F_t} \right)$$

não perde aqui

→ log verossim. concentrada

Escreve $q = \dfrac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\varepsilon^2} \Rightarrow \sigma_\eta^2 = q \cdot \sigma_\varepsilon^2$

Calcula F_t^* e P_t^*

Escreve FK reparametrizado

Subst. F_t na log ver. por $F_t^* \sigma_\varepsilon^2$

$$l_{dc}(\psi) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{(n-1)}{2} \log \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^{n} \left(\log F_t^* + \frac{v_t^2}{F_t^* \sigma_\varepsilon^2} \right)$$

deriva em σ_ε^2

acha $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{t=2}^{n} \frac{v_t^2}{F_t^*}$

$\Rightarrow$ Escreve $l_{dc}(\psi) = -\dfrac{n}{2} \log 2\pi - \dfrac{(n-1)}{2} - \dfrac{(n-1)}{2} \log \hat{\sigma}_\varepsilon^2 - \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{t=2}^{n} \log F_t^*$

só função de q

Modelo de Tendência Local

$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ → Modelo de tendência linear determinística

$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t$ → tendência estocástica da série

$\beta_{t+1} = \beta_t + k_t$ → inclinação da tend. estocástica

→ Obs: casos particulares

1) $\sigma_\eta^2 = \sigma_k^2 = 0 \Rightarrow \mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t$

- $\beta_{t+1} = \beta_t \Rightarrow \beta_1 = \beta_0$, $\beta_2 = \beta_1 = \beta_0$

- $\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t \therefore \mu_1 = \mu_0 + \beta$

$$\mu_2 = \mu_1 + \beta = \mu_0 + 2\beta$$

$$\therefore \mu_t = \mu_0 + \beta_0 t$$

vira tendência linear determinística

2) $\sigma_k^2 = 0 \Rightarrow \beta_{t+1} = \beta_t = \beta_{t-1} = \dots = \beta_0$

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_0 \therefore \mu_1 = \mu_0 + \beta_0 + \eta_0$$

$$\mu_2 = \mu_1 + \beta_0 + \eta_1$$

$$= \mu_0 + 2\beta_0 + \eta_0 + \eta_1$$

$$\vdots$$

$$\mu_t = \mu_0 + t\beta_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \eta_i$$

ou $\mu_t = \mu_{t-1} + \beta + \eta_t$

inclinação da tendência é fixa no tempo

3) $\sigma_\eta^2 = 0 \Rightarrow \mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t$ → chamado tendência suave

a 2ª diferença é um RB.

$$\beta_{t+1} = \beta_t + k_t$$

4) Se $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_k^2 = 0$

$\Rightarrow y_t = \mu_t$

$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta + \eta_t$

$\beta_{t+1} = \beta_t$

passeio aleatório com drift

→ Forma de Espaço de Estados

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{t+1} \\ \beta_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ k_t \end{pmatrix}$$

• É estacionário?

Avaliar $|\lambda_i(T)|$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \quad \therefore \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow \text{ Não é estacionário}$$

• É observável?

Avaliar $\det(M')$

$$M' = (z' \quad T'z')$$

$$T'z' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(M') = 1 \quad \Rightarrow \text{ É observável}$$

• Função de Previsão:

$$\hat{y}_{t+s|t} = E\left[y_{t+s} \mid \underset{\sim}{y_t}\right]$$

$$= E\left[z\alpha_{t+s} + \varepsilon_{t+s} \mid \underset{\sim}{y_t}\right]$$

$$= z\, E\left[\alpha_{t+s} \mid \underset{\sim}{y_t}\right]$$

$$= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} E[\mu_{t+s} \mid \underset{\sim}{y_t}] \\ E[\beta_{t+s} \mid \underset{\sim}{y_t}] \end{pmatrix}$$

$$= E\left[\mu_{t+s} \mid \underset{\sim}{y_t}\right] \rightarrow$$ (dúvida: já sabemos sair daqui?)

Mas $\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t$

$$\downarrow$$

$$\hat{m}_{t+s|t} = \hat{m}_{t|t} + s\,\hat{b}_{t|t} \quad ?$$

• Filtro de Kalman p/ este modelo: Provar que previsão é um EWMA.

* $v_t = y_t - za_t \quad \therefore \quad v_t = y_t - (1 \quad 0)\begin{pmatrix} m_t \\ b_t \end{pmatrix} \quad \therefore \quad v_t = y_t - m_t$

* $F_t = Z P_t Z' + \sigma_\varepsilon^2$

$$= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} P_t^{11} & P_t^{12} \\ P_t^{21} & P_t^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$= (P_t^{11} \quad P_t^{12}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon^2 = P_t^{11} + \sigma_\varepsilon^2$$

* $M_t = \begin{pmatrix} P_t^{11} & P_t^{12} \\ P_t^{21} & P_t^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_t^{11} \\ P_t^{21} \end{pmatrix}$

* $K_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_t^{11} & P_t^{12} \\ P_t^{21} & P_t^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{F_t} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_t^{11} \\ P_t^{21} \end{pmatrix} \frac{1}{F_t} = \begin{pmatrix} P_t^{11} + P_t^{21} \\ P_t^{21} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{F_t}$$

* $L_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} (1 \quad 0)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ K_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-K_1 & 1 \\ -K_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Fil completo

Atualização

* $a_{t|t} = a_t + M_t F_t^{-1} v_t$

$$\begin{pmatrix} m_{t|t} \\ b_{t|t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_t \\ b_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_t^{11} \\ P_t^{21} \end{pmatrix} \frac{1}{P_t^{11} + \sigma_\varepsilon^2} (y_t - m_t)$$

$$\therefore \quad m_{t|t} = m_t + \frac{P_t^{11}}{P_t^{11} + \sigma_\varepsilon^2} (y_t - m_t)$$

$$= \frac{P_t^{11}}{P_t^{11} + \sigma_\varepsilon^2} y_t + \left(1 - \frac{P_t^{11}}{P_t^{11} + \sigma_\varepsilon^2}\right) m_t$$

$$b_{t|t} = b_t + \frac{P_t^{21}}{P_t^{11} + \sigma_\varepsilon^2} (y_t - m_t)$$

Da previsão: Mas $a_t = T a_{t-1|t-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{t-1|t-1} \\ b_{t-1|t-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} m_t = m_{t-1|t-1} + b_{t-1|t-1} \\ b_t = b_{t-1|t-1} \end{array}$

$\Rightarrow \quad m_{t|t} =$

$b_{t|t} = \quad \ldots$

FK 2 em 1

$$a_{t+1} = T a_t + K_t v_t$$

$$\begin{pmatrix} m_{t+1} \\ b_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_t \\ b_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (y_t - m_t)$$

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= m_t + b_t + k_1 (y_t - m_t) \\ &= k_1 y_t + (1 - k_1) m_t + b_t \end{aligned}$$

como daqui enxergo EWMA?

$$\begin{aligned} b_{t+1} &= b_t + k_2 (y_t - m_t) \\ &= k_2 y_t - k_2 m_t + b_t \end{aligned}$$

Suavização

- $r_{t-1} = Z' F_t^{-1} v_t + L_t' r_t$

$$\begin{pmatrix} r_{t-1}^m \\ r_{t-1}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{F_t} (y_t - m_t) + \begin{pmatrix} 1 - k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_t^m \\ r_t^b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu}_t \\ \hat{\beta}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_t \\ b_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_t^{11} & P_t^{12} \\ P_t^{21} & P_t^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{t-1}^m \\ r_{t-1}^b \end{pmatrix}$$

- $N_{t-1} = Z' F_t^{-1} Z + L' N_t L_t$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{F_t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - k_1 & -k_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_t^{11} & N_t^{12} \\ N_t^{21} & N_t^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{F_t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Observações faltantes

Supondo faltante de $t = \tau$ a $\tau^* - 1$

→ No FK normal: $\nexists y_t \Rightarrow \nexists v_t$, $\nexists F_t$

$$\therefore \; v_t = 0 \, , \; F_t = 0 \Rightarrow k_t = 0$$

Equações FK ficam:

$$\begin{cases} a_{t|t} = a_t \\ P_{t|t} = P_t \\ a_{t+1} = T a_{t|t} = T a_t \\ P_{t+1} = T P_{t|t} T' + R Q_t R' = T P_t T' + R Q_t R' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} m_{t+1} \\ b_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_t \\ b_t \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \left. \begin{array}{l} m_{t+1} = m_t + b_t \\ b_{t+1} = b_t \end{array} \right\} \text{reta com inclinação cte.}$$

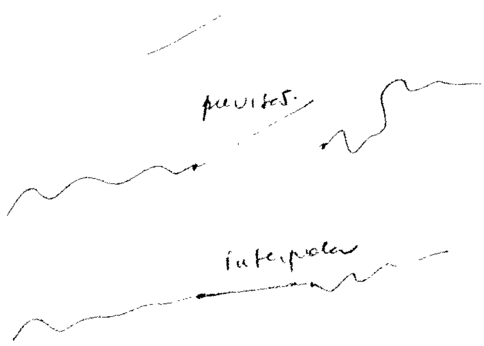
→ Para suavização: $v_t = 0$, $F_t = 0$

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_t = a_t + P_t r_{t-1} \\ r_{t-1} = L_t' r_t = T' r_t \end{cases} \qquad \begin{cases} V_t = P_t - P_t N_{t-1} P_t \\ N_{t-1} = T' N_t T \end{cases}$$

Preenchimento das Faltantes

$$y_t = Z a_t \text{ (por FK)} \quad \therefore \quad y_t = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} m_t \\ b_t \end{pmatrix} = m_t = \underline{m_{t-1}} + \underline{b_{t-1}}$$

ou $y_t = Z \hat{\alpha}_t$ (por suavização).



Inicialização do FK

Se tivesse estacionária faria pela distribuição incondicional

As duas variáveis de estado são não estacionárias

Duas formas de inicialização:

1) Difusa (ou dita difusa (via Big kappa) aproximada), chamada tb de "PRIOR Difusa"

É uma distr. imprópria, mas a idéia é que considera todos os possíveis valores iniciais como equiprováveis.

$$\alpha_1 \sim N\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}_{P_1 = kI}\right]$$

onde k é um valor $\to \infty$ (abordagem Big kappa)

Vamos computando FK desde $t=1$, mas só passamos a considerar válidos os cálculos quando a distribuição se tornar própria.

Normalmente $\Rightarrow$ $t = d+1$ dist. se torna própria onde d é o nº de componentes ñ estacionárias.

muito

$\Rightarrow$ Nesse caso

Mostrar que para este modelo, dist. se torna própria a partir de $t=3$.

Procedimento de inicialização difusa via big kappa não é muito stável computacionalmente, podendo gerar erros de arredondamento que podem comprometer os resultados do FK.

Além disso, qdo vimos a função de verossimilhança, veremos que temos que desconsiderar 1º termos por conta disso.

O método alternativo é mais stável e preciso.

2) Inicialização Exata (ou dita difusa exata).

Modelo geral p/ $\alpha_1 = a + \underbrace{A\delta}_{\text{comp ñ stac.}} + \underbrace{R_0\eta_0}_{\text{comp. stac.}}$

$\eta_0 \sim N(0, Q_0)$

Nesse caso: só componentes não estacionárias

$$\alpha_1 = A \underset{\sim}{\delta}$$

$$\underset{\sim}{\delta} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = E[\alpha_1] = 0$$

$$P_1 = \mathrm{var}(\alpha_1) = A \,\mathrm{var}\,\delta A' = KAA' = K P_\infty$$

(Não aparece P_* pois é relativa à comp. estacionária)

Para atualização $\Rightarrow$ usa FK exato inicial
até encontrar $P_{\infty, t+1} = 0$.
A partir daí $\Rightarrow$ usa FK padrão.

$$F_{\infty,t} = Z P_{\infty,t} Z' \quad , \quad M_{\infty,t} = P_{\infty,t} Z_t'$$

$$F_t^{(1)} = F_{\infty,t}^{-1} \qquad F_{*,t} = H_t$$

$$K_t^{(0)} = T M_{\infty,t} F_t^{(1)} \qquad F_t^{(2)} = -F_{\infty,t}^{-1} F_{*,t} F_{\infty,t}^{-1}$$

$$L_t^{(0)} = T_t - K_t^{(0)} Z_t \qquad K_t^{(1)} = T M_{\infty,t} F_t^{(2)}$$

$$v_t^{(0)} = y_t - Z_t a_t^{(0)} \qquad L_t^{(1)} = -K_t^{(1)} Z$$

$$a_{t+1} = \hat{\alpha}_{t+1}^{(0)} = T_t \underbrace{\hat{\alpha}_t^{(0)}}_{a_t} + K_t^{(0)} v_t^{(0)}$$

$$P_{\infty,t+1} = T P_{\infty,t} L_t^{(0)\prime}$$

Solução inicial $\Rightarrow$ $a_1 = 0$ $\qquad F_{*,0} = \sigma_\varepsilon^2$
$P_{\infty,1} = I$

Para $t = 1$:

$$F_{\infty,1} = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad M_{\infty,1} = Z_t' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{*,0} = \sigma_\varepsilon^2$$

$$F_1^{(1)} = 1$$

$$F_0^{(2)} = -\sigma_\varepsilon^2$$

$$K_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1^{(1)} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2$$

$$L_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1^{(1)} = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1 \quad 0) = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P_{\infty,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}'$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $t=3$

⋮

vai encontrar $P_{\infty,3} = 0$

Logo: FK padrão pode começar a ser usado p/ $t=3$

com $P_{d+1} = P_{*,d+1}$

ou seja $\boxed{P_3 = P_{*,3}}$ e $\boxed{a_3 = \hat{a}_3^{(0)}}$

Função de verossimilhança

Nesse caso, temos 2 componentes não estacionárias. Não

Não podemos usar Função verossimilhança tradicional

Tradicional

$$L(\Psi) = \prod_{i=1}^{n} \overbrace{p(y_t | \underset{\sim}{Y}_{t-1})}^{\text{fdp preditiva.}}$$

onde $p(y_t|\underset{\sim}{Y}_{t-1}) = \dfrac{1}{2\pi^{p/2}|F_t|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\underbrace{(y_t - Za_t)}_{v_t}' F_t^{-1}\underbrace{(y_t - Za_t)}_{v_t}\right\}$

$$\Rightarrow \quad \ell(\Psi) = \sum_{i=1}^{n} \log p(y_t|Y_{t-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{p}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log|F_t|^{1/2} - \frac{1}{2}v_t' F_t^{-1} v_t\right]$$

$$= -\frac{np}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\log|F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t\right)$$

Para este modelo → $p = 1$

$$\ell(\psi) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\log|F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t\right)$$

→ Trabalhando com função verossimilhança p/ abordagem big kappa

computamos F_k desde o início, mas só passamos a considerar como válidos os valores a partir do momento em que dist. se torna própria.

$$\boxed{\ell^{bk}(\psi) = -\frac{(n-q)}{2}p\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=q+1}^{n}\left(\log|F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t\right)}$$

Nesse caso: $t = 3$

$$\ell(\psi) = -(n-2)\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=3}^{n}\left(\log|F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t\right)$$

→ Função Verossimilhança difusa

É definida como:

$$\boxed{\ell_d(\psi) = \log L_d(\psi) = \lim_{k\to\infty}\left[\log L(y) + \frac{q}{2}\log k\right]}$$

desenvolvendo, temos:

$$\boxed{\ell_d(\psi) = -\frac{n\cancel{p}^{1}}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{d} w_t - \frac{1}{2}\sum_{t=d+1}^{n}\left(\log|F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t\right)}$$

onde w_t = depende de $F_{\infty,t}$ e $F_{*,t}$ do procedimento da inicialização exata.

Para este caso:

$$\boxed{\ell_d(\psi) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2} w_t - \frac{1}{2}\sum_{t=3}^{n}\left(\log|F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t\right)}$$

como pode explicitar?

→ Função verossimilhança concentrada difusa.

A concentração é a reparametrização do modelo p/ reduzir a dimensionalidade da busca numérica.

Nesse caso, temos 2 razões sinal ruído

$$q_\eta = \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\varepsilon^2} \qquad q_\kappa = \frac{\sigma_\kappa^2}{\sigma_\varepsilon^2}$$

É necessário definir:

$$P_t^* = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} P_t \qquad \text{e} \qquad F_t^* = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} F_t$$

Calcula F_t^* e na $l_d(\psi)$ substitui F_t por $\sigma_\varepsilon^2 F_t^*$

$$F_t = Z P_t Z' + \sigma_\varepsilon^2 = \underset{1\times 2}{(1 \quad 0)} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} P_t^{11} & P_t^{12} \\ P_t^{21} & P_t^{22} \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$= \begin{pmatrix} P_t^{11} & P_t^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\therefore F_t = P_t^{11} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\boxed{F_t^* = P_t^{11*} + 1}$$

$$\Rightarrow \quad l_d(\psi) = -n \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \underbrace{w_t}_{\text{como depende de } \sigma_\varepsilon^2} - \sum_{t=3}^{n} \left(\log |F_t^* \cdot \sigma_\varepsilon^2| + \frac{v_t^2}{F_t^* \sigma_\varepsilon^2} \right)$$

Na realidade, trabalhamos com

$$\sigma_\varepsilon^2 = e^{2\psi_\varepsilon} \therefore \psi_\varepsilon = \log \sigma_\varepsilon$$

— " —

Equaçaõ de Ricatti

$$\boxed{P_{t+1} = T_t P_t L_t' + R_t Q_t R_t}$$ Equaçaõ do passo de previsão do FK.

$$L_t = T_t - K_t Z$$

$$K_t = T P_t Z' F_t^{-1}$$

$\vdots$

iguala $P_{t+1} = P_t = \bar{P}$

Modelo Tendência linear

$$v_t = y_t + Za_t$$
$$F_t = ZPZ' + \sigma_\varepsilon^2$$
$$K_t = TP_t Z' F_t^{-1}$$
$$L_t = T - K_t Z$$

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t$$
$$\beta_{t+1} = \beta_t + \xi_t$$

$$\Rightarrow \quad y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{t+1} \\ \beta_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \xi_t \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

<u>$t=1$</u> (FK 2 em 1)

- $v_1 = y_1 - Z_1 a_1$
$$= y_1 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{pmatrix} = y_1 - a_{1,1}$$

- $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon^2$
$$= K + \sigma_\varepsilon^2$$

- $K_1 = TP_1 Z' F_1^{-1}$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{K + \sigma_\varepsilon^2}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{K + \sigma_\varepsilon^2} = \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{K + \sigma_\varepsilon^2} = \begin{pmatrix} \frac{K}{K + \sigma_\varepsilon^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $L_1 = T - K_1 Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{K}{K + \sigma_\varepsilon^2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{K}{K + \sigma_\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad L_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{K+\sigma_\varepsilon^2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = T a_1 + K_1 v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{K}{K+\sigma_\varepsilon^2} \\ 0 \end{pmatrix} (y_1 - \cancel{a_{1,1}})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{K y_1}{K+\sigma_\varepsilon^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{K y_1}{K+\sigma_\varepsilon^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = T P_1 L_1' + R Q R'$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{K+\sigma_\varepsilon^2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{K+\sigma_\varepsilon^2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{K\sigma_\varepsilon^2}{K+\sigma_\varepsilon^2} + K & K \\ K & K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{K\sigma_\varepsilon^2}{K+\sigma_\varepsilon^2} + K + \sigma_\varepsilon^2 & K \\ K & K + \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{t=2}}$

$$\cdot \; v_2 = y_2 - Z a_2 = y_2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{K y_1}{K+\sigma_\varepsilon^2} \\ 0 \end{pmatrix} = y_2 - \frac{K y_1}{K+\sigma_\varepsilon^2}$$

$$\cdot \; F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11,2} & P_{12,2} \\ P_{21,2} & P_{22,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\therefore \; F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11,2} \\ P_{21,2} \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \quad F_2 = P_{11,2} + \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\kappa\sigma_\varepsilon^2}{\kappa + \sigma_\varepsilon^2} + \kappa + 2\sigma_\varepsilon^2$$

- $K_2 = T P_2 Z' F_2^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11,2} & P_{12,2} \\ P_{21,2} & P_{22,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{F_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11,2} \\ P_{21,2} \end{pmatrix} \frac{1}{F_2} = \begin{pmatrix} P_{11,2} + P_{21,2} \\ P_{21,2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{F_2} = \begin{pmatrix} \frac{P_{11,2} + P_{21,2}}{F_2} \\ \frac{P_{21,2}}{F_2} \end{pmatrix}$$

- $L_2 = T - K_2 Z$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{1,2} \\ K_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{1,2} & 0 \\ K_{2,2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - K_{1,2} & 1 \\ -K_{2,2} & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \; a_3 = T a_2 + K_2 v_2 =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P_{11,2} + P_{21,2}}{F_2} \\ \frac{P_{21,2}}{F_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,1} + a_{2,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P_{11,2} + P_{21,2}}{F_2} \\ \frac{P_{21,2}}{F_2} \end{pmatrix}$$

Como $a_{2,2} = 0$

$$= \begin{pmatrix} a_{2,1} + \frac{P_{11,2} + P_{21,2}}{F_2} \\ a_{2,2} + \frac{P_{21,2}}{F_2} \end{pmatrix}$$

$$P_3 = T P_2 L_2' + RQR$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11,2} & P_{12,2} \\ P_{21,2} & P_{22,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-K_{1,2} & 1 \\ -K_{2,2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{11,2}+P_{21,2} & P_{12,2}+P_{22,2} \\ P_{21,2} & P_{22,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-K_{1,2} & 1 \\ -K_{2,2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{A}{(P_{11,2}+P_{21,2}) - K_{2,2}(P_{12,2}+P_{22,2}) + \sigma_\varepsilon^2} & \overset{B}{P_{11,2}+P_{21,2}+P_{12,2}+P_{22,2}} \\ \underset{C}{P_{21,2} - P_{21,2}\cdot K_{1,2} - K_{2,2}\cdot P_{22,2}} & \underset{D}{P_{21,2}+P_{22,2}+\sigma_\eta^2} \end{pmatrix}$$

avaliando as expressões:

A $\quad P_{11,2} + P_{21,2} - K_{2,2}(P_{12,2}+P_{22,2}) + \sigma_\varepsilon^2 =$

$$= \frac{K\sigma_\varepsilon^2}{K+\sigma_\varepsilon^2} + K + \sigma_\varepsilon^2 + K - \underbrace{\frac{P_{21,2}}{F_2}}_{\dfrac{K(K+K+\sigma_\eta^2)}{\frac{K\sigma_\varepsilon^2}{(K+\sigma_\varepsilon^2)} + K + 2\sigma_\varepsilon^2}}(P_{12,2}+P_{22,2}) + \sigma_\varepsilon^2 =$$

$=$

Voltando novamente p/ FK (Previsão)

O que queremos?

Estimar α_t dado certo conjunto de informação observável

$$\underset{\sim}{y}_j \begin{cases} j = t & \Rightarrow \text{previsão} \\ j = t-1 & \Rightarrow \text{atualização} \\ j = n & \Rightarrow \text{suavização} \end{cases}$$

previsão e atualização } FK

suavização → serve p/ fazer extração de componentes

Duas formas de fazer

1) Estimação não recursiva

Queremos estimar $\underset{\sim}{\alpha}$, ou seja

$E[\underset{\sim}{\alpha} | \underset{\sim}{y}]$ e $var(\underset{\sim}{\alpha} | \underset{\sim}{y})$

Precisamos de $p(\underset{\sim}{\alpha} | \underset{\sim}{y})$

Seja modelo linear local.

$$y_t = \alpha_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \qquad \alpha_1 \sim (a_1, p_1)$$
$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + \eta_t \qquad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \qquad E[\varepsilon_t \alpha_1] = E[\eta_t \alpha_1] = 0 \ \forall t$$
$$E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0 \ \forall t, s.$$

a) Calculando $E(y)$ e $var(y)$

$$y_1 = \alpha_1 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = \alpha_2 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + \eta_1 + \varepsilon_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = \alpha_1 + (\eta_1 + \dots + \eta_{n-1}) + \varepsilon_n$$

(Acha y_n recursivamente)

Seja $y = (y_1 \ y_2 \dots y_n)'$

$$\Rightarrow E(y) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} a_1$$

(calcula $E[y] = \mathbb{1} a_1$)

$$var(y) = E[(y - E(y))(y - E(y))']$$

$$= \begin{bmatrix} var(y_1) & cov(y_1, y_2) & \cdots & cov(y_1, y_n) \\ cov(y_1, y_2) & & & \\ & & & \\ & & & var(y_n) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

variâncias

$$\mathrm{var}(y_1) = E[(y_1 - a_1)^2]$$
$$= E[(\alpha_1 + \varepsilon_1 - a_1)^2] = \mathrm{var}(\alpha_1) + \mathrm{var}(\varepsilon_1)$$
$$= p_1 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathrm{var}(y_2) = E[(y_2 - a_1)^2]$$
$$= E[(\alpha_1 + \eta_1 + \varepsilon_1 - a_1)^2] = \mathrm{var}(\alpha_1) + E[\varepsilon_1^2] + E(\eta_1^2)$$
$$= p_1 + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{var}(y_n) = p_1 + \sigma_\varepsilon^2 + (n-1)\sigma_\eta^2$$

(calcula matriz var(y) escrevendo cada y_i recursivamente)

covariâncias

$$\mathrm{cov}(y_1, y_2) = E[(y_1 - a_1)(y_2 - a_1)]$$
$$= E[(\alpha_1 + \varepsilon_1 - a_1)(\alpha_1 + \eta_1 + \varepsilon_2 - a_1)]$$
$$= E[(\alpha_1 - a_1 + \varepsilon_1)((\alpha_1 - a_1) + \eta_1 + \varepsilon_2)] =$$
$$= p_1$$

$$\mathrm{cov}(y_2, y_3) = E[(y_2 - a_1)(y_3 - a_1)]$$
$$= E[(\alpha_1 + \eta_1 + \varepsilon_2 - a_1)(\alpha_1 + \eta_1 + \eta_2 + \varepsilon_3 - a_1)]$$
$$= p_1 + \sigma_\eta^2$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{var}(y) = \begin{bmatrix} p_1 + \sigma_\varepsilon^2 & p_1 & \cdots & p_1 \\ p_1 & p_1 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 & & \\ \vdots & p_1 + \sigma_\eta^2 & \ddots & \\ & p_1 + 2\sigma_\eta^2 & & p_1 + (n-1)\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\ p_1 & \vdots & & \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\mathbf{1}\mathbf{1}'p_1}_{\text{matriz } n\times n \text{ c/ } p_1} + \Sigma_{ij} \qquad \text{onde} \quad \Sigma_{ij} = \begin{cases} (i-1)\sigma_\eta^2 & i<j \\ \sigma_\varepsilon^2 + (i-1)\sigma_\eta^2 & i=j \\ (j-1)\sigma_\eta^2 & i>j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ a matriz var(y) cresce com o número de observações.

b) Calculando $E[\alpha]$ e $var(\alpha)$

$$\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \eta_1$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \eta_2 = \alpha_1 + \eta_1 + \eta_2$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = \alpha_1 + (\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{n-1})$$

Seja $\alpha = (\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n)'$

$$\Rightarrow E[\alpha] = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} a_1 \qquad (\text{calcula } E(\alpha) = \mathbb{1} a_1)$$

$$var(\alpha) = E\left[(\alpha - E(\alpha))(\alpha - E(\alpha))' \right]$$

$$= \begin{bmatrix} var(\alpha_1) & cov(\alpha_1\alpha_2) \ldots cov(\alpha_1\alpha_n) \\ \vdots & \ddots \\ cov(\alpha_1\alpha_n) & var(\alpha_n) \end{bmatrix}$$

variâncias

$$var(\alpha_1) = E\left[(\alpha_1 - a_1)^2\right] = p_1$$

$$var(\alpha_2) = E\left[(\alpha_2 - a_1)^2\right] =$$

$$= E\left[(\alpha_1 + \eta_1 - a_1)^2\right] =$$

$$= p_1 + \sigma^2_\eta$$

$$\vdots$$

$$Var(\alpha_n) = p_1 + (i-1)\,\sigma^2_\eta \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

covariâncias

$$\cdot\ cov(\alpha_1\, \alpha_2) = E\left[(\alpha_1 - a_1)(\alpha_2 - a_1)\right]$$

$$= E\left[(\alpha_1 - a_1)(\alpha_1 + \eta_1 - a_1)\right]$$

$$= p_1$$

$$cov(\alpha_1, \alpha_3) = \cdots = p_1$$

$$\therefore\ cov(\alpha_1, \alpha_n) = p_1$$

$$\cdot\ cov(\alpha_2, \alpha_3) = \cdots = p_1 + \sigma^2_\eta$$

p/ $j > i$

$$\alpha_i = \alpha_1 + \sum_{r=1}^{i-1} \eta_r$$

$$cov(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} p_1 + (i-1)\sigma_\eta^2 & \text{se } i < j \\ p_1 + (j-1)\sigma_\eta^2 & \text{se } i > j \end{cases}$$

$$\Rightarrow var(\alpha) = \begin{cases} p_1 + (i-1)\sigma_\eta^2 & \text{se } i < j \\ p_1 + (i-1)\sigma_\eta^2 & \text{se } i = j \\ p_1 + (j-1)\sigma_\eta^2 & \text{se } i > j \end{cases}$$

c) calculando $cov(y, \underset{\sim}{\alpha})$ conjuntamente

$$cov(y, \underset{\sim}{\alpha}) = E\left[(y - \mathbb{1}a_1)(\alpha - \mathbb{1}a_1)'\right]$$

cada termo individualmente

$$cov(y_i, \alpha_j) = E\left[(\alpha_i - a_1)(y_j - a_1)\right)$$

$\therefore$ $y_i = \alpha_1 + \sum_{\ell=1}^{i-1} \eta_\ell + \varepsilon_i$ } escrevendo recursivamente

$\alpha_j = \alpha_1 + \sum_{s=1}^{j-1} \eta_s$

$$\therefore (y_i - a_1) = (\alpha_1 - a_1) + \sum^{i-1} \eta_\ell + \varepsilon_i$$

$$(\alpha_j - a_1) = (\alpha_1 - a_1) + \sum^{j-1} \eta_s + \varepsilon_i$$

$$\therefore E\left[(y_i - a_1)(\alpha_j - a_1)'\right] =$$

$$= E\left[(\alpha_1 - a_1) + \sum_1^{i-1} \eta_\ell + \varepsilon_i\right]\left((\alpha_1 - a_1) + \sum^{j-1} \eta_s)\right)$$

$$= E\left[(\alpha_1 - a_1)^2 + E\left(\sum^{j-1} \eta_\ell \sum^{j-1} \eta_s\right)\right)$$

$$= p_1 + \begin{cases} (i-1)\sigma_\eta^2 & i \le j \\ (j-1)\sigma_\eta^2 & i > j \end{cases}$$

d) caracterizar probabilisticamente y e $\underset{\sim}{\alpha}$ através do seguinte resultado:

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\alpha} \\ y \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}a_1 \\ \mathbb{1}a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} var(\alpha) & cov(\alpha, y) \\ cov(y, \alpha) & var(y) \end{pmatrix}\right]$$

onde $\mathbb{1}a_1 = (a_1 \ldots a_1)'$ $n\times 1$

$$var(\alpha) = \begin{cases} (i-1)\sigma_\eta^2 + p_1 & i \leq j \\ (j-1)\sigma_\eta^2 + p_1 & i > j \end{cases}$$

$$var(y) = \begin{cases} (i-1)\sigma_\eta^2 + p_1 & i < j \\ (i-1)\sigma_\eta^2 + p_1 + \sigma_\varepsilon^2 & i = j \\ (j-1)\sigma_\eta^2 + p_1 & i > j \end{cases}$$

$$cov(y,\alpha) = \begin{cases} (i-1)\sigma_\eta^2 + p_1 & i \leq j \\ (j-1)\sigma_\eta^2 + p_1 & i > j \end{cases} \Rightarrow = var(\alpha)$$

e) Queremos estimar α dada info da série y

Precisamos de $p(\alpha|y) \Rightarrow$ p/ obter $E(\alpha|y)$ e $var(\alpha|y)$

<u>Resultados importantes p/ usarmos</u>

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{x} \\ \underset{\sim}{y} \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{pmatrix}\right] \quad \text{onde } \Sigma_{yx} = \Sigma_{xy}'$$

precisa saber oq é dado?

então $f(x|Y=y) \sim N(E[x|Y=y], var[x|Y=y])$

$$E[x|Y=y] = \mu_x + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y-\mu_y)$$

$$var[x|Y=y] = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx}$$

fazendo $\underline{X} = \underset{\sim}{\alpha}$ e $\underline{Y} = \underline{y}$, temos:

$f(\underset{\sim}{\alpha}|\underline{Y}=y) \sim N(E(\underset{\sim}{\alpha}|Y=y), var(\underset{\sim}{\alpha}|Y=y))$ onde

$$E[\underset{\sim}{\alpha}|\underline{Y}=y] = E[\underset{\sim}{\alpha}] + cov(\underset{\sim}{\alpha},y)(var(y))^{-1}(y - a_1\mathbb{1})$$

$$= \mathbb{1}a_1 + cov(\underset{\sim}{\alpha},y)(var(y))^{-1}(y - a_1\mathbb{1})$$

$$= \mathbb{1}a_1 + \Sigma_0$$ dúvida

f) Conclusões

Esta forma de se obter estimativa p/ $\underset{\sim}{\alpha}$ não é recomendável pois

(i) $var(y)$ e $var(\underset{\sim}{\alpha})$ tem dimensões $n\times n$ onde n é tamanho da amostra

A cada instante, a estimativa é calculada usando toda info da amostra

(ii) Se série de obs. vai crescendo c/ tempo ⇒ matrizes $var(\underset{\sim}{y})$ e $var(\underset{\sim}{\alpha})$ vão crescendo. O procedimento deverá ser todo repetido, sem aproveitar estimativa em $\underline{n}$ p/ estimar em $\underline{n+j}$

Procedimento ñ é recursivo.

(iii) Elementos de $var(\underset{\sim}{\alpha})$ e $var(\underset{\sim}{y})$ devem ser estimados por MV

(iv) Não é possível obter estimativas de previsão p/ $\underset{\sim}{\alpha}$.

— // —

2) Pelo FK.

2.1) Passo da Previsão.

(I) $y_t = z_t \alpha_t + \varepsilon_t \quad , \varepsilon_t \sim N(0, H_t)$

(II) $\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t \quad , \eta_t \sim N(0, Q_t)$

(No ex. anterior:

$z_t = 1$

$T_t = 1 \quad R_t = 1.$

$\begin{cases} y_t = \alpha_t + \varepsilon_t \\ \alpha_{t+1} = \alpha_t + \eta_t \end{cases}$

Sejam:

$a_{t+1} = E[\alpha_{t+1} | \underset{\sim}{Y_t})$

$P_{t+1} = var[\alpha_{t+1} | \underset{\sim}{Y_t})$ onde $\underset{\sim}{Y_t} = (y_1\ y_2 \dots y_{t-1}, y_t)$

Queremos:

$a_{t+1} = E[\alpha_{t+1} | \underset{\sim}{Y_t})$

$P_{t+1} = var[\alpha_{t+1} | \underset{\sim}{Y_t})$

a) cálculo a_{t+1}

$a_{t+1} = E[\alpha_{t+1} | \underset{\sim}{Y_t}] =$

$= E[T_t \alpha_t + R_t \eta_t | \underset{\sim}{Y_t})$

$= T_t E[\alpha_t | \underset{\sim}{Y_t}) \quad \therefore \quad \boxed{a_{t+1} = T_t\, a_{t|t}}$

(se eq. fosse $\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + c_t + R_t \eta_t \Rightarrow a_{t+1} = T_t a_{t|t} + c_t$)

b) cálculo P_{t+1}

$$P_{t+1} = var(\alpha_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y}_t)$$

coloca cond. aqui

$$= E\Big[(\alpha_{t+1} - \underbrace{E[\alpha_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y}_t]}_{a_{t+1}})(\alpha_{t+1} - \underbrace{E[\alpha_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y}_t]}_{a_{t+1}})' \mid \underset{\sim}{Y}_t \Big)$$

Da equação (II)

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t$$

$$E[\alpha_{t+1}) = a_{t+1} = T_t a_{t|t}$$

$$(\alpha_{t+1} - E[\alpha_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y}_t]) = T_t(\alpha_t - a_{t|t}) + R_t \eta_t$$

$$(\alpha_{t+1} - E[\alpha_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y}_t])' = (\alpha_t - a_{t|t})' T_t' + \eta_t' R_t'$$

b.1) Abrir expressão P_{t+1}

$$\Rightarrow P_{t+1} = E\Big[(T_t(\alpha_t - a_{t|t}) + R_t\eta_t)((\alpha_t - a_{t|t})'T_t' + \eta_t' R_t') \mid \underset{\sim}{Y}_t \Big]$$

$$= \underbrace{E_t\Big[T_t(\alpha_t - a_{t|t})(\alpha_t - a_{t|t})'T_t'\Big]}_{A} + \underbrace{E_t\big[T_t(\alpha_t - a_t)\eta_t' R_t'\big)}_{B} +$$

$$+ \underbrace{E_t\big[R_t\eta_t(\alpha_t - a_{t|t})'T_t'\big)}_{C} + \underbrace{E_t[R_t\eta_t\eta_t' R_t']}_{D}$$

com condicional

$E_t = E[\cdot \mid \underset{\sim}{Y}_t]$

b.2) Escrever eq. (II) recursivamente

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t$$

$$\alpha_2 = T_1 \alpha_1 + R_1 \eta_1$$

$$\alpha_3 = T_2 \alpha_2 + R_2 \eta_2$$

$$= T_2(T_1\alpha_1 + R_1\eta_1) + R_2\eta_2$$

$$= T_2 T_1 \alpha_1 + T_2 R_1 \eta_1 + R_2 \eta_2$$

$$\alpha_4 = T_3 \alpha_3 + R_3 \eta_3$$

$$= T_3(T_2T_1\alpha_1 + T_2R_1\eta_1 + R_2\eta_2) + R_3\eta_3$$

$$= \underbrace{T_3T_2T_1\alpha_1}_{\left(\prod_{i=1}^{3} T_i\right)\alpha_1} + \underbrace{T_3T_2R_1\eta_1 + T_3R_2\eta_2 + R_3\eta_3}_{\sum_{j=1}^{3}\left(\prod_{i=0}^{j-1} T_{t-i}\right) R_{t-j}\eta_{t-j}}$$

(expressão fica longa por conta de T_t, R_t)

$$\Rightarrow \alpha_{t+1} = \left(\prod_{j=1}^{t-1} T_j\right)\alpha_1 + \sum_{j=1}^{t-1}\left[\prod_{i=0}^{j-1} T_{t-i}\right] R_{t-j}\eta_{t-j} + R_t\eta_t$$

b.3) cálculo das parcelas.

- $A = E_t\big[T_t(\alpha_t - a_t)(\alpha_t - a_t)'T_t'\big) =$

$$= T_t E_t[(\alpha_t - a_t)(\alpha_t - a_t)']T_t' \quad \therefore \quad A = T_t \underbrace{P_{t|t}}_{var(\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y}_t)} T_t'$$

$$\bullet\ B_t = E_t\left[T_t(\alpha_t - a_t)\eta_t' R_t'\right) =$$

$$= T_t\, E_t\left[(\alpha_t - a_t)\eta_t'\right] R_t'$$

$$= T_t\, E_t\left[\alpha_t \eta_t'\right) - T_t E_t a_t \underbrace{E(\eta_t')}_{0} R_t$$

$$= T_t \underbrace{E_t\left[\alpha_t \eta_t'\right)}$$

$\downarrow$

equivale a

$$E_{t+1}\left[\alpha_{t+1}\eta_{t+1}'\right) = E_{t+1}\left[\left(\prod_{j=1}^{t-1} T_j\right)\alpha_1 \cdot \eta_{t+1}' + \left(\sum_{j=1}^{t-1}\left(\prod_{i=0}^{j-1} T_{t-i}\right) R_{t-j}\eta_{t-j}\right)\cdot \eta_{t+1}' + \right.$$

$$\left. + R_t \eta_t \eta_{t+1}'\right]$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{t-1} T_j\right) \underbrace{E_{t+1}\left[\alpha_1 \eta_{t+1}'\right)}_{0} + \sum_{j=1}^{t-1}\left[\prod_{i=0}^{j-1} T_{t-i}\right) R_{t-j} \underbrace{E_{t+1}\left[\eta_{t-j}\cdot \eta_{t+1}'\right)}_{0} +$$

$$+ R_t \underbrace{E\left[\eta_t \eta_{t+1}'\right)}_{0} = 0$$

$\therefore\ B_t = 0. \quad \forall t$

$\bullet\ C_t = 0$ (analogamente)

$$\bullet\ D_t = E_t\left[R_t \eta_t \eta_t' R_t'\right) = R_t \underbrace{E_t\left[\eta_t \eta_t'\right)}_{Q_t} R_t'$$

$$D_t = R_t Q_t R_t'$$

logo:
$$\boxed{\begin{aligned} P_{t+1} &= \text{var}(\alpha_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y}_t) \\ &= T_t P_{t|t} T_t' + R_t Q_t R_t' \end{aligned}}$$

Resumo previsões:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{t+1} &= E\left[\alpha_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y}_t\right) = T_t\, a_{t|t} \\ P_{t+1} &= \text{var}\left[\alpha_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y}_t\right) = T_t P_{t|t} T_t' + R_t Q_t R_t' \end{aligned}}$$

2.2) Passo de Atualização

Queremos agora

$$\begin{cases} a_{t|t} = E[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y}_t] \\ P_{t|t} = Var(\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y}_t) \end{cases}$$

a) Resultados importantes que usaremos:

a.1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} & \Sigma_{yz} \\ \Sigma_{zx} & \Sigma_{zy} & \Sigma_{zz} \end{pmatrix}\right]$

dúvida precisaremos saber.

Supondo $\mu_z = 0$ e $\Sigma_{zy} = 0$ ($\Sigma_{yz} = 0$), temos:

$$E[x \mid Y = y, Z = z] = \mu_{x|y} + \Sigma_{xz}\Sigma_{zz}^{-1}(z)$$

$$var(x \mid Y = y, Z = z) = \Sigma_{x|y} - \Sigma_{xz}\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma_{zx}$$

a.2) Se x e y são 2 vetores aleatórios e $g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ (bijetiva) então

$$F_{x|y} = F_{x|g(y)} \Rightarrow E[x \mid y = y] = E[x \mid g(y) = g(y)]$$

b) Cálculo de $a_{t|t}$

$a_{t|t} = E[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y}_t]$

$\downarrow$ decompõe em $\underset{\sim}{Y}_{t-1}$ e y_t

$= E[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}, y_t]$

$\downarrow$ substitui y_t por v_t

$= E[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}, v_t]$ onde $v_t = y_t - \underbrace{E[y_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}]}_{Z_t a_t}$: erro de previsão 1 passo a frente

b.1) Justificar que podemos usar v_t ao invés de y_t que dá no mesmo.

$$v_t = y_t - E[y_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}]$$

$= E[Z_t\alpha_t + \varepsilon_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}]$

$= Z_t a_t$ - já calculamos $= E[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}]$

$= y_t - Z_t a_t \Rightarrow$ conteúdo informacional de y_t não é modificado se usamos v_t (função bijetiva).

b.2) Podemos usar resultado 1 com

$x = \alpha_t, \quad y = \underset{\sim}{y}_{t-1}, \quad z = v_t$

Precisamos provar que $\begin{cases} \mu_z = \mu_{v_t} = 0 \\ \Sigma_{zy} = \Sigma_{v_t, \underset{\sim}{y}_{t-1}} = 0. \end{cases}$

- $\mu_z = E(z) = 0$

$= E(v_t)$ usar lei das expectativas iteradas.

mas $E(v_t) = E[E(v_t | \underset{\sim}{y}_{t-1})]$ escreve v_t como $y_t - z_t a_t$

$E(v_t | \underset{\sim}{y}_{t-1}) = E[y_t - z_t a_t | \underset{\sim}{y}_{t-1})$

$= E[y_t | \underset{\sim}{y}_{t-1}) - z_t a_t$

$= z_t a_t - z_t a_t = 0.$

$\Rightarrow E(v_t) = 0.$

- $\Sigma_{yz} = 0$

$= \Sigma_{\underset{\sim}{y}_{t-1} v_t} = cov(\underset{\sim}{y}_{t-1}, \underset{\sim}{v}_t)$

Mas $cov(\underset{\sim}{y}_{t-1}, \underset{\sim}{v}_t) = E[(y_{t-1} - E[y_{t-1}])(\underset{\sim}{v}_t - \underset{0}{E(v_t)})']$

$= E[y_{t-1} \cdot \underset{\sim}{v}_t']$

$$\begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix} (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_t)$$

onde cada elemento dessa matriz será dado por

$\{E[y_{t-j} v_t)\}_{j=1,2,\dots t-1}$

$\Downarrow$

Lei das exp. iteradas: $E[y_{t-j} v_t) = E[E[y_{t-j} v_t) | \underset{\sim}{y}_{t-1})$

$= E[y_{t-j} \underset{0}{E[v_t | \underset{\sim}{y}_{t-1})}]$

$= 0$

b.3) usar o resultado

$\Rightarrow$ Podemos usar o resultado 1:

$E[\alpha_t | \underset{\sim}{y}_t] = \underset{a_t}{\underbrace{E[\alpha_t | \underset{\sim}{y}_{t-1}]}} + cov[\alpha_t, v_t)(var(v_t))^{-1} v_t$

$\left| v_t = y_t - Z_t a_t \right|$

$a_t = E[\alpha_t | Y_{t-1}]$
$P_t = var(\alpha_t | Y_{t-1})$
$a_{t|t} = E[\alpha_t | Y_t]$
$P_{t|t} = var(\alpha_t | Y_t)$
$F_t = var[v_t] = Z P_t Z' +$
$M_t = cov(\alpha_t v_t)$

b.4) cálculo de $var[v_t]$ e $cov(\alpha_t v_t)$

• $var[v_t] = E[(v_t - \underset{0}{E(v_t)})(v_t - \underset{0}{E(v_t)})']$

$= \underbrace{E[v_t v_t']}_{\text{lei exp. iterados}} = E[E[v_t v_t' | \underset{\sim}{y}_{t-1}]]$

Mas $v_t = y_t - Z_t a_t$

$= Z_t \alpha_t + \varepsilon_t - Z_t a_t$

$= Z_t(\alpha_t - a_t) + \varepsilon_t$

$\therefore v_t' = (\alpha_t - a_t)' Z_t' + \varepsilon_t'$

$\Rightarrow E[v_t v_t' | \underset{\sim}{y}_{t-1}] = E[(Z_t(\alpha_t - a_t) + \varepsilon_t)((\alpha_t - a_t)' Z_t' + \varepsilon_t') | \underset{\sim}{y}_{t-1}]$

$= E[Z_t(\alpha_t - a_t)(\alpha_t - a_t)' Z_t'] + E[\varepsilon_t \varepsilon_t' | \underset{\sim}{y}_{t-1}]$

termos cruzados são nulos.

obs: para termos cruzados, usa α_t que será total dos ε's e η's.

$= Z_t P_t Z_t' + H_t$

$\therefore E[v_t v_t'] = E[E[v_t v_t' | \underset{\sim}{y}_{t-1}]] \Rightarrow \underset{var(v_t)}{E(v_t v_t')} = Z_t P_t Z_t' + H_t \hat{=} F_t$

• $cov[\alpha_t v_t] (= M_t)$

$= E[(\alpha_t - E(\alpha_t))(v_t - \underset{0}{E(v_t)})']$

$= \underbrace{E[\alpha_t v_t']}_{\text{lei da exp. iteradas}} = E[E[\alpha_t v_t' | \underset{\sim}{y}_{t-1}]]$

Mas $\alpha_t v_t' = \alpha_t (y_t - Z_t a_t)' =$

$= \alpha_t [Z_t \alpha_t + \varepsilon_t - Z_t a_t]' =$

$= \alpha_t [Z_t(\alpha_t - a_t) + \varepsilon_t]' =$

$= \alpha_t [(\alpha_t - a_t)' Z_t' + \varepsilon_t']$

$\therefore E[\alpha_t v_t' | \underset{\sim}{y}_{t-1}] = E[\alpha_t (\alpha_t - a_t)' Z_t' | \underset{\sim}{y}_{t-1}] + \underset{0}{E[\alpha_t \varepsilon_t' | Y_{t-1}]}$

truque $= E[(\alpha_t - a_t)(\alpha_t - a_t)' Z_t' | \underset{\sim}{y}_{t-1}]$

$= P_t Z_t'$

$\Rightarrow \quad M_t = cov(\alpha_t, v_t)$

$= E[(\alpha_t v_t' | Y_{t-1})] \Rightarrow \boxed{M_t = P_t Z_t'}$

b.5) Substitui $var(v_t)$ e $cov(\alpha_t, v_t)$ em b.3

$$\boxed{\underbrace{E[\alpha_t | Y_t]}_{a_{t|t}} = a_t + M_t F_t^{-1} v_t}$$

onde $M_t = P_t Z_t'$

$F_t' = Z_t P_t Z_t' + H_t$

$v_t = y_t - Z_t a_t$

c) cálculo de $P_{t|t}$

$P_{t|t} = var[\alpha_t | Y_t]$

$\downarrow$ decompõe em Y_{t-1} e y_t (ou v_t)

$= var[\alpha_t | Y_{t-1}, v_t]$

usa resultado 1:

$$P_{t|t} = \underbrace{var(\alpha_t | Y_{t-1})}_{P_t} - \underbrace{cov[\alpha_t, v_t]}_{M_t}\underbrace{(var\, v_t)^{-1}}_{F_t}\underbrace{(cov(\alpha_t, v_t))'}_{M_t'}$$

$= P_t - M_t F_t M_t'$

$= P_t - (P_t Z_t') F_t (P_t Z_t')'$

$= P_t - P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{t|t} = P_t - P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t^{(')}}$

é simétrica, ñ precisa.

Resumo Atualizaçãs

$$\underset{\text{atuali-zada}}{a_{t|t}} = \underset{\text{previsão}}{a_t} + M_t F_t^{-1} v_t$$

$$P_{t|t} = P_t - \underbrace{P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t}_{\text{correção}}$$

3) FK 2 em 1

Subst. $a_{t|t}$ e $P_{t|t}$ nas expressões da Previsãs.

$$\bullet \quad a_{t+1} = T_t\, a_{t|t}$$
$$= T_t\,[a_t + M_t F_t^{-1} v_t)$$
$$= T_t a_t + \underbrace{T_t M_t F_t^{-1}}_{K_t} v_t$$

$\therefore \; \boxed{a_{t+1} = T_t a_t + K_t v_t}$ onde K_t é o ganho de Kalman.

$$\circ \quad P_{t+1} = T_t P_{t|t} T_t' + R_t Q_t R_t'$$
$$= T_t \big(P_t - \underbrace{P_t Z_t'}_{M_t} F_t^{-1} \underbrace{Z_t P_t}_{M_t'} \big) T_t' + R_t Q_t R_t'$$
$$= T_t P_t \underbrace{(T_t' - M_t F_t^{-1} M_t' T_t')}_{L_t'} + R_t Q_t R_t'$$

$$L_t' = T_t' - P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t P_t' T_t'$$ dúvida

Fazer

$\Rightarrow$ Alterações: P_{t+1} não depende das observações y_t

Dependendo do caso, converge p/ steady state

— 11 —

EXEMPLO

(1) $\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \end{cases}$ (Nível local)

$Z = 1 \qquad H = \sigma_\varepsilon^2$

$T = 1 \qquad Q = \sigma_\eta^2$

$R = 1$

$\to$ cálculo K_t

$$K_t = T_t M_t F_t^{-1} = \underset{1}{\cancel{T_t}} P_t \underset{1}{\cancel{Z_t'}} F_t^{-1} = P_t F_t^{-1} = \frac{P_t}{F_t} \quad \text{(escalar)}$$

Mas $F_t = \text{var}(v_t)$

$$= \text{var}(y_t - Z_t a_t) = ZPZ' + H = P_t + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \quad K_t = \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} \quad \Rightarrow \quad 0 < K_t < 1$$

→ cálculo a_{t+1}

$$a_{t+1} = T_t a_t + K_t v_t$$

$$= T_t a_t + k_t (y_t - T_t a_t)$$

$$= a_t + K_t (y_t - a_t)$$

$$= K_t y_t + (1-K_t) a_t$$

$\hookrightarrow E[\mu_t | y_{t-1}] = E[y_t | y_{t-1}]$ → pois $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$

$$= K_t y_t + (1-K_t) \hat{y}_{t|t-1} \Rightarrow \text{EWMA!}$$

⇒ Modelo de nível local: funções de previsão

(2)

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t \\ \beta_{t+1} = \beta_t + \zeta_t \\ \gamma_t = \Sigma \gamma_{t-j} + w_t \end{cases}$$

modelo de previsão usando FK convergirá p/ HW.

(3)

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \beta_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t \\ \beta_{t+1} = \beta_t + \zeta_t \end{cases}$$

Na forma EE:

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{t+1} \\ \beta_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \sigma_\varepsilon^2$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 \end{pmatrix}$$

→ cálculo $K_t = T_t M_t F_t^{-1} = T P_t Z F^{-1}$

$$F = var(v_t) = T P_t T' + H$$

$$= T P_t T' + \sigma_\varepsilon^2 I$$

$$\Rightarrow \quad K = T P_t Z \left(T P_t T' + \sigma_\varepsilon^2 I \right)^{-1}$$

$$= T P_t Z$$

dúvida

fazer

Passo de suavização

Estimativa suavizada (ou alisada) do estado.

$$y = Y_n = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \sim (n \times p) \times 1 \quad \text{(cada elemento } y \text{ é } p \text{ variável)}$$

Queremos:

$$\hat{\alpha}_t = E[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y_n}] \qquad t = 1, 2, \ldots, n$$

$$V_t = \text{var}(\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y_n})$$

a) Cálculo de $\hat{\alpha}_t$

$$\hat{\alpha}_t = E[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y_n}]$$

↓ decompondo em $\underset{\sim}{Y_{t-1}}$ e inovações até n

$$= E[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y_{t-1}}, v_t, v_{t+1}, \ldots v_n]$$

a.1) usa resultado 1

Seja $x = \alpha_t$

$y = \underset{\sim}{Y_{t-1}}$

$z = (v_t, v_{t+1} \ldots v_n)' \Rightarrow$ | dimensões $(n-t+1).p \times 1$ |

Usando resultado 1 da aula passada (p/ dist $\binom{x}{y,z}$), temos:

$$\hat{\alpha}_t = E[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y_n}] = \underbrace{E[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y_{t-1}}]}_{a_t(FK)} + \text{cov}(\alpha_t, (v_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)') \cdot (\text{Var}[(v_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)'])^{-1} \begin{pmatrix} v_t \\ v_{t+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

a.1.1) Cálculo de $\text{var}(v_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)$

(i) mostrar que v_i's são independentes

P/ tanto, mostraremos que $p(v_1 v_2 \ldots v_n) = \prod_{i=1}^{n} p(v_i)$

(ii) calcula

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_n) = p(\underbrace{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}}_{\underset{\sim}{Y_{n-1}}}, y_n) =$$

$$= p(y_n, \underset{\sim}{Y_{n-1}}) \underset{\text{lei de Bayes.}}{=} p(y_n \mid \underset{\sim}{Y_{n-1}}) . p(\underset{\sim}{Y_{n-1}}) =$$

$$= p(y_n \mid \underset{\sim}{Y_{n-1}}) . p(y_{n-1}, \underset{\sim}{Y_{n-2}}) = p(y_n \mid Y_{n-1}) . p(y_{n-1} \mid \underset{\sim}{Y_{n-2}}) \, p(\underset{\sim}{Y_{n-2}})$$

recursivamente

$$= \ldots = p(y_1) \prod_{t=2}^{n} p(y_t \mid Y_{t-1})$$

resumindo:

$$p(y_1, y_2 \dots y_n) = p(y_1) \cdot \prod_{i=1}^{n} p(y_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1})$$

$$\Downarrow$$

$$p(y_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}) \sim N(Z_t a_t, F_t)$$

do passo FK

onde $F_t = Z P_t Z' + H$

<u>p/ v's</u>:

Mas queremos

(i2) calcular $\tilde{p}(v_1, v_2, \dots v_n)$

e sabemos que $v_t = y_t - Z_t a_t$

usar resultado:

Se x vetor aleatório $n \times 1$ e $Y = g(x)$, g diferenciável e com inversa

e $x \sim n \times 1$ com $f_x(x)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \, |J(y)|$$

onde $J(y)$ = jacobiano $\qquad \{J(y)\}^{ij} = \partial y_i / \partial x_j$

$|J(y)|$ = determinante $\qquad j = 1 \dots n$, $i = 1 \dots n$

fazendo $x = (y_1 \dots y_n)'$

$y = (v_1 \dots v_n)'$

$$\Rightarrow p(v_1 \dots v_n) = p(y_1 \dots y_n)\Big|_{y_i = v_i + z_i a_i}$$

$$\partial y_i / \partial v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Rightarrow |J| = 1 \qquad (\text{pois } J = I)$$

$$\therefore p(v_1 \dots v_n) = p(y_1 \dots y_n)\Big|_{y_i = v_i + z_i a_i}$$

$$= p(y_1) \prod_{t=2}^{n} p(y_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1})\Big|_{y_t = v_t + Z_t a_t}$$

$$\text{Mas } p(y_t \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |F_t|^{1/2}} \exp\Big\{-\frac{1}{2} \underbrace{(y_t - Z_t a_t)'}_{v_t'} F_t^{-1} \underbrace{(y_t - Z_t a_t)}_{v_t}\Big\}$$

$$\therefore p(v_t) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |F_t|^{1/2}} \exp\Big\{-\frac{1}{2} v_t' F_t^{-1} v_t\Big\}$$

$$\therefore p(v_1 \dots v_n) = p(y_1) \cdot \prod_{t=2}^{n} p(v_t)$$

para $t=1 \Rightarrow \quad y_1 = z_1\alpha_1 + \varepsilon_1$

$$E(y_1) = z_1 E(\alpha_1) = z_1 a_1$$

$$\text{var}(y_1) = E[(y_1 - E(y_1))(y_1 - E(y_1))']$$

$$\therefore \quad y_1 - E(y_1) = z_1(\alpha_1 - a_1) + \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \text{var}(y_1) = E[(z_1(\alpha_1 - a_1) + \varepsilon_1)((\alpha_1 - a_1)' z_1' + \varepsilon_1')] =$$

$$= z_1 P_1 z_1' + H_1 = F_1$$

Para $v_1 = y_1 - z_1 a_1 \Rightarrow \quad E(v_1) = 0$

$$\text{var}(v_1) = F_1$$

$$\therefore \quad p(y_1) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \frac{1}{|F_1|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_1 - z_1 a_1)' F_1^{-1} (y_1 - z_1 a_1)\right\}$$

$$v_1 = y_1 - z_1 a_1 \qquad |J| = 1$$

$$\therefore \quad p(v_1) = p(y_1)\big|_{y_1 = v_1 + z_1 a_1} |J| \Rightarrow p(v_1) = p(y_1)$$

Logo:

$$p(v_1, \ldots, v_n) = \prod_{i=1}^{n} p(v_i) \Rightarrow \quad v_t\text{'s são independentes}$$

$$p(v_t \mid Y_{t-1}) = p(v_t)$$

$$\therefore \quad E[v_i v_j'] = 0 \qquad \forall\ i = t, t+1, \ldots n \quad i \neq j$$
$$j = t, t+1, \ldots n$$

(ii) Escrever var $(v_t, v_{t+1}, \ldots v_n)$ como matriz diagonal

$$\text{var}((v_t, v_{t+1}, \ldots v_n)) = E\left[\begin{pmatrix} v_t \\ v_{t+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} (v_t \ \ v_{t+1} \ \ldots \ v_n)\right]$$

$$= \begin{bmatrix} F_t & & & 0 \\ & F_{t+1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & F_n \end{bmatrix}$$

matriz variância de cada v_i : $p \times p$

a.1.2) calcula $cov[\alpha_t, (v_t, v_{t+1}, \dots, v_n)'] =$

$$= E[\underset{m\times 1}{\alpha_t} \underset{1\times p}{(v_t', v_{t+1}' \dots v_n')}] =$$

$$= [E[\alpha_t v_t'] \dots E[\alpha_t v_n']]$$

a.1.3) substitui no resultado e faz cálculos:

$$\hat{\alpha}_t = E(\alpha_t | Y_n) = a_t + [E[\alpha_t v_t'] \dots E[\alpha_t v_n']] \cdot \underset{(n-t+1)\times(n-t+1)\cdot p}{\begin{pmatrix} F_t^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & F_n^{-1} \end{pmatrix}} \underset{(n-t+1)p}{\begin{pmatrix} v_t \\ v_{t+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}$$

$$[\underset{p\times p}{F_t^{-1}} \underset{p\times 1}{v_t}, F_{t+1}^{-1} v_{t+1}, \dots, F_n^{-1} v_n]' \sim p$$

$$= a_t + [E[\alpha_t v_t'] \dots E[\alpha_t v_n']] \begin{bmatrix} F_t^{-1} v_t \\ F_{t+1}^{-1} v_{t+1} \\ \vdots \\ F_n^{-1} v_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underset{\text{estimativa suavizada}}{\hat{\alpha}_t} = \underset{\text{estimativa prevista}}{a_t} + \sum_{j=t}^{n} E[\alpha_t v_j'] F_j^{-1} v_j}$$

Vamos escrever v_t em funçã de x_t

b) outros resultados dos quais precisaremos para escrever $\hat{\alpha}_t$ de forma alternativa:

Escrever MEE p/ x_t com v_t

b.1) seja $x_t \hat{=} \alpha_t - a_t$ (como se fosse um erro de previsão)

$$Var(x_t) = Var(\alpha_t) = P_t$$

- Escrevendo v_t em função de x_t:

$$v_t = y_t - Z_t a_t$$

$$= Z_t \alpha_t - Z_t a_t + \varepsilon_t$$

$$= Z_t(\alpha_t - a_t) + \varepsilon_t$$

$$\boxed{v_t = Z_t x_t + \varepsilon_t} \quad (I)$$

→ escrevendo L_{t+1} em f.ç.º de x_t

Temos ainda que:

$$x_{t+1} = \alpha_{t+1} - a_{t+1}$$

$$= \underbrace{(T\alpha_t + R_t\eta_t)}_{\text{do MEE}} - \underbrace{(T_t a_t + K_t v_t)}_{\text{do FK}}$$

$$= T_t\underbrace{(\alpha_t - a_t)}_{x_t} + R_t\eta_t - K_t(Z_t x_t + \varepsilon_t)$$

onde:

$$\boxed{L_t = T_t - K_t Z_t}$$

$$= (T_t - K_t Z_t)x_t + R_t\eta_t - K_t\varepsilon_t$$

$$\therefore \boxed{x_{t+1} = L_t x_t + R_t\eta_t - K_t\varepsilon_t} \quad (\mathrm{II})$$

As equações (I) e (II) podem ser vistas como MEE p/ as inovações:

$$\begin{cases} v_t = Z_t x_t + \varepsilon_t \\ x_{t+1} = L_t x_t + R_t\eta_t - K_t\varepsilon_t \end{cases}$$

ñ são descorrelatados

c) Calculo de $E(\alpha_t v_j')$ na expressão de $\hat{\alpha}_t$ em função de x_t

$$E[\alpha_t v_j') = E[\alpha_t (Z_j x_j + \varepsilon_j)')$$

$$= \underbrace{E[\alpha_t x_j')}. Z_j' \quad j = t, \ldots, n$$

$$\text{Mas } \underbrace{E(\alpha_t x_j)}_{\text{lei das exp. iteradas}} = E[E[\alpha_t x_j']|Y_{t-1})$$

sucessivamente

$$\text{- Para } j = t \Rightarrow E[\alpha_t x_t') = E[E(\alpha_t x_t' | Y_{t-1}))$$

$$= E[E[\alpha_t(\alpha_t - a_t)'|Y_{t-1}))$$

$$= E[E[(\alpha_t - a_t)(\alpha_t - a_t)'|Y_{t-1}])$$

$$= E[P_t) = P_t$$

$$\text{- Para } j = t+1 \Rightarrow E[\alpha_t x_{t+1}') = E(E(\alpha_t x_{t+1}' | Y_{t-1})) =$$

↓ do MEE dual

$$= E[E[\alpha_t(L_t x_t + R_t\eta_t - K_t\varepsilon_t)'|Y_{t-1}])$$

$$= E[E[\alpha_t(x_t' L_t' + \eta_t' R_t' + \varepsilon_t' K_t')|Y_{t-1}))$$

$$= E[E[\alpha_t x_t' L_t' | Y_{t-1}) =$$

$$= E[E[\alpha_t(\alpha_t - a_t)' L_t' | Y_{t-1}) \Rightarrow P_t L_t'$$

Para $j = t+1$

$$E[\alpha_t x'_{t+2}] = E\left[E\left(\alpha_t (L_{t+1} x_{t+1} + R_{t+1}\eta_{t+1} - K_{t+1}\varepsilon_{t+1})' \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}\right)\right] =$$

$$= E\left[E\left[\alpha_t x'_{t+1} L'_{t+1} + \alpha_t \eta'_{t+1} R'_{t+1} - \alpha_t \varepsilon'_{t+1} K'_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}\right)\right) =$$

$$= E\left[E(\alpha_t x'_{t+1} L'_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1})\right) =$$

$$= E\Big[\underbrace{E(\alpha_t x'_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1})}_{P_t L'_t} . L'_{t+1}\Big)$$

$$= P_t L'_t L'_{t+1}$$

$\vdots$

Para $j = n \Rightarrow E[\alpha_t x'_n] = P_t L'_t L'_{t+1} \cdots L'_{n-1}$

Logo:

$$E[\alpha_t v'_j)\, Z'_j = P_t L'_t L'_{t+1} \cdots L'_{j-1} . Z'_j$$

d) substitui na expressão de $\hat{\alpha}_t$

$$\hat{\alpha}_t = a_t + \sum_{j=t}^{n} E[\alpha_t v'_j)\, F_j^{-1} v_j$$

$$= a_t + \left[P_t Z'_t F_t^{-1} v_t + P_t L'_t Z'_{t+1} F_{t+1}^{-1} v_{t+1} + \cdots + P_t L'_t \cdots L'_{n-1} Z'_n F_n^{-1} v_n\right]$$

e) Igualdade FK atualização e smoothing em $t=n$

Em $t=n$: FK atualização tem que se igualar a smoothing

Da atualização FK $\hat{\alpha}_n = a_n + M_n F_n^{-1} v_n \therefore \hat{\alpha}_n = a_n + \underbrace{P_n Z_n}_{M_n} F_n^{-1} v_n$

$\downarrow$

$a_{n|n}$

(obs: $a_{n|n} = E[\alpha_n \mid \underset{\sim}{Y}_n)$ e $\hat{\alpha}_n = E(\alpha_n \mid y_1 \ldots y_n)$

Inicializaçaõ + MV

→ Se todas componentes forem estacionárias

Usa cond. inicial como distribuiçaõ incondicional

$$\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t$$

$$\Rightarrow E[\alpha_{t+1}] = T E[\alpha_t] = 0 \therefore E[\alpha_t] = 0$$

$$Var[\alpha_{t+1}] = T\, var[\alpha_t] T' + RQR'$$

| se estacionário é igual |

$$\Rightarrow vec[var(\alpha_t)] = (I - T \otimes T)^{-1} [R \otimes R' vec(Q))$$

| como calcula na prática? |

logo: $\alpha_1 \sim N(0, var(\alpha_t))$

| Naõ a_1, como no texto |

Funçaõ MV: Dada por

$$\ell(\psi) = \log L(\psi) = \log\left(\prod_{t=1}^{n} p(y_t | Y_{t-1}, \psi)\right)$$

$$= -\frac{np}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\log|F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t\right)$$

→ Se houver componentes naõ estacionárias

a) Prior difusa

- de forma geral com p componentes ñ estacionários

$$\alpha_1 \sim N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, K I_p\right]$$

| dúvida: se houver comp. estacionárias continua inicializando estas com incondicional |

- Chamada via "big kappa"

Naõ é muito estável computacionalmente ...

| Na pg 3: o que quer dizer c/ deixa y_1 fixo |

Aqui já se inicia com k de valor muito alto.

funcão MV: Chamada de $\ell^{bk}(\psi)$

(Não é chamada difusa, que é a outra da inicialização exata)

$$v_t = y_t - Z_t a_t \qquad t = 1, \dots, n$$

$$F_t = Z_t P_t Z_t' + H_t$$

Usa a MV original, mas só passa a considerar inicialização propriamente dita quando dist. passar a ser própria

Vai ser esta, não importa que haja componentes estacionárias.

$$\ell(\psi)^{bk} = -\frac{(n-q)}{2} p \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=q+1}^{n} \left[\log |F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t \right)$$

Equações de a_t e P_t são atualizadas desde $t=1$ até q (não k)

mas F_t e v_t só entram na FMV quando dist. passar a ser própria

b) Inicialização Exata

Mais bem definido e + geral.

Escreve termos do FK em função de $\underline{\underline{k}}$ via expansão de Taylor, retendo apenas os 2/3 primeiros termos como dominantes fazendo $k \to \infty$.

Expressão Geral:

$$\alpha_1 = a + \underbrace{A\delta}_{\text{parte não estac.}} + \underbrace{R_0 \eta_0}_{\text{parte estac.}}$$

se não houver componentes estacionárias?

$$\Rightarrow \quad a_1 = E(\alpha_1) = a \quad (= 0 \text{ p/ modelos não estacionários})$$

$$P_1 = K P_\infty + P_* \quad \text{onde se faz } k \to \infty \text{ em t apropriado.}$$

onde $P_{\infty,1} = AA'$

$P_* = R_0 Q_0 R_0'$

Vai calculando $P_{\infty,t}$ e $P_{*,t}$ p/ cada t usando FK corrigido:

Para algum $t = d \Rightarrow P_{\infty,(t+1)} = 0$ e assim p/ $t = d+1, d+2, \dots, n$ passa a usar FK padrão.

Na pg 4: É $t+1$, não t.
No exemplo: 2 comp. ñ estacionárias
$P_{\infty,3} = 0 \Rightarrow$ usa FK padrão a partir de $t=3$, certo?

Função MV: chamada $l^d(\psi)$

$$l_d(\psi) = \log L_d(\psi) = \lim_{k \to \infty} \left[\log L(\psi) + \frac{q}{2} \log k \right]$$

Não deveria ser $\frac{d}{2}$?

$$\Rightarrow l_d(\psi) = \log L_d(\psi) = -\left(\frac{np}{2}\right) \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{d} w_t - \frac{1}{2} \sum_{t=d+1}^{n} \left[\log|F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t \right]$$

onde $w_t = \begin{cases} \log|F_{\infty,t}| \\ \log|F_{*,t}| + \dots \end{cases}$

Nesse caso, $l_d(\psi)$ é computado desde $t=1$ (p/ todos os valores de t), mas somatório deve ser separado de 1 a d, $d+1$ a n.

Fazer ldc

concentrada