

BIREFRINGENCE, POUVOIR ROTATOIRE

I PREAMBULE

Des rappels sont disponibles en annexe.

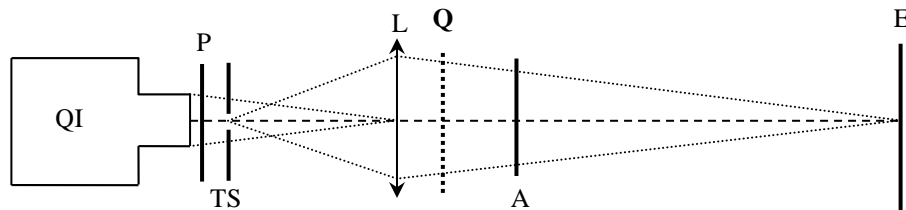
II MISE EN EVIDENCE DE L'ANISOTROPIE OPTIQUE

On peut montrer le phénomène de double réfraction dans un cristal de calcite en l'éclairant avec un laser non polarisé. On obtient deux rayons, ce qui met en évidence la présence de deux indices.

III ANISOTROPIE LINEAIRE : CAS DES LAMES MINCES

Mettre en évidence les deux lignes neutres rectilignes d'une lame mince dans du quartz taillé // à l'axe optique C. Monter qu'une polarisation rectiligne incidente reste rectiligne à la traversée de la lame mince uniquement quand elle est orientée suivant deux directions perpendiculaires (lignes neutres).

III.1 Détermination des lignes neutres d'une lame mince



TS : trou source

Q : lame de phase $\lambda/4$, $\lambda/2$...

On commence par croiser le polariseur et l'analyseur pour avoir un fond sombre sur l'écran. On intercale la lame Q et on la tourne. On s'aperçoit alors qu'il existe deux directions qui rétablissent l'extinction. Ce sont les lignes neutres de la lame.

IV DÉTERMINATION D'UNE DIFFÉRENCE DE MARCHE D'UNE LAME MINCE AU COMPENSATEUR DE BABINET

[1], p. 292 et [2], p. 150.

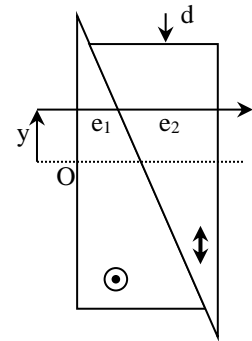
Mesure d'une différence de marche (-3λ à 3λ) d'une lame mince au compensateur de Babinet (différence de marche de quelques λ avec l'axe optique dans le plan de la lame).

Un compensateur de Babinet est formé de deux lames prismatiques de quartz de même épaisseur, d'angle α très petit, et dont les axes optiques sont croisés. Les indices du quartz sont n_e et n_o . On dispose le compensateur entre polariseur et analyseur croisés orientés à 45° des lignes neutres des axes optiques du compensateur. Pour un déplacement d entre les bi prismes, la différence de marche δ entre

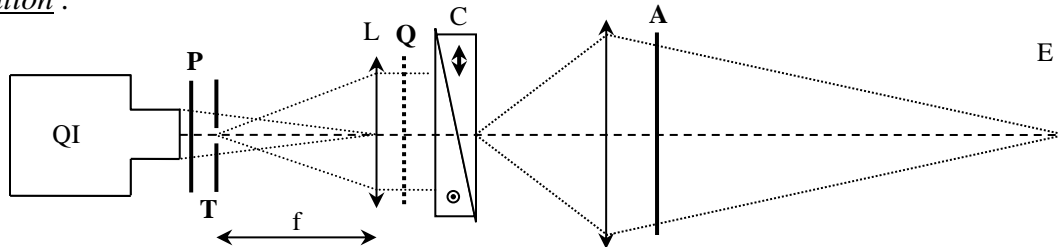
les deux vibrations propres se propageant dans le compensateur à une côte y par rapport au centre du compensateur est donnée par la relation :

$$\delta = (2y + d) \operatorname{tg} \alpha (n_e - n_o)$$

La transmission entre polariseur et analyseur croisés est donnée par $\sin^2(\pi\delta/\lambda)$



Manipulation :



Étalonnez le compensateur en lumière monochromatique (en utilisant des filtres interférentiels ou un monochromateur) en mesurant le déplacement d_0 associé au déplacement d'une frange noire (notez que d_0 correspond ici à $2i$ avec i = interfrange). Mesurez d pour différentes valeurs de λ . Tracez la courbe d_0 en fonction de λ . Calculez le rapport λ/d_0 . Pourquoi ce rapport est-il constant ? Montrez qu'il est égal à $(n_o - n_e) \operatorname{tg} \alpha$ si α est l'angle du prisme et $(n_o - n_e)$ la biréfringence du compensateur. Repassez ensuite en lumière blanche. Positionnez la frange noire au centre du Babinet (indiqué par le double liseré gravé). Notez alors la position correspondante sur le barillet tournant de l'appareil : la valeur lue correspond à la position zéro du Babinet. Placez la lame biréfringente et ramenez la frange noire au centre du Babinet en tournant le barillet qui déplace les deux lames prismatiques. Notez la valeur d du déplacement. En déduire la différence de marche $\delta = \lambda d/d_0$ introduite par la lame.

Attention au choix de la lame inconnue. Prendre une lame quart d'onde $\lambda/4$ ou demi-onde $\lambda/2$ **mais d'ordre zéro** ($k = 0$). Dans ce cas, la différence de marche de la lame est exactement $\delta = \lambda/4$ ou $\delta = \lambda/2$. Dans le cas d'une lame de phase d'ordre multiple on a $\delta = \lambda/4 + k\lambda$ ou $\delta = \lambda/2 + k\lambda$ avec $k \gg 1$. Les franges sont alors invisibles à travers le compensateur de Babinet car il ne peut mesurer que quelques ordres d'interférences ($k = 3$ ici).

IV.1 Mise en évidence des couleurs d'interférence d'une lame mince

cf. [1], p. 286.

IV.2 Détermination de la direction lente ou rapide d'une lame mince biréfringente

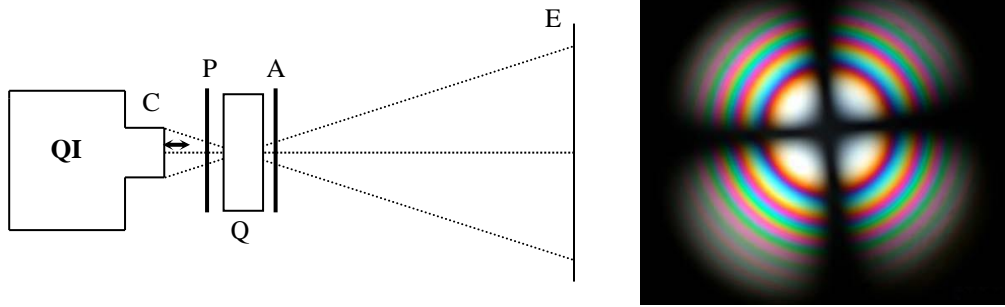
IV.2.1 Principe

On peut déterminer l'axe lent ou rapide d'une lame mince à partir de la figure de d'interférence d'un cristal de quartz ou de calcite placé entre polariseur (P) et analyseur (A) croisés et éclairé en lumière très convergente (méthode dite de conoscopie optique).

IV.2.2 Montage

[2], p.157

L'exemple suivant représente la figure d'interférence de la calcite :



C : $\times 6$ (ou oculaire de microscope)

Q : lame de Spath (ou Quartz) taillée perpendiculairement à l'axe optique d'épaisseur $e = 3 - 4$ mm

Faire converger le faisceau de la lampe QI au maximum. Placer polariseur et analyseur croisés de part et d'autre du point de convergence (pas trop près pour éviter de les endommager. Si la lampe est trop puissante, on conseille alors de placer un filtre anti calorique à la sortie de la source. Placer la lame Q au point de convergence du faisceau et observer sur un écran éloigné à un ou deux mètres. Le cristal biréfringent crée une différence de marche $\delta = (n_e - n_o) \cdot e \cdot \sin^2 \theta$ (cf. équation A16 de l'annexe) entre deux ondes polarisées orthogonalement qui croît avec l'inclinaison θ du rayon par rapport au centre correspondant à la direction de l'axe optique C (cf. schéma dans la figure). La figure d'interférence présente en lumière blanche (cf. photo dans la figure) des anneaux colorés qui se resserrent de plus en plus au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'axe optique (cf. anneaux de Newton). Ces anneaux sont barrés par une croix noire orientée suivant les directions de P et A.

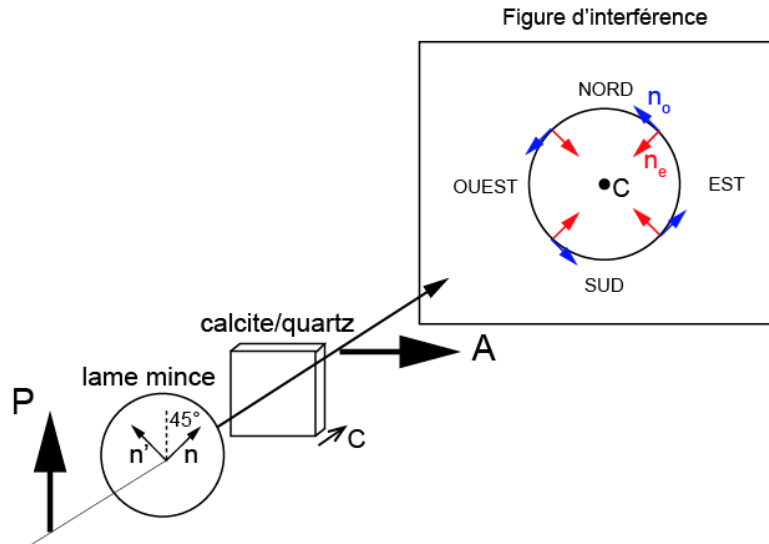
On interpose la lame mince inconnue entre les polariseurs et analyseurs croisés avant ou après le quartz (ou la calcite), mais entre P et A, avec ses lignes neutres « n » et « n' » à 45° de P et de A (figure suivante). En pratique pour placer la lame à 45° , il faut commencer par placer P à 45° de la verticale et placer A pour obtenir l'extinction. Mettre la lame, obtenir l'extinction à nouveau. Tourner P et A de 45° exactement pour les replacer vertical (NS) et horizontal (OE).

Observations :

- dans deux cadrans du système d'anneaux (à $\pm 45^\circ$, dans les directions SO-NE et NO-SE) les cercles isochromatiques s'éloignent du centre alors qu'ils s'en éloignent dans les deux autres.

- le centre noir du système d'anneaux se dédouble (cf. [2], p. 159, figure 23). L'axe rapide de la lame inconnue est orienté suivant la direction de ces deux nouveaux centres (i.e. à $\pm 45^\circ$). Le centre de la figure n'est plus noir car on a retranché un certain déphasage dans le plan d'incidence qui contient cet axe. Le centre noir qui correspond à un déphasage global nul est maintenant obtenu pour une incidence différente de zéro.

- dans les directions $\pm 45^\circ$ (SO-NE), les deux lignes neutres de la lame mince inconnue sont alors confondues avec les projections des lignes neutres « n_o » et « n_e » du quartz/calcite dans le plan de la figure d'interférence (cf. figure A10). Dans la direction SO-NE de la figure d'interférence (et NO-SE), les différences de marche de la lame inconnue et du cristal de quartz ou de calcite s'ajoutent ou se retranchent. La modification de la figure d'interférence permet d'identifier les axes rapide et lent de la lame mince inconnue.



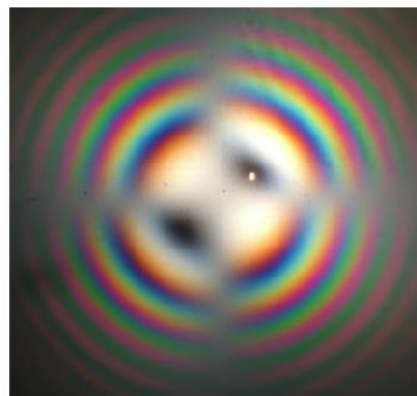
Position de la lame mince de signe inconnu entre P et A avec ses lignes neutres à 45° .

IV.2.3 Exemples de résultats expérimentaux

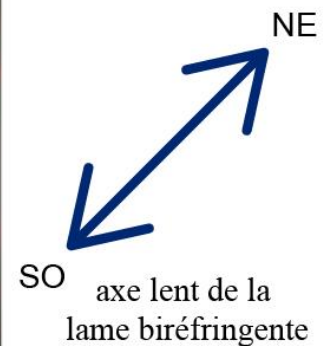
Calcite en lumière blanche :



Calcite sans lame biréfringente



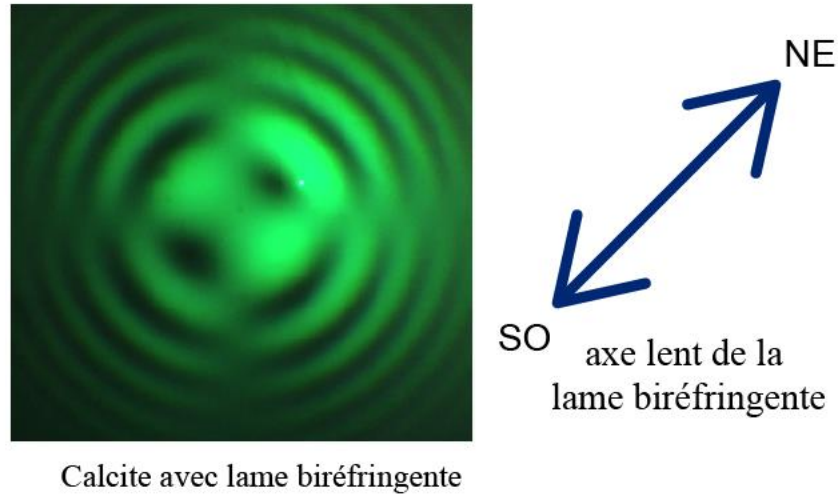
Calcite avec lame biréfringente



Dans la direction NE/SO, la **frange bleue s'éloigne** (bleu d'ordre 1 dans les teintes de Newton) et la biréfringence globale (calcite + lame) diminue. Il faut aller plus loin en angle d'inclinaison θ pour « récupérer » l'ordre 1 et donc parcourir une épaisseur de calcite plus grande. Dans la direction NE/SO, on a retranché les différences de marches calcite + lame et donc superposé l'axe lent (n) de la lame mince avec l'axe rapide (n_e) de la calcite. A l'inverse, on a un rapprochement dans la direction NW/SE.

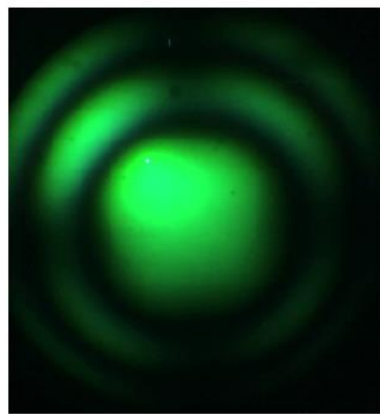
Calcite en lumière monochromatique :

On obtient la même figure en lumière monochromatique (lumière blanche + filtre vert).

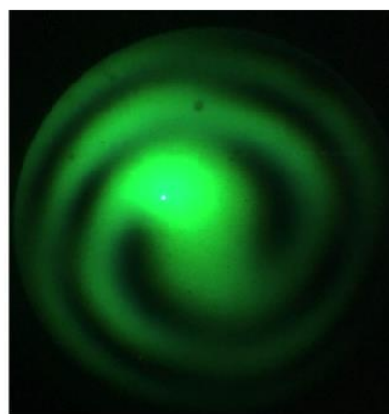


Quartz en lumière monochromatique :

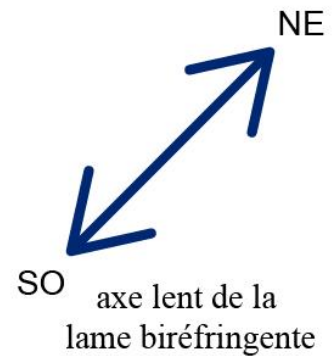
Pour le quartz, tout est inversé car $n_e > n_o$.



Quartz sans lame biréfringente



Quartz avec lame biréfringente



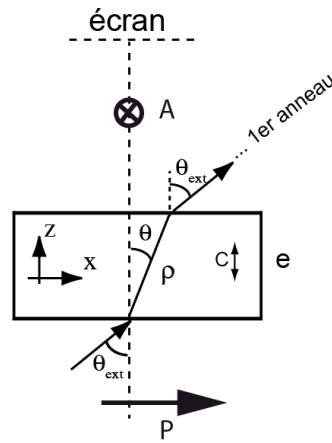
La croix n'est pas visible au centre en raison de la présence du pouvoir rotatoire.

V ANISOTROPIE LINEAIRE : CAS DES LAMES EPAISSES DE QUELQUES MM

V.1 Mesure de la biréfringence du quartz (et/ou calcite) par la mesure de l'angle du 1^{er} anneau noir de la figure de conoscopie d'une lame épaisse.

V.1.1 Principe

On place le cristal de quartz ou calcite entre P et A croisés. La figure suivante représente la propagation dans un cristal de quartz/calcite en vue de dessus. θ_{ext} = angle d'incidence dans l'air, θ = angle de réfraction dans le cristal. Ici θ représente l'angle du 1^{er} anneau noir à l'intérieur du cristal. $\rho = e/\cos \theta$ représente la distance parcourue dans le cristal. L'écart angulaire entre les deux rayons « o » et « e » est faible et pour cette raison un seul rayon est représenté à l'intérieur du cristal (cf. figure A6 de l'annexe) :



Soit un rayon incident (angle θ dans le cristal) correspondant à un point du premier anneau noir de la figure d'interférence visualisé sur l'écran. La biréfringence est estimée à partir de l'équation :

$$(n_e - n_o) = \frac{\lambda}{e \sin^2 \theta}$$

La mesure de θ_{ext} permet donc d'estimer θ puis la biréfringence $(n_e - n_o)$.

Mesure pour un quartz :

- $e = 4,00 \pm 0,01$ mm (mesure effectuée au palmer)
- distance cristal / écran = 35,5 cm
- diamètre du premier anneau noir : 13 cm avec filtre interférentiel à $\lambda = 546$

nm

$$\rightarrow \theta_{\text{ext}} = 10,4^\circ \rightarrow \theta = 6,7^\circ \text{ avec } n = n_o = 1,544$$

$$(n_e - n_o) = \frac{546 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-3} \sin^2(6,7)} = 0,01$$

On a un bon accord avec la biréfringence tabulée dans un Handbook ($n_o = 1,544$; $n_e = 1,553$; $n_e - n_o = 0,009$ à 589 nm). La biréfringence varie peu entre 546 nm et 589 nm mais il aurait été préférable de prendre un filtre à 589 nm correspondant à la valeur du Handbook.

Mesure pour de la calcite :

- $e = 4,59 \pm 0,01$ mm (mesure effectuée au palmer)
- distance cristal / écran = 87 cm
- diamètre du 1er anneau noir = 10 cm avec filtre interférentiel à $\lambda = 580$

nm

$$\tan \theta_{\text{ext}} = 5/87 \rightarrow \theta_{\text{ext}} = 3,3^\circ$$

Attention le choix de n est critique pour le calcul de θ à partir de $\sin \theta_{\text{ext}} = n \sin \theta$. Pour un rayon extraordinaire proche de l'axe optique C, l'indice du rayon extraordinaire est alors voisin de n_o . Si on prend n égal à $n_o = 1,66$ alors $\theta = 2^\circ$ et :

$$(n_e - n_o) = \frac{580 \cdot 10^{-9}}{4,59 \cdot 10^{-3} \sin^2(2)} = 0,1$$

On a un accord moins bon avec la biréfringence tabulée dans un Handbook ($n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$, $n_e - n_o = -0,17$ à 589 nm) mais l'ordre de grandeur est respecté.

En pratique, prendre le quartz car l'accord est meilleur. Le choix de la valeur de n pour le calcul de l'angle n à partir de $\sin\theta_{\text{ext}} = n\sin\theta$ est critique et dans le quartz la biréfringence est plus faible, donc l'erreur est plus faible.

V.2 Mesure de l'épaisseur optique d'une lame épaisse par la méthode du spectre cannelé

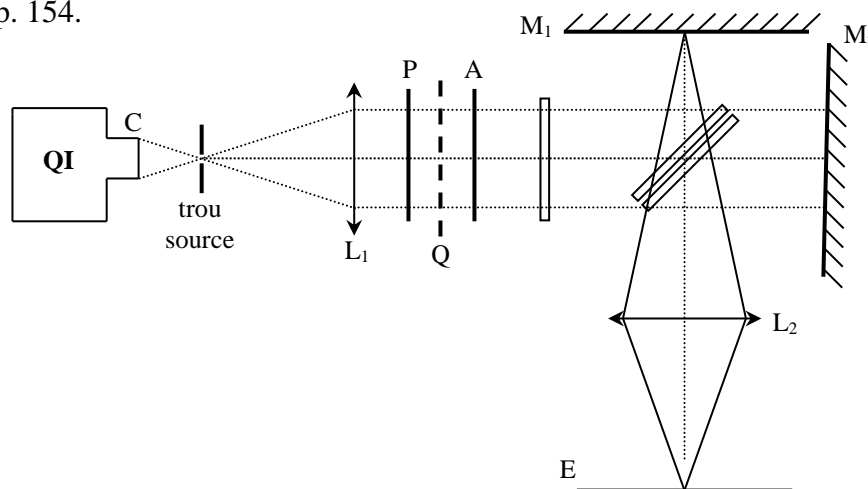
[1], p. 289 et [2], p. 152 pour la manipulation et des explications.

V.3 Mesure de l'épaisseur optique d'une lame épaisse avec un Michelson

Le principe consiste à compenser la différence de marche introduite par la lame biréfringente par une différence de marche géométrique obtenue en pratique avec un interféromètre de Michelson.

Montage :

[2], p. 154.



$C : 6 \text{ cm}$

$L_1, L_2 : 150 \text{ mm}$

Réglez au préalable le Michelson en coin d'air. Placez ensuite une lame épaisse (quartz // de 4 mm) entre polariseur et analyseur croisé en orientant ses lignes neutres à 45° . On observe encore des franges. Translatez alors le miroir mobile. Les franges irisées disparaissent, on passe à un blanc d'ordre supérieur, puis elles réapparaissent après un certain déplacement avec un contraste plus faible. Vérifiez que le phénomène se reproduit pour les deux sens de déplacement du miroir.

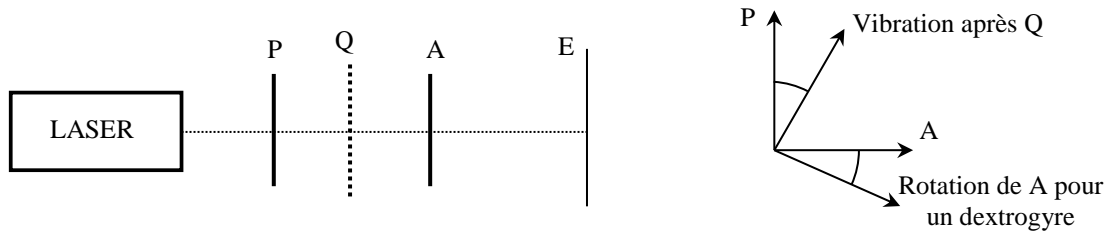
V.4 Mise en évidence du phénomène de double réfraction avec une lame épaisse d'un cristal de spath

[1], p. 282.

VI BIREFRINGENCE CIRCULAIRE

VI.1 Mise en évidence

[2], p. 168



Commencer par tester différentes lames de quartz avec le montage proposé. Vérifiez que certaines lames font tourner le plan de polarisation dans un sens, d'autres dans le sens opposé : il existe des lames dextrogyres et des lames lévogyres. Choisir une lame de chaque type et de même épaisseur. Vérifiez par une mesure rapide que les rotations du plan de polarisation sont égales en valeur absolue mais de sens contraire. Vérifiez que le sens d'utilisation d'une lame ne change pas son caractère lévogyre ou dextrogyre.

Influence de l'épaisseur :

Utilisez des lames de quartz de même nature (lévogyre ou dextrogyre) et d'épaisseurs différentes mais pas trop épaisses (cf. remarque suivante). Mesurez rapidement l'angle α de rotation du plan de polarisation. Vous devez constater que cet angle est proportionnel à l'épaisseur de la lame. On peut donc définir un pouvoir rotatoire spécifique du matériau en ramenant cet angle à l'unité d'épaisseur : $[\alpha] = \alpha/e$.

Remarque :

Le quartz a un pouvoir rotatoire spécifique assez important ($[\alpha] \approx 19^\circ/\text{mm}$). Il peut donc y avoir une ambiguïté sur le sens de rotation avec des lames de forte épaisseur : une rotation à droite de 50° donne une vibration émergente de même nature qu'une rotation à gauche de 130° .

Cas d'une solution de saccharose :

On peut vérifier de la même façon qu'une telle solution présente aussi les mêmes propriétés. On y reviendra plus en détail par la suite.

VI.2 Mesure du pouvoir rotatoire dans un Quartz taillé perpendiculairement à l'axe optique

VI.2.1 Introduction

Lorsqu'on place entre deux polariseurs croisés une lame de quartz, taillée perpendiculairement à l'axe optique (absence de biréfringence linéaire pour une onde à l'incidence normale), l'extinction est détruite et pour la rétablir, en lumière monochromatique, il faut tourner l'analyseur d'un angle α convenable. La lame de quartz perpendiculaire fait tourner le plan de polarisation de la lumière qui la traverse sans que cette vibration cesse d'être rectiligne; on dit que le quartz est optiquement actif.

Dispersion du pouvoir rotatoire :

Le physicien Biot, qui découvrit que le pouvoir rotatoire croît rapidement quand la longueur d'onde diminue, a établi que la rotation α produite par une lame de quartz peut s'exprimer en première approximation sous la forme $\alpha = A/\lambda^2$, où A est une constante. Cette relation montre que la dispersion est très forte : la rotation est multipliée par un facteur de l'ordre de 3 d'une extrémité à l'autre du spectre visible. Cette dispersion est beaucoup plus grande que la dispersion de l'indice de réfraction ou que celle du retard produit par une lame biréfringente. Malheureusement,

pour un cristal de quartz de quelques centimètres de longueur, cette rotation est très supérieure à 180° , et n'est donc pas directement mesurable à partir de la simple détermination de l'angle de rotation de l'analyseur rétablissant l'extinction. Une méthode simple pour mesurer α est d'utiliser la dispersion du pouvoir rotatoire. Si on place un tel cristal entre polariseurs croisés et qu'on éclaire l'ensemble en lumière blanche, le spectre de la lumière transmise présente des cannelures (franges noires) aux longueurs d'onde pour lesquelles la rotation est égale à un nombre entier de fois 180° . Une cannelure d'ordre k_1 (k_1 entier) à la longueur d'onde λ_1 correspond à une rotation $\alpha_1 = k_1\pi$ de la polarisation, alors qu'une cannelure d'ordre $k_1 + n$ (n entier) à la longueur d'onde λ_{n+1} correspond à une rotation $\alpha_{n+1} = (k_1 + n)\pi$. Dans cette équation, k_1 est une inconnue et n est le nombre d'interfranges entre λ_1 et λ_{n+1} . D'après la loi de Biot, on a :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_1 = n\pi = A \left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \quad d'ou \quad \boxed{A = n \times 180^\circ \times \frac{\lambda_1^2 \lambda_{n+1}^2}{\lambda_1^2 - \lambda_{n+1}^2}}$$

VI.2.2 Mesures

Détermination du sens de rotation de la polarisation :

Observez dans la lunette d'un spectroscope le spectre cannelé produit par le canon de quartz. La rotation α augmentant avec la diminution de la longueur d'onde, une rotation de l'analyseur dans le même sens que l'angle α doit déplacer les cannelures vers les courtes longueurs d'onde (violet), une rotation de l'analyseur dans le sens opposé déplaçant les cannelures vers les grandes longueurs d'onde (rouge). En déduire le sens de la rotation α de la polarisation de la lumière à la traversée de l'échantillon proposé.

Mesure de α et de A :

Afin de tester la validité de la loi de Biot, comparez les valeurs de A obtenues en mesurant les longueurs d'onde de deux cannelures successives ($n = 1$) dans le rouge et dans le bleu, puis celles de deux cannelures situées aux deux extrémités du spectre ($n > 1$). Conclure. Tracez alors la courbe $\alpha = f(\lambda)$ en prenant la valeur de A qui correspondrait à une lame de quartz de 1mm d'épaisseur.

VI.3 Dispersion rotatoire

Se reporter à [2], p. 70 pour la manipulation.

VI.4 Mesure du pouvoir rotatoire spécifique du saccharose avec un polarimètre de

Laurent

VI.4.1 Loi de Biot pour les liquides

La rotation produite par une solution de concentration C est proportionnelle à la longueur traversée par la lumière :

$$\boxed{\alpha = [\alpha] \cdot L \cdot C}$$

La quantité $[\alpha]$ est une constante pour une substance active donnée et une radiation de longueur d'onde déterminée ; $[\alpha]$ s'appelle le pouvoir rotatoire spécifique (il dépend de la longueur d'onde). Généralement, on calcule $[\alpha]$ en exprimant α en degrés, L en décimètres et C en grammes de substance par cm^3 de solution. Pour comparer diverses substances entre elles, on a défini par convention le pouvoir rotatoire moléculaire par la relation $[M] = M[\alpha]/100$. Le pouvoir rotatoire moléculaire est alors égal à la rotation produite par un décimètre d'une solution contenant une molécule gramme de

substance active pour 100 cm^3 de solution. La rotation produite par un mélange est la somme des rotations correspondant aux différentes substances considérées isolément :

$$\alpha = ([\alpha_1] \cdot C_1 + [\alpha_2] \cdot C_2 + [\alpha_3] \cdot C_3 + \dots) L$$

Remarque :

La loi de Biot est très utile en chimie analytique pour doser la teneur d'une solution en substances optiquement actives. Elle est particulièrement utile pour le dosage d'isomères optiques (énantiomères). En effet, ceux-ci possèdent les mêmes propriétés chimiques et beaucoup de propriétés physiques (point d'ébullition, de fusion, indice de réfraction, conductivité électrique, etc...) identiques ce qui rend difficile leur dosage séparé. Ces propriétés sont dites scalaires parce qu'elles sont représentées en un point de l'espace par un nombre. Par contre, les propriétés physiques de nature vectorielles (polarisation rotatoire de la lumière, piézo-électricité) seront différentes pour les deux énantiomères. Elles permettent donc un dosage séparé des deux isomères.

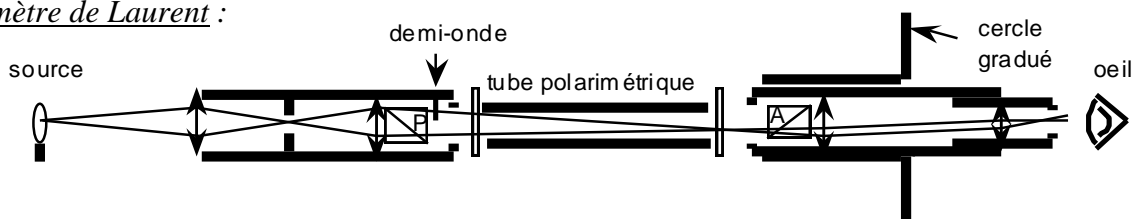
VI.4.2 Analyseur et polariseur à pénombre

La rotation à mesurer pour un liquide étant nettement plus faible (compte tenu des concentrations usuelles) que pour un quartz épais, on pourrait songer à mesurer le pouvoir rotatoire des liquides en utilisant une méthode de rétablissement d'extinction comme celle indiquée au début du § III.2.1. Il est cependant difficile pour l'œil de distinguer le minimum parmi les éclaircissements successifs qu'il perçoit autour de l'extinction (l'éclaircissement varie en effet très lentement au voisinage de ce minimum → cf. loi de Malus). Ceci associé à l'existence de lumière parasite (dépolérisation de la lumière par la substance, imperfection des nicols, etc...) a pour effet de rendre à peu près impossible les pointés d'une vibration rectiligne par extinction avec une erreur inférieure à plusieurs minutes d'arc. C'est pourquoi on emploie toujours en métrologie des analyseurs et polariseurs à pénombre, dans lesquels l'appréciation d'un minimum est remplacée par l'appréciation de l'égalité d'éclairement de deux plages séparées par une ligne nette.

Principe du polariseur à pénombre :

Se reporter au § III.1.2 du montage « Production et Analyse d'une lumière polarisée ».

Polarimètre de Laurent :



Il emploie un polariseur à pénombre et un analyseur mobile dont on peut mesurer la rotation grâce à un cercle gradué. Le polariseur à pénombre est fixe, la ligne de séparation des plages l'est donc aussi. Le polariseur fournit une vibration OP, la lame une vibration OP'. Il y a donc égalité d'éclairement lorsqu'OA est suivant Ox ($\gamma = \pi/2$, grand éclaircissement), ou suivant Oy ($\gamma = 0$, petit éclaircissement). C'est dans cette dernière configuration que le polarimètre est utilisé. Si on introduit le tube polarimétrique contenant la substance active, les deux vibrations OP et OP' subissent des rotations égales α , et il faut, pour rétablir l'égalité d'éclairement, tourner l'analyseur d'un angle α , de façon que la direction de la vibration que laisse passer l'analyseur soit orthogonale à la bissectrice des deux vibrations transmises par la substance ($\gamma = \alpha$). C'est donc cette rotation $\gamma = \alpha$ que l'on lit sur le cercle qui porte l'analyseur.

Remarque :

La rotation produite par la substance dépendant de la longueur d'onde, les polarimètres ne peuvent être employés qu'en lumière monochromatique (ici raie D du sodium).

VI.4.3 Mesures

On prépare une solution de saccharose de concentration déterminée (avec par exemple 10g de sucre dans 100 cm³ d'eau distillée). On place le tube polarimétrique le plus court rempli de la solution sucrée dans le polarimètre, on met l'oculaire au point sur la ligne de séparation des deux plages lumineuses et on mesure la rotation (le réglage du zéro de l'appareil en l'absence de tube peut être réalisé à l'aide de la vis située sous l'oculaire). On peut alors :

a) Vérifier que la rotation est proportionnelle à la longueur L du tube polarimétrique en traçant $\alpha = f(L)$. Pour cette manipulation, on dispose de cinq tubes de longueurs différentes qui seront remplis de la même solution de saccharose.

b) Vérifier que la rotation est aussi proportionnelle à la concentration en sucre en traçant $\alpha = f(C)$. Pour ce faire, on réalisera deux dilutions successives à partir de la solution d'origine.

c) Calculer le pouvoir rotatoire spécifique $[\alpha]$ du saccharose à la longueur d'onde utilisée.

VII BIREFRINGENCE ARTIFICIELLEVII.1 Effet Pockels : biréfringence induite par un champ électrique (effet linéaire)Remarque :

À Rennes, la cellule de Pockels donne de meilleurs résultats que la cellule de Kerr.

Allumer le laser He-Ne ($\lambda = 633$ nm) et éclairer la cellule de Pockels à l'indice normale. Regarder la réflexion et faire revenir le faisceau sur l'axe du laser. *Ce réglage est important car, comme le cristal est biréfringent sans champ appliqué alors la différence de marche δ est très dépendante de son inclinaison ainsi que sa transmission T entre polariseur P et analyseur A croisés. Une fois que le cristal est placé et ajusté angulairement sur son axe, il ne faut en aucun cas le tourner.*

Placer la cellule de Pockels d'épaisseur ℓ entre deux polariseurs croisés et l'orienter pour que ses lignes neutres soient à 45° des axes passants des polariseurs P et A . Mettre en place le puissance mètre¹.

1/ Faire varier la haute tension V_{HT} (de 0 à 800 V par pas de 50 V) et mesurer pour chaque valeur V_{HT} la puissance sur le power meter. Fixer avec soin la valeur de V_{HT} pour laquelle V_{diode} est maximum. Soit $V_{diode(max)}$ cette valeur. En déduire la transmission. Tracer la courbe $T = f(HT)$.

2/ La transmission T obéit à la relation suivante :

¹ Une variante possible consiste à utiliser une photodiode + résistance de charge + alim DC : Fixer la résistance de charge de la diode pour que la tension max mesurée à ses bornes soit de l'ordre de quelques volts quelle que soit la haute tension appliquée sur la cellule. Ne plus toucher au laser et à la cellule de pockels)

$$T = \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \Delta n \cdot l}{\lambda} \right) = \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

où la variation d'indice $\Delta n = \Delta n_0 + \Delta n(V_{HT})$ est la somme de deux termes :

Δn_0 = biréfringence naturelle de la cellule et
 $\Delta n(V_{HT})$ = biréfringence induite par la tension V_{HT} .

On peut aussi écrire que le déphasage correspondant ϕ est la somme de deux termes :

$$\phi = \phi_0 + \phi(V_{HT})$$

Il est important de noter que la valeur de la transmission T pour une tension appliquée nulle ($V_{HT}=0$) correspond à la biréfringence naturelle Δn_0 de la cellule ou à $\phi_0 = 2\pi\Delta n_0 l/\lambda$. La transmission n'est donc pas forcément nulle.

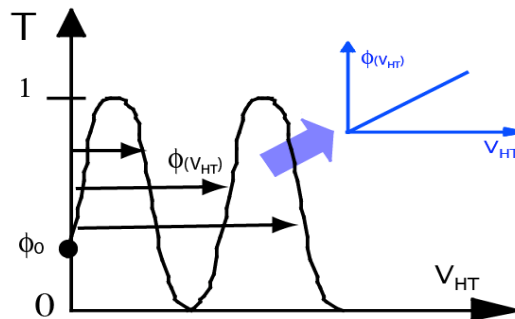
A partir de la courbe précédente **$T = f(HT)$ et du tableau de mesure, calculer alors $\phi(V_{HT})$ pour chaque valeur de tension appliquée.**

Tracer la courbe correspondante $\phi(V_{HT}) = f(HT)$. Commenter l'allure de la courbe.

En déduire la variation d'indice induite pour la tension max.

Remarque :

La biréfringence naturelle n'étant pas nulle, le déphasage ϕ_0 est de l'ordre de 853 radians pour une incidence normale du laser sur la cellule. Comme dit précédemment, il est important de noter que la transmission obtenue sans champ appliqué va dépendre fortement du moindre défaut d'orientation de la cellule par rapport à l'incidence normale. Le point de départ de la courbe $T = f(HT)$ va donc dépendre de la position de la lame mais la loi de variation reste périodique à partir de cette position :



A partir de la courbe obtenue de transmission périodique, il faut extraire le déphasage induit $\phi(V_{HT})$ en fonction de la tension appliquée qui doit varier de façon monotone. Attention au fait que deux valeurs identiques successives de T correspondent à un déphasage croissant (le déphasage croît avec la HT , attention donc à la périodicité de la fonction sinus)

VII.2 Biréfringence induite par un champ électrique (effet quadratique)

Effet Kerr

→ cf. [2], p. 163.

VII.3 Biréfringence induite par une contrainte mécanique

Effet élasto-optique → cf.

[1], p. 312.

VII.4 Biréfringence d'orientation dans une cellule de cristal liquide

Cf. [2], p. 164.

VII.5 Biréfringence induite par un champ magnétique

Effet Faraday → cf. [2], p.

Bibliographie :

[1] : Sextant : Optique expérimentale, ch. 6.3, 6.5 et 6.6

[2] : R. Duffait : Expériences d'optique ; Agrégation de sciences physiques, ch. 7 et 8

[3] : J.P. Pérez : Optique ; Masson 5^{ème} édition, ch. 32.

ANNEXE : RAPPELS D'OPTIQUE ANISOTROPE

I INTRODUCTION

Un milieu transparent, non conducteur et non magnétique est appelé milieu diélectrique. Il se caractérise par son indice de réfraction optique n . L'indice de réfraction d'un milieu traduit la réponse microscopique des électrons de valence à un champ électrique \mathbf{E} d'une onde électromagnétique (EM) se propageant avec la vitesse de phase c/n où une polarisation électronique \mathbf{P} est induite. La polarisation induite sous l'action du champ électrique \mathbf{E} est en générale petite et dans le cadre de l'optique classique linéaire, on peut effectuer un développement limité de \mathbf{P} à l'ordre 1 en \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} + \epsilon_0 \mathbf{G} \nabla \wedge \mathbf{E} \quad A1$$

χ et \mathbf{G} sont respectivement la susceptibilité électrique (sans dimension) et la constante de gyration du milieu. ∇ est l'opérateur nabla ($\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$). Dans un milieu isotrope, χ et \mathbf{G} sont des constantes mais dans un milieu anisotrope alors ce sont des tenseurs. Le premier terme représente l'**anisotropie linéaire** tandis que le deuxième terme représente l'**anisotropie circulaire** (activité optique ou pouvoir rotatoire caractérisant un milieu optiquement actif). Si on considère un milieu isotrope où χ et \mathbf{G} sont des constantes, le premier terme traduit le fait que \mathbf{P} est toujours parallèle à \mathbf{E} tandis que le deuxième terme traduit le fait que \mathbf{P} tourne autour de \mathbf{E} . Ces deux effets traduisent des réponses électroniques très différentes liées à des organisations atomiques spécifiques. Par exemple, la présence d'activité optique dans un cristal de quartz (SiO_2) est lié au fait que les atomes Si et O sont disposées sur une hélice avec son axe dans la direction de l'axe cristallographique d'ordre 3 du quartz. La présence du champ \mathbf{E} pour une onde se propageant suivant cet axe induit des déplacements de charges le long de cette hélice qui a pour effet de faire tourner le champ \mathbf{E} . En suivant les liaisons Si–O–Si, on tourne soit vers la droite, soit vers la gauche suivant le type de quartz droit ou gauche.

Les deux effets peuvent exister simultanément dans la matière. Pour comprendre les conséquences sur la propagation de la lumière, on considère dans un premier temps chacun des effets pris séparément.

II PROPAGATION DE LA LUMIERE DANS UN MILIEU DIELECTRIQUE ANISOTROPE

Dans un cristal isotrope ou dans un milieu amorphe, les propriétés optiques sont les mêmes quel que soit la direction de propagation de l'onde (l'indice de réfraction est unique). Par contre dans un milieu anisotrope, les propriétés optiques et l'indice de réfraction vus par l'onde électromagnétique dépendent de la direction de propagation du vecteur d'onde \vec{k} . Les équations de Maxwell et l'équation traduisant la réponse du milieu sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \nabla \wedge \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad A2$$

Et :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad A2$$

En combinant ces équations, on obtient immédiatement l'équation de propagation pour le champ \mathbf{E} :

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad A4$$

Dans le cadre de l'**approximation des champs à enveloppe lentement variables (SVEA : slow varying envelope approximation en anglais)**, on peut faire les deux approximations suivantes :

$$\nabla \equiv -ik \quad , \quad d/dt \equiv i\omega \quad A3$$

Dans ce cas, l'équation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** devient :

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) + \omega^2 \mu_0 \mathbf{D} = 0 \quad A4$$

En admettant que la relation entre \mathbf{P} et \mathbf{E} peut se mettre sous la forme $\mathbf{P} = \varepsilon_0 [\chi] \mathbf{E}$ où $[\chi]$ est le tenseur de susceptibilité électrique du milieu. On obtient finalement l'équation de propagation pour le champ \mathbf{D}

$$\mathbf{k}_0 \wedge (\mathbf{k}_0 \wedge [\eta] \mathbf{D}) + n^{-2} \mathbf{D} = 0 \quad A5$$

Où $[\varepsilon_r] = [1] + [\chi]$ est le tenseur diélectrique relatif et $[\eta] = [\varepsilon_r]^{-1}$ le tenseur d'imperméabilité. \mathbf{k}_0 est un vecteur unitaire dans la direction de propagation. $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 \omega n c$ et n est l'indice vu par l'onde EM qui est à déterminer. L'équation précédente est l'équation de propagation pour le champ \mathbf{D} où les inconnus sont donc n et \mathbf{D} pour une direction de propagation \mathbf{k} fixée. Le tenseur d'imperméabilité $[\eta]$ caractérisant le milieu et est quant à lui connu. Dans une base quelconque (x, y, z) il est donné par l'expression générale suivante :

$$[\eta] = \begin{pmatrix} \eta_{xx} & \eta_{xy} & \eta_{xz} \\ \eta_{xy} & \eta_{yy} & \eta_{yz} \\ \eta_{xz} & \eta_{yz} & \eta_{zz} \end{pmatrix}_{xyz} \quad A8$$

Si on prend le cas particulier d'une onde se propageant dans la direction z l'équation A5 devient :

$$= n^{-2} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \eta_{xx} & \eta_{xy} \\ \eta_{xy} & \eta_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} \quad A9$$

en prenant en compte que l'onde est transverse pour le champ \mathbf{D} . Cette équation fondamentale est l'équation aux valeurs et vecteurs propres pour le champ \mathbf{D} . La résolution de cette équation conduit à deux solutions n_+ et n_- :

$$\eta_{\pm} = n_{\pm}^{-2} = \frac{1}{2} \left[(\eta_{xx} + \eta_{yy}) \pm \sqrt{(\eta_{xx} - \eta_{yy})^2 + (2\eta_{xy})^2} \right] \quad A10$$

Le milieu est donc biréfringent. A ces deux solutions n_+ et n_- correspondent deux vecteurs propres \mathbf{D}_+ et \mathbf{D}_- qui sont appelées les états propres pour la direction de propagation considérée et qui sont situées dans le plan d'onde Π , qui par définition est le plan perpendiculaire à \mathbf{k} . Ces directions perpendiculaires entre elles (au sens mathématique du terme) sont les **lignes neutres** du milieu. Une

onde polarisée suivant l'une ou l'autre de ces deux directions (\mathbf{D}_+ , \mathbf{D}_-) se propagera sans déformation dans le milieu avec une vitesse de propagation (c/n_+ , c/n_-). L'expression exacte de \mathbf{D}_+ et \mathbf{D}_- dépend du type d'anisotropie (linéaire ou circulaire).

III ANISOTROPIE LINEAIRE

Dans le cas d'un milieu possédant uniquement de l'anisotropie linéaire, l'équation A1 devient :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0[\chi]\mathbf{E} \quad \text{A6}$$

Où $[\chi]$ est un tenseur dans le cas général. C'est le tenseur de susceptibilité électrique dont les composantes sont toutes réelles. Il existe une base (x, y, z) appelée la base principale (BP) du milieu pour laquelle les tenseurs $[\chi]$, $[\epsilon_r]$ et $[\eta]$ sont des tenseurs diagonaux. L'équation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** s'écrit alors :

$$[\eta] = \begin{pmatrix} \eta_x & 0 & 0 \\ 0 & \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & \eta_z \end{pmatrix}_{BP(xyz)} \quad \text{A12}$$

et on définit les trois indices principaux du milieu $n_x = \eta_x^{-2}$, $n_y = \eta_y^{-2}$, $n_z = \eta_z^{-2}$. Les milieux sont alors classés selon la typologie suivante :

- *milieu isotrope.* Dans ce cas, les trois coefficients sont égaux et le milieu est isotrope au même titre qu'un verre ou un liquide avec un indice unique $n_x = n_y = n_z$.

- *milieu anisotrope uniaxe.* Le milieu possède deux indices principaux différents $n_x = n_y$, n_z . La direction propre associée à z est appelée axe optique qui est unique. Les cristaux de symétrie hexagonale (quartz par exemple), rhomboédrique (spath) et quadratique se rangent dans cette catégorie. La direction de l'axe optique est celle de l'axe cristallin de plus haute symétrie.

- *milieu anisotrope biaxe.* Les trois coefficients sont différents ($n_x \neq n_y \neq n_z$). C'est le cas du mica par exemple. Dans ce cas, le milieu possède deux axes optiques.

Isotropic	CdTe	2.69		Biaxial		n_x	n_y	n_z
	NaCl	1.544			Gypsum	1.520	1.523	1.530
	Diamond	2.417			Feldspar	1.522	1.526	1.530
	Fluorite	1.392			Mica	1.552	1.582	1.588
	GaAs	3.40			Topaz	1.619	1.620	1.627
Uniaxial: positive		n_o	n_e		NaNO ₂	1.344	1.411	1.651
	Ice	1.309	1.310		SbSI	2.7	3.2	3.8
	Quartz	1.544	1.553		YAlO ₃	1.923	1.938	1.947
	BeO	1.717	1.732		feldspar	1.522	1.526	1.530
	Zircon	1.923	1.968		Mica	1.552	1.582	1.588
	Rutile	2.616	2.903		Topaz	1.619	1.620	1.627
	ZnS	2.354	2.358		NaNO ₂	1.344	1.411	1.651
					SbSI	2.7	3.2	3.8
negative	(NH ₄)H ₂ PO ₄ (ADP)	1.522	1.478		YAlO ₃	1.923	1.938	1.947
	Beryl	1.598	1.590					
	KH ₂ PO ₄ (KDP)	1.507	1.467					
	NaNO ₃	1.587	1.336					
	Calcite	1.658	1.486					
	Tourmaline	1.638	1.618					
	LiNbO ₃	2.300	2.208					
	BaTiO ₃	2.416	2.364					
	Proustite	3.019	2.739					

III.1 Ellipsoïde des indices

L'ellipsoïde des indices est une surface définie à partir des trois indices principaux n_x , n_y , n_z du milieu. L'ensemble des points M de coordonnées x , y , z de cette surface satisfait l'équation suivante :

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad A13$$

qui est l'équation de l'ellipsoïde des indices. Dans le cas d'un milieu uniaxe, deux des indices sont égaux ($n_x = n_y$) et l'ellipsoïde est de révolution autour de l'axe z . La distance OM de cette surface représente l'ensemble des valeurs possibles pour l'indice susceptibles d'être « vus » par une onde électromagnétique qui se propage dans le milieu.

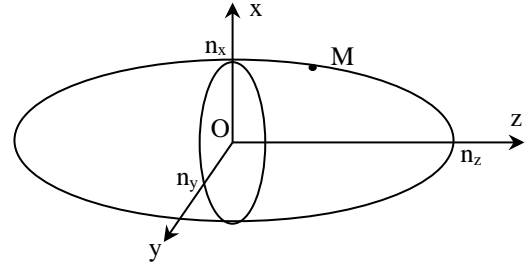


Figure A1. Ellipsoïde des indices

III.2 Vecteurs et valeurs propres de propagation pour le champ D

Prenons l'exemple d'une onde EM qui se propage dans la direction z dans un milieu dont la BP est défini par le repère x , y , z . Dans ce cas, les deux valeurs propres sont données à partir de l'équation

Erreur ! Source du renvoi introuvable. :

$$\begin{aligned} \eta_+ = n_+^{-2} = \eta_x &\rightarrow n_+ = n_x &\rightarrow D_y = 0 \\ \eta_- = n_-^{-2} = \eta_y &\rightarrow n_- = n_y &\rightarrow D_x = 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre que les deux vecteurs propres sont des vibrations **rectilignes** perpendiculaires à la fois entre elles et au vecteur d'onde \mathbf{k} . A chacune de ces deux vibrations rectilignes, est associé un indice différent et le milieu est biréfringent. Dans le cas particulier considéré où l'onde se propage dans la direction z de la BP du milieu, les deux modes propres et valeurs propres sont donc définis par :

$$\mathbf{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_x \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{D}_+ \begin{pmatrix} D_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, n_x \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_- \begin{pmatrix} 0 \\ D_y \\ 0 \end{pmatrix}, n_y$$

Ce résultat se généralise pour une direction quelconque du vecteur d'onde \mathbf{k} . Les deux modes propres sont toujours deux vibrations **rectilignes** \mathbf{D}_+ et \mathbf{D}_- perpendiculaires à la fois entre elles et à \mathbf{k} avec deux indices propres n^+ et n^- , le milieu est dit biréfringent. **La polarisation est donc représenté par le champ D et non le champ E dans un milieu anisotrope (dans un milieu isotrope D/E).**

Quand une onde électromagnétique traverse une lame biréfringente, les deux modes de propagation \mathbf{D}_+ et \mathbf{D}_- se propagent dans le milieu sans altération de leur direction mais avec des vitesses de propagation différentes c/n^+ et c/n_- . A la sortie du milieu, les deux vibrations oscillantes à la fréquence ω présentent un retard $\Delta t = \Delta n/c$ et donc un retard angulaire (déphasage) $\Delta\phi = 2\pi/\lambda \Delta n \cdot e$ où e est l'épaisseur du milieu traversée et λ la longueur d'onde de la vibration électromagnétique. Si le milieu est mince, ces deux vibrations interfèrent à la sortie du cristal pour produire une vibration elliptique.

III.3 Propagation de la lumière dans un milieu uniaxe

Les résultats obtenus dans le cas d'un milieu uniaxe sont très importants car la plus part des milieux utilisés en pratique et en montage sont des milieux uniaxes (quartz, calcite). Les résultats obtenus peuvent se généraliser aux milieux biaxes. La construction suivante dite de l'ellipsoïde des indices est très utile car elle permet de trouver graphiquement le résultat du paragraphe précédent :

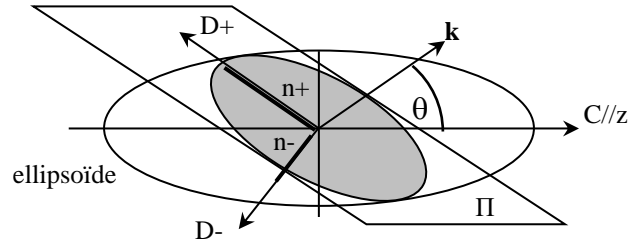


Figure A2. Position du plan d'onde Π et de l'Ellipsoïde des indices

Il faut représenter à la fois l'ellipsoïde des indices et le vecteur d'onde \mathbf{k} avec son origine au centre. A cette direction \mathbf{k} est associé un plan d'onde Π qui lui est perpendiculaire. \mathbf{D}_+ et \mathbf{D}_- ont des directions portées par les deux axes propres de l'ellipse formée par l'intersection du plan d'onde Π et de l'ellipsoïde des indices. Les deux demi-axes de l'ellipse n^+ et n^- dans chacune des directions propres de l'ellipse représentent les deux indices associés. La différence $n^+ - n^-$ est la biréfringence Δn du milieu pour la direction de propagation considérée.

Les solutions \mathbf{D}_+ , n^+ et \mathbf{D}_- , n^- dépendent uniquement de l'angle polaire θ entre \mathbf{k} et l'axe optique C . Dans un milieu uniaxe, une des solutions « ordinaire » \mathbf{D}_o est toujours dans le plan équatorial et a une direction à la fois perpendiculaire à \mathbf{k} et à l'axe optique C , c'est-à-dire que $\mathbf{D}_o \parallel \mathbf{k} \wedge \mathbf{C}$. L'autre solution représente l'onde « extraordinaire » \mathbf{D}_e . Elle a une direction qui reste dans le plan d'onde et qui est perpendiculaire à l'onde « ordinaire », c'est-à-dire que $\mathbf{D}_e \parallel \mathbf{D}_o \wedge \mathbf{k}$. Elle est donnée par la projection de l'axe optique C dans le plan d'onde Π .

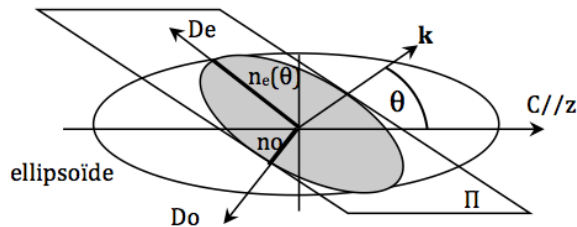


Figure A3. Lignes neutres \mathbf{D}_o et \mathbf{D}_e pour la direction \mathbf{k}

L'indice associé à l'onde « extraordinaire » est aussi appelé l'indice « extraordinaire » $n_e(\theta)$ et sa valeur comprise entre n_o et n_e est obtenue à partir de l'équation A13 et est donnée par :

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2}$$

A14

III.4 Propagation de la lumière dans un milieu uniaxe mince

Une lame est dite mince si elle présente une différence de marche de quelques λ (épaisseur de quelques centaines de microns). Dans ce cas, les deux vibrations qui se propagent sans altération sont en phase et peuvent interférer à la sortie pour produire une vibration elliptique. Les lames minces servent essentiellement à réaliser des lames de phase $\lambda/2$, $\lambda/4$... et pour lesquelles on néglige le phénomène de double réfraction.

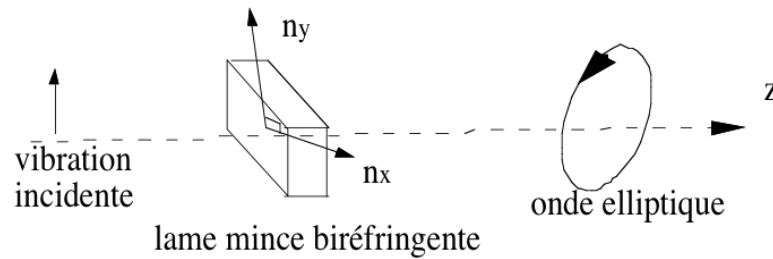


Figure A4. Vibration elliptique à la traversée d'une lame biréfringente éclairée par une polarisation rectiligne à 45° de ses lignes neutres

On peut montrer que la transmission T d'une lumière monochromatique de longueur d'onde λ à travers une lame mince d'épaisseur e , placée entre polariseur P et analyseur A croisés avec ses lignes neutres x et y à 45° des axes passants de P et A , est donnée par :

$$T = \sin^2 \phi / 2 \quad \text{A15}$$

$\phi = 2\pi\delta/\lambda$ est le déphasage entre les deux lignes neutres et $\delta = (n_x - n_y)e$ est la différence de marche associée pour la lumière se propageant dans une direction z quelconque (\mathbf{k}/z). Comme on l'a vu, $n_x - n_y$ dépend de la direction de \mathbf{k} par rapport à l'axe optique C du milieu, et varie donc entre 0 et $n_e - n_o$. Une lame de phase $\lambda/2$, $\lambda/4$ est en général taillée avec son axe optique dans le plan de la lame.

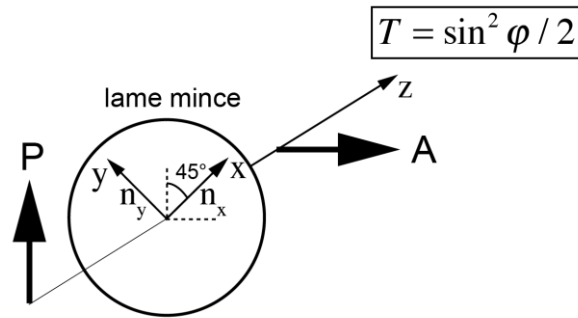


Figure A5. Transmission à travers une lame biréfringente placée avec ses lignes neutres à 45° de P et A perpendiculaires

III.5 Propagation de la lumière dans un milieu uniaxe épais

Une lame est dite épaisse lorsque son épaisseur e est de quelques millimètres. Dans ce cas, le déphasage peut être très important et les deux ondes propres ne peuvent plus interférer car il y a en général deux rayons qui se séparent. Les lames épaisses servent essentiellement à produire de la lumière polarisée par double réfraction. On s'intéresse au cas d'un rayon qui possède un angle non nul avec l'axe optique. A l'entrée dans un milieu anisotrope uniaxe, en vertu du principe d'Huygens, le phénomène de double réfraction intervient et la lumière non polarisée incidente en dehors de la direction de l'axe optique C se décompose en deux rayons « ordinaire » et « extraordinaire » qui se séparent. L'angle est en général faible entre ces deux rayons, de telle sorte qu'on considère qu'ils font un angle θ avec l'axe optique.

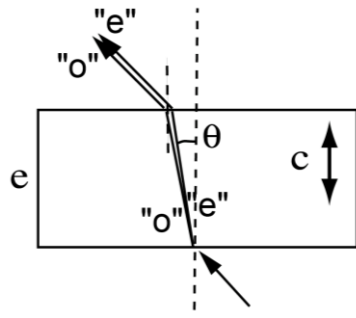


Figure A6. Double réfraction à l'entrée d'une lame biréfringente taillée perpendiculairement à l'axe optique C .

Le rayon ordinaire a l'indice n_o tandis que le rayon extraordinaire a, comme on l'a vu un indice $n_e(\theta)$ dont la valeur est donnée par l'équation A14. La différence de marche δ entre les rayons "o" et "e" est donnée par $\delta = (n_e(\theta) - n_o)\rho$ si ρ est la distance parcourue dans le milieu. Si l'angle θ est faible, alors $\rho \approx e$ et $\delta = (n_e(\theta) - n_o)e$. A partir de l'équation A14, on a :

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{1}{n_o^2} - \sin^2 \theta \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) = \frac{1}{n_o^2} - \sin^2 \theta \left(\frac{n_e^2 - n_o^2}{n_o^2 n_e^2} \right) \approx \frac{1}{n_o^2} - 2 \sin^2 \theta \frac{n_e - n_o}{n_o^3}$$

Et

$$n_e(\theta) \approx n_o \left(1 + \sin^2 \theta \frac{n_e - n_o}{n_o} \right)$$

Finalement, on obtient la différence de marche entre les ondes « o » et « e »

$$\delta = (n_e(\theta) - n_o)e = (n_e - n_o)e \sin^2 \theta \quad A16$$

Si la lame épaisse est placée entre polariseur et analyseur croisés alors la transmission est donnée par :

T

$$\begin{aligned} &= \sin^2 \left(\frac{\pi \delta}{\lambda} \right) \\ &= \sin^2 \left(\frac{\pi (n_e - n_o) e \sin^2 \theta}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad A17$$

On obtient les figures d'interférences ci-dessous en lumière convergente (figure de conoscopie). A partir du centre, on a **un cercle noir** à chaque fois que le numérateur est un multiple de la longueur d'onde λ , ($\delta = k\lambda$).

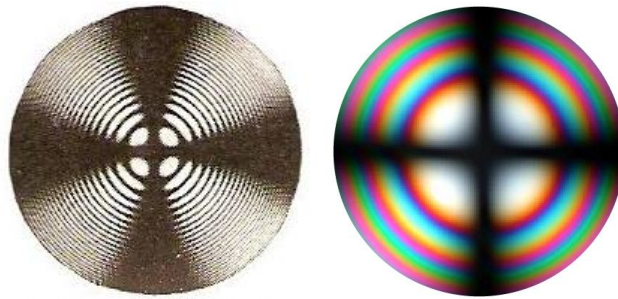


Figure A7. Figure d'interférence de la calcite en lumière monochromatique et lumière blanche. La croix représente la trace des polariseurs.

De même, on a pour le quartz les figures d'interférences suivantes en lumière convergente :

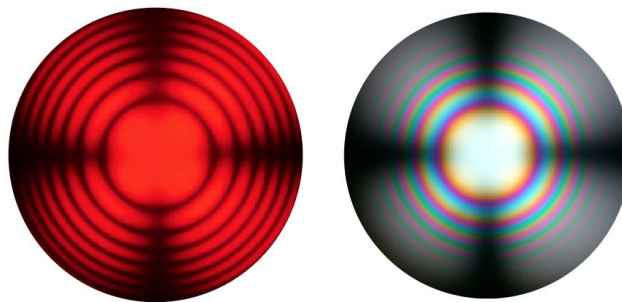


Figure A8. Figure d'interférence du quartz en lumière monochromatique (filtre rouge) et lumière blanche. La croix représente la trace des polariseurs. Il est à noter que la croix disparaît au centre en raison de la présence du pouvoir rotatoire.

III.6 Mesure de la biréfringence du quartz ou de la calcite

La mesure angulaire θ du premier anneau noir permet d'estimer la biréfringence du milieu. A partir de l'équation Erreur ! Source du renvoi introuvable., on a

$$= \frac{\lambda}{e \sin^2 \theta}$$

$$|n_e - n_o|$$

A18

III.7 Identification d'une lame mince inconnue en lumière convergente

En un point de la figure d'interférence sur l'écran d'observation, le contraste est donné par la différence de marche δ entre l'onde « o » et « e ». Pour le premier anneau noir, on a $\delta = \lambda$. Pour une direction quelconque dans le cristal (Figure A9), en considérant que les plans d'ondes ordinaire et extraordinaire sont confondus (Π), les polarisations « o » et « e » sont dans ce plan d'onde Π . « o » est toujours perpendiculaire à C et « e » est perpendiculaire à « o » :

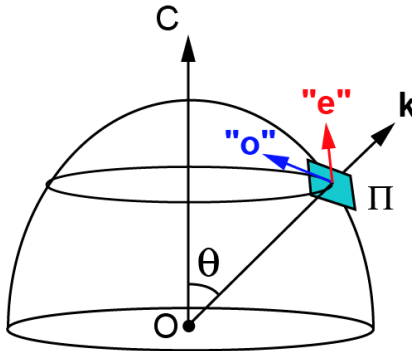


Figure A9. Ondes « o » et « e » pour un rayon d'angle polaire θ

Le point essentiel est que si on regarde la figure d'interférence de face (suivant l'axe optique, figure A10), alors pour chaque point de cette figure, les directions de polarisation « o » et « e » sont parfaitement connues. L'onde « o » en bleu est toujours tangente au cercle (donc perpendiculaire à l'axe optique C) et la **projection** de l'onde « e » en rouge dans la figure d'interférence (i.e. sur l'écran) rencontre l'axe optique C :

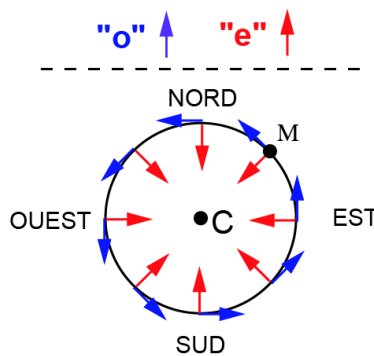
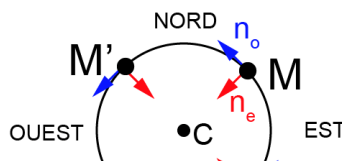


Figure A10. Projection des ondes « o » et « e » dans le plan de la figure d'interférence sur le cercle $\delta = \text{cste}$

III.7.1 Utilisation d'une lame de quartz pour identifier la lame inconnue

Le quartz est un cristal positif ($n_e > n_o$). En M, la direction SO/NE (en rouge) qui porte l'indice extraordinaire « voit » un indice plus fort que la direction NO/SE (en bleu) toujours en M :



On place le quartz taillé perpendiculairement à l'axe optique en ajoutant la lame inconnue entre P et A avec les lignes neutres de la lame à 45° des directions de P et A.

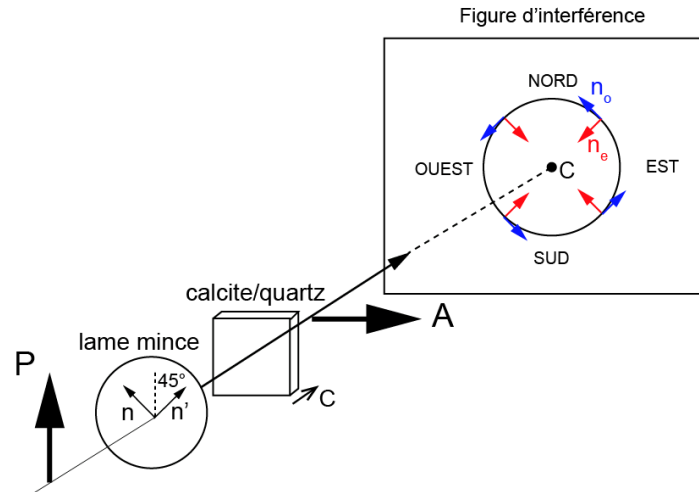


Figure A11. Position de la lame mince de signe inconnu entre P et A avec ses lignes neutres à 45° .

Supposons que les indices principaux de la lame sont n et n' avec $n' > n$, et que la superposition soit la suivante $n' \parallel n_e$ et $n \parallel n_o$:

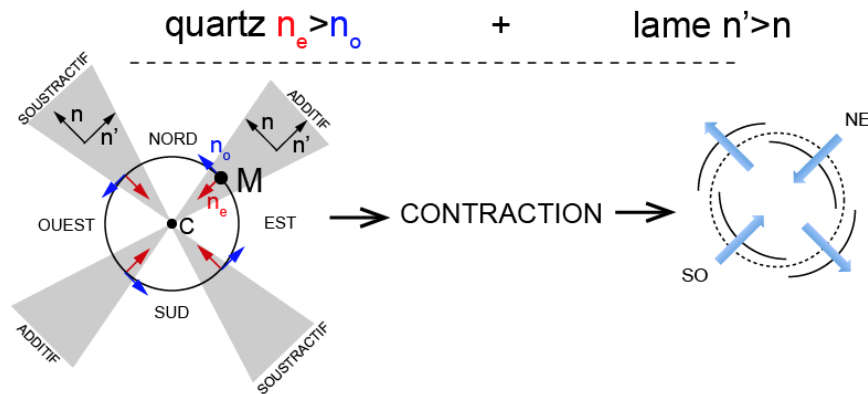


Figure A12. Contraction ou dilatation de la figure d'interférence d'une lame $n' > n$ avec le quartz. Les croix correspondant aux axes des deux polariseurs ne sont pas représentées.

Les indices forts et faibles du quartz et de la lame s'ajoutent entre eux. La biréfringence augmente en M. Il faut du centre de la figure d'interférence aller moins loin dans la direction SO/NE pour obtenir la 1ère frange. On a donc une contraction dans cette direction en M. On a donc une dilatation dans l'autre direction. Contraction et dilatation s'inversent si on tourne la lame de 90° .

III.7.2 Utilisation d'une lame de calcite ($n_e < n_o$)

Si on remplace le quartz par la calcite de signe opposé alors contraction et dilatation s'inversent aussi :

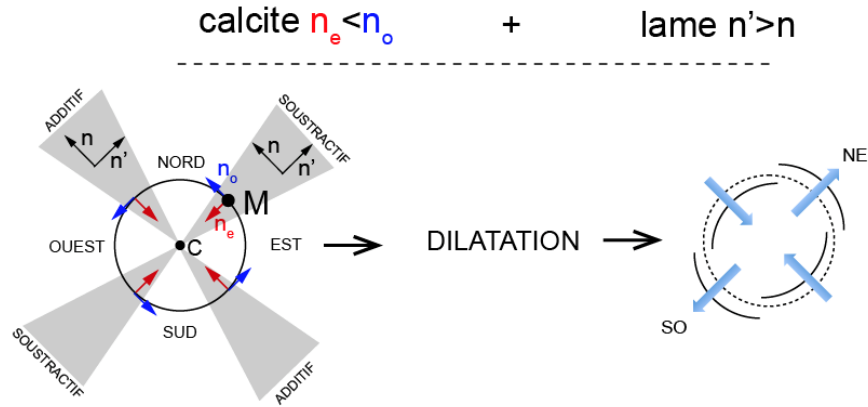


Figure A13. Contraction ou dilatation de la figure d'interférence d'une lame $n' > n$ avec la calcite. Les croix correspondant aux axes des deux polariseurs ne sont pas représentées.

IV ANISOTROPIE CIRCULAIRE

La rotation de la polarisation d'une lumière polarisée rectilignement fut observée au début du 19^{ème} siècle, notamment par Jean-Baptiste Biot :

- Certains corps isotropes transparents, traversés par un faisceau parallèle de lumière monochromatique polarisé rectilignement, font tourner d'un certain angle ρ la direction de la vibration lumineuse autour de celle du rayon. La même loi est valable pour certains cristaux uniaxes ou biaxes traversés par la lumière suivant la direction d'un axe optique.

- La grandeur ρ de la rotation est proportionnelle à l'épaisseur traversée. Certaines substances optiquement actives peuvent exister sous la forme dextrogyre et lévogyre.

- La rotation produite ne dépend pas de l'azimut de la vibration incidente ni du sens dans lequel la lumière se propage suivant une direction donnée.

- La rotation dépend de la longueur d'onde: c'est le phénomène de dispersion rotatoire. Pour un corps incolore, la rotation croît généralement en valeur absolue depuis le rouge jusqu'au violet.

On peut formaliser ces résultats à partir des équations de Maxwell. Dans le cas d'un milieu **isotrope** d'indice n_0 ne possédant pas d'anisotropie linéaire mais uniquement de l'anisotropie circulaire, l'équation A2 devient :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 n_0^2 \mathbf{E} + \varepsilon_0 G \nabla \wedge \mathbf{E} \quad \text{A19}$$

En explicitant le produit vectoriel et dans le cadre de l'approximation SVEA (Eq. A3), on obtient l'expression suivante entre \mathbf{D} et \mathbf{E} pour une direction de propagation $\mathbf{k} = k_0 \omega n/c$ donnée :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_0^2 & -iG \frac{2\pi n}{\lambda} k_{oz} & iG \frac{2\pi n}{\lambda} k_{oy} \\ iG \frac{2\pi n}{\lambda} k_{oz} & n_0^2 & -iG \frac{2\pi n}{\lambda} k_{ox} \\ -iG \frac{2\pi n}{\lambda} k_{oy} & iG \frac{2\pi n}{\lambda} k_{ox} & n_0^2 \end{pmatrix} \mathbf{E} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \mathbf{E} \quad A20$$

Dans un milieu isotrope, le pouvoir rotatoire est identique quel que soit la direction de propagation. On peut considérer sans restreindre la généralité du résultat le cas particulier d'une onde se propageant dans la direction z ($k_{ox} = k_{oy} = 0, k_{oz} = 1$). On en déduit alors l'expression du tenseur diélectrique relatif :

$$[\varepsilon_r] = \begin{pmatrix} n_0^2 & -iG \frac{2\pi n}{\lambda} & 0 \\ iG \frac{2\pi n}{\lambda} & n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0^2 \end{pmatrix} \quad A21$$

Puis du tenseur d'imperméabilité en faisant l'approximation $2\pi n G \lambda^{-1} \ll 1$ toujours réalisée en pratique :

$$[\eta] = [\varepsilon_r]^{-1} = \begin{pmatrix} n_0^{-2} & i \frac{2\pi n G}{\lambda} n_0^{-4} & 0 \\ -i \frac{2\pi n G}{\lambda} n_0^{-4} & n_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_0^{-2} \end{pmatrix} \quad A22$$

On obtient à partir de l'équation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**, l'équation aux valeurs et vecteurs propres pour le champ \mathbf{D} ($D_x, D_y, 0$) dans le cas d'un milieu possédant de l'anisotropie circulaire :

$$\begin{pmatrix} n^{-2} - n_0^{-2} & -i \frac{2\pi n G}{\lambda} n_0^{-4} \\ i \frac{2\pi n G}{\lambda} n_0^{-4} & n^{-2} - n_0^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A23$$

Les solutions pour n sont données par :

$$= \left(\frac{2\pi n G}{\lambda n_0^4} \right)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} \right)^2 \quad A24$$

Comme la biréfringence circulaire est faible on obtient, en remplaçant n par n_0 dans le deuxième terme et en faisant un développement limité au premier ordre, on obtient les deux solutions suivantes pour l'indice n :

$$n_{\mp}$$

$$= n_0 \left(1 \mp \frac{\pi G}{\lambda n_0} \right)$$

A25

En remplaçant ces valeurs dans l'équation A23, on obtient finalement les deux solutions suivantes pour le champ \mathbf{D} :

$$D$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}$$

A2

qui représentent une vibrations circulaire droite (\mathcal{D} , signe -) et gauche (\mathcal{G} , signe +). On en déduit que les lignes neutres du milieu sont deux vibrations gauche \mathcal{G} et droite \mathcal{D} , et que la biréfringence circulaire Δn est donnée par :

$$\Delta n$$

$$= \frac{2\pi G}{\lambda}$$

A2

On en déduit la propriété importante suivante : une vibration rectiligne de la forme $\begin{pmatrix} \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$ incidente sur le cristal peut toujours être décomposée en une somme de deux vibrations circulaires gauche \mathcal{G} $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$ et droite \mathcal{D} $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix}$.

Ces deux vibrations se propagent avec des vitesses différentes dans le milieu. **Si le coefficient de gyration G est positif ($G > 0$), alors la vibration droite est plus rapide** (signe moins dans l'équation A25). En introduisant tout le retard de phase $\phi = 4\pi^2 G \lambda^{-2} L$ dans la vibration gauche qui est la plus lente, on obtient à la sortie du milieu optiquement actif d'épaisseur L la vibration suivante :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - \phi) \\ \sin(\omega t - \phi) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix} = \cos \left(\omega t - \frac{\phi}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(-\frac{\phi}{2} \right) \\ \sin \left(-\frac{\phi}{2} \right) \end{pmatrix} = \cos \left(\omega t - \frac{\phi}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

qui représente une vibration polarisée rectilignement qui a tournée d'un angle $\alpha = -\phi/2$. **La vibration rectiligne tourne donc dans la direction de la vibration circulaire la plus rapide.**

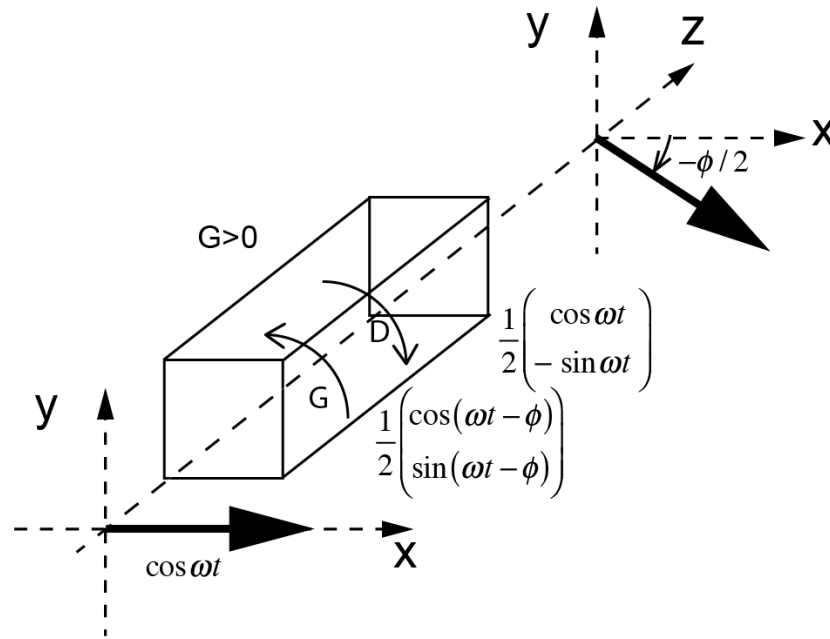


Figure A14. Milieu optiquement actif positif ($G > 0$) pour lequel la vibration circulaire droite D est plus rapide.

La rotation spécifique ou pouvoir rotatoire $\rho = \alpha/L$ est l'angle de rotation par unité de longueur donnée par :

ρ

$$= \frac{A}{\lambda^2}$$

Avec $A = 2\pi^2 G$. La dépendance de la rotation avec l'inverse du carré de la longueur d'onde représente la loi de BIOT.

Le quartz possède à la fois de la biréfringence circulaire et linéaire. Dans le quartz, on a $\rho \approx 20^\circ/\text{mm}$, alors la biréfringence circulaire est de l'ordre de $\Delta n_{\text{circulaire}} = 10^{-4}$ qui est deux ordres de grandeurs inférieur à la biréfringence linéaire $\Delta n_{\text{linéaire}} = 10^{-2}$. Pour apprécier la biréfringence circulaire du quartz, il faut rendre négligeable la biréfringence linéaire et donc éclairer suivant l'axe optique.

Remarque :

On peut montrer que dans un milieu possédant à la fois de la biréfringence linéaire et circulaire, les lignes neutres de propagation sont des vibrations elliptiques avec les grands axes perpendiculaires entre eux et orientés dans la direction des lignes neutres de biréfringence linéaire avec une ellipticité qui dépend du rapport entre la biréfringence circulaire et la biréfringence linéaire.