Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №12

Выполнил студент группы КС-36:	Золотухин Андрей Александрович
Ссылка на репозиторий:	https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs
Приняла:	Кольцова Элеонора Моисеевна
Дата сдачи:	12.05.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи

Уравнение	Интервал переменной	Метод	Граничные условия
$\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + x$	$x \in [0, 1]$	Установление с явной схемой; Установление с неявной схемой; Установление со схемой Кранка-Николсона	$\begin{cases} u(x=0) = 0 \\ \frac{du}{dx}(x=1) = 1 \end{cases}$

Для заданного уравнения:

1. представить задачу в нестационарном виде;
2. записать явную разностную схему;
3. вывести рекуррентное соотношение;
4. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
5. записать неявную разностную схему;
6. привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки;
7. проверить сходимость прогонки;
8. найти α_1, β_1, u_N^{n+1};
9. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
10. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
11. записать разностную схему Кранка-Николсона;
12. привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки;
13. проверить сходимость прогонки;
14. найти α_1, β_1, u_N^{n+1};
15. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
16. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;

Уравнение	Интервал переменной	Метод	Граничные условия
$-\frac{du}{dx} = 4\frac{d^2u}{dx^2} + 2x$	$x \in [0, 1]$	Установление с явной схемой; Установление со схемой Кранка-Николсона	$\begin{cases} \frac{du}{dx}(x=0) = 2 \\ u(x=1) = 2 \end{cases}$

Для заданного уравнения:

17. представить задачу в нестационарном виде;
18. записать явную разностную схему;
19. вывести рекуррентное соотношение;
20. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
21. записать разностную схему Кранка-Николсона;
22. привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки;
23. проверить сходимость прогонки;
24. найти α_1, β_1, u_N^{n+1};
25. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
26. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;

Выполнение задачи

Задание 1

Представить задачу в нестационарном виде:

Представлю стационарную задачу в нестационарном виду. Для этого в уравнение необходимо добавить фиктивную производную по времени:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + x \to \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + x. \tag{1}$$

При этом искомая функция станет уже функцией двух переменных:

$$u(x) \to \tilde{u}(x, \tau).$$

Задание 2

Записать явную разностную схему для уравнения (1):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + (j-1)h. \tag{2}$$

Задание 3

Вывести рекуррентное соотношение для уравнения (2):

Выражая из разностной схемы (2) величину u_j^{n+1}, получаю рекуррентное соотношение

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t[\frac{1}{h}(u_{j-1}^n - u_j^n) + \frac{1}{h^2}(u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n) + (j-1)h],$$

которое с учётом равенства $\Delta t = \frac{h^2}{h+2}$ преобразуется к виду:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \tfrac{h^2}{h+2}[\tfrac{1}{h^2}u_{j+1}^n - (2\tfrac{1}{h^2} + \tfrac{1}{h})u_j^n + (\tfrac{1}{h^2} + \tfrac{1}{h})u_{j-1}^n + (j-1)h] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_j^{n+1} = \tfrac{u_{j+1}^n + (1+h)u_{j-1}^n + h^2(j-1)h}{h+2}.$$

Задание 4

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:

Задание 5

Записать неявную разностную схему для уравнения (1):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + (j-1)h. \tag{3}$$

Задание 6

Привести схему (3) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{\Delta t}{h^2}u_{j+1}^{n+1} + (1 + \frac{\Delta t}{h} + 2\frac{\Delta t}{h^2})u_j^{n+1} - (\frac{\Delta t}{h} + \frac{\Delta t}{h^2})u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + \Delta t(j-1)h.$$

Введу следующие обозначения:

$$a_j = -\tfrac{\Delta t}{h^2},\ b_j = 1 + \tfrac{\Delta t}{h} + 2\tfrac{\Delta t}{h^2},\ c_j = -(\tfrac{\Delta t}{h} + \tfrac{\Delta t}{h^2}),$$
$$\xi_j^n = u_j^n + \Delta t(j-1)h.$$

С учётом обозначений равенство будет иметь вид:

$$\alpha_j u_{j+1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j-1}^{n+1} = \xi_j^n.$$

Данное преобразование называется *преобразованием неявной схемы к виду, удобному для использования метода прогонки.*

Задание 7

Проверить сходимость прогонки:

Легко видеть, что для разностной схемы (3) достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_j| + |c_j| = \frac{\Delta t}{h} + 2\frac{\Delta t}{h^2} < 1 + \frac{\Delta t}{h} + 2\frac{\Delta t}{h^2} = |b_j|.$$

Задание 8

Найти α_1, β_1, u_N^{n+1}:

Для реализации неявной разностной схемы требуется ввести некоторое дополнительное условие, связывающее значения функции *u(t, x)* на *(n+1)*-м шаге по времени. Представлю это дополнительное условие в виде линейной зависимости

$$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta j, \tag{4}$$

справедливой для любого из значений $j = 1..N-1$.

Соотношение (4) называют **рекуррентным прогоночным соотношением**, а коэффициенты α_j, β_j - **прогоночными коэффициентами**.

Для определения прогоночных коэффициентов на *1*-м шаге по координате x, использую рекуррентное прогоночное соотношение (4), записанное для $j = 1$:

$$u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1$$

и левое граничное условие:

$$u_1^{n+1} = 0.$$

Сравнивая эти два соотношения, получаю:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0.$$

Значение функции *u(t, x)* на *(n+1)*-м шаге по времени в крайней правой точке, которое можно определить из правого граничного условия:

$$u_N^{n+1} = u_{N-1}^{n+1} + h.$$

Используя рекуррентное прогоночное соотношение (6), записанное для $j = N-1$:

$$u_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1}$$

и подставив его в значение функции *u(t, x)* на *(n+1)*-м шаге по времени в крайней правой точке, можно записать в ином виде:

$$\begin{gathered} u_N^{n+1} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1} + h \Rightarrow \\ \Rightarrow u_N^{n+1} = \tfrac{\beta_{N-1}+h}{1-\alpha_{N-1}}. \end{gathered}$$

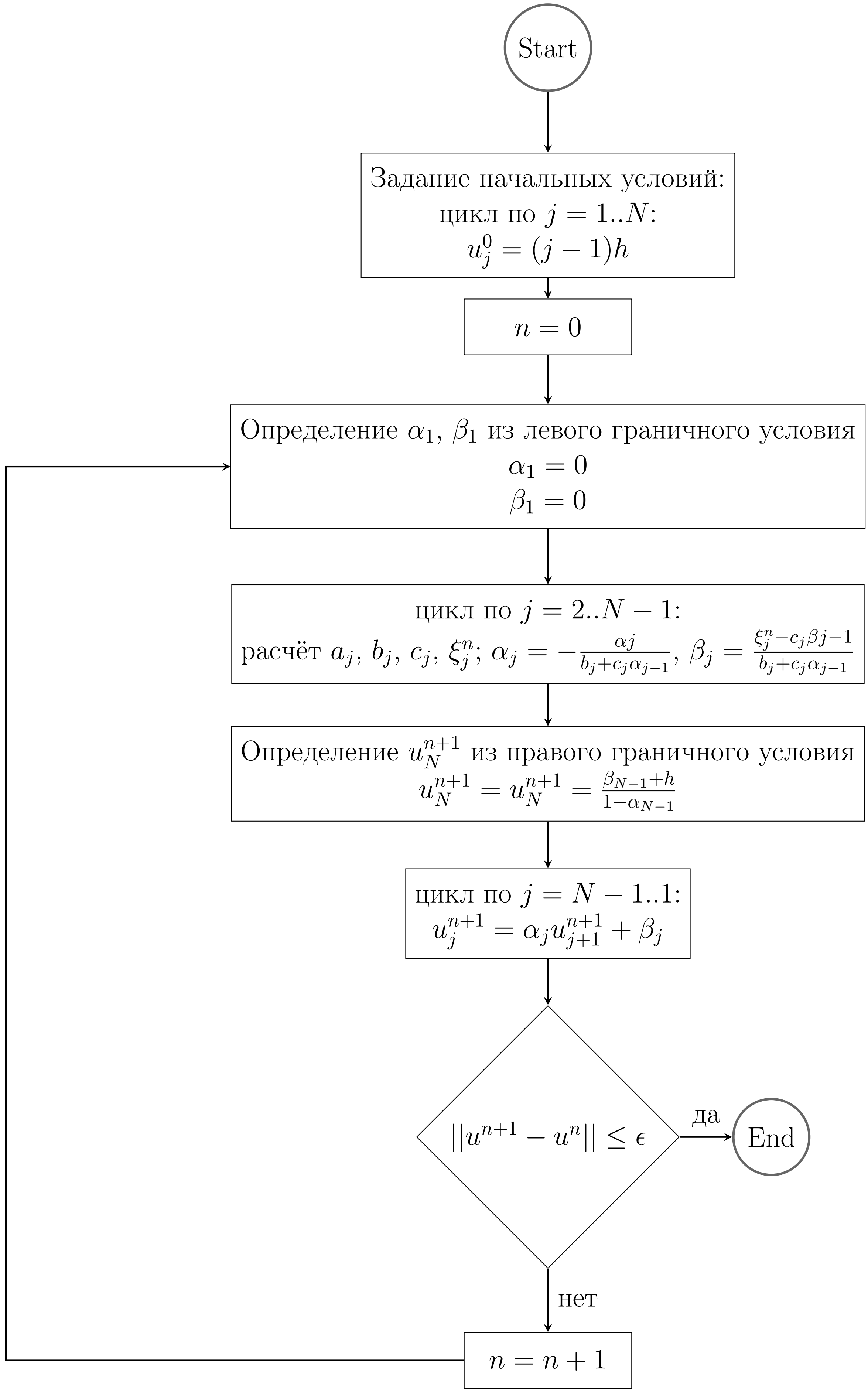
Задание 9

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Соотношение (4) является **рекуррентным прогоночным соотношением**.

Задание 10

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:


Start
Задание начальных условий:
цикл по $j = 1..N$:
$u_j^0 = (j-1)h$
$n = 0$
Определение α_1, β_1 из левого граничного условия
$\alpha_1 = 0$
$\beta_1 = 0$
цикл по $j = 2..N-1$:
расчёт a_j, b_j, c_j, ξ_j^n; $\alpha_j = -\frac{\alpha j}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}$, $\beta_j = \frac{\xi_j^n - c_j \beta j - 1}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}$
Определение u_N^{n+1} из правого граничного условия
$u_N^{n+1} = u_N^{n+1} = \frac{\beta_{N-1} + h}{1 - \alpha_{N-1}}$
цикл по $j = N-1..1$:
$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$
$||u^{n+1} - u^n|| \leq \epsilon$
да
End
нет
$n = n + 1$

Задание 11

Записать разностную схему Кранка-Николсона для уравнения (1):

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{1}{2}\frac{u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{h}+\frac{1}{2}\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=\frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}+\frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^n-u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}+(j-1)h. \quad (5)$$

Задание 12

Привести схему (5) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h^2}u_{j+1}^{n+1}+(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h}+\frac{\Delta t}{h^2})u_j^{n+1}-(\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h}+\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h^2})u_{j-1}^{n+1}=u_j^n+\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h}(u_j^n-u_{j-1}^n)+\Delta t(j-1)h.$$

Введу следующие обозначения:

$$a_j=-\tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h^2},\ b_j=1+\tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h}+\tfrac{\Delta t}{h^2},\ c_j=-(\tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h}+\tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h^2}),$$
$$\xi_j^n=u_j^n+\tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)-\tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{h}(u_j^n-u_{j-1}^n)+\Delta t(j-1)h.$$

С учётом обозначений равенство будет иметь вид:

$$\alpha_j u_{j+1}^{n+1}+b_j u_j^{n+1}+c_j u_{j-1}^{n+1}=\xi_j^n.$$

Данное преобразование называется *преобразованием схемы Кранка-Николсона к виду, удобному для использования метода прогонки.*

Задание 13

Проверить сходимость прогонки:

Легко видеть, что для разностной схемы (5) достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_j|+|c_j|=\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h}+\frac{\Delta t}{h^2}<1+\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{h}+\frac{\Delta t}{h^2}=|b_j|.$$

Задание 14

Найти α_1, β_1, u_N^{n+1}:

Для реализации разностной схемы Кранка-Николсона требуется ввести некоторое дополнительное условие, связывающее значения функции *u(t, x)* на *(n+1)*-м шаге по времени. Представлю это дополнительное условие в виде линейной зависимости

$$u_j^{n+1}=\alpha_j u_{j+1}^{n+1}+\beta j, \quad (6)$$

справедливой для любого из значений $j=1..N-1$.

Соотношение (6) называют **рекуррентным прогоночным соотношением**, а коэффициенты α_j, β_j - **прогоночными коэффициентами**.

Для определения прогоночных коэффициентов на *1*-м шаге по координате x, использую рекуррентное прогоночное соотношение (6), записанное для $j = 1$:

$$u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1$$

и левое граничное условие:

$$u_1^{n+1} = 0.$$

Сравнивая эти два соотношения, получаю:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0.$$

Значение функции *u(t, x)* на *(n+1)*-м шаге по времени в крайней правой точке, которое можно определить из правого граничного условия:

$$u_N^{n+1} = u_{N-1}^{n+1} + h.$$

Используя рекуррентное прогоночное соотношение (6), записанное для $j = N - 1$:

$$u_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1}$$

и подставив его в значение функции *u(t, x)* на *(n+1)*-м шаге по времени в крайней правой точке, можно записать в ином виде:

$$u_N^{n+1} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1} + h \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_N^{n+1} = \frac{\beta_{N-1} + h}{1 - \alpha_{N-1}}.$$

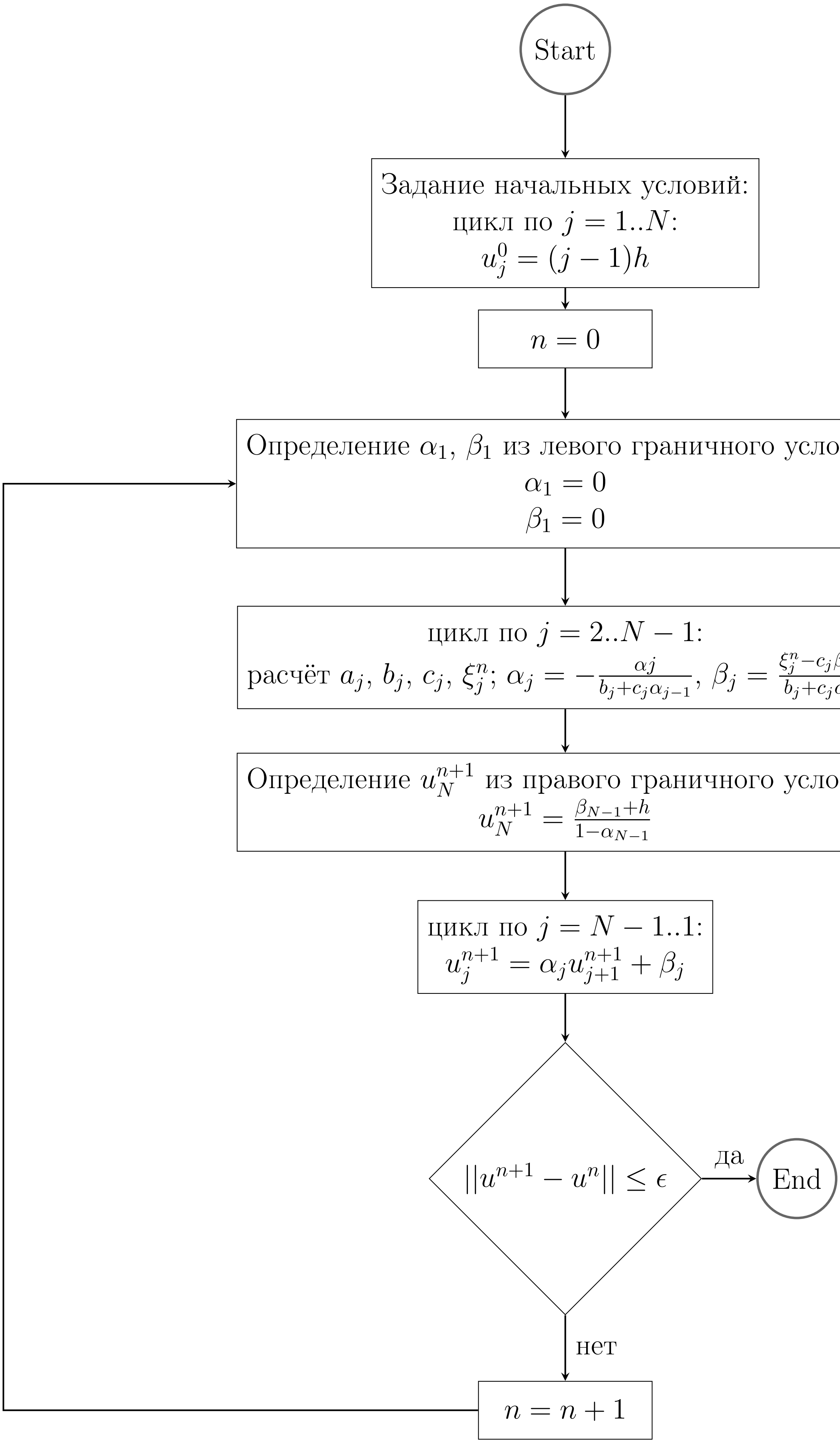
Задание 15

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Соотношение (6) является **рекуррентным прогоночным соотношением**.

Задание 16

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:


Start
Задание начальных условий:
цикл по $j = 1..N$:
$u_j^0 = (j-1)h$
$n = 0$
Определение α_1, β_1 из левого граничного условия
$\alpha_1 = 0$
$\beta_1 = 0$
цикл по $j = 2..N-1$:
расчёт a_j, b_j, c_j, ξ_j^n; $\alpha_j = -\frac{\alpha j}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}$, $\beta_j = \frac{\xi_j^n - c_j \beta j - 1}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}$
Определение u_N^{n+1} из правого граничного условия
$u_N^{n+1} = \frac{\beta_{N-1} + h}{1 - \alpha_{N-1}}$
цикл по $j = N-1..1$:
$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$
$||u^{n+1} - u^n|| \leq \epsilon$
да
End
нет
$n = n + 1$

Задание 17

Представить задачу в нестационарном виде:

Представлю стационарную задачу в нестационарном виду. Для этого в уравнение необходимо добавить фиктивную производную по времени:

$$-\frac{du}{dx} = 4\frac{d^2u}{dx^2} + 2x \to \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 4\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + 2x. \tag{7}$$

При этом искомая функция станет уже функцией двух переменных:

$$u(x) \to \tilde{u}(x, \tau).$$

Задание 18

Записать явную разностную схему для уравнения (7):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 4\frac{u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + 2(j-1)h. \tag{8}$$

Задание 19

Вывести рекуррентное соотношение для уравнения (8):

Выражая из разностной схемы (8) величину u_j^{n+1}, получаю рекуррентное соотношение

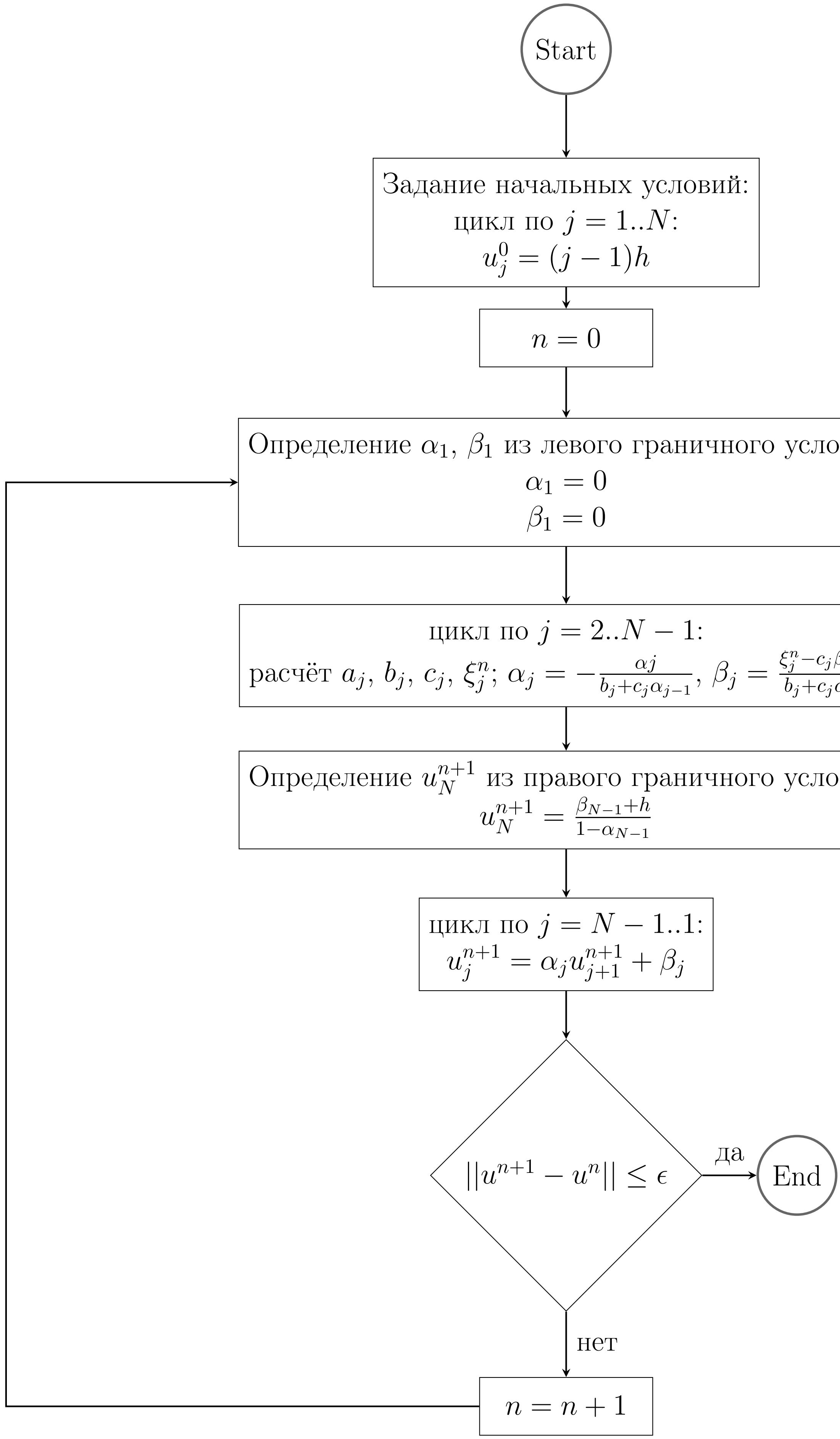
$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t[\frac{1}{h}(u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{4}{h^2}(u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n) + 2(j-1)h],$$

которое с учётом равенства $\Delta t = \frac{h^2}{h+2}$ преобразуется к виду:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \tfrac{h^2}{h+8}[(\tfrac{4}{h^2} + \tfrac{1}{h})u_{j+1}^n - (\tfrac{8}{h^2} + \tfrac{1}{h})u_j^n + \tfrac{4}{h^2}u_{j-1}^n + 2(j-1)h] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_j^{n+1} = \tfrac{u_{j-1}^n + (4+h)u_{j+1}^n + 2(j-1)h}{h+8}.$$

Задание 20

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:


Start
Задание начальных условий:
цикл по $j = 1..N$:
$u_j^0 = (j-1)h$
$n = 0$
Определение α_1, β_1 из левого граничного условия
$\alpha_1 = 0$
$\beta_1 = 0$
цикл по $j = 2..N-1$:
расчёт a_j, b_j, c_j, ξ_j^n; $\alpha_j = -\frac{\alpha j}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}$, $\beta_j = \frac{\xi_j^n - c_j \beta j - 1}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}$
Определение u_N^{n+1} из правого граничного условия
$u_N^{n+1} = \frac{\beta_{N-1} + h}{1 - \alpha_{N-1}}$
цикл по $j = N-1..1$:
$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$
$||u^{n+1} - u^n|| \leq \epsilon$
да
End
нет
$n = n + 1$