Voici les solutions détaillées pour chaque fonction x(t)x(t) donnée :

(a) x(t)=3e−3tx(t) = 3e^{-3t}

La transformation de Laplace d'une fonction exponentielle causale est donnée par : L(e−at)=1p+aL(e^{-at}) = \frac{1}{p + a}

En multipliant par le coefficient 3 : L(3e−3t)=3p+3L(3e^{-3t}) = \frac{3}{p + 3}

(b) x(t)=4t3−t5−1x(t) = 4t^3 - t^5 - 1

Pour un polynôme tnt^n, la transformation de Laplace est : L(tn)=n!pn+1L(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}

Calculez chaque terme :

- L(4t3)=4 · 3!p4=24p4L(4t^3) = 4 \cdot \frac{3!}{p^4} = \frac{24}{p^4}
- L(−t5)=−5!p6=−120p6L(-t^5) = - \frac{5!}{p^6} = - \frac{120}{p^6}
- L(−1)=−1pL(-1) = - \frac{1}{p}

Résultat total : L(x(t))=24p4−120p6−1pL(x(t)) = \frac{24}{p^4} - \frac{120}{p^6} - \frac{1}{p}

(c) x(t)=(t−5) · H(t−5)x(t) = (t - 5) \cdot H(t - 5)

Pour une fonction décalée dans le temps H(t−a)H(t-a), la transformation est donnée par : L(x(t−a)H(t−a))=e−apX(p)L(x(t-a)H(t-a)) = e^{-ap}X(p)

Ici, x(t)=tx(t) = t décalé de 5. La transformation de tt est : L(t)=1p2L(t) = \frac{1}{p^2}

En appliquant le décalage : L((t−5) · H(t−5))=e−5p · 1p2L((t-5) \cdot H(t-5)) = e^{-5p} \cdot \frac{1}{p^2}

(d) x(t)=(t+5) · H(t−5)x(t) = (t + 5) \cdot H(t - 5)

On réécrit x(t)=(t−5+10) · H(t−5)x(t) = (t - 5 + 10) \cdot H(t - 5), soit x(t)=(t−5)H(t−5)+10H(t−5)x(t) = (t-5)H(t-5) + 10H(t-5).

Pour (t−5)H(t−5)(t-5)H(t-5), nous avons déjà trouvé : L((t−5) · H(t−5))=e−5p · 1p2L((t-5) \cdot H(t-5)) = e^{-5p} \cdot \frac{1}{p^2}

Pour 10H(t−5)10H(t-5), la transformation de H(t−a)H(t-a) est : L(H(t−5))=e−5p · 1pL(H(t-5)) = e^{-5p} \cdot \frac{1}{p}

Résultat total : L(x(t))=e−5p · 1p2+10e−5p · 1pL(x(t)) = e^{-5p} \cdot \frac{1}{p^2} + 10e^{-5p} \cdot \frac{1}{p}

(e) x(t)=−4cos(7t)x(t) = -4 \cos(7t)

La transformation de Laplace de cos(ωt)\cos(\omega t) est :
L(cos(ωt))=pp2+ω2L(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}

Ici, ω=7\omega = 7 et un coefficient de −4-4 : L(−4cos(7t))=−4·pp2+49L(-4\cos(7t)) = -4 \cdot \frac{p}{p^2 + 49}

(f) x(t)=e2t(t4−5)x(t) = e^{2t}(t^4 - 5)

Pour une fonction exponentielle multipliée par une autre fonction, la transformation est décalée : L(eatx(t))=X(p−a)L(e^{at}x(t)) = X(p-a)

La transformation de t4−5t^4 - 5 est :

- L(t4)=4!p5=24p5L(t^4) = \frac{4!}{p^5} = \frac{24}{p^5}
- L(−5)=−5pL(-5) = - \frac{5}{p}

L(t4−5)=24p5−5pL(t^4 - 5) = \frac{24}{p^5} - \frac{5}{p}

Avec le décalage a=2a = 2 : L(e2t(t4−5))=24(p−2)5−5p−2L(e^{2t}(t^4 - 5)) = \frac{24}{(p-2)^5} - \frac{5}{p-2}

(g) x(t)=2e−t(cos(4t)+sin(4t))x(t) = 2e^{-t}(\cos(4t) + \sin(4t))

Pour une fonction de la forme e−at(Acos(ωt)+Bsin(ωt))e^{-at}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)), utilisez : L(e−atcos(ωt))=p+a(p+a)2+ω2L(e^{-at}\cos(\omega t)) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2} L(e−atsin(ωt))=ω(p+a)2+ω2L(e^{-at}\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}

Ici, a=1a = 1, ω=4\omega = 4, A=1A = 1, et B=1B = 1 :

- L(e−tcos(4t))=p+1(p+1)2+16L(e^{-t}\cos(4t)) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 16}
- L(e−tsin(4t))=4(p+1)2+16L(e^{-t}\sin(4t)) = \frac{4}{(p+1)^2 + 16}

Ajoutez les deux et multipliez par 2 : L(x(t))=2(p+1(p+1)2+16+4(p+1)2+16)L(x(t)) = 2 \left(\frac{p+1}{(p+1)^2 + 16} + \frac{4}{(p+1)^2 + 16} \right) L(x(t))=2(p+1)+8(p+1)2+16L(x(t)) = \frac{2(p+1) + 8}{(p+1)^2 + 16} L(x(t))=2p+10(p+1)2+16L(x(t)) = \frac{2p + 10}{(p+1)^2 + 16}

Résumé des résultats :

1. L(3e−3t)=3p+3L(3e^{-3t}) = \frac{3}{p+3}
2. L(4t3−t5−1)=24p4−120p6−1pL(4t^3 - t^5 - 1) = \frac{24}{p^4} - \frac{120}{p^6} - \frac{1}{p}
3. L((t−5)H(t−5))=e−5p⋅1p2L((t-5)H(t-5)) = e^{-5p} \cdot \frac{1}{p^2}
4. L((t+5)H(t−5))=e−5p⋅1p2+10e−5p⋅1pL((t+5)H(t-5)) = e^{-5p} \cdot \frac{1}{p^2} + 10e^{-5p} \cdot \frac{1}{p}
5. L(−4cos(7t))=−4⋅pp2+49L(-4\cos(7t)) = -4 \cdot \frac{p}{p^2 + 49}
6. L(e2t(t4−5))=24(p−2)5−5p−2L(e^{2t}(t^4 - 5)) = \frac{24}{(p-2)^5} - \frac{5}{p-2}
7. L(2e−t(cos(4t)+sin(4t)))=2p+10(p+1)2+16L(2e^{-t}(\cos(4t) + \sin(4t))) = \frac{2p + 10}{(p+1)^2 + 16}

Dites-moi si vous souhaitez une clarification ou un développement supplémentaire ! 😊