cl. 9a – F5 – Operații cu vectori. Produsul vectorial, $\vec{PV} = \vec{a}\times\vec{b}$ 13.10.2021

1). – Def. $\vec{PV}$ – prod. vectorial ($\times$) a doi vectori $\begin{cases}\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \\ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\end{cases}$

2). – Reprezentarea grafică a vect. $\vec{a}, \vec{b}$ și a $\vec{PV} = \vec{a}\times\vec{b}$

3). – Proprietățile PV.

4). – Modul de calcul matricial al $\vec{PV} = \vec{a}\times\vec{b} = \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j$ tensorial

5) – Exemple din fizică: $\vec{M}_F = \vec{r}\times\vec{F}$ – momentul forței și $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v}$ – momentul cinetic.

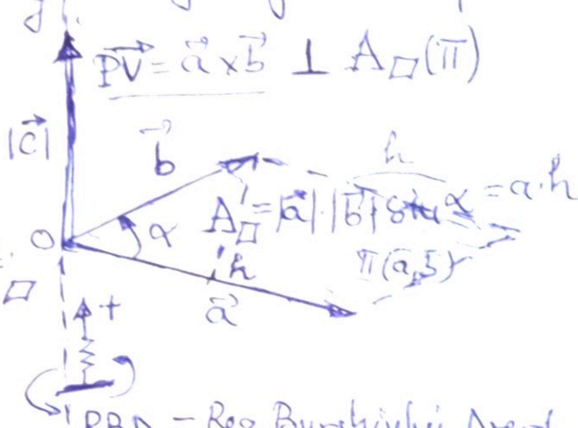
1). Def. PV – produsul vectorial a doi vectori $\vec{a}, \vec{b}$ este un vector $\vec{PV}$ definit astfel $\vec{PV} = \vec{a}\times\vec{b}$ având:

a) – modulul $|\vec{PV}|$ dat $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$, $\alpha = \widehat{\vec{a},\vec{b}}$

b) – direcția vect. $\vec{PV} = \vec{a}\times\vec{b}$ este $\perp$ pe planul $\pi(\vec{a},\vec{b})$ definit de cei doi vectori ca laturi ale paralelogramului ▱-lor

c) – sensul lui $\vec{PV} = \vec{a}\times\vec{b}$ este dat de RBD – reg. burghiului drept.

2). Reprezentarea grafică a $\vec{PV}$



- $\vec{a}, \vec{b}$ – vectorii, $\alpha = \sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b} \in \pi(\vec{a}, \vec{b})$
- $A_▱ = |\vec{a}|\cdot\underbrace{|\vec{b}|\cdot\sin\alpha}_{h} = a\cdot h$, $h = b\sin\alpha$ înălțimea ▱

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{PV} \uparrow\uparrow Oy \perp \pi(\vec{a}, \vec{b})$

(RBD) – Regula Burghiului Drept, așezat $\perp$ pe $\pi(\vec{a},\vec{b})$ și răsucit spre dreapta pentru a suprapune primul vector $\vec{a}\times\vec{b}$ peste cel de-al 2-lea din produs.

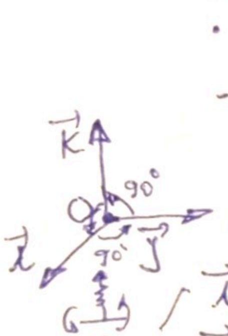
– Sensul de înaintare / vertical $PV = \vec{a}\times\vec{b}$ este sensul vectorului $\vec{PV} = \vec{a}\times\vec{b}$, (+)

– Modulul, $|\vec{PV}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha = a\cdot h$, $h = b\sin\alpha$ înălțimea ▱

3). Proprietățile PV a doi vectori $\vec{a}, \vec{b}$ sau versori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ unui SR (Oxyz)

- $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (ex.) $\vec{M}_F = \vec{r}\times\vec{F}$, sau $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v}$ (5)

$\begin{cases}\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b} \rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = \cancel{Max} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin 0^\circ = a\cdot b\cdot 0 = 0, \ \alpha = 0^\circ \\ \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b} \rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = 0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(180^\circ) = a\cdot b\cdot 0 = 0, \ \alpha = 180^\circ\end{cases}$



- $\vec{a}\perp\vec{b} \rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = Max = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin 90^\circ = a\cdot b(+1) = +a\cdot b$, $\alpha = 90^\circ$

Cazul versorilor (vectorilor unitari, Oxyz)

$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} \equiv 0. \\ |\vec{i}\times\vec{j}| = |\vec{j}\times\vec{k}| = |\vec{k}\times\vec{i}| \equiv 1.\end{cases}$ | $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| \equiv 1$. $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k}$; $i^2 = j^2 = k^2 \equiv 1$

Proprietățile $\vec{PV}$ dintre versorii identici sau diferiți ($\perp$) anti/paraleli ($\uparrow\uparrow$), ($\uparrow\downarrow$) perpendiculari

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$

4) Model de calcul matricial/tensorial al, $\vec{PV} = \vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_k$

Când vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ au forma analitice cunoscute

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{cases}$$

- produsul lor vectorial se poate calcula după metoda matricială astfel: cu matricea/determinantul asociat prin suprimarea liniei și coloanei pt. fiecare versor pe rând și extrăgând minorii corespunzători lui $\vec{i}$, apoi $\vec{j}$ și respectiv $\vec{k}$ astfel: înmulțiți cu $(-1)^{l+c}$ l-linie orizontală, c-coloană verticală

$$\vec{PV} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

matricea asociată (PV)

$$= \vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

- din dezvoltarea cărora obținem prin produsul elementelor diagonale astfel:

$$\vec{c} = \vec{PV} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}(-1)^2 \cdot \overbrace{(a_y b_z - a_z b_y)}^{c_x} + \vec{j}(-1)^3 \cdot \overbrace{(a_x b_z - a_z b_x)}^{c_y} + \vec{k}(-1)^4 \overbrace{(a_x b_y - a_y b_x)}^{c_z} =$$

$$\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{i} \cdot c_x + \vec{j} \cdot c_y + \vec{k} \cdot c_z.$$

unde
$$\begin{cases} c_x = (a_y \cdot b_z - a_z b_y) \\ c_y = (a_z b_x - a_x b_z) \leftarrow \text{conține } (-1)^3 \\ c_z = (a_x b_y - a_y b_x) \end{cases}$$

<**Aplicație**>

→ Exemplu concret de calcul: Fie
$$\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}$$
atunci,

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{4+9+16} \\ |\vec{a}| = \sqrt{29}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{16+9+4} \\ |\vec{b}| = \sqrt{29}. \end{cases}$$

Respectând regula arătată mai sus obținem:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_x = (a_y b_z - a_z b_y) = (3 \cdot 2 - 4 \cdot 3) = 6 - 12 = -6 \\ c_y = (a_z b_x - a_x b_z) = (4 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = 16 - 4 = 12 \\ c_z = (a_x b_y - a_y b_x) = (2 \cdot 3 - 3 \cdot 4) = 6 - 12 = -6 \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{25}{29}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 25$$

$$\begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha. \\ \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}. \end{cases}$$

deci
$$\begin{cases} \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} = \vec{a} \times \vec{b} \\ \vec{c} = (-6 \cdot \vec{i} + 12 \cdot \vec{j} - 6\vec{k}) \end{cases}$$
și $|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{(-6)^2 + 12^2 + (-6)^2} \Leftrightarrow$

iar

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

$|\vec{c}| \Leftrightarrow \sqrt{36 + 144 + 36} = \sqrt{216}.$