MESURES DE LONGUEURS

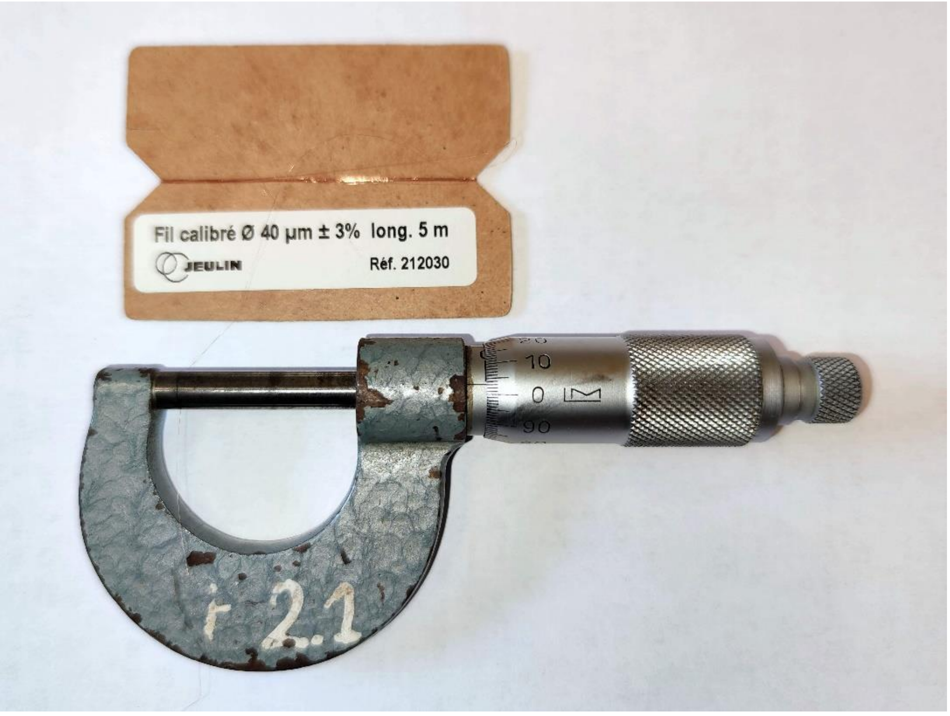
Ce sujet ne présente pas de difficulté particulière quant au contenu. De nombreuses manipulations déjà vues dans d'autres montages peuvent être présentées. L'intitulé étant à caractère métrologique, il faut soigner la précision des mesures et effectuer une analyse critique des résultats obtenus.

I MESURE DE PETITES LONGUEURS

On peut étudier la largeur d'une fente fine, le diamètre moyen des spores de Lycopodes (cf. montage diffraction), celui d'un cheveu ou d'un fil très fin. On présente ici la dernière solution car on dispose d'un fil de cuivre calibré.

I.1 Mesure directe à l'aide d'un palmer

L'expérience est simple. Il faut juste éviter d'écraser ou casser le fil lorsqu'on le bloque dans les mâchoires de l'appareil. Le serrage doit donc s'effectuer via le limiteur de couple (la petite molette de friction située à l'extrémité du tambour).

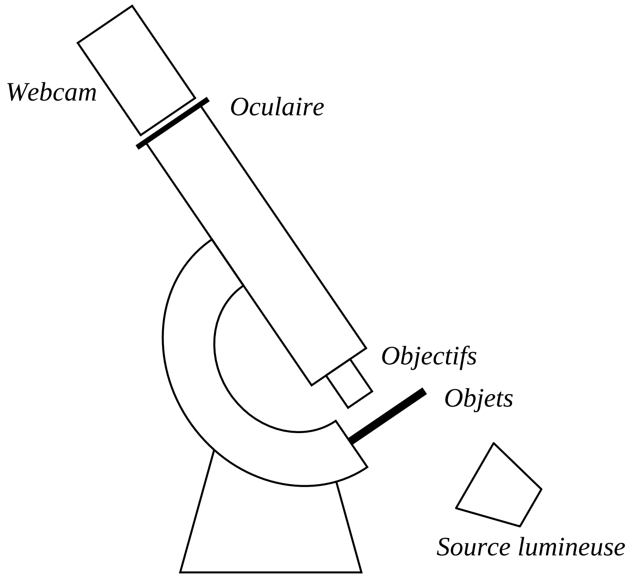


On obtient un résultat proche de 30 µm qui ne recoupe pas la donnée annoncée par le vendeur (40,0 $\pm$ 1,2 µm). Cet écart peut être dû à une compression du fil mais il faut remarquer qu'on atteint aussi la limite de ce qui est mesurable précisément avec cet instrument.

I.2 Mesure par grossissement

Le diamètre du fil étant très petit, il vient naturellement à l'esprit d'essayer d'en former une image agrandie pour améliorer la précision de la mesure. Pour obtenir un grossissement important, on utilise un microscope couplé à une webcam pour l'observation ainsi qu'une mire micrométrique pour avoir un étalon de longueur.

Montage :

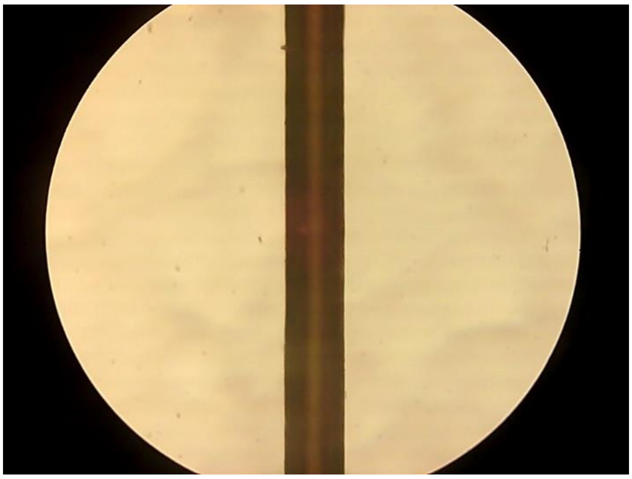


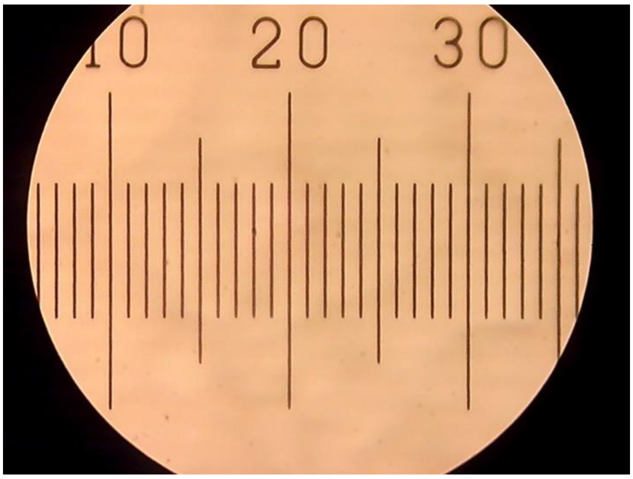
Oculaire : ×10

Objectifs : triplet × 4, × 20, × 40

Objets : fil de cuivre calibré et mire étalon 1 mm (100 × 0,01 mm)

L'axe de la webcam doit être alignée au mieux avec l'axe optique du microscope et il faut ajuster sa distance par rapport à l'oculaire pour qu'elle ne diaphragme pas le faisceau issu du microscope. Ces réglages importants pour avoir une image de bonne qualité sont grandement facilités si on dispose d'un adaptateur pour coupler les deux appareils (on peut en réaliser à l'aide d'une imprimante 3D). L'observation de l'objet doit se faire par étapes en augmentant progressivement le grandissement de l'objectif en réalignant à chaque fois l'objet avec l'axe optique du microscope. Il faut faire attention à ne pas écraser ce qu'on regarde lorsqu'on recherche l'image avec les objectifs × 20 et × 40 car la distance de mise au point est alors très faible. Dans ce cas, il vaut mieux commencer par rapprocher l'objectif le plus près possible de l'objet et faire faire ensuite la mise au point en remontant lentement la tourelle du microscope. Voici à titre indicatif le type d'image qu'on peut obtenir avec un oculaire ×10 et un objectif × 40 :





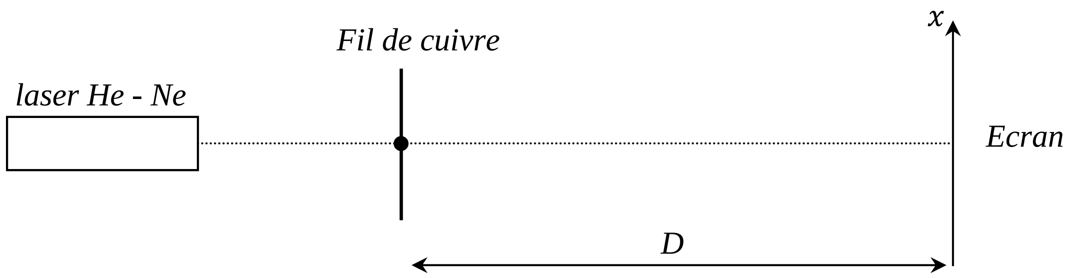
On peut alors se servir d'un logiciel comme ImageJ pour mesurer le diamètre du fil après avoir réalisé un étalonnage en longueur à l'aide de la mire. Cette technique de mesure répétée 10 fois a donné le résultat suivant :

$$\boxed{\emptyset = 37 \pm 1\ \mu m}$$

I.3 Mesure par diffraction

Le fil étant très fin, on peut mesurer son diamètre en étudiant sa figure de diffraction. Il suffit de l'éclairer directement avec un laser et observer la figure sur un écran. Il n'y a pas de contrainte sur la position de l'écran car la condition de champ lointain est très rapidement respectée (cf. **[2]**, p. 191) donc le profil d'intensité de la figure de diffraction peut être décrit par la théorie de Fraunhofer.

Montage :



La figure obtenue ressemble au motif de diffraction par une fente à l'ordre zéro près, ce qui peut se justifier à l'aide du théorème de Babinet. Cette explication n'est pas totalement rigoureuse car le complémentaire d'une fente est un trait et pas un objet en trois dimensions comme le fil mais cette approximation reste correcte si on s'en tient aux premiers lobes de la figure (cf. cf. **[2]**, p. 112).

Mesures :

On peut déterminer le diamètre du cheveu en mesurant la distance entre quelques minimas autour de la tache centrale de diffraction[1] en vérifiant qu'on reste dans l'approximation des petits angles. Dans ce cas, l'écart Δx entre deux minimas successifs permet d'obtenir le diamètre $\emptyset$ du fil par la relation $\Delta x = \lambda D/\emptyset$. On peut répéter plusieurs fois la mesure avec différentes valeurs de D pour évaluer la reproductibilité des résultats en gardant une distance suffisamment grande pour avoir une mesure précise. En procédant de la sorte nous avons obtenu le résultat suivant :

$$\boxed{\emptyset = 37{,}0 \pm 0{,}8\ \mu m}$$

Cette valeur recoupe celle obtenue par grandissement. On constate qu'il y a un léger écart avec la donnée fournie avec le fil (40 µm à 3 % près). Nos deux mesures donnant le même résultat, on peut supposer que la garantie annoncée n'est pas complètement tenue.

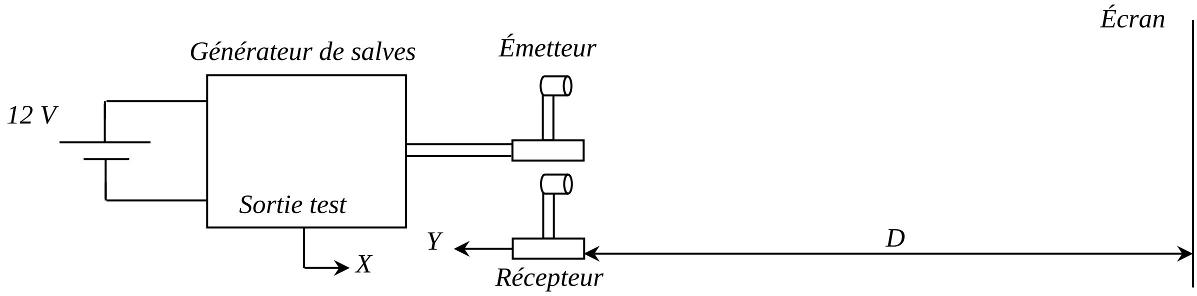
II MESURE DE LONGUEUR PAR TELEMETRIE

Cette technique consiste à envoyer un faisceau sur une cible qui la renvoie vers l'appareil. La mesure du temps mis par le faisceau pour faire l'aller-retour permet de déterminer la distance entre l'instrument et la cible connaissant la vitesse de l'onde utilisée (onde lumineuse ou acoustique). Ce type d'appareil permet de mesurer facilement des longueurs assez grandes (taille d'une pièce par exemple). Les premiers modèles grand public utilisaient des ondes acoustiques ultrasonores et on trouve désormais des télémètres lasers performants à des prix raisonnables. On présente ici le principe d'un télémètre acoustique à l'aide de transducteurs ultrasonores d'enseignement[2] car les mesures sont plus simples (vitesse du son dans l'air nettement plus faible que celle de la lumière).

[1] On rappelle que la tache centrale est deux fois plus large que les autres lobes.

[2] Ce sont les mêmes que ceux présents dans les télémètres US.

II.1 <u>Montage</u>



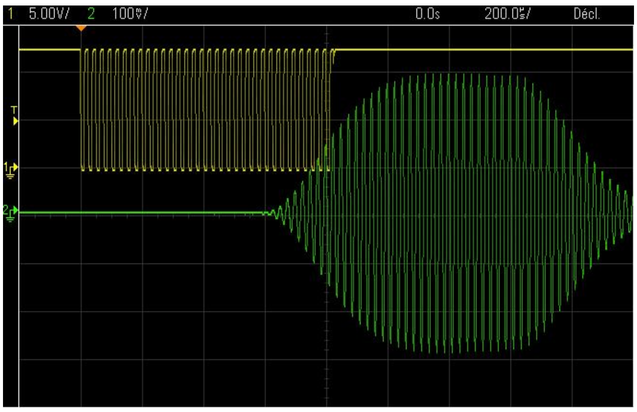
Emetteur, récepteur : éléments Moduson de chez Jeulin par exemple

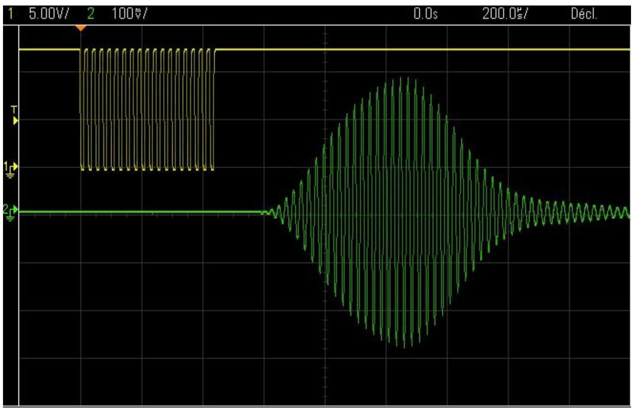
Générateur : module EME 40 Electrome en mode salves rapides

II.1.1 <u>Réglage du générateur de salves</u>

On place les deux transducteurs l'un en face de l'autre et on synchronise l'oscilloscope sur la sortie test du module EME 40. On peut vérifier que la fréquence du signal émis est proche de 40 kHz car elle permet une réponse optimale des transducteurs piézoélectriques puisqu'elle correspond à leur fréquence propre d'oscillation. Si on envoie quelques périodes (ajustement via le rapport cyclique du générateur), on note que la réponse est plus longue que l'émission (les signaux représentés ici ont été moyennés pour éliminer le bruit) :

Cela est dû au fait que les cellules sont des oscillateurs à facteur de qualité important donc le récepteur met un certain temps pour réagir à l'excitation (d'où le temps de croissance des oscillations plus long que la durée de la salve) et il continue à vibrer par la suite comme le fait un diapason ou une cloche excités par une percussion. Le signal obtenu avec une excitation brève étant assez faible, on peut l'augmenter un peu en allongeant la durée de la salve :

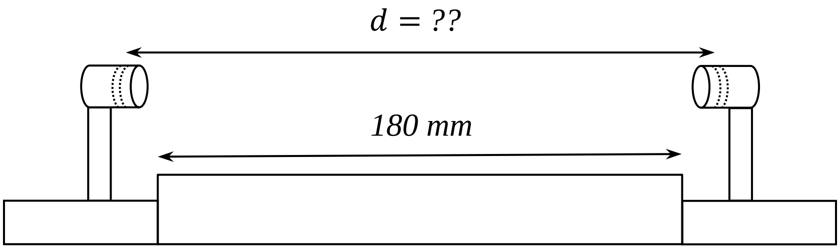


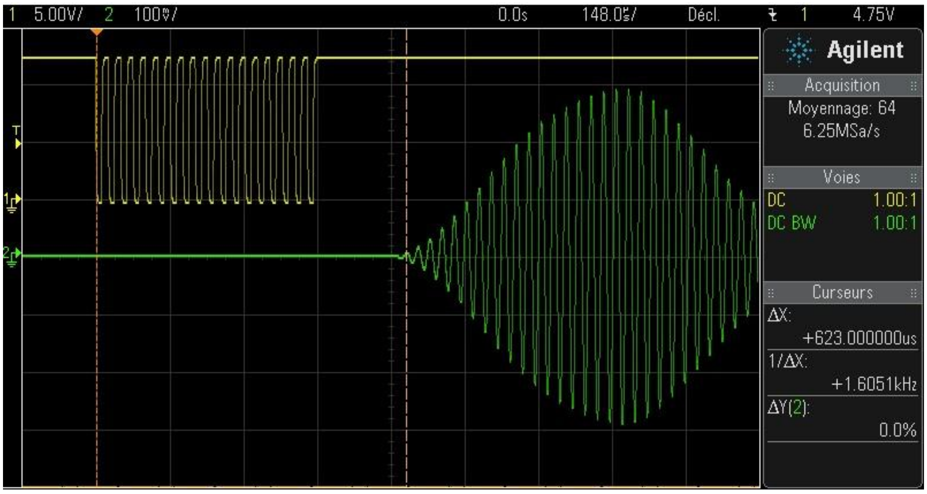


On finit par atteindre un palier (oscillogramme à gauche) donc il y a une limite à partir de laquelle il n'y a plus vraiment d'intérêt à prolonger l'émission sur laquelle on peut se caler (figure à droite).

II.1.2 Première mesure

La mesure du décalage de temps Δt entre le signal émis et le signal reçu pour en déduire la distance parcourue d se heurte à un problème d'origine pour définir d puisqu'on ne connait pas précisément la position des cellules piézoélectriques dans les boitiers. Un autre souci concerne le choix de l'origine des temps et l'appréciation du moment où l'on considère que le signal est détecté sur le récepteur. Une solution pour éliminer ces biais consiste à faire une première mesure en prenant une référence de position facile à repérer (la base des boitiers par exemple) et en se fixant un protocole de mesure qu'on conserve par la suite. On se sert ici d'une cale de 180 mm de long et on détermine Δt en plaçant un des curseurs sur le premier front du signal émis et le deuxième sur le premier maximum observé pour le signal reçu[3] :





On obtient $\Delta t = 623$ µs dans notre exemple. L'expérience ayant eu lieu à $21{,}3\ °C$, le Handbook nous donne une vitesse de $344\ m.s^{-1}$ donc la distance qu'on peut déduire de Δt vaut :

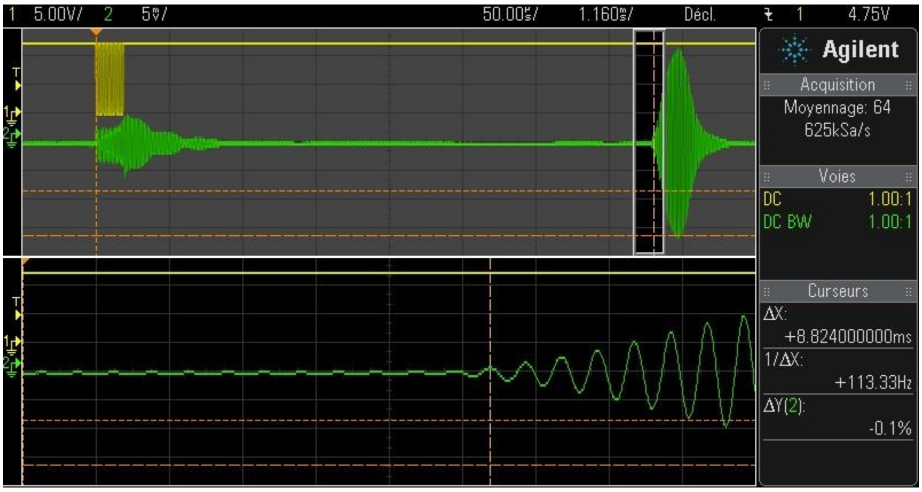
$$d = \mathrm{v}\,\Delta t = 21{,}4\ cm$$

Le fait qu'on obtienne une valeur supérieure aux $18\ cm$ de la cale est logique car les transducteurs sont un peu reculés par rapport à la base des boitiers mais une estimation visuelle de leur position ne permet pas d'expliquer entièrement l'écart de $3{,}4\ cm$ avec la mesure. La différence est liée au comportement des cellules piézoélectriques. On a vu que ces oscillateurs mettent un certain temps à réagir à l'excitation et il faut que le signal sorte du bruit pour qu'on puisse le détecter (on commet par exemple une erreur $\ell = \mathrm{v}/f \approx 340/40000 \approx 8\ mm$ si on loupe une oscillation).

[3] On peut s'aider de la fonction zoom de l'oscilloscope pour les placer précisément.

II.1.3 Mesure d'une distance

On place maintenant l'émetteur et le récepteur cote a cote en les alignant à une distance D d'un écran et on mesure le décalage Δt avec le même protocole que précédemment. On peut garder le même réglage pour le premier curseur et zoomer sur le signal reçu pour repérer le premier maximum observé. Un point important à noter est que le signal récupéré décroît avec la distance donc le premier pic repéré lors de la première mesure peut disparaitre dans le bruit si on reste avec le même calibre. La nouvelle mesure doit donc être faite en ajustant la sensibilité de la voie 2 pour avoir un signal reçu de même amplitude sur l'écran. Voici à titre indicatif le résultat d'une mesure pour $D = 150\ cm$:



Comme l'onde fait un aller-retour, on a, dans les conditions de l'expérience :

$$D = \frac{\text{v}\ \Delta t - d}{2} = \frac{344 \times 8{,}82.10^{-3} - 0{,}034}{2} = 150{,}1\ cm$$

Ce résultat brut doit être évidemment être pondéré par un calcul d'incertitude et en gardant à l'esprit l'erreur qu'on peut faire si on loupe une oscillation

II.2 Correction en température dans les télémètres

L'inconvénient principal quand on utilise des ondes acoustiques en télémétrie est la dépendance en température de leur vitesse. Les appareils du commerce possèdent un système de mesure de la température ambiante pour en tenir compte. On peut le vérifier par l'expérience suivante :

Télémètre COGEX SW 104J

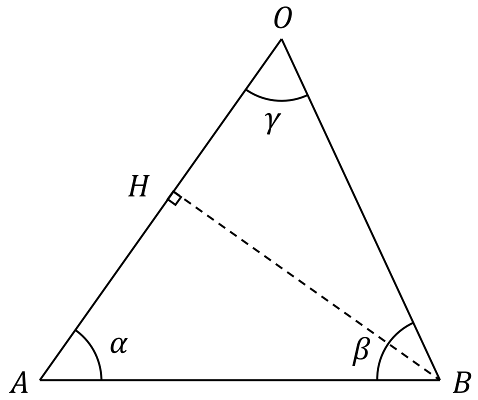
On peut placer un réglet métallique de 1 m sur une paillasse entre un écran et l'extrémité du télémètre servant de référence à la mesure (attention, on peut choisir cette référence par rapport à une extrémité ou l'autre de l'appareil). On effectue une première mesure à l'ambiante. Si tout se passe bien, le résultat doit concorder avec l'indication de la règle. On chauffe ensuite modérément le télémètre avec un sèche-cheveux en l'éloignant de la paillasse, puis on refait une mesure en remettant l'appareil à la même place. On doit alors obtenir une valeur supérieure à un mètre. L'écart s'explique par le fait qu'on « trompe » l'appareil en le chauffant. Si l'air dans l'espace de mesure est toujours à l'ambiante, le temps d'un aller-retour est inchangé. Mais comme le télémètre à un capteur de température, il pense qu'il fait plus chaud donc il calcule la distance à partir d'une valeur de vitesse plus élevée d'où la distance affichée plus importante.

III PRINCIPE D'UNE MESURE PAR TRIANGULATION

Le système GPS est basé sur un principe similaire[4]. On propose ici une illustration simple dans un plan. Dans ce cas, la triangulation consiste à déterminer la position d'un point O à partir de points de référence A et B. O est le troisième sommet du triangle ABO dont la longueur du côté AB est connue et les angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{BAO}$ sont mesurés. Cette technique est particulièrement adaptée à la mesure de grandes longueurs pour lesquelles l'utilisation des techniques courantes (mètre ruban par exemple) est délicate, voire impossible.

III.1 Principe de la mesure

On considère un triangle quelconque et on note α, β et γ les angles des trois sommets de ce triangle. Soit H la base d'une des hauteurs du triangle correspondant à un des sommets pris comme point de référence (B dans notre exemple) :



On peut alors écrire les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\text{- Triangle } ABH : sin\alpha = BH/AB \rightarrow BH = AB\ sin\alpha \\ \text{- Triangle } OBH : sin\gamma = BH/OB \rightarrow BH = OB\ sin\gamma\end{array}\right\} \rightarrow AB\ sin\alpha = OB\ sin\gamma$$

On obtient l'amorce de la loi des sinus dans un triangle : côté/(sinus de l'angle opposé) = constante = 2R avec R le rayon du cercle dans lequel est inscrit le triangle.

Les points A et B étant les références, on cherche à déterminer la distance à laquelle se situe O par rapport à ces points en mesurant les angles α et β. On peut remplacer l'angle γ dans l'expression précédente sachant qu'on a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ dans le triangle et exprimer la distance OB. On a :

$$OB = \frac{\sin\alpha}{sin[\pi - (\alpha + \beta)]} AB$$

Comme $\sin(\pi - a) = \sin a$, on obtient finalement :

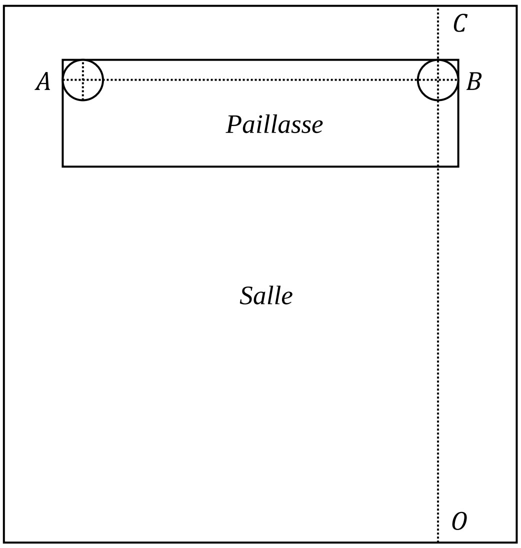
$$\boxed{OB = \frac{\sin\alpha}{sin(\alpha + \beta)} AB}$$

[4] Sauf qu'il utilise des mesures de distances au lieu d'angles (on parle de trilatération).

III.2 Montage

On propose de mesurer la longueur d'une salle de cours à l'aide d'une mesure par triangulation. Les références A et B de référence sont pris aux deux extrémités d'une paillasse et le point O à repérer est constitué d'une croix dessinée sur une feuille de papier accroché sur le mur du fond de la salle. La mesure des angles peut se faire à l'aide de goniomètres ou avec des spectroscopes à prisme sur lesquels on enlève l'élément dispersif.

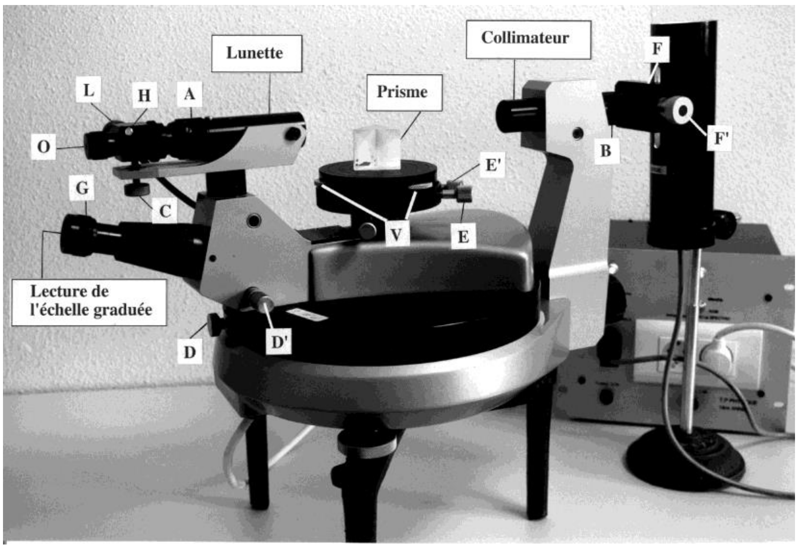
Mise en place des différents éléments :



On installe deux goniomètres aux extrémités de la paillasse en les alignant sur un des bords. Un repère (un support d'aiguille de boussole de démonstration par exemple) est placé au centre du plateau des deux appareils. Ces repères constituent les points A et B de notre triangle ABO. On accroche une feuille avec une croix (point O) sur le mur opposé à la paillasse de façon à obtenir au mieux un axe OB perpendiculaire à ce mur (on peut s'aider d'un laser placé en B et d'un miroir plaqué contre le mur en O pour affiner ce réglage : le rayon réfléchi doit retourner sur le laser lorsque l'axe OB est perpendiculaire au mur, si le miroir est bien plaqué au mur). Les plateaux des goniomètres doivent être horizontaux, situés à la même hauteur et le point central de la croix (point O) soit doit être au même niveau pour que la mesure des angles se fasse dans le plan du triangle ABO.

Mesure des angles avec un goniomètre :

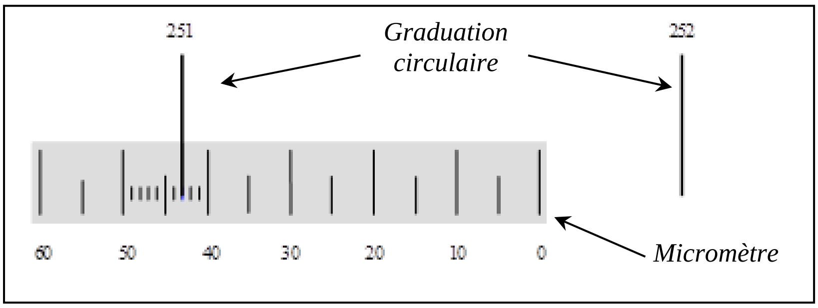
L'appareil est représenté sur la photographie suivante



Le collimateur ne servant pas ici, l'orientation du goniomètre doit être ajustée afin qu'il ne gêne pas la mesure des angles. On ajuste l'horizontalité de l'appareil avec les vis situées sous le goniomètre en s'aidant d'un niveau à bulle. La mesure des angles s'effectue avec la lunette et l'oculaire de visé des angles :

A : tirage du tube portant l'oculaire de la lunette (bague de réglage de la lunette)
C : réglage de l'inclinaison de la lunette (ne pas modifier)
D : blocage de la plate-forme de la lunette
D' : vis micrométrique déplaçant le support de lunette le long du cercle gradué
G : mise au point pour la lecture du vernier
H : basculement de la lame semi-transparente (ou semi-réfléchissante) inclinée à 45°
L : lampe éclairant le réticule
O : bague de réglage de l'oculaire

La lunette est constituée d'un objectif, d'un oculaire et d'un réticule (deux fils fins perpendiculaires). On modifie la mise au point avec la bague **A** pour voir nettement le point visé. Cette lunette peut tourner autour de l'axe vertical du goniomètre et sa direction angulaire est déterminée à l'aide d'une graduation circulaire fixe observable avec l'oculaire de visé des angles **G**. Cette graduation circulaire, visible à travers l'oculaire **G** du goniomètre, est graduée en degrés. Un micromètre solidaire de la lunette, gradué en minutes d'arc (symbole :' ; 1° = 60'), se déplace devant cette échelle. La position de la lunette est donnée, pour les degrés, par le chiffre de la graduation principale se trouvant dans la plage du micromètre et, pour les minutes, par la division du micromètre coïncidant avec cette même graduation. Ainsi sur la figure ci-dessous, la valeur lue correspond à θ = 251° 43' :



Dans le cas où les deux graduations principales visibles dans l'oculaire G coïncident chacune avec une extrémité de la plage du micromètre, il y a deux lectures possibles mais elles sont évidemment équivalentes (251° 60' ou 252° 00' par exemple).

Manipulation :

On mesure précisément la distance AB avec un mètre ruban ou un télémètre laser et les angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{BAO}$ avec les goniomètres. On en déduit la distance OB avec la relation du § I.1 et on peut comparer le résultat obtenu avec une mesure au télémètre (on peut éventuellement mesurer la distance BC avec un mètre ruban ou un télémètre pour en déduire la longueur de la salle).

Calcul d'incertitude :

$OB = f(AB, \alpha, \beta)$. Si on suppose les incertitudes indépendantes, on a :

$$dOB = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial AB}\right)^2 (dAB)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 (d\alpha)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 (d\beta)^2}$$

On a, avec l'expression de OB donnée au § III.1 :

$$\frac{\partial f}{\partial AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} AB = \frac{\sin\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} AB$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} AB$$

D'où :

$$dOB = \sqrt{\left(\frac{sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} dAB\right)^2 + AB^2 \left[\frac{sin^2\beta.(d\alpha)^2 + sin^2\alpha.cos^2(\alpha+\beta).(d\beta)^2}{\sin^4(\alpha+\beta)}\right]}$$

Soit, avec l'expression de OB :

$$\frac{dOB}{OB} = \sqrt{\left(\frac{dAB}{\mathrm{AB}}\right)^2 + \left(\frac{sin\beta.d\alpha}{sin\alpha.\sin(\alpha+\beta)}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{tg(\alpha+\beta)}\right)^2}$$

On a $\beta = \pi/2$ dans notre montage donc $\sin\beta = 1$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha$ et $tg(\alpha + \beta) = tg(\alpha+\pi/2) = -1/tg\ \alpha$, d'où :

$$\frac{dOB}{OB} = \sqrt{\left(\frac{dAB}{\mathrm{AB}}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 + (tg\alpha\ d\beta)^2} = \sqrt{\left(\frac{dAB}{\mathrm{AB}}\right)^2 + \left(\frac{2\ d\alpha}{\sin 2\alpha}\right)^2 + (tg\alpha\ d\beta)^2}$$

De plus, si on considère que les incertitudes de mesure sur les angles α et β sont identiques, on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{\Delta OB}{OB} = \sqrt{\left(\frac{\Delta AB}{\mathrm{AB}}\right)^2 + \left(\frac{4}{sin^2 2\alpha} + tg^2\alpha\right)(\Delta\alpha)^2}}$$

On rappelle que cette formule n'est valable que pour $\beta = \pi/2$ et avec $\Delta\alpha = \Delta\beta$ exprimé en radians.