Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

Вариант 22

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин А.А.
Ссылка на репозиторий: https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs
Принял: Лебедев Данила Александрович
Дата сдачи: 02.04.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи

Вариант	Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
22	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$x \in [0,1]$ $t \in [0,1]$	$u(t=0,x) = e^x$ $u(t,x=0) = e^t$ $u(t,x=1) = e^{t+1}$

Для заданного уравнения:

1. записать явную разностную схему;
2. определить порядок аппроксимации разностной схемы;
3. получить условие устойчивости разностной схемы на шаг (с помощью метода гармоник);
4. вывести рекуррентное соотношение;
5. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
6. построить программу на любом удобном языке программирования;
7. провести численный расчёт с использованием различных значений $\Delta t(0.1, 0.01, 0.001)$, $h = 0.1$;
8. составить отчёт о проделанной работе.

Выполнение задачи

Задание 1

Записать явную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}. \tag{1}$$

Задание 2

Определить порядок аппроксимации разностной схемы (1):

Для этого запишу разложение значений u_j^{n+1}, u_{j+1}^n, u_{j-1}^n в ряд Тейлора относительно точки (t^n, x_j) на разностной сетке:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n \Delta t + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^n (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|_j^n (\Delta t)^3 + \ldots, \tag{2}$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n h + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n h^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_j^n h^3 + \frac{1}{4!}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_j^n h^4 + \ldots, \tag{3}$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n h + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n h^2 - \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_j^n h^3 + \frac{1}{4!}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_j^n h^4 - \ldots. \tag{4}$$

Подставляя зависимости (2)-(4) в разностную схему (1), получаем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^n \Delta t + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|_j^n (\Delta t)^2 = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n + \frac{1}{12}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_j^n h^2.$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n + O(\Delta t) = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n + O(h^2).$$

Таким образом, явная разностная схема (1) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение с первым порядком по времени и со вторым порядком по координате, что записывается в следующем виде:

$$O(\Delta t) + O(h^2) \text{ или } O(\Delta t, h^2).$$

Задание 3

Получить условие устойчивости разностной схемы на шаг (с помощью метода гармоник):

Представлю решение разностной схемы в виде гармоники:

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в разностную схему (1), получаю:

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} = \frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)} - 2\lambda^n e^{i\alpha j} + \lambda^n e^{i\alpha(j-1)}}{h^2}.$$

Упрощаю полученное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j}$:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2}.$$

Преобразую комплексные числа из экспоненциальной формы в тригонометрическую:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha \Rightarrow \frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \frac{2\cos\alpha - 2}{h^2}.$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

получаю формулу, из которой затем выражаю λ:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \frac{-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{h^2} \Rightarrow \lambda = 1 - \frac{4\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

С учётом необходимого условия устойчивости разностных схем $|\lambda| \le 1$ имею:

$$-1 \le 1 - \frac{4\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 1.$$

В полученном двойном неравенстве правое условие выполняется автоматически. Поэтому рассмотрю более подробно левое условие:

$$1 - \frac{4\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} \ge -1 \Rightarrow \frac{\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} \le \frac{1}{2}.$$

Задавая для $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ максимально возможное значение, равное 1, перехожу к более строгому условию, справедливому для любого α:

$$\frac{\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\Delta t}{h^2} \le \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Выражение (6) является условием устойчивости явной разностной схемы, аппроксимирующей одномерное дифференциальное уравнение параболического типа. Такие разностные схемы, устойчивость которых зависит от какого-либо условия, ограничивающего выбор интервала деления на разностной сетке, называют **условно устойчивыми**.

При $h = 10^{-1}$:

$$\Delta t \le \frac{(10^{-1})^2}{2} \Rightarrow \Delta t \le 5 \cdot 10^{-3}.$$