Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4

Вариант 9

Выполнил студент группы КС-36:	Золотухин Андрей Александрович
Ссылка на репозиторий:	https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs
Принял:	Лебедев Данила Александрович
Дата сдачи:	07.05.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи

Вариант	Уравнение	Метод	Граничные условия
9	$\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + 4$	Установление со схемой Кранка-Николсона	$\begin{cases} u(t, x = 0) = 1 \\ u(t, x = 1) = 6.7 \end{cases}$

Для заданного уравнения:

1. представить задачу в нестационарном виде;
2. записать разностную схему Кранка-Николсона;
3. привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки;
4. проверить сходимость прогонки;
5. найти α_1, β_1, u_N^{n+1};
6. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
7. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
8. построить программу на любом удобном языке программирования;
9. построить численный расчёт с использованием различных значений Δt = *{0.1; 0.01; 0.001}*, h = *{0.1; 0.01}*;
10. Сравнить результаты вычислений между собой в точках: x = *{0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1}*.

Выполнение задачи

Задание 1

Представить задачу в нестационарном виде:

Представлю стационарную задачу в нестационарном виду. Для этого в уравнение необходимо добавить фиктивную производную по времени:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + 4 \rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + 4. \qquad (1)$$

При этом искомая функция станет уже функцией двух переменных:

$$u(x) \rightarrow \tilde{u}(x, \tau).$$

Задание 2

Записать разностную схему Кранка-Николсона для уравнения (1):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + \frac{1}{2}\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + 4. \qquad (2)$$

Задание 3

Привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h^2}u_{j+1}^{n+1} + (1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h} + \frac{\Delta t}{h^2})u_j^{n+1} - (\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h} + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h^2})u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n) + \Delta t 4.$$

Введу следующие обозначения:

$$a_j = -\tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h^2},\ b_j = 1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h} + \tfrac{\Delta t}{h^2},\ c_j = -(\tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h^2}),$$
$$\xi_j^n = u_j^n + \tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n) + \Delta t 4.$$

С учётом обозначений равенство будет иметь вид:

$$\alpha_j u_{j+1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j-1}^{n+1} = \xi_j^n.$$

Данное преобразование называется *преобразованием неявной схемы к виду, удобному для использования метода прогонки.*

Задание 4

Проверить сходимость прогонки:

Легко видеть, что для разностной схемы (2) достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

Задание 5

Найти α_1, β_1, u_N^{n+1}:

Для реализации разностной схемы Кранка-Николсона требуется ввести некоторое дополнительное условие, связывающее значения функции *u(t, x)* на *(n+1)*-м шаге по времени. Представлю это дополнительное условие в виде линейной зависимости

$$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta j, \tag{3}$$

справедливой для любого из значений $j = 1..N - 1$.

Соотношение (3) называют **рекуррентным прогоночным соотношением**, а коэффициенты α_j, β_j - **прогоночными коэффициентами**.

Для определения прогоночных коэффициентов на *1*-м шаге по координате x, использую рекуррентное прогоночное соотношение (3), записанное для $j = 1$:

$$u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1$$

и левое граничное условие:

$$u_1^{n+1} = 1.$$

Сравнивая эти два соотношения, получаю:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1.$$

Значение фуннкции *u(t, x)* на *(n+1)*-м шаге по времени в крайней правой точке, которое можно определить из правого граничного условия:

$$u_N^{n+1} = 6.7.$$

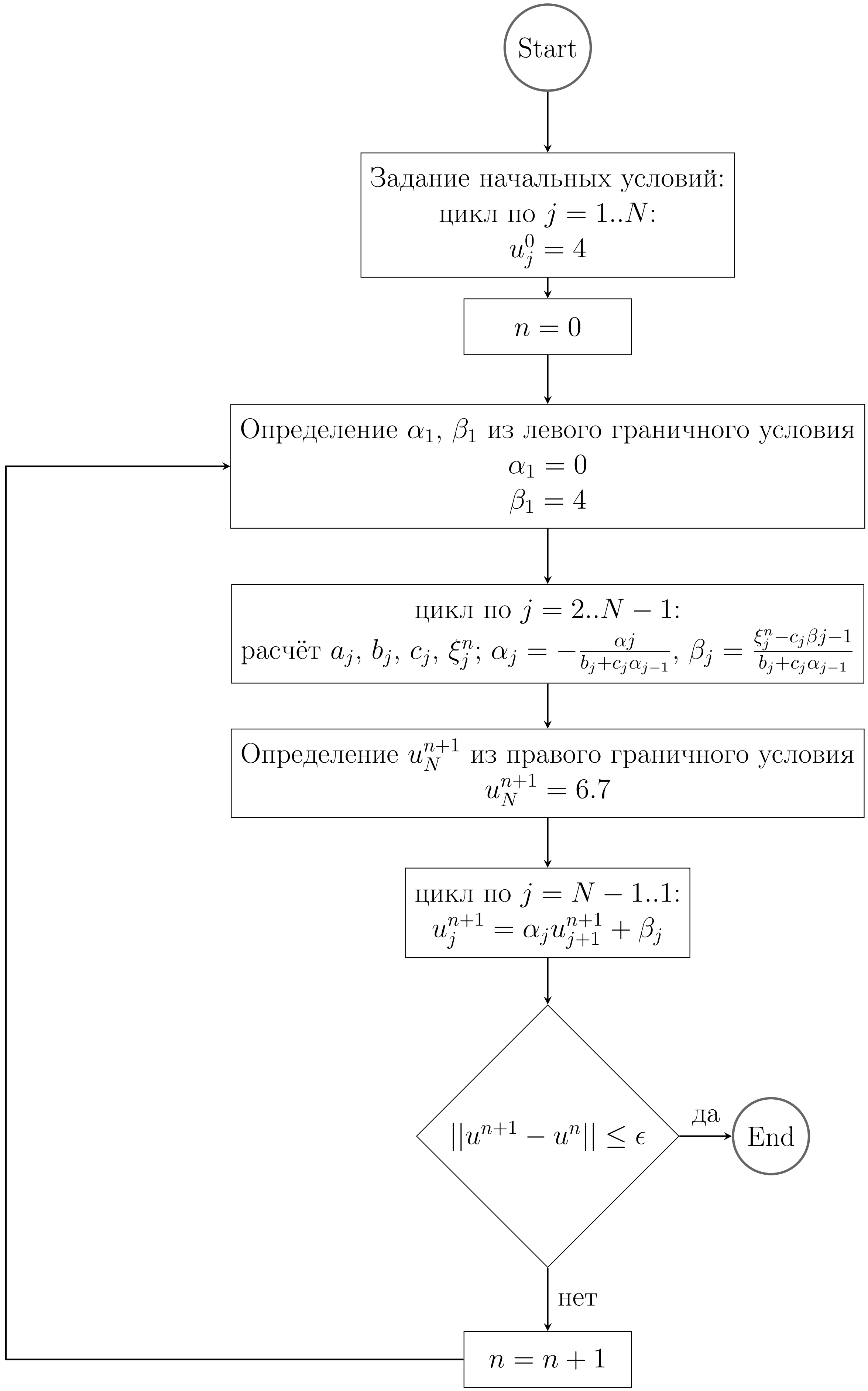
Задание 6

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Соотношение (3) является **рекуррентным прогоночным соотношением**.

Задание 7

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:


Start
Задание начальных условий:
цикл по $j = 1..N$:
$u_j^0 = 4$
$n = 0$
Определение α_1, β_1 из левого граничного условия
$\alpha_1 = 0$
$\beta_1 = 4$
цикл по $j = 2..N-1$:
расчёт a_j, b_j, c_j, ξ_j^n; $\alpha_j = -\frac{\alpha j}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}$, $\beta_j = \frac{\xi_j^n - c_j \beta j - 1}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}$
Определение u_N^{n+1} из правого граничного условия
$u_N^{n+1} = 6.7$
цикл по $j = N-1..1$:
$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$
$||u^{n+1} - u^n|| \leq \epsilon$
да
End
нет
$n = n + 1$