Cl.IX_F3_Operații cu vectori (continuare) 01.10.2021

1. Compunerea vectorilor prin metoda analitică. Componentele vectorilor
2. Scăderea/Diferența vectorilor
3. Înmulțirea unui vector $\vec{a}$ cu un scalar (r)

---

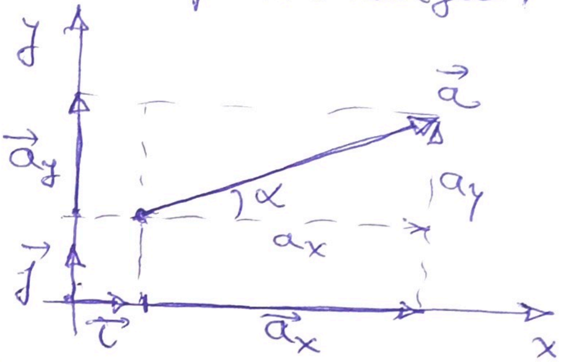
1. Componentele vectorilor în raport cu un sistem de axe Oxyz. și Adunarea/Suma vectorilor pe componente.

Orice vector $\vec{a}$ poate fi descompus prin proiecție pe orice sistem de axe Oxyz asimilat unui SR - sistem de referință, astfel:

$$\vec{a} = (\vec{a}_x + \vec{a}_y) = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_x = a_x \cdot \vec{i} \\ \vec{a}_y = a_y \cdot \vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{a}^2 = \vec{a}_x^2 + \vec{a}_y^2 \rightarrow \boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, 2D.$$



Sau dacă ținem cont și de Oz în 3D avem:

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{a}^2 = \vec{a}_x^2 + \vec{a}_y^2 + \vec{a}_z^2 \rightarrow \boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, 3D \\ \vec{a}_x = a_x \cdot \vec{i} \\ \vec{a}_y = a_y \cdot \vec{j} \\ \vec{a}_z = a_z \cdot \vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = a \cos\alpha \\ a_y = a \sin\alpha \end{cases}$$

$\vec{i}$ - versorul axei Ox.
$\vec{j}$ - versorul axei Oy
$\vec{k}$ - versorul axei Oz.
$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.
$\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$

Concluzie. Forma de reprezentare a unui vector, $\vec{a}$ funcție de componentele sale a_x, a_y, a_z și versorii direcțiilor Oxyz $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se numește forma analitică de reprezentare a unui vector, adică:

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Compunerea/Suma vectorilor prin metoda analitică va fi

$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) + (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_x + b_x) \cdot \vec{i} + (a_y + b_y) \cdot \vec{j} + (a_z + b_z) \cdot \vec{k} = S_x \cdot \vec{i} + S_y \cdot \vec{j} + S_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{S} = S_x \cdot \vec{i} + S_y \cdot \vec{j} + S_z \cdot \vec{k}$$

unde $S_x = (a_x + b_x)$, $S_y = (a_y + b_y)$ iar $S_z = (a_z + b_z)$

Modulul sau mărimea vectorului sumă $|\vec{S}|$ se obține prin suma pătratelor componentelor sale.

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \rightarrow \boxed{S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}}$$

2) Diferența / scaderea a doi vectori $\vec{a}$, și $\vec{b}$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{d} = (\vec{a} - \vec{b}) = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) - (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) =$$

$$= \underbrace{(a_x - b_x)}_{d_x} \vec{i} + \underbrace{(a_y - b_y)}_{d_y} \vec{j} + \underbrace{(a_z - b_z)}_{d_z} \cdot \vec{k} = d_x \cdot \vec{i} + d_y \cdot \vec{j} + d_z \cdot \vec{k}$$

unde $\begin{cases} d_x = (a_x - b_x) \\ d_y = (a_y - b_y) \\ d_z = (a_z - b_z). \end{cases}$

deci

$$\boxed{\vec{d} = (\vec{a} - \vec{b}) = d_x \cdot \vec{i} + d_y \cdot \vec{j} + d_z \cdot \vec{k}}$$

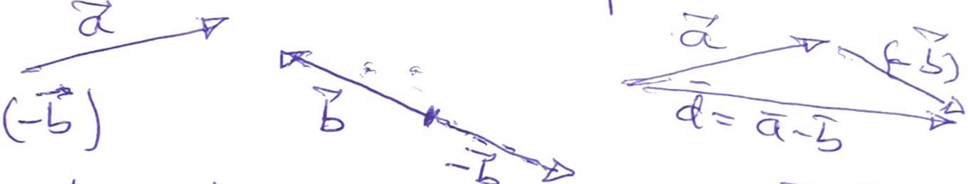
iar $\boxed{|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}}$ modulul vec. diferență.

Prin metoda grafică scaderea a doi vectori se face astfel:

$\vec{d} = (\vec{a} - \vec{b})$

Se construiesc vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și opusul vectorului $\vec{b}$, $-\vec{b}$ pe aceeași direcție, cu aceeași mărime/modul dar în sens opus lui $\vec{b}$.

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Prin acest artificiu se trece de la o diferență a doi vectori $\vec{d} = (\vec{a} - \vec{b})$ la o suma lui $\vec{a}$ cu vectorul opus lui $\vec{b}$, adică $(-\vec{b})$ gasind rez. ca vectorul care închide triunghiul; $\vec{d} = (\vec{a} - \vec{b})$

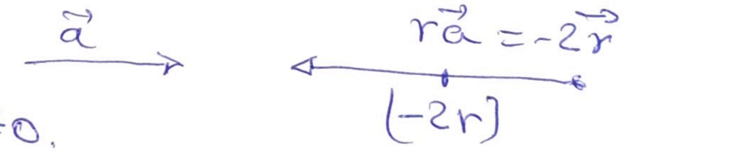
3). Înmulțirea / Produsul unui vecto ($\vec{a}$) cu un scalar (r) are ca rezultat un nou vector ($r \cdot \vec{a}$) cu aceeași orientare și direcție dar cu modulul de r-ori mai mare.

$r \cdot \vec{a} = (r \cdot \vec{a})$

1. $r = 3 > 0$

ex:

2. $r = -2 < 0$



3. r - este subunitar ($1/r$), $r \neq 0$.

$$\vec{a} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\vec{a}}{r}$$

4. $r = -1 \Rightarrow r \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ (opusul lui $\vec{a}$)

Proprietățile înmulțirii vectorilor cu scalari:

- Asociativitate, $(r_1 \cdot r_2) \vec{a} = r_1 (r_2 \vec{a})$
- Distributivitate $\begin{cases} (r_1 + r_2) \cdot \vec{a} = r_1 \cdot \vec{a} + r_2 \cdot \vec{a} \\ r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r \cdot \vec{b} \end{cases}$