Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №6

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин А.А.
Ссылка на репозиторий: https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs
Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна
Дата сдачи: 31.03.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} - 8\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - 1$	$x \in [0, 1]$ $t \in [0, 1]$	$u(t = 0, x) = x$ $u(t, x = 0) = t$ $u(t, x = 1) = t$

Для заданного уравнения:

1. записать явную разностную схему;
2. проверить условие устойчивости разностной схемы;
3. вывести рекуррентное соотношение;
4. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
5. записать неявную разностную схему;
6. проверить условие устойчивости разностной схемы;
7. вывести рекуррентное соотношение;
8. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;

Выполнение задачи

Задание 1

Записать явную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 8\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = ((j-1)h)^2 - 1. \tag{1}$$

Задание 2

Проверить условие устойчивости разностной схемы: Исследую устойчивость разностной схемы (1) с помощью спектрального метода. Для этого отброшу член $((j-1)h)^2 - 1$, наличие которого не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представлю решение в виде гармоники:

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1):

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} - 8\frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{h} = 0.$$

Упрощаю данное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j}$, и выражаю λ:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} - 8\frac{e^{i\alpha} - 1}{h} = 0 \Rightarrow \lambda = 1 - 8\frac{\Delta t}{h} + 8\frac{\Delta t}{h}e^{i\alpha}.$$

Комплексный вид полученного выражения свидетельствует о том, что необходимое условие устойчивости разностных схем также следует рассматривать в применении к комплексным числам. То есть, неравенство

$$|\lambda| \leq 1 \tag{3}$$

означает, что для того, чтобы разностная схема была устойчива, необходимо чтобы собственные числа оператора перехода были расположены внутри или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости (рис. 1).

Введу следующие обозначение:

$$r = 8\frac{\Delta t}{h} > 0 \Rightarrow \lambda = 1 - r + re^{i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке $(1-r, 0)$ и радиусом:

$$|re^{i\alpha}| = |r\cos\alpha + ir\sin\alpha| = \sqrt{r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha} = r.$$

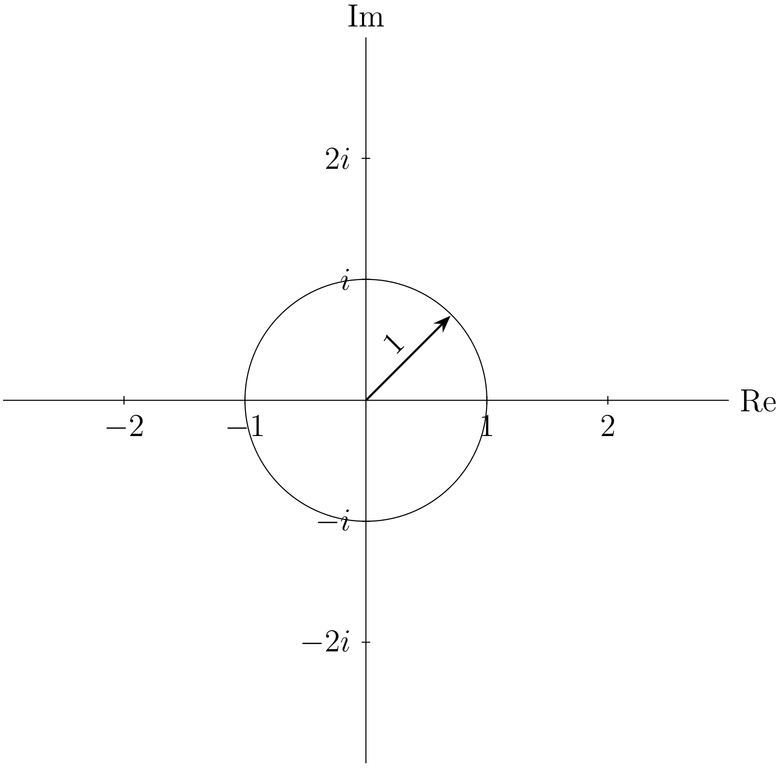

Рис. 1: Графическая интерпретация условия устойчивости (3)

Сравнивая расположение этой окружности на комплексной плоскости с условием (3), получаю три различных варианта (рис. 2-4). Видно, что окружность, соответствующая собственным числам оператора перехода, при $r < 1$ находится внутри круга, соответствующего условию (3); при $r > 1$ - вне этого круга, а при $r = 1$ совпадает с его границей. Таким образом, разностная схема (1) будет **условно устойчива** при выполнении следующего условия:

$$r = 8\frac{\Delta t}{h} \leq 1$$

Задание 3

Вывести рекуррентное соотношение: Выражаю u_j^{n+1} из разностной схемы (1):

$$u_j^{n+1} = u_j^n$$

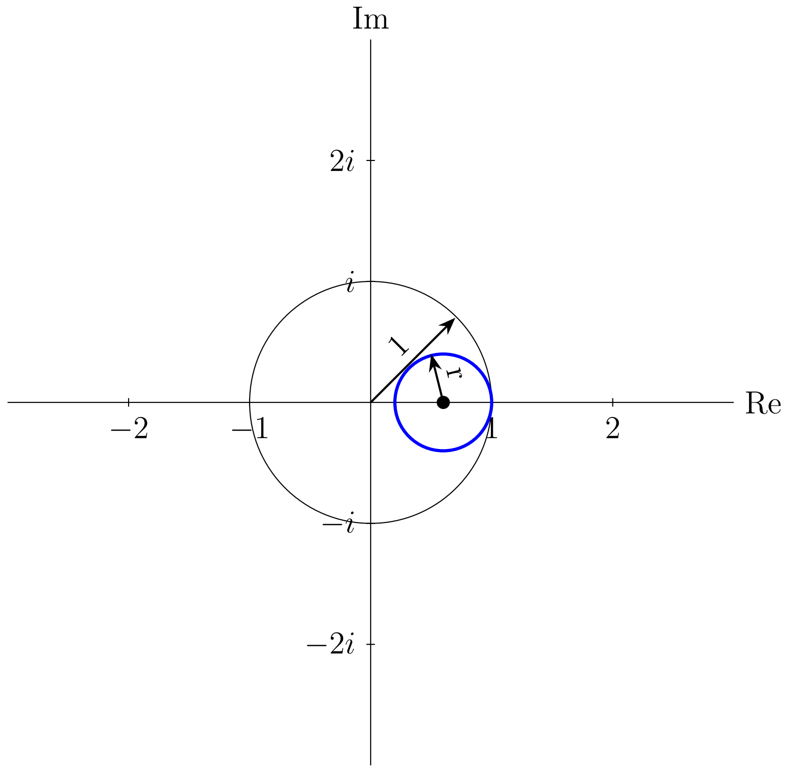

Рис. 2: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при $r < 1$

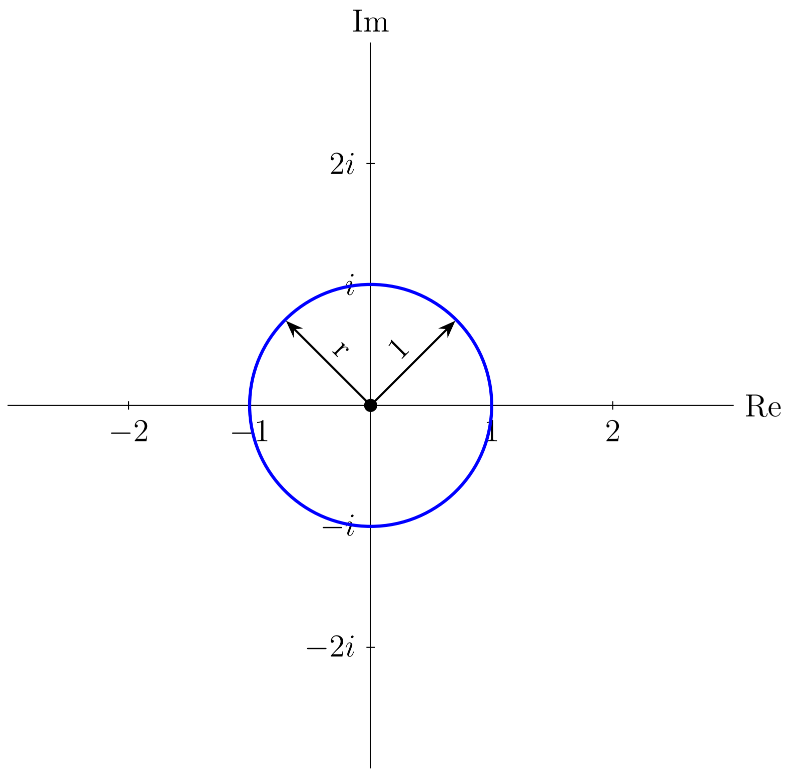

Рис. 3: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при $r = 1$

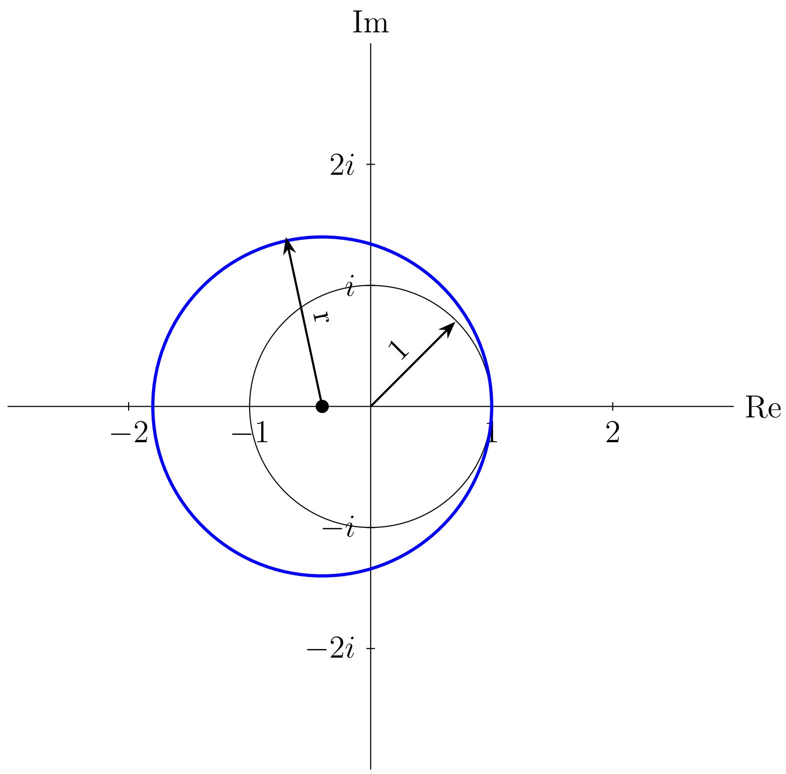

Рис. 4: Исследование устойчивости разностной схемы (1) при $r > 1$