

灰色预测模型

2025年7月13日 18:03

灰色预测模型。

对原始数据进行生成处理来寻找系统变动的规律，并生成有较强规律性的数据序列，然后建立相应的微分方程模型，从而预测事物未来发展趋势的状况。

GM (1, 1)：前者代表一阶，后者代表单变量。

1. 数据累加生成 (AGO, Accumulated Generating Operation)

由于原始数据可能波动较大，灰色模型先对数据进行累加，使其呈现更强的指数规律：

- 原始序列： $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$
- 一次累加生成 (1-AGO) 序列： $X^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k = 1, 2, \dots, n$ 累加后的数据通常呈指数增长趋势，更易拟合。

2. 建立灰微分方程 (GM(1,1) 模型)

GM(1, 1) 模型的基本形式为：

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$$

其中：

- $z^{(1)}(k)$ 是背景值，通常取相邻数据的均值： $z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))$
- a 是发展系数（反映数据变化趋势）， b 是灰色作用量（反映外部影响）。

3. 白化方程 (Whitenization Equation)

将离散的灰微分方程转化为连续的微分方程：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$$

其解为：

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-a(t-1)} + \frac{b}{a}$$

4. 预测值还原 (IAGO, Inverse AGO)

将累加预测值还原为原始数据：

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1)$$

适用条件。

- 数据量少且不完整。
 - GM (1, 1) 仅需4个以上的数据点即可建模。

- 数据具有指数趋势。
 - 灰色模型基于指数规律生成，适合单调变化的数据序列（如递增/递减）。
 - 若数据波动剧烈或随机性过强，需先进行平滑处理。
- 短期预测。
 - 在短期（3-5步内）精度较高，长期预测因误差累积而可靠性下降。
- 系统不确定性高。
 - 适用于灰色系统（“部分信息已知，部分未知”）。
- 数据非负且连续。
 - 以年度度量（若季度/月份 -> 优先时间序列分析）。

不适用情况。

- 长期预测。
- 多变量复杂关系。
- 纯随机数据。

操作步骤（论文）。

1. 原始数据处理。

- 至少4个数据点。
- 数据波动大，先平滑处理。
- 数据检验（级比检验）。

确保符合准指数规律。

- **级比检验**（确保数据适用于 GM(1,1)）：

$$\sigma(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

若所有 $\sigma(k)$ 落在区间 $(e^{-\frac{2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}})$ 内，则适合建模，否则需数据变换（如取对数或平移）。

2. 累加生成。

3. 建立GM (1, 1) 模型。

- 原始 GM(1,1)
- 新信息 GM(1,1)
- 新陈代谢 GM(1,1)

4. 误差检验。

- 根据误差的大小，选择最优的模型。
 - 残差检验：普遍适用的。
 - 1) < 10% - 20%
 - MAPE / RMSE / 后验差检验。

算法优化。

- 残差修正：若误差较大，可对残差序列建立 $GM(1, 1)$ 进行修正。
- **组合模型**：结合 马尔可夫链 或 神经网络 提高预测精度。
- 背景值优化：使用加权平均或智能算法（如遗传算法）优化 $Z^{(1)}(k)$ 。