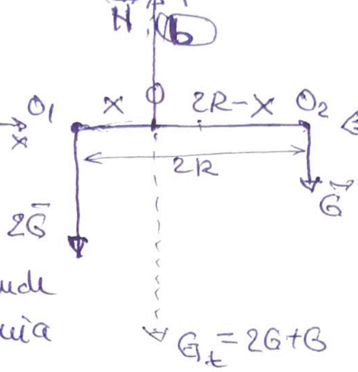
Cl. 9a – S 23.3 – Rezolvari de pb. cu CM si CG al corpurilor compuse.

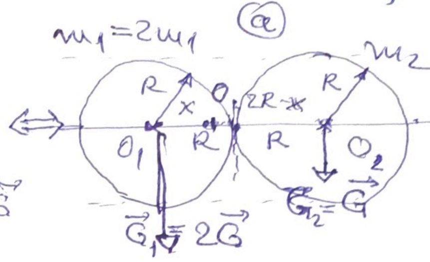
Hristev. al X-a
EDP–1996

(24/212) Două bile cu razele egale, R sunt fixate/sudate în punctul de contact. Masa $m_1 = 2m_2$ primeia este dublul celeilalte. Să se determine poziția centrului de greutate, CG, proporțional cu centrul de masă, CM

$m_1 = 2m_2$
$R_1 = R_2 \equiv R$.

$x_{CM}, x_{CG} = ?$





• Obs. CG – centrul de greutate al oricarui corp omogen corespunde cu CM – centrul de masă al acestuia și sunt plasate (ambele) pe centrul/axa/planul sau de simetrie.

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}} \cdot \left(\frac{\vec{g}}{g}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{CG} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{G}_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \vec{G}_i}\right)}$$

$$x_{CG} = \left(\frac{\sum_i G_i x_i}{\sum_i G_i}\right) \quad y_{CG} = \left(\frac{\sum_i G_i y_i}{\sum_i G_i}\right) \quad z_G = \left(\frac{\sum_i G_i z_i}{\sum_i G_i}\right)$$

(P1) – Desenam ansamblul celor două corpuri/sfere (a) de raze egale, $R_1 = R_2 \equiv R$ și considerăm schema lor simplificată, bara O_1O_2 de lungime, $2R$ la capetele careia plasam cele două greutăți echivalente, $G_1 = 2G_2$ ca in fig. (b)

– centrul de masă/greutate al fiecarei sfere se află în centrul său, fiind un corp simetric (sferă) O_1 respectiv O_2 aflate la distanța fiecareia totală $R_1 + R_2 = 2R$, avand razele egale din definitia pb.

(P2) Alegem centrul de rotatie (O) in presupusul CG – centru de greutate a.î, sprijinind ansamblul celor două corpuri în (O) să stea în echilibru [atat la translatie cat si la rotatie fata de polul (O) și introducem forta $\vec{H}$ – de reactiune normală/legatură, care va fi egală dar opusă cu $\vec{G}_t = 2\vec{G} + \vec{G} = 3\vec{G}$. ales.]

(P3) Aplicam formulele celor două cond. de echil.

de translatie
I. $(\vec{R}_i = \sum_i \vec{F}_i = 0)$
de rotatie
II. $(\vec{M}_R = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0)$

deci
I: $\begin{cases} \vec{R} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{H} = 0. \\ Oy: -2G - G + H = 0 \rightarrow \underline{H = 3G} \end{cases}$

II: $\begin{cases} \vec{M}_R(O) = \vec{M}_O(\vec{G}_1) + \vec{M}_O(\vec{H}) + \vec{M}_O(\vec{G}_2) = 0 \\ M_R(O) = G_1 \cdot x + 0 - G_2(2R - x) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} M_O(G_1) = G_1 \cdot x > 0 \ (+) \\ M_O(\vec{H}) = H \cdot 0 = 0 \\ M_O(G_2) = G_2 \cdot (2R - x) < 0 \end{cases}$

$G_1 = 2G, \ G_2 = G$.

deci: $2G \cdot x - G(2R - x) = 0$
$2G \cdot x - 2G \cdot R + G \cdot x = 0$.
$3G \cdot x = 2G \cdot R \ /: G. \Rightarrow 3x = R$

$$\boxed{x = R/3}$$

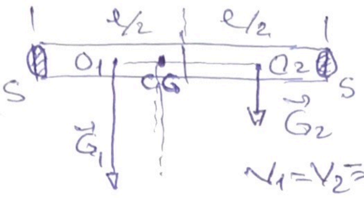
(25/212) O bară cilindrică de lungime totală $l = 30$ cm este făcută omogen, jumătate din oțel și jumătate din Al-aluminiu, știind densitatea lor $\rho_{otel} = \rho_1 = 7860\ Kg/m^3$ și respectiv $\rho_{Al} = \rho_2 = 2700\ kg/m^3$. Să se determ. poziția CG-centrul de greutate al barei mixte, $X_{CG} = ?$

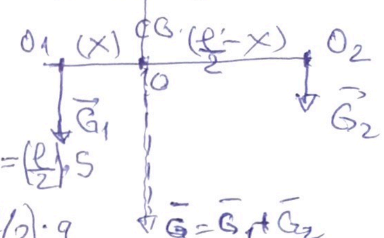
$l = 30cm = 0{,}3m.$

$\rho_{otel} = \rho_1 = 7860\ Kg/m^3$

$\rho_{Al} = \rho_2 = 2700\ Kg/m^3$

$X_{CG} = ?$





$V_1 = V_2 = V = \left(\frac{l}{2}\right) \cdot S$

$\boxed{m = \rho \cdot V} \leftarrow \boxed{\rho = \left(\frac{m}{V}\right), \frac{kg}{m^3}}$ densitatea.

$\begin{cases} G_1 = m_1 \cdot g = (\rho_1 V_1) g = \rho_1 (S \cdot l/2) \cdot g \\ G_2 = m_2 \cdot g = (\rho_2 V_2) g = \rho_2 (S\, l/2) \cdot g \end{cases}$

$\begin{cases} M_0(G_1) = X \cdot G_1 > 0 \\ M_0(H) = 0 \cdot H = 0 \\ M_0(G_2) = (l/2 - x) \cdot G_2 < 0 \end{cases}$

Impunem cond. de ech.: la translație și rotație:

I. $\begin{cases} \vec{R} = \vec{G_1} + \vec{H} + \vec{G_2} = 0 \\ Oy: R_y = -G_1 + H - G_2 = 0. \\ \quad H = G_1 + G_2 \to |\vec{G}| \end{cases}$

II. $\begin{cases} \bar{M}_0(R) = \bar{M}_0(\bar{G}_1) + \bar{M}_0(H) + \bar{M}_0(\bar{G}_2) = 0. \\ M_0(R) = x \cdot G_1 - (l/2 - x) \cdot G_2 = 0. \end{cases}$

$x \cdot G_1 - \frac{l}{2} G_2 - x\, G_2 = 0.$

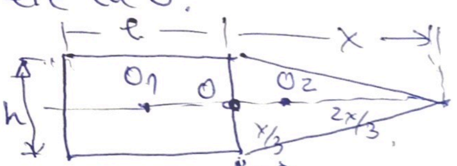
$x(G_1 + G_2) = \frac{l}{2} \cdot G_2$

$X_{CG} = \left(\frac{G_2}{G_1 - G_2}\right) \frac{l}{2}$

deci $X_{CG} = \left(\frac{\rho_2 \cancel{S} \cancel{l/2} \cancel{g}}{(\rho_1 - \rho_2) \cancel{S} \cancel{\frac{l}{2}} \cancel{g}}\right) \cdot \left(\frac{l}{2}\right)$

$\boxed{X_G = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2}\right) \left(\frac{l}{2}\right)} = \left(\frac{2700}{7860 - 2700}\right) \cdot 0{,}15 = 0{,}1134\,m \simeq 11{,}34\ cm = X_{CG}$

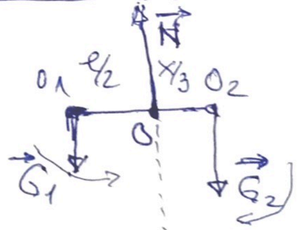
(26/212) O placă metalică are forma din fig. (dreptunghi + triunghi). Să se determine raportul dintre x-înălțimea triunghiului și l-lung. dreptunghiului astfel ca centrul de greutate (CG) să fie între ele în O.



Obs: - Centrul de masă/greutate al triunghiului se află la (1/3) de bază și (2/3) de vârf. cu O_2

- Centrul dreptunghiului se află la (l/2)

- Placa este formată din același material/omogenă



$G = mg = \rho \cdot A \cdot hg$

$\begin{cases} G_1 = \rho h l g \\ G_2 = \rho h \frac{x}{2} \cdot g \end{cases} \to \frac{G_1}{G_2} = \frac{l}{(x/2)} = \left(\frac{2l}{x}\right)$

$\left(A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}\right)$

I. $\begin{cases} \vec{R} = \bar{G}_1 + \bar{H} + \bar{G}_2 = 0 \\ R_y = -G_1 + H - G_2 = 0. \to H = G_1 + G_2 \end{cases}$

$\begin{cases} M_0(G_1) = b_{G_1} \cdot G_1 = \frac{l}{2} \cdot G_1 > 0 \\ M_0(H) = b_H \cdot H = 0 \cdot H \\ M_0(G_2) = b_{G_2} \cdot G_2 = \frac{x}{3} \cdot G_2 < 0 \end{cases}$

II. $\begin{cases} \bar{M}_0(R) = \bar{M}_0(G_1) + \bar{M}_0(H) + \bar{M}_0(G_2) = 0. \\ M_0(R) = + G_1 \cdot l/2 + 0 - G_2 \cdot \frac{x}{3} = 0 \end{cases}$ unde $(G_1/G_2) = 2l/x$

$\to G_1 \cdot \frac{l}{2} = G_2 \cdot \frac{x}{3} \to \boxed{x = \left(\frac{G_1}{G_2}\right)\left(\frac{3l}{2}\right)} = \left(\frac{2l}{x}\right) \cdot \left(\frac{3l}{2}\right) \Rightarrow x^2 = \frac{6}{2} l^2 = 3l^2$

$\boxed{x = l \cdot \sqrt{3}}$

Sau așa cum se cere: raportul lor $(x/l = ?) \to \boxed{\left(\frac{x}{l}\right) = \sqrt{3}}$

deci $\left(\frac{x}{l}\right) = \sqrt{3}$