📚 Remise - EXO séance 2 - LALLEMENT Corentin - 240314

> **Création de la note à `10: 40` le `2025-03-17`.**
> Par `LALLEMENT Corentin`, `240314`.

📝 Remise des 3 exercices

Question 1 : Opérations sur les ensembles

Q1a

$A = 1, 2, 4, 7$ et $B = 2, 3, 7, 8$.

1. **Calcul des opérations sur les ensembles :**
   $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$
   $A \cap B = \{2, 7\}$
   $A \setminus B = \{1, 4\}$
   $B \setminus A = \{3, 8\}$
2. **Cardinalité de $A \cup B$:**
   $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$|A \cup B| = 4 + 4 - 2 = 6$
3. **Liste des couples de $A \times B$ et sa taille :**
   $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 7), (1, 8), (2, 2), (2, 3), (2, 7), (2, 8),$
   $(4, 2), (4, 3), (4, 7), (4, 8), (7, 2), (7, 3), (7, 7), (7, 8)\}$
   $|A \times B| = 4 \times 4 = 16$

Question 2 : Lois ensemblistes / preuves

Q2b - Preuve d’une loi de De Morgan

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{ou} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

1. **Preuve par double inclusion :**
   - $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$:
     - Si $x \in (A \cup B)^c$, alors $x \notin A$ et $x \notin B$.
     - => $x \in A^c$ et $x \in B^c$.
     - => $x \in A^c \cap B^c$, inclusion vérifiée.
   - $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$:
     - Si $x \in A^c \cap B^c$, alors $x \notin A$ et $x \notin B$.
     - => $x \notin A \cup B$, donc $x \in (A \cup B)^c$.
2. **Exemple d’ensembles concrets :**
   - $A = 1, 2, 3$ et $B = 3, 4, 5$ dans un univers $U = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
   - $(A \cup B)^c = 6$ et $A^c \cap B^c = 6$, ce qui confirme l'égalité.

Question 3 : Relations / équivalences / ordres

$u \sim v \iff u \text{ et } v \text{ ont le même nombre de } 1.$

1. **Type de relation** :
   - **Réflexivité** : Tout mot u a le même nombre de 1 que lui-même, donc $u \sim u$.
   - **Symétrie** : Si $u \sim v$, alors $v \sim u$ car le critère est le **nombre** de 1, indépendamment de l'ordre.
   - **Transitivité** : Si $u \sim v$ et $v \sim w$, alors $u \sim w$ car ils ont le même nombre de 1.
   - La relation est donc une **relation d'équivalence**.
2. **Correspondance avec les sous-ensembles de $1, \ldots, n$:**
   - Si un mot de longueur n contient des 1 à certaines positions, on peut l’associer à un sous-ensemble de $1, 2, \ldots, n$.
   - **Exemple** :
     - Le mot 10110 (longueur 5) correspond à l’ensemble $1, 3, 4$ car les 1 apparaissent aux positions 1, 3 et 4.
   - Chaque **classe d'équivalence** de la relation $\sim$ correspond à un ensemble de positions de 1.