

INSTABILITES ET PHENOMENES NON LINEAIRES

I INTRODUCTION

I.1 Phénomène linéaire

On dit d'un phénomène qu'il est linéaire lorsque les grandeurs caractéristiques du phénomène sont reliées entre elles par une simple relation de proportionnalité :

$$y = f(x) = k.x$$

→ Un système est linéaire si l'effet est proportionnel à la cause qui lui a donné naissance. Le phénomène est alors décrit par des équations linéaires c'est à dire des équations dont les coefficients sont constants.

Cas des systèmes dynamiques :

L'évolution est alors régie par une équation différentielle. Dans ce cas, l'équation est dite linéaire lorsqu'elle ne fait intervenir les variables ou leur dérivée qu'au premier degré. Les coefficients affectant les variables ou leurs dérivées peuvent être des constantes ou dépendre du temps (dans ce cas, l'équation est dite paramétrique). En régime sinusoïdal, où la dérivation par rapport au temps s'effectue en multipliant par $j\omega$, on peut alors définir une fonction de transfert pour le système.

Principe de superposition :

Ce principe s'applique aux phénomènes et aux équations linéaires au sens large :

- à une excitation $x_1(t)$ correspond une réponse univoque $y_1(t)$
- à une excitation $A.x_1(t)$ correspond une réponse $A.y_1(t)$
- à une excitation $x_1(t) + x_2(t)$ correspond une réponse $y_1(t) + y_2(t)$
- les deux dernières propriétés impliquent qu'à une excitation $A.x_1(t) + B.x_2(t)$

correspond une réponse $A.y_1(t) + B.y_2(t)$

Dans ces conditions, **il n'y a pas d'interaction entre les différentes excitations x ainsi qu'entre les différentes influences A, B, ...C**. C'est une **propriété fondamentale** des systèmes linéaires car grâce à ce principe, le système se laisse analyser relativement facilement : une excitation quelconque peut se décomposer en excitations élémentaires dont on étudie les réponses qu'en donnent le système. En recomposant linéairement ces réponses élémentaires, on obtient la réponse à l'excitation quelconque.

I.2 Phénomène non linéaire

Un phénomène est dit non linéaire lorsque des grandeurs caractéristiques du phénomène reliées entre elles ne varient pas de façon proportionnelle. Son comportement peut être alors décrit par un modèle ou des équations faisant intervenir les variables autrement qu'au premier degré et/ou une constante.

Propriété essentielle qu'implique la non linéarité :

Un système non linéaire ne satisfait pas au principe de superposition. On s'en rend compte facilement en étudiant par exemple la réponse d'un phénomène décrit par la fonction $y = f(x) = x^2$ à une excitation $x = x_1 + x_2$. La réponse est alors : $f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = f(x_1) + f(x_2) + 2x_1 x_2$

→ La réponse globale ne correspond pas à la somme des réponses individuelles ; il existe maintenant un terme d'interaction $2.x_1.x_2$ dit terme d'interférence entre les différentes excitations. C'est une propriété générale des phénomènes non linéaires qui rend l'étude plus compliquée puisqu'on ne peut plus superposer de solutions (toute combinaison linéaire de solutions n'est plus solution). Certains phénomènes ou équations sont « naturellement » non linéaires (comme les équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides) mais il faut garder à l'esprit que de nombreuses lois physiques ne sont linéaires que pour des niveaux d'excitation pas trop élevés et qu'à partir d'un certain seuil, l'approximation linéaire n'est plus suffisante.

La non linéarité d'un phénomène peut être mise en évidence de différentes manières. Le plus simple consiste à étudier directement la fonction $y = f(x)$ mais on peut aussi utiliser les différentes « signatures » que peut apporter la non linéarité d'un phénomène : l'existence d'un seuil, la présence d'hystérésis (à une excitation donnée ne correspond plus une réponse univoque), l'apparition de nouvelles fréquences dans le spectre d'un signal ou l'apparition possible de chaos lorsque le système non linéaire est non intégrable.

II INFLUENCE DES NON LINEARITES SUR L'AMPLITUDE D'UN OSCILLATEUR QUASI SINUSOIDAL

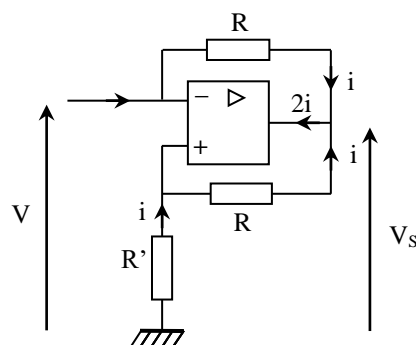
[1], p. 169 ; [3], p. 34 et 334 ; [4], p. 409, 410 ; [5], p.

1047

Les oscillateurs quasi sinusoïdaux électroniques sont des systèmes instables délivrant un signal pratiquement sinusoïdal à partir d'une source continue. Ces dispositifs fonctionnent la plupart du temps en régime linéaire mais les effets non linéaires, même s'ils interviennent peu, sont fondamentaux car ce sont eux qui limitent l'amplitude des oscillations. L'étude porte sur un oscillateur RLC à résistance négative. Dans ce type d'oscillateur, l'idée est d'annuler l'amortissement d'un circuit RLC par une résistance négative afin d'entretenir les oscillations. On se propose de mener cette étude sur un circuit RLC série en utilisant un convertisseur d'impédance négative en courant. Ce montage est aussi étudié en détail dans le montage « Oscillateurs » → s'y reporter pour plus de précision.

II.1 Etude de la résistance négative

On cherche à savoir sous quelles conditions le dipôle suivant se comporte comme une résistance négative c'est à dire lorsque $Z_{eq} = V/i = -R_N$:



II.1.1 Etude en régime linéaire

Lorsque l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, on a $\varepsilon = 0$ donc $V_+ = V_-$. Dans ces conditions, les deux résistances R sont soumises aux mêmes potentiels V et V_s à leurs bornes → le courant circulant dans ces deux résistances a la même valeur et le même sens (le courant de sortie de l'amplificateur vaut alors $i_s = 2i$). Ce courant i circule aussi dans la résistance R' puisque $i_+ = 0$. Comme $V = V_- = V_+$, on voit immédiatement que l'impédance du montage en régime linéaire vaut :

$$\boxed{Z_{eq} = V/i = -R' = R_N} \quad \text{La tension de sortie correspond alors à } V_S = -(R' + R).i$$

Le montage se comportera comme une résistance négative tant que la sortie de l'amplificateur opérationnel ne saturera pas c'est à dire tant que l'on a : $(R + R') i \leq V_{SAT}$

→ Les valeurs maximum de i et V seront donc :

$$\boxed{|i_{max}| = \frac{V_{SAT}}{R + R'}} \quad \boxed{|V_{max}| = \frac{R'}{R + R'} V_{SAT}}$$

II.1.2 Etude en régime saturé

Lorsque l'AO est saturé, on a $V_S = \pm V_{SAT}$ et $\varepsilon \neq 0$. On a alors :

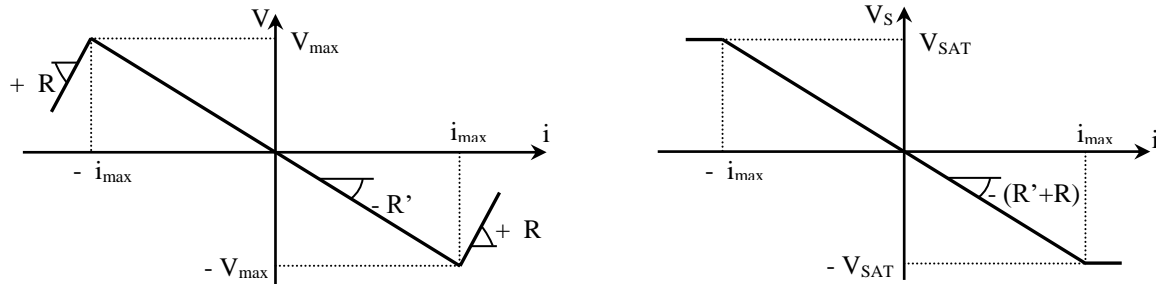
$$\boxed{V = Ri \mp V_{SAT}}$$

Attention, le courant dans la branche $R' - R$ n'est pas le même ! Il vaut $\mp V_{SAT}/(R + R')$.

II.1.3 Caractéristiques globales

On les déduit des raisonnements précédents.

Les évolutions de V et de V_S en fonction de i sont les suivantes :



Le dipôle est non linéaire : son impédance ne vaut $-R'$ qu'en régime linéaire.

II.1.4 Visualisation des caractéristiques

Réalisez le montage suivant avec R_g

$= 2 \text{ k}\Omega$, $R = 2 \text{ k}\Omega$ et R' compris entre 100 et 1000 Ω :

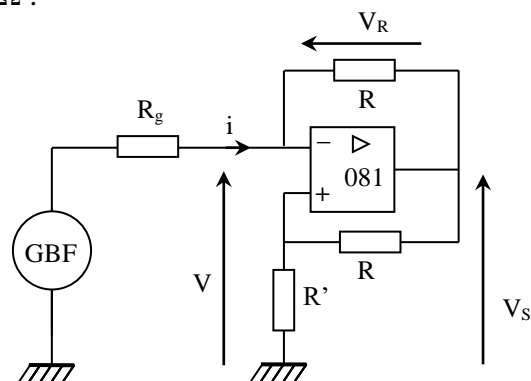
GBF : fréquence de l'ordre de 100 Hz

Visualisez V_R à l'aide d'une sonde différentielle !!

$V_R \rightarrow$ voie X de l'oscilloscope

V ou $V_S \rightarrow$ voie Y de l'oscilloscope

Observez en mode XY



Remarque :

La résistance R_g sert à assurer la stabilité du montage. Celui ci subit en effet une rétroaction positive et une rétroaction négative \rightarrow il n'est stable que si le taux de réaction négatif $\tau_- = V/V_S$ est supérieur au taux de réaction positive $\tau_+ = V_+/V_S$. Ces deux taux sont, avec la résistance R_g :

$$\tau_- = R_g/(R + R_g) \quad \text{et} \quad \tau_+ = R'/(R + R')$$

\rightarrow Les valeurs proposées pour R , R_g et R' permettent d'avoir $\tau_- > \tau_+$ et d'assurer ainsi la stabilité du montage.

Caractéristique $V_S = f(i)$:

Ajustez la valeur de R' à 1 k Ω par exemple. Vérifiez que la caractéristique observée correspond à celle attendue. Mesurez V_{SAT+} , V_{SAT-} , i_{max+} et i_{max-} . Comparez les valeurs de i_{max} mesurées à celles calculées. Attention au calcul de i_{max} déduit des mesures : on a sur l'oscilloscope la tension $V_R = Ri$ divisée par l'atténuation de la sonde !

Caractéristique $V = f(i)$:

Vérifiez que la caractéristique observée correspond à celle attendue. Les valeurs de i_{max} doivent rester inchangées. Mesurez les valeurs de V_{max} et comparez aux valeurs attendues. Modifiez la valeur de R' dans le rapport proposé \rightarrow la pente du régime linéaire doit changer (pente = - R'), pas celles des régimes saturés (pente = + R). On peut vérifier pour une valeur de R' que la pente observée correspond effectivement à - R' .

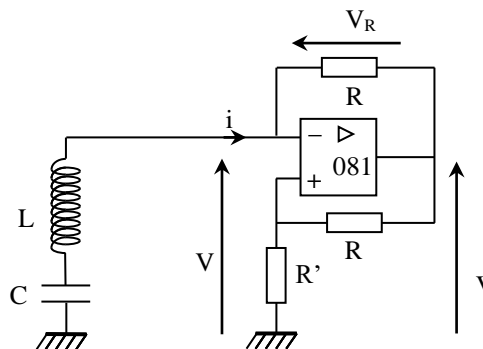
II.2 Etude de l'oscillateur

On insère la résistance négative dans le circuit r , L , C .

Montage :

L : 0,1 H AOIP ($r = 32 \Omega$)

C : 0,1 μ F AOIP

Observations :

Augmentez R' en partant de 0 jusqu'à observer en V_S le démarrage des oscillations. Mesurez la fréquence des oscillations et comparez à la valeur théorique $f_0 = 1/[2\pi\sqrt{LC}]$. Comparez la valeur obtenue pour R' à celle de la self. On trouve en général une valeur supérieure car la résistance de la bobine augmente avec la fréquence à cause de l'effet de peau or celle indiquée par le constructeur l'est à 50 Hz. Visualisez de nouveau la caractéristique $V_S = f(i)$ à l'oscilloscope en mode XY ; on retrouve la caractéristique de la résistance négative mais où la saturation est juste amorcée. C'est cet effet non linéaire qui limite en pratique l'amplitude des oscillations.

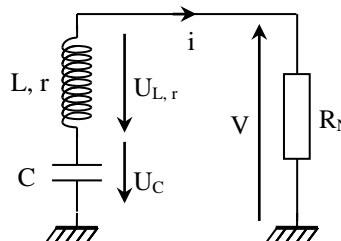
Analyse :

Le schéma équivalent du circuit est le suivant (le sens des tensions $U_{L,r}$ et U_C est choisit pour respecter la convention récepteur avec le sens de i que l'on a pris jusqu'à maintenant) :

$$U_{L,r} + U_C + V = 0$$

$$-e + ri + \frac{q}{C} + V = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} + V = 0$$



Avant l'amorçage des oscillations, $i = 0$ et $V = 0 \rightarrow$ l'AO est en régime linéaire et le dipôle à résistance négative obéit à la loi $V = -R'i$. On a alors :

$$L \frac{di}{dt} + (r - R')i + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow \text{En dérivant par rapport au temps : } \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{(r - R')}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

Tant que $r > R'$, l'équation différentielle correspond à un système oscillant amorti. Comme la valeur

initiale de i est quasi nulle, elle ne peut que décroître \rightarrow le système n'oscille pas. Si $r = R'$, l'équation différentielle correspond à un système qui oscille de façon sinusoïdale. Cependant, aucune condition ne précise l'amplitude de ces oscillations. Celles-ci étant nulles au départ, il faut dépasser ce seuil pour qu'elles puissent apparaître. Si $R' > r$, l'équation différentielle correspond à un système oscillant dont l'amplitude croît exponentiellement. C'est la condition qu'il faut réaliser pour voir apparaître les oscillations.

Influence de la non linéarité du dipôle sur l'amplitude :

Une fois dépassé le seuil critique, les oscillations croissent de façon exponentielle. Rien ne limite à priori cette croissance. Dans la pratique, c'est la saturation de l'amplificateur opérationnel (effet non linéaire) qui limite cette amplitude. En effet, lorsque que le courant atteint la valeur $|i_{\max}| = V_{\text{SAT}}/(R + R')$, la relation $V = -R'i$ cesse d'être valable et est remplacée par $V = Ri \mp V_{\text{SAT}}$. L'équation du circuit devient alors :

$$L \frac{di}{dt} + (r + R)i + \frac{q}{C} = \pm V_{\text{SAT}}$$

Soit en dérivant par rapport au temps : $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{(r + R)}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$

Cette fois-ci, l'amortissement devient fortement positif \rightarrow il tend à diminuer la valeur de i mais en redescendant au dessous de i_{\max} , l'ampli op retrouve son régime linéaire \rightarrow l'oscillation repart vers $-i_{\max}$ ou le même phénomène limitera l'amplitude.

Conclusion :

Les non linéarités interviennent peu au cours du fonctionnement d'un oscillateur quasi sinusoïdal mais elles jouent un rôle fondamental dans la limitation de l'amplitude de ce type d'oscillateur. Le caractère fini de l'amplitude ne peut s'expliquer sans considérer le caractère non linéaire du montage à résistance négative.

III REALISATION PRATIQUE D'UNE NON LINEARITE

La non linéarité précédente permet d'expliquer la stabilisation en amplitude de l'oscillateur à résistance négative. Un développement sur le sujet développé dans le montage « Oscillateurs » montre qu'on peut modéliser cette non linéarité de façon approchée par un polynôme d'ordre 3. On propose dans ce chapitre de réaliser un montage électronique dont la caractéristique est un polynôme de même ordre pouvant servir à la réalisation d'un oscillateur de Van Der Pol ou un oscillateur anharmonique à double puit. Cette partie est tirée de la réf. [2] \rightarrow s'y reporter, notamment pour les schémas de montage.

III.1 Montage

[2], p. 167

Le circuit étant relativement lourd et devant être intégré par la suite dans un montage du même niveau, réalisez-le sur une petite plaque P 60 pour minimiser le câblage et en faire un bloc fonctionnel facilement insérable. Prendre :

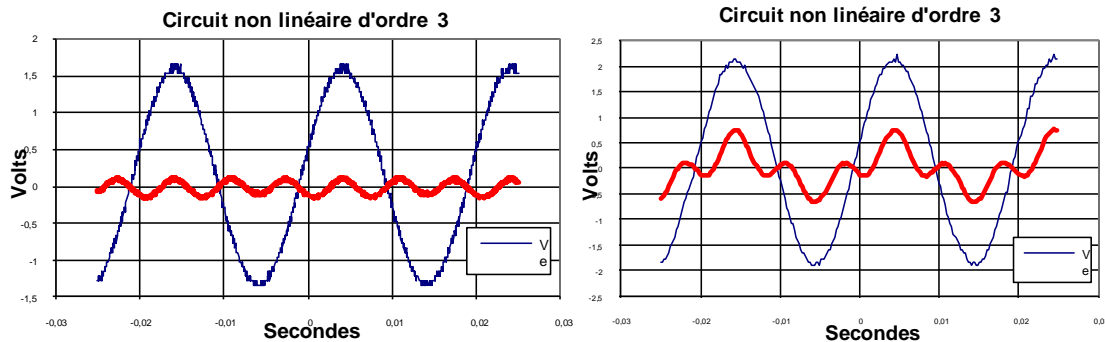
$$V_0 = 0,5 \text{ V} ; R_1 = R_3 = 5,1 \text{ k}\Omega ; R_2 = 75 \text{ k}\Omega ; R_4 = 2,2 \text{ k}\Omega ; \text{AO 741} ; \text{Multiplieur AD 633}$$

On réalise ainsi un polynôme d'ordre 3 avec (cf. [2], p. 168) : $\alpha_{\text{prévu}} = -0,237$ et $\beta_{\text{prévu}} = 0,147$

Attention au câblage des multiplieurs ! Le second multiplieur doit réaliser une multiplication avec un changement de signe !

III.2 Observations et mesures

Injectez un signal sinusoïdal de 100 Hz et visualisez la tension d'entrée et la tension de sortie. Etudiez l'influence de l'amplitude de V_E :



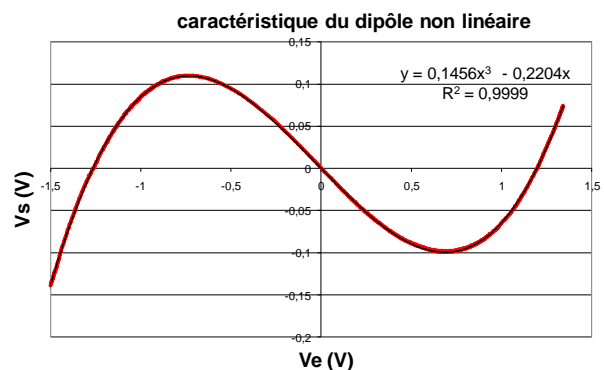
Passez en mode XY, observez la fonction de transfert $V_S = f(V_E)$ du circuit et vérifiez qu'elle s'accorde avec un polynôme d'ordre 3. Pour le confirmer, réalisez la FFT du signal de sortie : on doit observer les fréquences f_E et $3f_E$ (diminuez l'amplitude de V_E si vous voyez apparaître la fréquence $2f_E$).

Vérification des paramètres du modèle :

Les oscilloscopes numériques HP 54603 et 54621 permettent un transfert de données en format Texte vers un tableur (demandez conseil au professeur).

On peut alors en profiter pour effectuer une modélisation de la fonction de transfert du circuit afin de vérifier les paramètres du modèle. Voici à titre indicatif ce que l'on obtient Excel :

On trouve $\alpha_{\text{exp}} = -0,220$ et $\beta_{\text{prévu}} = 0,146$ ce qui est en accord avec les valeurs prévues.



IV OSCILLATEUR DE VAN DER POL

Se reporter à [1], p. 175, [2], p. 170, [6], [7], [8] et au montage « Oscillateurs » pour des précisions sur cet oscillateur.

Son équation est du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

L'intérêt de cet oscillateur est de proposer une modélisation permettant d'expliquer le démarrage et la stabilisation en amplitude d'un oscillateur. Il permet en plus de jouer de façon indépendante sur le caractère plus ou moins sinusoïdal des oscillations :

- la condition de démarrage de l'oscillateur est $\mu > 0$.
- on peut obtenir des oscillations plus ou moins sinusoïdales en jouant sur la valeur de μ ($\mu \approx 0 \rightarrow$ oscillateur quasi-sinusoïdal ; μ grand \rightarrow oscillateur de relaxation).
- on peut contrôler l'amplitude des oscillations sans influencer sur leur caractère plus ou moins sinusoïdal en jouant sur la valeur de x_0 . La limitation de l'amplitude est liée au caractère non monotone du pré facteur de \dot{x} . Si $\mu > 0$, le

composant non linéaire qui fournit ce pré facteur (la résistance négative au § II) fonctionne en générateur lorsque $|x| < x_0$ et permet d'augmenter l'amplitude des oscillations jusqu'à la valeur critique x_0 . Au-delà, le mécanisme de dissipation l'emporte sur celui qui alimente les oscillations : à la phase rapide d'amplification succède une phase de freinage plus lente ou le signal passe par un maximum avant de décroître. Cette décroissance de l'oscillation fait rentrer de nouveau l'oscillateur dans une phase d'amplification lorsque x atteint la valeur critique x_0 qui dirige cette fois-ci l'oscillation vers une saturation négative jusqu'à ce que l'amplitude atteigne la valeur critique $-x_0$. Le mécanisme de dissipation redevient prépondérant, une nouvelle phase de freinage commence et le signal passe par un maximum (négatif) avant de décroître. Un raisonnement énergétique (cf. montage « Oscillateurs ») montre que l'amplitude des oscillations tend vers $2x_0$ pour des valeurs de μ proches de 0 (ce résultat reste valable pour μ grand mais la démonstration est plus complexe). On peut remarquer que l'oscillateur de Van der Pol constitue la modélisation la plus simple permettant d'expliquer la limitation en amplitude d'un oscillateur, le pré facteur du terme en \dot{x} étant une fonction du type parabole, la plus simple des fonctions paires susceptible de changer de signe autour de $|x| = x_0$.

IV.1 Réalisation pratique de l'oscillateur

Deux solutions peuvent être envisagées : utiliser le montage du § II du montage « Oscillateur » ou le circuit non linéaire du § précédent → cf. [2], p. 171. Réalisez alors la deuxième partie montage proposé sur une seconde plaque P 60 avec les valeurs suivantes : $R = 1 \text{ k}\Omega$; $C_1 = C_2 = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$; $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$; $R_{C1} = 100 \text{ k}\Omega$. Se reporter au montage « Oscillateur » ou à la référence [2] pour plus de précision sur les manipulations suivantes.

IV.2 Oscillateur en régime quasi-sinusoïdal

L'oscillateur de Van Der Pol est dans ce régime lorsque le coefficient μ (noté ε dans [2]) est proche de 0.

A montrer :

- Vérifiez la condition de démarrage de l'oscillateur $\mu(\varepsilon) \geq 0$. Cela revient à vérifier la relation $R' \geq r$ avec le circuit proposé dans le montage « Oscillateurs » (circuit 1). Avec le montage de la référence [2] (circuit 2), on doit vérifier la condition $R_{NL} \leq \alpha \cdot R_{C1}$.

- Pour de faibles valeurs de $\mu(\varepsilon)$, montrez que le circuit oscille à la pulsation $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ avec le premier circuit, $\omega_0 = 1/\sqrt{(R_1 R_2 C_1 C_2)}$ avec le deuxième.

- Montrez que l'amplitude des oscillations tend vers $U_C = 2 \cdot x_0 = 2 U_0 \sqrt{\frac{R' - r}{R'}}$ avec le premier circuit, $2 \cdot s_0 = 2 \sqrt{-\frac{\alpha \cdot R_{C1} + R_{NL}}{3 \cdot \beta \cdot R_{C1}}}$ avec le deuxième circuit.

- Visualisez la trajectoire de phase de l'oscillateur avec un oscilloscope en mode XY et vérifiez qu'on a des cycles quasi-elliptiques.

IV.3 Oscillateur en régime de relaxation

L'oscillateur de Van Der Pol est dans ce régime lorsque le coefficient $\mu(\varepsilon)$ devient grand.

A montrer :

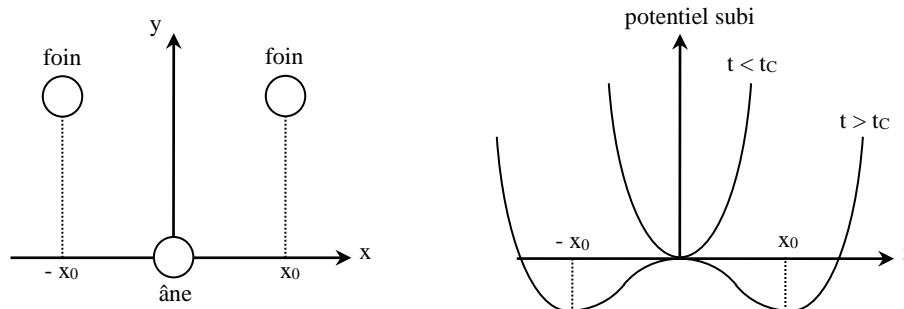
Montrez le passage progressif à des oscillations de relaxation lorsqu'on augmente $\mu(\varepsilon)$: augmentez R' avec le premier circuit ; diminuez R_{NL} avec le second. Vérifiez que la période T des oscillations augmente lorsque $\mu(\varepsilon)$ augmente. On peut montrer que $\omega_0 \cdot T$ tend à devenir

proportionnel à μ (ϵ) (cf. [2], p.175). Visualisez la trajectoire de phase de l'oscillateur avec un oscilloscope en mode XY et comparez avec celui du § précédent.

V NOTION DE BIFURCATION - BRISURE SPONTANEE DE SYMETRIE

V.1 Introduction

Les systèmes dynamiques non linéaires dissipatifs évoluent plus ou moins vite vers des états singuliers dont la nature dépend de certains "paramètres de contrôle". Lorsque ces états particuliers sont stables (ils résistent à des perturbations), on parle **d'attracteurs**. Un changement de nature dans le(s) attracteur(s) est appelé **une bifurcation**. Elle surgit lorsque la valeur d'un paramètre de contrôle franchit une valeur critique. Deux exemples permettent d'appréhender simplement ces notions (cf. [11], ch. 42). Imaginons pour commencer un âne qui n'a pas faim, placé face à deux tas de foin identiques situés à égale distance :



Tant qu'il n'a pas faim, il n'y a aucune raison pour qu'il bouge (l'âne est un animal paisible ...). Il reste donc dans sa position stable et symétrique à $x = 0$. Au bout d'un certain temps t_c , la faim va se faire sentir et l'âne devra se diriger au hasard vers l'un ou l'autre des tas pour se nourrir. Il quittera sa position symétrique devenue instable pour occuper une des deux positions d'équilibre stables non symétriques x_0 ou $-x_0 \rightarrow$ il brisera la symétrie du système sans aucune action extérieure d'où le nom de brisure spontanée de symétrie. On peut aussi prendre l'exemple d'une vallée symétrique par rapport à un chemin rectiligne horizontal situé en son fond. On conçoit aisément que le chemin soit un bassin d'attraction pour une bille soumise uniquement à la pesanteur. Supposons que la vallée se subdivise en deux sous vallées symétriques par rapport au chemin au bout d'une certaine distance d_c parcourue sur celui-ci. Une bille située sur le chemin se trouve dorénavant en position instable. La moindre perturbation lui fera quitter cette position symétrique devenue instable pour l'une des deux positions stables non symétriques (nouveaux attracteurs). Cet exemple est formellement identique en termes d'énergie potentielle de pesanteur au schéma de droite ci-dessus. Le paramètre de contrôle qui gouverne l'apparition d'une instabilité conduisant à la rupture de symétrie est cette fois-ci la distance parcourue sur le chemin, le seuil critique étant le point où la vallée se sépare en deux. A chaque fois, l'instabilité provoquant une brisure spontanée de symétrie apparaît à partir d'un certain seuil. Le phénomène est donc fondamentalement non linéaire (cf. § I). Ces concepts sont généraux. Ils se retrouvent dans l'exemple précédent de l'oscillateur de Van Der Pol. Dans ce cas, le paramètre de contrôle est le facteur $\mu(\epsilon)$. La valeur $\mu = 0$ correspond à un changement de nature de l'attracteur (bifurcation) : l'attracteur pour $\mu < 0$ est le point de coordonnées $(0 ; 0)$ dans l'espace des phases (il correspond à une annulation des oscillations). Lorsque μ devient positif, l'attracteur devient, dans l'espace des phases, une courbe fermée en forme d'ellipse si μ est faible, de forme plus complexe autrement. Elle correspond à des oscillations quasi sinusoïdales ou de relaxation. On note alors une différence entre les deux types de bifurcation : l'exemple de l'âne et de la bille conduisent à des solutions stationnaires alors que le Van der Pol peut conduire à des solutions oscillantes. Les premiers exemples font partie des bifurcations de type fourche alors que l'oscillateur de Van Der Pol fait partie des bifurcations de Hopf (cf. [12], chapitre 2).

Diagramme de Bifurcation :

Ce diagramme représente l'évolution de la grandeur qui caractérise le ou les attracteur(s) en fonction du paramètre de contrôle. Dans le cas de l'âne, le paramètre de contrôle est le temps et la grandeur caractéristique des attracteurs est la position x de l'âne. Dans le cas de l'oscillateur de Van der Pol, le paramètre de contrôle est le coefficient $\mu(\varepsilon)$ et la grandeur caractéristique des attracteurs est l'amplitude des oscillations. Pour $\mu < 0$, cette amplitude tend vers 0, pour $\mu > 0$, elle tend vers $x_{\max} = 2x_0$ avec pour μ et x_0 les expressions suivantes (cf. montage « Oscillateurs ») :

$$\mu = (R' - r)/L \quad x_0 = \sqrt{(R' - r)/R' \cdot U_0}$$

On peut donc en déduire, pour $\mu > 0$, l'expression de l'amplitude en fonction du paramètre de contrôle :

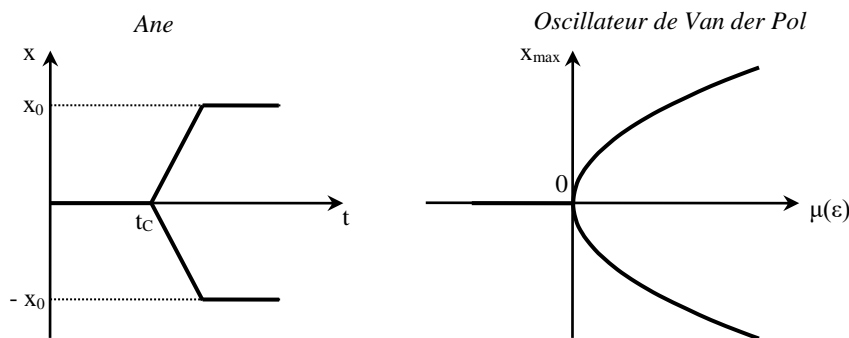
$$x_{\max} = 2\sqrt{L/R' \cdot U_0 \cdot \sqrt{\mu}}$$

Si on utilise le modèle d'oscillateur de Van der Pol proposé par le Krob, on montre facilement que l'amplitude des oscillations dans le cas $\varepsilon > 0$ tend vers :

$$x_{\max} = 2\sqrt{\frac{R_{NL}}{3\beta}} \sqrt{\frac{C_1}{R_1 R_2 C_2}} \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

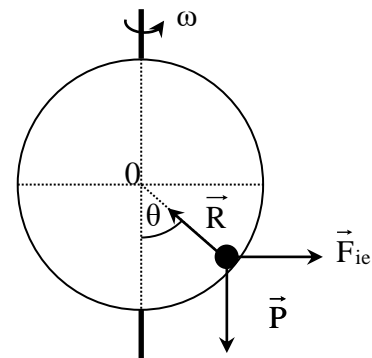
Dans les deux cas de figure, on a une relation du type : $x_{\max} = A \cdot \sqrt{\mu(\varepsilon)}$

On a donc les diagrammes de bifurcation suivants (on suppose ici que l'âne se dirige en ligne droite à vitesse constante vers le tas de foin qu'il choisi ...) :

**V.2 Expérience proposée**

On propose pour changer de domaine d'illustrer le phénomène de bifurcation par une expérience mécanique tirée de la référence [10], chapitre 2. Le problème consiste à analyser la position d'équilibre d'une bille placée dans un guide circulaire que l'on fait tourner autour d'un axe vertical à vitesse constante :

Etudions le mouvement de la bille dans le référentiel R' lié au guide circulaire. Lorsque la bille est en équilibre, elle est soumise à son poids P , à la réaction R normale au support (frottements négligés) et à la force d'inertie d'entraînement F_{ie} (la force d'inertie de Coriolis est en effet nulle à l'équilibre), toutes trois de somme vectorielle nulle. La projection de cette somme sur la tangente au cercle au point de contact M de la bille sur le guide donne :



$$(F_{ie})_T + (P)_T = 0 = F_{ie} \cdot \cos \theta - mg \cdot \sin \theta$$

Or, on a $F_{ie} = m.r.\omega^2$ avec r = rayon de la trajectoire de la bille. Comme on a $r = R.\sin\theta$, on en déduit :

$$m.R.\sin\theta.\omega^2.\cos\theta - mg.\sin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\theta [\omega^2.R.\cos\theta - g] = 0$$

Soit, en posant $\omega_c = \sqrt{g/R}$:

$$R.\sin\theta. [\omega^2.\cos\theta - \omega_c^2] = 0$$

On en conclut que :

- si $\omega < \omega_c$, il existe a priori deux positions d'équilibre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$
- si $\omega > \omega_c$, il existe une position d'équilibre supplémentaire vérifiant la

relation :

$$\cos\theta_0 = (\omega_c / \omega)^2$$

On peut étudier la stabilité de ces positions d'équilibre par une étude énergétique des forces mises en jeu (les résultats sont cependant prévisibles intuitivement ...). Le poids dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $m.g.z = -m.g.R.\cos\theta$. La réaction en l'absence de frottement est normale à la trajectoire de la bille \rightarrow son travail est nul. La force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle centrifuge :

$$E_{PC} = -m \frac{\omega^2}{2} r^2 = -m \frac{\omega^2}{2} R^2 \sin^2 \theta$$

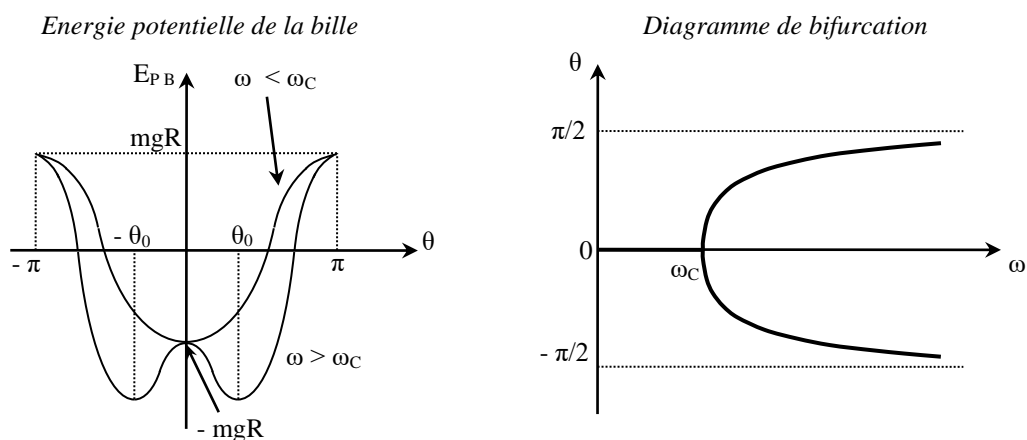
\rightarrow La bille a l'énergie potentielle :

$$E_{PB} = -m.g.R \left(\cos\theta + \frac{\omega^2 R}{2.g} \sin^2 \theta \right) = -m.g.R \left(\cos\theta + \frac{\omega^2}{2.\omega_c^2} \sin^2 \theta \right)$$

L'évolution de cette énergie est représentée sur la courbe suivante dans les deux cas de figure ($\omega < \omega_c$ et $\omega > \omega_c$). Il y a équilibre lorsqu'elle passe par un extrémum. On voit alors que :

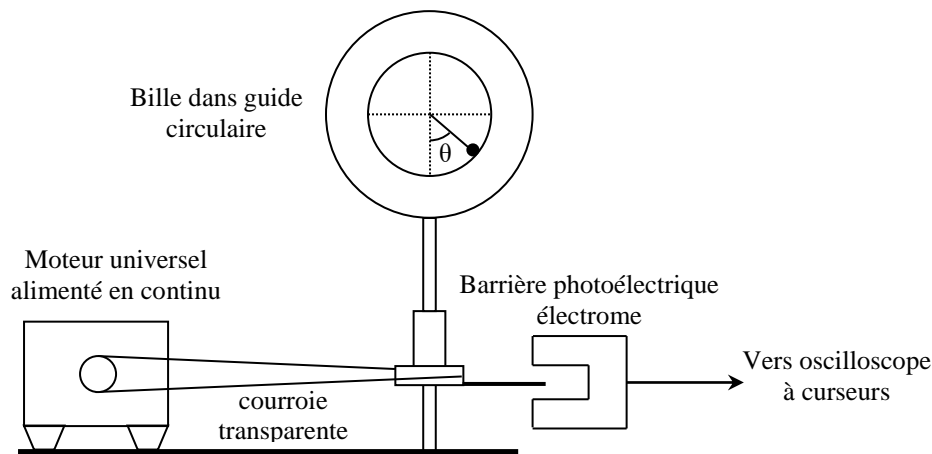
- la position $\theta = 0$ est stable pour $\omega < \omega_c$, instable sinon.
- la position $\theta = \pi$ est toujours instable.
- la position $\theta_0 = \arccos(\omega_c^2 / \omega^2)$ est stable lorsqu'elle existe soit pour $\omega > \omega_c$.

L'ensemble de ces résultats permet de tracer le diagramme de bifurcation du comportement de la bille (le paramètre de contrôle est ici la vitesse de rotation du guide circulaire) :



V.3 Manipulation

On propose de tracer expérimentalement le diagramme de bifurcation de la bille.

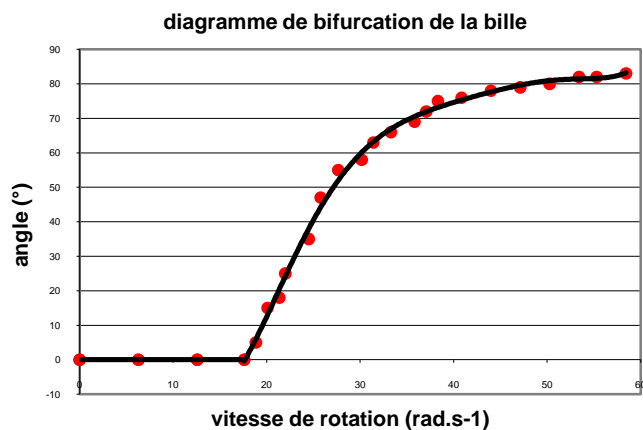
Montage :

La barrière photoélectrique permet de mesurer la période de rotation du guide circulaire. On conseille d'alimenter le moteur universel en continu afin d'avoir une vitesse de rotation la plus stable possible. Réglez au mieux la verticalité de l'axe de rotation du guide circulaire.

Mesures :

Mesurez l'angle que fait la bille en fonction de la vitesse angulaire de rotation du guide circulaire. Essayez de repérer le plus précisément possible la pulsation critique correspondant au changement d'attracteur. Tracez la courbe $\theta = f(\omega)$.

Voici à titre indicatif le résultat d'une série de mesure (on n'a représenté qu'un côté du diagramme, l'autre partie devant être symétrique) :



Comparez la valeur de la pulsation critique obtenue expérimentalement à la valeur attendue $\omega_c = \sqrt{g/R}$. Si le tableur utilisé le permet, on peut modéliser avec la valeur de ω_c que l'on a trouvé la partie du diagramme correspondant à la fonction $\theta_0 = \arccos(\omega_c^2 / \omega^2)$ et vérifier si le modèle recoupe les valeurs mesurées. Un moyen plus robuste de valider le modèle est de représenter $\cos\theta$ en fonction de $1/\omega^2$ et de déduire ω_c de la pente de la droite obtenue.

Conseil :

La mesure « à l'œil » de l'angle qu'adopte la bille pour une vitesse de rotation donnée est assez délicate. On peut faciliter cette mesure en filmant l'expérience à l'aide d'une webcam. On repasse ensuite le film (on conseille un lecteur type Synchronie ou Régressi pour une avance image par image) en s'arrêtant dès que l'on a une image où l'on voit la bille avec les graduations. On peut alors, pour une vitesse de rotation donnée, s'arrêter sur différentes images pour voir si la valeur de l'angle est reproductible. S'il y a des différences notables, on peut moyenner les mesures et estimer un encadrement de la valeur obtenue.

Remarque :

Si on traçait l'évolution de l'énergie potentielle de la bille à la pulsation critique grâce

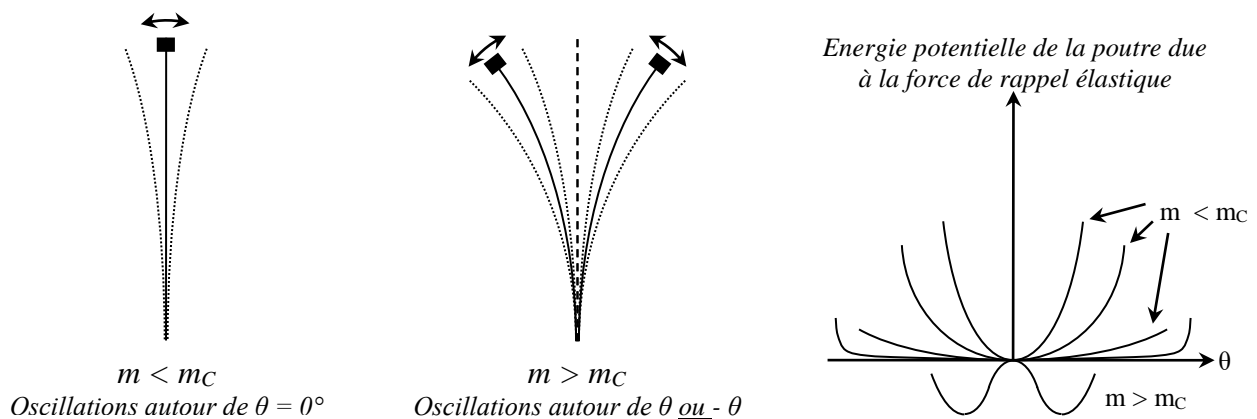
à l'expression établie précédemment, on verrait qu'elle présente alors un point méplat. Cela a des conséquences sur la vibration de la bille autour de sa position stable symétrique. Tant que l'on est à $\omega < \omega_c$, la courbe de l'énergie potentielle est incurvée \rightarrow si on pouvait écarter la bille de sa position d'équilibre, les forces de rappel auraient tendance à la ramener vers cette position et ce d'autant plus rapidement que la courbe d'énergie potentielle est « creuse ». On assisterait alors dans un référentiel lié au guide circulaire à une oscillation de la bille autour de sa position d'équilibre. Plus on se rapproche de la pulsation critique, plus la fréquence de cette vibration tend à diminuer en raison de l'aplatissement de la courbe d'énergie potentielle (les forces de rappels diminuent) jusqu'à s'annuler à la pulsation critique. On a alors l'apparition d'un mode mou de vibration : la fréquence de vibration de la bille autour de sa position stable symétrique s'annule à la bifurcation. Ce comportement est général pour un oscillateur au voisinage d'une bifurcation fourche mais n'est pas facile à étudier avec le dispositif de la bille. Le paragraphe suivant présente l'étude de ce phénomène sur l'exemple de la poutre d'Euler.

VI APPARITION D'UN MODE MOU DE VIBRATION AU VOISINAGE D'UNE BIFURCATION FOURCHE

[11], § 3.2, ch. 42 ; [13], ch. 3

VI.1 Principe de la manipulation

La première brisure spontanée de symétrie a été étudiée par Euler en 1744 sur le flambage d'une poutre. L'expérience consiste à appliquer à l'aide d'une masse m une force de plus en plus importante sur le haut d'une poutre verticale. Tant que la masse est inférieure à une certaine valeur (charge critique), la poutre reste verticale et conserve cette symétrie. Dès que l'on dépasse cette charge critique, la poutre s'incurve subitement. Le flambage est un phénomène d'instabilité élastique : à partir d'un certain seuil de compression, il se développe un moment parasite amplifié par les déformations et déplacements de la poutre chargée. Si la poutre a la forme d'une plaque, elle s'incurve alors suivant l'axe de la plus faible épaisseur et présente deux nouvelles positions d'équilibre possibles situées de part et d'autre de la position précédente. On a donc un comportement analogue à celui de la bille ou de l'âne mais on peut cette fois ci étudier facilement la période des oscillations de la poutre au voisinage de sa position d'équilibre.



Pour une poutre d'inertie constante encastree dans sa partie inférieure et soumise à son extrémité supérieure à un effort normal de compression, la charge critique à partir de laquelle il y a flambage est donnée par la formule d'Euler :

$$F_c = \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 E.I \quad \text{Avec } I = \frac{\ell.e^3}{12}$$

Dans ces formules, E est le module de Young du matériau et I est le moment quadratique de la poutre (e = épaisseur de la poutre ; ℓ = largeur).

Le phénomène qui nous intéresse ici est l'évolution de la fréquence des oscillations de la poutre autour de sa position d'équilibre. Au fur et à mesure que l'on augmente la charge sur la poutre, cette fréquence diminue pour s'annuler à la charge critique (oscillations infiniment lentes). Si, à partir de là, on continue à augmenter la charge, les oscillations reprennent avec une fréquence qui augmente de nouveau. L'évolution de la courbe d'énergie potentielle de la barre en fonction de la masse appliquée représentée ci-dessus explique qualitativement ce phénomène : lorsque m est très inférieur à m_C , on a un seul puits de potentiel qui est « assez creux » \rightarrow lorsque la règle s'écarte de sa position d'équilibre $\theta = 0^\circ$, la force de rappel est conséquente et donne une fréquence d'oscillation assez grande. Au fur et à mesure qu'on s'approche de la charge critique, le puits de potentiel s'aplatit pour préparer la transition avec le cas de figure $m > m_C \rightarrow$ la force de rappel diminue, ce qui provoque une augmentation de la période des oscillations. Lorsqu'on dépasse m_C , on a maintenant deux puits (\rightarrow oscillations autour de $\pm \theta$) dont la forme devient de plus en plus abrupte quand on augmente la charge \rightarrow la fréquence des oscillations se remet à croître. L'étude de la période en fonction de la charge appliquée au voisinage du flambage en utilisant une approximation quadratique pour les puits de potentiels conduit aux expressions suivantes (cf. [13] - attention cependant à la formule proposée avec ω_0 qui n'est pas fausse mais qui peut induire en erreur sur le type de loi à vérifier) ou L correspond à la longueur de la barre :

$$\begin{aligned} m < m_C : \omega^2 &= \frac{g}{L} \left(\frac{m_C}{m} - 1 \right) \\ m > m_C : \omega^2 &= 2 \frac{g}{L} \left(1 - \frac{m_C}{m} \right) \end{aligned}$$

On s'aperçoit alors que ω^2 est inversement proportionnel à la charge m lorsque $m < m_C$, puis inversement proportionnel à $2m$ après le flambage (une étude à charge m constante est aussi possible en faisant varier longueur de la poutre).

Un calcul plus rigoureux des modes d'oscillation de la poutre permet de montrer que la période des oscillations avant la bifurcation obéit à

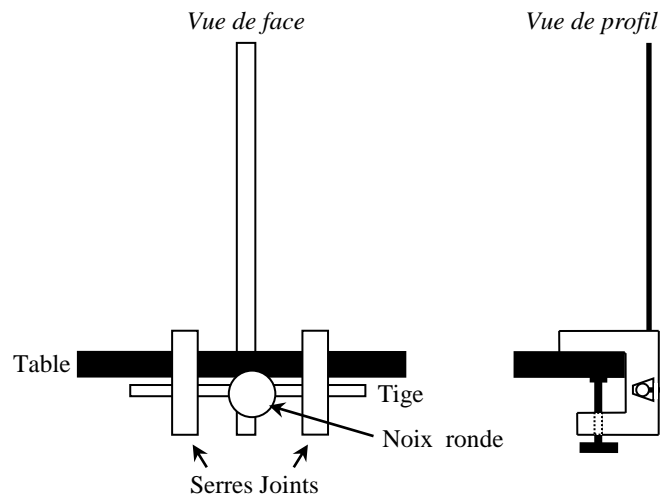
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left[\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{m_c}{m}} \tan \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{m_c}} \right) - 1 \right]},$$

Dont on peut déduire qu'en fait pour $m < m_C$

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{8} \frac{g}{L} \left(\frac{m_C}{m} - 1 \right).$$

VI.2 Montage

Il faut disposer d'une lame rectangulaire suffisamment fine et souple pour pouvoir observer le flambage avec des charges pas trop importantes. On utilise ici une lame servant à la mise en évidence des ondes stationnaires (à défaut, on peut utiliser une règle métallique souple de 1 mètre). Le point délicat de la manipulation est le réglage de la verticalité de la poutre. On conseille donc d'enlever la lame de son support habituel pour en réaliser un permettant l'ajustement de la verticalité de la lame :



Réglage de la verticalité de la poutre :

Ajustez la fixation de la poutre pour qu'elle soit à peu près verticale. Placez sur la partie supérieure de la lame une chaînette métallique. Fixez sur cette chaînette des masses à crochets de plus en plus lourdes (pour chaque charge, placez des masses de chaque côté de la lame de façon à conserver la symétrie du système et solidarisez-les à la lame avec un élastique) et notez qualitativement l'évolution de la période des oscillations. Rechercher grossièrement la masse qui provoque le flambage. Se placer alors légèrement en dessous de cette valeur et ajustez au mieux la verticalité de la poutre pour qu'elle oscille de façon symétrique par rapport à $\theta = 0^\circ$. Une fois ce réglage effectué, serrez fortement le blocage de la poutre.

Mesures :

Mesurez à l'aide d'un chronomètre la période des oscillations de la poutre de part et d'autre du flambage. Tracer l'évolution de ω^2 en fonction de $1/m$. Vérifier l'accord des résultats obtenus avec les formules du § VI.1. On fera attention au fait que la masse critique et les périodes des oscillations dépendent de la position des masses à l'extrémité de la barre : il est parfois difficile de retrouver les valeurs obtenues en préparation.

Remarque :

Une autre expérience permet d'aborder la notion de bifurcation fourche : l'oscillateur paramétrique → cf. BUP 747 pour la manipulation.

VII OSCILLATEUR ANHARMONIQUE A DOUBLE PUIITS

L'oscillateur de Van der Pol était non linéaire par son amortissement. Cette fois ci, on étudie un oscillateur non linéaire par sa force de rappel : l'oscillateur anharmonique à double puits. L'équation qui régit ce type d'oscillateur est de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \cdot \frac{dx}{dt} + a \cdot x + b \cdot x^3 = 0$$

Le potentiel dont dérive la force de rappel est de la forme $V(x) = \frac{1}{2} a \cdot x^2 + \frac{1}{4} b \cdot x^4$

On s'intéressera au cas où b est positif. L'allure du potentiel dépend alors du signe de a . Lorsque a est positif, l'oscillateur possède un seul attracteur $x = 0$ vers lequel il converge toujours quelque soit les conditions initiales appliquées. Lorsque a est négatif, l'oscillateur présente deux attracteurs $x = \pm \sqrt{-a/b}$. Dans ces conditions, l'équation différentielle de l'oscillateur correspond au mouvement

à une dimension d'une particule de masse unité freinée par une force de frottement visqueux $-\mu \cdot dx/dt$ dans un potentiel simulant un double puits symétrique. Elle peut donc décrire l'exemple de la bille dans les deux vallées symétriques séparées par un col introduit au § V.1 avec la prise en compte des frottements (le diagramme du potentiel présente approximativement la même évolution) → suivant les conditions initiales, le système (qui est déterministe) convergera en régime libre vers l'un ou l'autre des attracteurs.

VII.1 Etude en régime libre

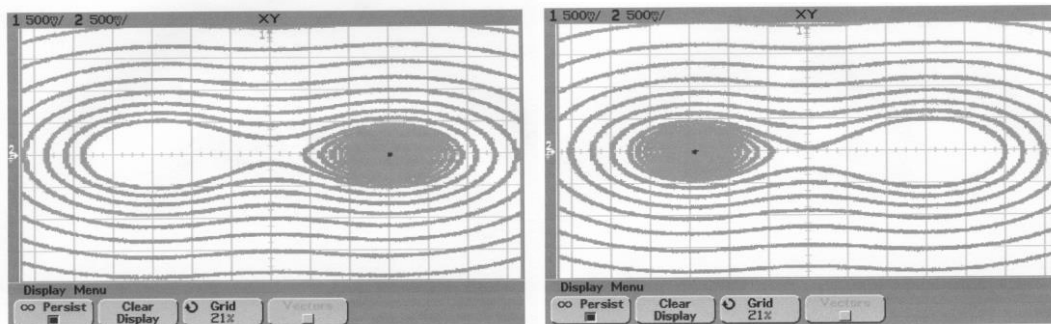
Dans ce cas, le système peut évidemment être vu comme un système dynamique autonome de dimension deux. En effet, en posant $x_1 = x$ et $x_2 = dx/dt$, on a :

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= F_1(X) = x_2 \\ dx_2/dt &= F_2(X) = -\mu \cdot x_2 - a \cdot x_1 - b \cdot x_1^3. \end{aligned}$$

Manipulations :

Cf. [2], p. 176 à 181.

Montrez l'allure du signal temporel, l'allure de son spectre et la trajectoire des phases dans le cas d'un amortissement faible suivant les conditions initiales imposées. Montrez l'existence des différents régimes : anharmonique à faible amplitude, anharmonique à forte amplitude puis oscillations dans les deux puits au delà. Voici à titre indicatif des portraits de phase correspondant au dernier cas de figure :



On peut préciser l'allure de ces trajectoires : au début, comme on utilise des conditions initiales éloignées des attracteurs, les trajectoires chevauchent périodiquement les deux puits car le système possède une énergie totale qui est encore supérieure à l'énergie potentielle correspondant au col entre les deux puits. On observe ainsi une trajectoire qui oscille entre les deux puits de potentiel. Progressivement, le système perd de l'énergie à cause du terme de frottement de l'équation différentielle → il plonge dans le relief du double puits de potentiel. Lorsque l'énergie mécanique du système passe en dessous de celle du col d'énergie potentielle, le système est capturé par l'un des deux puits et oscille alors à l'intérieur de celui-ci selon une trajectoire en forme de spirale qui converge vers le point fixe stable (l'attracteur) qui est au fond du puits. L'allure en spirale elliptique de la trajectoire au voisinage des points fixes stables confirme que ceux-ci sont des foyers stables. On peut considérer les conditions initiales de ces manipulations comme ayant un caractère pseudo-aléatoire vu le bruit électrique qui intervient lors du court-circuit du système qui initialise les trajectoires. Ce caractère aléatoire, associé au fait que le puits soit symétrique dans notre modèle, laisse penser que le système convergera vers l'un ou l'autre des points fixes avec un caractère aléatoire, ce qui est effectivement observé lors des expériences.

Visualisation du potentiel :

Ouvrez la boucle de rétroaction de l'oscillateur. Alimentez le dipôle non linéaire par un signal triangulaire basse fréquence (≈ 5 Hz). A la sortie du premier intégrateur, on a l'intégrale de x (= force) par rapport à t et donc par rapport à e (= position) car e est

proportionnel à t . On a donc une image du potentiel que l'on peut tracer en fonction de e (position) sur un oscilloscope en mode XY.

VII.2 Etude en régime forcé

On étudie cette fois ci la réponse du système à un terme de forçage sinusoïdal :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + a.x + b.x^3 = \Gamma \cos(\omega.t)$$

Ce système peut être vu comme un système dynamique non-autonome de dimension deux, ce qui marque une différence fondamentale avec le système libre qui était autonome :

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= F_1(X) = x_2 \\ dx_2/dt &= F_2(X, t) = -\mu.x_2 - a.x_1 - b.x_1^3 + \Gamma \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Cette fois-ci, la non invariance du système dans le temps va permettre aux trajectoires de se recouper dans l'espace des phases. C'est ce point précis qui va permettre l'apparition du chaos déterministe. On peut aussi voir ce système comme un système dynamique autonome à trois dimensions :

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= F_1(X) = x_2 \\ dx_2/dt &= F_2(X) = -\mu.x_2 - a.x_1 - b.x_1^3 + \Gamma \cos(\omega x_3) \quad \text{avec } x_3 = t \\ dx_3/dt &= F_3(X) = 1. \end{aligned}$$

Sous ce point de vue (étude des systèmes autonomes), la troisième dimension de l'espace des phases est une condition nécessaire à l'apparition du chaos déterministe. Pour les systèmes dynamiques autonomes (et tout système non autonome peut se ramener à un système autonome), à cause du déterminisme, les trajectoires dans l'espace des phases ne peuvent se couper. Si un tel point d'intersection existait, en le prenant comme condition initiale, on aurait deux avenir possibles pour le système, ce qui est contradictoire avec la notion de déterminisme.

VII.2.1 Courbe de résonance de l'oscillateur

Manipulation :

[2], p. 182 - 183

Observez simplement la résonance en faisant varier manuellement la fréquence du forçage (sans wobbler et sans détecteur de crête pour simplifier). Montrez le phénomène d'hystérésis en variant la fréquence dans les deux sens près de la résonance.

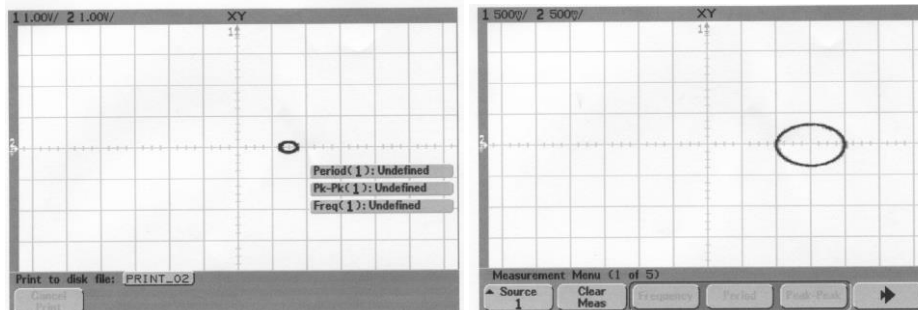
VII.2.2 Oscillations en régime forcé avec un forçage faible : Oscillations dans un seul puits

On étudie cette fois ci les trajectoires dans le plan de phase (x_1, x_2) du système (point de vue des systèmes non-autonomes). Le système va être paramétré par l'amplitude du forçage Γ . On étudie les trajectoires stationnaires (après relaxation des régimes transitoires) et leur évolution lorsque le paramètre de contrôle Γ augmente (en partant d'un forçage nul), tout cela étant fait à pulsation d'excitation constante. Le fait d'étudier les trajectoires stationnaires (ou plus rigoureusement asymptotiques) dans l'espace des phases revient en pratique à n'étudier que les points fixes stables et les cycles limites stables du flot dynamique non-autonome considéré. Nous allons donc nous intéresser uniquement aux bifurcations de point fixe et de cycle limite (ce qui est déjà un domaine très riche).

Manipulations :

[2], p. 185 - 188

Lorsqu'il n'y a pas de forçage ($\Gamma = 0$), les trajectoires stationnaires de l'oscillateur se réduisent simplement aux deux points fixes du système dynamique libre; le système est dans l'un ou l'autre de ces états en fonction de son passé. Lorsque le forçage est enclenché à partir de la valeur nulle de Γ , on observe tout d'abord l'apparition d'un cycle limite stable d'allure ellipsoïdal qui entoure le point fixe du système libre :

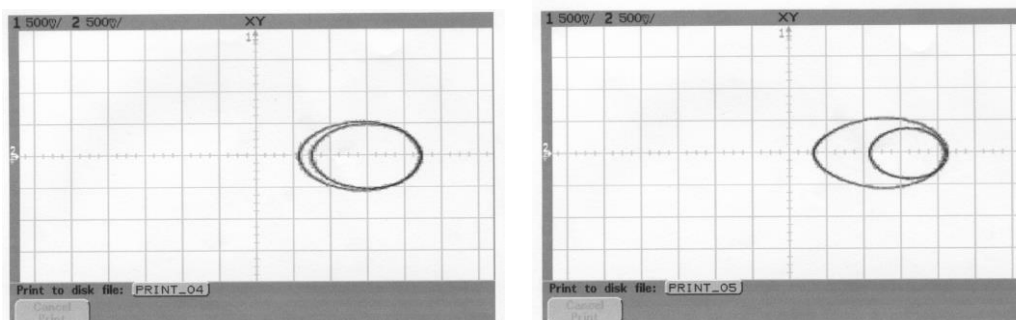


La présence de ce cycle induit par symétrie la présence d'un autre cycle limite stable symétrique autour de l'autre point fixe du système libre. Ainsi, le passage de Γ nul, à des valeurs de Γ non nulles (mais faibles) a vu la déstabilisation de deux points fixes stables au profit de l'apparition de deux cycles limites stables. On est en présence d'une bifurcation de Hopf puisqu'un point fixe stable perd sa stabilité en donnant naissance à un cycle limite stable dont le rayon augmente en $\sqrt{\Gamma}$ (cf. § 5.1 et [12], chapitre 2). On peut ici simplement se rendre compte que le rayon du cycle limite augmente avec Γ .

On peut dans un deuxième temps s'intéresser à l'aspect fréquentiel du signal oscillant. On observe principalement un pic important à la fréquence de forçage ainsi que des harmoniques (manifestation du caractère non linéaire de l'oscillateur). Ainsi, le cycle limite est parcouru avec la même fréquence que la fréquence de forçage. Le forçage fournit donc de l'énergie au système qui lui permet d'osciller dans le puits de potentiel de façon permanente en compensant (exactement en moyenne sur un cycle) les pertes dues à la force de frottement visqueuse.

VII.2.3 Cascade sous harmonique - Transition vers le Chaos

Lorsqu'on dépasse une certaine valeur de l'excitation, on constate une deuxième bifurcation : on observe dans l'espace des phases l'apparition d'un cycle limite composé de deux boucles, qui sont proches l'une de l'autre, et toujours centré approximativement autour d'un des points fixes du système libre. Le cycle limite de départ semble, en fait, s'être dédoublé (tout ce qui est dit a lieu évidemment de façon symétrique dans les deux puits, mais nous ne pouvons expérimentalement observer le phénomène que dans un des deux puits à la fois) :



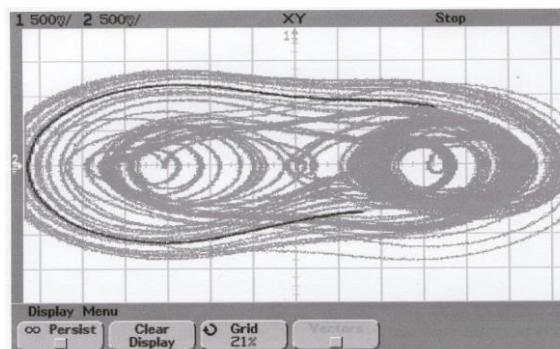
L'étude spectrale du signal fait apparaître un pic correspondant à la fréquence d'excitation, mais on voit aussi apparaître une sous-harmonique à la fréquence moitié. Cette dernière constatation nous montre que la double boucle du cycle limite est parcourue avec une fréquence moitié de la

fréquence d'excitation. On a donc eu un doublement de période. Ce type de bifurcation dans laquelle un cycle limite stable de période T perd sa stabilité et donne naissance à un cycle limite stable de période double $2T$ est analogue à une bifurcation de Hopf. Si on augmente progressivement l'amplitude du forçage, la double boucle se déforme (figure de droite ci-dessus) ; une des boucles devient de plus en plus grande tandis que l'autre rétrécit. A partir d'un certain seuil, la courbe dans l'espace des phases se dédouble une nouvelle fois. La période du signal double et ainsi de suite.

VII.2.4 Régime Chaotique

Cf. [2], p. 185 pour la manipulation.

On atteint ce régime lorsque l'excitation à une amplitude suffisante pour franchir le col. La trajectoire dans l'espace des phases devient chaotique :



Sur le spectre en fréquence, on peut maintenant observer un continuum, même si on discerne encore un pic correspondant à la fréquence d'excitation f . **Le fait que toutes les fréquences soient présentes dans le signal est une des caractéristiques du chaos.** On vient donc d'assister à une transition vers le chaos dans un système déterministe. Ce que l'on vient de mettre en évidence sur l'exemple d'un oscillateur anharmonique forcé est, en fait, un comportement que l'on retrouve souvent dans les systèmes non-linéaires de dimension supérieure à trois. C'est ce qu'on appelle la cascade de doublement de période. Cette cascade intervient pour des systèmes dont le flot dépend d'un paramètre de contrôle Γ . Pour Γ faible, on observe un cycle limite stable dans l'espace des phases. Il intervient une première bifurcation en Γ_0 qui se traduit par un dédoublement du cycle limite et un doublement de sa période. Ce phénomène se reproduit lorsque Γ augmente en $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3...$. Les valeurs Γ_i du paramètre pour lesquelles les bifurcations ont lieu sont de plus en plus proches et elles tendent vers une limite Γ_∞ . C'est ce phénomène que l'on appelle cascade de doublement de période. Au delà de Γ_∞ , apparaît un régime chaotique caractérisé par la présence de toutes les fréquences dans le spectre du signal d'observation et par une trajectoire qui semble explorer totalement une partie de l'espace des phases de façon anarchique. Cette cascade a donc abouti à une transition vers le chaos du système.

VII.2.5 Remarque

On parle ici de chaos déterministe car les phénomènes mis en jeu sont régis par des lois parfaitement déterminées. Dans ces conditions, si on pouvait répéter les expériences avec des conditions initiales rigoureusement identiques, on obtiendrait à chaque fois les mêmes résultats. C'est là une différence fondamentale avec un phénomène aléatoire. Il est cependant impossible dans la pratique de répéter strictement une expérience avec les mêmes conditions de départ. Dans ces conditions la moindre variation des conditions initiales engendre à plus ou moins long terme une différence de comportement qui rend impossible toute prédiction à long terme. Cette sensibilité aux conditions initiales est typique des systèmes chaotiques. Tous ces concepts peuvent facilement s'appréhender avec des suites récurrentes. Ce sont des systèmes on ne peut plus déterministes : on a une valeur initiale U_0 et une relation reliant U_{n+1} à U_n . Ainsi, toutes

les valeurs de la suite sont parfaitement déterminées et donc prédictibles. On peut prendre par exemple la suite suivante appelée suite logistique :

$$U_0$$

$$U_{n+1} = a.U_n(1 - U_n)$$

On peut faire des simulations avec un tableur en prenant systématiquement $U_0 = 0,6$ et en faisant varier la valeur du paramètre a .

Illustration du chaos déterministe :

Si on représente le comportement de la suite pour $a = 3,75$, le comportement observé a l'air complètement imprévisible, comme s'il était le fruit du hasard. Pourtant, il est parfaitement déterminé par la relation de récurrence qui définit U_n et la valeur de U_0 . Pour s'en convaincre, il suffit de relancer le calcul de U_n en gardant les mêmes valeurs : on obtient toujours le même résultat \rightarrow le comportement de la suite n'est donc pas aléatoire. Ce comportement, qui prend une allure aléatoire, et qui pourtant provient d'un phénomène entièrement déterministe, correspond au chaos.

Sensibilité aux conditions initiales :

Conservez la valeur $a = 3,75$ et calculez les termes de la suite pour $U_0 = 0,61$; $0,601$; $0,6001$; $0,60001$; $0,600001$; $0,6000001$. On s'aperçoit alors que la suite présente, à plus ou moins long terme, une évolution différente. Citons à ce propos une remarque d'Henri Poincaré dans « Science et Méthodes » (1908) : « Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux. Une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit ... Une cause très petite qui nous a échappé, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard ». C'est ce qui rend par exemple impossible toute prévision fiable à plus ou moins long terme de la météo. Quelque soit la complexité du modèle et la puissance des calculateurs utilisés, l'écart le plus infime dans les conditions de départ aboutira inexorablement à des différences. Le caractère chaotique de la météorologie du fait de l'extrême sensibilité aux conditions initiales fut découvert par le météorologue Edward Lorenz en 1961 au M.I.T. Il en déduisit la métaphore devenue célèbre de l'effet Papillon connue sous la forme : le battement d'aile d'un papillon au Brésil peut déclencher une tornade au Texas. Il faut cependant se méfier de cette énoncée qui semble attribuer un caractère causal au battement d'aile (ce serait le battement d'aile du papillon qui déclencherait la tempête) ce qui est inexact. Lorenz écrivit cette proposition sous la forme interrogative en ajoutant par sécurité : « Si un seul battement d'ail d'un papillon peut avoir pour effet le déclenchement d'une tornade, alors, il en va ainsi également de tous les battements précédents et subséquents de ses ailes, comme de ceux de millions d'autres papillons, pour ne pas mentionner les activités d'innombrables créatures plus puissantes, en particulier de notre propre espèce. Si le battement d'ail d'un papillon peut déclencher une tornade, il peut aussi l'empêcher. ».

Illustration de l'effet Papillon :

On peut encore utiliser la suite logistique en prenant cette fois-ci $U_0 = 10^{-9}$ avec $a = 2$; 3 ; 4 ou $4,5$. En observant le comportement de ces suites, on observe à plus ou moins long terme une convergence ($a = 2$), une périodicité ($a = 3$), un désordre ($a = 4$) ou une divergence ($a = 4,5$).

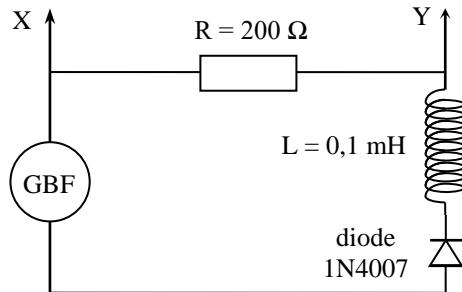
VIII CHAOS DANS UN SYSTEME DISSIPATIF

[14], p. 64

Le circuit proposé est simple à mettre en œuvre et permet de faire une démonstration d'une transition vers le chaos par une cascade de doublement de période. Il s'agit donc d'un scénario

identique à celui qui peut être observé dans le cas de l'oscillateur anharmonique à double puits. Il existe néanmoins d'autres scénarios de transition vers le chaos (cf. [15] pour une introduction simple et rapide). La modélisation de l'expérience est néanmoins difficile : cette expérience ne peut donc servir que pour illustrer qualitativement la notion de chaos.

Montage :



GBF : signal sinusoïdal $\approx 2-2,2$ Mhz
Amplitude variable (paramètre de contrôle)

Visualisez les signaux X et Y avec un oscilloscope numérique.

Le dispositif est un circuit RL-diode forcé. La non linéarité est introduite par la diode. Le paramètre de contrôle dans ce système est l'amplitude de la tension de forçage. Tant que cette amplitude est faible, la réponse est sinusoïdale. Lorsqu'on augmente l'amplitude de la tension d'excitation, le signal observé double, puis quadruple de période. Si on observe les portraits de phase (oscilloscope en mode XY) on peut voir le dédoublement des orbites comme pour l'oscillateur anharmonique à double puits. Le mieux est d'utiliser un oscilloscope numérique de manière à pouvoir faire la FFT du signal et observer les pics des sous-harmoniques qui apparaissent successivement.

Lorsqu'on augmente suffisamment la tension de forçage, on peut observer des comportements chaotiques. La mise en évidence peut se faire soit en XY : dans ce cas le mieux est de partir d'un régime périodique, de « zoomer » sur une zone de l'orbite puis d'augmenter peu à peu le paramètre de contrôle de manière à observer l'apparition de boucles supplémentaires jusqu'à l'apparition d'une figure plus complexe : au lieu de s'aligner le long de quelques lignes, les points s'étalent sur de larges zones qu'ils visitent de manière irrégulière. Ce que l'on voit alors correspond à un attracteur étrange : c'est un attracteur car le système, déterministe, va converger vers cet objet pour tout un ensemble de conditions initiales. Par contre c'est un objet plus compliqué qu'un point, une ellipse ou un tore : entre autres caractéristiques, c'est un objet fractal : sa dimension n'est pas entière.

Une autre manière d'observer la transition vers le chaos est d'observer l'évolution du spectre : lorsque le système est périodique, le spectre est formé de pics. On peut notamment observer l'apparition des sous-harmoniques pour les premiers doublements de période lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle. Le régime chaotique est caractérisé par un spectre au moins en partie continu, même si un certain nombre de pics restent visibles, notamment celui de la fréquence d'excitation.

Le mieux est de basculer entre les trois visualisations à l'oscilloscope : signal temporel, portrait de phase (XY) et FFT.

Lorsqu'on continue d'augmenter le paramètre de contrôle, on observe une succession de régimes chaotiques et de régimes périodiques : au-delà de la première zone de chaos, il existe des « fenêtres de périodicité » correspondant à des régimes périodiques. La fenêtre la plus facile à observer est la fenêtre 3T. Ces fenêtres de périodicité peuvent aussi s'observer en utilisant la suite logistique introduite dans la partie précédente. Ainsi, en prenant par exemple $a = 3,83$, on pourra observer la fenêtre 3T.

Bibliographie :

- [1] : Duffait : Expériences d'électronique à l'agrégation
- [2] : Michel Krob : Electronique expérimentale
- [3] : Quaranta III
- [4] : Quaranta IV
- [5] : BUP 727 p. 1047
- [6] : BUP 744
- [7] : BUP 785
- [8] : BUP 787
- [9] : L'ordre du chaos : Pour la science
- [10] : Guyon : Hydrodynamique ; Chapitre 2
- [11] : Jean Sivardière : La symétrie en Math., Physique et Chimie
- [12] : Cours Internet DEA sur le Chaos de Vincent Croquette :
<http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/croquette/index.html>
- [13] : DJ. Barber ; R. London : An Introduction to the Properties Of Condensed

Matter.

- [14] : Dossier Pour La Science n°6 : Le Chaos.
- [15] : Panorama de la physique, sous la direction de Gilbert Pietryk ; p. 214 à 219.

