

RESONANCE

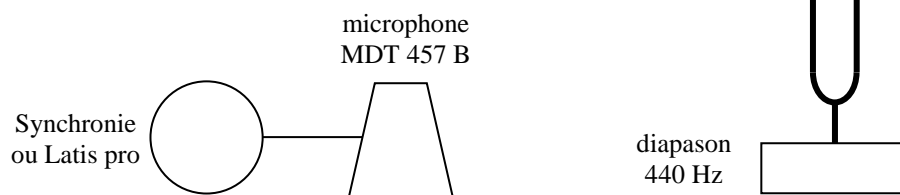
I INTRODUCTION

La résonance est un phénomène se produisant lorsqu'un système oscillant est excité en régime permanent par un signal périodique dont la fréquence est égale à une fréquence propre du système. L'énergie absorbée par le système est alors maximale et il répond à l'excitation de manière privilégiée. Les fréquences propres peuvent être en nombre fini (systèmes à nombre fini de degrés de liberté) ou en nombre infini (suite dénombrable en général) dans le cas des systèmes avec propagation. On peut commencer par étudier la résonance d'un système à un degré de liberté. On peut aussi s'intéresser à un système à plusieurs degrés de liberté (oscillateurs couplés à deux degrés de liberté par exemple), aux phénomènes de résonance pouvant apparaître avec des ondes ou à la résonance paramétrique. Le sujet est donc vaste et il faut faire des choix.

II MISE EN EVIDENCE DU PHENOMENE

Une expérience simple avec des diapasons permet d'introduire rapidement les points importants du phénomène de résonance (notion de fréquence propre, influence de la fréquence d'excitation sur la réponse du système).

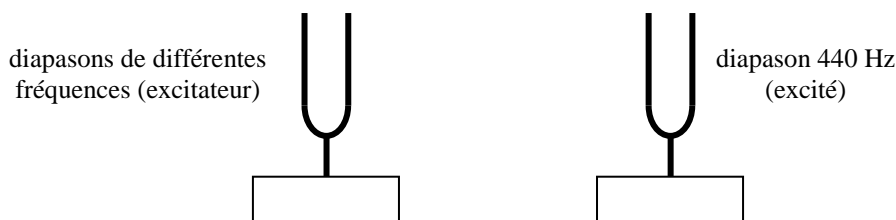
Réponse d'un diapason à une percussion :



Il faut une fréquence d'échantillonnage suffisamment grande pour décrire correctement une période et prendre assez de points pour en observer plusieurs \rightarrow on peut utiliser $T_{\text{éch}} = 20 \mu\text{s}$ et $N = 1\,000$ points par exemple. On excite le diapason en le frappant avec un marteau et on observe le signal obtenu : le système répond de manière harmonique à une fréquence bien précise, sa fréquence propre, qu'on peut obtenir avec les mesures automatiques du logiciel.

Excitation du diapason à différentes fréquences :

On peut l'exciter en utilisant d'autres diapasons ou un Haut-Parleur relié à un GBF.



Dans le premier cas, on place les diapasons en vis-à-vis, on frappe l'excitateur à l'aide d'un marteau, on l'arrête à la main et on écoute la réponse du diapason de 440 Hz. On répète cette expérience avec plusieurs excitateurs (256, 320, 440 Hz) pour voir les différences. On ne doit entendre pratiquement aucun bruit provenant du diapason excité, sauf lorsque l'excitateur est un 440 Hz \rightarrow La réponse du diapason excité est très faible sauf lorsque la fréquence excitatrice

correspond à sa fréquence propre. Ce phénomène correspond à la résonance. On peut introduire qualitativement la notion d'acuité de la résonance en désaccordant l'excitateur à l'aide d'une masselotte prévue à cet effet. Un désaccord léger suffit pour faire atténuer fortement la réponse, signe d'une résonance aigue.

III OSCILLATEUR SINUSOIDAL AMORTI ET LINEAIRE EN REGIME SINUSOIDAL FORCE

Un système peut être soumis à différentes actions. La réponse à une excitation sinusoïdale est particulièrement importante pour les systèmes à réponse linéaire puisqu'ils obéissent au principe de superposition → comme toute excitation peut se décomposer en série de Fourier (série discrète si l'excitation est périodique, continue dans le cas contraire), la réponse de ces systèmes à une excitation quelconque est la somme des réponses aux fréquences qui la compose.

III.1 Préliminaires

On rappelle les principaux résultats sur l'étude des oscillateurs sinusoïdaux amortis à un degré de liberté en régime sinusoïdal forcé. L'équation d'un tel oscillateur est de la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t$$

La solution générale de cette équation est de la forme $x(t) = x_{transitoire}(t) + x_{permanent}(t)$. Au bout d'un temps suffisamment long devant la constante de temps du système, la seule solution non nulle est celle correspondant au 2nd membre $x_{permanent}(t) = a \cos(\omega t + \varphi_a)$. Dans tout ce qui suit, le régime transitoire est supposé terminé (il faut s'en assurer dans la pratique, surtout pour les oscillateurs mécaniques faiblement amortis).

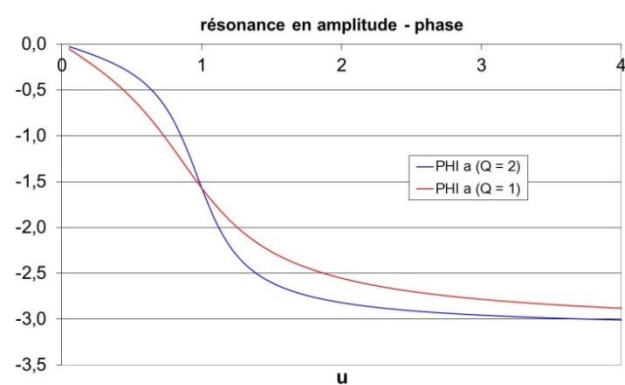
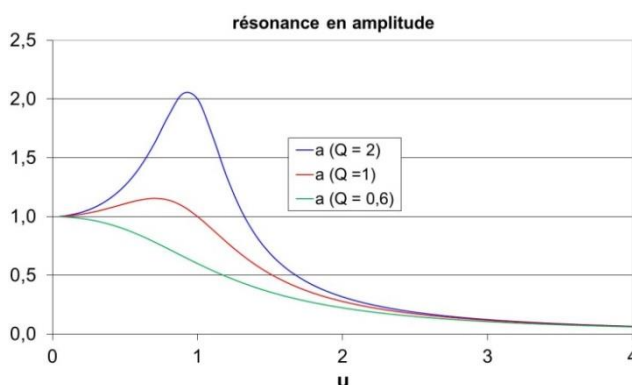
III.1.1 Réponse en amplitude

La solution du régime permanent s'obtient en utilisant la représentation complexe. On met l'excitation sous la forme $Ae^{j\omega t}$ et on recherche une solution du type $x = a \cdot e^{j\omega t}$ avec $a = |a|e^{j\varphi_a}$. La réponse en amplitude est alors :

$$a = \frac{A/\omega_0^2}{(1 - u^2) + \frac{j u}{Q}} \quad \text{avec la pulsation réduite} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} \quad \text{le facteur de qualité}$$

D'où un module et un déphasage de l'amplitude par rapport à l'excitation :

$$|a| = \frac{A/\omega_0^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}} \quad \varphi_a = -\arctg\left(\frac{u}{Q(1 - u^2)}\right)$$



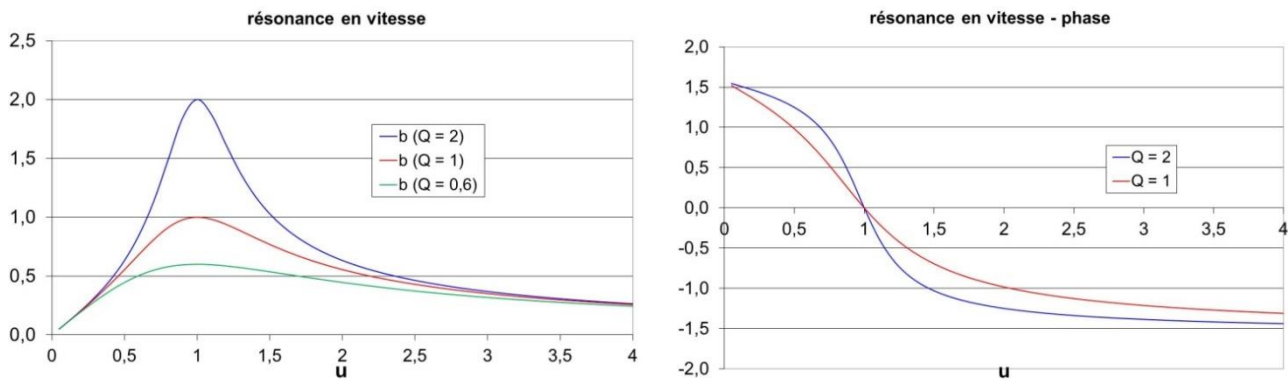
L'étude de cette fonction montre qu'elle passe par un maximum pour $u = \sqrt{1 - 1/2Q^2}$ si $Q > 1/\sqrt{2}$. On a alors résonance en amplitude. L'amplitude est en phase avec l'excitation lorsque $\omega \ll \omega_{ra}$, en opposition de phase lorsque $\omega \gg \omega_{ra}$ et en quadrature à la résonance. Lorsque le système a un facteur de qualité élevé ($Q \gg 1 \leftrightarrow$ oscillateur faiblement amorti), on a $u \approx 1$ soit $\omega \approx \omega_0$ et l'amplitude vaut alors $a_{max} \approx AQ/\omega_0^2$.

III.1.2 Réponse en vitesse

Si on s'intéresse à \dot{x} , on a la réponse suivante :

$$b = j\omega a = \frac{A/\omega_0}{\frac{1}{Q} + j\left(u - \frac{1}{u}\right)} \quad \text{avec} \quad |b| = \frac{A/\omega_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(u - \frac{1}{u}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi_b = \arctg\left(Q \frac{1 - u^2}{u}\right)$$

La résonance en vitesse a lieu pour $u = 1$, soit $\omega = \omega_0$ et ce quel que soit Q ($b_{max} = AQ/\omega_0$)). Les fréquences correspondant à une amplitude $b = b_m/\sqrt{2}$ vérifient la relation $\omega_0/(\omega_2 - \omega_1) = Q$. Enfin, le déphasage de la vitesse par rapport à l'excitation vaut $\varphi_b = \varphi_a + \pi/2$.

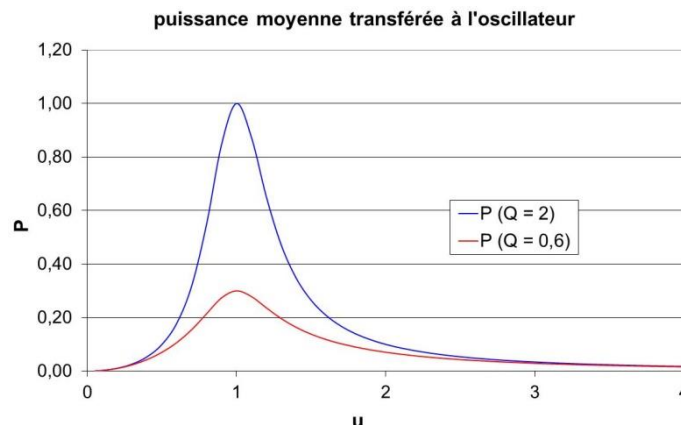


III.1.3 Puissance moyenne transférée à l'oscillateur

La puissance transférée par l'excitateur à l'oscillateur a pour expression $P = F \cdot v = A \cos \omega t \times |b| \cos(\omega t + \varphi_b)$; la puissance moyenne vaut par conséquent :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} A |b| \cos \varphi_b = \frac{1}{2} \frac{A^2/\omega_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(u - \frac{1}{u}\right)^2}} \cos \varphi_b$$

Elle est nulle pour les pulsations extrêmes et passe par un maximum pour $\omega = \omega_0$:



III.1.4 Analyse des résultats

Il y a une différence notable entre les réponses en vitesse et en amplitude. La première passe toujours par un maximum, et ce quel que soit l'amortissement. De plus, ce maximum a toujours lieu lorsque la pulsation excitatrice ω correspond à la pulsation propre ω_0 du système, donc à un moment où la puissance moyenne transférée à l'oscillateur est maximum. La réponse en amplitude quant à elle ne passe pas toujours par un maximum (il faut avoir $Q > 1/\sqrt{2}$), et lorsqu'il y en a un et que Q n'est pas infini, il se produit à $\omega_{ra} \neq \omega_0$, donc à une pulsation où la puissance transférée n'est pas maximum. La définition de la résonance donnée en introduction¹ ne s'applique donc en toute rigueur qu'à la réponse en vitesse. On ne peut cependant pas ignorer complètement le comportement en amplitude, surtout en mécanique où c'est la réponse la plus facilement observable. Il faut aussi remarquer que le maximum des réponses en amplitude et en vitesse a lieu \approx à la même fréquence lorsque Q est élevé.

III.2 Système électrique : circuit RLC série

L'équation électrique de ce circuit est :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U \cos \omega t$$

Elle est formellement identique à l'équation générale du § précédent avec les coefficients caractéristiques :

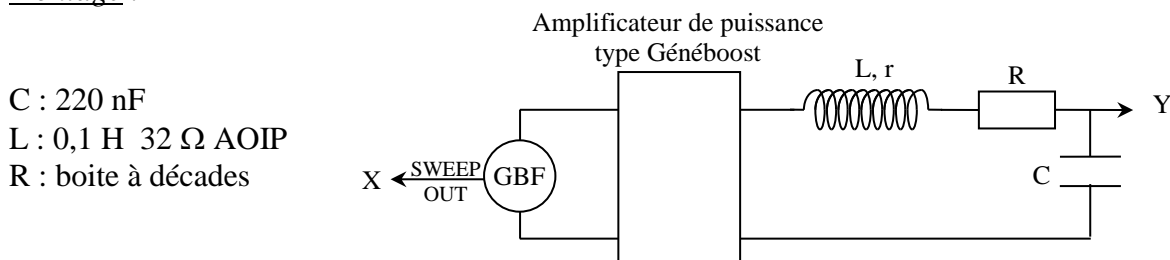
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \lambda = \frac{R}{2L} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

La charge q est équivalente à l'amplitude donc la réponse en amplitude s'observe aux bornes du condensateur ($a \equiv CU_C$).

L'intensité i est équivalente à la vitesse donc la réponse en vitesse s'observe aux bornes de la résistance ($b \equiv U_R/R$).

III.2.1 Réponse en amplitude

Montage :



On peut prendre d'autres valeurs pour L et C . Celles qu'on propose donnent une fréquence de résonance d'environ 1000 Hz correspondant généralement à une des fréquences de mesure des RLC mètre les plus courants. On intercale un amplificateur de puissance entre le GBF et le circuit pour pouvoir étudier la réponse du circuit lorsqu'il est faiblement amorti (R faible).

¹ C'est la définition d'usage en physique moderne où l'on privilégie le transfert maximal d'énergie moyenne entre l'excitateur et l'oscillateur pour définir la résonance.

Réalisation d'une wobbulation :

La plupart des GBF disposent d'une fonction wobbulation². Elle permet de sortir un signal d'amplitude constante mais de fréquence variable³, accompagné sur une autre voie⁴ d'un signal proportionnel à la fréquence instantanée. On peut alors visualiser directement une image de la fonction de transfert d'un circuit sur un oscilloscope numérique. Il suffit d'envoyer la réponse du circuit en voie Y, le signal proportionnel à la fréquence en voie X, et de mettre l'oscilloscope en mode XY avec un affichage persistant. Ce procédé demande un certain savoir-faire (consulter la notice du GBF pour l'utilisation de la wobbulation) mais il permet d'observer très rapidement le comportement du circuit lorsqu'on change un paramètre.

Rôle de l'amplificateur :

On peut commencer par faire une wobbulation lente entre ≈ 100 et 2000 Hz avec $R = 40 \Omega$ pour le circuit d'étude **en utilisant un signal d'entrée de $2 V_{PK-PK}$ maximum pour éviter tout risque de destruction de la boîte à décade⁵** ! On observe alors un phénomène de résonance en amplitude assez marqué. On peut vérifier que le signal qui alimente le circuit (celui qui sort de l'amplificateur de puissance) reste constant en amplitude⁶ en l'envoyant sur la voie Y de l'oscilloscope. On peut faire le même type d'observation en alimentant directement le circuit avec le GBF pour comprendre le rôle de l'amplificateur : on s'aperçoit alors que le signal du GBF « s'écroule » lorsqu'on passe sur la fréquence de résonance⁷.

Influence du coefficient de qualité Q :

On remet le signal aux bornes du condensateur sur la voie Y de l'oscilloscope et on observe la courbe de réponse du circuit pour différentes valeurs de Q réglée par R :

- $R = 40 \Omega$ ($Q \approx 10$) : on observe une résonance assez aiguë. On peut repérer la position du pic de résonance sur l'écran.

- $R = 500 \Omega$ ($Q \approx 1,3$) : la résonance est plus « plate » et le pic de la résonance s'est légèrement déplacé vers les basses fréquences.

- $R = 1000 \Omega$ ($Q \approx 0,65 < 1/\sqrt{2}$) : l'amplitude ne passe plus par un maximum cette fois ci. On peut éventuellement rechercher la valeur de R correspondant à la disparition du maximum (détermination délicate) et comparer à la valeur théorique sans oublier de **tenir compte de la résistance de la bobine** dans le calcul de Q.

On peut arrêter la wobbulation et rechercher manuellement la fréquence de résonance pour $R = 40$ et 500Ω et comparer le résultat à la fréquence propre du circuit. On peut aussi regarder le déphasage entre l'excitation et la tension U_C à la résonance ; il doit être proche de $-\pi/2$ pour $R = 40 \Omega$ (U_C en retard par rapport à U) et inférieure à cette valeur pour $R = 500 \Omega$.

² Notée SWEEP en anglais.

³ Il vaut mieux utiliser un GBF analogique car les GBF numériques donnent une wobbulation discrétisée.

⁴ Souvent notée SWEEP OUT.

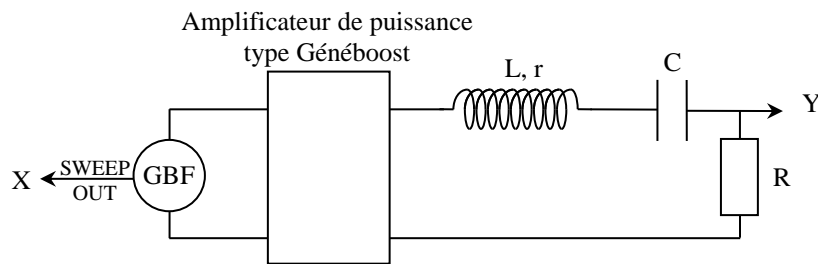
⁵ L'impédance du circuit passe par un minimum qui vaut $R + r$ à la résonance. Le courant maximum vaut alors $U_{\max}/(R+r) = 1V/(72 \Omega) = 14 \text{ mA}$ avec les valeurs proposées, une intensité qui est sans risque pour la boîte à décade.

⁶ Cette condition est nécessaire pour affirmer que le signal aux bornes du condensateur est une image de la fonction de transfert du circuit.

⁷ Les GBF ont une impédance de sortie de 50Ω en général \rightarrow Le circuit RLC faiblement amorti a une impédance trop faible à la résonance (72Ω ici) pour qu'on puisse considérer le générateur comme une source idéale de tension (impédance de sortie négligeable) \rightarrow le GBF seul est incapable d'alimenter correctement le montage lorsqu'on est à la résonance.

III.2.2 Réponse en intensité

Il suffit de faire la permutation suivante :



On reprend l'expérience précédente en resserrant la wobble. Cette fois-ci, la résonance a toujours lieu à la fréquence propre ω_0 , même lorsque l'amortissement est important ($R = 1000 \Omega$ par exemple). On peut arrêter la wobble et remplacer le GBF par un GBF numérique pour rechercher manuellement la résonance. L'observation à l'oscilloscope du déphasage entre U_R et U permet de vérifier qu'il est nul (conclure quant au transfert de puissance). On peut se servir de cette propriété pour mesurer précisément la fréquence de résonance pour $R = 50 \Omega$, et comparer le résultat obtenu à la fréquence propre du circuit.

III.2.3 Mesure du facteur de qualité

C'est une mesure importante car le facteur de qualité quantifie l'acuité de la résonance, donc il en est une caractéristique. Mesurer précisément Q n'est pas si facile. On trouve souvent des différences notables avec le résultat attendu. Il faut manipuler soigneusement, ce qui prend du temps. On conseille donc de ne faire qu'une mesure.

Manipulation :

On doit évidemment faire la mesure sur la réponse en intensité. On conseille une valeur intermédiaire pour Q (≈ 5). On se place à la résonance par la méthode de Lissajous. On mesure alors U_R avec un multimètre précis. Si l'appareil permet les mesures en dB, on affecte 0 dB à la valeur lue pour U_R à la résonance. On recherche ensuite les fréquences $f_1 < f_0$ et $f_2 > f_0$ correspondant précisément à -3 dB. On en déduit Q par la relation :

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

On peut comparer le résultat obtenu à la valeur calculée $= L\omega_0/R$ en n'oubliant pas de tenir compte de la résistance r de la bobine à la fréquence considérée.

III.3 Etude de la résonance série d'un quartz d'horlogerie

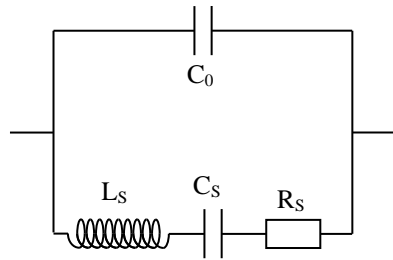
[6]

III.3.1 Introduction

Les résonateurs à quartz sont l'exemple typique de circuits résonants à très fort facteur de qualité. Ceux utilisés en horlogerie sont conçus pour fournir une fréquence très stable à 32768 Hz permettant l'obtention d'un signal à exactement 1 Hz après 15 divisions de la fréquence par un facteur 2, (cf. Montage « Mesure des Fréquences temporelles »).

Modélisation électrique :

Un résonateur à quartz est, très schématiquement, une lame de quartz avec des faces métallisées \rightarrow il est électriquement équivalent à un condensateur C_0 . Pour tenir compte des caractéristiques piézo-électriques du cristal en régime dynamique, on ajoute un circuit RLC série en parallèle à C_0 :



Si C_0 représente réellement une capacité (deux conducteurs séparés par un isolant), les éléments motionnels R_s , L_s et C_s n'ont en revanche pas de réalité physique. Ce sont des équivalents électriques représentant le couplage électromécanique dans le matériau lié à l'effet piézoélectrique (ce type d'équivalence se rencontre aussi dans l'étude des haut-parleurs). L'étude de ce modèle montre (cf. [3], p. 389 ou [6], p. 2042) que son impédance passe successivement par un minimum correspondant à la résonance du circuit RLC série, puis par un maximum (anti résonance parallèle). Les fréquences correspondant à ces extrema valent respectivement :

$$f_{rs} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_s}} \quad \text{et} \quad f_{arp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s \frac{C_0 C_s}{C_0 + C_s}}}$$

On a typiquement les valeurs suivantes pour les quartz fonctionnant à 32768 Hz :

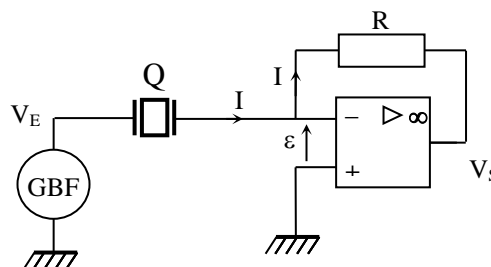
C_0	R_s	C_s	L_s	Q_s
2-3 pF	40 k Ω maximum	2-3 fF	7 000 H	50 000 minimum

On voit immédiatement que les constantes motionnelles ne correspondent pas aux valeurs usuelles des composants électriques : C_s est extrêmement faible alors que l'inductance est énorme (ceci résulte de la très grande élasticité du matériau). Par ailleurs, on peut remarquer que C_s est beaucoup plus petit que C_0 . Cela entraîne une très grande proximité entre les fréquences de résonance et d'antirésonance (on peut le vérifier par le calcul).

III.3.2 Principe du montage

[6], p. 2029

L'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire car il est rétro actionné par la résistance R . On a donc $\varepsilon = 0$ V et $V_- = 0$ V car la patte + est relié à la masse \rightarrow la tension aux bornes du Quartz est directement la tension V_E du GBF.



Le courant I circulant dans le quartz va intégralement dans R car l'impédance d'entrée de l'amplificateur opérationnel est énorme. On a donc $V_S - V_- = V_S = -R \cdot I \rightarrow V_S$ est une image du courant circulant dans le quartz à R et au signe près. L'amplificateur opérationnel associé à la résistance R réalise par conséquent une conversion courant-tension. Le courant étant maximal à la résonance série, l'amplitude de V_S doit donc passer un maximum à cette fréquence.

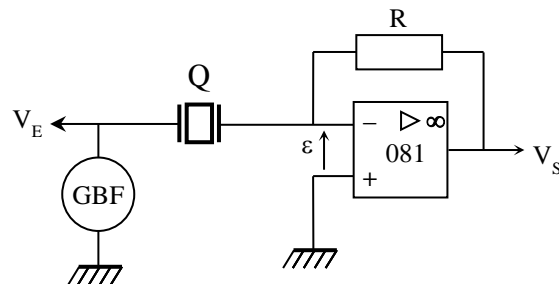
III.3.3 Réalisation pratique

Le facteur de qualité $Q = f_0/\Delta f$ du quartz vaut 50 000 au minimum, d'où une largeur du pic de résonance de l'ordre du Hz. La principale difficulté pour tracer la courbe de résonance est d'avoir un GBF extrêmement stable en fréquence. Il faut pouvoir le piloter à au moins 0,1 Hz près au voisinage de 32 kHz, ce qui est impossible à réaliser avec un GBF analogique ou les GBF numériques d'enseignement les plus courants. On utilise ici un appareil à synthèse numérique directe (Instek SFG 2110).

Q : quartz 32768 Hz

R : 100 kΩ

V_E : **400 m V_{Peak-Peak} maximum !**



On peut mesurer V_E et V_S à l'aide d'un oscilloscope numérique permettant le moyennage des signaux et la mesure de déphasage. Le GBF doit être allumé depuis longtemps pour être à l'équilibre thermique afin d'avoir une fréquence la plus stable possible. **L'amplitude du signal V_E ne doit pas être trop forte** sous peine de détruire le quartz lorsqu'on passe à la résonance !

On déconseille la réalisation du montage sur une platine pour circuit intégré car on obtient alors une courbe qui n'est pas conforme aux prédictions (on a des signaux anormalement forts en dehors de la fréquence de résonance, et qui persistent si on retire le quartz de la platine⁸ !). Les résultats sont nettement meilleurs si on réalise un montage sur un plateau type P60 de chez électrome en soudant le quartz sur un support composant. Il faut aussi éviter d'utiliser des câbles coaxiaux pour ne pas rajouter des capacités parasites au montage.

Mesures :

On commence par rechercher la fréquence proche de 32768 Hz donnant un signal de sortie maximal. On modifie ensuite cette fréquence par pas de 0,1 Hz, on attend à chaque fois que les signaux se stabilisent (le facteur de qualité étant énorme, les régimes transitoires sont longs) et on mesure l'amplitude de V_E et V_S ainsi que le déphasage entre les deux signaux (il faut tenir compte du signe – entre le signal mesuré V_S et la grandeur étudiée I et on peut inverser V_S sur l'oscilloscope pour compenser ce signe).

III.3.4 Exploitation des résultats

On calcule le module de l'impédance du quartz ainsi que son admittance par les relations :

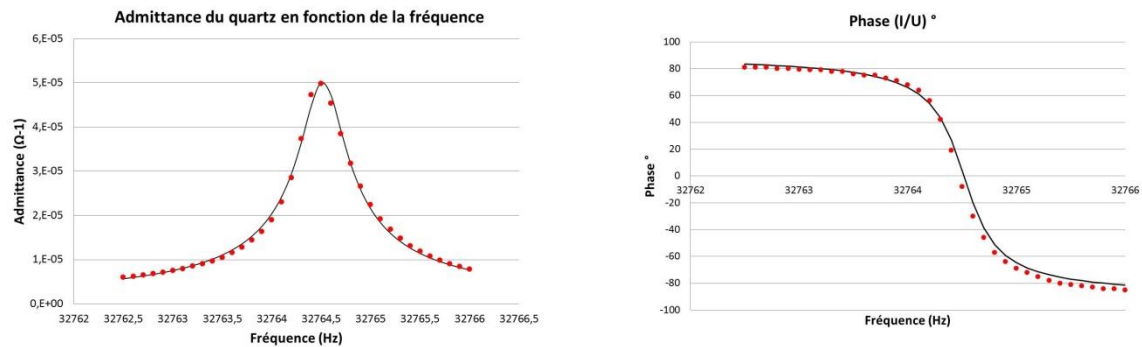
$$Z_Q = \frac{U_Q}{I_Q} = \frac{V_E}{V_S/R} = R \frac{V_E}{V_S} \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{Z_Q}$$

La courbe $Y(f)$ obtenue pour l'admittance, image de la résonance en intensité, peut être comparée à une modélisation de type R LC série :

$$Y = \frac{Y_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}}$$

⁸ Influence probable des capacités parasites entre les plaques de connexion.

L'acuité extrême de cette résonance fait que le logiciel a souvent des problèmes pour caler le modèle à la courbe expérimentale. On peut l'aider en lui donnant des valeurs estimées pour Y_0 , f_0 et Q . Voici le résultat d'une série de mesure (exploitation faite sous régressi, puis exportée sur Excel) :



L'accord entre le modèle de l'admittance et les mesures est très correct. L'évolution de la phase aussi conforme aux résultats du § III.1.2. On déduit de la modélisation la fréquence de résonance série du quartz ainsi que son facteur de qualité :

$$f_{rs} = 32764,5 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad Q \approx 70\,000$$

On peut aussi estimer les valeurs des paramètres motionnels R_s , C_s et L_s . R_s correspond à l'impédance du quartz à la résonance. On obtient L_s connaissant Q par la relation $Q = L\omega_0/R$. Enfin, on peut calculer C_s par la relation $\omega_0 = 1/LC$. On trouve avec nos mesures :

$$R_s \approx 20\,000 \, \Omega ; L_s \approx 7\,000 \text{ H} ; C_s \approx 3 \text{ fF}$$

Ces valeurs concordent avec les données constructeurs (cf. § III.3.1). Les résultats sur Q , R_s , L_s et C_s ont été arrondis car des variations de quelques milliers sur Q ont des conséquences assez faibles sur la modélisation.

La phase nous renseigne sur la façon dont se comporte le quartz en fonction de la fréquence. Le déphasage courant/tension est positif et se cale rapidement à $\approx +90^\circ$ quand on descend en dessous de f_{rs} . C'est le signe d'un comportement capacitif ($I/U = jC\omega$ pour un condensateur, donc $\varphi_{I/U} = +90^\circ$). Le déphasage est négatif et proche de -90° quand la fréquence est comprise entre f_{rs} et f_{arp} . Le quartz est alors inductif ($I/U = -j/L\omega$ pour une self, donc $\varphi_{I/U} = -90^\circ$). Si on poursuit le diagramme au-delà de f_{arp} , le déphasage repasse à $\approx +90^\circ$. On retrouve un comportement capacitif.

III.3.5 Comparaison avec la fréquence de travail

Le Quartz doit osciller exactement à 32 768 Hz pour obtenir une base de temps de 1 seconde. La fréquence de résonance série ne correspond pas tout à fait à cette valeur. La différence est faible (3,5 Hz), mais c'est déjà trop par rapport à la tolérance en fréquence annoncée par le constructeur (20 ppm). La précision du GBF ne peut pas être incriminée non plus puisqu'elle est de l'ordre de 20 ppm. On peut en conclure que les quartz d'horlogerie ne travaillent pas sur leur résonance série. On peut alors se demander s'ils travaillent plutôt sur l'anti résonance parallèle. Un calcul rapide de la fréquence f_{arp} avec la valeur de C_0 indiquée au § III.3.1 montre que ce n'est pas le cas (on obtient $f_{arp} = 32783 \text{ Hz}$ ⁹) → aucune de ces fréquences n'est donc mise à profit. On utilise en fait le caractère fortement inductif

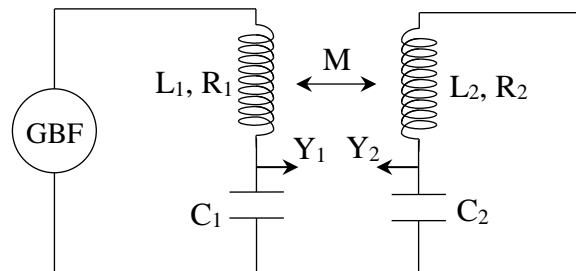
⁹ On peut mesurer cette fréquence avec le montage d'étude. Elle correspond au minimum de signal pour V_s lorsqu'on est au-dessus de f_{rs} . On a trouvé $f_{arp} = 32780 \text{ Hz}$, soit une valeur proche de celle calculée. On peut en déduire la valeur C_0 du composant étudié ($C_0 = 3,6 \text{ pF}$ dans notre exemple). On peut vérifier ce résultat à l'aide d'un RLCmètre d'enseignement, type ELC 3131D mais la mesure est très grossière car on est sur le dernier digit du plus bas calibre de l'instrument. On a obtenu 0,003 nF par une mesure 4 fils à 1 kHz après avoir fait le zéro de l'appareil.

du résonateur lorsqu'il oscille entre f_{rs} et $f_{arp.}$. On associe le quartz à deux condensateurs pour former un filtre de type π très sélectif qui sert de boucle de rétroaction à un oscillateur de relaxation. La fréquence est alors ajustée par le choix de la valeur des condensateurs (cf. [8], p. 155 par exemple ou le montage « Mesures des fréquences temporelles »).

IV CAS DES SYSTEMES COUPLES

L'étude des systèmes couplés peut soit se faire en mécanique ou en électricité. On conseille plutôt d'étudier un système électrique car les systèmes mécaniques ont en général des fréquences propres assez basses et les transitoires durent longtemps s'ils sont peu amortis d'où des durées d'expériences parfois prohibitives.

IV.1 Système d'étude



Le couplage est ici assuré par l'influence mutuelle M entre deux selfs. Les cellules de bases sont des circuits de type LC à fort coefficient de qualité. Ils permettent d'avoir des signaux pas trop faibles lorsqu'on désaccorde les circuits, ce qui facilite les mesures. Les résonances en intensité et en amplitude (cf. § II.1.1 et II.1.2) sont aussi pratiquement confondues. On rappelle que la constante de couplage est définie par la relation :

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

IV.2 Manipulation

Elle est décrite dans le montage « Couplage des oscillateurs » → s'y reporter. Il faut l'adapter au montage : influence du couplage sur la résonance du système étudié lorsqu'on le couple avec un oscillateur accordé ou non.

V RESONANCE AVEC DES ONDES STATIONNAIRES

Lorsque le milieu dans lequel se propage une perturbation est limité, il y a un phénomène de réflexion aux interfaces et il se crée un phénomène d'ondes stationnaires. Celui-ci est maximal lorsque les dimensions du milieu ont certaines valeurs particulières. C'est un phénomène de résonance. Le système possède alors plusieurs fréquences de résonance, en théorie une infinité discrète. On peut remarquer que la manipulation d'introduction de ce montage utilisait un oscillateur (le diapason) associé à une cavité accordée (la caisse). On peut y revenir pour illustrer la nécessité d'accorder la caisse au diapason en écoutant la différence de niveau sonore lorsque l'on change la caisse.

V.1 Corde vibrante excitée sinusoïdalement

C'est le système classique de la corde de Melde dans laquelle se propagent des ondes transversales. L'excitation sinusoïdale permet d'observer les modes propres de résonance.

V.1.1 Rappels

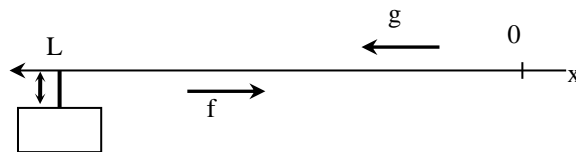
On rappelle l'équation générale du mouvement transversal d'une corde :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Où T est la tension de la corde et μ la masse linéique de la corde. La solution générale du mouvement est une combinaison d'une onde progressive et d'une onde régressive :

$$y(x, t) = \underbrace{f(t - x/c)}_{\text{Propagation suivant les } x \text{ croissants}} + \underbrace{g(t + x/c)}_{\text{Propagation suivant les } x \text{ décroissants}}$$

Expérience proposée :



On excite en régime sinusoïdal forcé une corde tendue et fixe à une de ses extrémités à l'aide d'un vibreur et on observe le résultat de la superposition des ondes incidente et réfléchie. On a :

$$y(x, t) = f(x, t) + g(x, t) = a \sin(\omega t - kx) + b \sin(\omega t + kx)$$

Corde fixe en $x = 0$:

$$\rightarrow y(0, t) = 0 \quad \forall t \leftrightarrow a \sin(\omega t) + b \sin(\omega t) = 0 \quad \forall t \leftrightarrow b = -a$$

On en déduit facilement que l'expression générale peut se mettre sous la forme :

$$y(x, t) = -2a \sin(kx) \cos(\omega t) \quad \text{C'est l'expression d'une onde stationnaire.}$$

Corde excitée en $x = L$:

$$y(L, t) = A \cos(\omega t) \quad \forall t \leftrightarrow -2a \sin(kL) \cos(\omega t) = A \cos(\omega t) \quad \forall t \\ \leftrightarrow -2a \sin(kL) = A$$

D'où :

$$y(x, t) = \frac{A}{\sin kL} \sin(kx) \cos(\omega t)$$

L'amplitude du phénomène d'ondes stationnaire vaut :

$$\frac{A}{\sin kL} = \frac{A}{\sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)}$$

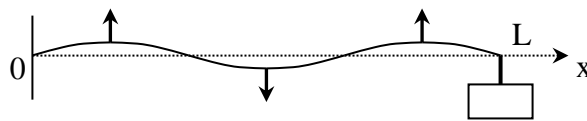
Elle tend vers une valeur minimum égale à A lorsque $L = (2p + 1)\lambda/4$. Elle tend théoriquement vers l'infini lorsque $L = p\lambda/2$. Le phénomène d'ondes stationnaires est alors nettement visible, la corde se séparant en p fuseaux de longueur $\lambda/2$: il y a résonance. L'amplitude à la résonance est limitée dans la pratique par les amortissements et les non linéarités du système négligés lors de l'établissement de l'équation d'onde (elle n'est valable que pour de petits déplacements).

V.1.2 Manipulation

Se reporter au montage « Mesure des fréquences temporelles » pour le montage ou en [1], p. 258.

Observation des ondes stationnaires :

On prend une longueur L d'environ 1 m. On augmente progressivement la fréquence du GBF et on observe successivement les fréquences de résonance correspondant à $p = 1, 2$ et 3 . La corde est immobile (nœuds de vibration) en des points séparés de $\lambda/2$, et vibre avec une amplitude maximum (ventres) en des points séparés de la même distance. On peut éclairer la corde avec un stroboscope lorsqu'on observe 3 ventres. La corde semble bouger très lentement si la fréquence du stroboscope est proche de celle du vibreur (on rappelle que N_{strobo} (coup/min) = f_{GBF} (Hz) $\times 60$). On peut alors vérifier que les points entre deux nœuds consécutifs de la corde vibrent en phase, l'amplitude $A/\sin kL$ gardant le même signe. Par contre, de part et d'autre d'un nœud, l'amplitude prend des signes opposés et les points de la corde vibrent en opposition de phase. Toutes ces observations sont caractéristiques d'un phénomène d'ondes stationnaires :



En conclusion, on a une amplitude maximale pour certaines valeurs de la fréquence excitatrice \rightarrow phénomène de résonance. Ces valeurs forment une suite discrète. Elles dépendent de la longueur et de la tension de la corde.

Remarque :

La corde de Melde est un résonateur à fréquences multiples. Ce phénomène est général dans tous les dispositifs de type cavité ; on le retrouve en acoustique (tuyaux sonores, tube de Kundt), en optique (interféromètre Fabry-Pérot, cavité Laser), en mécanique (figures de Chladni) et en hyperfréquences (ondemètre pour ondes centimétriques).

V.2 Réalisation à l'aide d'ondes acoustiques

V.2.1 Tube de Kundt

Expérience classique \rightarrow cf. [1], p. 357.

V.2.2 Tuyaux sonores

Plusieurs solutions sont possibles. Se reporter à [1], p. 404 et suivantes pour des idées de manipulations.

VI RESONANCE EN OPTIQUE

L'expérience est classique ; elle s'effectue avec de la vapeur de sodium \rightarrow se reporter au montage « Emission – Absorption » pour la manipulation. Ce phénomène peut être assimilé à une résonance puisque qu'on excite la vapeur par une radiation de fréquence correspondant à sa fréquence propre.

VII RESONANCE PARAMETRIQUE

[1], p.283 ; [4], p.142 ; [5], ch. 27 ; [7]

Le principe consiste à modifier périodiquement la fréquence propre d'un oscillateur passif pour entretenir, voire amplifier les oscillations dont il est le siège. L'équation régissant le système prend

alors la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2(t)x = 0$$

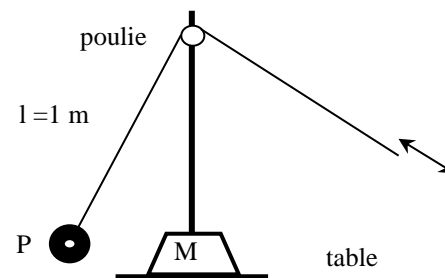
L'équation est dite de Hill lorsque l'excitation est périodique (cas général) ou de Mathieu lorsqu'elle est sinusoïdale. Dans tous les cas, la résolution mathématique n'est pas simple (cf. [5]) et ne sera pas abordée. On retiendra que la façon la plus efficace d'amplifier les oscillations du système consiste à l'exciter à une fréquence double de sa fréquence propre. Ce faisant, on doit fournir à l'oscillateur plus d'énergie que celle qu'il consomme dans ses parties dissipatives d'où l'existence d'un seuil.

VII.1 Mise en évidence du phénomène

L'expérience suivante permet une approche intuitive du phénomène de résonance paramétrique. Elle consiste à entretenir et amplifier les oscillations d'un pendule pesant par variation périodique de sa longueur.

Pendule P : masse de ≈ 100 grammes

M : poids de 5 kg pour caler la potence



On commence par lancer le pendule. On tire ensuite sur le fil lorsqu'il passe par $\theta = 0$ et on lui redonne sa longueur initiale lorsqu'il oscille avec une amplitude maximum. Avec un peu d'entraînement, on arrive à accroître fortement l'amplitude du pendule. On illustre ainsi l'entretien d'une oscillation de période T_0 par une action de période $T_0/2$.

Analyse :

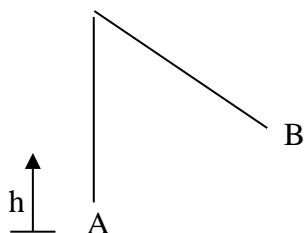
Considérons dans un premier temps la variation du moment cinétique par rapport à l'axe O de la poulie lorsqu'on modifie brutalement la longueur du pendule. Soient \vec{R} la réaction de l'axe et \vec{P} le poids du pendule ; le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$d\vec{\sigma}_O = [M_O(\vec{R}) + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}]dt = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P})dt \quad \text{car } \vec{R} \text{ est sur l'axe} = 0 \text{ si } dt \rightarrow 0$$

Le moment cinétique se conserve au moment de la variation de longueur si elle est brutale \rightarrow On a donc :

$$mlv = cte \quad \text{au moment de la variation de longueur.}$$

Examinons dans un deuxième temps l'évolution énergétique du pendule lorsqu'il oscille librement :



$$\begin{aligned} \text{B : } v &= 0 \rightarrow E_{\text{cin}} = 0 = \min \\ h &\text{ max } \rightarrow E_{\text{pot}} = mgh = \max \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{A : } v &= \max \rightarrow E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \max \\ h &\text{ min } \rightarrow E_{\text{pot}} = \min \end{aligned}$$

On tire brutalement sur le fil du pendule lorsqu'il est en A $\rightarrow l$ diminue. Comme $mlv = cte$ à cet instant, on augmente la vitesse en A, donc l'énergie cinétique. La diminution de l augmentant h d'une même quantité, l'énergie potentielle du pendule s'accroît elle aussi \rightarrow l'action en A fournie de

l'énergie au pendule. Il faut noter que cette action fournie de l'énergie quel que soit l'endroit où on la réalise mais c'est en A qu'on a un maximum d'efficacité car c'est là où la vitesse est la plus grande et où une variation de Δl donne la variation d'altitude Δh la plus forte.

On augmente l lorsqu'on relâche le pendule en B $\rightarrow h$ diminue, de même que l'énergie potentielle \rightarrow le pendule redonne de l'énergie mais en moins grande quantité que celle qu'il avait reçu en A (Δl donne Δh en A alors que Δl donne $\Delta h \cos \theta$ en B). L'action en B n'a pas d'influence sur l'énergie cinétique puisque la vitesse en B est nulle. L'action en B reprend donc de l'énergie au pendule mais moins que celle qu'on lui avait donné en A, et c'est là où on reprend le moins. On conçoit ainsi que la résultante de ces deux actions répétées périodiquement permettent d'amplifier les oscillations du pendule. L'apport global d'énergie doit bien entendu compenser les pertes par frottement, d'où l'existence d'un seuil minimal d'excitation en dessous duquel l'amplification n'a pas lieu.

VII.2 Système électrique

L, r : inductance à décades DL 0,7

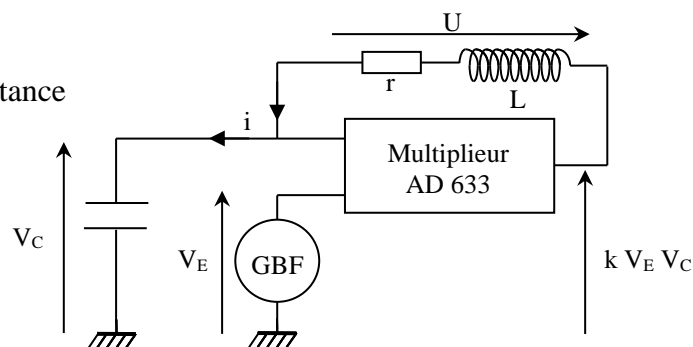
Prendre 0.1 H ; mesurer sa résistance

C : capacité variable

Prendre 253 nF $\leftrightarrow f_0 = 1000$ Hz

GBF : signaux carrés

Prendre un GBF avec un réglage fin de la fréquence



Le circuit électrique proposé permet une étude plus quantitative du phénomène de résonance paramétrique (le montage et des explications plus poussées se trouvent dans le BUP n° 747).

Equations :

$$V_C + U - k V_E V_C = 0$$

$$V_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt = \frac{q}{C} \quad U = L \frac{di}{dt} + ri = L \ddot{q} + r \dot{q}$$

La combinaison de ces trois équations donne :

$$L \ddot{q} + r \dot{q} + \frac{1 - k \cdot V_E}{C} q = 0$$

La charge du condensateur (analogue de l'amplitude du pendule) obéit donc à l'équation classique du circuit RLC (cf. § III.2) avec $C' = C(1 - k \cdot V_E) \rightarrow$ tout se passe comme si la capacité varie dans le temps au rythme de V_E . On aurait le même effet en imposant à l'épaisseur d'un condensateur plan une variation de la forme $e = e_0(1 - k \cdot V_E)$.

Manipulation :

On règle la période des signaux carrés à $T_E \approx T_0/2$. Si l'amplitude du signal est suffisante, on observe l'oscillation quasi sinusoïdale du circuit. On peut alors ajuster finement T_E pour avoir un maximum d'amplitude (cf. remarque suivante). On observe un facteur 2 entre les périodes et on doit constater l'existence d'un seuil : il faut une valeur minimum d'amplitude pour que l'oscillation prenne naissance (la recherche de cette limite est délicate ; on peut utiliser un potentiomètre multitour de 10 k Ω pour ajuster l'amplitude de V_E). On peut noter l'analogie avec le pendule : V_E croît lorsque $q = 0$, et décroît lorsque q est maximum. On peut modifier légèrement T_E

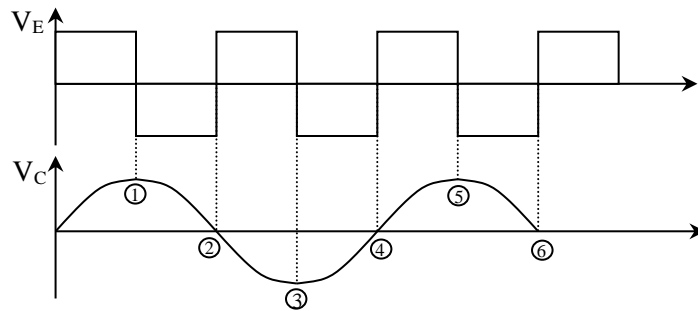
et regarder la conséquence sur le niveau du seuil. Les oscillations disparaissent quand on s'écarte de $T_0/2$ et il faut un seuil d'autant plus grand qu'on est loin de cette valeur pour faire réapparaître les oscillations.

Explication :

Etudions la conséquence des basculements de V_E sur l'énergie emmagasinée par le condensateur :

$$E = \frac{1}{2} C' V_C^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} (1 - kV_E)$$

Les variations de V_E étant très rapides, on supposera que la charge Q reste constante au cours du basculement.



Basculements 1 ; 3 ; 5 : La charge Q est maximum en ces points. V_E diminue $\rightarrow (1 - kV_E)$ augmente \rightarrow l'énergie stockée dans le condensateur augmente.

Basculements 2 ; 4 ; 6 : U_E augmente $\rightarrow (1 - kV_E)$ diminue mais cela n'a aucune influence sur l'énergie stockée dans le condensateur car la charge Q est nulle en ces points.

Comme pour le pendule, on fournit de l'énergie au moment optimal sans en reprendre si l'action se produit avec la périodicité $T_E = T_0/2$. L'apport global doit compenser les pertes par effet Joule pour avoir amplification, d'où l'existence d'un seuil. Si la condition $T_E = T_0/2$ n'est pas respectée, les apports et les retraits d'énergie se font de manière moins efficace. Le seuil d'amplification commence par augmenter, puis l'apparition et l'entretien des oscillations deviennent impossibles. On peut néanmoins observer des résonances lorsque $T_E = nT_0/2$ mais elles ne sont plus sinusoïdales. Si l'on veut retrouver les conditions optimums d'entretien (variation de C lorsque $Q = Q_{\max}$ et $Q = 0$), il faut pouvoir ajuster le rapport cyclique des créneaux. Dans le cas contraire, l'apparition des résonances est plus délicate à interpréter.

Remarque :

Lorsqu'on accorde la fréquence excitatrice pour obtenir la résonance, on s'aperçoit que les basculements 2, 4, ... se font pour une tension V_C voisine de 0. On est exactement à l'accord lorsque V_C est exactement égal à zéro au moment du basculement. Cette constatation permet de régler finement l'accord de la fréquence excitatrice au double de la fréquence propre du circuit. C'est alors que la tension de seuil V_E est minimum.

Etude quantitative du seuil :

On considère que la condition $T_E = T_0/2$ est réalisée. Au moment du basculement $U_E \rightarrow -U_E$, le condensateur emmagasine une énergie :

$$E_{fournie} = \frac{1}{2} \frac{Q_{\max}^2}{C} [1 + kU_E - (1 - kU_E)] = \frac{Q_{\max}^2 k U_E}{C}$$

Cela se produit toutes les demi-périodes de l'oscillation. Dans le même intervalle de temps, l'énergie dissipée par effet Joule vaut :

$$E_{\text{dissipée}} = \int_0^{T_0/2} Ri^2 dt = \int_0^{T_0/2} R \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 dt = RQ_{\text{max}}^2 \omega^2 \int_0^{T_0/2} \cos^2 \omega t dt$$

Car Q est sinusoïdal, soit :

$$E_{\text{dissipée}} = \frac{\pi}{2} R \omega Q_{\text{max}}^2$$

Le bilan énergétique est donc :

$$E_{\text{fournie}} - E_{\text{dissipée}} = \left[\frac{kU_E}{C} - \frac{\pi}{2} R \omega \right] Q_{\text{max}}^2$$

L'amplification pourra donc avoir lieu si :

$$U_E \geq \frac{\pi R C \omega}{2k}$$

Manipulation :

On se place au mieux à $T_E = T_0/2$. On ajuste l'amplitude du signal créniaux pour être à la limite des oscillations avec le potentiomètre multitour. On mesure l'amplitude de U_E et on compare à la théorie.

Bibliographie :

- [1] : Quaranta I, paragraphe « Oscillations Forcées, Résonance
- [2] : Sextant : Optique Expérimentale
- [3] : Quaranta III
- [4] : Pérez : Mécanique
- [5] : Landau : Mécanique
- [6] : BUP 799, p. 2023 et suivantes
- [7] : BUP 747 p. 1267 et BUP 661
- [8] : Marguerite Vauschelles : TP d'électronique
Quaranta IV p. 395 à 402