Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

« Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева »

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №8

Вариант 7

Выполнил студент группы КС-46:	**Золотухин Андрей Александрович**
Ссылка на репозиторий:	https://github.com/CorgiPuppy/info-proccesses-systems-theory-labs
Приняла:	Зинченко Дарья Ивановна
Дата сдачи:	17.12.25

Москва

2025

Оглавление

Описание задачи

1. Аналитическим способом найти стационарную точку и определить характер её устойчивости по 1-ому методу Ляпунова;
2. Написать программу, решающую систему ДУ и сттроящую следующие графики:
    1. фазовый портрет системы. Подберите начальные условия, шаг по времени и масштаб таким образом, чтобы тип точки и ее координаты на графике были очевидны (в случае неустойчивой точки начальные условия рекомендуется задавать как можно ближе к неподвижной точке). Число траекторий не меньше восьми!
    2. зависимости $\mathrm{x}_1(t)$ и $\mathrm{x}_2(t)$ - динамику системы во времени (таким образом, чтобы поведение системы в окрестности неподвижной точки и ее координаты были очевидны.) На одном графике должно быть несколько линий динамики при разных начальных условиях.

Работа 8

Система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0.4\,\dot{\alpha}\,x_1 - x_2 - 0.6x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$$

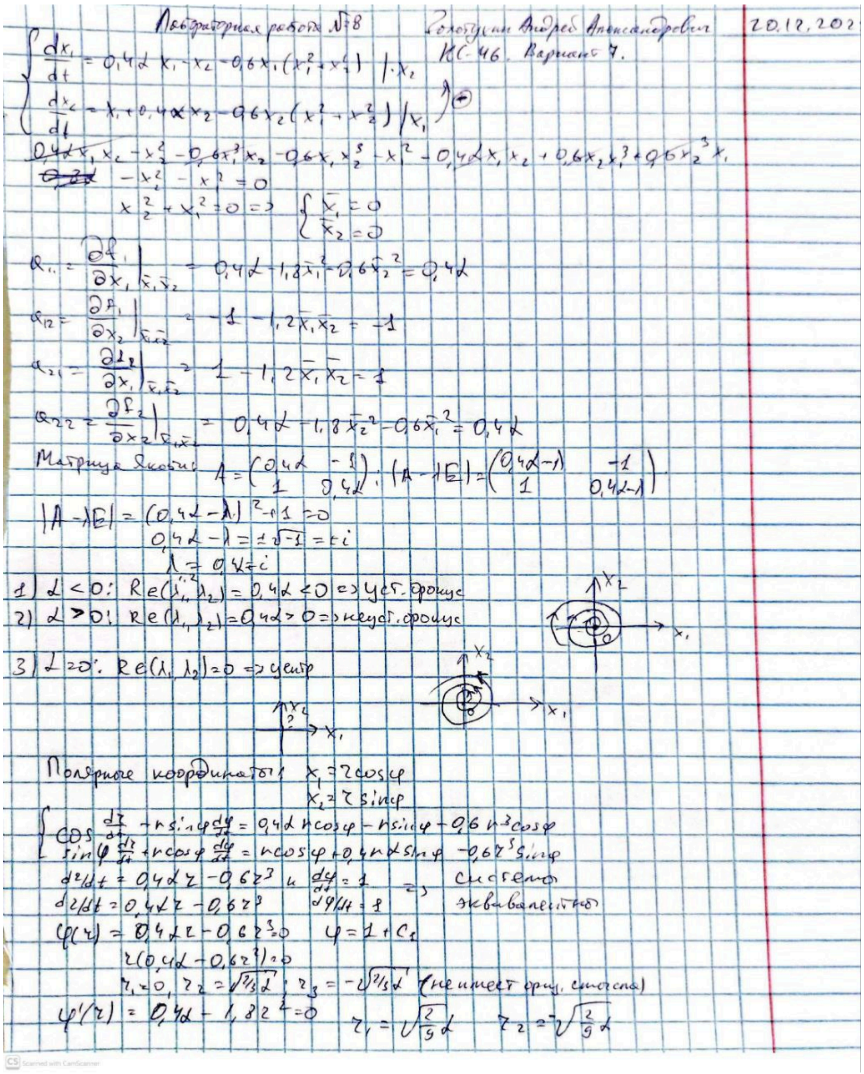
1. Найти неподвижные точки и определить их тип при $\dot{\alpha} > 0$, $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\alpha} < 0$, исследовав систему по 1-му методу Ляпунова.
2. Найти неподвижные точки и определить их тип при $\dot{\alpha} > 0$, $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\alpha} < 0$ в полярных координатах.
2. Указать тип бифуркации и точку бифуркации.
3. Построить бифуркационную диаграмму (зависимость стационарного решения от параметра $\dot{\alpha}$.
4. Построить фазовые портреты при следующих значениях управляющего параметра $\dot{\alpha}$: $-1/2$, $-1/8$, 1.5.

Для решения использовать явную схему Рунге-Кутты. Фазовый портрет для каждого $\dot{\alpha}$ строить на отдельном графике.

Выполнение задачи

Аналитическое решение

На Рис. 1 представлено аналитическое решение.



Лабораторная работа №8 [illegible] Андрей Александрович 20.12.202

КС-46. Вариант 7.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0,4\alpha x_1 - x_2 - 0,6x_1(x_1^2 + x_2^2) & \Big| \cdot x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 0,4\alpha x_2 - 0,6x_2(x_1^2 + x_2^2) & \Big| \cdot x_1 \end{cases} \ominus$$

$$\cancel{0,4\alpha x_1 x_2} - x_2^2 - \cancel{0,6x_1^3 x_2} - \cancel{0,6x_1 x_2^3} - x_1^2 - \cancel{0,4\alpha x_1 x_2} + \cancel{0,6x_2 x_1^3} + \cancel{0,6x_2^3 x_1}$$

$$-x_2^2 - x_1^2 = 0$$

$$x_2^2 + x_1^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} = 0,4\alpha - 1,8\bar{x}_1^2 - 0,6\bar{x}_2^2 = 0,4\alpha$$

$$a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} = -1 - 1,2\bar{x}_1\bar{x}_2 = -1$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} = 1 - 1,2\bar{x}_1\bar{x}_2 = 1$$

$$a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} = 0,4\alpha - 1,8\bar{x}_2^2 - 0,6\bar{x}_1^2 = 0,4\alpha$$

Матрица Якоби: $A = \begin{pmatrix} 0,4\alpha & -1 \\ 1 & 0,4\alpha \end{pmatrix}$; $|A - \lambda E| = \begin{pmatrix} 0,4\alpha - \lambda & -1 \\ 1 & 0,4\alpha - \lambda \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = (0,4\alpha - \lambda)^2 + 1 = 0$$

$$0,4\alpha - \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\lambda = 0,4\alpha \mp i$$

1) $\alpha < 0$: $Re(\lambda_1, \lambda_2) = 0,4\alpha < 0 \Rightarrow$ уст. фокус

2) $\alpha > 0$: $Re(\lambda_1, \lambda_2) = 0,4\alpha > 0 \Rightarrow$ неуст. фокус

3) $\alpha = 0$: $Re(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \Rightarrow$ центр

Полярные координаты: $x_1 = r\cos\varphi$

$x_2 = r\sin\varphi$

$$\begin{cases} \cos\varphi\frac{dr}{dt} - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} = 0,4\alpha r\cos\varphi - r\sin\varphi - 0,6r^3\cos\varphi \\ \sin\varphi\frac{dr}{dt} + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = r\cos\varphi + 0,4r\alpha\sin\varphi - 0,6r^3\sin\varphi \end{cases}$$

$dr/dt = 0,4\alpha r - 0,6r^3$ и $\frac{d\varphi}{dt} = 1$ $\Rightarrow$ система

$dr/dt = 0,4\alpha r - 0,6r^3$ $\quad d\varphi/dt = 1$ эквивалентно

$\varphi(r) = 0,4\alpha r - 0,6r^3 = 0$ $\quad \varphi = 1 + C_1$

$r(0,4\alpha - 0,6r^2) = 0$

$r_1 = 0$, $r_2 = \sqrt{2/3\,\alpha}$; $r_3 = -\sqrt{2/3\,\alpha}$ (не имеет физ. смысла)

$\varphi'(r) = 0,4\alpha - 1,8r^2 = 0$ $\quad r_1 = \sqrt{\frac{2}{9}\alpha}$ $\quad r_2 = -\sqrt{\frac{2}{9}\alpha}$

Scanned with CamScanner

Рис. 1: Аналитическое решение.

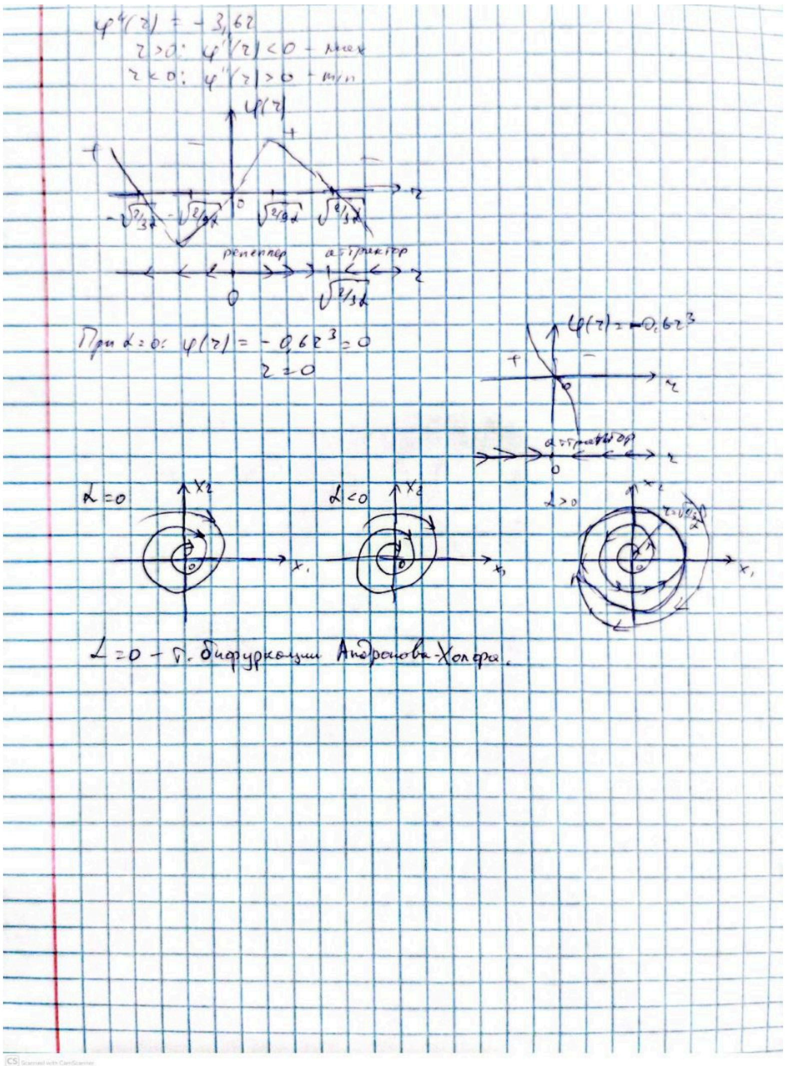


Рис. 2: Аналитическое решение (продолжение).

Графики

На Рис. 3 представлена бифуркационная диаграмма.

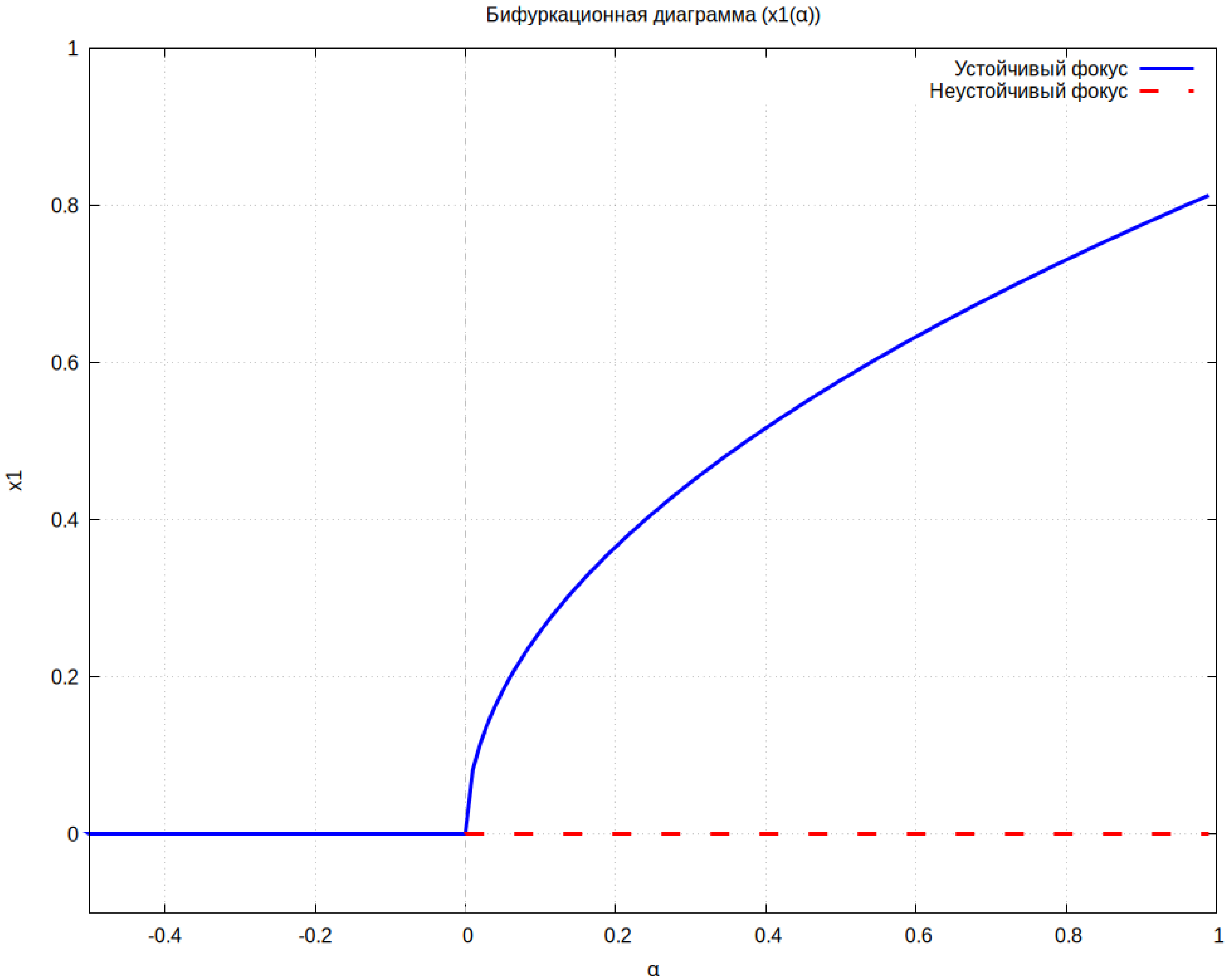


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма (x1($\dot{\alpha}$)).

На Рис. 4 представлен фазовый портрет при $\dot{\alpha} = -0.5$.

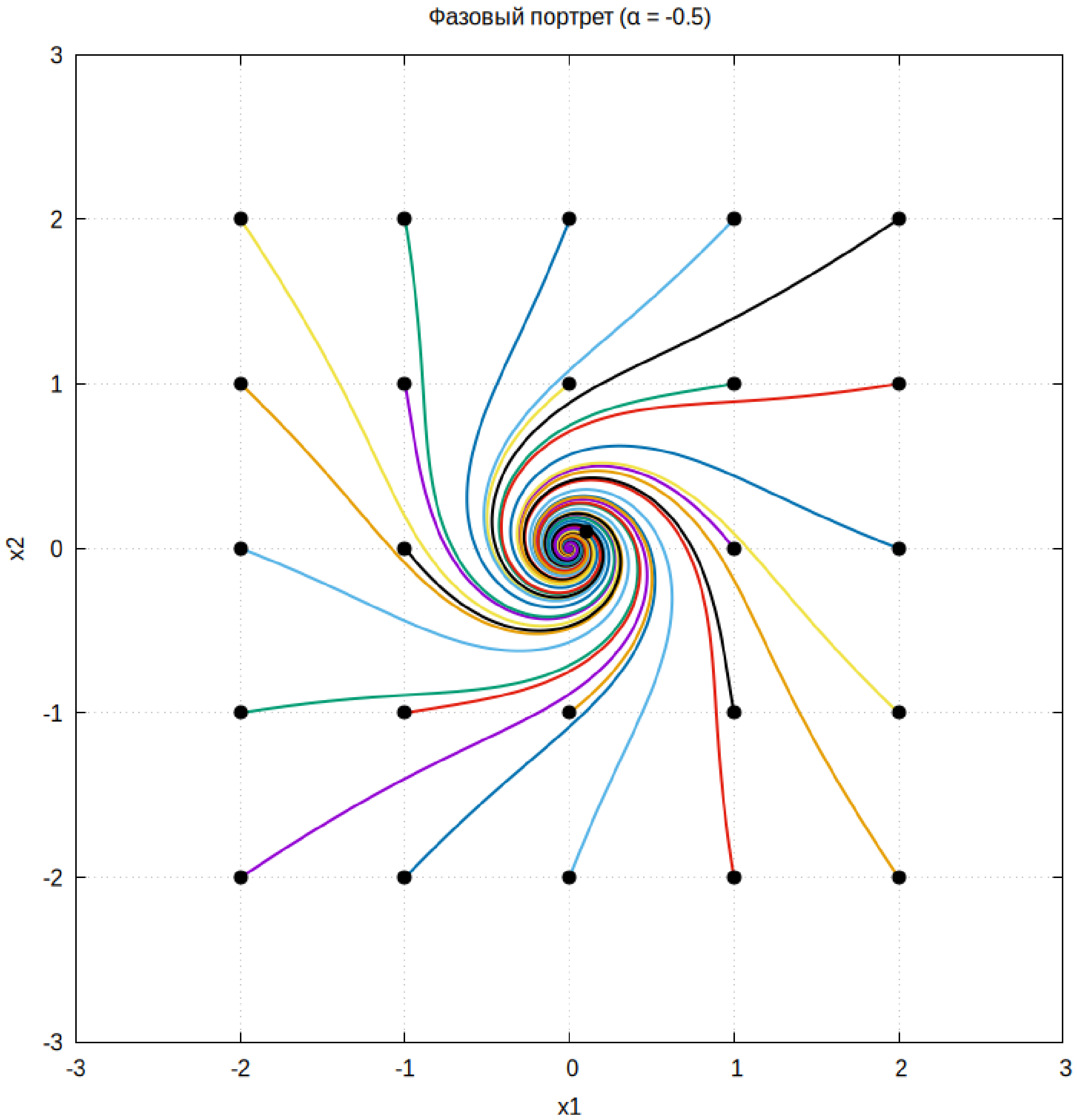


Рис. 4: Фазовый портрет при $\dot{\alpha} = -0.5$.

На Рис. 5 представлен фазовый портрет при $\dot{\alpha} = -0.125$.

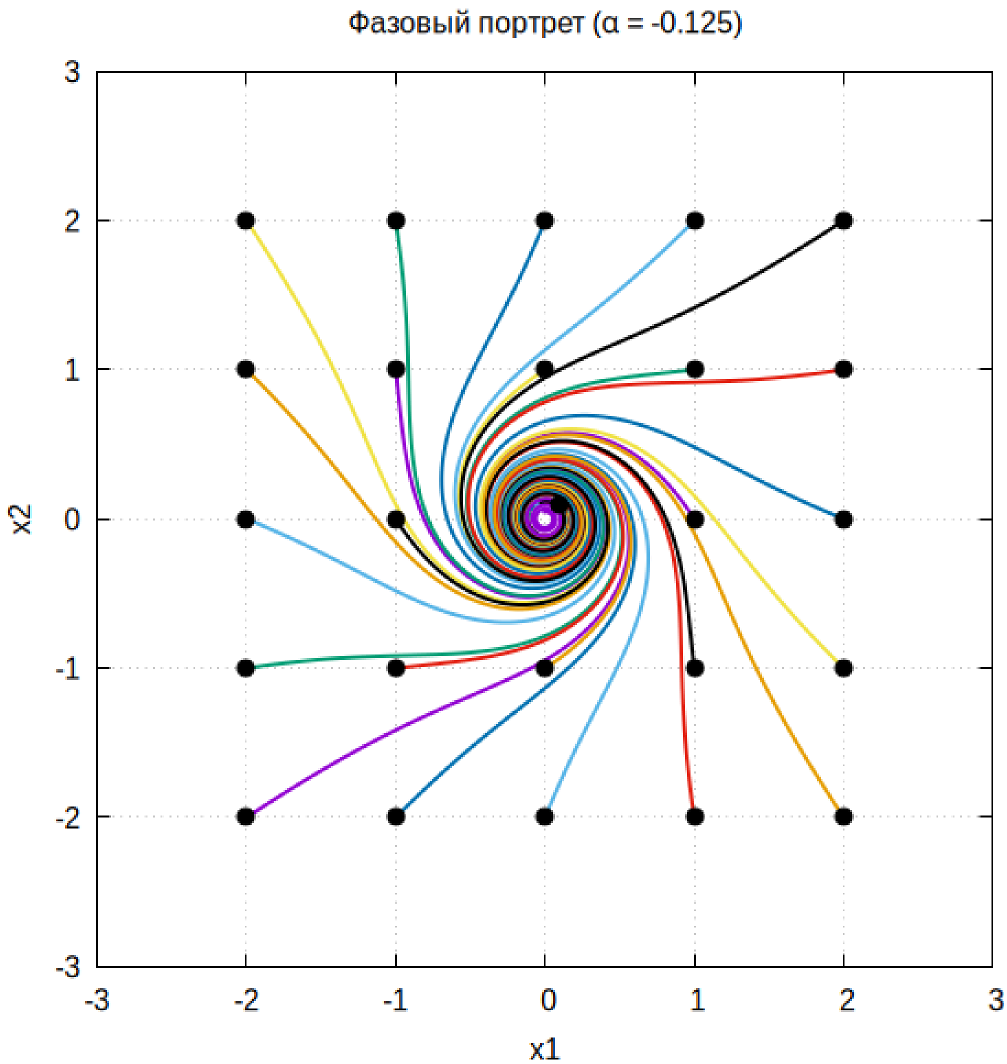


Рис. 5: Фазовый портрет при $\dot{\alpha} = -0.125$.

На Рис. 6 представлен фазовый портрет при $\dot{\alpha} = 1.5$.

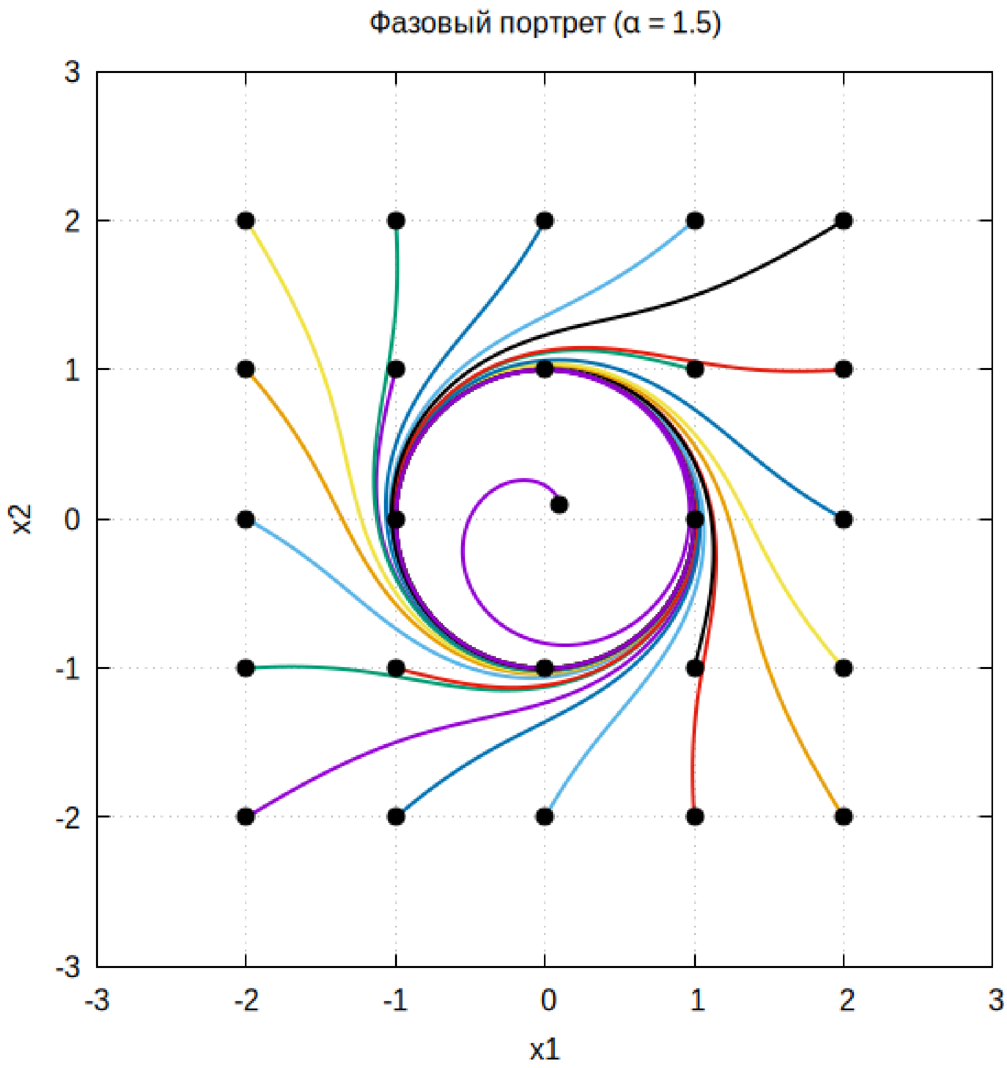


Рис. 6: Фазовый портрет при $\dot{\alpha} = 1.5$.

Код

```
#ifndef CONSTANTS_H
#define CONSTANTS_H

#include <string>
#include <vector>

namespace Constants {
  const std::string DAT_DIR = "plots/dat-files/";

  const double dt = 0.01;
  const double T = 20.0;

  const std::vector<double> alphas = {
    -0.5,
    -0.125,
    1.5
  };

  const std::vector<std::string> filenames = {
    "alpha_minus_0_5.dat",
    "alpha_minus_0_125.dat",
    "alpha_plus_1_5.dat"
  };

  const std::string bif_filename = "bifurcation.dat";
}

#endif
```

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <fstream>
#include <string>
#include <iomanip>

#include "Constants.h"

void step(double&, double&, double, double);

struct Point { double x; double y; };
Point get_derivatives(double x1, double x2, double alpha);

int main() {
    std::vector<Point> starts;
    for (double x = -2.0; x <= 2.0; x += 1.0) {
        for (double y = -2.0; y <= 2.0; y += 1.0) {
            if (x == 0 && y == 0) continue;
            starts.push_back({x, y});
        }
    }
    starts.push_back({0.1, 0.1});

    for (long unsigned int i = 0; i < Constants::alphas.size(); i++) {
        double alpha = Constants::alphas[i];
        std::string path = Constants::DAT_DIR + Constants::filenames[i];
```

```
        std::ofstream file(path);
        if (!file.is_open()) {
            std::cerr << "Ошибка открытия файла: " << path << std::endl;
            continue;
        }
        file << std::fixed << std::setprecision(6);

        for (Point start : starts) {
            double x1 = start.x;
            double x2 = start.y;

            for (double t = 0; t <= Constants::T; t += Constants::dt) {
                if (std::abs(x1) > 20.0 || std::abs(x2) > 20.0)
                    break;

                file << t << " " << x1 << " " << x2 << "\n";
                step(x1, x2, Constants::dt, alpha);
            }
            file << "\n\n";
        }
        file.close();
    }

    std::string bif_path = Constants::DAT_DIR + Constants::bif_filename;
    std::ofstream bifFile(bif_path);

    if (bifFile.is_open()) {
        for (double a = -0.5; a <= 1.0; a += 0.01) {
            if (a <= 0)
                bifFile << a << " " << 0.0 << " " << "nan" << "\n";
            else {
                double r_cycle = std::sqrt((2.0 * a) / 3.0);
                bifFile << a << " " << r_cycle << " " << 0.0 << "\n";
            }
        }
        bifFile.close();
    }

    return 0;
}

Point get_derivatives(double x1, double x2, double alpha) {
    double r2 = x1 * x1 + x2 * x2;
    double dx1 = 0.4 * alpha * x1 - x2 - 0.6 * x1 * r2;
    double dx2 = x1 + 0.4 * alpha * x2 - 0.6 * x2 * r2;
    return {dx1, dx2};
}

void step(double& x1, double& x2, double dt, double alpha) {
    Point k1 = get_derivatives(x1, x2, alpha);

    Point k2 = get_derivatives(x1 + 0.5 * dt * k1.x,
                               x2 + 0.5 * dt * k1.y, alpha);

    Point k3 = get_derivatives(x1 + 0.5 * dt * k2.x,
                               x2 + 0.5 * dt * k2.y, alpha);

    Point k4 = get_derivatives(x1 + dt * k3.x,
                               x2 + dt * k3.y, alpha);
```

```
    x1 += (dt / 6.0) * (k1.x + 2 * k2.x + 2 * k3.x + k4.x);
    x2 += (dt / 6.0) * (k1.y + 2 * k2.y + 2 * k3.y + k4.y);
}
```

Выводы

Анализ по первому методу Ляпунова (в декартовых координатах) показал, что действительная часть собственных чисел матрицы линеаризации меняет знак при прохождении параметра α через ноль. Это является необходимым условием возникновения бифуркации рождения предельного цикла.

Исследование в полярных координатах позволило установить характер устойчивости и определить радиус предельного цикла:

При $\alpha \leq 0$ начало координат является устойчивым фокусом. Все траектории стремятся к нулю. При $\alpha > 0$ состояние равновесия в начале координат теряет устойчивость (становится неустойчивым фокусом), и вокруг него рождается устойчивый предельный цикл.