Sazonalidade Determinística

1 Via dummies

Seja $d_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{se } t = j \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$, então o modelo será dado por:

$$\boxed{y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{S-1} \alpha_j d_{jt} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T} \quad (I)$$

→ Se impomos a restrição $\sum_{j=1}^{S} \alpha_j = 0$, então $\alpha_S = -\sum_{j=1}^{S-1} \alpha_j$, e assim podemos reparametrizar (I), incluindo os S dummies + a restrição:

$$\boxed{y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{S} \alpha_j d_{jt} + \varepsilon_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{S-1} \alpha_j d_{jt} - \left(\sum_{j=1}^{S-1} \alpha_j\right) d_{St} + \varepsilon_t} \quad (II)$$

→ Para facilitar a manipulação supor $S = 4$, então

$$\left.\begin{aligned} E(y_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 \\ E(y_2) &= \alpha_0 + \alpha_2 \\ E(y_3) &= \alpha_0 + \alpha_3 \\ E(y_4) &= \alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \end{aligned}\right\rangle \quad \begin{aligned} 4\alpha_0 &= E(y_1) + E(y_2) + E(y_3) + E(y_4) \\ 4\hat{\alpha}_0 &= \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 \\ \hat{\alpha}_0 &= \frac{1}{4}\left(\frac{\sum_i y_{1i}}{n_1} + \frac{\sum_i y_{2i}}{n_2} + \frac{\sum_i y_{3i}}{n_3} + \frac{\sum_i y_{4i}}{n_4}\right) \end{aligned}$$

n_i é o # observações em cada trimestre. Supor $n_i = n \ \forall i$. Assim segue que $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 4n = T \Rightarrow$ # total obs. da série

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{4n}\left(\sum_i y_{1i} + \sum_i y_{2i} + \sum_i y_{3i} + \sum_i y_{4i}\right) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} y_i = \bar{y}$$

Portanto no modelo (II) o efeito de cada trimestre, i.e., o fator sazonal de cada trimestre é medido em relação à média da série.

⟹

Podemos reescrever o modelo (II) como

$$y_t = \alpha_0 + \underset{\sim}{d}'_t \underset{\sim}{\alpha} + \varepsilon_t, \qquad (\mathrm{III})$$

onde $\underset{\sim}{d}_t = (d_{1t}, d_{2t}, d_{3t}, \dots d_{st})' \sim s \times 1$

$\underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{s-1}))' \sim s \times 1$, $\sum_{j=1}^{s} \alpha_j = 0$

ou $$y_t = \alpha_0 + \gamma_t^D + \varepsilon_t \qquad (\mathrm{IV})$$

$\gamma_t^D = \underset{\sim}{d}'_t \underset{\sim}{\alpha}$ = fator sazonal do "mês" $t = \alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, s$

② Via trigonométricas

$$\boxed{y_t = \mu + \sum_{j=1}^{s/2} [\gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* \sin(\lambda_j t)] + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T} \qquad (\mathrm{V})$$

$\lambda_j = \frac{2\pi j}{s}$, p/ $j = s/2$ $\begin{cases} \cos(\lambda_j t) = \cos\left(\frac{2\pi}{s} \frac{s}{2} t\right) = \cos(\pi t) = (-1)^t \\ \sin(\lambda_j t) = \sin(\pi t) = 0, \ \forall t \end{cases}$

→ Definindo $\underset{\sim}{f}_t = [\cos(\lambda_1 t), \sin(\lambda_1 t), \cos(\lambda_2 t), \sin(\lambda_2 t), \dots, \cos(\lambda_{s/2} t)]' \sim (s-1) \times 1$ ↑ pois $\sin(\lambda_{s/2} t) = 0$

$\underset{\sim}{\delta} = [\gamma_1, \gamma_1^*, \gamma_2, \gamma_2^*, \dots, \gamma_{s/2}]' \sim (s-1) \times 1$

Nessa parametrização o fator sazonal do "mês" t não é direto, sendo dado por: $\gamma_t^H = \sum_{j=1}^{s/2} [\gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* \sin(\lambda_j t)]$. De forma análoga à parametrização por dummies em (IV), aqui também se observa que $\boxed{\sum_{t=1}^{s} \gamma_t^H = 0}$, pois $\sum_{t=1}^{s} \gamma_t^H = \sum_{t=1}^{s} \sum_{j=1}^{s/2} (\gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* \sin(\lambda_j t))$

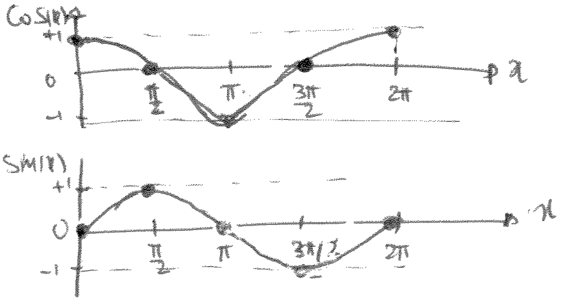
$$\sum_{t=1}^{s} \gamma_t^H = \sum_{j=1}^{s/2} \sum_{t=1}^{s} (\gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* \sin(\lambda_j t))$$

$$\sum_{t=1}^{s} \gamma_t^H = \sum_{j=1}^{s/2} \Big\{ \gamma_j \overbrace{\sum_{t=1}^{s} \cos(\lambda_j t)}^{A} + \gamma_j^* \overbrace{\sum_{t=1}^{s} \sin(\lambda_j t)}^{B} \Big\} \rightarrow$$

Mas é sabido que

$$A = \sum_{t=1}^{S^*} \cos(\lambda_j t) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, (S/2)$$

$$B = \sum_{t=1}^{S^*} \sin(\lambda_j t) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, (S/2)$$



onde $S^* = mS$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow$ Ou seja, para a freq fundamental $(j=1)$ e $\forall$ harmônico $j = 2, 3, \ldots, S/2$, a soma dos senos e cossenos nessas frequências, ao longo do período é nulo.

Podemos re-escrever (V) como

$$\boxed{y_t = \mu + \underbrace{f'_t \, \delta}_{\gamma_t^H} + \epsilon_t \quad (VI)}$$

$\gamma_t^H \rightarrow$ fator sazonal a partir dos trigonométricos

Tal qual o modelo por dummies, o intercepto μ nessa parametrização será também estimado pela média aritmética da série.

<u>Prova</u>: Considere $S = 4$. Da eq (VI) segue que

$$E(y_1) = \mu + \gamma_1^H$$
$$E(y_2) = \mu + \gamma_2^H$$
$$E(y_3) = \mu + \gamma_3^H$$
$$E(y_4) = \mu + \gamma_4^H$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{4} E(y_i) = 4\mu + \sum_{i=1}^{4} \gamma_i^H$$

Mas provamos que $\sum_{t=1}^{S} \gamma_t^H = 0$, e assim segue que

$$\sum_{i=1}^{4} E(y_i) = 4\mu$$

(admitindo amostra balanceada)

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 4n = T$$

$$4\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i = \left(\frac{\sum y_{1i}}{n_1} + \frac{\sum y_{2i}}{n_2} + \frac{\sum y_{3i}}{n_3} + \frac{\sum y_{4i}}{n_4} \right)$$

$$4\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{T} y_t \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{4n} \sum_{t=1}^{T} y_t = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t = \bar{y}$$

Queremos agora estabelecer o resultado de que as parametrizações (IV) e (VI) p/ sazonalidade determinística são equivalentes

Definimos $\underset{\sim}{f}_t = [\cos(\lambda_1 t)\ \sin(\lambda_1 t)\ \cos(\lambda_2 t)\ \sin(\lambda_2 t), \dots, \cos(\lambda_{S/2} t)]' \sim (S-1)\times 1$

vetor que contém os termos seno e cossenos p/ todas as frequências $j=1,2,\dots,\frac{S}{2}$.

Agora definimos a matriz $\underset{\sim}{R} \sim S\times(S-1)$ dada por

$$\underset{\sim}{R} \hat{=} \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ f_S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_1 1) & \sin(\lambda_1 1) & \cos(\lambda_2 1) & \sin(\lambda_2 1) & \dots & \cos(\lambda_{S/2} 1) \\ \cos(\lambda_1 2) & \sin(\lambda_1 2) & \cos(\lambda_2 2) & \sin(\lambda_2 2) & \dots & \cos(\lambda_{S/2} 2) \\ \cos(\lambda_1 3) & \sin(\lambda_1 3) & \cos(\lambda_2 3) & \sin(\lambda_2 3) & \dots & \cos(\lambda_{S/2} 3) \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \cos(\lambda_1 S) & \sin(\lambda_1 S) & \cos(\lambda_2 S) & \sin(\lambda_2 S) & \dots & \cos(\lambda_{S/2} S) \end{pmatrix} \sim S\times(S-1)$$

Ex: Se $\underline{S=4}$ $\lambda_j = \frac{2\pi j}{4} = \frac{\pi j}{2}$ $\nearrow j=1\ \pi/2 = \lambda_1$, $\searrow j=2\ \pi = \lambda_2$, e assim

$$\underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) & \cos(\pi) \\ \cos(\pi) & \sin(\pi) & \cos(2\pi) \\ \cos(3\pi/2) & \sin(3\pi/2) & \cos(3\pi) \\ \cos(2\pi) & \sin(2\pi) & \cos(4\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{R}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Resultado</u>: Mostra-se que $\underbrace{\underset{\sim}{f}_t}_{\text{variáveis expli do modelo trigon}}^{(S-1)\times 1} = \overset{(S-1)\times S}{\underset{\sim}{R}'}\ \underbrace{\underset{\sim}{d}_t}_{\text{variáveis expli. do modelo dummy}}^{S\times 1}$, $t=1,2,3,\dots,T$

Não é difícil provar essa relação. Considere $S=4 \rightarrow \lambda_j = \frac{\pi j}{2}$ $\begin{cases} \lambda_1 = \pi/2 \\ \lambda_2 = \pi \end{cases}$

$$\underset{\sim}{f}_t = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2\, t) \\ \sin(\pi/2\, t) \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1t} \\ d_{2t} \\ d_{3t} \\ d_{4t} \end{pmatrix}, \text{ onde } d_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{se } j=t \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

$\cos(\frac{\pi}{2} t) = -d_{2t} + d_{4t}$

$\sin(\frac{\pi}{2} t) = d_{1t} - d_{3t}$

$\cos(\pi t) = -d_{1t} + d_{2t} - d_{3t} + d_{4t}$

$t=1$ $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 = -0+0$ pois apenas $d_{1t}=1$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = +1 = 1-0 = 1$

$\cos(\pi) = -1 = -1+0-0+0 = -1$

$t=2$ $\cos(\pi) = -1 = -1+0 = -1$

$\sin(\pi) = 0 = 0-0 = 0$

$\cos(2\pi) = 1 = -0+1-0+0 = 1$ etc

Com este resultado podemos estabelecer a equivalência entre a 2 regressões:

$$y_t = \alpha_0 + \underset{\sim}{d}_t' \underset{\sim}{\alpha} + \varepsilon_t \quad (a) \qquad y_t = \mu + \underset{\sim}{f}_t' \underset{\sim}{\delta} + \epsilon_t \quad (b)$$

Usando que $\underset{\sim}{f}_t = \underset{\sim}{R}' \underset{\sim}{d}_t \rightarrow \underset{\sim}{f}_t' = \underset{\sim}{d}_t' \underset{\sim}{R}$, subst. em (b), segue que:

$\rightarrow y_t = \mu + \underset{\sim}{d}_t' \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{\delta} + \epsilon_t$. Já provamos que $\hat{\alpha}_0 = \hat{\mu} = \bar{y}$, e

assim $y_t = \alpha_0 + \underset{\sim}{d}_t' (\underset{\sim}{R} \underset{\sim}{\delta}) + \varepsilon_t$. Comparando c/ (a) segue que:

$$\underbrace{\underset{\sim}{\alpha}}_{(S-1)\times 1} = \underbrace{\underset{\sim}{R}}_{S\times(S-1)} \underset{\sim}{\delta}^{\rightarrow (S-1)\times 1}$$

E assim, após estimar ambos os modelos por MQO, segue que

$$\underbrace{\hat{\underset{\sim}{\alpha}}}_{\text{parâmetro dummy}} = \underset{\sim}{R} \; \underbrace{\hat{\underset{\sim}{\delta}}}_{\text{parâmetros trigon.}}$$

<u>Fatores Sazonais</u>

→ <u>no modelo por dummy</u>: α_j é o fator sazonal do j-ésimo "mês", e assim é lido diretamente do output da regressão (a sua estimativa).

Como o modelo é do tipo $y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{S} \alpha_j d_{jt} + \varepsilon_t$, onde α_j é o aumento ou diminuição em relação à média da série α_0.

→ <u>no modelo por trigon.</u> $\gamma_t^H = \underset{\sim}{f}_t' \cdot \underset{\sim}{\delta}$, assim estes tem que ser construídos, pois não são, como no caso dummy, os próprios parâmetros do modelo

⇒ É claro que o fator sazonal será o mesmo, ao ser calculado por qualquer desses dois modelos ⟹

por trigun

$$\gamma_t^H = \underset{\sim}{f}_t' \underset{\sim}{\delta} \quad , \quad \text{mas} \quad \underset{\sim}{f}_t = \underset{\sim}{R}' \underset{\sim}{d}_t$$

$$\gamma_t^H = \underset{\sim}{d}_t' \underset{\sim}{R} \, \underset{\sim}{\delta} \quad (a) \qquad \underset{\sim}{f}_t' = \underset{\sim}{d}_t' \underset{\sim}{R}$$

mas $\underset{\sim}{\alpha} = R \underset{\sim}{\delta}$, como $\underset{\sim}{R}$ tem posto cheio entao $\exists \underset{\sim}{R}^{-1}$, e assim $\underset{\sim}{\delta} = \underset{\sim}{R}^{-1} \underset{\sim}{\alpha}$. Subs titerido em (a), segue que

$$\gamma_t^H = \underset{\sim}{d}_t' \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{R}^{-1} \alpha = \underset{\sim}{d}_t' \underset{\sim}{\alpha} = \gamma_t^P \qquad \underline{\text{QED}}$$

→ É óbvio que ambos os modelos terão os mesmos R^2's, resíduos, resultados de testes de especificação (normalidade, heterosc, autocorrelação etc).