

OSCILLATEURS AUTO-ENTRETENUS

I INTRODUCTION

Un oscillateur auto-entretenu est un dispositif au sein duquel règne un phénomène physique périodique dans le temps, obtenu sans action extérieure et entretenu par une source d'énergie continue. Des expériences peuvent être présentées dans différentes branches de la physique (§ IV.1, vase de Tantale, ...) mais l'étude menée ici porte principalement sur les oscillateurs électroniques. On présente séparément les oscillateurs quasi-sinusoïdaux et les oscillateurs de relaxation pour dégager leurs caractéristiques propres, mais il n'y a pas de frontière stricte entre ces deux familles. On présente en transition l'oscillateur de Van der Pol car il peut fonctionner dans les deux régimes et permet de montrer l'influence des non linéarités sur la limitation de l'amplitude des oscillateurs quasi-sinusoïdaux.

II OSCILLATEURS QUASI SINUSOÏDAUX

II.1 Introduction

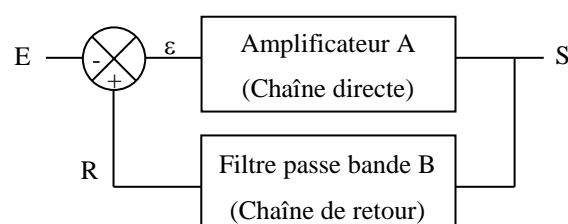
Ces dispositifs délivrent, comme leur nom l'indique, un signal pratiquement sinusoïdal. Ils sont constitués de deux cellules bouclées. La première est un filtre passe bande fixant la fréquence des oscillations. Le deuxième étage est un amplificateur servant à l'ajustement exact du gain global du système pour qu'il fonctionne de manière autonome (sans signal d'entrée). Les oscillateurs quasi sinusoïdaux sont donc des systèmes bouclés devant remplir la condition d'oscillation de Barkhausen et leurs propriétés générales découlent de cette structure :

- la source d'énergie n'a pas d'influence sur la fréquence des oscillations puisque c'est le filtre qui impose cette fréquence. Elle agit seulement sur l'amplitude des oscillations.
- ils sont très sensibles à l'environnement car leur fonctionnement suppose un respect strict du critère de Barkhausen. Cela complique les études car la moindre intervention, comme le branchement d'un oscilloscope, suffit à perturber l'oscillateur et peut conduire à son arrêt. La synchronisation sur une fréquence extérieure est délicate pour la même raison (la moindre modification de la fréquence d'oscillation oblige à recalibrer l'amplification).
- les régimes transitoires sont longs car ils sont oscillants par nature.
- les éléments travaillent pratiquement tout le temps en régime linéaire, mais les phénomènes non-linéaires sont fondamentaux car ils fixent l'amplitude des oscillations.

II.2 Oscillateur à pont de Wien

[2], p. 181

Ce n'est pas le montage le plus performant mais il est simple à réaliser, donc idéal pour aborder les principes de base des oscillateurs quasi sinusoïdaux. C'est un système bouclé à réaction positive :



On a $S = A\varepsilon = A(R - E) = A(BS - E)$ donc la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) est la suivante¹ :

$$H = \left(\frac{S}{E} \right)_{BF} = \frac{A}{AB - 1}$$

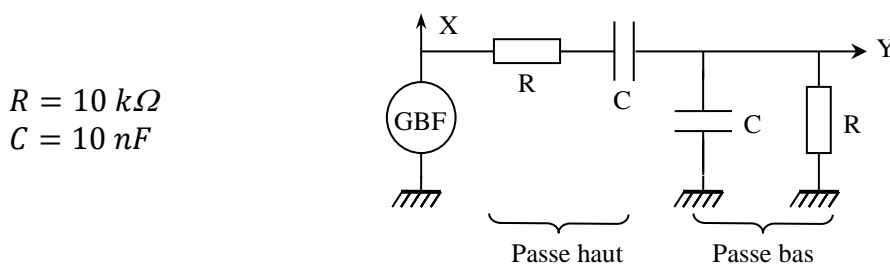
On déduit de cette FTBF la condition d'oscillation spontanée du système (critère de Barkhausen) relative à sa fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) AB :

$$AB = 1 \rightarrow |AB| = |A||B| = 1 \text{ et } \varphi_{AB} = \varphi_A + \varphi_B = 0$$

→ Pour que le système donne naissance de façon autonome à des oscillations sinusoïdales de fréquence f_0 , le module de la FTBO doit être égal à l'unité et son déphasage doit être nul à cette fréquence. L'association des chaînes directe A et retour B doit satisfaire ces deux conditions, et ce uniquement à la fréquence f_0 .

II.2.1 Etude du filtre

Le filtre sélectif constituant la chaîne de retour de l'oscillateur à pont de Win est très simple. Il consiste en l'association d'un filtre passe bas et d'un filtre passe haut réalisés avec des cellules RC :



On peut choisir d'autres valeurs pour R et C . Par contre, les résistances et les capacités doivent être identiques dans les deux cellules (il est préférable de sélectionner les composants). Les valeurs proposées ici donnent une fréquence centrale $f_0 = 1/(2\pi RC) \approx 1590 \text{ Hz}$ proche de la fréquence de mesure des RLC mètre les plus courants.

Mesures :

On peut étudier le gain et le déphasage du filtre pour des fréquences comprises entre 200 et 10 000 Hz avec un oscilloscope numérique. On en déduit les diagrammes de Bode en gain et en phase. On doit trouver un gain maximum égal à $1/3$ à $f_0 = 1/(2\pi RC)$ avec un déphasage nul à cette fréquence et un facteur de qualité $Q = 1/3$ d'après la fonction de transfert du filtre :

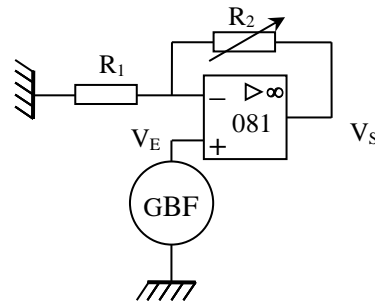
$$B = \frac{1}{3 + j(RC\omega - 1/RC\omega)} = \frac{1/3}{1 + jQ(RC\omega - 1/RC\omega)}$$

Pour obtenir un oscillateur quasi-sinusoïdal, il faut donc associer cette boucle de rétroaction à une chaîne directe réalisant une amplification de gain $A = 3$ sans inversion ($\varphi_A = 0$) pour satisfaire au critère de Barkhausen.

¹ On peut noter la différence d'expression du dénominateur par rapport à la FTBF d'un système à réaction négative résultant de l'inversion du sens de la réaction (cf. annexe 1 du montage sur les systèmes bouclés stables).

II.2.2 Chaîne directe

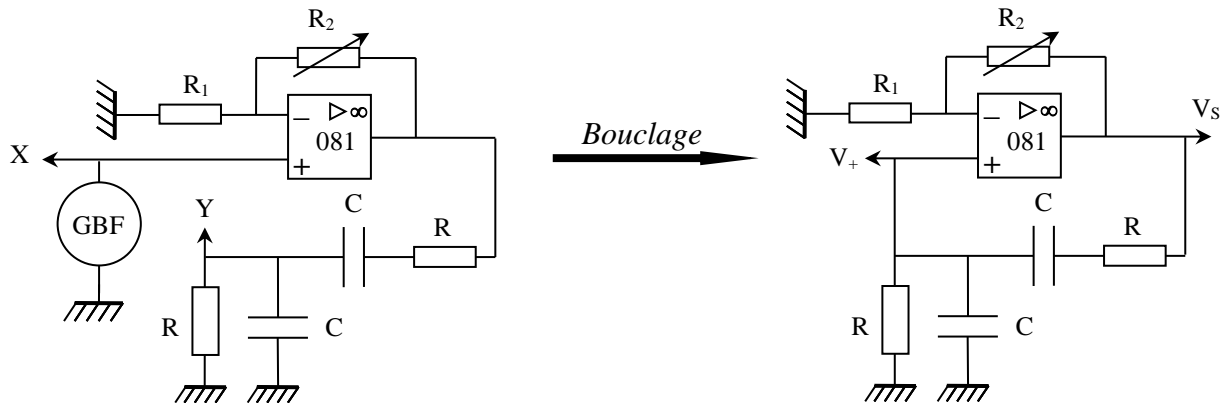
[2], p. 182

 $R_1 : 10\text{ k}\Omega$ R_2 : potentiomètre 0 – 100 k Ω multi-tours

On peut vérifier que ce montage réalise une amplification sans inversion de gain $A = 1 + R_2/R_1$.

II.2.3 Système bouclé

On branche le filtre passe-bande à la sortie de l'amplificateur (attention au sens de branchement du filtre, il n'est pas indifférent). On compare à l'oscilloscope le signal Y à la sortie du filtre au signal X injecté à l'entrée de l'amplificateur et on note les évolutions en fonction de la fréquence :

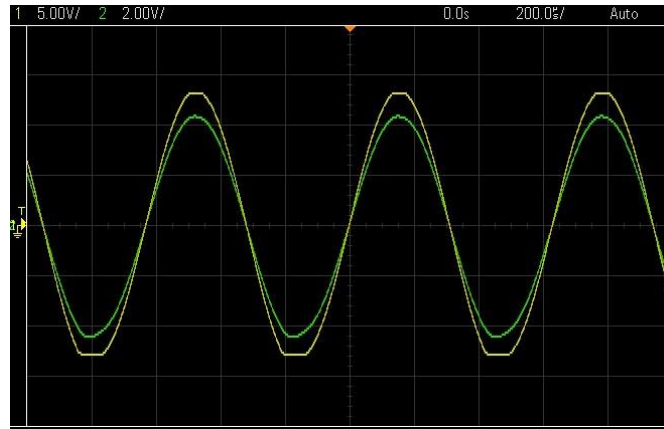


Y et X doivent être en phase à $f = f_0$. Le critère de Barkhausen sur φ est donc respecté à cette fréquence. On peut noter que la phase varie assez peu dans cette zone ($\approx 2^\circ$ à $\pm 100\text{ Hz}$) à cause du faible facteur de qualité du filtre. On ajuste le gain A de l'amplificateur avec R_2 pour obtenir des signaux X, Y de même amplitude. La condition $|A||B| = 1$ est maintenant respectée et le bouclage de la sortie du filtre sur la patte + de l'amplificateur opérationnel donne un système susceptible d'entretenir une oscillation à la fréquence f_0 . Il se peut que l'oscillateur ne démarre pas une fois le bouclage effectué car il faut « extraire » le signal du bruit, ce que ne permet pas le respect strict du critère de Barkhausen (il n'autorise que l'entretien). Dans ce cas, il faut augmenter légèrement le gain A en retouchant finement R_2 pour lancer les oscillations ($|A||B|$ très légèrement supérieur à 1). Cela entraîne une divergence de l'amplitude qui s'arrête lorsque la sortie de l'amplificateur sature. On retouche alors une nouvelle fois R_2 pour se placer en limite de saturation. C'est à ce moment-là qu'on respecte au mieux la condition de Barkhausen sur le gain.

La limitation de l'amplitude des oscillations par un effet non linéaire (saturation de V_S à U_{alim} ici) est un point fondamental des oscillateurs quasi sinusoïdaux. On peut atténuer la saturation en réglant finement A , mais sans l'annuler complètement donc V_S n'est pas parfaitement sinusoïdal. On peut récupérer un signal un peu plus pur en observant la tension sur la patte + de l'amplificateur opérationnel car le filtre passe-bande calé sur f_0 atténue les harmoniques de V_S (cf. figures pages suivantes). Il y a des chances pour que le branchement de l'oscilloscope sur cette patte fasse décrocher l'oscillateur si on est en limite d'entretien (illustration de l'extrême sensibilité à l'environnement des oscillateurs quasi sinusoïdaux) mais il suffit de recaler le gain A pour retrouver

un signal. On peut aussi introduire un élément non linéaire sous la forme d'une résistance variable avec l'amplitude pour adoucir le phénomène de saturation (cf. [2], p.184).

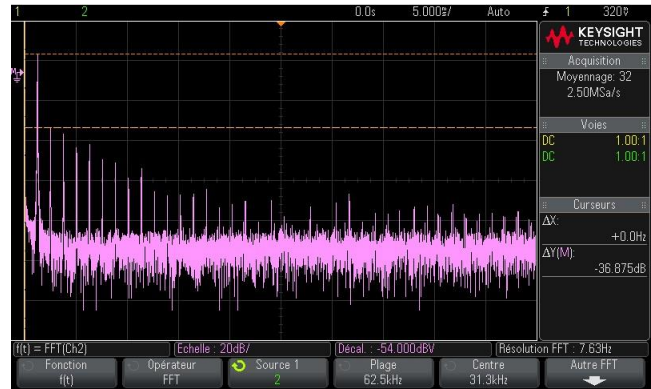
Signaux V_s (jaune) et V_+ (vert) pour un réglage légèrement au-dessus du seuil d'oscillation



FFT de V_s



FFT de V_+



II.2.4 Démarrage de l'oscillateur

Le principe de fonctionnement des oscillateurs quasi sinusoïdaux induit des régimes transitoires longs comparés aux oscillateurs de relaxation. On peut le vérifier ici en développant le critère de Barkhausen avec l'expression de la fonction de transfert de la chaîne de retour. On a, avec $p = j\omega$ et $\omega_0 = 1/RC$:

$$B = \frac{1}{3 + \frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}} \rightarrow \text{la condition d'instabilité } AB = 1 \text{ devient : } 3 + \frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} = A$$

Soit, après développement : $p^2 + (3 - A)\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2 = 0$

Le système est régi par une équation du second ordre à coefficients constants. Des oscillations amorties ou divergentes sont donc possibles. Le régime de croissance correspond à un coefficient d'amortissement λ négatif et les oscillations pseudo périodiques correspondent aux valeurs négatives du discriminant $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$ de l'équation (cf. [6], p. 160). On a donc :

$$\text{Démarrage de l'oscillateur}^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{(3 - A)\omega_0}{2} < 0 \rightarrow A > 3 \rightarrow R_2 > 2R_1$$

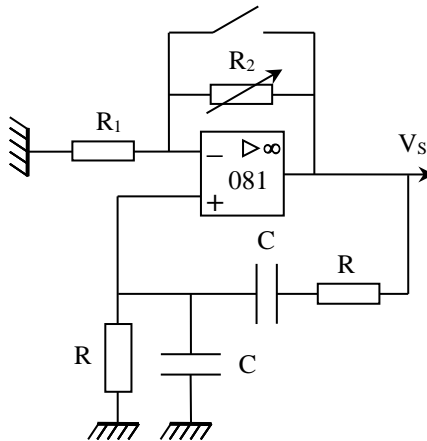
² On peut noter qu'on retrouve la condition de démarrage $A \geq 3$ obtenue au § II.2.1 lors de l'étude du filtre constituant la chaîne de retour de l'oscillateur.

$$\text{Régime pseudo périodique} \leftrightarrow \lambda < \omega_0 \rightarrow A < 5 \rightarrow R_2 < 4R_1$$

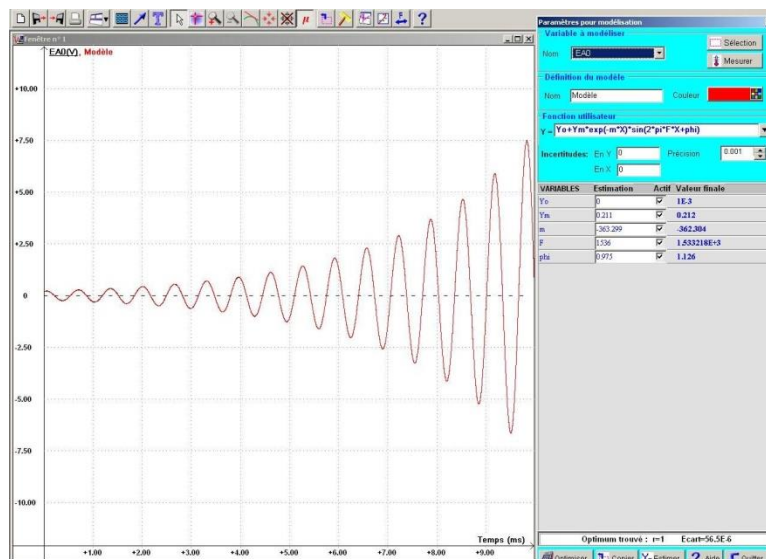
Dans ces conditions, la loi d'évolution des oscillations au démarrage est :

$$V(t) = V_m e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Manipulation :



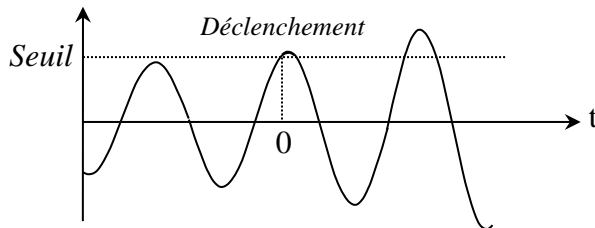
On augmente légèrement R_2 pour se placer au-dessus du seuil de démarrage des oscillations ($|A||B| > 1$). On shunte cette résistance à l'aide d'un fil pour arrêter l'oscillateur, puis on retire le shunt pour le relancer. Les oscillations ont une croissance exponentielle d'autant plus rapide que R_2 est fort et on peut vérifier le caractère exponentiel en effectuant une modélisation. On a alors intérêt à ajuster R_2 pour avoir un régime transitoire de l'ordre d'une dizaine de périodes du signal. Voici à titre indicatif le résultat d'une acquisition (déclenchement commandé par un seuil proche de zéro) :



On peut modéliser le régime transitoire avec la fonction prédéfinie « sinus amorti »³. L'optimisation échoue généralement si on laisse le logiciel se débrouiller tout seul car le nombre de paramètre à ajuster est important. On peut l'aider en lui donnant des estimations : la valeur moyenne du signal V_0 est évidemment nulle. Sa valeur initiale fournit une estimation de V_m car on a $V(t = 0) = V_0 +$

³ On a enlevé l'expression de la pulsation propre dans le modèle et défini la fréquence f dans le sinus. On a en revanche conservé le signe – dans l'exponentielle pour conserver un amortissement négatif.

$V_m \sin \varphi = V_m \sin \varphi$. La croissance des oscillations étant relativement lente par rapport à leur période, le déclenchement de l'acquisition la première fois que le seuil demandé est atteint se fait par conséquent près d'un maximum du signal :



On a donc $V(t = 0) = V_{seuil} \approx V_m$

Cela implique que $\sin \varphi \approx 1 \rightarrow \varphi \approx \pi/2$

La fréquence f doit être mesurée soigneusement et le coefficient d'amortissement peut s'estimer en mesurant le décrément logarithmique (V_n et V_{n+1} correspondent à deux maximums d'amplitude successifs) :

$$\delta = \ln \left(\frac{V_n}{V_{n+1}} \right) = \lambda T$$

Fournir toutes ces estimations ne garantit pas forcément une convergence de la modélisation car le nombre relativement important de périodes corrèle fortement l'optimisation de la phase initiale à celle de la fréquence⁴. En cas de soucis, il faut procéder par étapes en découplant les deux ajustements :

- on impose les estimations pour V_0, V_m, λ, f et on lance une optimisation avec la phase comme seul degré de liberté. Si les estimations sont bonnes, le logiciel finit par converger et donne une valeur finale pour φ .

- on remplace l'estimation sur φ par la valeur obtenue et on relance le processus en activant tous les paramètres sauf φ . Le logiciel doit finir par converger et donne des valeurs pour V_0, V_m, λ et f . On peut tenter une dernière optimisation en remplaçant toutes les estimations par les valeurs finales et en activant tous les paramètres.

Résultats :

Le modèle s'ajuste très bien à la courbe expérimentale sur notre exemple. L'hypothèse d'une croissance exponentielle est donc vérifiée, avec un coefficient d'amortissement $\lambda_{modélisé} = -362 \text{ s}^{-1}$. On peut comparer ce résultat à celui calculé compte tenu des valeurs de R, C, R_1 et R_2 :

$$\left. \begin{array}{l} R_1 = 10,00 \text{ k}\Omega \\ R_2 = 20,94 \text{ k}\Omega \\ f_0 = 1534 \text{ Hz} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda_{attendu} = \frac{(3 - A)\omega_0}{2} = \left(1 - \frac{R_2}{2R_1}\right)\omega_0 = -453 \text{ s}^{-1}$$

Il y a un écart significatif ($\approx 25 \%$) mais la formule implique une grande sensibilité aux valeurs des résistances. Le calcul montre qu'un amortissement $\lambda = -362 \text{ s}^{-1}$ avec les mêmes valeurs de R_1 et f_0 correspond à une valeur $R_2 = 20,75 \text{ k}\Omega$, soit un écart de 1 % avec la valeur expérimentale.

II.2.5 Stabilité en fréquence

On peut étudier la stabilité de l'oscillateur en mesurant sa fréquence à l'aide d'un compteur (l'appareil doit être allumé suffisamment longtemps à l'avance pour un fonctionnement optimal). On a une stabilité d'environ 10 ppm pour un gain statique de la chaîne directe fixé, ce qui est assez remarquable vu la piètre sélectivité du filtre passe

⁴ On conçoit assez facilement qu'une petite modification sur la fréquence du modèle puisse aboutir à d'importants changements sur la phase initiale. De même, une modification de la phase initiale peut obliger le logiciel à devoir recalculer de manière notable la fréquence pour coller au mieux à la courbe expérimentale. Les itérations successives du processus d'optimisation le conduisent donc souvent à tourner en rond sans parvenir à une convergence.

bande utilisé ($Q = 1/3$). En revanche, la fréquence des oscillations est sensible au réglage du gain de la chaîne directe. Il suffit pour s'en convaincre d'augmenter légèrement la valeur de R_2 à partir du seuil d'entretien des oscillations :

$R_2(\Omega)$	2053	2063	2073	2083	2093	2103
$f \text{ (Hz)}$	1587,94	1587,35	1586,27	1585,35	1584,34	1583,21

Les variations sont faibles dans l'absolu (≈ 1000 ppm) mais fortes comparées à la stabilité des bases de temps électroniques courantes (stabilité de l'ordre du ppm, voire moins). Ces changements de fréquences sont possibles car ils ont très peu d'impact sur la phase vu la valeur de Q^5 (cf. § II.2.3). La stabilité de cet oscillateur est donc médiocre vis-à-vis d'éventuelles fluctuations de paramètres internes. Un filtre à plus grand facteur de qualité (résonateur à Quartz) permet d'obtenir un dispositif plus performant.

II.2.6 Passage en mode relaxé

On l'obtient en augmentant encore R_2 . Le signal de sortie sature de plus en plus et tend vers un signal carré qui n'est plus à la fréquence propre du filtre. L'observation du régime transitoire montre qu'il s'accélère jusqu'à devenir apériodique lorsque R_2 est supérieur à $4R_1$ (cf. § II.2.4). L'oscillateur fonctionne en mode relaxé.

II.3 Oscillateur à Quartz

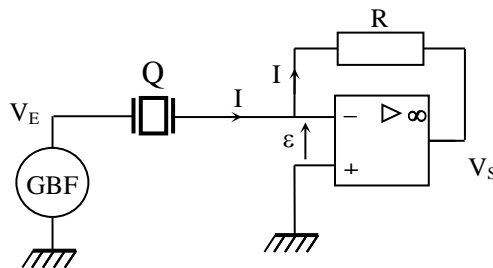
[7]

On utilise un Quartz d'horlogerie car il travaille à une fréquence assez basse (33 kHz environ). Cela permet l'emploi d'amplificateurs opérationnels courants si on limite leur gain pour atténuer les déphasages qu'ils introduisent en raison de leur comportement de type passe bas⁶. La résonance série du Quartz peut servir à la conception d'un oscillateur quasi sinusoïdal mais il faut protéger le composant car il n'est pas prévu pour fonctionner sur cette fréquence.

II.3.1 Cellule servant de filtre

Ce montage et les suivants doivent être alimentés en +/- 5 V pour limiter les gains des amplificateurs.

Q = Quartz d'horlogerie
R = 100 k Ω
AO : 081 ou 071



Ce circuit est déjà présenté dans le montage sur la résonance. On se contente de rappeler les points principaux :

- son étude nécessite un **GBF extrêmement stable en fréquence et pouvant être piloté à 0,1 Hz près au voisinage de 32 kHz**.

- la puissance maximum supportée par le Quartz est de l'ordre de 1 μ W. Cela oblige à **ne pas lui appliquer une tension supérieure à 0,2 V** lorsqu'il est à sa résonance série. Il faut donc **régler l'amplitude du GBF en conséquence**.

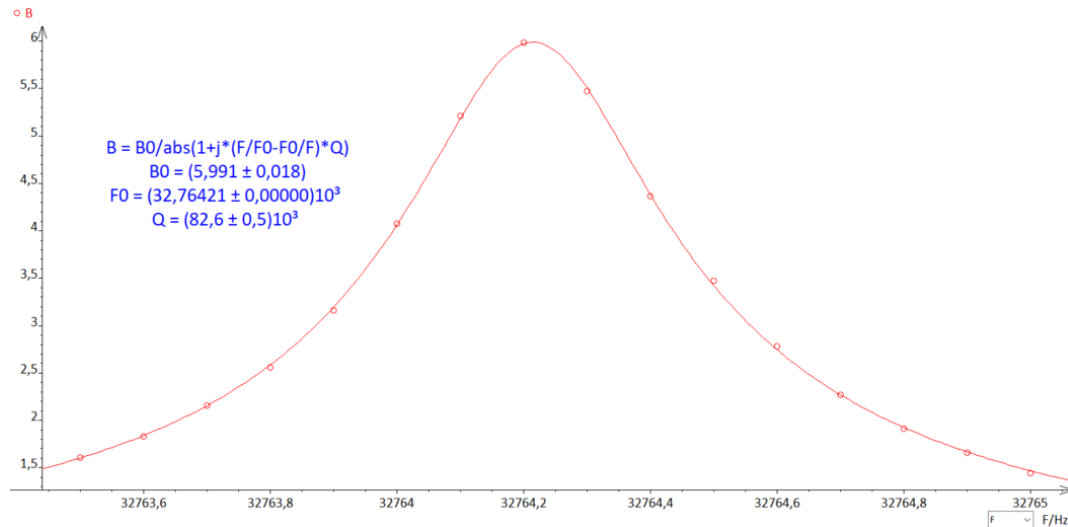
⁵ On peut montrer à partir de la fonction de transfert du filtre que $\partial\varphi/\partial f \approx -2Q/f_0 = -4.10^{-4} \text{ rad/Hz}$

⁶ On revient sur ce point en fin de chapitre.

- le montage est de type passe bande avec un facteur de qualité très important. Sa fonction de transfert B passe par un maximum B_0 à la fréquence de résonance série f_{rs} du Quartz qui vaut

$$B_0 = \frac{V_S}{V_E} = \frac{-R \cdot I}{V_Q} = -\frac{R \cdot I}{Z_Q \cdot I} = -\frac{R}{Z_Q} = -\frac{R}{R_{Qs}}$$

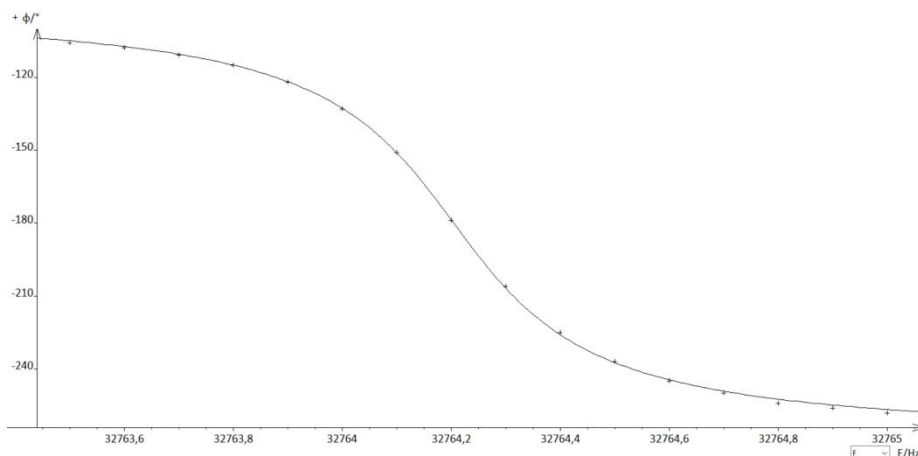
On peut le vérifier en traçant le diagramme de Bode du circuit autour de f_{rs} **par pas de 0,1 Hz**. Voici à titre indicatif le résultat d'une série de mesure pour le module de B :



La courbe est modélisée par une fonction passe bande (on peut définir la fréquence sous la forme $f = 32764 + \varepsilon$ pour faciliter la convergence en cas de soucis). Le résultat permet d'obtenir les caractéristiques du filtre :

- le maximum B_0 de B correspond à une fréquence $f_{rs} = 32764,2 \text{ Hz}$
- $B_0 \approx 6$ (résistance série du Quartz $R_{Qs} = R/B_0 \approx 17 \text{ k}\Omega$)
- le facteur de qualité est énorme (80 000 environ).

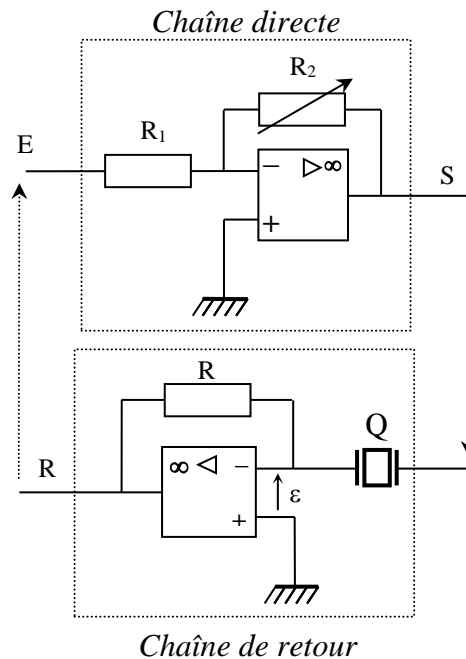
Un point important à noter est la variation très rapide de la phase⁷ autour de f_{rs} (ne pas oublier qu'on fait des modifications de 0,1 Hz autour de 32 kHz). Cette propriété donne une contrainte très forte à l'oscillateur pour respecter le critère de Barkhausen, ce qui l'oblige à fonctionner à une fréquence très précise, donc de façon très stable :



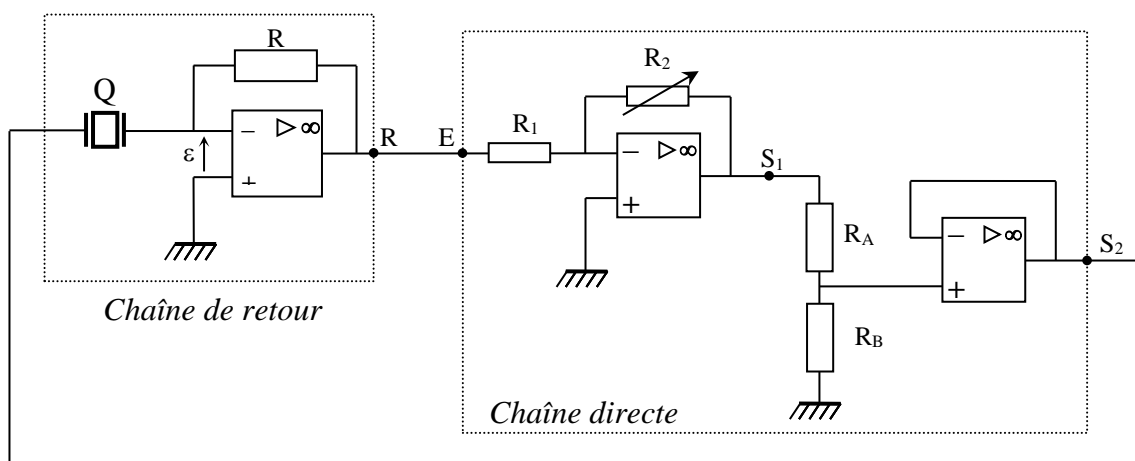
⁷ La phase du montage varie autour de -180° à cause du signe moins dans H_0 . Il ne faut pas la confondre avec celle du quartz qui, elle, varie autour de 0° (cf. montage résonance).

II.3.2 Réalisation de l'oscillateur

Le montage précédent peut servir de boucle de rétroaction puisqu'il a un comportement de filtre passe bande. Sa fonction de transfert étant réelle et négative à f_{rs} , il faut l'associer à une chaîne directe constituée d'un amplificateur inverseur pour satisfaire la condition $|A||B| = 1$, d'où le schéma de principe suivant :



Il faut cependant adapter cette structure pour protéger le Quartz car elle conduit à une amplitude des oscillations limitée par la saturation de l'amplificateur opérationnel de la chaîne directe. Il y aurait par conséquent une tension trop forte aux bornes du Quartz ($V_{Q\ max} = S_{max} \approx U_{alim} = 5\ V$ puisque $\varepsilon = 0$) qui conduirait à sa destruction. On rajoute donc un pont diviseur de tension à la sortie de l'amplificateur inverseur et un montage suiveur pour le découpler de la boucle de rétroaction, ce qui aboutit au schéma suivant :



$R : 100\ k\Omega$

$R_1 : 10\ k\Omega$; R_2 : résistance variable

$R_A : 100\ k\Omega$; $R_B : 5\ k\Omega$

AO 081 ou 071 **alimentés en +/- 5 V**

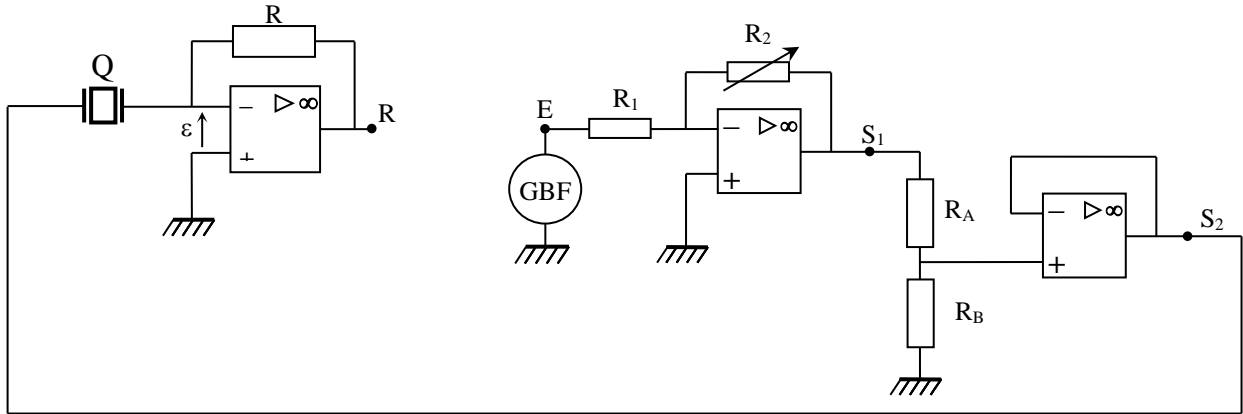
La valeur maximum du signal d'un AO 081 alimenté en $\pm 5\text{ V}$ étant proche de 4 V , la tension en S_2 ne peut pas dépasser :

$$S_{2\max} = \frac{R_B}{R_A + R_B} S_{1\max} \approx \frac{5}{105} 4 \approx 0,19\text{ V}$$

Soit une valeur acceptable pour le Quartz utilisé.

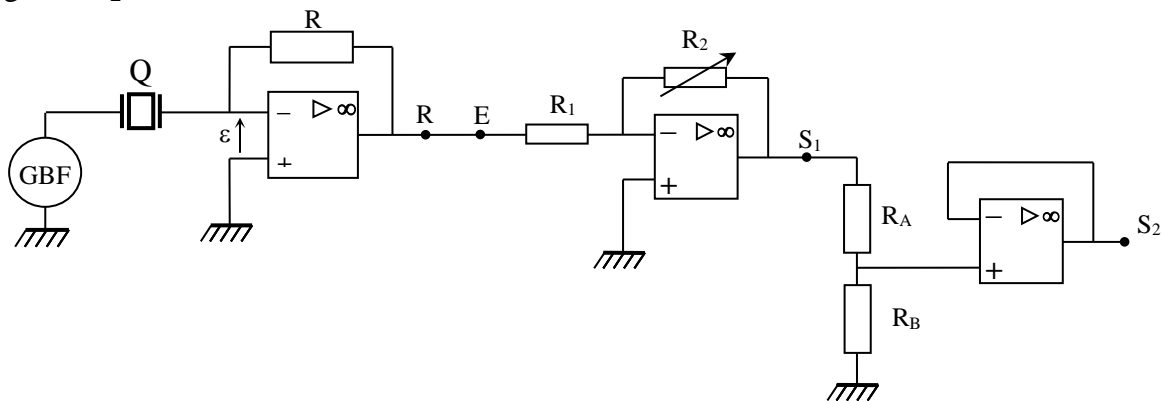
Réglage de la chaîne directe :

On peut le faire de deux façons. La première est similaire au protocole utilisé pour l'oscillateur à pont de Wien. On déconnecte R et E et on branche le GBF utilisé au § II.3.1 à l'entrée de la chaîne directe (amplitude $\approx 1\text{ V}$).



On recherche la fréquence pour laquelle les signaux R et E sont au mieux en phase (ça doit être f_{rs}). On modifie alors la valeur de R_2 pour qu'ils aient la même amplitude afin de satisfaire au critère de Barkhausen sur le gain.

La deuxième solution consiste à brancher le GBF à l'entrée de la chaîne de retour (sur Q), relier R à E et regarder S_2 :



Le signal du GBF doit être plus faible (inférieur à $0,2\text{ V}$) pour protéger le Quartz. Le principe du réglage reste le même. On recherche la mise en phase optimale puis on ajuste R_2 pour que S_2 ait la même amplitude que celle du GBF.

Bouclage du système :

On enlève le GBF, on boucle les deux chaînes et on observe S_1 . Le montage doit osciller spontanément à la fréquence f_{rs} après un régime de croissance plus ou moins long. Si aucun signal n'apparaît, il suffit d'augmenter R_2 pour lancer l'oscillateur puis réajuster sa valeur pour se placer à la limite d'entretien des oscillations. La résistance R_2 ainsi obtenue peut être

comparée à la valeur attendue. On a $|A||B| = 1$. La chaîne directe est composée de l'amplificateur inverseur et du pont diviseur d'où :

$$A = \frac{S_2}{E} = \frac{S_1}{E} \times \frac{S_2}{S_1} = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{R_B}{R_A + R_B}$$

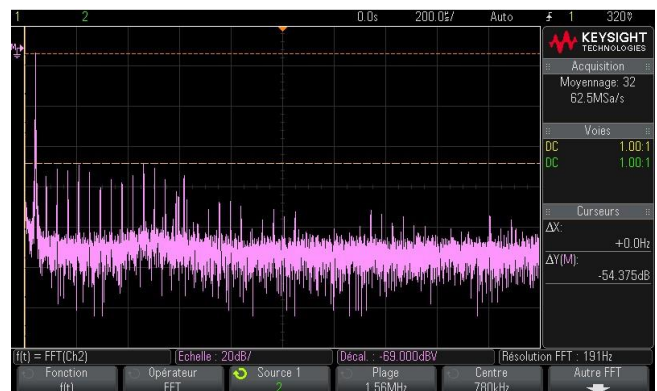
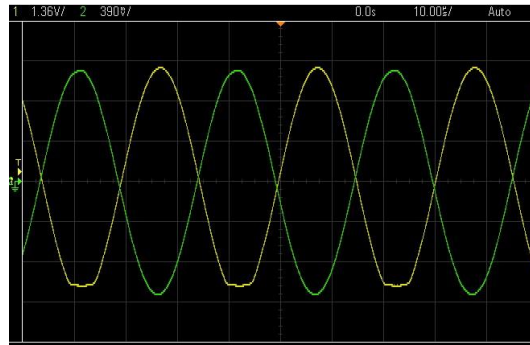
B correspond au maximum de la fonction de transfert de la chaîne de retour. R_2 doit donc vérifier la condition suivante :

$$|A||B| = \frac{R_2}{R_1} \frac{R_B}{R_A + R_B} B_0 = 1 \rightarrow \boxed{R_2 = \frac{R_1(R_A + R_B)}{R_B B_0}}$$

Il a fallu régler R_2 à 34,2 k Ω sur notre montage pour assurer l'entretien des oscillations. Ce résultat est cohérent avec la valeur attendue de 33,6 k Ω compte tenu des différentes résistances.

II.3.3 Stabilité en fréquence

Les variations de fréquence ne sont pas mesurables avec du matériel courant une fois l'oscillateur lancé et en régime d'équilibre thermique. Il en est de même si on modifie R_2 dans les mêmes proportions que pour l'oscillateur à pont de Wien. Des mesures pour R_2 compris entre 34 200 et 37000 Ω ont toujours abouti à la même fréquence de 32764, 22 Hz avec le compteur le plus performant à notre disposition. La stabilité de l'oscillateur est donc au pire de l'ordre du ppm, ce qui est une nette amélioration par rapport à l'oscillateur à pont de Wien. Cela est dû à l'énorme facteur de qualité du Quartz qui l'oblige à rester à une fréquence précise pour respecter le critère de Barkausen sur la phase⁸. On peut aussi comparer les signaux en S_1 et en R pour voir l'impact qu'a le quartz sur le filtrage des harmoniques du signal saturé (il est, sans surprise, plus performant) :



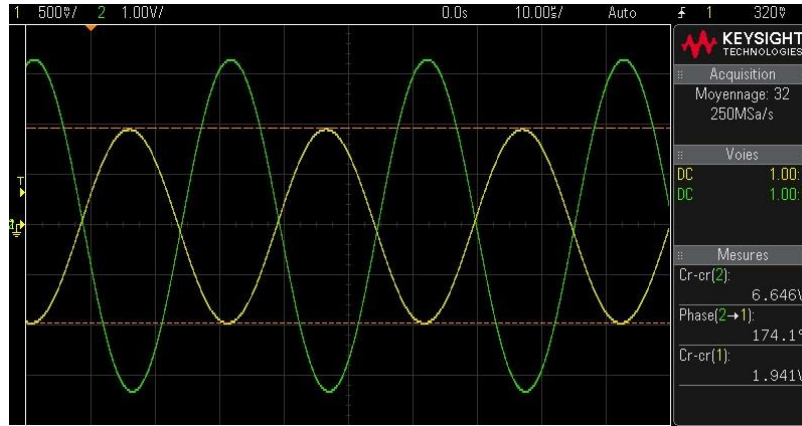
⁸ La fonction de transfert du Quartz est formellement identique à celle du filtre de l'oscillateur à pont de Wien donc on a $\partial\phi/\partial f \approx -2Q/f_0 = -5 \text{ rad/Hz}$ pour le quartz utilisé ici.

II.3.4 Déphasages liés aux amplificateurs opérationnels

Ces composants ont, par nature, un comportement de type passe bas d'ordre 1 qui les conduit à avoir un produit Gain×Bande Passante égal à une constante lorsqu'on les boucle (de l'ordre du MHz pour les AO 071 ou 081). Les AO introduisent donc une rotation de phase liée au gain du montage réalisé et à la fréquence de travail via les relations :

$$tg\varphi = -\frac{f}{f_{CAO}} \quad \text{avec} \quad f_{CAO} \times G_{montage} = G \times PB$$

On peut regarder la conséquence qu'a cet effet sur l'amplificateur inverseur du montage précédent :

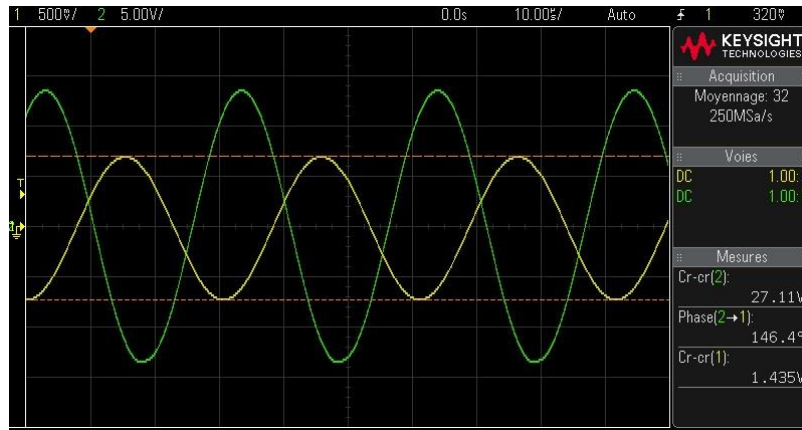


Les signaux jaune et vert correspondent respectivement à E et S_1 une fois l'oscillateur lancé. Le déphasage sortie/entrée ne correspond pas tout à fait aux 180° attendus pour un inverseur idéal. On a une perte de 6° due au comportement passe bas de l'amplificateur opérationnel ($G \times PB$ effectif d'environ $\approx 1 \text{ MHz}$ vu que le gain du montage vaut $\approx 3,4$). Cet effet n'empêche pas l'oscillateur de fonctionner mais l'oblige à travailler à une fréquence un peu plus basse pour que la chaîne de retour⁹ compense cette baisse de phase ($\varphi_A + \varphi_B = 0$). La modification de fréquence est cependant extrêmement faible, donc difficilement détectable, car le saut de phase est très brutal autour de f_{rs} ($\approx 30^\circ$ pour $0,1 \text{ Hz}$ d'après⁹), ce qui fait que les résultats obtenus sont proches de ceux attendus. L'effet est plus notable si on alimente les AO en $\pm 15 \text{ V}$ car il faut augmenter l'atténuation du pont diviseur pour protéger le quartz vu que S_1 va saturer à $S_{1max} \approx U_{alim} = 15 \text{ V}$ cette fois ci, donc cela oblige à avoir un gain plus grand sur l'inverseur pour respecter la condition $|A||B| = 1$, ce qui induit un déphasage plus important. On peut le vérifier en reprenant l'oscillateur avec $R_B = 1 \text{ k}\Omega$ et $U_{alim} = \pm 15 \text{ V}$ ($S_{2max} \approx 1 \times 15/101 = 150 \text{ mV}$ sans danger pour le quartz). La valeur attendue de R_2 pour être en limite d'entretien des oscillations vaut alors :

$$R_2 = \frac{R_1(R_A + R_B)}{R_B B_0} = \frac{10(100 + 1)}{1 \times 6} = 168 \text{ k}\Omega$$

Notre montage n'a pas réussi à démarrer sur cette valeur. Il a fallu la dépasser assez largement pour lancer les oscillations et ajuster ensuite R_2 à $222 \text{ k}\Omega$ pour être en limite d'entretien (30 % d'écart avec la valeur attendue). On a aussi détecté une très légère différence de fréquence (32764,10 Hz contre 32764,22 Hz pour le montage alimenté en $\pm 5 \text{ V}$). Ceci s'explique par l'évolution du déphasage aux bornes du montage inverseur. On a maintenant une perte de phase de 34° :

⁹ Qui subit elle aussi une rotation de phase à cause de son AO mais qui est déjà prise en compte dans l'étude de son diagramme de Bode.



Ce résultat est compatible avec le nouveau gain statique du montage compte tenu du produit Gain×Bande Passante estimé précédemment¹⁰ :

$$\varphi = - \operatorname{atg} \left(\frac{f}{f_{CAO}} \right) = - \operatorname{atg} \left(\frac{f \times G_{montage}}{G \times BP} \right) \approx - \operatorname{atg} \left(\frac{32764 \times \frac{222}{10}}{10^6} \right) \approx - 36^\circ$$

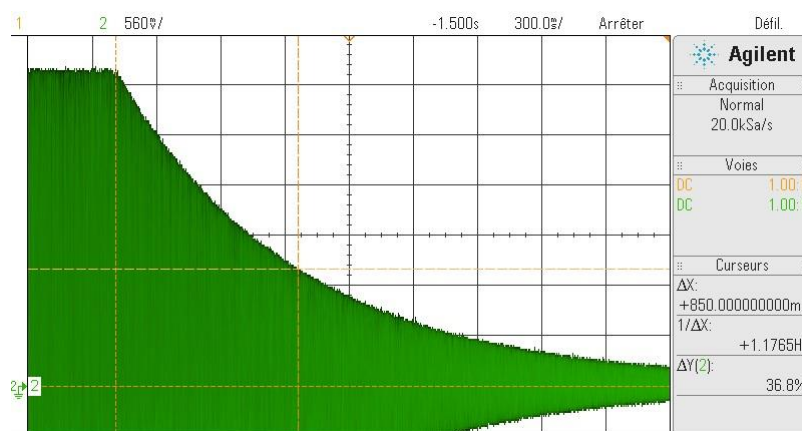
Cette perte de phase conduit l'oscillateur à travailler à une fréquence encore plus basse pour avoir $\varphi_A + \varphi_B = 0$ ce qui provoque une baisse de fréquence détectable et un gain nécessaire plus fort que celui attendu puisqu'on se trouve dans une zone où le gain de la chaîne retour est inférieur à B_0 .

II.3.5 Arrêt de l'oscillateur

L'idée est encore une fois de montrer qu'un oscillateur quasi sinusoïdal a un régime transitoire long. On propose d'étudier cette fois-ci l'arrêt des oscillations pour faire le lien avec le facteur de qualité du résonateur à Quartz.

Manipulation :

La valeur élevée de Q implique une décroissance très lente du signal. Quelques dizaines de milliers d'oscillations sont nécessaires pour avoir une chute notable, ce qui complique l'enregistrement détaillé du régime transitoire. Une solution plus simple consiste à récupérer uniquement l'enveloppe du signal avec un oscilloscope numérique en mode roll. On shunte la résistance R_B pour arrêter l'oscillateur et on stoppe l'acquisition lorsque S_1 est proche de zéro :



On estime la constante de temps de décroissance de l'enveloppe en supposant qu'elle suit une loi exponentielle. τ correspond à la durée nécessaire pour que l'enveloppe du signal atteigne 36,8 % de

¹⁰ On peut aussi noter que le gain du montage à la fréquence d'étude ne correspond plus tout à fait au gain statique donné par le rapport R_2/R_1 .

sa valeur initiale et vaut ≈ 850 ms dans notre exemple. On peut comparer ce résultat à la valeur déduite du facteur de qualité du Quartz (cf. [4], p. 463) :

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2 \times 82600}{2\pi \times 32\,764} = 800 \text{ ms}$$

L'ordre de grandeur est bien respecté.

II.4 Oscillateur à résistance négative

Cet oscillateur est aussi un système bouclé réglé au seuil d'instabilité (cf. [2], p. 179) mais on peut aussi le décrire comme un circuit RLC mis en série avec un dipôle à résistance négative chargé d'annuler son amortissement. Ce dipôle est réalisé à l'aide d'un convertisseur d'impédance négative en courant (cf. [2], p. 169). Plus d'explications et d'autres manipulations sur cet oscillateur sont disponibles dans le montage sur les phénomènes non linéaires.

II.4.1 Montage

[2], p. 170 ; [3], p. 334

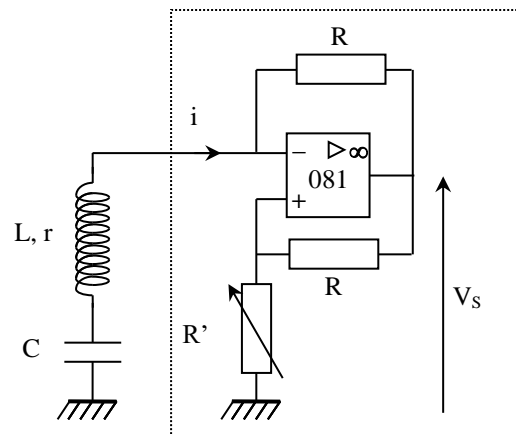
L : 0,1 H AOIP ($r = 32 \Omega$)

C : 0,1 μF AOIP

R : 10 k Ω AOIP

R' : résistance variable

On montre facilement que l'impédance équivalente à la partie encadrée en pointillé vaut $Z_{eq} = -R'$.



On augmente R' en partant de 0 jusqu'à observer le démarrage des oscillations en V_S . On réduit ensuite R' pour se placer à la limite de l'entretien du signal. On peut mesurer la fréquence des oscillations et comparer à la valeur attendue $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$. On a des oscillations quasi-sinusoïdales quand R' est exactement égale à la résistance r de l'inductance L . Dans les faits, R' est très légèrement supérieure à la valeur attendue car le constructeur donne la valeur à 50 Hz et la résistance de la bobine augmente avec la fréquence à cause de l'effet de peau. On peut le vérifier en changeant la capacité ($C = 0,01 \mu\text{F}$ par exemple) pour augmenter la fréquence des oscillations. La valeur de R' doit augmenter.

II.4.2 Pureté spectrale du signal

Une FFT du signal V_S montre que le signal V_S n'est pas parfaitement sinusoïdal quand on est à la limite de l'entretien des oscillations car la saturation de l'amplificateur opérationnel limite encore une fois l'amplitude du signal de sortie et le déforme lorsqu'il atteint la tension d'alimentation du composant. Il peut être intéressant de comparer les tensions aux bornes de V_R , V_C et V_L (en augmentant légèrement R' pour accentuer les différences). V_R permet de visualiser le courant ($V_R = Ri$), $V_L = L di/dt$ permet d'observer sa dérivée et $V_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$ son intégrale. V_C peut s'observer directement mais il faut utiliser une sonde différentielle pour V_L et V_R sinon l'oscilloscope introduit une masse dans le montage qui crée des courts-circuits. La FFT des signaux montre que V_C est le signal le plus pur. V_R est un peu moins bon et V_L est la tension la moins sinusoïdale. Cela est dû au fait que les harmoniques causées par la saturation et présentes dans l'intensité instantanée sont, vis à vis du fondamental, renforcées par

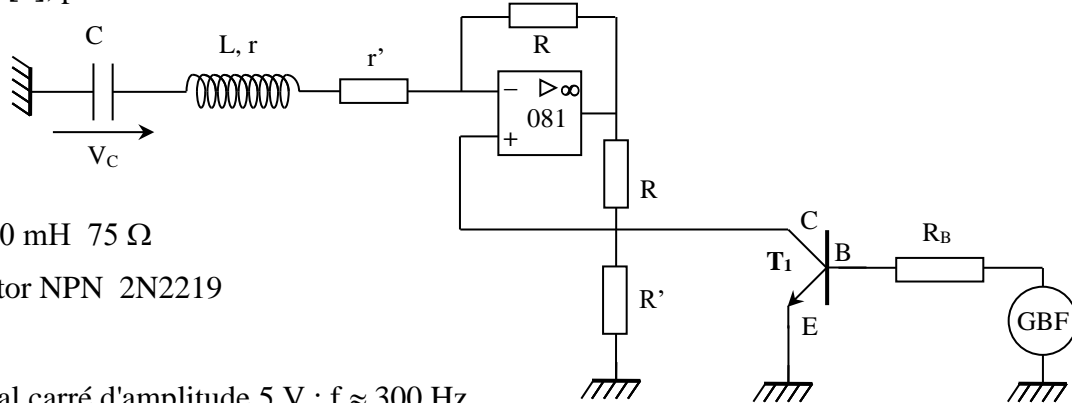
l'opération de dérivation (d'un facteur n puisque $\sin'(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$), et atténuées par l'opération d'intégration (d'un facteur n puisque $\int \sin(\omega t) = -\cos(\omega t)/(\omega)$). La sinusoïde la plus pure s'observe donc aux bornes du condensateur.

II.4.3 Régime transitoire

C'est le même type d'étude que pour les deux oscillateurs précédents mais on utilise un transistor pour démarrer ou arrêter les oscillations (ce système n'est pas nécessaire si on veut seulement observer le régime de croissance car la déconnexion d'un simple fil de shunt sur R' suffit pour lancer l'oscillateur).

Montage :

[2], p. 172



$L, r + r' : 10 \text{ mH } 75 \Omega$

T_1 : transistor NPN 2N2219

$R_B : 1 \text{ k}\Omega$

GBF : signal carré d'amplitude 5 V ; $f \approx 300 \text{ Hz}$

L'observation des oscillogrammes représentés en [2] nécessite un changement d'inductance pour que les régimes transitoires aient une constante de temps de l'ordre de grandeur de la période des oscillations. Si on n'a pas l'inductance proposée, on peut réaliser un équivalent en associant une boîte de self à une résistance en série r' : on ajuste la boîte à la valeur voulue pour L , on mesure sa résistance r avec un multimètre, puis on ajuste r' pour avoir globalement $r + r' = 75 \Omega$. Le transistor permet d'allumer et d'éteindre l'oscillateur via une tension de commande. Il fonctionne en bloqué/saturé :

- i_B est positif lorsque V_{GBF} est positif, ce qui rend le transistor passant. Comme V_E est à la masse, on a alors $V_+ = 0$ ce qui revient à faire $R' = 0$. La résistance négative est hors-service.

- i_B est négatif lorsque V_{GBF} est négatif. Le transistor est bloqué dans ce cas et il est équivalent à un circuit ouvert. La résistance négative fonctionne.

On peut donc facilement synchroniser l'observation sur l'événement souhaité (croissance ou décroissance des oscillations).

Observation :

On visualise V_C en synchronisant l'oscilloscope avec la sortie TTL du GBF. On joue sur f_{GBF} et R' pour observer sur l'écran la zone de croissance des oscillations, la zone de saturation par effet non linéaire et le régime de décroissance (cf. [2], p. 173, figure 13). Comme pour l'oscillateur à pont de Wien, les régimes transitoires semblent croître ou décroître de façon exponentielle et on peut le vérifier en faisant une modélisation. On peut aussi noter que la décroissance des oscillations est plus rapide que la croissance. Cette différence s'explique par les constantes de temps qui régissent les deux phénomènes. L'équation différentielle décrivant l'évolution du courant est :

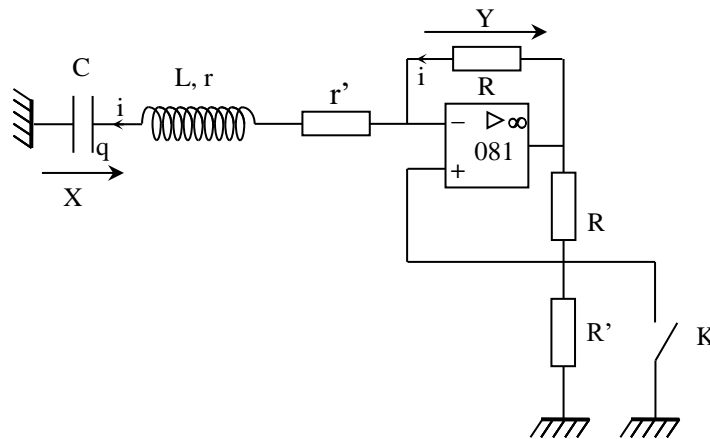
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{(r + r') - R'}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Le régime de croissance correspond à $\lambda > 0$, soit $R' > r + r'$ mais comme l'oscillateur est proche du seuil d'instabilité, on a $R' \approx r + r'$, donc une constante de temps $\tau = 2L/[R' - (r + r')]$ assez grande au démarrage. On observe en revanche le régime de décroissance en annulant R' avec le transistor (l'amortissement λ devient alors > 0). La constante de temps vaut $\tau' = 2L/(r + r')$ cette fois ci et elle est par conséquent plus petite.

II.4.4 Diagramme de phase

Le montage permet une observation directe de ce diagramme qui est une description classique de l'état d'un oscillateur ou l'on représente son évolution par un point M de coordonnées $X = x$ et $Y = dx/dt$, x étant un paramètre caractéristique de l'oscillateur.

Montage :



La variable caractéristique correspondant à la charge peut s'observer aux bornes du condensateur ($X = V_C = q/C$). Sa dérivée correspond au courant donc on en a une image en visualisant $Y = V_R = Ri = R dq/dt$ à l'aide d'une sonde différentielle¹¹.

On reprend le montage précédent en ajustant R' pour avoir des régimes transitoires assez rapides. On observe les tensions X et Y à l'oscilloscope en mode XY. Les diagrammes de phase correspondant à la décroissance ou la croissance des oscillations s'obtiennent en shuntant ou déshuntant R' . On obtient des oscillogrammes proches de ceux donnés en [2], p. 174 et le régime transitoire apparaît en forme de spirale dans les deux cas de figure. Le régime de croissance aboutit à une courbe fermée qui, dans l'espace des phases, est le signe d'une évolution périodique du système. Cette courbe à la forme d'une ellipse si on est au seuil d'instabilité ($R' \approx r + r'$), signe d'un régime permanent harmonique. Le système s'étant « dirigé » vers cette courbe et s'y maintenant par la suite, on le nomme attracteur du système. Si on augmente un peu R' , cet attracteur tend à se déformer en raison de la saturation de l'AO, et ce principalement sur l'axe Y correspondant au courant (problème lié à l'opération de dérivation ; cf § II.4.2). Le régime de décroissance abouti quant à lui à un autre attracteur, le point de coordonnées (0 ; 0). On peut donc retenir que l'évolution d'un oscillateur quasi sinusoïdal en régime transitoire est progressif (trajectoires en forme de spirales), et qu'il aboutit une fois lancé à un attracteur en forme d'ellipse. On pourra comparer ce comportement à celui des oscillateurs à relaxation.

II.4.5 Passage en mode relaxé

Il s'effectue facilement en augmentant la valeur de R' . Le signal V_s se déforme (ainsi que le diagramme des phases) en étant écrêté par les tensions d'alimentation de l'AO. On finit par obtenir un signal carré dont la fréquence ne correspond plus à la fréquence propre du circuit RLC. Elle dépend en plus de R' , mais de façon plus ou moins

¹¹ On se dispense ainsi du convertisseur courant - tension proposé dans la référence [2].

complexe : l'oscillateur relaxe. On illustre là encore une propriété générale des oscillateurs quasi-sinusoidaux : lorsque l'apport d'énergie est trop important, ils évoluent vers la relaxation.

III OSCILLATEUR DE VAN DER POL

[2], p 175 ; BUP n° 744, 785, 787

III.1 Introduction

Les études précédentes sur les oscillateurs quasi sinusoidaux avec des modèles linéaires permettent d'appréhender une bonne partie de leur comportement. Ces modèles ont toutefois une limite car ils ne donnent pas d'informations sur l'amplitude des oscillations (l'application stricte du respect du critère de Barkhausen conduit en effet à une sortie indéterminée puisque $S = H.E = \infty.0$). Les observations expérimentales montrent que l'amplitude est fixée par la saturation d'un AO. L'oscillateur de Van der Pol permet de préciser les choses en montrant l'influence fondamentale des non linéarités sur la limitation de l'amplitude des oscillateurs auto entretenus. Il permet aussi de montrer le passage d'un régime quasi sinusoidal d'oscillations vers un régime de relaxation grâce à la variation d'un seul paramètre.

III.2 Equations de l'oscillateur

L'oscillateur de Van Der Pol est régi par une équation différentielle du type :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\text{Soit } \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda(x) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad 2\lambda(x) = \mu \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right)$$

C'est un oscillateur non linéaire par son amortissement puisque la valeur et le signe de λ peuvent changer suivant l'amplitude x des oscillations. La forme donnée à λ fait que le comportement du système dépend du rapport x/x_0 :

- le terme entre parenthèse est négatif lorsque x est inférieur à x_0 (et λ tend vers $-\mu$ lorsque $x \ll x_0$) \rightarrow si $\mu > 0$, l'équation de Van der Pol se ramène à celle d'un système linéaire du second ordre à amortissement négatif (croissance exponentielle des oscillations). $\mu > 0$ correspond pour sa part à la condition de démarrage de l'oscillateur.

- on a $\lambda = 0$ lorsque $x = x_0 \rightarrow$ le terme du premier ordre en x disparaît de l'équation et on retrouve l'équation classique d'un système oscillant rigoureusement de façon sinusoidale à la pulsation ω (on peut remarquer que la condition $\lambda = 0$ peut aussi être obtenue par l'annulation de μ).

- le terme entre parenthèse est positif lorsque x est supérieur à $x_0 \rightarrow$ si $\mu > 0$, l'équation de Van der Pol se ramène à celle d'un système linéaire du second ordre à amortissement positif (décroissance exponentielle des oscillations).

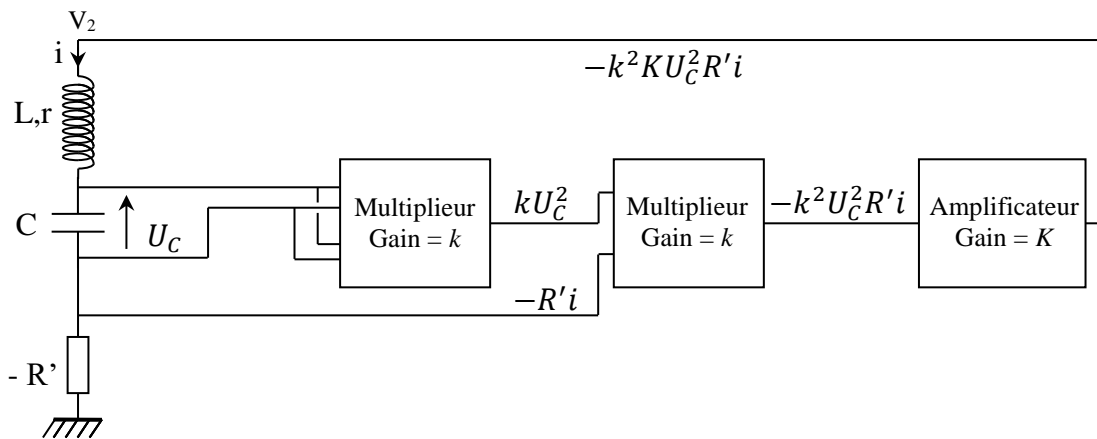
On conçoit qu'une non linéarité de cette forme aboutisse à un système auto modérateur délivrant des oscillations périodiques d'amplitude x_m bien déterminée. On pourrait penser que x_m se stabilise à x_0 mais ce n'est pas le cas car x_0 correspond seulement au seuil d'amplitude instantanée où on passe d'un régime où l'apport d'énergie est supérieur à l'énergie dissipée à un état où l'amortissement l'emporte alors que x_m est l'amplitude qui permet, sur une période, d'avoir la juste compensation entre l'énergie dissipée dans le système et l'apport extérieur d'énergie. Le calcul de x_m dans le cas le plus général n'est pas simple mais on montre en annexe que x_m tend vers $2x_0$ lorsque les oscillations sont sinusoidales, et ce résultat reste à peu près valable lorsque les

oscillations commencent à se déformer. Le coefficient μ joue quant à lui sur le caractère plus ou moins sinusoïdal des oscillations. Pour le comprendre, il faut d'abord noter que l'amortissement n'est pas constant en cours d'oscillations puisque $\lambda = f(x) \rightarrow$ le système est foncièrement régi par une équation non linéaire et il n'y a, à priori, aucune raison d'avoir de solutions sinusoïdales. L'influence de la non linéarité peut cependant être minime si μ est faible car le terme du premier ordre en x dans l'équation est alors tout le temps négligeable et on se retrouve avec une équation proche de celle d'un oscillateur harmonique. On peut donc retenir qu'il est possible de modifier doublement et de manière indépendante le comportement de l'oscillateur de Van Der Pol :

- on obtient des oscillations plus ou moins sinusoïdales en jouant sur μ
- on contrôle l'amplitude sans modifier la nature des oscillations en jouant sur x_0 .

III.3 Réalisation pratique de l'oscillateur

Plusieurs montages sont possibles (cf. BUP 785, BUP 787 et [2], p. 175). On présente une version allégée de celui présenté en [2] :



On part du circuit r, L, C en série avec la résistance négative R' . On forme avec des multiplieurs analogiques le terme $U_C^2 \frac{dU_C}{dt}$ pour le réinjecter dans la boucle r, L, C . Ces circuits affectant la multiplication d'un coefficient atténuateur k , on insère un amplificateur pour compenser l'atténuation.

Multiplieurs :

Le premier élève la tension U_C au carré. Le second multiplie kU_C^2 par la tension $-R'i$, i étant le courant circulant dans la boucle r, L, C :

$$U_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt \rightarrow \frac{dU_C}{dt} = \frac{i}{C} \quad \text{d'ou} \quad -R'i = -R'C \frac{dU_C}{dt} \rightarrow \boxed{kU_C^2 \times (-R'i) = -k^2R'CU_C^2 \frac{dU_C}{dt}}$$

On obtient ainsi le terme $U_C^2 \frac{dU_C}{dt}$ à une constante près

Amplificateur :

On utilise un montage type amplificateur non inverseur (cf. circuit à droite sur le montage suivant). On a :

$$\frac{V_+}{R_1} = \frac{V_2 - V_+}{R_2} \rightarrow V_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_+ = KV_+$$

$$V_+ \text{ correspond à la sortie de } X2, \text{ d'ou : } \boxed{V_2 = -k^2KR'CU_C^2 \frac{dU_C}{dt}}$$

Association finale :

L'amplificateur alimente le circuit r, L, C avec sa résistance négative. La loi des mailles donne :

$$V_2 = U_{L,r} + U_C + U_{RN} = L \frac{di}{dt} + U_C + (r - R')i$$

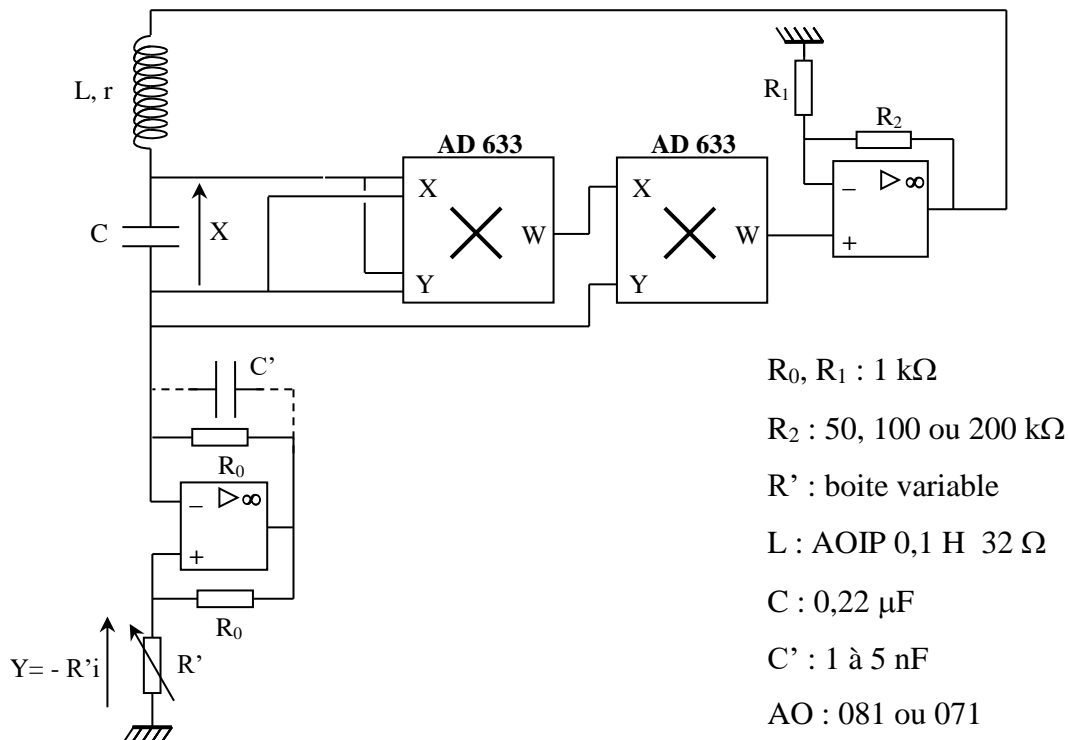
$$i = C \frac{dU_C}{dt} \quad d'où \quad V_2 = LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + U_C + (r - R')C \frac{dU_C}{dt}$$

Avec l'expression de V_2 : $\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{1}{L} [r - R'(1 - k^2 K U_C^2)] \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = 0$

Soit : $\boxed{\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{1}{L} \left[r + R' \left(\frac{U_C^2}{U_0^2} - 1 \right) \right] \frac{dU_C}{dt} + \omega_0^2 U_C = 0}$ avec $\boxed{U_0 = \frac{1}{k\sqrt{K}}}$

Ce résultat s'identifie facilement à l'équation de Van der Pol. On a $x = U_C$ et les expressions de μ et x_0 sont :

$$\boxed{\mu = \frac{R' - r}{L}} \quad \boxed{x_0 = \sqrt{\frac{R' - r}{R'}} U_0} \quad d'où \quad \boxed{U_{C \max} = 2x_0 = 2U_0 \sqrt{\frac{R' - r}{R'}}}$$

III.4 Montage expérimental

La réalisation pratique du montage est assez lourde et pas forcément très stable. Il faut donc **faire un montage soigné sous peine de déboires** (fils courts, ...). On conseille de le réaliser entièrement sur des plaques type P60 pour alléger le câblage, à l'exception de la bobine et de la résistance variable R' . La capacité C' ajoutée ne change pas le comportement attendu du montage mais évite

des oscillations indésirables. Il est préférable de prendre des AO sans réglage intégré d'offset car le montage peut entrer en saturation s'ils sont mal réglés¹².

III.5 Observations et mesures

On observe $X = V_C$ avec une sonde différentielle pour éviter les problèmes de masse et la tension $Y = -Ri$, qui est une image du courant, en inversant cette voie sur l'oscilloscope pour annuler le signe moins.

III.5.1 Résistance R' faible

On commence avec $R' = 60$ ou 80Ω . Les signaux obtenus doivent être \approx sinusoïdaux, la tension $X = V_C$ s'en rapprochant le plus (cf. § II.4.2). On peut mesurer la fréquence des oscillations et comparer à la valeur attendue $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$. On a une ellipse lorsqu'on visualise les signaux X et Y en Lissajous. L'oscillateur fonctionne en régime quasi sinusoïdal. On teste ensuite le montage avec $R_2 = 50, 100$ et $200 k\Omega$. Les signaux restent sinusoïdaux mais leur amplitude varie. On peut mesurer celle aux bornes du condensateur dans chaque cas et comparer à la valeur théorique. Voici à titre indicatif une série de mesures effectuées avec $R' = 80 \Omega$. Pour la valeur r , il vaut mieux prendre celle mesurée sur l'oscillateur à résistance négative seul (connecter la sortie V_2 de la bobine à la masse et ajuster R' pour être au seuil des oscillations ; on a alors $R' \approx r$).

$$\underline{R_2 = 50 k\Omega}$$

$$U_0 = \frac{1}{k\sqrt{K}} = \frac{1}{0,1\sqrt{51}} = 1,4 V \rightarrow U_{C \max} = 2U_0 \sqrt{\frac{R' - r}{R'}} = 2,17 V$$

$$\text{Mesure expérimentale : } U_{C \max} = 2,02 V$$

$$\underline{R_2 = 100 k\Omega}$$

$$U_0 = \frac{1}{0,1\sqrt{101}} = 0,995 V \rightarrow U_{C \max} = 1,44 V$$

$$\text{Mesure expérimentale : } U_{C \max} = 1,438 V$$

$$\underline{R_2 = 200 k\Omega}$$

$$U_0 = \frac{1}{0,1\sqrt{201}} = 0,705 V \rightarrow U_{C \max} = 1,02 V$$

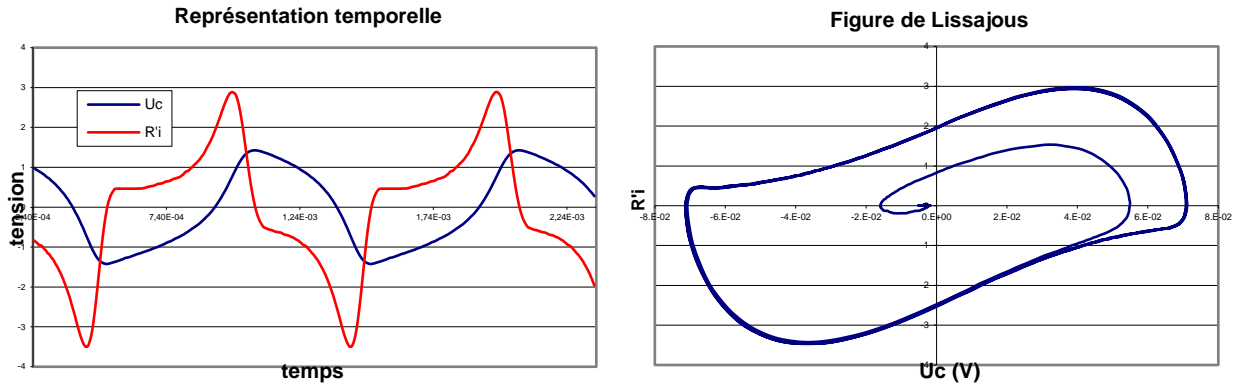
$$\text{Mesure expérimentale : } U_{C \max} = 0,975 V$$

III.5.2 Augmentation de R'

$$R_2 = 100 \text{ ou } 200 k\Omega$$

On fait varier R' de 100 à 1000 Ω et on observe l'évolution des signaux en temporel en Lissajous. Les signaux se déforment progressivement, la figure de Lissajous passe d'une ellipse à un cycle déformé, et l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur tend vers une limite. Voici à titre indicatif le résultat d'une acquisition effectuée sur un oscilloscope numérique, puis transférée sous Excel. Les courbes obtenues peuvent être comparées avec une simulation :

¹² Les signaux peuvent être un peu décalés par rapport au zéro étant donné le gain de l'amplificateur (offset amplifié).



La figure de Lissajous a été obtenue par l'acquisition du signal temporel au démarrage de l'oscillateur. Il suffit de shunter la résistance R' à l'aide d'un fil et effectuer une acquisition en mode monocoup. On peut mesurer l'amplitude maximum vers laquelle tend U_C . Voici à titre indicatif une série de mesures effectuée avec $R' = 1000 \Omega$.

$$\underline{R_2 = 100 \text{ k}\Omega}$$

$$U_0 = 0,995 \text{ V} \rightarrow U_{C \max} \approx 2U_0 = 1,99 \text{ V}$$

$$\text{Mesure expérimentale : } U_{C \max} = 1,97 \text{ V}$$

$$\underline{R_2 = 200 \text{ k}\Omega}$$

$$U_0 = 0,705 \text{ V} \rightarrow U_{C \max} \approx 2U_0 = 1,41 \text{ V}$$

$$\text{Mesure expérimentale : } U_{C \max} = 1,41 \text{ V}$$

Là encore, les mesures expérimentales recoupent les valeurs attendues. C'est d'ailleurs remarquable car le calcul développé en annexe suppose des signaux sinusoïdaux alors qu'on en est loin ici.

III.5.3 Conclusion

L'oscillateur de Van Der Pol permet de passer d'un oscillateur sinusoïdal à un relaxateur de manière progressive. On peut ajuster l'amplitude et le caractère plus ou moins sinusoïdal des oscillations de façon indépendante. R' influe sur le caractère plus ou moins sinusoïdal des oscillations (passage d'une ellipse à un cycle déformé) et on contrôle (dans une certaine limite) l'amplitude des oscillations en jouant sur l'amplification via R_2 .

III.6 Retour sur l'oscillateur à résistance négative

L'équation de Van der Pol est un modèle d'oscillateur non linéaire qui peut s'appliquer à l'oscillateur à résistance négative. Pour ce faire, il suffit de regarder la caractéristique (I, V) de la résistance négative (cf. montage sur les phénomènes non linéaires). Elle peut se modéliser par une équation du type $V = -R'i + ki^3$. Le coefficient k se détermine à l'aide des points d'inflexion de la caractéristique (I, V) . Les extremums ont lieu pour $i_{\max} = \pm V_{SAT}/(R + R')$. Cela correspond pour le modèle à $dV/di = 0$ soit :

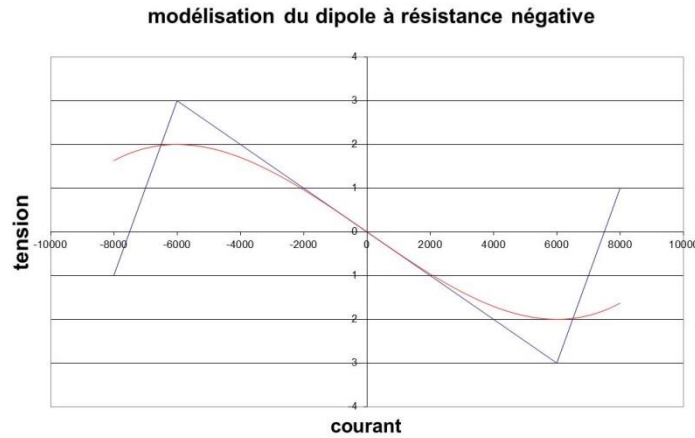
$$-R' + 3ki^2 = 0 \quad \rightarrow \quad i = \pm \sqrt{\frac{R'}{3k}}$$

En combinant ce résultat avec le précédent on obtient :
$$k = \frac{R'(R + R')}{3V_{SAT}}$$

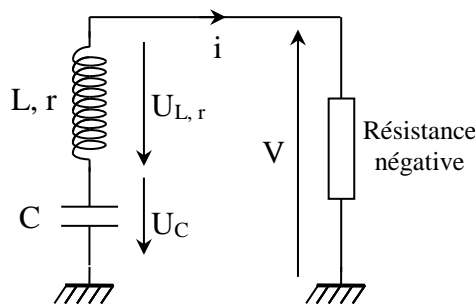
V peut donc être modélisé par l'équation :

$$V = -R'i + \frac{R'(R + R')}{3V_{SAT}} i^3$$

La comparaison entre la caractéristique réelle et le modèle est représentée sur le diagramme suivant :



On peut alors montrer avec un tel modèle que l'oscillateur à résistance négative est régi par une équation du type Van der Pol. Le montage global obéit en effet à l'équation suivante :



$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} + V = 0 = L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} - R'i + 3ki^3$$

Soit, en dérivant par rapport au temps : $L \frac{d^2i}{dt^2} + (r - R') \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + 3ki^2 \frac{di}{dt} = 0$

D'où, après réarrangement : $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R' - r}{L} \left[\frac{R'(R' + R)}{(R' - r)V_{SAT}} i^2 - 1 \right] \frac{di}{dt} + \omega^2 i = 0$

→ Dans la limite du modèle envisagé pour le dipôle à résistance négative, l'intensité du courant dans l'oscillateur à résistance négative vérifie une équation du type Van der Pol.

IV OSCILLATEURS A RELAXATION

IV.1 Introduction

Un oscillateur à relaxation est un système évoluant alternativement entre deux états d'énergie différents. Le retour périodique vers un état de plus basse énergie (phénomène de relaxation) explique sa dénomination. Il s'articule autour de trois éléments fondamentaux :

- un « réservoir » pouvant accumuler et restituer de l'énergie

- une source extérieure d'énergie continue destinée à « remplir » le réservoir
- un dispositif à seuil déclenchant le remplissage et la vidange du réservoir une fois un certain niveau atteint, pour aboutir à une évolution périodique du système.

Leurs propriétés découlent aussi de leur mode de fonctionnement et les différences avec les oscillateurs harmoniques sont notables :

- la fréquence des oscillations dépend de paramètres intrinsèques au système (taille du réservoir, seuils des basculements dans certains cas) mais elle peut aussi dépendre de la source d'énergie.

- ils s'arrêtent dès qu'on coupe l'alimentation car leur fonctionnement dépend d'un apport d'énergie. Les régimes transitoires sont donc courts comparés à ceux des oscillateurs quasi sinusoïdaux et ils ne sont pas oscillants.

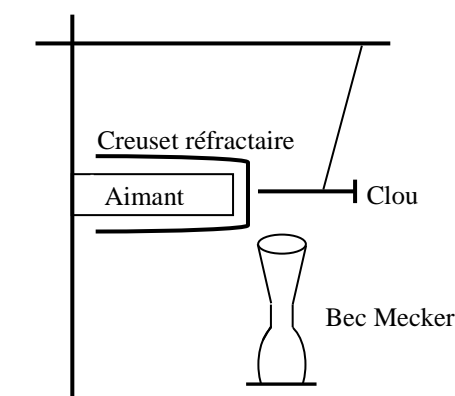
- ils sont moins sensibles à l'environnement que les oscillateurs quasi sinusoïdaux car ils ne sont pas soumis comme eux au respect d'un critère strict pour fonctionner. On peut les synchroniser assez facilement sur une fréquence extérieure ou les piloter par un signal de commande.

- la présence d'un dispositif à seuil rend ces systèmes foncièrement non linéaires. Ils fonctionnent quasiment tout le temps dans le régime associé, ne passant brièvement en régime linéaire qu'au moment des basculements. Leur évolution est donc anharmonique et leur trajectoire des phases en régime permanent n'est pas elliptique (il n'y a pas d'allure générale mais la trajectoire se rapproche souvent d'une forme rectangulaire).

Les études suivantes s'attachent à mettre en évidence ces propriétés spécifiques. Les trois éléments (réservoirs, source, dispositif à seuil) étant toujours présents quel que soit l'oscillateur (mécanique, électronique, ...), il est intéressant de les identifier dans les montages étudiés.

IV.2 Expérience d'introduction

Des exemples classiques en mécanique permettent d'introduire les principes de base de ces oscillateurs (cf. [1], p. 316 et suivantes - on conseille de lire l'introduction). On peut présenter un vase de tantale ou le pendule relaxateur. On présente ici la deuxième solution avec l'expérience de la transition ferro/para du Fer :



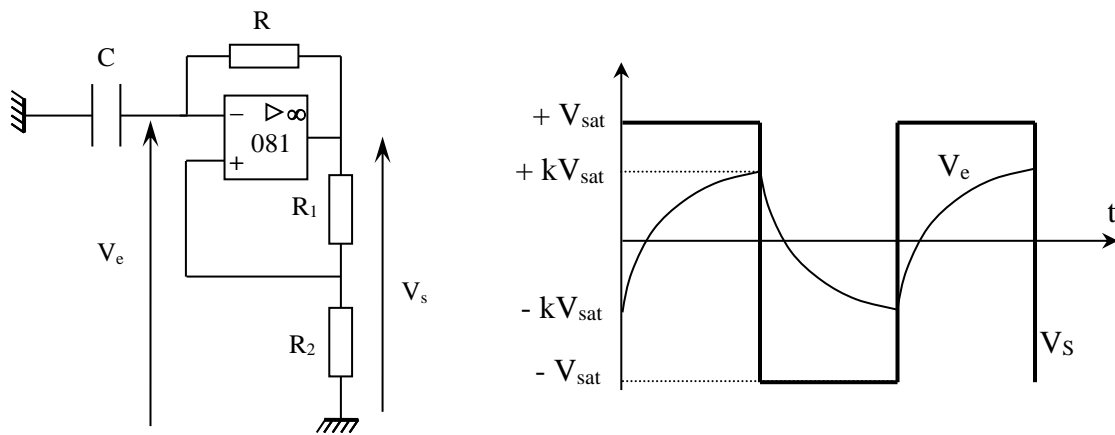
Le fer est paramagnétique à haute température et ferromagnétique à basse température. La susceptibilité magnétique est beaucoup plus forte dans le deuxième état, ce qui fait que le clou a tendance à se coller à l'aimant à température ambiante. Le chauffage élève la température du clou jusqu'à le faire passer dans l'état paramagnétique. Sa susceptibilité magnétique chute fortement, il se détache de l'aimant, s'éloigne de la flamme, se refroidit, redevient ferromagnétique, se recolle à l'aimant et ainsi de suite. Les 3 éléments de base d'un oscillateur à relaxation s'identifient facilement : le réservoir d'énergie est le clou qui accumule de la chaleur, la source d'énergie est le

dispositif de chauffage et le seuil est fourni par la transition ferro/para du clou. Les propriétés propres aux oscillateurs de relaxation sont aussi facilement observables : un changement dans la puissance de chauffe suffit pour modifier la période du phénomène. Ce montage illustre donc bien le rôle que peut avoir la source d'énergie sur la fréquence des oscillations. Le mouvement du clou n'est évidemment pas harmonique et le régime transitoire de l'oscillateur est très court puisqu'il s'arrête dès qu'on coupe le chauffage. La dernière propriété (sensibilité/synchronisation/commande) est moins facile à mettre en évidence mais on peut imaginer une commande électronique agissant sur la puissance de chauffe qui permettrait de contrôler la période de l'oscillateur.

IV.3 Montage à amplificateurs opérationnels

[2], p. 166 ; [3], p. 313

IV.3.1 Montage



Cet oscillateur est très simple. Le condensateur C est le réservoir qu'on remplit et qu'on vide par sa charge et décharge à travers la résistance R sous la tension V_S . Le pont diviseur R_1/R_2 fournit quant à lui une tension de seuil en V_+ qu'on compare à la tension instantanée aux bornes de C . La réaction sur la patte $+$ est instantanée (aucun élément réactif), celle sur la patte $-$ ne l'est pas (régime transitoire de charge/décharge de C). L'amplificateur opérationnel travaille donc la plupart du temps en régime non linéaire ($\varepsilon \neq 0 \rightarrow V_S = \pm V_{SAT}$) et l'association $AO/R_1/R_2$ constitue un comparateur à hystérésis puisque V_+ peut avoir deux valeurs possibles :

$$V_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S = kV_S \quad \text{avec} \quad V_S = \pm V_{SAT} \quad \rightarrow \quad V_+ = \pm kV_{SAT}$$

On peut envisager les deux cas de figure (on suppose que C est initialement déchargé et que l'AO est en saturation positive) :

- $V_S = +V_{SAT} \rightarrow V_+ = +kV_{SAT}$. Le condensateur se charge via R sous la tension V_{SAT} . Cette charge continue jusqu'à ce que $V_C = V_-$ atteigne $+kV_{SAT}$. A cet instant, un faible dépassement de ce seuil provoque le basculement de l'AO à $V_S = -V_{SAT}$.

- $V_S = -V_{SAT}$. On a alors $V_+ = -kV_{SAT}$. Le condensateur se décharge via R sous la tension $-V_{SAT}$ jusqu'à ce que $V_C = V_-$ atteigne $-kV_{SAT}$. Un très léger dépassement de ce seuil provoque alors le basculement de l'AO à $V_S = +V_{SAT}$.

- on revient à la situation précédente mais avec une charge qui démarre cette fois ci à partir d'une tension $V_C = -kV_{SAT}$. On obtient ainsi un système évoluant de façon périodique.

Calcul de la période :

Cas d'une charge exponentielle : $V_- = V_C = A + Be^{-\frac{t}{RC}}$

$$t \rightarrow \infty : V_C \rightarrow V_{SAT} \rightarrow A = +V_{SAT}$$

$$t = 0 : V_C = -kV_{SAT} \rightarrow A + B = -kV_{SAT} \rightarrow B = -(1+k)V_{SAT}$$

$$\text{D'ou : } V_C = V_{SAT}[1 - (1+k)]e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\text{Or } V_C = kV_{SAT} \text{ à } t = \frac{T}{2} \rightarrow k = 1 - (1+k)e^{-\frac{T}{2RC}} \rightarrow T = 2RC \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)$$

$$\text{Soit finalement : } \boxed{T = 2RC \ln\left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Contrairement au pendule relaxateur, la période de cet oscillateur ne dépend pas de la source d'énergie car la tension d'alimentation intervient dans les processus de remplissage/vidange du réservoir (via V_{SAT} dans l'expression de V_C) et dans la définition des seuils de basculement ($\pm kV_{SAT}$)¹³.

IV.3.2 Observations

$$R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega ; R, C : \text{boites variables}$$

On peut commencer par observer les tensions V_S , V_+ et V_- pour comprendre le rôle de chaque branche (bloc $R_1/R_2 \rightarrow$ comparateur à hystérésis ; bloc $RC \rightarrow$ réservoir qu'on remplit ou qu'on vide). On peut ensuite faire varier les paramètres RC du montage pour montrer qu'il peut facilement osciller à différentes fréquences. On peut aussi regarder le régime transitoire de cet oscillateur en plaçant un shunt (un simple fil) sur la capacité qu'on enlève pour lancer l'oscillateur, et le comparer à celui d'un oscillateur quasi sinusoïdal. On peut enfin s'intéresser au diagramme de phase de phase de l'oscillateur en prenant comme variable caractéristique la tension aux bornes du condensateur. Pour obtenir sa dérivée, on peut prendre la tension de sortie de l'AO en modifiant la valeur de certains composants. On a en effet $V_S = V_C + Ri$.

$$\text{Or, } V_C = \frac{1}{C} \int i dt \rightarrow V_S = V_C + RC \frac{dV_C}{dt} \approx RC \frac{dV_C}{dt} \quad \text{si} \quad \left| RC \frac{dV_C}{dt} \right| \gg V_C$$

Cette condition est remplie en prenant les valeurs proposées en [2], p. 166. On peut le vérifier par le calcul, ou en visualisant les tensions V_C et V_S : la première est un triangle alors que la deuxième est un carré. Pour visualiser le diagramme de phase, on passe en mode XY avec $X = V_C$ et $Y = V_S$. On s'aperçoit alors que l'allure est très éloignée d'une ellipse et a plutôt la forme d'un rectangle. On voit deux phases très différentes : la première, progressive, correspond aux deux trajectoires horizontales où V_C passe de $\pm kU$ à $\mp kU$ (remplissage et vidange du réservoir) pendant que V_S reste constant. Une deuxième, rapide, correspond aux deux trajectoires verticales, où V_C reste constant pendant que V_S est pratiquement discontinue (basculement rapide d'une phase de remplissage à une phase de vidange par le dispositif à seuil). On peut noter que c'est le seul instant où l'AO est en régime linéaire (au Slew Rate près) puisqu'on a alors $\varepsilon = V_+ - V_- \approx 0 \text{ V}$.

IV.3.3 Mesures

On peut mesurer la période de l'oscillateur avec $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,1 \mu\text{F}$ et comparer à la valeur théorique. Il est bon de connaître les limites du montage :

¹³ Le réservoir se remplit d'autant plus vite que la tension d'alimentation est forte (en raisonnant sur la valeur absolue de V_C car son évolution relative ne dépend évidemment que de la constante de temps $\tau = RC$) mais cela s'accompagne d'une augmentation des seuils $\pm kV_{SAT}$ qui compense l'effet précédent.

- le signal tend à se déformer si la résistance R est trop faible à cause de la saturation en courant de l'AO.

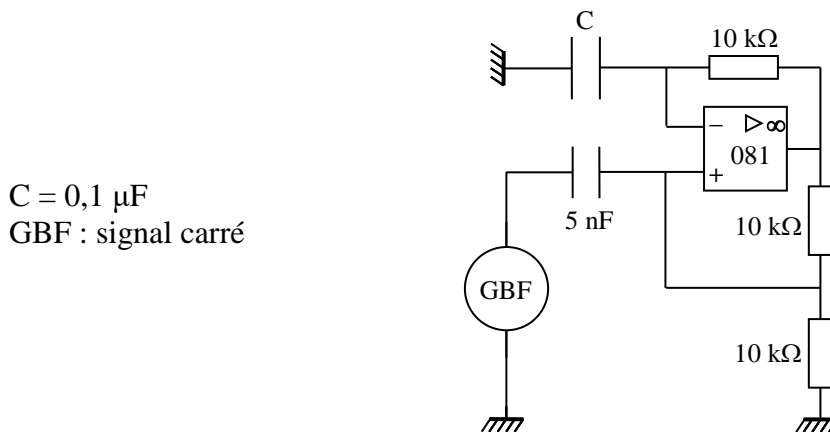
- la période expérimentale recoupe moins bien la valeur attendue aux fréquences élevées à cause du Slew Rate de l'AO (cf. [2], p. 86) qui n'est plus négligeable. Le signal de sortie n'est plus carré et présente une certaine pente au moment des basculements (prendre $C = 5\text{ nF}$, $R = 5\text{ k}\Omega$ par exemple). Cela fausse la valeur de T car les transitions ne sont plus instantanées comme supposé lors du calcul théorique de la période. Il faut donc se limiter aux basses fréquences pour avoir des résultats corrects.

Applications :

Ce montage peut servir comme capacimètre ou conditionneur pour capteur capacitif. Pour le capacimètre, on peut montrer l'intérêt de jouer sur la valeur de R pour maintenir l'oscillateur dans des conditions de fonctionnement telles que le Slew Rate soit négligeable (R a alors le rôle du calibre de mesure).

IV.3.4 Synchronisation des oscillations

[3], p. 313

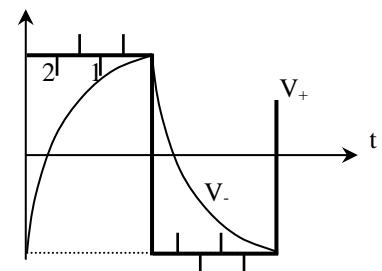


L'idée est de provoquer le basculement anticipé du multivibrateur en abaissant le potentiel de seuil V_+ à l'aide de pulses obtenus en dérivant un signal rectangulaire avec un condensateur de 5 nF .

Visualisation de V_+ et V_- :

On commence avec des pulses d'amplitude \approx nulle et tels que $f_{pulses} = 10f_{multivibrateur}$. On a alors $T = T_{multivibrateur\text{ seul}}$.

On augmente progressivement l'amplitude du GBF. On voit sur le schéma qu'on provoque l'anticipation des basculements de la tension de sortie lorsque le pulse n° 1 atteint le potentiel V_- . Si on augmente encore l'amplitude, l'anticipation du basculement est provoquée par le pulse n° 2, et ainsi de suite \rightarrow Le potentiel limite de charge du condensateur suit donc l'amplitude d'un des pulses.



Visualisation de V_s :

On règle l'amplitude du GBF au maximum pour pouvoir contrôler la fréquence sur une large gamme. On modifie f_{GBF} entre $10f_{multi}$ et f_{multi} et on mesure la période des oscillations. On constate alors que la période du multivibrateur suit les variations de fréquence du GBF ($T_{GBF} = kT_{multi}$). Cette expérience montre la facilité avec laquelle on peut synchroniser un oscillateur de relaxation sur un signal extérieur. Elle illustre aussi le principe de la synchronisation des traces sur un oscilloscope. Le signal observé est mis en forme pour donner des pulses qui sont envoyés à la base de temps de l'appareil (fournie par un multivibrateur) afin qu'elle devienne un multiple de la période du signal à observer \rightarrow l'image est stable.

IV.3.5 Obtention d'un oscillateur quasi - sinusoïdal

[2], p. 167-168

Cet oscillateur peut être vu comme l'association d'un pont diviseur et d'un filtre actif passe bas d'ordre 1. Il ne peut donc pas y avoir d'oscillations sinusoïdales théoriquement. Le filtre s'identifie cependant à un système d'ordre 2 si on tient compte du comportement passe bas de l'AO en hautes fréquences donc le système bouclé peut être oscillant.

Manipulation :

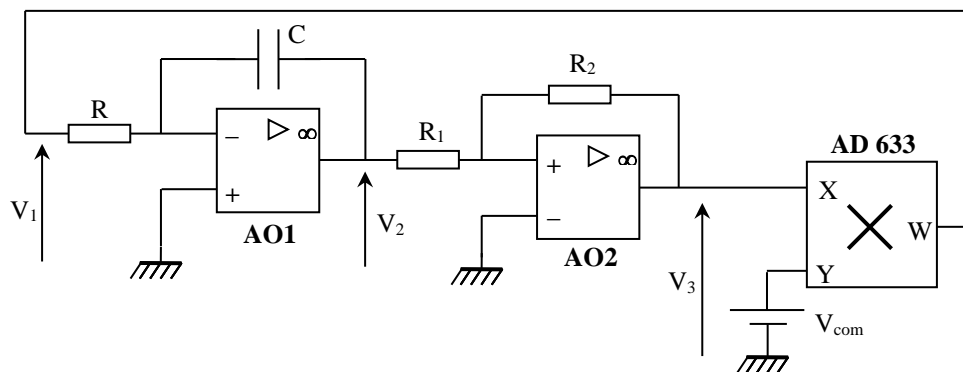
On reprend le montage en abaissant la valeur de R_2 ¹⁴ à quelques ohms. On obtient alors des oscillations quasi sinusoïdales. Se reporter à la référence indiquée pour l'interprétation.

IV.4 Application à la réalisation d'un VCO

Un VCO (Voltage Control Oscillator) est un dispositif permettant le contrôle de la fréquence d'un signal par l'intermédiaire d'une tension continue. Plusieurs réalisations sont possibles (cf. [3], p. 347, [5], p.178). On propose la plus simple : on reprend le principe du montage précédent en séparant la cellule RC du dispositif à hystérésis et on ajoute un bloc multiplieur pour que la charge et la décharge du condensateur soit une fonction linéaire d'une tension de commande V_C .

IV.4.1 Montage

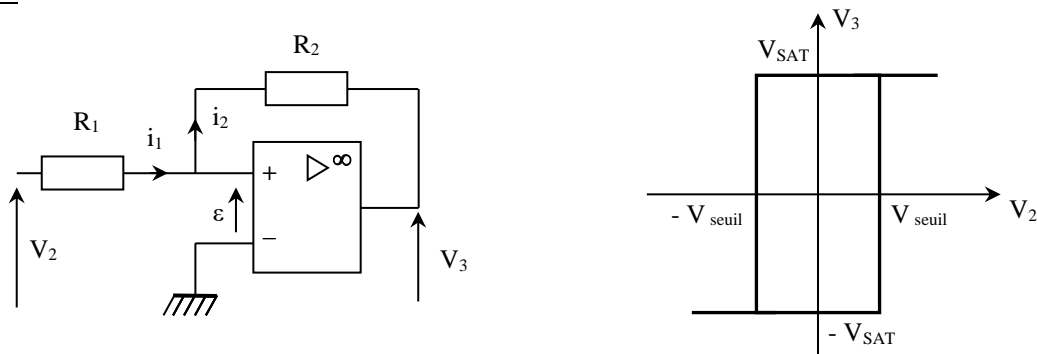
[2], p. 192

Bloc AO1 :

Il fonctionne en régime linéaire (rétroaction patte -). C'est un intégrateur à courant constant. On a :

$$V_2 = -\frac{V_1}{RC} t \quad (1)$$

Ce dispositif génère un signal triangulaire si l'on suppose $V_1 = \text{cte}$.

Bloc AO2 :

¹⁴ Notée R_1 dans [2].

Il fonctionne en régime non linéaire (rétroaction patte +). C'est un comparateur à hystérésis non inverseur. On indique succinctement son principe de fonctionnement. L'ampli op est supposé parfait donc on a $i_1 = i_2$, d'où :

$$\frac{V_2 - V_+}{R_1} = \frac{V_+ - V_3}{R_2} \rightarrow V_+ = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 V_2 + R_1 V_3) \quad (2)$$

La sortie de l'amplificateur opérationnel est en saturation positive ou négative. On étudie successivement les deux cas de figure :

- $V_+ \geq 0$:

La patte - est à la masse $\rightarrow \varepsilon$ est positif, d'où $V_3 = +V_{SAT}$

$$(2) \rightarrow V_+ = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 V_2 + R_1 V_{SAT})$$

$$V_+ \geq 0 \Leftrightarrow V_2 \geq -\frac{R_1}{R_2} V_{SAT} = -V_{seuil} \quad (3)$$

- $V_+ \leq 0$:

La patte - est à la masse $\rightarrow \varepsilon$ est négatif, d'où $V_3 = -V_{SAT}$

$$(2) \rightarrow V_+ = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 V_2 - R_1 V_{SAT}) \leq 0 \Leftrightarrow V_2 \leq \frac{R_1}{R_2} V_{SAT} = V_{seuil} \quad (4)$$

Le montage présente par conséquent un hystérésis (inversé par rapport au montage précédent). La tension d'entrée étant généralement inférieure à $\pm V_{SAT}$, ce comparateur ne fonctionne comme tel que si $R_1 < R_2$.

Bloc multiplieur :

Il rend la tension V_1 intégrée dépendante d'une tension continue. On a $V_1 = \pm kV_{com}V_{SAT}$ en sortie, avec $k = 1/10$ pour le multiplieur AD 633.

Période de l'oscillateur :

On suppose le condensateur initialement déchargé et la sortie du bloc AO2 en saturation positive $\rightarrow V_1 = kV_{com}V_{SAT}$. En réinjectant dans (1) :

$$V_2 = -\frac{kV_{com}V_{SAT}}{RC} t$$

La tension V_2 , initialement nulle, diminue jusqu'à atteindre la condition (3). Le bloc AO2 bascule alors et sa sortie passe en saturation négative. Partant de $t = 0$, le basculement a lieu lorsque :

$$V_2 = -\frac{kV_{com}V_{SAT}}{RC} t = -\frac{R_1}{R_2} V_{SAT} \quad \text{soit} \quad t = \frac{R_1}{R_2} \frac{RC}{kV_{com}}$$

Ce temps correspond au quart de la période du signal obtenu. On peut s'en convaincre en poursuivant le raisonnement précédent avec $V_1 = -kV_{com}V_{SAT}$, $V_2 = kV_{com}V_{SAT}t/RC$ et en utilisant (4) comme nouvelle condition de basculement. On trouve finalement :

$$f_{signal} = \frac{k}{4RC} \frac{R_2}{R_1} V_{com}$$

La fréquence est une fonction linéaire de V_{com}

IV.4.2 Réalisation pratique

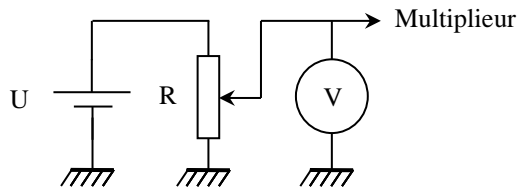
$R = 10 \text{ k}\Omega$; $R_1 = 5,1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$

$C = 10 \text{ nF}$

AO \rightarrow 081 **sans réglages d'offset**

Multiplieur \rightarrow AD 633

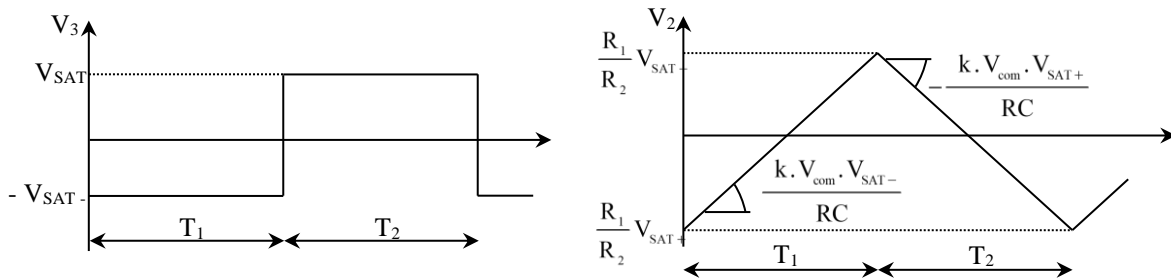
V_{com} peut s'obtenir avec une alimentation continue réglable mais ce type de source ne fonctionne pas forcément très bien à bas niveau. On peut y remédier en reliant un potentiomètre à une alimentation continue fixe :



Le choix du potentiomètre n'est pas critique. Sa résistance ne doit être ni trop faible ni trop grande ($10 \text{ k}\Omega$ par exemple). Un potentiomètre multi tour est préférable (réglage plus fin).

Problèmes de symétrie :

Il est probable que le rapport cyclique des signaux ne soit pas égal à 50 %. La légère dissymétrie des niveaux de saturation haut et bas des amplificateurs opérationnels en est la cause (on a souvent une différence de 1 V). Cela se comprend si on reprend le raisonnement précédent en supposant V_{SAT+} différent de V_{SAT-} .



Lorsque le bloc AO2 est en saturation négative, on a : $V_2 = \frac{kV_{com}V_{SAT-}}{RC} t$

Le triangle reste sur cette pente de $V_2 = -R_1/(V_{SAT+}R_2)$ à $V_2 = R_1/(V_{SAT-}R_2)$. La demi-période correspondante vaut :

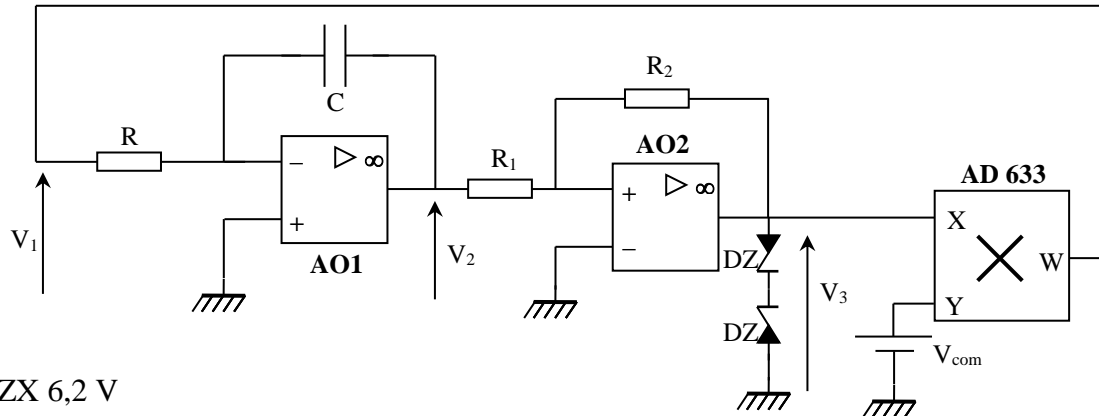
$$T_1 = \frac{V_{SAT+} + V_{SAT-}}{V_{SAT-}} \frac{RC}{kV_{com}} \frac{R_1}{R_2}$$

Lorsque le bloc AO2 est en saturation positive, on a : $V_2 = -\frac{kV_{com}V_{SAT+}}{RC} t$

Le triangle reste sur cette pente de $V_2 = R_1/(V_{SAT-}R_2)$ à $V_2 = -R_1/(V_{SAT+}R_2)$. La demi-période correspondante vaut :

$$T_2 = \frac{V_{SAT+} + V_{SAT-}}{V_{SAT+}} \frac{RC}{kV_{com}} \frac{R_1}{R_2}$$

Les expressions de T_1 et T_2 ne sont donc pas les mêmes si V_{SAT+} est différent de V_{SAT-} . On peut corriger ce problème en rajoutant deux diodes Zener tête bêche à la sortie du bloc AO2 pour limiter la tension V_3 à une valeur symétrique $\pm V_Z$:

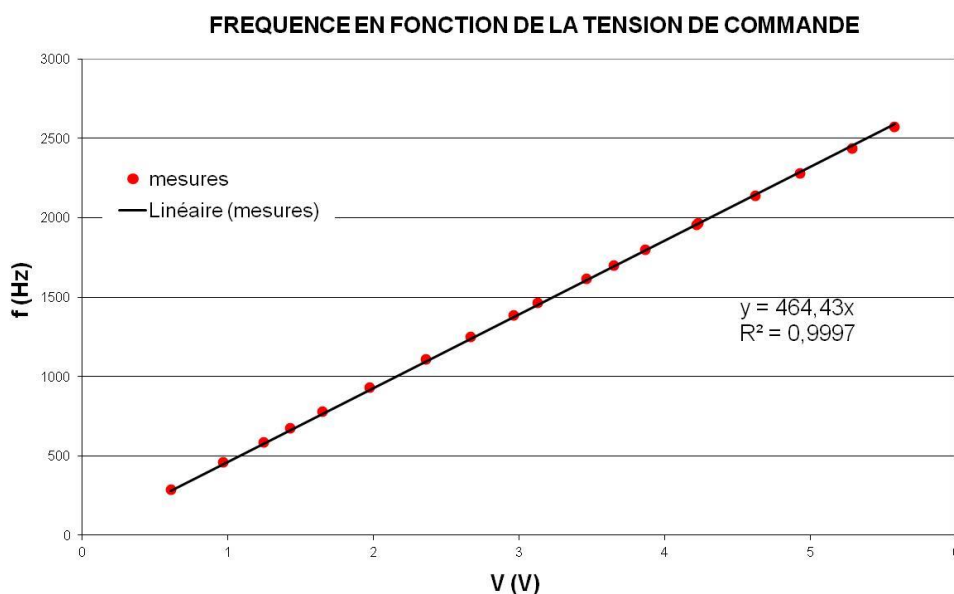


DZ : BZX 6,2 V

On peut visualiser la tension V_3 (signal carré) et vérifier que les amplitudes V_{max} et V_{min} sont symétriques (on peut tester plusieurs diodes Zener de la même famille pour y parvenir aux mieux). Si le rapport cyclique n'est toujours pas à 50 %, ou s'il change lorsqu'on modifie la tension de commande, cela peut provenir de l'offset des AO. C'est le cas si la pente positive du signal triangulaire V_2 est différente de la pente négative (l'offset s'ajoute à la tension à intégrer sur une des pentes alors qu'il se retranche sur l'autre). Il faut changer d'amplificateur opérationnel dans ce cas ou compenser les offset (à faire si c'est vraiment nécessaire). La procédure de réglage est alors la suivante : on visualise V_2 (signal triangulaire), on modifie l'offset de l'AO2 jusqu'à obtenir un signal symétrique par rapport à la masse. On modifie ensuite l'offset de l'AO1 jusqu'à avoir un signal triangulaire possédant les mêmes pentes croissantes et décroissantes.

IV.4.3 Mesures

On mesure la fréquence du signal V_1 ou V_3 pour différentes valeurs de la tension de commande et on trace la courbe $f_{signal} = f(V_{com})$:



On constate un excellent accord avec une loi linéaire. Le dispositif permet donc de générer un signal carré et un signal triangulaire dont la fréquence peut être contrôlée de façon linéaire par un potentiomètre. C'est sur ce principe que sont conçus les oscillateurs des GBF analogiques (pour le passage à un signal sinusoïdal, se reporter à [2], p. 193-195).

Bibliographie :

- [1] : Quaranta : tome I
- [2] : Duffait : Expériences d'électronique
- [3] : Quaranta : tome III
- [4] : Quaranta : tome IV (nouvelle édition)
- [5] : Datté della Maestra : Ampli Op
- [6] : Jean Paul Bellier : Montages de Physique
- [7] : BUP 799, p. 2023 et suivantes
- Tomasino : Physique term. S, enseignement obligatoire, Nathan, p. 288
- H Prépa : Mécanique I, 1^{ère} année MPSI, PCSI, PTSI, Hachette, p. 132
- BUP n° 744, 785, 787

ANNEXE : DETERMINATION DE L'AMPLITUDE POUR L'OSCILLATEUR DE VAN DER POL

On part de l'équation de Van der Pol et on la multiplie par $\dot{x}dt$:

$$\ddot{x} + \mu \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x}\dot{x}dt + \omega^2 x\dot{x}dt = - \mu \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) \dot{x}^2 dt$$

On réarrange l'équation obtenue grâce aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} df = f' \cdot dt \quad \rightarrow \quad d(\dot{x}^2) = [\dot{x}^2]' dt = 2\dot{x}\ddot{x}dt \quad \rightarrow \quad \ddot{x}\dot{x}dt &= \frac{1}{2} d(\dot{x}^2) \\ d(x^2) = [x^2]' dt = 2x\dot{x}dt \quad \rightarrow \quad x\dot{x}dt &= \frac{1}{2} d(x^2) \end{aligned}$$

On obtient alors : $\frac{1}{2} d(\dot{x}^2) + \frac{\omega^2}{2} d(x^2) = - \mu \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) \dot{x}^2 dt$

Intégrons cette équation sur une période. La partie gauche de l'équation devient :

$$\frac{1}{2} \int_0^T d(\dot{x}^2) + \frac{\omega^2}{2} \int_0^T d(x^2) = \frac{1}{2} [\dot{x}^2]_0^T + \frac{\omega^2}{2} [x^2]_0^T = \frac{1}{2} [\dot{x}^2(T) - \dot{x}^2(0)] + \frac{\omega^2}{2} [x^2(T) - x^2(0)]$$

La périodicité du signal aux bornes du condensateur et aux bornes de la résistance fait qu'on a les conditions suivantes en régime permanent :

$$x^2(0) = x^2(T)$$

$$\dot{x}^2(0) = \dot{x}^2(T)$$

Dans ces conditions, le résultat de l'intégration du membre de gauche de l'équation donne un résultat nul. Reste à intégrer le membre de droite sachant que le résultat doit être nul. Pour ce faire, on suppose pour $x(t)$ une solution sinusoïdale :

$$x = x_m \cos \omega t \quad \rightarrow \quad \dot{x} = -\omega x_m \sin \omega t$$

$$\rightarrow \quad \mu \int_0^T \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) \dot{x}^2 dt = \mu \omega^2 x_m^2 \left[\frac{x_m^2}{x_0^2} \int_0^T (\cos \omega t \cdot \sin \omega t)^2 dt - \int_0^T \sin^2 \omega t dt \right] = 0$$

$$\cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t \quad \text{et} \quad \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \quad \rightarrow \quad (\cos \omega t \sin \omega t)^2 = \frac{1}{8} (1 - \cos 4\omega t)$$

On a alors : $\frac{x_m^2}{8x_0^2} \int_0^T (1 - \cos 4\omega t)^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = 0$

$$\frac{x_m^2}{4x_0^2} \left([t]_0^T + \left[\frac{1}{4\omega} \sin 4\omega t \right]_0^T \right) - [t]_0^T + \left[\frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T = 0$$

$$\frac{x_m^2}{4x_0^2}(T+0) - T + 0 = 0$$

Soit finalement : $\frac{x_m^2}{4x_0^2}T - T = 0 \quad \forall T \quad \rightarrow \quad \frac{x_m^2}{4x_0^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_m = 2x_0}$