

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И.
Менделеева»

ЛЕКЦИЯ №1

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович
Ссылка на репозиторий: [https://github.com/
CorgiPuppy/
chem-tech-control-sys-labs](https://github.com/CorgiPuppy/chem-tech-control-sys-labs)

Москва
2025

Оглавление

Термодинамический анализ	1
Уравнения сохранения	1

Термодинамический анализ

Уравнения сохранения

Рассмотрю многофазную полидисперсную среду, где первая фаза (сплошная несущая) - газ или жидкость, r - фаза включений частиц, капель или пузырьков, размеры (объёмы) которых $r - dr, r + dr$.

Введу средние плотности в каждой точке объёма, занятого смесью:

$$\rho = \rho_1 + \int_0^R \rho_2^0 f(r) r dr; \quad \alpha = \alpha_1 + \int_0^R r f(r) dr;$$
$$\rho_1 = \rho_1^0 \alpha_1; \quad \alpha_2 = \int_0^R r f(r) dr,$$

где α_i - объёмные содержания фаз; ρ - плотность смеси; ρ_i^0, ρ_i - истинные и средние плотности фаз соответственно; R - наибольший размер (объём) включения; индекс 1 относится к несущей фазе, индекс 2 - ко всей дисперсной (гетерогенной) фазе.

Дисперсность гетерогенной фазы характеризуется функцией $f(r)$, так что $f(r)dr$ - число включений в единице объёма смеси, размеры (объёмы) которых от r до $r + dr$.

Можно принять, что несущая фаза и все r -фазы - континуумы (материальная среда, которая считается сплошной, т.е. не разделенной на отдельные частицы или молекулы), заполняющие один и тот же объём и имеющие свою плотность, массу, скорость, температуру.

Введение многоскоростного континуума необходимо, т.к. скорости относительно-го движения фаз в смеси по порядку могут быть равны скоростям их абсолютного движения. 1-ю фазу буду описывать моделью вязкой жидкости. В качестве тензоров поверхностных $\sigma_1^{kl}, \sigma_2^{kl}$ сил и тензоров вязких напряжений τ_1^{kl} приму:

$$\sigma_1^{kl} = -P_1 \delta^{kl} + \tau_1^{kl}, \quad \sigma_2^{kl} = 0, \quad \tau_1^{kl} = \lambda \nabla \nu_1 + 2\mu_1 e_1^{kl},$$

где σ^{kl} - символ Кронекера; P_1 - давление; e_1^{kl} - тензор скоростей деформаций несущей фазы; λ, μ_1 - коэффициенты вязкости.

Уравнение сохранения массы сплошной фазы:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \nu_1) = - \int_0^R \rho_2^0 f \eta dr, \quad (1)$$

где ν_1 - средняя массовая скорость несущей фазы; R - максимальный размер (объём) включений; η - наблюдаемая скорость изменения размера (объёма) включения.

В уравнении (1) член в правой части отражает суммарное влияние фазового перехода на включениях.

Уравнение баланса числа включений с учётом изменения объёма включения за счёт фазового перехода:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \nu_2) + \frac{\partial}{\partial r}(f \eta) = 0,$$

где ν_2 - средняя массовая скорость r -фазы;

Уравнения движения сплошной и r -фазы:

$$\rho_1 \frac{d_1 \nu_1}{dt} = -\alpha_1 \nabla P_1 + \nabla^k \tau_1^k - \int_0^R \rho_2^0 f r f_{12} dr - \int_0^R \rho_2^0 f \eta (\nu_2 - \nu_1) dr + F_1,$$

$$\frac{D_2}{Dt} \nu_2(r) = -\nabla \frac{P_1}{\rho_2^0} + f_{12}(r) + F_2(r),$$

где P - давление [$\nabla P = (\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z})$]; F_1, F_2 - массовые силы, действующие на несущую и r -фазу соответственно; f_{12} - сила взаимодействия между несущей и r -фазами.

1-ое слагаемое в правых частях уравнений характеризует влияние поверхностных сил, действующих на каждую фазу; член, содержащий силу взаимодействия f_{12} , определяет влияние сил трения на движение несущей и r -фазы соответственно; слагаемое, содержащее $F_i (i = 1, 2)$, отображает воздействие массовых сил на изменение импульса несущей фазы и включения соответственно; *4-ое слагаемое* в уравнении движения несущей фазы представляет изменение импульса несущей фазы за счёт фазового превращения.

Уравнение изменения внутренней энергии сплошной фазы:

$$\rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} = \frac{\alpha_1 P_1}{\rho_1^0} \frac{d\rho_1^0}{dt} + \tau_1^{kl} e_1^{kl} + \int_0^R \rho_2^0 f r f_{12} (\nu_1 - \nu_2) dr + \int_0^R \rho_2^0 f \eta \frac{(\nu_2 - \nu_1)^2}{2} dr - \int_0^R q_{1\sigma} dr - \nabla q_1 + \rho_1 Q_{1*}, \quad (2)$$

где u_1 - удельная внутренняя энергия несущей фазы; $q_{1\sigma}$ - поток тепла (не связанный с фазовыми переходами), отнесённый к единице объёма смеси от несущей фазы к поверхности раздела фаз; $\rho_1 Q_{1*}$ - мощность объёмного источника тепла в 1-фазе.

1-ое слагаемое в правой части в уравнении (2) представляет обратимую работу сжатия материала фазы. *2-ое* и *3-е слагаемые* представляют переход кинетической энергии во внутреннюю энергию за счёт вязкостного взаимодействия как в самой несущей фазе, так и при взаимодействии с включениями. *4-ое слагаемое* характеризует переход во внутреннюю энергию части кинетической энергии из-за неравновесного обмена импульсом при фазовых превращениях, происходящих при неравных скоростях фаз; *5-ое, 6-ое, 7-ое слагаемые* характеризуют изменение внутренней энергии сплошной фазы за счёт теплообмена с поверхностью раздела фаз, теплопереноса в сплошной фазе путём теплопроводности, наличия источника тепла.

Уравнение изменения внутренней энергии дисперсной фазы:

$$\rho_2^0 f r \frac{D_2 u_2}{dt} = \frac{\alpha_2 P_2}{\rho_2^0} \frac{d\rho_2^0}{dt} - q_{2\sigma}(r) + \rho_2^0 f r Q_{2*}, \quad (3)$$

где u_2 - удельная внутренняя энергия r -фазы; $q_{2\sigma}$ - поток тепла (не связанный с фазовыми переходами), отнесённый к единице объёма смеси от r -фазы к поверхности раздела фаз; $\rho_2 Q_{2*}$ - мощность объёмного источника тепла во 2-фазе.

1-ое слагаемое в правой части в уравнении (3) представляет обратимую работу сжатия материала фазы. *2-ое* и *3-е слагаемые* в правой части отражают изменение внутренней энергии r -фазы за счёт теплообмена с поверхностью раздела фаз, наличия источника тепла. **Уравнение изменения внутренней энергии поверхности**

раздела фаз (сплошной и r -фазы):

$$f \frac{D_2 u_\sigma^1}{Dt} = q_{1\sigma}(r) + q_{2\sigma}(r) - \rho_2^0 f \eta (i_2 - i_1),$$

где u_σ - поверхностная энергия, приходящаяся на одно включение; i_1, i_2 - энтальпии несущей и r -фазы соответственно.

1-ое слагаемое в правой части описывает теплообмен со сплошной фазой, *2-ое слагаемое* - теплообмен с r -фазой. Приток (отток) тепла к поверхности раздела фаз за счёт фазового превращения, т.е. роль источник (стока) тепла, необходимого для фазового превращения, принадлежит поверхности раздела фаз.