Estudo e comentários Adicionais

P1 P2

Demonstrações e exercícios do caderno

(1) Tendência determinística

(Processo TS)

$$y_t = \sum_{j=0}^{d} \beta_j t^j + \psi(L) a_t \quad \text{onde } a_t \sim N(0, \sigma^2)$$

calcule: $E[y_t]$ e $var[y_t]$, $\gamma(k)$

$$E(y_t) = \sum_{j=0}^{d} \beta_j t^j$$

$$var[y_t] = var(a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 \cdot \sigma_a^2$$

$$\gamma(k) = \sigma_a^2 (\psi_k \psi_0 + \psi_{k+1} \psi_1 + \dots)$$

→ Caso $d = 1$ e $a_t \sim AR(1)$

$$\begin{cases} y_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_t \\ a_t = \phi a_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases}$$

Calcule: $E(y_t)$, $var[y_t]$, $\gamma(k)$, previsas k passos a frente, var. do erro de previsas.

$$E[y_t] = \beta_0 + \beta_1 t$$

$$var[y_t] = var[a_t] = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

$$\gamma(k) = cov(y_{t-k}, y_t) = \phi^k \sigma^2$$

$$\hat{y}_{t+k|t} = E[y_{t+k} | \underset{\sim}{Y_t})$$

$$= E[\beta_0 + \beta_1 (t+k) + a_{t+k} | \underset{\sim}{Y_t})$$

dos $E[a_{t+k} | \underset{\sim}{Y_t}) = \phi^k \hat{a}_{t|t}$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+k|t} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 (t+k) + \phi^k \hat{a}_{t|t}$$

$$= \hat{y}_{t|t} - \hat{a}_{t|t} + \hat{\beta}_1 k + \phi^k \hat{a}_{t|t}$$

$$= \hat{y}_{t|t} + \hat{\beta}_1 k + (\phi^k - 1) \hat{a}_{t|t}$$

$$a_{t+k} = \phi^k a_t + \sum_{i=1}^{k} \phi^i \varepsilon_{k-i}$$

$$var(a_{t+k}) = \sum_{i=1}^{k} \phi^{2i} \sigma_e^2$$

$\downarrow$

soma PG razão ϕ^2.

$\Rightarrow$ <u>obs</u>: P/ processos TS $\Rightarrow$ Não retirar tendência por diferença pois introduz raiz unitária MA não inversível.

Neste caso:

$$\omega_t = y_t - y_{t-1}$$

$$= \beta_1 + (1-L)\frac{\varepsilon_t}{1-\phi L}$$

$$(1-\phi L)\omega_t = (1-\phi)\beta + \underset{\text{raiz unitária}}{\underset{\downarrow}{(1-L)}}\varepsilon_t$$

(2) Tendência Estocástica

(a) RW

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

calcular $E[y_t]$, $var(y_t)$, $\rho(k)$

$$y_1 = y_0 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = y_1 + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

$$\Rightarrow E[y_t] = y_0 = 0$$

$$var[y_t] = t\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(k) = cov(y_t, y_{t-k})$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i, \sum_{i=1}^{t-k} \varepsilon_i\right]$$

$$= E[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t ; \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{t-k}]$$

$$= (t-k)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\therefore \rho(k) = \frac{(t-k)}{t} = \left(1 - \frac{k}{t}\right)$$

(b) RW com drift

$y_t = a_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t$. Calcular $E[y_t]$, $var(y_t)$, $\gamma(k)$, previsões

$y_1 = a_0 + y_0 + \varepsilon_1$

$y_2 = a_0 + y_1 + \varepsilon_2$

$= 2a_0 + y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$\vdots$

$y_t = a_0 t + y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$

$\Rightarrow E[y_t] = a_0 t \quad (y_0 = 0)$

$var(y_t) = t\sigma^2$

$\rho(y_t, y_{t-k}) = \left(1 - \frac{k}{t}\right)$

(3) MNL - Casos particulares / Caso Geral (EWMA)

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t \end{cases}$$

(a) $\sigma_\eta^2 = 0$

$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$

$\mu_t = \mu_{t-1} = \mu \Rightarrow y_t = \mu + \varepsilon_t$: ruído bco + cte.

$E[y_t] = \mu$

$var(y_t) = \sigma^2$

(b) $\sigma_\varepsilon^2 = 0$

$y_t = \mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t$: RW

(c) caso Geral

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t \end{cases}$$

Calcular $E[y_t]$, $var(y_t)$ e funções de previsões

$$E[y_t] = E[\mu_t + \varepsilon_t] = E[\mu_t]$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t$$

$$\mu_1 = \mu_0 + \eta_1$$

$$\mu_2 = \mu_1 + \eta_2$$

$$\vdots$$

$$\mu_t = \mu_0 + \sum_{i=1}^{t} \eta_i$$

$$\therefore \; E[y_t] = \mu_0$$

$$\mathrm{var}[y_t] = t \cdot \mathrm{var}(\eta_i) + \sigma_\varepsilon^2 + \underbrace{p_0}_{\mathrm{var}(\mu_0)}$$

$$= t\,\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 + p_0 .$$

Previsão k passos à frente

$$\hat{y}_{t+k|t} = E[y_{t+k} \mid \underset{\sim}{Y_t}]$$

$$= E[\mu_{t+k} \mid \underset{\sim}{Y_t}]$$

$$\mu_{t+k} = \mu_t + \sum_{i=1}^{k} \eta_{t+i}$$

$$\therefore \; E[\mu_{t+k} \mid \underset{\sim}{Y_t}] = \hat{\mu}_{t|t}$$

$$\mathrm{var}[y_{t+k} \mid \underset{\sim}{Y_t}] = \mathrm{var}(\mu_t \mid \underset{\sim}{Y_t}) + k\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$= P_{t|t} + k\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

— 11 —

Para MNL:

$$\left.\begin{matrix} Z = 1 & Q = \sigma_\eta^2 \\ T = 1 & H = \sigma_\varepsilon^2 \\ R = 1 & \end{matrix}\right\}$$

FK

$$v_t = y_t - a_t$$

$$F_t = P_t + H_t = P_t + \sigma_\varepsilon^2$$

$$K_t = P_t F_t^{-1} = \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}$$

$$L_t = 1 - K_t = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}$$

$$M_t = P_t$$

Atualização

$$\Rightarrow \mu_{t|t} = \mu_t + P_t \cdot \frac{1}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}(y_t - \mu_t)$$

$$= \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2} y_t + \left(1 - \frac{P_t}{P_t + \sigma_\varepsilon^2}\right)\mu_t = \lambda y_t + (1-\lambda)\mu_t$$

EWMA

Previsão

$$a_{t+1} = T_t a_{t|t}$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t$$

$$= \lambda y_t + (1-\lambda)\mu_{t-1}$$

(4) Forma Reduzida do MNL

$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ → Não é estacionário

$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t$

$\Rightarrow \Delta y_t = \Delta\mu_t + \Delta\varepsilon_t$

$= \eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ → É estacionário

- $E[\Delta y_t] = 0$
- $var(\Delta y_t) = \sigma_\eta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2$
- $\gamma(1) = cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-1}) =$

$= E[(\eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\eta_{t-1} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})]$

$= -\sigma_\varepsilon^2$

$\therefore \rho(1) = \dfrac{-\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\eta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2} = \dfrac{-1}{q+2}$

- $\gamma(2) = 0 \Rightarrow \gamma(k) = 0 \quad \forall k \geq 2$

$\Rightarrow \Delta y_t \sim MA(1)$

Comparando c/ MA(1) genérico:

$z_t \sim MA(1) \Rightarrow z_t = w_t + \theta_1 w_{t-1}$

$E[z_t] = 0$

$var[z_t] = (1+\theta_1^2)\sigma_w^2$

$\gamma(1) = E[(w_t + \theta_1 w_{t-1})(w_{t-1} + \theta_1 w_{t-2})]$

$= \theta_1 \sigma_w^2$

$\therefore \rho(1) = \dfrac{\theta_1}{(1+\theta_1^2)}$

Precisamos ter: $-\dfrac{1}{q+2} = \dfrac{\theta_1}{(1+\theta_1^2)}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$0 < q < \infty \qquad -1 < \theta < 1$

$\theta_1(q+2) = -(1+\theta_1^2)$

Achar $\theta_1(q)$ $\Rightarrow \theta = \dfrac{-(q+2) \pm \sqrt{(q+2)^2 - 4}}{2}$ $\quad q \in (0, \infty)$

Com esta restrição, o espaço paramétrico de θ_1 fica reduzido:

$$\left.\begin{aligned} q \to 0 &: \ \theta_1 = -1 \\ q \to \infty &: \ \theta_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad -1 < \theta_1 < 0.$$

(b) Forma reduzida do MNL com correlação

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t & \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t & \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{cases}$$

$$E[\varepsilon_t \eta_t] = \sigma_{\varepsilon\eta}$$

$$\Rightarrow \Delta y_t = \eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

$$E[\Delta y_t] = 0$$

$$\text{var}[\Delta y_t] = \sigma_\eta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{\varepsilon\eta}$$

$$\gamma(1) = E[(\eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\eta_{t-1} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})]$$

$$= -\sigma_\varepsilon^2 - \sigma_{\varepsilon\eta}$$

$$\gamma(2) = 0$$

3 parâmetros
$\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_{\varepsilon\eta}$

(5) TLL - Casos Particulares / caso geral

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t$$

$\Rightarrow$ μ_t: tendência linear estoc. da série
β_t: inclinação estocástica.

(a) $\sigma_\eta^2 = \sigma_\zeta^2 = 0$.

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta \\ \beta_t = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \mu_1 &= \mu_0 + \beta \\ \mu_2 &= \mu_1 + \beta \\ &= \mu_0 + 2\beta \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\mu_t = \mu_0 + t\beta \Rightarrow y_t = \mu_0 + t\beta + \varepsilon_t$$

Modelo TS linear

(b) $\sigma_\zeta^2 = 0, \ \sigma_\eta^2 \neq 0$

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$$
$$\beta_t = \beta_{t-1} = \beta$$

$\Rightarrow \mu_t = \mu_{t-1} + \beta + \eta_t$: RW com drift

(c) $\sigma_\eta^2 = 0, \ \sigma_\zeta^2 \neq 0$

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \end{cases}$$

μ_t é dita tendência suave.

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mu_t &= \beta_{t-1} \\ \Delta^2\mu_t &= \zeta_t \end{aligned}\right\} \text{filtro passa baixa.}$$

Equações do FK

Atualização

$$a_{t|t} = a_t + M_t F_t^{-1} v_t$$
$$P_{t|t} = P_t - P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t$$

Previsão

$$a_{t+1} = T_t a_{t|t}$$
$$P_{t+1} = T_t P_{t|t} T_t' + R_t Q_t R_t'$$

onde:

$$v_t = y_t - Z a_t$$
$$F_t = Z_t P_t Z_t' + H_t$$
$$M_t = P_t Z_t'$$

(c) Cálculo da função de previsão p/ TLL.

$\vdots$

$$\hat{y}_{t+k|t} = \underbrace{\hat{\mu}_{t|t}}_{} + \overset{k \geq 1}{k}\, \underbrace{\hat{\beta}_{t|t}}_{}$$

(6.a) usando eqs. de atualização FK $\Rightarrow$ mostrar método de Holt

$$\begin{cases} y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \varepsilon_t \\ \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \end{pmatrix} \end{cases}$$

$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad H = \sigma_\varepsilon^2$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 \end{pmatrix}$

$R = I$

Calcula M_t, F_t, v_t

$$\Rightarrow \cdot\ M_t = P_t' Z_t' = \begin{pmatrix} P_t^{11} & P_t^{12} \\ P_t^{21} & P_t^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_t^{11} \\ P_t^{21} \end{pmatrix}$$

$$\cdot\ F_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_t^{11} & P_t^{12} \\ P_t^{21} & P_t^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon^2 = \begin{pmatrix} P_t^{11} & P_t^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon^2$$
$$= P_t^{11} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\cdot\ v_t = y_t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_t \\ b_t \end{pmatrix} \therefore v_t = y_t - m_t$$

(7) Forma Reduzida p/ TLL.

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \xi_t \end{cases}$$

$$\Delta y_t = \beta_{t-1} + \eta_t + \Delta \varepsilon_t$$

$$\Delta^2 y_t = \xi_t + \Delta \eta_t + \Delta^2 \varepsilon_t \quad \rightarrow \text{estacionário}$$

$$= \xi_t + \eta_t - \eta_{t-1} + \underbrace{(1-L)^2}_{(1-2L+L^2)} \varepsilon_t$$

$$= \xi_t + \eta_t - \eta_{t-1} + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$

$$\Rightarrow \quad E[\Delta^2 y_t] = 0$$

$$\text{var}[\Delta^2 y_t] = \sigma_\xi^2 + 2\sigma_\eta^2 + 6\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(1) = \text{cov}[\Delta^2 y_t, \Delta^2 y_{t-1}] =$$

$$= E[(\xi_t + \eta_t - \underline{\eta_{t-1}} + \varepsilon_t - \underline{2\varepsilon_{t-1}} + \underline{\varepsilon_{t-2}})(\xi_{t-1} + \underline{\eta_{t-1}} - \eta_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \underline{2\varepsilon_{t-2}} + \varepsilon_{t-3})] =$$

$$= -\sigma_\eta^2 - 2\sigma_\varepsilon^2 - 2\sigma_\varepsilon^2 = -\sigma_\eta^2 - 4\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(2) = \text{cov}[\Delta^2 y_t, \Delta^2 y_{t-2}] =$$

$$= E[(\quad \ldots \quad)(\xi_{t-2} + \eta_{t-2} - \eta_{t-3} + \underline{\varepsilon_{t-2}} - 2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-4})]$$

$$= \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(k) = 0 \quad \text{p/ } k \geq 3$$

$$\Rightarrow \Delta^2 y_t \sim MA(2)$$

Para MA(2) genérico:

$$z_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2}$$

(*)

Da atualização p/ $a_{t|t}$:

$$\begin{pmatrix} m_{t|t} \\ b_{t|t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_t \\ b_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_t^{11} \\ P_t^{21} \end{pmatrix} \frac{1}{P_t^{11}+\sigma_\varepsilon^2} (y_t - m_t)$$

usa equação de atualização

$$\Rightarrow \quad m_{t|t} = m_t + \frac{P_t^{11}}{P_t^{11}+\sigma_\varepsilon^2}(y_t - m_t) \qquad (1)$$

$$b_{t|t} = b_t + \frac{P_t^{21}}{P_t^{11}+\sigma_\varepsilon^2}(y_t - m_t) \qquad (2)$$

Da previsão do FK:

usa eq. de previsão envolvendo $a_{t-1|t-1}$

$$\begin{pmatrix} m_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{t-1|t-1} \\ b_{t-1|t-1} \end{pmatrix}$$

$$m_t = m_{t-1|t-1} + b_{t-1|t-1} \qquad (3)$$

$$b_t = b_{t-1|t-1} \qquad (4)$$

→ De (3) em (1):

subst. previsão na atualização p/ m_t

$$m_{t|t} = m_{t-1|t-1} + b_{t-1|t-1} + \frac{P_t^{11}}{P_t^{11}+\sigma_\varepsilon^2}\left(y_t - m_{t-1|t-1} - b_{t-1|t-1}\right)$$

$$m_{t|t} = \underbrace{\frac{P_t^{11}}{P_t^{11}+\sigma_\varepsilon^2}}_{\lambda_{1t}} y_t + \underbrace{\left(1 - \frac{P_t^{11}}{P_t^{11}+\sigma_\varepsilon^2}\right)}_{1-\lambda_{1t}}\left(m_{t-1|t-1} + b_{t-1|t-1}\right)$$

$$\boxed{m_{t|t} = \lambda_{1t}\, y_t + (1-\lambda_{1t})(m_{t-1|t-1} + b_{t-1|t-1})}$$

→ De (1) em (2)

$$(y_t - m_t) = (m_{t|t} - m_t)\cdot\frac{P_t^{11}+\sigma_\varepsilon^2}{P_t^{11}} \quad \Rightarrow \quad b_{t|t} = b_t + \frac{P_t^{21}}{P_t^{11}}(m_{t|t} - m_t) \qquad (5)$$

De (3) e (4) em (5): $\quad b_{t|t} = b_{t-1|t-1} + \frac{P_t^{21}}{P_t^{11}}\left(m_{t|t} - m_{t-1|t-1} - b_{t-1|t-1}\right)$

$$b_{t|t} = \underbrace{\left(1 - \frac{P_t^{21}}{P_t^{11}}\right)}_{1-\lambda_{2t}} b_{t-1|t-1} + \underbrace{\left(\frac{P_t^{21}}{P_t^{11}}\right)}_{\lambda_{2t}} \left(m_{t|t} - m_{t-1|t-1}\right)$$

$E[z_t] = 0$

$var[z_t] = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_e^2$

$\gamma(1) = (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_e^2$

$\gamma(2) = \theta_2 \sigma_e^2$

Igualar expressões e verificar restrição adicional sobre parâmetros.

Obs: Se $\sigma_\zeta^2 = 0 \Rightarrow$ inclinação fixa

θ_1 e θ_2 fora da região de invertibilidade.

Se $\sigma_\eta^2 = 0$ e $\sigma_\zeta^2 > 0 \Rightarrow$ tendência suave

Modelo sempre inversível.

(8) Tendência linear Amortecida

$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$

$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$

$\beta_t = \phi\beta_{t-1} + \zeta_t$

→ calcular função de previsão e forma reduzida

$\hat{y}_{t+k|t} = E[y_{t+k}|\underset{\sim}{Y}_t]$

$= E[\mu_{t+k}|\underset{\sim}{Y}_t]$

• $E[\mu_{t+k}|\underset{\sim}{Y}_t] =$

$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_{t+1}$

$\mu_{t+2} = \mu_{t+1} + \beta_{t+1} + \eta_{t+2}$

$= \mu_t + \beta_t + \beta_{t+1} + \eta_{t+1} + \eta_t$

$= \mu_t + \sum_{i=1}^{k} \beta_{t+i} + \sum_{i=1}^{k} \eta_{t+i}$

$\Rightarrow E[\mu_{t+k}|\underset{\sim}{Y}_t] = \hat{\mu}_{t|t} + \sum_{i=1}^{k} E[\beta_{t+i}|\underset{\sim}{Y}_t]$

• $E[\beta_{t+i}|\underset{\sim}{Y}_t]$

$$\beta_{t+1} = \phi \beta_t + \zeta_{t+1}$$

$$\beta_{t+2} = \phi \beta_{t+1} + \zeta_{t+2}$$

$$= \phi^2 \beta_t + \phi \zeta_{t+1} + \zeta_{t+2}$$

$$\vdots$$

$$\beta_{t+i} = \phi^i \beta_t + \sum_{i=0}^{i} \phi^i \zeta_{t+k-j}$$

Logo: $y_{t+k|t} = \hat{\mu}_{t|t} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \phi^i}_{\substack{\downarrow \\ \text{PG razão } \phi \\ \left(\frac{1-\phi^k}{1-\phi}\right)}} \hat{\beta}_{t|t}$

- forma reduzida

$$\Delta y_t = \beta_{t-1} + \eta_t + \Delta \varepsilon_t$$

$$\beta_t = \phi \beta_{t-1} + \zeta_t$$

$$(1-\phi L)\beta_t = \zeta_t \quad \therefore \quad \beta_t = \frac{\zeta_t}{1-\phi L}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y_t = \frac{\zeta_{t-1}}{1-\phi L} + \eta_t + \Delta \varepsilon_t$$

$$(1-\phi L)\Delta y_t = \zeta_{t-1} + (1-\phi L)\eta_t + (1-\phi L)(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

$$= \zeta_{t-1} + \eta_t - \phi \eta_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - \phi \varepsilon_{t-1} + \phi \varepsilon_{t-2}$$

$$= \zeta_{t-1} + \eta_t - \phi \eta_{t-1} + \varepsilon_t - (\phi+1)\varepsilon_{t-1} + \phi \varepsilon_{t-2}$$

$\vdots$ Calcular ARIMA correspondente

(9) Por que transformação logarítmica é indicada em algumas situações?

a) lineariza o modelo

b) traz simetria aos resíduos ⇒ torna Normal

c) muda a escala (trabalha c/ variação relativa)

d) estabiliza a variância

↓

p/ um determinado tipo de heterocedasticidade

verificar

(10) Quando tratamos sazonalidade com dummies, qual o problema de usar uma dummy por período?

Problema de multicolinearidade perfeita

Não conseguimos estimar regressores por MQO

obs: coeficientes das dummies na regressão são os fatores sazonais

Para evitar multicolinearidade perfeita:

introduzir algum tipo de restrição nos parâmetros do modelo, resultando em ≠s parametrizações.

$\Rightarrow$ γ's: fatores sazonais, estarão relacionados de alguma forma

1ª param: faz um dos $\gamma_j = 0$ (escolha arbitrária)

2ª param. abandona intercepto

3ª param: soma dos coeficientes de sazonalidade é zero no período

$\downarrow$

No caso determinístico: $\sum_{j=1}^{s} \gamma_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} = 0$ — idéia de soma γ defasados no tempo de s períodos.

No caso estocástico: $\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} = \omega_t \quad \omega_t \sim N(0, \sigma^2_\omega)$

(11) Modelo Estrutural Básico: TLL + Sazonalidade

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \\ \gamma_t = \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t \end{cases}$$

→ Função de previsão:

$$\hat{y}_{t+s|t} = E[\mu_{t+s} + \gamma_{t+s} + \varepsilon_{t+s} \mid \underset{\sim}{Y_t})$$
$$= \underbrace{E[\mu_{t+s} \mid \underset{\sim}{Y_t}]}_{\text{do TLL}} + E[\gamma_{t+s} \mid \underset{\sim}{Y_t})$$

$$\therefore \; \hat{y}_{t+s|t} = \hat{\mu}_{t|t} + s\hat{\beta}_{t|t} + \hat{\gamma}_{t+s|t}$$

$$\downarrow$$

$$= \hat{\gamma}_{t-S+s|t} \qquad s = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Downarrow$$

só é projetado o último período (fator sazonal) correspondente.

(ii) Sazonalidade por funções trigonométricas.

Cada fator sazonal será somas de senos e cossenos:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{S/2} \left(\gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j t \right)$$

onde $\boxed{\lambda_j = \frac{2\pi j}{S}}$

$\Rightarrow$ usando todos os harmônicos: estimativa por dummies = estimativas por SF.

<u>MEB</u> com funções trigonométricas:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t$$

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{S/2} \gamma_{jt}$$

onde $\begin{pmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma_{jt}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_j & \operatorname{sen} \lambda_j \\ -\operatorname{sen} \lambda_j & \cos \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{j,t-1} \\ \gamma_{j,t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_t \\ \omega_t^* \end{pmatrix}$

Se $S = 4 \Rightarrow$ no vetor de estado

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1t} \\ \gamma_{1t}^* \\ \gamma_{2t} \end{pmatrix}$$

Por dummies, no vetor de estado, teremos $\begin{pmatrix} \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \end{pmatrix}$

(12) Forma reduzida do MEB p/ sazonalidade por dummies:

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \\ \gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t \end{cases} \Rightarrow \sum_{j=0}^{s-1} \gamma_{t-j} = \omega_t \iff S_s(L)\gamma_t = \omega_t$$

→ Operador de diferenciação sazonal: $\Delta_s = 1 - L^s$

(observação: $S_s(L) = 1 + L^1 + L^2 + \dots + L^{s-1}$ onde $\boxed{\Delta S_s(L) = \Delta_s}$)

Para y_t:

$$\Delta y_t = \Delta\mu_t + \Delta\gamma_t + \Delta\varepsilon_t$$
$$= \beta_{t-1} + \Delta\gamma_t + \Delta\varepsilon_t \longrightarrow \text{tirar } \beta_{t-1}$$

Para Δy_t

$$\Delta^2 y_t = \Delta\beta_{t-1} + \Delta^2\gamma_t + \Delta^2\varepsilon_t$$
$$= \zeta_{t-1} + \Delta^2\gamma_t + \Delta^2\varepsilon_t$$ — Já estac. na tendência. Tirar na sazonalidade

$$S_s(L)\Delta^2 y_t = S_s(L)\zeta_{t-1} + \Delta^2 S_s(L)\gamma_t + \Delta^2 S_s(L)\varepsilon_t$$

$$\Delta \underbrace{\Delta S_s(L)}_{\Delta_s} y_t = S_s(L)\zeta_{t-1} + \Delta\Delta \underbrace{S_s(L)\gamma_t}_{\omega_t} + \Delta \underbrace{\Delta S_s(L)}_{\Delta_s}\varepsilon_t$$

$$\Delta\Delta_s y_t = S(L)\zeta_{t-1} + \Delta^2\omega_t + \Delta\Delta_s\varepsilon_t \Rightarrow \text{Estacionário } MA(s+1)$$

p/ TLL ⇒ MA(2)

c/ sazonalidade: + s-1 par.

<u>Ex</u>: $s = 4$

$$\underbrace{(1-L)(1-L^4)y_t}_{z_t} = (1+L+L^2+L^3)\zeta_{t-1} + (1-L)^2\omega_t + \underbrace{(1-L)(1-L^4)}_{(1-L^4-L+L^5)}\varepsilon_t$$

$$= \zeta_{t-1} + \zeta_{t-2} + \zeta_{t-3} + \zeta_{t-4} + \omega_t - 2\omega_{t-1} + \omega_{t-2} +$$
$$+ \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-4} + \varepsilon_{t-5}$$

estacionário MA(5)

Dúvida => como escreve forma reduzida p/ MEB c/ função trigonométrica?

(13) Variáveis explicativas

Olhar resumo adicional.

Atenção: função de verossimilhança fica em função de parâmetros de var. explicativas.

Dúvida Se forem de intervenção tb estima?

(14) Tipos de variáveis

pulso $w_t = \begin{cases} 1 & t = t^* \\ 0 & t \neq t^* \end{cases}$

escada $w_t \begin{cases} 0 & t < t^* \\ 1 & t \geq t^* \end{cases}$

mud. inclinação $w_t = \begin{cases} 0 & t < t^* \\ t - t^* & t \geq t^* \end{cases}$

pulso decaindo gradualmente

" crescendo | caindo "

(15) Diagnósticos do modelo

(a) Quais são as hipóteses p/ serem verificadas?

(i) $\begin{cases} \text{linearidade das componentes} \\ \text{aditividade} \end{cases}$

Pode ser verificado visualmente

sazonalidade vai aumentando em amplitude tb.

se não identificar => olhar resíduos

(ii) Resíduos ε_t $\longrightarrow$ $\begin{cases} \text{Normalidade} \\ \text{Homocedasticidade} \\ \text{Descorrelação} \end{cases}$

$$\varepsilon_t = y_t - Z_t \alpha_t$$

Como ε_t não é observado

$$v_t = y_t - Z_t a_{t|t-1} \Rightarrow E[v_t] = 0$$

$$var[v_t] = F_t$$

Normalizando: $\tilde{v}_t = \dfrac{v_t}{F_t^{1/2}}$ — queremos $N(0,1)$

Testes sobre $\tilde{v}_t$:

→ Normalidade: (testa tb $\hat{\sigma}^2_{\tilde{v}} = 1$)

- histograma
- Q-Q plot
- Jarque-Bera — H_0: normal.
- A Darling

→ Homocedasticidade

Duas coisas podem ocorrer

. se modelo multiplicativo e ajustamos aditivo

$\Rightarrow$ var do erro cresce.

Teste no início e final da amostra e vê se var cte.

· pode ser que comportamento da heterocedasticidade seja outro:

$\Rightarrow$ pode-se fazer teste ARCH, por exemplo.

→ Descorrelação:

p/ avaliar a dependência linear:

- olhar FAC
- Teste de Ljung Box

H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$.

H_a: caso contrário

(16) Resíduos Auxiliares como Diagnósticos

$\Rightarrow$ Bom p/ variáveis explicativas

(ver resumo adicional)

(17) Modelos multivariados:

estimar componentes comuns em ST melhora o modelo (inferência, previsões etc.)

se tratar STs separadamente $\Rightarrow$ perde possibilidade de influência

Diagnósticos sobre inovações $\Rightarrow$ multivariados

(18) Modelo SUTSE: número de parâmetros

$$\underset{(p\times 1)}{y_t} = \mu_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \overset{p\times p}{\Sigma_\varepsilon}) \qquad \Rightarrow \quad p + \binom{p}{2} \text{ parâmetros em } \Sigma_\varepsilon \text{ e } p + \binom{p}{2} \text{ em } \Sigma_\eta$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \qquad \eta_t \sim N(0, \overset{p\times p}{\Sigma_\eta})$$

$\Rightarrow$ v.a's não se comunicam explicitamente.

comunicação através das matrizes de var/covar.

(19) Modelo homogêneo: forma de adicionar restrições ao modelo p/ diminuir nº de parâmetros

Definição:

Processo estocástico de 2ª ordem é homogêneo se todas as CL de suas componentes possuem mesmas propriedades de 2ª ordem

ou seja

$y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{pt})$ é homogêneo

se $\exists\, \alpha$ tal que $z_t = \nabla^d(\underset{\sim}{\alpha}' y)$ univariado

possui FAC independente de $\underset{\sim}{\alpha}$.

(20) Prove que:

se $\underset{\sim}{y}_t$ segue uma SUTSE MNL então $\underset{\sim}{y}_t$ será homogêneo

se e somente se

$$\underset{\sim}{\Sigma}_\eta = q\,\underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon$$

→ Prova da volta

se $\underset{\sim}{\Sigma}_\eta = q\,\underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon \Rightarrow \underset{\sim}{y}_t$ é homogêneo

Seja MNL SUTSE $p=2$:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad \text{onde } \underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \\ \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} & \sigma^2_{\varepsilon_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t-1} \\ \mu_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{\Sigma}_\eta = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\eta_1} & \sigma_{\eta_1\eta_2} \\ \sigma_{\eta_1\eta_2} & \sigma^2_{\eta_2} \end{pmatrix}$$

$$= q\,\underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon$$

Seja $z_t = (\underset{\sim}{\alpha}'\,\Delta y_t)$ $\downarrow$ pf estacionário

$$= \alpha_1 \Delta y_1 + \alpha_2 \Delta y_2$$

$$= \alpha_1(\eta_{1t} + \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{1t-1}) + \alpha_2(\eta_{2t} + \varepsilon_{2t} - \varepsilon_{2t-1})$$

Calculemos a FAC de z_t

$$\gamma(0) = \underline{\alpha_1^2\sigma^2_{\eta_1}} + \underline{2\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_1}} + \alpha_2^2\sigma^2_{\eta_2} + 2\alpha_2^2\sigma^2_{\varepsilon_2} + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{\eta_1\eta_2}$$
$$+ 4\alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$= \alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_1}(q+2) + \alpha_2^2\sigma^2_{\varepsilon_2}(q+2) + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(q+2)$$

$$= (\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_1} + \alpha_2^2\sigma^2_{\varepsilon_2} + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2})(q+2)$$

$$\gamma(1) = E\big[(\alpha_1\eta_{1t} + \alpha_1\varepsilon_{1t} - \alpha_1\varepsilon_{1t-1} + \alpha_2\eta_{2t} + \alpha_2\varepsilon_{2t} - \alpha_2\varepsilon_{2t-1})$$
$$(\alpha_1\eta_{1t-1} + \alpha_1\varepsilon_{1t-1} - \alpha_1\varepsilon_{1t-2} + \alpha_2\eta_{2t-1} + \alpha_2\varepsilon_{2t-1} -$$
$$- \alpha_2\varepsilon_{2t-2})\big]$$

$$= -\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon_1} - \alpha_1\alpha_2\sigma^2_{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \alpha_1\alpha_2\sigma^2_{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \alpha^2\sigma^2_{\varepsilon_2} =$$
$$= -(\alpha_1^2\sigma^2_{\varepsilon} + 2\alpha_1\alpha_2\sigma^2_{\varepsilon_1\varepsilon_2} + \alpha^2\sigma^2_{\varepsilon_2})$$

$\therefore \rho(1) = -\dfrac{1}{q+2}$ independe de α_1 e α_2

→ Prova da ida

Se y_t é homogêneo $\Rightarrow \underset{\sim}{\Sigma}_\eta = q \underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon$

Sabemos que se y_t é homogêneo, a FAC de $\underset{\sim}{\alpha}' \Delta y_t$ independe de α

Para $p=2$, temos:

$$\gamma(0) = \alpha_1^2 \sigma_{\eta_1}^2 + 2\alpha_1^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 + \alpha_2^2 \sigma_{\eta_2}^2 + 2\alpha_2^2 \sigma_{\varepsilon_2}^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \sigma_{\eta_1\eta_2} + 4\alpha_1\alpha_2 \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$= \alpha_1^2 (\sigma_{\eta_1}^2 + 2\sigma_{\varepsilon_1}^2) + \alpha_2^2 (\sigma_{\eta_2}^2 + 2\sigma_{\eta_2}^2) + 2\alpha_1\alpha_2 (\sigma_{\eta_1\eta_2} + 2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2})$$

$$\gamma(1) = -(\alpha_1^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 + \alpha_2^2 \sigma_{\varepsilon_2}^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2})$$

Para cancelar o termo do numerador

como prova?

P/ que $\rho(1)$ independe de α_1 e α_2, devemos cancelar o termo $(\alpha_1^2\sigma_{\varepsilon_1}^2 + \alpha_2^2 \sigma_{\varepsilon_2}^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2})$

$$\Rightarrow \alpha_1^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 \left(\frac{\sigma_{\eta_1}^2}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} + 2 \right) + \alpha_2^2 \sigma_{\varepsilon_2}^2 \left(\frac{\sigma_{\eta_2}^2}{\sigma_{\varepsilon_2}^2} + 2 \right) + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \left(\frac{\sigma_{\eta_1\eta_2}}{\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}} + 2 \right)$$

o que só será possível se $\dfrac{\sigma_{\eta_1}^2}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} = \dfrac{\sigma_{\eta_2}^2}{\sigma_{\varepsilon_2}^2} = \dfrac{\sigma_{\eta_1\eta_2}}{\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}}$

(21) Prove que:

Se y_t segue um SUTSE com j tipos de componentes ortogonais, então y_t será homogêneo se e somente se:

$$\underset{\sim}{\Sigma}_\eta = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{\eta_1} & & \underset{\sim}{0} \\ & \underset{\sim}{\Sigma}_{\eta_2} & \\ \underset{\sim}{0} & & \ddots \\ & & & \underset{\sim}{\Sigma}_{\eta_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon & & \underset{\sim}{0} \\ & q_2 \underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon & \\ \underset{\sim}{0} & & \ddots \\ & & & q_j \underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon \end{pmatrix}$$

Vale o mesmo raciocínio da proposição anterior.

como são ortogonais $\Sigma_{\eta_i \eta_j} = 0 \quad \forall\, i \neq j$

e $\Sigma_{\eta_j} = q_j \Sigma_\varepsilon$ pela demonstração anterior.

provar p/ TLL
SUTSE
$p = 2$.

(22) Propriedades Empíricas de PH's

(i) Pode haver teorias "a priori" que justifiquem a adoção desta estrutura

(ii) FK pode ser implementado p/ cada uma das p comp. separadamente

(iii) Menos risco na estimação paramt

(iv) Estimação MV + simples

(23) Função de Verossimilhança p/ modelo NL SUTSE Homog.

$$\begin{cases} \underset{\sim}{y}_t = \underset{\sim}{\mu}_t + \underset{\sim}{\varepsilon}_t \\ \underset{\sim}{\mu}_t = \underset{\sim}{\mu}_{t-1} + \underset{\sim}{\eta}_t \end{cases} \qquad \begin{matrix} \varepsilon_t \sim N(0, \Sigma_\varepsilon) \\ \eta_t \sim N(0, \Sigma_\eta) \end{matrix}$$

Para $p = 2$:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t-1} \\ \mu_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix}$$

está certo?

$Z = I \qquad H = \Sigma_\varepsilon$

$T = I \qquad Q = \Sigma_\eta$

$$L(\psi) = \prod_{i=1}^{n} p(y_{1t}, y_{2t} \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1}) \Rightarrow$$ função densidade conjunta bivariada

Para $p(y_{1t}, y_{2t}) = ?$

$$E\left[\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix}\right] = Z a_t = \left[\begin{pmatrix} m_{1t} \\ m_{2t} \end{pmatrix}\right]$$

$$\text{var}\left[\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix}\right] = Z P_t Z' + H_t = F_t$$

dúvida

Dúvida

componente × nº de séries de Y.

$$p(y_{1t}, y_{2t} \mid \underset{\sim}{Y_t}) = \frac{1}{(2\pi)^{2/2} |F_t|^{1/2}} \, e^{-\frac{1}{2}\left[(2\mu_t - m_t)' F_t^{-1} (2\mu_t - m_t) \right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi |F_t|^{1/2}} \, e^{-\frac{1}{2}\left[\nu_t' F_t^{-1} \nu_t \right]}$$

Logo:

$$L(\psi) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi |F_t|^{1/2}} \, e^{-\frac{1}{2}\left[\nu_t' F_t^{-1} \nu_t \right]}$$

$$\ell(\psi) = \log L(\psi)$$

$$= -n \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\log |F_t| + \nu_t' F_t^{-1} \nu_t \right)$$

→ usando inicialização Big kappa:

vamos computando o FK até dist. ficar própria

Nº comp. ñ estac. = 1 ou 2 ?

$$\ell(\psi) = -(n-2) \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{n} \left(\log |F_t| + \nu_t' F_t^{-1} \nu_t \right)$$

→ usando inicialização exata:

$$\ell(\psi) = -n \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{d} w_t - \frac{1}{2} \sum_{t=d+1}^{n} \log |F_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=d+1}^{n} \nu_t' F_t^{-1} \nu_t$$

— " —

$$\ell_d(\psi) = \lim_{k \to \infty} \left(\log L(\psi) + \frac{1}{2} \log k \right)$$

$$= \lim_{P_1 \to \infty} \left(\log L(\psi) + \frac{1}{2} \log (P_1) \right)$$

$$= \lim_{P_1 \to \infty} \left[-n \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\log |F_t| + \nu_t' F_t^{-1} \nu_t \right) + \frac{1}{2} \log P_1 \right]$$

dúvida

$$= \lim_{P_1 \to \infty} \left[-n \log 2\pi - \frac{1}{2} \log \left(|F_1| + v_1' F_1^{-1} v_1 \right) + \frac{1}{2} \log P_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} \left(\log |F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t \right. \right.$$

?

Fazendo a concentração do PH:

$$\underset{\sim}{\Sigma}_\eta = q \underset{\sim}{\Sigma}_\varepsilon$$

Calcula F_t^* reparametrizado (e P_t^*)

(24) Modelo SUTSE generalizado

Prove p/ modelo de TL + ciclo podemos escrever

$$\underset{\sim}{y}_t = (z_U \otimes I_p) \underset{\sim}{\alpha}_t + \underset{\sim}{\varepsilon}_t$$ para $p = 2$

$$\underset{\sim}{\alpha}_{t+1} = (T_U \otimes I_p) \underset{\sim}{\alpha}_t + (R_U \otimes I_p) \eta_t$$

→ Modelo unidimensional

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \psi_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \\ \begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi_{t^*} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \lambda_c & \operatorname{sen} \lambda_c \\ -\operatorname{sen} \lambda_c & \cos \lambda_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_t^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_t \\ K_t^* \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\cos & \rho\operatorname{sen} \\ 0 & 0 & -\rho\operatorname{sen} & \rho\cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \\ K_t \\ K_t^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \\ \psi^{*}_{1t} \\ \psi^{*}_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

(25) Prove que MNL SUTSE $p=2$ pode ser reparametrizado como:

$$y_{1t} = \mu_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

$$y_{2t} = \pi \mu_{1t} + \bar{\mu}_t + \varepsilon_{2t}$$

$$\mu_{1t} = \mu_{1t-1} + \eta_{1t} \qquad \text{onde } \Sigma_\eta = \underline{\text{diagonal}}$$

$$\bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1} + \bar{\eta}_t$$

Seja SUTSE MNL $p=2$:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \\ \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} & \sigma^2_{\varepsilon_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t-1} \\ \mu_{2t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix} \qquad \Sigma_\eta = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\eta_1} & \sigma_{\eta_1\eta_2} \\ \sigma_{\eta_1\eta_2} & \sigma^2_{\eta_2} \end{pmatrix}$$

(1) Define $\eta_{2t} = \pi\eta_{1t} + \bar{\eta}_t$ onde $\pi = \rho_\eta \frac{\sigma_{\eta_2}}{\sigma_{\eta_1}}$

Calcula $E[\bar{\eta}]$, $var(\bar{\eta})$ e $cov(\eta_{1t}, \bar{\eta})$

Seja $\eta_{2t} = \pi\eta_{1t} + \bar{\eta}_t$ onde $\pi = \rho_\eta \frac{\sigma_{\eta_2}}{\sigma_{\eta_1}}$

$\therefore \bar{\eta}_t = \eta_{2t} - \pi\eta_{1t}$

$\Rightarrow$ • $E[\bar{\eta}] = E[\eta_{2t}] - \pi E[\eta_{1t}]$

$= 0$

• $var(\bar{\eta}) = E\left[(\eta_{2t} - \pi\eta_{1t})^2\right]$

$= \sigma^2_{\eta_2} + \pi^2\sigma^2_{\eta_1} - 2\pi cov(\sigma_{\eta_{1t}}, \sigma_{\eta_{2t}})$

$= \sigma^2_{\eta_2} + \rho^2\sigma^2_{\eta_2} - 2\pi\rho\, \sigma_{\eta_1}\sigma_{\eta_2}$

$= \sigma^2_{\eta_2} + \rho^2\sigma^2_{\eta_2} - 2\rho \frac{\sigma_{\eta_2}}{\cancel{\sigma_{\eta_1}}} \cdot \cancel{\sigma_{\eta_1}} \cdot \sigma_{\eta_2}$

$= \sigma^2_{\eta_2}(1 - \rho^2)$

• $cov[\eta_{1t}, \bar{\eta}] = E[\eta_{1t}(\eta_{2t} - \pi\eta_{1t})]$

$= -\pi\sigma^2_{\eta_{1t}} + cov(\eta_{1t}\eta_{2t})$

$= -\rho_\eta \cdot \sigma_{\eta_1}\sigma_{\eta_2} + \rho\sigma_{\eta_1}\sigma_{\eta_2} = 0$

Logo $\Sigma_{\eta_{1t}\bar{\eta}} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\eta_1} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\eta_2}(1-\rho^2) \end{pmatrix}$

Substitui η_{2t} no eq. de estados

Temos ainda que:

$$\mu_{2t} = \mu_{2t-1} + \eta_{2t}$$

$$\therefore \mu_{2t} = \mu_{2t-1} + \bar{\eta}_t + \pi\eta_{1,t}$$

$$\mu_{2t} = \mu_{2,t-1} + \bar{\eta}_t + \pi(\mu_{1,t} - \mu_{1,t-1})$$

$$\underbrace{\mu_{2t} - \pi\mu_{1t}}_{\bar{\mu}_t} = \underbrace{\mu_{2,t-1} - \pi\mu_{1,t-1}}_{\bar{\mu}_{t-1}} + \bar{\eta}_t$$

Faz $\mu_{2t} = \bar{\mu}_t + \pi\mu_{1t}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1} + \bar{\eta}_t}$$

Substitui na equação de observação de y_{2t}:

$$\boxed{y_{2t} = \pi\mu_{1t} + \bar{\mu}_t + \varepsilon_{2t}}$$

Logo:

$$\begin{cases} y_{1t} = \mu_{1t} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \pi\mu_{1t} + \bar{\mu}_t + \varepsilon_{2t} \\ \mu_{1t} = \mu_{1t-1} + \eta_{1t} \\ \bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1} + \bar{\eta}_t \end{cases}$$

> descorrelatadas

Por essa nova parametrização $\Rightarrow$ + fácil explicitar componentes comuns.

(26) Prove que parametrizações (I) e (II) p/ MNL SUTSE são equivalentes, ou seja

(i) a estrutura de dependência dos y's permanece inalterada

(ii) a previsão dos y_t's e a função de verossimilhança permanecem inalteradas.

Prova de (i)

Estrutura de dependência permanecer inalterada significa que a FAC é a mesma p/ as 2 parametrizações.

Tomemos a nova parametrização:

$$\begin{cases} y_{1t} = \mu_{1t} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \pi\mu_{1t} + \bar{\mu}_t + \varepsilon_{2t} \\ \mu_{1t} = \mu_{1t-1} + \eta_{1t} \\ \bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1} + \bar{\eta}_t \end{cases}$$

Seja $\Delta y_{1t} = \eta_{1t} + \Delta\varepsilon_{1t} = \eta_{1t} + \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{1t-1}$

$\Delta y_{2t} = \pi\eta_{1t} + \bar{\eta}_t + \Delta\varepsilon_{2t} = \pi\eta_{1t} + \bar{\eta}_t + \varepsilon_{2t} - \varepsilon_{2t-1}$

Para Δy_{1t}. $\operatorname{var}(\Delta y_{1t}) = \sigma^2_{\eta_1} + \sigma^2_\varepsilon + \sigma^2_\varepsilon = \sigma^2_{\eta_1} + 2\sigma^2_\varepsilon$

. $E[\Delta y_{1t}, \Delta y_{1t-1}] = E[(\eta_{1t} + \varepsilon_{1t} - \underline{\varepsilon_{1t-1}})(\eta_{1t-1} + \underline{\varepsilon_{1t-1}} - \varepsilon_{1t-2})]$

$\gamma(1) = -\sigma^2_{\varepsilon_1}$

. $E[\Delta y_{1t}, \Delta y_{1t-1}) = 0$

$\gamma(k) = 0 \quad k \geq 2$

Para Δy_{2t} . $\operatorname{var}(\Delta y_{2t}) = \pi^2\sigma^2_{\eta_1} + \sigma^2_{\bar{\eta}} + 2\sigma^2_{\varepsilon_2}$

. $E[\Delta y_{2t}, \Delta y_{2t-1}) = -\sigma^2_{\varepsilon_2}$

mas $\sigma^2_{\bar{\eta}} = \operatorname{var}(\bar{\eta}) = \operatorname{var}[\eta_{2t} - \pi\eta_{1t}]$

$= \sigma^2_{\eta_2} + \pi^2\sigma^2_{\eta_1} - 2\pi\sigma_{\eta_1\eta_2} = \sigma^2_{\eta_2} + \rho^2\frac{\sigma^2_{\eta_2}}{\sigma^2_{\eta_1}}\cdot\sigma^2_{\eta_1} - 2\rho\frac{\sigma_{\eta_2}}{\cancel{\sigma_{\eta_1}}}\cdot\sigma_{\eta_2}\cancel{\sigma_{\eta_1}}\,\rho$

$$\Rightarrow \quad var[\Delta y_2] = \sigma^2_{\eta_2} + 2\sigma^2_{\varepsilon_2}$$

Podemos ainda calcular pelas 2 parametrizações:

$cov(\Delta y_1, \Delta y_2)$

$$\rightarrow cov[\Delta y_1, \Delta y_2] = cov\left[(\eta_{1t} + \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{1t})(\eta_{2t} + \varepsilon_{2t} - \varepsilon_{2t})\right]$$

$$= \sigma_{\eta_1\eta_2} + 2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

ou

$$cov[\Delta y_1, \Delta y_2] = cov\left[(\eta_{1t} + \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{1t})(\pi\eta_{1t} + \bar{\eta}_t + \varepsilon_{2t} - \varepsilon_{2t-1})\right]$$

$$= \pi\sigma^2_{\eta_1} + 2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$= \rho\,\sigma^{\cancel{2}}_{\eta_1} \cdot \frac{\sigma_{\eta_2}}{\cancel{\sigma_{\eta_1}}} + 2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \sigma_{\eta_1\eta_2} + 2\sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

Prova de (ii) a

Função de verosimilhança permanece inalterada.

Escrevendo as parametrizações na forma EE:

I

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_{1t-1} \\ \mu_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix}$$

II

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \bar{\mu}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \bar{\mu}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_{1t-1} \\ \bar{\mu}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \bar{\eta}_t \end{pmatrix}$$

→ Função de verossimilhança p/ modelo (I)

(1) O vetor de estado da nova pr é uma transf. ñ singular do vetor de estado da pr original

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \bar{\mu}_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix}$$

$\therefore \alpha_t^* = B\alpha_t$ e $\det B \neq 0$.

$$L(\psi) = \prod_{t=1}^{n} p(y_{1t}, y_{2t} \mid \underset{\sim}{Y}_{t-1})$$

↓

função densidade de probabilidade da Normal bivariada

$$\frac{1}{(2\pi)|F_t|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} v_t F_t^{-1} v_t'\right\}$$

Da original	Da nova
$y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t$	$y_t = Z^*\alpha_t^* + \varepsilon_t$
$\alpha_t = T\alpha_{t-1} + R\eta_t$	$\alpha_t^* = T\alpha_{t-1}^* + R^*\eta_t^*$

$\Rightarrow Z\alpha_t + \varepsilon_t = Z^*\alpha_t^* + \varepsilon_t$

como $\alpha_t^* = B\alpha_t$

$\Rightarrow Z = Z^* B \therefore Z^* = ZB^{-1}$

$\therefore Z^* = B^{-1}$

onde $\underset{\sim}{v}_t = y_t - Z\underset{\sim}{a}_{t|t-1}$

$\underset{\sim}{F}_t = Z P_t Z' + H \quad (Z = I)$

$= \underset{\sim}{P}_t + H$

$$\Rightarrow \ell(\psi) = \log L(\psi)$$

$$= \sum_{t=1}^{n}\left[-\log 2\pi - \frac{1}{2}\log|F_t| - \frac{1}{2} v_t F_t^{-1} v_t\right]$$

$$= -n\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\log|F_t| + v_t F_t^{-1} v_t\right)$$

- Observação sobre inicialização

- Se usarmos inicialização difusa por big kappa, como há uma componente não estac. relacionada ao nível, devemos calcular o FK mas considerar em $L(\psi)$ apenas quando dist. se tornar própria. Nesse caso, na $L(\psi)$, teremos $t = 2$ a n

$$\ell(\psi) = -(n-1)\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\log|F_t| + v_t F_t^{-1} v_t\right)$$

- Se usarmos inicialização difusa exata, a $L(\psi)$ é computada desde $t=1$ porém o FK é usado diferentemente: FK exato até $F_{\infty,t} = 0$. Isso ocorrerá em $d=2$ (quando ultrapassar nº comp. ñ estac.). Nesse caso:

$$\ell(\psi) = -n\log 2\pi - \frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\left(\log|F_t| + v_t F_t^{-1} v_t\right)$$

Para o modelo (II) teremos:

$$l^*(\psi) = -n \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \left(\log |F_t^*| + v_t^{*} F_t^{*-1} v_t^* \right)$$

Calculemos ~~p~~ a nova parametrização:

$\rightarrow$ $v_t^* = y_t - Z^* a_t^*$ onde $a_t^* = B a_t$

$$= y_t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi & 1 \end{pmatrix} a_t$$

$$= y_t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a_t = y_t - a_t = v_t$$

$\rightarrow$ $F_t^* = Z^* P_t^* Z^{*\prime} + H$

obs como $\alpha_t^* = B \alpha_t$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \bar{\mu}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_t^* = E[\alpha_t^*] = B a_t^*$$

$$\mathrm{var}[a_t^*] = \mathrm{var}[B a_t] = B P_t B'$$

Nesse caso: $Z^* = B^{-1}$

$$\Rightarrow F_t^* = B^{-1} B P_t (B' B^{-1})' + H_t$$

$$= P_t + H_t = F_t$$

Logo, como v_t e F_t são iguais a v_t^* e F_t^*, a função de verossimilhança é a mesma.

Prova de (ii) b

Função de Previsão permanece inalterada.

$$\hat{y}_{t+k|t} = E[y_{t+k} | \underset{\sim}{Y}_t]$$

→ Para parametrização original

$$\hat{y}_{t+k|t} = E[Z\alpha_{t+k} + \varepsilon_{t+k} | \underset{\sim}{Y}_t]$$

$$= Z\,\alpha_{t+k|t}$$

No modelo em questão $Z = I$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t-1} \\ \mu_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1,t-1} \\ \eta_{2,t-1} \end{pmatrix}$$

⇒ Para μ_{1t} : $\mu_{1t+1} = \mu_{1t} + \eta_{1t+1}$

$$\mu_{1t+2} = \mu_{1t+1} + \eta_{1t+2} = \mu_{1t} + \eta_{1t+1} + \eta_{1t+2}$$

$$\vdots$$

$$\mu_{1t+k} = \mu_{1t} + \sum_{i=1}^{k} \eta_{1t+i}$$

$$\therefore\ E[\mu_{1t+k} | \underset{\sim}{Y}_t] = \mu_{1t|t}$$

Logo: $\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t+k|t} \\ \hat{y}_{2t+k|t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{1t|t} \\ \hat{\mu}_{2t|t} \end{pmatrix}$

→ Para nova parametrização

$$\hat{y}_{t+k|t} = E[Z^*\alpha^*_{t+k} + \varepsilon_{t+k} | \underset{\sim}{Y}_t] \quad \text{onde } Z^* = B$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi & 1 \end{pmatrix}}_{I} \alpha_{t+k|t}$$

ou, desenvolvendo:

$$\hat{y}_{t+k|t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix} \alpha^*_{t+k|t}$$

Calculando $\alpha^*_{t+k|t}$

$$\Rightarrow \quad \alpha^*_{t+k|t} = E\left[\begin{pmatrix} \mu_{1t+k} \\ \bar{\mu}_{t+k} \end{pmatrix} \Big| \; \underset{\sim}{Y_t} \right]$$

<u>Do MNL</u>:

$$\mu_{1t+k|t} = \mu_{1t|t}$$
$$\bar{\mu}_{t+k|t} = \bar{\mu}_{t|t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{y}_{1t+k|t} \\ y_{2t+k|t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t|t} \\ \pi \mu_{1t+k|t} + \bar{\mu}_{t|t} \end{pmatrix}$$

Da definição: $\bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{2t} - \pi \mu_{1t}$

$$\therefore \bar{\mu}_{t|t} = \bar{\mu}_{2t|t} + \pi \mu_{1t|t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{y}_{1t+k|t} \\ \hat{y}_{2t+k|t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1t|t} \\ \mu_{2t|t} \end{pmatrix}$$ de forma que a previsão é a mesma.

Genericamente

- Escreve modelos na FEE
- Faz equivalência entre y_t dos 2 modelos

$$\Rightarrow Z\alpha_t = Z^*\alpha_t^* \therefore Z\alpha_t = Z^* B \alpha_t \therefore \boxed{Z^* = ZB^{-1}}$$

- Calcula a_t^* e P_t^* como funções de a_t, P_t

$$\Rightarrow a_t^* = B a_t$$
$$P_t^* = B P_t B'$$

- P/ verossimilhança, mostra que $F_t^* = F_t$ e $v_t^* = v_t$
- P/ previsão: mostra que $E[Z^*\alpha^*_{t+k} + \varepsilon_{t+k} \mid \underset{\sim}{Y_t}] =$

$$= E[Z\alpha_{t+k} + \varepsilon_{t+k} \mid \underset{\sim}{Y_t}]$$

(27) Dada a nova parametrização, calcule a variância de $\sigma^2_{\bar\eta}$ e mostre que se variáveis η_{1t} e η_{2t} forem perfeitamente correlacionadas ⇒ haverá apenas uma tendência comum.

Ou seja, se $\rho = \pm 1 \Rightarrow \bar\mu_t = cte.$

<u>Nova parametrização</u>

$$\begin{cases} y_{1t} = \mu_{1t} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \pi\mu_{1t} + \bar\mu_t + \varepsilon_{2t} \\ \mu_{1t} = \mu_{1t-1} + \eta_{1t} \\ \bar\mu_t = \bar\mu_{t-1} + \bar\eta_t \end{cases}$$

$$\bar\eta_t = \eta_{2t} - \pi\eta_{1t} \therefore \sigma^2_{\bar\eta_t} = \sigma^2_{\eta_2} + \pi^2\sigma^2_{\eta_1} - 2\pi\sigma_{\eta_1\eta_2}$$

$$= \sigma^2_{\eta_2} + \rho^2\frac{\sigma^2_{\eta_2}}{\sigma^2_{\eta_1}}\cdot\sigma^2_{\eta_1} - 2\rho\frac{\sigma_{\eta_2}}{\cancel{\sigma_{\eta_1}}}\cdot\rho\cancel{\sigma_{\eta_1}}\sigma_{\eta_2}$$

$$= \sigma^2_{\eta_2}(1-\rho^2)$$

Se $\rho = \pm 1 \Rightarrow \sigma^2_{\bar\eta} = 0.$

$$\bar\mu_t = \bar\mu_{t-1} = \bar\mu_t$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} y_{1t} &= \mu_{1t} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} &= \pi\mu_{1t} + \bar\mu + \varepsilon_{2t} \\ \mu^+_t &= \mu^+_{t-1} + \eta_{1t} \end{aligned}$$

<u>obs</u>: Se $\pi = 1 \Rightarrow$ Diferença de tendências cte $= \bar\mu$

Modelo de balance growth.

Se $\bar\mu = 0 \Rightarrow$ tendências idênticas.

(28) Defina co-integração:

Processo p-variado co-integrado de ordens d e b

se $\Rightarrow$ (a) $y_{jt} \sim I(d)$: todas as séries são integradas na mesma ordem d

(b) $\exists \alpha \neq 0$ tal que

$\underset{\sim}{\alpha}' y_t \sim I(d-b)$: combinação linear apresenta ordem de integração $< d$

Ex: Se todas as séries são $I(1) \Rightarrow \exists \alpha$ tal que $\underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{y} \sim I(0)$

(29) Mostre que no modelo reparametrizado com $\rho = 1$ as séries são co-integradas.

$$\begin{cases} y_{1t} = \mu_t^+ + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \pi \mu_t^+ + \bar{\mu} + \varepsilon_{2t} \\ \mu_t^+ = \mu_{t-1}^+ + \eta_t^+ \end{cases}$$

- $y_{1t} = \mu_t^+ + \varepsilon_{1t}$ $\rightarrow$ não estacionária

$\therefore \Delta y_{1t} = \Delta \mu_t^+ + \Delta \varepsilon_{1t}$

$= \eta_t^+ + \Delta \varepsilon_{1t}$

- $y_{2t} = \pi \mu_t^+ + \bar{\mu} + \varepsilon_{2t}$

$\therefore \Delta y_{2t} = \pi \eta_t^+ + \Delta \varepsilon_{2t}$

- $\underset{\sim}{\alpha}' y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$

$= \alpha_1 \mu_t^+ + \alpha_1 \varepsilon_{1t} + \alpha_2 \pi \mu_t^+ + \alpha_2 \varepsilon_{2t} + \bar{\mu}$

Se escolhermos $\alpha_1 = -\pi$ e $\alpha_2 = 1$

$\Rightarrow \underset{\sim}{\alpha}' y = -\pi \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} + \bar{\mu} \sim$ estacionária.

Logo: $\rho = 1$ é cond. suficiente p/ séries co-integradas.

obs:

No modelo II $\rho = 1$

$$\begin{cases} y_{1t} = \mu_t^+ + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \pi \mu_t^+ + \bar{\mu}_t + \varepsilon_{2t} \\ \mu_t^+ = \mu_{t-1}^+ + \eta_t^+ \\ \bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1} + \bar{\eta}_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta y_{1t} = \eta_t^+ + \Delta\varepsilon_{1t} \\ \Delta y_{2t} = \pi \eta_t^+ + \bar{\eta}_t + \Delta\varepsilon_{2t} \end{cases}$$

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 \mu_t^+ + \alpha_1 \varepsilon_{1t} + \alpha_2 \pi \mu_t^+ + \alpha_2 \bar{\mu}_t + \alpha_2 \varepsilon_{2t}$$

Se $\alpha_1 = -\pi$ e $\alpha_2 = 1$, ainda fica $\bar{\mu}_t$ que é n estac.

Nas garantimos $\underset{\sim}{\alpha}' y_t \sim I(0)$

— " —

De forma equivalente ao modelo II c/ $\rho = 1$, podemos escrever

$$y_{1t} = \mu_t^+ + \varepsilon_{1t}$$

$$y_{2t} = \pi y_{1t} + \bar{\mu} + \bar{\varepsilon}_t \longrightarrow \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}$$

(30) Modelo de nível local multivariado.

Escrever modelo irrestrito, fazer nova parametrização e rotação

(I) Modelo s/ restrições

$$\begin{cases} \underset{\sim}{y}_t = \underset{\sim}{\mu}_t + \underset{\sim}{\varepsilon}_t \\ \underset{\sim}{\mu}_t = \underset{\sim}{\mu}_{t-1} + \underset{\sim}{\eta}_t \end{cases}$$

$\underset{\sim}{\varepsilon}_t \sim N(0, \Sigma_\varepsilon)$

$\underset{\sim}{\eta}_t \sim N(0, \Sigma_\eta)$

obs

$\rightarrow$ para saber se há componentes comuns, olha o posto de Σ_η

(No caso de $p=2$, se $\rho = \pm 1$)

pois $\sigma_{\bar{\eta}}^2 = \sigma_{\varepsilon_2}^2 (1-\rho^2)$

se $\rho = +1 (-1)$ $\sigma_{\bar{\eta}}^2 \rightarrow$

(II) Modelo reparametrizado

obs: No caso $p=2$, escrevemos η_2 em função de η_1.

Aqui, fazemos uma partição de $k \times p-k$ séries.

$$\overset{k\times 1}{\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\underset{(p-k)\times 1}{\overset{(p-k)\times 1 \quad k\times 1}{\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t-1} \\ \mu_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix}$$

Faremos transformação não singular de $\underset{\sim}{\alpha}_t = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix}$

Seja: $\quad \underset{\sim}{\bar{\mu}}_t = \underset{\sim}{\mu}_{2t} - \Pi \underset{\sim}{\mu}_{1t}$

$$(\underset{\sim}{\bar{\mu}}_t + \underset{\sim}{\bar{\eta}}_t) = (\underset{\sim}{\mu}_{2t-1} + \eta_{2t}) - \Pi(\underset{\sim}{\mu}_{1t-1} + \underset{\sim}{\eta}_{1,t-1})$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{\bar{\eta}}_t = \eta_{2t} - \Pi \underset{\sim}{\eta}_{1t}$$

Podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \underset{\sim}{\bar{\mu}}_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -\Pi & I_r \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix} \qquad \text{onde } r = p-k$$

$$\underset{\sim}{\alpha}_t^* = L \underset{\sim}{\alpha}_t$$

Podemos escrever:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{y}_{1t} = \underset{\sim}{\mu}_{1t} + \underset{\sim}{\varepsilon}_{1t} \\ \underset{\sim}{y}_{2t} = \Pi \underset{\sim}{\mu}_{1t} + \underset{\sim}{\bar{\mu}}_t + \underset{\sim}{\varepsilon}_{2t} \\ \underset{\sim}{\mu}_{1t} = \underset{\sim}{\mu}_{1t-1} + \underset{\sim}{\eta}_t \\ \underset{\sim}{\bar{\mu}}_t = \underset{\sim}{\bar{\mu}}_{t-1} + \underset{\sim}{\bar{\eta}}_t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{y}_{1t} \\ \underset{\sim}{y}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ \Pi & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mu}_{1t} \\ \underset{\sim}{\bar{\mu}}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_{1t} \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mu}_{1t} \\ \underset{\sim}{\bar{\mu}}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mu}_{1t-1} \\ \underset{\sim}{\bar{\mu}}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \bar{\eta}_t \end{pmatrix}$$

Queremos: $\underset{\sim}{\mu}_{1t}$ e $\bar{\mu}_t$ descorrelatados

$$\underset{\sim}{\Sigma_\eta} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\eta_1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{\bar{\eta}} \end{pmatrix}$$

Do modelo original

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Definimos: $\underset{\sim}{\bar{\eta}}_t = \eta_{2t} - \Pi \eta_{1t}$

$$\begin{aligned} cov(\underset{\sim}{\bar{\eta}}_t, \eta_{1t}) &= cov((\underset{\sim}{\eta}_{2t} - \underset{\sim}{\Pi}\eta_{1t})\eta_{1t}) \\ &= cov(\eta_{2t}\eta_{1t}) - \Pi\, var(\underset{\sim}{\eta}_{1t}) \\ &= \Sigma_{21} - \Pi\Sigma_{11} = 0 \therefore \Pi\Sigma_{11} = \Sigma_{21} \end{aligned}$$

$$\Pi = \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}$$

$$\eta^* = L\eta$$

$$\begin{aligned} \therefore cov(\eta^*) &= L\, cov(\eta) L' \\ &= \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -\Pi & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & -\Pi' \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \underbrace{-\Pi\Sigma_{11} + \Sigma_{21}}_{0} & -\Pi\Sigma_{12} + \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & -\Pi' \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ 0 & -\Pi\Sigma_{12} + \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & -\Pi' \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \overbrace{-\Pi'\Sigma_{11} + \Sigma_{12}}^{0} \\ 0 & -\Pi\Sigma_{12} + \Sigma_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mas $\quad -\Pi\Sigma_{12}+\Sigma_{22} = -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}+\Sigma_{22} = \Sigma_{\bar{\eta}}$

Reparametrização:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{y}_{1t} = \underset{\sim}{\mu}_t^+ + \underset{\sim}{\varepsilon}_{1t} \\ \underset{\sim}{y}_{2t} = \Pi\underset{\sim}{\mu}_t^+ + \underset{\sim}{\bar{\mu}}_t + \underset{\sim}{\varepsilon}_{2t} \\ \underset{\sim}{\mu}_t^+ = \underset{\sim}{\mu}_{t-1}^+ + \eta_t^+ \\ \underset{\sim}{\bar{\mu}}_t = \underset{\sim}{\bar{\mu}}_t + \bar{\eta}_t \end{cases}$$

onde $\eta_t^+ \sim N(0, \Sigma_{\eta^+})$ $\quad \Sigma_{\eta^+} = \Sigma_{11}$

$\bar{\eta}_t \sim N(0, \Sigma_{\bar{\eta}})$ $\quad \Sigma_{\bar{\eta}} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$

$$\operatorname{cov}\begin{pmatrix}\eta^+ \\ \bar{\eta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Sigma_{\eta^+} & 0 \\ 0 & \Sigma_{\bar{\eta}}\end{pmatrix}$$

Se posto $\Sigma_\eta = k < p \Rightarrow \begin{cases} \mu_t^+ \text{ contém } k \text{ comp. comuns} \\ \Sigma_{\bar{\eta}} = 0 \end{cases}$

Atenção!

Se posto $\Sigma_\eta = k < p \Rightarrow \Sigma_{\bar{\eta}} = 0$.

Posto da matriz = nº autovalores ñ nulos.

$$\Sigma_\eta = \begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma_\eta = P\Lambda P'$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix}\Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\end{pmatrix}$$

Se posto $\Sigma_\eta = 0 \Rightarrow \underbrace{\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}}_{\Sigma_{\bar{\eta}}} = 0$.

$\Rightarrow$ Se $\Sigma_{\bar{\eta}} = 0 \Rightarrow \bar{\mu}_t = \bar{\mu}_{t-1}$

$\Rightarrow$ apenas μ_t^+ evolui no tempo: k comp. comuns.

Na prática, p/ saber se ME possui componentes comuns

$\Rightarrow$ olhar Σ_η e vê se posto é cheio

(31) Modelos Rotacionados

Do modelo reparametrizado, temos:

$$\underset{\sim}{y_t} = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k \\ \pi \end{pmatrix} \mu_t^+ + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\mu_t^+ = \mu_{t-1}^+ + \eta_t^+ \quad \text{onde } \eta_t^+ \sim NID(0, \Sigma_\eta^+)$$

$$\downarrow$$

$$\mu_t^* = \Sigma_{\eta^+}^{-1/2} \cdot \mu_t^+$$

$$\Rightarrow \quad \mu_t^* = \mu_{t-1}^* + \eta_t^* \quad \text{onde } \eta_t^* \sim NID(0, I)$$

Para eq. de observações temos

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{y_{1t}} \\ \underset{\sim}{y_{2t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k \\ \pi \end{pmatrix} \Sigma_{\eta^+}^{-1/2} \mu_t^* + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \Sigma_{\eta^+}^{-1/2} \\ \pi \Sigma_{\eta^+}^{-1/2} \end{pmatrix}}_{4} \mu_t^* + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}}_{\mu_0} + \varepsilon_t \quad \text{onde } \mu_t^* \sim N(0, I)$$

Para $p = 2$

$$\mu_t^+ = \mu_{t-1}^+ + \eta_t^+$$

$$\mu_t^* = \frac{\mu_t^+}{\sigma_{\eta^+}}$$

$$\Rightarrow \mu_t^* = \mu_{t-1}^* + \eta_t^*$$

onde $\eta_t^* \sim N(0, 1)$

Para y_t, temos

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi\sigma \end{pmatrix} \mu_t^* + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$