

REGIMES TRANSITOIRES

Les régimes transitoires correspondent au comportement d'un système quand il passe d'un état permanent à un autre. Ces états peuvent être stationnaires (grandeurs invariables dans le temps), mais pas forcément. L'étude des régimes transitoires se résume souvent à la relaxation¹ des systèmes linéaires d'ordre 1 ou 2 mais c'est un domaine beaucoup plus vaste. On peut aussi s'intéresser à l'établissement de régimes forcés non stationnaires ou au temps de réponse d'un composant ou d'un système asservi soumis à un changement de consigne.

I REGIME TRANSITOIRE D'UN SYSTEME LINEAIRE D'ORDRE 1

I.1 Etude du phénomène de relaxation avec un circuit RC

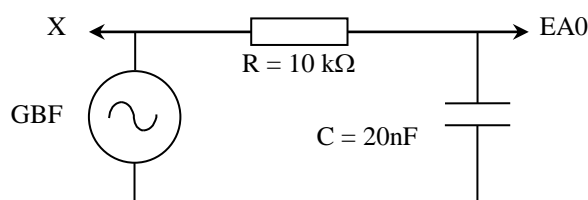
Cette expérience est classique et se trouve dans de nombreux ouvrages (cf. [4], p. 476 par exemple) donc on peut s'y reporter pour plus de précisions. Il faut montrer que la réponse est monotone (pas d'oscillations possibles), en forme d'exponentielle², avec une constante temporelle caractéristique $\tau = RC$. Cette étude étant assez classique, on peut la compléter ou la remplacer par quelque chose d'un peu plus ambitieux. On peut s'intéresser par exemple au temps de réponse d'une photodiode (se reporter au montage « Photorécepteur » pour plus de précision ou en [6], p. 69). Les paragraphes suivants peuvent aussi être des alternatives.

I.2 Lien entre le régime transitoire et la réponse harmonique pour les systèmes linéaires et invariants dans le temps

[1], p. 142 ; [2]

L'expérience suivante met en évidence une propriété essentielle des filtres linéaires et invariants dans le temps : ils sont entièrement caractérisés par leur réponse impulsionnelle et la réponse à une entrée quelconque est donnée par le produit de convolution entre l'entrée et cette réponse. La fonction de transfert d'un tel système correspond à la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle (cf. annexe 1) → le comportement d'un filtre en régime harmonique peut se déduire de sa réponse en régime transitoire.

I.2.1 Montage



X : vers un oscilloscope
EA0 : vers synchronie

Le filtre a pour fonction de transfert :

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

¹Retour à une situation d'équilibre.

²On peut modéliser le régime transitoire pour le montrer, ou tracer le logarithme de la réponse : le fait qu'on obtienne une droite prouve alors le caractère exponentiel de cette réponse.

Sa fréquence de coupure vaut $f_c = 1/(2\pi RC)$. Le gain chute de -20 dB/décade en haute fréquence. Le déphasage évolue entre 0 et $-\pi/2$ et vaut $-\pi/4$ à la fréquence de coupure.

Manipulation :

L'idéal consiste à utiliser un générateur de pulses. Si on n'en a pas, on peut prendre un GBF classique et di-symétriser au maximum un signal carré (rapport cyclique inférieur à 10 % si possible). Quelle que soit la méthode employée, il faut s'arranger pour produire au mieux des pulses compris entre 0 et 5 V qui se répètent à une fréquence d'environ 30 Hz. Une fois ces réglages effectués, on peut lancer l'acquisition sur Synchronie avec les paramètres suivants :

$$N_{\text{points}} = 2048 \quad ; \quad T_{\text{éch}} = 6 \mu\text{s} \quad ; \quad \text{déclenchant sur le front montant de EA0}$$

On obtient un signal dont seule la partie en exponentielle décroissante nous intéresse (on veut la réponse à une impulsion). Le plus simple pour conserver uniquement cette partie consiste à décaler le signal obtenu : il suffit d'aller dans le tableur, ajouter la variable EA0 et rechercher la valeur N du point d'acquisition correspondant au début de la décroissance exponentielle. On définit ensuite une nouvelle variable décalée dans la feuille de calcul avec la syntaxe suivante (en écrivant bien entendu la valeur numérique pour N) :

$$X = \text{AVANCE}(\text{EA0}, N)$$

On peut alors relancer une acquisition et vérifier que la courbe X démarre bien au début de l'exponentielle décroissante en zoomant sur le début de la courbe. Ce réglage est important si on veut que le logiciel réalise une exploitation conforme à ce que l'on souhaite.

I.2.2 Traitement du signal acquis

La TF d'un signal correspond à :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) [\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)] dt$$

Synchronie peut calculer numériquement différentes TF :

$$\text{TF en cosinus : } S_{\cos}(f) = \int s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

$$\text{TF en sinus : } S_{\sin}(f) = \int s(t) \sin(2\pi ft) dt$$

$$\text{TF en module : } S_{\text{mod}} = \sqrt{S_{\cos}^2 + S_{\sin}^2}$$

$$\text{TF en puissance : } S_{\text{puis}} = 20 \log \left(\frac{S_{\text{mod}}}{\text{Réf}} \right)$$

$$\text{TF en argument : } \theta = \text{Arc sin} \left(\frac{S_{\sin}}{S_{\text{mod}}} \right)$$

La TF en puissance permet d'obtenir le diagramme de Bode en gain du filtre puisqu'elle correspond à la TF en module exprimée en échelle logarithmique. La TF en argument est censée nous donner l'évolution de la phase mais le résultat obtenu présente généralement des défauts. Ce problème est lié au double échantillonnage induit par le processus numérique de calcul de la TF³. Les

³ Le logiciel utilise un signal échantillonné au lieu du signal réel variant continuellement dans le temps et il ne calcule le spectre que pour certaines valeurs de la fréquence. Cette double discrétisation fait qu'il réalise une transformée de Fourier discrète (TFD) et non pas une TF.

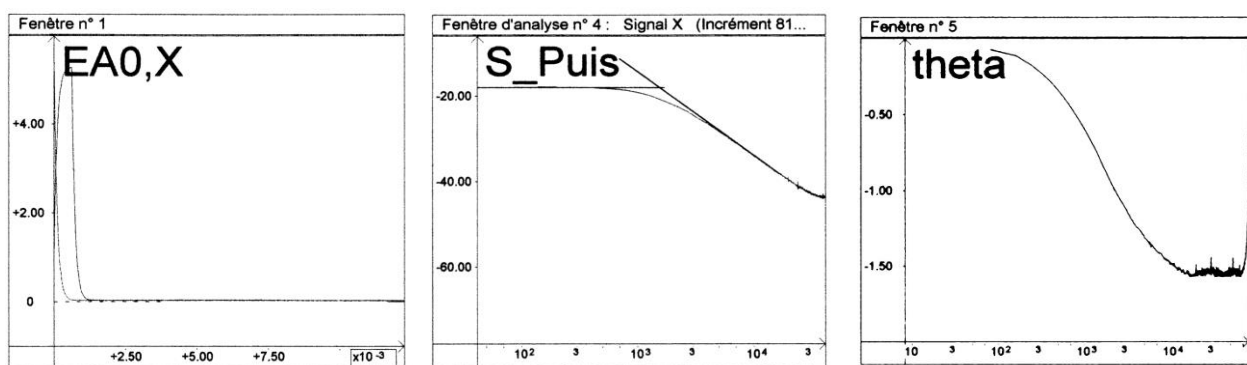
approximations qui en découlent affectent particulièrement le calcul de la phase. Le résultat est très sensible à la position des échantillons dans les intervalles de mesure. Le meilleur compromis consiste à prélever les mesures au milieu des intervalles, c'est à dire aux instants $t_k = (k + 1/2)T_{éch}$, chose que ne fait pas le logiciel puisqu'il les prend aux instants $t_k = kT_{éch}$. La FFT qu'il réalise peut cependant être corrigée avec un résultat convenable pour ce filtre en la multipliant par le terme $\exp(-j\pi f T_{éch})$ (cf. [2] et annexe 1). Il suffit donc de recalculer l'argument en entrant les lignes suivantes dans la feuille de calcul du logiciel⁴ :

$$sa = -S_Sin \times \cos(\pi \times f \times 6E-6) - S_Cos \times \sin(\pi \times f \times 6E-6)$$

$$sav = sa / S_Module$$

$$theta = \text{asin}(sav)$$

I.2.3 Exploitation



On peut mesurer la fréquence de coupure du filtre à -3 dB sur le diagramme en puissance et vérifier que la pente de l'asymptote en hautes fréquences est proche de -20 dB/décades. La phase évolue entre 0 à $-\pi/2$ avec $\theta = -\pi/4$ à la fréquence de coupure⁵. On peut refaire une acquisition sur 4096 points sans changer la fréquence d'échantillonnage. Le pas de calcul du spectre est alors plus fin car les algorithmes FFT utilisent un incrément qui vaut $1/T_{tot} = 1/(NT_{éch})$ ⁶.

I.2.4 Temps de réponse d'un système bouclé

Une autre manière d'enrichir ce chapitre peut consister à étudier la réponse d'un système bouclé à un changement de consigne, et voir comment l'ajout de correcteurs peut améliorer les performances dynamiques du système. Une expérience de ce genre est menée sur un amplificateur modélisable par une fonction de transfert du premier ordre dans le montage sur les systèmes bouclés (§ II.4 et II.5) → s'y reporter pour des idées de manipulations.

II REGIME TRANSITOIRE D'UN SYSTEME LINEAIRE D'ORDRE 2

II.1 Influence du coefficient d'amortissement

Cette étude est classique avec un circuit électrique RLC. On la trouve là encore dans de nombreux ouvrages (cf. [4], p. 479 par exemple). Il faut alors montrer que la réponse peut être monotone ou oscillante suivant le degré d'amortissement du circuit, et qu'il existe un régime critique délimitant les deux types de réponse

⁴ $6 \cdot 10^{-6}$ correspond à la période d'échantillonnage choisie ici donc cette valeur doit être modifiée si on change $T_{éch}$.

⁵ On peut d'ailleurs se servir de cette position pour mesurer f_c .

⁶ Ce point est expliqué dans le montage « signal et Bruit ».

→ se reporter à la référence proposée pour des idées de manipulation. Le système étant là aussi linéaire et invariant dans le temps, sa réponse en régime transitoire est encore intimement liée à sa réponse harmonique, notamment à sa sélectivité. L'expérience suivante permet de le vérifier.

II.2 Etude du régime transitoire d'un diapason

On peut commencer par montrer que le régime transitoire d'un diapason se modélise de la même manière que pour un circuit RLC faiblement amorti, à savoir par une sinusoïde décroissant de manière exponentielle. L'opération est cependant délicate car les diapasons vibrent pendant plusieurs secondes après une percussion, soit une durée énorme comparée à celle d'une oscillation. Il faut donc observer un très grand nombre de périodes pour voir une décroissance significative du signal :

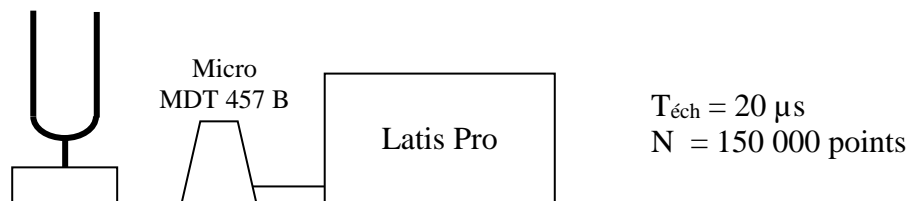
Exemple du diapason La₃ à 440 Hz : $T = 2,3 \text{ ms}$

Temps de décroissance typique avec une caisse de résonance : $\tau \approx 2 \text{ s}$

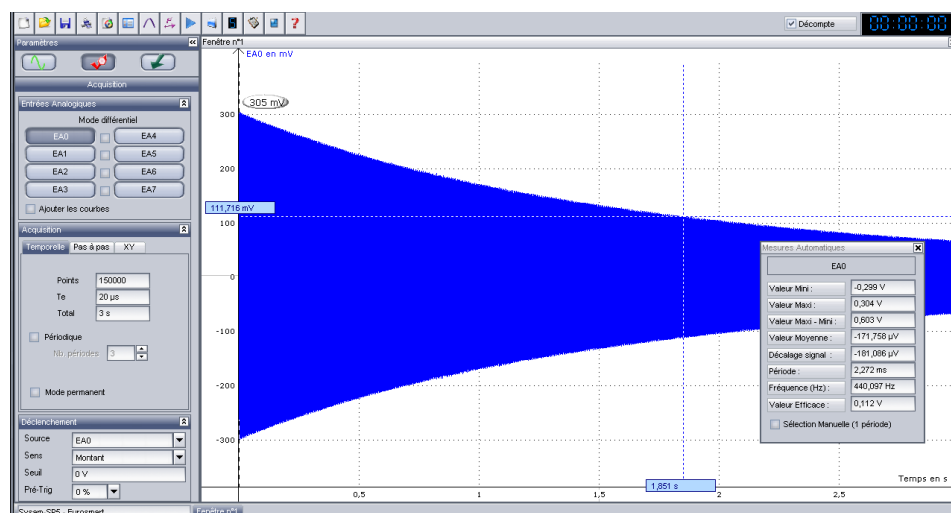
$$\left. \begin{array}{l} T = 2,3 \text{ ms} \\ \tau \approx 2 \text{ s} \end{array} \right\} \rightarrow N_{\text{oscillations}} \approx 1000 !$$

Une modélisation sur autant de périodes n'est pas simple. Elle nécessite notamment une connaissance précise de la fréquence des oscillations (on le comprend facilement en imaginant le décalage temporel que peut induire une erreur de l'ordre du % au bout de 1000 périodes).

II.2.1 Enregistrement de la décroissance



Il faut une fréquence d'échantillonnage suffisamment grande pour décrire correctement une période et prendre assez de points pour observer la décroissance des oscillations. Les valeurs proposées pour $T_{\text{éch}}$ et N permettent d'observer le signal pendant 3 secondes avec environ 100 points par période. Un tel nombre de points requiert l'utilisation du logiciel d'acquisition Latis Pro au lieu de Synchronie⁷. Voici à titre indicatif le résultat d'un enregistrement suite à une percussion du diapason (l'échelle de conversion du CAN été réglée à +1/-1 V pour assurer une bonne conversion analogique numérique du signal compte tenu de son amplitude) :



⁷ Latis pro permet d'enregistrer jusqu'à 256 000 points alors que Synchronie est limité à 10 000 points.

La décroissance du signal est visible mais l'observation des oscillations nécessite de zoomer fortement sur une partie de l'acquisition.

II.2.2 Modélisation du signal

Latis Pro propose des fonctions prédéfinies pour modéliser des oscillations avec une décroissance exponentielle, mais avec de nombreux paramètres qui ne facilitent pas la convergence vers un résultat. Il vaut donc mieux réduire au maximum le nombre variable. Pour ce faire, on peut partir du modèle sinusoïdal :

$$Y_0 + Y_m \times \text{Exp}(-m \times 2 \times \pi \times F_0 \times \text{Temps}) \times \sin(2 \times \pi \times F_0 \times \text{Temps} + \Phi)$$

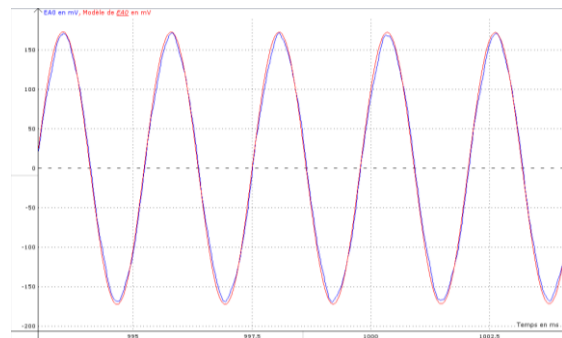
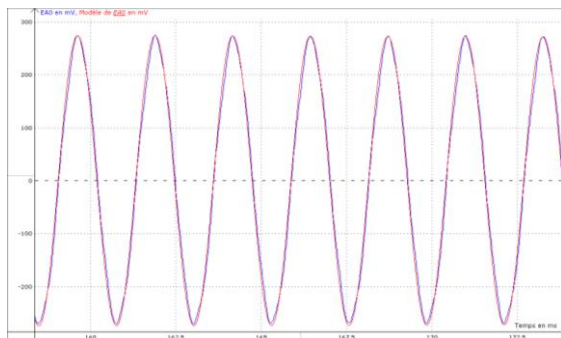
Le signal récupéré étant centré sur zéro, on peut supprimer Y_0 . On peut aussi éliminer le terme de phase Φ en déclenchant l'acquisition sur un front montant du signal avec un seuil nul (cf. les paramètres en bas à gauche sur la figure), car $\varphi(t = 0)$ doit alors être nul avec une sinusoïde⁸. L'expression se résume ainsi à⁹ :

$$Y_m \times \text{Exp}(-m \times \text{Temps}) \times \sin(2 \times \pi \times F_0 \times \text{Temps})$$

Il faut aussi aider le logiciel en lui donnant une estimation correcte des paramètres Y_m , m et F_0 . Le plus important est de lui fournir une estimation précise de la fréquence. On peut l'obtenir simplement en utilisant la fonction « Mesures automatiques » du logiciel. On trouve dans notre exemple une fréquence¹⁰ :

$$F_0 = 440,097 \text{ Hz}$$

On mesure Y_m en zoomant sur le début de l'acquisition ($Y_m = 305 \text{ mV}$ sur notre figure). Le coefficient m peut s'estimer en cherchant le temps t pour lequel l'enveloppe du signal atteint 36,8 % de la valeur initiale Y_m . On a alors $m = 1/t$ ($m \approx 1/1,85 = 0,54 \text{ s}^{-1}$ ici). On entre alors ces valeurs de F_0 , m et Y_m dans le logiciel et on lance un premier calcul en désactivant l'ensemble des paramètres. On peut ensuite affiner le résultat en activant successivement Y_m et m . Une fois le calcul effectué, on peut alors zoomer sur différents points de l'acquisition pour comparer l'enregistrement à la courbe modélisée :



Si on estime que la fréquence doit être retouchée, il faut éviter de relancer une modélisation avec la fréquence comme degré de liberté car le logiciel n'arrive généralement pas à converger. Cette incapacité est liée à des modifications trop fortes de ce paramètre au cours des différentes itérations (imaginer les décalages induits par un changement très faible de fréquence au bout de 1 000

⁸ On peut aussi prendre un modèle en cosinus mais il faut alors ajouter $\varphi = -\pi/2$ dans le cosinus.

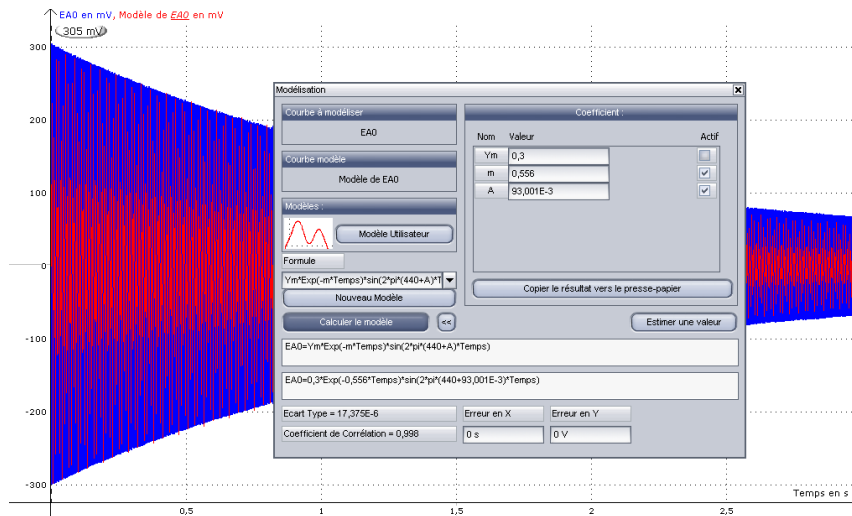
⁹ L'expression du terme exponentiel a été aussi allégée pour faire apparaître directement le coefficient d'amortissement m homogène à l'inverse d'un temps (le coefficient noté λ dans de nombreux ouvrages).

¹⁰ Ce résultat n'est pas une garantie de valeur exacte pour F_D . C'est la valeur « vue » par le logiciel qui est nécessaire pour caler sa modélisation sur l'acquisition réalisée.

périodes). Une solution consiste à redéfinir la fréquence avec un paramètre d'ajustement A centré autour de 440 Hz :

$$Y_m \times \exp(-m \times \text{Temps}) \times \sin(2 \times \pi \times (440 + A) \times \text{Temps})$$

Le logiciel arrive alors généralement à converger :



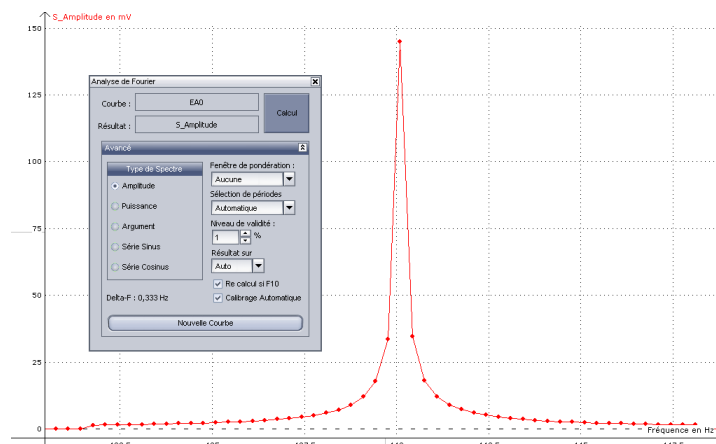
On obtient ici $A = 0,093$, soit $F_0 = 440,093$ Hz (résultat très proche de la mesure automatique). L'ajustement du coefficient d'amortissement conduit à $m = 0,56$, une valeur cohérente avec celle estimée auparavant.

Remarque :

Il faut frapper le diapason avec une force raisonnable pour rester dans un modèle de réponse linéaire sinon on ne peut pas caler l'amplitude du modèle sur celle du signal réel pour la durée totale de l'acquisition. C'est le cas de l'enregistrement ci-dessus : le modèle a été ajusté sur le début du signal avec un très bon accord mais il décroît plus rapidement que le signal réel vers la fin de l'enregistrement. Cette observation laisse à penser que l'amortissement diminue avec le niveau des oscillations et la force avec laquelle on frappe le diapason semble en être la cause car on a repris l'expérience en frappant beaucoup moins fort et on n'a pas retrouvé le même genre d'écarts. La modélisation a d'ailleurs donné un coefficient d'amortissement plus faible ($0,39 \text{ s}^{-1}$), ce qui semble confirmer l'hypothèse d'un amortissement variable avec l'amplitude des oscillations.

II.2.3 Transformée de Fourier de la réponse transitoire

On peut, comme pour le § I.2, faire la TF de la réponse impulsionnelle du diapason afin d'obtenir son comportement en régime harmonique :



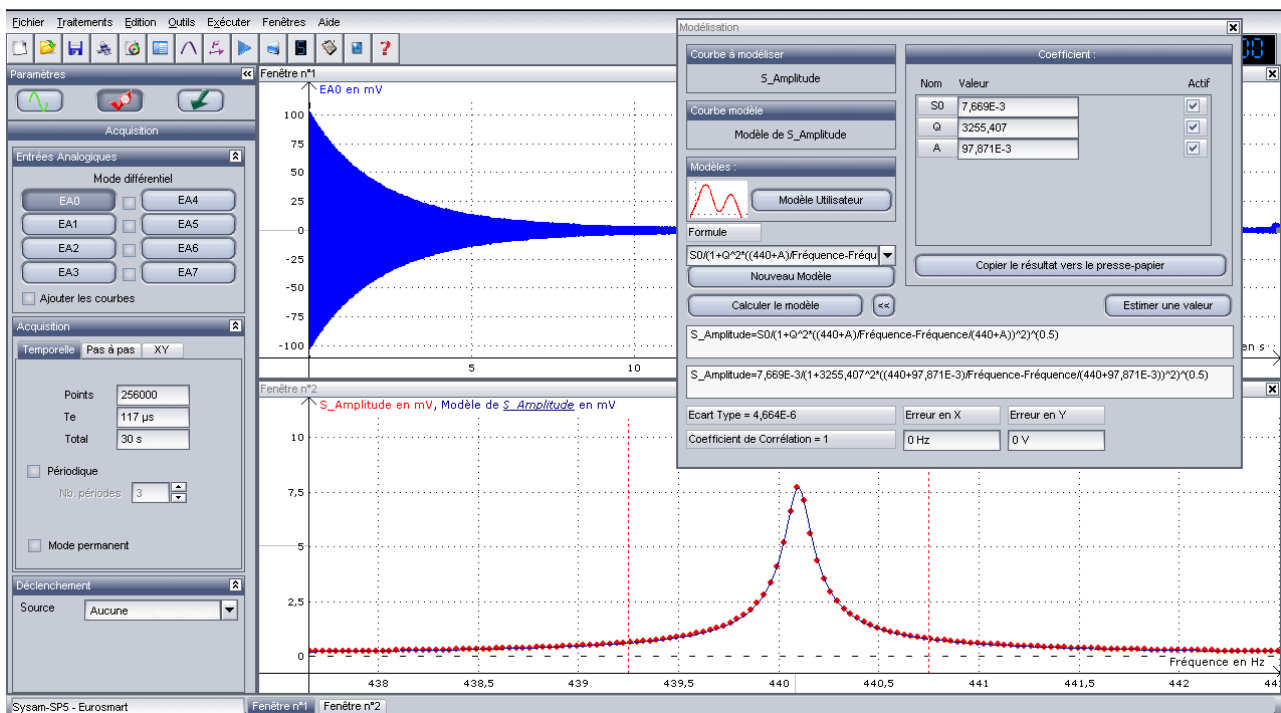
La TF du signal acquis dans les conditions précédentes est cependant grossière car la durée totale d'observation ne permet pas d'avoir un pas de calcul $\Delta f = 1/T_{\text{tot}} = 0,33$ Hz suffisamment fin compte tenu du facteur de qualité du diapason. Il faut donc augmenter la durée d'acquisition pour obtenir un meilleur résultat. On peut relancer un nouvel enregistrement avec le maximum de points possible (256 000) et une durée d'observation à 30 secondes (le pas de calcul de la TF est diminué d'un facteur 10 dans ce cas). Le spectre obtenu peut alors être modélisé par la fonction de transfert d'un système du deuxième ordre (cf. [4], p. 463) :

$$S = \frac{S_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{F}{F_0} - \frac{F_0}{F} \right)^2}}$$

L'amplitude S_0 à la résonance s'estime à partir du spectre ($\approx 7,5$ mV ici). On peut utiliser la valeur de F_0 déduite de l'étude en régime transitoire ou définir F_0 à partir d'une variable d'ajustement centrée autour de 440 Hz. Le facteur de qualité peut se calculer à partir du coefficient d'amortissement m obtenu précédemment. On a :

$$Q = \frac{\omega_0}{2m} = \frac{\pi F_0}{m} = \frac{\pi 440}{0,56} \approx 2500 \text{ dans notre exemple}$$

On lance alors la modélisation sur la partie de la courbe proche du pic de résonance en activant successivement les différents paramètres. Voici à titre indicatif le type de résultat qu'on peut obtenir par cette méthode :



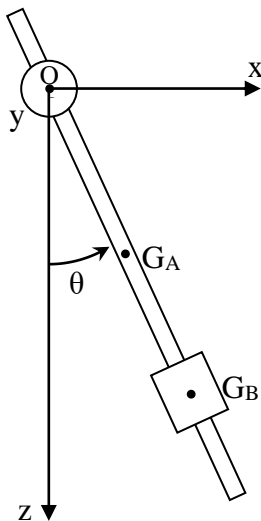
On s'aperçoit que le modèle recoupe le calcul du spectre de manière satisfaisante. On obtient $F_0 = 440,098$ Hz, un résultat proche de celui obtenu précédemment. Le facteur de qualité vaut $Q = 3250$. L'ordre de grandeur est respecté mais l'écart avec la valeur estimée est notable. Deux raisons peuvent expliquer cette différence. Il faut déjà remarquer que le nombre de points autour de la résonance est assez limité : la bande passante du diapason vaut $\Delta F = F_0/Q \approx 0,15$ Hz et une durée de 30 secondes conduit à un pas de calcul de 0,033 Hz. On ne prend donc que 5 points dans cette zone, ce qui n'est pas optimum pour calculer Q . Il faudrait donc envisager un enregistrement plus long, avec un nombre de points plus important pour obtenir un calcul plus précis. La puissance de

l'impact sur le diapason peut aussi intervenir. Le diapason a été frappé moins fort cette fois-ci (cf. la différence d'amplitude initiale entre les deux enregistrements). Or, on a signalé à la fin du paragraphe précédent que cela pouvait avoir des conséquences sur le degré d'amortissement : un impact plus léger avait conduit à obtenir une valeur $m = 0,39$, ce qui correspond à un facteur de qualité $Q \approx 3500$ ce qui est plus en accord avec le résultat obtenu ici.

II.3 Etude de l'amortissement d'un pendule pesant

L'amplitude des oscillations d'un système du deuxième ordre ne diminue pas obligatoirement de manière exponentielle. L'allure de la décroissance dépend du type de processus dissipatif et elle est linéaire dans le cas où on peut supposer que les frottements s'opposent au mouvement avec une norme constante (cf. annexe 2). Une autre propriété remarquable dans ce cas est que le système ne revient pas obligatoirement à la position d'équilibre qu'il adopterait en l'absence de pertes. On propose de mettre en évidence les caractéristiques de ce type de frottements (dits « secs » ou « solides ») avec un pendule mécanique.

II.3.1 Pendule d'étude



On utilise le dispositif Pendulor de chez Microlec. Il est constitué d'une tige cylindrique A (masse $m_A = 42,7$ g, longueur $h_A = 57$ cm, rayon $R_A = 3$ mm) et d'une masse cylindrique creuse B (masse $m_B = 149$ g, hauteur $h_B = 3,2$ cm, rayon intérieur $R_1 = 3$ mm, rayon extérieur $R_2 = 1,4$ cm). La tige traverse un cylindre de plastique blanc solidaire d'un potentiomètre mono tour linéaire de $10\text{ k}\Omega$ dont l'axe monté sur roulements à billes constitue l'axe de rotation du pendule¹¹. Le potentiomètre est censé se situer à mi-course lorsque le pendule est vertical. Un disque de plastique noir emboîté à force sur l'axe du potentiomètre permet d'ajuster manuellement ce point milieu. En branchant une alimentation symétrique $+U/-U$ sur la résistance totale du potentiomètre, on obtient une tension proportionnelle à l'angle θ sur la partie variable, le zéro angulaire (position d'équilibre du pendule) étant ajusté via le disque noir.

Le point O de rotation est normalement situé à $8,5$ cm du haut de la tige A \rightarrow le centre de gravité G_A de la tige est situé à une distance $L_A = OG_A = 20$ cm de l'axe de rotation Oy. On peut ajuster la position de la masse m_B sur la tige A pour régler la position de son centre de gravité G_B à une distance $L_B = OG_B$ donnée.

II.3.2 Moments d'inertie

On peut calculer les moments d'inertie de la tige A et de la masse B du pendule d'étude¹² par rapport à leurs centres de gravités respectifs :

$$I_{GyA} = 42,7 \cdot 10^{-3} \left(\frac{0,003^2}{4} + \frac{0,57^2}{12} \right) \rightarrow \boxed{I_{GyA} = 1,16 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}}$$

$$I_{GyB} = 0,149 \left(\frac{0,003^2}{4} + \frac{0,014^2}{12} + \frac{0,032^2}{12} \right) \rightarrow \boxed{I_{GyB} = 2,03 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}}$$

¹¹ C'est dans ce potentiomètre que sont localisés les frottements solides.

¹² On néglige le moment d'inertie du cylindre qui assure la fixation du pendule sur l'axe de rotation.

Le moment d'inertie de la masse B est particulièrement faible \rightarrow Le calcul montre qu'il est négligeable devant le terme de Huygens $m_B L_B^2$ dès que la distance L_B dépasse 10 cm.

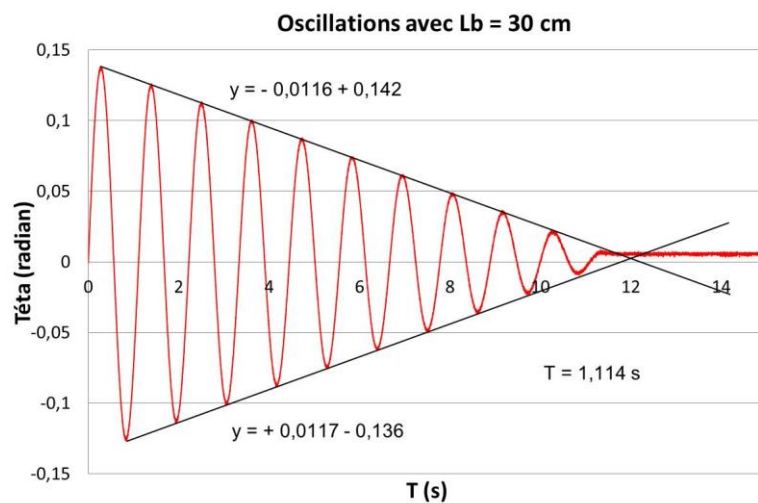
II.3.3 Pré réglages et paramétrage de l'acquisition

Les deux extrémités du potentiomètre peuvent être reliées aux tensions $+U/-U$ d'une source pour amplificateur opérationnel¹³. Le réglage du zéro angulaire peut se faire en plaçant une masse lourde en bas de la tige afin de minimiser l'influence des frottements solides sur la position d'équilibre du pendule. Il suffit alors d'annuler la tension¹⁴ U_P sur le point milieu du potentiomètre en tournant le disque noir. La relation $\theta = f(U_P)$ peut s'obtenir en mesurant la tension U_{P90} lorsque le pendule est à angle droit par rapport à la verticale (on doit avoir environ 7,5 V). Le potentiomètre étant linéaire, on a alors :

$$\theta(\text{radian}) = \frac{\pi}{2} \frac{U_P}{U_{P90}}$$

L'acquisition du signal U_P ne pose pas de problèmes particuliers. Il faut juste choisir un calibre sur la carte d'acquisition adapté à des tensions de l'ordre du Volt car il faut lancer le pendule avec une amplitude initiale faible pour respecter la condition $\sin\theta \approx \theta$. Les paragraphes suivants montrent des résultats obtenus avec Synchronie sur des acquisitions de 20 secondes avec 10 000 points, puis transférées sous Excel (le démarrage des enregistrements a été commandé par un front montant passant par zéro).

II.3.4 Acquisition pour $L_B = 30$ cm



On observe bien une décroissance linéaire des oscillations \rightarrow l'hypothèse d'une prédominance des frottements solides à norme constante semble vérifiée. L'arrêt du pendule à une position $\theta \neq 0$ conforte aussi cette hypothèse. La période expérimentale des pseudos oscillations vaut $T = 1,114$ s. On peut comparer ce résultat au calcul théorique de la période T_0 du pendule en l'absence de frottements si on néglige I_{GyB} :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{TOy}}{(m_A L_A + m_B L_B)g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_A L_A^2 + I_{GyA} + m_B L_B^2}{(m_A L_A + m_B L_B)g}}$$

¹³ Vérifier que les tensions $+U/-U$ sont bien symétriques. Si ce n'est pas le cas, prendre une source symétrique réglable et ajuster manuellement les valeurs $+U/-U$ pour qu'elles soient égales en valeur absolues.

¹⁴ Prise par rapport au zéro de la source $+U/-U$

On obtient alors $T_0 = 1,109$ s pour $L_B = 30$ cm¹⁵. Ce résultat recoupe la valeur expérimentale à moins de 0,5 % près → le pendule soumis à des frottements solides oscille bien à une fréquence qui correspond à celle du pendule libre. On montre en annexe 2 que l'amplitude θ_M diminue d'un facteur $4\theta_A$ entre deux maxima ou deux minima, soit sur une durée T_0 → la valeur absolue de la pente α des droites enveloppant les oscillations vaut par conséquent :

$$|\alpha| = \frac{4}{T_0} \theta_A = \frac{4}{T_0} \frac{C_{FS}}{(m_A L_A + m_B L_B)g}$$

On peut donc déduire le couple de frottement avec les pentes obtenues sur le graphique. On obtient ici :

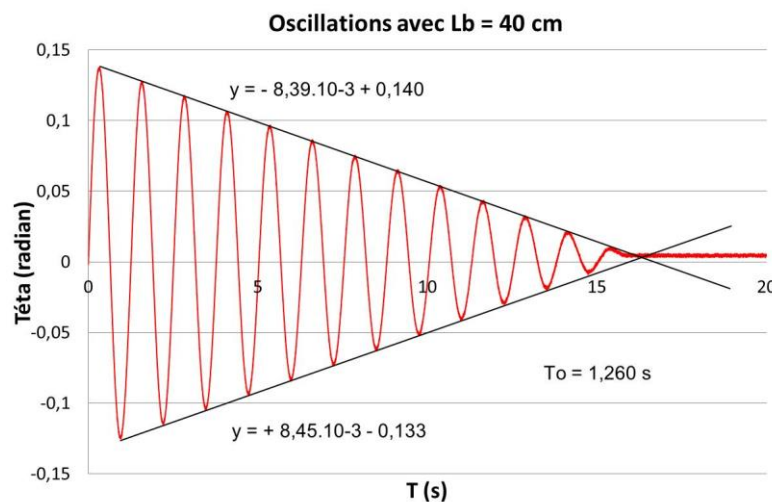
$$C_{FS} = 1,69.10^{-3} \text{ N.m}$$

Ce résultat ne pouvant être comparé avec aucune donnée constructeur, on peut répéter l'expérience avec une position différente de la masse M_B pour voir si on retrouve la même chose.

Remarque :

L'angle d'arrêt a été mesuré et vaut $\theta = 5,65$ mrad, une valeur légèrement supérieure à l'angle θ_A qu'on peut calculer avec la formule donnée en annexe 2 ($\theta_A = 3,2$ mrad). Cet écart est cependant « pardonnable » vu la faible valeur de θ_A et la difficulté à ajuster avec une telle précision le zéro angulaire correspondant à la position d'équilibre du pendule sans frottements.

II.3.5 Acquisition pour $L_B = 40$ cm



La décroissance des oscillations est toujours linéaire mais un peu plus lente (la pente moyenne des deux enveloppes vaut maintenant $8,42.10^{-3}$ rad/s). L'expression de $|\alpha|$ permet de le comprendre puisque L_B , qui a augmenté, y intervient au dénominateur. C'est aussi assez logique car le couple de rappel dû au poids est plus important → le couple de frottement étant supposé constant, il faut plus de temps pour annuler le mouvement du pendule si on le lance dans les mêmes conditions que précédemment (on s'est servi d'une petite cale pour y parvenir au mieux). La période expérimentale des pseudos oscillations vaut maintenant $T = 1,260$ s, une valeur comparable à la période $T_0 = 1,256$ s calculée avec la nouvelle valeur de L_B (recoupement à 0,3 % près) → on vérifie encore une fois que $T = T_0$. On peut calculer de nouveau le couple de frottement compte tenu de la pente moyenne $|\alpha|$. On trouve :

$$C_{FS} = 1,77.10^{-3} \text{ N.m}$$

¹⁵ La prise en compte de I_{GyB} ne change pas grand-chose puisqu'on trouve $T_0 = 1,110$ s avec le calcul complet.

Cette valeur recoupe le résultat précédent à moins de 5 % près. D'autres acquisitions ont confirmé cette valeur de C_{Fs} :

L_B (cm)	0,2	0,25	0,47
Pente (rad/s)	0,0194	0,0151	$6,98 \cdot 10^{-3}$
C_{Fs} (N.m)	$1,75 \cdot 10^{-3}$	$1,76 \cdot 10^{-3}$	$1,82 \cdot 10^{-3}$

II.4 Régime transitoire précédent l'établissement d'un régime forcé

[4], p. 481

Les régimes transitoires ne se limitent pas aux phénomènes de relaxation. On peut étudier le comportement d'un système quand on lui impose un régime forcé non stationnaire. On propose d'étudier le régime transitoire d'un quartz soumis à une excitation sinusoïdale proche de sa fréquence de résonance série. Ce composant est présenté et étudié dans le montage résonance. S'y reporter pour plus d'informations.

II.4.1 Montage

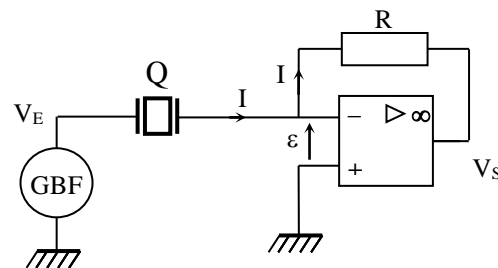
[7], p. 2029

V_E : 0,2 V maximum

Q : quartz d'horlogerie ($f_{rs} \approx 32764$ Hz)

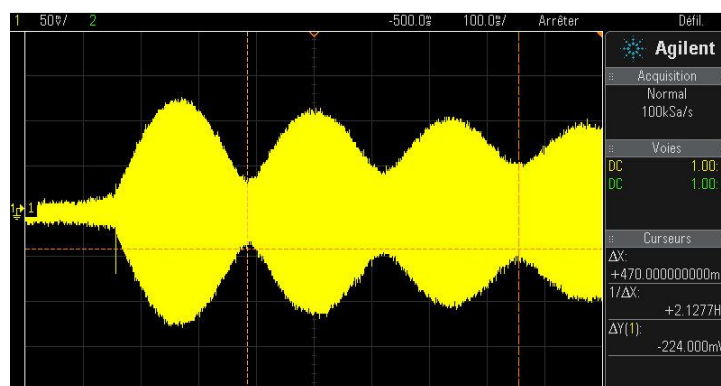
AO : 081

R : 100 k Ω



L'expérience nécessite un générateur de fonction très stable en fréquence (GBF à synthèse numérique de fréquence) sans quoi l'expérience est impossible.

L'amplificateur étant en contre réaction, on a $\varepsilon = 0$ donc $V_- \approx 0$ V \rightarrow La tension qu'impose le GBF se retrouve intégralement sur le quartz. Le courant I passe entièrement dans la résistance R et une simple loi des mailles montre que $V_S = -RI$. La tension V_S est donc une image du courant circulant dans le quartz. On observe cette tension lorsqu'on applique un signal sinusoïdal à une fréquence proche de celle de sa résonance série et on observe l'évolution de V_S avec un oscilloscope numérique en mode Roll. Voici à titre indicatif le résultat d'une acquisition faite avec $f_{GBF} = 32760,0$ Hz :



On reconnaît une figure de battements puisque la réponse globale du quartz correspond à la somme de sa réponse en régime libre à f_{rs} et celle en régime forcée à f_{GBF} avec f_{GBF} très proche de f_{rs} . La durée entre trois maximum ou minimum donne accès à la fréquence f_B des battements avec $f_B = (f_{rs} - f_{GBF})/2$ puisque f_{rs} est supérieure ici à f_{GBF} . On peut donc en déduire f_{rs} et on trouve ici $f_{rs} = 32760,0 + 2 \times 2,128 = 32764,256$ Hz.

Ce qui est remarquable, c'est la reproductibilité des résultats obtenus lorsqu'on utilise une fréquence d'excitation très proche de f_{rs} . On a mesuré f_{rs} avec des fréquences f_{GBF} comprises entre 32760 et 32762 Hz par pas de 0,5 Hz, puis entre 32766 et 32768 Hz avec le même pas. Les 10 mesures ont donné une fréquence moyenne $f_{rs} = 32764,252 \text{ Hz}$ ¹⁶ avec un écart type de 0,012 Hz ! On peut donc gagner un digit sur la détermination de f_{rs} par rapport à l'étude directe de la résonance¹⁷. Cela peut être intéressant pour caler une modélisation de la courbe de réponse du quartz autour de f_{rs} (cf. montage résonance).

III TEMPS DE COMMUTATION D'UN COMPOSANT

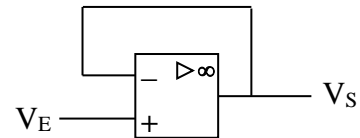
Un composant électronique ne bascule jamais instantanément d'un état à un autre. On peut donc étudier un régime transitoire de commutation. On propose de mesurer la vitesse de commutation d'un amplificateur opérationnel 741, de le comparer à un 081 ou 071, et de confronter les résultats obtenus aux Slew Rate donnés par le constructeur (le Slew Rate est la vitesse maximum de variation de la tension de sortie dV_S/dt).

III.1 Mesure du Slew Rate

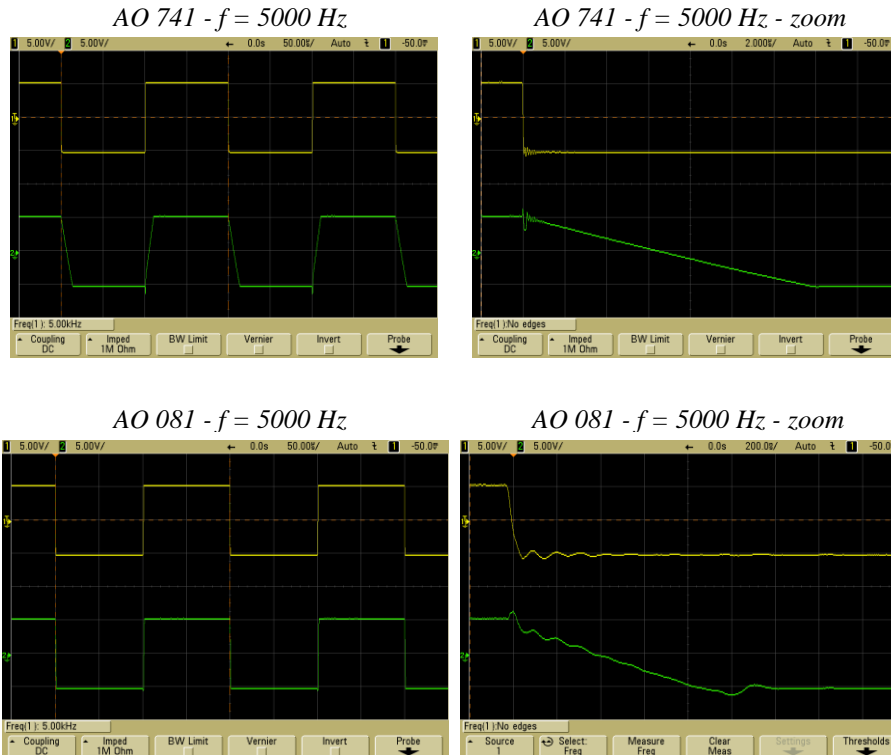
Elle peut s'effectuer à l'aide d'un montage suiveur :

Ampli. Op. : 0741 puis 081 ou 071

V_E : signal carré 5 000 Hz d'amplitude assez forte



Il suffit de visualiser V_E et V_S avec un oscilloscope numérique pour observer le régime transitoire de l'amplificateur. On peut comparer la différence de comportement entre un AO 741 et un 081 :



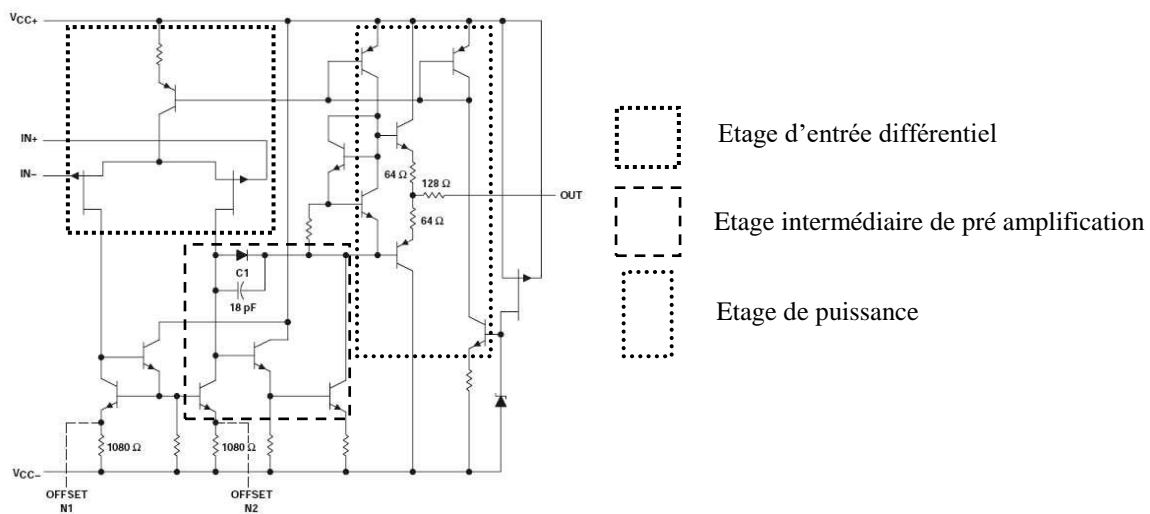
¹⁶ Attention, on ne peut pas garantir que cette valeur soit exacte puisqu'une telle précision dépasse celle annoncée pour le GBF. Elle n'a de sens que rapportée au GBF utilisé.

¹⁷ Le GBF utilisé donne la fréquence à 0,1 Hz près quand on travaille autour de 32 760 Hz. L'expérience de résonance a été effectuée et on observait un maximum de V_S pour une fréquence comprise entre 32764,1 et 32764,3 Hz.

Le signal de basculement de l'AO 741 est une droite si on excepte le début (le régime transitoire du GBF influe alors sur la réponse de l'AO). On peut utiliser les curseurs de l'oscilloscope pour mesurer la pente de cette droite et vérifier rapidement qu'elle ne dépend pas de la fréquence du signal et de son amplitude. Le basculement est nettement plus rapide avec un 081 ou un 71 et il faut dilater beaucoup plus l'échelle des temps pour voir la commutation. La transition ressemble un peu moins à une droite mais on est sur des durées très courtes donc le régime transitoire du GBF est plus gênant¹⁸ (le comportement des AO est aussi plus complexe). On peut estimer au mieux la pente du régime de basculement pour ces deux composants et comparer les résultats aux données fournies par le constructeur : le Slew Rate vaut typiquement $S = 0,5 \text{ V}/\mu\text{s}$ pour un 741 et $13 \text{ V}/\mu\text{s}$ pour un 081. Ces valeurs sont indépendantes du gain du montage considéré tant que l'on reste dans le produit Gain×Bande passante du circuit.

III.2 Explication

Le Slew Rate est lié à l'architecture interne du composant. Le schéma suivant est celui d'un AO 071 :



Le système est complexe mais il faut surtout retenir que la structure interne d'un amplificateur opérationnels s'articule autour de trois étages en cascade : un étage d'entrée différentiel (cf. [1], p. 126), un étage intermédiaire de pré amplification de grand gain et un étage de puissance. Comme chaque étage présente approximativement une réponse en fréquence d'ordre 1, la transmittance globale du système peut se mettre sous la forme :

$$A(j\omega) = \frac{A}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_3}\right)}$$

L'amplificateur opérationnel en boucle ouverte a donc un comportement de filtre passe bas avec un gain statique A_0 énorme ($2 \cdot 10^5$ typiquement) et un déphasage pouvant aller au-delà de -180° en hautes fréquences. Ces caractéristiques font qu'il peut présenter des risques d'instabilités en boucle fermée (cf. montage sur les systèmes bouclés). Si on a une contre réaction avec une chaîne de retour de gain B (supposé indépendant de la fréquence ici), la fonction de transfert en boucle fermée $H(j\omega)$, notée FTBF, vaut :

$$H(j\omega) = \frac{A}{1 + A(j\omega)B} = \frac{A(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

¹⁸ On a d'ailleurs intérêt à tester plusieurs GBF pour prendre celui qui donne un signal carré le plus propre possible.

$G(j\omega) = A(j\omega).B$ désigne la fonction de transfert en boucle ouverte, notée FTBO, du système. Or, la FTBF n'est stable que si la FTBO à la pulsation critique ω_π pour laquelle on a un déphasage de π vérifie la condition $|G(j\omega_\pi)| < 1$. Il faut donc avoir $|A(j\omega_\pi)| < 1/B$ à la pulsation critique, ce qui est rarement le cas à cause du gain statique énorme du composant. Pour remédier à ce problème, les constructeurs réalisent une compensation interne (les automaticiens parlent de correction) en insérant une capacité dans l'étage préamplificateur (la capacité C_1 de 18 pF sur le schéma). Son rôle consiste à faire chuter le gain en haute fréquence pour assurer la stabilité du système bouclé. Cela limite en revanche les performances dynamiques car C_1 doit se charger/décharger à courant constant lors des changements de consignes. C'est ce phénomène qui donne l'apparence de droites au signal V_S dans l'expérience réalisée et qu'on appelle le Slew Rate. La différence de rapidité entre les 741 et les 071/081 est simplement liée à l'importance de la compensation : elle est plus forte sur le 741 que sur les 071/081 \rightarrow le 741 est plus « lent » que les 071/081, mais il est plus stable (les montages réalisés avec des 071/081 présentent plus facilement des oscillations parasites hautes fréquences).

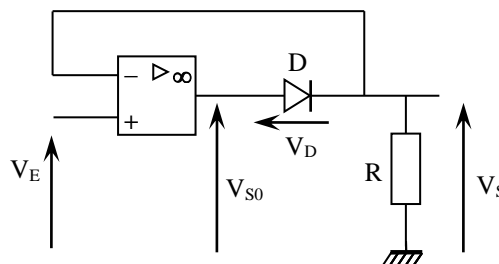
III.3 Application au montage redresseur sans seuil

[5], p. 163

III.3.1 Introduction

Le redressement mono alternance avec une diode est un montage classique mais il s'accompagne d'une baisse du signal due à la tension de seuil de la diode qui peut être gênant avec les signaux de faible amplitude. On peut s'en affranchir en insérant la diode dans le circuit de rétroaction d'un AO (mais cela ne fonctionne correctement qu'à basse fréquence).

Principe du montage :



Lorsque la diode est bloquée, on a $V_S = R i = R(i^- + i_{inv. diode}) \approx 0$ V

La diode commence à conduire dès que $V_D > 0,6$ V (tension de seuil de la diode). Comme on a $V_S \approx 0$ V au départ, la diode commence à conduire lorsque $V_{S0} = 0,6$ V.

Si on néglige l'impédance de sortie de l'A.O., on a $V_{S0} = A_0(V_+ - V_-) = A_0(V_E - 0)$ car on a au départ $V_- = V_S = 0$ V \rightarrow Le début de conduction aura lieu dès que $V_E > 0,6/A_0 \rightarrow$ **le seuil de conduction est divisé par le gain en boucle ouverte de l'amplificateur opérationnel**. Comme le gain A_0 est énorme, le seuil de conduction est donc quasiment nul.

Une fois en régime de conduction, la contre réaction est effective \rightarrow l'A.O. est en régime linéaire ($\varepsilon = 0$ V) $\rightarrow V_S = V_- = V_+ = V_E$: le montage se comporte en suiveur et ce jusqu'à ce qu'on revienne à une valeur nulle ou on recommence depuis le point de départ.

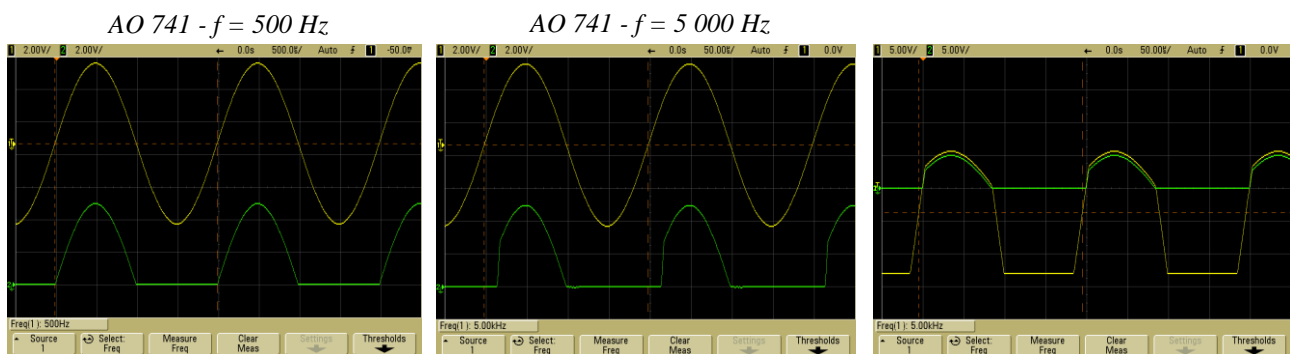
Le montage permet donc de réaliser un redressement « sans seuil » idéal. Il y a cependant un problème lors du retour à une alternance positive dû au Slew Rate de l'ampli. Op.

Lors des alternances négatives $V_{S0} = G_0(V_+ - V_-) = G_0(V_E - 0)$ $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{On a alors } V_E < 0 \text{ avec } G_0 \text{ très grand} \end{array}} \right\} \rightarrow V_{S0} = -V_{SAT}$

V_{S0} vaut donc $-V_{SAT}$ quand V_E est négatif et il doit suivre V_S à 0,6 V près lors des alternances positives \rightarrow la sortie de l'amplificateur doit passer « instantanément » de $-V_{SAT}$ à $\approx +0,6$ V lorsque V_E devient positif ce qui n'est pas possible à cause du Slew Rate. Il y a par conséquent un régime transitoire au début des alternances positives qui limite le comportement en fréquence du montage.

III.3.2 Manipulation

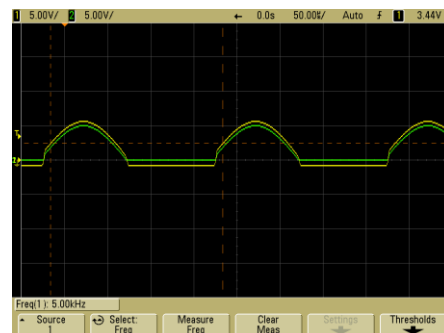
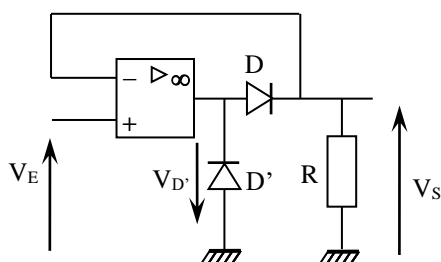
On peut réaliser le montage précédent avec un 741 et une diode au Silicium type 1N 4148. La fonction de redressement sans seuil doit fonctionner correctement à basse fréquence (figure de gauche¹⁹) mais les performances se dégradent progressivement quand f augmente. On observe un régime transitoire de plus en plus important au début des alternances positives : V_S ne suit plus tout à fait le signal V_E au début de la reprise de conduction alors qu'on n'a pas ce problème à la fin des alternances positives (figure du centre). On peut comparer V_{S0} à V_S pour comprendre la déformation du signal au début des alternances positives (figure de droite) :



On voit la sortie passer de $-V_{SAT}$ à $+0,6$ V au début des alternances positives, une transition qui prend du temps à cause du Slew Rate de l'AO²⁰.

III.3.3 Amélioration des performances

On peut atténuer le problème en réalisant le montage suivant (cf. [5], p. 167) :



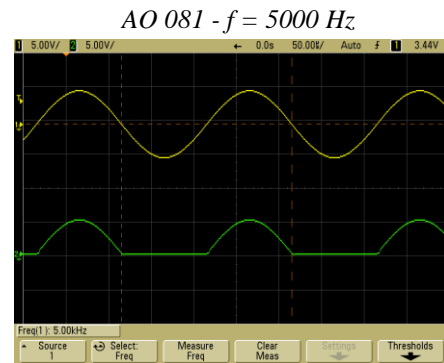
La nouvelle diode D' (diode 1N 4148 par exemple) est bloquée lors des alternances positives. Elle n'a donc aucune influence dans ce cas-là. Elle est en revanche polarisée en direct lors des alternances négatives et limite alors la valeur de V_{S0} à sa tension de seuil \rightarrow On améliore ainsi les performances en fréquence du montage puisque l'AO n'a plus besoin de repasser de $-V_{sat}$ à $+0,6$ V

¹⁹ Les signaux V_E et V_S , observés sur le même calibre, ont été décalés sinon ils se superposeraient parfaitement lors des alternances positives, au régime transitoire du début de conduction près.

²⁰ On note aussi un léger décalage entre les deux signaux du au seuil de la diode si on observe les deux tensions avec le même calibre et si on met le niveau du zéro au même endroit.

au début des alternances positives (le saut est limité à $\approx 2 \times 0,6$ V). Le problème étant lié au Slew Rate de l'AO, on peut encore améliorer les performances en prenant un amplificateur plus rapide :

La reprise de conduction est améliorée, mais le phénomène existe toujours → Ce montage ne fonctionne correctement que pour des fréquences inférieures à la dizaine de kHz.



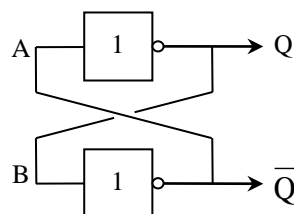
IV SUPPRESSION DU REGIME TRANSITOIRE D'UN INTERRUPTEUR

IV.1 Introduction

Lorsqu'on ouvre ou on ferme un interrupteur mécanique, on a toujours un régime transitoire bref au cours duquel le signal présente des « rebonds » entre la valeur initiale et finale. Cela peut être gênant si on doit par exemple commander des processus logiques. Dans ce cas, on utilise des dispositifs anti-rebond comme la bascule RS. C'est un circuit à logique séquentielle²¹ : le signal de sortie dépend non seulement de l'état présent aux entrées mais aussi de l'état précédent de la sortie → à une combinaison des variables d'entrées peut correspondre plusieurs états possibles en sortie en fonction de l'histoire antérieure du circuit. Cette logique s'oppose à la logique combinatoire²² dont les résultats sont seulement fonction des données actuellement traitées → la logique séquentielle utilise la notion de mémoire de stockage alors que la logique combinatoire n'en a pas. La bascule RS est aussi souvent utilisée pour commander la mise en marche et l'arrêt d'un dispositif par des actions fugitives (boutons poussoirs, touches d'un clavier). La mémoire de la bascule permet en effet de maintenir la marche ou l'arrêt d'un système alors qu'il n'y a plus de boutons actionnés, ou de signaux de commande actifs.

IV.2 Principe des Basculs – Effet mémoire

Une bascule a pour rôle de mémoriser une information élémentaire²³. La sortie d'une bascule devant dépendre de l'état actuel des entrées et de l'état précédent de la sortie, il y a nécessité de réinjecter la sortie à l'entrée du système → on réalise les bascules en retro actionnant des portes logiques. Cette structure permet d'obtenir des états stables, prélude à l'obtention d'un effet de mémoire. Pour le comprendre, on peut regarder l'exemple suivant réalisé à partir de portes logiques inverseuses (portes NON) :



Supposons qu'on impose temporairement un état logique 1 en Q :

$$Q = 1 \rightarrow B = 1 \rightarrow \bar{Q} = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow Q = 1$$

²¹ Les bascules constituent la base de cette logique.

²² Basée sur les portes logiques.

²³ C'est une mémoire à 1 bit, l'élément de base des mémoires d'ordinateurs

Supposons de même qu'on impose temporairement un état logique 0 en Q :

$$Q = 0 \rightarrow B = 0 \rightarrow \bar{Q} = 1 \rightarrow A = 1 \rightarrow Q = 0$$

Ce système permet donc de conserver durablement deux états temporaires et leur complémentaires (on parle de verrou) :

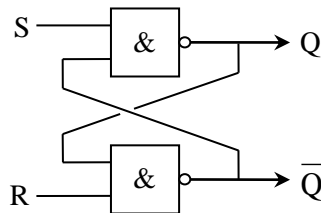
$$\text{Etat « 0 » : } Q = 0 ; \bar{Q} = 1$$

$$\text{Etat « 1 » : } Q = 1 ; \bar{Q} = 0$$

C'est le bouclage qui réalise la fonction de mémorisation propre à la logique séquentielle. On voit aussi qu'on ne peut imposer simultanément une même valeur à Q et \bar{Q} . Ce type de circuit permettant de conserver uniquement deux états stables, on l'appelle encore circuit bistable. Il faut voir maintenant comment on peut changer d'état.

IV.3 La Bascule RS

C'est le même montage que précédemment mais avec deux entrées supplémentaires : une entrée de mémorisation S (SET), et une entrée d'effacement de la mémoire R (RESET) :



Les portes NAND réalisant en sortie la fonction logique $\overline{E_1 \times E_2}$, on peut vérifier que ce circuit possède encore 2 états stables (bascule bistable).

Etat $R = S = Q = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} R = Q = 1 \rightarrow \bar{Q} = 0 \\ S = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = 1 \\ \text{or } R = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \bar{Q} = 0$$

Cet état est stable : Q et \bar{Q} restent inchangés et complémentaires

Etat $R = S = \bar{Q} = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} S = \bar{Q} = 1 \rightarrow Q = 0 \\ S = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{Q} = 1 \\ \text{or } S = 1 \end{array} \right\} \rightarrow Q = 0$$

Cet état est stable : Q et \bar{Q} restent inchangés et complémentaires

On pourrait vérifier que l'application simultanée de $R = S = 0$ est interdite car elle conduit à deux sorties qui ne sont plus complémentaires. On peut examiner maintenant la conséquence d'une modification, même temporaire, de l'état logique des entrées S et R.

Action sur S :

- On part de l'état $R = S = Q = 1 \rightarrow \bar{Q} = 0$

$$\left. \begin{array}{l} S \text{ mis à } 0 \\ \bar{Q} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = 1 \\ \text{or } R = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{Q} = 0 \\ S = 0 \text{ ou } 1 \end{array} \right\} \rightarrow Q = 1$$

→ Une mise à zéro de S, même temporaire, conserve $Q = 1$ et $\bar{Q} = 0$

- On part de l'état $R = S = \bar{Q} = 1 \rightarrow Q = 0$

$$\left. \begin{array}{l} S \text{ mis à } 0 \\ \bar{Q} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = 1 \\ \text{or } R = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{Q} = 0 \\ S = 0 \text{ ou } 1 \end{array} \right\} \rightarrow Q = 1$$

→ Une mise à zéro de S, même temporaire, met Q à 1 et \bar{Q} à 0 : les états ont été inversés et le restent par la suite.

En conclusion, **une mise à 0 de S, même temporaire, impose $Q = 1$ et $\bar{Q} = 0$ et ce quel que soit l'état précédent des sorties Q et \bar{Q} .**

Action sur R :

- On part de l'état $R = S = Q = 1 \rightarrow \bar{Q} = 0$

$$\left. \begin{array}{l} R \text{ mis à } 0 \\ Q = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{Q} = 1 \\ \text{or } S = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = 0 \\ R = 0 \text{ ou } 1 \end{array} \right\} \rightarrow \bar{Q} = 1$$

→ Une mise à zéro de R, même temporaire, met Q à 0 et \bar{Q} à 1 : les états ont été inversés et le restent par la suite.

- On part de l'état $R = S = \bar{Q} = 1 \rightarrow Q = 0$

$$\left. \begin{array}{l} R \text{ mis à } 0 \\ Q = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{Q} = 1 \\ \text{or } S = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = 0 \\ R = 0 \text{ ou } 1 \end{array} \right\} \rightarrow \bar{Q} = 1$$

→ Une mise à zéro de R, même temporaire, conserve $Q = 0$ et $\bar{Q} = 1$

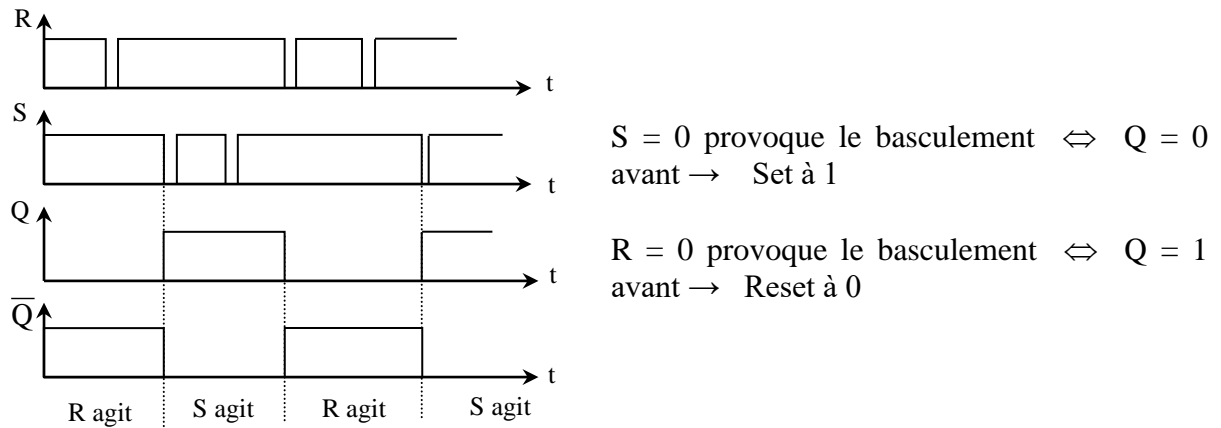
En conclusion, **une mise à 0 de R, même temporaire, impose $Q = 0$ et $\bar{Q} = 1$ et ce quel que soit l'état précédent des sorties Q et \bar{Q} .**

Table de vérité :

Elle se déduit de l'étude précédente (le cas $R = S = 0$ n'est pas représenté car il correspond à une action interdite) :

S	R	Q	\bar{Q}	
1	1	Q_n	\bar{Q}_n	Inchangé
0	1	1	0	Set (Q à « 1 »)
1	0	0	1	Reset (Q à « 0 »)

On voit que cette bascule est commandée par des zéros. L'application d'un 1 sur les entrées n'entraîne aucun changement. L'application d'un zéro sur S fait basculer la sortie Q à 1 si elle n'y était pas déjà. L'application d'un zéro sur R fait basculer la sortie Q à 0 si elle n'y était pas déjà. Une telle bascule est mieux définie par le chronogramme ci-dessous :

**Remarque :**

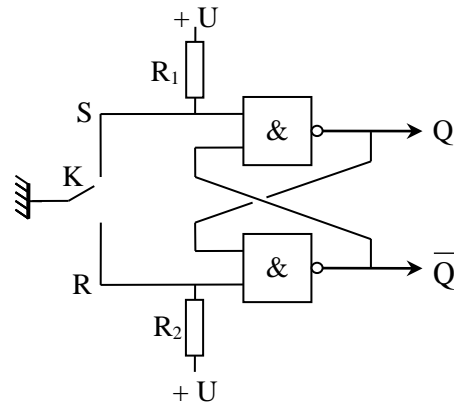
Une bascule du même genre peut être réalisée avec des portes NOR (opération logique $\overline{E_1 + E_2}$). Elle a un comportement similaire mais est alors commandée par des 1.

IV.4 Manipulation

[1], p. 256 ; [3], p. 47.

$R_1, R_2 : 1 \text{ k}\Omega$

Pour les portes NAND, on peut prendre un circuit CMOS 40011. Il comporte 4 portes NAND et s'alimente entre 0 V et une tension U comprise entre 5 et 15 V. Les différents signaux peuvent s'observer avec un oscilloscope numérique en mode Roll.



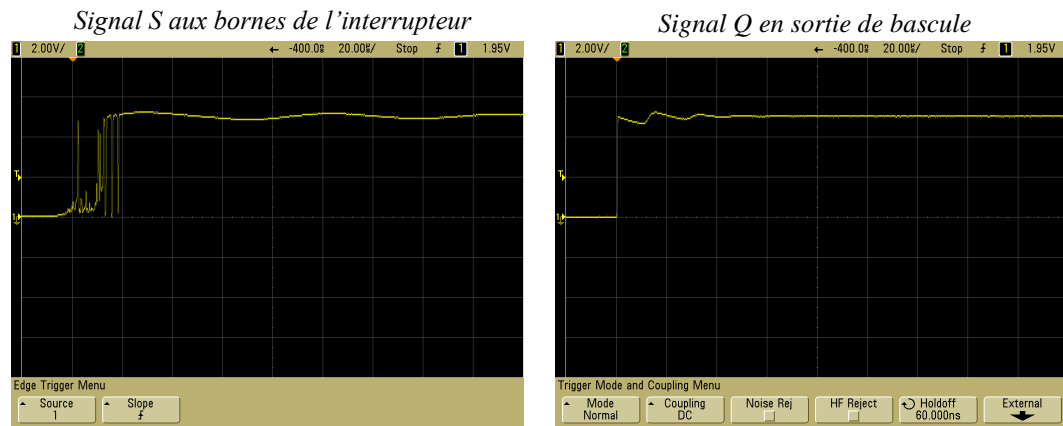
Lorsque l'interrupteur K est relié à S , il lui impose une tension nulle, donc un zéro logique. Lorsque S n'est pas relié à la masse par K , il ne circule aucun courant dans la résistance R_1 (l'impédance d'entrée d'une porte logique est très grande). Il n'y a donc pas de chute de potentiel à ses bornes et S est à la tension $+U$, donc à un 1 logique. L'entrée R fonctionne de la même façon.

Etude de la bascule :

On peut vérifier la table de vérité de la bascule à l'oscilloscope et mettre en évidence sa commande par des zéros. La mise à zéro de S met Q à 1 et S n'a plus aucun effet par la suite. La remise à zéro de Q doit se faire par R .

Application : interrupteur anti-rebond :

On peut comparer le régime transitoire de commutation des signaux S et Q en dilatant l'échelle des temps et en passant l'oscilloscope en mode Single. L'enregistrement de la transition $0 \rightarrow 1$ sur S présente alors de nombreux rebonds (figure de gauche). On peut enregistrer la transition $0 \rightarrow 1$ sur Q en partant d'un état initial où $R = S = 1$ et $Q = 0$ (on force Q à zéro en faisant préalablement $R = 0$). Il suffit ensuite de fermer l'interrupteur sur $S \rightarrow S$ passe à 0 $\rightarrow Q$ passe à 1. On n'observe plus de rebonds cette fois - ci car S n'a plus d'influence sur Q après le premier passage à zéro (Q ne repasse à zéro que si on fait $R = 0$) ; on met à profit l'effet mémoire de la bascule.



Le signal Q présente encore une petite instabilité transitoire résiduelle mais qui n'est pas gênante si Q doit commander des systèmes logiques car elle est largement dans les normes d'immunité au bruit de ces circuits²⁴.

Bibliographie :

- [1] : Duffait ; Expériences d'électronique a l'Agrégation
- [2] : BUP n° 795, cahier n°2
- [3] : Quaranta III
- [4] : Quaranta IV : Electricité et Applications
- [5] : DattéDellaMaestra : Amplificateurs Opérationnels
- [6] : Sextant : Optique Expérimentale
- [7] : BUP 799, p. 2023 et suivantes

²⁴ La transition $0 \leftrightarrow 1$ a lieu à $U_{\text{alim}}/2$ pour les circuits CMOS.

ANNEXE 1 : REPONSE IMPULSIONNELLE D'UN FILTRE

Un filtre analogique est un système de transmission causal, linéaire et invariant dans le temps (système LIT). On précise rapidement ces 3 propriétés.

Causalité :

Un système est causal si la conséquence d'un événement ne peut précéder l'événement lui-même. Pour les filtres, l'événement est le signal d'entrée $e(t)$ et la conséquence est la réponses(t) du filtre. La propriété de causalité apparaît alors comme évidente.

Linéarité :

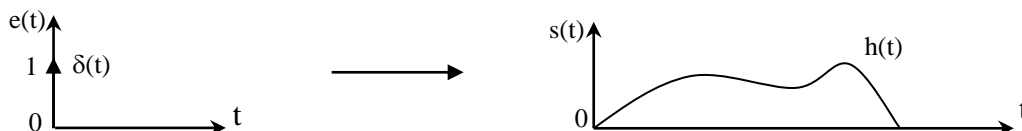
Soit $s_1(t)$ la réponse à une excitation $e_1(t)$ et $s_2(t)$ la réponse à une excitation $e_2(t)$. Un système de transmission est linéaire si l'excitation $a_1 e_1(t) + a_2 e_2(t)$ a pour réponse $a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$. C'est le principe de superposition. Un tel système s'analyse assez facilement puisqu'il suffit de décomposer le signal d'entrée en signaux élémentaires et d'étudier la réponse à chaque signal élémentaire. La réponse globale est alors la somme des réponses individuelles.

Invariance dans le temps :

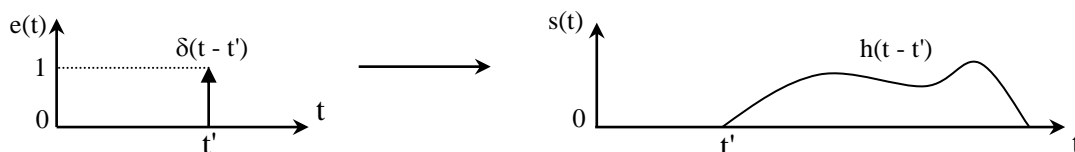
Un système est invariant dans le temps si son comportement ne change pas au cours du temps \rightarrow si $e(t)$ a pour réponse $s(t)$, $e(t - \tau)$ a pour réponse $s(t - \tau)$.

I REPONSE IMPULSIONNELLE D'UN FILTRE

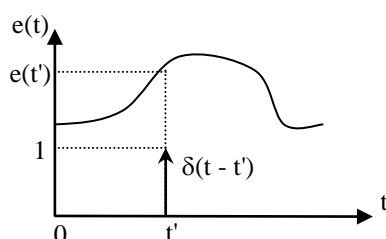
Une impulsion brève (modélisable par un pic de Dirac) injectée à l'entrée d'un système de transmission LIT ne donne jamais une impulsion infiniment brève en sortie mais un signal de durée finie. Cette réponse est appelée réponse impulsionnelle (ou percussionnelle) du filtre et est notée $h(t)$:



Si l'impulsion a lieu à un temps t' , la réponse du système se déduit de la précédente grâce au principe d'invariance dans le temps :



Un signal quelconque peut se décrire comme une suite continue d'impulsions, l'impulsion au temps t' ayant une amplitude $e(t')$:



\rightarrow la réponse du système en fonction du temps t à l'impulsion $e(t') \times \delta(t - t')$ est par conséquent :

$$s'(t) = e(t') \times h(t - t')$$

Le système étant linéaire, on peut lui appliquer le principe de superposition donc la sortie $s(t)$ est la somme des réponses dues aux différentes impulsions :

$$s(t) = \int_0^{+\infty} s'(t'). dt' = \int_0^{+\infty} e(t') \times h(t - t'). dt'$$

Le système étant causal, on peut étendre l'intégration à $-\infty$. On a donc :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') \times h(t - t'). dt' = [e * h](t)$$

L'intégrale obtenue correspond au produit de convolution²⁵ du signal d'entrée par la réponse impulsionnelle \rightarrow **Les filtres LIT, sont des systèmes de convolution.** On va voir quelle est la conséquence du résultat obtenu sur l'expression de la fonction de transfert d'un filtre.

II FONCTION DE TRANSFERT D'UN FILTRE

Le spectre fréquentiel d'un signal $s(t)$ correspond à sa transformée de Fourier, d'où :

$$S(f) = TF[s(t)] = TF\{[e * h](t)\}$$

Or, la TF d'un produit de convolution correspond au produit des TF de chaque fonction donc :

$$S(f) = TF[e(t)] \times TF[h(t)] = E(f) \times TF[h(t)] \quad \text{d'où :}$$

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = TF[h(t)]$$

La fonction de transfert d'un filtre correspond donc à la TF de sa réponse impulsionnelle.

III ESTIMATION DE LA PHASE

La fonction de transfert $H(f)$ correspondant à la TF de la réponse impulsionnelle, il faut normalement calculer l'intégrale suivante pour chaque valeur de la pulsation :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Avec, par exemple pour le filtre RC passe-bas (avec $u(t)$ l'échelon de Heaviside) :

$$h(t) = \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) u(t)$$

III.1 Signal réellement utilisé

L'acquisition de $h(t)$ n'est pas continue. Le signal est échantillonné à la période $T_{éch}$ sur une durée totale $T_{tot} = N.T_{éch}$. On a donc une séquence de N échantillons $[h(t_k)]$ avec $t_k = k.T_{éch}$ et $k = 0, 1, \dots, (N - 1)$. La manière la plus simple d'estimer l'intégrale précédente consiste alors à calculer la somme suivante pour chaque valeur de f :

²⁵ Cf. montage « Signal et bruit », annexe 1 pour plus d'informations sur le produit de convolution.

$$\hat{H}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} [h(kT_{éch}) \exp(-j2\pi f k T_{éch})] \times T_{éch}$$

III.2 Calcul de la TF

Il est évidemment impossible de faire cette sommation pour toutes les pulsations. L'algorithme FFT employé dans la plupart des logiciels réalise cette opération pour des fréquences bien particulières²⁶ qui sont des multiples de $1/T_{tot}$, soit pour des fréquences $f_n = n/T_{tot} = n/(NT_{éch})$. Il calcule donc²⁷ :

$$\hat{H}(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[h(kT_{éch}) \exp\left(-j \frac{2\pi n}{NT_{éch}} k T_{éch}\right) \right] \times T_{éch}$$

Il réalise ainsi une transformée de Fourier discrète (TFD) du signal.

III.3 Position des instants d'échantillonnage

Ce problème est délicat à traiter. Nous n'en donnons qu'une explication succincte (cf. [2] pour plus de précisions).

Echantillonner $h(t)$ à la période $T_{éch}$ revient à définir N sous intervalles dans lesquels on prélève un échantillon. L'estimation de la phase est alors très sensible à l'endroit où on prend la mesure. La meilleure solution pour éviter des surestimations ou sous-estimations de $\hat{H}(j\omega_n)$ consiste à prélever les échantillons au milieu des sous intervalles²⁸, c'est à dire aux instants $t_k = (k + 1/2)T_{éch} \rightarrow$ Il faudrait mieux calculer :

$$\begin{aligned} {}^0H(f_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[h((k + 1/2)T_{éch}) \exp\left(-j \frac{2\pi n}{NT_{éch}} (k + 1/2)T_{éch}\right) \right] \times T_{éch} \\ {}^0H(f_n) &= \exp\left(-j \frac{\pi n T_{éch}}{NT_{éch}}\right) \times \sum_{k=0}^{N-1} \left[h((k + 1/2)T_{éch}) \exp\left(-j \frac{2\pi n}{NT_{éch}} k T_{éch}\right) \right] \times T_{éch} \end{aligned}$$

\rightarrow Si le logiciel calculait la FFT en prenant les mesures au milieu des intervalles, on pourrait estimer au mieux la phase du signal à la fréquence $f_n = n/(NT_{éch})$, en multipliant le résultat de sa FFT à cette pulsation par le terme $\exp\left(-j \frac{\pi n T_{éch}}{NT_{éch}}\right) = \exp(-j\pi f_n T_{éch})$. On ne peut cependant pas contrôler le moment où sont pris les échantillons mais ça n'est pas très gênant avec un circuit RC car un décalage temporel sur une exponentielle décroissante ne change pas grand-chose au résultat (la courbe apparaît toujours avec la même forme d'évolution temporelle, qu'on démarre à $t = 0$ ou à $t + \Delta t$) \rightarrow le terme correctif proposé donne des résultats satisfaisants avec ce circuit.

Bibliographie :

- [1] : Francis Cottet : Traitement du signal
- [2] : J. M. Lemasquierier : Calcul numérique de la TF.
- Bernard Picinbono : Théorie des signaux et des systèmes

²⁶ Il en résulte alors un gain énorme en temps de calcul si le nombre d'échantillons est une puissance de 2.

²⁷ On peut évidemment supprimer les $T_{éch}$ dans l'exponentielle mais on les garde pour conserver une meilleure lisibilité du terme correctif que l'on va obtenir par la suite.

²⁸ On l'imagine aisément sur le cas d'une décharge exponentielle : les erreurs se compensent lorsque qu'on calcule $h(t_k) \times T_{éch}$ avec des valeurs de h prises au milieu des sous intervalles alors que la prise de mesure au début des sous intervalles conduit à une surestimation systématique du produit.

ANNEXE 2 : AMORTISSEMENT D'UN PENDULE PESANT

I ETUDE THEORIQUE

I.1 Pendule simple

L'approche la plus simple d'un pendule consiste à le considérer comme un point matériel G de masse m relié à un point fixe O par un fil sans masse de longueur L.

On considère que le pendule oscille dans un plan vertical Oxz avec Oz l'axe vertical descendant, le référentiel Oxyz étant supposé Galiléen. L'équation différentielle du mouvement peut s'obtenir par une approche énergétique ou à l'aide du théorème du moment cinétique. Si on utilise la deuxième méthode, on a, pour un solide en rotation autour d'un axe fixe :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \Sigma \vec{M}_O$$

$$\vec{M}_P = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = -mgL \sin\theta \vec{e}_y \text{ ou } \vec{e}_y \text{ est le vecteur unitaire sur Oy}$$

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v} = L\vec{e}_r \wedge mL\dot{\theta}\vec{e}_\theta = mL^2\dot{\theta}\vec{e}_y = I_{Oy}\dot{\theta}\vec{e}_y$$

D'où, en projetant sur Oy : $I_{Oy}\ddot{\theta} = -mgL \sin\theta$

Si les oscillations sont de faible amplitude, on peut remplacer $\sin\theta$ par sa valeur θ en radians. L'équation différentielle se simplifie et devient :

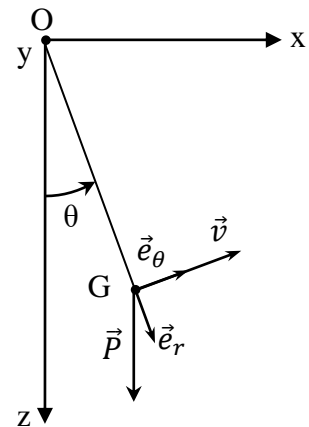
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgL}{I_{Oy}}\theta = \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{mgL}{I_{Oy}}}$$

La solution revient à chercher une fonction du temps qui, dérivée deux fois, restitue à un facteur près la même fonction → La solution $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ répond à cette condition et elle devient $\theta = \theta_0 \cos\omega_0 t$ si $\theta = \theta_0$ et $d\theta/dt = 0$ à $t = 0$. On peut finir en explicitant le moment d'inertie de la masse ponctuelle. On a $I_{Oy} = mL^2$ d'où, au final :

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{L}} \quad \rightarrow \quad \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}}$$

I.2 Pendule pesant

Le pendule d'étude n'est évidemment pas ponctuel. Il est constitué d'une tige cylindrique A sur laquelle coulisse une masse cylindrique creuse B. Si on connaît la position du centre de gravité des deux entités, on peut calculer leur moment d'inertie par rapport à l'axe coaxial à Oy passant par ces centres, et calculer le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à Oy en utilisant le théorème de Huygens.



I.2.1 Moments d'inertie d'un cylindre

Les calculs par rapports au centre de gravité sont classiques et se trouvent dans les livres de classes préparatoires (Perez de mécanique par exemple). Pour un cylindre plein de hauteur h , de rayon R et d'axe principal Oz , on a :

$$I_{Gz} = m \frac{R^2}{2} \quad \text{et} \quad I_{Gx} = I_{Gy} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

Si le cylindre est creux (rayon intérieur R_1 , rayon extérieur R_2) :

$$I_{Gz} = m \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} \quad \text{et} \quad I_{Gx} = I_{Gy} = m \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

Les moments d'inertie qui nous intéressent ici sont ceux par rapport à l'axe Gy .

I.2.2 Moment d'inertie du pendule pesant

Soit L_A la distance entre le centre de gravité G_A de la tige cylindrique A et l'axe de rotation Oy et L_B la distance entre le centre de gravité G_B de la masse cylindrique et Oy . Le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation Oy du pendule est, compte tenu du théorème de Huygens :

$$I_{TOy} = m_A L_A^2 + I_{GyA} + m_B L_B^2 + I_{GyB}$$

I.2.3 Equation différentielle du mouvement

Elle s'obtient de la même manière que précédemment, avec la somme des moments par rapport à Oy des forces de pesanteur appliquées aux centres de gravités G_A et G_B des deux éléments du pendule pesant. On obtient alors, pour des oscillations de faible amplitude :

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_A L_A + m_B L_B)g}{I_{TOy}} \theta = \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{(m_A L_A + m_B L_B)g}{I_{TOy}}$$

La solution est encore de la forme $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Seule l'expression de ω_0 est modifiée.

I.3 Oscillations avec frottement fluide

Les oscillations d'un pendule finissent toujours par s'arrêter. Il faut donc prendre en compte les phénomènes dissipatifs. Les frottements fluides dépendent par nature de la vitesse et ils sont proportionnels à v pour les écoulements à faible nombre de Reynolds \rightarrow Avec cette hypothèse, le couple de freinage est du type $-C_{Fv} \dot{\theta} \vec{e}_y$. L'équation différentielle du mouvement devient alors, pour de petites oscillations :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = -\frac{C_{Fv}}{I_{TOy}} \dot{\theta} \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{C_{Fv}}{2I_{TOy}}$$

Cette équation est classique. Si l'amortissement est faible, la solution est de la forme :

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

La prise en compte de frottements fluides proportionnels à la vitesse aboutit à :

- des oscillations pseudopériodiques qui décroissent de façon exponentielle.

- une pseudopériode qui dépend des frottements et diffère de la période propre T_0 .
- des oscillations qui s'arrêtent nécessairement à θ_0 , la position d'équilibre du pendule sans frottement.

I.4 Oscillations avec frottement solide

Les hypothèses précédentes conduisent à des calculs simples mais les termes dissipatifs prépondérants dans le dispositif d'étude sont des frottements solides. Dans ce cas, la force s'oppose toujours au mouvement (son signe est donc toujours opposé à celui de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$) mais sa norme ne dépend plus de la vitesse. Si on suppose en première approximation que cette norme est constante au cours du mouvement, le couple de freinage du pendule est alors du type $-\text{signe}(\dot{\theta})C_{Fs}\vec{e}_y$ et l'équation différentielle du mouvement devient, pour de petites oscillations :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = -\text{signe}(\dot{\theta}) \frac{C_{Fs}}{I_{TOY}}$$

On a alors :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 [\theta + \text{signe}(\dot{\theta})\theta_A] = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0^2 \theta_A = \frac{C_{Fs}}{I_{TOY}}}$$

Le fait que le terme en θ_A change de signe à chaque extrémum du mouvement oblige à traiter le problème par demi-périodes. Dans ce cas, l'équation dans chaque intervalle est comparable à celle du pendule sans frottements au changement de variable $X = \theta + \text{signe}(\dot{\theta})\theta_A$ près puisque θ_A est une constante avec nos hypothèses \rightarrow le mouvement dans chaque demie période a la même forme que celle de l'oscillateur libre, soit :

$$\theta + \text{signe}(\dot{\theta})\theta_A = \theta_M \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Le mouvement se fait donc à la même pulsation que celle de l'oscillateur libre. Par contre, il est alternativement centré autour de la valeur fixe $\pm \theta_A$. De plus, la valeur de θ_M diminue entre chaque demi-période à cause des frottements. La perte d'amplitude s'évalue facilement en considérant le mouvement entre deux extrémums consécutifs. Supposons par exemple que le pendule approche un maximum d'amplitude avec une vitesse angulaire positive. Au moment t_1 où il atteint ce maximum repéré par l'angle θ_1 , sa vitesse angulaire devient négative \rightarrow à partir de cet instant, le mouvement du pendule est régi par l'équation :

$$\theta - \theta_A = \theta_M \cos[\omega_0(t - t_1)]$$

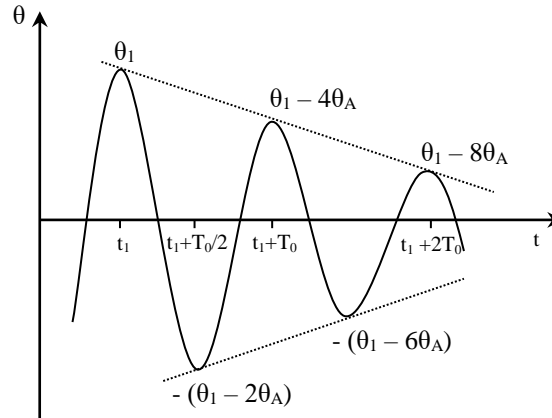
L'évolution de θ est donc centrée autour de $+\theta_A$ et son amplitude initiale θ_1 correspond à :

$$\theta_1 - \theta_A = \theta_M \cos[0] = \theta_M$$

L'amplitude θ_2 à la fin de cette demie période correspond à : $\theta_2 - \theta_A = \theta_M \cos[\pi] = -\theta_M$

On a donc $\theta_2 - \theta_A = -(\theta_1 - \theta_A)$ en combinant les deux résultats, soit $\theta_2 = -(\theta_1 - 2\theta_A)$

La valeur du minimum θ_2 ne correspond donc pas à la valeur opposée à θ_1 comme dans un pendule sans frottements, mais elle diminue d'un facteur $2\theta_A$. On peut faire un raisonnement similaire sur la demi-période suivante. L'évolution de θ est alors centrée autour de $-\theta_A$ et on montre facilement qu'on perd encore une fois $2\theta_A$ quand on arrive au nouveau maximum de θ .



Au final, un pendule présentant des frottements solides de norme constante est caractérisé par :

- des oscillations pseudopériodiques qui décroissent de façon linéaire, l'amplitude θ_M entre deux extrémums diminuant de $2\theta_A$, celle entre deux maxima ou minima diminuant de $4\theta_A$.
- une pseudopériode correspondant à la période propre du pendule sans frottements.

Il faut aussi noter que l'arrêt des oscillations ne se fait pas nécessairement à la position d'équilibre $\theta = 0$ de l'oscillateur sans frottement. Dans les faits, le pendule s'arrête dans une position pour laquelle le moment du poids est inférieur au couple de frottement solide, soit :

$$(m_A L_A + m_B L_B) g \theta < C_{Fs} \quad \rightarrow \quad \theta < \frac{C_{Fs}}{(m_A L_A + m_B L_B) g}$$

Or, on a :

$$\omega_0^2 \theta_A = \frac{C_{Fs}}{I_{TOy}} = \frac{(m_A L_A + m_B L_B) g}{I_{TOy}} \theta_A \quad \rightarrow \quad \boxed{\theta < \frac{C_{Fs}}{(m_A L_A + m_B L_B) g} = \theta_A}$$

→ Le pendule pourra s'arrêter pour n'importe quelle valeur de θ comprise entre $\pm\theta_A$.

Il existe donc des différences notables entre les frottements solides et les frottements fluides.

