

一元时间序列分析的模型（了解）

2025年7月9日 22:15

目录。

1. 平稳时间序列和白噪声序列
2. 差分方程和滞后算子
3. AR模型
4. MA模型
5. ARMA模型
6. ACF和PACF
7. ARMA模型的估计
8. AIC和BIC准则
9. ARIMA模型
10. SARIMA模型

1. 平稳时间序列和白噪声序列

平稳时间序列：

- 定义：统计特性（均值、方差、自相关）不随时间变化的序列
- 弱平稳（二阶平稳）：
 - 均值恒定： $E(Y_t) = \mu$
 - 方差恒定： $\text{Var}(Y_t) = \sigma^2$
 - 自协方差仅与时间间隔有关： $\text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \gamma_k$

白噪声序列：

- 定义：均值为0、方差恒定、无自相关的随机序列
- 性质：
 - $E(\varepsilon_t) = 0$
 - $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$
 - $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0 \quad (k \neq 0)$

2. 差分方程和滞后算子

差分方程：

- 表示时间序列当前值与过去值关系的方程
- 一阶差分： $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$
- 二阶差分： $\Delta^2 Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2})$

滞后算子(L)：

- 定义： $LY_t = Y_{t-1}$
- 性质：
 - $L^m Y_t = Y_{t-m}$
 - $(1-L)Y_t = \Delta Y_t$
 - 可用于简化ARMA模型表达式

3. AR模型（自回归模型）

定义：

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

特点：

- 当前值是过去p个值的线性组合加随机误差
- ACF呈指数衰减，PACF在p阶后截断

4. MA模型（移动平均模型）

定义：

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

特点：

- 当前值是过去q个随机误差的线性组合
- 总是平稳的

- ACF在q阶后截断，PACF呈指数衰减

5. ARMA模型（自回归移动平均模型）

定义：

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

特点：

- AR和MA的组合
- 平稳性取决于AR部分
- ACF和PACF都呈指数衰减（不好判断，能判断->写论文）

6. ACF和PACF

自相关函数(ACF)：

- 度量时间序列与自身滞后版本的相关性
- $\rho_k = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) / \text{Var}(Y_t)$

偏自相关函数(PACF)：

- 在控制中间滞后影响后， Y_t 与 Y_{t-k} 的直接相关性
- 用于识别AR模型的阶数p

7. ARMA模型的估计

常用方法：

最大似然估计(MLE)：

- 假设误差项服从正态分布
- 最大化似然函数

8. AIC和BIC准则

用于模型选择：

- $AIC = 2k - 2\ln(L)$
- $BIC = k\ln(n) - 2\ln(L)$
 - k: 参数个数

- n : 样本量
- L : 最大似然值

比较:

- BIC对参数惩罚更重, 倾向于选择更简单的模型
- 选择AIC/BIC值较小的模型 (选小原则)

9. ARIMA模型

定义:

- ARIMA(p, d, q): 对非平稳序列进行 d 次差分后建立ARMA(p, q)模型
- 公式。

应用:

- 处理具有趋势或季节性的非平稳序列
- 先差分使序列平稳, 再建立ARMA模型

10. SARIMA模型

定义:

- SARIMA(p, d, q)(P, D, Q) $_s$: 考虑季节性的ARIMA模型
- 包含:
 - 非季节性部分: ARIMA(p, d, q)
 - 季节性部分: (P, D, Q) $_s$, s 为季节周期

公式。

应用:

- 处理具有明显季节性模式的时间序列
- 如月度销售数据、季度GDP数据等