Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

Вариант 22

Выполнил студент группы КС-36:	Золотухин А.А.
Ссылка на репозиторий:	https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs
Принял:	Лебедев Данила Александрович
Дата сдачи:	11.04.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи 1
Выполнение задачи 2
Задание 1 2
Задание 2 2
Задание 3 2
Задание 4 4
Задание 5 4
Задание 6 4

Описание задачи

Вариант	Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
22	$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = x$	$x \in [0,1]$ $t \in [0,1]$	$u(t=0,x) = 0$ $u(t,x=0) = t^2$ $u(t,x=1) = t^2 + t$

Для заданного уравнения:

1. записать неявную разностную схему;
2. определить порядок аппроксимации разностной схемы;
3. доказать абсолютную устойчивость разностной схемы (с помощью метода гармоник);
4. вывести рекуррентное соотношение;
5. выбор граничного условия зависит от того, с какой конечной разностью вы будете работать (левой или правой). Выбор конечной разности зависит от устойчивости системы. Вы должны выбрать ту конечную разность, при которой схема будет устойчива;
6. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
7. построить программу на любом удобном языке программирования;
8. провести численный расчёт с использованием различных значений $\Delta t = 0.1$, $h = 0.1$;
9. сравнить результаты расчётов с истинными значениями функции u в соответствующих точках разностной сетки (*истинное решение уравнения будет выдано преподавателем после выполнения расчётов по разностной схеме*);
10. в случае существенного расхождения результатов расчётов по разностной схеме и истинных значений функции u в соответствующих точках разностной сетки выполнить расчёт с меньшими значениями Δt и/или h (*выбор осуществить самостоятельно*) с целью получения более точных результатов.

Выполнение задачи

Задание 1

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 2\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = (j-1)h. \tag{1}$$

В записанной разностной схеме (1) аппроксимация производной функции *u(t, x)* по координате рассматривается на *n+1*-м шаге по времени. Такая разностная схема называется **неявной**.

Задание 2

Определить порядок аппроксимации разностной схемы (1):

Задание 3

Доказать абсолютную устойчивость разностной схемы (1) (с помощью метода гармоник):

Для этого отбрасываю член $f(t^n, x_j)$, т.е. x в моём случае, наличие которого не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы.

Представлю решение разностной схемы в виде гармоники:

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в разностную схему (1), получаю:

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} - \frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha(j+1)} - \lambda^{n+1}e^{i\alpha j}}{h} = 0.$$

Упрощаю полученное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j)}$, и выражаю величину, обратную λ:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} - 2\frac{\lambda e^{i\alpha} - \lambda}{h} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 + 2\frac{\Delta t}{h} - 2\frac{\Delta t}{h}e^{i\alpha}.$$

Необходимое условие устойчивости разностных схем:

$$|\lambda| \leq 1. \tag{3}$$

При этом необходимое условие устойчивости разностных схем (3) также преобразую к виду:

$$|\frac{1}{\lambda}| \geq 1. \tag{4}$$

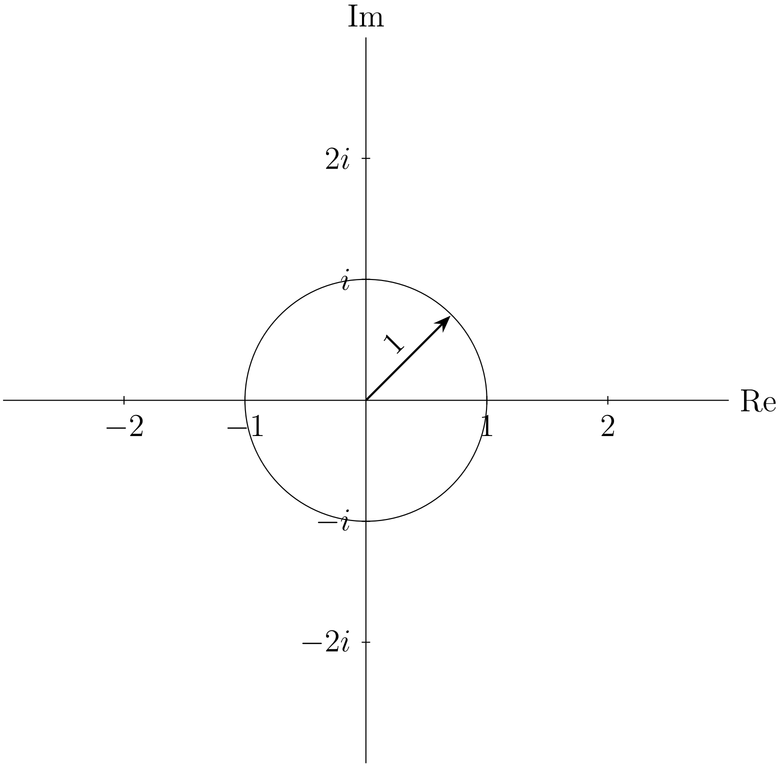


Рис. 1: Графическая интерпретация условия устойчивости (3)

Неравенство (4) в применении к комплексным числам означает, что для устойчивости разностной схемы (1) требуется, чтобы величины, обратные собственным числам оператора перехода, были расположены вне или на границе круга радиусом *1*, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости (рис. 1).

Введу следующее обозначение:

$$r = 2\frac{\Delta t}{h} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 + r - re^{i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке $(1-r, 0)$ и радиусом:

$$|re^{i\alpha}| = |r\cos\alpha + ir\sin\alpha| = \sqrt{r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha} = r. \tag{5}$$

Данная окружность находится вне круга, соответствующего условию (4) при любом значение r (рис. 2). Таким образом, разностная схема (1) будет **абсолютно устойчива**.

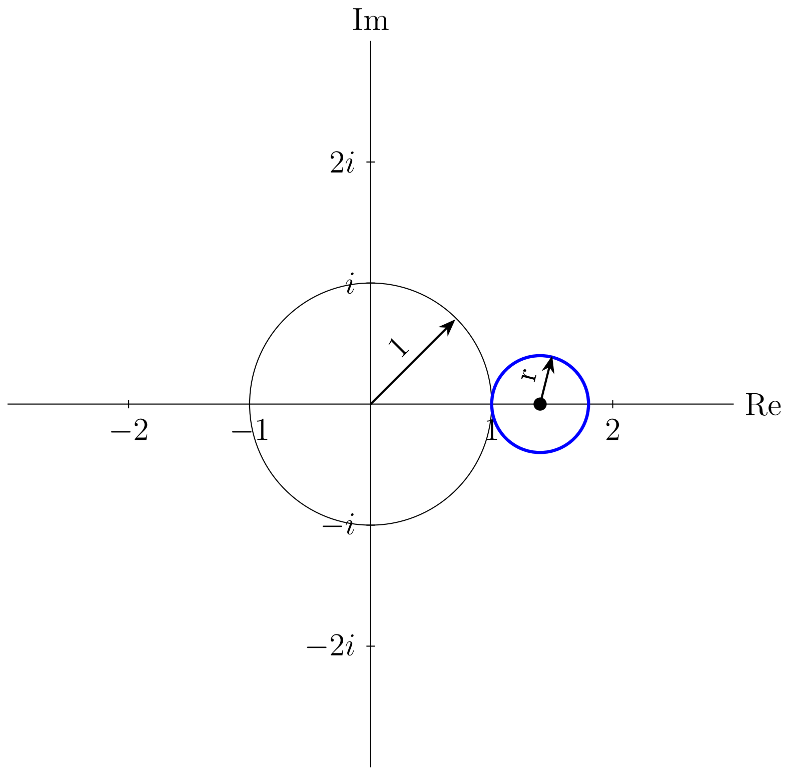


Рис. 2: Исследование устойчивости разностной схемы (1)

Задание 4

Вывести рекуррентное соотношение:

Выражая u_j^{n+1} из разностной схемы (1), получаю **рекуррентное соотношение**

$$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + 2\frac{\Delta t}{h} u_{j+1}^{n+1} + \Delta t((j-1)h)}{1 + 2\frac{\Delta t}{h}}, \tag{6}$$

Задание 5

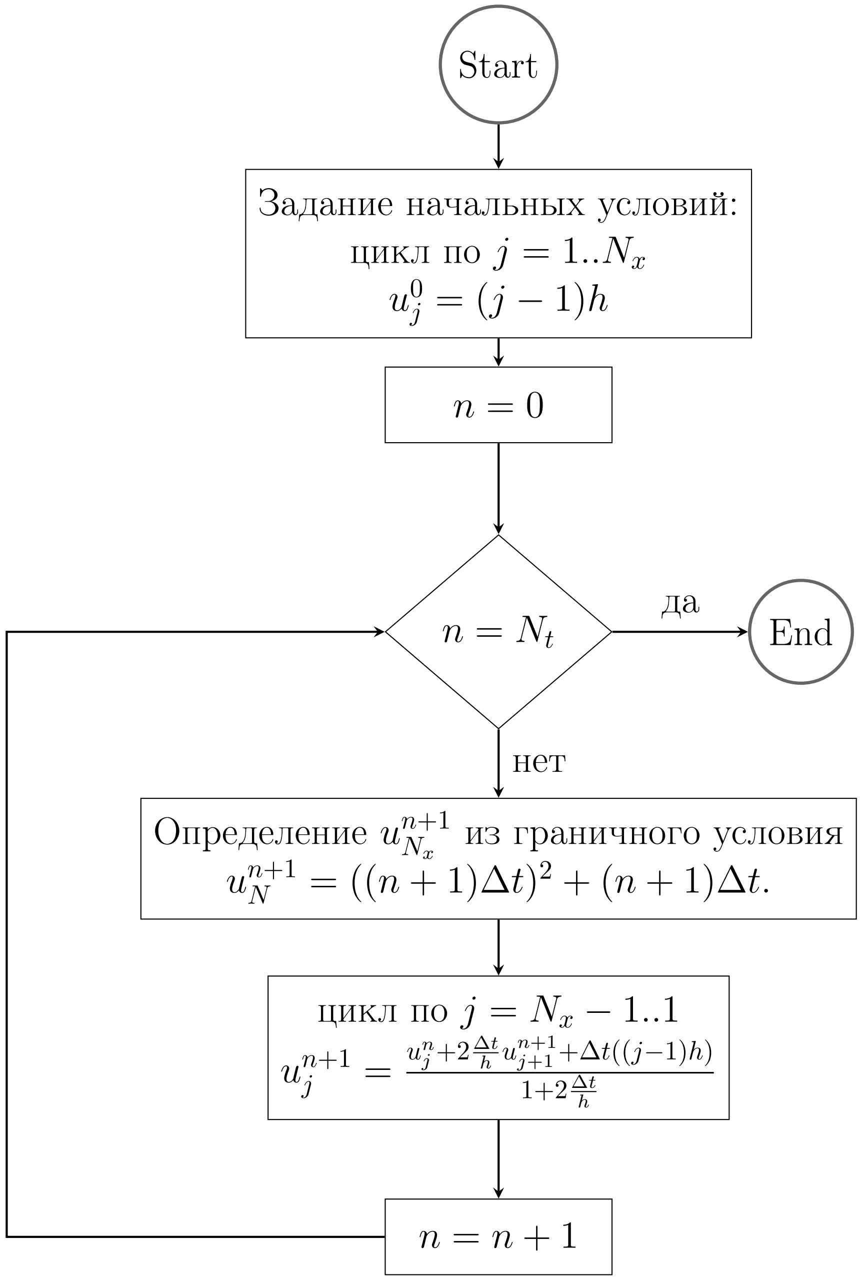
Выбор граничного условия зависит от того, с какой конечной разностью вы будете работать (левой или правой). Выбор конечной разности зависит от устойчивости системы. Вы должны выбрать ту конечную разность, при которой схема будет устойчива:

Рекуррентное соотношение (6) позволяет последовательно рассчитать все значения функции *u(t, x)* на *n + 1*-м шаге по времени u_j^{n+1}, $j = N-1, \ldots, 1$, если известна величина u_N^{n+1}, которую можно определить из *правого граничного условия*:

$$u_N^{n+1} = ((n+1)\Delta t)^2 + (n+1)\Delta t.$$

Задание 6

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:


Start
Задание начальных условий:
цикл по $j = 1..N_x$
$u_j^0 = (j-1)h$
$n = 0$
$n = N_t$
да
End
нет
Определение $u_{N_x}^{n+1}$ из граничного условия
$u_N^{n+1} = ((n+1)\Delta t)^2 + (n+1)\Delta t.$
цикл по $j = N_x - 1..1$
$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + 2\frac{\Delta t}{h} u_{j+1}^{n+1} + \Delta t((j-1)h)}{1 + 2\frac{\Delta t}{h}}$
$n = n + 1$