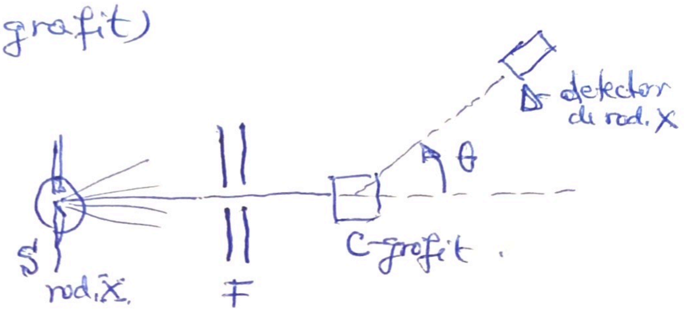
29.10.2020

(37) Efectul Compton și Electronul de recul

(cl. XII) pg (41-43)

- Teoria corpusculară a luminii, emisă de A. Einstein, a fost confirmată de cele două efecte cuantice: 1) – Efectul fotoelectric extern – (EFE)
  2) – Efectul Compton (EC) → 1923
- Def. EC – efectul Compton constă în obținerea unei radiații parazite/suplimentare X, de lungime de undă ($\lambda > \lambda_0$) mai mare decât cea incidentă (λ_0) când este împrăștiată pe un cristal (C-grafit)
- Alcătuirea dispoz. exp.

  S. – Tub/sursă de rad. X
  F. – F-fante pt. colimarea fascicol.
  C. – Cristal/Bloc de C-grafit.
  D. – Detector de rad. X la unghi θ



- Explicarea ef. Compton – se bazează pe interacțiunea dintre un foton de rad. X ($E_f = h\nu_0$; $p_f = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$) și un e^- – electron cvasi-liber (slab legat) cu materialul cristalului – C

Aplicăm leg. cons. energiei în proc. de ciocnire (interacțiune) elastică: ($p_0 = \frac{h}{\lambda_0} = \frac{h\nu_0}{c}$; $E_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$) pentru fotonul X – incident și e^- – împrăștietor (m_0) înainte de ciocnire și fotonul nou/împrăștiat pe e^- de recul ($p_e = m \cdot v_e$, $E_c = \frac{mv^2}{2}$);

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$$

deci: $\begin{cases} E_0 = E + E_c + L \\ h\nu_0 = h\nu + E_c + L \end{cases}$; dar $\left(\frac{L}{E_0}\right) \sim \frac{1}{1550}$, $L \ll E_0 = h\nu_0$ și se neglijează

$$h\nu_0 = h\nu + E_c \; ; \quad E_c = \left(\frac{mv_e^2}{2}\right) = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2$$

(1) $\boxed{h\nu_0 = h\nu + (mc^2 - m_0c^2)}$ E_c – relativistă a e^- – electronului de recul.

$\begin{cases} E_0 = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0} \to \text{energ. fotonului X – incidente rad.} \\ E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \to \text{energ. fotonului rad. X – împrăștiate} \end{cases}$

Legea cons. impulsului

$\begin{cases} \boxed{\Delta p = 0} \Rightarrow p_f - p_i = 0 \\ \boxed{p_i = p_f} \end{cases}$

unde: $\begin{cases} p_0 = \frac{h}{\lambda_0} = \frac{h\nu_0}{c} \to \text{impulsul rad. X – incidente.} \\ p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} \to \text{impulsul rad. X – emergente împrăștiate} \end{cases}$

$\begin{cases} \bar{p}_i = \bar{p}_0 = \left(\frac{h}{\lambda_0}\right) = \frac{h\nu_0}{c} \\ \bar{p}_f = \bar{p} + \bar{p}_e = \left(\frac{h}{\lambda}\right) + mv \end{cases}$

Electronul de recul

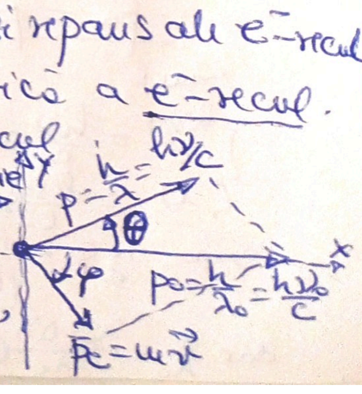
– m, m_0 – masele de mișcare și repaus ale e^- – recul
$E_c = mc^2 - m_0c^2$ – energ. cinetică a e^- – recul.
$p_e = m_e v_e$ – impulsul e^- – recul

- deci $\boxed{\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e}$ ec. vectorială

$$(\vec{p}_e)^2 = (\vec{p} - \vec{p}_0)^2 \to p_e^2 = p^2 - 2pp_0\cos\theta + p_0^2$$

$$m^2v^2 = \frac{h^2\nu^2}{c^2} - \frac{2h^2\nu\nu_0}{c^2}\cos\theta + \frac{h^2\nu_0^2}{c^2} \Rightarrow m^2v^2c^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu_0^2 - 2h^2\nu\nu_0\cos\theta, \quad (2)$$

Schema de interacție



Rescriem ec (1) sub forma: (1') apoi se ridică la pătrat:

$$(1)': [mc^2]^2 = [h(\nu_0 - \nu) + m_0c^2]^2 \Rightarrow m^2c^4 = h^2\nu_0^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu_0\nu + 2h(\nu_0-\nu)m_0c^2 + m_0^2c^4$$

– Apoi scădem ec. (2) din (1') și împărțim totul la $(2h\nu_0\nu \cdot m_0c)$

rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{\nu} - \dfrac{c}{\nu_0} = \dfrac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \\ \lambda - \lambda_0 = \dfrac{h}{m_0c}\, 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$\nu = \left(\frac{c}{\lambda}\right)$; $\lambda = \left(\frac{c}{\nu}\right)$; $\nu\lambda = c$

$\Delta\lambda = (\lambda - \lambda_0)$ – variația lungimii de undă

deci $\Delta\lambda = (\lambda - \lambda_0) = \left(\frac{2h}{m_0c}\right)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \Lambda(1-\cos\theta)$

$$\boxed{\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \Lambda(1-\cos\theta)}$$

$\boxed{\Lambda = \left(\frac{h}{m_0c}\right)}$ – lungimea de undă Compton.

$$\Lambda = \frac{6{,}626\cdot10^{-34}\,Js}{9{,}1\cdot10^{-31}\,kg\cdot 3\cdot10^{8}\,m/s} \simeq 2{,}426\cdot10^{-12}\,m.$$

deci: $\left(\lambda_0, \nu_0, E_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, p_0 = \frac{h}{\lambda_0} = \frac{h\nu_0}{c}\right) \to$ rad. incidentă X

$\left(\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda, \nu, E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}\right) \to$ rad. X – emergentă, suplimentară/împrăștiată

θ – unghiul de împrăștiere față de rad. incid.

Concluzie: – rad. X incidentă $(E_0, \nu_0, \lambda_0, \bar{p}_0)$ este împrăștiată pe un e^- cvasiliber (slab legat în cristal) și se împrăștie, pierzând parțial energie de la $(E_0 \to E)$ pe care o cedează/primește e^- – electronul de recul care participă la împrăștierea rad. X

Discuție: $(\lambda_0 \to \lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda)$

$\Delta\lambda \nearrow 0$, $\theta = 0$

$\searrow \Delta\lambda_{Max} = 2\cdot\Lambda = 2\left(\frac{h}{m_0c}\right) = 2\cdot 2{,}426\cdot10^{-12}\,m$, $\theta_{max} = 180°$

Deci $\longrightarrow$ $\lambda_{min} = \lambda_0 + 0$, $\theta = 0$; $\lambda_{max} = \lambda_0 + 2\Lambda$, $\theta = 180°$

Electronul de recul – rezultat în procesul de împrăștiere, este caracterizat de două mărimi și unghiul de împrăștiere (φ)

$$\begin{cases} E_c = mc^2 - m_0c^2 & \text{– energ. cinetică} \\ \bar{p}_e = m\bar{v}_e & \text{– impulsul } e^- \text{ recul.} \end{cases}$$

deci: $E_c = mc^2 - m_0c^2 = h\nu_0 - h\nu = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = hc\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0}\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 + \Delta\lambda}\right)$

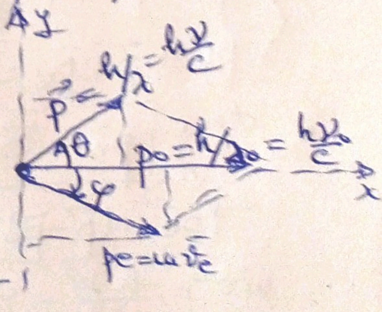
$$\boxed{E_c = \left(\frac{hc}{\lambda_0}\right)\left(\frac{2\Lambda\sin^2(\theta/2)}{\lambda_0 + 2\Lambda\sin^2\theta/2}\right)}$$

unghiul φ – se det. din proiecția ec. impulsului pe Oxy.

$$\bar{p}_0 = \bar{p} + \bar{p}_e \begin{cases} (Ox): & p_0 = p\cos\theta + p_e\cos\varphi \quad (1) \\ (Oy): & 0 = p\sin\theta - p_e\sin\varphi \quad (2) \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} \dfrac{h\nu_0}{c} = \dfrac{h\nu}{c}\cos\theta + mv\cos\varphi \quad (1) \\ 0 = \dfrac{h\nu}{c}\sin\theta - mv\sin\varphi \quad (2) \end{cases} \to \begin{cases} mv\cos\varphi = \dfrac{h\nu_0}{c} - \dfrac{h\nu}{c}\cos\theta \\ mv\sin\varphi = \dfrac{h\nu}{c}\sin\theta \end{cases}$$



sau $tg\,\varphi = \dfrac{(h/\lambda)\sin\theta}{(h/\lambda_0) - (h/\lambda)\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\frac{\lambda}{\lambda_0} - \cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + 1\right) - \cos\theta} = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta/2}{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + \frac{\Delta\lambda}{\Lambda}}$

dar $\dfrac{\lambda}{\lambda_0} = \dfrac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{\lambda_0} = \left(1 + \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)$

deci $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\theta}{\left(\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}+1\right) - \cos\theta} = \dfrac{\cancel{2}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\dfrac{\cancel{2}\Delta\sin^2\theta/2}{\lambda_0} + \cancel{2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2\left(\dfrac{\Delta}{\lambda_0}+1\right)} = \dfrac{\operatorname{ctg}\theta/2}{1+\dfrac{\Delta}{\lambda_0}}$

deci $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{(1+\Delta/\lambda_0)}}$