

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Российский химико-технологический университет имени Д.И.  
Менделеева»

## ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №6

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин А.А.

Ссылка на репозиторий: [https://github.com/  
CorgiPuppy/  
num-methods-eq-math-phys-chem-labs](https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs)

Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна

Дата сдачи: 31.03.2025

Москва  
2025

# Оглавление

Описание задачи . . . . .	1
Выполнение задачи . . . . .	2
Задание 1 . . . . .	2
Задание 2 . . . . .	2
Задание 3 . . . . .	5
Задание 4 . . . . .	5
Задание 5 . . . . .	6
Задание 6 . . . . .	6

## Описание задачи

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} - 8 \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - 1$	$x \in [0, 1]$ $t \in [0, 1]$	$u(t = 0, x) = x$ $u(t, x = 0) = t$ $u(t, x = 1) = 2t$

Для заданного уравнения:

1. записать явную разностную схему;
2. проверить условие устойчивости разностной схемы;
3. вывести рекуррентное соотношение;
4. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
5. записать неявную разностную схему;
6. проверить условие устойчивости разностной схемы;
7. вывести рекуррентное соотношение;
8. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;

# Выполнение задачи

## Задание 1

Записать явную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 8 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = ((j-1)h)^2 - 1. \quad (1)$$

## Задание 2

Проверить условие устойчивости разностной схемы:

Исследую устойчивость разностной схемы (1) с помощью спектрального метода. Для этого отброшу член  $((j-1)h)^2 - 1$ , наличие которого не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представлю решение в виде гармоник:

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1):

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} - 8 \frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{h} = 0.$$

Упрощаю данное выражение, деля левую и правую его части на  $\lambda^n e^{i\alpha j}$ , и выражаю  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} - 8 \frac{e^{i\alpha} - 1}{h} = 0 \Rightarrow \lambda = 1 - 8 \frac{\Delta t}{h} + 8 \frac{\Delta t}{h} e^{i\alpha}.$$

Комплексный вид полученного выражения свидетельствует о том, что необходимое условие устойчивости разностных схем также следует рассматривать в применении к комплексным числам. То есть, неравенство

$$|\lambda| \leq 1 \quad (3)$$

означает, что для того, чтобы разностная схема была устойчива, необходимо чтобы собственные числа оператора перехода были расположены внутри или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости (рис. 1).

Введу следующие обозначение:

$$r = 8 \frac{\Delta t}{h} > 0 \Rightarrow \lambda = 1 - r + r e^{i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1-r, 0)$  и радиусом:

$$|r e^{i\alpha}| = |r \cos \alpha + i r \sin \alpha| = \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha} = r.$$

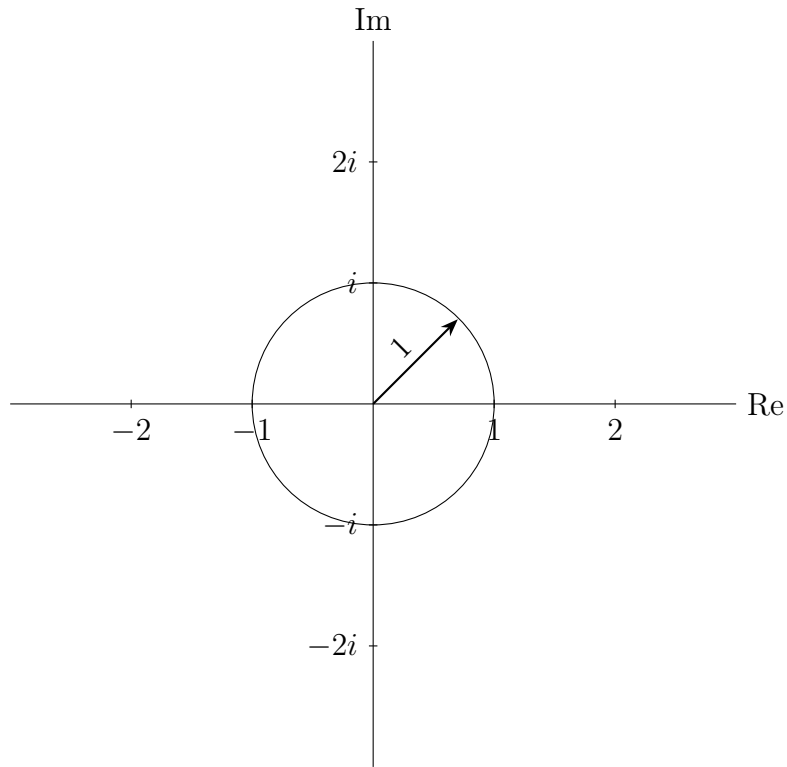


Рис. 1: Графическая интерпретация условия устойчивости (3)

Сравнивая расположение этой окружности на комплексной плоскости с условием (3), получаю три различных варианта (рис. 2-4). Видно, что окружность, соответствующая собственным числам оператора перехода, при  $r < 1$  находится внутри круга, соответствующего условию (3); при  $r > 1$  - вне этого круга, а при  $r = 1$  совпадает с его границей. Таким образом, разностная схема (1) будет **условно устойчива** при выполнении следующего условия:

$$r = 8 \frac{\Delta t}{h} \leq 1$$

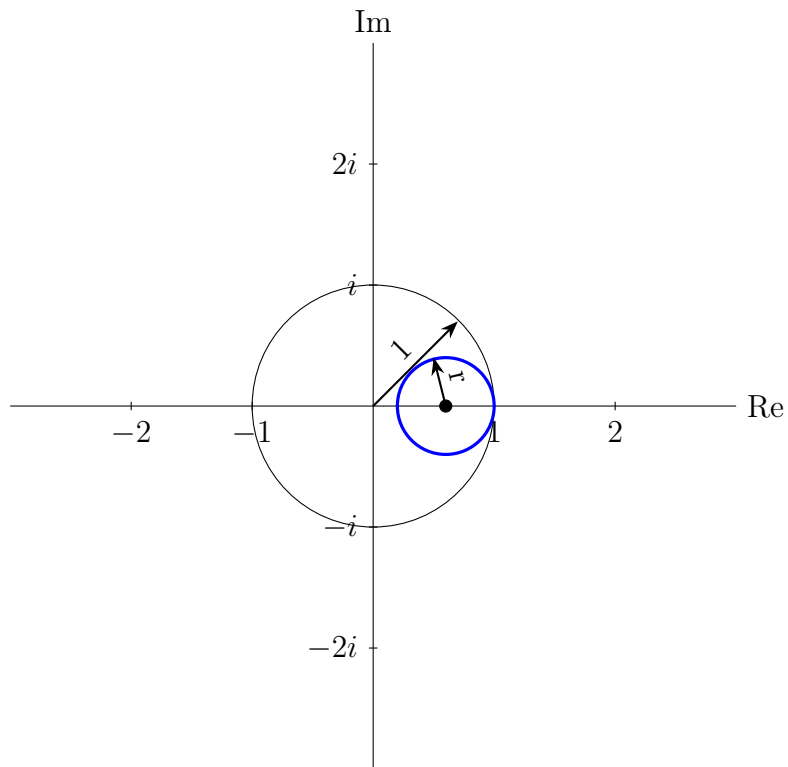


Рис. 2: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при  $r < 1$

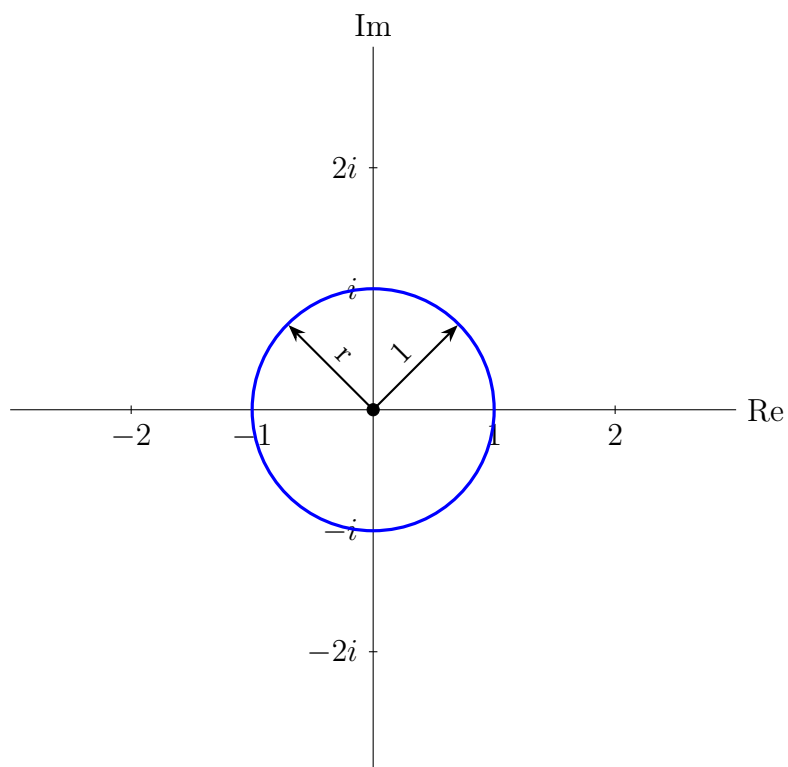


Рис. 3: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при  $r = 1$

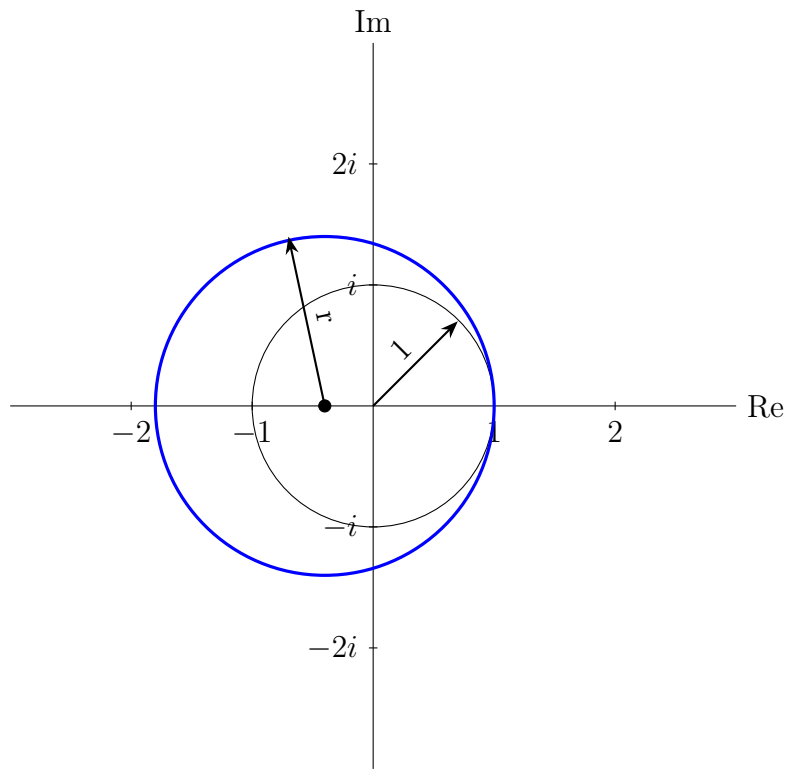


Рис. 4: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при  $r > 1$

### Задание 3

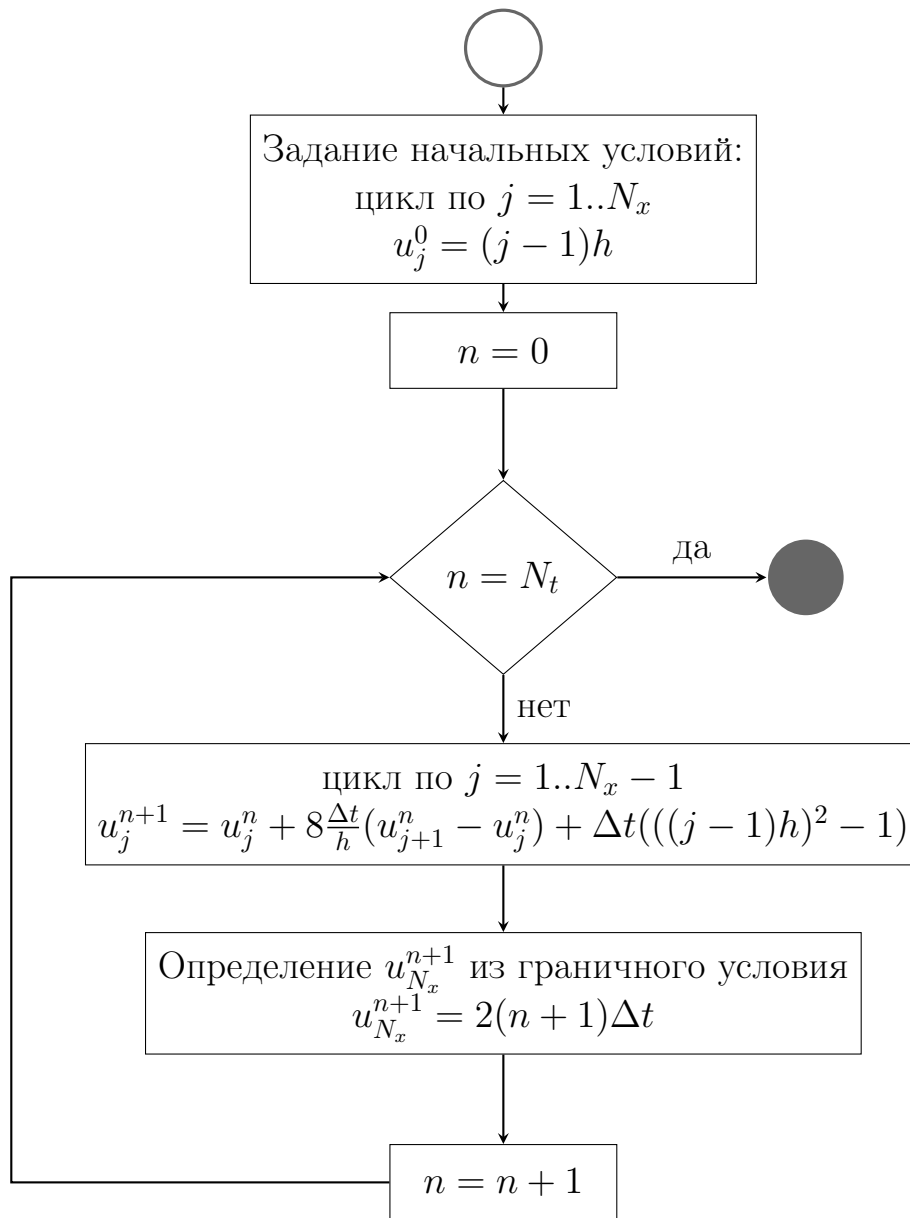
Вывести рекуррентное соотношение:

Выражаю  $u_j^{n+1}$  из разностной схемы (1):

$$u_j^{n+1} = u_j^n + 8\frac{\Delta t}{h}(u_{j+1}^n - u_j^n) + \Delta t(((j-1)h)^2 - 1).$$

### Задание 4

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:



### Задание 5

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 8 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = ((j-1)h)^2 - 1. \quad (4)$$

### Задание 6

Проверить условие устойчивости разностной схемы:

Исследую устойчивость разностной схемы (4) с помощью спектрального метода. Для этого отброшу член  $((j-1)h)^2 - 1$ , наличие которого не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представлю решение в виде гармоники. Подставляя



(2) в (4):

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j} - \lambda^{n+1}e^{i\alpha j}}{\Delta t} - 8\frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{h} = 0.$$

Упрощаю данное выражение, деля левую и правую его части на  $\lambda^n e^{i\alpha j}$ , и выражаю  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} - 8\frac{e^{i\alpha} - 1}{h} = 0 \Rightarrow \lambda = 1 - 8\frac{\Delta t}{h} + 8\frac{\Delta t}{h}e^{i\alpha}.$$