

Équations de Maxwell dans le Vide

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{Maxwell-Thomson}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Maxwell-Gauss}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Maxwell Faraday}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{fém}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Ampère}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} + \epsilon_0 \mu_0 \oint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

(1)

Équations de Maxwell (milieux homogène - isotrope)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{Grad} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\epsilon_r = (1 + \chi_e)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\mu_r = (1 + \chi_M)$$

par conséquent

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} = \frac{\chi_M}{\mu_0 (1 + \chi_M)} \vec{B} \approx \frac{\chi_M}{\mu_0} \vec{B}$$

car $\chi_M \ll 1$

\vec{E} champ électrique $V \cdot m^{-1}$

\vec{D} induction électrique $C \cdot m^{-2}$

\vec{P} polarisation $C \cdot m^{-2}$

ρ densité de charge libre $C \cdot m^{-3}$

ϵ_0 permittivité du vide $F \cdot m^{-1}$

ϵ_r permittivité relative du milieu ϕ

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ permittivité absolue du milieu $F \cdot m^{-1}$

(2)

\vec{H}	champ magnétique	A m^{-1}
\vec{B}	induction magnétique	T
\vec{M}	aimantation	A.m^{-1}
\vec{j}	vecteur densité de courant	A m^{-2}
μ_0	permeabilité magnétique du vide	H.m^{-1}
μ_r	permeabilité magnétique relative du milieu	
$\mu = \mu_0 \mu_r$	perméabilité magnétique absolue du milieu	H.m^{-1}

Milieux magnétiques homogène-isotope

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\mu_r = 1 + \chi_M$$

$$\chi_M \ll 1$$

$$\vec{M} = \frac{\chi_M}{\mu_0(1+\chi_M)} \vec{H}$$

Diamagnétisme $\chi_M < 0$

$\chi_M = \text{cte}$ pas de dépendance en T

χ_M de l'ordre de 10^{-5}

ex = Argent, Cuivre, Mercure

presque tous les composés organiques.

pas de moments magnétiques des atomes

$$\chi_M > 0$$

$M=0$ si $H=0$

paramagnétisme

$$\chi_M \sim \frac{C}{T} \quad \text{loi de Curie}$$

χ_M de l'ordre de 10^{-3}

$M \neq 0$ si $H \neq 0$

Ferromagnétisme

$$\chi_M = \frac{C}{T-T_c} \quad \begin{array}{l} \text{loi de} \\ \text{Curie} \\ \text{Weiss} \end{array}$$

χ_M peut prendre de très grandes valeurs

$10^3 - 10^5$

exemples = Fer-Cobalt-Nickel

moments magnétiques orientés au hasard

exemples =

platine

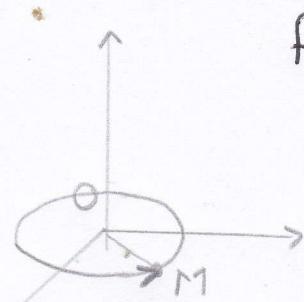
manganèse

Aluminium

moments magnétiques orientés au hasard

$$H=0$$

I Diamagnétisme = Origine



$$\vec{f} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad \text{force centrale}$$

\Rightarrow mouvement plan

$$\text{car } \vec{L}_o = \vec{OM} \wedge \vec{m}\vec{v}$$

se conserve

$$\text{rappel } \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{OM} \wedge \vec{m}\vec{v}) = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{m}\vec{v}}_{=0} + \vec{OM} \wedge \underbrace{\vec{ma}}_{=0} = \vec{0}$$

\vec{f} colinéaire à \vec{OM}

pour simplifier, prenons une trajectoire circulaire $v = \text{cte}$

$$\vec{L}_o = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mrv\vec{e}_z \quad (1)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{e}{T} \quad \text{comme } 2\pi n = vT \Rightarrow I = -\frac{eV}{2\pi r} \quad (2)$$

$$\vec{\mu} = IS \quad \text{moment magnétique}$$

$$\vec{\mu} = I\pi r^2 \vec{e}_z \quad (3)$$

en combinant (1), (2) et (3), on obtient

$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}_o$ $\gamma = -\frac{e}{2m}$	rapport gyromagnétique de l'électron.
--	---

$$\vec{M} = \frac{N\vec{\mu}}{V} \quad \text{aimantation moyenne du moment magnétique volumique.}$$

↑
on suppose que les N objets
n'interagissent pas

en présence d'un champ $\vec{B} = B \vec{e}_z$

$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ couple magnétique

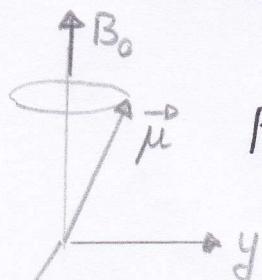
donc

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

$$\text{or } \vec{L}_o = \frac{\vec{\mu}}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \vec{\mu} \wedge \vec{B} = \vec{\omega}_L \wedge \vec{\mu} \quad \text{avec } \vec{\omega}_L = \frac{e}{2m} \vec{B}$$

ω_L pulsation de Larmor $\omega_L = \frac{eB}{2m}$



précession de Larmor

théorème de Larmor =

Le mouvement d'un électron dans le référentiel de Larmor en présence d'un champ \vec{B} est le même que dans le référentiel du Labo sans champ

R_L référentiel de Larmor en rotation uniforme autour de (Oz) direction de \vec{B} à la pulsation ω_L

$$\vec{v}_R = \vec{v}_{R_L} + \vec{\omega}_L \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a}_R = \vec{a}_{R_L} + \vec{\omega}_L \wedge (\vec{\omega}_L \wedge \vec{r}) + 2 \vec{\omega}_L \wedge \vec{v}_{R_L}$$

Pfd $m \vec{a}_R = q \vec{E} + q \vec{v}_R \wedge \vec{B}$

R nef du labo Galiléen.

$$m \vec{a}_{R_L} = q \vec{E} + q \vec{v}_R \wedge \vec{B} - m \vec{\omega}_L \wedge [\vec{\omega}_L \wedge \vec{r}] - 2m \vec{\omega}_L \wedge [\vec{v}_R - \vec{\omega}_L \wedge \vec{r}]$$

$$m \vec{a}_{R_L} = q \vec{E} + \vec{v}_R \wedge [-e \vec{B} + 2m \vec{\omega}_L] + m \underbrace{\vec{\omega}_L \wedge [\vec{\omega}_L \wedge \vec{r}]}_{\text{terme en } \omega_L^2 r m} \quad (E)$$

$$\text{sans champ } \vec{B} \quad m\vec{a}_R = q\vec{E}$$

l'électron tourne autour du proton avec une pulsation Ω

$$q\vec{E} = m\vec{a}_R = m\Omega\vec{v}_R = m\Omega^2\vec{r}$$

$$\text{comme } \frac{m\omega_L^2 r}{qE} = \frac{m\omega_L^2 r}{m\Omega^2 r} = \left(\frac{\omega_L}{\Omega}\right)^2$$

$$\text{pour 1 électron } \Omega/2\pi \approx 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\omega_L/2\pi \approx 10^{10} \text{ Hz} \quad \text{si } B = 1 \text{ T}$$

$$\text{donc } \omega_L \ll \Omega \Rightarrow m\vec{a}_{R_L} \approx q\vec{E} \quad \text{CQFD}$$

calcul de χ_{Diam} =

en présence d'un champ \vec{B}

$$\vec{v}_R(\vec{B}) = \vec{v}_R(\vec{B}=\vec{0}) + \vec{\omega}_L \wedge \vec{r} \quad \text{théorème de LARMOR}$$

$$\text{OR } \vec{\mu} = -\frac{e}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} \quad \text{car } \vec{\mu} = \gamma \vec{L}_0$$

$$\text{donc } \vec{\mu}(\vec{B}) = -\frac{e}{2} \vec{r} \wedge [\vec{v}_R(\vec{B}=\vec{0}) + \vec{\omega}_L \wedge \vec{r}]$$

$$\vec{\mu}(\vec{B}) = \underbrace{-\frac{e}{2} \vec{r} \wedge \vec{v}_R(\vec{B}=\vec{0})}_{\vec{\mu}(\vec{B}=\vec{0})} - \frac{e}{2} \vec{r} \wedge [\vec{\omega}_L \wedge \vec{r}]$$

$$\Delta \vec{\mu} = \vec{\mu}(\vec{B}) - \vec{\mu}(\vec{B}=\vec{0}) = -\frac{e}{2} \vec{r} \wedge [\vec{\omega}_L \wedge \vec{r}] = -\frac{e}{2} \begin{cases} -\omega_L x \vec{z} \\ -\omega_L y \vec{z} \\ \omega_L (x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$\langle \Delta \vec{\mu} \rangle = -\frac{e\omega_L}{2} \langle x^2 + y^2 \rangle \vec{e}_z = -\frac{e^2 B}{6m} \langle r^2 \rangle \quad \omega_L = \frac{eB}{2m}$$

$$\langle xz \rangle = \langle yz \rangle = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{\langle r^2 \rangle}{3}$$

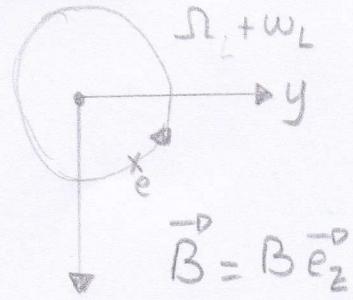
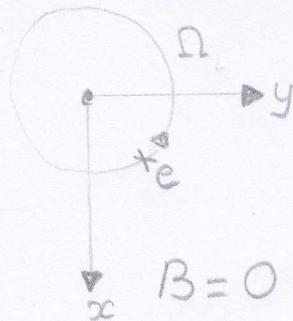
$$\langle \vec{\Delta M} \rangle = \frac{N}{V} \langle \Delta \vec{\mu} \rangle = -\frac{Ne^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e V} \vec{B} = \chi_M \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

donc $\chi_M = -\frac{Ne^2 \mu_0}{6m_e V} \langle r^2 \rangle$

χ_M ne dépend pas de T
et son ordre de grandeur
est 10^{-5}

peut se généraliser
 $\chi_M = -\frac{Ne \mu_0}{6m_e} \sum_{R=1}^Z \langle r_R^2 \rangle$
si Z électrons.

Nombre d'Atomes dans le volume V



comment déterminer si un matériau est diamagnétique?

Remarque = le diamagnétisme provient essentiellement des électrons et pas des protons

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$$

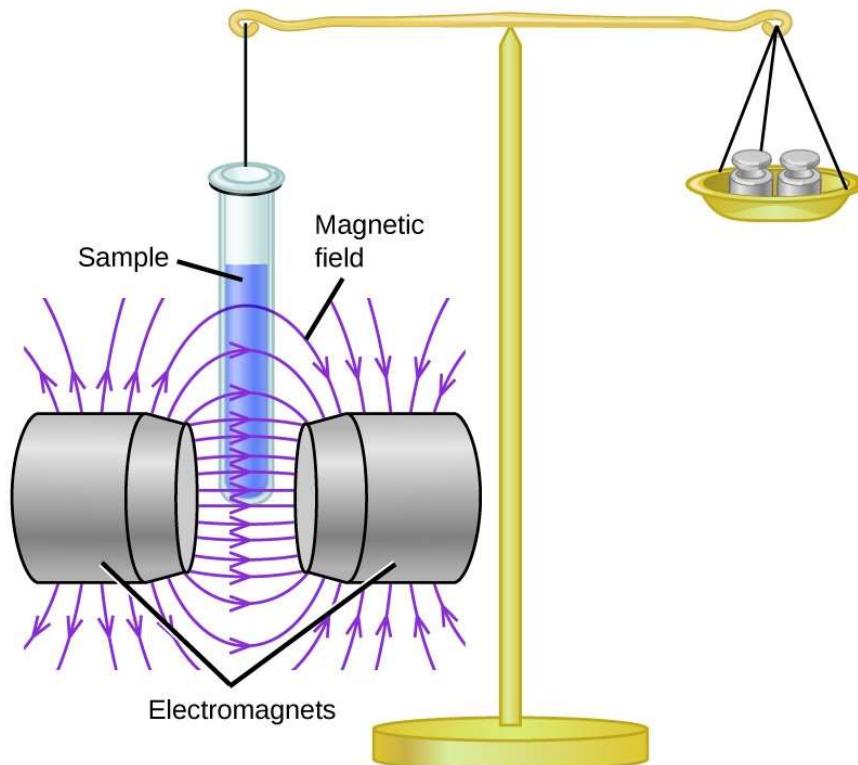
$$\gamma_e = -\frac{e}{2m_e} \text{ électrons}$$

$$\frac{\partial P}{\partial e} \approx 10^{-3}$$

$$\gamma_p = \frac{e}{2m_p} \text{ protons}$$

$$\text{car } m_p = 1836 m_e.$$

Balance de Gouy



$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \vec{\nabla} \left(\frac{\chi}{2\mu_0} B^2 \right)$$

Diamagnétiques repoussés par les forts champs

Paramagnétiques et Ferromagnétique
attirés par les forts champs

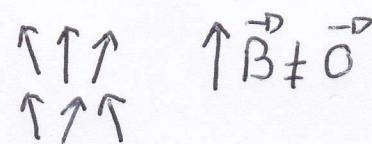
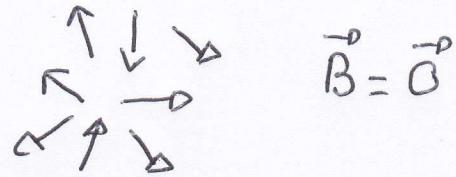
II Paramagnétisme.

- orientation de moments magnétiques moléculaires ou atomiques sous l'effet d'un champ magnétique.

- pas d'interaction entre objets

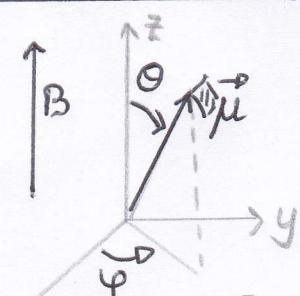
$$\Rightarrow \chi = \frac{C}{T} > 0 \quad \text{Loi de Curie}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M=0 \text{ si } B=0 \\ \chi \text{ de l'ordre de } 10^{-3} \end{array} \right.$$



$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ \Gamma = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \end{array} \right\}$ sous l'effet d'un champ les moments magnétiques s'alignent avec \vec{B} mais il faut tenir compte de l'agitation thermique.

① Paramagnétisme de Langevin.



atomes moment permanent $\vec{\mu}$
approche classique

$$\mathcal{E}_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta$$

$$P(\theta, \varphi) = \frac{e^{-\mathcal{E}_m / k_B T} \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta e^{-\mathcal{E}_m / k_B T} d\theta}$$

probabilité
d'avoir le
moment $\vec{\mu}$
 $\left\{ \begin{array}{l} \theta \text{ et } \theta + d\theta \\ \varphi \text{ et } \varphi + d\varphi \end{array} \right.$

atomes indépendants
facteur de Boltzmann.

avec

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mu \cos \theta P(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \hat{e}_z$$

par symétrie $\langle \vec{\mu} \rangle$ est nécessairement colinéaire à \hat{e}_z
direction de \vec{B}

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{\int_0^{\pi} \mu \cos \theta e^{\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}} \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi} e^{\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}} \sin \theta d\theta} \hat{e}_z$$

soit $I = \int_0^{\pi} e^{\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}} \sin \theta d\theta$

posons $u = \cos \theta$

$$du = -\sin \theta d\theta$$

$$\text{donc } I = - \int_1^{-1} e^{\frac{\mu B u}{k_B T}} du = \frac{k_B T}{\mu B} \left[e^{\frac{\mu B u}{k_B T}} \right]_{-1}^1 = \frac{k_B T}{\mu B} 2 \operatorname{sh} \left[\frac{\mu B}{k_B T} \right]$$

soit $J = \int_0^{\pi} \mu e^{\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}} \cos \theta \sin \theta d\theta$

on remarque que $J = \frac{dI}{dB} k_B T$

$$\text{donc } \langle \vec{\mu} \rangle = k_B T \frac{dI/dB \hat{e}_z}{I} = k_B T \cdot \frac{d \ln I}{dB} \hat{e}_z$$

$$\ln I = \ln \left(\frac{k_B T}{\mu B} 2 \right) + \ln \operatorname{sh} \left(\frac{\mu B}{k_B T} \right)$$

$$\frac{d \ln I}{dB} = \frac{\mu}{k_B T} \coth \left(\frac{\mu B}{k_B T} \right) - \frac{1}{B}$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \mu \left[\coth \left(\frac{\mu B}{k_B T} \right) - \frac{k_B T}{B \mu} \right] \hat{e}_z$$

$$\vec{M}_{\text{para}} = \frac{N\langle \vec{\mu} \rangle}{V} = \frac{N\mu}{V} \left[\underbrace{\coth\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right) - \frac{k_B T}{B\mu}}_{L\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right)} \right] \vec{e}_Z$$

$L\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right)$ fonction de Langevin

approximation des faibles champs $\alpha = \frac{\mu B}{k_B T} \ll 1$

$$\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \sim \frac{\alpha}{3}$$

$$\text{donc } \vec{M}_{\text{para}} \approx \frac{N\mu}{V} \frac{\mu B}{3k_B T} \vec{e}_Z \Rightarrow \chi_{\text{para}} = \frac{N\mu^2}{V 3k_B T}$$

on retrouve la Loi de Curie.

