Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №9

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович
Ссылка на репозиторий: https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs
Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна
Дата сдачи: 21.04.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + txe^y$	$x \in [0,1]$ $y \in [0,1]$ $t \in [0,1]$	$u(t=0,x,y)=0$ $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t,x=0,y) = te^y \\ u(t,x=1,y) = te^y \end{cases}$ $\begin{cases} u(t,x,y=0) = tx \\ \frac{\partial u}{\partial y}(t,x,y=1) = 2.7tx \end{cases}$

Для заданного уравнения:

1. записать неявную разностную схему;
2. получить условие устойчивости разностной схемы;

   (a) записать схему расщепления;

   (b) определить порядок аппроксимации разностной схемы;

   (c) привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;

   (d) проверить сходимость прогонки;

   (e) записать рекуррентное прогоночное соотношение;

   (f) составить алгоритм (блок-схему) расчёта.

   (a) записать схему переменных направлений;

   (b) определить порядок аппроксимации разностной схемы;

   (c) привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;

   (d) проверить сходимость прогонки;

   (e) записать рекуррентное прогоночное соотношение;

   (f) составить алгоритм (блок-схему) расчёта.

   (a) записать схему предиктор-корректор;

   (b) определить порядок аппроксимации разностной схемы;

Выполнение задачи

Задание 1

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}=16\frac{u_{i+1,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2}+12\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}+(n+1)\Delta t(i-1)h_x e^y. \tag{1}$$

Задание 2

Получить условие устойчивости разностной схемы:

Исследую устойчивость неявной разностной схемы (1), аппроксимирующей исходное дифференциальное уравнение, с помощью спектрального метода. Для этого отброшу член $(n+1)\Delta t(i-1)h_x e^y$, наличие которого не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представлю решение в виде гармоники:

$$u_{i,j}^{n}=\lambda^n e^{i\alpha i}e^{i\alpha j},\ \alpha\in[0,2\pi],\beta\in[0,2\pi]. \tag{2}$$

Подставляя (2) в разностную схему (1), получаю:

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha i}e^{i\alpha j}-\lambda^n e^{i\alpha i}e^{i\alpha j}}{\Delta t}=16\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha(i+1)}e^{i\alpha j}-2\lambda^{n+1}e^{i\alpha i}e^{i\alpha j}+\lambda^{n+1}e^{i\alpha(i-1)}e^{i\alpha j}}{h_x^2}+12\frac{\lambda^{n+1}e^{i\beta i}e^{i\beta(j+1)}-2\lambda^{n+1}e^{i\beta i}e^{i\beta j}+\lambda^{n+1}e^{i\beta i)}e^{i\beta(j-1)}}{h_y^2}.$$

Упрощая полученное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha i}e^{i\alpha j}$:

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t}=16\lambda\frac{e^{i\alpha}-2+e^{-i\alpha}}{h_x^2}+12\lambda\frac{e^{i\beta}-2+e^{-i\beta}}{h_y^2}.$$

Преобразую комплексные числа из экспоненциальной формы в тригонометрическую:

$$e^{\pm i\alpha}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha, e^{\pm i\beta}=\cos\beta\pm i\sin\beta\Rightarrow\frac{\lambda-1}{\Delta t}=16\lambda\frac{2\cos\alpha-2}{h_x^2}+12\lambda\frac{2\cos\beta-2}{h_y^2}.$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2},\cos\beta=\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}=1-2\sin^2\frac{\beta}{2},$$

получаю формулу, из которой затем выражаю λ:

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t}=\frac{-64\lambda\sin^2\frac{\alpha}{2}}{h_x^2}+\frac{-48\lambda\sin^2\frac{\beta}{2}}{h_y^2}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{1+\frac{64\Delta t\sin^2\frac{\alpha}{2}}{h_x^2}+\frac{48\Delta t\sin^2\frac{\beta}{2}}{h_y^2}}.$$

С учётом необходимого условия устойчивости разностных схем $|\lambda|\le 1$ имею:

$$-1\le\frac{1}{1+\frac{64\Delta t\sin^2\frac{\alpha}{2}}{h_x^2}+\frac{48\Delta t\sin^2\frac{\beta}{2}}{h_y^2}}\le 1.$$

В полученном двойном неравенстве левое и правое условие выполняются автоматически.

Для любых значений Δt, h_x и h_y неравенство выполняется. Следовательно, разностная схема **абсолютно устойчива**.

Задание 3

Записать схему расщепления:

Рассмотрю метод разрешения неявной разностной схемы (1), называемый **методом дробных шагов**. Данный метод позволяет представить разностной схему (1) в виде двух подсхем, каждая из которых может быть решена с помощью метода прогонки.

Разобью пополам интервал Δt между точками t^n и t^{n+1} на разностной сетке и обозначу полученную промежуточную точку как $t^{n+\frac{1}{2}}$.

Запишу на первом полушаге интервала Δt неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную второго порядка по координате x:

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = 16\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + (n+\frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}. \tag{3}$$

Запишу на втором полушаге интервала Δt неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную вторую порядка по координате y:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 12\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}. \tag{4}$$

Складывая подсхемы (3) и (4), получаю соотношение, отличающееся от неявной разностной схемы (1) только тем, что вторая производная по координате x аппроксимирована в нём не на *(n+1)*-м шаге по времени, а на шаге $(n+\frac{1}{2})$:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = 16\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + 12\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + (n+\frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}. \tag{5}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение из условия задачи может быть аппроксимировано с помощью последовательного разрешения двух подсхем (3), (4), называемых в совокупности **схемой расщепления**.

Задание 4

Определить порядок аппроксимации разностной схемы расщепления (5):

Задание 5

Привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки:

Первая подсхема

Приведу подсхему (3) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-16\frac{\Delta t}{h_x^2}u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1+32\frac{\Delta t}{h_x^2})u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - 16\frac{\Delta t}{h_x^2}u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^{n} + (n+\frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}.$$

Вторая подсхема

Приведу подсхему (4) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-12\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j+1}^{n+1} + (1+24\frac{\Delta t}{h_y^2})u_{i,j}^{n+1} - 12\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j-1}^{n+1} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Задание 6

Проверить сходимость прогонки:

Первая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению (3), имеют вид:

$$a_i = c_i = -16\tfrac{\Delta t}{h_x^2}, \quad b_i = 1 + 32\tfrac{\Delta t}{h_x^2}, \quad \xi_{i,j}^n = u_{i,j}^n + (n+\tfrac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}.$$

Легко видеть, что для первой подсхемы (3) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_i| + |c_i| = 32\frac{\Delta t}{h_x^2} < 1 + 32\frac{\Delta t}{h_x^2} = |b_i|.$$

Вторая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению (4), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = \tilde{c}_j = -12\tfrac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_j = 1 + 24\tfrac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{\xi}_{i,j}^n = u_{i,j}^n + (n+\tfrac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}.$$

Легко видеть, что для второй подсхемы (4) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = 24\frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 24\frac{\Delta t}{h_y^2} = |\tilde{b}_j|.$$

Задание 7

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы (3) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i\alpha_{i-1}}, \ \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i\beta_{i-1}}{b_i + c_i\alpha_{i-1}}.$$

Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы (4) имеет вид:

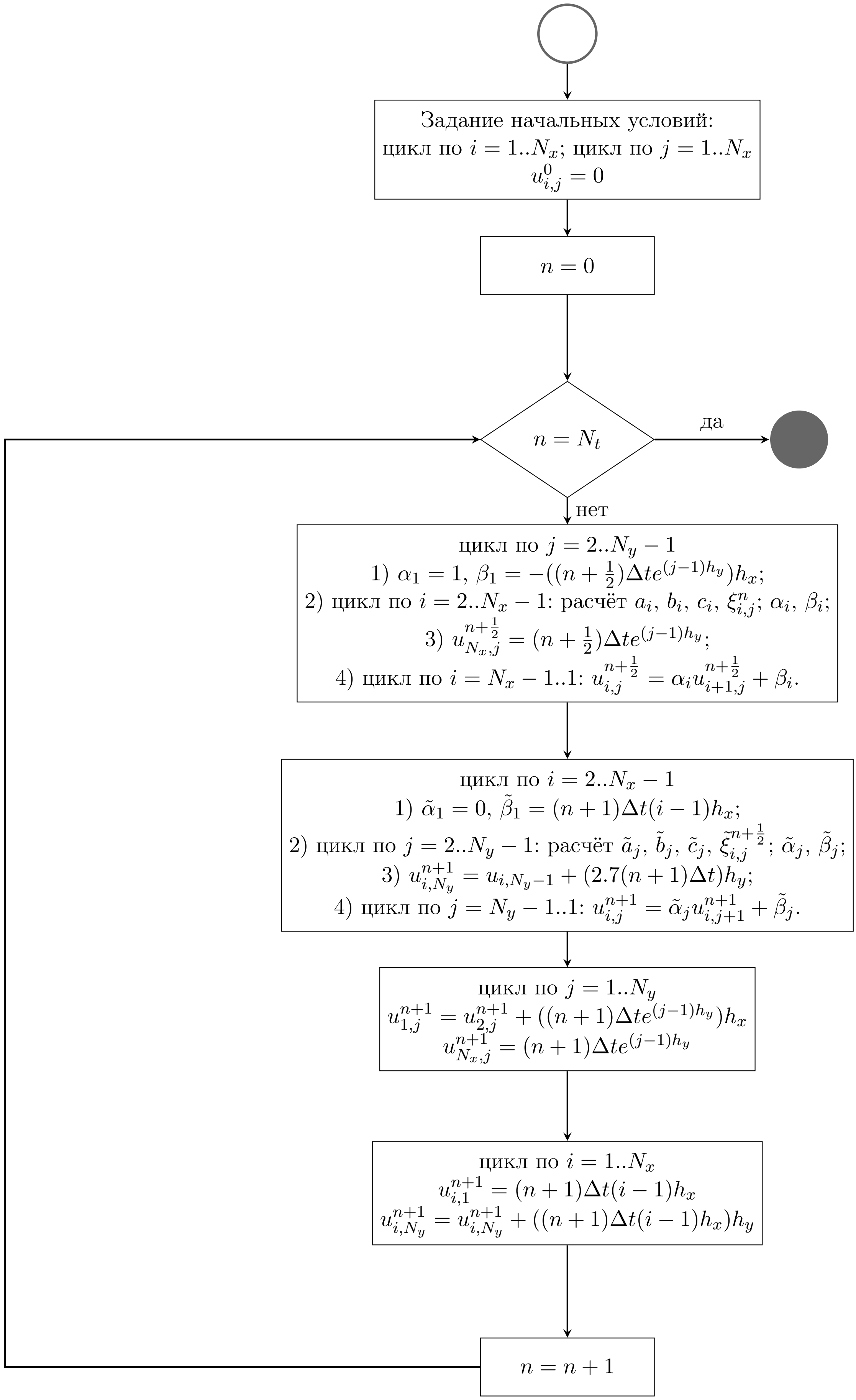
$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+1} + \tilde{\beta}_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j\tilde{\alpha}_{j-1}},\ \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_j\tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j\tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

Задание 8

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:


Задание начальных условий:
цикл по $i = 1..N_x$; цикл по $j = 1..N_x$
$u^0_{i,j} = 0$
$n = 0$
$n = N_t$
да
нет
цикл по $j = 2..N_y - 1$
1) $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -((n + \frac{1}{2})\Delta t e^{(j-1)h_y})h_x$;
2) цикл по $i = 2..N_x - 1$: расчёт a_i, b_i, c_i, $\xi^n_{i,j}$; α_i, β_i;
3) $u^{n+\frac{1}{2}}_{N_x,j} = (n + \frac{1}{2})\Delta t e^{(j-1)h_y}$;
4) цикл по $i = N_x - 1..1$: $u^{n+\frac{1}{2}}_{i,j} = \alpha_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j} + \beta_i$.
цикл по $i = 2..N_x - 1$
1) $\tilde{\alpha}_1 = 0$, $\tilde{\beta}_1 = (n + 1)\Delta t(i - 1)h_x$;
2) цикл по $j = 2..N_y - 1$: расчёт $\tilde{a}_j$, $\tilde{b}_j$, $\tilde{c}_j$, $\tilde{\xi}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}$; $\tilde{\alpha}_j$, $\tilde{\beta}_j$;
3) $u^{n+1}_{i,N_y} = u_{i,N_y-1} + (2.7(n + 1)\Delta t)h_y$;
4) цикл по $j = N_y - 1..1$: $u^{n+1}_{i,j} = \tilde{\alpha}_j u^{n+1}_{i,j+1} + \tilde{\beta}_j$.
цикл по $j = 1..N_y$
$u^{n+1}_{1,j} = u^{n+1}_{2,j} + ((n + 1)\Delta t e^{(j-1)h_y})h_x$
$u^{n+1}_{N_x,j} = (n + 1)\Delta t e^{(j-1)h_y}$
цикл по $i = 1..N_x$
$u^{n+1}_{i,1} = (n + 1)\Delta t(i - 1)h_x$
$u^{n+1}_{i,N_y} = u^{n+1}_{i,N_y} + ((n + 1)\Delta t(i - 1)h_x)h_y$
$n = n + 1$

Задание 9

Записать схему переменных направлений:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t} &= \frac{16}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}+\frac{12}{2}\frac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}, \\ \frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{16}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}+\frac{12}{2}\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}+(n+\tfrac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}. \end{aligned} \tag{6}$$

Первая подсхема в схеме переменных направлений (6) аппроксимирует производную по времени на первом полушаге интервала Δt и является неявной по координате x и явной по координате y. Вторая подсхема аппроксимирует производную по времени на втором полушаге интервала Δt и является неявной по координате y и явной по координате x. Каждая из подсхем (как и в случае *схемы расщепления* (3), (4)) является **абсолютно устойчивой**.

Задание 10

Определить порядок аппроксимации разностной схемы:

Задание 11

Привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки:

Первая подсхема

Приведу первую подсхему (6) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{16}{2}\frac{\Delta t}{h_x^2}u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+(1+16\frac{\Delta t}{h_x^2})u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\frac{16}{2}\frac{\Delta t}{h_x^2}u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}=u_{i,j}^{n}+\frac{12}{2}\Delta t\frac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}.$$

Вторая подсхема

Приведу вторую подсхему (6) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{12}{2}\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j+1}^{n+1}+(1+12\frac{\Delta t}{h_y^2})u_{i,j}^{n+1}-\frac{12}{2}\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j-1}^{n+1}=u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{16}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}+\Delta t((n+\frac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}).$$

Задание 12

Проверить сходимость прогонки:

Первая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению первой подсхемы (6), имеют вид:

$$a_i=c_i=-\tfrac{16}{2}\tfrac{\Delta t}{h_x^2},\quad b_i=1+16\tfrac{\Delta t}{h_x^2},\quad \xi_{i,j}^{n}=u_{i,j}^{n}+\tfrac{12}{2}\Delta t\tfrac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}.$$

Легко видеть, что для первой подсхемы (6) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_i| + |c_i| = 16\frac{\Delta t}{h_x^2} < 1 + 16\frac{\Delta t}{h_x^2} = |b_i|.$$

Вторая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению второй подсхемы (6), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = \tilde{c}_j = -\tfrac{12}{2}\tfrac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_j = 1 + 12\tfrac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{\xi}_{i,j}^n = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tfrac{16}{2}\tfrac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \Delta t((n+\tfrac{1}{2})\Delta t(i-1)h_x e^{(j-1)h_y}).$$

Легко видеть, что для второй подсхемы (6) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = 12\frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 12\frac{\Delta t}{h_y^2} = |\tilde{b}_j|.$$

Задание 13

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы (6) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i\alpha_{i-1}},\ \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i\beta_{i-1}}{b_i + c_i\alpha_{i-1}}.$$

Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы (6) имеет вид:

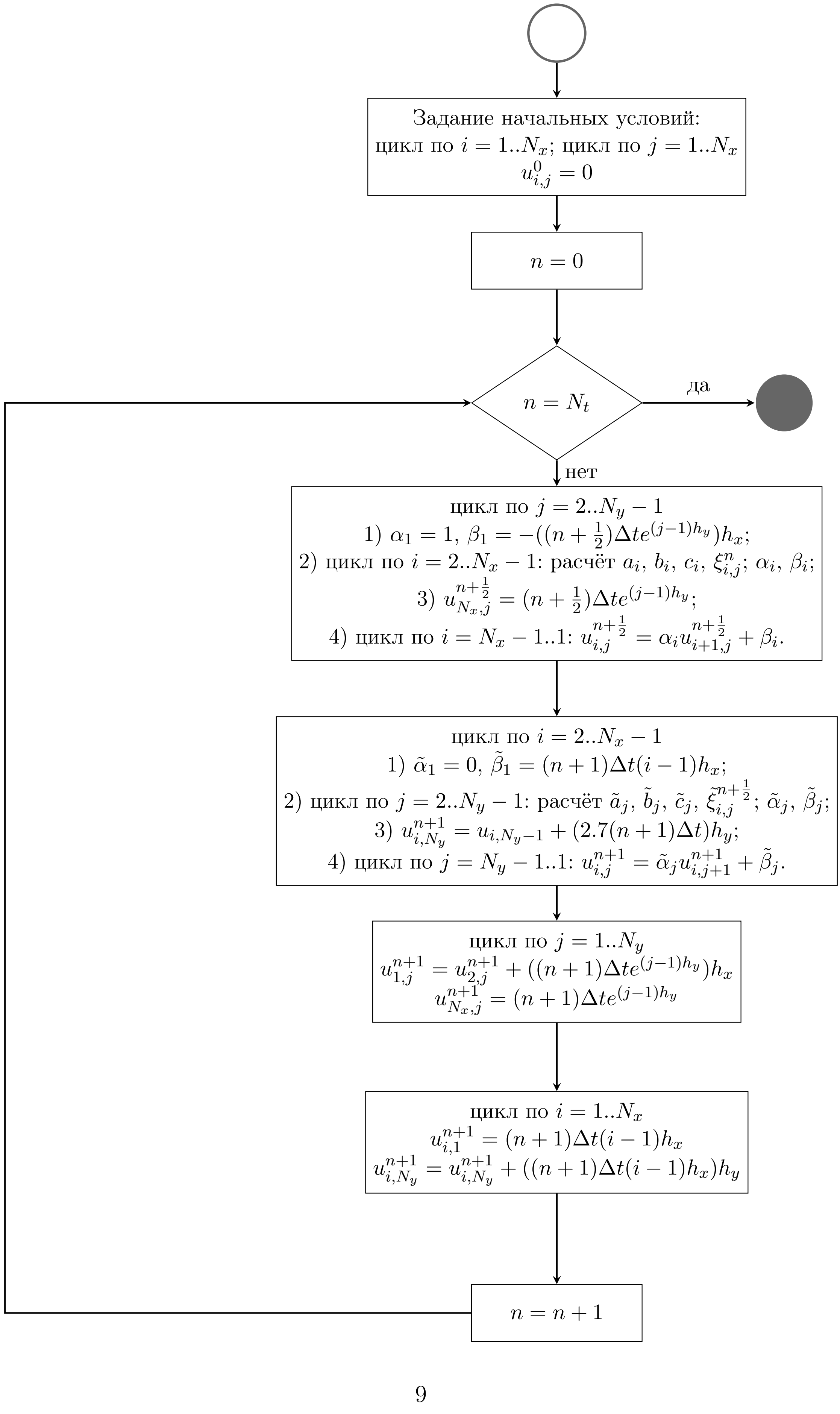
$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+1} + \tilde{\beta}_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j\tilde{\alpha}_{j-1}},\ \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_j\tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j\tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

Задание 14

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:



Задание 15