cl.9a - S.20.3 _ 19.02.2021

6.3 CENTRUL DE MASĂ AL UNUI SISTEM DE DOUĂ PARTICULE

Vom introduce acum noțiunea de *centru de masă* (*CM*) al unui sistem – un punct asociat sistemului care caracterizează oarecum „global" distribuția de masă a sistemului și se bucură de proprietăți remarcabile.

Pentru două particule de aceeași masă $m_1 = m_2$, centrul lor de masă se află la mijlocul distanței dintre ele, pe dreapta care unește cele două particule. Dacă particulele au mase diferite, centrul lor de masă se va găsi tot pe dreapta care le unește, dar mai aproape de particula de masă mai mare și anume, distanțele *CM* până la cele două particule sunt în raport invers cu masele lor (fig. 6.1):

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1} \text{ sau } m_1 d_1 = m_2 d_2, \text{ de unde } d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d, \text{ unde } d = d_1 + d_2. \qquad (6.8)$$

Să găsim vectorul de poziție $\vec{r}_{CM}$ al centrului de masă. Observăm că $\vec{r}_{CM}$ se compune din $\vec{r}_1$ plus vectorul $\vec{d}_1$ dus din m_1 spre *CM*. Având în vedere că $d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$ se scrie vectorial:

$$\vec{d}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underbrace{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}_{d},$$

rezultă că:

$$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), = \bar{r}_1 + \bar{d}_1$$

sau

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad ; \quad \vec{r}_{CM} = x_{CM}\vec{i} + y_{CM}\vec{j} + z_{CM}\vec{k} \qquad (6.9)$$

Relația vectorială (6.9) scrisă pe componente, de exemplu în cazul plan, ne dă coordonatele centrului de masă:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$
$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}. \qquad (6.10)$$
$$z_{cm} = -$$

De exemplu, alegând axa *Ox* pe direcția celor două particule (fig. 6.1), cu originea în m_1 și sensul spre m_2, avem:

$$x_1 = 0,\ x_2 = d \text{ și } x_{CM} =$$

$$x_{cm} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 d}{m_1 + m_2} = d_1.$$

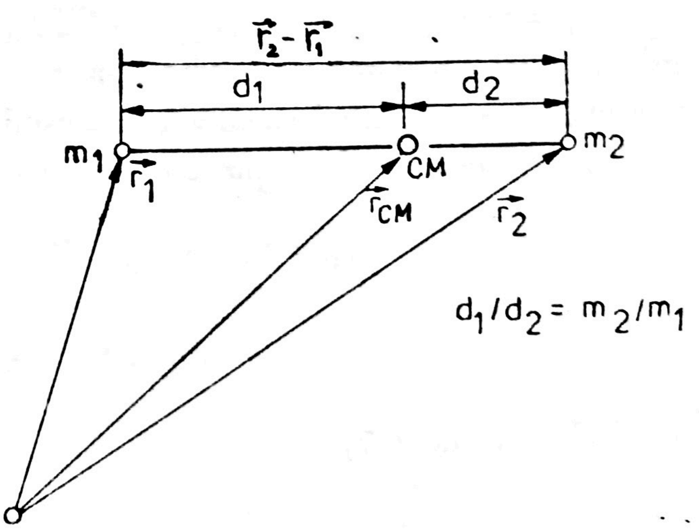

Fig. 6.1. Centrul de masă (*CM*) al unui sistem de două particule.

Vom demonstra două proprietăți remarcabile ale centrului de masă.

a) Să calculăm viteza centrului de masă. Pentru două momente succesive t, t' se poate scrie: ($\vec{v}_{CM}$)

$$m\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2; \quad m\vec{r}\,'_{CM} = m_1\vec{r}\,'_1 + m_2\vec{r}\,'_2,$$ unde am notat $m = m_1 + m_2$.

Prin scădere membru cu membru:

$$m(\vec{r}\,'_{CM} - \vec{r}_{CM}) = m_1(\vec{r}\,'_1 - \vec{r}_1) + m_2(\vec{r}\,'_2 - \vec{r}_2) \quad \text{sau} \quad m\Delta\vec{r}_{CM} = m_1\Delta\vec{r}_1 + m_2\Delta\vec{r}_2$$

și împărțind la intervalul de timp $\Delta t = t' - t$:

$m = (m_1 + m_2)$

$$m\frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = m_1\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t}$$

sau

$$m\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}. \tag{6.11}$$

Def.:

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}$ **Impulsul total al sistemului este egal cu masa sistemului înmulțită cu viteza centrului de masă.**

Observație. Centrul de masă se poate defini plecând de la expresia impulsului total al sistemului. În adevăr, scriind impulsul total al sistemului astfel:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta(m_1\vec{r}_1)}{\Delta t} + \frac{\Delta(m_2\vec{r}_2)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\Delta(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{\Delta t} = m\frac{\Delta\left(\dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m}\right)}{\Delta t}, (m = m_1 + m_2),$$

se vede că punctul definit prin vectorul de poziție:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i\vec{r}_i)}{\sum_{i=1}^{n}(m_i)}; \quad i = (1, \dots, n)$$

are proprietatea remarcabilă că viteza sa înmulțită cu masa sistemului ar fi concentrată în centrul de masă și s-ar mișca cu viteza acestuia.

b) Să calculăm accelerația centrului de masă: ($\vec{a}_{CM}$)

$$m\vec{v}_{CM} = \vec{P}, \quad m\vec{v}\,'_{CM} = \vec{P}', \quad m(\vec{v}\,'_{CM} - \vec{v}_{CM}) = \vec{P}' - \vec{P},$$

$$m\Delta\vec{v}_{CM} = \Delta\vec{P}, \quad m\underbrace{\frac{\Delta\vec{v}_{CM}}{\Delta t}}_{\vec{a}_{CM}} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

și ținând seama de (6.7):

$$\boxed{m\vec{a}_{CM} = \vec{F}.} \tag{6.12}$$

Def.:

($\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$) **Rezultanta forțelor externe este egală cu masa sistemului înmulțită cu accelerația centrului de masă.** ($\vec{a}_{CM}$)

$m = \sum_{i=1}^{n}(m_i) = m_1 + m_2 + \dots + m_n$