Интегрирование методом Чебышева

Студент: Золотухин Андрей Александрович
Группа: КС-16

Алгоритм с пояснениями

Все предыдущие методы имели следующую особенность: значения x располагались равномерно, а весовые коэффициенты были разными (в общем случае, хотя некоторые из них были равны друг другу). В методе Чебышева приняты все весовые коэффициенты одинаковыми, а x_i – разными.

Алгоритм для вычисления с погрешностью с последующими реализацией и примером:

1. Задать отрезок *[a;b]* и количество разбиений $n = 2$, в конце итерации увеличивая на единицу, вплоть до *7* (можно было бы получить многочлен $\boldsymbol{\omega}_n(x)$ и для других значений *n*, но, как показал академик С. Н.Бернштейн, при этом уравнение $\boldsymbol{\omega}_n(x) = 0$ будет иметь комплексные корни и, следовательно, формула Чебышева не может быть использована)
2. Предварительно при использовании приведенных ниже формул метода следует преобразовать переменную интегрирования, приведя ее к диапазону [-1, 1] следующим образом: $x = (a + b) / 2 + ((b - a) / 2)) * t$, где *t* - абсциссы формулы Чебышева.
3. Умножаем текущую сумму на шаг $(B - A) / n$, где *B* и *A*- верхний и нижний пределы интегрирования интегрирования соответственно, n - число разбиений.
4. Повторяем пункты (2) - (3), пока |S - S1| >= E, где E = 1e - 4.

Реализация

```
void method_Chebyshev() {
    printf("\n\t\t\t--- Method_Chebyshev ---\n\n");
    printf("%25s %7s %10s %25s\n", "Amount_of_splitting", "Step", "Value", "Module_of_difference");
    double prev_sum = 2, cur_sum = 1, h;
    int n = 2;
    double t[8] = {0};
    while(fabs(prev_sum - cur_sum) > E && n < 8) {
        h = (B - A) / (double)n;
        prev_sum = cur_sum;
        cur_sum = 0;
        if      (n == 2) {t[0] = -0.577340; t[1] = -t[0];}
        else if (n == 3) {t[0] = -0.707207; t[1] = 0.0;       t[2] = -t[0];}
        else if (n == 4) {t[0] = -0.794653; t[1] = -0.187591; t[2] = -t[1];     t[3] = -t[0];}
        else if (n == 5) {t[0] = -0.832497; t[1] = -0.374542; t[2] = 0.0;       t[3] = -t[1];     t[4] = -t[0];}
        else if (n == 6) {t[0] = -0.866246; t[1] = -0.422528; t[2] = -0.266634; t[3] = -t[2];     t[4] = -t[1]; t[5] = -t[0];}
        else if (n == 7) {t[0] = -0.883861; t[1] = -0.529656; t[2] = -0.323913; t[3] = 0.0;       t[4] = -t[2]; t[5] = -t[1]; t[6] = -t[0];}
        for(int i = 0; i < n; i++) cur_sum += f((B + A) / 2 + (B - A) / 2 * t[i]);
        cur_sum *= (B - A) / n;
        printf("\t%8d %16.3lf %10.6lf %19lf\n", n, h, cur_sum, fabs(prev_sum - cur_sum));
        n++;
    }
}
```

Пример

```
--- Method_Chebyshev ---

Function: (x * x) / (4 * x * x * x + 1)
Upper_limit: 0.8
Lower limit: -0.4

Amount_of_splitting     Step       Value       Module_of_difference
        2              0.600     0.121424            0.878576
        3              0.400     0.115591            0.005833
        4              0.300     0.114865            0.000726
        5              0.240     0.116276            0.001411
        6              0.200     0.117802            0.001526
        7              0.171     0.117601            0.000201
```

Сравнение интегрирования методом Чебышева с другими методами интегрирования

Название численного метода	Результат по численному методу	Разница между численным и аналитическим результатами
Метод правых прямоугольников	0.117509	0.000008
Метод левых прямоугольников	0.117543	0.000026
Метод средних прямоугольников	0.117501	0.000016
Метод трапеций	0.117547	0.000030
Метод Симпсона	0.117517	0.000000
Метод Чебышева	0.117601	0.000201

Вычисление с помощью квадратурной формулы Чебышева дает достаточно приближенное к истинному значение определенного интеграла. По сравнению со сравниваемыми методами данный алгоритм предоставляет результат в меньшее количество разбиений.