07.10.2022

Cl 11a - S.52 Compunerea osc. perpendiculare cu aceeași frecvență (ν, ω)

1. Deducerea ec. generale de compunere a osc. ⊥ $x(t)$ și $y(t)$.
2. Cazul particular al defazării ($\Delta\varphi_1 = 2k\pi$) - ec. dreptei cadran (I + III)
3. Cazul defazării $\Delta\varphi_2 = (2k+1)\pi$. ec. dreptei cadran (II + IV)
4. Cazul defazării $\Delta\varphi_3 = \pi/2$
5. Cazul defazării $\Delta\varphi_4 = 3\pi/2$
6. Compunerea osc. ⊥ de frecvențe diferite. Figuri Lissajoux.

(1). Un p.m. este supus simultan la 2 osc. de tipul:

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \ (1) \\ y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \ (2) \end{cases}, \quad \Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Căutăm ec. generală de oscilație prin eliminarea timpului între (1) și (2)

utilizând:

$$\sin(\alpha \mp \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A_1} = \sin\omega t\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\cos\omega t & \Big| \text{a) } \cos\varphi_2 & \Big| \text{b) } \sin\varphi_2 \\ y/A_2 = \sin\omega t\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\omega t & \Big| -\cos\varphi_1 & \Big| -\sin\varphi_1 \end{cases}$$

a) $\left(\dfrac{x}{A_1}\right)\cos\varphi_2 - \left(\dfrac{y}{A_2}\right)\cos\varphi_1 = -\cos\omega t\cdot\underbrace{(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}_{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}$ (3) + /

deci $\dfrac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \dfrac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \cos\omega t\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ (3)

b) $\dfrac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - y/A_2\sin\varphi_1 = \sin\omega t(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1) + \cos\omega t(\cancel{\sin\varphi_1\sin\varphi_2} - \cancel{\sin\varphi_2\sin\varphi_1})$ -

adică

$$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \sin\omega t\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4)$$

Ridicăm la pătrat și adunăm (3) cu (4) membru cu membru obținem:

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\overbrace{(\varphi_2 - \varphi_1)}^{\Delta\varphi} = \sin^2\overbrace{(\varphi_2 - \varphi_1)}^{\Delta\varphi}} \quad (5)$$

ec. elipsei cu axele $\dfrac{2A_1}{x}$ și $\dfrac{2A_2}{y}$

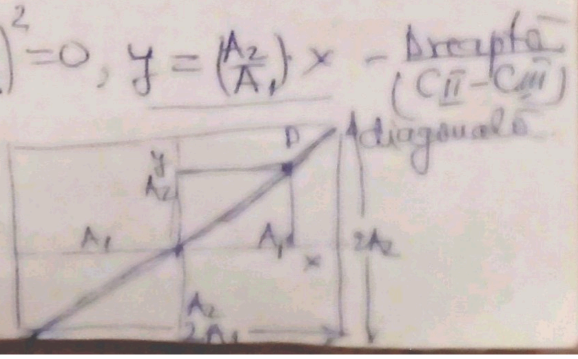
Discuție, funcție de valorile defazajului $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$ traiectoriile mișc. osc. rezultante pot avea diferite forme astfel.

(2) $\Delta\varphi = 2k\pi \rightarrow (\cos 2k\pi = +1 \ ; \sin 2k\pi = 0)$ rezultă:

$k = 0, 1, 2 \ldots$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} = 0 \ ; \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0, \ y = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)x$$ - Dreaptă (CI - CIII) diagonală

când $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0 \rightarrow \varphi_2 = \varphi_1$
(k = 0)



3) Cazul $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2 \dots$ ec. generală (5) devine:

$(\sin(2k+1)\pi = 0, \cos(2k+1)\pi = -1)$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{\cancel{2xy}}{A_1 A_2} = 0 \rightarrow \left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0 \rightarrow \boxed{y = -\left(\frac{A_2}{A_1}\right) x}$$

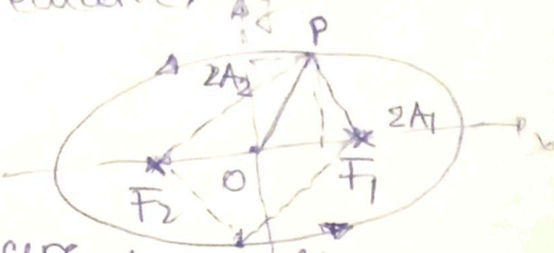
ec. diagonalei secunde

4) $\Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{2}\right)$, mișcările osc. sunt în cuadratură, adică:

$(\sin \pi/2 = 1, \cos \pi/2 = 0)$

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ y = A_2 \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Iar mișcarea are loc pe o elipsă de ecuație:



$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1}$$ ec. elipsei

cu semiaxele A_1/x și A_2/y.

Când $A_1 = A_2 = A$ elipsa degenerează în cerc de ecuație:

astfel $A_1 = A_2 = A$;

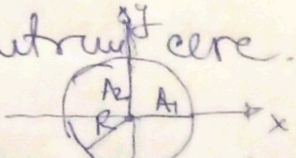
$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1}$$ cerc.

5) Cazul când $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} / 270°$, se formează o elipsă inversă

$(\sin\frac{3\pi}{2} = -1, \cos\frac{3\pi}{2} = 0)$, deoarece $\sin(x + \frac{3\pi}{2}) = -\cos x$

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t_1 + \varphi_1) \\ y = A_2 \cdot \sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \frac{3\pi}{2}) = -A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \end{cases}$$ de sens contrar,

iar pentru $A_1 = A_2 = R$, elipsa degenerează într-un cerc.

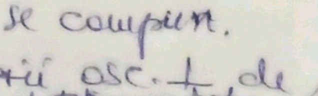


Observații

a) Prin compunerea a două osc. circulare de sens opus, cu $(\varphi_1 = \varphi_2)$ degenerează într-o mișcare liniară

b). Reciproca: O mișc. osc. liniară se descompune în două mișc. circulare de sensuri opuse cu amplitudinea egală $(A/2)$

Exemplu. În cazul unui cutremur, clădirile sunt solicitate de două mișcări $\perp$ independente ce se compun.

6) Figuri Lissajoux, se obțin în cazul compunerii osc. $\perp$ de frecvențe diferite având traiectorii complexe: → 

{ • Pentru un raport $(\nu_1/\nu_2) \in \mathbb{Q}$ - rațional → traiectorii stabile, $f(\Delta\varphi)$

• Când (ν_1/ν_2) este irațional curba/traiectoria acoperă o arie plină.

$\in I$ $(\in I)$

07.10.2022

Cl. 11a – §5.2 Compunerea osc. perpendiculare cu aceeași frecvență (ν, ω)

1. Deducerea ec. generale de compunere a osc. ⊥ $x(t)$ și $y(t)$.
2. Cazul particular al defazării ($\Delta\varphi_1 = 2k\pi$) – ec. dreptei cadran ($\mathrm{I}+\mathrm{III}$)
3. Cazul defazării $\Delta\varphi_2 = (2k+1)\pi$. ec. dreptei cadran ($\mathrm{II}+\mathrm{IV}$)
4. Cazul defazării $\Delta\varphi_3 = \pi/2$
5. Cazul defazării $\Delta\varphi_4 = 3\pi/2$
6. Compunerea osc. ⊥ de frecvențe diferite. Figuri Lissajoux.

(1). Un pct este supus simultan la 2 osc. de tipul:

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \ (1) \\ y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \ (2) \end{cases}, \quad \Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Cautăm ecr generală de oscilație prin eliminarea timpului între (1) și (2)

utilizând:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\begin{cases} \frac{x}{A_1} = \sin\omega t\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\cos\omega t \\ y/A_2 = \sin\omega t\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\omega t \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} a) & b) \\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \end{array}$$

a) $\left(\frac{x}{A_1}\right)\cos\varphi_2 - \left(\frac{y}{A_2}\right)\cos\varphi_1 = -\cos\omega t\cdot\underbrace{(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}_{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}$ (3) + /

deci $\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \cos\omega t\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ (3)

b) $\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 = \sin\omega t(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1) - \cos\omega t(\cancel{\sin\varphi_1\sin\varphi_2} - \cancel{\sin\varphi_2\sin\varphi_1})$

$-y/A_2\sin\varphi_1$

adică

$$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \sin\omega t\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \ (4)$$

Ridicăm la pătrat și adunăm (3) cu (4) membru cu membru obținem:

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\underbrace{(\varphi_2-\varphi_1)}_{\Delta\varphi} = \sin^2\underbrace{(\varphi_2-\varphi_1)}_{\Delta\varphi}} \ (5)$$

ec. elipsei cu axele $\frac{2A_1}{x}$ și $\frac{2A_2}{y}$

Discuție, funcție de valorile defazajului $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$ traiectoriile misc. osc rezultante pot avea diferite forme astfel:

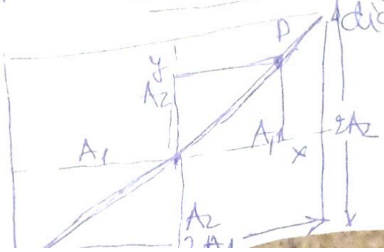
(2). $\Delta\varphi = 2k\pi \rightarrow (\cos 2k\pi = +1;\ \sin 2k\pi = 0)$ rezultă:

$k = 0, 1, 2 \ldots$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} = 0;\ \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0,\ y = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\cdot x$$

– Dreapta (C_{I}–C_{III}) diagonală

când $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0 \rightarrow \varphi_2 = \varphi_1$ ($k=0$)



(3) Cazul $\Delta\varphi = (2K+1)\pi$, $K=0,1,2\dots$ ec. generală (5) devine:

$(\sin(2K+1)\pi = 0,\ \cos(2K+1)\pi = -1)$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}=0 \rightarrow \left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0 \rightarrow \boxed{y=-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)x}$$

ec. diagonalei secund

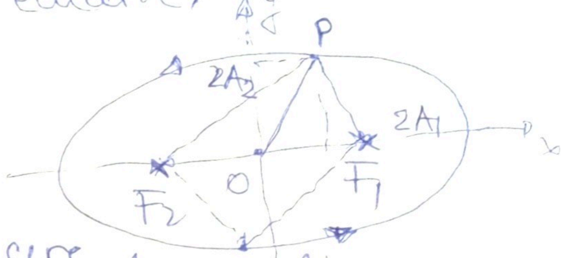
(4) $\Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{2}\right)$, mişcările osc. sunt în cvadratură, adică: $(\sin \pi/2 = 1,\ \cos \pi/2 = 0)$

$$\begin{cases} x = A_1\sin(\omega t+\varphi) \\ y = A_2\sin(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}) = A_2\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

Dar mişcarea are loc pe o elipsă de ecuaţie:

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1}$$ ec. elipsei

cu semiaxele A_1/x şi A_2/y.



Când $A_1=A_2=A$ elipsa degenerează în cerc de ecuaţie:
astfel $A_1=A_2=A$;

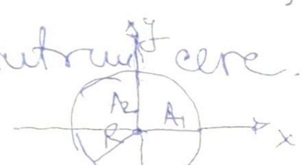
$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1}$$ cerc.

(5) Cazul când $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} / 270°$, se formează o elipsă inversă

$(\sin\frac{3\pi}{2} = -1,\ \cos\frac{3\pi}{2}=0)$, deoarece $\sin(x+\frac{3\pi}{2}) = -\cos x$

$$\begin{cases} x = A_1\sin(\omega t_1+\varphi_1) \\ y = A_2\sin(\omega t_1+\varphi_1+\frac{3\pi}{2}) = -A_2\cos(\omega t+\varphi_1) \end{cases}$$ de sens contrar,

iar pentru $A_1=A_2=R$, elipsa degenerează într-un cerc.



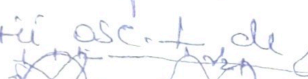
Observaţii

a) Prin compunerea a două osc. circulare de sens opus, cu $(\varphi_1=\varphi_2)$ degenerează într-o mişcare liniară

b). Reciproca: O mişc. osc. liniară se descompune în două mişc. circulare de sensuri opuse cu amplitudinea egală $(A/2)$

Exemplu. În cazul unui cutremur, clădirile sunt solicitate de două mişcări $\perp$ independente ce se compun.

(6) Figuri Lissajoux, se obţin în cazul compunerii osc. $\perp$ de frecvenţe diferite având traiectorii complexe: $\rightarrow$



- Pentru un raport $(\nu_1/\nu_2) \in \mathbb{Q}$ - raţional $\rightarrow$ traiectorii stabile, $f(\Delta\varphi)$
- Când (ν_1/ν_2) este iraţional curba/traiectoria acoperă o arie plină
$\in I$ $(\in I)$