

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И.
Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №10

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович
Ссылка на репозиторий: [https://github.com/
CorgiPuppy/
num-methods-eq-math-phys-chem-labs](https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs)
Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна
Дата сдачи: 28.04.2025

Москва
2025

Оглавление

| | |
|-----------------------------|----|
| Описание задачи | 1 |
| Выполнение задачи | 2 |
| Задание 1 | 2 |
| Задание 2 | 2 |
| Задание 3 | 3 |
| Задание 4 | 3 |
| Задание 5 | 3 |
| Задание 6 | 4 |
| Задание 7 | 4 |
| Задание 8 | 5 |
| Задание 9 | 7 |
| Задание 10 | 7 |
| Задание 11 | 7 |
| Задание 12 | 7 |
| Задание 13 | 8 |
| Задание 14 | 9 |
| Задание 15 | 10 |
| Задание 16 | 10 |
| Задание 17 | 10 |
| Задание 18 | 11 |
| Задание 19 | 11 |
| Задание 20 | 12 |
| Задание 21 | 12 |

Описание задачи

| Уравнение | Интервалы переменных | Начальные и граничные условия |
|---|--|---|
| $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + txe^y$ | $x \in [0, 1]$ $y \in [0, 1]$ $t \in [0, 1]$ | $u(t = 0, x, y) = 0$ $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x = 0, y) = te^y \\ u(t, x = 1, y) = te^y \end{cases}$ $\begin{cases} u(t, x, y = 0) = tx \\ \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y = 1) = 2.7tx \end{cases}$ |

Для заданного уравнения:

1. записать неявную разностную схему;
2. получить условие устойчивости разностной схемы;
 - (a) записать схему расщепления;
 - (b) определить порядок аппроксимации разностной схемы;
 - (c) привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;
 - (d) проверить сходимость прогонки;
 - (e) записать рекуррентное прогоночное соотношение;
 - (f) составить алгоритм (блок-схему) расчёта.
- (a) записать схему переменных направлений;
- (b) определить порядок аппроксимации разностной схемы;
- (c) привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;
- (d) проверить сходимость прогонки;
- (e) записать рекуррентное прогоночное соотношение;
- (f) составить алгоритм (блок-схему) расчёта.
- (a) записать схему предиктор-корректор;
- (b) определить порядок аппроксимации разностной схемы;
- (c) привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;
- (d) проверить сходимость прогонки;
- (e) записать рекуррентное прогоночное соотношение для предиктора;
- (f) записать рекуррентное прогоночное соотношение для корректора;
- (g) составить алгоритм (блок-схему) расчёта.

Выполнение задачи

Задание 1

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 16 \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + 12 \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + (n+1)\Delta t(i-1)h_x e^{j-1}h_y. \quad (1)$$

Задание 2

Получить условие устойчивости разностной схемы:

Исследую устойчивость неявной разностной схемы (1), аппроксимирующей исходное дифференциальное уравнение, с помощью спектрального метода. Для этого отброшу член $(n+1)\Delta t(i-1)h_x e^y$, наличие которого не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представлю решение в виде гармоник:

$$u_{i,j}^n = \lambda^n e^{i\alpha i} e^{i\beta j}, \quad \alpha \in [0, 2\pi], \beta \in [0, 2\pi]. \quad (2)$$

Подставляя (2) в разностную схему (1), получаю:

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha i} e^{i\beta j} - \lambda^n e^{i\alpha i} e^{i\beta j}}{\Delta t} = 16 \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha(i+1)} e^{i\beta j} - 2\lambda^{n+1} e^{i\alpha i} e^{i\beta j} + \lambda^{n+1} e^{i\alpha(i-1)} e^{i\beta j}}{h_x^2} + 12 \frac{\lambda^{n+1} e^{i\beta i} e^{i\beta(j+1)} - 2\lambda^{n+1} e^{i\beta i} e^{i\beta j} + \lambda^{n+1} e^{i\beta i} e^{i\beta(j-1)}}{h_y^2}.$$

Упрощая полученное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha i} e^{i\beta j}$:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = 16\lambda \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h_x^2} + 12\lambda \frac{e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}}{h_y^2}.$$

Преобразую комплексные числа из экспоненциальной формы в тригонометрическую:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha, e^{\pm i\beta} = \cos \beta \pm i \sin \beta \Rightarrow \frac{\lambda - 1}{\Delta t} = 16\lambda \frac{2 \cos \alpha - 2}{h_x^2} + 12\lambda \frac{2 \cos \beta - 2}{h_y^2}.$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \cos \beta = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

получаю формулу, из которой затем выражаю λ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \frac{-64\lambda \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{h_x^2} + \frac{-48\lambda \sin^2 \frac{\beta}{2}}{h_y^2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1 + \frac{64\Delta t \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{h_x^2} + \frac{48\Delta t \sin^2 \frac{\beta}{2}}{h_y^2}}.$$

С учётом необходимого условия устойчивости разностных схем $|\lambda| \leq 1$ имею:

$$-1 \leq \frac{1}{1 + \frac{64\Delta t \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{h_x^2} + \frac{48\Delta t \sin^2 \frac{\beta}{2}}{h_y^2}} \leq 1.$$

В полученном двойном неравенстве левое и правое условие выполняются автоматически.

Для любых значений Δt , h_x и h_y неравенство выполняется. Следовательно, разностная схема **абсолютно устойчива**.

Задание 3

Записать схему расщепления:

Рассмотрю метод разрешения неявной разностной схемы (1), называемый **методом дробных шагов**. Данный метод позволяет представить разностной схему (1) в виде двух подсхем, каждая из которых может быть решена с помощью метода прогонки.

Разобью пополам интервал Δt между точками t^n и t^{n+1} на разностной сетке и обозначу полученную промежуточную точку как $t^{n+\frac{1}{2}}$.

Запишу на первом полушаге интервала Δt неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную второго порядка по координате x :

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 16 \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}. \quad (3)$$

Запишу на втором полушаге интервала Δt неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную вторую порядка по координате y :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 12 \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}. \quad (4)$$

Складывая подсхемы (3) и (4), получаю соотношение, отличающееся от неявной разностной схемы (1) только тем, что вторая производная по координате x аппроксимирована в нём не на $(n+1)$ -м шаге по времени, а на шаге $(n + \frac{1}{2})$:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 16 \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + 12 \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}. \quad (5)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение из условия задачи может быть аппроксимировано с помощью последовательного разрешения двух подсхем (3), (4), называемых в совокупности **схемой расщепления**.

Задание 4

Определить порядок аппроксимации разностной схемы расщепления (5): $O(\Delta t, h_x^2, h_y^2)$.

Задание 5

Привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки:

Первая подсхема

Приведу подсхему (3) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-16 \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 32 \frac{\Delta t}{h_x^2}) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - 16 \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^n + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}.$$

Вторая подсхема

Приведу подсхему (4) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-12\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j+1}^{n+1} + (1 + 24\frac{\Delta t}{h_y^2})u_{i,j}^{n+1} - 12\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j-1}^{n+1} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Задание 6

Проверить сходимость прогонки:

Первая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению (3), имеют вид:

$$a_i = c_i = -16\frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad b_i = 1 + 32\frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad \xi_{i,j}^n = u_{i,j}^n + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}.$$

Легко видеть, что для первой подсхемы (3) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_i| + |c_i| = 32\frac{\Delta t}{h_x^2} < 1 + 32\frac{\Delta t}{h_x^2} = |b_i|.$$

Вторая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению (4), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = \tilde{c}_j = -12\frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_j = 1 + 24\frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{\xi}_{i,j}^n = u_{i,j}^n + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}.$$

Легко видеть, что для второй подсхемы (4) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = 24\frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 24\frac{\Delta t}{h_y^2} = |\tilde{b}_j|.$$

Задание 7

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы (3) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i \beta_{i-1}}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}.$$

Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы (4) имеет вид:

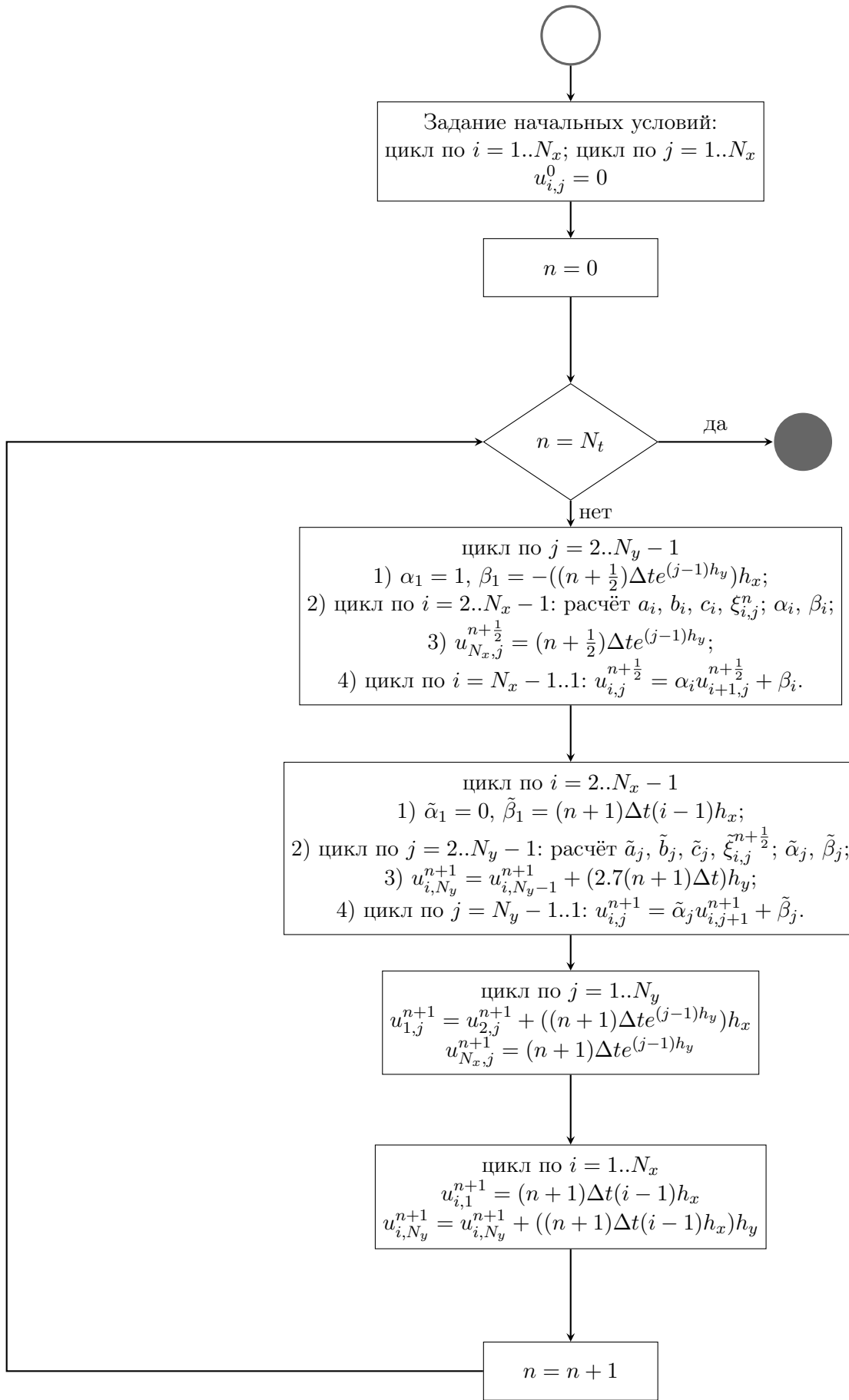
$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+1} + \tilde{\beta}_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_j \tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

Задание 8

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:



Задание 9

Записать схему переменных направлений:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{16}{2} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{12}{2} \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}, \\ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{16}{2} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{12}{2} \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Первая подсхема в схеме переменных направлений (6) аппроксимирует производную по времени на первом полушаге интервала Δt и является неявной по координате x и явной по координате y . Вторая подсхема аппроксимирует производную по времени на втором полушаге интервала Δt и является неявной по координате y и явной по координате x . Каждая из подсхем (как и в случае *схемы расщепления* (3), (4)) является **абсолютно устойчивой**.

Задание 10

Определить порядок аппроксимации разностной схемы: $O(\Delta t^2, h_x^2, h_y^2)$.

Задание 11

Привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки:

Первая подсхема

Приведу первую подсхему (6) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2}) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^n + \frac{12}{2} \Delta t \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}.$$

Вторая подсхема

Приведу вторую подсхему (6) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2} u_{i,j+1}^{n+1} + (1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2}) u_{i,j}^{n+1} - \frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2} u_{i,j-1}^{n+1} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{16}{2} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \Delta t((n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}).$$

Задание 12

Проверить сходимость прогонки:

Первая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению первой подсхемы (6), имеют вид:

$$a_i = c_i = -\frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad b_i = 1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad \xi_{i,j}^n = u_{i,j}^n + \frac{12}{2} \Delta t \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}.$$

Легко видеть, что для первой подсхемы (6) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_i| + |c_i| = 16 \frac{\Delta t}{h_x^2} < 1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2} = |b_i|.$$

Вторая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению второй подсхемы (6), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = \tilde{c}_j = -\frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_j = 1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{\xi}_{i,j}^n = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{16}{2} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \Delta t((n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}).$$

Легко видеть, что для второй подсхемы (6) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = 12 \frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2} = |\tilde{b}_j|.$$

Задание 13

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы (6) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i \beta_{i-1}}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}.$$

Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы (6) имеет вид:

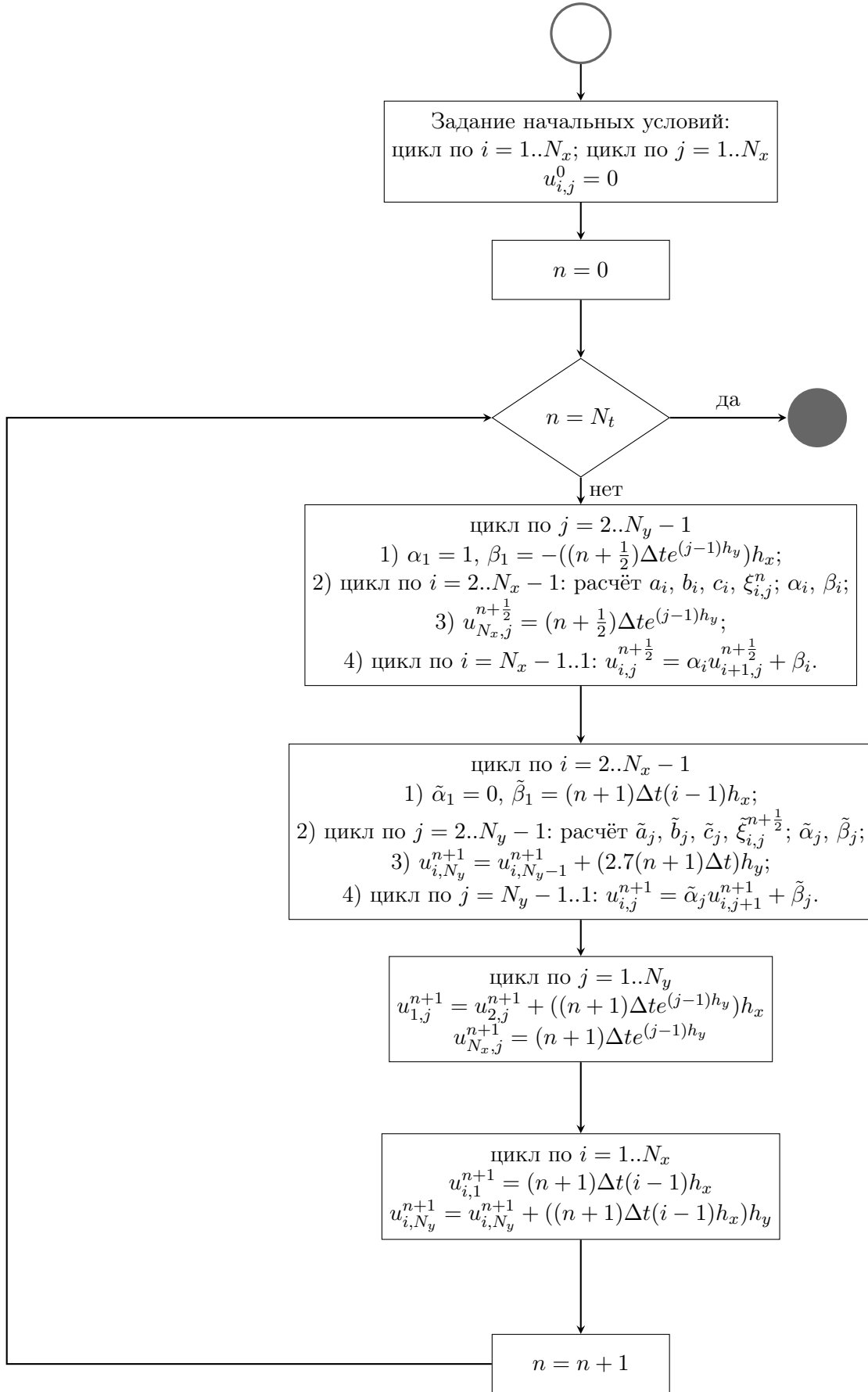
$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+1} + \tilde{\beta}_j.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_j \tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

Задание 14

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:



Задание 15

Записать схему предиктор-корректор:

Данная схема требует особого способа расщепления интервала Δt : интервал Δt между точками t^n и t^{n+1} на разностной сетке делится пополам; интервал $\Delta t/2$ между точками t^n и $t^{n+\frac{1}{2}}$ снова делится пополам.

На первом полушаге интервала $\Delta t/2$ записывается неявная разностная схема, в которой учитывается только производная второго порядка по координате x :

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - u_{i,j}^n}{\Delta t/2} = 16 \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{4}}}{h_x^2}. \quad (7)$$

На втором полушаге интервала $\Delta t/2$ записывается неявная разностная схема, в которой учитывается только производная второго порядка по координате y :

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}}{\Delta t/2} = 12 \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2}. \quad (8)$$

Результатом последовательного решения подсхем (7), (8), называемых в совокупности **предиктором**, являются значения функции $u(t, x, y)$ на шаге по времени $(n+\frac{1}{2})$. Для завершения расчётов на всём интервале Δt используется поправочное разностное соотношение, называемое **корректором**:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 16 \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + 12 \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2} + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}. \quad (9)$$

Таким образом, схема предиктор-корректор в случае двумерных задач состоит из трёх подсхем.

Задание 16

Определить порядок аппроксимации разностной схемы: $O(\Delta t^2, h_x^2, h_y^2)$.

Задание 17

Привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки:

Первая подсхема

Приведу первую подсхему предиктора (7) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} + (1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2}) u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - \frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{4}} = u_{i,j}^n.$$

Вторая подсхема

Приведу вторую подсхему предиктора (8) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2} u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2}) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2} u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}.$$

Задание 18

Проверить сходимость прогонки:

Первая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению первой подсхемы предиктора (7), имеют вид:

$$a_i = c_i = -\frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad b_i = 1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad \xi_{i,j}^n = u_{i,j}^n.$$

Легко видеть, что для первой подсхемы предиктора (8) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_i| + |c_i| = 16 \frac{\Delta t}{h_x^2} < 1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2} = |b_i|.$$

Вторая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению второй подсхемы предиктора (8), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = \tilde{c}_j = -\frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_j = 1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{\xi}_{i,j}^n = u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}.$$

Легко видеть, что для второй подсхемы предиктора (8) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = 12 \frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2} = |\tilde{b}_j|.$$

Задание 19

Записать рекуррентное прогоночное соотношение для предиктора:

Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы предиктора (7) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i \beta_{i-1}}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}.$$

Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы предиктора (8) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - \tilde{c}_j \tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

Задание 20

Записать рекуррентное прогоночное соотношение для корректора (9):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + 16\Delta t \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + 12\Delta t \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \Delta t \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t (i-1) h_x e^{(j-1)h_y} \right).$$

Задание 21

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:

