

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Российский химико-технологический университет имени Д.И.  
Менделеева»

## ЛЕКЦИЯ №1

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович  
Ссылка на репозиторий: [https://github.com/  
CorgiPuppy/  
chem-tech-control-sys-labs](https://github.com/CorgiPuppy/chem-tech-control-sys-labs)

Москва  
2025

# Оглавление

Термодинамический анализ . . . . .	1
Уравнения сохранения . . . . .	1

# Термодинамический анализ

## Уравнения сохранения

Рассмотрю многофазную полидисперсную среду, где первая фаза (сплошная несущая) - газ или жидкость,  $r$  - фаза включений частиц, капель или пузырьков, размеры (объёмы) которых  $r - dr, r + dr$ .

Введу средние плотности в каждой точке объёма, занятого смесью:

$$\rho = \rho_1 + \int_0^R \rho_2^0 f(r) r dr; \quad \alpha = \alpha_1 + \int_0^R r f(r) dr;$$
$$\rho_1 = \rho_1^0 \alpha_1; \quad \alpha_2 = \int_0^R r f(r) dr,$$

где  $\alpha_i$  - объёмные содержания фаз;  $\rho$  - плотность смеси;  $\rho_i^0, \rho_i$  - истинные и средние плотности фаз соответственно;  $R$  - наибольший размер (объём) включения; индекс 1 относится к несущей фазе, индекс 2 - ко всей дисперсной (гетерогенной) фазе.

Дисперсность гетерогенной фазы характеризуется функцией  $f(r)$ , так что  $f(r)dr$  - число включений в единице объёма смеси, размеры (объёмы) которых от  $r$  до  $r + dr$ .

Можно принять, что несущая фаза и все  $r$ -фазы - континуумы (материальная среда, которая считается сплошной, т.е. не разделенной на отдельные частицы или молекулы), заполняющие один и тот же объём и имеющие свою плотность, массу, скорость, температуру.

Введение многоскоростного континуума необходимо, т.к. скорости относительно-го движения фаз в смеси по порядку могут быть равны скоростям их абсолютного движения. 1-ю фазу буду описывать моделью вязкой жидкости. В качестве тензоров поверхностных  $\sigma_1^{kl}, \sigma_2^{kl}$  сил и тензоров вязких напряжений  $\tau_1^{kl}$  приму:

$$\sigma_1^{kl} = -P_1 \delta^{kl} + \tau_1^{kl}, \quad \sigma_2^{kl} = 0, \quad \tau_1^{kl} = \lambda \nabla \nu_1 + 2\mu_1 e_1^{kl},$$

где  $\sigma^{kl}$  - символ Кронекера;  $P_1$  - давление;  $e_1^{kl}$  - тензор скоростей деформаций несущей фазы;  $\lambda, \mu_1$  - коэффициенты вязкости.

**Уравнение сохранения массы сплошной фазы:**

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \nu_1) = - \int_0^R \rho_2^0 f \eta dr, \quad (1)$$

где  $\nu_1$  - средняя массовая скорость несущей фазы;  $R$  - максимальный размер (объём) включений;  $\eta$  - наблюдаемая скорость изменения размера (объёма) включения.

В уравнении (1) член в правой части отражает суммарное влияние фазового перехода на включениях.

**Уравнение баланса числа включений с учётом изменения объёма включения за счёт фазового перехода:**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \nu_2) + \frac{\partial}{\partial r}(f \eta) = 0,$$

где  $\nu_2$  - средняя массовая скорость  $r$ -фазы;

### Уравнения движения сплошной и $r$ -фазы:

$$\rho_1 \frac{d_1 \nu_1}{dt} = -\alpha_1 \nabla P_1 + \nabla^k \tau_1^k - \int_0^R \rho_2^0 f r f_{12} dr - \int_0^R \rho_2^0 f \eta (\nu_2 - \nu_1) dr + F_1,$$

$$\frac{D_2}{Dt} \nu_2(r) = -\nabla \frac{P_1}{\rho_2^0} + f_{12}(r) + F_2(r),$$

где  $P$  - давление  $[\nabla P = (\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z})]$ ;  $F_1, F_2$  - массовые силы, действующие на несущую и  $r$ -фазу соответственно;  $f_{12}$  - сила взаимодействия между несущей и  $r$ -фазами.

*1-ое слагаемое* в правых частях уравнений характеризует влияние поверхностных сил, действующих на каждую фазу; член, содержащий силу взаимодействия  $f_{12}$ , определяет влияние сил трения на движение несущей и  $r$ -фазы соответственно; слагаемое, содержащее  $F_i (i = 1, 2)$ , отображает воздействие массовых сил на изменение импульса несущей фазы и включения соответственно; *4-ое слагаемое* в уравнении движения несущей фазы представляет изменение импульса несущей фазы за счёт фазового превращения.

### Уравнение изменения внутренней энергии сплошной фазы:

$$\rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} = \frac{\alpha_1 P_1}{\rho_1^0} \frac{d\rho_1^0}{dt} + \tau_1^{kl} e_1^{kl} + \int_0^R \rho_2^0 f r f_{12} (\nu_1 - \nu_2) dr + \int_0^R \rho_2^0 f \eta \frac{(\nu_2 - \nu_1)^2}{2} dr - \int_0^R q_{1\sigma} dr - \nabla q_1 + \rho_1 Q_{1*}, \quad (2)$$

где  $u_1$  - удельная внутренняя энергия несущей фазы;  $q_{1\sigma}$  - поток тепла (не связанный с фазовыми переходами), отнесённый к единице объёма смеси от несущей фазы к поверхности раздела фаз;  $\rho_1 Q_{1*}$  - мощность объёмного источника тепла в 1-фазе.

*1-ое слагаемое* в правой части в уравнении (2) представляет обратимую работу сжатия материала фазы. *2-ое* и *3-е слагаемые* представляют переход кинетической энергии во внутреннюю энергию за счёт вязкостного взаимодействия как в самой несущей фазе, так и при взаимодействии с включениями. *4-ое слагаемое* характеризует переход во внутреннюю энергию части кинетической энергии из-за неравновесного обмена импульсом при фазовых превращениях, происходящих при неравных скоростях фаз; *5-ое, 6-ое, 7-ое слагаемые* характеризуют изменение внутренней энергии сплошной фазы за счёт теплообмена с поверхностью раздела фаз, теплопереноса в сплошной фазе путём теплопроводности, наличия источника тепла.

### Уравнение изменения внутренней энергии дисперсной фазы:

$$\rho_2^0 f r \frac{D_2 u_2}{dt} = \frac{\alpha_2 P_2}{\rho_2^0} \frac{d\rho_2^0}{dt} - q_{2\sigma}(r) + \rho_2^0 f r Q_{2*}, \quad (3)$$

где  $u_2$  - удельная внутренняя энергия  $r$ -фазы;  $q_{2\sigma}$  - поток тепла (не связанный с фазовыми переходами), отнесённый к единице объёма смеси от  $r$ -фазы к поверхности раздела фаз;  $\rho_2 Q_{2*}$  - мощность объёмного источника тепла во 2-фазе.

*1-ое слагаемое* в правой части в уравнении (3) представляет обратимую работу сжатия материала фазы. *2-ое* и *3-е слагаемые* в правой части отражают изменение внутренней энергии  $r$ -фазы за счёт теплообмена с поверхностью раздела фаз, наличия источника тепла.

**Уравнение изменения внутренней энергии поверхности раздела фаз (сплошной и  $r$ -фазы):**

$$f \frac{D_2 u_\sigma^1}{Dt} = q_{1\sigma}(r) + q_{2\sigma}(r) - \rho_2^0 f \eta (i_2 - i_1),$$

где  $u_\sigma$  - поверхностная энергия, приходящаяся на одно включение;  $i_1, i_2$  - энтальпии несущей и  $r$ -фазы соответственно.

*1-ое слагаемое* в правой части описывает теплообмен со сплошной фазой, *2-ое слагаемое* - теплообмен с  $r$ -фазой. Приток (отток) тепла к поверхности раздела фаз за счёт фазового превращения, т.е. роль источник (стока) тепла, необходимого для фазового превращения, принадлежит поверхности раздела фаз.

**Уравнение сохранения реагирующего компонента в несущей фазе:**

$$\rho_1 \frac{d_1 c}{dt} = (c - m) \left( \int_0^R \rho_2^0 f \eta dr \right).$$