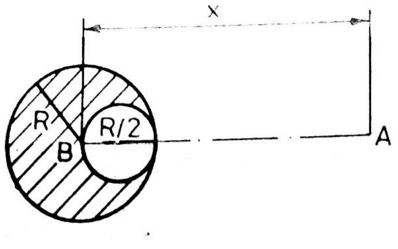


Fig. 3.79. La problema rezolvată.

Într-o sferă masivă de masă m_1 și de rază R se practică o cavitate sferică de rază $R/2$ care este tangentă la suprafața sferei masive.

Să se exprime forța gravitațională dintre sferă și un punct material m_2 aflat la distanța $x (x \gg R)$ de centrul sferei masive și pe direcția care unește centrul sferei cu centrul cavității.

Rezolvare. Deoarece în enunț se specifică $x \gg R$ vom considera atît sfera cît și cavitatea sferică drept puncte materiale situate în centrele sferelor.

Distingem două cazuri:

a) punctul material se află de aceeași parte cu cavitatea (fig. 3.79). În acest caz forțele de interacție sînt F_1, F_2 iar rezultanta lor este:

$$F = F_1 - F_2, \tag{1}$$

unde $F_1 = K\dfrac{m_1 m_2}{x^2}$ și $F_2 = K\dfrac{m_1 m_2}{8(x - R/2)^2}$ și înlocuind în (1)

$$F = \frac{K m_1 m_2}{8} \cdot \frac{7x^2 - 8xR + 2R^2}{x^2(x - R/2)^2};$$

b) punctul material se află în partea opusă cavității.

Avem în acest caz:

$$F' = F_1' - F_2'. \tag{1'}$$

Unde $F_1' = K\dfrac{m_1 m_2}{x^2}$ și $F_2' = K\dfrac{m_1 m_2}{8\left(x + \dfrac{R}{2}\right)^2}$ și înlocuind în (1') avem:

$$F' = \frac{K m_1 m_2}{8} \cdot \frac{7x^2 + 8xR + 2R^2}{x^2(x + R/2)^2}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Considerînd Pămîntul și Luna două corpuri punctiforme, explicați cum variază greutatea unui cosmonaut într-o călătorie cu mișcare rectilinie uniformă de la Pămînt la Lună.
2. Explicați de ce toate corpurile cad la fel de repede în vid cu toate că forța de atracție gravitațională este proporțională cu masa lor.
3. Undeva, într-un punct de pe suprafața Pămîntului se așază un tun uriaș. Se poate lansa un satelit artificial al Pămîntului folosind acest tun? (Se neglijează dificultățile tehnice și frecările cu aerul.)
4. Se confecționează un proiectil suficient de mare ca să încapă în el oameni și materiale. Proiectilul este lansat în vid dintr-un tun special. Pasagerii afirmă că la un moment dat au încetat să mai simtă atracția gravitațională. Cînd a fost posibil acest lucru?

   R: tot timpul (din momentul părăsirii tunului pînă la atingerea Pămîntului).

5. Un corp cu masa $m_1 = 800$ kg se află la distanța $r = 0,25$ m de un alt corp cu masa $m_2 = 600$ kg. Să se calculeze intensitatea cîmpului gravitațional într-un punct situat la $r_1 = 0,20$ m de m_1 și la distanța $r_2 = 0,15$ m de m_2.

   $$\textbf{R: } \Gamma = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 2\Gamma_1\Gamma_2\cos\alpha},\ \Gamma_1 = K\frac{m_1}{r_1^2},\ \Gamma_2 = K\frac{m_2}{r_2^2},$$
   $$\cos\alpha = 0,\ \Gamma = 2,2 \cdot 10^{-6}\ \text{N/kg}.$$

6. Cunoscînd că distanța dintre Pămînt și Lună este $d = 384 \cdot 10^3$ km și că $m_P = 81\, m_L$, să se afle la ce distanță de centrul Lunii cîmpul gravitațional rezultant este nul.

   $$\textbf{R: } x = \frac{d}{1 + \sqrt{m_P/m_L}} = \frac{d}{10} = 38,4 \cdot 10^3\ \text{km}$$

7. Două corpuri sferice cerești au raportul razelor 1/2 iar raportul accelerațiilor gravitaționale 3/2. Știind că valoarea masei primului corp este M_1 se cere să se determine masa celuilalt corp ceresc M_2.

   $$\textbf{R: } M_2 = M_1 \frac{g_2}{g_1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{8}{3}\, M_1.$$

8. Știind că raza Soarelui este R și densitatea medie a materiei solare este ρ_S, să se determine distanța Pămînt-Soare, dacă perioada de rotație a Pămîntului în jurul Soarelui este T.

   $$\textbf{R: } d^3 = \frac{KR^3\rho_S}{3\pi} \cdot T^2.$$

9. De pe o planetă cu raza $R = 1/8$ din raza Pămîntului, trebuie lansat un satelit artificial pe o orbită circulară la înălțimea $h = 600$ km. Știind că masa planetei este $m = 8 \cdot 10^{21}$ kg să se calculeze: *a)* viteza tangențială care trebuie imprimată satelitului; *b)* viteza unghiulară și *c)* perioada lui de rotație.

   $$\textbf{R: } v = \sqrt{\frac{Km}{R + h}} \approx 0,6\ \text{km/s};\ \omega = \frac{v}{R + h} \approx 0,75 \cdot 10^{-3}\ \text{rad/s};\ T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 8\,320\ \text{s}.$$

Cl. 9a – S.18 – Rez. pb. – Leg. atracției univ. – Camp gravitațional – Sateliți   21.01.2022

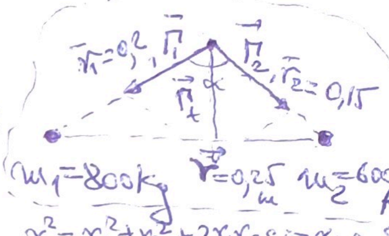
din Hristev/1989.

(5/123) Un corp de masă $m_1=800\,kg$ se află la distanța $r=0{,}25\,m$ de un alt corp de masa $m_2=600\,kg$. Să se calculeze intensitatea camp. gravitațional, $\vec{\Gamma}$ într-un punct situat la distanța $r_1=0{,}2\,m$ de (m_1) și $r_2=0{,}15\,m$ de (m_2).

$m_1=800\,kg$
$r=0{,}25\,m$
$m_2=600\,kg$
$r_1=0{,}2\,m\ (m_1)$
$r_2=0{,}15\,m\ (m_2)$

$\Gamma_t=?$

$$\begin{cases}\vec{\Gamma}_t=(\vec{\Gamma}_1+\vec{\Gamma}_2)\\ \vec{\Gamma}_t^2=\vec{\Gamma}_1^2+\vec{\Gamma}_2^2+2\vec{\Gamma}_1\vec{\Gamma}_2=\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+2\Gamma_1\Gamma_2\cos\alpha\end{cases}$$



$$\begin{cases}\Gamma_1=K\cdot\frac{m_1}{r_1^2}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{800}{0{,}2^2}\ (N/kg)\\ \Gamma_2=K\cdot\frac{m_2}{r_2^2}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{600}{0{,}15^2}\ (N/kg)\end{cases}$$

$r^2=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\alpha$

$0{,}15^2+0{,}20^2=0{,}25^2$

nr. pitagorice: r, r_1, r_2

$\alpha=90°$; $\cos 90°=0$.

$$\rightarrow \Gamma_t=\sqrt{\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+2\Gamma_1\Gamma_2\underbrace{\cos 90°}_{=0}}=\sqrt{\Gamma_1^2+\Gamma_2^2}=K\sqrt{\frac{m_1^2}{r_1^4}+\frac{m_2^2}{r_2^4}}=$$

deci: $\Gamma_t\simeq 2{,}2\cdot10^{-6}\,N/kg$

6/123 Cunoscând că distanța Pământ–Lună este $d_{PL}=384\cdot10^3\,km$ și că $m_P=81\cdot m_L$, să se afle la ce distanță $(x=?)$ de centrul Lunii Γ_t – câmpul gravitațional total/rezultant este nul?

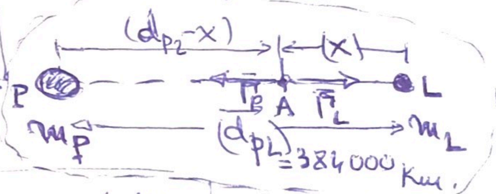
– Câmpul total/rezultant în pct. A este zero/nul, deci:

$m_P=81\cdot m_L$
$d_{PL}=384\cdot10^3\,km$

$x=?\ (\vec{\Gamma}_t=0)$

$\frac{m_P}{m_L}=81$; $\sqrt{\frac{m_P}{m_L}}=9$.

$$\vec{\Gamma}_t=\vec{\Gamma}_P+\vec{\Gamma}_L=0\ \rightarrow \boxed{\Gamma_P=\Gamma_L}$$



$$\begin{cases}\Gamma_P=K\cdot\frac{m_P}{(d_{PL}-x)^2}\\ \Gamma_L=K\cdot\frac{m_L}{x^2}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{K\cdot\frac{m_P}{(d_{PL}-x)^2}=K\cdot\frac{m_L}{x^2}}$$

$$m_P\,x^2=m_L(d_{PL}-x)^2$$

$$\left(\frac{m_P}{m_L}\right)x^2=d_{PL}^2-2x\cdot d_{PL}+x^2\ \rightarrow\ x^2\left(\frac{m_P}{m_L}-1\right)+2x\,d_{PL}-d_{PL}^2=0.$$

Se rezolvă ec. de grd. 2 în x și găsim soluția: $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=4d_{PL}^2+4d_{PL}^2\left(\frac{m_P}{m_L}-1\right)=4d_{PL}^2\left[\cancel{1}+\frac{m_P}{m_L}\cancel{-1}\right]=4d_{PL}^2\left(\frac{m_P}{m_L}\right)\\ \sqrt{\Delta}=2d_{PL}\sqrt{\frac{m_P}{m_L}}\end{cases}$$

$$\text{deci}\quad x=\frac{-2d_{PL}\pm2d_{PL}\sqrt{m_P/m_L}}{2(m_P/m_L-1)}=\frac{\cancel{2}d_{PL}(-1+\sqrt{m_P/m_L})}{\cancel{2}(m_P/m_L-1)}=\frac{(9-1)}{(81-1)}\cdot d_{PL}$$

$$\text{sau}\quad x=\left(\frac{9-1}{81-1}\right)d_{PL}=\left(\frac{\cancel{8}}{\cancel{80}}\right)d_{PL}=38{,}4\cdot10^3\,km=\frac{d_{PL}}{10}$$

(7/123) Două corpuri sferice cerești au raportul razelor 1/2 iar cel al accelerației gravitaționale 3/2. Știind masa M_1 a primului corp să se determine masa $M_2 = ?$ a celuilalt.

M_1 - dat

$R_1/R_2 = 1/2$.

$\vec{\Gamma}_1/\vec{\Gamma}_2 = 3/2$.

$M_2 = ?$

$$\Gamma_1 = K\frac{M_1}{R_1^2}, \quad \Gamma_2 = K\frac{M_2}{R_2^2}.$$

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = K\frac{M_1}{R_1^2} \Big/ K\frac{M_2}{R_2^2} = \frac{M_1}{M_2}\cdot\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2.$$

$$\Rightarrow M_2 = M_1\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\right)\cdot\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = M_1\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = M_1\cdot\frac{3}{2\cdot 4} = \frac{3M_1}{8}$$

(8/123) Densitatea medie a Soarelui ρ_S iar raza lui medie este R_S. Să se determine distanța medie d_{PS} - pământ-Soare, dacă perioada de rotație a Pământului cu jurul Soarelui este T.

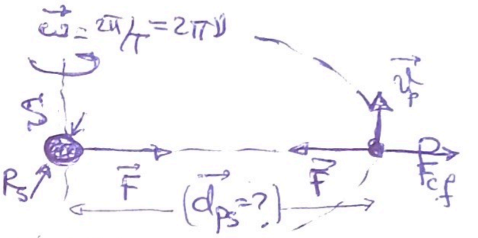
ρ_S, R_S

T

$d_{PS} = ?$

$$\begin{cases} F_{cf} = \dfrac{M_p\cdot v_p^2}{d_{PS}} \\ F_p = K\dfrac{M_p\cdot M_S}{d_{PS}^2} \\ \boxed{F_{cf} = F_{cp}} \end{cases} \Rightarrow K\cdot\frac{\cancel{M_p}\cdot M_S}{d_{PS}^2} = \left(\frac{\cancel{M_p}\cdot v_p^2}{d_{PS}}\right) = \cancel{M_p}\cdot\omega_p^2\cdot d_{PS}.$$

$M_S = \rho_S V_S = \rho_S\dfrac{4\pi R_S^3}{3}$



$$\Rightarrow d_{PS}^3 = K\cdot\frac{M_S}{\omega_p^2} = K\cdot\frac{\rho\cdot\frac{4\pi R_S^3}{3}}{(2\pi/T)^2} = \frac{K\rho_S}{3}\cdot R_S^3\cdot T^2 \Rightarrow$$

deci: $d_{PS} = R_S\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{K\rho_S}{3}\right)\cdot T^2}$

(9/123)

De pe o planetă cu raza, $R = R_p/8$, ($R_p = 6378$ Km - raza pământului), trebuie lansat un satelit artificial pe o orbită circulară la altitudinea $h = 600$ Km. Știind că masa planetei este, $M = 8\cdot 10^{21}$ Kg să se calculeze:

a) v_s - viteza tangențială necesară lansării satelitului

b) ω_s - viteza lui unghiulară c) T_s - perioada lui de rotație, $T_s = ?$

$R_p = 6378$ Km

$R = R_p/8$

$h = 600$ Km

$M = 8\cdot 10^{21}$ Kg

a) $v_s = ?$

b) $\omega_s = ?$

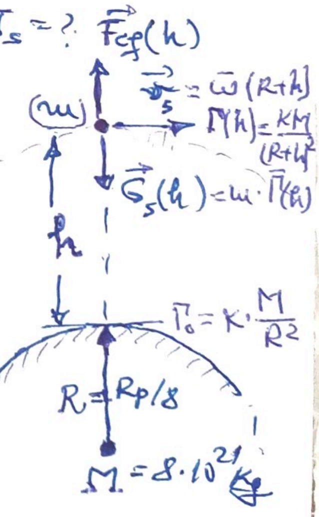
c) $T_s = ?$

a)

1) $\boxed{F_{cf}(h) = G_s(h)}$

$$\begin{cases} F_{cf}(h) = \dfrac{m v_s^2}{(R+h)} \\ \text{2)}\ G_s(h) = m\cdot\Gamma(h) = m\cdot K\dfrac{M}{(R+h)^2} \end{cases}$$

Obs. Satelitul (m) - execută o MCU la altitudinea, h unde $\Gamma(h) = \Gamma_0\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2$



(1') $$\frac{\cancel{m}\cdot v_s^2}{\cancel{(R+h)}} = \cancel{m}\cdot K\frac{M}{(R+h)^{\cancel{2}}}$$

$$\Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{KM}{R+h}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 8\cdot 10^{21}}{\frac{6378}{8}\cdot 10^3 + 600\cdot 10^3}} \simeq 0{,}6 \text{ Km/s} \simeq 600 \text{ m/s}$$

b) $v_s = \omega\cdot(R+h)$

$$\rightarrow \omega = \frac{v_s}{R+h} = \frac{\sqrt{\frac{KM}{R+h}}}{(R+h)} = \sqrt{KM(R+h)} \simeq 0{,}75\cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

c) $$\omega = (2\pi/T) \Rightarrow T = (2\pi/\omega) = 2\pi/\sqrt{KM(R+h)} \simeq 8320 \text{ s} \simeq 2\text{h } 18{,}66 \text{ min.}$$