Решение СЛАУ методом релаксации

Студент: Золотухин Андрей Александрович
Группа: КС-16

О методе

Метод релаксации (от лат. *relaxatio* тут «уменьшение») — итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.

Среди явных одношаговых итерационных методов наибольшее распространение получил метод релаксаций. Это связано с тем, что метод релаксаций содержит свободный параметр ω, изменяя который можно получать различную скорость сходимости итерационного процесса.

Наиболее эффективно этот метод применяется при решении множества близких алгебраических систем линейных уравнений. На первом этапе проводится решение одной из систем с различными значениями итерационного параметра ω и из анализа скорости сходимости итерационного процесса выбирается оптимальное значение этого параметра. Затем все остальные системы решаются с выбранным значением ω.

Еще одно достоинство итерационного метода релаксаций состоит в том, что при его реализации на ЭВМ алгоритм вычислений имеет простой вид и позволяет использовать всего один массив для неизвестного вектора.

Реализация алгоритма на языке C

```
158     double old_x[N] = {0}, new_x[N] = {0}, MAX = 0.0, error[N] = {0}, B[N] = {0};
159     for(int i = 0; i < N; i++) B[i] = array[i][N];
160     do {
161         MAX = 0.0;
162         for(int i = 0; i < N; i++) {
163             if (array[i][i] == 0) {
164                 for(int d = 0; d < M; d++) {
165                     double store = array[i][d];
166                     array[i][d] = array[i + 1][d];
167                     array[i + 1][d] = store;
168                 }
169             }
170             old_x[i] = new_x[i];
171             double sum = 0.0;
172             for(int j = 0; j < i; j++) sum += array[i][j] * new_x[j];
173             for(int j = i + 1; j < N; j++) sum += array[i][j] * new_x[j];
174             new_x[i] = (1.0 - W) * new_x[i] + W * (B[i] - sum) / array[i][i];
175             error[i] += fabs((new_x[i] - old_x[i]) / new_x[i]);
176         }
177         for(int i = 0; i < N; i++) {
178             if (error[i] > MAX) {
179                 MAX = error[i];
180                 error[i] = 0;
181             }
182         }
183     } while (MAX > E);
```

1. Составить матрицу коэффициентов уравнения*;*
2. Объявить векторы решений *old_x* и *new_x (строка 158);*
3. Переприсваивание векторов (*old_x = new_x*) (*строка 170*);
4. Вычислить новые значения вектора *new_x* (*строки 162-176*) (B_i - матрица-столбец свободных членов (*строка 159)*;
5. Найти массив погрешностей *error* (*строка 175)*;
6. Найти максимальное значение погрешностей *MAX* (*строки 177-182)*;
7. Повторять пункты *4-7*, пока *MAX > E* (*строки 160-183)*;
8. Вывести полученные значения *new_x*:
9. Проверка решения, подстановка полученных результатов в исходную систему уравнений:

```
for(int i = 0; i < N; i++) {
    double sum = 0;
    for(int j = 0; j < N; j++) sum += array[i][j] * new_x[j];
    sum -= array[i][M - 1];
    fprintf(file, "\ts%d = %.2lf\n", i + 1, sum);
}
```

Пример

```
                    Method_Relaxation

System_coef:
   / 170.00a - 3.80b   + 6.20c   + 7.70d   - 8.90e    =  -4209.32  \
  |    -7.90a - 950.00b + 8.30c   + 8.10d   - 1.60e    = -11663.70   |
  |     3.40a + 5.60b   - 910.00c - 9.80d   - 1.10e    =  -4759.71   |
  |    -0.70a + 2.00b   + 9.80c   - 520.00d + 7.00e    =  11684.55   |
   \    2.70a - 9.40b   + 2.60c   - 3.80d   + 660.00e  = -12523.93  /

   a = -24.65, b = 12.37, c = 5.48, d = -22.54, e = -18.85.

Checking the solution:
   s1 = 0.01
   s2 = 0.05
   s3 = -0.01
   s4 = -0.01
   s5 = 0.03
```

Сравнение решения СЛАУ методом релаксации с методами Гаусса и Гаусса-Зейделя

```
Method_Gauss

Initial_system_coef:
  / 170.00a - 3.80b   + 6.20c   + 7.70d   - 8.90e    =  -4209.32  \
 |   -7.90a - 950.00b + 8.30c   + 8.10d   - 1.60e    = -11663.70  |
 |    3.40a + 5.60b   - 910.00c - 9.80d   - 1.10e    =  -4759.71  |
 |   -0.70a + 2.00b   + 9.80c   - 520.00d + 7.00e    =  11684.55  |
  \   2.70a - 9.40b   + 2.60c   - 3.80d   + 660.00e  = -12523.93  /

  a = -24.65, b = 12.37, c = 5.48, d = -22.54, e = -18.85.

Checking the solution:
  s1 = 0.00
  s2 = 0.00
  s3 = 0.00
  s4 = 0.00
  s5 = 0.00
```

```
Method_Gauss_Zeidel

System_coef:
  / 170.00a - 3.80b   + 6.20c   + 7.70d   - 8.90e    =  -4209.32  \
 |   -7.90a - 950.00b + 8.30c   + 8.10d   - 1.60e    = -11663.70  |
 |    3.40a + 5.60b   - 910.00c - 9.80d   - 1.10e    =  -4759.71  |
 |   -0.70a + 2.00b   + 9.80c   - 520.00d + 7.00e    =  11684.55  |
  \   2.70a - 9.40b   + 2.60c   - 3.80d   + 660.00e  = -12523.93  /

  a = -24.65, b = 12.37, c = 5.48, d = -22.54, e = -18.85.

Checking the solution:
  s1 = 0.00
  s2 = 0.00
  s3 = 0.00
  s4 = 0.00
  s5 = 0.00
```

```
Method_Relaxation

System_coef:
  / 170.00a - 3.80b   + 6.20c   + 7.70d   - 8.90e    =  -4209.32  \
 |   -7.90a - 950.00b + 8.30c   + 8.10d   - 1.60e    = -11663.70  |
 |    3.40a + 5.60b   - 910.00c - 9.80d   - 1.10e    =  -4759.71  |
 |   -0.70a + 2.00b   + 9.80c   - 520.00d + 7.00e    =  11684.55  |
  \   2.70a - 9.40b   + 2.60c   - 3.80d   + 660.00e  = -12523.93  /

  a = -24.65, b = 12.37, c = 5.48, d = -22.54, e = -18.85.

Checking the solution:
  s1 = 0.01
  s2 = 0.05
  s3 = -0.01
  s4 = -0.01
  s5 = 0.03
```

В данном примере методы Гаусса и Гаусса-Зейделя оказались более точными. В зависимости от параметров задачи метод релаксаций может вывести значения, гораздо близкие, чем по методу Гаусса-Зейделя, но также это зависит и от подобранного параметра релаксации *w*.