

Transformées de Fourier et applications physiques

Alain Gellé, Christophe Cappe

Université de Rennes 1 - Préparation à l'agrégation de physique

1 La distribution de Dirac

1.1 La fonction porte

La fonction porte $\Pi(x)$ est la fonction discontinue définie par morceaux :

$$\begin{cases} \Pi(x) = 1 & \text{si } |x| < 1/2 \\ \Pi(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

Par généralisation, on appelle également fonction porte toute fonction déduite par translation et/ou dilatation de la fonction définie ci-dessus. Ainsi, la fonction $\Pi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ correspond à une porte de largeur a centrée sur la valeur $x = b$.

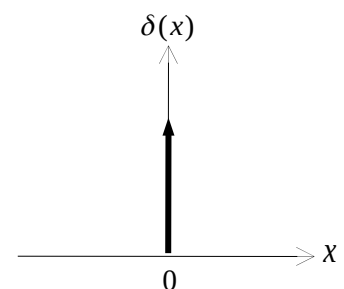
1.2 La distribution de Dirac

1.2.1 Première approche

Considérons la fonction $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. C'est une porte de largeur ε et de hauteur $1/\varepsilon$. Son intégrale vaut 1. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, cette fonction a une largeur qui tend vers 0 et une hauteur qui tend vers l'infini, mais son intégrale est toujours égale à 1. On appellera distribution de Dirac et on notera $\delta(x)$ cette limite :

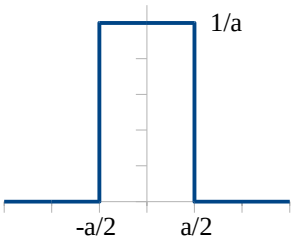
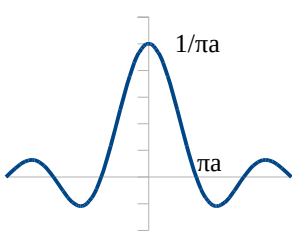
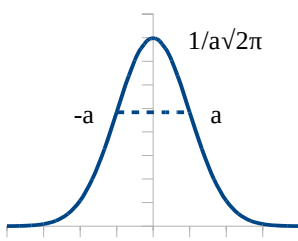
$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right)$$

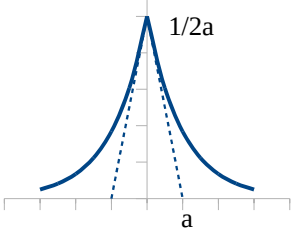
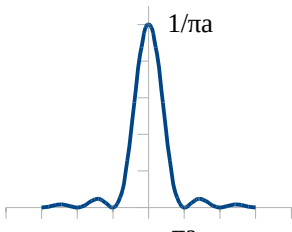
Le graphe de $\delta(x)$ sera représenté par convention par une flèche vers le haut, de hauteur 1, centrée en $x = 0$. On parle aussi de pic ou d'impulsion de Dirac.



1.2.2 Autres limites

On peut définir la distribution de Dirac, comme la limite de différentes fonctions. Par exemple :

Une porte	Un sinus cardinal	Une gaussienne
$g_a(x) = \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x}{a}\right)$	$g_{a1}(x) = \frac{1}{\pi a} \text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)$	$g_{a2}(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2a^2}\right)$
		

Une exponentielle	Un sinus cardinal carré	...
$g_{a3}(x) = \frac{1}{2a} e^{\frac{- x }{a}}$	$g_{a4}(x) = \frac{1}{\pi a} \text{sinc}^2\left(\frac{x}{a}\right)$...
		Dessine ici ta fonction

L'intégrale de ces fonctions vaut 1. Lorsque a tend vers 0, on obtient la distribution de Dirac.

1.2.3 Définition

Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} qui n'est pas infinie en 0 et qu'on supposera intégrable sur \mathbb{R} . On s'intéresse à la quantité :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx$$

Pour approcher cette intégrale, nous allons utiliser la fonction g_ε dont δ est la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_\varepsilon(x) dx$$

Comme la fonction g_ε est nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}\right]$, le domaine d'intégration se réduit à cet intervalle. Il vient :

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f(x) \frac{1}{\varepsilon} dx$$

Le changement de variable $x = \varepsilon y$ permet d'écrire :

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1/2}^{1/2} f(\varepsilon y) dy$$

Par passage à la limite :

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} f(0) dy$$

Nous en déduisons la véritable définition de la distribution de Dirac :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (2)$$

En appliquant cette relation à la fonction $g(y) = f(y+a)$ et en faisant un changement de variable $x = y+a$, on trouve la généralisation en tout point :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

Notons bien que δ n'est pas une fonction ordinaire, en ce sens qu'elle n'est pas définie par sa valeur en chaque point. δ est en fait définie par l'intégrale sous une courbe : on parle de distribution et non de fonction.

Il vient immédiatement de l'égalité précédente que $f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x)$, soit en généralisant :

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \quad (3)$$

1.2.4 Changement d'échelle

Soit a un réel $\neq 0$. Que vaut $\delta(ax)$?

Il est trivial de voir que $\delta(ax)$ vaut 0 partout sauf en 0 ou il est infini. Il paraît donc assimilable à une distribution de Dirac. Il faut vérifier que son intégrale sur \mathbb{R} est finie :

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) dx$$

Le changement de variable $y = ax$ donne :

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \frac{dy}{|a|}$$

La valeur absolue vient du fait que si $a < 0$ les bornes changent de signe. On trouve la propriété de changement d'échelle :

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (4)$$

Pour l'analyse des fréquences, on peut ainsi montrer que $\delta(\omega) = \delta(f) / 2\pi$.

1.3 La distribution peigne de Dirac

1.3.1 Définition

Le peigne de Dirac, noté $\text{III}(x)$, est composé d'une succession périodique de distributions δ :

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n) \quad (5)$$

Sa période est 1. Le peigne a une importance capitale en traitement du signal, c'est l'outil qui permet de décrire de manière formelle l'opération d'échantillonnage (cf. § 4.1). Il est aussi à la base de la représentation de tous les phénomènes périodiques.

1.3.2 Changement d'échelle

Le peigne $\text{III}(x)$ a une période 1. Un peigne de période $a > 0$, noté $\text{III}_a(x)$, c'est-à-dire dont les « dents » sont des distributions δ d'intégrale 1 espacées de a , s'écrit alors :

$$\text{III}_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-na)$$

En utilisant la relation (1.5) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$, nous pouvons écrire :

$$\text{III}_a(x) = \frac{1}{|a|} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{x}{a} - n\right)$$

Soit finalement :

$$\text{III}_a(x) = \frac{1}{|a|} \text{III}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (6)$$

2 La transformée de Fourier

2.1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction de variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

On appelle transformée de Fourier (ou TF) de la fonction f l'intégrale :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (7)$$

On parle d'espace direct pour décrire $f(t)$, et d'espace de Fourier pour décrire $\hat{f}(\nu)$. On utilisera parfois les notations suivantes : $\hat{f} = TF\{f\}$ ou $\hat{f}(\nu) = TF\{f\}(\nu)$.

La quantité ν est réelle, elle est dite variable conjuguée de t . Sa dimension est $[\nu] = [t]^{-1}$. Ainsi, si t est un temps (en s), ν est une fréquence (en Hz). Attention, d'autres définitions existent.

La transformée de Fourier d'une fonction existe si les trois conditions dites de Dirichlet sont vérifiées (il s'agit de conditions suffisantes mais pas nécessaires).

1. $f(t)$ possède un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle fini.
2. $f(t)$ possède un nombre fini de maxima et de minima sur tout intervalle fini.
3. $f(t)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$.

Connaissant $\hat{f}(\nu)$, on peut obtenir $f(t)$ par une transformation de Fourier inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = TFI\{\hat{f}\}(t) \quad (8)$$

2.2 Autres définitions

Les physiciens utilisent différentes définitions de la TF, qui diffèrent entre elles par des coefficients. Il est préférable d'utiliser la première formule qui donne des expressions « simples » pour les fonctions usuelles.

TF temps \rightarrow fréquence	TF temps \rightarrow pulsation	TF temps \rightarrow pulsation (bis)
$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$	$\hat{f}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$	$\hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega$
La bonne formule. Garantie sans additifs !	La TF et TF inverse sont différentes. Formules enrichies en facteurs 2π . On a la relation évidente : $\hat{f}_1(2\pi\nu) = \hat{f}(\nu)$	On peut aussi symétriser la TF et son inverse. Formules enrichies en facteurs $\sqrt{2\pi}$. Attention ici la TF est modifiée: $\hat{f}_2(2\pi\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\nu)$

2.3 TF de fonctions usuelles

■ Transformée de Fourier d'une distribution de Dirac

La transformée de Fourier d'une distribution de Dirac, et son inverse, sont importantes. Elles sont à la base de l'analyse spectrale. Elles interviennent aussi souvent dans les calculs de TF. Si on utilise la propriété de la distribution de Dirac, la transformée de Fourier de $f(t) = \delta(t)$ s'écrit :

$$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i2\pi vt} dt = e^{-i2\pi v \cdot 0} = 1$$

$\hat{f}(v)$ vaut donc 1 quelle que soit v . On écrira :

$$\delta(t) \xrightarrow{TF} 1(v)$$

Pour démontrer la transformée inverse, on peut utiliser la description de δ comme une limite de fonction. On peut par exemple se servir de l'exercice suivant. On trouve bien :

$$1(v) \xrightarrow{TFI} \delta(t)$$

On trouve de même aisément la TF d'une distribution de Dirac centrée en a :

$$\delta(t-a) \xrightarrow{TF} e^{-i2\pi va} \quad \text{et} \quad e^{-i2\pi va} \xrightarrow{TFI} \delta(t-a) \quad (9)$$

De même pour un Dirac en fréquence (attention au signe) :

$$e^{i2\pi tv_0} \xrightarrow{TF} \delta(v-v_0) \quad \text{et} \quad \delta(v-v_0) \xrightarrow{TFI} e^{i2\pi tv_0} \quad (10)$$

Comme l'ensemble des distributions de Dirac $\delta(x-a)$ forme une base de fonctions, ces relations montrent que pour toutes les fonctions qui nous intéressent :

$$TF \circ TFI = Id$$

■ Exercice 1 : transformée de Fourier de la fonction porte

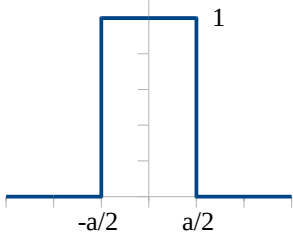
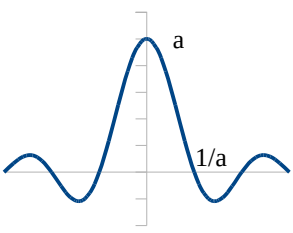
Vérifier que la transformée de Fourier de la fonction porte $f(t) = \Pi(t/T)$ est $\hat{f}(v) = T \operatorname{sinc}(\pi vT)$ où la fonction « sinc(x) » désigne le sinus cardinal $\sin(x)/x$.

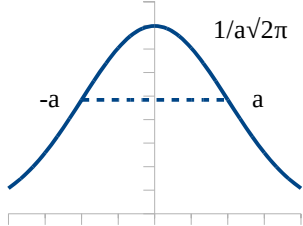
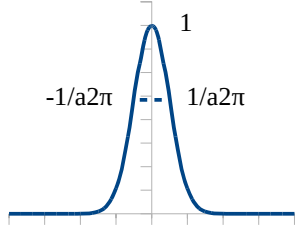
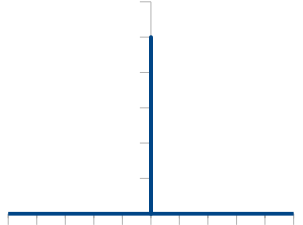
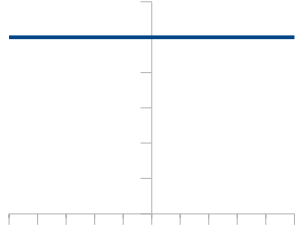
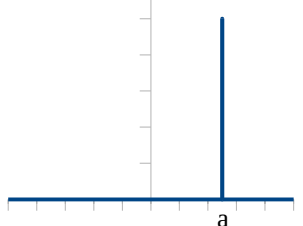
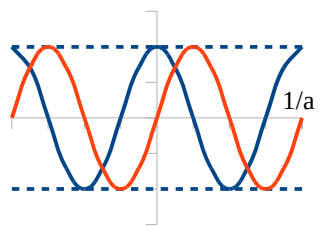
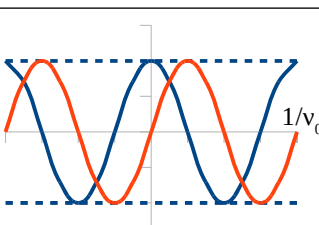
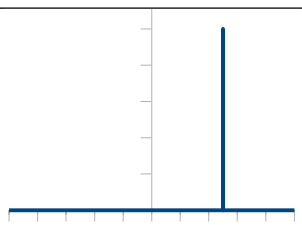
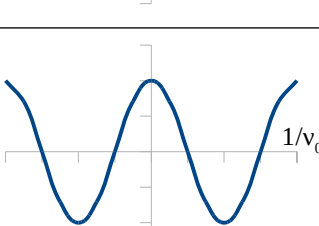
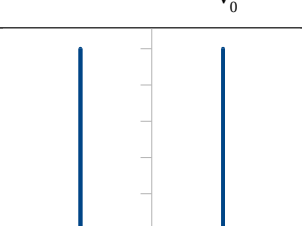
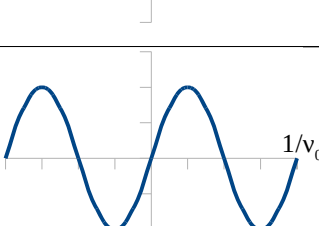
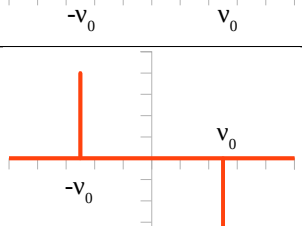
Prendre ensuite les limites $T \rightarrow \infty$ et $T \rightarrow 0$. Montrer que l'on retrouve la TF d'un Dirac ou la TF d'une constante.

■ Transformées de Fourier usuelles en image

Très souvent l'analyse de Fourier ne requière pas de calcul ou très peu. On peut très souvent obtenir un résultat en utilisant les caractéristiques des TF usuelles (forme, taille caractéristique) et les propriétés de la TF (voir chap. suivant).

Dans le tableau ci-dessous les courbes en bleu représentent la partie réelle et en orange la partie imaginaire de la fonction.

Fonction		TF	
$\Pi(x/a)$		$a \operatorname{sinc}(\pi va)$	

$\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2a^2}}$	 A plot of a Gaussian function centered at 0. The peak height is labeled $1/a\sqrt{2\pi}$. The width is indicated by dashed lines at $x = -a$ and $x = a$.	$e^{\frac{-v^2}{2b^2}}$ $b=1/a2\pi$	 A plot of a very narrow Gaussian function centered at 0. The peak height is labeled 1. The width is indicated by dashed lines at $v = -1/a2\pi$ and $v = 1/a2\pi$.
$\delta(x)$	 A plot of the Dirac delta function $\delta(x)$, showing a single vertical line at $x=0$.	1	 A plot of the constant function 1 , showing a horizontal line at $y=1$.
$\delta(x-a)$	 A plot of the shifted Dirac delta function $\delta(x-a)$, showing a single vertical line at $x=a$.	$e^{i2\pi va}$	 A plot of the complex exponential function $e^{i2\pi va}$, showing a sinusoidal wave with amplitude 1/a.
$e^{i2\pi v_0 x}$	 A plot of the complex exponential function $e^{i2\pi v_0 x}$, showing a sinusoidal wave with amplitude $1/v_0$.	$\delta(v-v_0)$	 A plot of the Dirac delta function $\delta(v-v_0)$, showing a single vertical line at $v=v_0$.
$\cos(2\pi v_0 x)$	 A plot of the cosine function $\cos(2\pi v_0 x)$, showing a periodic wave with amplitude $1/v_0$.	$\frac{\delta(v-v_0) + \delta(v+v_0)}{2}$	 A plot showing two vertical lines at $v=-v_0$ and $v=v_0$, representing the sum of Dirac delta functions.
$\sin(2\pi v_0 x)$	 A plot of the sine function $\sin(2\pi v_0 x)$, showing a periodic wave with amplitude $1/v_0$.	$\frac{\delta(v-v_0) - \delta(v+v_0)}{2i}$	 A plot showing two vertical lines at $v=-v_0$ and $v=v_0$, representing the difference of Dirac delta functions.
$III_{T_e}(t)$	Peigne de Dirac de largeur T_e	$v_e III_{v_e}(v)$	Peigne de Dirac de largeur $v_e = 1/T_e$

2.4 Propriétés de la transformée de Fourier

Soit une fonction $f(t)$ qui a les propriétés dont on a besoin.

2.4.1 Linéarité

La transformation de Fourier est une opération linéaire, c'est-à-dire que si λ est une constante complexe ou réelle, on a :

$$TF\{\lambda f + \mu g\} = \lambda TF\{f\} + \mu TF\{g\} \quad (11)$$

2.4.2 Propriété 2 : changement de signe

Un renversement de l'axe des t (changement $t \rightarrow -t$) se traduit par un renversement de l'axe des ν :

$$f(-t) \xrightarrow{TF} \hat{f}(-\nu) \quad (12)$$

2.4.3 Propriété 3 : conjugaison

$$\overline{f(t)} \xrightarrow{TF} \overline{\hat{f}(\nu)} \quad (13)$$

2.4.4 Propriété 4 : changement d'échelle

Une dilatation ou une compression de l'axe des t (changement $t \rightarrow at$ où $a \in \mathbb{R}^*$) se traduit par une compression ou une dilatation de l'axe des ν :

$$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad (14)$$

On pourra retenir le résultat important suivant : une fonction large dans l'espace direct est étroite dans l'espace de Fourier, et inversement.

2.4.5 Propriété 4 bis : largeur des fonctions

On note Δt une largeur caractéristique de la fonction $f(t)$ et $\Delta \nu$ une largeur caractéristique de sa transformée de Fourier $\hat{f}(\nu)$. La fonction $f_a(t) = f(at)$ correspond à la fonction $f(t)$ contractée, sa largeur caractéristique est $\Delta t_a = \Delta t/a$. On obtient l'effet inverse sur la transformée de Fourier, et la largeur caractéristique de $\hat{f}_a(\nu)$ est $\Delta \nu_a = a \Delta \nu$. On voit que le produit de ces deux largeurs reste constant :

$$\Delta t \Delta \nu = \text{cst} \quad (15)$$

2.4.6 Propriété 5 : translation

Une translation de l'axe des t (changement $t \rightarrow t+a$ où $a \in \mathbb{R}$) se traduit par une multiplication par un terme de phase linéaire $e^{i2\pi a \nu}$ dans l'espace de Fourier :

$$f(t+a) \xrightarrow{TF} e^{i2\pi a \nu} \hat{f}(\nu) \quad (16)$$

Ainsi, lorsqu'on effectue une translation, le module de la transformée de Fourier est inchangé, seule la phase contient l'information sur cette translation (ajout d'une contribution linéaire $2\pi a \nu$ à la phase de la TF de $f(t)$).

2.4.7 Propriété 6 : multiplication par un terme de phase linéaire

Une multiplication par un terme de phase linéaire de fréquence $\nu_0 \in \mathbb{R}$ dans l'espace direct se traduit par une translation d'une quantité $-\nu_0$ dans l'espace de Fourier :

$$e^{i2\pi\nu_0 t} f(t) \xrightarrow{TF} \hat{f}(\nu - \nu_0) \quad (17)$$

C'est la propriété symétrique de la précédente. On en déduit l'effet d'une multiplication par un cos :

$$\cos(2\pi\nu_0 t + \phi) f(t) \xrightarrow{TF} \frac{e^{i\phi}}{2} \hat{f}(\nu - \nu_0) + \frac{e^{-i\phi}}{2} \hat{f}(\nu + \nu_0) \quad (18)$$

On obtient la TF d'un paquet d'onde dont f est l'enveloppe.

2.4.8 Symétries

Si la fonction f présente des symétries, la transformée de Fourier présentera elle aussi certaines propriétés. La correspondance entre ces propriétés de symétrie n'est pas toujours très intuitive. Cependant, on les retrouve rapidement en reprenant la définition de la transformée de Fourier. On montre aisément les correspondances suivantes :

Propriété de la fonction	Propriété de la TF
Paire	Paire
Impaire	Impaire
Réelle	$\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$
Imaginaire pure	$\hat{f}(-\nu) = -\overline{\hat{f}(\nu)}$
$f(-t) = \overline{f(t)}$	Réelle
$f(-t) = -\overline{f(t)}$	Imaginaire pure

On peut combiner ces propriétés. En particulier les fonctions qui intéressent le plus le physicien sont les fonction réelles qui vérifient :

Propriété de la fonction	Propriété de la TF
Réelle	$\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$
Réelle + paire	Réelle + paire
Réelle + impaire	Imaginaire pure + impaire

2.4.9 Fonctions à valeurs réelles

Pour les fonctions réelles la transformée de Fourier vérifie $\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$. Les fréquences positives et négatives sont reliées. Les coefficients sont égaux, à un signe près pour la phase. On peut donc se limiter à l'étude de la transformée de Fourier pour les fréquences positives. C'est pour ça que l'on dit souvent en physique que seules les fréquences positives ont un sens. En réalité les fréquences négatives ont un sens elles aussi : elles permettent de décrire des fonctions complexes.

Dans le cas d'une fonction réelle, on peut même modifier l'écriture de la TF pour que la fonction s'écrive comme la somme de fonction réelle (des cosinus) plutôt que des fonctions complexes (les exponentielles). On réécrit la transformée de Fourier inverse en ne sommant que les fréquences positives :

$$f(t) = \int_0^{+\infty} d\nu (\hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} + \hat{f}(-\nu) e^{-i2\pi\nu x}) = \int_0^{+\infty} d\nu (\hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} + \overline{\hat{f}(\nu)} e^{-i2\pi\nu x})$$

$$f(t) = 2 \int_0^{+\infty} d\nu \Re[\hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x}]$$

On écrit ensuite la TF comme le produit d'un terme d'amplitude et d'un terme de phase : $\hat{f}(\nu) = A(\nu)e^{i\phi(\nu)}$.

On obtient ainsi la décomposition d'une fonction $f(t)$ à valeurs réelles en cosinus :

$$f(t) = 2 \int_0^{+\infty} d\nu A(\nu) \cos(2\pi \nu x + \phi) \quad (19)$$

Une fonction réelle peut s'exprimer comme la superposition d'onde réelle de fréquences positives. Lorsque les équations sont linéaires on peut résoudre un problème physique en le traitant fréquence par fréquence, en cherchant des solutions sous la forme : $A \cos(2\pi \nu x + \phi)$.

2.4.10 Notations complexes en physique

En physique on utilise souvent la notation complexe qui permet de simplifier la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires. Cette notation revient à remplacer un cosinus par une exponentielle complexe :

$$\cos(2\pi \nu x + \phi) \rightarrow e^{i2\pi \nu x + \phi}$$

La notation complexe est très utile puisque qu'elle permet de simplifier les dérivées : $d/dt \rightarrow i\omega$.

L'utilisation de la notation complexe permet aussi de simplifier l'expression de la transformée de Fourier. Si on remplace le cos par une exponentielle dans la formule (19), on obtient :

$$f(x) = \Re(f_1(x)) \quad \text{avec} \quad f_1(t) = 2 \int_0^{+\infty} d\nu A(\nu) e^{i(2\pi \nu x + \phi)} \quad (20)$$

Pour la physique des ondes, on parle de décomposition d'un signal en ondes planes.

On peut remarquer que l'expression de f_1 correspond à une TF pour laquelle on a supprimé les fréquences négatives. On peut aussi remarquer que pour les fréquences positives la TF de $f_1(t)$ est égale à la TF de $f(t)$ à un facteur 2 près. Il arrive souvent que l'on omette ce facteur 2 lorsqu'on écrit cette relation.

Limiter la TF aux fréquences positives permet souvent de simplifier les calculs. C'est en particulier le cas pour le calcul de la propagation d'un paquet d'onde.

3 La convolution

3.1 Définition

Soient f et g deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} .

On appelle produit de convolution de f par g l'intégrale :

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') g(x - x') dx' \quad (21)$$

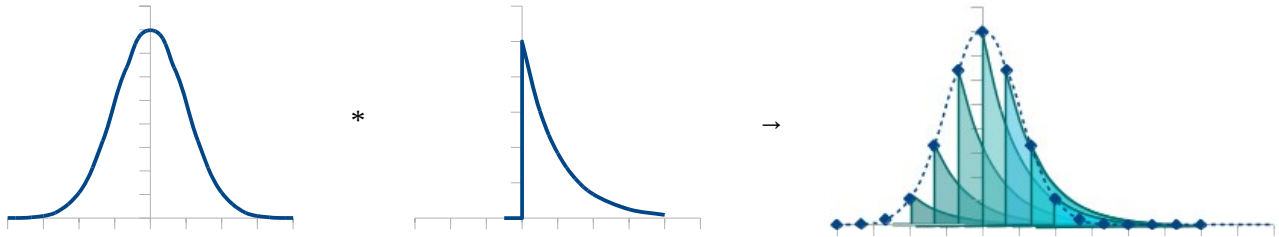
Le produit de convolution est une opération fonctionnelle, elle agit sur les deux fonctions f et g , et renvoie une fonction h . La notation $h(x) = f(x) * g(x)$ est donc incorrecte parce que $f(x)$ et $g(x)$ désignent des nombres et non des fonctions. Cela dit, on l'utilise parfois. C'est en particulier le cas lorsque l'on translate une des fonction (ex : $f(x - a)$).

Il y a plusieurs façon de « voir » le produit de convolution. Pour interpréter ce produit de manière physique, on peut dans un premier temps considérer $x' = x_1$ comme un paramètre. Il suffit ensuite de remarquer que

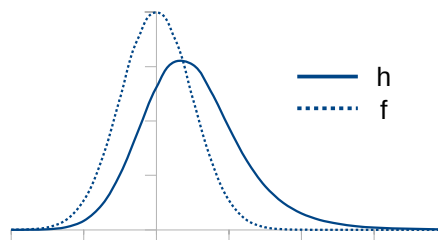
$g_1(x) = f(x_1)g(x-x_1)$ n'est rien d'autre que la fonction $g(x)$ traduite pour être centrée sur x_1 puis multiplier par une constante $f(x_1)$. Si on interprète l'intégrale comme une somme (intégrale de Riemann) en considérant des intervalles de largeur Δx :

$$f * g = \sum_i f(x_i)g(x-x_i)\Delta x$$

On voit que l'on somme des fonction $g_i(x) = f(x_i)g(x-x_i)$ centrées sur x_i pondérées par un facteur $f(x_i)\Delta x$.



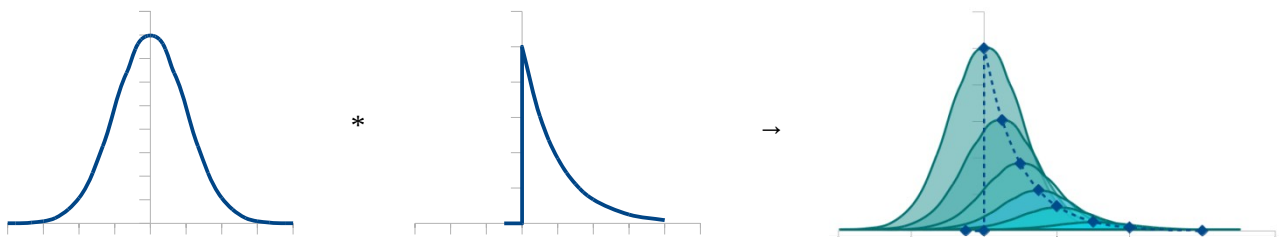
Si on somme toutes ces fonctions on obtient le produit de convolution. Par rapport à la Gaussienne de départ, la fonction $h(x)$ est légèrement décalée vers la droite et dissymétrique. Ceci vient bien sûr de l'exponentielle décroissante qui est elle-même centrée sur une valeur positive de x et dissymétrique.



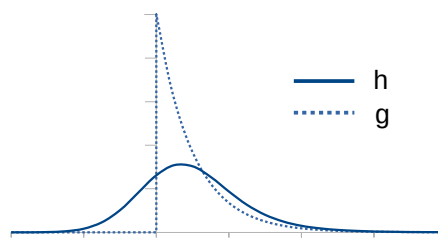
On peut noter que le produit de convolution est symétrique et qu'on peut faire le raisonnement inverse (en faisant un changement de variable : $x'' = x-x'$).

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x'')g(x'')dx'' \quad (22)$$

On peut donc interpréter le produit en considérant que c'est maintenant $f(x)$ qui est traduite puis sommée. On obtient bien évidemment le même résultat.



Par rapport à la fonction exponentielle, la fonction $h(x)$ varie plus lentement. En convoluant la fonction par une Gaussienne on a effectué un lissage.



Par cette approche, on comprend bien que le produit de convolution peut servir à décrire la notion de flou : chaque point de la courbe $f(x')$ est remplacé par une tache décrite par la courbe $g(x-x')$ (voir les exemples).

3.2 Propriétés

- Associativité : $(f*g)*h = f*(g*h)$
- Commutativité : $f*g = g*f$
- Linéarité : $f*(g+h) = f*g + f*h$
- Décalage : pour décaler (changer d'origine) un produit de convolution $f*g$, il suffit de décaler l'une des deux fonctions f ou g . Ainsi (en utilisant une notation impropre, mais pratique) :

$$(f*g)(x+a) = f(x+a)*g = f*g(x+a) \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

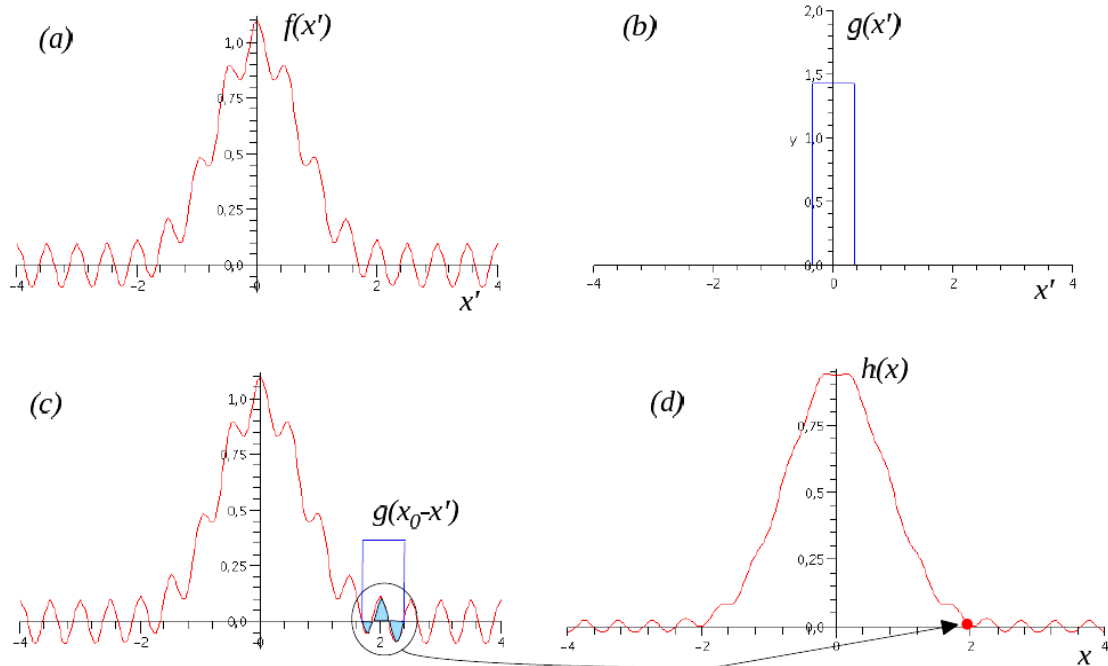
3.3 Exemples

3.3.1 Convolution par une porte

Soit $g(x) = \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x}{a}\right)$ une porte de largeur a et d'intégrale 1. La convolution d'une fonction f quelconque par g s'écrit :

$$h(x) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \Pi\left(\frac{x-x'}{a}\right) dx' = \frac{1}{a} \int_{x-a/2}^{x+a/2} f(x') dx'$$

Il s'agit donc d'une moyenne glissante, c'est-à-dire d'une valeur moyenne de f sur un intervalle de largeur a autour du point x . Cette opération a pour effet d'atténuer les fluctuations rapides de f et est notamment utilisée en traitement du signal pour réduire le bruit.



3.3.2 Réponse d'un appareil de mesure

Un appareil de mesure (voltmètre, ampèremètre ...) ne mesure jamais une grandeur à un instant donné, il a toujours besoin d'effectuer sa mesure sur un temps caractéristique τ . En première approximation on peut considérer qu'il effectue la moyenne sur un temps τ . Chaque valeur affichée $h(t)$, correspond en réalité à la moyenne de la grandeur $f(t)$ sur un temps τ (c-a-d entre $f(t)$ et $f(t-\tau)$). la fonction $h(t)$ correspond donc à la convolution de $f(t)$ par une porte (voir exemple précédent).

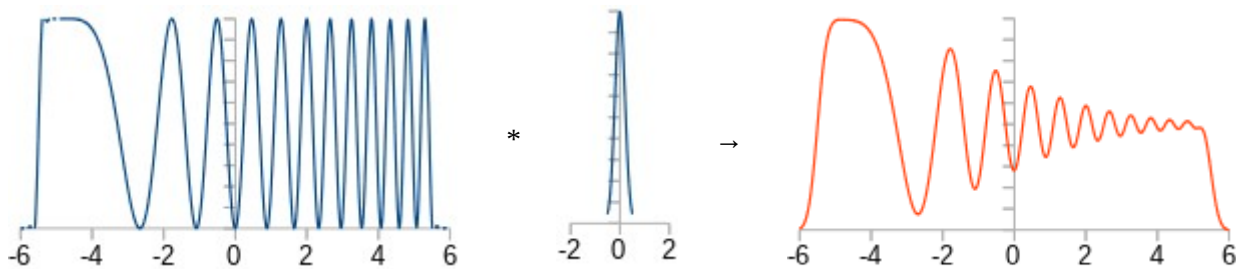
De manière plus générale, si l'appareil peut réaliser une moyenne pondérée, ce qui revient à convoluer la fonction $f(t)$ par une fonction $g(t)$ différente d'une porte.

$$h = f * g$$

La fonction f correspond au signal, h est mesure. La fonction g est appelée fonction d'appareil ou réponse impulsionnelle.

3.3.3 Convolution et fréquences

Dans l'exemple suivant, on considère une fonction de fréquence variable telle que celle utilisée pour la modulation. On utilise un signal de la forme $\Pi_6(t) \cos(at^2 + bt + c)$. La pseudo-période du signal en $t = 0$ vaut $T_0 = 0,4$. Ce signal est convolué par une gaussienne de largeur $\sigma = 0,2$.



On voit que les variations dont la demi-période est plus petite que σ sont fortement diminuées. La convolution par une fonction en cloche correspond donc à un opérateur passe bas. On retrouve cet effet dans beaucoup de phénomènes : le flou en photographie, temps d'intégration pour les appareils en physique etc (voir exercices).

3.3.4 Convolution par un pic de Dirac

$$(f * \delta)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x - x') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x'') \delta(x'') = f(x)$$

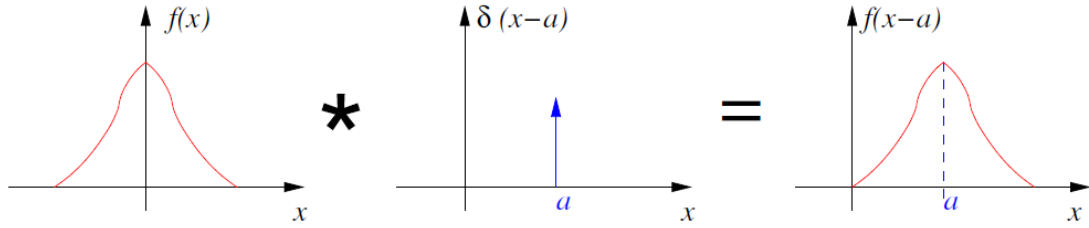
3.3.5 Convolution par un pic de Dirac décalé

Il s'agit d'une propriété importante en termes de signification physique. Ainsi, en utilisant la propriété de décalage, on peut écrire :

$$f * \delta(x - a) = (f * \delta)(x - a) = f(x - a)$$

On obtient un résultat intéressant : pour translater une fonction d'une quantité a , on la convolue par un pic de Dirac $\delta(x - a)$. On écrira souvent (même si la notation est incorrecte) :

$$f(x) * \delta(x - a) = f(x - a) \quad (23)$$

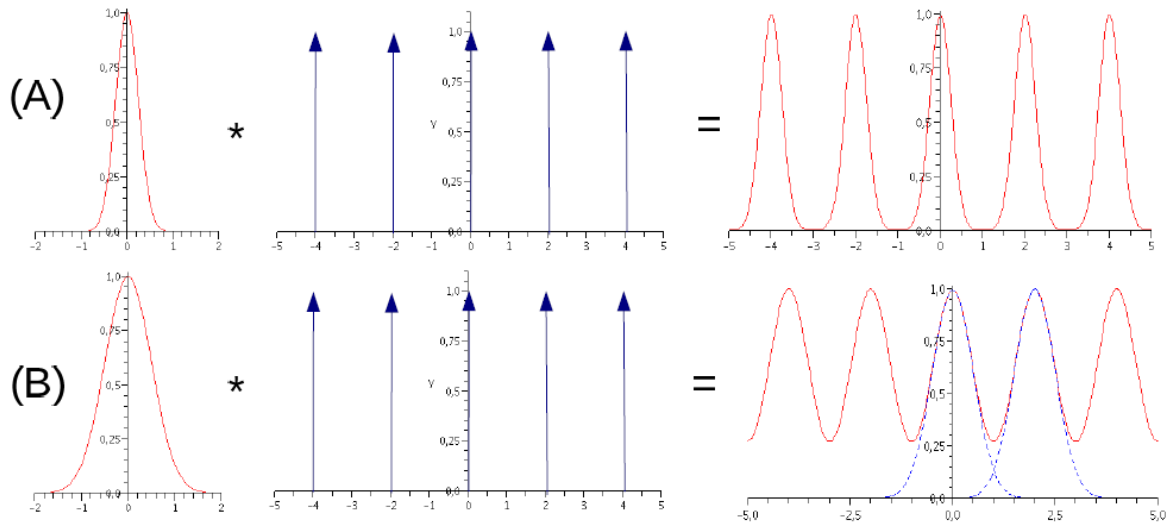


3.3.6 Convolution par un peigne de Dirac

En utilisant la propriété précédente, il vient immédiatement :

$$(f * \text{III}_a)(x) = f(x) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-na) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x-na) \quad (24)$$

Convolver f par un peigne, c'est « périodiser » f , c'est-à-dire créer une fonction périodique à partir d'une infinité de répliques de f centrées sur les « dents » du peigne, et faire la somme de toutes ces répliques.



3.4 Transformée de Fourier d'une convolution et d'un produit

- Soient deux fonctions f et g de la même variable t , et h leur produit de convolution :

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t')dt'$$

Nous avons donc :

$$\hat{h}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i2\pi\nu t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t')e^{-i2\pi\nu t}dt dt'$$

On permute les intégrales :

$$\hat{h}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f(t') \int_{-\infty}^{+\infty} dt g(t-t')e^{-i2\pi\nu t}$$

La seconde intégrale est la transformée de Fourier de la fonction $g(t-t')$, soit d'après la propriété de translation :

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} g(t-t') e^{-i2\pi vt} dt = \hat{g}(v) e^{-i2\pi vt'}$$

Finalement, il vient :

$$\hat{h}(v) = \hat{g}(v) \int_{t'=-\infty}^{+\infty} dt' f(t') e^{-i2\pi vt'} = f(v) g(v)$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple des transformées :

$$(f * g)(t) \xrightarrow{TF} \hat{f}(v) \hat{g}(v) \quad (25)$$

Inversement, intéressons-nous à la transformée de Fourier du produit des deux fonctions f et g . En écrivant $g(t)$ comme la transformée inverse de $\hat{g}(v')$, on a :

$$TF\{fg\}(v) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) e^{-i2\pi vt} dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \int_{v'=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(v') e^{+i2\pi v't} e^{-i2\pi vt} dv' dt$$

Soit :

$$TF\{fg\}(v) = \int_{v'=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(v') \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi(v-v')t} dt dv' = \int_{v'=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(v') \hat{f}(v-v') dv'$$

La transformée de Fourier d'un produit de fonctions est la convolution des transformées :

$$f(t)g(t) \xrightarrow{TF} (\hat{f} * \hat{g})(v) \quad (26)$$

4 Applications

4.1 Diffraction de Fraunhofer

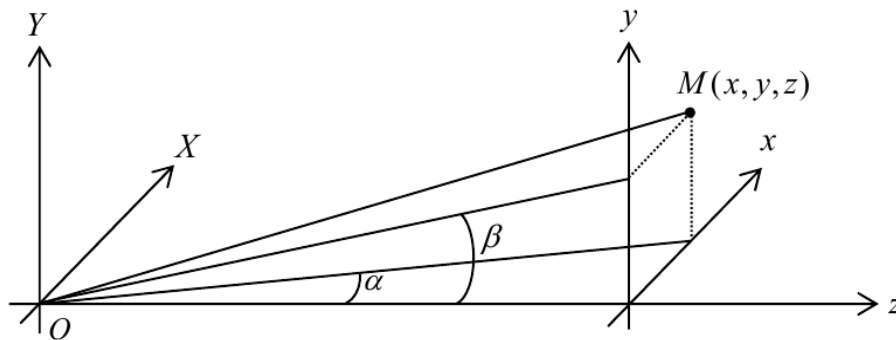
Considérons une pupille diffractante plane, située dans le plan $z = 0$, caractérisée en tout point P de coordonnées $(X, Y, 0)$ par sa transmittance $t(X, Y)$. On suppose la pupille éclairée en incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ .

En un point M de coordonnées (x, y, z) , on montre que l'amplitude complexe du champ diffracté dans l'approximation de Fraunhofer est proportionnelle à la transformée de Fourier de la transmittance :

$$s(M) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(X, Y) e^{-i2\pi(uX + vY)} dX dY$$

Les grandeurs u et v sont appelées fréquences spatiales et sont proportionnelles aux angles de diffraction correspondants respectivement dans les plans (X, z) et (Y, z) :

$$u = \frac{x}{\lambda z} = \frac{\tan \alpha}{\lambda} \simeq \frac{\alpha}{\lambda} \text{ et } v = \frac{y}{\lambda z} = \frac{\tan \beta}{\lambda} \simeq \frac{\beta}{\lambda}$$



■ Exercice 1 : diffraction par une fente

1. Rappeler l'approximation de Fraunhofer.
2. On considère tout d'abord dans le cas idéal une fente infiniment fine selon OX et infiniment longue selon OY . Comment écrire simplement sa transmittance $t(X, Y)$? Exprimer l'intensité diffractée $I(u, v)$. Décrire la figure de diffraction observée.
3. La fente est désormais infiniment longue mais de largeur finie a selon OX . On peut écrire sa transmittance sous la forme $t(X, Y) = \Pi(X/a) 1(Y)$. Exprimer l'intensité diffractée $I(u, v)$. Décrire la figure de diffraction observée. Montrer que $\Delta X \Delta u \simeq 1$ où ΔX et Δu sont les largeurs typiques de $t(X)$ et de son spectre de Fourier.
4. A partir des propriétés de la transformée de Fourier, discuter de l'effet d'une dilatation et d'une translation de la fente.

■ Exercice 2 : diffraction par un réseau

On considère un réseau infini en transmission. Dans un premier temps on suppose que la transmission varie de manière sinusoïdale :

$$t(X, Y) = 0,5 + 0,5 \sin\left(\frac{2\pi X}{a}\right)$$

1. Calculer l'amplitude du champ diffracté. Représenter $t(X, Y)$ et le champ diffracté.

On considère maintenant que la fonction de transmission varie comme un créneau :

$$t(X, Y) = 0,5 + 0,5 \operatorname{sign}\left[\sin\left(\frac{2\pi X}{a}\right)\right]$$

On rappelle que la fonction créneau peut se décomposer comme :

$$\operatorname{sign}\left[\sin\left(\frac{2\pi X}{a}\right)\right] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{2\pi X}{a}\right)}{2k+1}$$

2. Mêmes questions que 1.

4.2 Exemples de convolution dans l'espace réel

■ Exercice 3 : Flou gaussien

On considère une photo un peu floue. Cette image correspond à l'image d'origine convoluée par une fonction $h(x, y)$. Pour faire simple on supposera que $h(x, y)$ est une gaussienne de largeur 0.2 cm.

1. Que peut on dire de la transformée de Fourier de l'image ?
2. On suppose que la photo représente un troupeau de zèbres et de chevaux. A quelle condition pourra-t-on différencier ces animaux ?

■ Exercice 4 : Fonction d'appareil

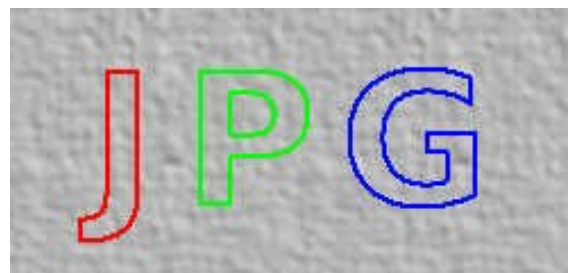
Les appareils de mesures ont un temps caractéristique pour la mesure. Ils mettent un certain temps à réagir au signal d'entrée $e(t)$. Ils dépendent des valeurs de ce signal d'entrée aux instants précédents $e(t-t')$. On peut donc écrire la réponse de l'appareil sous la forme :

$$s(t) = \int_{-\infty}^t e(t-t')h(t')$$

1. Quelle serait l'expression de $h(t')$ pour un appareil idéal tel que $s(t)=e(t)$?
2. Donner l'allure de $h(t)$ pour un appareil ayant un temps caractéristique de mesure de t_0 .
3. Quelles conséquences pour la transformée de Fourier du signal ?
4. Quel type de signal ne pourra t on pas observer ?
5. Que vaut le signal de sorti $s(t)$ si le signal d'entrée est une impulsion ($e(t)$ est un Dirac) ?

■ Exercice 5 : Compression JPEG

Dans la compression JPEG l'image est divisée en plusieurs parties. On calcul ensuite la TF de ces différentes parties (avec quelques subtilités en plus liées au codage RVB). On ne garde ensuite que les composantes de la TF qui sont importantes pour l'image. Pour faire simple on supposera que l'on ne conserve que les fréquences spatiales en dessous d'une valeur ν_0 .



1. Commenter la figure. Comment expliquer les défauts qui apparaissent ?
2. Que deviendrait l'image d'un point après la compression ?

Note : On peut considérer ici que l'image est une fonction continue $I(x,y)$. Un point noir peut être décrit par un dirac $I(x,y) = \delta(x)\delta(y)$.

■ Exercice 6 : fenêtre d'observation

On considère un signal $u(t)$, par exemple la tension du secteur. Ce signal a une durée infinie. On enregistre ce signal pendant une durée T_1 . On notera $u_1(t)$ le signal obtenu.

1. Montrer que la relation entre u_1 et u peut se mettre sous la forme $u_1(t) = u(t) \cdot f(t)$, où f est une fonction que l'on déterminera.
2. En déduire la relation entre les transformées de Fourier de u et u_1 .
3. Que se passe-t-il pour les basses fréquences ?
4. On suppose que u contient deux fréquences différentes mais proche. Quelle est la condition pour que l'on discerne ces deux fréquences dans la TF de u_1 ?

On considère un objet de phase dont on regarde la diffraction à l'infinie.

5. Quel serait l'effet d'un diaphragme dans le plan de l'objet ?
6. Que se passe-t-il si on regarde la diffraction d'un réseau ?

4.3 Paquet d'onde

■ Exercice 7 : description et évolution d'un paquet d'onde

On considère un paquet d'onde gaussien de la forme :

$$g(t) = \sin(2\pi f_0 t) \exp(-t^2/2\sigma^2)$$

1. Calculer la transformée de Fourier de ce paquet d'onde. On pourra utiliser les notations complexes.
2. Exprimer le signal en fonction de sa transformée de Fourier.

Ce signal se propage sur une longueur L dans un milieu d'indice $n(f)$. On l'observe de nouveau en fonction du temps. On notera $g_L(t)$ ce signal.

3. On considère dans un premier temps un signal harmonique $h(t)$ de fréquence f . Comment ce signal est-il modifié au bout d'une distance L ?
4. En déduire la transformée de Fourier de g_L .
5. Déterminer la fonction g_L dans le cas où $n(f)$ est une constante

4.4 Filtres

■ Exercice 8 : Effet d'un filtre et réponse indicielle.

On considère un filtre linéaire. On notera $e(t)$ l'entrée et $s(t)$ la sortie.

1. Donner la réponse du filtre à un signal périodique. On notera $A(f)$ cette réponse.
2. En déduire la réponse du filtre à un signal quelconque $e(t)$ en utilisant la transformée de Fourier.
3. Quelle est la relation entre $s(t)$, $e(t)$ et la TF de $A(f)$?

4. Commenter les trois exercices précédents.

La réponse indicielle est la réponse du filtre lorsque $e(t)$ est un dirac

5. Que vaut $s(t)$ dans ce cas ? Quelle est l'intérêt de cette manip ?

On suppose que la réponse du filtre à un dirac est une exponentielle décroissante de temps caractéristique τ .

6. Calculer la TF de $s(t)$.
7. Montrer que le filtre correspond à un passe bas d'ordre 1 (par exemple un RC).

4.5 Peignes de Dirac et CAN

■ Exercice 9 : Numérisation

On considère un signal $f(t)$ que l'on numérise une période d'échantillonnage T_e . Écrivons pour cela le signal échantillonné sous la forme :

$$f_e = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

1. Montrer que $f_e(t) = f(t) III_{T_e}(t)$.
2. On donne la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac (formule de Poisson) : $TF\{III_{T_e}(t)\} = \nu_e III_{\nu_e}(\nu)$.
3. Montrer que le spectre du signal échantillonné est obtenu en répliquant le spectre du signal réel avec une fréquence ν_e , puis en sommant les contributions de chaque réplique :

$$\hat{f}_e(\nu) = \nu_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu - n\nu_e)$$

■ Exercice 10 : Théorème de Shannon-Nyquist

Sous quelles conditions un signal échantillonné est-il fidèle au signal réel (analogique) dont il est issu ? Nous pouvons au moins affirmer que signal réel et signal échantillonné sont identiques (au sens où ils contiennent la même information) si leurs transformées de Fourier coïncident. En réalité, il est possible de faire coïncider les spectres de Fourier de ces deux signaux pour peu que la fréquence d'échantillonnage soit suffisante (Nyquist, 1927). Ceci est précisé par le théorème de Shannon-Nyquist qui s'énonce de la façon suivante.

Lorsqu'un signal $f(t)$ a un spectre à support borné ($\hat{f}(\nu) = 0$ pour $|\nu| > \nu_{max}$ où ν_{max} est la fréquence maximale contenue dans le signal), il est possible d'échantillonner ce signal sans perdre d'information : il suffit pour cela de choisir une fréquence d'échantillonnage $\nu_e > 2\nu_{max}$. On pourra alors reconstruire $f(t)$ parfaitement à partir des échantillons $f(nT_e)$ avec $T_e = 1/\nu_e$.

On se propose de démontrer ce théorème et de vérifier que le signal échantillonné permet bien de reconstruire le signal réel.

1. Reprendre les réponses de l'exercice précédent.
2. En déduire le critère de Shannon : si $\nu_e > 2\nu_{max}$, alors le spectre du signal échantillonné coïncide avec le spectre du signal réel sur l'intervalle de fréquence $[-\nu_e/2; \nu_e/2]$, et donc pour toutes les fréquences contenues dans le signal réel.

Du fait de la non-perte d'informations lors de l'échantillonnage, montrons qu'il est possible de reconstruire le signal analogique à partir du signal numérique de façon totalement exacte.

3. Montrer que pour reconstruire $f(t)$ à partir de $f_e(t)$, il suffit de faire passer $f_e(t)$ dans un filtre passe-bas idéal de fonction de transfert :

$$H(\nu) = \frac{1}{\nu_e} \Pi\left(\frac{\nu}{\nu_e}\right).$$

4. En déduire que :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) \text{sinc}[\pi \nu_e(t - nT_e)].$$

■ Exercice 11 : Série de Fourier

On considère un signal $e(t)$ nul excepté sur l'intervalle $[0, T]$. Cette fonction contient moins d'information qu'une fonction définie sur $]-\infty, \infty[$. On cherche donc à simplifier sa transformée de Fourier. Pour ce faire on commence par périodiser cette fonction, en recopiant ses valeurs sur tout les intervalles $[nT, (n+1)T]$.

1. Montrer que cette opération correspond à une convolution avec une fonction $g(t)$ quel l'on précisera.
2. En déduire la transformée de Fourier de la fonction périodique.

■ Exercice 12 : Transformée de Fourier numérique : « la totale »

On considère un signal $e(t)$. Ce signal est enregistré par l'appareil pendant une durée T . Il est ensuite numérisé avec une période d'échantillonnage T_e . On obtient le signal $f(t)$.

1. Montrer que $f(t)$ peut s'exprimer comme un produit de la fonction $e(t)$ avec un peigne de Dirac et une fonction porte.

Pour comprendre la TF numérique il est plus simple de considérer quel le signal $f(t)$ est transformé en un signal périodique $g(t)$.

2. Quelle est la relation entre $g(t)$ et $e(t)$?
3. En déduire l'expression de la TF de g en fonction de la TF de e .
4. Représenter la TF de g en faisant apparaître les constantes T et T_e . On pourra considérer le cas où $e(t)$ est un paquet d'onde gaussien.

Pour être totalement rigoureux il faudrait aussi tenir compte du fait que l'appareil réalise une intégration pour faire sa mesure (voir exercice sur la fonction d'appareil).

4.6 Diffraction suite

Les lois de convolution de la transformée de Fourier apportent une aide particulièrement précieuse pour comprendre les spectres de Fourier de combinaisons de structures diffractantes.

Notons $t(X, Y)$ la transmittance d'un objet diffractant placé autour de la position $X = 0$ et $Y = 0$, et $I(u, \nu)$ l'intensité diffractée correspondante. Supposons maintenant qu'on place un nombre N de ces objets aux positions $(X_N; Y_N)$. Alors la transmittance totale de cet ensemble d'objets identiques peut s'écrire :

$$t_{\text{tot}}(X, Y) = t(X, Y) * \left(\sum_{n=1}^N \delta_{X_N} \delta_{Y_N} \right) \quad \text{où} \quad \delta_{X_N} = \delta(X - X_N) \quad \text{et} \quad \delta_{Y_N} = \delta(Y - Y_N)$$

Comme la transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions est le produit des transformées de Fourier des fonctions, l'intensité totale diffractée s'écrit alors :

$$I_{\text{tot}}(u, v) = I(u, v) \cdot \left| \sum_{n=1}^N \hat{\delta}_{X_N}(u) \hat{\delta}_{Y_N}(v) \right|^2$$

Comme $\delta(X - X_N) \xrightarrow{TF} e^{-i2\pi u X_N}$, nous obtenons finalement :

$$I_{\text{tot}}(u, v) = I(u, v) \cdot \left| \sum_{n=1}^N e^{-i2\pi u X_N} e^{-i2\pi v Y_N} \right|^2$$

Dans cette expression apparaissent deux facteurs :

- La quantité $I(u, v)$ décrit la distribution de la lumière diffractée par un objet unique. Elle est spécifique de la forme, taille, orientation et nature de l'objet (et aussi de la longueur d'onde du rayonnement). On l'appelle *facteur de forme*.
- La quantité $\sum_{n=1}^N e^{-i2\pi u X_N} e^{-i2\pi v Y_N}$ est indépendante des propriétés des objets individuels, et ne dépend que de leur disposition dans l'espace des objets. On l'appelle *facteur de structure*.

■ Exercice 13 : diffraction par un ensemble d'objets identiques

A partir des considérations précédentes, étudier les figures de diffraction données par :

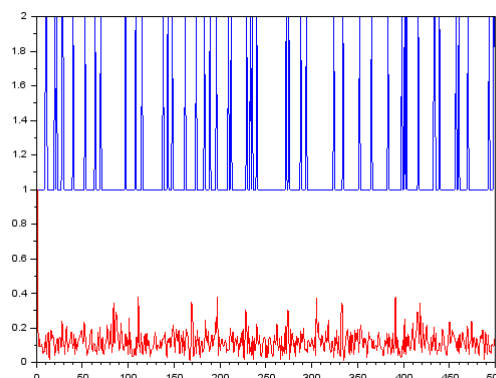
1. deux fentes infiniment longues de largeur finie a selon OX et séparées d'une distance $d > a$.
2. un réseau d'amplitude en transmission, constitué d'une infinité de fentes infiniment longues de largeur finie a selon OX et séparées d'une distance $d > a$.

■ Exercice 14 : diffraction par une poudre de lycopode

On considère une poudre de lycopode répartie dans le plan de diffraction. On suppose que la poudre peut être modélisée par des disques opaques de rayon a répartis de manière aléatoire.

1. Rappeler le principe de Babinet.
2. Montrer que le système est équivalent à un ensemble d'ouvertures circulaires.

Pour faire simple on considère le problème à une dimension. La fonction de transmission d'une ouverture est donc convoluée par une fonction $f(x)$ correspondant à N pics de Dirac répartis aléatoirement sur l'intervalle $[-L/2; L/2]$. La figure ci-contre représente la fonction $f(x)$ ainsi que sa TF $\hat{f}(u)$ qui n'est autre que le facteur de structure.



3. Montrer que pour $u=0$, le facteur de structure présente un pic proportionnel à N^2 .
4. Donner l'expression de $\hat{f}(u)$ pour $u \neq 0$. Représenter la somme dans le plan complexe. Montrer

que le problème correspond à un marcheur aléatoire à dimension.

5. Montrer que pour $u \neq 0$, $\hat{f}(u)$ fluctue autour d'une valeur proportionnelle à N .
6. En déduire la figure de diffraction de la poudre de lycopode.