Transformation de Laplace - Exercices

$\mathcal{L}(x)(p) = X(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ où $x(t)$ est causal et p est un nombre complexe.

Propriétés et transformées usuelles

Signal causal	**Transformée de Laplace**	**Remarque**
$x(t)+y(t)$	$X(p)+Y(p)$	
$\lambda x(t)$	$\lambda X(p)$	$\lambda \in \mathbb{R}$
$x'(t)$	$pX(p)-x(0)$	
$x(\lambda t)$	$\dfrac{1}{\lambda}X\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$	$\lambda > 0$
$x\left(\dfrac{t}{\lambda}\right)$	$\lambda X(\lambda p)$	$\lambda > 0$
$x(t-a)$	$e^{-ap}X(p)$	$a > 0$
$e^{-at}x(t)$	$X(p+a)$	$a \in \mathbb{C}$
$\delta(t)$	$\Delta(p) = 1$	
1 (ou $H(t)$)	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$a \in \mathbb{C}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	

Exercice 1. Calculer les transformées de Laplace des signaux causaux suivants :

(a) $2e^{-6t}$

(b) $5e^{2t}$

(c) $2t^4$

(d) $\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$

(e) $t^2 + t - e^{-3t}$

(f) $(t^2+1)^2$

(g) $H(t-1)$

(h) $(t-1)H(t-1)$

(i) $tH(t-1)$

(j) $(t-5)H(t-4)$

(k) $e^{3t}t^3$

(l) $e^t\cos(t)$

(m) $e^{-4t}\sin(5t)$

(n) $(t^2+t+1)e^{-2t}$

(o) $e^{-2t}(t^2-1)^2$

(p) $2e^{-5t}(\cos(2t)+\sin(2t))$

Exercice 2. Calculer les transformées de Laplace inverse des signaux suivants.

(a) $\dfrac{3}{p+2} - \dfrac{1}{p^3}$

(b) $\dfrac{p+2}{(p+3)\cdot(p+4)}$

(c) $\dfrac{a}{p^2-a^2}$

(d) $\dfrac{3}{(p+6)^2}$

(e) $\dfrac{10}{p^2+4p-21}$

(f) $\dfrac{p}{(p-5)^3}$

(g) $\dfrac{p+7}{p^2+49}$

(h) $\dfrac{e^{-p}}{p^3}$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $s'(t) + 3s(t) = 0\,;\ s(0) = 1$

(b) $s'(t) - 2s(t) = t\,;\ s(0) = 0$

(c) $s'(t) = s(t) + te^t\,;\ s(0) = -1$

(d) $\dfrac{1}{2}s'(t) + s(t) = \sin(2t) + \cos(2t)\,;\ s(0) = 0$