Министерство науки и вышего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

« Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева »

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2 Вариант 22

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович

Ссылка на репозиторий: https://github.com/

CorgiPuppy/

num-methods-eq-math-phys-chem-labs

Принял: Лебедев Данила Александрович

Дата сдачи: 02.04.25

Москва

2025

Оглавление

писание задачи	. 3
ыполнение задачи	. 4
Задание 1	. 4
Задание 2	. 4
Задание 3	. 4
Задание 4	. 5
Задание 5	. 5
Задание 6	. 6
Задание 7	. 6
Задание 8	. 6

Описание задачи

Вариант	Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
22	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	x in [0, 1] t in [0, 1]	$u(t = 0, x) = e^{x}$ $u(t, x = 0) = e^{t}$ $u(t, x = 1) = e^{t+1}$

Для заданного уравнения:

- 1. записать неявную разностную схему;
- 2. определить порядок аппроксимации разностной схемы;
- 3. доказать абсолютную устойчивость разностной схемы (с помощью метода гармоник);
- 4. привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки;
- 5. проверить сходимость прогонки;
- 6. найти $\alpha_1, \beta_1, u_N^{n+1}$
- 7. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
- 8. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
- 9. построить программу на любом удобном языке программирования;
- 10. провести численный расчёт с использованием различных значений $\Delta t(0.1, 0.01, 0.001), h = 0.1$
- 11. составить отчёт о проделанной работе;
- 12. сравнить результаты расчётов заданий №1 и №2 друг с другом, а также с истинными значениями функции u и в соответствующих точках разностной сетки (ucmunhoe pewenue ypashehus bydem by

Выполнение задачи

Задание 1

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}.$$
 (1)

В записанной разностной схеме уравнения 1 аппроксимация второй производной функции u(t,x) по координате рассматривается на n+1-м шаге по времени, т.е. относительно точки t^{n+1} , для которой рассматривается аппроксимация всего уравнения. Такая разностная схема называется неявной.

Задание 2

Определить порядок аппроксимации разностной схемы уравнения 1: Для этого запишу разложение значений $u_j^{n+1},\,u_{j+1}^{n+1},\,u_{j-1}^{n+1}$ в ряд Тейлора относительно точки $(t^{n+1},\,x_j)$:

$$u_{j}^{n} = u_{j}^{n+1} - \frac{\partial u}{\partial t}|_{j}^{n+1} \Delta t + \frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}}|_{j}^{n+1} \frac{(\Delta t)^{2}}{2!} - \frac{\partial^{3} u}{\partial t^{3}}|_{j}^{n+1} \frac{(\Delta t)^{3}}{3!} + \dots,$$
 (2)

$$u_{j+1}^{n+1} = u_j^{n+1} + \frac{\partial u}{\partial x}|_j^{n+1} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_j^{n+1} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}|_j^{n+1} \frac{h^3}{3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}|_j^{n+1} \frac{h^4}{4} + \dots,$$
(3)

$$u_{j-1}^{n+1} = u_j^{n+1} - \frac{\partial u}{\partial x}|_j^{n+1} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_j^{n+1} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}|_j^{n+1} \frac{h^3}{3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}|_j^{n+1} \frac{h^4}{4} + \dots$$
 (4)

Подставляя зависимости уравнения 2 - уравнения 4 в разностную схему уравнения 1, получаю:

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{j}^{n+1} - \frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}}|_{j}^{n+1} \frac{(\Delta t)}{2!} + \frac{\partial^{3} u}{\partial t^{3}}|_{j}^{n+1} \frac{(\Delta t)^{2}}{3!} - \dots = \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}|_{j}^{n+1} \frac{h^{2}}{2!} + \frac{\partial^{4} u}{\partial x^{4}}|_{j}^{n+1} \frac{h^{4}}{4} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}|_{j}^{n+1} + O(\Delta t) = \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}|_{j}^{n+1} + O(h^{2}).$$

Таким образом, неявная разностная схема уравнения 1 аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение с первым порядком по времени и со вторым порядком по координате, что записывается в следующем виде:

$$O(\Delta t) + O\left(h^2\right)$$
 или $O(\Delta t, h^2).$

Задание 3

Доказать абсолютную устойчивость разностной схемы уравнения 1 (с помощью метода гармоник):

Представляю решение разностной схемы в виде гармоники:

$$u_i^n = \lambda^n e^{i\alpha j}. (5)$$

Подставляя уравнения 5 в разностную схему уравнения 1, получаю:

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}-\lambda^ne^{i\alpha j}}{\Delta t}=\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha (j+1)}-2\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}+\lambda^{n+1}e^{i\alpha (j-1)}}{h^2}.$$

Упрощаю полученное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j}$:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \frac{\lambda e^{i\alpha} - 2\lambda + \lambda e^{-i\alpha}}{h^2}$$

Преобразую комплексные числа из экспоненциальной формы в тригонометрическую:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha \Rightarrow \frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \lambda \frac{2\cos \alpha - 2}{h^2}.$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

получаю формулу, из которой затем выражаю λ:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \frac{-4\lambda \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{h^2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1 + \frac{4\Delta t \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{h^2}}.$$

C учётом необходимого условия устойчивости разностных схем $|\lambda| \leq 1$ имею:

$$-1 \le \frac{1}{1 + \frac{4\Delta t \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{h^2}} \le 1.$$

В полученном двойном неравенстве левое и правое условие выполняются автоматически.

Для любых значений Δt и h неравенство выполняется. Следовательно, разностная схема абсолютно устойчива.

Задание 4

Привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки:

Преобразую неявную разностную схемы уравнения 1, группируя в левой части члены, содержащие значение функции u(t, x) на (n + 1) шаге по времени, а в правой части - все остальные члены:

$$-\frac{\Delta t}{h^2}u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + 2\frac{\Delta t}{h^2}\right)u_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{h^2}u_{j-1}^{n+1} = u_j^n.$$
 (6)

Введу следующие обозначения:

$$a_{j} = -\frac{\Delta t}{h^{2}}; b_{j} = \left(1 + 2\frac{\Delta t}{h^{2}}\right); c_{j} = -\frac{\Delta t}{h^{2}}; \xi_{j}^{n} = u_{j}^{n}. \tag{7}$$

С учётом обозначений уравнения 7 равенство уравнения 6 будет иметь вид:

$$a_j u_{j+1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j-1}^{n+1} = \xi_j^n$$

Данное преобразование называется *преобразованием неявной разностной схемы к виду,* удобному для использования метода прогонки.

Задание 5

Проверить сходимость прогонки:

Теорема. Достаточным условием сходимости метода прогонки к решению исходной дифференциальной задачи является выполнение неравенства:

$$|a_j| + |c_j| < |b_j|$$

Легко видеть, что для разностной схемы достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_j| + |c_j| = 2\frac{\Delta t}{h^2} < 1 + 2\frac{\Delta t}{h^2} = |b_j|$$

Задание 6

Найти $\alpha_1, \, \beta_1, \, u_N^{n+1}$:

Для реализации неявной разностной схемы требуется ввести некоторое дополнительно условие, связывающее значения функции u(t, x) на (n+1)-м шаге по времени. Представлю это дополнительное условие в виде линейной зависимости

$$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j, \tag{8}$$

справедливой для любого значений j=1, ..., N-1.

Соотношение уравнения 8 называют **рекуррентным прогоночным соотношением**, а коэффициенты a_j , β_j - **прогоночными коэффициентами**.

Для определния прогоночных коэффициентов на 1-м шаге по координате x, использую рекуррентное прогоночное соотношение уравнения 8, записанное для j=1:

$$u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1,$$

и левое граничное условие:

$$u_1^{n+1} = e^{(n+1)\Delta t}$$

Сравнивая эти два соотношения, получаю:

$$\alpha_1=0, \beta_1=e^{(n+1)\Delta t}.$$

Значение функции u(t, x) на (n+1)-м шаге по времени в крайней правой точке, которое можно определить из правого граничного условия:

$$u_N^{n+1} = e^{(n+1)\Delta t + 1}.$$

Задание 7

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Соотношение уравнения 8 является рекуррентным прогоночным соотношением.

Задание 8

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:

