Modelos Estruturais - 2011.1

(02/03/11)

FORMA | Modelo em Espaço de Estado (terminologia)

↳ problema real descrito em equações matemática

arcabouço

podem ser colocado em Modelos E-E: ARMA, ARIMA, VARMA, REGRESSÃO (s/m... etc.

Estado → idéia veio da Física

conjunto mínimo de info p/ descrever sistema de forma completa.

obs: Na mecânica → dois entes p/ descrever o sistema: posição (x, y, z) e velocidade (V_x, V_y, V_z)

Na Termodin. → temperatura, pressão, velocidade (T, P, V)

Em particular, origem está no processamento de sinais

$$y_t = \theta_t + \varepsilon_t$$

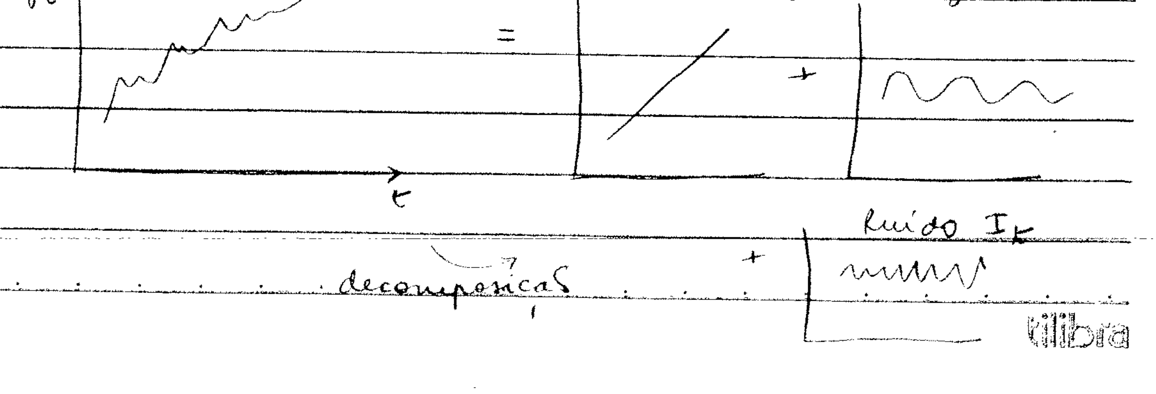
recebe "mensagem" erro (ruído)

não observado

Como, observando y_t, podemos filtrar a msg θ_t?

O que interessa, a "mensagem", é não observada.

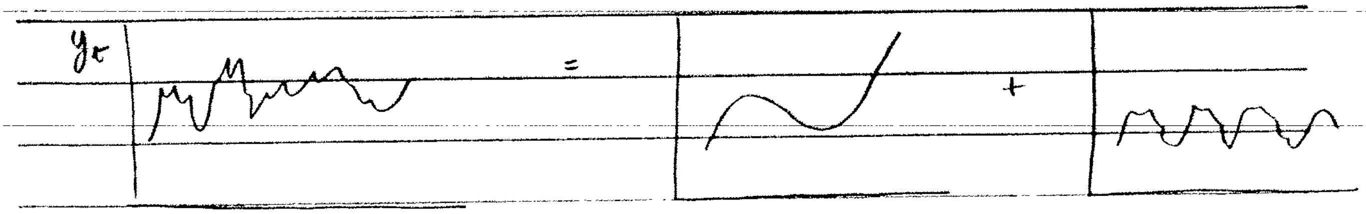
Ex: Observando uma série de tempo



tilibra

(/ /)

ou



(comportamento um pouco + errático

T_t + S_t

componentes são estocásticos.

$$y_t = T_t + S_t + I_t$$

$$T_t = a + bt$$

$$S_t = \sum_{j=1}^{11} \gamma_j \cdot D_{jt} \quad , \quad D_{jt} = \begin{cases} 1 & j = t \\ 0 & j \neq t \end{cases}$$ (dummies ou senos e cossenos)

$I_t = \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ Ruído branco

$y_t = (a + bt) + \left(\sum_{j=1}^{11} \gamma_j D_{jt}\right) + \varepsilon_t$: é um modelo de regressão particular de $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots \beta_p x_{pt}$

↳ como estimamos este modelo?

Precisamos: conjunto de observações $\{y_t\}_{t=1}^{T}$

\+ Método (de estimação)

⇓ MQO (primeiro método que pensamos)

vetor de parâmetros desconhecidos: $\Psi = (a, b, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{11}, \sigma^2)$

(a serem estimados)

função objetivo

$$S(\psi^*) = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum \left(y_t - \left[(a+bt) + \sum_{j=1}^{11} \delta_j D_{jt}\right]\right)^2$$

onde $\psi^* = \{\psi\} - \sigma^2$

↳ pois MQO não consegue estimar σ^2, já que não aparece na função objetivo

ψ^* tal que $\min S(\psi^*)$

$$\frac{\partial S}{\partial \psi^*} = \underline{0} \quad \therefore \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \psi_1} \; \frac{\partial S}{\partial \psi_2} \; \cdots \; \frac{\partial S}{\partial \psi_7}\right)^T = 0^T$$

$$\hat{\psi}^* = (X'X)^{-1} X'Y \qquad y = (y_1, \ldots, y_T)^T$$

Mas esta questão é questionável.

Componentes de séries reais não são normalmente determinísticas (por ex, séries macroeconômicas).

Ex: Série de desemprego

Componente sazonal determinística não é tão ruim

mas componente tendência " é ruim

NO Eviews p/ estimar: Quick

Equation Estimation

desemp-sp c @trend @seas(1) @seas(2) ... @seas(11)

cte tend. dummies sazonais em relação ao mês 12.

a b δ

Obs: deixamos todas as dummies de sazonalidade mesmo que elas não sejam significantes estatisticamente.

Obs: Sazonalidade

$$E[y^{Dez}] = a + bt_{dez}$$ ← todas as dummies de nº 1 a 11 são zero

e $E[\varepsilon_t] = 0$

$$E[y^{Jan}] = a + bt_{jan} + \gamma_1$$

$$\Delta^{Jan - Dez} = E[y^{Jan}] - E[y^{Dez}]$$

$$= b\,\underbrace{(t^{jan} - t^{Dez})}_{1} + \gamma_1 = b + \gamma_j$$

Para um mês qualquer:

$$\Delta^{mês_j,\, Dez} = bj + \gamma_j$$

$H_0: \gamma_j = 0$ → meses que não são estatisticamente significantes

$H_1: \gamma_j \neq 0$ (seria como trabalhar com uma cesta de meses de referência: dez + todos ñ significativamente ≠s)

→ Para se ter a idéia de existência de ciclo, poderíamos olhar o erro da regressão em relação à tendência e à sazonalidade e verificar se há alguma repetição em períodos > 1 ano.

=)

⇒ Modelo não é satisfatório.

Autocorrelação dos resíduos: há alguma não-estacionariedade no resíduo.
(é bem forte)

Tendência não é determinística como forçamos (é estocástica)

Podemos até forçar a ver ciclos macroeconômicos.

(obs: E-Views não faz ajuste p/ tendência estocástica)

Ainda trabalhando com tendência e sazonalidade.

$$y_t = \underbrace{(a_t + b_t t)}_{T_t} + \underbrace{\sum \delta_{jt} D_{jt}}_{S_t} + \underbrace{\varepsilon_t}_{I_t}$$

p/ cada $t \Rightarrow$ parâmetro é diferente

Propondo modelos onde constante tb são funções do tempo.

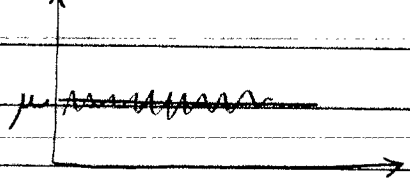
Modelos estruturais: modelos de regressão onde modelos explicativas e coeficientes são funçãs do tempo.

Supondo que estejamos trabalhando c/ séries anuais:
(ñ tem sazonalidade)

$$\begin{cases} y_t = a_t + b_t t + \varepsilon_t \\ a_t = \text{"} \quad \text{"} \\ b_t = \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$$ → mas p/ cada $t = 1$ a T só teríamos 1 observação que ñ permitiria estimação

precisa colocar alguma estrutura p/ a_t e b_t.

- $y_t = \mu + \varepsilon_t$ $\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} y_t$



(desinteressante)

- $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$
  ↳ precisa propor processo de evolução de μ

$\therefore \mu_t = \phi \mu_{t-1} + \eta_t \Rightarrow$ processo estocástico que define evolução de μ

1) Se $|\phi| < 1 \Rightarrow AR(1)$

(/ /)

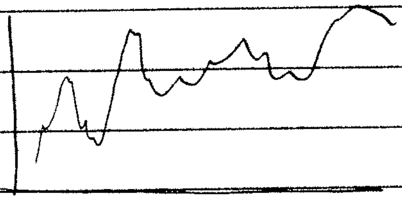
como μ_t estacionário } $y_t \Rightarrow$ estacionário
e ε_t "

2) Se $\phi = 1 \Rightarrow \mu_t \sim$ passeio aleatório
(não estacionário)
Neste caso $\Rightarrow y_t$ é não estacionário

Normalmente, usamos $\phi = 1$

Modelo de nível local (local level model)

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t \end{cases} \qquad \eta_t \sim N(0, \sigma^2_{\eta_t})$$



o 1º modelo que caracteriza tendência estocástica.

A função de previsão deste modelo é um EWMA (método de amortecimento exponencial)

$$\boxed{\hat{y}_{t+1|t} = E\left[y_{t+1} \mid \underset{\sim}{Y_t}\right] = \lambda y_t + (1-\lambda_t)\,\hat{y}_{t|t-1}} \qquad 0 < \lambda < 1$$

É um esquema, um método p/ previsão (com amortecimento exponencial) p/ séries s/ sazonalidade

obs 1: λ será função dos parâmetros do Filtro de Kalman

obs 2: $\lim_{t \to \infty} \lambda_t \to \bar{\lambda}$

obs 3: Se $\sigma^2_{\eta_t} \to 0$: $\mu_t \to \mu_{t-1}$
Modelo tende à tendência determinística como caso particular

— " —

Outro modelo: (tb s/ sazonalidade, apenas tendência)

Tendência linear local
$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t & \rightarrow \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t & \rightarrow \eta_t \sim (0, \eta^2) \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \xi_t & \rightarrow \xi_t \sim N(0, \xi^2) \end{cases}$$

: μ_t já é a tendência

: passeio aleatório

algo que compõe a tendência

obs. Notação

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t$$
$$\beta_{t+1} = \beta_t + \xi_t$$

⇒ No Koopman aparece assim. Fórmulas do FK não mudam

Dois caminhos p/ verificar o modelo:
(testar)

- Analítico
- Empírico (por simulação)

~~A partir deste modelo, podemos gerar vários casos particulares.~~

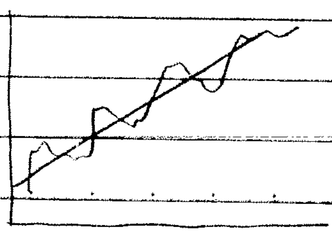
1) $\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0 \Rightarrow \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_0$

$\mu_t = \mu_0 + \beta_0 t$ (iterando)

$\therefore y_t = \mu_0 + \beta_0 t + \varepsilon_t \Rightarrow$ tendência linear

obs: tendência determinística ⇒ chamada global

" estocástica ⇒ " local



(/ /)

modelo com sazonalidade e ciclo

$y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \varepsilon_t$ ⇒ equação da medida

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_t = \dots \\ \gamma_t = \dots \\ \psi_t = \dots \end{array}\right\}$$ equações dos estados

obs: como estimar os parâmetros?

MQO pressupõe parâmetros fixos no tempo.

Neste caso, os parâmetros fixos são chamados de hiperparâmetros

p/ estimar hiperparâmetros ⇒ MQO

p/ estimar parâmetros variáveis ⇒ Filtro de Kalman

Mas p/ usar FK precisamos de hiperparâmetros e p/ estimar hiperparâmetros, precisamos de FK.

— 〃 —

Definição de uma representação em espaço estado linear:

→ mais geral. Na literatura é o normalmente

$$\underset{p\times 1}{y_t} = \underset{p\times m}{Z_t}\,\underset{m\times 1}{\alpha_t} + \underset{p\times 1}{d_t} + \underset{p\times 1}{\varepsilon_t}$$ (espera-se $m \ll p$)

↘ choque

α_t: vetor de estado não observado.

→ mais flexibilidade na representação

$$\underset{m\times 1}{\alpha_{t+1}} = \underset{m\times m}{T_t}\,\underset{m\times 1}{\alpha_t} + \underset{m\times 1}{c_t} + \underset{m\times r}{R_t}\,\underset{r\times 1}{\eta_t}$$ tendo + choques

$\underset{p\times 1}{\varepsilon_t} \sim WN(0, \underset{p\times p}{H_t})$

$\underset{r\times 1}{\eta_t} \sim WN(0, \underset{r\times r}{Q_t})$

Tilibra

$$\underset{p\times 1}{\alpha_1} \sim N(\underset{p\times 1}{a_1}, \underset{p\times p}{P_1})$$

especificar a_1 e P_1: condições iniciais

Podemos considerar:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} H_t & 0 \\ 0 & Q_t \end{pmatrix} \right)$$

descorrelatados.

(da definição do modelo)

Diremos também que:

$$E(\varepsilon_t \alpha_1^T) = 0$$
$$E(\eta_t \alpha_1^T) = 0$$

Dado modelo, precisaremos do algoritmo de estimação (Filtro de Kalman).

Muitos modelos econométricos / ST podem ser colocados na forma EE (não existe uma forma única)

Se $\alpha_t^* = B\alpha_t$ onde $\det(B) \neq 0 \Rightarrow$ função de verossimilhança será a mesma.

Ex. 1: $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ (AR-2 sem drift, podemos ignorar c_t e d_t)

Duas representações:

$\underset{\sim}{\alpha_t}$: vetor de estado

1) $y_t = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} y_t = \alpha_{1t} \\ \phi_2 y_{t-1} = \alpha_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1t} \\ \alpha_{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow$ equação das medidas

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ \phi_2 y_t \end{pmatrix}}_{\alpha_{t+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 & 1 \\ \phi_2 & 0 \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} y_t \\ \phi_2 y_{t-1} \end{pmatrix}}_{\alpha_t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_t} \underbrace{\varepsilon_{t+1}}_{\eta_t} \Rightarrow \text{equação dos estados}$$

tilibra

(/ /)

2) $y_t = (1 \quad 0) \underbrace{\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}}_{\alpha_t^*}$ ⇒ equação das medidas

tanto faz ε_t ou ε_{t+1} pois processo é estacionário

$$\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \varepsilon_{t+1}$$ ⇒ equação dos estados

logo: $\alpha_t^* = \underbrace{\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}}_{\text{estado da 2ª representação}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\phi_2 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} y_t \\ \phi_2 y_{t-1} \end{pmatrix}}_{\text{estado da 1ª representação}}$

onde $|B| = 1/\phi_2 \neq 0$.

- Quando colocamos uma equação em uma representação espaço de estado: entramos com vetores e parâmetros em um pacote computacional e pedimos p/ estimar o estado sequencialmente

⇒ estimará parâmetros fixos através da verossimilhança (neste caso, ϕ_1, ϕ_2 e σ_ε^2)

- Qualquer modelo AR pode ser estimado na forma de espaço de estados.

Ex. 2: $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$ → Modelo AR-p

Raízes do polinômio característico dentro do círculo unitário ⇒ processo estacionário de 2ª ordem

$\phi(l) = 1 - \phi_1 l + \phi_2 l^2 - \ldots - \phi_p l^p$ (raízes fora do círculo)

$\phi(z) = z^p - \phi_1 z^{p-1} + \phi_2 z^{p-2} - \ldots - \phi_p$ (raízes dentro do círculo)

tilibra

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{\alpha}_t}$$

$$\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t$$

$$\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t+1-p} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \cdots & & & \phi_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & 0 & \\ 0 & \cdots & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \varepsilon_{t+1}$$

I

Ex 3) $y_t \sim MA(1)$

$$y_t = \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \quad y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} y_t \\ \theta\varepsilon_t \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{\alpha}_t}$$

$$\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ \theta\varepsilon_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ \theta\varepsilon_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \varepsilon_{t+1}$$

$$\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R_T\eta_t$$

Se conseguimos escrever AR e MA, conseguimos escrever um ARMA (Exercício)

(/ /)

$$y_t = \phi y_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (y_{t+1} = \phi y_t + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)$$

a) $y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ \phi y_{t-1} \\ \theta \varepsilon_t \end{bmatrix}}_{\alpha_t}$

cuidado com índice de ε_t !!
escrever as equações de espaço de estados.

1º elemento tem que representar equação

$$\begin{bmatrix} y_{t+1} \\ \phi y_t \\ \theta \varepsilon_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 1 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ \phi y_{t-1} \\ \theta \varepsilon_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix} \varepsilon_{t+1}$$

Ex. 4) Regressão múltipla

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_p x_{pt} + \varepsilon_t$$

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & x_{1t} & x_{2t} & \dots & x_{pt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{cases} y_t = \underbrace{X_t'}_{z_t} \underbrace{\beta}_{\alpha_t} + \varepsilon_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} \end{cases}$$

β será o vetor de estados

$$T_t = I, \quad R_t = 0$$

Filtro de Kalman estimará β

kilibra

$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} +$

cont.

tilibra

Se fosse tempo contínuo:
ao invés de eq. de diferenças estocásticas,
teríamos sist. de equações diferenciais

em tempo discreto c/ dist. Gaussiana

16/03/11

Modelo Espaço de Estado Linear (MEE linear)

processo estocástico que depende de

$$\begin{cases} \underset{p\times 1}{y_t} = \underset{p\times m}{Z_t}\underset{m\times 1}{\alpha_t} + d_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t \sim N(0, \overset{p\times p}{H_t}) \\ \alpha_{t+1} = \underset{m\times m}{T_t}\alpha_t + c_t + \underset{m\times r}{R_t}\underset{r\times 1}{\eta_t}, & \eta_t \sim N(0, \overset{r\times r}{Q_t}) \end{cases}$$

sistema variável normalmente faremos $p=1$

obs: . d_t pode ser $\beta x_t'$ ou algo conhec. muitas vezes não aparece na formulação, mas é mais geral

vão explicitá-lo

(equação de evolução (de estado)

↓

estado pode ter interpretação direta ou não (nos modelos ARIMA não tem, mas em modelos estruturais terá)

$E(\varepsilon_t \varepsilon_s') = 0$

$E(\eta_t, \eta_s') = 0$

$\forall s, t$

(ruídos brancos)

cond. inicial

$\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$

$E[\varepsilon_t \eta_s') = 0 \;, \; \forall t, s$

$E[\eta_t' \alpha_1] = E[\varepsilon_t' \alpha_1] = 0 \;\; \forall t$

→ jamais pode ser relaxado

→ faz parte da definição do modelo EE.

(a descorrelação entre choques pode ser relaxada

idéia: colocar no formato EE e estimar parâmetros

olhar eqs. como processos estocásticos e estudar propriedades.

Propriedades dos modelos EE lineares a Tempo Discreto

(1) Estacionariedade de 2ª ordem

(2) Observabilidade

Definição. As matrizes $Z_t, d_t, H_t, T_t, c_t, R_t, Q_t$ são chamadas matrizes do sistema

Vamos assumir que algumas matrizes são invariantes no tempo
Isso não invalidará resultados do Filtro de Kalman.

tilibra

(/ /)

Por hipótese, nas deduções subsequentes, o sistema será tido como homogeneo invariante no tempo.
Ou seja, vamos abandonar o subscrito t das matrizes do sistema (pode ser relaxada para c_t e d_t)

ex: $c_t = \beta x_t$ se x_t for série estacionária de 2ª ordem (não afeta propriedade)

Ex: $y_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$\mu_{t+1} = \phi \mu_t + \eta_t \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$

sistema invariante no tempo

(1) Estacionariedade de 2ª ordem ~~processo vetorial~~

Definição: um processo estocástico $z(t)$ é dito estacionário de 2ª ordem se e somente se satisfizer as seguintes condições:

médias do vetor de médias é finita

(i) $E[z_t] = \mu \quad \forall t, \ \mu < \infty$

(ii) $E\left[(z_t - E[z_t])(z_{t+h} - E[z_{t+h}])'\right] = \Gamma(h) \quad \forall t, \ \forall h = 0, 1, 2, \ldots$

só depende de h

matriz de autocovariâncias de lag h
(se $h = 0 \Rightarrow$ matriz de var/covar)

Utilizando as equações do MEE segue que:

spg. faremos $d_t = 0$ mas podemos ter d_t cte ou até $d_t = \beta x_t$ (com variável explicativa exógena) desde que x_t seja série estacionária de 2ª ordem

CPO: $E[y_t] = Z\,E[\alpha_t] + E[\cancel{d_t}]$

$\underbrace{Z\,E[\alpha_t]}_{\text{depende de } E[\alpha_t]}$, $E[d_t] = 0$

CSO: $E[(y_t - E[y_t])(y_{t+h} - E[y_{t+h}])'] = \Gamma_y(h)$?

Vamos estudar se é verdade.

$$\begin{cases} y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t \\ E[y_t] = Z\,E[\alpha_t] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_t - E[y_t] = Z\,(\alpha_t - E[\alpha_t]) + \varepsilon_t$$

$$y_{t+h} - E[y_{t+h}] = Z\,(\alpha_{t+h} - E[\alpha_{t+h}]) + \varepsilon_{t+h}$$

E assim, segue que:

$$(y_t - E[y_t])(y_{t+h} - E[y_{t+h}])' =$$

$$= [Z(\alpha_t - E[\alpha_t]) + \varepsilon_t]\,[(\alpha_{t+h} - E[\alpha_{t+h}])'Z' + \varepsilon'_{t+h}] =$$

$$= \underbrace{Z\,(\alpha_t + E[\alpha_t])(\alpha_{t+h} + E[\alpha_{t+h}])'Z'}_{\text{valor esperado cruzado será } \Gamma_\alpha} + \underbrace{Z\,(\alpha_t - E[\alpha_t])\,\varepsilon'_{t+h}}_{\text{valor esperado cruzado} = 0} +$$

$$+ \varepsilon_t\,(\alpha_{t+h} - E[\alpha_{t+h}])'Z' + \varepsilon_t\,\varepsilon'_{t+h}$$

Passando valor esperado:

$$\Gamma_y(h) = Z\,\Gamma_\alpha(h)\,Z' + Z\,(E[\alpha_t \varepsilon'_{t+h}] - E[\alpha_t]\,E[\varepsilon'_{t+h}]) + 0 +$$

$E[\alpha_t \varepsilon'_{t+h}] = 0$, $E[\varepsilon'_{t+h}] = 0$

$$\underbrace{E[\varepsilon_t\,\varepsilon'_{t+h}]}_{\substack{= 0 \text{ se } h = 0 \\ e = H \text{ se } h \neq 0}}$$

(/ /)

para cálculo E valores esperados cruzados

<u>Observacao:</u> Da eq. de obs $\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + c_t + R_t \eta_t$

recursivamente:

$$\alpha_{t+1} = T^t \alpha_1 + \sum_{j=0}^{t-1} T^j R \eta_{t-j}$$

$\Rightarrow E[\alpha_t \varepsilon'_{t+h}] = 0$ pois

$E[\varepsilon'_{t+h} \eta_t] = 0$

e $E[\varepsilon'_{t+h} \alpha_1] = 0$.

Logo: $\Gamma_y(h) = Z\, T_\alpha(\underset{h,t}{h})\, Z'$ se $h \neq 0$

$= Z\, T_\alpha(\underset{0,t}{0})\, Z' + H$ se $h = 0$

explicitamente $\Gamma_\alpha(h,t)$

para y estacionário depende de α " ($\Gamma_\alpha(h$

mas de... de do temp...

—"—

Ex1:

processo estacionário

(I) $y_t = \mu_t + \varepsilon_t\,, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$\mu_{t+1} = \phi \mu_t + \eta_t\,, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \qquad |\phi| < 1$

Processo AR(1)

$\therefore y_t$: é um AR(1) + um choque

quem é AR(1) é a componente μ_t

$E[\mu_t] = 0$

$\text{var}[\mu_t] = \gamma(0) = \dfrac{\sigma_\eta^2}{(1-\phi^2)}$

infos para AR(1)

$\gamma(h) = \phi^h \dfrac{\sigma_\eta^2}{(1-\phi^2)}$

$\rho(h) = \dfrac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^h$?

$\Rightarrow E[y_t] = E[\mu_t] = 0$

$$var[y_t] = \gamma_y(0) = \frac{\sigma_\eta^2}{(1-\phi^2)} + \sigma_\varepsilon^2$$

$\gamma_y(h) = \gamma_\mu(h)$

Na realidade, basta aplicarmos a fórmula anterior obtida de forma genérica p/ caso matricial

processo ñ estacionário

(II) $\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t & \Rightarrow \text{chamado de tendência local} \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t & \to \text{tendência sem drift} \end{cases}$

(passeio aleatório)

$E[\mu_t] = ?$

Obs: Iterando μ_{t+1}

$\mu_2 = \mu_1 + \eta_1$

$\mu_3 = \mu_2 + \eta_2 = \mu_1 + \eta_1 + \eta_2$

$\vdots$

$\Rightarrow \mu_{t+1} = \mu_1 + \sum_{s=1}^{t} \eta_s$

Logo: $E[\mu_{t+1}] = a_1$ (da cond. inicial)

$var[\mu_{t+1}] = P_1 + t\sigma_\eta^2$

$var(P_1)$ soma de variâncias de choques independentes

$\Rightarrow var(\mu)$ depende de t

$\therefore$ processo y será não estacionário

(/ /)

dúvida
Nascimento
$x_1(t-1)$

$$\sigma_y(0,t) = (P_1 + t\sigma_\eta^2) + \sigma_\varepsilon^2$$

Logo:

Estacionariedade dependerá sempre de como o processo α se comporta

Da demonstração, obtivemos:

queremos olhar este processo.

$$E[y_t] = Z\,E[\alpha_t]$$

$$\Gamma_y(h,t) = \begin{cases} Z\,\Gamma_\alpha(h,t)\,Z', & h \neq 0 \\ Z\,\Gamma_\alpha(0,t)\,Z' + H, & h = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{t+1} = T^t \alpha_1 + \sum_{j=0}^{t-1} T^j R\,\eta_{t-j}$$

$$E[\alpha_{t+1}] = T^t E[\alpha_1] = T^t a_1 = f(t)?$$ queremos avaliar se é ou não função do tempo.

$\Rightarrow$ Supor que os autovalores de T são todos distintos

Lembrando: $T F_i = \lambda_i F_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$

autovalor (λ_i), autovetor (F_i)

$$T F_i - \lambda_i F_i = 0 \;\therefore\; (T - \lambda_i I)\, F_i = 0$$

Como $F_i \neq 0$

$\Rightarrow \det(T - \lambda_i I) = 0$: equação característica

dará m autovalores $\neq$s

(queremos achar a condição p/ a qual α_t será estacionário de 2ª ordem)

Vale a decomposição espectral:

$$\underset{m\times m}{T} = \underset{\substack{m\times m\\ \text{(autovetores)}}}{F}\,\Lambda\, F' \qquad F' = F^{-1} \text{ (transp = inversa pois matriz ortogonal)}$$

$$\Lambda = \text{diagonal}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \underset{\sim}{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \underset{\sim}{0} & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

obs: se algum autovalor igual, há outras decomposições

Prova-se que:

$$T^t = F\Lambda^t F^{-1}$$

Assim segue que:

$$E[\alpha_{t+1}] = T^t a_1 = F\Lambda^t F^{-1} a_1 =$$

$$\begin{pmatrix} E[\alpha_{1,t+1}] \\ E[\alpha_{2,t+1}] \\ \vdots \\ E[\alpha_{m,t+1}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ & \vdots & & \\ f_{m1} & & \dots & f_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & & & \\ & \lambda_2^t & & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^t \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} & \dots & f^{1m} \\ f^{21} & & & \\ \vdots & & & \\ f^{m1} & & \dots & f^{mm} \end{pmatrix}}_{\text{transposto}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{E[\alpha_{1,t+1}]}_{\text{vale p/ todos os } \alpha_j} = \delta_1\lambda_1^t + \delta_2\lambda_2^t + \dots + \delta_m\lambda_m^t, \quad \delta_i = f_{1i} f^{1i} a_{1i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow E[\alpha_{j,t+1}]$ depende explicitamente de t

mas...

Se $|\lambda_i| < 1$, $\forall i = 1, \dots, m$, para $t \to \infty$: $E[\alpha_{1,t}] \to 0$

cond. necessária e suficiente p/ estacionariedade de 1ª ordem (será tb p/ 2ª ordem).

(/ /)

obs: Em simulações ⇒ "warming up" : se afasta da origem
descartar primeiras simulações
p/ garantir estacionariedade)
" análogo a $t \to \infty$

Queremos agora

$\Gamma_\alpha(h,t) = ?$ para avaliar a estacionariedade de 2ª ordem

$$\Gamma_\alpha(h,t) = E\left[(\alpha_{t+1} - E[(\alpha_{t+1})])(\alpha_{t+1+h} - E[\alpha_{t+1+h}])'\right]$$

. $\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t = T^t\alpha_1 + \sum_{j=0}^{t-1} T^j R \eta_{t-j}$

. $E(\alpha_{t+1}) = T E[\alpha_t] = T^t a_1$

$$\alpha_{t+1} - E[\alpha_{t+1}] = T^t(\alpha_1 - a_1) + \sum_{j=0}^{t-1} T^j R \eta_{t-j}$$

$$\alpha_{t+h+1} - E[\alpha_{t+h+1}] = T^{t+h}(\alpha_1 - a_1) + \sum_{j=0}^{t+h-1} T^j R \eta_{t+h-j}$$

$$\Rightarrow \Gamma_\alpha(h,t) = E\left[(\alpha_{t+1} - E[\alpha_{t+1}])(\alpha_{t+h+1} - E[\alpha_{t+h+1}])'\right]$$

$$= E\left[\left[T^t(\alpha_1 - a_1) + \sum_{j=0}^{t-1} T^j R \eta_{t-j}\right]\left[(\alpha_1 - a_1)' T^{t+h'} + \sum \eta'_{t+h-j} R' T^{j'}\right]\right]$$

obs: E[·] dos termos cruzados = 0

$$= T^t \underbrace{E\left[(\alpha_1 - a_1)(\alpha_1 - a_1)'\right]}_{P_1} T^{t+h'} + E\left[\sum_{j=0}^{t-1} T^j R \eta_{t-j} \sum \eta'_{t+h-j} R' T^{j'}\right]$$

tilibra

Para $h=0$: $\Gamma_\alpha(0,t) = T^t P_1 T^{t'} + \sum_{j=0}^{t-1} T^j (RQR') T'^j$

podemos tentar considerar a decomp. espect e fazer $T = F\Lambda F$ p/ demonstrar

Podemos mostrar que fazendo

$|\lambda_i| < 1$

e $t \to \infty$

$\Rightarrow \Gamma_\alpha(0,t) \longrightarrow \Sigma(0)$ matriz que independe de t

obs: No Harvey Koopman, não há preocupação com isso pois tratam de processos não estacionários.

Obs 2: Essa demo pode ser mais intuitiva se pensarmos em um processo autoregressivo simples

$$\alpha_t = \underbrace{\phi}_{T} \alpha_{t-1} + \eta_t$$

$$\alpha_t = \alpha_1 \phi^t + \sum \phi^j \eta_{t-j}$$

$$\Rightarrow E[\alpha_t] = \alpha_1 \phi^t \to 0$$

$$\alpha_{t+h} = \alpha_1 \phi^{t+h} + \sum \phi^j \eta_{t+h-j}$$

$$\gamma(h) = E[(\alpha_t - E(\alpha_t))(\alpha_{t+h} - E(\alpha_{t+h}))] = \dots \to \text{converge p/ cte se } |\phi|<1.$$

—"—

Supondo que as condições de estacionariedade de 2ª ordem são satisfeitas ($|\lambda_i(t)| < 1$ e $t \to \infty$), pode-se obter uma expressão geral para a matriz de covariância de α_t:

$\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t$

Já vimos que: $E[\alpha_{t+1}] = 0$.

$var[\alpha_{t+1}] = ?$

Algumas operações em Álgebra matricial

i. Seja $A \sim m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow vec(A) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

propriedade de empilhamento

ii. Seja $A \sim m \times n$

$B \sim p \times q$

cada elemento da matriz A multiplica a matriz B

$$A \otimes B \triangleq \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}B & & a_{mn}B \end{pmatrix}_{mp \times nq}$$

Kronecker

tilibra

iii) $vec(ABC) = (C' \otimes A)\, vec(B)$

Agora, usando que $\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R_t\eta_t$ e condições de estacionariedade de 2ª ordem:

$var(\alpha_{t+1}) = var(\alpha_t) = \Sigma_\alpha(0)$

$$var(\alpha_{t+1}) = var(T\alpha_t) + var(R\,\eta_t) =$$

$$var(\alpha_{t+1}) = T\,var(\alpha_t)\,T' + R\,var(\eta_t)\,R'$$

$$var(\alpha_{t+1}) = T\,var(\alpha_{t+1})\,T' + RQR'$$

cte. por hipótese do sistema

$= var(\alpha_t) = \Sigma_\alpha(0)$

$$vec\,\Sigma_\alpha(0) = vec(\underset{A}{T}\,\underset{B}{\Sigma_\alpha(0)}\,\underset{C}{T'}) + vec(RQR')$$

$$= (T\otimes T)\,vec(\Sigma_\alpha(0)) + (R\otimes R)\,vec(Q)$$

$$vec\,\Sigma_\alpha(0) - (T\otimes T)\,vec(\Sigma_\alpha(0)) = (R\otimes R)\,vec(Q)$$

$$(I - T\otimes T)\,vec(\Sigma_\alpha(0)) = (R\otimes R)\,vec(Q)$$

$$\therefore \boxed{vec(\Sigma_\alpha(0)) = (I - T\otimes T)^{-1}\,vec(Q)}$$

Exercício:

Considere os seguintes modelos em EE

$y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t$

$\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R_t\eta_t$

(1) $$y_t = \underbrace{[1 \quad 0]}_{Z}\begin{bmatrix}\mu_t\\ \beta_t\end{bmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{bmatrix}\mu_{t+1}\\ \beta_{t+1}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{T}\begin{bmatrix}\mu_t\\ \beta_t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_t\\ \xi_t\end{bmatrix}$$

obs: $det(T) = 1$

(/ /)

$$\underset{\sim}{\eta}_t = \begin{pmatrix} \eta_t \\ \xi_t \end{pmatrix} \rightarrow E[\underset{\sim}{\eta}_t \underset{\sim}{\eta}_t'] = \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\xi^2 \end{pmatrix} = \varphi$$

Equações: $\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t \\ \beta_{t+1} = \beta_t + \xi_t \end{cases}$

modelo linear local

tendência linear estocástica.

obs: Se $\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0 \Rightarrow y_t = a + bt + \varepsilon_t$: tendência determinística é caso particular

Calculando autovalores de T:

$|T - \lambda I| = 0$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$\Rightarrow$ Processo não estacionário

obs: se sistema tivesse 3ª componente $\Rightarrow$ eq. característica seria polinomial de 3º grau.

Vetor α não é estacionário de 2ª ordem

Não adianta procurarmos $\Gamma_y(0)$ e $\Gamma_\alpha(0)$, pois dependerão de t.

tilibra

(ii) $y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ \beta_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 1 \\ 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_t \\ \xi_t \end{bmatrix}$$

a) Estabelecer sob que condições $|\lambda_i(t)| < 1 \quad i = 1, 2, \ldots$ (em ϕ_1 e ϕ_2)

(processo será estac. de 2ª ordem)

b) Avaliar $\lim_{t \to \infty} \Gamma_\alpha(0,t)$, $\Gamma_\alpha(h,t)$ e consequentemente

$\lim_{t \to \infty} \Gamma_y(0,t)$, $\Gamma_y(h,t)$ mostrando que condições

impostas nos ϕ's serão suficientes para estabelecer

estacionariedade de 2ª ordem para α_t e y_t.

23/03/11

só fazem sentido p/ sistemas invariante no tempo.

Propriedades de MEE (cont.)

No caso da estacionariedade, vimos que depende dos autovalores de T.

Observabilidade: motivada pela seguinte pergunta:

Dado que observamos y nos últimos num, como posso ver pela trajetória de α no m/mo intervalo.

"Em que condições é possível estabelecer, em um intervalo de tempo finito, a trajetória temporal do estado α_t de um sistema dinâmico, dada a história do vetor de medidas y_t no mesmo intervalo de tempo?"

Seja um MEE linear, discreto, invariante no tempo.

sistema p-variável.

$$\begin{cases} \underset{p\times 1}{y_t} = \underset{p\times m}{Z}\,\underset{m\times 1}{\alpha_t} \\ \underset{m\times 1}{\alpha_{t+1}} = \underset{m\times m}{T}\alpha_t + R\eta_t \end{cases} \quad (I)$$

Não será necessário considerar o erro na eq. de medida.

Este sistema será dito observável se $\underset{m\times 1}{\alpha_0}$ pode ser determinado a partir de um conjunto de medidas de y.

A condição necessária e suficiente será dita a seguir:

Vale p/ qualquer tempo, mas fazemos p/ α_0.

Fazendo $\eta_t \equiv 0\ \forall t$ em I, segue que:

$$\alpha_{t+1} = T\alpha_t \Rightarrow \alpha_{t+1} = T^t\alpha_1$$

$$\alpha_t = T^t\alpha_0 \rightarrow \text{p/ linkar com eq. das obs.}$$

Mas $y_t = Z\alpha_t = ZT^t\alpha_0$ $(\alpha \sim m\times 1)$ – temos que observar m medidas do vetor y.

$$\begin{aligned} p\times 1 \rightarrow y_0 &= Z\underset{m\times 1}{\alpha_0} \\ p\times 1 \rightarrow y_1 &= ZT\alpha_0 \\ y_2 &= ZT^2\alpha_0 \\ &\vdots \\ y_{m-1} &= ZT^{m-1}\alpha_0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ ZT \\ ZT^2 \\ \vdots \\ ZT^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{0,1} \\ \alpha_{0,2} \\ \alpha_{0,3} \\ \vdots \\ \alpha_{0,m} \end{pmatrix}$$

$\underset{\sim}{\alpha_0} \rightarrow m\times 1$

essa solução tem que ser única p/ todas a medida

tilibra

(/ /)

$$\underset{pm\times 1}{y} = \underset{pm\times m}{\underset{\sim}{M}}\ \underset{m\times 1}{\underset{\sim}{\alpha_0}}$$

- Assim, segue que para determinarmos os elementos de α_0 de forma única que a condição necessária e suficiente será:

$$\text{posto}(M) = m$$ (é exatamente o tamanho de $\underset{\sim}{\alpha_0}$ e faz com que haja solução única p/ $\underset{\sim}{\alpha_0}$ no sistema acima)

posto M = # máximo de linhas/colunas linearmente independentes

- Como posto M = posto M', então

$$\text{posto } M' = \text{posto}\,(Z', T'Z', \ldots, (T^{m-1})'Z') = m$$

- Se $p=1$, i.e., y_t é escalar $M \sim m\times m$, e, assim, a condição de observabilidade pode ser investigada checando se $\det(M) \neq 0$. → pois p/ $p=1 \Rightarrow \underset{\sim}{M}$ será uma matriz quadrada

Exs: (Geralmente, nesta parte do curso trataremos modelos univariados. $p=1 \Rightarrow$ uma única série temporal)

1)
$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t$$
$$\beta_{t+1} = \beta_t + \xi_t$$

Modelo de tendência linear estocástica

Se $\eta_t = \xi_t = 0$ $\Rightarrow y_t = a + bt + \varepsilon_t$ (tendência determinística)

Para verificar, neste caso checar se det ≠ 0 ou se há uma linha que seja CL das outras

$$\Rightarrow y_t = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Z} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix}}_{\alpha_t} + \varepsilon_t$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ \beta_{t+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_t \\ \xi_t \end{bmatrix}$$

⇒ Questão: Será que conseguimos recuperar α_t's dados y_t's?

$$Z = [1 \quad 0] \Rightarrow Z' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot\ T'Z' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem posto $= 2 = m \Rightarrow$ é observável.

2) $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$

$\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t$

$\beta_{t+1} = \beta_t + \xi_t$

$$\Rightarrow y_t = \overbrace{[1 \quad 0]}^{Z} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ \beta_{t+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_t \\ \xi_t \end{bmatrix}$$

$M' = (Z', T'Z')$ $\qquad T'Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M' = \begin{array}{cc} l_1 & l_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{posto}(M') = \underset{\neq 2}{1}, \text{ pois } l_1 = l_2 : \text{ sistema não observável}$$

3) chequem para

$$MP_1 \begin{cases} y_t = \mu_t + \beta_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \phi_1 \mu_t + \eta_t \\ \beta_{t+1} = \phi_2 \beta_t + \xi_t \end{cases}$$

parametrização 1

Não podemos estimar modelo que não é observável. Modelo não faz sentido.

(/ /)

Estabelecer condição para ϕ_1 e ϕ_2 de forma que o sistema seja observável.

- Se $\phi_1 = \phi_2 = 1 \to$ não é observável $\Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ posto $(M') = 1$

- $\theta_t = \mu_t + \beta_t$

$\psi_t = \mu_t - \beta_t$

$\therefore \; y_t = \mu_t + \beta_t + \varepsilon_t$

$y_t = \theta_t + \varepsilon_t$

$\theta_{t+1} = \theta_t + \delta_{1t}$

$\theta_{t+1} = \mu_{t+1} + \beta_{t+1} = (\mu_t + \beta_t) + (\eta_t + \xi_t)$

$= \theta_t + \delta_{1t}$

Também: $\psi_{t+1} = \mu_{t+1} - \beta_{t+1}$

$= (\mu_t - \beta_t) + (\eta_t - \xi_t)$

$= \psi_t - \delta_{2t}$

MP2

parametrização 2

$$\Rightarrow \begin{cases} y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \psi_t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \theta_{t+1} \\ \psi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \psi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1t} \\ \delta_{2t} \end{bmatrix} \end{cases}$$

sobra na especificação

y não depende de ψ. Nem θ e ψ se relacionam

Nesta parametrização fica + fácil de verificar.

Nos modelos que usaremos aqui $\Rightarrow$ terão que ser observáveis p/ serem adequados.

tilibra

obs: No exercício 1, se tivermos trabalhando com $p=2$ $(y \sim 2\times 1)$

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \\ \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$N \sim (0, \Sigma)$

Nesse caso não se comunicam aqui, mas podem se comunicar nos ε.

— " —

A questão da observabilidade é obrigatória p/ estimação dos parâmetros do modelo.

A questão da estacionariedade não. É da definição do modelo. Na cond. inicial será importante definir quais componentes são estacionárias e quais não.

Não estacionariedade traz problemas no modelo de regressão, B&J etc.

(obs: cond. inicial $\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$)

$\begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix}$ componentes de α_1

obs. Existe uma correspondência entre modelos estruturais e modelos ARIMA de B&J.

— " —

Estimação de MEE lineares e Gaussianas

$$y_t = Z_t \alpha_t + \varepsilon_t$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t$$

$(t = 1, \ldots, n)$ tamanho da série (ou T)

onde $\varepsilon_t \sim N(0, H_t)$

$\eta_t \sim N(0, Q_t)$

eq. do Filtro de Kalman não exigem que o sistema seja invariante no tempo. De forma geral, Z_t

Mas considerando Gaussianidade, erro médio quadrático será ótimo.

obs: Filtro de Kalman não exige dist. Gaussiana dos choques, apenas hipót. sobre 2 1^os momentos →

p/ Gaussianidade ⇒ FK atua ótimo local
(melhor estimador linear)

(/ /)

O que queremos?

(1) Estimar α_t dado certo conjunto de informação (y_t)
↳ observável.

Filtro de Kalman { $\underset{\sim}{Y}_{t-1} = (y_1 \; y_2 \cdots y_{t-1})$ → previsão (usa dados até $t-1$)
$\underset{\sim}{Y}_t = (y_1 \; y_2 \cdots y_t)$ → atualização (atualiza c/ dado novo em

$\underset{\sim}{Y}_n = (y_1, y_2, \ldots, y_t, y_{t+1}, \ldots y_n)$ → suavização (passo que usa todos os ~~dados~~ disponíveis)

$\underset{\sim}{Y}_j = \begin{cases} j = t \\ j = t-1 \\ j = n \end{cases}$

serve p/ fazer extração de componentes (em economia, comum tendência e sazonalidade)

$p(\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y}_j)$? ⟶ estimação de α_t é ter ~~sta~~ densidade (densidade condicional a partir do que observamos em y)

⇓

$E[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y}_j]$
$\mathrm{var}[\alpha_t \mid \underset{\sim}{Y}_j]$

No curso: veremos a estimação usando previsão e atualização ⇒ Filtro de Kalman
veremos um tipo de suavização.

Toda dedução do FK, pressupõe que quaisquer elementos desconhecidos em alguma matriz serão considerados conhecidos. (Faltarão quase c/ certeza nas matrizes de var/covariância)

(2) Hiperparâmetros
↳ nas matrizes do sistema por MV
↳ dados faltantes nestas matrizes.

Dois âmbitos de estimação $\begin{cases} \text{do vetor de estados} \begin{cases} \text{usando previs} \\ \text{e atualização} \end{cases} \\ \text{dos hiperparâmetros das matrizes do sistema} \end{cases}$

Considere o modelo linear local

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t & \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) & \mu_1 \sim N(a_1, P_1) \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t & \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{cases}$$

$$E[\varepsilon_t \mu_1] = E[\eta_t \mu_1] = 0 \ \forall t$$
$$E[\varepsilon_t, \eta_s] = 0 \ \forall t, s$$

Em princípio, podemos obter $p(\alpha_t | Y_t)$ sem fazer uso do FK, apenas recorrendo a propriedades de vetores normais multivariados.

Para y

$$y_1 = \mu_1 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = \mu_2 + \varepsilon_2 = \mu_1 + \eta_1 + \varepsilon_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = \mu_1 + (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1}) + \varepsilon_n$$

$$y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)' \Rightarrow E[y] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} a_1 = E[y]$$

$$\text{var}(y) = E\left[(y - E[y])(y - E[y])'\right] = \Omega$$

$$= \begin{bmatrix} \text{var}(y_1) & \text{cov}(y_1, y_2) & \dots & \text{cov}(y_1, y_n) \\ \text{cov}(y_1, y_2) & \text{var}(y_2) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \text{var}(y_n) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

(/ /)

- variâncias

$var(y_1) = p_1 + \sigma_\varepsilon^2$

$var(y_2) = p_1 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2$

$\vdots$

$var(y_n) = p_1 + (n-1)\,\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2$

- covariâncias

$cov(y_1, y_2) = E\left[(y_1 - a_1)(y_2 - a_1)\right]$

$= E\left[(\mu_1 + \varepsilon_1 - a_1)(\mu_1 + \eta_1 + \varepsilon_2 - a_1)\right] = p_1$

Poderemos escrever:

$$\Omega = \mathbb{1}\mathbb{1}' p_1 + \Sigma_{ij} \quad \text{onde } \Sigma_{ij} = \begin{cases} (i-1)\,\sigma_\eta^2 & , i < j \\ \sigma_\varepsilon^2 + (i-1)\,\sigma_\eta^2 & , i = j \\ (j-1)\,\sigma_\eta^2 & , i > j \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, n$

Ω cresce com n (com o nº de observações)

Do ponto de vista operacional, estaríamos usando matrizes enormes se tivermos muitas observações. (Não será este caminho a ser usado).

para μ

$\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t$

$\mu_2 = \mu_1 + \eta_1$

$\mu_3 = \mu_2 + \eta_2 = \mu_1 + \eta_1 + \eta_2$

$\vdots$

$\mu_n = \mu_1 + (\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{n-1})$

$$\Rightarrow \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E[\mu] = \mathbb{1} a_1$$

$var(\mu)$ ... terá a ver com
termos ρ_1 e σ_η^2 na
matriz Ω (var de y)

Desenvolvendo, poderemos escrever:

$$\begin{pmatrix} y_{n\times 1} \\ \mu_{n\times 1} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 1 a_1 \\ 1 a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega & \Sigma_{y\mu} \\ \Sigma_{\mu y} & \Sigma_{\mu\mu} \end{pmatrix} \right)$$

$\Sigma_{y\mu} \rightarrow E[(y-E[y])(\mu-E[\mu])']$

$\Sigma_{\mu\mu} \rightarrow E[(\mu-E[\mu])(\mu-E[\mu])']$

Resultado: (Teorema)

Será extensivamente usado

Seja $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{pmatrix} \right]$

Então:

$$p(X \mid Y=y) \sim N\Big(\underbrace{\mu_X + \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}(y-\mu_Y)}_{\mu_{X|Y}} ; \underbrace{\Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}}_{\Sigma_{X|Y}} \Big)$$

~~Faça $X=\mu$, $Y=y$ e assim:~~

$$p(\mu \mid Y=y) \sim N\left(E[\mu \mid Y=y] ; var[\mu \mid Y=y] \right)$$ Fazer!

etc. ⇒ obter expressão explícita.

→ Mesmo não usando FK, p/ este modelo apresentado, escrevendo de forma multivariada e estimando (se não conhecermos σ_ε^2 e σ_η^2) por MV, obtemos o resultado acima p/ vetores multivariados normais ⇒ Dist. condicional de μ dado y.

$y - m\times 1$ $\quad y'z' \; 1\times m \times 1 \times n$

$z - n \times 1$

(/ /)

Este processo de estimação do desconhecido é válido, mas não é factível do ponto de vista operacional. Não é sequencial. Apresenta matrizes muito grandes.

Neste caso, estamos fazendo estimativa suavizada:

$$E[\mu|Y] = \begin{pmatrix} E[\mu_1|Y] \\ E[\mu_2|Y] \\ \vdots \\ E[\mu_n|Y] \end{pmatrix}$$

usamos todas as informações

⇒ Usaremos o resultado anterior bastante agora

Lema do Resultado anterior.

Seja
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{xy}' & \Sigma_{yy} & 0 \\ \Sigma_{xz}' & 0 & \Sigma_{zz} \end{pmatrix} \right]$$

particularização será usada no FK.

X, Y, Z vetores de dimensão arbitrária

Então:

$$(X|Y=y, Z=z) \sim N\left[E(X|Y=y, Z=z), \; var(X|Y=y, Z=z)\right]$$

onde:

$$E(X|Y=y, Z=z) = \mu_{x|y} + \Sigma_{xz}\Sigma_{zz}^{-1} z$$

$$var(X|Y=y, Z=z) = \Sigma_{x|y} - \Sigma_{xz}\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma_{zx}$$

Prova: aplique o teorema anterior substituindo Y por $(y', z')'$

$(1\times m \;\; 1\times n)$

$\begin{pmatrix} 1\times m \\ 1\times n \end{pmatrix}$

Fazer!

tilibra

$$\begin{cases} y_t = Z_t \alpha_t + \varepsilon_t & (a) \\ \alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t & (b) \end{cases}$$

Notação: $(\alpha_t \mid Y_{t-1}) \Rightarrow E[\alpha_t \mid Y_{t-1}] = a_t$

$$var[\alpha_t \mid Y_{t-1}] = P_t$$

ou $a_{t+1} = E[\alpha_{t+1} \mid Y_t]$; $a_{t|t} = E(\alpha_t \mid Y_t)$

$P_{t+1} = var[\alpha_{t+1} \mid Y_t]$ $\quad P_{t|t} = var(\alpha_t \mid Y_t]$

1º passo: Distribuição da previsão de $\alpha_{t+1} \Rightarrow$ usar eq. (a)

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t$$

$$\therefore E[\alpha_{t+1} \mid Y_t] = T_t E[\alpha_t \mid Y_t]$$

$$\boxed{a_{t+1} = T_t a_{t|t}}$$ $\rightarrow$ No koopman $T^k E[\alpha_t \mid Y_t]$ (questão de notação

$$var[\alpha_{t+1} \mid Y_t] = P_{t+1} = var[\underbrace{T_t \alpha_t + R_t \eta_t}_{A_t} \mid Y_t]$$

$$= E[(A_t - E(A_t \mid Y_t))(A_t - E(A_t \mid Y_t))'$$

mas: $A_t = T_t \alpha_t + R_t \eta_t$

$$\therefore E[A_t \mid Y_t] = T_t a_{t|t}$$

$$\therefore \underbrace{A_t - E[A_t \mid Y_t]}_{B_t} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t - T_t a_{t|t}$$

$$= T_t(\alpha_t - a_{t|t}) + R_t \eta_t$$

e $[A_t - E[A_t \mid Y_t]]' = \eta_t' R_t' + (\alpha_t - a_{t|t})' T_t'$

Logo:

(/ /)

$$E[B_t B_t'] = P_{t+1} =$$

(termos cruzados)

$$= E[T_t \cancel{(\alpha_t - a_{t|t})\eta_t'} R_t'] + E[T_t \overbrace{(\alpha_t - a_{t|t})(\alpha_t - a_{t|t})'}^{P_{t|t}} T_t'] +$$

$$+ E[R_t \underbrace{\eta_t (\alpha_t - a_{t|t})'}_{0}] + E[R_t \eta_t \eta_t' R_t']$$

acertar expressão.

$$\therefore P_{t+1} = T_t P_{t|t} T_t' + R_t Q_t R_t'$$

previsão

tilibra

Notas III

11/05/11

No modelo de Nível Local

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t & \to N(0, \sigma_\varepsilon^2) \to \text{se fosse } \emptyset\text{: Passeio aleatório} \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t & \to N(0, \sigma_\eta^2) \end{cases}$$

adequado p/ séries não estacionárias

se fosse $\emptyset$: tendência não seria estocástica

Importante: sempre importante ver como é o comportamento se zerarmos variância

2) Forma Reduzida

$$\Phi_p(L)\,\Delta^d y_t = c + \Theta_q(L)\,\varepsilon_t \Rightarrow \text{ARIMA}(p,d,q) + c$$

→ questão de identificação pode ocorrer em modelos estruturais

Por exemplo → $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$ se $\varepsilon_t \sim N(\cancel{0}\,c, \sigma_\varepsilon^2)$

$$E(y_t | x_t) = (\alpha + c) + \beta x_t$$

Na regressão

$$\hat{y} = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 x_t \Rightarrow \begin{cases} \hat{\gamma}_0 = \alpha + c \\ \hat{\gamma}_1 = \beta \end{cases}$$

2 equações, 3 incógnitas (parâmetros)

⇒ $\bar{N}$ identificável

Todo modelo ARIMA, por construção, é sempre identificável

escrevemos modelos estruturais na forma ARIMA p/ ver se é identificável ou não.

(/ /)

pg 10

Forma reduzida:

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \end{cases}$$

vale $\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t$

Tanto faz pois dist η_t é estacionária

Tira 1ª diferença:

$\Delta y_t = \Delta\mu_t + \Delta\varepsilon_t$

$\Delta\mu_t = \eta_t$

$\Rightarrow \Delta y_t = \boxed{\eta_t + \Delta\varepsilon_t}$

C.L. de processos estacionários $\Rightarrow$ podemos procu[rar] forma ARIMA equi[va]lente a esta transform[ação].

$\rightarrow E[\Delta y_t] = 0$

$\rightarrow var(\Delta y_t) = var(\eta_t) + var(\Delta\varepsilon_t) = \sigma_\eta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2$

$var(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) = var(\varepsilon_t) + var(\varepsilon_{t-1}) - 2cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$

E como saber qual o ARMA correspondente?

$$MA(q) \Rightarrow \rho(k) \begin{cases} \neq 0 & k = 1, 2, \ldots, q \\ = 0 & k = q+1, \ldots \end{cases}$$

$AR(p) \Rightarrow \rho(k)$ { exponencial ou senóide amortecida

$\rightarrow$ FAC: $\rho(k) = \dfrac{cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-k})}{var(\Delta y_t)}$

$k=1$: ← média = 0 ∀t

$$\mathrm{cov}(\Delta y_t, \Delta y_{t-1}) = E[\Delta y_t \Delta y_{t-1}] =$$

$$= E[(\eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\eta_{t-1} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})] =$$

$$= -\sigma_\varepsilon^2$$

$$\therefore \rho(1) = \frac{-\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\eta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2} = -\frac{1}{q+2}$$

onde $q = \sigma_\eta^2 / \sigma_\varepsilon^2$

Para $k \geq 2$: $\mathrm{cov}(\Delta y_t, \Delta y_{t-k}) = 0$

$$E[(\eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\eta_{t-j} + \varepsilon_{t-j} - \varepsilon_{t-j-1})]$$

p/ $j \geq 2$, não há nenhum par no termo anterior

$\Rightarrow$ É um processo MA(1) — FAC $\neq 0$ p/ $k=1$

$= 0$ p/ $k \geq 2$.

Resultado: Se y_t é MNL $\Rightarrow \Delta y_t \sim MA(1)$

Suponha que vamos estimar a 1ª diferença do processo como MA(1)

Seja $z_t \sim MA(1)$

$$\therefore z_t = \omega_t + \theta \omega_{t-1}, \quad \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2)$$

$$\begin{cases} E[z_t] = 0 \\ \mathrm{var}[z_t] = (1+\theta^2)\sigma_\omega^2 \\ \gamma(1) = E[z_t \cdot z_{t-1}] = \theta \sigma_\omega^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho(1) = \frac{\theta}{(1+\theta^2)}$$

(/ /)

Queremos responder:

M $\Delta y_t \Rightarrow 0 < q < \infty$ (q é o parâmetro a ser estimado na forma redu...

M $z_t \Rightarrow -1 < \theta < 1$

M $\Delta y_t \Rightarrow \rho(1) = -\dfrac{1}{q+2}$

M $z_t \Rightarrow \rho(1) = \dfrac{\theta}{1+\theta^2}$

queremos ver se fazendo igualdade e variando q de 0 a ∞, θ variará de -1 a 1

$$\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2} = \frac{-1}{q+2}$$

$$\therefore \theta = \frac{-(2+q) \pm \sqrt{q^2+4q}}{2} \quad \text{onde } q \in (0,\infty)$$

$q \to 0: \quad \theta = -\dfrac{2 \pm 0}{2} = -1$

$q \to \infty$: Truque algébrico: $\times$ e $\div$ por $\sqrt{\cdots}$

$\theta = 0$

Espaço paramétrico M θ será restrito: $-1 < \theta \leq 0$

↓

é o que encontramos quando escrevemos Δy_t como MA(1)

Se realmente acreditamos que modelo melhor a ser usado for MNL $\Rightarrow$ essa restrição maior é natural

Se supusermos $E[\varepsilon_t \eta_t) = \sigma_{\varepsilon\eta}$ (não são + descorrelatados)

$\Delta y_t = \eta_t + \Delta \varepsilon_t$

$\Rightarrow$ $E[\Delta y_t) = 0$ — Não é afetado pela nova hipótese

$Var[\Delta y_t] = \sigma_\eta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_{\varepsilon\eta}$

$$E[(\Delta y_t - E(\Delta y_t))^2) = E[\Delta y_t^2) =$$
$$= E[(\eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2)$$
$$= E[(\eta_t^2 + 2\eta_t(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2)$$
$$= \sigma_\eta^2 + 2\sigma_{\varepsilon\eta} + 2\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(1) = E[\Delta y_t \Delta y_{t-1})$$
$$= E[(\eta_t + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1})(\eta_{t-1} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}))$$
$$= -\sigma_\varepsilon^2$$ — Não é afetado também.

Logo $\rho(1) = \dfrac{-\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\eta^2 + 2\sigma_{\varepsilon\eta} + 2\sigma_\varepsilon^2} = \dfrac{\theta}{1+\theta^2}$

p/ Δy_t temos 3 parâmetros: $\sigma_\eta^2, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_{\varepsilon\eta}$

p/ z_t temos 2 parâmetros: θ e σ_ε^2

Esse modelo c/ covariância não é identificável.

diz respeito a estimar os parâmetros (ñ é a mesma coisa da observabilidade → que tem a ver com as componentes

/ /

Não fazemos muito uso.

FORMA UCARIMA

$\Delta y_t = \eta_t + \Delta \varepsilon_t$

$\therefore\ y_t = \dfrac{\eta_t}{\Delta} + \varepsilon_t$

chama de tendência

$= T_t + \varepsilon_t$

$\therefore\ T_t = \dfrac{\eta_t}{\Delta} \therefore\ \Delta T_t = \eta_t \therefore\ T_t = T_{t-1} + \eta_t \Rightarrow$ componente de passeio aleatório

— " —

Notas II pg 13

Modelo de Tendência linear local

$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ — σ^2_ε

$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$ — σ^2_η

$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t$ — σ^2_ζ

Definir 2 razões sinal ruído: $q_\eta = \dfrac{\sigma^2_\eta}{\sigma^2_\varepsilon}$, $q_\zeta = \dfrac{\sigma^2_\zeta}{\sigma^2_\varepsilon}$

$\mu_t \Rightarrow$ tendência estocástica da série

μ_t: é uma tendência linear estocástica
(+ complicada do que um RW)
é modificada por 2 choques: um na própria tendência e outro na inclinação

Se $\sigma^2_\eta = \sigma^2_\zeta = 0 \Rightarrow y_t = a + bt + \varepsilon_t$

(Importante! Olhar P/ casos particulares)

⇒ Ver casos particulares na apostila.

obs: 1) Se fizermos estimativa e definirmos a $\sigma_\varepsilon^2 = 10^{-5}$ (muito baixa)

⇒ pode desconsiderar estocasticidade da inclinação

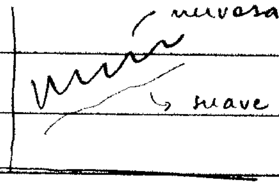
2) Se $\sigma_\zeta^2 \neq 0$ e $\sigma_\eta^2 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \beta_{t-1} \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \zeta_t \end{aligned}\right\}$$

1ª diferença de μ_t: $\Delta \mu_t = \beta_{t-1}$

2ª " : $\Delta^2 \mu_t = \Delta \beta_{t-1} = \zeta_{t-1}$

O processo terá uma tendência suave.



⇒ 2ª derivada da componente de tendência é um ruído branco.

$$\frac{d^2 \mu_t}{dt^2} = \zeta_t \Rightarrow \mu_t = \iint \zeta_{t-1}\, dt$$

↳ operação de soma no ruído branco.

Passa a suavizá-lo.

Elimina componente de alta frequência

Este modelo de Tendência suave se comunica com filtro HP (usado p/ separar tendência de ciclos de séries macroeconômicas)

FORMA de Espaço de Estado:

↓

p/ modelos estruturais ⇒ será invariante no tempo

/ /

$$y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix}}_{\alpha_t = m\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{T \\ m\times m}} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{R \\ (m\times r)}} \underbrace{\begin{pmatrix} \eta_t \\ \tau_t \end{pmatrix}}_{r\times 1}$$

(Nesse caso $m = r$)
Mas pode ser que tenhamos menos choques do que componentes.

Funçaõ de previsaõ:

Naõ tem nada a ver com FK
Vem sempre a partir da equaçaõ do modelo

Duas formas de fazer:

I) $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$, $t = 1, \dots, n$ ($n = T$)

$y_{t+k} = \mu_{t+k} + \varepsilon_{t+k}$

$$\hat{y}_{t+k|t} = E[y_{t+k} | Y_t] = E[\mu_{t+k} | Y_t] + E[\varepsilon_{t+k} | Y_t]$$

$E[\varepsilon_t] = 0 \ \forall t$

II) $y_t = Z_t\alpha_t + \varepsilon_t$

$\hat{y}_{t+k|t} = Z E[\alpha_{t+k} | Y_t]$

Temos que $\alpha_t = T\alpha_{t-1} + \eta_t$

$\alpha_{t+k} = T^k\alpha_t + (\dots) \eta_t$

$\Rightarrow E(\alpha_{t+k} | Y_t) = T^k E(\alpha_t | Y_t)$

vem do FK

$$= T^k \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{t|t} \\ \hat{\beta}_{t|t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

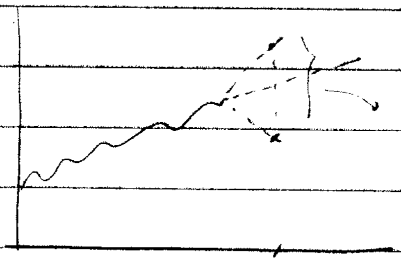
$$= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\mu}_{t|t} \\ \hat{\beta}_{t|t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{t|t} + k\hat{\beta}_{t|t} \\ \hat{\beta}_{t|t} \end{pmatrix}$$

$\therefore\ y_{t+k} = Z\,E[\alpha_{t+k} \mid \underset{\sim}{Y_t}] = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{t|t} + k\hat{\beta}_{t|t} \\ \hat{\beta}_{t|t} \end{pmatrix}$

$= \hat{\mu}_{t|t} + k\hat{\beta}_{t|t}$

equação de tendência linear

Exercício: $\hat{\mu}_{t|t}$ e $\hat{\beta}_{t|t}$ } serão dadas por amortecimento exponencial simples.



precisa dar uma medida de incerteza em relação a esta previsão.

Obs: Nessas equações, trabalharemos c/ $\hat{\Psi}$ (hiperparâmetros fixos conhecidos, estimados) ⇒ plug-in

A incerteza a respeito de $\hat{\Psi}$ não é transmitida p/ as componentes calculadas com FK.

Isso tb é feito nos modelos ARIMA:

$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

$\hat{y}_{t+k|t} = \hat{\phi}^k y_t$ → Já usamos $y_t = \hat{\phi} y_{t-1} + \varepsilon_t$ naturalmente

- MSE da previsão:

$MSE(\hat{y}_{t+k|t}) = E[y_{t+k} - \hat{y}_{t+k|t}]^2$

Para o modelo:

$$y_{t+1} = \mu_{t+1} + \varepsilon_{t+1}$$
$$\hat{y}_{t+1|t} = \hat{\mu}_{t|t} + 1\hat{\beta}_{t|t}$$

$$\Rightarrow MSE(\hat{y}_{t+1|t}) = E\left[(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1|t})^2\right] =$$

$$= E\left[\left(\left(\mu_{t+1} - \hat{\mu}_{t|t}\right) + \varepsilon_{t+1} + 1\hat{\beta}_{t|t}\right)^2 \middle| Y_t\right]$$

matricialmente, temos uma expressão mais simples.

(

Ver pg. 20 (notas III)

Fazer cálculos

Ver ex. pg. 21: duas previsões feitas a partir de { modelo estocástico / determinístico

Forma reduzida

objetivo: Obter modelo estacionário e ver se pode ser escrito como modelo ARIMA

E ver qual " " pode representar o modelo estrutural.

Tb pode resolver a questão do modelo ser identificável.

Toma 1ª dif: $\Delta y_t = \Delta\mu_t + \Delta\varepsilon_t$

e $\Delta\mu_t = \beta_{t-1} + \eta_t$ → Não é estacionário pois β_t é um RW

Toma 2ª dif:

$\Delta^2 y_t = \Delta\beta_{t-1} + \Delta\eta_t + \Delta^2\varepsilon_t$

$\therefore \Delta^2 y_t = \xi_{t-1} + \Delta\eta_t + \Delta^2\varepsilon_t$ $\Rightarrow$ aqui chegamos a um processo só tem RB do lado direito

Agora: precisa identificar o modelo ARIMA ao qual se relaciona.

Ver FAC's.

Tiraremos $E(\cdot)$, $var(\cdot)$ e $\gamma(k)$

$$\omega_t = \xi_{t-1} + \Delta\eta_t + \underbrace{\Delta^2\varepsilon_t}_{(1-L)^2\varepsilon_t = (1-2L+L^2)\varepsilon_t}$$

$\rightarrow E[\omega_t] = 0$

$\rightarrow var[\omega_t] = \gamma(0) = var[\xi_{t-1} + \eta_t - \eta_{t-1} + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}]$

$= \sigma_\xi^2 + 2\sigma_\eta^2 + 6\sigma_\varepsilon^2$ (ver cálculos)

$$\rightarrow cov(\omega_t, \omega_{t-k}) = \begin{cases} -\sigma_\eta^2 - 4\sigma_\varepsilon^2, & k=1 \\ \sigma_\varepsilon^2, & k=2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases} \Rightarrow MA(2)$$

TLL $\Rightarrow$ MA(2) $\Rightarrow$ 3 hiperparâmetros : $\psi^{TLL} = (\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2)$

$z_t = \theta_1\omega_{t-1} + \theta_2\omega_{t-2} + \omega_t$ $\quad \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2)$: $\psi^2 = (\theta_1, \theta_2, \sigma_\omega^2)$

3 hiperparâmetros $\Rightarrow$ precisamos de 3 equacões.

variância, $\gamma(1)$ e $\gamma(2)$

$E[\omega_t^2] = E(z_t^2)$

$E[\omega_t\omega_{t-1}] = E(z_t z_{t-1})$

$E[\omega_t \omega_{t-2}] = E[z_t z_{t-2}]$

forma reduzida do TLL $\qquad$ MA(2)

(/ /)

Restrições sobre θ_1 e θ_2 p/ MA(2) inversível

↳ obter w_t em funções de z_t

$$z_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2)\, w_t$$

$$\Rightarrow \Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 \equiv 0$$

$$(\lambda_1, \lambda_2) \quad |\lambda_i| > 1 \quad \forall i = 1, 2$$

Essa restrição pode ser mapeada em θ_1 e θ_2

Escrevendo $(L - \lambda_1)(L - \lambda_2)$

e veremos que θ_1 e θ_2 têm que estar

numa certa região.

Ver pg 25.

(Na realidade, escrevendo

$f(v) = v^2 + \theta_1 v + \theta_2 v$ e $|v_i| < 1$)

θ_1 e θ_2 não vão poder estar em toda a região p/ serem compatíveis com MLL.

Ver área hachurada na pg. 25.

Se acharmos θ_1 e θ_2 fora dessa região $\Rightarrow$ Não será boa idéia aproximá-lo por MLL.

Ver pg 27 $\Rightarrow$ outros modelos de tendência

— II —

Sazonalidade ⟶ Notas IV de aula.

(eventos periódicos

período + ou - regular.

precisa ser dentro de 1 ano.

tilibra

6

Diferença sazonalidade e ciclo: no período

dentro de 1 ano
por questões climáticas,
convenções sociais/adm

periodicidade não é tão
bem definida. Ex: ciclos
econômicos.
(Tanto questões do período quanto
quanto de amplitude)
p/ questões naturais e mais bem
definido.

⇒ O que é sazonal é esperado.
temos que tirar da série as variações esperadas por conta da
sazonalidade p/ avaliar tendência.

Não há maneira única de decompor série em tend. e sazonalidade.
Se vir série dessazonalizada ⇒ precisa saber qual foi o método
de dessazonalização.

Pode saber se série foi pouco dessazonalizada ⇒ Ver pela FAC se
ainda há ciclo em k=12

$$y_t^{(a)} = y_t - \gamma_t$$

$y_t^{(a)}$ não é a tendência ⇒ há o erro ainda.

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \Rightarrow \underbrace{y_t - \gamma_t}_{y_t^{(a)}} = \mu_t + \varepsilon_t$$

é mais suave.

(picos da sazonalidade são retirados da série)

pg 3 das Notas IV

tilibra

Dois tipos de sazonalidade: aditiva e multiplicativa

18/05/11

$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$

sazonalidade

tendência

- Veremos principais formas de se eliminar a sazonalidade

- Primeiro trataremos no contexto determinístico.
  Sazonalidade determinist. surgirá da estocástica qdo alguma σ^2 for a zero.

Três modelos:

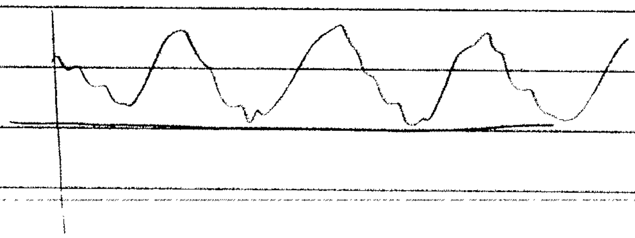
Obs: No caso de ST, ARIMA 12

$$y_t = \phi y_{t-1} + \underbrace{\phi_{12} y_{t-12}}_{} + \varepsilon_t$$

sazonalidade tratada internamente
Não dá p/ filtrar a sazonalidade
(Não usaremos)

1) Dummy

ST trimestral
1 dummy p/ cada trimestre
β intercepto
4 variáveis explicativas



(/ /)

t	$D1_t$	$D2_t$	$D3_t$	$D4_t$
2010 Q1	1	0	0	0
Q2	0	1	0	0
Q3	0	0	1	0
Q4	0	0	0	1
2011 Q1		etc.		
Q2				
Q3				
Q4				

Modelo poderia ser trivialmente estimado por MQO

$$y_t = \beta + \sum_{j=1}^{4} \gamma_j D_{jt} + \varepsilon_t$$

Problema ⇒ Não podemos colocar tantas Dummies quanto os períodos da série, não conseguiremos resolver o problema por MQO por conta de multicolinearidade perfeita

~~pg 10~~

$$(x'x) \Rightarrow \hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y$$

Não será inversível

Ver parametrizações possíveis (i), (ii), (iii)

→ Usaremos parametrização (iii)

tilibra

pg 19.

De forma geral, teremos:

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \\ \gamma_t = ? \end{cases}$$

↳ como explicitaremos?

Não tem nas notas

Ponto de Partida

$$\sum_{j=1}^{s} \gamma_j = 0 \quad \text{(da parametrização iii)}$$

(comporta-mento dos fatores sazonais determinístico). Cada ano com ME (como o do ME)

2010 2011

Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 : como tudo é determinístico, se andarmos mas cobrirmos sempre 4 trimestres ⇒ teremos somatório = 0.

$s = 4$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{s-1} \gamma_{t-j} = 0$$

pois $\gamma_t + \gamma_{t-1} + \gamma_{t-2} + \gamma_{t-3} = 0$

Qualquer que seja t: cobrimos o período.

obs: $\gamma \mid \theta$ ⇒ coeficientes que x dummies sazonais (nos exs.) (não tem a ver com Γ do ME).

Faremos: $\displaystyle\sum_{j=0}^{s-1} \gamma_{t-j} = \omega_t$, $\omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2)$

(flutuação estocástica)

(obs: $E\left[\sum \gamma_{t-j}\right] = 0$)

$$\boxed{\gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t}$$ — Dummies ficam implícitas nos termos mais $D_{1t}, e_{2t} \ldots$ Fazemos apenas γ_t correspondente ao período em que estamos trabalhando.

$$\Rightarrow \begin{cases} y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \\ \gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t \end{cases}$$

t (determinado trimestre)		$t+1$	(dados trimestrais)
Q1 2010 (p. ex.)	$\Rightarrow$	Q2 2010	

$$\gamma_{1,t} = \gamma_{2,t+1}$$
$$\gamma_{2,t} = \gamma_{3,t+1}$$
$$\gamma_{3,t} = \gamma_{4,t+1}$$
$$\gamma_{4,t} = \gamma_{1,t+1}$$

rearrumando os fatores sazonais no trimestre

- Como $\gamma_{1,t+1} = \gamma_{4,t}$ e $\gamma_{4,t} + \gamma_{3,t} + \gamma_{2,t} + \gamma_{1,t} = 0$

$$\Rightarrow \gamma_{4,t} = -(\gamma_{3,t} + \gamma_{2,t} + \gamma_{1,t})$$

$$\Rightarrow \gamma_{1,t+1} = -\gamma_{4,t} = -\gamma_{1,t} - \gamma_{2,t} - \gamma_{3,t} + \omega_t$$

coloca choque p/ ser estocástico.

- $\gamma_{2,t+1} = \gamma_{1,t}$

$\gamma_{3,t+1} = \gamma_{2,t}$

Tratando apenas a sazonalidade em y_t:

tilibra

$$y_t = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} \gamma_{1t} \\ \gamma_{2t} \\ \gamma_{3t} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,t+1} \\ \gamma_{2,t+1} \\ \gamma_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1t} \\ \gamma_{2t} \\ \gamma_{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*)

No modelo original:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + w_t \Rightarrow \gamma_t = -\gamma_{t-1} - \gamma_{t-2} - \gamma_{t-3} + w_t$$

$$\gamma_{t+1} = -\gamma_t - \gamma_{t-1} - \gamma_{t-2} + w_t$$

$$\Rightarrow \quad y_t = \gamma_t + \varepsilon_t$$

$$\gamma_{t+1} = -\gamma_t - \gamma_{t-1} - \gamma_{t-2} + w_t$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{t+1} \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*)

mesma parametrização

Esta é a forma + simples de incluir sazonalidade no ME.

Obs: Se considerarmos tendência ⇒ matriz T é diagonal em blocos.

Não haverá influência das comp. de tendência na sazonalidade e vice-versa.

Pag 19: Modelo estrutural Básico.

/ /

→ Sazonalidade por funções Trigonométricas

Fator sazonal em t será dado por

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{s/2} (\gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j t)$$

Exemplo:

$$\begin{cases} y_t = \gamma_t + \varepsilon_t \\ \gamma_t = \sum_{j=1}^{2} [\gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* \operatorname{sen}(\lambda_j t)] \end{cases}$$

s = 4: ST trimestral

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{s} = \frac{2\pi j}{4} = \frac{\pi}{2} j \quad , \quad j = 1, 2$$

Abrindo expressões para γ_t:

$$\gamma_t = [\gamma_1 \cos(\lambda_1 t) + \gamma_1^* \operatorname{sen}(\lambda_1 t)] + [\gamma_2 \cos(\lambda_2 t) + \gamma_2^* \cancel{\operatorname{sen}}(\lambda_2 t)]$$

• Para $j = 2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} j = \pi \therefore \operatorname{sen}(\lambda_2 t) = \operatorname{sen}(\pi t) = 0 \quad \forall t$

$$\Rightarrow y_t = \gamma_1 \underbrace{\cos(\lambda_1 t)}_{x_{1t}} + \gamma_1^* \underbrace{\operatorname{sen}(\lambda_1 t)}_{x_{2t}} + \gamma_2 \underbrace{\cos(\lambda_2 t)}_{x_{3t}} + \varepsilon_t$$

Precisaremos estimar 3 parâmetros (série trimestral, como fizemos no caso determinístico).
associados à sazonalidade

↓

γ_1, γ_1^* e γ_2

(Não é coincidência).

Atenção! γ_1, γ_1^* e γ_2 não são os fatores sazonais.

Eles serão dados por:

$$\gamma_t = \hat{\gamma}_1 \cos \underbrace{\lambda_1 t}_{\pi/2\, t} + \hat{\gamma}_1^* \operatorname{sen} \underbrace{\lambda_1 t}_{\pi/2\, t} + \hat{\gamma}_2 \cos \underbrace{\lambda_2 t}_{\pi t}$$

Para $Q_1 \to t = 1$

$Q_2 \to t = 2$

$Q_3 \to t = 3$

$Q_4 \to t = 4$

$Q_5 \to t = 5$ dá a volta.

Se fizermos $t = 1 \Rightarrow \gamma_1$ será o fator do 1º tri

(e numericamente será = ao calculado no modelo determinístico de param. iii)

Obs: No somatório

Se $s = 12 \Rightarrow$ somatório terá 6 cos e 6 sen

Para $j = 1$: 1º harmônico (fundamental)

Para $j = 2$: 2º harmônico

⋮

Na física $\Rightarrow$ série de temperatura é a + comportada em relação à sazonalidade.

Neste caso, não será necessário usar todos os harmônicos. Os 1ºs ditarão o comportamento.

Q^{to} + harmônicos usarmos $\Rightarrow$ mais esquisitos serão os comportamentos sazonais

(se harmônicos + altos ñ forem muito importantes $\Rightarrow$ não serão estatisticamente significantes) mas não são abandonados.

(/ /)

Questão: como escrevemos este modelo na forma EE?

pg 26 (*) $y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$

$\gamma_t = \sum_{j=1}^{s/2} \gamma_{jt}$ onde $\gamma_{jt} = \gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* sen(\lambda_j t)$

devemos escrever γ_{jt+1} e obter como função de γ_{jt} (ver apostila).

—//—

Modelo Airline

sazonalidade multiplicativa (amplitude aumentando no tempo)

→ Pacote STAMP

Formulate a model

Select components

Level: μ_t }
Slope: β_t } se ambos estocásticos ⇒ MLL

(if slope ⇒ MNL)

Seasonal: (ñ aparece opção dummy / trigon.)

Estimation model: Maximum likelihood

No resultado ⇒ Summary statistics: do resíduo

Normality ⇒ teste Jarq Bera.

Q autocorrelação dos resíduos

$R(^) - R^2$

H: rejeita hipótese de homocedasticidade

Variances of disturbances:

σ_ε^2 ⇒ pequena em relação aos outros pois as 3 componentes explicam praticamente tudo

σ_η^2

σ_k^2

σ_ω^2

— " —

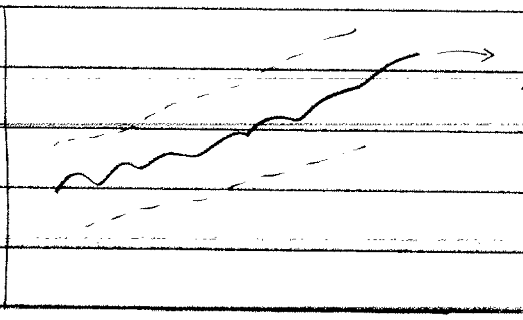
Obs: p/ extração de componentes
⇒ faz sempre smoothing

Resíduo n̄ está legal: crescendo e muita autocorrelação
(modelo mal especificado)

— " —

Olhando graficamente

gráfico p/ μ_t suavizada (level ± 2SE) 2 desvios padrão



$\hat{\mu}_{t|n} \pm 1{,}96 \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\mu}_{t|n})}$

$P_{t|n} = E\left[(\alpha_t - \hat{\alpha}_t)(\alpha_t - \hat{\alpha}_t)'\right]$ 13 × 13

1º elemento é o do μ $\begin{bmatrix} 0 & \\ & \\ & \end{bmatrix}$

Temos gráfico p/ β_t

Temos " p/ irregular ⇒ praticamente zero pois suavizada "rouba" praticamente toda info.

" " " sazonalidade

— " —

tilibra

Reestimar o modelo $\Rightarrow$ log(airline)

- olhando summary statistics $\Rightarrow$ H cai
- olhando distúrbios (variâncias)

  level praticamente fixo.

  seasonal " determinístico

Pede Anti-log analysis ⟶ Fez $\log y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$

Depois que estimamos,

$\log y_t = \hat{\mu}_t + \hat{\gamma}_t$

$\Rightarrow y_t = e^{\hat{\mu}_t} e^{\hat{\gamma}_t}$

$\mu_t' \quad \gamma_t'$

(escala original da série)

Resultados:

- resíduo padronizado : $\hat{v}_t^* = \frac{y_t - \hat{y}_{t|t-1}}{V}$

(F_t)

(25/05/11)

Aula passada:

- Sazonalidade → dummies
  (estocástica → trigonométricas
  determinística)
  ↳ caso particular
  da estocástica

Notas V pg 3.

MEB: Modelo Estrutural Básico

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$$

duas componentes padrão (tendência + sazonalidade

μ_t : tend. linear estoc.

γ_t : ~~sazon.~~ estocástica

Forma reduzida de um MEB:

↳ é identificável

muito conhecidos.

Mas qual o modelo SARIMA equivalente?

↳ tem que ser SARIMA (por conta da sazon.)

SARIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)$?

operador de diferenciação sazonal

$\Delta_s \hat{=} I - L^{s}$ — freq. da sazonalidade é sempre conhecida (trimestral, mensal etc)

$(\neq \Delta = I - L)$

$\Delta_s y_t \hat{=} y_t - y_{t-s}$ → se sazonalidade fosse determinística, esta operação tiraria totalmente a sazonalidade.

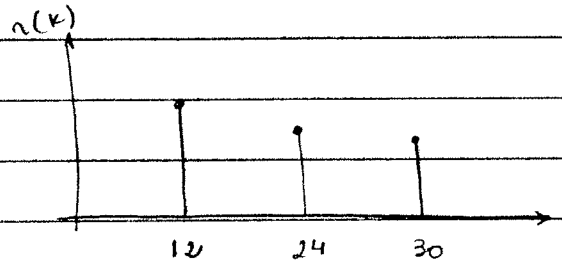
(/ /)

Só se deve operar a saz. estocástica numa série já diferenciada em relação a tendência.

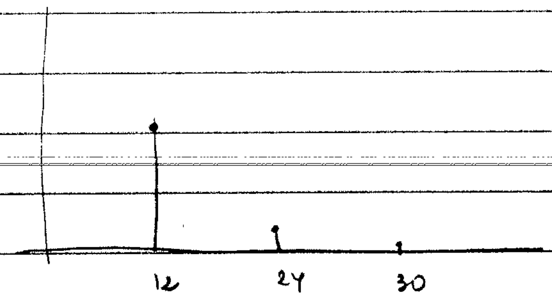
Δ => retira ñ estacionariedade na tend.

Δ_s => " " " na sazonalidade

Para a série y_t



=> p/ modelo com ñ stac. sazonal, decaimento nos períodos de saz. é lento



=> p/ modelo após aplicação Δ_s

=> decaimento rápido

É import. sazonalidade estacionária no contexto BET

No contexto ME ñ é necessário (nem p/ tend), mas vamos precisar verificar p/ olhar forma reduzida.

Precisamos definir tb:

$S_s(L) \hat{=} 1 + L + L^2 + \ldots + L^{s-1}$ → operador: vamos precisar dele

$\Delta S_s(L) = (1-L) * (\quad " \quad) = \Delta_s = (1-L^s)$

tilibra

Vai tirando diferenças.

Quando parar? ⇒ quando estivermos do lado direito apenas funções dos erros.

ps4

Operadores S(L) e Δ comutam.

Na expressão:

$$\underbrace{S(L)\,\Delta}_{\Delta S(L)}\,\Delta y_t = \Delta_s \Delta y_t$$

$\Delta_s \Delta y_t$

O termo diferenciado da sazonalidade será:

→ Como $S_s(L)\gamma_t = w_t$ ⇒ Divide

⇒ $\Delta^2 S_s(L)\gamma_t = \Delta^2 w_t$

Recapitulando até aqui:

→ Partida: MEB

$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$

$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$

é um estado, mas ñ é componente (ñ aparece em y_t) → $\beta_t = \beta_{t-1} + \xi_t$

$S(L)\gamma_t = w_t$

→ Chegada: forma reduzida

$\Delta\Delta_s y_t = \Delta_s \eta_t + \Delta\Delta_s \varepsilon_t + \Delta^2 w_t + S(L)\xi_t$

apenas uma equação

(equivalente a modelo ARIMA)

$z_t = ?$ (sarima correspondente)

$E[z_t] = 0$

$\gamma(0) = E[z_t^2] = \ldots$

$\gamma(j) = E[z_t z_{t-j}] = \ldots$

tilibra

(/ /)

Precisa desenvolver tudo:

$$Z_t = \eta_t - \eta_{t-s} + (1-L)(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-s}) + (1-L)^2 w_t + (1+L+\dots+L^{s-1})\xi_{t-1}$$

: ver resultados na pg 4

— " —

Obs: Quando modelamos por B&J, raramente modelamos por um modelo MA(s+1).
A classe + comum de modelos usados é SARIMA multiplicativo

No caso que vimos ⇒ modelo de saz. aditiva
~~Olhando as autocovariâncias~~
~~temos as que corresponde~~ a relações ~~de~~ CP e a ~~relação~~ ~~sazonal~~
(e as intermediárias)

Se, por ex, tivéssemos $s=4$:

$$\Delta\Delta_s y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_{t-3} + \theta_4\varepsilon_{t-4} + \theta_5\varepsilon_{t-5}$$

MA(s+1) → saz. aditiva

Mas raramente usamos este modelo dito de saz. aditiva.
Mais comum usar SARIMA multiplicativo.

$$\Delta\Delta_s y_t = \left[\frac{\Theta_Q(L^s)}{\Phi_P(L^s)}\right]\eta_t$$

caracteriza dep. sazonal

$$\Theta_Q(L) = 1 + \Theta_1 L^s + \Theta_2 L^{2s} + \dots + \Theta_Q L^{Qs}$$
$$\Phi_P(L) = 1 - \Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s} + \dots - \Phi_P L^{Ps}$$

Ajust. dep. sazonal, mas ñ a relação de CP
dependência

tilibra

⇒ η_t ainda não será RB.

Precisa ajustá-lo tb.

$$\varphi(L)\eta_t = \theta(L)\varepsilon_t \Rightarrow \eta_t = \frac{\theta_q(L)}{\varphi_p(L)}\varepsilon_t$$ (agora sim ε_t é RB)

$$\Rightarrow \Delta\Delta_s y_t = \frac{\Theta_Q(L^s)\ \theta_q(L)}{\Phi_P(L^s)\ \theta_p(L)}\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_P(L^s)\varphi_p(L)\Delta^d\Delta_s^D y_t = \Theta_Q(L^s)\theta_q(L)\varepsilon_t} \Rightarrow \text{SARIMA}$$

Exemplo: $d = 0,1,2$ ⇒ $P = p = 0$

$D = 0,1,2$ $\quad d = D = 1$

$q = Q = 1$

Fazendo $s = 4$

não tem parte AR

$$\Delta\Delta_s y_t = (1+\Theta_1 L^4)(1+\theta_1 L)\varepsilon_t$$
$$= (1+\Theta_1 L^4)(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})$$
$$= \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \Theta_1\varepsilon_{t-4} + \Theta_1\theta_1\varepsilon_{t-5}$$

apenas θ_1 e Θ_1 como parâmetros

(aparece termo multiplicativo $\Theta_1\theta_1$, daí o nome SARIMA multiplicativo).

obs: Olha FAC e FACp. Pode ver direto MA ou AR.

Se não ⇒ será ARMA

Usa critérios de identificação (AKAIKE, BIC etc.)

Aqui será a mesma coisa, mas temos que definir não só p, q, mas tb P, Q.

(/ /)

Olharemos AIC, BIC ⇒ escolhe o de melhor ajuste

— " —

⇒ Modelos multiplicativos são + parcimoniosos do que aditivos mas tb deve-se olhar aditivos e calcular AIC e BIC p/ escolher melhor modelo.

<u>No exemplo anterior</u>

SARIMA: $(0,1,1) \times (0,1,1)$ ⇒ Modelo Airline
(é um ponto de partida
p/ modelagem de ST
no arcabouço de B&J)

Airline ⇒ modelo multiplicativo da parte sazonal c/ parte ñ sazonal: $\Phi_P \times \varphi_p$ e $\Theta_Q \cdot \theta_q$

— " —

Voltando às notas de aula: (pg 5)
Para Modelo AirLine (SARIMA $(0,1,1) \times (0,1,1)$)

$E[z_t] = 0$

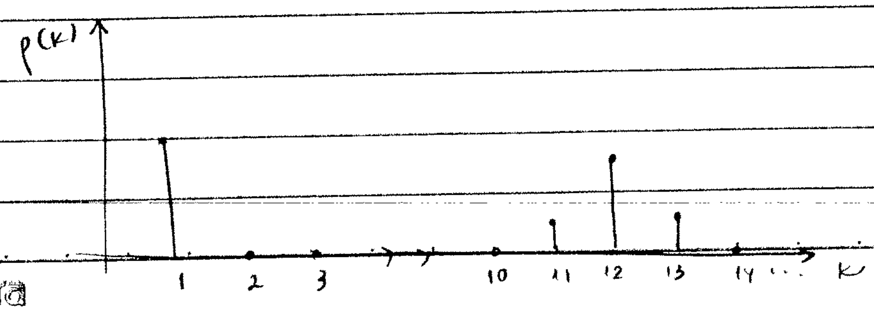
$\gamma(0) = E[z_t^2]$

$\gamma(k) = E[z_t \, z_{t-k}] \Rightarrow \gamma(k) = 0$ p/ $k = 2$ a $s-2$

$\gamma(s-1) = \theta \Theta \sigma^2$

$\gamma(s) = \Theta (1+\theta^2) \sigma^2$

$\gamma(s+1) =$ ⋮



tilibra

Que tipo de restrições básicas devemos impor ao MEB p/ se comunicar com AIRLINE?

forma reduzida do MEB ($\sigma_\zeta^2 = \sigma_\omega^2 = 0$)

inclinação   sazonalidade

(**) pg 5:

MEB com $\sigma_\zeta^2 = 0$ e $\sigma_\omega^2 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \omega_t = 0 \quad \forall t \\ \zeta_t = 0 \quad \forall t \end{cases}$

(tomar eq. reduzida geral e fazer $\sigma_\zeta^2 = 0$ e $\sigma_\omega^2 = 0$):

$$\Delta\Delta_s y_t = \Delta_s \eta_t + \Delta_s \Delta \varepsilon_t$$

$$= \Delta_s (\underbrace{\eta_t + \Delta \varepsilon_t}_{MA(1)})$$

$MA(1) \Rightarrow z_t = \eta_t + \Delta\varepsilon_t = \eta_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

$\sim MA(1)$ $\Rightarrow$ provar usando FAC

$= \theta e_{t-1} + e_t$

$$= \Delta_s (1 + \theta L) e_t$$

$$\Delta\Delta_s y_t = (1 - L^s)(1 + \theta L) e_t$$

P/ o Airline, temos: $\Delta\Delta_s y_t = (1 + \theta_1 L)(1 + \Theta_1 L^s) \varepsilon_t$

A correspondência se dá quando $\Theta_1 = -1$

Modelo ñ é inversível na parte sazonal.

Modelo p/ ciclo (pg. +)

$y_t = \mu_t + \psi_t + \varepsilon_t$: decomposição não é única.

? ?

componentes competem p/ explicar y_t.

Há modelos em que choques de μ_t e ψ_t são correlatados ou ñ descorrelatados

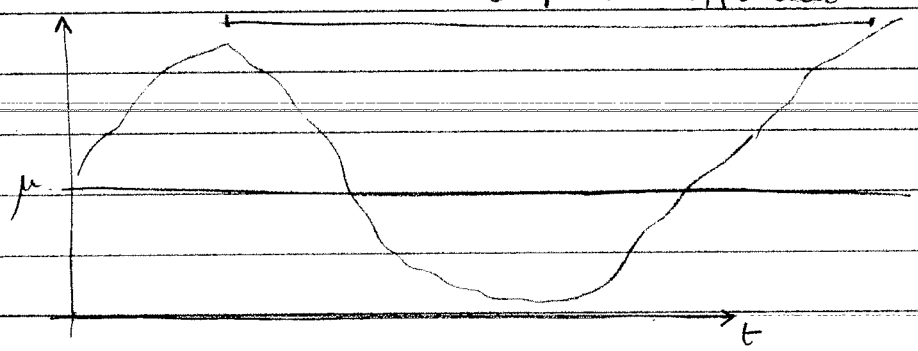
↓

se for, geralmente ñ é identificável (verificar se for perfeitamente

Dúvida — correlatado tb?)

Versão determinística.

T_c: período (p/ o ciclo se repetir).



$y_t = \mu + \psi_t + \varepsilon_t$

↓

Na sazonalidade, temos $s/2$ harmônicos.

No ciclo, p/ cada ciclo em particular ⇒ 1 frequência

Saz: $\gamma_t = \sum_{j=1}^{s/2} \left[\gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* \operatorname{sen}(\lambda_j t) \right]$ } fácil de ser estimado pois s é conhecido.

$\lambda_j = \frac{2\pi j}{s}$

Transforma $\cos(\lambda_j t)$ e $\operatorname{sen}(\lambda_j t)$ em variáveis explicativas ⇒ estima por MQO

tilibra

Na questão do ciclo, λ_c é geralmente desconhecido

(ñ sabemos direito qual o T, periodicidade do ciclo)

Mas pode-se ter alguma idéia, pois quando vamos atrás de um já temos uma idéia pré-concebida do que buscamos.

Se formos estimar por MQO:

$$\psi_t = \alpha \cos \lambda_c t + \beta \sin \lambda_c t$$

nas reais funções conhecidas no tempo.

$$y_t = \mu + \alpha \underbrace{\cos \lambda_c t}_{x_{1t}} + \beta \underbrace{\operatorname{sen} \lambda_c t}_{x_{2t}} + \varepsilon_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{T}$$

se conhecessemos T, teríamos regressão linear trivial c/ 2 variáveis explicativas

POR MQO: $S(\mu, \alpha, \beta, T_c) = \sum_{t=1} \left[y_t - \left(\mu + \cos(2\pi/T)\, t + \operatorname{sen}(2\pi/T)\, t\right)\right]^2$

$\frac{dS}{dT} = 0 \rightarrow$ Ñ é linear

Não poderemos usar MQO.

Teremos MQ Não lineares

(montamos como MQ e solucionamos como MQNL)

Depois de obter o modelo, devemos obter R^2.

Ex: Achamos $T = 13,4$ anos e $R^2 = 25\% \Rightarrow$ componente cíclica só explica 25% da série. (o resto poderia ser completamente aleatório).

(/ /)

Não podemos acreditar no T encontrado.

É uma informação problemática.

Pode ser espúrio.

↳ Tem sempre que tentar linkar com a área de estudo, de trabalho.

O achado estatístico do ciclo deve ter respaldo teórico bem embasado.

— " —

Para sazonalidade, fizemos:

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \gamma_t = \sum_{j=1}^{s/2} \gamma_{jt} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma_{jt}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda & \text{sen}\,\lambda \\ -\text{sen}\,\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{j,t-1} \\ \gamma_{j,t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_t \\ \omega_t^* \end{pmatrix}$$

mesmo σ_ω^2

Obs: Neste modelo, mesma σ_ω^2 p/ todos os harmônicos.

Para o ciclo: só temos uma frequência ($j = 1$)

Não será mais γ_t e sim ψ_t pois estamos tratando de ciclo.

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\lambda_c & \text{sen}\,\lambda_c \\ -\text{sen}\,\lambda_c & \cos\lambda_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{pmatrix}$$

σ_κ^2

↓ contribui p/ que ciclo fique vivo.

$|\rho| < 1$

↳ contribui p/ amortecimento do choque

tilibra

Se fizermos $\sigma_k^2 = 0$ (determinístico)

Caso particular: modelo de ciclo determinístico.

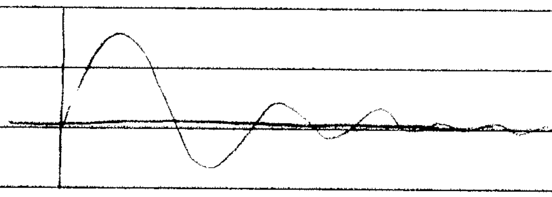
$$y_t = \mu + \psi_t + \varepsilon_t$$

$$\hookrightarrow \psi_t = \alpha \cos \lambda_c t + \beta \operatorname{sen} \lambda_c t$$

obs: ρ - amortecimento

k_t - choque: mantém ciclo vivo

Fora da amostra, não tem choque. Previsão terá cara:



Como o ciclo é estocástico, faz sentido o comportamento se esvair com o tempo.

A estimativa de ρ dirá isso. Se ρ for próximo de 1, ciclo será + persistente.

Na FEE:

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} = \underbrace{\rho \begin{pmatrix} \cos \lambda_c & \operatorname{sen} \lambda_c \\ -\operatorname{sen} \lambda_c & \cos \lambda_c \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_t \\ k_t^* \end{pmatrix}$$

$T = T(\rho, \lambda_c = 2\pi/T) \Rightarrow$ matriz T tem parâmetros desconhecidos agora. (ρ, T).

Observações:

i) Se $\lambda_c = 0$ ou π

$$\begin{pmatrix}\psi_t\\ \psi_t^*\end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{t-1}\\ \psi_{t-1}^*\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_t\\ k_t^*\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \psi_t = \rho\,\psi_{t-1} + k_t \Rightarrow$ processo AR 1

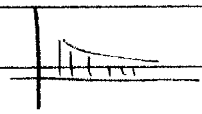
$|\rho| < 1.$

por que é importante termos um AR(1)

Ex: se modelo $y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$

se tomarmos $\nu_t^* = y_t - \hat{y}_{t|t-1}$ inovações

$\sqrt{\ }$

e FAC ainda apresenta resíduo 

$\Rightarrow$ usar ψ_t como AR(1) pode ajudar a melhorar o modelo.

—||—

Obs: (***) pg 10

ψ_t: não é exatamente determinístico.

$$y_t = \mu + (\alpha \cos \lambda_c t + \beta \operatorname{sen} \lambda_c t) + \varepsilon_t$$

$$(\alpha, \beta) \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & \sigma^2\end{pmatrix}\right)$$

α, β podem ser fixos e desconhecidos, podem ser multivariados estocásticos.

há $\neq$s formas de modelar.

18

SOFTWARE

usar botões à direita

STAMP

Rainbraz (série chuvas em Fortaleza)

Adotando modelo: $y_t = \mu_t + \psi_t + \varepsilon_t$

$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t$

(s/ inclinação)

Formular o Model

Select components

Level (stochastic)

Irregular

Cycle (pode ter ciclos de periodicidade ≠)

tilibra

tilibra