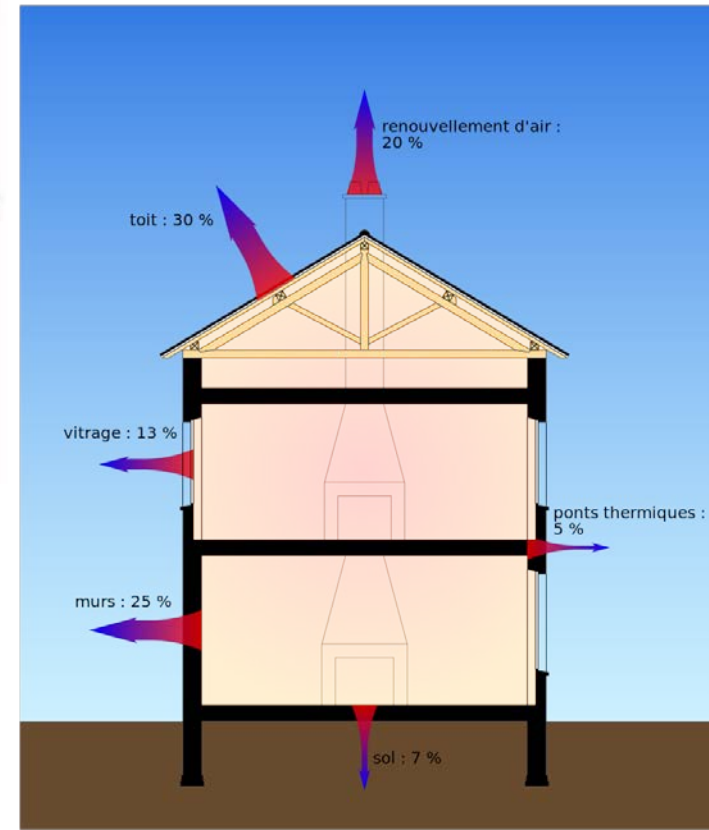
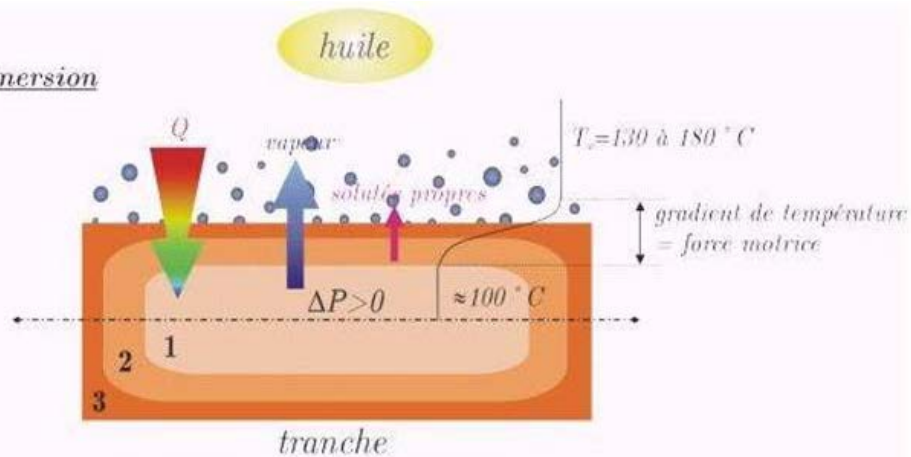


# Transfert thermique

a) au cours de l'immersion



# La conduction

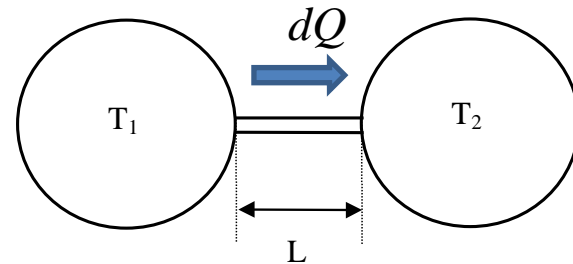
- mécanismes :
  - Chocs molécules
  - transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une
  - transmission par les électrons libres.
- Loi de Fourier (1822)

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda \frac{S}{L} (T_1 - T_2)$$

Conductivité thermique

Densité de flux de chaleur

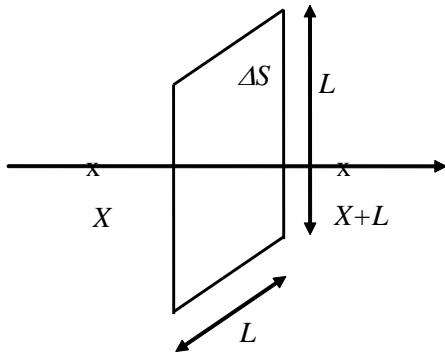
$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dL}$$



$\lambda(\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1})$	
Métaux :	5-400
Solides inorganiques :	0,5-10
Roches :	1,5-3
Solides organiques :	0,1-1
Liquides :	0,1-1
Gaz :	0,01-0,2

# Approche statistique (modèle simple)

- Hypothèses :
  - Gaz ou électrons libres (métal)
  - Pas de mouvement macroscopique (convection)
  - Mouvement des particules représenté par une marche aléatoire sur réseau cubique 3D
- Pas du réseau :  $L$ , pas de temps :  $\Delta t$ ,  $\langle v \rangle = L/\Delta t$



« Quantité de chaleur » traversant  $\Delta S$  pendant  $\Delta t$ ?

$N$  : nombre moyen de particules par site du réseau

$n$  : densité =  $N/L^3$

Pendant  $\Delta t$  : en moyenne  $N/6$  particules passent de  $\left\{ \begin{array}{l} X \text{ à } X + L \\ X+L \text{ à } X \end{array} \right.$

← Capacité calorifique moyenne d'une particule  
Energie d'une particule :  $C_v T(X)$

- Transfert d'énergie pendant  $\Delta t$  à travers  $\Delta S$  :

$$\frac{N}{6} [C_v T(X) - C_v T(X + L)] \approx -\frac{N}{6} C_v \frac{\partial T}{\partial X} L$$

→ Par unité de surface

$$-\frac{N}{6L} C_v \frac{\partial T}{\partial X} = -\frac{C_v n L^2}{6} \frac{\partial T}{\partial X} = -\frac{C_v n L \langle v \rangle}{6} \frac{\partial T}{\partial X} \Delta t$$

→ Densité de flux dans la direction X :

$$q_x = - \underbrace{\left[ \frac{C_v n L \langle v \rangle}{6} \right]}_{\lambda \text{ (conductivité)}} \frac{\partial T}{\partial X}$$

Gaz parfait :

$$L = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad \lambda = \frac{C_v}{3} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} \frac{1}{\pi d^2}$$

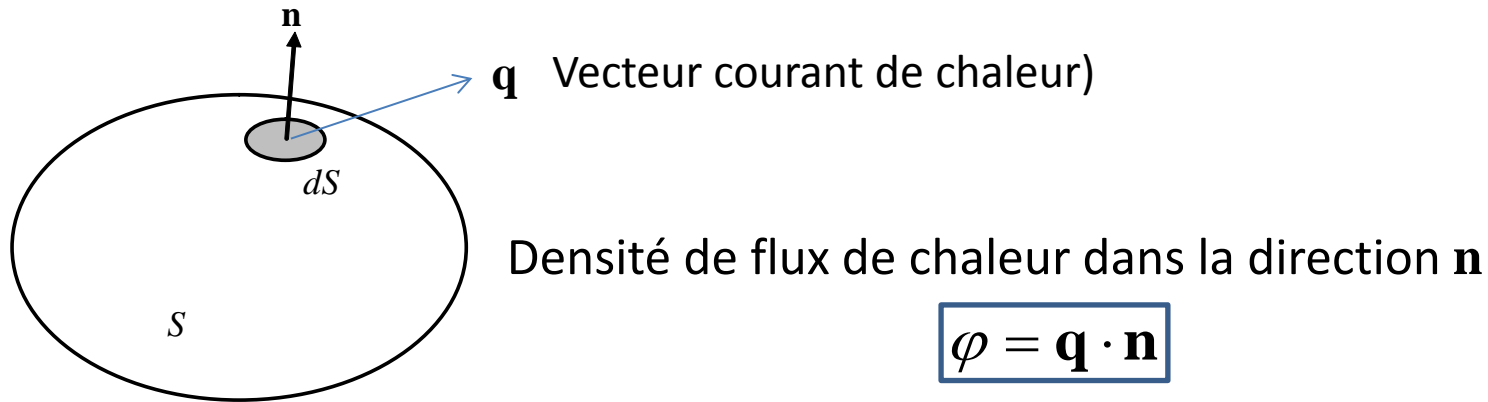
La conductivité du gaz parfait varie en  $\sqrt{T}$ , ne dépend pas de p

Expériences :  $\lambda \propto T^\alpha$  avec  $\alpha \approx 0,6$

Remarque : isolation par le vide : si  $n \downarrow$   $L \uparrow$ , quand  $L$  = taille récipient,  $L$  constante

→  $\lambda \downarrow$  quand  $n \downarrow$

# Loi de Fourier (forme générale)



Flux de chaleur sortant de  $S$  :  $\phi = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$

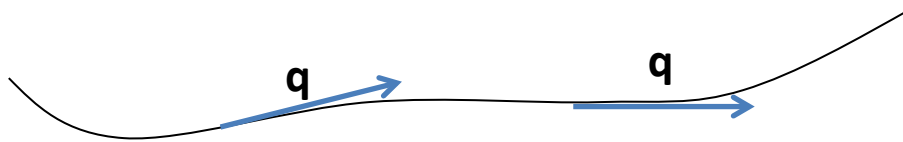
Loi de Fourier (isotrope)  $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$

Remarque : milieu anisotrope :  $\mathbf{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T$

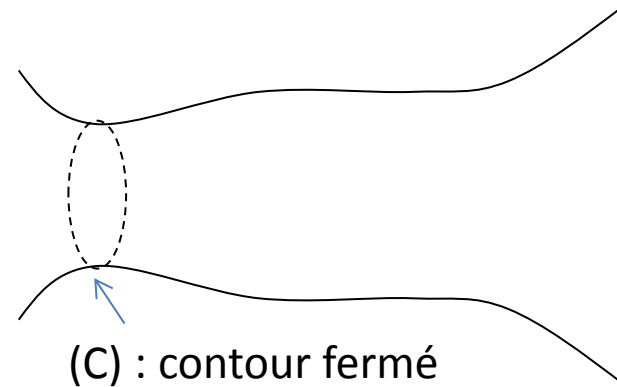
$\boldsymbol{\lambda}$  : tenseur de conductivité thermique (symétrique, valeurs propres positives)

# Résistance thermique

- Ligne de courant (ligne de champ de  $\mathbf{q}(x,y,z,t)$ )



- Tube de courant :  
lignes de courant s'appuyant sur (C)

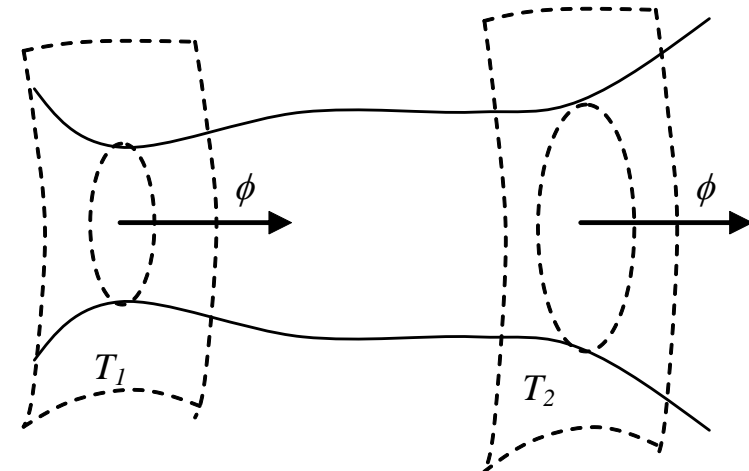


Surfaces isothermes :  $\perp$  lignes de courant

Pas de flux thermique traversant la paroi du tube

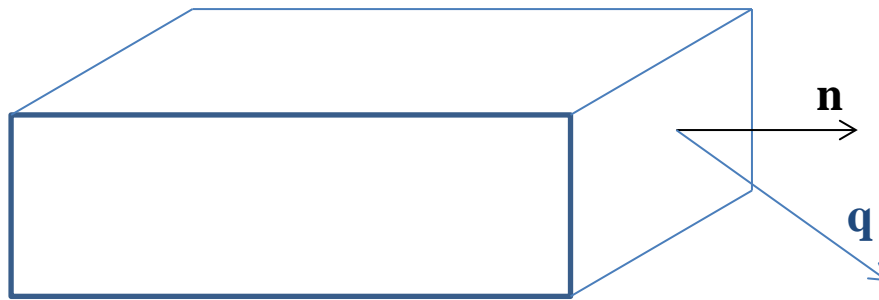
Résistance thermique :

$$R = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$$



# Bilan thermique dans un solide

- Solide homogène fixe et indéformable de composition fixée :  
masse volumique  $\rho$ , chaleur massique  $c$ , conductivité  $\lambda$ .



Volume  $V$  inclus  
dans le solide

Surface de contrôle  $\Sigma$

Energie interne du système :  $\int_V \rho e dv$

Flux de chaleur (conduction) sortant de  $\Sigma$  :  $\int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$

Terme source :  $\int_V r dv$


$r$  : énergie créée par unité de volume (effet Joule, absorption de rayonnement,...)


- Bilan d'énergie (système fixe et fermé) :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dv = - \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds + \int_V r dv$$

- Avec (si  $\rho$  est invariante) :  $\frac{d}{dt} \int_V \rho e dv = \int_V \rho \frac{\partial e}{\partial t} dv$

- Ostrogradski :  $\int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = \int_V \text{div}(\mathbf{q}) dv$


 $\int_V \left( \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{q}) - r \right) dv = 0$  Pour tout V inclus dans le solide


 $\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{q}) - r = 0$

Solide : phase condensée  $\rightarrow e = cT$

Loi de Fourier  $\rightarrow \mathbf{q} = -\lambda \nabla T$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \nabla T) + r$$

(équation de la chaleur)



# Equation de la chaleur

- Si la conductivité thermique est constante (écarts modérés de température), on a :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + r$$

- Cas particuliers fréquents :

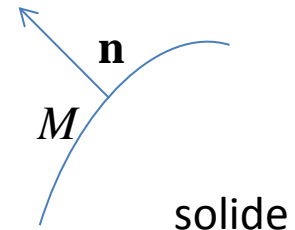
- $r = 0$        $\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T$        $a = \frac{\lambda}{\rho c}$       ( $a$  : diffusivité thermique)

- Régime stationnaire :       $\Delta T = -\frac{r}{\lambda}$       (équation de Poisson )

- Les 2 :       $\Delta T = 0$       (équation de Laplace )

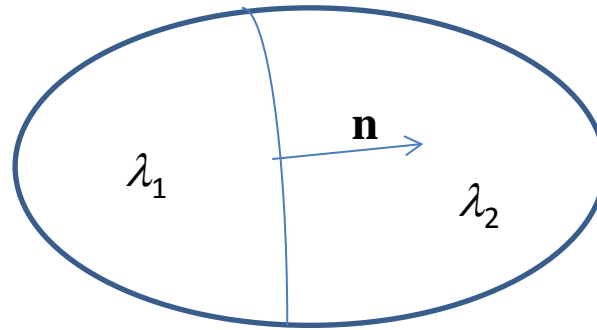
- Conditions aux limites

- Dirichlet :  $T$  donnée en  $M$
- Neumann :  $\varphi = -\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}$  donné en  $M$
- Fourier (Robin) :  $T + \alpha \nabla T \cdot \mathbf{n}$  donné en  $M$  (avec  $\alpha > 0$ )



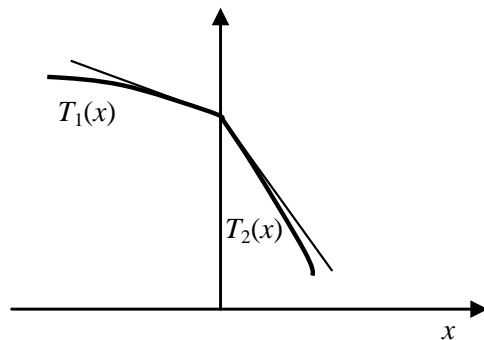
- Condition initiale :  $T(x,y,z,0) = T_0(x,y,z)$  donnée

- *Echange conductif*



conservation du flux en tout point de l'interface :  $-\lambda_1 \nabla T_1 \cdot \mathbf{n} = -\lambda_2 \nabla T_2 \cdot \mathbf{n}$

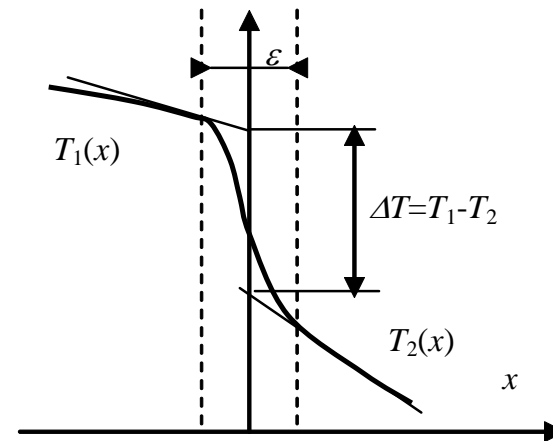
Contact parfait



$$T_1 = T_2$$

Exemples : métaux soudés, isolants

Contact imparfait

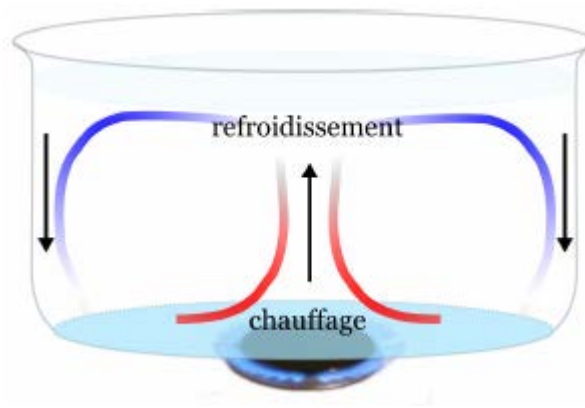


$$-\lambda_1 \nabla T_1 \cdot \mathbf{n} S = \frac{1}{R} (T_1 - T_2) \quad \begin{array}{l} R : \text{résistance de contact} \\ S : \text{surface de contact} \end{array}$$

Exemple : collages de conducteurs

# Convection dans un fluide

- Convection : transport supporté par des mouvements macroscopiques de la matière.
- Par exemple, dans un fluide (gaz ou liquide), les différences de température au sein du milieu entraînent des modification de densité et donc des mouvements (à cause de la poussée d'Archimède)



*Convection naturelle  
dans un fluide*

- La convection est dite forcée quand le fluide se déplace du fait d'une action extérieure (exemple : sèche cheveux)

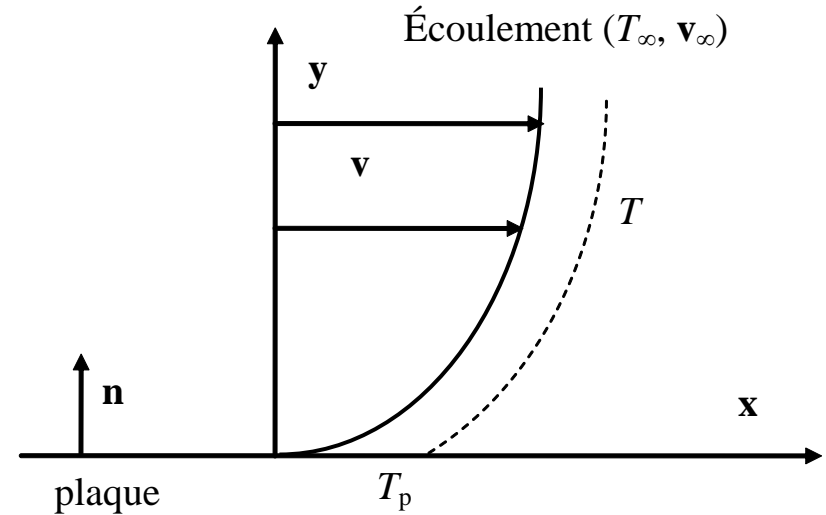
# Transfert en paroi

- Le transfert est régi par la loi de Newton :

Densité de flux à la paroi  
( $v = 0$ , conduction)

$\lambda_f$  : conductivité  
du fluide

$$q_p = -\lambda_f \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$



$q_p$  dépend de l'écoulement : (quand  $v \uparrow$ ,  $q_p \uparrow$ )

Effet global :  $q_p = h(T_p - T_\infty)$

$h$  : coefficient d'échange.

$$q_p = -\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} = h(T - T_\infty)$$

$\lambda$  : conductivité  
du solide

$$T + \frac{\lambda}{h} \nabla T \cdot \mathbf{n} = T_\infty \quad (\text{Fourier})$$

		$h$ (W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> )
Convection	gaz	3-20
	eau	100-600
Convection forcée	gaz	10-20
	eau	500-10000

# Convection thermique dans le fluide

- Fluide newtonien en évolution isovolume dans le champ de pesanteur.
- **Hypothèse de Boussinesq** : propriétés du fluide supposées constantes, mais  $\rho$  varie en fonction de  $T$ , dans le terme de force extérieure, de façon à décrire la convection naturelle :

$$\rho = \rho_m (1 - \beta(T - T_m))$$

- Equations de bilan : ( $\hat{p} = p - \rho_m \mathbf{g} \cdot \mathbf{OM}$  pression motrice)

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho_m \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho_m (1 - \beta(T - T_m))\mathbf{g} + \mu\Delta\mathbf{V} = -\nabla\hat{p} - \rho_m\beta(T - T_m)\mathbf{g} + \mu\Delta\mathbf{V}$$

$$\rho_m c \frac{DT}{Dt} = \lambda\Delta T$$

# Mise sous forme adimensionnelle

- Grandeurs caractéristiques :
  - $L$  : dimension
  - $V_\infty$  : vitesse du fluide
  - $T_\infty$  : température du fluide loin de la paroi
  - $T_p$  : température de paroi

$$x_i^* = x_i / L$$

$$p^* = p / \rho_m V_\infty^2$$

$$V_i^* = V_i / V_\infty$$

$$t^* = V_\infty t / L$$

$$T^* = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}$$

- Système d'équations décrivant l'évolution :

$$\frac{D\mathbf{V}^*}{Dt^*} = -\nabla^* \hat{p}^* - \frac{\mathbf{Gr}}{\text{Re}} T^* + \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \mathbf{V}^*$$

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta^* T^*$$

(symboles \* derrière opérateurs de dérivation : dérivées calculées avec adimensionnalisation.)

- Nombres adimensionnels :

- nombre de Reynolds :  $\text{Re} = \frac{\rho_m V_\infty L}{\mu}$  : caractéristique de la dynamique de l'écoulement, rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité.
- nombre de Grashof :  $\mathbf{Gr} = \frac{\rho_m^2 \mathbf{g} \beta L^3 (T_\infty - T_p)}{\mu^2}$  : rapport des forces de poussée d'Archimède aux forces de viscosité.
- nombre de Prandtl :  $\text{Pr} = \frac{c\mu}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$  où  $\nu = \frac{\mu}{\rho_m}$  est la viscosité cinématique du fluide et  $a$  sa diffusivité thermique. compare la diffusivité de quantité de mouvement à la diffusivité thermique du fluide.

# Nombre de Nusselt

- Pour résoudre un problème de convection thermique, il faut, à partir du champ de température obtenu par résolution du système d'équations précédent, obtenir le coefficient de transfert  $h$ , défini par :

$$h(T_p - T_\infty) = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$\lambda$  : conductivité  
thermique du  
**fluide**

- Mise sous forme adimensionnelle :

$$\frac{hL}{\lambda} = - \left( \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_{y=0}$$

Nombre de Nusselt :  
caractéristique du gradient  
adimensionnel de température à  
la paroi.



- Analyse dimensionnelle → chercher la solution d'un problème de convection forcée sous forme d'une relation (fonction de corrélation) :

$$\text{Nu} = \text{fonction}(\text{Re}, \text{Pr})$$

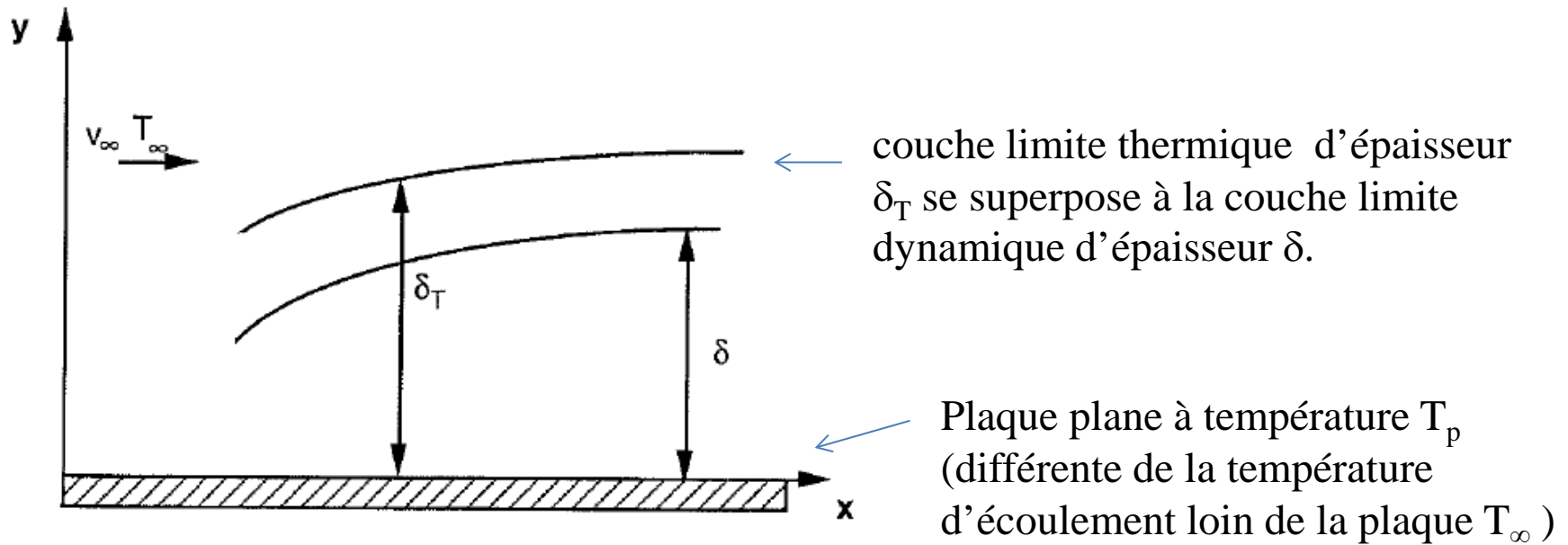
- Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection forcée s'effectue donc de la manière suivante :

1. Calcul des nombres adimensionnels de Reynolds et de Prandtl.
2. Suivant la valeur de Re et la configuration → choix de la corrélation
3. Calcul de Nu par application de cette corrélation.
4. Calcul de  $h = \lambda \text{Nu} / L$  et du flux pariétal  $hS(T_p - T_\infty)$ .

- Dans le cas de la convection naturelle, le nombre caractéristique de la dynamique de l'écoulement est le nombre de Grashof :

$$\text{Nu} = \text{fonction}(\mathbf{Gr}, \text{Pr})$$

## Exemple : couche limite thermique (cas laminaire)

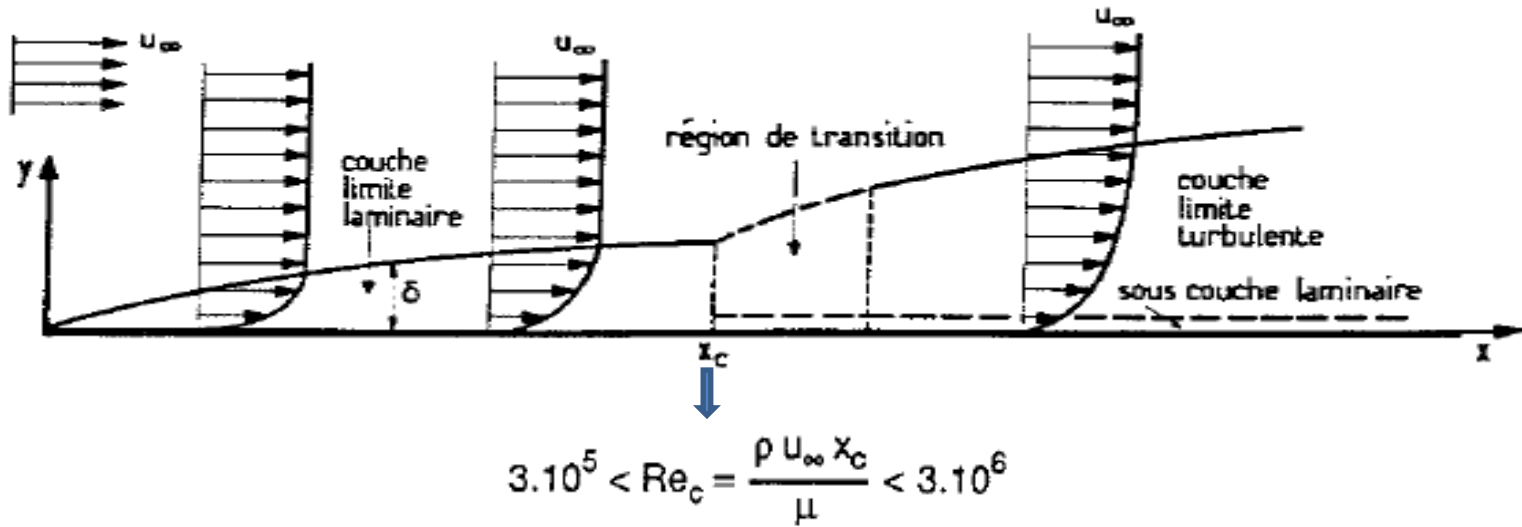


- On peut montrer que :

$$\frac{\delta_T}{x} \approx \frac{\delta}{x} \text{Pr}^{-1/3} \quad \text{d'où l'on déduit :} \quad \text{Nu}_x \approx 0,323 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$$

- Par intégration entre 0 et L :  $\overline{\text{Nu}} \approx 0,646 \text{Re}_L^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$

# Couche limite turbulente



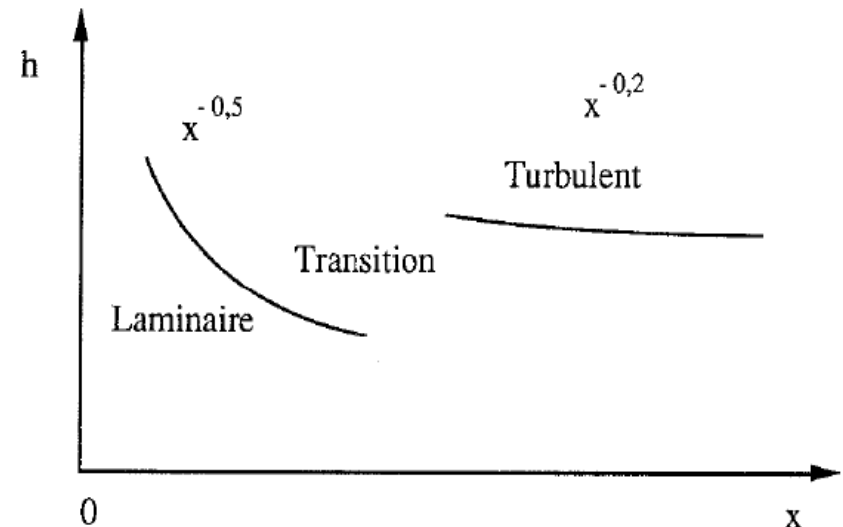
Nombre de Nusselt et coefficient d'échange :

En turbulent :  $Nu_x = \frac{hx}{\lambda} \approx 0,0293 Re_x^{0.8} Pr^{1/3}$

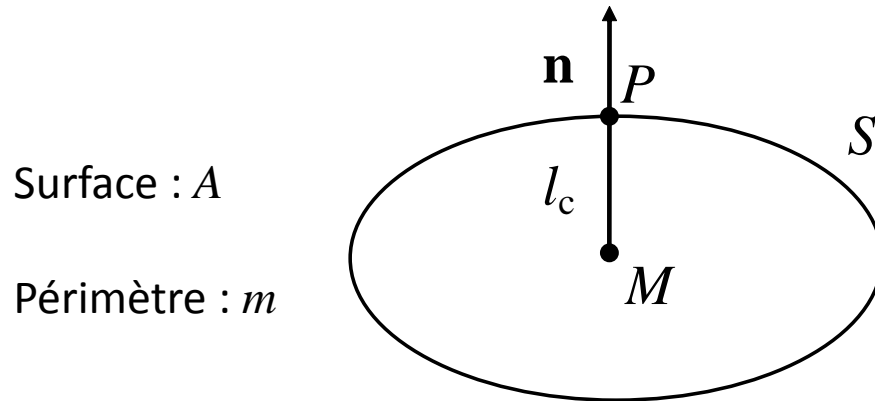
En laminaire :  $Nu_x \approx 0,323 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$

→ Coefficient d'échange  $h(x)$  décroît en  $x^{-1/2}$  en laminaire et en  $x^{-0.2}$  en turbulent

→  $h$  augmente dans la zone de transition



# Nombre de Biot



$S$  : surface latérale  
 $S = mL$ , ici

$$\text{Nombre de Biot} = \frac{\text{résistance de conduction}}{\text{résistance de convection}} \quad \Rightarrow \quad Bi = \frac{\left(\frac{l_c}{\lambda S}\right)}{\left(\frac{1}{hS}\right)} = \frac{l_c h}{\lambda}$$

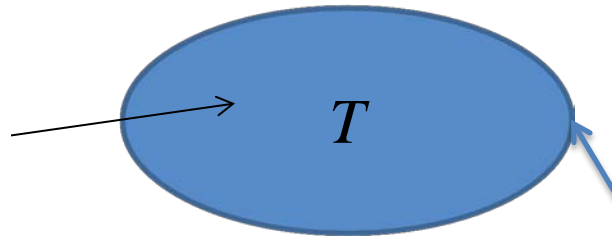
Densité de flux en  $P$  :  $-\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} = h(T(P, t) - T_\infty)$

$$-\lambda \frac{(T(P, t) - T(M, t))}{l_c} \approx h(T(P, t) - T_\infty) \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{T(P, t) - T(M, t)}{T(P, t) - T_\infty} \right| \approx Bi$$

Si  $Bi \ll 1 \rightarrow T$  considéré comme uniforme dans la section

# Systèmes à température ou concentration uniforme : « petit corps »

Corps de volume  $V$ ,  
surface  $S$ ,  
conductivité  $\lambda$



Fluide de grand volume à  
température  $T_\infty$

Coefficient d'échange  $h$

- Nombre de Biot :  $B_i = h L_c / \lambda$ , avec  $L_c = V/S$
- Petit corps :  $B_i \ll 1$  ( $L_c \ll h / \lambda$ )  $\Rightarrow T$  uniforme à tout instant

On intègre l'équation de la chaleur sur le volume  $V$  :

$$\int_V \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dv = \int_V \nabla \cdot (\lambda \nabla T) dv$$

$$\rho c_p \frac{d}{dt} \left( \int_V T(\mathbf{x}, t) dv \right) = \int_S \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} ds = \int_S h(T_\infty - T(\mathbf{x}, t)) ds$$


- $T$  uniforme, on retrouve le bilan global :

$$\underbrace{\rho c V \frac{dT}{dt}}_{\text{Terme d'accumulation}} = \underbrace{h S (T_\infty - T)}_{\text{Flux de chaleur reçue}}$$

- Si  $T_\infty = \text{cste}$

$$\frac{dT}{T - T_\infty} = -\frac{hS}{\rho c V} dt \Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(-\frac{hSt}{\rho c V}\right)$$

Température initiale  
du corps



- On note  $a$  la diffusivité thermique :  $a = \lambda/\rho c$
- On appelle nombre de Fourier le nombre sans dimension :

$$F_o = \frac{at}{L_c^2} = \frac{t}{\tau_c}, \text{ avec : } \tau_c = \frac{L_c^2}{a}, \text{ temps caractéristique de diffusion}$$

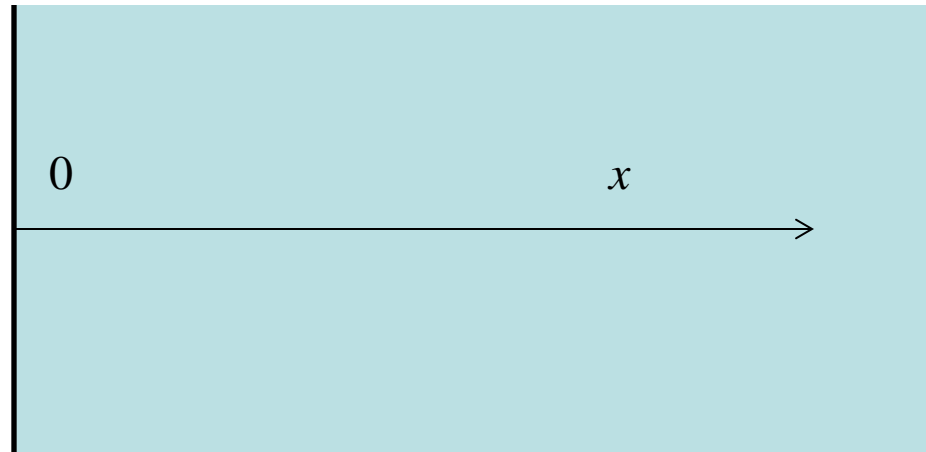
- La solution s'écrit :

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-B_i F_o)$$

- Remarque :

Si  $t \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow T_\infty$  (régime permanent : équilibre)

# Milieux semi-infinis

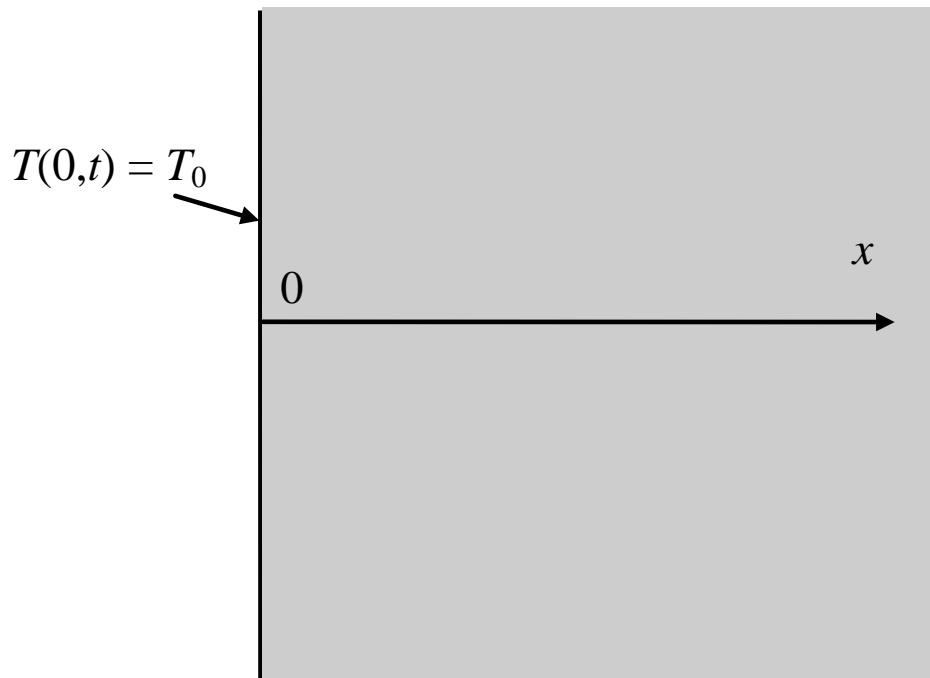


- massif semi-infini = demi espace, exemple : le sol.
- Modèle permettant d'obtenir des solutions analytiques pour améliorer notre compréhension des phénomènes
- Solutions applicables pour des géométries finies pendant un temps fini, exemple : paroi d'épaisseur finie soumise à une perturbation appliquée sur une face, traitée comme un massif semi-infini tant que la perturbation n'est pas ressentie par l'autre face.



# Température (ou concentration) constante imposée en surface

- Massif semi-infini ( $x > 0$ ), initialement à la température uniforme  $T_i$ , dont la surface  $x = 0$  est portée, pour  $t > 0$ , à la température  $T_0$ .



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ T(x,0) = T_i \quad \text{pour tout } x > 0 \\ T(0,t) = T_0 \quad \text{pour tout } t > 0 \end{array} \right.$$

Il faut rajouter une condition aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x,t) \rightarrow T_i \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

# 1<sup>ère</sup> méthode : changement de variable

$$\eta = x/(2\sqrt{at})$$

- On pose :

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_i - T_0}$$

- EDP :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T^*}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} \\ T^*(x, 0) = 1 \text{ pour tout } x > 0 \\ T^*(0, t) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} T^*(x, t) = 1 \text{ pour tout } t > 0 \end{array} \right.$$

- On cherche une solution sous la forme :  $T^*(x, t) = T^*(\eta)$

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = \frac{dT^*}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{dT^*}{d\eta} \left( \frac{1}{2\sqrt{at}} \right)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{dT^*}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{dT^*}{d\eta} \left( -\frac{\eta}{2t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = \frac{d^2 T^*}{d\eta^2} \left( \frac{1}{4at} \right)$$

- L'EDP devient : 
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 T^*}{d\eta^2} = -2\eta \frac{dT^*}{d\eta} \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} T^*(\eta) = 1 \\ T^*(0) = 0 \end{array} \right.$$

- Une intégration :

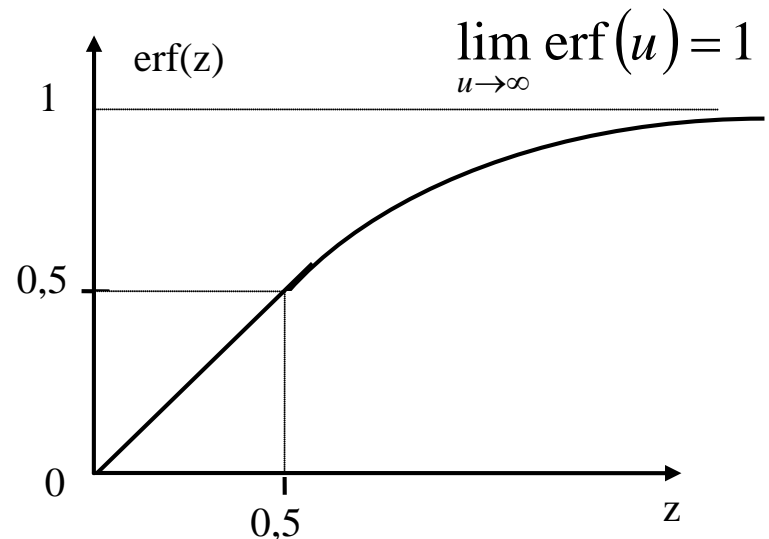
$$\frac{dT^*}{d\eta} = K \exp(-\eta^2)$$



$$T^* = \frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

- Fonction d'erreur de Gauss :

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\eta^2) d\eta$$



2<sup>ème</sup> méthode : résolution par la transformée de Laplace en temps :  $\theta(x, p) = \int_0^{+\infty} T(x, t) e^{-pt} dt$  avec  $p > 0$

- Propriétés :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial T}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} T e^{-pt} dt = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial T}{\partial t} e^{-pt} dt = \left[ T e^{-pt} \right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} T e^{-pt} dt = -T(x, 0) + p\theta$$

- Transformation appliquée à l'EDP :

$$\left\{ \begin{array}{l} p\theta - T_i = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \theta(0, p) = \frac{T_0}{p} \\ \theta(x, p) \rightarrow \frac{T_i}{p}, \text{ quand } x \rightarrow -\infty \end{array} \right.$$

Conditions aux limites sont obtenues en utilisant la relation :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$$

- L'équation en  $x$  :

$$a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - p \theta + T_i = 0$$

- A pour solutions :

$$\theta = A \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}} x\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} x\right) + \frac{T_i}{p}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x, p) = \frac{T_i}{p} \quad \Longrightarrow \quad A = 0$$

$$\theta(0, p) = \frac{T_0}{p} \quad \Longrightarrow \quad B + \frac{T_i}{p} = \frac{T_0}{p}$$

$$\theta = (T_0 - T_i) \frac{1}{p} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} x\right) + \frac{T_i}{p}$$

$$\theta = (T_0 - T_i) \underbrace{\frac{1}{p} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} x\right)}_{\text{Transformée de } \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)} + \frac{T_i}{p}$$

Transformée de  $T_i$

Transformée de  $\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

Finalement on retrouve :

$$\frac{T(x, t) - T_0}{T_i - T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

# Remarques

- Pour  $z = 0.5$ ,  $\text{erf}(z) = 0.52$ ,  $\Rightarrow$  pour  $t = x^2/a$ ,  $\frac{T(x,t) - T_0}{T_i - T_0} = \text{erf}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.5$
- La perturbation imposée à la frontière a fait la moitié de son effet en  $x$  après un temps  $\tau$  égal à  $x^2/a$ .  
 $\tau$  est un temps caractéristique de diffusion à  $x$  fixé.
- De même pour un temps  $t$  donné,  $\sqrt{at}$  représente la « profondeur de diffusion ».
- « Front » thermique : frontière entre la zone perturbée par le choc thermique et celle qui ne l'est pas, seuil à 1% de  $T_0 - T_i$   
 $\rightarrow$  Front situé à une distance  $x_f = 3,6\sqrt{at}$  de la frontière
- La solution obtenue pour le mur semi-infini sera valable pour un mur d'épaisseur  $L$  tant que  $x_f < L$  (ou encore  $\text{Fo} = at/L^2 < 0,1$ ).

- Vecteur courant de chaleur en  $x$  :

$$\mathbf{q} = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \mathbf{x} = -\frac{\lambda(T_i - T_0)}{2\sqrt{at}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) \mathbf{x} = \frac{\lambda(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) \mathbf{x}$$

- en  $x=0$ , le milieu reçoit une densité de flux :

$$\frac{\lambda(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi at}}$$

- Terme  $\lambda/\sqrt{a}$  : effusivité (notée  $E$ )

$$E = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} = \sqrt{\lambda \rho c_p}$$

- L'énergie reçue par le massif entre 0 et  $t$  est proportionnelle à l'effusivité et à la différence des températures :

$$\int_0^t \frac{E(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi t}} dt = \frac{2E(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$$

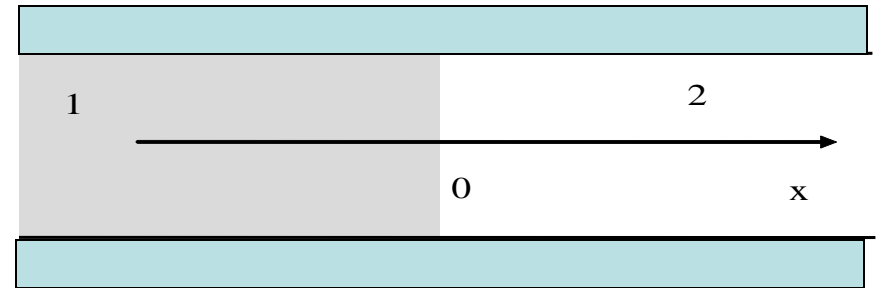


# Application : contact brusque entre deux milieux semi-infinis

Contact (parfait) pour  $t \geq 0$

Températures initiales des barreaux

$$T_{i,1} \text{ et } T_{i,2}$$



Equations régissant ce problème :

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \text{ pour } i = 1, 2 \quad \left| \begin{array}{l} T_1(0, t) = T_2(0, t) \\ \lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \lambda_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=0} \end{array} \right| \text{ pour } t > 0$$

$$\begin{array}{ll} T_1(x, t) \rightarrow T_{i,1} & T_2(x, t) \rightarrow T_{i,2} \\ x \rightarrow -\infty & x \rightarrow +\infty \end{array}$$

# Transformée de Laplace en temps

$$p\theta_k - T_{i,k} = a_k \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2} \text{ pour } k=1,2 \quad \left| \begin{array}{l} \theta_1(0, p) = \theta_2(0, p) \\ \lambda_1 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \lambda_2 \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right)_{x=0} \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{cc} \theta_1(x, p) \rightarrow \frac{T_{i,1}}{p} & \theta_2(x, p) = \frac{T_{i,2}}{p} \\ x \rightarrow -\infty & x \rightarrow +\infty \end{array}$$

$$\longrightarrow \theta_k = A_k \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a_k}} x\right) + B_k \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a_k}} x\right) + \frac{T_{i,k}}{p} \text{ pour } k=1,2$$

$$\text{conditions à l'infini} \longrightarrow B_1 = A_2 = 0$$

# Contact en $x = 0$

$$\left| \begin{array}{l} \theta_1(0, p) = \theta_2(0, p) \\ \lambda_1 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \lambda_2 \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right)_{x=0} \end{array} \right| \longrightarrow \begin{cases} A_1 + \frac{T_{i,1}}{p} = B_2 + \frac{T_{i,2}}{p} \\ E_1 A_1 = -E_2 B_2 \end{cases}$$

$\left( E = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} : \text{effusivité} \right)$

$$\longrightarrow A_1 = \frac{T_{i,2} - T_{i,1}}{p} \frac{E_2}{E_1 + E_2}, \quad B_2 = \frac{T_{i,1} - T_{i,2}}{p} \frac{E_1}{E_1 + E_2}$$

$$\longrightarrow \theta_1(0, p) = \theta_2(0, p) = \frac{1}{p} \left( \frac{E_1 T_{i,1} + E_2 T_{i,2}}{E_1 + E_2} \right)$$

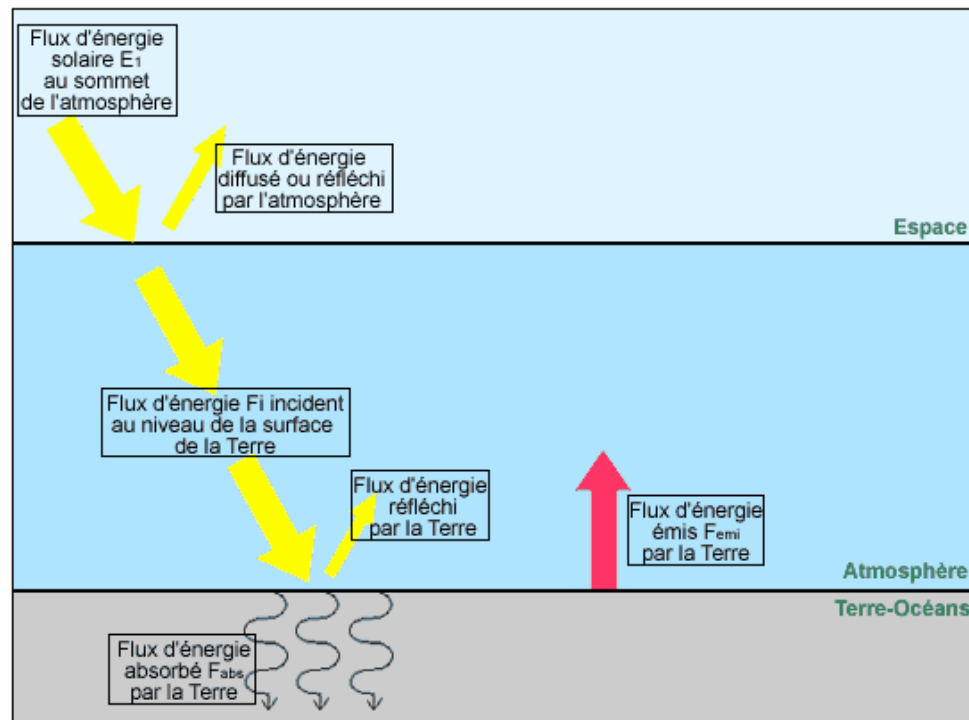
$$\longrightarrow T_1(0, t) = T_2(0, t) = \frac{E_1 T_{i,1} + E_2 T_{i,2}}{E_1 + E_2} \quad (\text{barycentre})$$

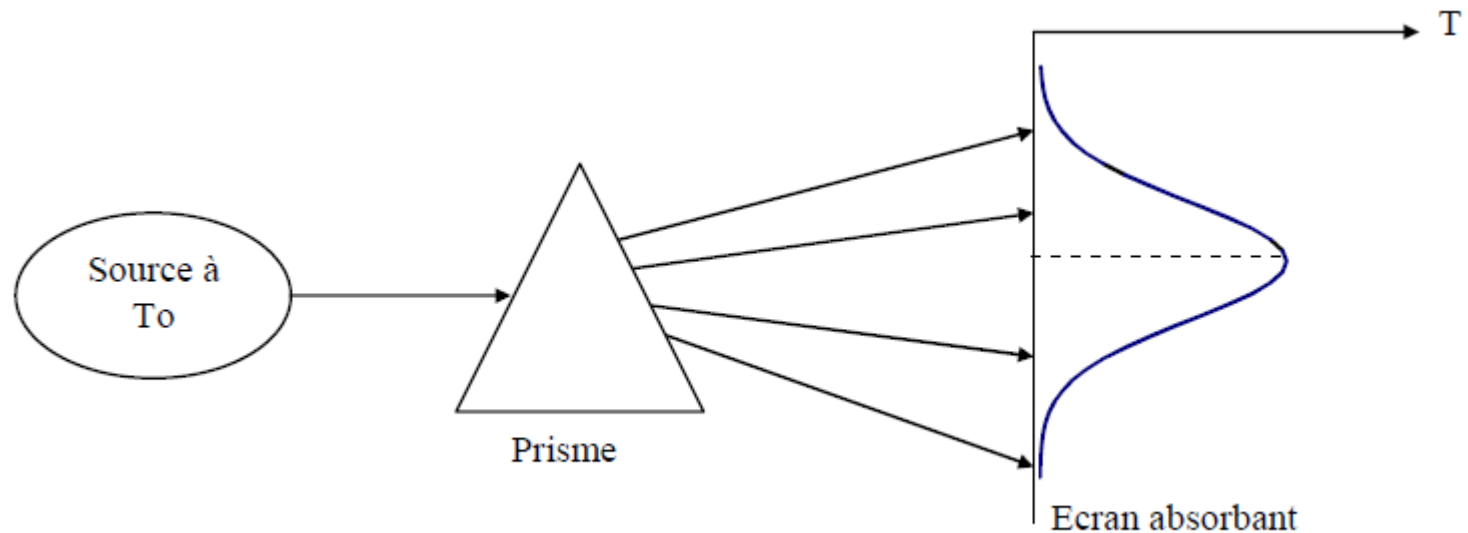
# Conséquences

- Température constante à l'interface (température de contact)
- Chaque partie semi-infinie se traite comme dans le cas d'un seul mur semi-infini soumis à une température constante à sa frontière.
- la température de contact et les flux de chaleur échangés à travers l'interface sont contrôlés par l'effusivité et les températures initiales
- Quand on pose la main sur un objet pour en apprécier la température, on aura une sensation qui dépend de l'effusivité de l'objet (comparée à celle de la peau).
- Plus elle est grande, plus la température à l'interface (contact) avec la main est proche de celle de l'objet et donc plus la sensation de chaud ou de froid sera marquée.

# Rayonnement thermique

- Tous les corps émettent un rayonnement électromagnétique.
- Ce rayonnement a pour origine le mouvement des charges électriques présentes dans la matière (d'autant plus important que  $T$  est élevée).
- Il peut se propager dans le vide et joue un rôle très important dans certains phénomènes.





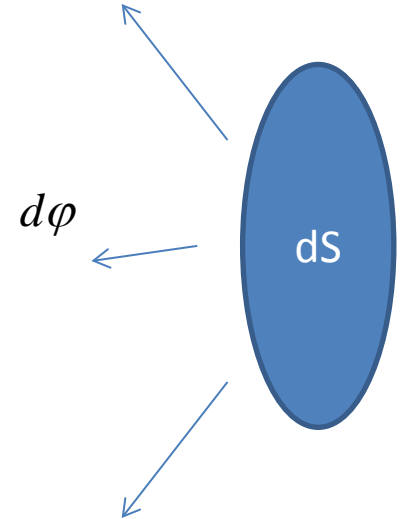
- Appareil de mesure déplacé le long de l'écran  $\rightarrow$  énergie reçue par l'écran dans chaque longueur d'onde.
- Courbe  $\lambda \rightarrow u(\lambda, T_0)$  répartition spectrale de l'énergie rayonnée pour la température  $T_0$  de la source.
- L'énergie émise est maximale pour une certaine longueur d'onde  $\lambda_m$  variable avec  $T_0$ .
- Si on promène un thermomètre sur l'écran on voit une élévation sensible de température sur un intervalle  $[\lambda_1, \lambda_2]$  de longueur d'onde caractérisant le rayonnement thermique.
- le rayonnement thermique émis par les corps se situe entre  $0,1\mu\text{m}$  (UV) et  $100\mu\text{m}$  (IR).

# Emittance

- Emittance monochromatique d'une source à la température  $T$ :

$$M_{\lambda T} = \frac{d\phi_{\lambda}^{\lambda+d\lambda}}{dS d\lambda}$$

Flux d'énergie émis entre les deux longueurs d'ondes  $\lambda$  et  $\lambda+d\lambda$ ,

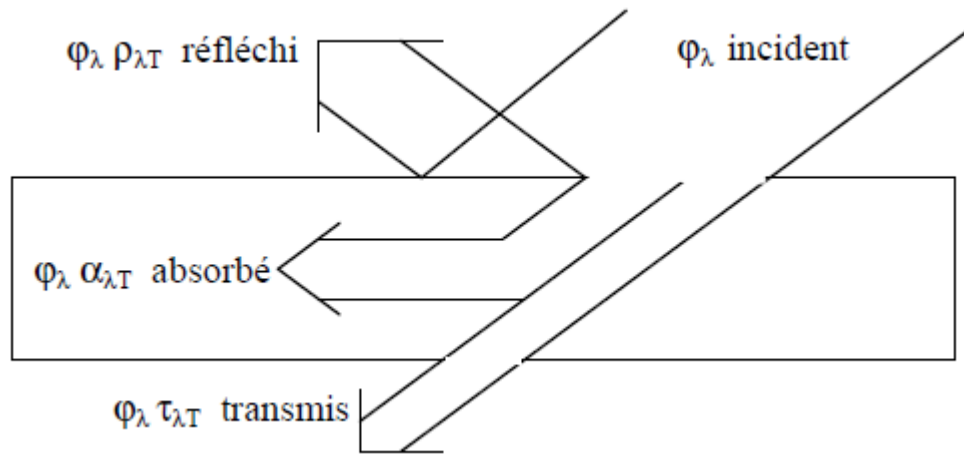


- Emittance totale : densité de flux de chaleur émise par rayonnement par  $dS$  sur tout le spectre des longueurs d'ondes :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda = \frac{d\phi}{dS}$$

# Récepteur

- L'éclairement d'un récepteur est l'homologue de l'émittance pour une source : c'est le flux reçu par unité de surface réceptrice, en provenance de l'ensemble des directions.



*Réception du rayonnement.*

- pouvoirs monochromatiques réfléchissant  $\rho_{\lambda T}$ , absorbant  $\alpha_{\lambda T}$  et filtrant  $\tau_{\lambda T}$  sont fonction de la nature du corps, de son épaisseur, de sa température  $T$ , de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement incident et de l'angle d'incidence.

$$\rho_{\lambda T} + \alpha_{\lambda T} + \tau_{\lambda T} = 1$$

- Si l'on considère l'énergie incidente sur tout le spectre des longueurs d'onde, on obtient les pouvoirs réfléchissants  $\rho_T$ , absorbant  $\alpha_T$  et filtrant  $\tau_T$  totaux.



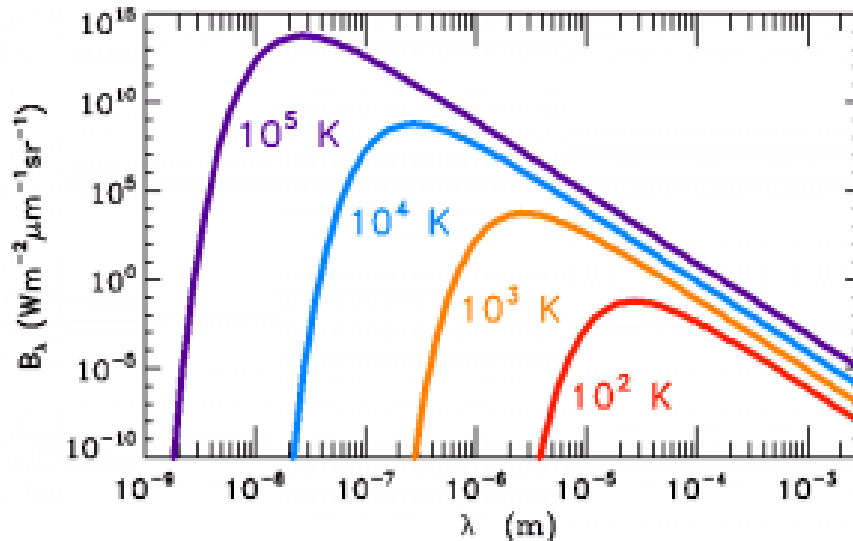
# Le corps noir

- Un corps noir est un objet idéal dans lequel les interactions entre la matière et le rayonnement sont suffisamment nombreuses pour que s'instaure un équilibre entre l'énergie sous forme de rayonnement et l'énergie sous forme de matière.
- On peut alors définir une température pour un tel objet.
- Il y a une façon de traiter un corps noir, adoptée par Jeans et Rayleigh à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, qui consiste à dire qu'un corps noir c'est la même chose qu'un gaz : un gaz dans lequel on aurait remplacé les molécules, par du rayonnement.
- Dans un gaz il y a équipartition de l'énergie : toutes les molécules ont en moyenne la même énergie, quelque soit leur masse.
- Dans un corps noir on pourrait donc supposer que l'énergie de rayonnement se répartit équitablement sur toutes les fréquences possibles, de même que l'énergie d'un gaz se répartit sur les molécules.

## **On considère une cavité dont les parois sont absolument réfléchissantes (pas d'absorption) : est ce que ça va donner un corps noir?**

- si de la lumière bleue entre dans la cavité vide, elle va rebondir en restant bleue, si de la lumière rouge entre aussi dans la cavité, elle restera rouge, les deux ne se mélangeront pas.
- Ca ne correspond pas à un corps noir, car il faut que la lumière interagisse avec la matière, il faut que la matière du corps noir absorbe et émette toutes les longueurs d'ondes.
- Si la lumière bleue atteint les parois d'un corps noir, elle cesse d'être complètement bleue, elle est transformée, après absorption et réémission en lumière rouge, verte, ultraviolette etc. Et le rouge fera la même chose.
- On aura alors , dans la cavité, un spectre de lumière qui va rassembler toutes les fréquences possibles.

- Au milieu du 19<sup>ème</sup> siècle, Kirchhoff comprend que le spectre en fréquence ne dépend ni de la matière qui constitue les parois, ni de la forme de la cavité, il ne dépend que de sa température .

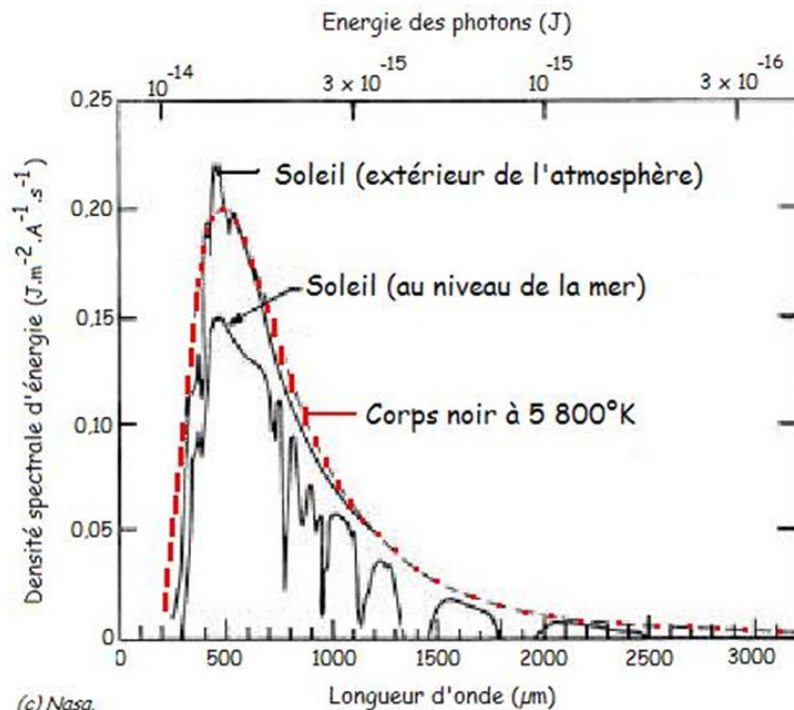


*Représentation des spectres en longueur d'onde, émis par le corps noir selon sa température (échelles logarithmiques).*

- Quand on monte en température on va vers des longueurs d'ondes plus faibles et donc des fréquences de plus en plus élevées (vers l'ultraviolet).
- 100°C (eau bouillante) infra-rouge : chauffe la peau (radiateur )
- 2000°C (filament ampoule) : lumière « blanche » composée des couleurs visibles
- 6000°C (arc électrique) : bleu, ultraviolet.

## Exemple de corps noir : le soleil

- Dans le soleil il y a énormément d'interactions entre la lumière émise dans le cœur et la matière qui le constitue. On est donc en plein dans la définition d'un corps noir. Les photons mettent des centaines de milliers d'années pour sortir.



Quand on sort de l'atmosphère le soleil est bleu (température de la couronne :  $5700^{\circ}C$ ).

La diffusion de la lumière dans l'atmosphère est plus efficace dans le bleu que dans le rouge. C'est pour ça que le soleil paraît blanc/jaune.

# Bref historique

1792, **Wegwood** : tous les corps chauffés deviennent rouges à la même température

1859, **Kirchoff** : le spectre du corps noir ne dépend que de sa température  $T$

1879, **Stefan** : la densité d'énergie d'un corps noir est proportionnelle à  $T^4$

1896, **Wien** :  $u(\nu, T) = \alpha \nu^3 (\exp(\beta \nu / T))^{-1}$

Juin 1900, **Jeans** :  $u(\nu, T) = 8\pi \nu^3 kT / c^3$  ( $c$  vitesse de la lumière)

→ Catastrophe ultraviolette

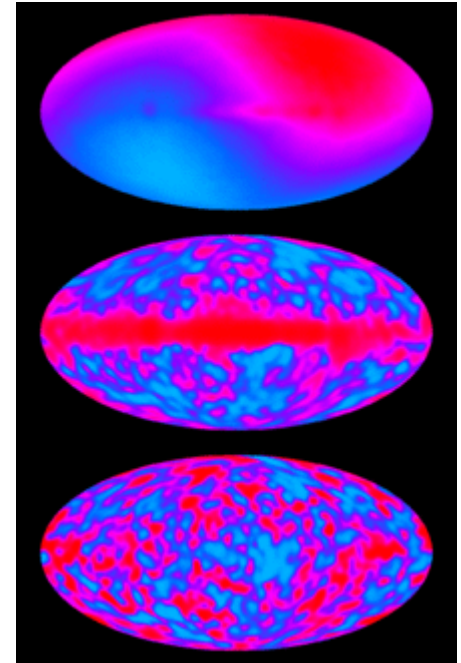
Décembre 1900, **Planck** :

$u(\nu, T) = 8\pi h (\nu / c)^3 \nu^3 (\exp(h\nu / T) - 1)^{-1}$  ( $h$  constante de Planck :  
hilfe!)

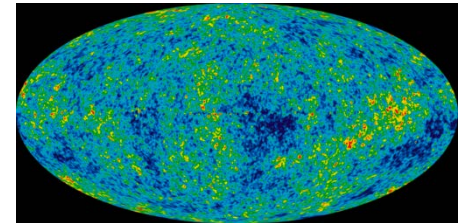
# Vérification

- La formule de Planck décrit de manière parfaite le rayonnement du corps noir. Pour la vérifier il faut se mettre à l'intérieur d'un four...
- Par chance, nous sommes dans un four cosmique ; nous baignons dans le rayonnement fossile du big bang, sa température est aujourd'hui voisine de 3°K
- La mesure du spectre de ce rayonnement est de plus en plus précise (satellites COBE WRAP, PLANCK) constitue une preuve à la fois de la formule de Planck et de la théorie du big bang (prix nobel de physique 2006!)

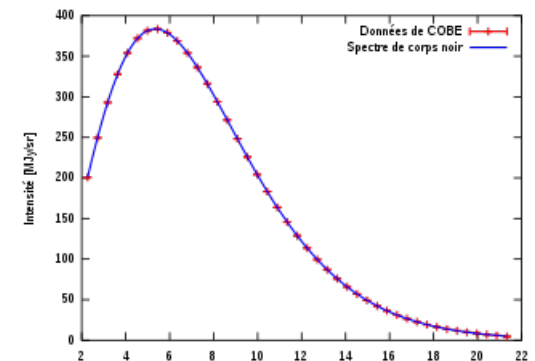
COBE



WRAP



Spectre du fond diffus cosmologique (selon COBE)



# En résumé pour le corps noir

- Emission monochromatique du corps noir : loi de Planck

$$M_{o\lambda T} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

$$C_1 = 3,742 \cdot 10^{-16} \text{ W.m}^{-2}$$

$$C_2 = 1,4385 \cdot 10^{-2} \text{ m.K}$$

T : température absolue

- L'intégration de la formule de Planck pour toutes les longueurs d'onde donne l'émission totale du corps noir : loi de Stefan

$$M_{oT} = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5,675 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$$

On peut aussi l'écrire sous la forme :

$$M_{oT} = 5,675 \left( \frac{T}{100} \right)^4$$

- Il absorbe toutes les radiations qu'il reçoit :

$$\alpha_{\lambda T} = 1$$

# Corps « non noirs » : émission

On caractérise les propriétés émissives des corps réels par rapport aux propriétés émissives du corps noir dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde à l'aide de coefficients appelés émissivités:

$$\varepsilon_{\lambda T} = \frac{M_{\lambda T}}{M_{o\lambda T}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_T = \frac{M_T}{M_{oT}}$$

**Cas des corps gris** : corps dont l'émissivité  $\varepsilon_{\lambda T}$  est indépendante de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement émis. Il est défini par :  $\varepsilon_{\lambda T} = \varepsilon_T$  , on a donc par intégration sur  $\lambda$  :

$$M_T = \varepsilon_T M_{oT}$$

$$M_T = \varepsilon_T \sigma T^4$$



# Absorption : loi de Kirchhoff

- A une température  $T$  donnée et pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée, le rapport  $M_{\lambda T}/\alpha_{\lambda T}$  est le même pour tous les corps.
- Le corps noir a un pouvoir absorbant est égal à 1 , on a donc (en notant  $M_{0\lambda T}$  l'émittance monochromatique du corps noir) :

$$M_{\lambda T} = \alpha_{\lambda T} M_{0\lambda T}$$

- *L'émittance monochromatique d'un corps quelconque est égale à son pouvoir absorbant multiplié par l'émittance du corps noir dans la même longueur d'onde.*
- La loi de Kirchhoff montre que :

$$\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_{\lambda T}$$

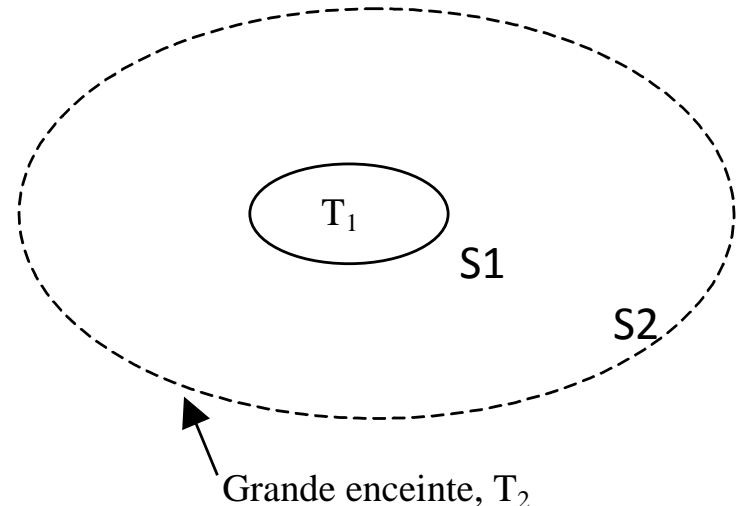
Remarque : pour les corps gris on aura donc  $\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_{\lambda T} = \varepsilon_T = \alpha_T$

# Application : Echange entre deux surfaces grises

- Cas d'une surface  $S_1$  convexe complètement entourée par une surface  $S_2$  :

$$\phi_{1_{\text{net}}} = -\phi_{2_{\text{net}}} = \sigma \frac{S_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$$

Flux net de S1 vers S2

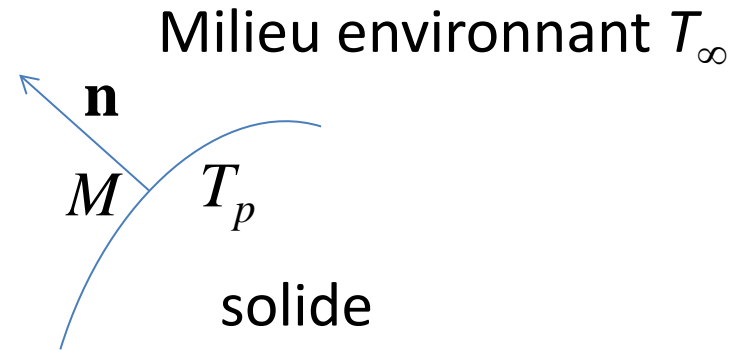


- Si  $S_1 \ll S_2$  alors on obtient :

$$\phi_{1_{\text{net}}} = -\phi_{2_{\text{net}}} = \sigma \varepsilon_1 S_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

Vue de  $S_1$  (petit corps) l'enceinte se comporte comme un corps noir (pour lequel  $\varepsilon_2 = 1$ ).

## Condition limite échange radiatif



Dans le cas d'un solide, siège d'un transfert conductif, dont la surface est dans un « environnement » de température  $T_\infty$ ,

- on résout l'équation de la chaleur dans le solide,
- on utilise la condition au limite suivante sur l'interface :

$$\varphi = -\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} = \varepsilon \sigma (T^4 - T_\infty^4)$$

$$\text{si } |T - T_\infty| < 100 \quad \Longrightarrow \quad T^4 - T_\infty^4 = (T - T_\infty)(T^3 + T^2 T_\infty + T_\infty^2 T + T_\infty^3) \approx 4T_\infty^3 (T - T_\infty)$$

$$-\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} = \underbrace{4\varepsilon \sigma T_\infty^3}_{h_r} (T - T_\infty)$$

$h_r$  : coefficient d'échange effectif (analogie avec la convection)

Exemple :  $T_\infty = 300^\circ\text{K}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $h_r = 6 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$