Вопросы к экзамену

Содержание

1 Гидродинамика

1.1 Первые вопросы

1.1.1 Вывод уравнения неразрывности. Какой вид имеет это уравнение при стационарном течении несжимаемой среды и при неустановившемся течении.

<u>Ответ</u>

Установим общую зависимость между скоростями в потоке жидкости, для которого соблюдается условие *сплошности*, или *неразрывности*, движения, т.е. не образуется пустот, не заполненных жидкостью.

Выделим внутри поток элементарный параллелепипед объемом $dV = dxdydz$, ребра которого ориентированы параллельно осям координат (рис. 1).

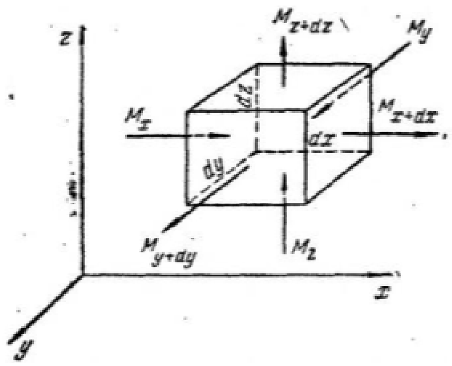

Рис. 1: К выводу дифференциального уравнения неразрывности потока

Пусть составляющая скорости потока вдоль оси x в точках, лежащих на левой грани параллелепипеда площадью $dS = dydz$, равна, ω_x. Тогда, согласно уравнению $M = \rho\omega S$, через эту грань в параллелепипед войдет вдоль оси x за единицу времени масса жидкости $\rho\omega_x dydz$, а за промежуток времени $d\tau$ - масса жидкости

$$M_x = \rho\omega_x dydzd\tau$$

где ρ - плотность жидкости на левой грани параллелепипеда.

На противоположной (правой) грани параллелепипеда скорость и плотность жидкости могут отличаться от соответствующих величин на левой грани и будут равны $(\omega_x + \frac{\partial\omega_x}{\partial x}dx)$ и $(\rho + \frac{\partial\rho}{\partial x}dx)$. Тогда через правую грань параллелепипеда за то же время $d\tau$ выйдет масса жидкости

$$M_{x+dx} = (\rho\omega_x + \frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x}dx)dydzd\tau$$

Приращение массы жидкости в параллелепипеде вдоль оси x:

$$dM_x = M_x - M_{x+dx} = -\frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x}dxdydzd\tau$$

Если составляющие скорости вдоль осей y и z равны ω_y и ω_z соответственно, то приращения массы в элементарном объеме вдоль этих осей по аналогии составят:

$$M_y = -\frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y}dydxdzd\tau$$
$$M_z = -\frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z}dzdxdyd\tau$$

Общее накопление массы жидкости в параллелепипеде за время $d\tau$ равно сумме ее приращений вдоль всех осей координат:

$$dM = -(\frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z})dxdydzd\tau$$

Вместе с тем изменение массы в полностью заполненном жидкостью объеме параллелепипеда возможно только вследствие изменения плотности жидкости в этом объеме. Поэтому

$$dM = \frac{\partial\rho}{\partial\tau}dxdydzd\tau$$

Приравнивая оба выражения dM, сокращая на $(-dxdydz)$ и перенося $\frac{\partial\rho}{\partial\tau}$ в левую часть уравнения, окончательно получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z} = 0$$

Уравнение представляет собой *дифференциальное уравнение неразрывности потока для неустановившегося движения сжимаемой жидкости.*

В установившемся потоке плотность не изменяется во времени, т.е. $\frac{\partial\rho}{\partial\tau} = 0$, и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z} = 0$$

Для капельных жидкостей, которые практически несжимаемы, а также для газов в условиях изотермического потока при скоростях, значительно меньших скорости звука, $p = const$ и, следовательно

$$\frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega_z}{\partial z} = 0$$

Уравнение является *дифференциальным уравнением неразрывности потока несжимаемой жидкости.*

1.1.2 Вывод уравнения Навье-Стокса для одномерного движения. Каков физический смысл слагаемых?

<u>Ответ</u>

При движении реальной (вязкой) жидкости в потоке жидкости помимо сил давления и тяжести действуют также силы трения.

Действие сил трения T на выделенный в потоке вязкой жидкости элементарный параллелепипед (рис. 2) проявляется в возникновении на его поверхности касательных напряжений τ. Рассмотрим первоначально относительно простой случай *одномерного* плоского потока *капельной* жидкости в направлении оси x, когда проекция скорости ω_x зависит только от расстояния z до горизонтальной плоскости отсчета.

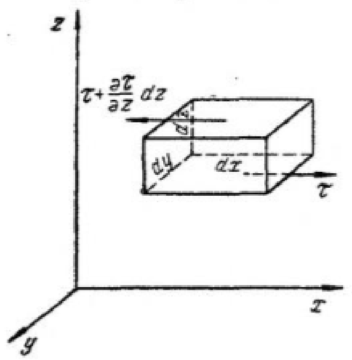

Рис. 2: К выводу уравнений Навье-Стокса

В этих условиях касательные напряжения возникают лишь на поверхностях dF верхней и нижней граней элементарного параллелепипеда, причем $dF = dxdy$. Если касательное напряжение на нижней грани параллелепипеда равно τ, то на верхней оно составляет $\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz$. Производная $\frac{\partial \tau}{\partial z}$ выражает изменение касательного напряжения вдоль оси z в точках, лежащих на нижней грани параллелепипеда, а $\frac{\partial \tau}{\partial z} dz$ представляет собой изменение этого напряжения вдоль всей длины dz ребра параллелепипеда.