Численное дифференцирование методом Рунге-Кутта 5-го порядка

Студент: Золотухин Андрей Александрович
Группа: КС-16

История

Ме́тоды Ру́нге — Ку́тты (в литературе встречается название **методы Рунге — Кутта**) — большой класс численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Первые методы данного класса были предложены около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М. В. Куттой.

Наиболее часто используется и реализован в различных математических пакетах (Maple, MathCAD, Maxima) классический метод Рунге — Кутты, имеющий четвертый порядок точности. При выполнении расчётов с повышенной точностью всё чаще применяются методы пятого и шестого порядков точности.

Также данный пятиранговый метод называется иначе методом Рунге-Кутта-Фельберга.

Алгоритм

1. Задать отрезок $[x_0; x_0 + 10]$;
2. Задать начальные условия $y(x_0) = y_0$;
3. Нахождение следующей точки:
   a. $k_1 = f(x_i, y_i)$;
   b. $k_2 = f(x_i + h / 4, y_i + k_1 / 4)$;
   c. $k_3 = f(x_i + h / 2, y_i - k_1 / 8 + k_2 / 8)$;
   d. $k_4 = f(x_i + h / 2, y_i - k_2 / 2 + k_3)$;
   e. $k_5 = f(x + h * 3 / 4, y + k1 * 3 / 16 + k4 * 9 / 16);$
   f. $k_6 = f(x + h, y - k_1 * 3 / 7 + k_2 * 2 / 7 + k_3 * 12 / 7 - k_4 * 12 / 7 + k_5 * 8 / 7);$
   g. $y_{i+1} = y_i + h * (7 * k_1 + 32 * k_3 + 12 * k_4 + 32 * k_5 + 7 * k_6) / 90$;
   h. $x_{i+1} = x_i + h$.

Реализация

```c
void method_runge_kutt_5(double h) {
    FILE *file = fopen("C:/labs/New_lab/Methods_Dif.txt", "a");
    fprintf(file, "\n");
    fprintf(file, "%\ty_rk_5 %s", "=");
    int count = 0;
    double x = A, y = 1, end = B;
    while (x < end && count < 5) {
        fprintf(file, "\t%.4lf", y);
        double k1 = f(x, y);
        double k2 = f(x + h / 4, y + k1 / 4);
        double k3 = f(x + h / 4, y + k1 / 8 + k2 / 8);
        double k4 = f(x + h / 2, y - k2 / 2 + k3);
        double k5 = f(x + h * 3 / 4, y + k1 * 3 / 16 + k4 * 9 / 16);
        double k6 = f(x + h, y - k1 * 3 / 7 + k2 * 2 / 7 + k3 * 12 / 7 - k4 * 12 / 7 + k5 * 8 / 7);
        y += h * (7 * k1 + 32 * k3 + 12 * k4 + 32 * k5 + 7 * k6) / 90;
        x += h;
        count++;
    }
    fclose(file);
}
```

Пример

```
--- Method_Runge_Kutt_5 ---
Function: y * y / (x - y) - 2 * x * y

h = 0.01
        x      =        0.00    0.01    0.02    0.03    0.04
        y_rk_5 =        1.0000  0.9936  0.9871  0.9805  0.9739
```

Сравнение численного дифференцирования методом Рунге-Кутта 5-го порядка с другими методами при разных h шагах

Если учесть значение, рассчитанное методом Рунге-Кутта 5-го порядка при $h = 0.01$ видно, что с каждым последующим методом происходит повышение порядка точности.

```
--- Methods_Dif ---

Function: y * y / (x - y) - 2 * x * y
Dif_funtion: (2 * y * (x - y) - y * y * (1 - f(x, y))) / ((x - y) * (x - y)) - 2 * f(x, y)

        h = 0.50
            x      =    0.00    0.50    1.00    1.50    2.00
            y_e    =    1.0000  0.5000  1.#INF  -1.#IND -1.#IND
            y_em   =    1.0000  0.3750  -2.6719 7.0460  -14.0912
            y_ei   =    1.0000  0.7500  0.6964  0.6904  0.6898
            y_rk_4 =    1.0000  0.5240  0.7207  0.7212  0.3755
            y_rk_5 =    1.0000  0.5447  0.0169  0.0102  0.0108

        h = 0.10
            x      =    0.00    0.10    0.20    0.30    0.40
            y_e    =    1.0000  0.9000  0.7808  0.6446  0.4853
            y_em   =    1.0000  0.8957  0.7778  0.6482  0.6527
            y_ei   =    1.0000  0.8963  0.8045  0.7231  0.6510
            y_rk_4 =    1.0000  0.9156  0.8172  0.7146  0.5810
            y_rk_5 =    1.0000  0.9289  0.8439  -0.0432 -0.0408

        h = 0.01
            x      =    0.00    0.01    0.02    0.03    0.04
            y_e    =    1.0000  0.9900  0.9798  0.9694  0.9588
            y_em   =    1.0000  0.9900  0.9797  0.9693  0.9587
            y_ei   =    1.0000  0.9900  0.9800  0.9702  0.9604
            y_rk_4 =    1.0000  0.9924  0.9847  0.9768  0.9688
            y_rk_5 =    1.0000  0.9936  0.9871  0.9805  0.9739
```