

DYNAMIQUE DU POINT ET DU SOLIDE

I INTRODUCTION

La dynamique Newtonienne a pour objet l'étude du mouvement des corps en relation avec les causes (forces) qui en sont l'origine. Elle est construite autour de 3 grands principes, les lois de Newton.

I.1 Première loi de Newton

Le principe d'inertie

On peut l'énoncer de la façon suivante : dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie d'un système isolé ou pseudo-isolé est soit immobile, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme (vecteur vitesse \vec{v}_I constant).

Remarques :

Un système est isolé s'il n'est soumis à aucune force : $\vec{F}_i = \vec{0} \forall i$. Un système est pseudo isolé si la somme totale des forces vectorielles qu'il subit s'annule : $\Sigma \vec{F}_i = \vec{0}$. Le référentiel terrestre, pour autant que les expériences soient de courtes durées et que les vitesses ne soient pas trop grandes, peut être considéré comme un référentiel galiléen (dans le cas contraire, il faut tenir compte de l'accélération de Coriolis $2\vec{\Omega}_{terre} \wedge \vec{v}_r$).

I.2 Deuxième loi de Newton

Le principe fondamental de la dynamique.

Cette loi introduit le concept de quantité de mouvement qui regroupe les notions de vitesse et de masse. Elle relie l'accélération d'un corps à l'ensemble des forces auxquelles il est soumis. On peut l'énoncer de la façon suivante : dans un repère galiléen, le mouvement d'un point matériel de masse m et d'accélération \vec{a} soumis à un ensemble de forces de somme vectorielle $\Sigma \vec{F}$ satisfait à la relation :

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

La masse m caractérise l'inertie du système, c'est à dire la "résistance" à sa mise en mouvement ou à la modification de celui-ci sous l'action de l'ensemble des forces $\Sigma \vec{F}$.

I.3 Troisième loi de Newton

Principe de l'action et de la réaction ou loi d'opposition des actions réciproques.

Cette loi générale énonce qu'il n'y a pas de forces isolées dans la nature mais que chaque force existe de pair avec une force symétrique contraire. On peut en donner l'énoncée suivante : un corps exerçant une force $\vec{f}_{1/2}$ sur un autre corps subira en retour une force $\vec{f}_{2/1}$ de même intensité, de même direction mais de sens opposé. On a donc $\vec{f}_{1/2} + \vec{f}_{2/1} = 0$.

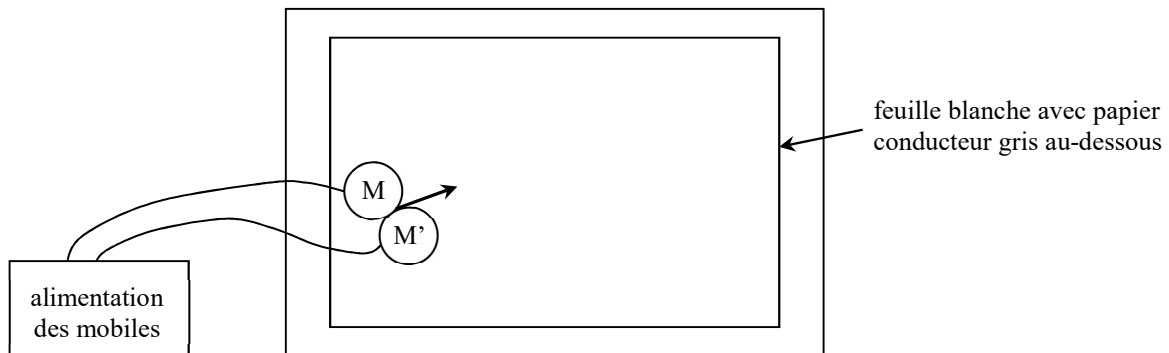
II PREMIERE LOI DE NEWTON

Le principe d'inertie est vérifiable dans le cas d'expériences terrestres lorsque la pesanteur est compensée par la réaction sans frottements d'un support. On peut utiliser des mobiles sur coussin d'air. Il suffit alors de vérifier que le centre d'inertie d'un mobile une

fois lancé laisse des traces équidistantes alignées sur une droite. Cette manipulation étant triviale, on propose de l'enrichir un peu en utilisant deux mobiles solidaires. On s'intéresse au centre d'inertie de l'ensemble et on souhaite vérifier la relation $\vec{v}_I = cte$.

II.1 Manipulation

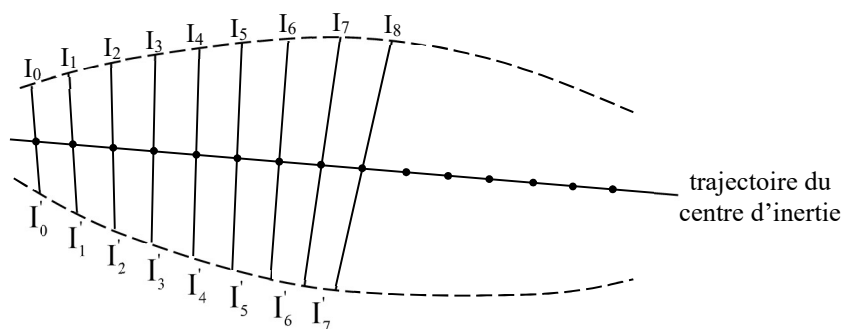
[1], p. 51-53.



On conseille de lire la notice de la table et des accessoires (principe de fonctionnement de l'ensemble, branchement des mobiles, ...). On vérifie l'horizontalité de la table avec un niveau à bulle ou en constatant qu'un mobile abandonné immobile sur la table reste dans sa position lorsque la soufflerie est en marche. On peut solidariser les deux mobiles à l'aide de bagues circulaires recouvertes de bandes velcro ou les lier solidement avec du fil. Il faut mieux s'entraîner sans feuille de papier blanc avant de faire un enregistrement pour avoir un mouvement correct. L'ensemble doit être lancé avec une vitesse initiale adaptée pour que le marquage soit exploitable. Les marques doivent être suffisamment espacées pour être lisibles mais pas trop pour en avoir suffisamment afin de déterminer les vitesses en différentes régions de la trajectoire. Il est préférable que les centres d'inertie I et I' ne se croisent pas pour ne pas mélanger les marques dues à chaque mobile et le mouvement imprimé à l'ensemble ne doit pas être trop prononcé pour que la liaison entre les deux mobiles reste rigide.

II.2 Exploitation de l'enregistrement

On récupère sur la feuille les marques I et I' des deux mobiles autoporteurs. On repère pour chaque mobile le début du marquage et on numérote les marques à partir de cette origine.



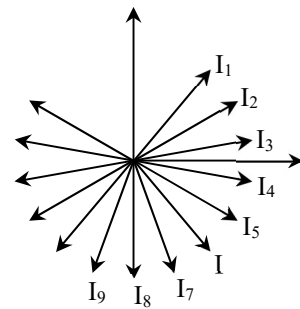
Le centre d'inertie I_G de l'ensemble s'obtient en reliant deux à deux les marques enregistrées au même instant. I_G se trouve au milieu des segments si les masses M et M' des mobiles sont identiques. Si ce n'est pas le cas, on l'obtient par la relation barycentrique :

$$\overrightarrow{I_t I_G} = \frac{M'}{M + M'} \overrightarrow{I_t I'_t}$$

On doit constater que la trajectoire de I_G est une droite avec des points successifs équidistants $\rightarrow \vec{v}_{I_G}$ et $\vec{p}_{I_G} = \text{ctes}$. La trajectoire du centre d'inertie est rectiligne uniforme et la quantité de mouvement du centre d'inertie du système pseudo isolé s'est conservée.

Remarques :

Si l'on déplace la table en cours d'enregistrement, on constate que la loi n'est plus vérifiée (cas d'un référentiel non galiléen). On peut aussi s'intéresser au mouvement d'un point quelconque du système. Le plus simple avec l'expérience réalisée consiste à étudier la trajectoire de I ou I' dans le référentiel barycentrique de l'ensemble. Pour ce faire, on utilise une feuille de papier calque avec un repère orthonormé tracé dessus. On place le centre de ce repère sur les traces successives de I_0 en conservant à chaque fois l'orientation de repère orthonormé et on reporte les positions successives de I ou I' dans ce repère. Si l'on veut réaliser cette étude, il vaut mieux lancer les mobiles en leur imprimant un mouvement de rotation un peu plus marqué pour avoir des points un peu plus espacés (les erreurs dues à une translation imparfaite de la feuille de papier calque sont moins visibles dans ce cas). On obtient alors une figure de ce type :



Les différentes traces du point choisi dessinent un cercle et les marques sont toutes équidistantes \rightarrow le mouvement d'un point périphérique dans le référentiel barycentrique est circulaire uniforme \rightarrow le moment cinétique \vec{L} se conserve.

III ETUDE D'UN MOUVEMENT DE TRANSLATION

En l'absence de rotation, le mouvement d'un solide indéformable est entièrement défini par celui de son centre d'inertie puisque le mouvement des autres points est identique (à une constante près pour la position). Ces problèmes peuvent donc être traités dans le cadre de la mécanique du point. On propose d'étudier la chute libre d'une balle de ping-pong.

III.1 Equation du mouvement

Si on étudie la chute d'un corps suffisamment dense sur une distance raisonnable, on peut négliger les influences de l'air environnant. Dans ce cas, l'application de la relation fondamentale de la dynamique donne :

$$m\vec{a} = \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{g} \rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Soit, lorsque l'axe z est dirigé vers le haut :

$$\ddot{z} = -g \quad \dot{z} = v_0 - g(t - t_0) \quad \text{et} \quad z = z_0 - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 - v_0(t - t_0)$$

Les balles de ping-pong certifiées mesurent 40 mm de diamètre et pèsent 2,7 g donc on est loin d'un corps dense puisque $\rho = 80 \text{ kg.m}^{-3}$. Cette valeur étant assez proche de la masse volumique de l'air ($1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ à 20°C), on peut regarder l'influence qu'a ce fluide sur le mouvement. Le premier effet est la poussée d'Archimède (force de flottabilité due au gradient de pression subi par le corps). Le mouvement de la balle à une vitesse v entraîne un déplacement de l'air environnant, donc une force supplémentaire due au cisaillement visqueux et a des forces de pression différentes de celles du cas statique. Cet effet correspond aux calculs classiques des forces de trainée visqueuses en fonction du nombre de Reynolds (régime de Stokes, Newton, ou intermédiaire). Une dernière force, dite trainée

dynamique, apparait à cause de l'accélération \vec{g} subie par la balle car cela entraîne une accélération des particules environnantes, d'où un effet d'inertiel dans l'air¹ contre lequel la balle doit lutter.

III.1.1 Poussée d'Archimède et trainée dynamique

On commence par ces deux forces car elles peuvent être regroupées dans un même terme dans l'équation du mouvement. La poussée d'Archimède exerce sur la balle une force dirigée vers le haut proportionnelle au poids du volume d'air déplacé :

$$\vec{\pi}_A = -m_{air}\vec{g} = -\rho_{air}V_{balle}\vec{g}$$

La trainée dynamique correspond à la force à fournir pour accélérer les particules d'air autour de la balle. Elle est liée à l'inertie du fluide donc elle est proportionnelle à l'accélération de la balle et à la masse d'air déplacée. On peut montrer (cf. [8], p. 567, [9], chapitre 5.10.3 ou [10]) qu'elle vaut, pour une sphère :

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}m_{air}\vec{a}$$

La quantité $m_{air}/2$ est appelée masse ajoutée, ou masse entraînée par la balle, puisqu'on peut l'ajouter à sa masse dans le terme inertiel de la RFD (cf. ci-après).

RFD compte tenu de ces corrections :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\pi}_A + \vec{F}_D = m\vec{g} - m_{air}\vec{g} - \frac{1}{2}m_{air}\vec{a}$$

$$\left(m + \frac{1}{2}m_{air}\right)\vec{a} = (m - m_{air})\vec{g}$$

La pesée d'un objet avec une balance prend en compte la poussée d'Archimède donc les 2,7 grammes d'une balle de ping-pong correspondent à sa masse apparente² $m_{app} = m - m_{air}$. La RFD devient, en fonction de cette masse :

$$\left(m_{app} + \frac{3}{2}m_{air}\right)\vec{a} = m_{inertielle}\vec{a} = m_{app}\vec{g}$$

$$\ddot{z} = -\frac{m_{app}}{m_{inertielle}}g$$

$$\text{Soit} \quad \ddot{z} = -g' \quad \text{avec} \quad g' = \frac{m_{app}}{m_{inertielle}}g$$

→ l'équation du mouvement a la même forme que précédemment, mais avec une constante d'accélération g' inférieure à g . On a :

$$m_{air} = \rho_{air}V_{balle} = \rho_{air}\frac{4}{3}\pi R^3 = 0,04 \text{ g} \quad \text{à } 20^\circ\text{C}$$

$$m_{inertielle} = m_{app} + \frac{3}{2}m_{air} = 2,7 + \frac{3}{2}0,04 = 2,76 \text{ g}$$

¹ Cette force est différente de la trainée visqueuse puisqu'elle est non dissipative et cesse lorsqu'il n'y a plus d'accélération.

² Une balance affiche en toute rigueur la masse conventionnelle de l'objet, c'est-à-dire la masse d'un corps de densité fixée conventionnellement à 8 équilibrant l'objet pesé dans un air de masse volumique $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$. La correction à apporter à la masse apparente est négligeable ici.

D'où :

$$g' = \frac{2,7}{2,76} 9,81 = 9,6 \text{ m.s}^{-2}$$

La poussée d'Archimède et la trainée dynamique conduisent à une erreur systématique facilement corrigeable mais très faible puisqu'il n'y a que 2,2 % d'écart avec $g \rightarrow$ il faut des mesures précises pour détecter cet effet.

III.1.2 Frottements dus à l'air

La force de trainée dépendant du type d'écoulement, il faut calculer le nombre de Reynolds $Re = \rho v d / \eta$ pour savoir dans quel régime on se trouve. On peut estimer sa valeur en considérant une chute démarrant à $t_0 = 0$ avec une vitesse nulle. La hauteur de chute h et la vitesse atteinte $v_z = |\dot{z}|$ à un temps t donné valent alors :

$$h = z_0 - z = \frac{1}{2} g' t^2 \quad v_z = g' \cdot t$$

L'ordre de grandeur sur la vitesse permet d'estimer Re connaissant la viscosité dynamique de l'air ($\eta = 18.10^{-6} \text{ Pa.s}$ à 20°C) et le rayon de la balle ($R = d = 20 \text{ mm}$) Les valeurs obtenues montrent qu'on est très rapidement dans le régime turbulent de Newton. On peut donc considérer que la force de trainée au cours du mouvement a une dépendance quadratique à la vitesse (avec $C_x \approx 0,4$ pour une sphère dans la gamme de Reynolds obtenus) :

$$F = C_x S \frac{\rho v^2}{2} = \alpha v^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = C_x S \frac{\rho}{2} = 3,02.10^{-4} \text{ SI}$$

$t \text{ (ms)}$	50	100	150	200	250	300	320	350
$h \text{ (cm)}$	1,2	4,8	10,8	19,2	30,0	43,2	49,1	58,7
$v \text{ (m/s)}$	0,48	0,96	1,44	1,92	2,40	2,88	3,07	3,36
Reynolds	1279	2559	3838	5118	6397	7677	8188	8949
$F \text{ (mN)}$	0,07	0,28	0,62	1,11	1,74	2,5	2,84	3,4

La force de frottement représentant déjà $\approx 5 \%$ du poids de la balle après 20 cm de chute, on peut regarder son influence sur le mouvement en reprenant la RFD :

$$m_{\text{inertielle}} \ddot{z} = -m_{\text{app}} g + \alpha \dot{z}^2$$

$$\ddot{z} = -\frac{m_{\text{app}}}{m_{\text{inertielle}}} g + \frac{\alpha}{m_{\text{inertielle}}} \dot{z}^2 = -g' + \frac{\alpha}{m_{\text{inertielle}}} \dot{z}^2$$

Résoudre cette équation est compliqué car la vitesse intervient au carré. Il est plus simple de la traiter par la méthode d'Euler ou, comme on le fait ici, par un traitement perturbatif³.

Equation à l'ordre zéro :

On enlève le terme en $\dot{z}^2 \rightarrow$ on revient à l'équation du § précédent.

$$\ddot{z} = -g' \rightarrow \dot{z}^{(0)}(t) = -g' t \quad \text{et} \quad z^{(0)}(t) = z_0 - \frac{1}{2} g' t^2$$

Correction à l'ordre 1 :

On garde cette fois-ci uniquement le terme en \dot{z}^2 avec l'expression de la vitesse à l'ordre zéro qu'on vient d'obtenir.

³ On a testé les deux méthodes et les résultats sont très proches.

$$\ddot{z} = \frac{\alpha}{m_{\text{inertielle}}} \dot{z}^2 = \frac{\alpha}{m_{\text{inertielle}}} (-g't)^2$$

$$\rightarrow \dot{z}^{(1)}(t) = \frac{\alpha}{m_{\text{inertielle}}} (g')^2 \frac{t^3}{3} \quad \text{et} \quad z^{(1)}(t) = \frac{\alpha}{m_{\text{inertielle}}} (g')^2 \frac{t^4}{12} = 0,84t^4$$

III.1.3 Bilan et conclusion

Le tableau suivant calcule la hauteur de chute pour différentes durées en fonction des hypothèses effectuées. La première ligne correspond au cas le plus simple (aucune influence de l'air). Les valeurs h' sont obtenues en prenant en compte la poussée d'Archimède et la trainée dynamique (g' à la place de g). La dernière ligne correspond au calcul le plus complet (poussée d'Archimède, trainée dynamique et visqueuse) :

temps de chute t (ms)	100	150	200	250	300	320	350
h (cm)	4,9	11,0	19,6	30,7	44,1	50,2	60,0
h' (cm)	4,8	10,8	19,2	30,0	43,2	49,1	58,7
h'' (cm)	4,8	10,8	19,1	29,7	42,5	48,3	57,4

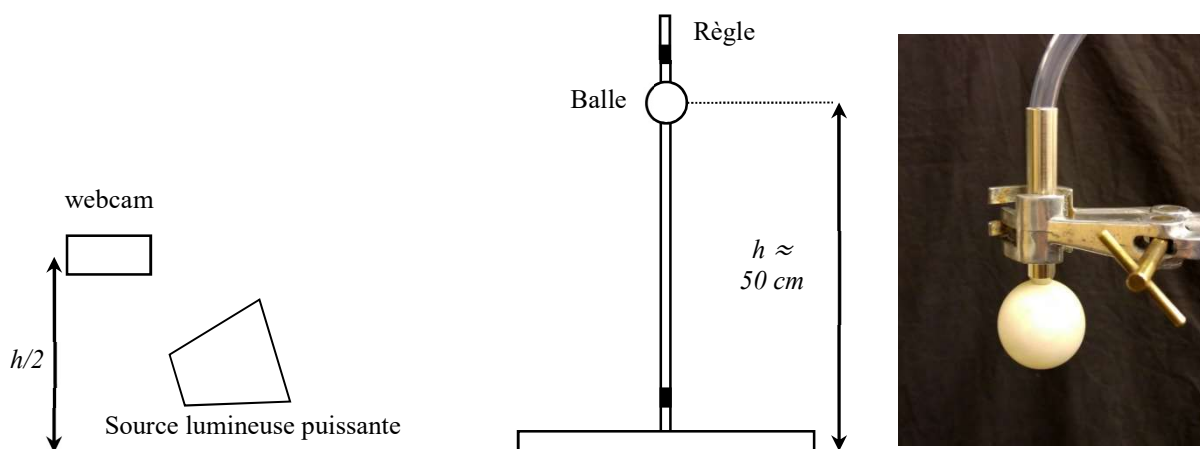
On a, comme attendu, un écart relatif constant de 2,2 % entre les valeurs h et h' lié à la différence entre g et g' . Les écarts absolus sont assez faibles au début mais deviennent significatifs pour des hauteurs plus importantes (plus d'un centimètre d'écart vers 60 cm). L'effet des forces de frottements est minime au début (moins d'un millimètre d'écart jusqu'à 20 cm) et notable au-delà. On peut s'étonner d'un impact si faible au départ quand on compare F à mg . Cela est dû au fait que le poids intervient via l'accélération et conduit à une évolution de z en t^2 , alors que la dépendance en v^2 de F aboutit à une évolution approchée de z en t^4 .

Conclusion :

La correction la plus délicate étant celle des frottements, il vaut mieux limiter l'analyse du mouvement sur des distances qui permettent de les négliger. Si on ne dépasse pas 20 cm de chute, l'écart avec h' ne dépasse pas le millimètre. Il est peu probable qu'on puisse pointer le centre d'inertie de la balle avec une telle précision donc on peut se fixer cette limite pour l'exploitation des résultats.

III.2 Dispositif expérimental

[7], chapitre 10.



On filme la chute de la balle avec une webcam et on relève image par image la position de son centre d'inertie pour vérifier l'équation du mouvement, calculer l'énergie cinétique, potentielle et totale de la balle ainsi que son coefficient de restitution lors des rebonds. Il faut prendre certaines précautions

si on veut obtenir de bons résultats. L'objet étalon (une règle ou une tige avec deux repères) servant de référence de longueur pour le pointage des positions de la balle doit être placé avec soin dans le plan du mouvement pour éviter les erreurs de grossissement. La caméra doit être placée de façon à minimiser les erreurs de parallaxe (webcam horizontale à $h/2$). *Ces deux réglages sont importants*. Il faut aussi que le mouvement reste au mieux dans le plan de chute initial pour l'étude des rebonds. Cela implique :

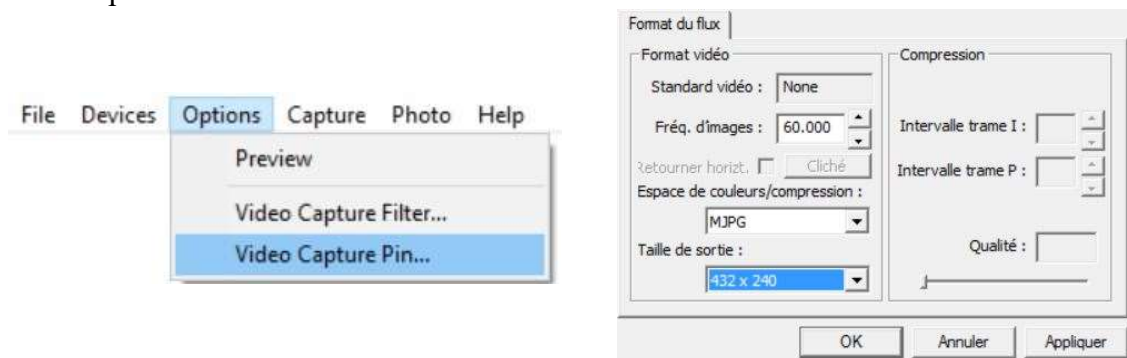
- une surface d'impact plate, lisse, stable et horizontale (on peut prendre une plaque épaisse en métal, en medium ou en verre si la table présente des irrégularités).
- un milieu sans courant d'air.
- une balle bien ronde (on peut prendre une balle certifiée 3 étoiles pour avoir une garantie sur la sphéricité).

- un lâcher « très propre » (chute verticale, avec un minimum de rotation, dans le plan de l'objet étalon). Ce n'est pas forcément facile à réaliser manuellement. On peut, si on le souhaite, bricoler un système de largage très simple avec un petit tube relié à un tuyau (cf. photo) : on retient la balle sur l'orifice en aspirant dans le tuyau et on démarre la chute en cessant d'aspirer.

Webcam :

La chute est rapide donc il faut une vitesse d'obturation élevée pour limiter les effets de flou. Cela se faisant au détriment de la lumière captée, il faut éclairer fortement la scène (lampe halogène 500 W par exemple). Il faut beaucoup d'images par seconde avec une résolution suffisante pour décrire précisément le mouvement mais on est vite limité par la bande passante de la connexion USB de la caméra donc il y a un compromis à faire. On utilise ici une Webcam commercialisée par Sordalab (référence HDCM). Elle peut enregistrer jusqu'à 60 images/seconde et génère des fichiers au format AVI directement exploitables par les logiciels de pointage courant. La résolution peut monter jusqu'à 1280×720 en MJPG avec 30 images/s, mais il faut descendre à 432×240 pixels si on souhaite avoir 60 images/s. Il vaut mieux privilégier la deuxième solution pour avoir une exploitation correcte (notamment sur l'énergie). Voici la liste des réglages à faire dans les menus de la caméra :

- choisir la fréquence d'images et la résolution⁴ dans le menu « Options », « Video Capture Pin »



- confirmer la fréquence d'image dans le menu « Capture », « Set Frame Rate » et cocher la case « Use Frame Rate » pour forcer le logiciel à faire l'acquisition au nombre d'images par seconde souhaité (important).

- décocher l'exposition automatique dans le menu « Options », « Video Capture Filter », « Contrôle de la caméra ». Une exposition réglée à un niveau bas (- 10 par exemple) permet d'éviter les flous de mouvement pour une chute de 50 cm de haut mais il faut avoir suffisamment de

⁴ Le choix du format de compression (YUY2 ou MJPG) n'a pas d'importance si on exploite la vidéo avec Latis Pro. D'autres logiciels peuvent par contre avoir des problèmes avec le format MJPG.

lumière pour que l'image ne soit pas trop sombre (on peut jouer sur les paramètres de luminosité, contraste et gamma de la caméra pour limiter ce problème).

Traitement de la vidéo :

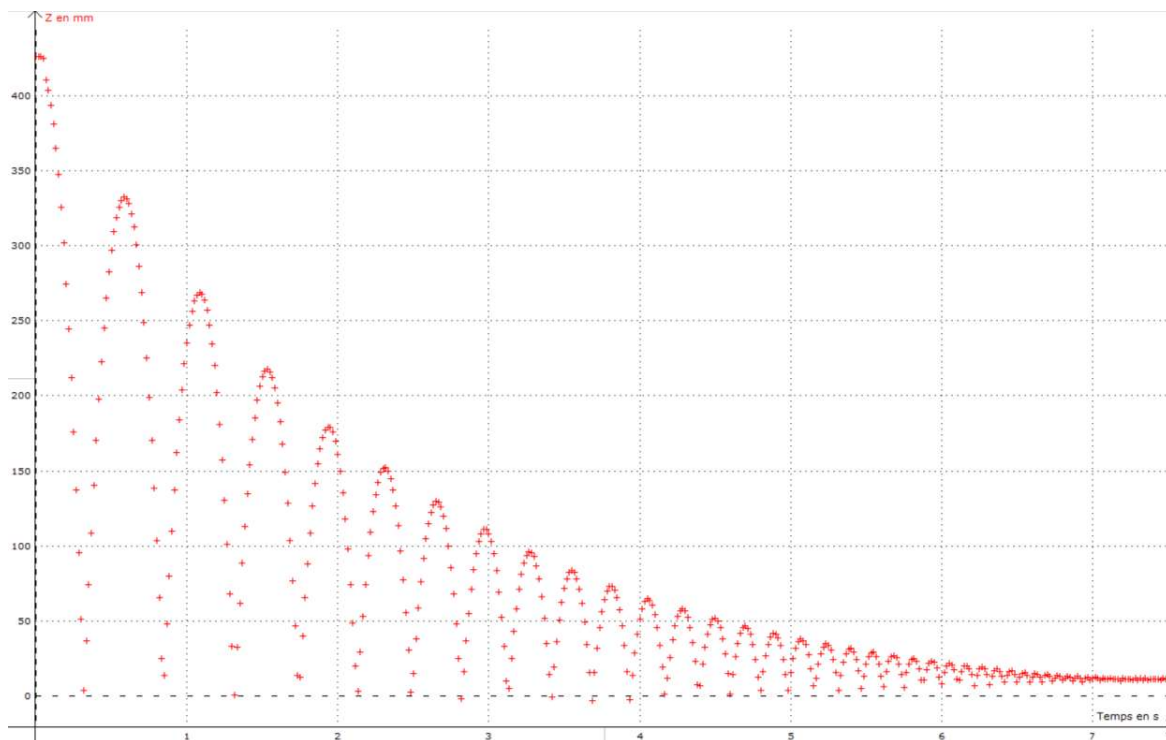
On exploite la vidéo avec Latis Pro car ce logiciel permet le pointage automatique du mouvement. L'opération marche bien si la scène est suffisamment contrastée (on peut mettre un drap noir derrière le plan de chute pour que la balle se détache bien du fond). On procède de la manière suivante :

- on clique sur l'icône « lecture de séquences AVI », puis sur « Fichiers » pour ouvrir la séquence souhaitée.

- on recherche manuellement l'image correspondant au premier impact de la balle pour fixer une référence de hauteur. On clique sur « sélection de l'origine » et on place le curseur sur le centre de gravité de la balle à cet instant. Si on n'a pas d'image correspondant exactement à l'impact, on estime au mieux la position de G avec l'image la plus proche.

- on clique sur « sélection de l'étalon », on tire la flèche entre deux points de l'objet de référence et on entre la valeur en mètre entre ces points.

- on peut alors lancer la « Sélection auto des points ». On se place au tout début de la chute, on sélectionne l'objet à pointer (la balle), la zone dans laquelle doit se faire la recherche de l'objet, puis on lance la détection. Une fois l'opération terminée, on dispose des mouvements horizontaux et verticaux de la balle en fonction du temps dans la partie courbe du logiciel. Voici à titre indicatif un exemple de résultat pour z quand on a de la chance :



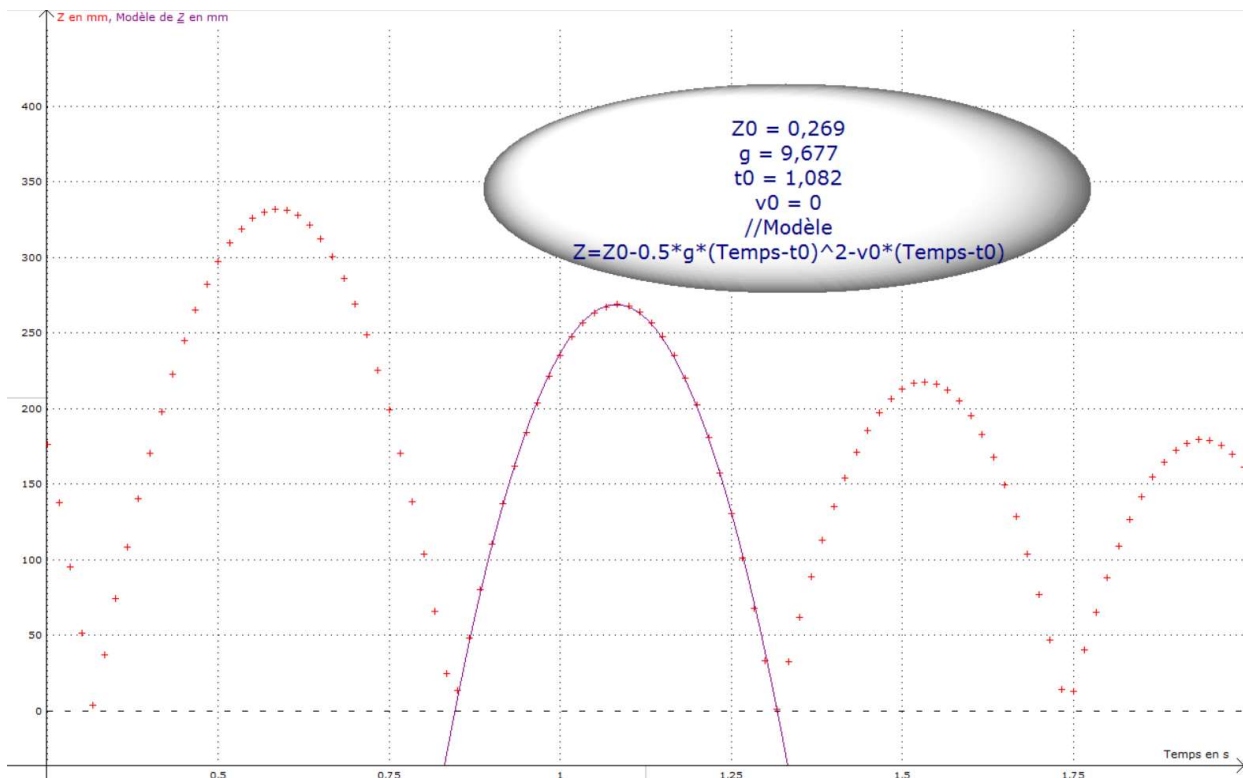
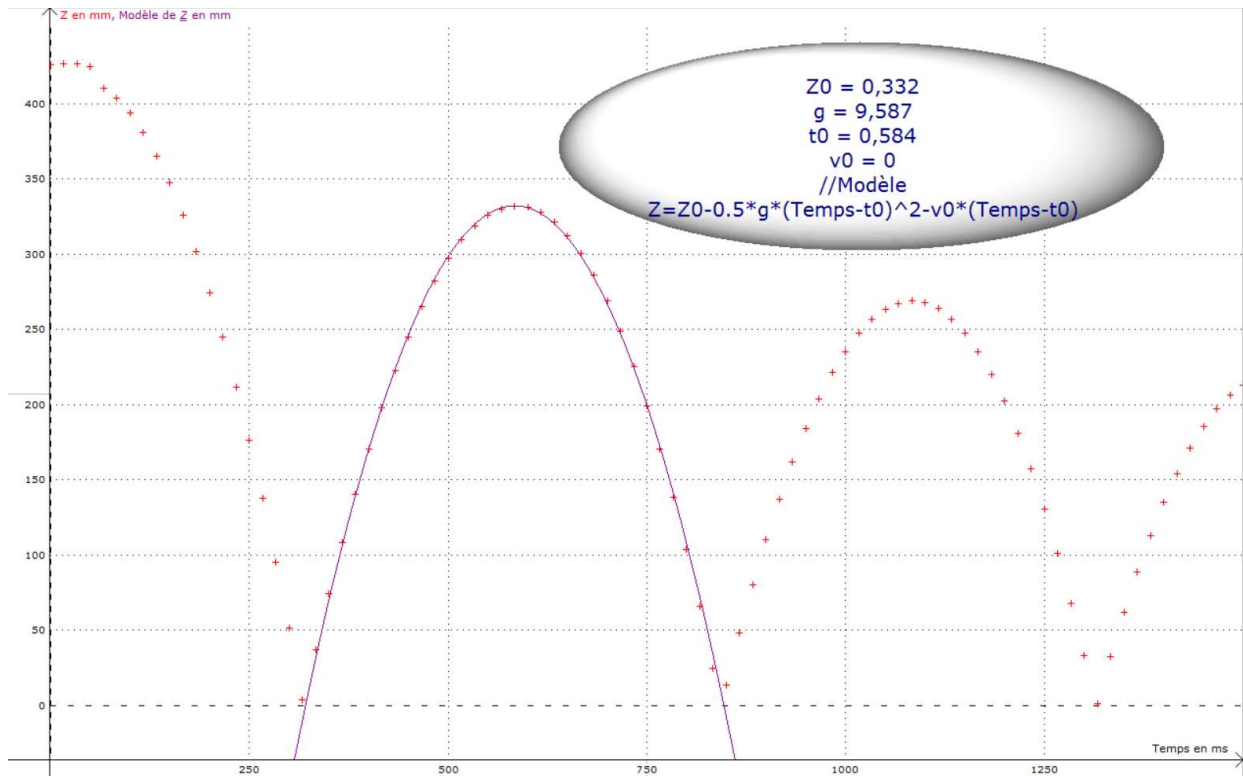
Plusieurs essais ont été nécessaires pour obtenir une trajectoire à peu près plane⁵ sur un aussi grand nombre de rebonds malgré le soin apporté au dispositif expérimental. Il ne faut donc pas espérer obtenir un tel résultat à chaque fois et s'estimer satisfait quand on a deux ou trois rebonds corrects.

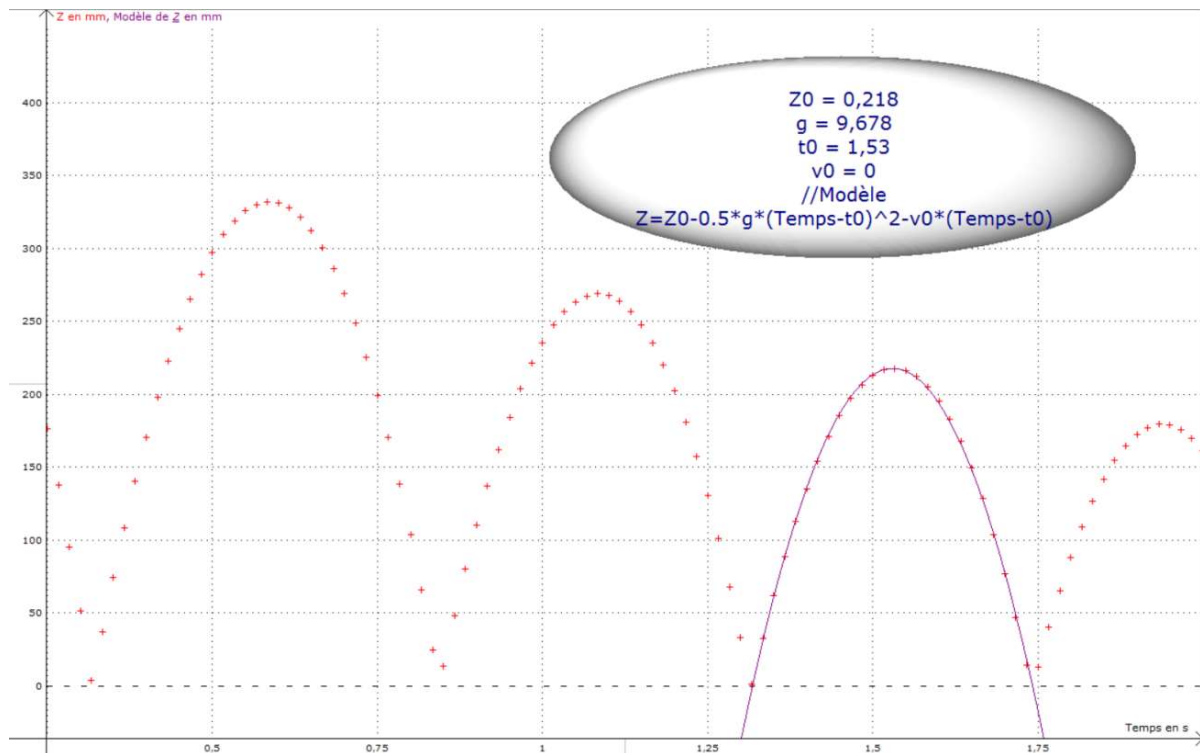
⁵ Le décalage du zéro sur certains rebonds (comme à la fin du mouvement) est lié à un effet de perspective sur le pointage quand le rebond se déroule en avant (minimum négatif) ou en arrière (minimum positif) du plan de chute initial.

III.3 Exploitation

III.3.1 Equation du mouvement ; détermination de g

On peut utiliser l'équation du § III.1 en limitant le fit à une hauteur de l'ordre de 20 cm pour négliger les frottements. Voici à titre indicatif le résultat des modélisations effectuées sur les trois premiers rebonds :





On a guidé le logiciel en lui donnant des estimations sur Y_0 , et t_0 pour qu'il donne une équation centrée sur le sommet des paraboles et on l'a forcé à avoir une vitesse nulle en ce point. On a obtenu $g = 9,68 \text{ m.s}^{-2}$ avec un écart-type de $0,06 \text{ m.s}^{-2}$ sur les 5 premiers rebonds. Ce résultat est très proche de $9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et, comme prévu, légèrement inférieur à cette valeur. Il faut cependant noter qu'on n'a pas une telle reproductibilité si on répète l'expérience plusieurs fois. De nombreux paramètres peuvent influencer sur la qualité du résultat (mauvais placement de la caméra, de l'étalon, lâché, chute et rebonds mal contrôlés, problèmes de pointage, ...) et on peut vite avoir des écarts plus conséquents si on manipule mal. On peut espérer un encadrement de g à $\pm 5 \%$ en travaillant correctement. Si on est dans ce cas de figure, la prise en compte de la poussée d'Archimède et de la trainée dynamique n'est pas nécessaire puisque ces effets apportent des corrections inférieures à la précision des mesures.

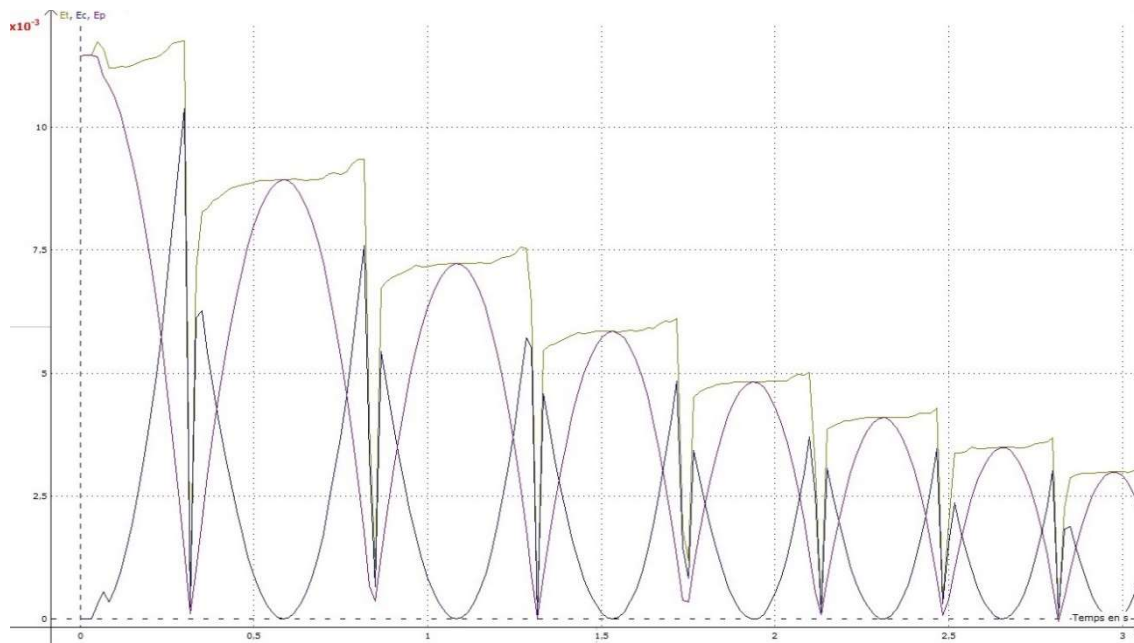
Remarque :

La chute initiale n'a pas été exploitée vu l'allure particulière des premiers points (problème probablement lié au pointage automatique). Mais il est de toute façon plus judicieux d'utiliser les rebonds car l'exploitation de la chute initiale donne souvent de moins bons résultats sur g , même lorsque son allure semble correcte. Ceci est lié au fait que la modélisation doit se faire sur une demi-parabole avec la chute initiale alors qu'on a une parabole complète sur un rebond, donc une courbe avec un sommet mieux défini.

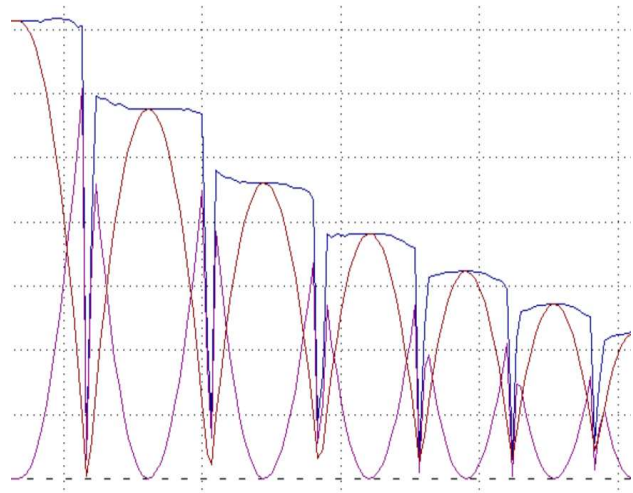
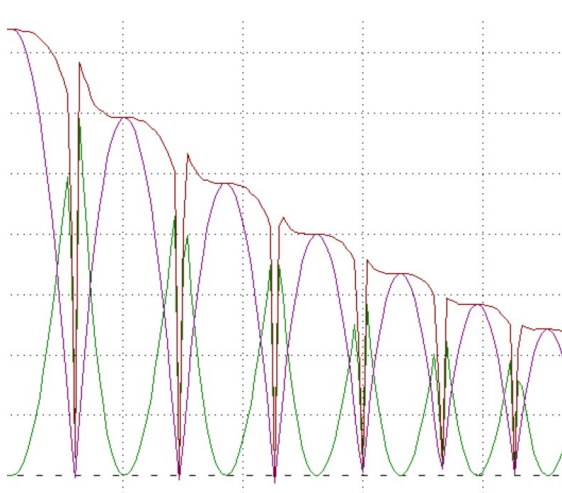
III.3.1 Etude énergétique

L'énergie potentielle de pesanteur vaut $E_P = mgz$.

L'énergie cinétique vaut $E_C = mv_z^2/2$ si la trajectoire de la balle reste parfaitement droite. On peut l'obtenir en dérivant z avec les fonctions de Latis pro (il suffit d'écrire $v_z = \text{Deriv}(z)$ dans la feuille de calcul). La somme $E_P + E_C$ donne l'énergie totale E_T de la balle. On peut alors tracer l'évolution de ces trois termes (cf. ci-après). Le graphique permet d'observer les échanges entre l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie cinétique, avec une somme qui doit se conserver entre chaque rebond si les frottements sont négligeables.



L'énergie totale E_T n'a pas l'allure attendue, avec une tendance étonnante à l'augmentation en début et fin de rebond⁶. L'énergie cinétique présente aussi des défauts. Si on regarde la fin d'un rebond et qu'on suppose une absence de frottements, E_C devrait remonter à la valeur maximum de E_P sur ce rebond, chuter au moment de l'impact (dissipation par choc partiellement mou), puis se mettre à diminuer en partant d'un niveau correspondant à la valeur maximum de E_P du rebond suivant. Ces défauts sont liés en partie à la difficulté de décrire précisément le mouvement aux moments des impacts, avec notamment un nombre d'images/s trop faible (les défauts empirent avec 30/images/s), mais un autre facteur, plus subtil, intervient. La croissance apparente de E_T en cours de rebond est liée au processus séquentiel d'enregistrement des images par la Webcam (Rolling Shutter). On explique ce point en annexe ou on montre que le résultat précédent est corrigeable en redéfinissant une échelle de temps. On peut aussi mettre en évidence expérimentalement que cet effet est dû à la caméra en la retournant de 180° (image de gauche) ou de 90° (image de droite) par rapport à son orientation d'origine lors de l'enregistrement :



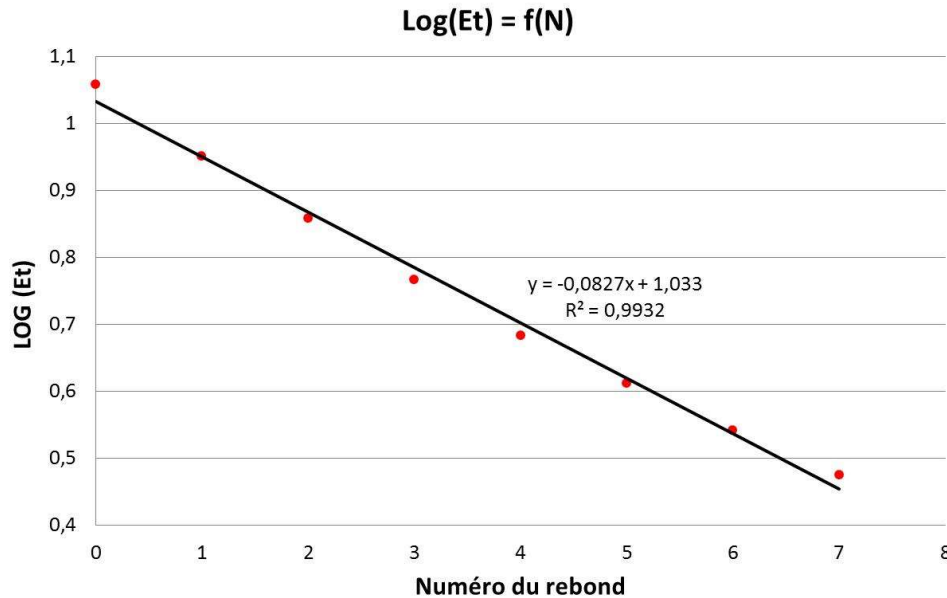
Les courbes présentées sont moins bonnes car on n'a pas pris le même soin qu'auparavant mais on voit clairement que le sens d'orientation de la caméra a une influence sur la forme de l'énergie totale. La courbe la plus juste est celle obtenue lorsque l'axe vertical de la caméra est aligné avec l'axe

⁶ On pourrait, au pire, avoir une légère baisse de E_P à cause de phénomènes dissipatifs mais sûrement pas une augmentation.

horizontal de l'expérience car la lecture ligne par ligne n'induit pas d'erreur sur le temps dans ce cas (cf. annexe pour plus d'explications).

Perte d'énergie au moment des rebonds :

Une étude intéressante consiste à tracer l'évolution du logarithme de l'énergie totale de la balle entre chaque rebond en fonction du numéro du rebond. La courbe de E_T n'étant pas parfaite, on prend pour E_T les valeurs correspondants aux maximums successifs de E_P . On obtient alors le graphique suivant (les logarithmes ont été calculés avec l'énergie en mJ) :



La droite obtenue s'explique si on suppose qu'il y a toujours la même déperdition d'énergie à chaque choc car on a alors :

$$\begin{aligned}
 E_1 &= KE_0 \\
 E_2 &= KE_1 = K^2 E_0 \\
 &\vdots \\
 E_N &= K^N E_0 \quad \text{d'où} \quad \text{Log}(E_N) = N \text{Log}(K) + \text{Log}(E_0)
 \end{aligned}$$

$\text{Log}(K) = -0,0827$ ici, d'où $K = 0,827 \rightarrow$ chaque rebond s'accompagne d'une perte d'énergie de l'ordre de 17 %.

Coefficient de restitution :

Ce coefficient a été introduit par Isaac Newton en 1687 pour l'étude des collisions. Il correspond à la valeur absolue du rapport des vitesses relatives d'un objet avant et après un choc. Il est compris entre 0 (choc parfaitement mou) et 1 (choc parfaitement élastique). Il correspond à la racine carrée du coefficient qu'on a vient de calculer⁷ puisque $E_C = \frac{1}{2}mv^2$. On trouve $C = 90,9 \%$ avec un écart type de 1,6 % sur les 8 premiers rebonds. Ce résultat peut être comparé aux spécifications des balles certifiées ITTF⁸. Elles doivent rebondir à une hauteur h' comprise entre 240 et 260 mm lorsqu'on les lâche d'une hauteur h de 305 mm, d'où $C = \sqrt{h'/h} = 90,5 \pm 1,8 \%$. Cette valeur est en accord avec notre mesure.

⁷ On peut aussi l'obtenir en faisant la racine carrée du rapport des hauteurs maximum entre chaque rebond si on se contente de l'étude du mouvement sans tracer les courbes en énergie.

⁸ On peut trouver un pdf sur internet concernant la certification des balles de ping-pong en tapant « ITTF Technical Leaflet T3 The Ball ».

IV ETUDE D'UN PENDULE PESANT

Le calcul de la période des petites oscillations d'une masse ponctuelle étant simple et rapide, on souhaite vérifier si ce calcul de dynamique du point peut s'appliquer au cas d'un pendule réel. On commence par rappeler les résultats des calculs de période des pendules développés dans le montage sur les régimes transitoires.

IV.1 Pendule simple (mécanique du point)

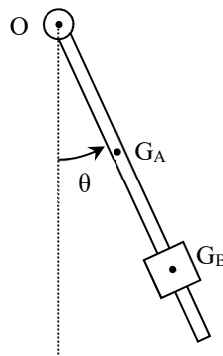
C'est une masse ponctuelle m reliée à un axe par un fil sans masse et située à une distance L de cet axe. La période pour de petites oscillations est donnée par la relation :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$$

La masse n'influe pas sur la période mais la longueur intervient au numérateur → les oscillations sont d'autant plus rapides que la masse est proche de l'axe de rotation et la période tend vers zéro quand le centre de gravité coïncide avec l'axe. Ce résultat est en contradiction avec l'expérience puisque la période d'un pendule réel qu'on équilibre tend plutôt vers l'infini. Il y a donc au moins une limite au modèle de la dynamique du point.

IV.2 Pendule pesant (dynamique du solide)

Le pendule d'étude est principalement constitué d'une tige cylindrique A (rayon R_A , hauteur h_A) et d'une masse cylindrique B (rayon intérieur R_1 , rayon extérieur R_2 , hauteur h_B) pouvant coulisser sur la tige. Le centre de gravité G_A de la tige est situé à une distance L_A de l'axe de rotation O. Le centre de gravité G_B de la masse est situé à une distance L_B de O :



Si on suppose un amortissement de type fluide, la période des petites oscillations est donnée par la relation :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_A L_A^2 + I_A + m_B L_B^2 + I_B}{(m_A L_A + m_B L_B)g}}$$

Avec les moments d'inertie :

$$I_A = m_A \left(\frac{R_A^2}{4} + \frac{h_A^2}{12} \right) \quad (1)$$

$$I_B = m_B \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{4} + \frac{h_B^2}{12} \right) \quad (2)$$

La période ne tend plus vers zéro lorsque L_B devient nul mais s'approche de la période propre de la tige si on peut négliger le moment d'inertie propre de la masse B⁹. On veut voir maintenant s'il y a des cas où cette expression peut se ramener à celle du pendule simple.

⁹ C'est le cas pour le pendule d'étude car I_B est négligeable par rapport à $m_A L_A^2 + I_A$ dans les exemples qui suivent.

IV.2.1 Premier cas

La comparaison des expressions des deux périodes permet de voir que T est exactement égal à T_0 si on a :

$$\frac{m_A L_A^2 + I_A + m_B L_B^2 + I_B}{(m_A L_A + m_B L_B)g} = \frac{L_B}{g}$$

Soit :
$$m_A L_A^2 + I_A + m_B L_B^2 + I_B = (m_A L_A + m_B L_B)L_B$$

D'où :

$$L_{B1} = \frac{m_A L_A^2 + I_A + I_B}{m_A L_A} = L_A + \frac{I_A + I_B}{m_A L_A} \quad (3)$$

→ Il existe une certaine position de la masse B pour laquelle le pendule pesant se comporte comme un pendule simple. Cette position se situe après le centre de gravité de la tige puisque L_{B1} est supérieure à L_A .

IV.2.2 Deuxième cas

On a $T \approx T_0$ si on peut faire les deux approximations suivantes :

$$m_B L_B^2 \gg m_A L_A^2 + I_A + I_B$$

$$m_B L_B \gg m_A L_A$$

Soit :

$$L_B \gg \sqrt{\frac{m_A L_A^2 + I_A + I_B}{m_B}} = L_{B2}$$

$$L_B \gg \frac{m_A L_A}{m_B} = L_{B3}$$

→ La période d'un pendule pesant tend vers celle du pendule simple lorsque la masse B est suffisamment éloignée de l'axe de rotation compte tenu de m_A , m_B , I_A , I_B et L_A . Il y a deux valeurs limites L_{B2} et L_{B3} mais la première est la plus contraignante à respecter lorsque m_B est supérieure à m_A (cas des pendules pesant en général) car on a :

$$L_{B2} = \sqrt{\frac{m_B}{m_A} L_{B3}^2 + \frac{I_A + I_B}{m_B}}$$

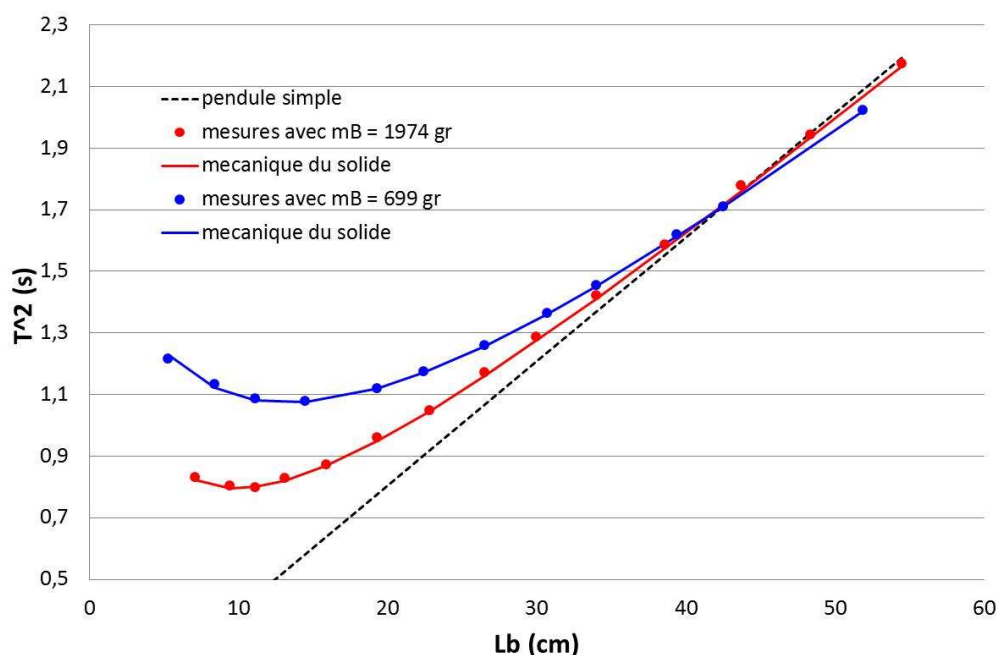
IV.3 ExpérienceIV.3.1 Caractéristiques du dispositif d'étude

La tige a un diamètre de 8 mm et mesure 63 cm de long → $L_A = 31,5$ cm. On ne peut pas la peser car elle est solidaire de l'axe de rotation via un système non démontable. On peut estimer sa masse par la relation $m = \rho V$ en prenant la masse volumique de l'acier dans un Handbook. On obtient $m_A = 250$ g avec $\rho = 7900$ kg/m³. Son moment d'inertie par rapport à l'axe passant par son centre de gravité vaut alors $I_A = 8,27.10^{-3}$ kg.m² d'après (1).

On utilise deux surcharges B. La première est un cylindre monobloc possédant les caractéristiques suivantes : $m_B = 1974 \text{ g}$, $D_1 = 2R_1 = 8,5 \text{ mm}$, $D_2 = 2R_2 = 6 \text{ cm}$, $h_B = 9 \text{ cm}$, d'où $I_B = 1,79.10^{-3} \text{ kg.m}^2$ d'après (2). Une deuxième étude est réalisée avec deux cylindres plus petits accolés. L'ensemble a les caractéristiques suivantes : $m_B = 699 \text{ g}$, $D_1 = 8,5 \text{ mm}$, $D_2 = 4 \text{ cm}$ et $h_B = 6,9 \text{ cm}$, d'où $I_B = 3,50.10^{-4} \text{ kg.m}^2$ d'après (2).

IV.3.2 Mesures

On mesure la période T pour différentes positions de la masse B. On lâche à chaque fois le pendule avec un même angle initial ($\theta_i \approx 5^\circ$ pour rester dans l'hypothèse des oscillations harmoniques). On place une barrière photoélectrique au point d'équilibre du pendule et on envoie le signal sur un oscilloscope numérique en mode Roll pour obtenir T . On observe alors une succession d'échelon. On mesure le temps séparant trois fronts identiques puisque le pendule traverse deux fois la barrière par période. Une fois les mesures effectuées, on trace l'évolution de T^2 en fonction de m_B qu'on compare à celles de T_0^2 et T_{th}^2 :



On peut faire plusieurs remarques :

- les mesures recoupent le modèle de T obtenu dans le cadre de la dynamique du solide pour les deux masses. Le fait d'avoir négligé le cylindre sur lequel est fixé le pendule n'est donc pas gênant dans cette expérience.

- on a, comme attendu, un désaccord notable avec le pendule simple lorsque la masse est proche de l'axe de rotation : la période diminue, passe par un minimum, puis augmente lorsque L_B diminue alors que T_0 tend vers 0 \rightarrow le modèle de la dynamique du point n'est pas adapté si le pendule est « trop court ».

- T se rapproche de T_0 quand on écarte la masse B de l'axe de rotation et il y a bien un point pour lequel les périodes sont identiques. La concordance a lieu entre 40 et 45 cm pour les deux pendules. C'est en accord avec les valeurs de L_{B1} calculables d'après (3) puisqu'on a $L_{B1\alpha} = 44,3 \text{ cm}$ et $L_{B1\gamma} = 42,4 \text{ cm}$.

- les courbes expérimentales passent en dessous de celle du pendule simple au-delà du point de concordance. L'effet est faible pour la masse la plus lourde mais notable pour la surcharge de 699 gr. Cette différence est à mettre en rapport avec les valeurs de L_{B2} et L_{B3} pour chacune des masses puisqu'il faut que L_B soit très supérieure à L_{B2} et L_{B3} si on souhaite décrire le pendule pesant avec l'approximation de la dynamique du point.

masse (g)	L_{B2} (cm)	L_{B3} (cm)
1974	13,3	4,0
699	22,3	11,3

La condition sur L_{B2} est bien la plus contraignante des deux et on voit qu'elle n'est pas vraiment vérifiée dans les deux cas puisque L_B ne peut pas dépasser 60 cm avec le pendule d'étude. Le problème est moins gênant avec la masse la plus lourde, d'où la différence entre les deux courbes.

IV.3.3 Conclusion

Cette étude montre que la description du comportement d'un pendule réel avec les résultats de la dynamique du point peut s'avérer délicat. Cela ne marche évidemment pas pour les distances L_B les plus courtes mais on peut aussi détecter des écarts pour des distances plus importantes avec un système de mesure assez basique. *L'expression de L_{B2} montre qu'il faut minimiser m_A et/ou augmenter m_B pour limiter le problème. On aura donc des résultats qui recoupent la mécanique du point si on a $m_B \gg m_A$ et $L_B \gg L_{B2}$.* Ce n'est pas forcément facile en pratique car on a dû prendre une masse ≈ 10 fois plus lourde que la tige pour avoir des écarts faibles aux distances les plus grandes.

V THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{forces}$$

Ce théorème découle du principe fondamental de la dynamique. Il n'en est qu'une application aux systèmes en rotation.

V.1 Cas d'un système isolé

La première conséquence de ce théorème est la suivante : le moment cinétique total d'un système soumis à aucun couple extérieur est constant. En particulier, un solide mobile autour d'un axe soumis à des couples de moment total nul présente, s'il n'est pas au repos, un mouvement de rotation uniforme. Ce cas est traité dans l'étude complémentaire du § II.2. On peut faire l'analogie avec un système soumis à une force totale nulle : il reste en repos ou est animé d'un mouvement de translation uniforme.

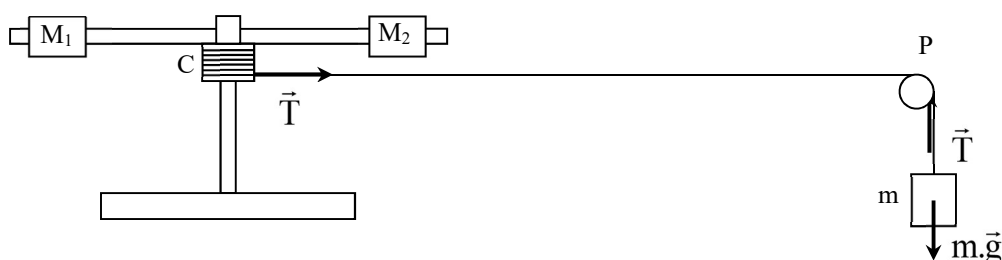
V.2 Solide en rotation autour d'un axe soumis à un couple constant

[1], p. 334 –

337 ; [2], p. 231.

V.2.1 Dispositif d'étude

L'appareil utilisé est constitué d'une tige sur laquelle peuvent coulisser deux masses M_1 et M_2 de 200 g. La tige est susceptible de tourner autour d'un axe sur lequel est fixé un cylindre C de rayon $R = 2$ cm. L'ensemble est entraîné par une masse m soumise à la gravité. Le dispositif peut être utilisé en plaçant l'axe de rotation verticalement ou horizontalement. On représente ci-dessous le montage dans la première configuration :



RFD appliqué à la masse m :

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \rightarrow mg - T = m\ddot{x} = mR\ddot{\theta} \quad \text{car } x = R.\theta$$

Théorème du moment cinétique appliqué au système en rotation :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{poids} + \vec{M}_{tension}$$

Si les masses M_1 et M_2 sont placées symétriquement par rapport à l'axe de rotation, le centre de gravité du système est sur cet axe donc le moment dû au poids est nul et on a :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{tension}$$

La position des masses M_1 et M_2 étant fixe pendant l'expérience, le moment d'inertie I du système est constant donc on a $I\ddot{\theta} = T.R$ suivant l'axe vertical. L'équation du mouvement s'obtient en combinant les deux relations précédentes :

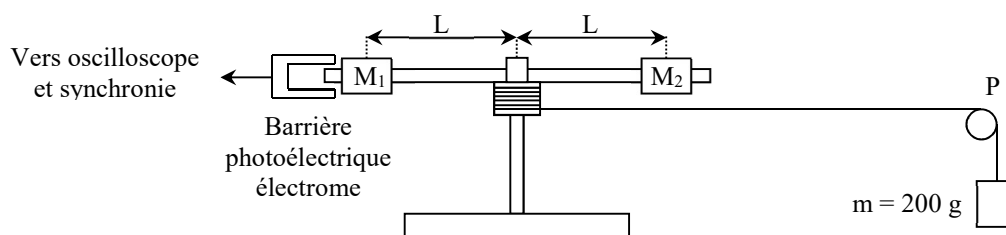
$$\ddot{\theta} = \frac{g}{\frac{I}{mR} + R} = cte$$

L'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est donc constante et il en est de même pour l'accélération linéaire \ddot{x} puisque $x = R.\theta \rightarrow$ Le mouvement est uniformément accéléré et décrit par l'équation :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0t + \theta_0$$

V.2.2 Manipulation

La poulie P et l'axe de rotation du dispositif doivent avoir le moins de frottements possible si on veut obtenir de bons résultats. On peut vérifier qu'ils tournent suffisamment longtemps une fois lancé avant de s'arrêter (critère assez subjectif). Si l'amortissement semble important, on a intérêt à lubrifier les roulements à bille.



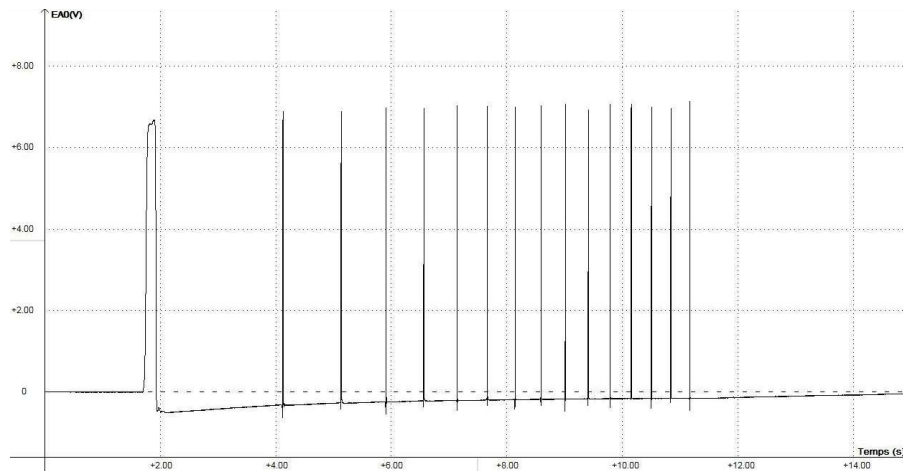
On peut réaliser l'expérience avec un angle et une vitesse nuls au départ pour simplifier l'exploitation. La loi à vérifier se ramène alors à :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2$$

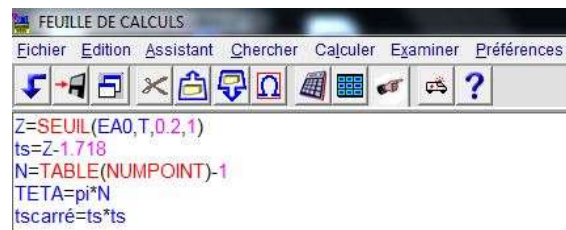
Pour ce faire, on place la barrière photoélectrique de manière à ce que le bout de la tige passe à travers elle. On bloque le dispositif avec la masse m relevée à l'aide d'un pied. On ajuste la position de la barrière pour qu'elle soit en limite de déclenchement. On lance alors l'acquisition, puis on enlève le pied qui retient le dispositif.

Première mesure :

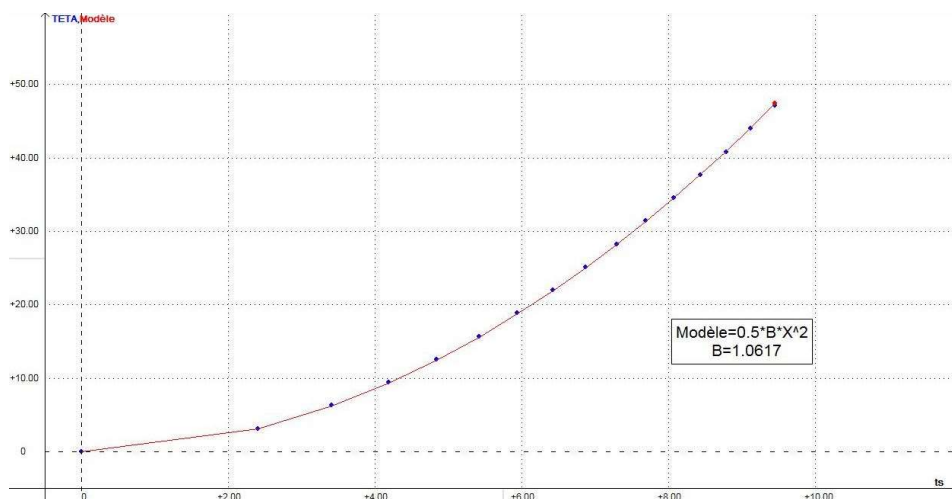
Voici le résultat d'un enregistrement effectué sur 10 000 points pendant ≈ 15 s avec les masses M_1 et M_2 placées symétriquement aux deux extrémités de la tige ($L = 26$ cm) :

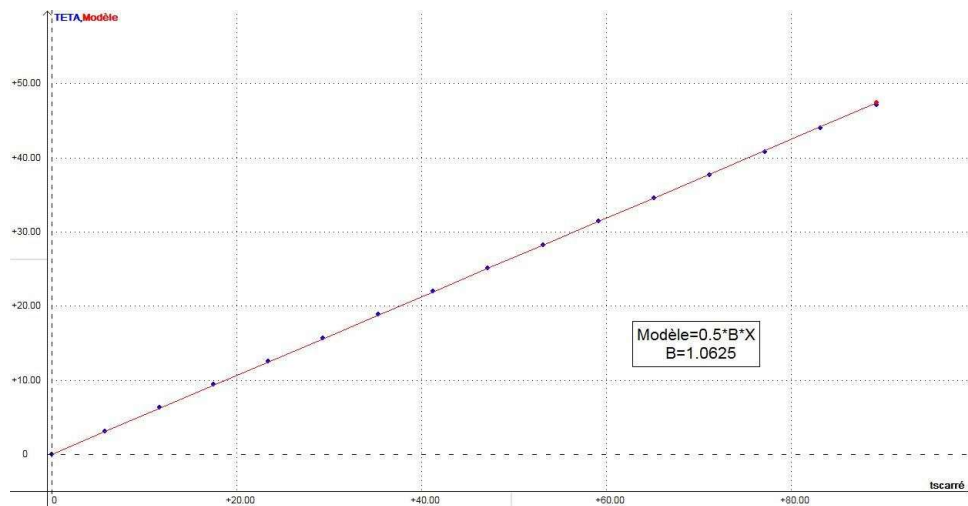


On peut ensuite se servir des outils de calcul de Synchronie pour calculer l'évolution de l'angle de rotation θ en fonction du temps :



La première ligne utilise la fonction seuil du logiciel. Elle permet d'obtenir les valeurs Z du temps T pour lesquelles le signal EA0 atteint une valeur donnée (0,2 V dans notre exemple) dans le sens spécifié par le signe de la dernière variable (+1 ici donc sens positif). Les temps correspondants aux différents déclenchements de la barrière s'affichent alors automatiquement dans la table des valeurs. La deuxième ligne définit une échelle de temps ts dont l'origine correspond au moment où le système est abandonné à lui-même (1,718 s correspond au temps Z du premier top dans notre expérience). La troisième ligne permet d'avoir le nombre de top comme variable dans la table des valeurs (on enlève une unité pour que le premier top corresponde au temps $ts = 0$). On calcule alors les angles θ en multipliant N par π (la tige passe 2 fois dans la barrière à chaque tour, donc le temps entre deux tops successifs correspond à un demi-tour, soit π radian). La dernière ligne est juste une élévation au carré de ts pour le tracé de la deuxième courbe ci-dessous. Une fois les calculs faits, on peut tracer l'évolution de θ en fonction du temps et/ou du temps au carré :





La courbe $\theta = f(t)$ est modélisée par une fonction du type $\theta = Bt^2/2$ pour vérifier la loi d'évolution simplifiée. Le modèle obtenu s'adapte très bien aux mesures et le coefficient B correspond à $\ddot{\theta}$. La courbe $\theta = f(t^2)$ est une autre manière de vérifier la loi. On doit avoir une droite, et c'est ce que l'on obtient. Le coefficient B du modèle correspond encore à l'accélération angulaire et on retrouve pratiquement la même valeur $\ddot{\theta} = 1,06 \text{ rad.s}^{-2}$. On en déduit le moment d'inertie du système en rotation par la relation :

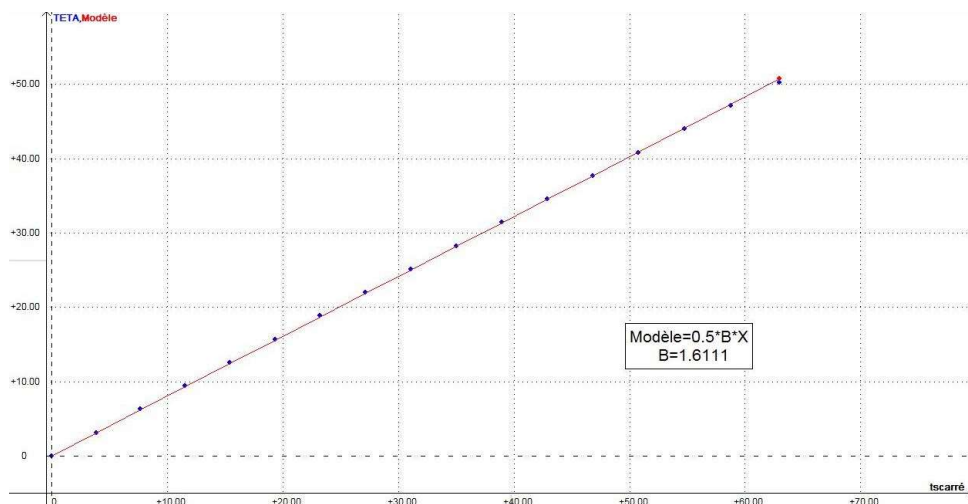
$$I = mR^2 \left(\frac{g}{R\ddot{\theta}} - 1 \right)$$

On a $m = 200 \text{ g}$ et $R_{\text{cylindre}} = 2 \text{ cm}$ d'où :

$$I = 3,69.10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

Deuxième mesure :

On peut recommencer l'expérience en modifiant la position des masses M_1 et M_2 . Voici le résultat obtenu pour la courbe $\theta = f(t^2)$ avec une distance $L = 19 \text{ cm}$:



La masse globale du système est inchangée mais l'accélération angulaire a été modifiée puisque le déplacement de M_1 et M_2 modifie l'inertie du système. C'est la différence avec les mouvements de translation où la masse est le seul paramètre d'influence. On a $\ddot{\theta} = 1,61 \text{ rad.s}^{-2}$ cette fois ci, soit :

$$I = 2,43.10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

Vérification des résultats obtenus :

On peut faire une comparaison avec les valeurs attendues compte tenu des formules des moments d'inertie. Le calcul est effectué en annexe et on obtient :

$$I = 3,67.10^{-2} kg.m^2 \text{ pour } L = 26 \text{ cm}$$

$$I = 2,41.10^{-2} kg.m^2 \text{ pour } L = 19 \text{ cm}$$

→ Les valeurs expérimentales recoupent ces résultats à $\approx 1 \%$ près.

V.3 Le gyroscope

Le système utilisé ici est un gyroscope à deux degrés de liberté de marque Eurosap Deyrolles. Il est principalement constitué d'un bloc moteur mettant en rotation un disque et d'un contrepoids dont la position est ajustable. Il permet d'observer le mouvement d'un solide autour d'un point fixe O. On s'intéresse plus particulièrement aux mouvements obtenus lorsque le disque est en rotation très rapide autour de l'axe principal d'inertie du système (approximation gyroscopique). On ne développe pas la théorie sur le sujet. On rappelle juste les résultats essentiels. On peut se reporter aux références suivantes pour plus d'information : [1], p. 158-164, [3] ; [4], p. 213 et suivantes ; [5], p. 85. On peut aussi consulter la documentation technique du Gyroscope (tous les résultats principaux y sont rappelés).

V.3.1 Gyroscope équilibré

Le gyroscope étant préalablement éteint, on réalise l'équilibre le système en jouant sur le contrepoids jusqu'à ce que le centre de gravité G du gyroscope soit confondu avec le point fixe O. On bloque la position du contrepoids à l'aide de la vis, puis on lance le disque de l'appareil en rotation. Si le gyroscope est bien équilibré, son axe principal doit rester immobile et il doit toujours pointer dans la même direction lorsqu'on déplace sa base (on peut poser l'appareil sur un tabouret tournant pour faire cette manipulation). Cette propriété essentielle découle de l'application du théorème du moment cinétique. Si les axes de liaison sont parfaits (pas de frottements) et si le centre de gravité coïncide exactement avec le point fixe, le gyroscope est soustrait aux moments des forces extérieures. Le théorème du moment cinétique en G dans un référentiel galiléen donne alors :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_{forces} = \vec{0}$$

→ Le moment cinétique \vec{L}_G par rapport à un référentiel galiléen R est une constante vectorielle. L'axe du gyroscope pointe donc constamment une même direction dans R. Cette stabilité de la direction pointée peut aussi s'expliquer en écrivant le théorème du moment cinétique d'une autre manière :

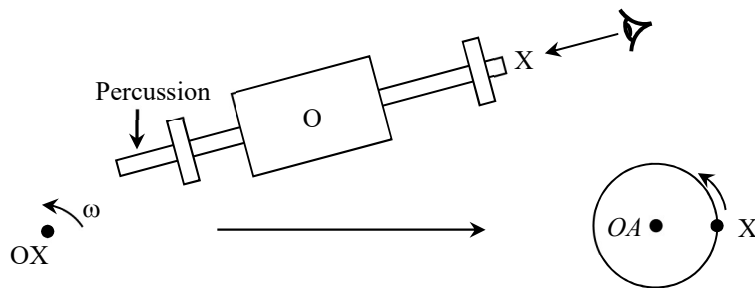
$$d(I_G \vec{\omega}) = \vec{M}_{forces}.dt$$

On voit alors que si le moment d'inertie du système en rotation et sa vitesse angulaire sont suffisamment grands, le vecteur moment cinétique ne peut subir de modification sensible que si le moment d'une force appliquée est suffisamment grand et durable → il n'y a donc pas de changement notable dans la direction pointée par l'appareil sans un effort appréciable et prolongé sur l'axe du gyroscope. C'est pour cette raison que les frottements n'ont pratiquement aucune influence sur la direction pointée lorsque l'on modifie l'orientation du support.

Effet d'une percussion :

On lance le gyroscope équilibré, on repère la direction OX pointée par son axe principal et on applique une percussion verticale dirigée vers le bas sur l'axe du gyroscope du côté du contrepoids : l'axe du gyroscope doit alors décrire un cercle en partant de sa position d'origine

centré autour d'un point A, le plan OXA étant horizontal si la percussion est verticale. C'est le mouvement de nutation (précession libre)



V.3.2 Gyroscopie soumis à un couple extérieur

On peut commencer par observer l'effet d'une force appliquée sur l'axe principal du gyroscope. Si la force appliquée est verticale (horizontale), elle tend à faire tourner l'axe principal du gyroscope comme le ferait un couple de moment \vec{M} horizontal (vertical). C'est le mouvement de précession.

Conclusion :

Il apparaît à chaque fois un moment perpendiculaire à la force appliquée.

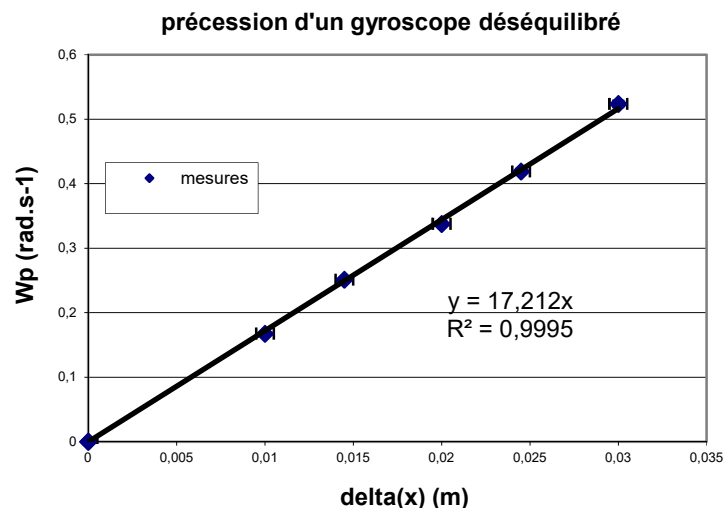
On peut faire une étude quantitative du mouvement de précession du gyroscope en le déséquilibrant à l'aide du contrepoids. Le gyroscope est alors soumis au couple de son poids et entre en mouvement de précession autour d'un axe vertical. Si la vitesse angulaire de précession est faible devant celle de rotation ω et si le mouvement de nutation est négligeable, l'application du théorème du moment cinétique donne la relation suivante (cf. [3], chapitre 26 ou la documentation technique du gyroscope) :

$$\Omega_p = \frac{mg\Delta x}{I_{OX} \cdot \omega_0}$$

Où Δx représente le décalage du contrepoids par rapport à sa position lorsque le gyroscope est équilibré et m la masse du contrepoids.

Manipulation :

On commence par repérer la position du contrepoids sur l'axe du gyroscope équilibré. On modifie cette position de Δx , on lance le gyroscope puis on le lâche en l'accompagnant de façon à minimiser la nutation. L'axe OX du gyroscope doit alors tourner lentement à la vitesse Ω autour de la verticale. On mesure cette vitesse à l'aide d'un chronomètre pour plusieurs valeurs de Δx et on trace la courbe $\Omega_p = f(\Delta x)$:



Le coefficient directeur de la droite permet de calculer le moment d'inertie du gyroscope suivant son axe principal (la mesure de ω_0 peut se faire à l'aide d'un stroboscope). On peut comparer le résultat obtenu à un calcul approché utilisant les formules classiques de moments d'inertie.

Remarque :

Plus on déséquilibre le gyroscope, plus la nutation résiduelle est importante.

VI CAS D'UN REFERENTIEL NON GALILEEN

VI.1 Introduction

Si le repère $R' (O'; x', y', z')$ utilisé n'est pas galiléen, la RFD peut encore s'appliquer en la développant à l'aide de la loi de composition des accélérations. L'accélération absolue γ_a dans un repère galiléen $R (O ; x, y, z)$ et l'accélération relative γ_r dans le repère d'étude sont alors reliées par la relation :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

Avec $\vec{\gamma}_e$ l'accélération d'entraînement et $\vec{\gamma}_c$ l'accélération complémentaire de Coriolis. La RFD devient alors :

$$m\vec{\gamma}_r = \Sigma \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Force d'inertie complémentaire :

$$\boxed{\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c} \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r}$$

Cette force est nulle lorsque $\vec{v}_r = \vec{0}$, donc quand le système est immobile dans le référentiel R' (équilibre relatif). Elle s'annule aussi lorsque $\vec{\omega}_e = \vec{0}$, donc quand le mouvement de R' par rapport à R est un mouvement uniquement de translation.

Force d'inertie d'entraînement :

$$\boxed{\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e} \quad \text{avec} \quad \vec{\gamma}_e = \frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} + x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2}$$

Cette force est nulle si les dérivées secondes des vecteurs unitaires du repère R' sont nulles. Cela interdit les rotations au référentiel R' . Il faut aussi que la dérivée seconde du vecteur reliant les origines des repères R et R' soit nulle \rightarrow le mouvement de R' par rapport à R doit être un mouvement de translation uniforme pour qu'il n'y ait pas de force d'inertie d'entraînement. Dans ce cas, la force d'inertie complémentaire est aussi nulle et R' est aussi un référentiel Galiléen.

VI.2 Mouvement circulaire uniforme

On considère un point matériel en mouvement de rotation uniforme ($\omega = \text{cte}$). Le point matériel étant en équilibre relatif dans le référentiel tournant R' , l'accélération complémentaire $\vec{\gamma}_c$ est nulle (cf. ci-dessus) ainsi que la force d'inertie complémentaire. Le calcul de l'accélération d'entraînement se fait assez simplement compte tenu du mouvement étudié. Il suffit de développer son expression générale :

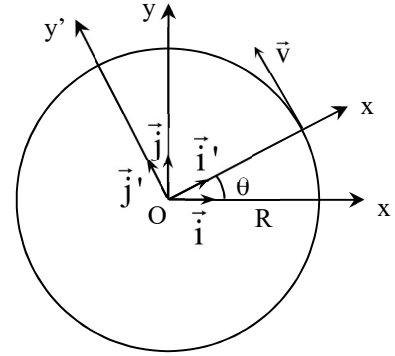
$$\vec{\gamma}_e = x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2}$$

$$\vec{\gamma}_e = R \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} + 0 \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} = R \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2}$$

$$\vec{i}' = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} ; \quad \dot{\theta} = cte$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} &= -\dot{\theta}^2 \cos\theta \vec{i} - \dot{\theta}^2 \sin\theta \vec{j} = -\dot{\theta}^2 (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) \\ &= -\dot{\theta}^2 \vec{i}' \end{aligned}$$

D'où finalement : $\boxed{\vec{\gamma}_e = -R\dot{\theta}^2 \vec{i}' = -R\omega^2 \vec{i}'}$



Conclusion :

La force d'inertie complémentaire est nulle. L'accélération d'entraînement est réduite à sa composante normale (accélération tangentielle nulle) et dirigée vers le centre du cercle que définit la trajectoire. La force d'inertie d'entraînement est centrifuge et vaut :

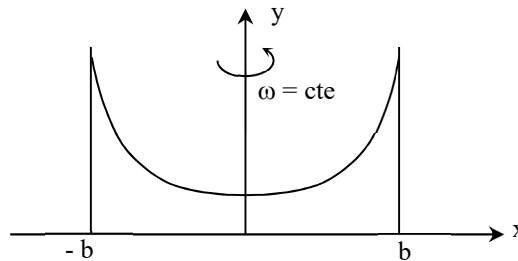
$$\boxed{\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = m\omega^2 R \vec{i}' = m \frac{v^2}{R} R \vec{i}'}$$

VI.2.1 Vérification de la loi $\vec{F} = m\omega^2 R \vec{i}'$

Des appareils didactiques permettent de vérifier cette relation (Matlabo N 169AM par exemple). Se reporter à leur documentation technique pour la manipulation. On peut aussi glaner quelques informations en [2], p. 229.

VI.2.2 Equilibre d'un liquide soumis à la force centrifuge

Une cuve fixée sur un axe permet d'étudier la forme de la surface libre d'un liquide soumis à un mouvement de rotation uniforme :



Pour étudier cette forme, il suffit d'appliquer la relation fondamentale de la dynamique à une particule dans un référentiel lié à la cuve :

$$dm\vec{\gamma}_r = dm\vec{g} + d\vec{F}_{pression} + d\vec{F}_{ie} + d\vec{F}_{ic}$$

On a $\vec{\gamma}_r = \vec{0}$ et $d\vec{F}_{ic} = \vec{0}$ puisque la particule est en équilibre relatif dans le référentiel considéré d'où :

$$\vec{0} = dm\vec{g} + d\vec{F}_{pression} + d\vec{F}_{ie} = dm\vec{g} - \overrightarrow{gradP} \cdot dV + dm\omega^2 \vec{x}$$

$$\overrightarrow{gradP} \cdot dV = dm(\vec{g} + \omega^2 \vec{x})$$

$$\overrightarrow{gradP} = \rho(\vec{g} + \omega^2 \vec{x})$$

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \rho\omega^2 x \quad \Leftrightarrow \quad P(x) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + K_1$$

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \quad \Leftrightarrow \quad P(y) = -\rho g y + K_2$$

$$\text{Soit } P(x, y) = \rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} - g y \right) + K_3$$

Surfaces isobares :

$$P(x, y) = cte \quad \Leftrightarrow \quad \rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} - g y \right) = cte \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + K}$$

Les surfaces isobares, et donc la surface du liquide, se construisent autour de paraboles.

Calcul de K :

$$K = y \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \rightarrow K = y_{\min} : \text{point le plus bas de la parabole.}$$

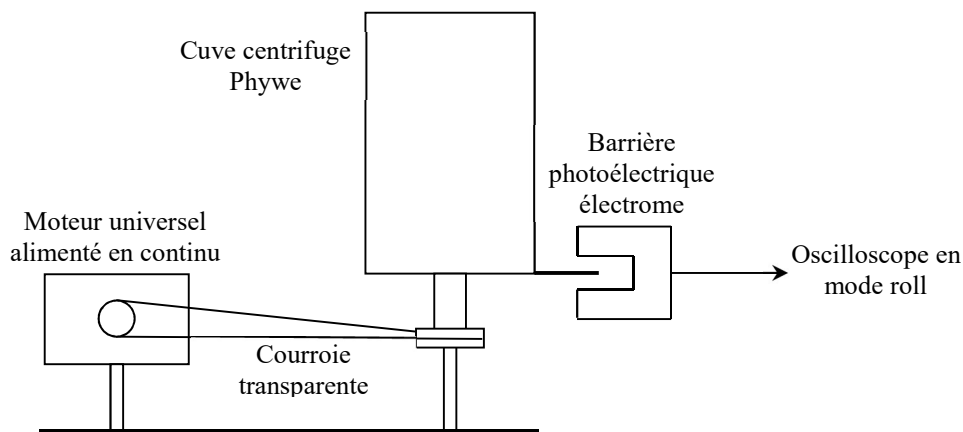
Si l'axe des x correspond au niveau de la surface du liquide pour $\omega = 0$ et si l'axe des y correspond à l'axe de rotation, la conservation de la masse de liquide (supposé incompressible) implique la relation suivante ($2b$ = largeur de la cuve) :

$$\int_0^b y \cdot dx = 0$$

$$\int_0^b \left(\frac{\omega^2}{2g} x^2 + y_{\min} \right) \cdot dx = 0 = \left[\frac{\omega^2}{2g} \frac{x^3}{3} + y_{\min} \cdot x \right]_0^b$$

$$\rightarrow \boxed{K = y_{\min} = -\frac{b^2}{6g} \omega^2}$$

Montage :



La cuve et le moteur doivent être solidement fixés sur la paillasse. Il vaut mieux alimenter le moteur en continu afin d'avoir une vitesse de rotation la plus stable possible. La verticalité et l'horizontalité de la cuve doivent être vérifiées avec un niveau à bulle pour que l'axe de rotation soit confondu avec les axes dessinés sur les transparents qui se placent sur la cuve. On insère la plaque en plexiglas sur laquelle 3 paraboles sont dessinées et on remplit la cuve avec un liquide éventuellement coloré jusqu'au trait horizontal dessiné sur la plaque. La vitesse de rotation du dispositif est mesurée à l'aide d'une barrière photoélectrique en plaçant un repère sur le bas de la cuve. On conseille d'utiliser un oscilloscope numérique en mode roll pour mesurer ω car les vitesses de rotation sont assez lentes.

Manipulation 1 :

Les 3 paraboles dessinées sur la plaque correspondent à des vitesses de rotation croissantes (ω_0 , $\omega_1 = 1,5\omega_0$ et $\omega_2 = 2\omega_0$). On peut vérifier la forme parabolique prise par la surface du liquide en augmentant progressivement la vitesse de rotation de la cuve. On note les valeurs ω_0 , ω_1 et ω_2 pour lesquelles la forme de la surface se confond avec les paraboles (noter que toutes les paraboles ont toujours deux points communs). On peut alors vérifier que ces pulsations sont dans les rapports indiqués. Une feuille transparente (feuille n° 1) peut compléter l'observation à la pulsation ω_2 . Elle se glisse entre la cuve et la plaque de plexiglas et elle reproduit une série de points calculés à partir de l'équation d'une parabole avec comme origine des ordonnées le point minimum.

Manipulation 2 :

$$\text{Vérification de la loi } y_{\min} = -\frac{b^2}{6g}\omega^2$$

Une autre feuille transparente (feuille n° 2) comporte un axe vertical gradué à partir du niveau du liquide à $\omega = 0$. Elle permet la mesure de y pour différentes valeurs de ω . On peut tracer la courbe $y_{\min} = f(\omega^2)$ qui doit être une droite. Son coefficient directeur permet de retrouver la valeur de g connaissant b (demi-largeur de la cuve).

Bibliographie :

- [1] : Quaranta I : Mécanique
- [2] : Duffait : Expériences de Physique au CAPES
- [3] : Pérez de mécanique, chapitre 26
- [4] : Fleury Mathieu : Mécanique Physique, chapitre 12
- [5] : BUP n° 587, p. 85
- [6] : Bertin Faroux Renault : Mécanique I
- [7] : Bellier : Montage de physique au capes (Optique, Mécanique, Statique des fluides, Calorimétrie)
- [8] : Perez : Mécanique : fondements et applications, 7^{ème} édition, p. 567
- [9] : Ryhming, « Dynamique des fluides », Presse polytechnique et universitaire romande
- [10] : L. Landau, E. Lifshitz, Mécanique des fluides.

ANNEXE : ROLLING SHUTTER D'UNE CAMERA

I QU'EST-CE QUE LE ROLLING SHUTTER

La plupart des caméras actuelles procèdent à une lecture séquentielle des données du capteur¹⁰. L'enregistrement se fait ligne par ligne, en commençant par le bas (soit le haut de l'image puisque l'objectif produit une inversion). Par conséquent, **tous les pixels d'une même ligne sont enregistrés au même moment mais il y a un petit décalage temporel entre une ligne et la suivante**. Cela ne pose pas de problème pour des scènes statiques mais ce n'est plus le cas avec des mouvements rapides car le Rolling Shutter fausse la représentation suivant l'axe vertical puisque chaque ligne correspond à des instants différents (les objets en haut de l'image sont détectés avant ceux situés en bas). Il n'y a en revanche aucune déformation suivant l'axe horizontal puisque l'enregistrement d'une ligne est quasi instantané. On peut trouver de nombreux exemples sur le net comme ceux-ci :



Sur cet exemple d'une photo prise dans une voiture en mouvement, le déplacement du véhicule de la gauche vers la droite associée à l'enregistrement de haut en bas de l'image engendre une inclinaison vers la droite des bâtiments (on peut faire le test avec son smartphone)

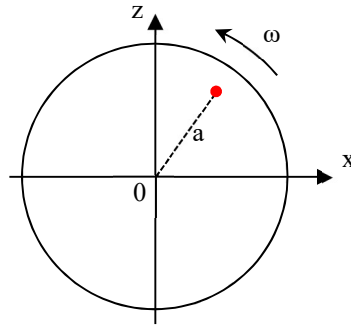


Un autre exemple de représentation faussée par le Rolling Shutter sur un mouvement de rotation

¹⁰ Il existe aussi des modèles exposant l'intégralité du capteur en une seule fois (Global Shutter) mais ils sont plus rares.

II CONSEQUENCE SUR L'ETUDE D'UN MOUVEMENT

Supposons qu'on enregistre une vidéo du mouvement d'un disque circulaire tournant à vitesse constante sur lequel se trouve un point de repère.



II.1 Lecture instantanée des données du capteur (global shutter)

Tous les pixels d'une image sont enregistrés au même moment donc les coordonnées $(x_i ; z_i)$ d'un point quelconque dans l'image correspondent bien au temps t_i d'acquisition et la trajectoire enregistrée pour le point de repère correspond à celle d'un mouvement circulaire uniforme d'équation :

$$x_i = a \cos(\omega t_i + \varphi_0)$$

$$z_i = a \sin(\omega t_i + \varphi_0)$$

Avec $t_i = N \times T_{\text{entre chaque image}} = N \times T_{\text{éch}} = N \times \text{nombre d'images/seconde}$ avec N le numéro de l'image depuis l'instant initial pris comme référence.

II.2 Lecture séquentielle des données (rolling shutter)

La lecture ligne par ligne fait que les données suivant z ne sont pas enregistrées au même instant donc les coordonnées $(x_i ; z_i)$ d'un point quelconque dans l'image ne correspondent plus au temps t_i puisqu'il se rajoute un temps supplémentaire lié à la coordonnée z_i du point considéré. Supposons que la caméra mette un temps T_B pour balayer l'image de haut en bas et que la hauteur maximale visible à l'écran soit L_Z . La vitesse de balayage verticale de l'image en mètre observé par seconde vaut $V_{BE} = L_Z / T_B$. Si un objet en $z = L_Z$ sur l'image est filmé à un instant $t = 0$, un objet en z est filmé à l'instant :

$$t_z = \frac{L_Z - z}{V_{BE}} = T_B \frac{L_Z - z}{L_Z}$$

Les coordonnées $(x_i ; z_i)$ correspondent donc au temps :

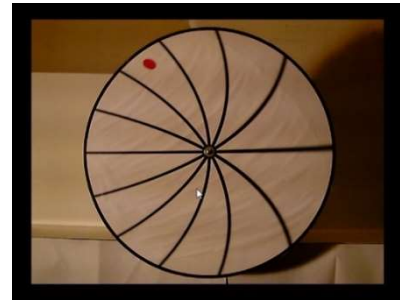
$$t'_i = t_i + t_{zi} = t_i + T_B \frac{L_Z - z_i}{L_Z}$$

La camera associant l'ensemble des coordonnées $(x_i ; z_i)$ de l'image au temps t_i , cela cause des déformations dans sa retranscription. Si on veut corriger cet effet lors de l'étude d'un mouvement, il faut redéfinir l'échelle des temps à l'aide de la formule précédente mais ce n'est faisable que si on connaît la valeur de T_B .

III TEMPS DE BALAYAGE DE LA WEBCAM

La procédure décrite ici est longue à mettre en œuvre donc on peut se contenter du résultat pour corriger l'étude sur la balle de Ping Pong.

Pour obtenir T_B , on a enregistré une vidéo du disque en rotation décrit précédemment sur lequel sont aussi dessinés des rayons. Voici le genre d'image que l'on obtient en rotation horaire :



III.1 Première méthode de mesure

On commence par estimer la période de rotation T_R du disque en faisant défiler la vidéo image par image tout en suivant le point rouge (on peut mesurer le temps que met le point pour revenir à sa position initiale après un certain nombre de tour pour augmenter la précision). On repère ensuite sur quelques tours la position du point rouge par rapport au centre du disque dans Latis Pro (même protocole que pour la balle de Ping Pong). On obtient un ensemble de coordonnées $(x_i; z_i; t_i)$ permettant de tracer l'évolution temporelle du point. Celle-ci doit correspondre au mouvement circulaire uniforme corrigé en temps :

$$x_i = \text{acos} \left[\frac{2\pi}{T_R} \left(t_i + T_B \frac{L_Z - z_i}{L_Z} \right) + \varphi_0 \right] = \text{acos} \left[\frac{2\pi}{T_R} \left(t_i - T_B \frac{z_i}{L_Z} \right) + \varphi' \right]$$

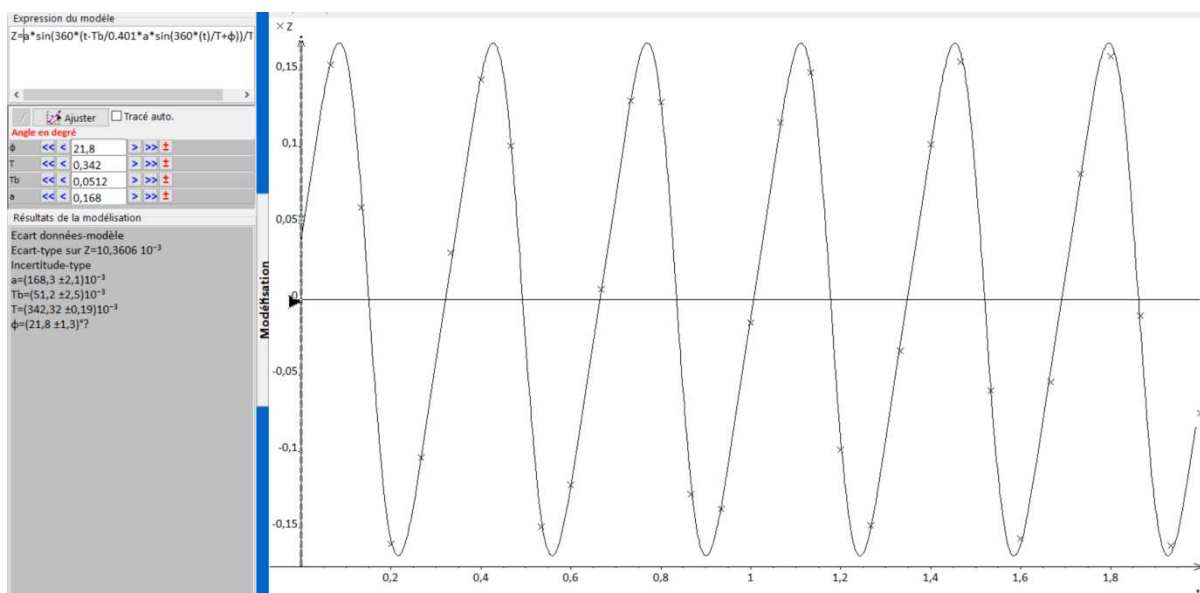
$$z_i = \text{asin} \left[\frac{2\pi}{T_R} \left(t_i + T_B \frac{L_Z - z_i}{L_Z} \right) + \varphi_0 \right] = \text{asin} \left[\frac{2\pi}{T_R} \left(t_i - T_B \frac{z_i}{L_Z} \right) + \varphi' \right]$$

Les fonctions $x_i(t_i; z_i)$ et $z_i(t_i; z_i)$ ne peuvent pas être modélisées dans les logiciel type Latis Pro ou Regressi car ils n'acceptent que des relations du type $y(x)$. On contourne le problème en utilisant une approche perturbative pour modéliser z_i . On note z_0 la solution sans correction et z_1 la correction à l'ordre 1 :

$$z_0 = \text{asin} \left(\frac{2\pi}{T_R} t_i + \varphi' \right)$$

$$z_1 = \text{asin} \left[\frac{2\pi}{T_R} \left(t_i - T_B \frac{z_0}{L_Z} \right) + \varphi' \right] = \text{asin} \left[\frac{2\pi}{T_R} \left(t_i - \frac{T_B}{L_Z} \text{asin} \left(\frac{2\pi}{T_R} t_i + \varphi' \right) \right) + \varphi' \right]$$

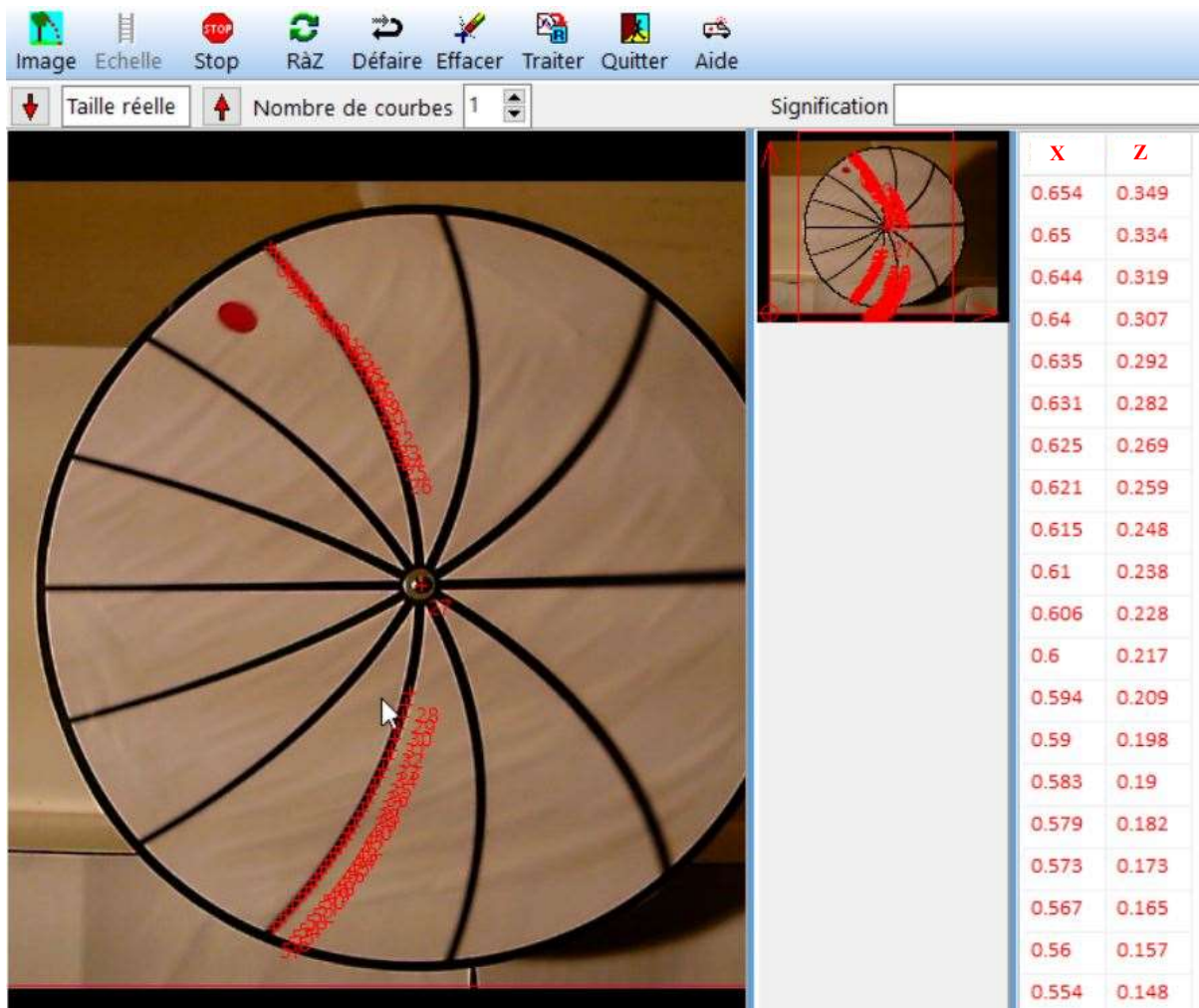
L'ajustement sur les mesures permet d'obtenir les valeurs de T_R et T_B (l'exploitation a été faite sur Regressi car Latis Pro n'arrivait pas à converger) :



La déformation du signal par rapport à une sinusoïde due à la lecture séquentielle des données est bien visible et l'accord entre les mesures et le modèle d'équation corrigé est correct. On a cependant peu de points par période (c'est une condition nécessaire pour que l'effet du Rolling Shutter soit visible) donc on propose une deuxième méthode pour trouver T_B .

III.2 Deuxième méthode

Une solution plus simple à mettre en œuvre consiste à étudier la forme d'un rayon sur une des images de la vidéo. Les rayons seraient droits en l'absence de Rolling Shutter donc on pourrait définir un rayon avec un angle α unique par rapport à un axe. La courbure apparente des rayons résulte de l'enregistrement séquentiel de l'image donc l'idée est de mesurer cet angle en différents points d'un rayon à l'aide de Regressi (fichier → nouveau → image → courbe) :



On commence par définir l'échelle. Dans l'exemple ci-dessus, on a placé l'origine sur le coin inférieur gauche de l'image et étiré les axes X et Z pour décrire la totalité de l'image. L'enregistrement ayant été effectué avec une résolution de 640×480 pixels, on a normalisé l'étalonnage suivant les deux axes avec $L_Z = 1$ et $L_X = 1 \times 4/3 = 1,3333$. On a ensuite pointé différents points du rayon, dont le centre, en continuant de l'autre côté pour faire l'étude sur un diamètre. On en déduit l'angle α de rotation par rapport à la verticale avec la relation suivante où (x_0, y_0) est le centre de la roue :

$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}\right)$$

Cet angle peut s'exprimer à partir de l'équation du mouvement corrigé avec une phase initiale de $\pi/2$ puisque α est défini par rapport à la verticale avec l'expression précédente :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_i}{z_i} = \frac{\operatorname{acos}\left(\frac{2\pi}{T_R} t'_i + \pi/2\right)}{\operatorname{asin}\left(\frac{2\pi}{T_R} t'_i + \pi/2\right)} = -\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T_R} t'_i\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{T_R} t'_i\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{T_R} t'_i\right)$$

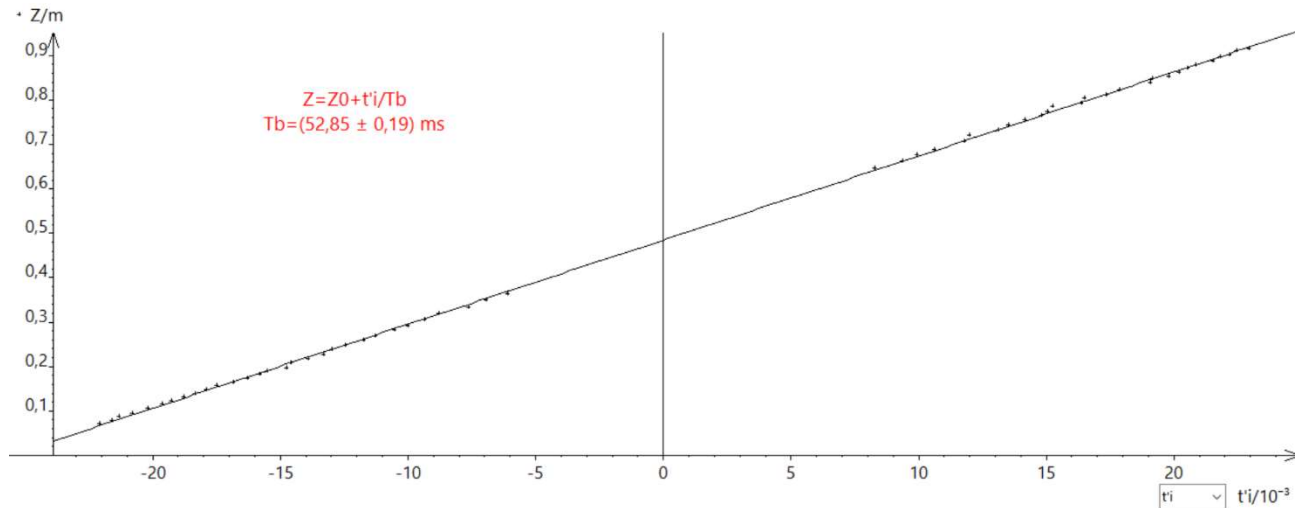
L'angle étant donné en degré par défaut sur Regressi, les images de chaque point sont donc prises à l'instant :

$$t'_i = -\frac{\alpha}{360} T_R$$

Il suffit alors de représenter z en fonction de t'_i et ajuster la courbe par une fonction du type :

$$z = z_0 + \frac{t'_i}{T_B} L_Z = z_0 + \frac{t'_i}{T_B}$$

puisque L_Z a été normalisé à 1



Cette méthode est plus rapide, elle permet d'utiliser plus de points pour obtenir le résultat et ne nécessite pas d'approximation comme dans l'étude précédente (équation approchée de z).

Résultats :

Les mesures ont été effectuées avec les deux méthodes pour différents formats d'enregistrement (certains au format 11/9 donc penser à prendre en compte ce facteur pour l'étalonnage de la méthode 2) :

taille	640×480	640×480	352×288	352×288	352×288
N (nombre d'image/s)	30	15	60	30	15
$T_{\text{éch}} = 1/N$ (ms)	33,3	66,7	16,7	33,3	66,7
T_R (ms)	354,0 (0,3)	342,3 (0,2)	332,8 (0,1)	3262,5 (0,1)	322,5 (0,1)
T_B fit rot (ms)	26,9 (0,4)	51,2 (2,5)	13,3 (0,3)	26,6 (0,5)	48,4 (0,7)
T_B fit ligne (ms)	25,4 (0,3)	52,8 (0,2)	12,7 (0,4)	24,3 (0,5)	49,0 (0,5)
T_b/T_e	0,76	0,78	0,76	0,73	0,74

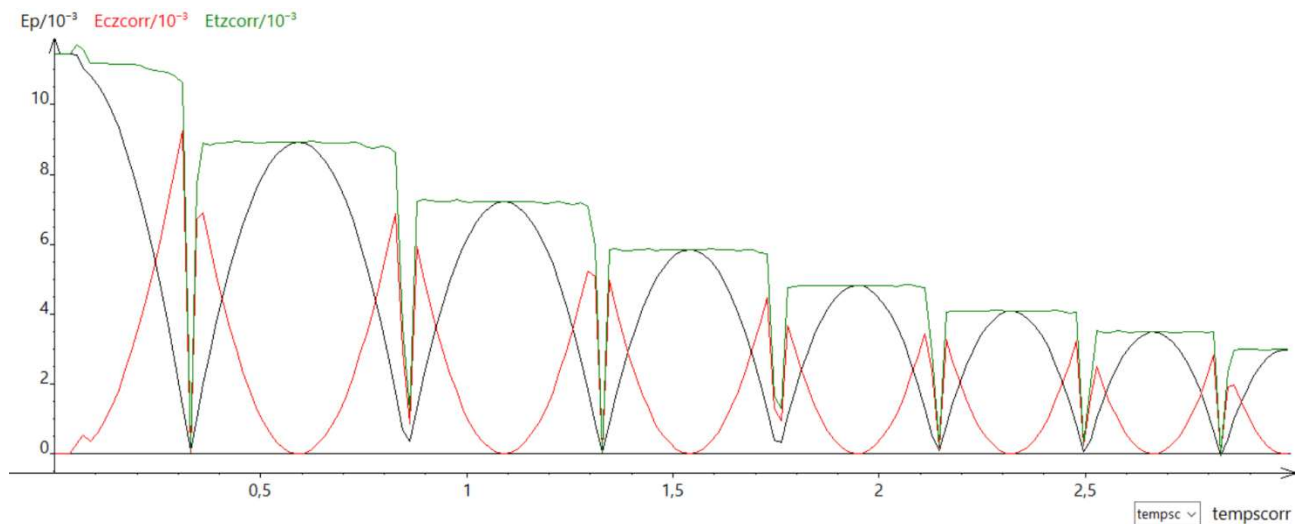
Le point remarquable à noter est que le rapport $T_B/T_{\text{éch}}$ est à peu près constant. Le temps de balayage du capteur correspond à $\approx 76\%$ de la durée entre deux images. La formule de correction du temps devient donc :

$$t'_i = t_i + 0,76 \times T_B \frac{L_Z - z_i}{L_Z}$$

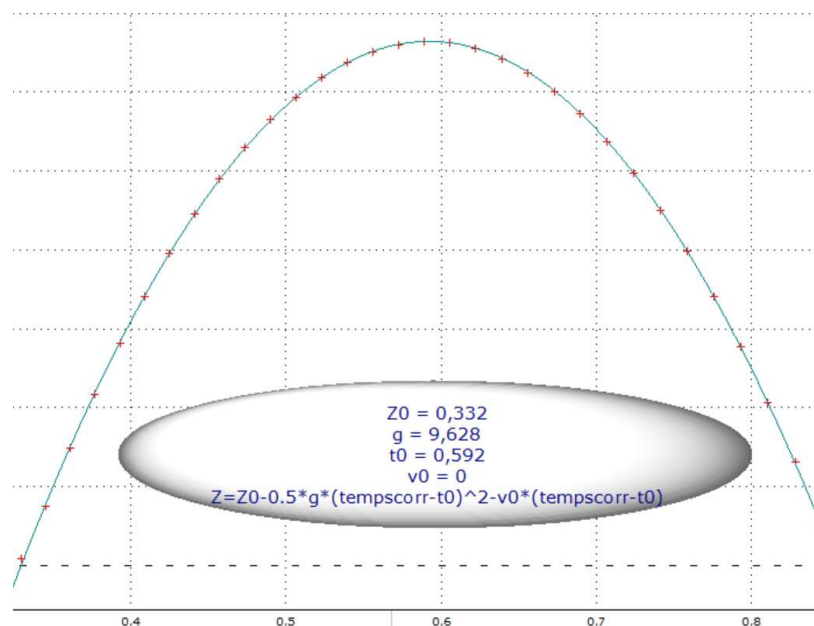
$$t'_i = t_i + 0,76 \frac{L_Z - z_i}{N_{\text{image/seconde}} \times L_Z}$$

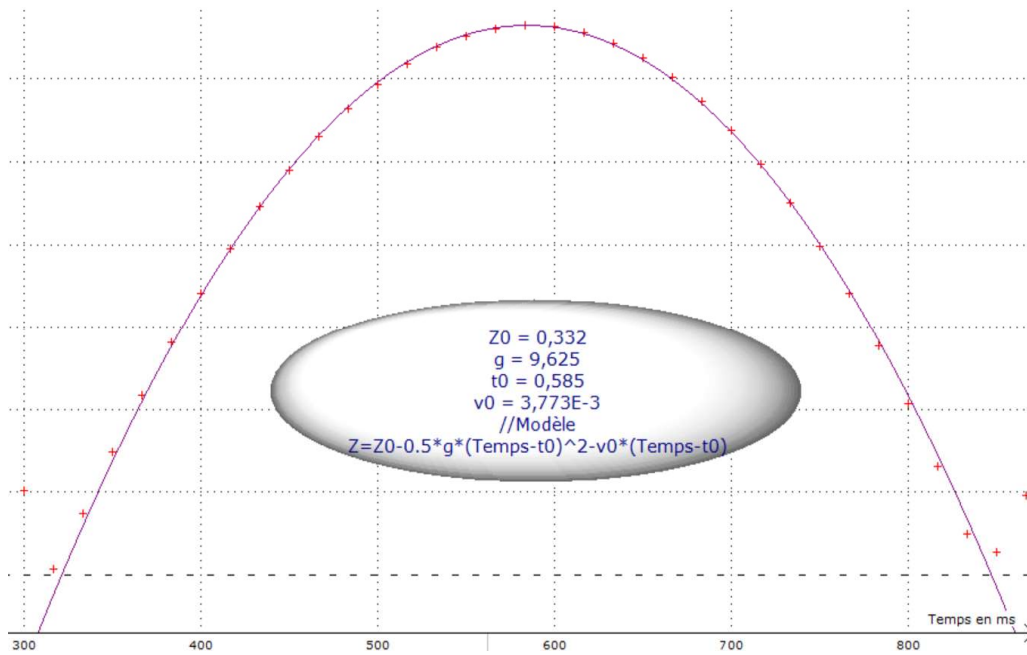
IV APPLICATION A LA CHUTE DE LA BALLE DE PING PONG

On a repris les données de la chute de la balle dans Regressi, redéfini l'échelle des temps corrigée par la formule précédente, recalculé la vitesse (dérivation de z par rapport au temps corrigé), l'énergie cinétique et l'énergie totale. Des défauts subsistent aux moments des impacts mais l'allure de l'énergie totale est plus satisfaisante :



On peut se demander si la correction du temps a un impact sur la mesure de l'accélération de pesanteur. On a refait des modélisations dans les deux cas et voici les résultats sur le premier rebond :

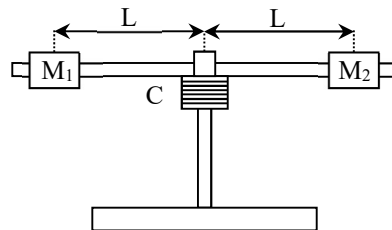




La modélisation s'ajuste un peu mieux aux mesures sur la courbe corrigée (première image) mais on ne constate pas d'écart significatif sur la valeur de g (même constat sur d'autres rebonds). Cela s'explique probablement par le fait que la modélisation sur la courbe non corrigée (deuxième image) conduit à une courbe très légèrement en dessous des mesures au début du rebond et juste au-dessus à la fin (idem en inversé autour du sommet) donc à des petits défauts qui se compensent. La correction du Rolling Shutter n'est donc pas indispensable si on se contente d'étudier g .

ANNEXE : MOMENT D'INERTIE DU DISPOSITIF POUR L'ETUDE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE SOUMIS A UN COUPLE CONSTANT

I DESCRIPTION DU DISPOSITIF



Le système en rotation est principalement composé :

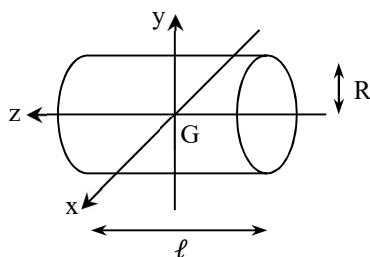
- d'une tige cylindrique de longueur $\ell_t = 57$ cm, de rayon $R_t = 0,5$ cm et pesant $m_t = 356$ grammes.

- de deux masses identiques M_1 et M_2 en forme de cylindres creux. Chaque masse pèse $m_M = 200$ grammes, a une longueur $\ell_M = 3$ cm, avec un rayon inférieur $R_I = 1$ cm et un rayon extérieur $R_2 = 1,7$ cm.

- d'un cylindre C de rayon $R = 2$ cm et de masse inconnue.

II MOMENT D'INERTIE DE LA TIGE

II.1 Calcul détaillé



On a pour un cylindre plein les relations suivantes :

$$I_{Gz} = \frac{1}{2} m R^2 \quad I_{Gx} = I_{Gy} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{\ell^2}{12} \right)$$

La tige tourne suivant l'axe y dans l'expérience \rightarrow on a :

$$I_{tige} = m_t \left(\frac{R_t^2}{4} + \frac{\ell_t^2}{12} \right) = 0,964 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

II.2 Calcul simplifié

On peut, comme souvent avec les moments d'inertie, simplifier les calculs en comparant les longueurs mises en jeu car elles interviennent au carré. La tige utilisée ici a une longueur plus grande que son rayon, donc on peut faire l'approximation :

$$I_{tige} \approx \frac{1}{12} m_t \ell_t^2$$

On peut vérifier que l'écart avec le calcul complet ne dépasse pas 0,03 %.

III MOMENT D'INERTIE DES MASSES M_1 ET M_2

Les moments d'inertie d'un cylindre creux de longueur ℓ et de rayons intérieur et extérieur R_1 et R_2 sont les suivants :

$$I_{Gz} = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2) \quad I_{Gx} = I_{Gy} = m\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{4} + \frac{\ell^2}{12}\right)$$

Les masses M_1 et M_2 tournent autour d'un axe décalé d'une distance L par rapport à leur axe propre y donc leur moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation comprend un terme de Huygens s'ajoutant au moment d'inertie propre des masses :

$$I_{une\ masse} = m_M \cdot L^2 + m_M \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{4} + \frac{\ell_M^2}{12} \right)$$

On a $R_1 = 0,5$ cm, $R_2 = 1,7$ cm, $\ell_M = 3$ cm et $m_M = 200$ grammes \rightarrow le second terme vaut $3,07 \cdot 10^{-5}$ kg.m². Le premier terme vaut $1,35 \cdot 10^{-2}$ kg.m² pour $L = 26$ cm et $0,725 \cdot 10^{-2}$ kg.m² pour $L = 19$ cm \rightarrow on fait une erreur maximale de 0,4 % dans l'expérience si on néglige le moment d'inertie propre des masses par rapport au terme de Huygens.

IV MOMENT D'INERTIE TOTAL

Il faudrait aussi tenir compte du moment d'inertie du cylindre sur lequel on enroule le fil mais on ne connaît pas sa masse. Ce n'est cependant pas gênant car ses dimensions sont faibles et il tourne autour d'un de ses axes propre (pas de terme de Huygens) \rightarrow on peut le négliger par rapport aux autres moments d'inertie et on a au final :

$$I_{total} \approx I_{tige} + 2 \cdot I_{masse\ M}$$

$$I_{total} \approx \frac{1}{12}m_t \ell_t^2 + 2m_M \cdot L^2$$

Soit :

$$I_{total} \approx 3,67 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2 \quad \text{pour } L = 26 \text{ cm}$$

$$I_{total} = 2,41 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2 \quad \text{pour } L = 19 \text{ cm}$$

Les écarts avec le calcul plus détaillé ne dépassent pas 0,3 %