cl.11a - S.21.2 _ Rezolvari de pb _ Circ. RLC 22.02.2021

Aplicație

Circuitul serie *RLC* din 4.22, pentru care $R = 4\ \Omega$, $L = 6{,}37$ mH și capacitatea condensatorului variabil fixată pentru $C = 159\ \mu$F, este alimentat de un generator cu tensiunea efectivă $U = 120$ V și frecvența $\nu = 200$ Hz.

1. Să se determine:

a) intensitatea curentului din circuit și tensiunile U_R, U_L, U_C;

b) defazajul dintre intensitatea curentului și tensiunea la bornele circuitului;

c) valoarea capacității condensatorului variabil pentru care în circuit apare rezonanța;

d) factorul de supratensiune (factorul de calitate) al circuitului.

2. Este posibil să se înlocuiască bobina și condensatorul cu $C = 159\ \mu$F din circuitul inițial, cu o bobină echivalentă?

Soluție

1. a)
$$X_L = \omega L = 2\pi L \approx 8\ \Omega,\ X_C = \frac{1}{2\pi\nu C} \approx 5\Omega\ .$$

$$\boxed{I = \frac{U}{Z}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{120}{\sqrt{16+9}} = 24\ \text{A}\ ;$$

$$U_R = R \cdot I = 4 \cdot 24 = 96\ \text{V}\ ;\ U_L = X_L \cdot I = 8 \cdot 24 = 192\ \text{V}\ ;$$

$$U_C = X_C \cdot I = 5 \cdot 24 = 120\ \text{V}\ .$$

Verificare (fig. 4.29): $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = 120$ V.

b) $\text{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{3}{4} = 0{,}75;\ \varphi = 37^\circ$.

c) La rezonanță $X_{C_r} = X_L$, de unde $C_r = \frac{1}{\omega X_L} = \frac{1}{1256 \cdot 8} = 99{,}5\ \mu\text{F}$.

d) $I_r = \frac{U}{R} = 30\ \text{A}\ ;\ U_R = I_r \cdot R = 120\ \text{V},\ U_L' = I_r \cdot X_L = 240\ \text{V},\ U_C' = I_r \cdot X_C' = 240\ \text{V}\ .$

(La rezonanță U_L' și U_C' sunt egale, iar u_L' și u_C' în opoziție de fază, astfel încât $U_L' - U_C' = 0$.)

$$\boxed{Q = \frac{U_L'}{U} = \frac{U_C'}{U} = 2\ .}$$

2. Întrucât $U_L > U_C$, circuitul are caracter inductiv și totul se petrece ca și cum în circuit ar exista numai o bobină, cu inductanța echivalentă: $L_e = \frac{X}{\omega} = \frac{X_L - X_C}{\omega} = 2{,}4$ mH (X este reactanța circuitului).

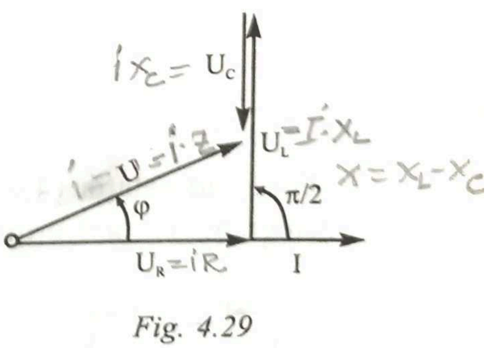

Fig. 4.29

Aplicație

Un circuit paralel RLC (fig. 4.30, a), alimentat cu o tensiune alternativă de valoare efectivă U şi frecvenţă ν', este parcurs de un curent total de intensitate efectivă minimă $I_{min} = 5$ A, bobina fiind parcursă de un curent de intensitate $I'_L = 5\text{ A}$. Care este valoarea efectivă a intensităţii curentului total I la o frecvenţă $\nu = 5\,\nu'$?

Soluție

Intensitatea curentului total are valoarea minimă când suma curenţilor prin condensator, I_C şi prin bobina ideală, I_L, este nulă, adică la rezonanţă de curent. În acest caz, tot curentul debitat de generator trece prin rezistorul R, $I_{min} = I_R$ şi $I'_C = I'_L = 5\text{ A}$. La mărirea frecvenţei de cinci ori (deci $\omega = 5\omega'$), reactanţa bobinei ideale devine $X = \omega L = 5\omega' L = 5\,X'_L$, iar reactanţa capacitivă devine $X_C = 1/\omega C = 1/5\omega' C = 5\,X'_C$. Ca urmare,

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{1}{5} I'_L = 1\text{ A}, \qquad I_C = 5I'_C = 25\text{ A},$$

de unde rezultă intensitatea efectivă a curentului total:

$$I = \sqrt{I_R^2 + \left(I_L - I_C\right)^2} = \sqrt{5^2 + 24^2} = \sqrt{25 + 576} \approx 24{,}5\text{ A}.$$

În acest caz circuitul paralel prezintă un aspect capacitiv, deoarece $I_L < I_C$, adică $X_L > X_C$

Aplicații

1. Un circuit serie de curent alternativ este alcătuit dintr-un bec cu rezistența $R_b = 20\Omega$ şi o bobină, având rezistența R şi inductanța L. Dacă se aplică circuitului tensiunea cu valoarea efectivă $U = 100$ V, cu frecvența $\nu = 50$ Hz, la bornele becului tensiunea este $U_b = 50$ V, iar la bornele bobinei $U_L = 70$ V. Să se determine:

a) intensitatea curentului în circuit;

b) rezistența bobinei;

c) inductanța bobinei;

d) puterile din bec şi bobină;

e) factorul de putere al circuitului şi puterile activă, reactivă şi aparentă din circuit.

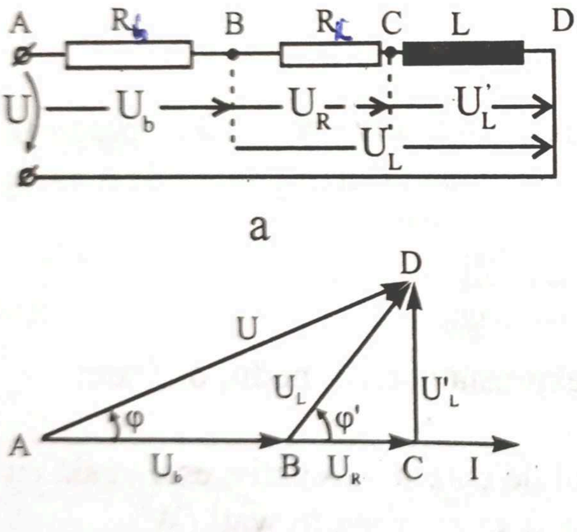

Fig. 4.35

Soluție

În schema circuitului din figura 4.35,*a* becul este reprezentat prin rezistorul R_b iar bobina prin rezistorul R_L şi bobina ideală L (desenată ca dreptunghi alungit şi înnegrit).

a) Din $U_b = R_b I$ rezultă intensitatea efectivă a curentului prin circuit:

$$I = \frac{U_b}{R_b} = \frac{50}{20} = 2{,}5 \text{ A}.$$

b) Diagrama fazorială a tensiunilor din circuit este dată în figura 4.35, *b*. Impedanța circuitului este $Z = U / I = 100/2{,}5 = 40\Omega$, iar impedanța bobinei $Z_L = U'_L / I = 70/2{,}5 = 28\Omega$.

* Unitatea adoptată de Comisia Electrotehnică Internațională în1930, la propunerea academicianului român Constantin Budeanu (1886 – 1959).

Pentru triunghiul ACD din diagrama fazorială se poate scrie $U^2 = (U_b + U_R)^2 + (U_L^{'})^2$, iar pentru triunghiul DCB:

$$U_L^2 = U_R^2 + (U_L^{'})^2 .$$

Prin eliminarea lui $(U_L^{'})^2$ din ultimele două relații, se obține:

$$U_R = \frac{U^2 - U_b^2 - U_L^2}{2U_b},$$

sau:

$$IR = \frac{I^2(Z^2 - R_b^2 - Z_L^2)}{2IR_b},$$

de unde prin simplificare:

$$R = \frac{Z^2 - R_b^2 - Z_L^2}{2R_b} = \frac{40^2 - 20^2 - 28^2}{2 \cdot 20} = 10{,}4\Omega .$$

c) Din triunghiul BCD rezultă impedanța bobinei:

$$Z_L^2 = X_L^2 + R^2 = L^2\omega^2 + R^2,$$

de unde:

$$L = \sqrt{\frac{Z_L^2 - R^2}{\omega^2}} = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{28^2 - (10{,}4)^2} \approx 0{,}082\ \text{H} = 82\ \text{mH}.$$

d) Puterea activă disipată în bec este $P_b = R_b \cdot I^2 = 20 \cdot 2{,}5^2 = 125$ W. Puterea activă disipată în bobină este $P_R = U_R \cdot I = RI^2$; $P_R = RI^2 = 65$W. Puterea reactivă a bobinei, de fapt a circuitului serie, este $P_r = U_L^{'} I = U_L I \sin\varphi'$. Dar $\sin\varphi' = X_L / Z_L = 2\pi\nu L / Z_L = 100\pi \cdot 0{,}082 / 28 = 0{,}92$, deci $P_r = 70 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}92 = 161$VAR.

Puterea aparentă pentru bobină este $S = U_L \cdot I = 70 \cdot 2{,}5 = 175$ VA.

c) Factorul de putere a circuitului se calculează din triunghiul ADC:

$$\cos\varphi = \frac{U_b + U_R}{U} = \frac{R_b + R}{Z} = \frac{20 + 10{,}4}{40} = 0{,}76.$$

Puterile din circuit sunt:

$$\begin{cases} P = UI\cos\varphi = 100 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}76 = 190\ \text{W}; \\ P_r = UI\sin\varphi = U_L^{'} I = U_L^{'} I \sin\varphi' = X_L I^2 = 161\ \text{VAR}; \\ S = UI = 100 \cdot 2.5 = 250\text{VA}. \end{cases}$$

2. Un circuit paralel este format dintr-un rezistor de rezistență $R = 1\text{k}\Omega$ o bobină cu inductanța $L = 25\mu\text{H}$ și un condensator variabil (fig. 4.36). Circuitul este alimentat de la un generator de curent alternativ de frecvență fixă (ν = 1MHz), care debitează – indiferent de impedanța circuitului exterior – un curent de intensitate efectivă I = 50 mA. Să se determine:

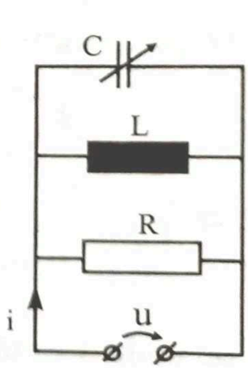

Fig. 4.36

a) capacitatea C_a a condensatorului variabil pentru care se realizează rezonanța curenților și puterea activă disipată în circuit în acest caz;

b) raportul $(C_2 - C_1)/C_a$, unde C_1 și C_2 sunt capacitățile condensatorului variabil pentru care puterea scade la jumătate din valoarea corespunzând rezonanței.

(Concurs de admitere, Facultatea de fizică, 1979.)

Soluție

a) $C_a = \frac{1}{L\omega^2} \approx 0{,}01\,\text{nF}$.

Circuitul fiind în cazul rezonanței, $I_L = I_C$, puterea disipată pe rezistorul R este maximă:

$$P_{rez} = U \cdot I = I^2 R = 2{,}5\text{W}.$$

b) $P = \frac{1}{2} P_{rez}$.

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = U \cdot I_R = R \cdot I_R^2$$

Ținând cont de relația dintre expresiile celor două puteri, obținem:

$$I_R^2 = \frac{I^2}{2} \Rightarrow I^2 = 2I_R^2.$$

Dar: $I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2$.

Deci: $I_R = \pm(I_L - I_C)$ sau $\frac{U}{R} = \pm\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)U$,

de unde se obține:

$$C_{1,2} = \frac{1}{\omega^2 L} \pm \frac{1}{\omega R}.$$

Rezultă: $\frac{C_2 - C_1}{C_a} = \frac{2L\omega}{R} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^6}{10^2} = 0{,}314$.

3. Se consideră circuitele din figura 4.37, *a, b*. Ce rezistență R_p și capacitatea C_p trebuie să aibă elementele circuitului din figura 2.37, *b*, cunoscând că $R_s = 5\Omega$, $C_s = 159\ \mu\text{F}$ și $\nu = 200\ \text{Hz}$, încât cele două circuite să fie echivalente?

Soluție

Circuitele *RC* serie și *RC* paralel sunt echivalente dacă puterile lor, activă și reactivă, au aceleași valori. Astfel, pentru determinarea lui C_p se scrie egalitatea dintre puterea reactivă pentru circuitul *RC* serie și cea pentru circuitul *RC* paralel:

$$X_s I_s^2 = X_p I^2 \quad \text{sau} \quad \frac{U^2}{Z_s^2} X_s = \frac{U^2}{X_p^2} X_p.$$

După operația de simplificare se obține:

$$\frac{1}{\omega C_p} = \frac{R_s^2 + \left(\frac{1}{\omega C_s}\right)^2}{\frac{1}{\omega C_s}}.$$

de unde rezultă:

$$C_p = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{1}{\omega C_s}}{R_s^2 + \left(\frac{1}{\omega C_s}\right)^2} = 80\,\text{mF}.$$

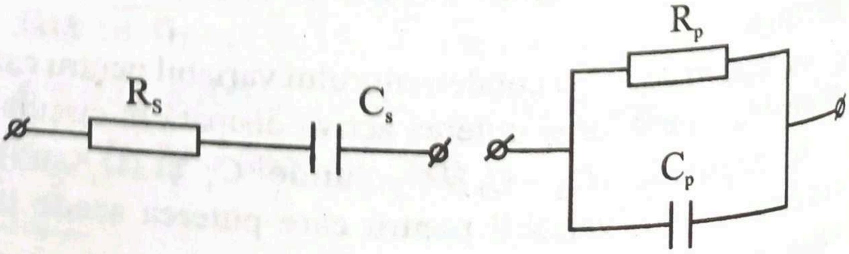

Fig. 4.37

Pentru determinarea lui R_p se porneşte de la expresia egalităţii pentru puterile active ale circuitelor RC serie şi RC paralel:

$$R_s I^2 = R_p I_{R_p}^2 \text{ sau } R_s \frac{U^2}{Z_s^2} = R_p \frac{U^2}{R_p^2},$$

de unde rezultă:

$$R_p = \frac{Z_s^2}{R_s} = \frac{R_s^2 + \dfrac{1}{C_s^2 \omega^2}}{R_s} = 10\Omega .$$

4. Instalaţia electrică a unei fabrici absoarbe pentru instalaţia de iluminat o putere P_1=20 kW (instalaţia de iluminat se consideră rezistivă), iar pentru instalaţia de forţă puterea P_2=200 kW la un $\cos\varphi_2 = 0{,}8$. Instalaţia primeşte energia de reţea printr-o linie de racord de lungime l = 1000 m, conductorii liniei având rezistenţa $R = 10^{-2}\ \Omega$/km. Tensiunea de alimentare este U = 380 V. Să se calculeze pierderea de putere pe linia de racord.

Soluţie

Pierderea de putere pe linia de racord este:

$$\Delta P = R_l I^2 = \frac{R_l S^2}{U^2} = R_l \frac{P^2 + P_r^2}{U^2} \text{ unde } P_r = P_2 \mathrm{tg}\varphi_2 = 200\cdot 10^3 \frac{0{,}6}{0{,}8} = 150\cdot 10^3 \mathrm{VAR}.$$

$P = P_1 + P_2 = 220\cdot 10^3$ W, iar $R_l = R\cdot 2l = 2\cdot 10^{-2}\,\Omega$. Rezultă:

$$\Delta P = 2\cdot 10^{-2}\,\frac{220^2 + 150^2}{380^2} 10^6 = 9819{,}94 \text{ W}.$$

• Prin rezolvarea acestei probleme se explică de ce pierderile de putere pe liniile de alimentare în energie electrică pot fi cu atât mai mici cu cât P_r este mai mic şi U mai mare, de unde şi necesitatea îmbunătăţirii factorului de putere cosφ, iar în cazul transmisiei energiei curentului electric alternativ – folosirea transformatoarelor electrice.

5. Pentru circuitul din figura 4.38, *a* se cunosc următoarele mărimi: $U = 60$ V, $R_1 = 8\Omega$, $X_L = 6\Omega$, $X_C = 4\Omega$, $R_2 = 3\Omega$. Să se determine:

a) intensitatea curentului din fiecare latură a circuitului, precum şi puterile active şi reactive corespunzătoare;

b) frecvenţa de rezonanţă.

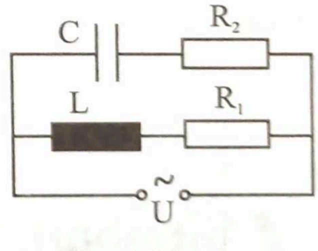

Fig. 4.38. a

Soluţie

a) Din diagrama fazorială a laturii inductive ($\varphi_1 > 0$) (fig. 4.38, *b*) se obţin: $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = 10\ \Omega$, $I_1 = \dfrac{U}{Z_1} = 6\text{A}$, $\cos\varphi_1 = \dfrac{R_1}{Z_1} = 0{,}8$,

$\sin\varphi_1 = \dfrac{X_L}{Z_1} = 0{,}8$, $\varphi_1 = 36°52'11''$.

$P_1 = UI_1 \cos\varphi_1 = 288$ W, $P_r = UI_1 \sin\varphi_1 = 216$VAR.

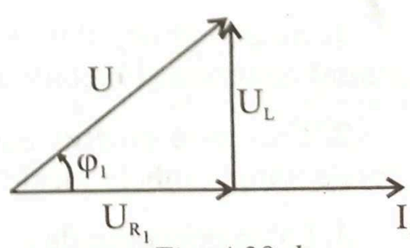

Fig. 4.38. b

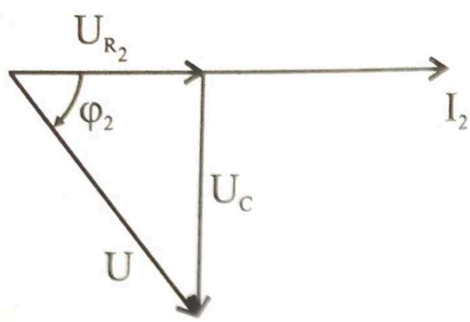

Fig. 4.38. c

Din reprezentarea fazorială a laturii capacitive ($\varphi_2 < 0$) (fig. 4.38, *c*), se obțin:

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = 5\Omega, \quad I_2 = \frac{U}{Z_2} = 12 \text{ A},$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = 0{,}6, \quad \sin\varphi_2 = \frac{-X_C}{Z_2} = -0{,}8 .$$

$$P_2 = UI_2 \cos\varphi_2 = 432 \text{ W}, \quad P_r = UI_2 \sin\varphi_2 - 576 \text{ var}.$$

Din diagramele fazoriale de laturi reunite se obține diagrama fazorială a întregului circuit (fig. 4.38,*d*), din care se obțin relațiile pentru componenta activă $I\cos\varphi$ și componenta reactivă a intensității curentului total:

$$I\cos\varphi = I_1 \cos\varphi_1 + I_2 \cos\varphi_2 ,$$

$$I\sin\varphi = I_2 \sin\varphi_2 - I_1 \sin\varphi_1 ,$$

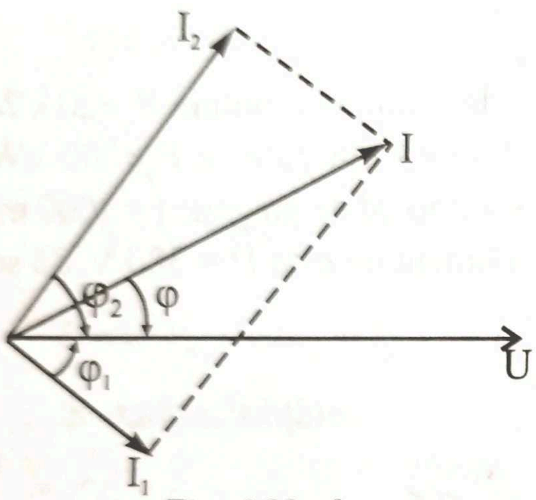

Fig. 4.38. d

relații care permit obținerea următoarelor valori:

$$I = 13{,}4\text{A}, \quad \cos\varphi = 0{,}89, \quad \sin\varphi = -0{,}45, \ \varphi = 26^\circ 44' 37''.$$

$$P = UI\cos\varphi = 720\text{W}, \quad P_r = UI\sin\varphi = -360 \text{ var}.$$

b) Condiția de rezonanță impune $\varphi = 0$, adică anularea componentei reactive a intensității curentului total, $I\sin\varphi$. De unde, urmare a calculului următor:

$$I_1 \sin\varphi_1 = I_2 \sin\varphi_2, \quad \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + L^2\omega^2}} \frac{L\omega}{\sqrt{R_2^2 + L^2\omega^2}} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}} \frac{\dfrac{1}{C\omega}}{\sqrt{R_2^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}}$$

$\omega^2 LC\left(R_2^2 C - L\right) = R_1^2 C - L$, se obține, în final:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\dfrac{L}{C} - R_1^2}{\dfrac{L}{C} - R_2^2}}.$$