CRECIMIENTO POBLACIONAL

SISTEMAS COMPLEJOS

Profesor Jhon Freddy Sarmiento Vela

2025-1

https://es.symbolab.com/solver/logarithms-calculator/%5Cfrac%7B1.02944%7D%7B0.69314%7D?or=input

PROBLEMA 1 CRECIMIENTO BACTERIANO

- Inicialmente un cultivo tiene un numero P0 de bacterias. En t=1h se determina que el número de bacterias es 5P0/3. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias P(t) presentes en el tiempo t, determine el tiempo necesario para que se quintuplique el número de bacterias

1ª Condiciones iniciales $t = 0 \qquad P = P0$

2ª Condición $t = 1\,h \qquad P = \frac{5}{3}P0$

Ecuación de modelamiento $\frac{dP}{dt} = kP$

Paso 1 $\frac{dP}{P} = k \cdot dt$

Paso 2 $\int \frac{dP}{P} = \int k \cdot dt + C$

Paso 3 $lnP = k \cdot t + C$

C es la Constante de integración
Solución analítica
Solución a la ecuación diferencial

Paso 4 Reemplazar 1ª CI

$lnP0 = k \cdot (0) + C$

$lnP0 = C$

PROBLEMA 1 CRECIMIENTO BACTERIANO

- Inicialmente un cultivo tiene un numero P0 de bacterias. En t=1h se determina que el número de bacterias es 5P0/3. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias P(t) presentes en el tiempo t, determine el tiempo necesario para que se quintuplique el número de bacterias

1ª Condiciones iniciales $t=0$ $P=P0$

2ª Condición $t=1\,h$ $P=\frac{5}{3}P0$

Ecuación de modelamiento $\frac{dP}{dt} = kP$

Paso 1 $\frac{dP}{P} = k \cdot dt$

Paso 2 $\int \frac{dP}{P} = \int k \cdot dt + C$

Paso 3 $lnP = k \cdot t + C$

C es la Constante de integración
Solución analítica
Solución a la ecuación diferencial

Paso 5 Reemplazar 2ª C

$$ln\left(\frac{5}{3}\right)P0 = k(1) + C$$

$$ln\left(\frac{5}{3}\right)P0 = k + ln(P0)$$

$$ln\left(\frac{5}{3}\right)P0 - ln(P0) = k$$

$$ln\left(\frac{\frac{5}{3}P0}{P0}\right) = k \Rightarrow ln\left(\frac{5}{3}\right) = k$$

decimal
0.51082…

PROBLEMA 1 CRECIMIENTO BACTERIANO

- Inicialmente un cultivo tiene un numero P0 de bacterias. En t=1h se determina que el número de bacterias es 5P0/3. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias P(t) presentes en el tiempo t, determine el tiempo necesario para que se quintuplique el número de bacterias

1ª Condiciones iniciales $t=0$ $P=P0$

2ª Condición $t=1\,h$ $P=\frac{5}{3}P0$

Ecuación de modelamiento $\frac{dP}{dt}=kP$

Paso 1 $\frac{dP}{P}=k\cdot dt$

Paso 2 $\int\frac{dP}{P}=\int k\cdot dt+C$

Paso 3 $lnP=k\cdot t+C$

C es la Constante de integración
Solución analítica
Solución a la ecuación diferencial

Paso 6 Reemplazar Paso 3

$lnP=0.51082\cdot t+lnP0$

$e(lnP)=e(0.51082\cdot t)+e(lnP0)$

$e^{lnP}=e^{0.51082\cdot t}+e^{lnP0}$

$P=e^{0.51082\cdot t}*P0$

$P=P0\cdot e^{0.51082\cdot t}$ Ecuación de crecimiento exponencial para ese número de bacterias

PROBLEMA 1 CRECIMIENTO BACTERIANO

- Inicialmente un cultivo tiene un numero P0 de bacterias. En t=1h se determina que el número de bacterias es 5P0/3. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias P(t) presentes en el tiempo t, **determine el tiempo necesario para que se quintuplique el número de bacterias**

1ª Condiciones iniciales $t = 0 \qquad P = P0$

2ª Condición $t = 1\,h \qquad P = \frac{5}{3}P0$

Ecuación de modelamiento $\frac{dP}{dt} = kP$

Paso 1 $\frac{dP}{P} = k \cdot dt$

Paso 2 $\int \frac{dP}{P} = \int k \cdot dt + C$

Paso 3 $lnP = k \cdot t + C$

C es la Constante de integración
Solución analítica
Solución a la ecuación diferencial

Paso 7 Solución problema

$t = ? \qquad P = 5P0$

$P = P0 \cdot e^{0.51082 \cdot t}$

$5P0 = P0 \cdot e^{0.51082\,.\,t}$

$5 = e^{0.51082\,.\,t}$

$ln5 = ln\, e^{0.51082\,.\,t} \rightarrow ln5 = 0.51082\,.\,t$

$\frac{ln5}{0.51082} = t$

Solución

$3.15069\ldots$

PROBLEMA 2 MODELO SIMPLE DE POBLACIÓN

La población de una determinada colonia de bacterias es de 1786. Si el número de bacterias se duplica después de 1 hora calcule:

- El valor de la constante *k*
- La población que habrá cuando ha transcurrido hora y media (desde el inicio)
- ¿En qué momento la población es de 5000 bacterias?

Ecuación de población para cualquier tiempo ***t*** a partir de una población inicial

$$P(t) = P0e^{k \cdot t} \qquad P(0) = 1786$$

$$P(1) = 3572$$

$$P(1) = 1786\, e^{k(1)}$$

$$P(1) = 1786\, e^{k(1)} = 3572 \Rightarrow e^{k(1)} = \frac{3572}{1786}$$

$$e^{k} = 2$$

$$\boxed{k = ln2} \Rightarrow k = 0.69314$$

$$P(t) = P0e^{k \cdot t}$$

$$P(t) = 1786e^{(ln2) \cdot t}$$

$$P(1.5) = 1786e^{(ln2) \cdot 1.5}$$

$$P(1.5) = 1786e^{1.0397}$$

$$P(1.5) = 1786(2.8283)$$

Solución

$$5051.3438$$

$$p(t) = 1786e^{(ln2).t} = 5000$$

$$e^{(ln2).t} = \frac{5000}{1786}$$

$$e^{(ln2)t} = 2.7995$$

$$(ln2)t = ln2.7995$$

$$t = \frac{ln2.7995}{ln2} \Rightarrow t = \frac{1.02944}{0.69314}$$

Solución

$$1.48518\ldots$$

PROBLEMA 3 MODELO SIMPLE POBLACIÓNAL

En enero de 2000 la población mundial alcanzó los 6.144 miles de millones de personas, y en ese momento la tasa de crecimiento era de (1993 250.000 personas por dia). Suponiendo que las tasas de natalidad y mortalidad se mantienen constantes ¿Para cuándo se esperaría una población mundial de 11 mil millones (el doble que en 1993)

https://www.youtube.com/watch?v=-_TXQAzK7aQ

https://www.worldometers.info/es/poblacion-mundial/