Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №11

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович
Ссылка на репозиторий: https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs
Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна
Дата сдачи: 05.05.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + 7\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{tx} + e^{ty} + y$	$x \in [0,1]$ $y \in [0,1]$ $t \in [0,1]$	$u(t=0,x,y) = 2 + xy$ $\begin{cases} u(t,x=0,y) = 2.7t + y \\ u(t,x=1,y) = e^t + y \end{cases}$ $\begin{cases} u(t,x,y=0) = 2 + x \\ u(t,x,y=1) = te^x + x \end{cases}$

Для заданного уравнения:

1. записать неявную разностную схему;
2. записать схему переменных направлений;
3. привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;
4. проверить сходимость прогонки;
5. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
6. составить алгоритм (блок-схему) расчёта.

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} - 4\frac{\partial u}{\partial y} = t + x^2 - y^2$	$x \in [0,1]$ $y \in [0,1]$ $t \in [0,1]$	$u(t=0,x,y) = x^2 - y^2$ $u(t,x=1,y) = t + y^2$ $u(t,x,y=1) = t + x^2$

Для заданного уравнения:

7. записать явную разностную схему;
8. вывести рекуррентное соотношение;
9. составить алгоритм (блок-схему) расчёта.
10. записать неявную разностную схему;
11. записать схему расщепления;
12. вывести рекуррентное соотношение;
13. составить алгоритм (блок-схему) расчёта.
14. записать схему предиктор-корректор;

15. вывести рекуррентное соотношение для предиктора;
16. вывести рекуррентное соотношение для корректора;
17. составить алгоритм (блок-схему) расчёта.

Выполнение задачи

Задание 1

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}-3\frac{u_{i+1,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{h_x}+7\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y}=\frac{u_{i+1,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2}+4\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}+ \\ +e^{(n+1)\Delta t(i-1)h_x}+e^{(n+1)\Delta t(j-1)h_y}+(j-1)h_y. \quad (1)$$

Задание 2

Записать схему переменных направлений для схемы (1):

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}-\frac{3}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x}+\frac{7}{2}\frac{u_{i,j}^{n}-u_{i,j-1}^{n}}{h_y}=\frac{1}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}+\frac{4}{2}\frac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}, \\ \frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}-\frac{3}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x}+\frac{7}{2}\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y}=\frac{1}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}+\frac{4}{2}\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}+ \\ +e^{(n+\frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x}+e^{(n+\frac{1}{2})\Delta t(j-1)h_y}+(j-1)h_y. \quad (2)$$

Первая подсхема в схеме переменных направлений (2) аппроксимирует производную по времени на первом полушаге интервала Δt и является неявной по координате x и явной по координате y. Вторая подсхема аппроксимирует производную по времени на втором полушаге интервала Δt и является неявной по координате y и явной по координате x.

Задание 3

Привести схемы (2) к виду, удобному для использования метода прогонки:

Первая подсхема

Приведу первую подсхему (2) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$(-\frac{3}{2}\frac{\Delta t}{h_x}-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h_x^2})u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+(1+\frac{3}{2}\frac{\Delta t}{h_x}+\frac{\Delta t}{h_x^2})u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h_x^2}u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}=u_{i,j}^{n}-\frac{7}{2}\frac{u_{i,j}^{n}-u_{i,j-1}^{n}}{h_y}+\frac{4}{2}\Delta t\frac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}.$$

Вторая подсхема

Приведу вторую подсхему (2) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{4}{2}\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j+1}^{n+1}+(1+\frac{7}{2}\frac{\Delta t}{h_y}+4\frac{\Delta t}{h_y^2})u_{i,j}^{n+1}-(\frac{7}{2}\frac{\Delta t}{h_y}+\frac{4}{2}\frac{\Delta t}{h_y^2})u_{i,j-1}^{n+1}=u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x}+\frac{1}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}+ \\ +e^{(n+\frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x}+e^{(n+\frac{1}{2})\Delta t(j-1)h_y}+(j-1)h_y.$$

Задание 4

Проверить сходимость прогонки для схем (2):

Первая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению первой подсхемы (2), имеют вид:

$$a_i = -\frac{3}{2}\frac{\Delta t}{h_x} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad b_i = 1 + \frac{3}{2}\frac{\Delta t}{h_x} + \frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad c_i = -\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad \xi_{i,j}^n = u_{i,j}^n - \frac{7}{2}\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{h_y} + \frac{4}{2}\Delta t\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}.$$

Легко видеть, что для первой подсхемы (2) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_i| + |c_i| = \frac{3}{2}\frac{\Delta t}{h_x} + \frac{\Delta t}{h_x^2} < 1 + \frac{3}{2}\frac{\Delta t}{h_x} + \frac{\Delta t}{h_x^2} = |b_i|.$$

Вторая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению второй подсхемы (2), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = -\frac{4}{2}\frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_j = 1 + \frac{7}{2}\frac{\Delta t}{h_y} + 4\frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{c}_j = -(\frac{7}{2}\frac{\Delta t}{h_y} + \frac{4}{2}\frac{\Delta t}{h_y^2}),$$

$$\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} + \frac{1}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + e^{(n+\frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x} + e^{(n+\frac{1}{2})\Delta t(j-1)h_y} + (j-1)h_y.$$

Легко видеть, что для второй подсхемы (2) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = \frac{7}{2}\frac{\Delta t}{h_y} + 4\frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + \frac{7}{2}\frac{\Delta t}{h_y} + 4\frac{\Delta t}{h_y^2} = |\tilde{b}_j|.$$

Задание 5

Записать рекуррентное прогоночное соотношение для схем (2):

Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы (2) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i\alpha_{i-1}}, \ \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i\beta_{i-1}}{b_i + c_i\alpha_{i-1}}.$$

Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы (2) имеет вид:

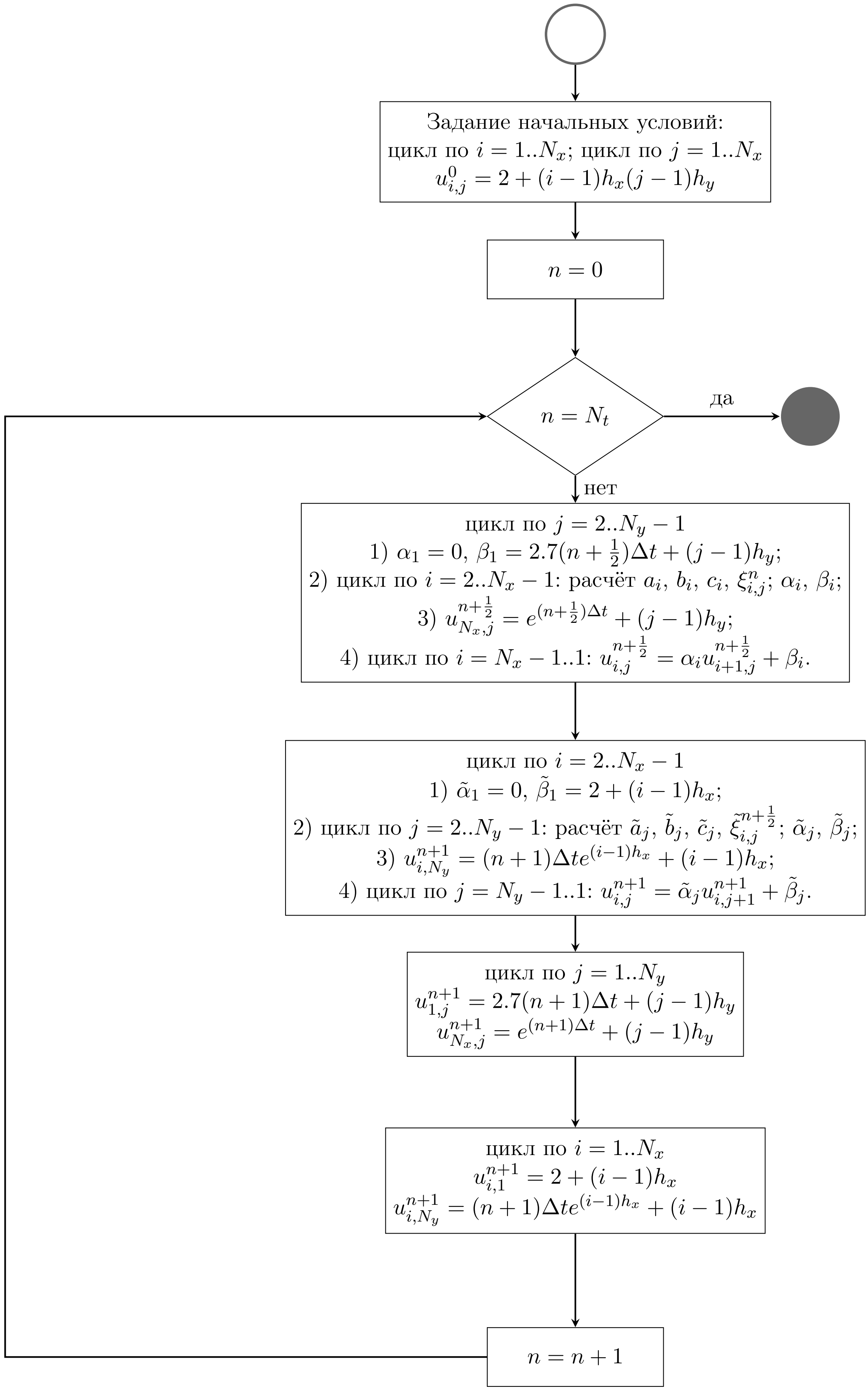
$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+1} + \tilde{\beta}_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j\tilde{\alpha}_{j-1}}, \ \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_j\tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j\tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

Задание 6

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта для схем (2):



Задание 7

Записать явную разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} - 2\frac{u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}{h_x} - 4\frac{u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}{h_y} = n\Delta t + ((i-1)h_x)^2 - ((j-1)h_y)^2. \qquad (3)$$

Задание 8

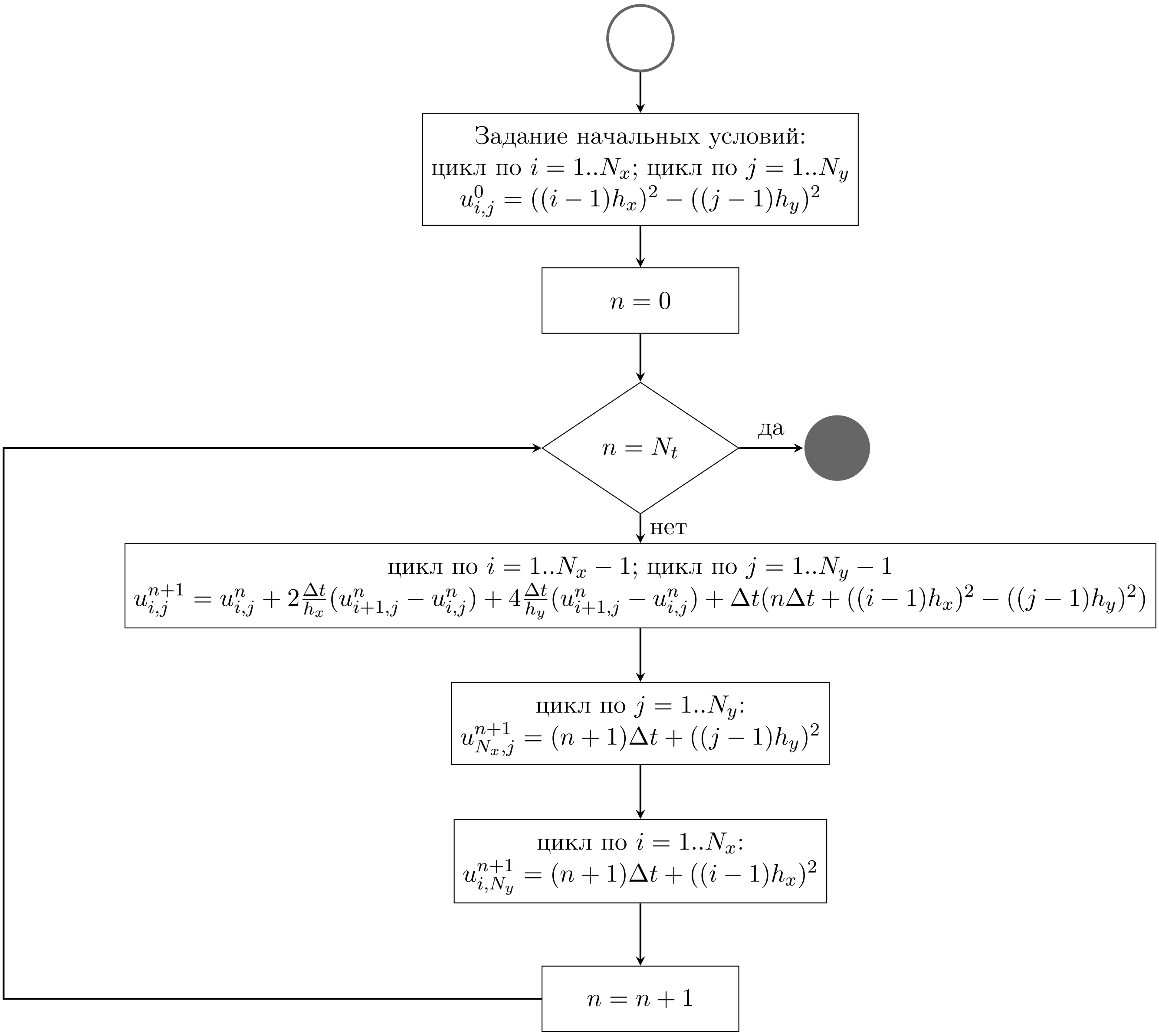
Вывести рекуррентное соотношение для схемы (3):

Выражаю $u_{i,j}^{n+1}$ из разностной схемы (3):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + 2\frac{\Delta t}{h_x}(u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}) + 4\frac{\Delta t}{h_y}(u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}) + \Delta t(n\Delta t + ((i-1)h_x)^2 - ((j-1)h_y)^2).$$

Задание 9

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта схемы (3):



Задание 10

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}-2\frac{u_{i+1,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{h_x}-4\frac{u_{i+1,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{h_y}=(n+1)\Delta t+((i-1)h_x)^2-((j-1)h_y)^2. \quad (4)$$

Задание 11

Записать схему расщепления для схемы (4): Рассмотрю метод разрешения неявной разностной схемы (4), называемый **методом дробных шагов**. Данный метод позволяет представить разностной схему (4) в виде двух подсхем, каждая из которых может быть решена с помощью метода прогонки.

Разобью пополам интервал Δt между точками t^n и t^{n+1} на разностной сетке и обозначу полученную промежуточную точку как $t^{n+\frac{1}{2}}$.

Запишу на первом полушаге интервала Δt неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную второго порядка по координате x:

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}-2\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x}=(n+\frac{1}{2})\Delta t+((i-1)h_x)^2-((j-1)h_y)^2. \quad (5)$$

Запишу на втором полушаге интервала Δt неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную вторую порядка по координате y:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}-4\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{h_y}=0. \quad (6)$$

Складывая подсхемы (5) и (6), получаю соотношение, отличающееся от неявной разностной схемы (4) только тем, что вторая производная по координате x аппроксимирована в нём не на *(n+1)*-м шаге по времени, а на шаге $(n+\frac{1}{2})$:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}-2\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x}-4\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{h_y}=(n+\frac{1}{2})\Delta t+((i-1)h_x)^2-((j-1)h_y)^2. \quad (7)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение из условия задачи может быть аппроксимировано с помощью последовательного разрешения двух подсхем (5), (6), называемых в совокупности **схемой расщепления**.

Задание 12

Вывести рекуррентное соотношение для подсхем (5) и (6):

Первая подсхема

Выражаю $u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ и разностной схемы (5):

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2\frac{\Delta t}{h_x}}{1+2\frac{\Delta t}{h_x}} u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{u_{i,j}^{n} + \Delta t((n+\frac{1}{2})\Delta t + ((i-1)h_x)^2 - ((j-1)h_y)^2)}{1+2\frac{\Delta t}{h_x}}.$$

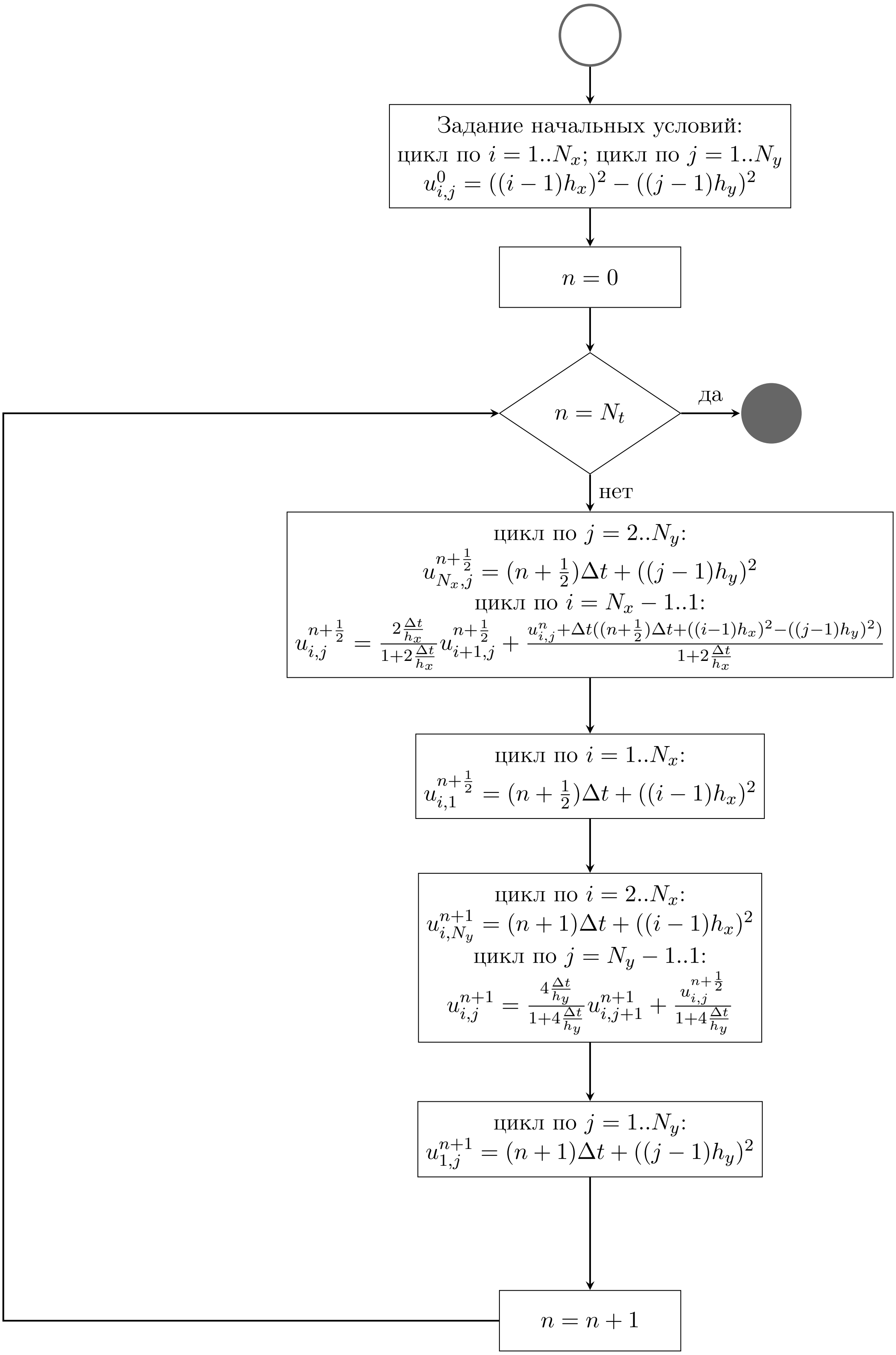
Вторая подсхема

Выражаю $u_{i,j}^{n+1}$ и разностной схемы (6):

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{4\frac{\Delta t}{h_y}}{1+4\frac{\Delta t}{h_y}} u_{i,j+1}^{n+1} + \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{1+4\frac{\Delta t}{h_y}}.$$

Задание 13

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта схемы (7):



Задание 14

Записать схему предиктор-корректор: Данная схема требует особого способа расщепления интервала Δt: интервал Δt между точками t^n и t^{n+1} на разностной сетке делится пополам; интервал $\Delta t/2$ между точками t^n и $t^{n+\frac{1}{2}}$ снова делится пополам.

На первом полушаге интервала $\Delta t/2$ записывается неявная разностная схема, в которой учитывается только производная по координате x:

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t/2} - 2\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}}{h_x} = 0. \tag{8}$$

На втором полушаге интервала $\Delta t/2$ записывается неявная разностная схема, в которой учитывается только производная по координате y:

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}}{\Delta t/2} - 4\frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y} = 0. \tag{9}$$

Результатом последовательного решения подсхем (8), (9), называемых в совокупности **предиктором**, являются значения функции *u(t, x, y)* на шаге по времени $(n+\frac{1}{2})$. Для завершения расчётов на всём интервале Δt используется поправочное разностное соотношение, называемое **корректором**:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} - 2\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} - 4\frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y} = (n+\frac{1}{2})\Delta t + ((i-1)h_x)^2 - ((j-1)h_y)^2. \tag{10}$$

Таким образом, схема предиктор-корректор в случае двумерных задач состоит из трёх подсхем.

Задание 15

Вывести рекуррентное соотношение для подсхем предиктора (8) и (9):

Первая подсхема

Выражаю $u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}$ и разностной схемы (8):

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\Delta t}{h_x}}{1 + \frac{\Delta t}{h_x}} u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} + \frac{u_{i,j}^{n}}{1 + \frac{\Delta t}{h_x}}.$$

Вторая подсхема

Выражаю $u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ и разностной схемы (9):

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2\frac{\Delta t}{h_y}}{1 + 2\frac{\Delta t}{h_y}} u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}}{1 + 2\frac{\Delta t}{h_y}}.$$

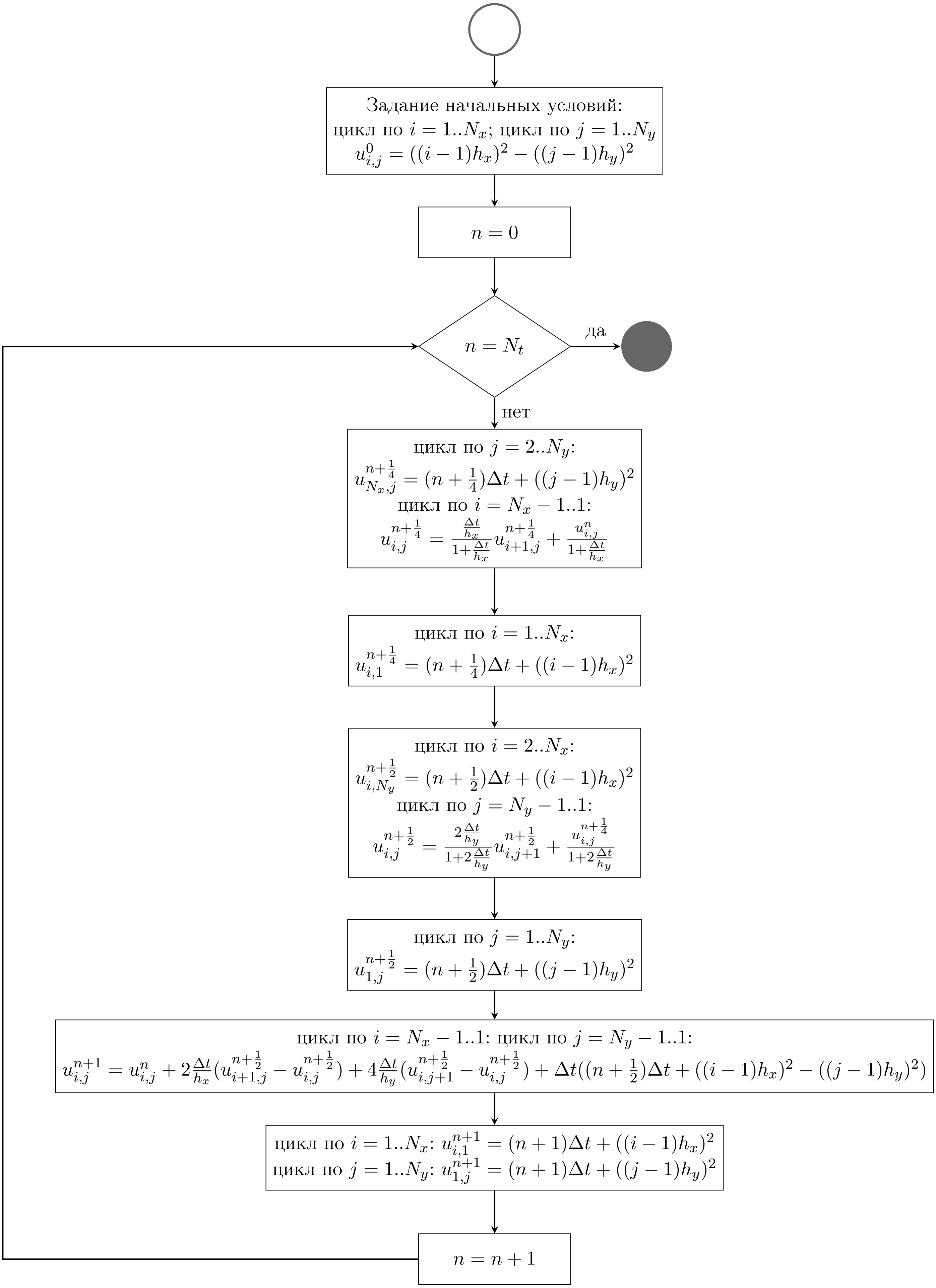
Задание 16

Вывести рекуррентное соотношение для корректора (10):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + 2\frac{\Delta t}{h_x}(u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) + 4\frac{\Delta t}{h_y}(u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \Delta t((n+\frac{1}{2})\Delta t + ((i-1)h_x)^2 - ((j-1)h_y)^2).$$

Задание 17

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта для схем (8)-(10).


Задание начальных условий:
цикл по $i = 1..N_x$; цикл по $j = 1..N_y$
$u_{i,j}^0 = ((i-1)h_x)^2 - ((j-1)h_y)^2$
$n = 0$
$n = N_t$
да
нет
цикл по $j = 2..N_y$:
$u_{N_x,j}^{n+\frac{1}{4}} = (n+\frac{1}{4})\Delta t + ((j-1)h_y)^2$
цикл по $i = N_x - 1..1$:
$u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\Delta t}{h_x}}{1+\frac{\Delta t}{h_x}} u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} + \frac{u_{i,j}^n}{1+\frac{\Delta t}{h_x}}$
цикл по $i = 1..N_x$:
$u_{i,1}^{n+\frac{1}{4}} = (n+\frac{1}{4})\Delta t + ((i-1)h_x)^2$
цикл по $i = 2..N_x$:
$u_{i,N_y}^{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})\Delta t + ((i-1)h_x)^2$
цикл по $j = N_y - 1..1$:
$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2\frac{\Delta t}{h_y}}{1+2\frac{\Delta t}{h_y}} u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}}{1+2\frac{\Delta t}{h_y}}$
цикл по $j = 1..N_y$:
$u_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})\Delta t + ((j-1)h_y)^2$
цикл по $i = N_x - 1..1$: цикл по $j = N_y - 1..1$:
$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + 2\frac{\Delta t}{h_x}(u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) + 4\frac{\Delta t}{h_y}(u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \Delta t((n+\frac{1}{2})\Delta t + ((i-1)h_x)^2 - ((j-1)h_y)^2)$
цикл по $i = 1..N_x$: $u_{i,1}^{n+1} = (n+1)\Delta t + ((i-1)h_x)^2$
цикл по $j = 1..N_y$: $u_{1,j}^{n+1} = (n+1)\Delta t + ((j-1)h_y)^2$
$n = n + 1$