

## Examen de mathématiques et statistiques

**Durée de l'examen : 3h30**

Calculatrice autorisée. Tout autre appareil électronique est interdit.

**Question 1.** Calculer les transformations de Laplace des signaux causaux suivants.  
*Le formulaire se trouve à la fin de l'examen.*

/15

(a)  $x(t) = 3e^{-3t}$

(b)  $x(t) = 4t^3 - t^5 - 1$

(c)  $x(t) = (t - 5) \cdot H(t - 5)$

(d)  $x(t) = (t + 5) \cdot H(t - 5)$

(e)  $x(t) = -4 \cos(7t)$

(f)  $x(t) = e^{2t}(t^4 - 5)$

(g)  $x(t) = 2e^{-t}(\cos(4t) + \sin(4t))$

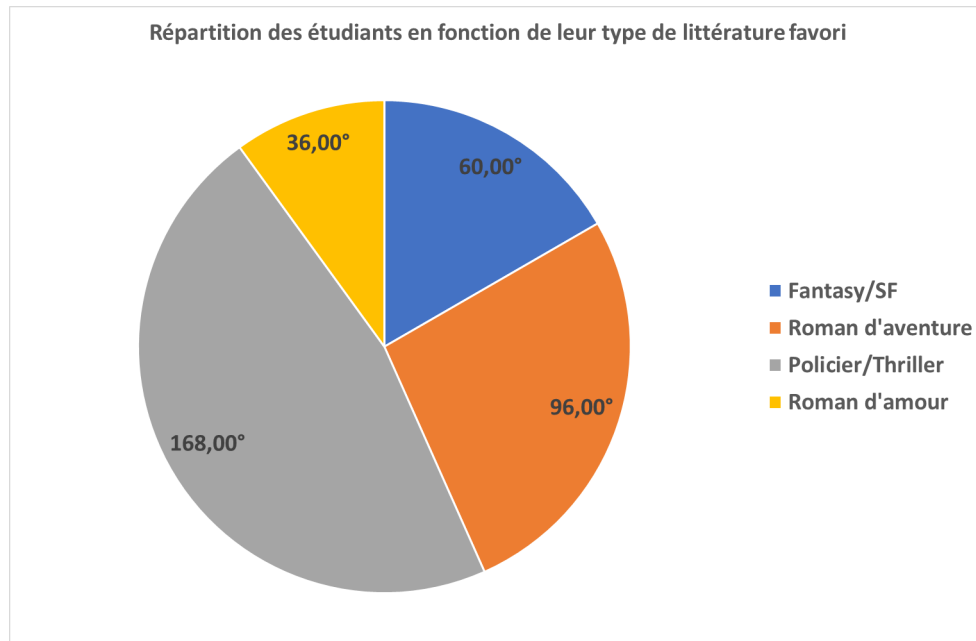
**Question 2.** Soit la fonction  $f(x) = \ln(x) + x - 2$ . La fonction  $f$  admet une racine entre  $x = 1$  et  $x = 2$ . Approcher la valeur de cette racine en appliquant les 2 procédés suivants. Arrondir les réponses à 5 chiffres derrière la virgule.

- (a) Appliquer la méthode des bissections 3 fois à partir de  $a = 1$  et  $b = 2$ .
- (b) Appliquer la méthode de Newton 3 fois à partir de  $a = 3$ .

/10

Question 3. On a interrogé 60 étudiants sur leur type préféré de littérature. Ils se répartissent suivant le diagramme ci-dessous (dans lequel on a noté l'amplitude de l'angle au centre de chaque secteur) :

/5



- (a) Déterminer la variable statistique étudiée. Quelle est la nature de la variable statistique ? Quel est l'ensemble de ses modalités ?
- (b) Réaliser un tableau de distribution de fréquences.
- (c) Déterminer les mesures de tendance centrale de la distribution qui ont du sens.

Question 4. On a étudié le taux de cholestérol (en g/l) chez 30 patients. Les données observées sont répertoriées ci-dessous.

/ 17

1.0	1.5	1.7	2.1	2.6
1.0	1.6	1.8	2.1	2.8
1.2	1.6	1.8	2.2	2.9
1.3	1.7	1.9	2.3	2.9
1.3	1.7	1.9	2.3	3.2
1.4	1.7	1.9	2.4	3.4

- (a) Déterminer l'échantillon sur lequel porte l'étude, la variable statistique étudiée, sa nature et son ensemble de modalités.
- (b) Construire un tableau de distributions de fréquence. Travailler avec 5 classes choisies judicieusement.
- (c) Représenter graphiquement cette distribution et construire l'ogive des fréquences relatives cumulées.
- (d) Quelle proportion de patients a un taux de cholestérol supérieur à 2.5 g/l? Quelle proportion de patients a un taux de cholestérol compris entre 2 et 2.5 g/l? Quelle proportion de patients a un taux de cholestérol inférieur à 2 g/l?
- (e) Déterminer la classe modale, la classe médiane et la moyenne. Ensuite, approcher graphiquement la médiane et la calculer exactement.
- (f) Déterminer l'étendue, l'écart-moyen, la variance et l'écart-type.

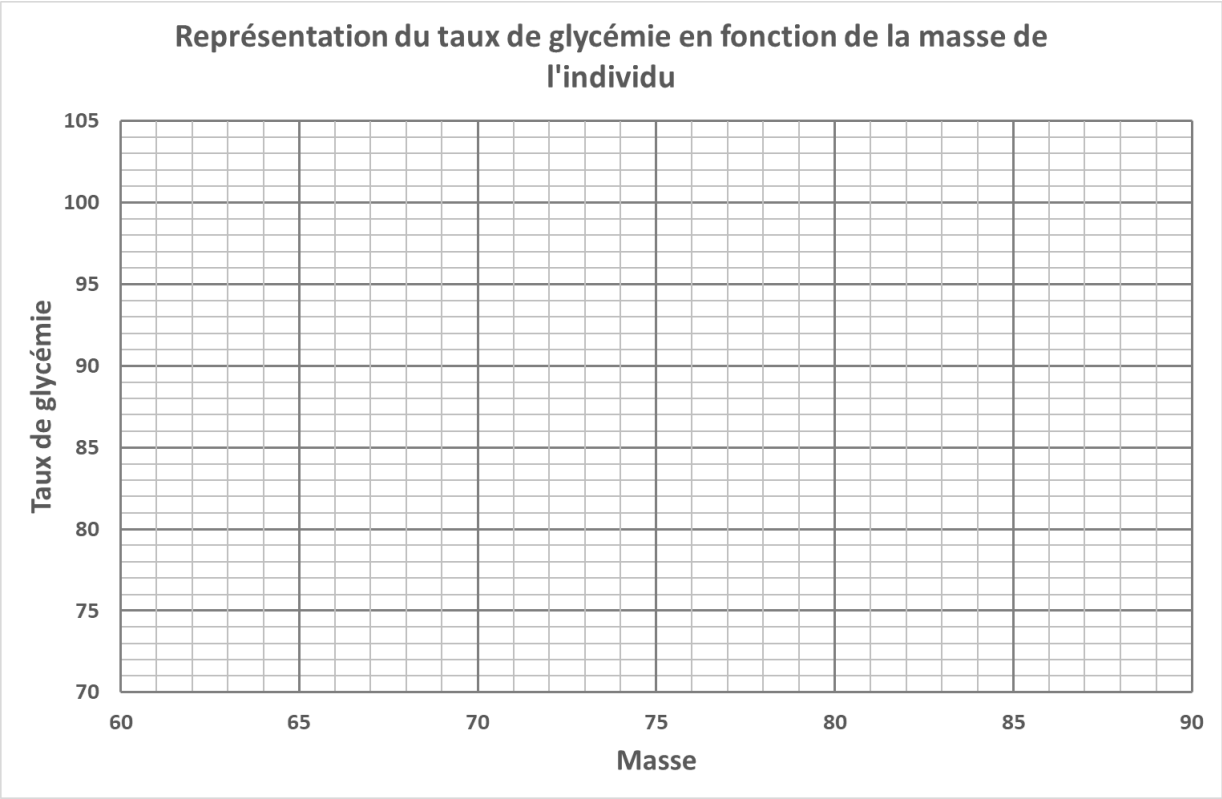
Question 4. (Suite.)

Question 5. On cherche à établir un éventuel lien entre la masse (en kg) et le taux de glycémie (en mg/dL) d'un individu. Nous avons observé les données suivantes sur 6 patients. Arrondir les réponses à 4 chiffres derrière la virgule.

/8

Masse	69	81	65	76	86	73
Glycémie	81	90	75	81	102	99

- (a) Représenter la situation par un nuage de points dans le graphique ci-dessous.
- (b) Déterminer l'équation de la droite de régression et la tracer dans le graphique.
- (c) Calculer le coefficient de corrélation et le coefficient de détermination. Qualifier la qualité de la corrélation.
- (d) Estimer la masse d'un patient dont le taux de glycémie est de 85 mg/dL et le taux de glycémie d'un patient qui pèse 70 kg.



Question 5. (Suite.)

**Question 6.** On a interrogé un ensemble de 120 étudiants sur le nombre d'examens qu'ils doivent représenter en deuxièmes session. Les résultats obtenus ont été résumés dans le tableau suivant :

/5

Nbre d'examens	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nbre d'étudiants	12	20	21	23	14	12	9	7	2

- Calculer les quartiles et construire la boîte à moustaches de cette variable.
- Déterminer le centile 9 et le centile 86.

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

**Question 7.** On a administré un traitement à un groupe de 100 patients souffrant d'une certaine pathologie. Parmi ceux-ci, 30 ont reçu un traitement déjà existant, 30 ont reçu un placebo et 40 ont reçu un nouveau traitement. On choisit au hasard, successivement et sans remise 3 patients de ce groupe.

/4

- Soient les évènements  $A$  : « le premier patient choisi a reçu le nouveau traitement » et  $B$  : « le second patient choisi a reçu le traitement déjà existant ». Les évènements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? **Justifier**.
- Calculer la probabilité que les 3 patients choisis aient reçu un placebo.



**Question 8.** Résoudre les problèmes suivants et indiquer pour chaque problème, en justifiant, le type de groupement étudié.

/6

- (a) Un étudiant doit répondre à un questionnaire à choix multiples. Le questionnaire comprend 15 questions et pour chaque question, il y a 4 propositions (mais il peut également choisir de ne pas répondre à la question). De combien de façons différentes peut-il remplir ce questionnaire ?
- (b) Combien de mots peut-on former avec les lettres du mots QUANTITATIF ?
- (c) On tire simultanément 4 cartes d'un paquet de 52 cartes. De combien de façons différentes peut-on réaliser ce tirage si on sait que l'on a tiré exactement 2 cartes carreau et le roi de pique.
- (d) On souhaite constituer un comité de 3 personnes comprenant un président, un secrétaire et un trésorier. Il y a 13 candidats. De combien de façons peut-on former comité ?

**Question 9.** Vous avez passé un test de dépistage d'un cancer et le résultat est positif... Pourtant, seulement 0.7% de la population est touché par ce cancer. Après vous être renseigné, il vous semble que le test est fiable. En effet, si vous avez le cancer, le test sera positif dans 91% des cas ! Et si vous n'avez pas le cancer, il sera négatif dans 96% des cas. Calculez la probabilité que vous soyez effectivement atteint du cancer et concluez.

/6

/8

**Question 10.** Dans chacun des cas suivants déterminer la variable aléatoire  $X$ , indiquer la loi qu'elle suit, ses paramètres et calculer la probabilité ou la valeur indiquée.

- (a) Une urne contient 5 billes de couleurs différentes. Vous choisissez au hasard une bille de l'urne. Vous gagnez 10 euros si elle est bleue, 7 euros si elle est verte, 1 euro si elle est rouge et vous perdez 8 euros si elle est noire et 15 euros si elle est blanche. Déterminez votre espérance de gain si vous jouez une fois.
- (b) La mortalité dans une exploitation aquacole donne en moyenne 6 poissons tous les 4 jours. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 poissons morts sur une journée ?
- (c) Un groupe de 40 individus en contient 8 qui sont contaminés. On prélève, sans remise, un échantillon de 12 d'entre eux. Quelle est la probabilité qu'on y trouve 2 individus contaminés ?
- (d) Une personne recherche un emploi et envoie sa candidature à 20 entreprises. En sachant que la probabilité qu'une entreprise lui réponde est 0.15, déterminer la probabilité qu'au plus 3 entreprises lui répondent.

/6

**Question 11.** Dans un pays fictif, la taille en centimètres des femmes âgées de 18 à 65 ans peut être modélisée par une loi normale de moyenne 160 cm et de variance 16 cm<sup>2</sup>.

- (a) On choisit une femme au hasard dans cette population, quelle est la probabilité que sa taille soit comprise entre 153 cm et 162 cm ?
- (b) On prélève au hasard un échantillon de 15 femmes dans la population. Quelle est la probabilité que strictement plus de 12 d'entre elles aient une taille comprise entre 153 cm et 162 cm ?

# Transformations de Laplace

$\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} \, dt$  où  $x(t)$  est causal et  $p$  est un nombre complexe.

## Propriétés et transformées usuelles

Signal causal	Transformée de Laplace	Remarque
$x(t) + y(t)$	$X(p) + Y(p)$	
$\lambda x(t)$	$\lambda X(p)$	$\lambda \in \mathbb{R}$
$x(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda} X\left(\frac{p}{\lambda}\right)$	$\lambda > 0$
$x\left(\frac{t}{\lambda}\right)$	$\lambda X(\lambda p)$	$\lambda > 0$
$x(t - a)$	$e^{-ap} X(p)$	$a > 0$
$e^{-at} x(t)$	$X(p + a)$	$a \in \mathbb{C}$
1 (ou $H(t)$ )	$\frac{1}{p}$	
$t$	$\frac{1}{p^2}$	
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}$
$e^{at}$	$\frac{1}{p - a}$	$a \in \mathbb{C}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	

