



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto Politécnico
Métodos Numéricos Híbridos para Equações Diferenciais Parciais
de $T(x,t)$ por NDsolve e Gráfico de $T(x,t)$ por NDsolve
de $eqt(x)$ gráfico de $eqt(x)$ 37 Gráfico de $eqt(x)$ figure.3
Prof. Diego Knupp



Trabalho 1 - Solução de Problema de Sturm-Liouville

Pedro Mineiro Cordoeira¹

¹Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, RJ, Brasil
Emails: ¹pedro.cordoeira@iprj.uerj.com

17 de abril de 2023

Resumo

A análise numérica é uma ferramenta poderosa para solucionar problemas que estão fora do escopo analítico. Em alguns casos, problemas como o de condução de calor não possuem solução analítica acessível, tornando algoritmos de soluções numéricas boas alternativas. Neste trabalho, apresentamos um algoritmo escrito principalmente em Wolfram Mathematica, uma linguagem de programação simbólica de boa implementação, para analisar um problema de transferência de calor juntamente com um algoritmo em Python para fins comparativos.

Palavras-chave: Sturm-Liouville, métodos numéricos, computação simbólica.

Abstract

Numerical analysis is a powerful tool for solving problems that are outside the scope of analytical solutions. In some cases, problems such as heat conduction do not have accessible analytical solutions, making numerical algorithms a good alternative. In this work, we present an algorithm primarily written in Wolfram Mathematica, a well-implemented symbolic programming language, for analyzing a heat transfer problem along with a Python algorithm for comparative purposes.

Keywords: Sturm-Liouville, Numerical Methods, Symbolic Computation.

1 Introdução

Problemas de condução de calor estão, certamente, no campo de problemas com um grande leque de características e variações. O método que é amplamente utilizado para a solução desse tipo de problema é o Método de Separação de Variáveis em que, para casos homogêneos, progride com eficiência. Para casos em que suas condições de contorno bem como sua própria formulação

matemática não são homogêneas, o problema precisa ser dividido em partes de forma que essas condições tornem-se homogêneas e, assim, aplicar o método adequadamente. (ÖZISIK 1993)

Tal desenvolvimento pode ser feito utilizando a mais diversa sorte de sistemas de coordenadas. Para este trabalho, vamos utilizar um espaço cartesiano retangular unidimensional $\vec{r} = x\hat{i}$ de forma que possamos encontrar uma solução analítica para um problema de condução de calor numa placa plana de espessura L , com temperatura uniforme T_0 , geração interna de energia uniforme g , coeficiente de transferência de calor h , calor específico c_p , densidade ρ e trocando calor por convecção com um meio na temperatura T_∞ . Definidas as grandezas, temos que elas valem respectivamente $k = 0.6W/mK$, $\rho = 600kg/m^3$, $c_p = 1200J/kgK$, $T_0 = T_\infty = 20^\circ C$, $h = 15W/m^2K$, $L = 0.03m$ e $g = 5000W/m^3$.

2 Formulação Matemática

Após a descrição do problema e suas grandezas, vamos trabalhar na formulação matemática para aí implementar o algoritmo.

Queremos aplicar o algoritmo numa equação tal qual

$$w(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right] - d(x)T(x,t) \quad (1)$$

E condições de contorno do tipo

$$-\beta_0 k_0 \frac{\partial T(x=x_0,t)}{\partial x} + \alpha_0 T(x_0,t) = 0 \quad (2)$$

$$\beta_1 k_1 \frac{\partial T(x=x_1,t)}{\partial x} + \alpha_1 T(x_1,t) = 0 \quad (3)$$

$$T(x,0) = f(x) \quad (4)$$

(KUNPP - 2017) Com as grandezas do problema, temos que a formulação matemática fica:

$$\rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + g \quad (5)$$

para $0 < x < L$ e $t > 0$.

Multiplicando a equação 5 por $1/k$ temos:

$$\frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{g}{k} \quad (6)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial T(x=0,t)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{h}{k} T(L,t) + \frac{\partial T(x=L,t)}{\partial x} = \frac{h}{k} T_\infty \quad (8)$$

$$T(x,0) = T_0 \quad (9)$$

3 Solução Analítica

Vemos que a equação 6 é não homogênea, temos que aplicar um filtro de forma a homogeneizar essa equação. Para isso, aplicaremos um filtro na forma $T(x, t) = T^* + F(x)$. Dessa forma, temos:

$$\frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T^*(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + \frac{g}{k} \quad (10)$$

Suas condições de contorno também recebem tal filtro de forma:

$$\frac{\partial T^*(x=0, t)}{\partial x} + \frac{\partial F(x=0)}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{h}{k} [T^*(L, t) + F(L)] + \frac{\partial T^*(x=L, t)}{\partial x} + \frac{\partial F(x=L)}{\partial x} = \frac{h}{k} T_\infty \quad (12)$$

$$(13)$$

Da mesma forma, temos a equação

$$\frac{\partial^2 F(x=0)}{\partial x^2} = -\frac{g}{k} \quad (14)$$

com condições de contorno:

$$\frac{\partial F(x=0)}{\partial x} \quad (15)$$

$$\frac{h}{k} F(L) + \frac{\partial F(x=L)}{\partial x} = \frac{h}{k} T_\infty \quad (16)$$

Uma vez filtradas as equações e condições de contorno, aplica-se o Método de Separação de Variáveis. Assim, vamos reescrever a equação de filtro como:

$$T^*(x, t) = \Psi(x)\Gamma(t) \quad (17)$$

Aplicando em 10 e suas condições de contorno, temos:

$$\frac{1}{\Psi(x)} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{1}{\Gamma(t)} \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t} = -\beta^2 \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + \Psi(x)\beta^2 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Psi(x=L)}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Psi(x=L)}{\partial x} = \frac{h}{k} \Psi(L) \quad (21)$$

$$(22)$$

(ÖZISIK 1993) com condição inicial $T^*(x, 0) = T_0 - F(x)$.

Para a equação

$$\frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T^*(x, t)}{\partial x^2} \quad (23)$$

temos as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial T^*(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{h}{k} T^*(L, t) + \frac{\partial T^*(x=L, t)}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

Essas são as condições de Sturm-Liouville de terceiro tipo (ÖZISIK 1993). Para os próximos passos, vamos adotar:

$$H_2 = \frac{h}{k} \quad (26)$$

$$N^{-1}(\beta) = 2 \frac{\beta^2 + H_2}{L(\beta^2 + H_2^2) + H_2} \quad (27)$$

Pela separação de variáveis, o problema de autovalores fica:

$$T^*(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n x) \quad (28)$$

$$C_n N(\beta) = \int_0^L [T_0 - F(x)] \cos(\beta_n x) dx \quad (29)$$

Por fim, temos que a solução para $T(x, t)$ pode ser escrita como a combinação de autovalores e autofunções $T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n x) + F(x)$. Para homogeneizar a equação, o filtro $F(x)$ precisa ser $F(x) = \frac{-g}{2k} x^2 + T_{\infty} + \frac{gL}{h} + \frac{gL^2}{2k}$.

4 Implemetação

Após definir as grandezas dadas pelo problema e as condições de contorno desenvolvidas, criamos uma solução exata dada pela função **NDSolveValue** que nos retorna:

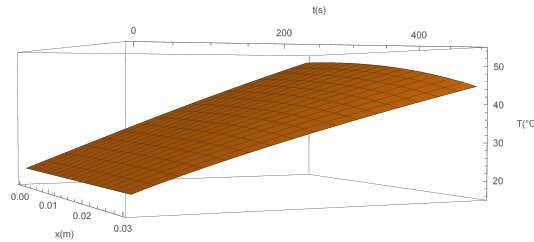


Figura 1: Gráfico de $T(x, t)$ por NDSolve

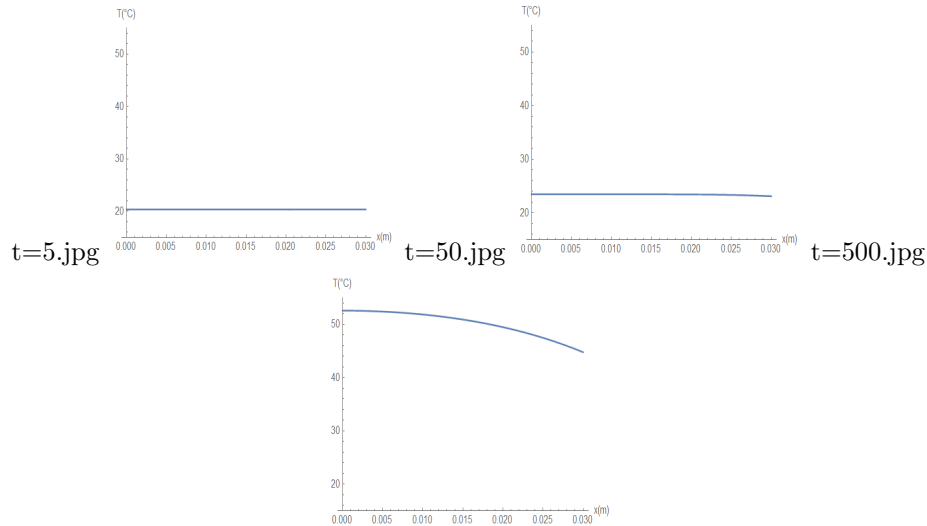
Dessa mesma solução, extraímos os perfis: Para calcular os auto valores, primeiramente extraímos as raízes do gráfico da equação $eqt(x) = H_2 - x \tan(xL)$ tal que $H_2 = \frac{h}{k}$ (Figura 3). Dessa maneira, é possível ter estimativas para extração das raízes dessa função. Utilizando a biblioteca **matplotlib.pyplot** e **root** da biblioteca **scipy** do Python temos uma lista de raízes (Figura 4).

Tendo as raízes, agora é possível calcular a norma N os coeficientes C_n para a expansão em autovalores e autofunções. Para $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ e $x = \frac{3L}{4}$, temos que os autovalores progridem na forma (Figura 5):

mostrando, em média, 4 iterações para os autovalores ficarem abaixo da tolerância especificada no problema (10^{-4}). Para os outros autovalores, as figuras 6 e 7 mostram essa progressão.

Por fim, após expandida a solução em um somatório autofunções, plotamos seu gráfico junto com a solução exata extraída usando **NDSolve**. Porém, agora num intervalo de tempo de até 1000 segundos. O gráfico (Figura 8) mostra

Figura 2: Perfis de $T(x, 5)$, $T(x, 50)$ e $T(x, 500)$



uma leve divergência nas soluções a partir de $t = 750s$ do evento. Os perfis de temperatura corroboram essa análise (Figura 9).

5 Considerações

Problemas de Sturm-Liouville se mostraram bem desafiadores para implementação fora da linguagem simbólica. Por vezes, o *plotting* dos gráficos em 3D entrava em conflito com as dimensões das listas e arrays que carregavam os dados das funções e dos autovalores. Dessa maneira, focou-se em plotar os gráficos das soluções, bem como seus perfis, no Wolfram Mathemática e na exploração de outros métodos e bibliotecas no Python a fim de driblar possíveis problemas caso as condições de contorno mudem e os métodos dentro da programação simbólica não sejam mais adequados. Os dados dos algoritmos bateram em ambas os programas e todos estão disponíveis em <https://github.com/Cordoeira>.

6 Referências Bibliográficas

CUNHA, M. Cristina C.. **Métodos numéricos**. Editora da UNICAMP. 2000. Capítulo 4 - Equações Não-Lineares, p.73 - 92.

OZISIK, M. Necati. Heat conduction. 2. ed. New York: Wiley, 1993. 780 p.

COTTA, Renato M.; KNUPP, Diego C.; QUARESMA, José N. Analytical methods in heat conduction. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2017. 462 p.

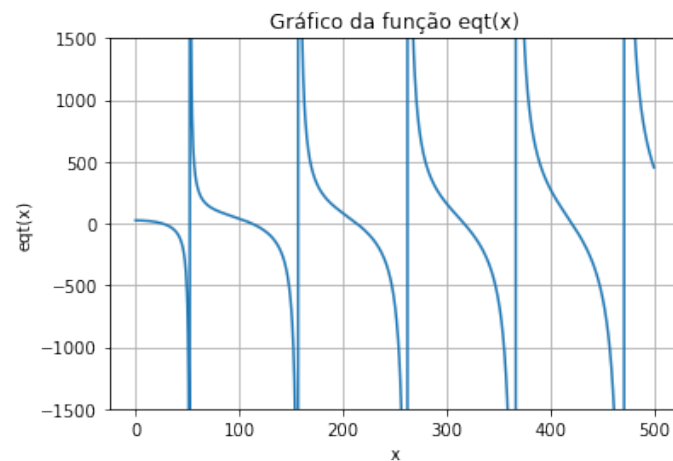


Figura 3: Gráfico de $eqt(x)$

```
array([ 25.7119801, 112.03783268, 213.32811894, 316.78442521,
        420.85678405, 525.18432321, 629.64134067, 734.17291155,
        838.75128734, 943.36095573, 1047.99257144, 1152.64017085,
        1257.29977017, 1361.96860728, 1466.64470698, 1571.32661949,
        1676.0132567, 1780.70378605, 1885.39755968, 1990.09406592,
        2094.79289531, 2199.49371627, 2304.19625745, 2408.90029465,
        2513.60564101, 2618.31213952, 2723.01965731, 2827.72808121,
        2932.43731418, 3037.14727256, 3141.85788384, 3246.56908486,
        3351.28082036, 3455.99304177, 3560.70570623, 3665.41877577,
        3770.13221664, 3874.84599875, 3979.56009517, 4084.27448172,
        4188.98913666, 4293.70404033, 4398.41917499, 4503.13452453,
        4607.85007428, 4712.56581092, 4817.28172224, 4921.99779711,
        5026.71402531, 5131.43039744])
```

lambda raizes.jpg

Figura 4: Lista das 50 primeiras raízes de $eqt(x)$



Figura 5: Listas de autovalores para $x = \frac{L}{4}$

```
Os valores para x = L/4 e t = 5s
prod1 1: 132.00475275572717
prod1 2: 0.3200156665017279
prod1 3: 0.00028643200347180134
prod1 4: 0.00015018529421662667
prod1 5: 2.7427424526590923e-06
prod1 6: 1.2965131019324528e-08
prod1 7: 5.856307530230136e-13
prod1 8: 5.997814048168729e-14
prod1 9: 5.213048788037348e-17
prod1 10: 9.686526883318457e-21
prod1 11: 9.162773678044705e-27
prod1 12: 5.080421198849013e-29
prod1 13: 1.3772517821276931e-33
prod1 14: 7.702308951788622e-39
prod1 15: 1.5211000841298476e-46
prod1 16: 3.383312432763461e-50
prod1 17: 2.596915317017378e-56
prod1 18: 4.061087589651581e-63
prod1 19: 1.723818854798762e-72
prod1 20: 1.3511953298171738e-77

valores L4 5.jpg

Os valores para x = L/4 e t = 500s
prod1 1: 103.02000050895243
prod1 2: 0.0028898120649132005
prod1 3: 1.110260046101611e-11
prod1 4: 6.810780337430534e-21
prod1 5: 3.9108852547021435e-35
prod1 6: 1.5589969170921982e-53
prod1 7: 1.5918287899482634e-77
prod1 8: 9.876757202180772e-102
prod1 9: 1.3937106310602492e-131
prod1 10: 1.1266848207288662e-165
prod1 11: 1.2425109771521436e-205
prod1 12: 2.152248187459979e-245
prod1 13: 4.884305086793656e-291
prod1 14: 0.0
prod1 15: 0.0
prod1 16: 0.0
prod1 17: 0.0
prod1 18: 0.0
prod1 19: 0.0
prod1 20: 0.0

valores L4 50.jpg

Os valores para x = L/4 e t = 500s
prod2 1: 127.74607744913902
prod2 2: 0.08412548248603643
prod2 3: 0.05403162984511584
prod2 4: 0.000353749214086183
prod2 5: 0.0021019997722188013
prod2 6: 1.3700645898221913e-05
prod2 7: 0.0001688727343985285
prod2 8: 8.592199086460649e-07
prod2 9: 1.493989534100154e-05
prod2 10: 5.690274263845349e-08
prod2 11: 1.1830459360066248e-06
prod2 12: 3.3613467605172292e-09
prod2 13: 7.656288773071829e-08
prod2 14: 1.62839478702945e-10
prod2 15: 3.843014388558725e-09
prod2 16: 6.167031030046517e-12
prod2 17: 1.4530365866099882e-10
prod2 18: 1.7720844694640047e-13
prod2 19: 4.058997091408281e-12
prod2 20: 3.787396567496898e-15

valores L4 500.jpg
```

Figura 6: Listas de autovalores para $x = \frac{L}{2}$

```
Os valores para x = L/2 e t = 5s
prod2 1: 124.61799918747579
prod2 2: 0.0525400874529205
prod2 3: 0.00980592088862585
prod2 4: 8.201488330558626e-06
prod2 5: 2.741837229772611e-06
prod2 6: 4.4131417429643e-10
prod2 7: 5.901831195322047e-11
prod2 8: 1.4314179843909071e-15
prod2 9: 5.212614856145366e-17
prod2 10: 1.8268236908349965e-22
prod2 11: 1.536594231984840e-24
prod2 12: 7.748409773200183e-31
prod2 13: 1.3772007465062643e-33
prod2 14: 1.0042131059744731e-40
prod2 15: 3.56970039766434e-44
prod2 16: 3.790870989953227e-52
prod2 17: 2.5968611555686348e-56
prod2 18: 4.045508864325857e-65
prod2 19: 5.2003341746574767e-70
prod2 20: 1.1964216483681741e-79

valores L2 5.jpg

Os valores para x = L/2 e t = 500s
prod2 1: 97.25518831267526
prod2 2: 0.0004744558043750537
prod2 3: 3.800944742875531e-10
prod2 4: 3.719307922309926e-22
prod2 5: 3.9095944944867516e-35
prod2 6: 5.3065984151779736e-55
prod2 7: 1.604202778223845e-75
prod2 8: 2.357153418415925e-103
prod2 9: 1.3935946191993205e-131
prod2 10: 2.1248632729806656e-167
prod2 11: 2.0836869574162108e-203
prod2 12: 3.282503603017285e-247
prod2 13: 4.884124093348167e-291
prod2 14: 0.0
prod2 15: 0.0
prod2 16: 0.0
prod2 17: 0.0
prod2 18: 0.0
prod2 19: 0.0
prod2 20: 0.0

valores L2 50.jpg

Os valores para x = L/2 e t = 500s
prod2 1: 127.74607744913902
prod2 2: 0.08412548248603643
prod2 3: 0.05403162984511584
prod2 4: 0.000353749214086183
prod2 5: 0.0021019997722188013
prod2 6: 1.3700645898221913e-05
prod2 7: 0.0001688727343985285
prod2 8: 8.592199086460649e-07
prod2 9: 1.493989534100154e-05
prod2 10: 5.690274263845349e-08
prod2 11: 1.1830459360066248e-06
prod2 12: 3.3613467605172292e-09
prod2 13: 7.656288773071829e-08
prod2 14: 1.62839478702945e-10
prod2 15: 3.843014388558725e-09
prod2 16: 6.167031030046517e-12
prod2 17: 1.4530365866099882e-10
prod2 18: 1.7720844694640047e-13
prod2 19: 4.058997091408281e-12
prod2 20: 3.787396567496898e-15

valores L2 500.jpg
```


Figura 7: Listas de autovalores para $x = \frac{3L}{4}$

<p>Os valores para $x = 3L/4$ e $t = 5s$</p> <pre> prod2 1: 54.07515892874123 prod2 2: 0.24833795739697812 prod2 3: 0.05329713884696424 prod2 4: 0.0010579341532441127 prod2 5: 0.002094602075716717 prod2 6: 4.10709442935666624e-05 prod2 7: 0.00016860682116250428 prod2 8: 2.5766642972522843e-06 prod2 9: 1.4926631420295302e-05 prod2 10: 1.7066828601344277e-07 prod2 11: 1.183272478631564e-06 prod2 12: 1.0082459569961164e-08 prod2 13: 7.65326261301887e-08 prod2 14: 4.884635836883951e-10 prod2 15: 3.841890020089508e-09 prod2 16: 1.8499532313440143e-11 prod2 17: 1.4527133435543621e-10 prod2 18: 5.315904174102328e-13 prod2 19: 4.05828352300416e-12 prod2 20: 1.1361592086521228e-14 </pre> <p>valores 3L4 5.jpg</p> <p>Os valores para $x = 3L/4$ e $t = 50s$</p> <pre> prod2 1: 54.07515892874123 prod2 2: 0.15510040815573983 prod2 3: 0.009672621918338845 prod2 4: 2.4553623040775862e-05 prod2 5: 2.732187714129437e-06 prod2 6: 1.3229442009090135e-09 prod2 7: 5.892537954247895e-11 prod2 8: 4.292595618084285e-15 prod2 9: 5.207986998416382e-17 prod2 10: 5.4791887626226955e-22 prod2 11: 1.5357201795262362e-24 prod2 12: 2.3241585541671868e-30 prod2 13: 1.3766564057678845e-33 prod2 14: 3.0123010490961116e-40 prod2 15: 3.568672422359820e-44 prod2 16: 1.1371653561177813e-51 prod2 17: 2.5962834568770133e-56 prod2 18: 1.2135729322622237e-64 prod2 19: 5.190419960117692e-70 prod2 20: 3.5890761608907394e-79 </pre> <p>valores 3L4 50.jpg</p>	<p>Os valores para $x = 3L/4$ e $t = 500s$</p> <pre> prod2 1: 42.20168674623621 prod2 2: 0.0014005909012551377 prod2 3: 3.749275753690559e-10 prod2 4: 1.1134867357757855e-21 prod2 5: 3.8958352192010535e-35 prod2 6: 1.5907790984785304e-54 prod2 7: 1.6016767413623238e-75 prod2 8: 7.068729431501523e-103 prod2 9: 1.3923573596266268e-131 prod2 10: 6.373098307698379e-167 prod2 11: 2.0825017052070193e-203 prod2 12: 9.845967174353951e-247 prod2 13: 4.88219363569916e-291 prod2 14: 0.0 prod2 15: 0.0 prod2 16: 0.0 prod2 17: 0.0 prod2 18: 0.0 prod2 19: 0.0 prod2 20: 0.0 </pre> <p>valores 3L4 500.jpg</p>
--	--

3d NDSolve + SV.jpg

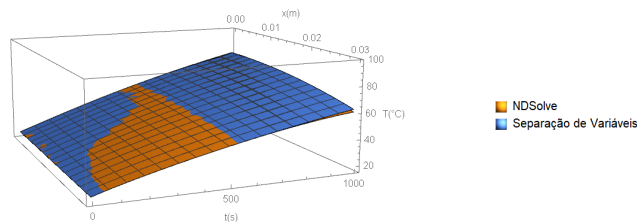


Figura 8: Gráfico de $T(x,t)$ utilizando NDSolve e a Expansão em Autofunções

Figura 9: Perfis de temperatura para $t = 500$, $t = 750$ e $t = 1000$

