Transformation de Laplace

Mathématiques et statistiques appliquées

Carlier P.

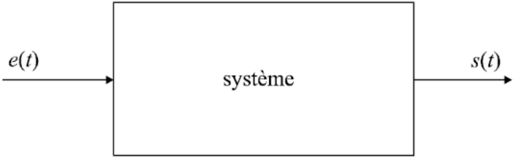
Haute école en Hainaut

Introduction

- Systèmes physiques = opérateurs faisant correspondre des réponses à des sollicitations. Exemples :

	Sollicitation	**Réponse**
Système électrique	Tension d'entrée	Tension de sortie
Amortisseur véhicule	Chocs sur la route	Position
Système optique	Rayon lumineux	Rayon réfléchi

- Ce sont des **signaux**. Notations : l'entrée, e et la sortie, s.
- En général, signaux décrits par l'évolution au fil du temps (mais pas la seule représentation possible !).
- Un système quelconque prend un signal $e(t)$ et le transforme en $s(t)$.



Systèmes linéaires

- En général, l'entrée et la sortie sont combinaisons linéaires de plusieurs signaux. Si le système conserve au niveau de la sortie la combinaison linéaire d'entrée, càd si

$$e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) + \ldots + \lambda_n e_n(t) \quad s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t) + \ldots + \lambda_n s_n(t)$$

  où chaque s_i est la réponse de l'entrée e_i, alors le système est linéaire.
- Comment prédire la sortie $s(t)$ en connaissant l'entrée $e(t)$?
- En général, ces systèmes sont régis par des équations différentiels :

$$a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1} s^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_m e^{(m)}(t) + \ldots + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

- Au plus n ou m est grand, au plus l'équation est complexe.

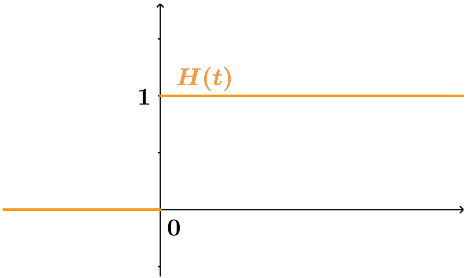
→ **Transformée de Laplace** permettant une résolution plus simple de ces équations.

Signaux

- Un **signal temporel** est une fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto x(t)$.
- Un signal x est dit **causal** si $\forall t < 0,\ x(t) = 0$.
- L'**échelon unité** (Heaviside) est la fonction $H(t)$ définie par :

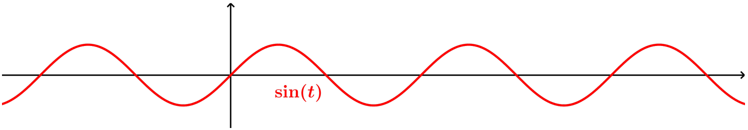
$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un signal causal.

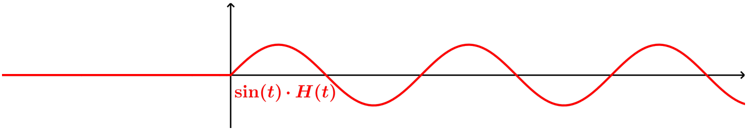


Quelques signaux particuliers - Sinusoïdal

- Signal sinusoïdal : $x(t) = \sin(t)$



- Signal sinusoïdal causal : $x(t) = \sin(t) \cdot H(t)$



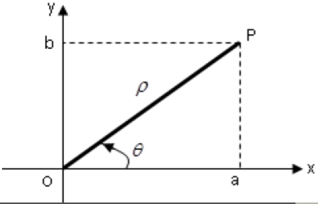
Rappels - Les manipulations graphiques

Soit un signal $x(t)$. Les signaux suivants ont pour représentation graphique celle du signal $x(t)$ à laquelle on applique la transformation indiquée.

- $-x(t)$: symétrie orthogonale d'axe Ox
- $a \cdot x(t)$: dilatation/contraction de l'axe Oy, $a > 0$
- $x(t) + b$: translation verticale
- $x(-t)$: symétrie orthogonale d'axe Oy
- $x(a \cdot t)$: contraction/dilatation de l'axe Ox, $a > 0$
- $x(t - b)$: translation horizontale
- $a \cdot x(c \cdot x + d) + b$ transformation affine générale

Rappels - Nombres complexes

- Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $a + bi$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et i est le nombre dit imaginaire tel que $i^2 = -1$. On appelle a la **partie réelle** de z et b la **partie imaginaire** de z. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- Le **conjugué** d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre $\overline{z} = a - bi$. Son **module** est le réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il se représente dans un plan par le point $(a; b)$ appelé point-image de z.
- La **forme trigonométrique** d'un nombre complexe $z = a + bi$ est $z = \rho \operatorname{cis}(\theta) = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ où $\rho = |z|$ et θ est l'angle formé par l'axe Ox et la demi-droite $[OP[$, P étant le point-image de z.



Nombres complexes : notation exponentielle

- La forme trigonométrique précédente peut également s'écrire de la façon suivante :

$$z = \rho \, \mathrm{cis}(\theta) = \rho e^{i\theta}$$

- En particulier,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

→ De là, nous obtenons les relations suivantes :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- Dans la suite du cours, on utilisera la notation exponentielle pour exprimer la forme trigonométrique d'un nombre complexe et on notera le nombre imaginaire i par j.

Définition

Définition

Soit un signal causal temporel $x(t)$. La **transformée de Laplace** de x, notée $\mathcal{L}(x)$ est une fonction $X : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-pt} \, \mathrm{d}t$$

où $p = \tau + j\omega \in \mathbb{C}$.

- Le signal doit être causal : $x(t) = 0 \; \forall t < 0$.
- La transformée n'existe pas dans tous les cas : l'intégrale ci-dessus doit être convergente. On peut montrer que cette convergence est vérifiée si la partie réelle τ de p est supérieure à une valeur α donnée appelée seuil de convergence (n'entre pas dans le cadre du cours).
- On appelle $x(t)$ la transformée inverse de $X(p)$.

Quelques exemples

- $\mathcal{L}(H(t))(p) =$
- $\mathcal{L}(t \cdot H(t))(p) =$
- $\mathcal{L}(t^2 \cdot H(t))(p) =$
- $\mathcal{L}(t^3 \cdot H(t))(p) =$
- $\mathcal{L}(t^n \cdot H(t))(p) =$
- $\mathcal{L}(e^{at} \cdot H(t))(p) =$
- $\mathcal{L}(\sin(\omega t) \cdot H(t))(p) =$
- $\mathcal{L}(\cos(\omega t) \cdot H(t))(p) =$

Quelques exemples

- $\mathcal{L}(H(t))(p) = \dfrac{1}{p}$
- $\mathcal{L}(t \cdot H(t))(p) = \dfrac{1}{p^2}$
- $\mathcal{L}(t^2 \cdot H(t))(p) = \dfrac{2}{p^3}$
- $\mathcal{L}(t^3 \cdot H(t))(p) = \dfrac{6}{p^4}$
- $\mathcal{L}(t^n \cdot H(t))(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
- $\mathcal{L}(e^{at} \cdot H(t))(p) = \dfrac{1}{p-a}$
- $\mathcal{L}(\sin(\omega t) \cdot H(t))(p) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}(\cos(\omega t) \cdot H(t))(p) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

Propriétés - Linéarité

- Rappel sur les intégrales :

$$\int f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t = \int f(t)\,\mathrm{d}t + \int g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit la linéarité de la transformation de Laplace.

Linéarité

La transformation de Laplace est linéaire : si x et y sont deux signaux causaux temporels et λ et μ sont 2 nombres complexes, alors

$$\mathcal{L}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathcal{L}(x) + \mu \mathcal{L}(y)$$

En particulier :

- $\mathcal{L}(x + y) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(x)$
- $\mathcal{L}(\lambda x) = \lambda \mathcal{L}(x)$

Propriétés - Transformée d'une dérivée

Transformée d'une dérivée

Si $x(t)$ est un signal causal temporel et si $X(p)$ est sa transformée de Laplace, alors la transformée de sa dérivée première est donnée par :

$$\mathcal{L}(x')(p) = pX(p) - x(0)$$

$\rightarrow$ L'opérateur dérivation est transformé en opérateur arithmétique !

- Appliqué à la dérivée seconde : $\mathcal{L}(x'') = p^2X(p) - px(0) - x'(0)$.
- Formule générale pour la dérivée n^{e} mais très lourde.
- Retenir que si les conditions initiales sont nulles ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$, ..., $x^{(n)}(0) = 0$, alors $\mathcal{L}(x^{(n)}) = p^nX(p)$.

⚠ Il faut que $x(t)$ ne croisse pas trop rapidement (bornée par une exponentielle) !

Propriétés - Changement d'échelle et Retard

Propriétés

Soient $x(t)$ est un signal causal temporel, $X(p)$ sa transformée de Laplace, λ et a des réels **positifs**. On a :

- $\mathcal{L}(x(\lambda t))(p) = \dfrac{1}{\lambda} X\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$
- $\mathcal{L}\left(x\left(\dfrac{t}{\lambda}\right)\right)(p) = \lambda X(\lambda p)$
- $\mathcal{L}(x(t-a))(p) = e^{-ap} X(p)$
- $\mathcal{L}(e^{-at} x(t)) = X(p+a)$

1. Introduction
2. Transformation de Laplace
3. Transformée inverse
4. Equations différentielles

Définition

Définition

Soit une fonction complexe $X : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : p \mapsto X(p)$. L'**original** ou **transformée de Laplace inverse** de $X(p)$ est le signal temporel causal $x(t)$ tel quel $\mathcal{L}(x)(p) = X(p)$. On a de plus :

$$x(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p$$

- Pour obtenir une transformée inverse, il s'agit donc de réaliser une intégration entre deux bornes complexes dont la partie réelle est une constante c supérieure au seuil de convergence α de $X(p)$.
- Remarquons la similitude avec la formule permettant de calculer une transformée de Laplace : $X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$.
- On ne calculera pas une transformée inverse à l'aide de cette intégrale.

⇝ Tables et décomposition en éléments simples de fractions rationnelles.

Décomposition en éléments simples

- Une fraction rationnelle est un quotient de polynômes. Exemple $\frac{x+1}{x^2+x+1}$.
- Toute fraction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur se décompose en éléments simples selon les principes suivants.

▷ $\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$ où $\deg(P) < n$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$.

▷ $\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

où $\deg(P) < 2n$, $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_n \in \mathbb{R}$ et ax^2+bx+c est un polynôme du second degré qui ne se factorise pas.

▷ Si le dénominateur est un produit de plusieurs des cas précédents, on combine ces deux principes.

▷ Exemples : $\frac{x+1}{x^2+x-6}$, $\frac{x^2+2}{(x+3)^3}$, $\frac{1}{x^3+x^2+x}$

Calcul d'une transformée inverse

- Afin de calculer une transformée inverse, il suffit en général de connaître quelques transformées de Laplace usuelles et quelques propriétés fondamentales.
- De plus, la plupart des transformées des signaux usuels se présentent sous la forme d'une fraction rationnelle simple.
- Nous étudierons les transformées inverses de fractions rationnelles. Il s'agira donc de décomposer la fraction en éléments simples, d'utiliser les tables de transformations et d'appliquer la linéarité pour obtenir la transformée inverse.

Exemples

- $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p+1}{p^2+p-6}\right) =$
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p^2+2}{(p+3)^3}\right) =$
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p-1}{p^2+2p+5}\right) =$
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p-2}{p^2+4}\right) =$

1. Introduction
2. Transformation de Laplace
3. Transformée inverse
4. Equations différentielles

Introduction

- En électronique, on est parfois amené à résoudre des équations différentielles (dans le cadre de circuits électriques).
- Elles sont de la forme suivante :

$$a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1} s^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_m e^{(m)}(t) + \ldots + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

  où $e(t)$ est un signal d'entrée et $s(t)$ est un signale de sortie.
- Dans le cadre du cours, nous nous intéresserons uniquement à des équations du premier et du second ordre à coefficients constants de la forme suivante :

$$as'(t) + bs(t) = ce(t) \quad \text{ou} \quad as''(t) + bs'(t) + cs(t) = de(t)$$

  où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- La question sera de trouver le signal de sortie en connaissant le signal d'entrée et les conditions initiales (de la forme $s(0) = s_0$ pour le premier ordre et $s(0) = s_0$ et $s'(0) = s_0'$ pour le second ordre). Souvent, les conditions initiales sont nulles ($s_0 = s_0' = 0$).

Exemples

- La solution de l'équation $s'(t) - 2s(t) = 0$ répondant à la condition initiale $s(0) = 1$ est $s(t) = e^{2t}$.

▷ En remplaçant dans l'équation, on a bien

$$(e^{2t})' - 2e^{2t} = 0 \Longleftrightarrow 2e^{2t} - 2e^{2t} = 0$$

▷ La condition initiale est vérifiée : $s(0) = e^{2\cdot 0} = e^0 = 1$.

- La solution de l'équation $s(t) - \frac{1}{2}s'(t) - \frac{1}{2}s''(t) = t^2 - \frac{3}{2}$ répondant aux conditions initiales $s(0) = 0$ et $s'(0) = 1$ est $s(t) = t^2 + t$.

▷ En remplaçant dans l'équation, on a bien

$$t^2+t-\frac{1}{2}((t^2+t)'+(t^2+t)'') = t^2-\frac{3}{2} \Longleftrightarrow t^2+t-\frac{1}{2}(2t+1+2) = t^2-\frac{3}{2}$$

▷ Les conditions initiales est vérifiées : $s(0) = 0$ et $s'(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.

Résoudre une équation avec les transformées de Laplace I

- Soient les signaux $s(t)$ et $e(t)$ et leurs transformées respectives $S(p)$ et $E(p)$.
- Rappel : $\mathcal{L}(s') = pS(p) - s(0)$ et $\mathcal{L}(s'') = p^2S(p) - ps(0) - s'(0)$.
- De plus, la transformation de Laplace est linéaire.
- Par Laplace, on a équivalence entre les 2 équations suivantes :

$$as'(t) + bs(t) = ce(t) \Longleftrightarrow apS(p) - as(0) + bS(p) = cE(p)$$

En isolant $S(p)$, on obtient :

$$S(p) = \frac{cE(p) + as(0)}{ap + b}$$

On trouve le signal $s(t)$ par la transformée inverse.

Résoudre une équation avec les transformées de Laplace II

- Par Laplace et un développement similaire, on a :

$$as''(t)+bs'(t)+cs(t) = de(t) \Longleftrightarrow S(p) = \frac{dE(p) + aps(0) + as'(0) + bs(0)}{ap^2 + bp + c}$$

  On trouve le signal $s(t)$ par la transformée inverse.

- Remarquons que si les conditions initiales sont nulles, on a :

$$\begin{cases} S(p) = \frac{cE(p)}{ap+b} & \text{Equation du premier ordre} \\ S(p) = \frac{dE(p)}{ap^2+bp+c} & \text{Equation du second ordre} \end{cases}$$

Exemples

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $2s'(t) + s(t) = 3t$
- $s''(t) + 4s'(t) + 3s(t) = 2$

Remarque : les signaux sont causaux, on suppose donc que l'on démarre au temps $t = 0$. On a donc ici $e(t) = t \cdot H(t)$ dans le premier cas et $e(t) = H(t)$ dans le second cas.