Préambule : Double inclusion et diagramme de Venn

1. **Preuve par double inclusion**
   Pour montrer que deux ensembles X et Y sont **égaux**, on démontre **d'abord** que $X \subseteq Y$, puis **ensuite** que $Y \subseteq X$.
   - **Étape "$X \subseteq Y$"** : On prend un élément $x \in X$ et on montre qu'alors $x \in Y$.
   - **Étape "$Y \subseteq X$"** : On prend un élément $y \in Y$ et on montre qu'alors $y \in X$.
     Si ces deux inclusions sont vraies, on conclut $X = Y$.
2. **Diagramme de Venn**
   Un diagramme de Venn est une **représentation visuelle** permettant de **visualiser** les parties de l'univers et leurs **chevauchements**.
   - On dessine, en général, **des cercles** (ou ellipses) représentant les ensembles $A, B, C, \ldots$.
   - Les zones d'intersection et de différence s'affichent naturellement.
3. **Injective** (ou **injection**) :
   $\forall x, y,\ f(x) = f(y) \implies x = y$
   (Pas de collisions : valeurs distinctes en entrée donnent des valeurs distinctes en sortie.)
4. **Surjective** (ou **surjection**) :
   $\forall b \in B,\ \exists a \in A : f(a) = b$
   (Toutes les cibles dans B sont atteintes.)
5. **Bijective** (ou **bijection**) :
   Injective **et** *surjective*.
   (Correspondance un à un : chaque élément de B a exactement un antécédent dans A.)

Math pour l'info - Séance d'exercices n°2 : Théorie des ensembles et relations

Consignes pour les exercices

- **Compléter tous les exercices** : chacun doit être terminé, même si vous finissez certains après la séance.
- **Poser des questions** : je reste disponible pour clarifier ou expliquer, mais je ne corrigerai pas chaque exercice individuellement pendant/après la séance.
- Vous devez choisir **un exercice par chapitre** et le rendre à la fin de la séance.

Question 1 : Opérations sur les ensembles

Q1a

Soient $A = \{1, 2, 4, 7\}$ et $B = \{2, 3, 7, 8\}$.

1. Calculez $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
2. Vérifiez la **cardinalité** de $A \cup B$ via la formule $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
3. Listez les couples de $A \times B$. Quelle est la taille de $A \times B$?

Q1b

On se place dans l'univers $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. On définit :

$$A = \{0, 1, 2, 3\},\ B = \{2, 4, 5\},\ C = \{1, 2, 4, 7\}.$$

1. Calculez :
    1. $(A \cup B) \cap C$.
    2. $(A \cap B) \setminus C$.
    3. $(B \cup C)^c$
2. Vérifiez l'identité $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ou donnez un contre-exemple.
3. Testez si $(A \cap B) \subseteq C$.

Q1c

On a :

$$X = \{a, b, c\} \; et \; Y = \{1, 2, 3, 4\}.$$

1. Calculez explicitement $X \times Y$.
2. Donnez un **exemple** d'un sous-ensemble $R \subseteq X \times Y$ qui **n'est pas** une fonction de X vers Y.
3. Trouvez un **exemple** de sous-ensemble $F \subseteq X \times Y$ qui soit injectif mais pas surjectif, ou l'inverse.

Question 2 : Lois ensemblistes / preuves

Q2a

Prouvez l'égalité :

$$(A \setminus B) \; \cup \; (A \cap B) \; = \; A.$$

1. Procédez par **double inclusion**.
2. Interprétez : un élément de A est soit dans B, soit en dehors de B.

Q2b

Démontrez **une** des **lois de De Morgan** :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{ou} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

1. Faites-le via **double inclusion** ou un **diagramme de Venn** (ou les deux).
2. Donnez un exemple d'ensembles concrets.

Q2c

Montrez la **distributivité** :

$$A \cap (B \cup C) \; = \; (A \cap B) \; \cup \; (A \cap C).$$

1. Procédez par **double inclusion**.
2. Expliquez l'idée : “Un élément est dans A et dans $(B \; ou \; C)$."

Question 3 : Relations / équivalences / ordres

Q3a

On a un ensemble de **rôles** R, chaque rôle r associé à un ensemble de **permissions** $Perm(r) \subseteq P$. On définit $r_1 \leq r_2 \; ssi \; Perm(r_1) \subseteq Perm(r_2)$.

1. Déterminez si “$\leq$” est un **ordre partiel**, une **équivalence** ou aucun des deux.
2. Donnez un **exemple** de deux rôles incomparables.
3. Proposez un critère pour **supprimer** un rôle “redondant”.

Q3b

Soit l’ensemble W de tous les **mots** (chaînes de caractères) sur un certain alphabet. On définit $\sim$ par :

$$u \sim v \quad \iff \quad u \text{ est un anagramme de } v.$$

(i.e. même multiset de lettres, ordre potentiellement différent)

1. Déterminez de quel type est la relation $\sim$.
2. Donnez un exemple concret.

Q3c

On considère l’ensemble $\{0,1\}^*$ (mots binaires de longueur quelconque). On définit :

$$u \sim v \quad \iff \quad \big(u \text{ et } v \text{ ont le même nombre de } 1\big).$$

1. Démontrez quel type de relation est $\sim$.
2. Supposons maintenant qu’on se limite aux mots de longueur fixée n. Montrez qu’on peut associer à tout mot de longueur n un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$ correspondant aux positions des 1.

Bon travail !