

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И.
Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №6

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин А.А.

Ссылка на репозиторий: [https://github.com/
CorgiPuppy/
num-methods-eq-math-phys-chem-labs](https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs)

Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна

Дата сдачи: 31.03.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи	1
Выполнение задачи	2
Задание 1	2
Задание 2	2
Задание 3	5
Задание 4	5
Задание 5	6
Задание 6	6
Задание 7	8
Задание 8	8

Описание задачи

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} - 8 \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - 1$	$x \in [0, 1]$ $t \in [0, 1]$	$u(t = 0, x) = x$ $u(t, x = 0) = t$ $u(t, x = 1) = 2t$

Для заданного уравнения:

1. записать явную разностную схему;
2. проверить условие устойчивости разностной схемы;
3. вывести рекуррентное соотношение;
4. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
5. записать неявную разностную схему;
6. проверить условие устойчивости разностной схемы;
7. вывести рекуррентное соотношение;
8. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;

Выполнение задачи

Задание 1

Записать явную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 8 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = ((j-1)h)^2 - 1. \quad (1)$$

Задание 2

Проверить условие устойчивости разностной схемы:

Исследую устойчивость разностной схемы (1) с помощью спектрального метода. Для этого отброшу член $((j-1)h)^2 - 1$, наличие которого не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представлю решение в виде гармоник:

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1):

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} - 8 \frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{h} = 0.$$

Упрощаю данное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j}$, и выражаю λ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} - 8 \frac{e^{i\alpha} - 1}{h} = 0 \Rightarrow \lambda = 1 - 8 \frac{\Delta t}{h} + 8 \frac{\Delta t}{h} e^{i\alpha}.$$

Комплексный вид полученного выражения свидетельствует о том, что необходимое условие устойчивости разностных схем также следует рассматривать в применении к комплексным числам. То есть, неравенство

$$|\lambda| \leq 1 \quad (3)$$

означает, что для того, чтобы разностная схема была устойчива, необходимо чтобы собственные числа оператора перехода были расположены внутри или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости (рис. 1).

Введу следующие обозначение:

$$r = 8 \frac{\Delta t}{h} > 0 \Rightarrow \lambda = 1 - r + r e^{i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке $(1 - r, 0)$ и радиусом:

$$|r e^{i\alpha}| = |r \cos \alpha + i r \sin \alpha| = \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha} = r.$$

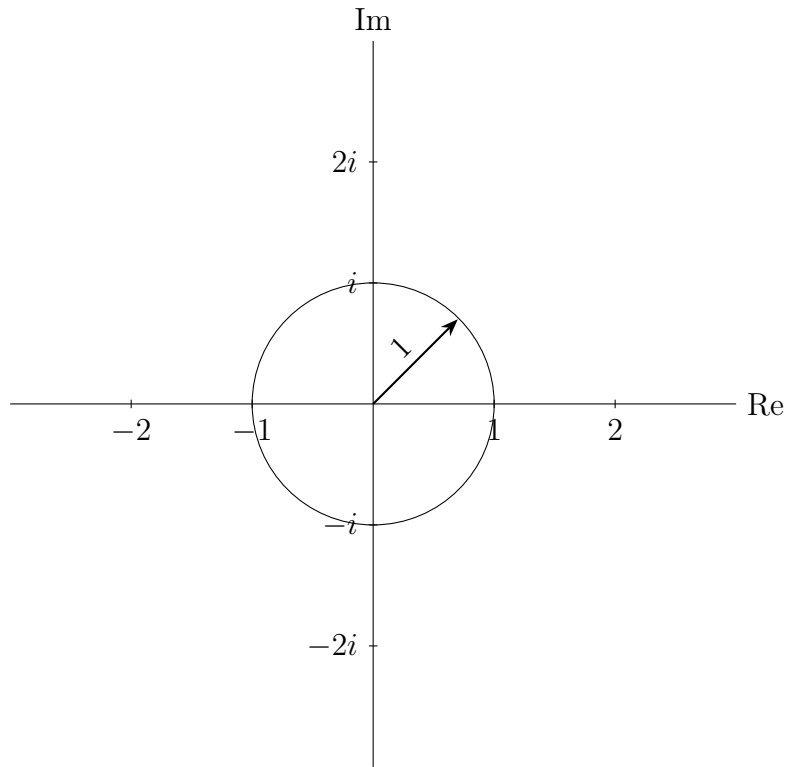


Рис. 1: Графическая интерпретация условия устойчивости (3)

Сравнивая расположение этой окружности на комплексной плоскости с условием (3), получаю три различных варианта (рис. 2-4). Видно, что окружность, соответствующая собственным числам оператора перехода, при $r < 1$ находится внутри круга, соответствующего условию (3); при $r > 1$ - вне этого круга, а при $r = 1$ совпадает с его границей. Таким образом, разностная схема (1) будет **условно устойчива** при выполнении следующего условия:

$$r = 8 \frac{\Delta t}{h} \leq 1$$

При $h = 10^{-3}$:

$$\Delta t \leq \frac{10^{-3}}{8} \Rightarrow \Delta t \leq 125 \cdot 10^{-6}.$$

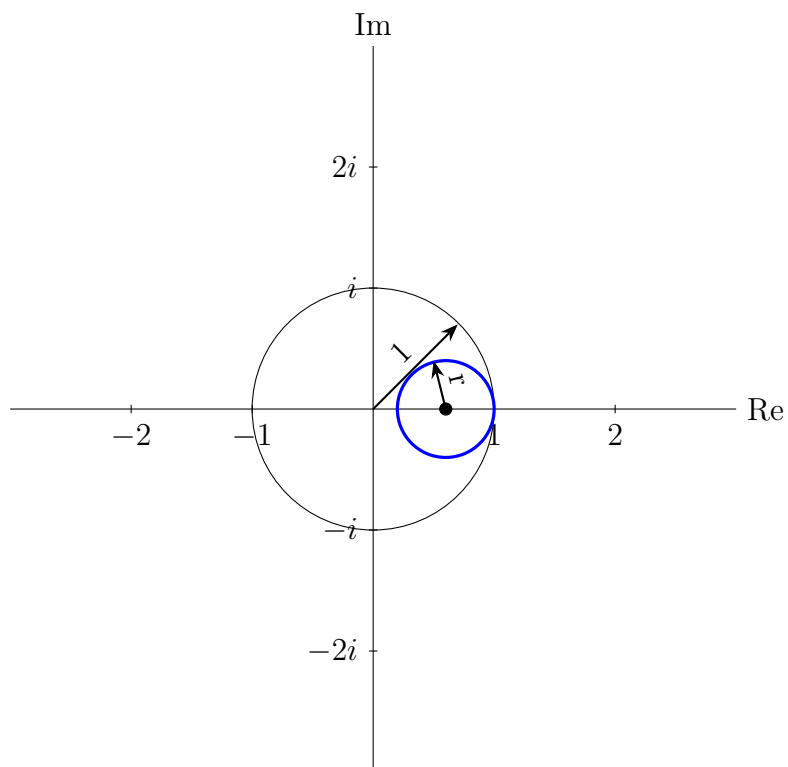


Рис. 2: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при $r < 1$

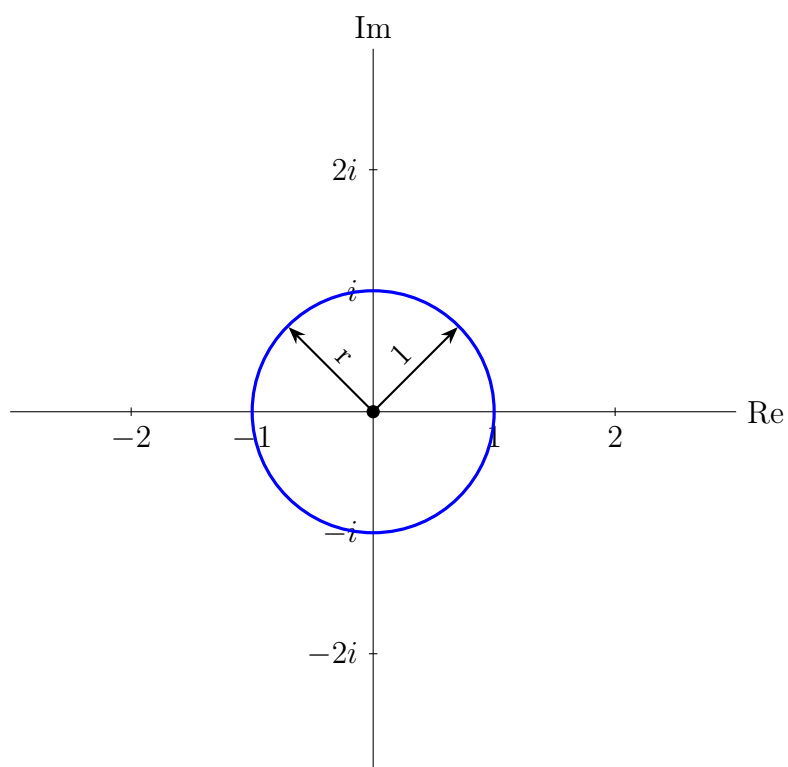


Рис. 3: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при $r = 1$

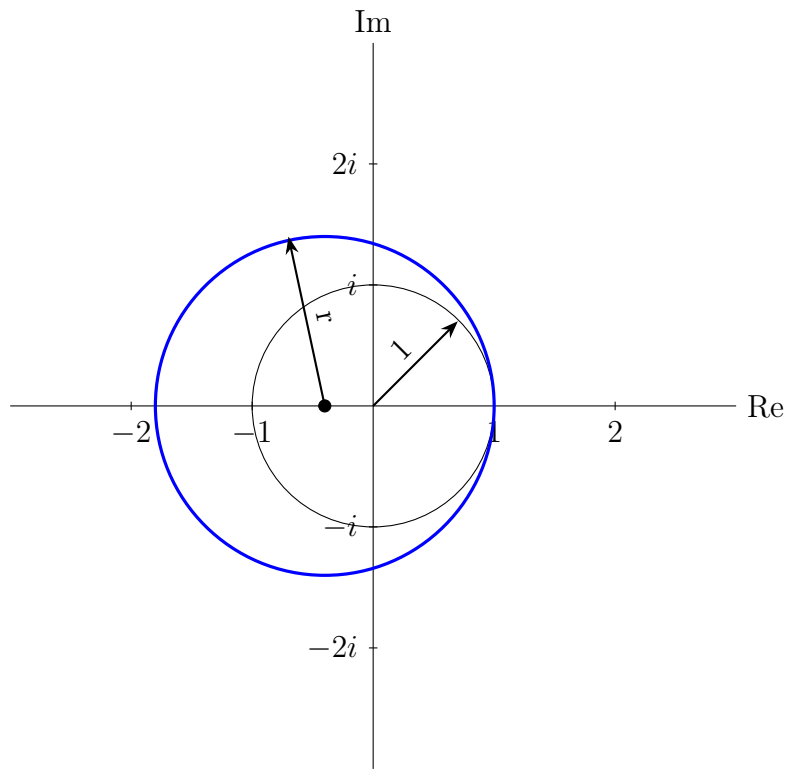


Рис. 4: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при $r > 1$

Задание 3

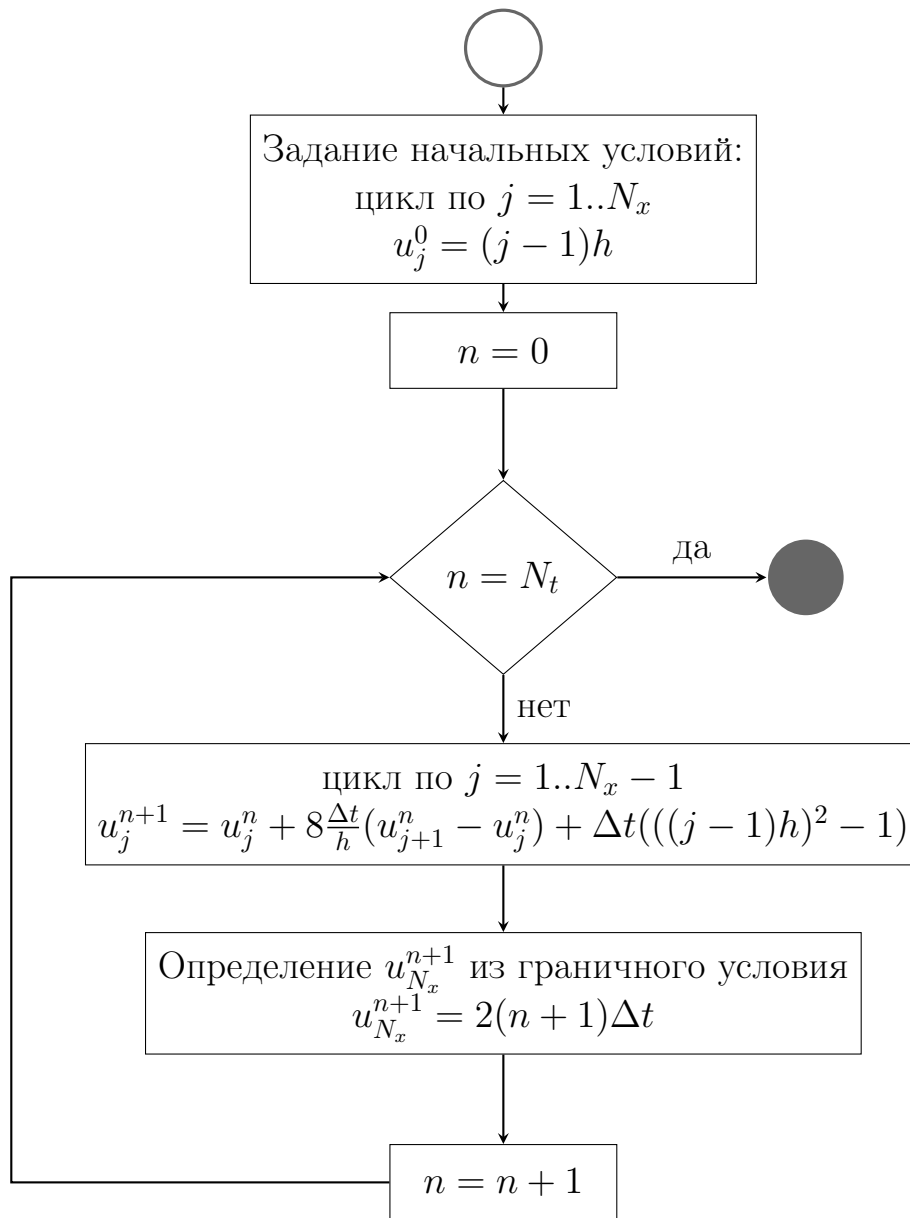
Вывести рекуррентное соотношение:

Выражаю u_j^{n+1} из разностной схемы (1):

$$u_j^{n+1} = u_j^n + 8 \frac{\Delta t}{h} (u_{j+1}^n - u_j^n) + \Delta t (((j-1)h)^2 - 1).$$

Задание 4

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:



Задание 5

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 8 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = ((j-1)h)^2 - 1. \quad (4)$$

Задание 6

Проверить условие устойчивости разностной схемы:

Исследую устойчивость разностной схемы (4) с помощью спектрального метода. Для этого отброшу член $((j-1)h)^2 - 1$, наличие которого не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представлю решение в виде гармоники. Подставляя

(2) в (4):

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} - 8 \frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha(j+1)} - \lambda^{n+1}e^{i\alpha j}}{h} = 0.$$

Упрощаю данное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j}$, и выражаю величину, обратную λ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} - 8 \frac{\lambda e^{i\alpha} - \lambda}{h} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 + 8 \frac{\Delta t}{h} - 8 \frac{\Delta t}{h} e^{i\alpha}.$$

При этом необходимое условие устойчивости разностных схем (3) также преобразую к виду:

$$|\frac{1}{\lambda}| \geq 1. \quad (5)$$

Неравенство (5) в применении к комплексным числам означает, что для устойчивости разностной схемы (4) требуется, чтобы величины, обратные собственным числам оператора перехода, были расположены вне или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости (рис. 1).

Введу следующее обозначение:

$$r = 8 \frac{\Delta t}{h} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 + r - r e^{i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке $(1 + r, 0)$ и радиусом:

$$|-r e^{i\alpha}| = |-r \cos \alpha + i(-r) \sin \alpha| = \sqrt{(-r)^2 \cos^2 \alpha + (-r)^2 \sin^2 \alpha} = r.$$

Данная окружность находится вне круга, соответствующего условию (5) при любом значении r (рис. 5). Таким образом, разностная схема (4) будет **абсолютно устойчива**.

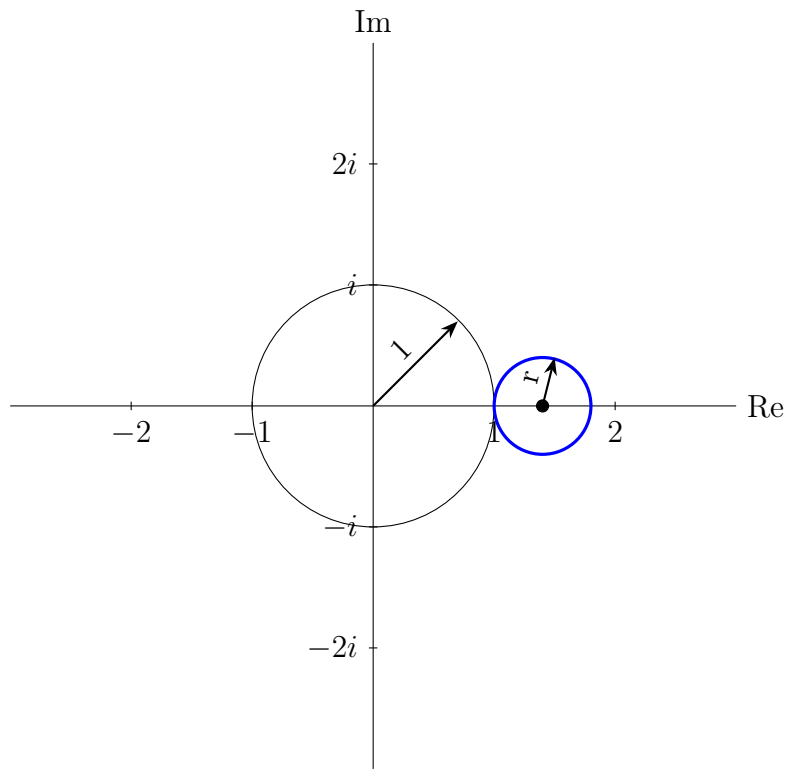


Рис. 5: Исследование устойчивости разностной схемы (4)

Задание 7

Вывести рекуррентное соотношение:

Выражаю u_j^{n+1} из разностной схемы (4):

$$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + 8\frac{\Delta t}{h}u_{j+1}^{n+1} + \Delta t(((j-1)h)^2 - 1)}{1 + 8\frac{\Delta t}{h}}.$$

Задание 8

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:

