

# Leçon de physique : Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

Corentin Lemaire

30 septembre 2020

## Prérequis

- Équations de Maxwell
- Propagation des ondes EM dans le vide, dans les conducteurs, dans un plasma peu dense
- Dipôle électrostatique

## Matériel nécessaire pour l'expérience introductive

- Lampe Hg moyenne pression
- Réseau
- Prisme (PVD)
- Bloc de plexiglass
- Lentille quartz
- Écran blanc + feuille de papier blanc

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Description du milieu</b>	<b>2</b>
1.1	Charges et courants de polarisation . . . . .	2
1.2	Équations de Maxwell . . . . .	3
1.3	Modèle de l'électron élastiquement lié (Drude-Lorentz) . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Propagation d'une onde</b>	<b>6</b>
2.1	Relation de dispersion . . . . .	6
2.2	Permittivité du diélectrique . . . . .	6
2.3	Étude énergétique . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>7</b>
3.1	Loi de Cauchy . . . . .	7
3.2	Transmission et réflexion sur un dioptre . . . . .	8

# Introduction

Il est possible de définir un diélectrique de plusieurs manières. On en présente ici deux simples :

- *macroscopiquement* un matériaux diélectrique est un matériaux qui ne permet pas à un courant électrique de se propager, autrement dit, un isolant.
- *microscopiquement*, c'est un matériaux dans lequel on ne trouve pas de charges libres.

Le but de cette leçon est de caractériser l'interaction entre ce type de milieu et les ondes électromagnétiques. Autant que possible, les particularités de cette interaction seront comparées à la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide et dans d'autres milieux. A cet effet, la propagation dans les plasmas peu denses et les conducteurs est supposée connue (voir [Sanz et al., 2019]).

## À quoi s'attend-on ?

### expérience

On commence par éclairer le prisme. On observe sur un écran blanc sur lequel est fixée une feuille de papier. La lumière de la lampe est **dispersée** : le matériau de fabrication du prisme ne présente pas le même indice de réfraction pour toutes les longueurs d'ondes.

On remplace le prisme par un réseau, lui aussi dispersif. On observe de nouveau les différentes longueurs d'onde du spectre du mercure, toutefois une raie supplémentaire apparaît, dans l'UV. La lumière de la lampe a été en partie **absorbée** par le prisme. On peut vérifier le phénomène en utilisant le bloc de plexiglass qui doit lui aussi absorber la dernière raie UV visible.

### remarques expérimentales

Le PVD est plus facile d'utilisation qu'un prisme classique, il permet de garder un axe optique assez droit.

La lumière de la lampe à mercure est blanche mais présente un spectre discret, plus facile à interpréter dans cette expérience.

La feuille de papier permet d'observer des UV par fluorescence grâce aux agents blanchissants qu'elle contient. On peut la placer uniquement sur la moitié de la zone d'observation pour facilement compter les raies UV.

On utilise une lentille quartz qui absorbe moins dans l'UV que les verres des lentilles classiques.

## 1 Description du milieu

Cette partie permet de poser le problème et de modéliser le milieu.

### 1.1 Charges et courants de polarisation

On considère un milieu neutre électriquement (à une échelle mésoscopique).

On se place à une échelle microscopique, à laquelle les charges positives et les charges négatives peuvent être décalées. Ce décalage entraîne l'apparition d'un moment dipolaire (figure 1).

On peut par ailleurs définir une densité volumique de polarisation  $\vec{P}$  telle que :

$$\vec{P} = -\rho_0 \vec{u}$$

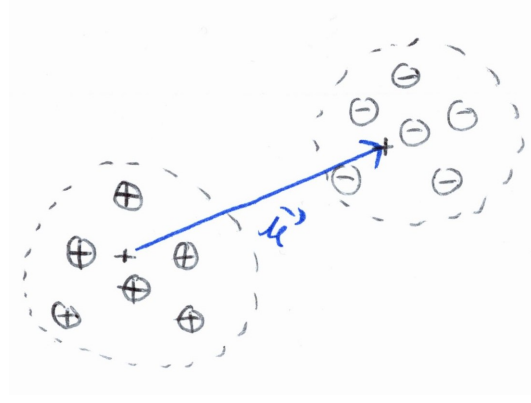


FIGURE 1 – moment dipolaire dans un milieu polarisé

On peut également montrer qu'une polarisation non uniforme cause des densités de charges non nulles localement :

$$-\operatorname{div} \vec{P} = \rho_{\text{liées}}$$

Et, plus facilement, une polarisation non constante cause des courants :

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\rho_0 \vec{v} = \vec{j}_{\text{pol}}$$

## 1.2 Équations de Maxwell

En l'absence de charges et de courants permanents, les équations de Maxwell peuvent donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho_{\text{liées}}}{\varepsilon_0} \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}_{\text{pol}} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Ou encore en posant l'induction électrique  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

## 1.3 Modèle de l'électron élastiquement lié (Drude-Lorentz)

Après avoir discuté du milieu et du champ, on présente ici un modèle simple d'interaction entre les deux.

### hypothèses du modèle

- On se place dans un milieu linéaire, homogène et isotrope,
- Au repos, ce milieu est électriquement neutre, il n'y règne ni champ électrique, ni champ magnétique,
- On considère les noyaux au repos, seuls les électrons sont en mouvement ( $m_{\text{noyau}} \gg m_{\text{électron}}$ ),
- On néglige les effets quantiques,
- Les électrons sont non relativistes, en conséquence on néglige la partie magnétique de la force de Lorentz.

### bilan de force

Sur un électron situé à une position  $\vec{u}$  du noyau, s'appliquent :

- Force de rappel élastique du noyau :

$$\vec{F}_r = -m_e \omega_0^2 \vec{u}$$

- Force de frottement fluide qui modélise les collisions avec les atomes voisins :

$$\vec{F}_c = -\frac{m_e}{\tau} \dot{\vec{u}}$$

- Force de Lorentz :

$$\vec{F}_L = -e \vec{E}$$

### PFD en régime harmonique

$$-m_e \omega^2 \vec{u} = -m_e \omega_0^2 \vec{u} - \frac{m_e i \omega}{\tau} \vec{u} - e \vec{E}$$

soit

$$\vec{u} = -\frac{e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau})} \vec{E}$$

or  $\vec{P} = -\rho_0 \vec{u}$  avec  $\rho_0 = en_0$  et  $n_0$  la densité volumique d'atomes polarisables.

D'où

$$\vec{P} = \frac{n_0 e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau})} \vec{E} = \varepsilon_0 \underline{\chi}_e \vec{E}$$

en posant  $\underline{\chi}_e$  la susceptibilité électrique complexe du milieu

$$\underline{\chi}_e = \frac{(\frac{\omega_p}{\omega_0})^2}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + i \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\omega_0 \tau}} \quad (1)$$

avec  $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$ , la pulsation plasma.

Ce qui conduit à

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \underline{\chi}_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \underline{\chi}_e) \vec{E}$$

on pose  $\underline{\varepsilon}_r = (1 + \underline{\chi}_e)$ , la permittivité relative du milieu.

### remarque : Relation de Clausius-Mossotti

Dans les calculs on prend le champ  $\vec{E}$  extérieur. Or les dipôles sont sensibles au champ local  $\vec{E}_{\text{loc}}$  qui est modifié à cause de la polarisation du milieu (on parle de champ dépolarisant, voir [Peuzin and Gignoux, 2009]).

Sous certaines conditions, par exemple dans un réseau cubique, on peut montrer que  $\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$ , ce qui conduit à une susceptibilité :

$$\chi'_e = \frac{\chi_e}{1 - \frac{\chi_e}{3}}$$

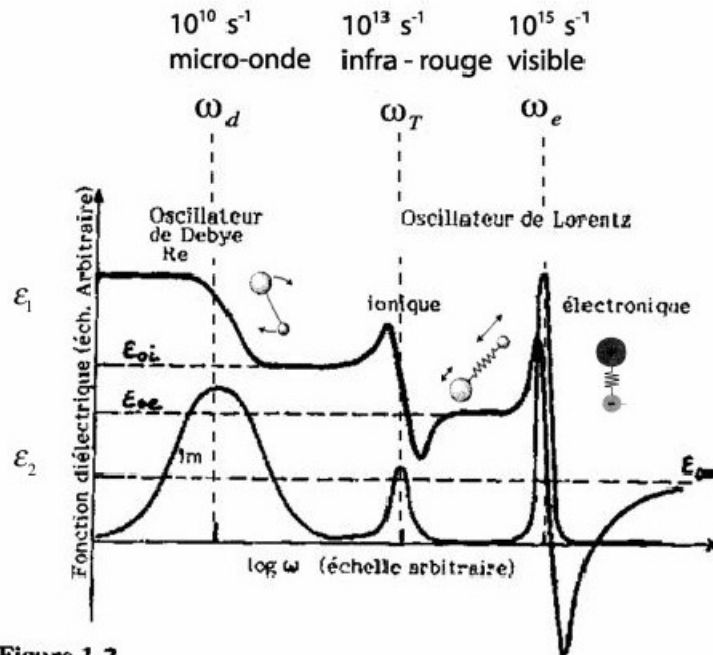
ou encore en utilisant la permittivité :

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{\chi_e}{3} = \frac{N\alpha}{3} \quad (\text{relation de Clausius-Mossotti})$$

avec  $N$  la densité volumique d'atomes polarisables et  $\alpha$  la polarisabilité d'un atome (homogène à un volume).

### Conclusion

La polarisation d'un milieu peut-être liée à différents phénomènes : la polarisation électronique, qui est le cas présenté dans cette partie, mais aussi polarisation ionique ou polarisation orientationnelle. A chaque mécanisme correspond une gamme de longueur d'onde (figure 2).



**Figure 1-2**  
*Fonction diélectrique (partie réelle et imaginaire) d'un matériau polaire faisant apparaître les différents types d'oscillateur. (Berthier)*

FIGURE 2 – différents mécanismes de polarisation

## 2 Propagation d'une onde

On va maintenant considérer la réaction du milieu au passage d'une onde électromagnétique :  
 $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$

### 2.1 Relation de dispersion

En reprenant les équations de Maxwell, on établit l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Soit la relation de dispersion  $k^2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \omega^2 = \underline{n}^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$  avec  $\underline{n}^2 = \varepsilon_r$ .

Si  $\varepsilon_r$  est un réel positif, on retrouve l'indice de réfraction habituel  $n = \sqrt{\varepsilon_r}$  tel que  $v = \frac{c}{n}$

Sinon, on pose  $\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$  et

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= \vec{E}_0 \exp(-\vec{k}_i \cdot \vec{r}) \exp(i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)) \end{aligned}$$

On a donc une atténuation dans le sens  $\vec{k}_i \cdot \vec{r} > 0$ , par ailleurs, on définit la vitesse de phase comme  $v_\phi = \frac{\omega}{\|\vec{k}_r\|}$

Dans tous les cas, la dépendance en  $\omega$  de  $n$  rend le milieu dispersif.

### 2.2 Permittivité du diélectrique

On étudie graphiquement l'évolution de la permittivité relative avec la fréquence de l'onde, en prenant les parties réelle et imaginaire de l'équation (1) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r,r}(\omega) &= 1 + \frac{\chi_e(0)(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0})^2} \\ \varepsilon_{r,i}(\omega) &= \frac{\chi_e(0)(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0})}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0})^2} \end{aligned}$$

avec  $\chi_e(0) = (\frac{\omega_p}{\omega_0})^2$  et  $Q = \omega_0 \tau$

Cette étude graphique se prête bien à l'utiliser du programme de tracé Python qui permet de comprendre le rôle du facteur de qualité  $Q$ . Un exemple de résultat est présenté figure 3.

On peut constater que loin de la pulsation  $\omega_0$ , le milieu est transparent et peu dispersif (permittivité réelle et constante) alors que autour de  $\omega_0$ , la dispersion est forte et la polarisation est déphasée par rapport au champ (partie imaginaire non nulle).

### 2.3 Étude énergétique

S'agissant de l'absorption, il est plus facile de raisonner sur la puissance moyenne dissipée dans le milieu  $\langle \mathcal{P} \rangle$  (voir [Meyer, 2020])

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \vec{j}_{\text{pol}} \cdot \vec{E} \rangle = \langle \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} \rangle$$

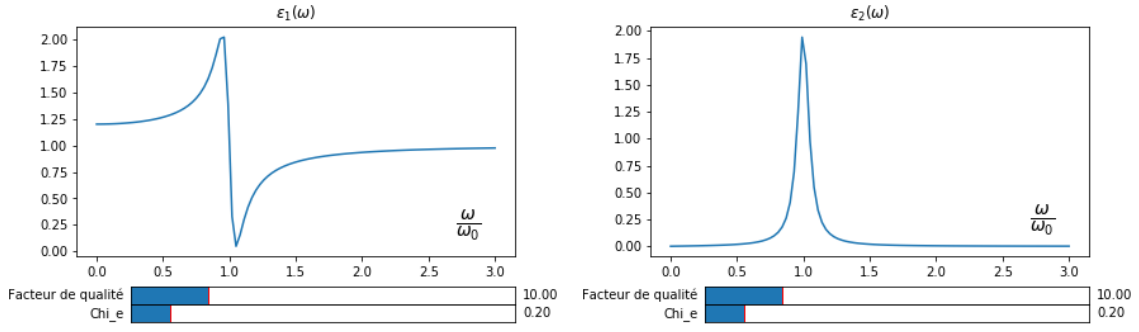


FIGURE 3 – parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) de la permittivité relative en fonction de la pulsation

or

$$\vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = i\omega \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

d'où

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \omega \epsilon_0 \epsilon_{r,i}(\omega) \frac{E_0^2}{2}$$

$\langle \mathcal{P} \rangle$  est représenté figure 4. On observe un maximum d'absorption autour de  $\omega_0$ . Or, dans le cas de la polarisation électronique,  $\omega_0 = 10^{15} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  soit une longueur d'onde de l'ordre de  $2 \mu\text{m}$  (on est proche du visible). L'absorption dans le proche UV correspond plutôt à  $\omega_0 = 10^{16} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

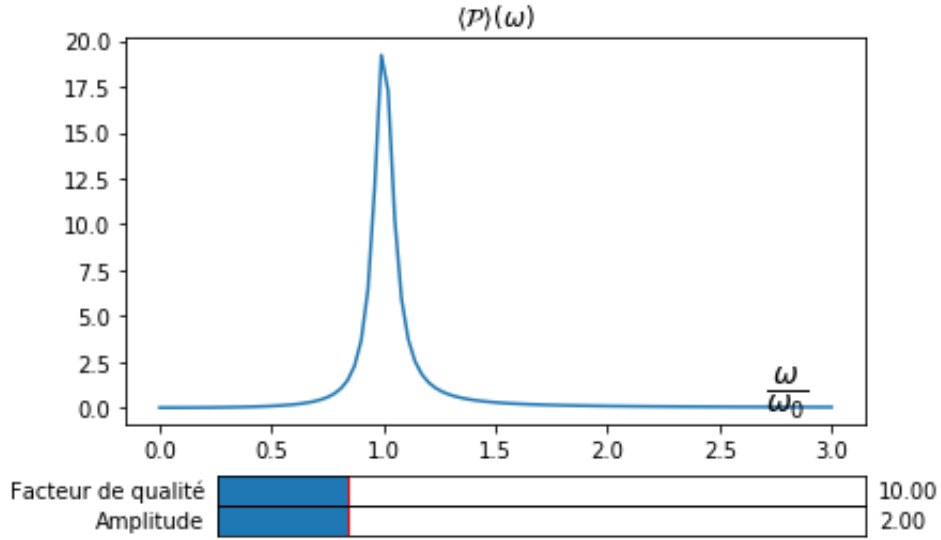


FIGURE 4 – puissance dissipée en fonction de la pulsation

### 3 Applications

#### 3.1 Loi de Cauchy

La loi phénoménologique qui donne la variation de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde se retrouve par un développement limité, dans le cas où  $\epsilon_r$  est réel.

Alors :

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 + \frac{\chi_e(0)}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \simeq a + b(\frac{\omega}{\omega_0})^2 = a + \frac{b'}{\lambda^2}$$

À partir de cette formule, on peut expliquer la dispersion par le prisme dans l'expérience introductive.

### 3.2 Transmission et réflexion sur un dioptre

La question qu'on se pose ici est de savoir si le modèle développé dans cette leçon permet de retrouver les lois de Snell-Descartes.

Dans la suite, on considère un rayon incident sur un dioptre, ainsi que le rayon transmis et le rayon réfléchi (Figure 5).

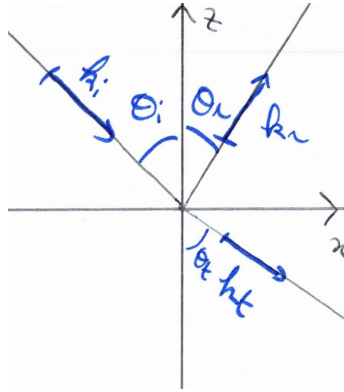


FIGURE 5 – rayons réfléchi et transmis

#### lois de Snell-Descartes

Les équations de Maxwell imposent la continuité des champs suivants :

- Maxwell-Flux  $\rightarrow$  continuité de  $\vec{B}$  normale
  - Maxwell-Faraday  $\rightarrow$  continuité de  $\vec{E}$  tangentielle
  - Maxwell-Gauss en milieu non magnétique  $\rightarrow$  continuité de  $\vec{D}$  tangentielle
  - Maxwell-Ampère en milieu non magnétique  $\rightarrow$  continuité de  $\vec{B}$  normale
- soit, pour la continuité de  $\vec{E}$  tangentielle, avec  $\vec{n}$  le vecteur normal au dioptre :

$$\vec{n} \wedge \underline{\vec{E}}_{0,i} e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + \vec{n} \wedge \underline{\vec{E}}_{0,r} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} = \vec{n} \wedge \underline{\vec{E}}_{0,t} e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$$

Pour vérifier cette relation à tout temps, il faut  $\omega_i = \omega_r = \omega_t$ .

L'invariance suivant  $\vec{e}_x$  conduit à  $k_{i,x} = k_{r,x} = k_{t,x}$ .

Enfin, la relation de dispersion pour chaque onde  $k_i^2 = k_r^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_i^2$  et  $k_t^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_t^2$ , conduit aux lois de la réflexion et de la réfraction :

$$\theta_r = \theta_i$$

et

$$n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$$



## angle de réflexion totale

On peut expliquer l'angle de réflexion totale avec la notion d'onde évanescente :

$$\begin{aligned}k_{t,z}^2 &= k_t^2 - k_{t,x}^2 \\&= (k_0 n_t)^2 - (k_0 n_i \sin(\theta_i))^2 \\&= k_0^2 (n_t^2 - n_i^2 \sin^2(\theta_i))\end{aligned}$$

Donc si  $n_t^2 < n_i^2 \sin^2(\theta_i)$ , alors  $k_{t,z}^2 < 0$ , caractéristique d'une onde évanescente.

## relations de Fresnel

Voir démonstration dans [Peuzin and Gignoux, 2009].

## Conclusion

Le modèle développé dans cette leçon permet d'expliquer, à partir de considérations microscopiques, le comportement d'un diélectrique traversé par une onde électromagnétique.

Il est important de bien souligner les différences de comportement avec la propagation d'une OEM dans un plasma peu dense ou dans un conducteur, ces deux milieux pouvant également faire l'objet d'une leçon.

Enfin, il faut bien préciser les hypothèses utilisées : le diélectrique est homogène, linéaire, isotrope et on a négligé les effets magnétiques. Toutefois, cette présentation peut servir de base pour lever ces hypothèses, notamment l'isotropie, par l'introduction d'une susceptibilité tensorielle qui permet, notamment, de traiter les matériaux biréfringents.

## Références

- [Meyer, 2020] Meyer, T. (2020). *51 leçons de l'agrégation externe de sciences physiques, corrigées et commentées*. Références sciences. Ellipses.
- [Peuzin and Gignoux, 2009] Peuzin, J.-C. and Gignoux, D. (2009). *Physique des diélectriques : avec problèmes et exercices corrigés*. Collection Grenoble sciences. EDP sciences.
- [Sanz et al., 2019] Sanz, M.-N., Vandenbrouck, F., Salamito, B., and Chardon, D. (2019). *Physique : PC-PC\* : tout-en-un*. J'intègre. Dunod.