Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

« Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева »

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

Вариант 22

Выполнил студент группы КС-36:	**Золотухин Андрей Александрович**
Ссылка на репозиторий:	https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs
Принял:	Лебедев Данила Александрович
Дата сдачи:	02.04.25

Москва

2025

Оглавление

Описание задачи

Вариант	**Уравнение**	**Интервалы переменных**	**Начальные и граничные условия**
22	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	x in [0, 1] t in [0, 1]	$u(t=0,x) = e^x$ $u(t,x=0) = e^t$ $u(t,x=1) = e^{t+1}$

Для заданного уравнения:

1. записать неявную разностную схему;
2. определить порядок аппроксимации разностной схемы;
3. доказать абсолютную устойчивость разностной схемы (с помощью метода гармоник);
4. привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки;
5. проверить сходимость прогонки;
6. найти α_1, β_1, u_N^{n+1}
7. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
8. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
9. построить программу на любом удобном языке программирования;
10. провести численный расчёт с использованием различных значений Δt*(0.1, 0.01, 0.001)*, $h = 0.1$
11. составить отчёт о проделанной работе;
12. сравнить результаты расчётов заданий №1 и №2 друг с другом, а также с истинными значениями функции u и в соответствующих точках разностной сетки (*истинное решение уравнения будет выдано преподавателем после выполнения расчётов по явной и неявной разностным схемам).*

Выполнение задачи

Задание 1

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}. \tag{1}$$

В записанной разностной схеме Equation 1 аппроксимация второй производной функции *u(t, x)* по координате рассматривается на *n+1*-м шаге по времени, т.е. относительно точки t^{n+1}, для которой рассматривается аппроксимация всего уравнения. Такая разностная схема называется **неявной**.

Задание 2

Определить порядок аппроксимации разностной схемы Equation 1: Для этого запишу разложение значений u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}, u_j^{n+1}, u_{j-1}^{n+1} в ряд Тейлора относительно точки

Задание 3

Доказать абсолютную устойчивость разностной схемы Equation 1 (с помощью метода гармоник): Представляю решение разностной схемы в виде гармоники:

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j}. \tag{2}$$

Подставляя Equation 2 в разностную схему Equation 1, получаю:

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} = \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} - 2\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} + \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h^2}. \tag{3}$$

Упрощаю полученное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j}$ Преобразую комплексные числа из экспоненциальной формы в тригонометрическую:

$$e^{\pm i\alpha} \Rightarrow \cos\alpha \pm \sin\alpha \Rightarrow \frac{\lambda - 1}{\Delta} = \frac{2\cos\alpha - 2}{h^2}. \tag{4}$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \tag{5}$$