Modelos Estruturais Multivariados
(MSTSM)

- Generalização dos ME univariados
- Mais complexos em relação a estimação, identificação paramétrica, interpretação e diagnósticos
- Motivação ⇒ 1) existência de componentes comuns que afetam simultaneamente um vetor de ST, como por exemplo: consumo residencial em duas cidades próximas e similares.

⇒ melhora inferência e previsão. $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{pt})$

Modelos mais importantes

1. SUTSE = Seemingly unrelated TS equations

$$\overbrace{y_t}^{p\times 1} = \mu_t + \varepsilon_t \quad , \varepsilon_t \sim N(0, \underbrace{\Sigma_\varepsilon}_{p\times p})$$
$$\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \quad , \eta_t \sim N(0, \underbrace{\Sigma_\eta}_{p\times p})$$

→ a origem da dependência entre as séries advém da estrutura não-diagonal de Σ_ε e Σ_η.
↳ covariâncias entre os choques

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \\ \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} & \sigma^2_{\varepsilon_2} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,t+1} \\ \mu_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2_{\eta_1} & \sigma_{\eta_1\eta_2} \\ \sigma_{\eta_1\eta_2} & \sigma^2_{\eta_2} \end{pmatrix} \right)$$

→ difícil estimação se p é grande

tilibra

/ /

SUTSE homogêneo: $\mapsto$ vide definição formal

$$\Sigma_\eta = q\,\Sigma_\varepsilon \quad , 0<q<\infty$$

No caso p=2 $\begin{pmatrix} \sigma^2_{\eta_1} & \sigma_{\eta_1\eta_2} \\ \sigma_{\eta_1\eta_2} & \sigma^2_{\eta_2} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \\ \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} & \sigma^2_{\varepsilon_2} \end{pmatrix}$

$$y_{it} = \mu_{it} + \varepsilon_{it}$$
$$\mu_{i,t+1} = \mu_{i,t} + \eta_{i,t}$$

$$\Delta y_{it} = \Delta\mu_{it} + \Delta\varepsilon_{it} = \eta_{i,t-1} + \Delta\varepsilon_{it} \qquad i=1,2$$
$$\sim MA(1)$$

$$z_t = \Delta y_{it} = w_t + \theta w_{t-1} \quad , w_t \sim N(0,\sigma^2_w)$$

$$\rho(1) = \frac{E(z_t z_{t-1})}{Var(z_t)} = \frac{\theta}{(1+\theta^2)}$$

$$Var(z_t) = (1+\theta^2)\sigma^2_w$$
$$E(z_t z_{t-1}) = \theta\sigma^2_w$$

$$Var(\Delta y_{it}) = \sigma^2_{\eta_i} + 2\sigma^2_{\varepsilon_i}$$
$$E(\Delta y_{it}, \Delta y_{i,t-1}) = -\sigma^2_{\varepsilon_i}$$

$$\rho(1) = \frac{E(\Delta y_{it}, \Delta y_{i,t-1})}{Var(\Delta y_{it})} = \frac{-\sigma^2_{\varepsilon_i}}{(\sigma^2_{\eta_i} + 2\sigma^2_{\varepsilon_i})} = \frac{-\sigma^2_{\varepsilon_i}}{q\sigma^2_{\varepsilon_i} + 2\sigma^2_{\varepsilon_i}}$$
$$= \frac{-1}{(q+2)}$$

independe de i

$\Rightarrow$ as séries y_{it} no modelo SUTSE homogêneo

tilibra

possuírem a mesma FAC ou seja
forma reduzida, ou seja, as propriedades
dinâmicas das séries serão iguais p/ este
modelo.

→ modelo demasiadamente restritivo, mas
fácil de ser estimado

$$\Psi = (\sigma^2_{\varepsilon_1}, \sigma^2_{\varepsilon_2}, \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}, q)$$

$$l(\Psi) = \log L(\Psi) = \sum_{t=d+1}^{n} \log p(y_{1t}, y_{2t} | Y_{t-1})$$

$$L(\Psi) = \prod_{t=d+1}^{n} p(y_{1t}, y_{2t} | Y_{t-1})$$

$$p(y_{1t}, y_{2t} | Y_{t-1}) = \frac{1}{(2\pi)} |F_t|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \nu_t' F_t^{-1} \nu_t\right]$$

$$\nu_t = \begin{pmatrix} \nu_{1t} \\ \nu_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1t} - \mu_{1t|t-1} \\ y_{2t} - \mu_{2t|t-1} \end{pmatrix}$$

$F_t = P_t + \Sigma_\varepsilon$, e assim

$$l(\Psi) = -\frac{(n-d)}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=d+1}^{n} \log |F_t| - \frac{1}{2}\sum_{t=d+1}^{n} \nu_t' F_t^{-1} \nu_t$$

$$\left(p(y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{pt} | Y_{t-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} |F_t|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \nu_t' F_t \nu_t\right\} \right)$$

tilibra

/ /

→ É possível generalizar a estrutura SUTSE p/ incorporar modelos com outros componentes, e.g, tendência linear estocástica, sazonalidade e ciclo

→ Supondo ortogonalidade entre componentes de interpretação diferente (μ_t e δ_t, δ_t e ψ_t, etc)

Ex: $\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{\varepsilon_t} \sim N(0, \Sigma_\varepsilon)$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t+1} \\ \mu_{2t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{\eta_t} \sim N(0, \Sigma_\eta)$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{1t+1} \\ \beta_{2t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_{1t} \\ \zeta_{2t} \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{\zeta_t} \sim N(0, \Sigma_\zeta)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{1t+1} \\ \psi_{2t+1} \\ \psi^*_{1t+1} \\ \psi^*_{2t+1} \end{pmatrix} = \left[\rho \begin{bmatrix} \cos\lambda_c & \sin\lambda_c \\ -\sin\lambda_c & \cos\lambda_c \end{bmatrix} \otimes I_2 \right] \begin{pmatrix} \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \\ \psi^*_{1t} \\ \psi^*_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa_{1t} \\ \kappa_{2t} \\ \kappa^*_{1t} \\ \kappa^*_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} \rho[\ \ ] & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho[\ \ ] & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

$\underset{\sim}{\kappa_t} \sim N(0, \Sigma_\kappa)$
$\hookrightarrow 2\times 2$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \rightarrow vec(A) = (a_{11}\ a_{21}\ a_{31}\ a_{12}\ a_{32})^T$

Produto de Kronecker

$A \sim m \times n$
$B \sim p \times q$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & a_{1n}B \\ a_{m1}B & a_{m2}B & a_{mn}B \end{pmatrix} \sim mp \times nq$$

Colocando o modelo na forma EE

⇒ Convenção: a ordem de entrada no vetor de estado é por componente: 1º as com

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{Z} \sim 2\times 8} \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \\ \psi^*_{1t} \\ \psi^*_{2t} \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{\alpha_t} \sim 8\times 1} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,t+1} \\ \mu_{2,t+1} \\ \beta_{1,t+1} \\ \beta_{2,t+1} \\ \psi_{1,t+1} \\ \psi_{2,t+1} \\ \psi^*_{1,t+1} \\ \psi^*_{2,t+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & a \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{T} \sim 8\times 8} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \\ \psi^*_{1t} \\ \psi^*_{2t} \end{pmatrix} +$$

$a = \rho \cos \lambda_c$

$b = \rho \sin \lambda_c$

$c = -\rho \sin \lambda_c$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{R} \sim 8\times 8 = I_8} \underbrace{\begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \\ \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \\ \kappa_{1t} \\ \kappa_{2t} \\ \kappa^*_{1t} \\ \kappa^*_{2t} \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{\eta_t} \sim 8\times 1}$$

tilibra

Sejam as matrizes equivalentes do modelo univariado

$$Z^U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^U = I_4$$

$$T^U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

Então, utilizando a notação do produto de Kronecker $(\otimes)$

$$\Rightarrow Z^U \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{Z}$$

$$\Rightarrow \underset{(4\times4)\times(2\times2)}{T^U \otimes I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sim 8\times8$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & a \end{pmatrix} = T$$

• Assim sendo, o modelo multivariado SUTSE pode ser expresso na seguinte forma:

$$\underset{\sim}{y}_t = (Z^U \otimes I_p)\,\underset{\sim}{\alpha}_t + \underset{\sim}{\varepsilon}_t \quad , \quad \underset{\sim}{\varepsilon}_t \sim N(0, \underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon)$$

$$\underset{\sim}{\alpha}_{t+1} = (T^U \otimes I_p)\,\underset{\sim}{\alpha}_t + (R \otimes I_p)\,\underset{\sim}{\eta}_t \quad , \quad \underset{\sim}{\eta}_t \sim N(0, \Sigma_\eta)$$

• Pode-se acrescentar variáveis explicativas / intervenção ao modelo SUTSE

$$\underset{\sim}{y}_t = (Z^U \otimes I_p)\,\underset{\sim}{\alpha}_t + \underset{\sim}{X}_t\,\underset{\sim}{\delta} + \varepsilon_t$$
$$\underset{\sim}{\alpha}_{t+1} = (T^U \otimes I_p)\,\underset{\sim}{\alpha}_t + (R \otimes I_p)\,\underset{\sim}{\eta}_t$$

onde $\underset{\sim}{X}_t \sim p \times k$ $\quad \underset{\sim}{\delta} \sim 1 \times p$

$$\underset{\sim}{X}_t = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{x}'_{t1} & & \underset{\sim}{0} \\ & \underset{\sim}{x}'_{t2} & \\ \underset{\sim}{0} & & \ddots \\ & & \underset{\sim}{x}'_{tp} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\delta} = [\underset{\sim}{\delta}_1, \underset{\sim}{\delta}_2, \ldots \underset{\sim}{\delta}_p]'$$

$$\underset{\sim}{x}_{ti} = (x_{i1,t} \; x_{i2,t} \ldots x_{ip,t})'$$

Ex:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{11} x_{11t} + \delta_{12} x_{12t} \ldots + \delta_{1p} x_{1pt} \\ \delta_{21} x_{12,t} + \delta_{22} x_{22,t} + \ldots + \delta_{2p} x_{2p,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11t} & x_{12t} & \ldots & x_{1pt} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{12,t} & x_{22,t} & \ldots & x_{2p,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \vdots \\ \delta_{1p} \\ \delta_{21} \\ \delta_{22} \\ \vdots \\ \delta_{2p} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{X}_t = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{x}'_{t1} & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{x}'_{t2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\delta} = (\underset{\sim}{\delta}_1, \underset{\sim}{\delta}_2)$$

Modelo Homogêneo

Def: Um processo estocástico p-variado é dito homogêneo de 2ª ordem, se todas as combinações lineares de seus componentes possuem as mesmas propriedades estocásticas de 2ª ordem.

Em outras palavras $y_t = (y_{1t}\ y_{2t} \dots y_{pt})'$ é homogêneo se $\forall\ \underset{\sim}{\alpha} \in \mathbb{R}^p$, o processo univariado estacionário $z_t = \tilde{\Delta}^d (\underset{\sim}{\alpha}' y_t)$ possui FAC indep. de $\underset{\sim}{\alpha}$.

Prop: Se y_t segue um SUTSE de nível local, então y_t será homogêneo sss $\underset{\sim}{\Sigma}_\eta = q\,\underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon$

Prop: Se y_t segue um SUTSE com j tipos de componentes ortogonais, então y_t será homogêneo sss

$$\underset{jp \times jp}{\Sigma_\eta} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\eta_1} & & \underset{\sim}{0} \\ & \Sigma_{\eta_2} & \\ \underset{\sim}{0} & & \Sigma_{\eta_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \Sigma_* & & \underset{\sim}{0} \\ & q_2 \Sigma_* & \\ \underset{\sim}{0} & & q_j \Sigma_* \end{pmatrix}$$

$$\underset{p \times 1}{\underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon} = h\,\Sigma_*$$

Propriedades empíricas de processos homog.

i. Pode haver teorias "a priori" que justifiquem a adoção da estr. de propor. entre as covariâncias

ii. as recursões de Kalman podem ser implementadas para cada uma das p equações separadamente (Harvey)

iii. menos risco de não identificação pelo baixo valor da dimensão paramétrica

iv. Estimação por MV é consider. simplificada (Harvey pp 439/40).

* Modelos de Componentes Comuns (Análise Fatorial Dinâmica)

Análise de Fatores

$$\begin{cases} y_{it} = \sum_{j=1}^{k} l_{ij} F_{jt} + \varepsilon_{it} & i = 1, 2, \ldots, p \\ F_{jt} = T_j F_{j,t-1} + \eta_{jt} \end{cases}$$

AFD

→ MCC podem ser vistos como generalizações de AF p/ o contexto de séries temporais

- As variáveis observáveis são os componentes do processo $y_t = (y_{1t}\ y_{2t} \ldots y_{pt})'$ e os fatores latentes seriam os coordenadas do vetor $\underline{\alpha}_t = (\alpha_{1t}\ \alpha_{2t} \ldots \alpha_{mt})'$

→ Componentes: tendência, sazonalidade, ciclo → Comuns

=> Modelo de tendências comuns e co-integração

Considere o SUTSE de tendência linear estocástica

$$\underset{\sim}{y}_t = \underset{\sim}{\mu}_t + \underset{\sim}{\varepsilon}_t \quad , \underset{\sim}{\varepsilon}_t \sim N(\underset{\sim}{0}, \Sigma_\varepsilon)$$
$$\underset{\sim}{\mu}_{t+1} = \underset{\sim}{\mu}_t + \underset{\sim}{\beta}_t + \underset{\sim}{\eta}_t, \quad \underset{\sim}{\eta}_t \sim N(\underset{\sim}{0}, \Sigma_\eta)$$
$$\underset{\sim}{\beta}_{t+1} = \underset{\sim}{\beta}_t + \underset{\sim}{\xi}_t \quad , \underset{\sim}{\xi}_t \sim N(\underset{\sim}{0}, \Sigma_\xi)$$

como $\underset{\sim}{\Sigma}_\xi = \underset{\sim}{0}$ => passeio aleatório + drift

$$\underset{\sim}{y}_t = \underset{\sim}{\mu}_t + \underset{\sim}{\varepsilon}_t \quad , \underset{\sim}{\varepsilon}_t \sim N(\underset{\sim}{0}, \Sigma_\varepsilon)$$
$$\underset{\sim}{\mu}_{t+1} = \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\mu}_t + \underset{\sim}{\eta}_t \quad , \underset{\sim}{\eta}_t \sim N(\underset{\sim}{0}, \Sigma_\eta)$$

- Supor que posto $(\underset{\sim}{\Sigma}_\eta) = k < p$ ← # séries

então o modelo pode ser re-escrito em termos de k tendências comuns $\underset{\sim}{\mu}_t^+$

Sem perda de generalidade fazer $\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{0}$

$$\underset{\sim}{\mu}_{t+1} = \underset{\sim}{\mu}_t + \underset{\sim}{\eta}_t$$

$$\underset{\sim}{\mu}_2 = \underset{\sim}{\mu}_1 + \underset{\sim}{\eta}_1$$
$$\underset{\sim}{\mu}_3 = \underset{\sim}{\mu}_2 + \underset{\sim}{\eta}_2 = \underset{\sim}{\mu}_1 + \underset{\sim}{\eta}_1 + \underset{\sim}{\eta}_2$$
$$\vdots$$
$$\underset{\sim}{\mu}_t = \underset{\sim}{\mu}_1 + \sum_{i=1}^{t-1} \underset{\sim}{\eta}_i$$

$$Var(\underset{\sim}{\mu}_t) = Var(\underset{\sim}{\mu}_1) + \sum_{i=1}^{t-1} Var(\underset{\sim}{\eta}_i)$$

$$Var(y_t) = V(y_1) + (t-1)\Sigma_{\eta}$$
$$= \Sigma_1 + (t-1)\Sigma_{\eta}$$

Supor que Σ_1 e Σ_{η} possuem mesmo posto

Como, por hipótese posto$(\Sigma_{\eta}) < p$, então segue que

posto$(\Sigma_{\eta}) < p \iff$ posto $Var(y_t) < p \iff y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{pt}$ é LD

Ou seja existe redundância entre os elementos de y_t, ie, alguns elementos podem ser obtidos como combinação linear de

- O resultado anterior permite associação direta entre os conceitos de co-integração e de tendências comuns. Relembrando

<u>Def de CI</u> $\Rightarrow$ Um processo estocástico p-variado $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{pt})'$ é dito co-integrado de ordens d e b, $b \leq d$, ie,

$$y_t \sim CI(d,b) \quad \text{se}$$

(I) $y_{jt} \sim I(d)$, $j = 1, 2, \ldots, p$

(II) $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^p - \{0\}$, tal que $\alpha' y_t \sim I(d-b)$

Ex: $y_{jt} \sim I(1)$, $\forall j$ $\quad d = 1$
$\alpha' y_t \sim I(0)$ $\quad b = 1$

/ /

<u>Proposição</u> $\Rightarrow$ Um processo y_t que segue um modelo SUTSE de nível local admite uma representação de tendências comuns sss $y_t \sim CI(1,1)$

SUTSE de nível local c/ tendências comuns $\mu_t^+ \sim k \times 1$

$$\underset{(p\times 1)}{y_t} = \underset{(p\times k)}{\Theta} \underset{(k\times 1)}{\mu_t^+} + \underset{(p\times 1)}{\mu_\theta} + \underset{(p\times 1)}{\varepsilon_t}, \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \Sigma_\varepsilon) \qquad (I)$$

$$\underset{(k\times 1)}{\mu_{t+1}^+} = \underset{(k\times 1)}{\mu_t^+} + \underset{(k\times 1)}{\eta_t^+}, \quad \eta_t^+ \sim NID(0, \underset{(k\times k)}{\Sigma_\eta^+})$$

$$\Theta = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} I_k \\ \hline \bar{\Theta} \end{array}\right] \begin{array}{l} k \\ p-k \end{array} \end{array}, \quad \mu_\theta = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \bar{\mu} \end{array}\right] \begin{array}{l} \to k \\ \to p-k \end{array}$$

matriz de loadings

$y_{1t} \sim k \times 1$

$y_{2t} \sim r \times 1$, $r = p-k$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k \\ \bar{\Theta} \end{pmatrix} \mu_t^+ + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_{1t} = \mu_t^+ + \varepsilon_{1t} & (II-a) \\ \underset{(r\times 1)}{y_{2t}} = \underset{(r\times k)}{\bar{\Theta}} \mu_t^+ + \bar{\mu} + \varepsilon_{2t} & \\ \mu_{t+1}^+ = \mu_t^+ + \eta_t^+ & (II-b) \end{cases}$$

- A presença de tendências comuns implica em que o vetor y_t é CI
- Neste modelo existem $r = p - k$ relações de CI

Prova: Seja $A \sim r \times p$ particionada como

$$A = (\underset{\underset{(k \times 1)}{\uparrow}}{A_1}, A_2).$$

→ O sistema de tendências comuns em (II-a) pode ser transformado em um sistema CI equivalente pré-multiplicando (II-a) por uma matriz $p \times p$

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t^{+} + \varepsilon_{1t} \\ \tilde{\Theta} \mu_t^{+} + \bar{\mu} + \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

$$y_{1t} = \mu_t^{+} + \varepsilon_{1t}$$

$$A_1 y_{1t} + A_2 y_{2t} = A_1 \overbrace{(\mu_t^{+} + \varepsilon_{1t})}^{y_{1t}} + A_2 \tilde{\Theta} \mu_t^{+} + A_2 \bar{\mu} + A_2 \varepsilon_{2t}$$

Escolhendo $A_1 = -\tilde{\Theta}$, $A_2 = I_r$, segue que:

$$A_2 y_{2t} = A_2 \tilde{\Theta} \mu_t^{+} + A_2 \bar{\mu} + A_2 \varepsilon_{2t}$$

$$y_{2t} = \tilde{\Theta} (y_{1t} - \varepsilon_{1t}) + \bar{\mu} + \varepsilon_{2t}$$

$$\underset{(r\times 1)}{\underset{\sim}{y_{2t}}} = \underset{(r\times k)}{\underset{\sim}{\bar{\Theta}}} \underset{(k\times 1)}{\underset{\sim}{y_{1t}}} + \underset{(r\times 1)}{\bar{\mu}} + \varepsilon_t \qquad \underset{\sim}{\varepsilon_t} = \underset{\sim}{\varepsilon_{2t}} - \bar{\Theta} \; \underset{\sim}{\varepsilon_{1t}}$$

$r = (p-k)$

Prova

(I) $\underset{\sim}{y_t} = \mu_t + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim N(0, \Sigma_\varepsilon)$

(II) $\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \qquad \eta_t \sim N(0, \Sigma_\eta)$

$\Rightarrow$ Se existe 1 componente comum, então

posto $(\Sigma_\eta) = p-1 < p$, i.e,

as componentes de μ_t não são LI, e assim

existe $\underset{\sim}{\alpha} \sim p\times 1$ tal que

$$\alpha_1 \mu_{1t} + \alpha_2 \mu_{2t} + \dots + \alpha_p \mu_{pt} = 0$$

$$\underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{\mu_t} = 0$$

$$\underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{y_t} = \underset{\sim}{\alpha} \underset{\sim}{\mu_t} + \underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{\varepsilon_t}$$

$\underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{y_t} = \underset{\sim}{\alpha}' \varepsilon_t \sim I(0)$, portanto o vetor $\underset{\sim}{y_t}$ será $CI(1,1)$

Se posto $(\underset{\sim}{\Sigma_\eta}) = k < p$ então:

(I) apenas k componentes são LI.

(II) $(p-k)$ componentes são LD.

tilibra

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & & \alpha_{kp} \end{pmatrix} \\ k \times p \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \vdots \\ \mu_{pt} \end{pmatrix} \\ p \times 1 \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \mu_t = 0$$

$$A y_t = A \underset{\sim}{\mu_t} + A \underset{\sim}{\varepsilon_t}$$

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{y_t} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\varepsilon_t} \sim I(0)$$

tilibra