

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И.
Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4

Вариант 9

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович
Ссылка на репозиторий: [https://github.com/
CorgiPuppy/
num-methods-eq-math-phys-chem-labs](https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs)
Принял: Лебедев Данила Александрович
Дата сдачи: 07.05.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи	1
Выполнение задачи	2
Задание 1	2
Задание 2	2
Задание 3	2
Задание 4	2
Задание 5	3
Задание 6	3
Задание 7	3
Задание 8	5

Описание задачи

Вариант	Уравнение	Метод	Граничные условия
9	$\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + 4$	Установление со схемой Кранка-Николсона	$\begin{cases} u(t, x = 0) = 1 \\ u(t, x = 1) = 6.7 \end{cases}$

Для заданного уравнения:

1. представить задачу в нестационарном виде;
2. записать разностную схему Кранка-Николсона;
3. привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки;
4. проверить сходимость прогонки;
5. найти α_1 , β_1 , u_N^{n+1} ;
6. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
7. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
8. построить программу на любом удобном языке программирования;
9. построить численный расчёт с использованием различных значений $\Delta t = \{0.1; 0.01; 0.001\}$, $h = \{0.1; 0.01\}$;
10. Сравнить результаты вычислений между собой в точках: $x = \{0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1\}$.

Выполнение задачи

Задание 1

Представить задачу в нестационарном виде:

Представлю стационарную задачу в нестационарном виде. Для этого в уравнение необходимо добавить фиктивную производную по времени:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + 4 \rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + 4. \quad (1)$$

При этом искомая функция станет уже функцией двух переменных:

$$u(x) \rightarrow \tilde{u}(x, \tau).$$

Задание 2

Записать разностную схему Кранка-Николсона для уравнения (1):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} + u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n + u_j^n - u_{j-1}^n}{h^2} + 4. \quad (2)$$

Задание 3

Привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2} u_{j+1}^{n+1} + (1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{\Delta t}{h^2}) u_j^{n+1} - (\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2}) u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \Delta t 4.$$

Введу следующие обозначения:

$$a_j = -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{\Delta t}{h^2}, \quad c_j = -(\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2}), \\ \xi_j^n = u_j^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \Delta t 4.$$

С учётом обозначений равенство будет иметь вид:

$$\alpha_j u_{j+1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j-1}^{n+1} = \xi_j^n.$$

Данное преобразование называется *преобразованием неявной схемы к виду, удобному для использования метода прогонки*.

Задание 4

Проверить сходимость прогонки:

Легко видеть, что для разностной схемы (2) достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

Задание 5

Найти $\alpha_1, \beta_1, u_N^{n+1}$:

Для реализации разностной схемы Кранка-Николсона требуется ввести некоторое дополнительное условие, связывающее значения функции $u(t, x)$ на $(n+1)$ -м шаге по времени. Представлю это дополнительное условие в виде линейной зависимости

$$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j, \quad (3)$$

справедливой для любого из значений $j = 1..N - 1$.

Соотношение (3) называют **рекуррентным прогоночным соотношением**, а коэффициенты α_j, β_j - **прогоночными коэффициентами**.

Для определения прогоночных коэффициентов на 1-м шаге по координате x , используя рекуррентное прогоночное соотношение (3), записанное для $j = 1$:

$$u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1$$

и левое граничное условие:

$$u_1^{n+1} = 1.$$

Сравнивая эти два соотношения, получаю:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1.$$

Значение функции $u(t, x)$ на $(n+1)$ -м шаге по времени в крайней правой точке, которое можно определить из правого граничного условия:

$$u_N^{n+1} = 6.7.$$

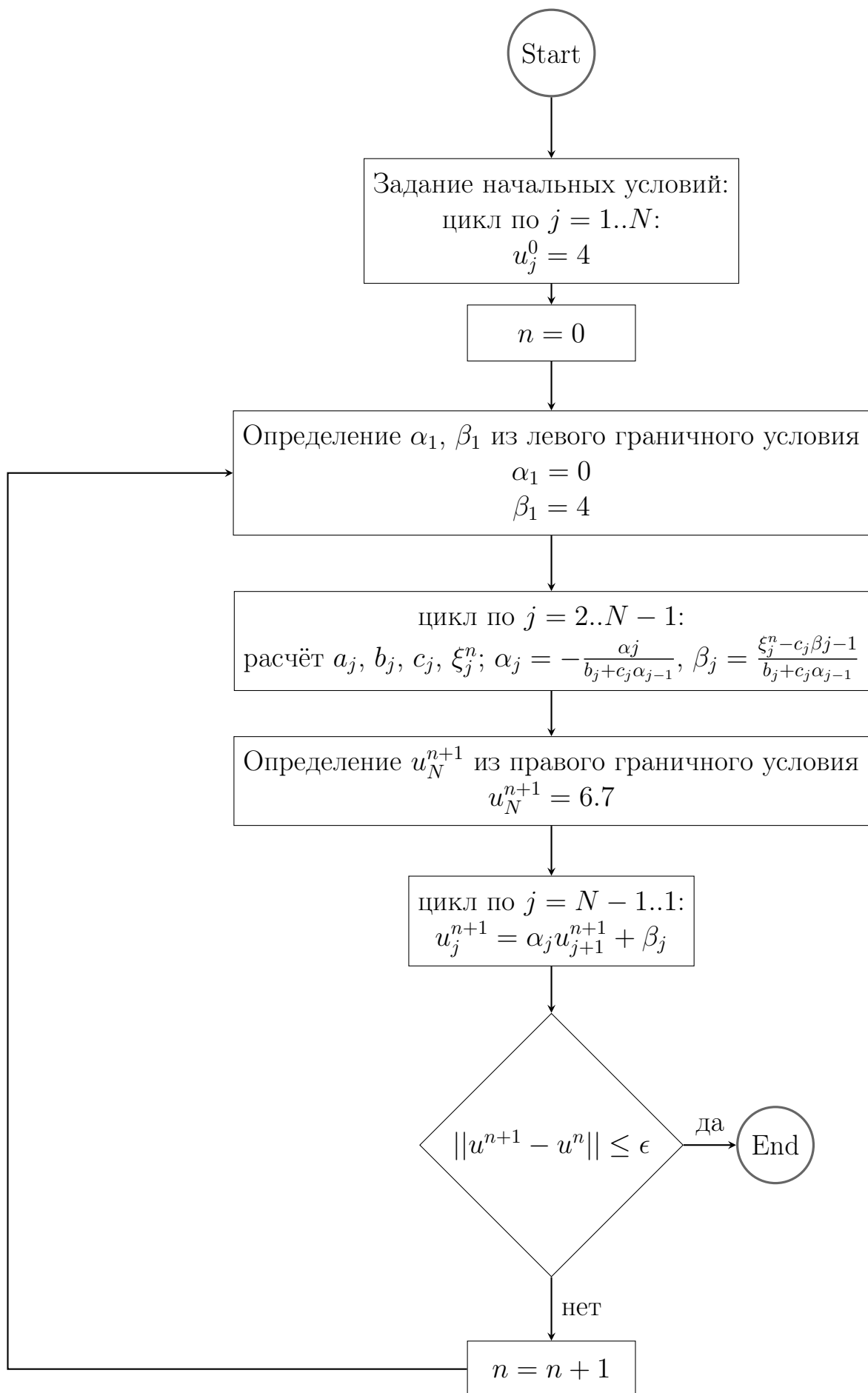
Задание 6

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Соотношение (3) является **рекуррентным прогоночным соотношением**.

Задание 7

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:



Задание 8

Построить программу на любом удобном языке программирования:

```
1 package com.stateEquation;
2
3 import java.lang.Math;
4
5 public class Main {
6     private static final int x_start = 0;
7     private static final int x_end = 1;
8
9     private static final int t_start = 0;
10    private static final int t_end = 1;
11
12    private static final double[] delta_t = { 0.1, 0.01, 0.001 };
13    private static final double[] h = { 0.1, 0.01 };
14
15    private static final double[] xPoints = {0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7,
16        0.8, 0.9, 1.0};
17
18    private static final double epsilon = 1e-6;
19
20    public static void main( String[] args ) {
21        for (int index_h = 0; index_h < h.length; index_h++) {
22            int N = (int) (1 + (x_end - x_start) / h[index_h]);
23
24            for (int index_delta_t = 0; index_delta_t < delta_t.length; index_delta_t++) {
25                int N_t = (int) (1 + (t_end - t_start) / delta_t[index_delta_t]);
26
27                double[][] u = new double[(int) N_t][(int) N];
28                for (int j = 0; j <= N - 1; j++)
29                    u[0][j] = 4.0;
30
31                double a = - 0.5 * delta_t[index_delta_t] / (h[index_h] * h[index_h]);
32                double b = 1.0 + 0.5 * delta_t[index_delta_t] / h[index_h] + delta_t[
33                    index_delta_t] / (h[index_h] * h[index_h]);
34                double c = - (0.5 * delta_t[index_delta_t] / h[index_h] + 0.5 * delta_t[
35                    index_delta_t] / (h[index_h] * h[index_h]));
36
37                for (int n = 0; n < N_t - 1; n++) {
38                    double[] alpha = new double[N];
39                    double[] beta = new double[N];
40
41                    alpha[0] = 0.0;
42                    beta[0] = 1.0;
43
44                    for (int j = 1; j <= N - 2; j++) {
45                        double xi = u[n][j] + 0.5 * delta_t[index_delta_t] / (h[index_h] * h[
46                            index_h]) * (u[n][j + 1] - 2.0 * u[n][j] + u[n][j - 1]);
47                        alpha[j] = - a / (b + c * alpha[j - 1]);
48                        beta[j] = (xi - c * beta[j - 1]) / (b + c * alpha[j - 1]);
49                    }
50
51                    u[n + 1][N - 1] = 6.7;
52
53                    for (int j = N - 2; j >= 0; j--)
54                        u[n + 1][j] = alpha[j] * u[n + 1][j + 1] + beta[j];
55                }
56            }
57        }
58    }
59}
```

```

52     double sum = 0.0;
53     for (int j = 0; j < N; j++)
54         sum += Math.pow(u[n + 1][j] - u[n][j], 2);
55     double norma = Math.sqrt(h[index_h] * sum);
56
57     if (norma <= epsilon)
58         break;
59 }
60
61 System.out.println("x\tu(x)");
62 for (double x : xPoints) {
63     int j = (int)(x / h[index_h]);
64     if (j >= N) j = N-1;
65     System.out.printf("%f\t%f\t%.1f\t%.6f\n", delta_t[index_delta_t], h[index_h],
66 x, u[N_t - 1][j]);
67     }
68 }
69 }
70 }

```