Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №6

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин А.А.
Ссылка на репозиторий: https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs
Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна
Дата сдачи: 31.03.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} - 8\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - 1$	$x \in [0, 1]$ $t \in [0, 1]$	$u(t = 0, x) = x$ $u(t, x = 0) = t$ $u(t, x = 1) = 2t$

Для заданного уравнения:

1. записать явную разностную схему;
2. проверить условие устойчивости разностной схемы;
3. вывести рекуррентное соотношение;
4. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
5. записать неявную разностную схему;
6. проверить условие устойчивости разностной схемы;
7. вывести рекуррентное соотношение;
8. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;

Выполнение задачи

Задание 1

Записать явную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}-8\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=((j-1)h)^2-1. \qquad (1)$$

Задание 2

Проверить условие устойчивости разностной схемы:

Исследую устойчивость разностной схемы (1) с помощью спектрального метода. Для этого отброшу член $((j-1)h)^2-1$, наличие которого не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представлю решение в виде гармоники:

$$u_j^n=\lambda^n e^{i\alpha j}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1):

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}-\lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t}-8\frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)}-\lambda^n e^{i\alpha j}}{h}=0.$$

Упрощаю данное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j}$, и выражаю λ:

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t}-8\frac{e^{i\alpha}-1}{h}=0\Rightarrow\lambda=1-8\frac{\Delta t}{h}+8\frac{\Delta t}{h}e^{i\alpha}.$$

Комплексный вид полученного выражения свидетельствует о том, что необходимое условие устойчивости разностных схем также следует рассматривать в применении к комплексным числам. То есть, неравенство

$$|\lambda|\le 1 \qquad (3)$$

означает, что для того, чтобы разностная схема была устойчива, необходимо чтобы собственные числа оператора перехода были расположены внутри или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости (рис. 1).

Введу следующие обозначение:

$$r=8\frac{\Delta t}{h}>0\Rightarrow\lambda=1-r+re^{i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке $(1-r,0)$ и радиусом:

$$|re^{i\alpha}|=|r\cos\alpha+ir\sin\alpha|=\sqrt{r^2\cos^2\alpha+r^2\sin^2\alpha}=r.$$

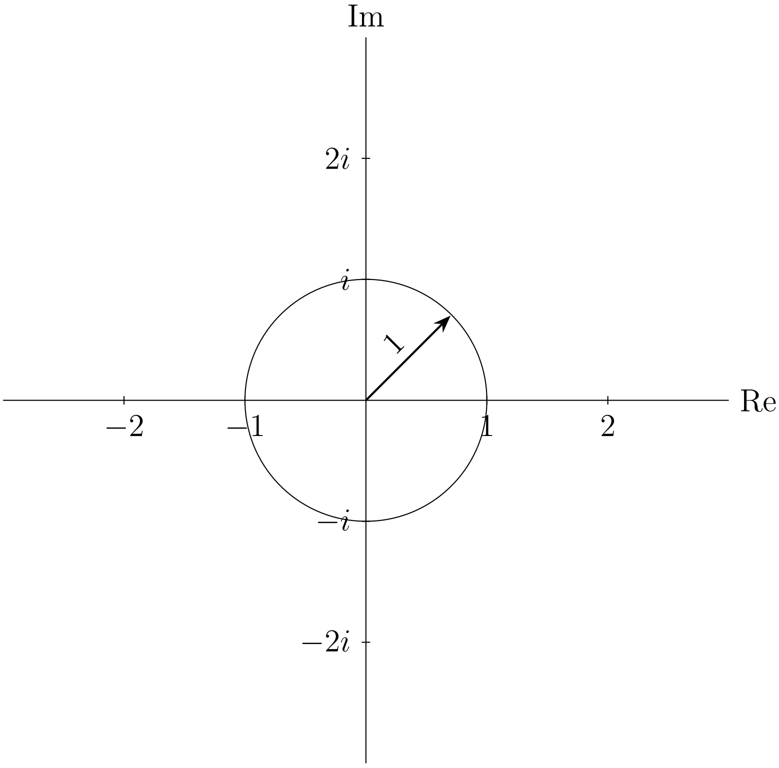


Рис. 1: Графическая интерпретация условия устойчивости (3)

Сравнивая расположение этой окружности на комплексной плоскости с условием (3), получаю три различных варианта (рис. 2-4). Видно, что окружность, соответствующая собственным числам оператора перехода, при $r < 1$ находится внутри круга, соответствующего условию (3); при $r > 1$ - вне этого круга, а при $r = 1$ совпадает с его границей. Таким образом, разностная схема (1) будет **условно устойчива** при выполнении следующего условия:

$$r = 8\frac{\Delta t}{h} \leq 1$$

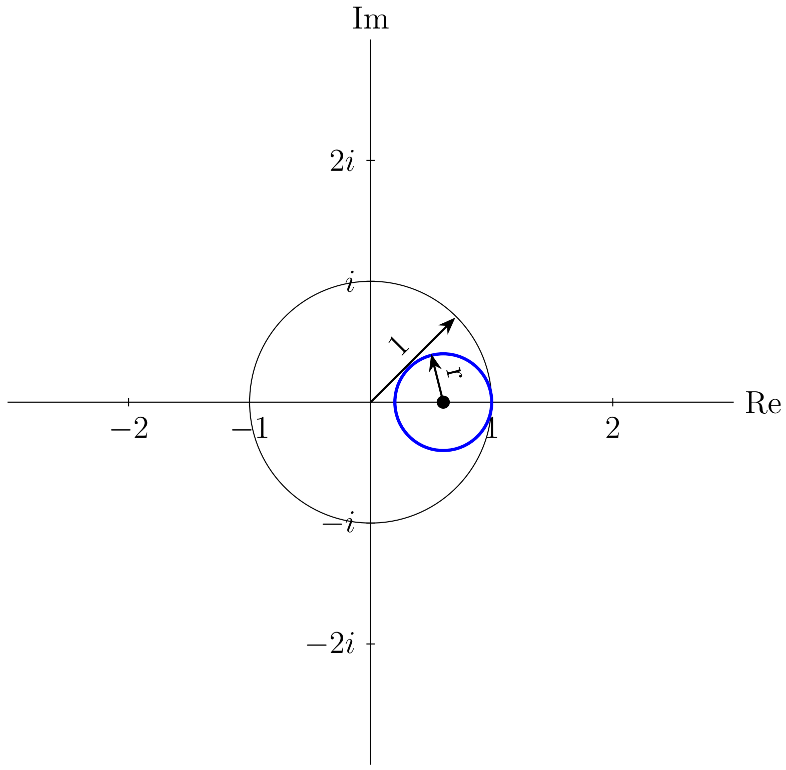


Рис. 2: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при $r < 1$

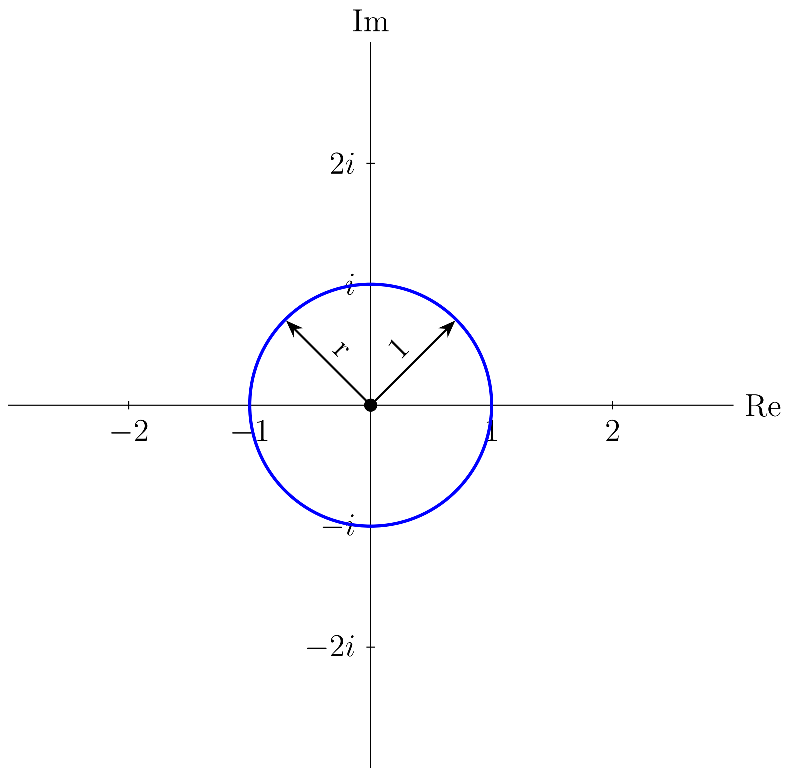


Рис. 3: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при $r = 1$

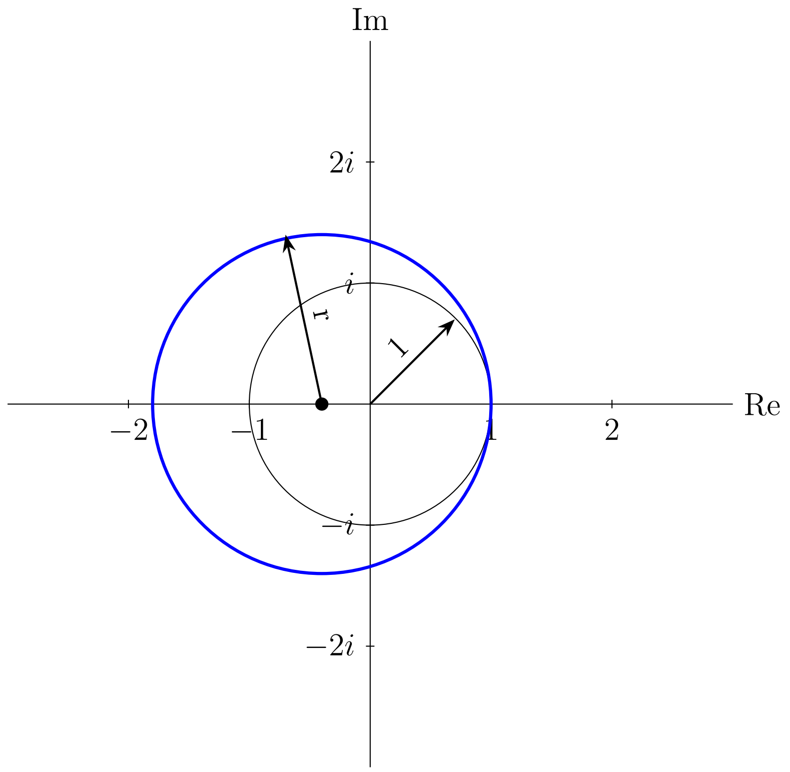


Рис. 4: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при $r > 1$

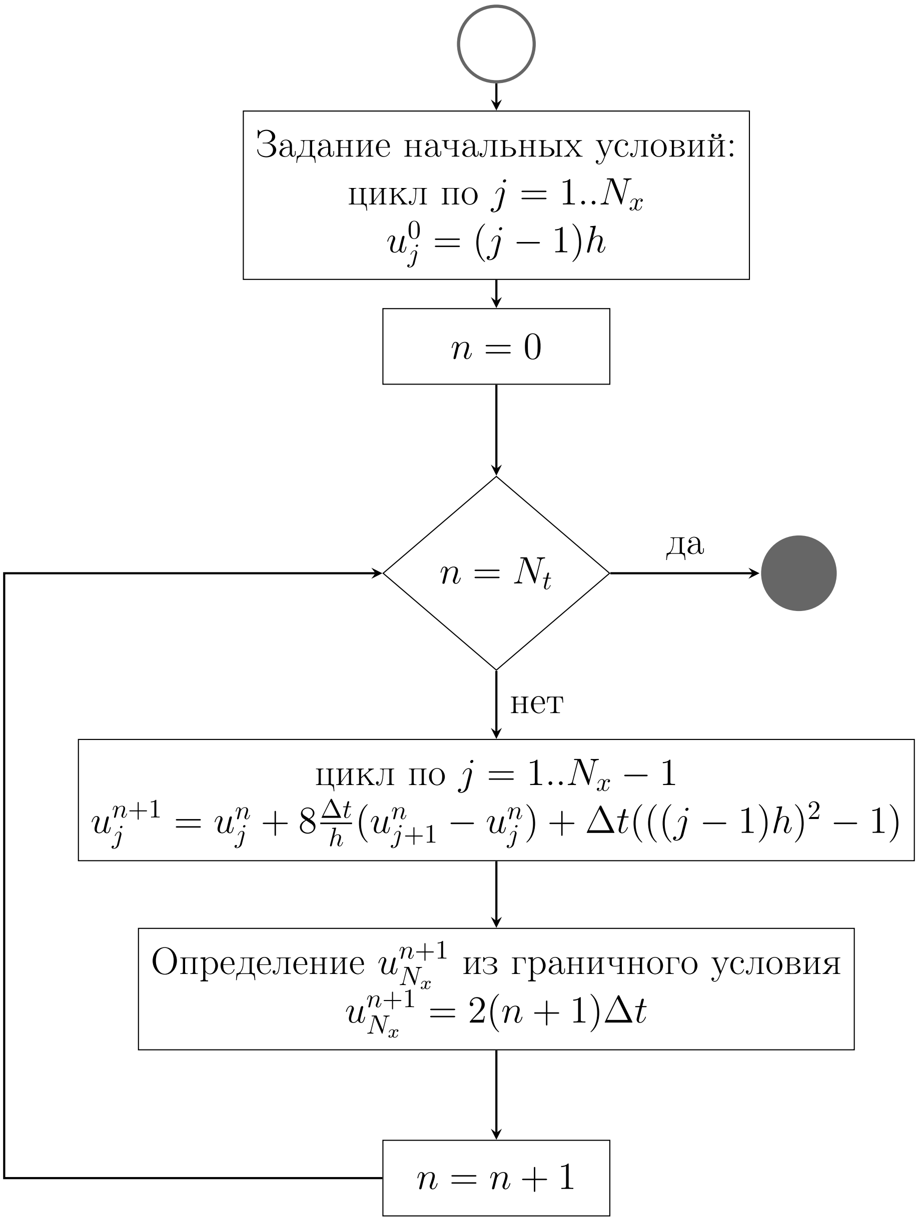
Задание 3

Вывести рекуррентное соотношение:
Выражаю u_j^{n+1} из разностной схемы (1):

$$u_j^{n+1} = u_j^n + 8\frac{\Delta t}{h}(u_{j+1}^n - u_j^n) + \Delta t(((j-1)h)^2 - 1).$$

Задание 4

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:



Задание 5

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 8\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = ((j-1)h)^2 - 1. \tag{4}$$

Задание 6

Проверить условие устойчивости разностной схемы:

Исследую устойчивость разностной схемы (4) с помощью спектрального метода. Для этого отброшу член $((j-1)h)^2 - 1$, наличие которого не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представлю решение в виде гармоники. Подставляя

(2) в (4):

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}-\lambda^{n}e^{i\alpha j}}{\Delta t}-8\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha(j+1)}-\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}}{h}=0.$$

Упрощаю данное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j}$, и выражаю величину, обратную λ:

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t}-8\frac{\lambda e^{i\alpha}-\lambda}{h}=0\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=1+8\frac{\Delta t}{h}-8\frac{\Delta t}{h}e^{i\alpha}.$$

При этом необходимое условие устойчивости разностных схем (3) также преобразую к виду:

$$|\frac{1}{\lambda}|\geq 1. \tag{5}$$

Неравенство (5) в применении к комплексным числам означает, что для устойчивости разностной схемы (4) требуется, чтобы величины, обратные собственным числам оператора перехода, были расположены вне или на границе круга радиусом *1*, центр котого находится в начале координат комплексной плоскости (рис. 1).

Введу следующее обозначение:

$$r=8\frac{\Delta t}{h}>0\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=1+r-re^{i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке $(1+r,0)$ и радиусом:

$$|-re^{i\alpha}|=|-r\cos\alpha+i(-r)\sin\alpha|=\sqrt{(-r)^2\cos^2\alpha+(-r)^2\sin^2\alpha}=r.$$

Данная окружность находится вне круга, соответствующего условию (5) при любом значении r (рис. 5. Таким образом, разностная схема (4) будет **абсолютно устойчива**.

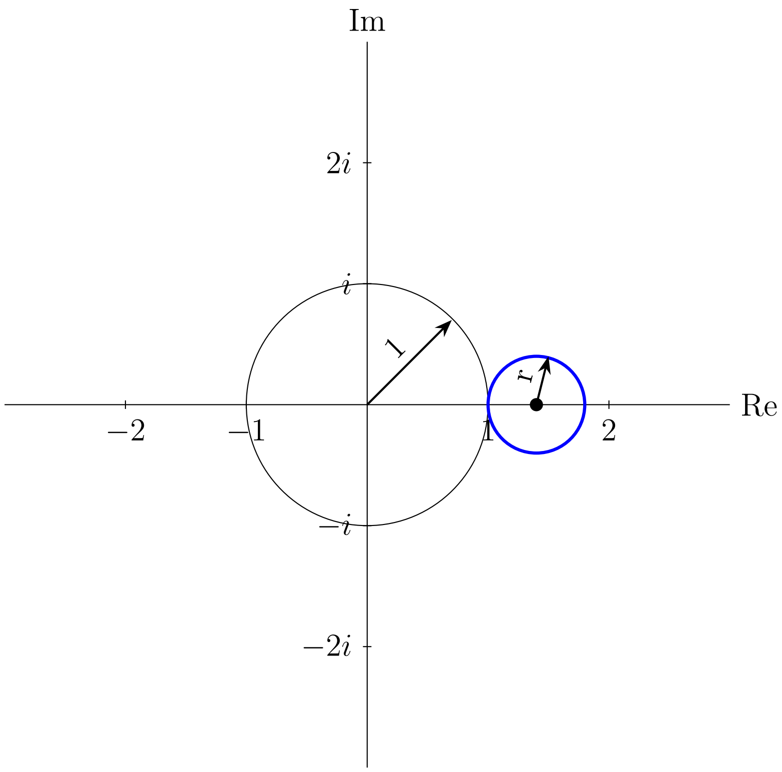


Рис. 5: Исследование устойчивости разностной схемы (4)