F.11 – Acceleratia. Vectorul acceleratie, $\vec{a}$

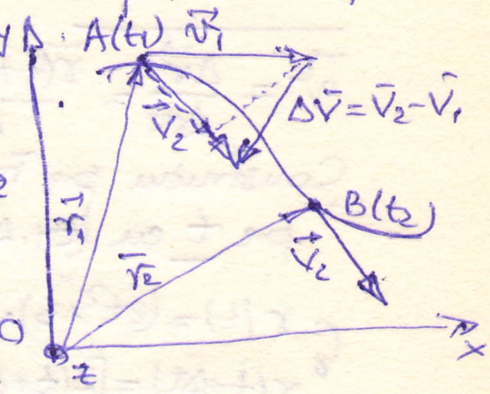
22.10.2020

(man. cl. a IX-a – All
pag. 64-65)

1). **Def.** Acceleratia, $\vec{a}$ – reprezintă m.f.v. – marimea fizică vectorială definită prin raportul dintre Δ vectorul ~~deplasare~~ viteză $\Delta\vec{v}$ și intervalul de timp, Δt corespunzător

$$\boxed{a \overset{def}{=} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}}$$

unde $\begin{cases} \Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \\ \Delta t = t_2 - t_1 \end{cases}$



dar:
$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$ → forma analitică a vect. viteză, $\vec{v}$

$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = v_{1x} \cdot \vec{i} + v_{1y} \cdot \vec{j} + v_{1z} \cdot \vec{k} \\ \vec{v}_2 = v_{2x} \cdot \vec{i} + v_{2y} \cdot \vec{j} + v_{2z} \cdot \vec{k} \end{cases}$

$\Delta\vec{v} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \underbrace{(v_{2x} - v_{1x})}_{\Delta v_x} \cdot \vec{i} + \underbrace{(v_{2y} - v_{1y})}_{\Delta v_y} \cdot \vec{j} + \underbrace{(v_{2z} - v_{1z})}_{\Delta v_z} \cdot \vec{k}$

Variatia vitezei

deci: $\Delta\vec{v} = \Delta v_x \cdot \vec{i} + \Delta v_y \cdot \vec{j} + \Delta v_z \cdot \vec{k}$ unde $\begin{cases} \Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} \\ \Delta v_y = v_{2y} - v_{1y} \\ \Delta v_z = v_{2z} - v_{1z}. \end{cases}$

atunci!
$\vec{a} = \underbrace{\left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right)}_{a} = \underbrace{\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)}_{a_x} \vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)}_{a_y} \cdot \vec{j} + \underbrace{\left(\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)}_{a_z} \cdot \vec{k}$

componentele accel. pe Oxyz
$\begin{cases} a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \parallel Ox \\ a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \parallel Oy \\ a_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}, \parallel Oz \end{cases}$

deci: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$

forma analitică a vect. accel.!

2) Unitatea de măsură pt acceleratie (u.m)

$\langle a \rangle_{SI} = \frac{\langle \Delta v \rangle}{\langle \Delta t \rangle} = \frac{m/s}{s} = \left(\frac{m}{s^2}\right)$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

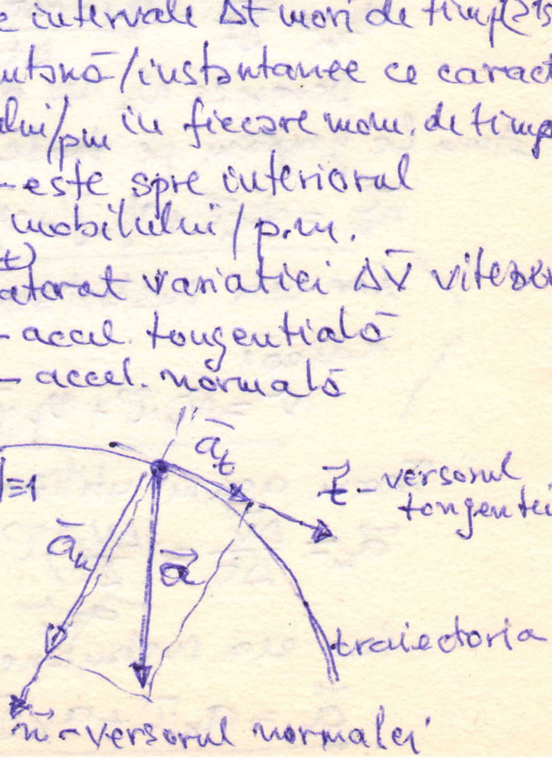
3). Clasificarea / Tipuri de acceleratie.

$a \begin{cases} a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \Delta t \gg 1s, \text{ accel. medie – caracterizează misc. mobilului pe intervale } \Delta t \text{ mari de timp } (\geq 1s) \\ a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \Delta t \ll 1s, \text{ accel. momentană / instantanee ce caract. misc. mobilului / p.m. în fiecare mom. de timp} \end{cases}$

4) Orientarea / ~~directia~~ vect. accel. $\vec{a}$ – este spre interiorul curbei / traiectoriei de mișcare a mobilului / p.m.

5) Acceleratia normală și tangentială (a_n, a_t)
În general vectorul accel. este datorat variatiei $\Delta\vec{v}$ vitezei sub două aspecte $\begin{cases} \text{modul, } (a_t) \text{ – accel. tangentială} \\ \text{orientare, } (a_n) \text{ – accel. normală} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = a_n \cdot \vec{n} + a_t \cdot \vec{t}; \\ |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \end{cases} \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{t} \\ |\vec{n}| = |\vec{t}| = 1 \end{cases}$



$\begin{cases} \vec{a}_n \text{ – accel. normală, datorată variatiei orientarii vect. viteză.} \\ \vec{a}_t \text{ – accel. tangentială, datorată variatiei / schimbarii directiei / orientarii vectorului viteză} \end{cases}$

Pb/. Se dă legea de mișcare a unui mobil, ca funcție de timp sub forma $\vec{r}(t) = (2t^2+3)\vec{i} + (t^2-1)\vec{j} + 2t\cdot\vec{k}$

Să se determine:

a) vitezele $\vec{v}_m(t)$-medie și $\vec{v}$-instantanee

b) accelerațiile $\vec{a}_m$-medie și $\vec{a}$-instantanee.

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Construim pe $\vec{r}(t+\Delta t)$ din expresia lui $\vec{r}(t)$, substituind pe t cu $(t+\Delta t)$ în legea de mișcare dată, astfel:

$$r(t) = (\overset{x}{2t^2+3})\cdot\vec{i} + (\overset{y}{t^2-1})\cdot\vec{j} + (\overset{z}{2t})\cdot\vec{k} = x\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

$$r(t+\Delta t) = \underset{x}{[2(t+\Delta t)^2+3]}\cdot\vec{i} + \underset{y}{[(t+\Delta t)^2-1]}\cdot\vec{j} + \underset{z}{2(t+\Delta t)}\cdot\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\vec{i} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\vec{j} + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\vec{k}$$

Pe componente:

$$v_{x_m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{[2(t+\Delta t)^2+3] - (2t^2+3)}{\Delta t} = \frac{2(\cancel{t^2}+2t\cdot\Delta t+\Delta t^2)+\cancel{3}-\cancel{2t^2}-\cancel{3}}{\Delta t} = \frac{4t\Delta t + 2\Delta t^2}{\Delta t} =$$

$$\underbrace{v_{x_m} = 4t + 2\Delta t}_{\text{viteza medie pe } Ox} \qquad \underbrace{v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t},\ \Delta t \to 0}_{\text{viteza instantanee pe } Ox} = 4t + 2\cdot\underset{=0}{\Delta t} = 4t$$

$$v_{y_m} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{[(t+\Delta t)^2-1] - (t^2-1)}{\Delta t} = \frac{\cancel{t^2}+2t\Delta t+\Delta t^2-\cancel{1}-\cancel{t^2}+\cancel{1}}{\Delta t} = 2t + \Delta t \quad (\Delta t \to 0)$$

deci $\underline{v_{y_m} = (2t+\Delta t)}$; $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \Delta t \to 0 = 2t + \underset{=0}{\Delta t} = \underline{2t}$

v_{m_y} - viteza medie pe Oy; v_y - viteza instantanee pe Oy, v_y

la fel procedăm și pe Oz.

$$v_{z_m} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{[2(t+\Delta t)] - 2t}{\Delta t} = \frac{\cancel{2t}+2\cdot\Delta t-\cancel{2t}}{\Delta t} = 2$$

Deoarece v_z nu depinde de timp $\to v_{m_z} = v_z = 2$ m/s

Acum le grupăm pe toate în vectorul viteză medie, v_m și v-instantanee

$$\vec{v}_m = v_{x_m}\cdot\vec{i} + v_{y_m}\cdot\vec{j} + v_{z_m}\cdot\vec{k} = \underbrace{(4t+2\Delta t)}_{v_{m_x}}\vec{i} + \underbrace{(2t+\Delta t)}_{v_{m_y}}\cdot\vec{j} + \underbrace{2}_{v_{m_z}}\vec{k}$$

iar cea instantanee se obține din v_m făcând $\underline{\Delta t = 0}$ și dispare adică:

$$v = v_x\cdot\vec{i} + v_y\cdot\vec{j} + v_z\cdot\vec{k} = (\overset{v_x}{4t})\cdot\vec{i} + (\overset{v_y}{2t})\cdot\vec{j} + (\overset{v_z}{2})\vec{k}$$

Trecem acum utilizând o procedură similară, la calculul accelerației

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \underbrace{\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)}_{a_{m_x}}\vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)}_{a_{m_y}}\cdot\vec{j} + \underbrace{\left(\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)}_{a_{m_z}}\vec{k} = \underline{a_{m_x}\vec{i} + a_{m_y}\vec{j} + a_{m_z}\vec{k}}$$

iar cea instantanee.

$$\vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k} \text{, unde facem } (\Delta t \to 0)$$

F. 11. 3

deci $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)\vec{i} + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)\vec{j} + \left(\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)\cdot\vec{k}$

Începem cu

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = \frac{4(\cancel{t}+\Delta t) - \cancel{4t}}{\Delta t} = \frac{4\Delta t}{\Delta t} = \boxed{4 = a_x}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = 4t \\ v_x(t+\Delta t) = 4(t+\Delta t) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{x_m} = 4 \text{ - accel. medie} \\ a_x = 4 \neq 0 \text{ - accel. instantanee.} \end{cases}$$

$$a_{y_m} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} = \frac{(\cancel{2t}+2\Delta t) - \cancel{2t}}{\Delta t} = \frac{2\Delta t}{\Delta t} = \boxed{2 = a_y}$$

$$\begin{cases} v_y(t) = 2t. \\ v_y(t+\Delta t) = 2(t+\Delta t) = 2t + 2\Delta t \end{cases}$$

$$a_{z_m} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = \frac{v_z(t+\Delta t) - v_z(t)}{\Delta t} = \frac{2-2}{\Delta t} = 0. = a_z$$

$$\begin{cases} v_z(t) = 2 \\ v_z(t+\Delta t) = 2 \end{cases}$$

Colectăm toate rezultatele, componente ale accel. pe axe Oxyz în forma generală a vect. accelerație.

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \quad \begin{cases} \bar{a}_m = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\ \bar{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \end{cases}$$

Constatăm că, aici ambele tipuri de accelerații (instantanee) sunt egale.

Să calculăm acum modulele vect. viteză $|\vec{v}|$ și vect. accel. $|\vec{a}|$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(4t)^2 + (2t)^2 + 2^2} = \sqrt{16t^2 + 4t^2 + 4}, \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{20t^2 + 4}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 4 + 0} = \sqrt{20}, \text{ m/s}^2$$

obs. Orice problemă de acest tip se rezolvă după acest algoritm.