Ejemplo 18.6-1

El estacionamiento para visitantes en el Colegio Ozark se limita a sólo 5 espacios. Los autos que utilizan estos espacios llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 6 por hora.

El tiempo de estacionamiento está distribuido exponencialmente con una media de 30 minutos. Los visitantes que no pueden encontrar un espacio vacío pueden esperar temporalmente en el estacionamiento hasta que un auto estacionado salga. El espacio temporal tiene cabida sólo para 3 autos. Otros que no pueden estacionarse o encontrar un espacio de espera temporal deben irse a otra parte. Determine lo siguiente:

a) La probabilidad, p_n, de que haya n autos en el sistema.
b) La tasa de llegadas efectiva de los autos que por lo general utilizan el estacionamiento.
c) El promedio de autos en el estacionamiento.
d) El tiempo promedio que un auto espera un espacio de estacionamiento.
e) El promedio de espacios de estacionamiento ocupados.
f) La utilización promedio del estacionamiento

a)

Tomaremos en cuenta las relaciones del modelo M/M/c/N →

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{p^n}{n!}\, p_0 \quad , & 0 \leq n < c \\ \dfrac{p^n}{c!\, c^{n-c}}\, p_0 \quad , & c \leq n \leq N \end{cases}$$

$$p = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\lambda_n = 6\,\frac{autos}{hora} = ;\ n = 0,1,2, \dots ,8$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\left(\dfrac{60}{30}\right) = 2n\,\dfrac{autos}{hora} \quad , & n = 1,2,3,4,5 \\ 5\left(\dfrac{60}{30}\right) = 10\,\dfrac{autos}{hora} \quad , & n = 6.7.8 \end{cases}$$

$$p = 3\,; c = 5$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{3^n}{n!}\, p_0 \quad , & n = 1,2,3,4,5 \\ \frac{p^n}{5!\,5^{n-5}}\, p_0 \quad , & n = 6.7.8 \end{cases}$$

El valor de P_o se calcula sustituyendo P_n, $n = 1,2, \ldots .8$, en la siguiente ecuación:

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_8 = 1 \text{ o}$$

$$p_0 + p_0 \left(\frac{3}{1!}\right) + \left(\frac{3^2}{2!}\right) + \left(\frac{3^3}{3!}\right) + \left(\frac{3^4}{4!}\right) + \left(\frac{3^5}{5!}\right) + \left(\frac{3^6}{5!\ \ 5}\right) + \left(\frac{3^7}{5!\ \ 5^2}\right) + \left(\frac{3^8}{5!\ \ 5^3}\right) = 1$$

$$\boldsymbol{p_0 = 0.04812}$$

b)

$p_1 a\ p_8$ en la relación dependiendo del valor de n:

$$P_n = \begin{cases} \frac{3^n}{n!}\, p_0 \quad , & n = 1,2,3,4,5 \\ \frac{p^n}{5!\,5^{n-5}}\, p_0 \quad , & n = 6,7,,8 \end{cases}$$

$\boldsymbol{n = 1}$

$$p_n = \frac{3^1}{1!} * 0.04812 = 0.14436$$

$\boldsymbol{n = 2}$

$$p_n = \frac{3^2}{2!} * 0.04812 = 0.21654$$

$\boldsymbol{n = 3}$

$$p_n = \frac{3^3}{3!} * 0.04812 = 0.21654$$

$\boldsymbol{n = 4}$

$$p_n = \frac{3^4}{4!} * 0.04812 = 0.16240$$

$\boldsymbol{n = 5}$

$$p_n = \frac{3^5}{5!} * 0.04812 = 0.09744$$

$\boldsymbol{n = 6}$

$$p_n = \frac{3^6}{5!\,5^{6-5}} * 0.04812 = 0.05847$$

$\boldsymbol{n = 7}$

$$p_n = \frac{3^7}{5!\,5^{7-5}} * 0.04812 = 0.03508$$

$\boldsymbol{n = 8}$

$$p_n = \frac{3^8}{5!\,5^{8-5}} * 0.04812 = 0.02105$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
P_n	0.14436	0.21654	0.21654	0.16240	0.09744	0.05847	0.03508	0.02105

$$\lambda = \lambda_{efect} + \lambda_{perdida}$$

Un auto no podrá entrar al estacionamiento si ya entraron 8. Esto significa que la proporción de autos que no podrán entrar al estacionamiento es p8, Por lo tanto,

$$\lambda_{perdida} = \lambda * p_8 = 6 * 0.02105 = 0.1263 \frac{autos}{hora}$$

$$\lambda_{efectivo} = \lambda - \lambda_{perdida} = 6 - 0.1263 = 5.8737 \frac{autos}{hora}$$

$$\boldsymbol{\lambda_{efectivo} = 5.8737 \frac{autos}{hora}}$$

c)

El promedio de autos en el estacionamiento (los que esperan que se desocupe un espacio) es igual a Ls, el promedio en el sistema. Podemos calcular Ls con pn como:

$$L_s = 0p_0 + 1p_1 + \cdots + 8p_8 =$$

$$L_s = 0(0.04812) + 1(0.14436) + 2(0.21654) + 3(0.21654) + 4(0.16240) + 5(0.09744) + 6(0.05847) + 7(0.03508) + 8(0.02105) = 3.1286\ autos$$

$$\boldsymbol{L_s = 3.1286\ autos}$$

d)

Un auto que espera en el espacio temporal es en realidad un auto que está haciendo cola. Por lo tanto, su tiempo de espera hasta que encuentra un espacio es W_q.

$$w_s = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = \frac{3.1286}{5.8737} = 0.53265\ horas$$

$$w_q = w_s - \frac{1}{\mu} = 0.53265 - \frac{1}{2} = 0.03265$$

$$\boldsymbol{w_q = 0.03265}$$

e)

El promedio de espacios de estacionamiento ocupados es igual al promedio de servidores ocupados

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{efect}}{2} = \frac{5.8737}{2} = 2.9368\ espacios$$

$$\boldsymbol{\bar{c} = 2.9368\ espacios}$$

f)

$$Uso\ del\ lote\ de\ estacionamiento = \frac{\bar{c}}{c} = \frac{2.9368}{5} = 0.58736$$

$$\boldsymbol{Uso\ del\ lote\ de\ estacionamiento = 0.58736}$$

g)