NOTAS DE AULA – IV

Componente Sazonal em Modelos Estruturais

⇒ Componente Sazonal

• **Sazonalidade**= representa as flutuações periódicas que ocorrem no período máximo de um ano, estando associadas a variações climáticas(estações do ano), tradições culturais/sociais (Carnaval, Páscoa, Natal, Dia das Mães, São João, etc), medidas legais e administrativas (início e fim do ano letivo,do ano fiscal) etc.

s: período de sazonalidade = tempo que a flutuação periódica leva para se repetir em 1 ano.

4, séries trimestrais;

12, séries mensais;

52, séries semanais;

• Uma série pode apresentar mais do que uma componente sazonal. Ex: se a série for diária, pode haver sazonalidades: diária (s=365), semanal (s=7), etc, cada qual associada a um fenômeno específico. Stamp, para séries diárias considera sazonalidade semanal (s=7).

• Em muitas circunstâncias, a componente sazonal pode ser vista como algo indesejável (*nuisance*), que obscurece a visualização de outras componentes de interesse da ST , por exemplo, a tendência.

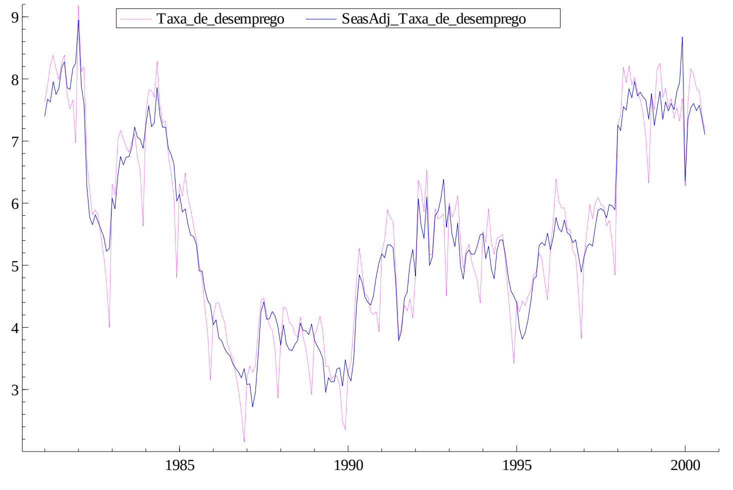
Ex: - taxa de desemprego mensal;

- PIB trimestral.

- Denomina-se de ajustamento sazonal ou dessazonalização ao processo de retirada/filtragem da componente sazonal de uma ST de forma a se obter uma ST livre das flutuações sazonais.

- Muitas ST que fazem parte das estatísticas oficiais dos governos são publicadas dessazonalizadas.

- Exemplo: taxa de desemprego aberto mensal para o Brasil (1981.01 a 2000.08)



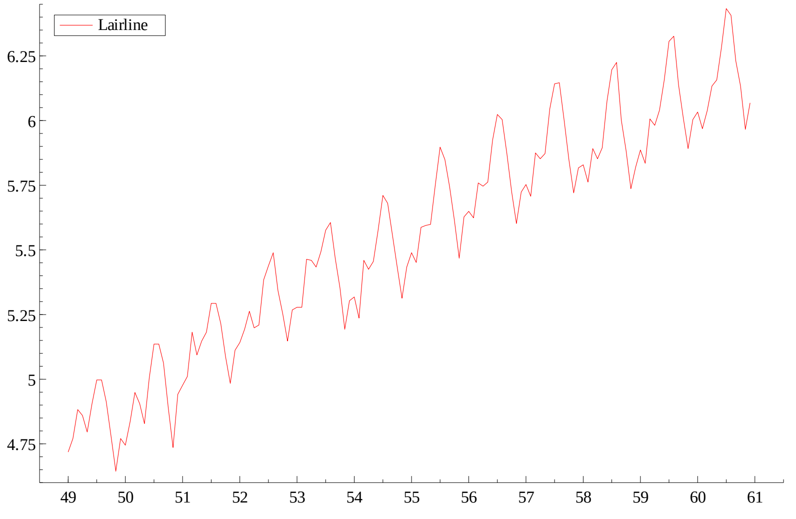
- model based: modelos estruturais, SEATS/TRAMO (EuroStata)

- Procedimentos

- métodos semi-heurísticos: X12 ARIMA (US Bureau of Census)

• Escalas da sazonalidade: a componente sazonal pode entrar no modelo na escala aditiva, multiplicativa ou mista.

I. Saz. aditiva: é o padrão nos modelos lineares.



$$y_t = \text{Tend} + \text{Saz} + \text{Irreg}$$

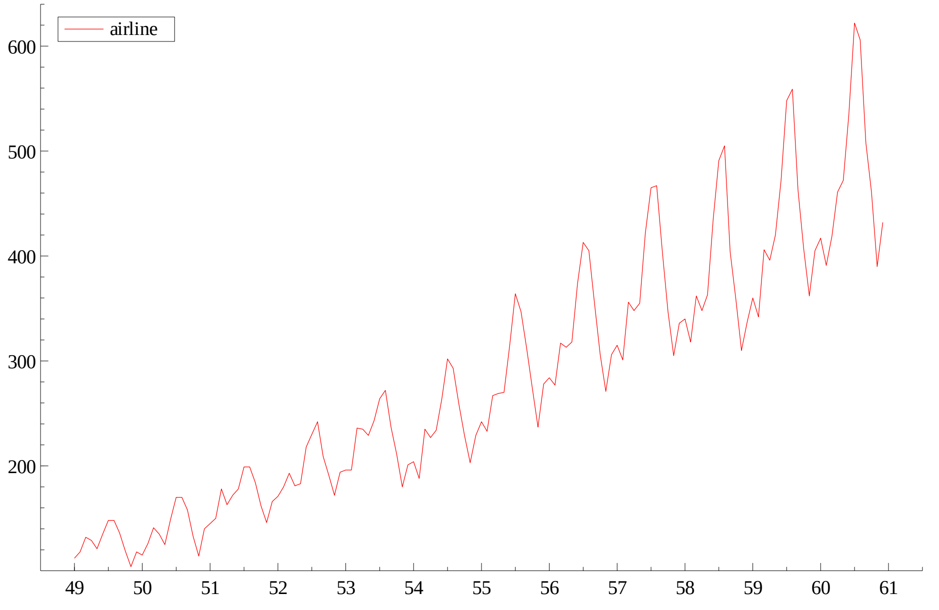
$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t$$

Série sazonalmente ajustada: $y_t^{(a)} = y_t - \hat{\gamma}_t = \hat{\mu}_t + \hat{\varepsilon}_t$

• Observe que a série sazonalmente ajustada não equivale a componente de tendência, uma vez que, após a subtração do fator sazonal, sobram a tendência estimada e a componente irregular estimada (resíduo).

• A componente sazonal calculada num determinado período (mês, trimestre, etc) é também denominada de fator sazonal.

ii. Saz multiplicativa: é o padrão no método X-12 ARIMA, mas pode ser obtida de modelos lineares se ajustarmos um modelo para o log da série.



$$y_t = \text{Tend} * \text{Saz} * \text{Irreg}$$

$$y_t = \mu_t \; \gamma_t \; \varepsilon_t$$

$$\text{Série sazonalmente ajustada:} \quad y_t^{(a)} = y_t / \hat{\gamma}_t = \hat{\mu}_t \; \hat{\varepsilon}_t$$

$\Rightarrow$ Obtendo fatores multiplicativos a partir de um modelo aditivo:

- Os procedimentos “model based” não são adequados para estimar fatores multiplicativos na forma original.

- Entretanto através da transformação logarítmica é possível tornar um modelo multiplicativo em aditivo:

>> mod. multiplicativo:

$$y_t = \mu_t \, \gamma_t \, \varepsilon_t$$

>> transformando em aditivo:

$$\ln y_t = \ln \mu_t + \ln \gamma_t + \ln \varepsilon_t$$

$y'_t = \mu'_t + \gamma'_t + \varepsilon'_t$. (este é o modelo efetivamente ajustado).

>> Mas o que queremos é dessazonalizar a série original, e não o seu log:

$$y_t^{(a)} = y_t \,/\, \hat{\gamma}_t = \exp(y'_t) \,/\, \exp(\hat{\gamma}'_t).$$

>> Qual a interpretação do fator sazonal multiplicativo γ_t ?

$$100\left(\frac{\hat{y}_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\mu}_t}\right) = 100\left(\frac{\hat{\gamma}_t\hat{\mu}_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\mu}_t}\right) = 100(\hat{\gamma}_t - 1) = 100(\exp(\hat{\gamma}'_t) - 1).$$

Ex: ajustando um ME ao log da série, encontramos que o fator sazonal no mês de janeiro é 0.3. Como exp(0.3) ≈ 1.35, então no mês de janeiro a série, devido a falutuação sazonal, apresenta um aumento de 35% em relação a sua tendência.

⇒ Por que a transformação logarítmica é indicada em algumas situações:

i. lineariza o modelo= como vimos, um modelo originalmente multiplicativo, é transformado em modelo aditivo, isto é, linear nas componentes, através desta transformação.

ii. traz simetria aos resíduos = se os resíduos de um modelo posuem distribuição assimétrica a transformação logarítmica pode tornar a distribuição dos resíduos aprox. simétrica, contribuindo para a não rejeição da hipótese de normalidade.

iii. muda a escala = se $y_t \sim I(1)$, então $\Delta\log(y_t)$ é estacionário (I(0)), e além do mais,

$$\begin{aligned}\Delta \log y_t &= \log(y_t / y_{t-1}) = \log(1 + \Delta y_t / y_{t-1}) \\ &\approx \Delta y_t / y_{t-1}, \text{ se } \Delta y_t << y_{t-1}.\end{aligned}$$

ou seja, a escala passa a ser de variação relativa, ou percentual. Raramente utilizada em ME, embora seja comum em regressão de ST.

iv. estabiliza a variância = muitas vezes na escala original a variável dependente é heterocedástica, ou seja, a sua variância não é fixa no tempo, invalidando os testes estatísticos que pressupõem homocedasticidade. Para um tipo especial de heterocedasticidade, a transformação logarítmica estabiliza a variância.

Prova: supor

$$y_t = \mu_t \ \gamma_t \ \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim \log\text{normal}(\exp(1/2\sigma^2), \exp(2\sigma^2) - \exp(\sigma^2)).$$

Portanto

$$E(y_t|\mu_t\gamma_t) = \mu_t \gamma_t E(\varepsilon_t) = \mu_t \gamma_t \exp(1/2\sigma^2)$$

$$\begin{aligned} Var(y_t|\mu_t\gamma_t) &= (\mu_t \gamma_t)^2 (\exp(2\sigma^2) - \exp(\sigma^2)) \\ &= (\mu_t \gamma_t)^2 \exp(\sigma^2)[\exp(\sigma^2) - 1] \\ &\propto [E(y_t)|\mu_t\gamma_t]^2. \end{aligned}$$

•Ou seja, na escala original a variável y é heterocedástica. A questão é saber qual a transformação adequada que irá estabilizar a variância de y. Seja esta transformação:

$z_t = h(y_t)$. Então segue que:

$$Var(z_t|\mu_t\gamma_t) = Var(h(y_t|\mu_t\gamma)).$$

Suponha expansão de Taylor em torno de $w_t = E(y_t|\mu_t\gamma_t)$.

$$z_t = h(y_t) \approx h(w_t) + h'(w_t)(y_t - w_t)$$

$$\begin{aligned} Var(h(y_t)|\mu_t\gamma) &\approx [h'(w_t)]^2 \ Var(y_t|\mu_t\gamma) = cte \\ &\approx [h'(w_t)]^2 [E(y_t)|\mu_t\gamma_t]^2 = cte \end{aligned}$$

Se escolhemos $h(w_t) = \log(w_t)$, então

$$[h'(w_t)]^{c2} = [1/w_t]^2 \propto [E(y_t)|\mu_t\gamma_t]^2.$$

Ou seja, a transformação log estabiliza a variância se a lei da variância for do tipo $Var[(y_t)|\mu_t\gamma_t] \propto [E(y_t)|\mu_t\gamma_t]^2$.

⇒ Tratamento de sazonalidade em modelos estatísticos: existem três procedimentos para o controle da sazonalidade:

i. variáveis dummy
ii. funções trigonométricas
iii. variável endógena defasada: y_{t-s}.

Apenas os dois primeiros são adequados para tratamento nos ME.

1. Sazonalidade por variáveis dummy:

- é o mais simples de ser implementado;
- o coeficiente de cada dummy representa o fator sazonal do mês (trimestre, etc) de interesse;

- A título de ilustração considere um período trimestral (s=4). Um modelo inicial seria:

$$y_t = \beta + \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \gamma_4 D_{4t} + \varepsilon_t, \qquad t = 1,2,\ldots,T$$

$$D_{it} = 1 \quad i = t,\ i = 1,2,3,4$$

$$\qquad 0 \quad c.c.$$

- Entretanto esse modelo apresenta um problema - **multicolinearidade perfeita** (um dos regressores pode ser obtido como combinção linear dos outros regressores):

$$y_t = [\beta\ \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \ \gamma_4] \begin{bmatrix} 1 \\ D_{1t} \\ D_{2t} \\ D_{3t} \\ D_{4t} \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \qquad t = 1,2,\ldots,T$$

$y_t = \beta^{'}\ x_t + \varepsilon_t, \qquad t = 1,2,\ldots,T.$ Finalmente utilizando notação matricial:

$$y_{Tx1} = X_{Txk}\beta_{kx1} + \varepsilon_{Tx1},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1\ X_{21}\ X_{31} \ldots X_{k1} \\ 1\ \ X_{22}\ X_{32} \ldots X_{k2} \\ \ldots \\ 1\ \ X_{2T}\ X_{3T} \ldots X_{kT} \end{bmatrix}_{Txk}$$

A solução de MQO é dada por: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y,$ *onde*

$$(X'X) = \begin{bmatrix} T & \sum X_{2t} & \sum X_{3t} & \ldots & \sum X_{kt} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}X_{3t} & \ldots & \sum X_{2t}X_{kt} \\ \sum X_{3t} & \sum X_{3t}X_{2t} & \sum X_{3t}^2 & \ldots & \sum X_{3t}X_{kt} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \sum X_{kt} & \sum X_{kt}X_{2t} & \sum X_{kt}X_{3t} & \ldots & \sum X_{kt}^2 \end{bmatrix}_{kxk}$$

$X_{kt} = D_{kt} \quad t = 1,2,\dots,6 \;\; ; \; k = 1,2,3,4, \; segue\; que:$

$$X = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_{1t} & X_{2t} & X_{3t} & X_{4t} & X_{5t} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6x5} \end{array}$$

Segue que: $X_{1t} = X_{2t} + X_{3t} + X_{4t} + X_{5t}, \; \forall t \;\; (I)$. Ou seja, existe multicol. perfeita entre os regressores.

Consequência: a primeira linha da matriz X'X será igual à soma das outras.

Prova: use (I) e a expressão de X'X, e que:

$\sum X_{kt} = 6$, k=1; $\sum X_{kt} = 2$, k=2,3; $\sum X_{kt} = 1$, k=4,5.

$\sum X_{kt} X_{jt} = 0$, $\forall k \neq j$. Assim teremos:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5x5}$$

\>> a coluna 1 é igual a soma das outras colunas.

\>> Para evitar multicol. perfeita deve-se introduzir algum tipo de restrição nos parâmetros do modelo de regressão, resultando em diferentes parametrizações do modelo. Estas diferentes parametrizações serão vistas a seguir.

\>> Cada parametrização irá estimar o fator sazonal a partir de um patamar distinto, mas o poder preditivo e as previsões obtidas com estas parametrizações serão idênticas.

i) **Parametrização 1**

>> faz-se um dos coefs $\gamma_j = 0$, $j = 1,2,3,4$, o que equivale a abandonar da regressão a dummy D_{jt}. Por exemplo, se abandonarmos a dummy do 4o trimestre o modelo resultante fica:

$$y_t = \beta + \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \varepsilon_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

$$D_{jt} = \begin{cases} 1, & t = j, j+s, j+2s, \ldots \quad , \; j = 1, 2, 3 \\ 0, & t \neq j, j+s, j+2s, \ldots \end{cases}$$

$$E(y_t | D_{it} = 0, i = 1, 2, 3) = \beta \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\beta} = \bar{y}_4$$
$$E(y_t | D_{jt} = 1, D_{it} = 0, i \neq j, i = 1, 2, 3) = \beta + \gamma_j \Rightarrow \qquad \hat{\gamma}_j = \bar{y}_j - \bar{y}_4, \; j = 1, 2, 3$$

onde $\bar{y}_j$ é a média amostral da série no trimestre j, $j = 1, 2, 3, 4$.
Assim nessa parametrização o fator sazonal é medido em relação ao período basal.

ii) **Parametrização 2**

>> abandona o intercepto do modelo e coloca uma dummy para cada trimestre.
>> o patamar aqui é o zero.

$$y_t = \delta_1 D_{1t} + \delta_2 D_{2t} + \delta_3 D_{3t} + \delta_4 D_{4t} + \varepsilon_t$$

$$D_{jt} = \begin{cases} 1, & t = j, j+s, j+2s, \ldots \quad , \; j = 1, 2, 3, 4 \\ 0, & t \neq j, j+s, j+2s, \ldots \end{cases}$$

$E(y_t | D_{jt}) = \delta_j \Rightarrow \hat{\delta}_j = \bar{y}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ onde
$\bar{y}_j$ é a média amostral da série no trimestre j, $j = 1, 2, 3, 4$.

>> pouco usual pois a maioria dos modelos têm intercepto/tendência.

iii) **Parametrização 3**

>> introduz restrição nos coeficientes sazonais: a soma dos fatores sazonais é zero no período sazonal.

$$\sum_{j=1}^{s}\theta_j = 0 \quad \therefore \quad \theta_s = -\left(\sum_{j=1}^{s-1}\theta_j\right) \text{ (adotada nos ME)}$$

$$y_t = \alpha + \sum_{j=1}^{s-1}\theta_j D_{jt} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T$$

$$D_{jt} = \begin{cases} 1, & t = j, j+s, j+2s, \ldots \\ 0, & t \neq j, j+s, j+2s, \ldots \end{cases}, \quad D_{jt} = \{ -1, \quad t = s, 2s, 3s, \ldots$$

$$E(y_t \mid D_{jt}) = \alpha + \theta_j \qquad \Rightarrow \theta_j = E(y_t \mid D_{jt}) - \alpha, \; j = 1, 2, 3$$

$$E(y_t \mid D_{j4}) = \alpha - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \alpha + \theta_4 \Rightarrow \theta_4 = E(y_t \mid D_{j4}) - \alpha$$

$$0 = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \sum_{j=1}^{4} E(y_t \mid D_{jt}) - 4\alpha$$

$$\alpha = (1/4)\sum_{j=1}^{4} E(y_t \mid D_{jt}) \Rightarrow \hat{\alpha} = (1/4)\sum_{j=1}^{4}\bar{y}_j, \text{ onde } \bar{y}_j = (1/n_j)\sum_{t=1}^{n_j} y_t^{(j)}$$

é a média da série para o trimestre j, $j = 1, 2, 3, 4$.

Mas a média total da série $\bar{y} = (1/n)\sum_{t=1}^{n} y_t$, onde $n = \sum_{j=1}^{4} n_j$.

$$\bar{y} = (1/n)\left(\sum y_t^{(1)} + \sum y_t^{(2)} + \sum y_t^{(3)} + \sum y_t^{(4)}\right) = (1/n)\left(\sum_{j=1}^{4} n_j \bar{y}_j\right)$$

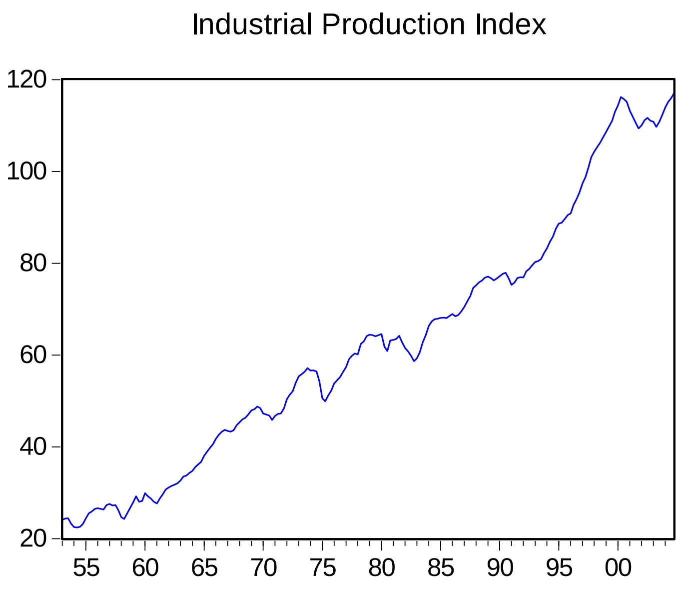
Se a amostra for balanceada então $n_j = (1/4)n \therefore n_j / n = 1/4$ e assim

$$\bar{y} = 1/4\sum_{j=1}^{4}\bar{y}_j = \hat{\alpha}, \text{ ou seja}$$

$$\theta_j = E(y_t \mid D_{jt}) - \alpha, \; j = 1, 2, 3 \Rightarrow \hat{\theta}_j = \bar{y}_j - \bar{y}, \; j = 1, 2, 3, 4$$

o fator sazonal de cada trimestre é medido em relação à média da série.

- Para ilustrar as diferentes possibilidades de parametrização de variáveis dummies na caracterização de sazonalidade determinística, considere a série trimestral do índice de produção industrial dos EUA no período 1953Q1 a 2004Q4 (n=208).



Observe que:

i. a amostra é balanceada, i.e., n=208, n_j=208/4= 52.

ii. a modelagem da série não incluirá tendência, e assim, de partida, o modelo estará mal especificado, mas servirá para ilustrar o que se pretende.

iii. as médias da série, por trimestre e total , são dadas abaixo:

QUARTER	Mean	Std. Dev.	Obs.
1	61.78288	27.42308	52
2	62.24191	27.55858	52
3	62.65968	27.69122	52
4	63.16506	27.87475	52
All	62.46238	27.44119	208

1. **modelo 1**= abandona a dummy do 4º trimestre.

Dependent Variable: IP
Method: Least Squares
Date: 05/20/10 Time: 11:40
Sample: 1953Q1 2004Q4
Included observations: 208

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	63.16506	3.832620	16.48091	0.0000
@SEAS(1)	-1.382179	5.420143	-0.255008	0.7990
@SEAS(2)	-0.923154	5.420143	-0.170319	0.8649
@SEAS(3)	-0.505385	5.420143	-0.093242	0.9258

R-squared	0.000348	Mean dependent var	62.46238
Adjusted R-squared	-0.014353	S.D. dependent var	27.44119
S.E. of regression	27.63741	Akaike info criterion	9.495261
Sum squared resid	155820.6	Schwarz criterion	9.559445
Log likelihood	-983.5072	Hannan-Quinn criter.	9.521214
F-statistic	0.023669	Durbin-Watson stat	0.002224
Prob(F-statistic)	0.995057		

IP = 63.165 - 1.382*Q1 - 0.923*Q2 - 0.505*Q3

>> a estimativa do intercepto é a média amostral da série no 4º trimestre.

>> os outros coeficientes, que caracterizam o fator sazonal dos trimestres 1, 2 e 3, são estimados pela diferença entre a média amostral do trimestre correspondente e a média amostral do 4º trimestre.

>> pelo teste F pode-se concluir, ignorando a mal especificação do modelo, que não se pode rejeitar a hipótese de inexistência de sazonalidade nesta série.

H_o: c(2)=c(3)=c(4)=0 ↔ não há sazon.na série
H_a: c.c. ↔ há sazon.na série

1. **modelo 2**= abandona o intercepto e inclui uma dummy para cada trimestre.

Dependent Variable: IP
Method: Least Squares
Date: 05/20/10 Time: 10:31
Sample: 1953Q1 2004Q4
Included observations: 208

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
@SEAS(1)	61.78288	3.832620	16.12028	0.0000
@SEAS(2)	62.24191	3.832620	16.24004	0.0000
@SEAS(3)	62.65968	3.832620	16.34905	0.0000
@SEAS(4)	63.16506	3.832620	16.48091	0.0000

R-squared	0.000348	Mean dependent var	62.46238
Adjusted R-squared	-0.014353	S.D. dependent var	27.44119
S.E. of regression	27.63741	Akaike info criterion	9.495261
Sum squared resid	155820.6	Schwarz criterion	9.559445
Log likelihood	-983.5072	Hannan-Quinn criter.	9.521214
Durbin-Watson stat	0.002224		

IP = 61.783*Q1+ 62.242*Q2+ 62.660*Q3+ 63.165*Q4

>> a estimativa de cada coeficiente é a média amostral da série no trimestre correspondente.

>> observe que as estatísticas fundamentais da regressão (R^2 , DW, AIC, Soma do quadrado dos resíduos etc não são alteradas. A estatística F não pode ser computada para modelos sem intercepto).

1. **modelo 3**= introduz a restrição de que a soma dos coefs sazonais é nula no período sazonal.

Dependent Variable: IP
Method: Least Squares
Date: 05/20/10 Time: 10:46
Sample: 1953Q1 2004Q4
Included observations: 208
IP= C(1) + C(2)*@SEAS(1) + C(3)*@SEAS(2)+ C(4)*@SEAS(3) - @SEAS(4) *(C(2)+C(3)+C(4))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	62.46238	1.916310	32.59514	0.0000
C(2)	-0.679500	3.319146	-0.204721	0.8380
C(3)	-0.220474	3.319146	-0.066425	0.9471
C(4)	0.197295	3.319146	0.059441	0.9527

R-squared	0.000348	Mean dependent var	62.46238
Adjusted R-squared	-0.014353	S.D. dependent var	27.44119
S.E. of regression	27.63741	Akaike info criterion	9.495261
Sum squared resid	155820.6	Schwarz criterion	9.559445
Log likelihood	-983.5072	Hannan-Quinn criter.	9.521214
F-statistic	0.023669	Durbin-Watson stat	0.002224
Prob(F-statistic)	0.995057		

IP= 62.462 - 0.680*Q1 - 0.221*Q2+ 0.197*Q3, j=1,2,3
IP= 62.462 - (- 0.680 - 0.221 + 0.197)*Q4, j=4

>> a estimativa do intercepto (c(1)) é a média amostral da série.

>> a estimativa de cada um coeficientes sazonais - c(2), c(3), c(4), c(5)=-(c(2)+c(3)+c(4)) - é a diferença entre a média amostral da série e a média amostral da série para o trimestre em questão.

>> observe que as estatísticas fundamentais da regressão (R^2 , DW, AIC, Soma do quadrado dos resíduos, F etc não são alteradas.)

- O modelo sazonal determinístico com restrição dada pela soma dos fatores sazonais no período sazonal igula a zero (parametrização 3) servirá de base para a introdução de sazonalidade estocástica nos ME. A idéia é a seguinte:

$$\sum_{j=1}^{s}\gamma_j = 0 \therefore \sum_{j=0}^{s-1}\gamma_{t-j} = 0. \text{ A versão estocástica será dada por:}$$

$$\sum_{j=0}^{s-1}\gamma_{t-j} = \omega_t, \ \omega_t \sim \text{NID}(0,\sigma^2_\omega), \text{ ou}$$

$$\gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1}\gamma_{t-j} + \omega_t, \quad \omega_t \sim \text{NID}(0,\sigma^2_\omega).$$

- Portanto, o modelo com TLL e sazonalidade estocástica, por dummies ,denominado do Modelo Estrutural Básico, será dado por:

$$-eq.\ das\ observ.: \quad y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \text{N}(0,\sigma^2_\varepsilon)$$

$$-eq.\ do\ estado: \quad \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \qquad \eta_t \sim N(0,\sigma^2_n)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \qquad \zeta_t \sim \text{N}(0,\sigma^2_\xi)$$

$$\gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1}\gamma_{t-j} + \omega_t \qquad \omega_t \sim N(0,\sigma^2_\omega)$$

onde:

$$E(\varepsilon_t\eta_s) = E(\varepsilon_t\zeta_s) = E(\varepsilon_t\omega_t) = 0, \ \forall\ t,s.$$

$$E(\varepsilon_t\alpha_0) = E(\eta_t\alpha_0) = E(\zeta_t\alpha_0) = E(\omega_t\alpha_0) = 0, \ \forall\ t.$$

$$Se\ \alpha_t = (\mu_t,\ \beta_t, \gamma_t, \gamma_{t-1}, \gamma_{t-2})',\ então\ \alpha_o \sim N(a_0, P_0).$$

Deve-se adicionar que os ruídos das componentes são descorrelatados entre si,

- Supondo S=4, o modelo acima possui a seguinte representação na forma de espaço de estados:

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \end{pmatrix} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \\ \gamma_{t-3} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \\ \omega_t \end{pmatrix}$$

$$\eta_t = \begin{pmatrix} \eta_t & \zeta_t & \omega_t \end{pmatrix}' \sim N(0,Q), \; Q = E(\eta_t \eta'_t) = \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\omega^2 \end{pmatrix}.$$

- Uma outra possibilidade é considerar uma dependência do tipo passeio aleatório p/ cada fator sazonal, como em Harrison & Stevens, 1976:

$$\gamma_{jt} = \gamma_{jt-1} + \omega_{jt}, \; \omega_{jt} \sim \mathrm{N}(0,\sigma_\omega^2), \; t = 1,2,\ldots,T; \; j = 1,2,\ldots s \text{ ,onde}$$

$$\sum_{j=1}^{s} \gamma_{jt} = 0.$$

>>Podemos re-escrever as S eqs anteriores de forma vetorial como:

$$\gamma_{jt} = \gamma_{jt-1} + \omega_{jt},\ \omega_{jt} \sim N(0, \sigma^2_{\omega}),\ \ t = 1, 2, ..., T;\ j = 1, 2, ...s\ , \text{onde}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{t-1}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{t}},\ \ \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{t}} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$$

Se impusermos $\sum_{j=1}^{s} \gamma_{jt} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \omega_{jt} = 0$, se $\sum_{j=1}^{s} \gamma_{ot} = 0.$

Então $\sum_{j=1}^{s} \omega_{jt} = 0 \Leftrightarrow (1,1,...,1)_{Sx1} \begin{pmatrix} \omega_{1t} \\ \omega_{2t} \\ \vdots \\ \omega_{St} \end{pmatrix} = \mathbf{i}'\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{t}} = 0.$ Ou seja, os choques sazonais na formulação de HS serão co-integrados.

Se especificarmos $\text{Var}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{t}}) = \boldsymbol{\Omega} = \sigma^2_{\omega}(\mathbf{I} - S^{-1}\mathbf{ii}')$ (a)

então pode-se mostrar que essa será uma condição suficiente que garante que $\sum_{j=1}^{s} \gamma_{jt} = 0.$

Prova: Considere a v.a. $z = \mathbf{i}'\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{t}}$. Prove que $E(z) = 0$, e que $\text{Var}(z) = 0$, usando (a).

Portanto $z = \mathbf{i}'\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{t}} = \sum_{j=1}^{s} \gamma_{jt} = 0$ (com probabilidade 1).

⇒ Função de Previsão:

$$\hat{y}_{t+s|t} = E(y_{t+s}|Y_t) = Z' \, E(\alpha_{t+s}|Y_t) = Z' \hat{\alpha}_{t+s|t} = \hat{\mu}_{t+s|t} + \hat{\gamma}_{t+s|t} =$$

$$= \hat{\mu}_t + s\,\hat{\beta}_t + \hat{\gamma}_{t+s|t}, \text{ onde}$$

$$\hat{\gamma}_{t+s|t} = \hat{\gamma}_{t-S+s|t}, \quad s = 1,2,3,\ldots, \text{ ou seja:}$$

o fator sazonal projetado para um trimestre é igual a última estimativa obtida pelo FK.

Idéia: aproximar a componente sazonal através de uma soma de séries trigonométricas.

•<u>Teorema de Fourier</u> = qualquer função periódica de período S, definida por um conjunto de S efeitos γ_t t=1,2,..., S pode ser expressa como a combinação linear de senos e cossenos de período $\lambda = 2\pi/S$,

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{[S/2]} (\gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* \operatorname{sen}(\lambda_j t))$$

onde:

$$- \ \lambda_j = 2\pi j / S, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, [S/2].$$

$$- \ \text{S é o período da série; } S = 4, 12, \text{etc;}$$

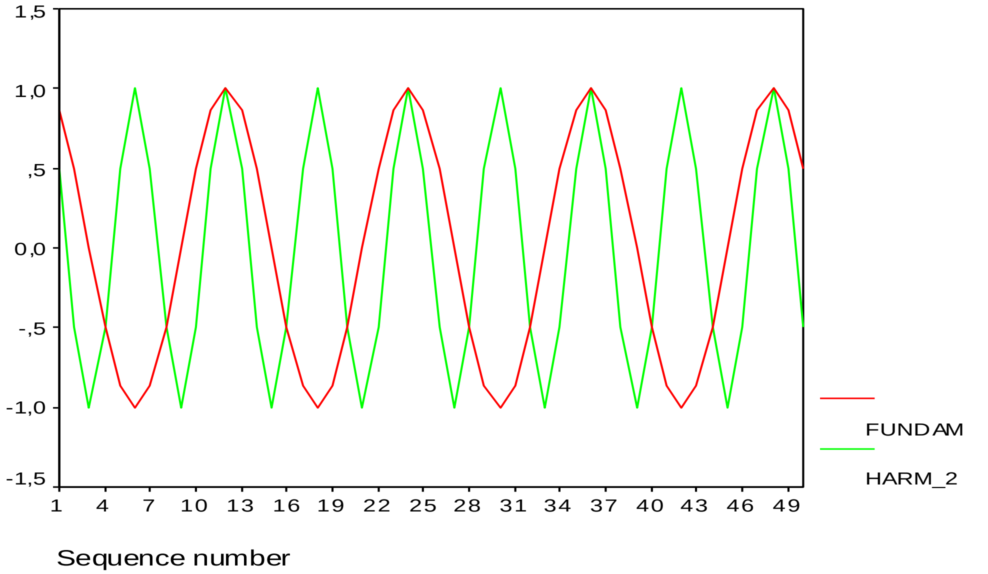
$$- \ [S/2] = \begin{cases} S/2, & \text{S par} \\ (S-1)/2, & \text{S ímpar} \end{cases}$$

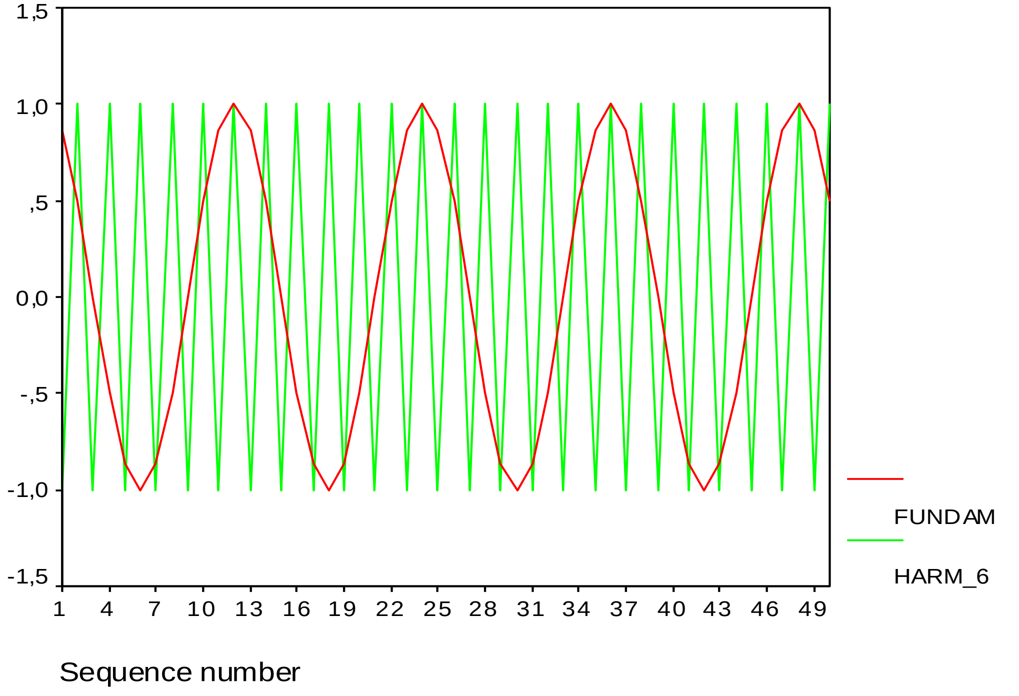
- Observe as seguintes definições:

  – $\lambda_j = 2\pi j / S$, são os harmônicos. Cada harmônico executa j ciclos completos no período da função;

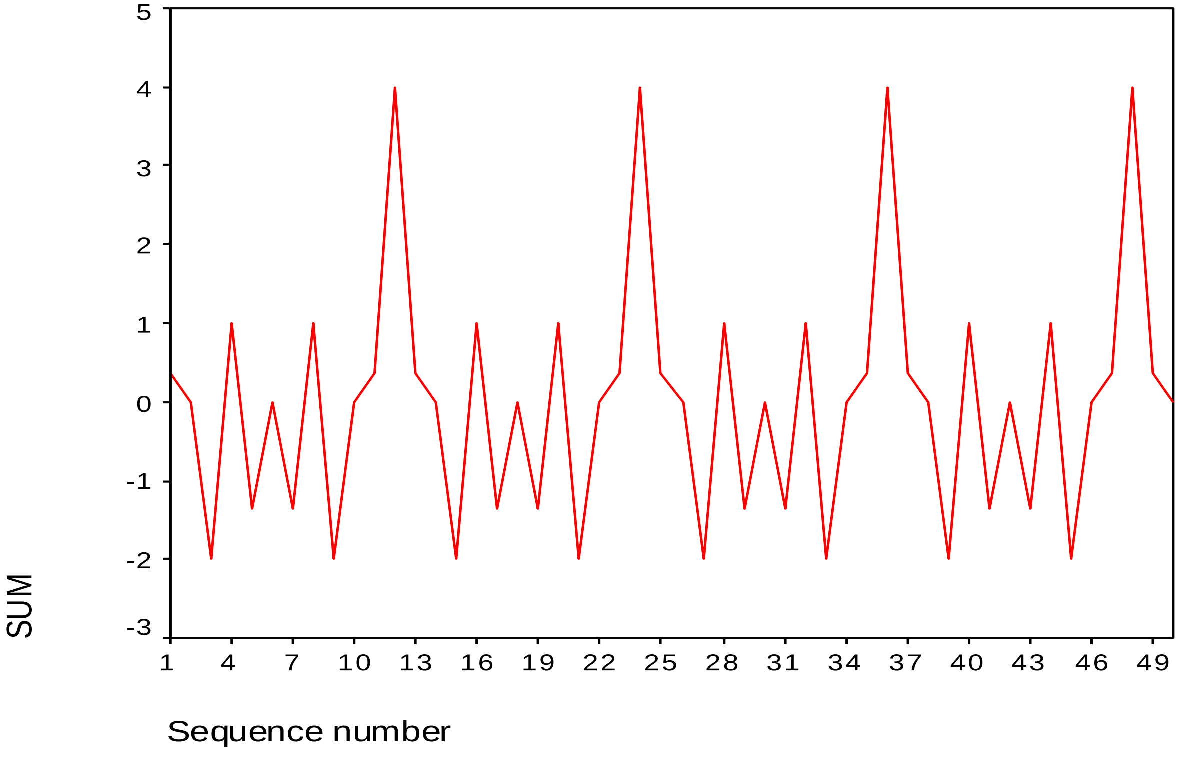
  – $\lambda_1 = 2\pi / S$ é a freq. fundamental.

-Função cosseno: harmônico fundamental (j=1) x 2º (j=2) e 6º harm (j=6).

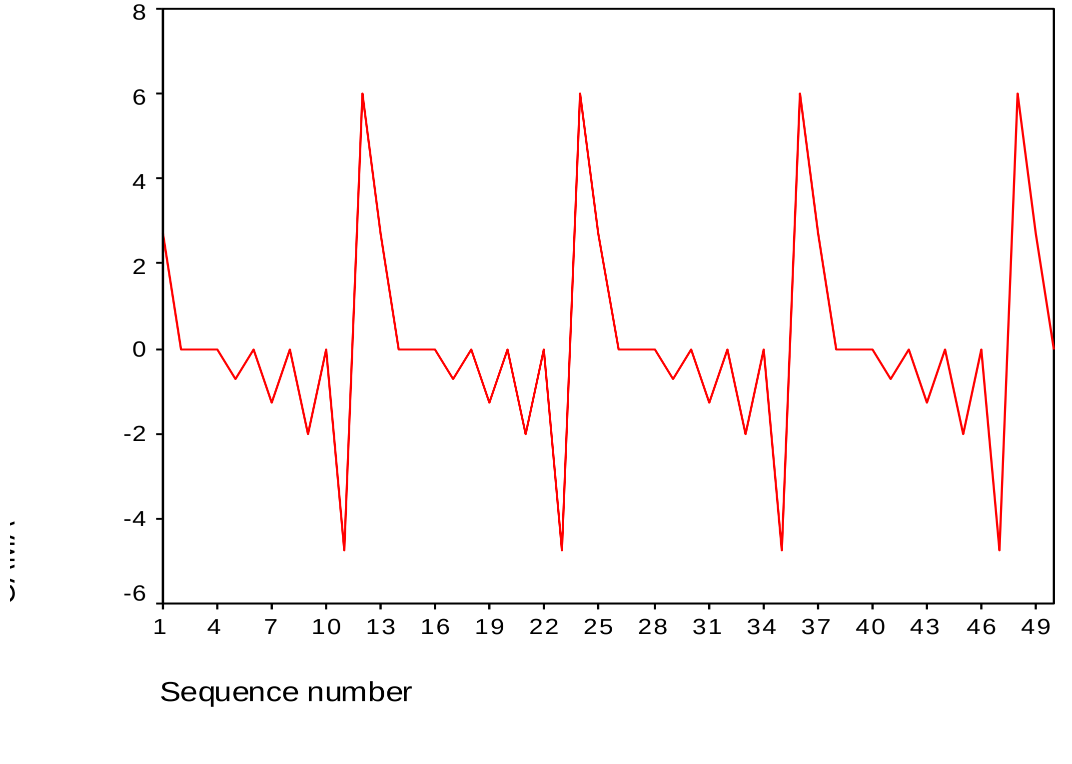




Soma do fundamental e 6o harmônico p/ o cosseno.



Soma de todos os harmônicos da SF.



• Outras propriedades da componente sazonal por SF:

– p / S par e $j = S/2$, $\operatorname{sen}\lambda_j t = \operatorname{sen}\pi t = 0, \forall t$. Assim sendo, existirá apenas $(S/2) + (S/2 - 1) = S - 1$ parâmetros para serem estimados por MQO, assim como na formulação por dummies;

– pode-se demonstrar, usando identidades trigonométricas, que $\sum_{j=0}^{S-1} \gamma_{t-j} = 0$.

- O modelo determinístico com tendência e sazonalidade por SF é dado por:

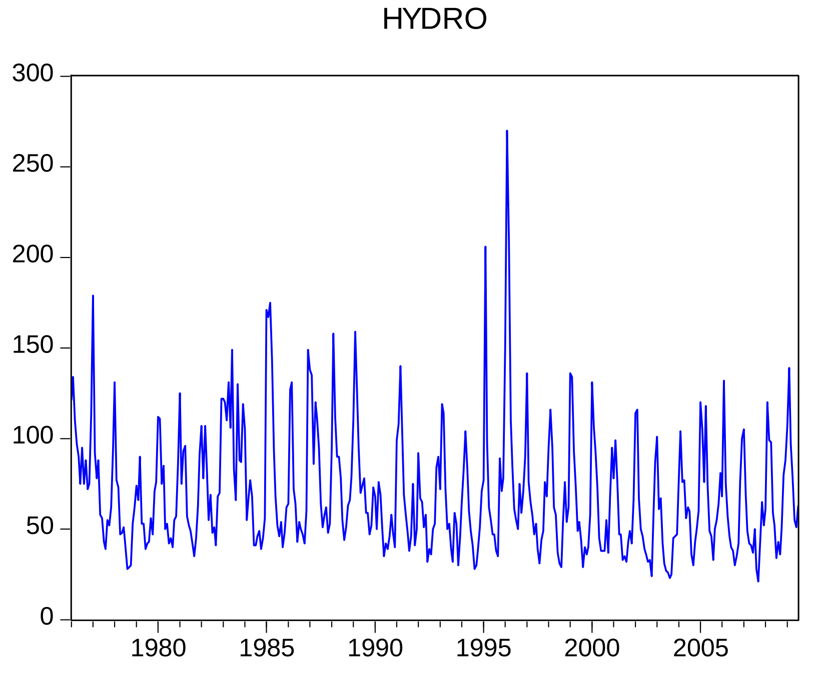
$$y_t = \alpha + \beta t + \sum_{j=1}^{[S/2]} (\gamma_j \cos(\lambda_j t) + \gamma_j^* \operatorname{sen}(\lambda_j t)) + \varepsilon_t$$

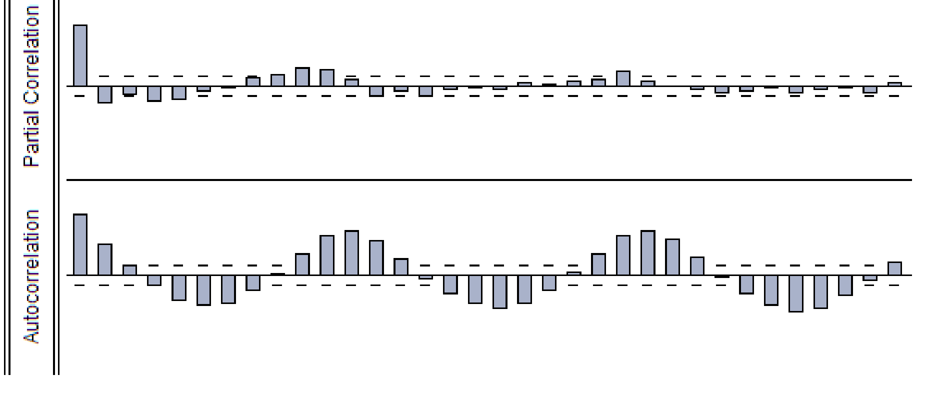
- Os parâmetros desconhecidos do modelo podem ser estimados por MQO, possibilitando assim o cálculo do fator sazonal do mês t, que é dado por:

$$\hat{\gamma}_t = \sum_{j=1}^{[S/2]} (\hat{\gamma}_j \cos(\lambda_j t) + \hat{\gamma}_j^* \operatorname{sen}(\lambda_j t))$$

- É possível demonstrar que se utilizarmos todos os harmônicos na SF, então a estimativa dos fatores sazonais por dummies, coincidirá com a estimativa deste fatores por SF.

Ex: série mensal de vazão afluente média (em m³/seg) em um posto de avaliação localizado no rio Paraibuna.





	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.670	0.670	182.15	0.000
2	0.351	-0.177	232.34	0.000
3	0.112	-0.087	237.45	0.000
4	-0.099	-0.168	241.44	0.000
5	-0.262	-0.147	269.68	0.000
6	-0.328	-0.063	313.96	0.000
7	-0.303	-0.020	351.75	0.000
8	-0.171	0.098	363.83	0.000
9	0.020	0.128	363.99	0.000
10	0.242	0.200	388.26	0.000
11	0.427	0.186	464.17	0.000
12	0.488	0.077	563.43	0.000
13	0.369	-0.103	620.51	0.000
14	0.187	-0.066	635.13	0.000
15	-0.026	-0.107	635.41	0.000
16	-0.204	-0.040	652.92	0.000
17	-0.316	-0.014	695.04	0.000
18	-0.364	-0.039	751.19	0.000
19	-0.305	0.031	790.66	0.000
20	-0.165	0.011	802.25	0.000
21	0.030	0.054	802.64	0.000
22	0.240	0.078	827.35	0.000
23	0.434	0.167	908.10	0.000
24	0.489	0.063	1010.9	0.000
25	0.391	-0.004	1077.0	0.000
26	0.204	-0.043	1095.1	0.000
27	-0.013	-0.066	1095.1	0.000
28	-0.204	-0.050	1113.3	0.000
29	-0.327	-0.024	1159.9	0.000
30	-0.396	-0.079	1228.5	0.000
31	-0.358	-0.033	1284.8	0.000
32	-0.227	-0.023	1307.5	0.000
33	-0.065	-0.080	1309.4	0.000
34	0.141	0.028	1318.2	0.000

• Modelo de sazonalidade por dummies, com restrição de soma dos fatores igual a zero no período.

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	69.77600	1.231404	56.66379	0.0000
C(2)	36.31224	4.060891	8.941940	0.0000
C(3)	42.95930	4.060891	10.57879	0.0000
C(4)	26.34165	4.060891	6.486668	0.0000
C(5)	9.871064	4.060891	2.430763	0.0155
C(6)	-8.217172	4.060891	-2.023490	0.0437
C(7)	-15.36423	4.060891	-3.783463	0.0002
C(8)	-21.62894	4.060891	-5.326156	0.0000
C(9)	-29.47296	4.116383	-7.159919	0.0000
C(10)	-21.32145	4.116383	-5.179657	0.0000
C(11)	-17.47296	4.116383	-4.244738	0.0000
C(12)	-9.927510	4.116383	-2.411707	0.0163

R-squared	0.479155	Mean dependent var	69.95037
Adjusted R-squared	0.464502	S.D. dependent var	33.77748
S.E. of regression	24.71758	Akaike info criterion	9.282231
Sum squared resid	238884.9	Schwarz criterion	9.401306
Log likelihood	-1858.370	Hannan-Quinn criter.	9.329372
F-statistic	32.70034	Durbin-Watson stat	0.934743
Prob(F-statistic)	0.000000		

Equação do modelo

@seas(j) = 1, se t = mês j, j=1,2,...,12; 0, cc

HYDRO = C(1) + C(2)*@SEAS(1) + C(3)*@SEAS(2) + C(4)*@SEAS(3) + C(5)*@SEAS(4) + C(6)*@SEAS(5) + C(7)*@SEAS(6) + C(8)*@SEAS(7) + C(9)*@SEAS(8) + C(10)*@SEAS(9) + C(11)*@SEAS(10) + C(12)*@SEAS(11) + (-C(2)-C(3)-C(4)-C(5)-C(6)-C(7)-C(8)-C(9)-C(10) -C(11)-C(12))*@SEAS(12) + erro

fat_saz jan= 69.776
fat_saz fev= 36.31224 etc

Obs: o modelo é apenas ilustrativo do tratamento de sazonalidade. Outras estruturas de dependência existentes na série (que podem ser investigadas via FAC dos resíduos), que não a sazonal, não serão tratadas aqui.

• Modelo de sazonalidade por trigonmométricos, onde a soma dos fatores é igual a zero no período.

> primeiro temos que criar as séries de cossenos e senos:

$$\cos(\lambda_j t) \text{ e } \sin(\lambda_j t),\ \lambda_j = 2\pi j/12 = \pi j/6,\ j=1,2,..,6 \text{ e } t=1,2,...,403$$

```
'programa sazonalidade por trigonométricos

scalar pi=@acos(-1)
' cria séries temporais  de harmônicos senos e
cossenos

for !i=1 to 6
   series cos{!i}=cos((@trend+1)*pi*!i/6)
   series sen{!i}=sin((@trend+1)*pi*!i/6)
next
```

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	69.77600	1.231404	56.66379	0.0000
COS1	15.75444	1.740382	9.052291	0.0000
COS2	-2.856061	1.742553	-1.639009	0.1020
COS3	-3.633838	1.743638	-2.084056	0.0378
COS4	-0.605764	1.742553	-0.347630	0.7283
COS5	-0.478002	1.740382	-0.274653	0.7837
COS6	-0.259804	1.231404	-0.210982	0.8330
SEN1	27.31628	1.742553	15.67601	0.0000
SEN2	7.782136	1.740382	4.471511	0.0000
SEN3	1.998069	1.739295	1.148781	0.2513
SEN4	1.694487	1.740382	0.973630	0.3308
SEN5	-1.486657	1.742553	-0.853149	0.3941

R-squared	0.479155	Mean dependent var	69.95037
Adjusted R-squared	0.464502	S.D. dependent var	33.77748
S.E. of regression	24.71758	Akaike info criterion	9.282231
Sum squared resid	238884.9	Schwarz criterion	9.401306
Log likelihood	-1858.370	Hannan-Quinn criter.	9.329372
F-statistic	32.70034	Durbin-Watson stat	0.934743
Prob(F-statistic)	0.000000		

HYDRO = C(1) + C(2)*COS1 + C(3)*COS2 + C(4)*COS3 + C(5)*COS4 + C(6)*COS5 + C(7)*COS6 + C(8)*SEN1 + C(9)*SEN2 + C(10)*SEN3 + C(11)*SEN4 + C(12)*SEN5 + erro

>> aqui os fatores sazonais têm que ser calculados.

>> Como visto, uma vez estimado o modelo de sazonalidade por trigonométricos, o fator sazonal de cada mês t será dado por:

$$\hat{\gamma}_t = \sum_{j=1}^{[S/2]} (\hat{\gamma}_j \cos(\lambda_j t) + \hat{\gamma}_j^* \operatorname{sen}(\lambda_j t)) \qquad t = 1, 2, \ldots, 12$$

$$\hat{\gamma}_t = \sum_{j=1}^{6} (\hat{\gamma}_j \cos(\frac{\pi j}{6} t) + \hat{\gamma}_j^* \operatorname{sen}(\frac{\pi j}{6} t))$$

O programa Eviews para implementar esse cálculo é dado a seguir:

```
'calcula fatores sazonais de cada mês no modelo trigonométrico

scalar i
scalar j
vector (6) c_cos
vector (6) c_sen
for i= 2 to 7
   c_cos(i-1)=c(i)
next

for j= 2 to 6
   c_sen(j-1)=c(j+6)
next
c_sen(6)=0

scalar jj
scalar m
vector(12) fat_saz

for  jj=1 to 12
        fat_saz(jj)=0
   for  m=1 to 6
     fat_saz(jj)= fat_saz(jj) + c_cos(m)*cos(jj*pi*m/6)  +  c_sen(m)*sin(jj*pi*m/6)
   next
next
```

>> Após obter os fatores sazonais do modelo por trigonométricos, observamos, conforme esperado, que eles coincidem com aqueles estimados através do modelo por dummies.

trigon

	FAT_SAZ		
	C1		
	Last updated: 05/17/12 - 19:26		
R1	36.31224		
R2	42.95930		
R3	26.34165		
R4	9.871064		
R5	-8.217172		
R6	-15.36423		
R7	-21.62894		
R8	-29.47296		
R9	-21.32145		
R10	-17.47296		
R11	-9.927510		
R12	7.920974		

dummies

C(2)	36.31224
C(3)	42.95930
C(4)	26.34165
C(5)	9.871064
C(6)	-8.217172
C(7)	-15.36423
C(8)	-21.62894
C(9)	-29.47296
C(10)	-21.32145
C(11)	-17.47296
C(12)	-9.927510

>> na coluna trigon γ_j = R(j), j=1,2,...,12
na coluna dummies γ_j = C(j), j=2,3,...,12

>> observar que, na coluna das dummies, C(2)= fat_saz jan, C(3)=fat_saz fev,..., C(12)= fat_saz nov. Para calcular o fator sazonal de dezembro utilizamos que

fat_saz dez= (-C(2)-C(3)-C(4)-C(5)-C(6)-C(7)-C(8)-C(9)-C(10) -C(11)-C(12))=7.920974

- Forma recursiva para fatores sazonais por SF.

$$\text{Se } \gamma_{jt} \equiv (\gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j t), \quad \text{então}$$

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{[S/2]} (\gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j t) = \sum_{j=1}^{[S/2]} \gamma_{jt}$$

Observe que:

$$\gamma_{jt} = \begin{cases} \gamma_j \cos\lambda_j + \gamma_j^* \operatorname{sen}\lambda_j t \quad j = 1, \frac{S}{2} - 1 \\ \gamma_{s/2} \cos\lambda_{s/2} t, \ j = s/2 \end{cases}$$

- Fazendo t=t+1 na expressão p/ γ_{jt}:

$$\text{Como } \gamma_{jt} = \gamma_j \cos \lambda_j t + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j t, \quad \text{então}$$

$$\gamma_{jt+1} = \gamma_j \cos \lambda_j (t+1) + \gamma_j^* \operatorname{sen} \lambda_j (t+1)$$

$$= [\cos\lambda_j \ \ \operatorname{sen}\lambda_j] \begin{bmatrix} \gamma_j \cos\lambda_j t + \gamma_j^* \operatorname{sen}\lambda_j t \\ -\gamma_\gamma \sin\lambda_j t + \gamma_j^* \cos\lambda_j t \end{bmatrix}$$

$$= [\cos\lambda_j \ \ \operatorname{sen}\lambda_j] \begin{bmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma_{jt}^* \end{bmatrix},$$

$$\text{onde } \gamma_{jt}^* = -\gamma_\gamma \sin\lambda_j t + \gamma_j^* \cos\lambda_j t.$$

- De forma análoga, fazendo t=t+1 p/ γ^*_{jt}

$$\gamma^*_{jt} = -\gamma_\gamma \sin\lambda_j t + \gamma^*_j \cos\lambda_j t, \quad \text{então:}$$

$$\gamma^*_{jt+1} = -\gamma_\gamma \sin\lambda_j (t+1) + \gamma^*_j \cos\lambda_j (t+1)$$

$$= [-\sin\lambda_j \ \cos\lambda_j] \begin{bmatrix} \gamma_j \cos\lambda_j t + \gamma^*_j \mathrm{sen}\lambda_j t \\ -\gamma_\gamma \sin\lambda_j t + \gamma^*_j \cos\lambda_j t \end{bmatrix}$$

$$= [-\mathrm{sen}\lambda_j \ \cos\lambda_j \ ] \begin{bmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma^*_{jt} \end{bmatrix}.$$

Finalmente unindo as duas equações, fazendo $t = t-1$, e adicionando um termo aleatório, obtemos a forma estocástica de sazonalidade por SF:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma^*_{jt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_j & \mathrm{sen}\lambda_j \\ -\mathrm{sen}\lambda_j & \cos\lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{jt-1} \\ \gamma^*_{jt-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_t \\ w^*_t \end{pmatrix},$$

$\therefore \quad w_t$ e $w^*_t \sim N(0, \sigma^2_w)$.

- Modelo Estrutural Básico:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \qquad \eta_t \sim N(0,\sigma_n^2)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \qquad \zeta_t \sim \mathrm{N}(0,\sigma_\xi^2)$$

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{S/2} \gamma_{jt}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma_{jt}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_j & sen\lambda_j \\ -sen\lambda_j & \cos\lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{jt-1} \\ \gamma_{jt-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{tj} \\ \omega_{tj}^* \end{pmatrix},$$

$$\omega_{tj} \sim N(0,\sigma_\omega^2), \quad j = 1, 2, \ldots, (S/2)$$

$$\omega_{tj}^* \sim N(0,\sigma_\omega^2) \quad j = 1, 2, \ldots, (S/2) - 1$$

- Supondo S=12, o modelo anterior possui a seguinte representação na forma de espaço de estados:

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_{1t} \\ \gamma^*_{1t} \\ \vdots \\ \gamma_{5t} \\ \gamma^*_{5t} \\ \gamma_{6t} \end{bmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_{1t} \\ \gamma^*_{1t} \\ \vdots \\ \gamma_{6t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & & & \\ & & & \dots & & \\ 0 & & & & C_5 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \gamma_{1,t-1} \\ \gamma^*_{1,t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{6,t-1} \end{bmatrix} + \mathrm{I}_{(13 \times 13)} \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \\ w_{1t} \\ w^*_{1t} \\ \\ w_{6t} \end{bmatrix}$$

$$onde\ \ C_j = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi j}{6}) & \sin(\frac{\pi j}{6}) \\ -\sin(\frac{\pi j}{6}) & \cos(\frac{\pi j}{6}) \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,3,4,5, \ \ C_6 = \cos(\frac{\pi 6}{6}) = -1$$

$$\eta_t = \left[\eta_t, \zeta_t, w_{1t}, w^*_{1t}, \dots, w_{6t} \right]^T, E(\eta_t \eta_t^T) = Q = \begin{bmatrix} \sigma^2_\eta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2_\zeta & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \sigma^2_w I_{11x11} \end{bmatrix}$$

Para s=4

$$y_t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_{1t} \\ \gamma_{1t}^* \\ \gamma_{2t}\end{pmatrix} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

$$\alpha_t = \begin{pmatrix}\mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_{1t} \\ \gamma_{1t}^* \\ \gamma_{2t}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \gamma_{1,t-1} \\ \gamma_{1,t-1}^* \\ \gamma_{2,t-1}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\eta_t \\ \zeta_t \\ \omega_{1t} \\ \omega_{1t}^* \\ \omega_{2t}\end{pmatrix}$$

$$\lambda_j = \frac{2\pi}{4} j = \frac{\pi}{2} j \begin{cases} \pi/2, & j=1 \\ \pi, & j=2 \end{cases}$$

$$\eta_t = \left(\eta_t \;\; \zeta_t \;\; \omega_{1t} \;\; \omega_{1t}^* \;\; \omega_{2t}\right)' \sim N(0,Q), \;\; Q = E(\eta_t\eta'_t) = \begin{pmatrix}\sigma_\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\omega^2 \mathrm{I}_{3x3}\end{pmatrix}.$$

>> Observe que embora cada choque sazonal possua a mesma distribuição $\mathrm{N}(0,\sigma_\omega^2)$, cada um dos choques aparece explicitamente nesse modelo. É fácil de ver que essa formulação não é equivalente a considerar um único choque sazonal para todos os fatores sazonais.