

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Российский химико-технологический университет имени Д.И.  
Менделеева»

## ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №9

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович  
Ссылка на репозиторий: [https://github.com/  
CorgiPuppy/  
num-methods-eq-math-phys-chem-labs](https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs)  
Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна  
Дата сдачи: 21.04.2025

Москва  
2025

# Оглавление

Описание задачи . . . . .	1
Выполнение задачи . . . . .	2
Задание 1 . . . . .	2
Задание 2 . . . . .	2
Задание 3 . . . . .	3
Задание 4 . . . . .	3
Задание 5 . . . . .	3
Задание 6 . . . . .	4
Задание 7 . . . . .	4
Задание 8 . . . . .	5
Задание 9 . . . . .	7
Задание 10 . . . . .	7
Задание 11 . . . . .	7
Задание 12 . . . . .	7
Задание 13 . . . . .	8
Задание 14 . . . . .	9
Задание 15 . . . . .	10
Задание 16 . . . . .	10
Задание 17 . . . . .	10
Задание 18 . . . . .	11
Задание 19 . . . . .	11
Задание 20 . . . . .	12
Задание 21 . . . . .	12

## Описание задачи

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + txe^y$	$x \in [0, 1]$ $y \in [0, 1]$ $t \in [0, 1]$	$u(t = 0, x, y) = 0$ $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x = 0, y) = te^y \\ u(t, x = 1, y) = te^y \end{cases}$ $\begin{cases} u(t, x, y = 0) = tx \\ \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y = 1) = 2.7tx \end{cases}$

Для заданного уравнения:

1. записать неявную разностную схему;
2. получить условие устойчивости разностной схемы;
  - (a) записать схему расщепления;
  - (b) определить порядок аппроксимации разностной схемы;
  - (c) привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;
  - (d) проверить сходимость прогонки;
  - (e) записать рекуррентное прогоночное соотношение;
  - (f) составить алгоритм (блок-схему) расчёта.
- (a) записать схему переменных направлений;
- (b) определить порядок аппроксимации разностной схемы;
- (c) привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;
- (d) проверить сходимость прогонки;
- (e) записать рекуррентное прогоночное соотношение;
- (f) составить алгоритм (блок-схему) расчёта.
- (a) записать схему предиктор-корректор;
- (b) определить порядок аппроксимации разностной схемы;
- (c) привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;
- (d) проверить сходимость прогонки;
- (e) записать рекуррентное прогоночное соотношение для предиктора;
- (f) записать рекуррентное прогоночное соотношение для корректора;
- (g) составить алгоритм (блок-схему) расчёта.

# Выполнение задачи

## Задание 1

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 16 \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + 12 \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + (n+1)\Delta t(i-1)h_x e^y. \quad (1)$$

## Задание 2

Получить условие устойчивости разностной схемы:

Исследую устойчивость неявной разностной схемы (1), аппроксимирующей исходное дифференциальное уравнение, с помощью спектрального метода. Для этого отброшу член  $(n+1)\Delta t(i-1)h_x e^y$ , наличие которого не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представлю решение в виде гармоник:

$$u_{i,j}^n = \lambda^n e^{i\alpha i} e^{i\beta j}, \quad \alpha \in [0, 2\pi], \beta \in [0, 2\pi]. \quad (2)$$

Подставляя (2) в разностную схему (1), получаю:

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha i} e^{i\beta j} - \lambda^n e^{i\alpha i} e^{i\beta j}}{\Delta t} = 16 \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha(i+1)} e^{i\beta j} - 2\lambda^{n+1} e^{i\alpha i} e^{i\beta j} + \lambda^{n+1} e^{i\alpha(i-1)} e^{i\beta j}}{h_x^2} + 12 \frac{\lambda^{n+1} e^{i\beta(i)} e^{i\beta(j+1)} - 2\lambda^{n+1} e^{i\beta(i)} e^{i\beta j} + \lambda^{n+1} e^{i\beta(i)} e^{i\beta(j-1)}}{h_y^2}.$$

Упрощая полученное выражение, деля левую и правую его части на  $\lambda^n e^{i\alpha i} e^{i\beta j}$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = 16\lambda \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h_x^2} + 12\lambda \frac{e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}}{h_y^2}.$$

Преобразую комплексные числа из экспоненциальной формы в тригонометрическую:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha, e^{\pm i\beta} = \cos \beta \pm i \sin \beta \Rightarrow \frac{\lambda - 1}{\Delta t} = 16\lambda \frac{2 \cos \alpha - 2}{h_x^2} + 12\lambda \frac{2 \cos \beta - 2}{h_y^2}.$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \cos \beta = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

получаю формулу, из которой затем выражаю  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \frac{-64\lambda \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{h_x^2} + \frac{-48\lambda \sin^2 \frac{\beta}{2}}{h_y^2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1 + \frac{64\Delta t \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{h_x^2} + \frac{48\Delta t \sin^2 \frac{\beta}{2}}{h_y^2}}.$$

С учётом необходимого условия устойчивости разностных схем  $|\lambda| \leq 1$  имею:

$$-1 \leq \frac{1}{1 + \frac{64\Delta t \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{h_x^2} + \frac{48\Delta t \sin^2 \frac{\beta}{2}}{h_y^2}} \leq 1.$$

В полученном двойном неравенстве левое и правое условие выполняются автоматически.

Для любых значений  $\Delta t$ ,  $h_x$  и  $h_y$  неравенство выполняется. Следовательно, разностная схема **абсолютно устойчива**.

### Задание 3

Записать схему расщепления:

Рассмотрю метод разрешения неявной разностной схемы (1), называемый **методом дробных шагов**. Данный метод позволяет представить разностной схему (1) в виде двух подсхем, каждая из которых может быть решена с помощью метода прогонки.

Разобью пополам интервал  $\Delta t$  между точками  $t^n$  и  $t^{n+1}$  на разностной сетке и обозначу полученную промежуточную точку как  $t^{n+\frac{1}{2}}$ .

Запишу на первом полушаге интервала  $\Delta t$  неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную второго порядка по координате  $x$ :

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 16 \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}. \quad (3)$$

Запишу на втором полушаге интервала  $\Delta t$  неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную вторую порядка по координате  $y$ :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 12 \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}. \quad (4)$$

Складывая подсхемы (3) и (4), получаю соотношение, отличающееся от неявной разностной схемы (1) только тем, что вторая производная по координате  $x$  аппроксимирована в нём не на  $(n+1)$ -м шаге по времени, а на шаге  $(n + \frac{1}{2})$ :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 16 \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + 12 \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}. \quad (5)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение из условия задачи может быть аппроксимировано с помощью последовательного разрешения двух подсхем (3), (4), называемых в совокупности **схемой расщепления**.

### Задание 4

Определить порядок аппроксимации разностной схемы расщепления (5):

### Задание 5

Привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки:

#### Первая подсхема

Приведу подсхему (3) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-16 \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 32 \frac{\Delta t}{h_x^2}) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - 16 \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^n + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}.$$

### Вторая подсхема

Приведу подсхему (4) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-12\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j+1}^{n+1} + (1 + 24\frac{\Delta t}{h_y^2})u_{i,j}^{n+1} - 12\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j-1}^{n+1} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}.$$

### Задание 6

Проверить сходимость прогонки:

#### Первая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению (3), имеют вид:

$$a_i = c_i = -16\frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad b_i = 1 + 32\frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad \xi_{i,j}^n = u_{i,j}^n + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}.$$

Легко видеть, что для первой подсхемы (3) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_i| + |c_i| = 32\frac{\Delta t}{h_x^2} < 1 + 32\frac{\Delta t}{h_x^2} = |b_i|.$$

#### Вторая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению (4), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = \tilde{c}_j = -12\frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_j = 1 + 24\frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{\xi}_{i,j}^n = u_{i,j}^n + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}.$$

Легко видеть, что для второй подсхемы (4) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = 24\frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 24\frac{\Delta t}{h_y^2} = |\tilde{b}_j|.$$

### Задание 7

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

#### Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы (3) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i \beta_{i-1}}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}.$$

### Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы (4) имеет вид:

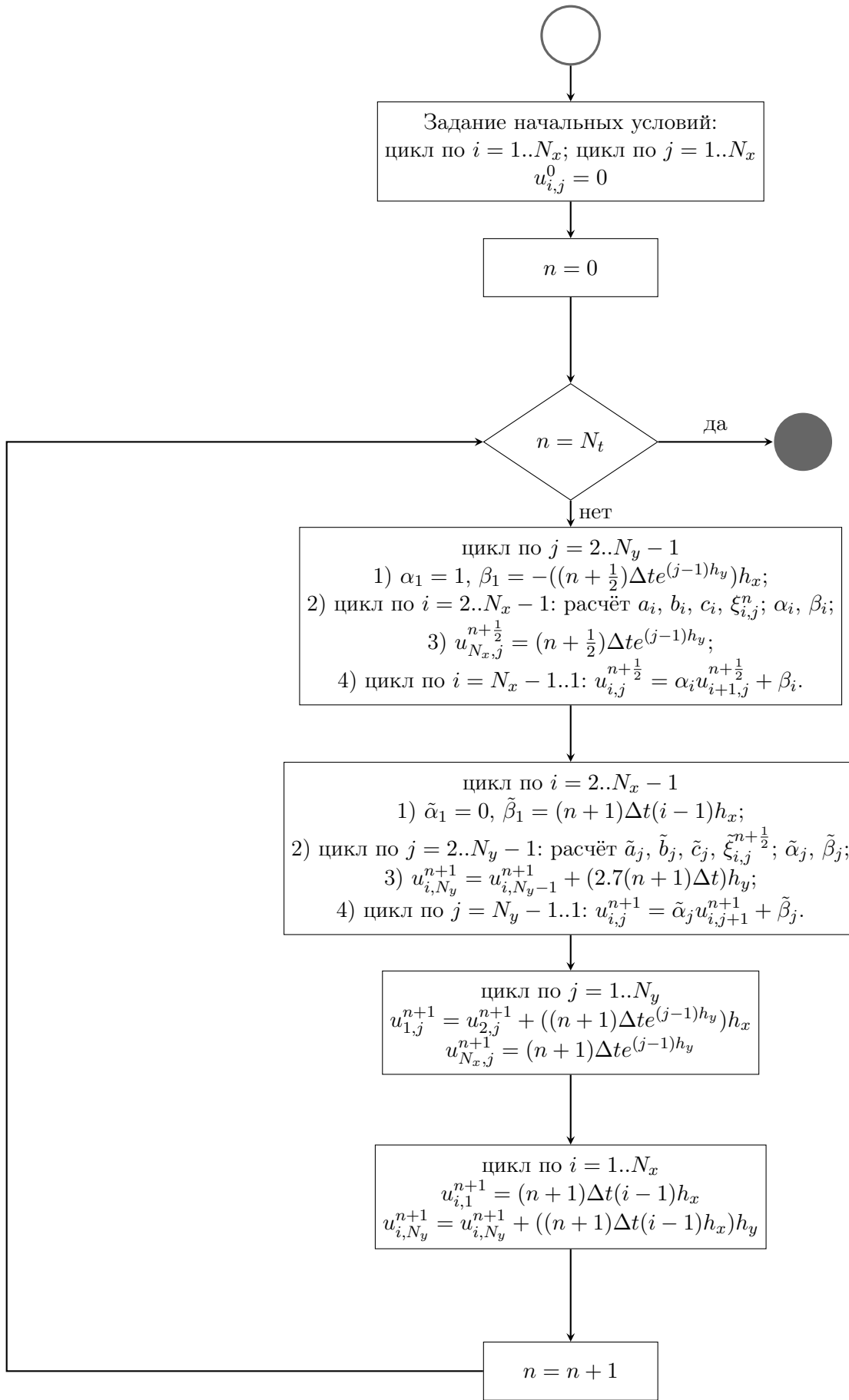
$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+1} + \tilde{\beta}_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_j \tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

### Задание 8

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:





## Задание 9

Записать схему переменных направлений:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{16}{2} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{12}{2} \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}, \\ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{16}{2} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{12}{2} \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Первая подсхема в схеме переменных направлений (6) аппроксимирует производную по времени на первом полушаге интервала  $\Delta t$  и является неявной по координате  $x$  и явной по координате  $y$ . Вторая подсхема аппроксимирует производную по времени на втором полушаге интервала  $\Delta t$  и является неявной по координате  $y$  и явной по координате  $x$ . Каждая из подсхем (как и в случае *схемы расщепления* (3), (4)) является **абсолютно устойчивой**.

## Задание 10

Определить порядок аппроксимации разностной схемы:

## Задание 11

Привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки:

### Первая подсхема

Приведу первую подсхему (6) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2}) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^n + \frac{12}{2} \Delta t \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}.$$

### Вторая подсхема

Приведу вторую подсхему (6) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2} u_{i,j+1}^{n+1} + (1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2}) u_{i,j}^{n+1} - \frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2} u_{i,j-1}^{n+1} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{16}{2} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \Delta t((n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}).$$

## Задание 12

Проверить сходимость прогонки:

### Первая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению первой подсхемы (6), имеют вид:

$$a_i = c_i = -\frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad b_i = 1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad \xi_{i,j}^n = u_{i,j}^n + \frac{12}{2} \Delta t \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}.$$

Легко видеть, что для первой подсхемы (6) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_i| + |c_i| = 16 \frac{\Delta t}{h_x^2} < 1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2} = |b_i|.$$

### Вторая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению второй подсхемы (6), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = \tilde{c}_j = -\frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_j = 1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{\xi}_{i,j}^n = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{16}{2} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \Delta t((n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}).$$

Легко видеть, что для второй подсхемы (6) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = 12 \frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2} = |\tilde{b}_j|.$$

### Задание 13

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

#### Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы (6) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i \beta_{i-1}}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}.$$

#### Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы (6) имеет вид:

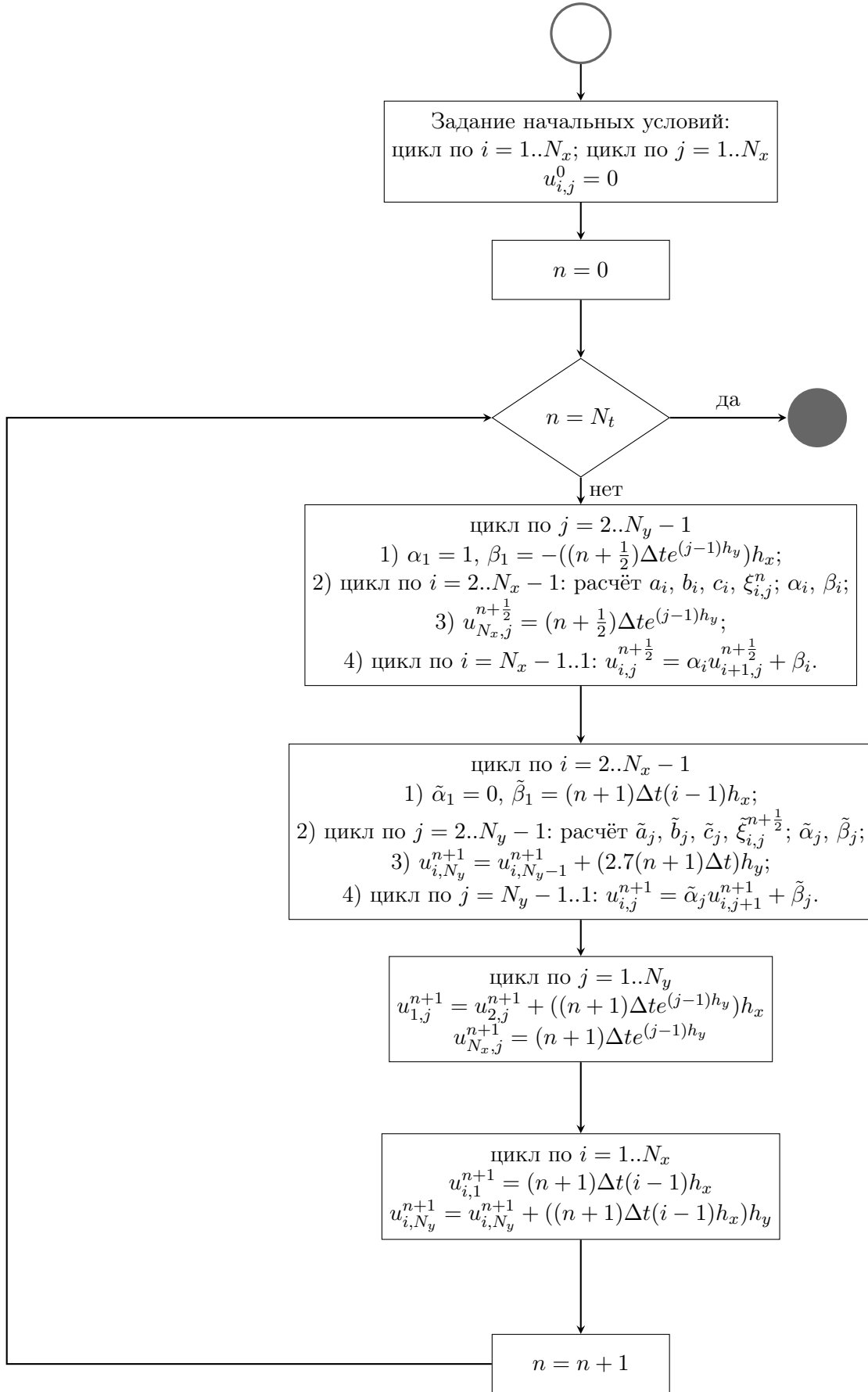
$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+1} + \tilde{\beta}_j.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_j \tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

## Задание 14

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:



## Задание 15

Записать схему предиктор-корректор:

Данная схема требует особого способа расщепления интервала  $\Delta t$ : интервал  $\Delta t$  между точками  $t^n$  и  $t^{n+1}$  на разностной сетке делится пополам; интервал  $\Delta t/2$  между точками  $t^n$  и  $t^{n+\frac{1}{2}}$  снова делится пополам.

На первом полушаге интервала  $\Delta t/2$  записывается неявная разностная схема, в которой учитывается только производная второго порядка по координате  $x$ :

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - u_{i,j}^n}{\Delta t/2} = 16 \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{4}}}{h_x^2}. \quad (7)$$

На втором полушаге интервала  $\Delta t/2$  записывается неявная разностная схема, в которой учитывается только производная второго порядка по координате  $y$ :

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}}{\Delta t/2} = 12 \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2}. \quad (8)$$

Результатом последовательного решения подсхем (7), (8), называемых в совокупности **предиктором**, являются значения функции  $u(t, x, y)$  на шаге по времени  $(n+\frac{1}{2})$ . Для завершения расчётов на всём интервале  $\Delta t$  используется поправочное разностное соотношение, называемое **корректором**:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 16 \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + 12 \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2} + (n + \frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}. \quad (9)$$

Таким образом, схема предиктор-корректор в случае двумерных задач состоит из трёх подсхем.

## Задание 16

Определить порядок аппроксимации разностной схемы:

## Задание 17

Привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки:

### Первая подсхема

Приведу первую подсхему предиктора (7) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} + (1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2}) u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - \frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{4}} = u_{i,j}^n.$$

### Вторая подсхема

Приведу вторую подсхему предиктора (8) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2} u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2}) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2} u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}.$$

## Задание 18

Проверить сходимость прогонки:

### Первая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению первой подсхемы предиктора (7), имеют вид:

$$a_i = c_i = -\frac{16}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad b_i = 1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad \xi_{i,j}^n = u_{i,j}^n.$$

Легко видеть, что для первой подсхемы предиктора (8) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_i| + |c_i| = 16 \frac{\Delta t}{h_x^2} < 1 + 16 \frac{\Delta t}{h_x^2} = |b_i|.$$

### Вторая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению второй подсхемы предиктора (8), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = \tilde{c}_j = -\frac{12}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_j = 1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{\xi}_{i,j}^n = u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}.$$

Легко видеть, что для второй подсхемы предиктора (8) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = 12 \frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 12 \frac{\Delta t}{h_y^2} = |\tilde{b}_j|.$$

## Задание 19

Записать рекуррентное прогоночное соотношение для предиктора:

### Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы предиктора (7) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i \beta_{i-1}}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}.$$

## Вторая подсьема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсьемы предиктора (8) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - \tilde{c}_j \tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

## Задание 20

Записать рекуррентное прогоночное соотношение для корректора (??):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + 16\Delta t \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + 12\Delta t \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \Delta t \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta t (i-1) h_x e^{(j-1)h_y} \right).$$

## Задание 21

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:

