

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И.
Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №13

1 вариант

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович
Ссылка на репозиторий: [https://github.com/
CorgiPuppy/
num-methods-eq-math-phys-chem-labs](https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs)
Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна
Дата сдачи: 19.05.2025

Москва
2025

Оглавление

| | |
|-----------------------------|----|
| Описание задачи | 1 |
| Выполнение задачи | 3 |
| Задание 1 | 3 |
| Задание 2 | 3 |
| Задание 3 | 3 |
| Задание 4 | 3 |
| Задание 5 | 4 |
| Задание 6 | 5 |
| Задание 7 | 6 |
| Задание 8 | 6 |
| Задание 9 | 6 |
| Задание 10 | 7 |
| Задание 11 | 8 |
| Задание 12 | 9 |
| Задание 13 | 9 |
| Задание 14 | 9 |
| Задание 15 | 9 |
| Задание 16 | 10 |
| Задание 17 | 10 |
| Задание 18 | 12 |
| Задание 19 | 12 |
| Задание 20 | 13 |
| Задание 21 | 13 |

Описание задачи

| Уравнение | Интервалы переменных | Начальные и граничные условия |
|---|--|--|
| $\frac{\partial u}{\partial t} = 0,2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5tu$ | $x \in [0, 1]$ $y \in [0, 1]$ $t \in [0, 1]$ | $u(t = 0, x, y) = 0$ $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x = 0, y) = ty \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x = 1, y) = 5ty \end{cases}$ $\begin{cases} u(t, x, y = 0) = tx \\ u(t, x, y = 1) = 2tx \end{cases}$ |

Для заданного уравнения:

1. записать неявную разностную схему;
2. записать схему переменных направлений;
3. привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;
4. проверить сходимость прогонки;
5. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
6. составить алгоритм (блок-схему) расчёта.

| Уравнение | Интервалы переменных | Начальные и граничные условия |
|--|--|--|
| $\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 0,05 \frac{\partial u}{\partial y}$ | $x \in [0, 1]$ $y \in [0, 1]$ $t \in [0, 1]$ | $u(t = 0, x, y) = e^x$ $u(t, x = 1, y) = t$ $u(t, x, y = 0) = 0$ |

Для заданного уравнения:

7. записать неявную разностную схему;
8. записать схему расщепления;
9. вывести рекуррентное соотношение;
10. составить алгоритм (блок-схему) расчёта.

| Уравнение | Интервалы переменных | Начальные и граничные условия |
|---|----------------------|--|
| $\frac{du}{dx} + 0,3 \frac{d^2 u}{dx^2} = 3x^2$ | $x \in [0, 1]$ | $\begin{cases} \frac{du}{dx}(x = 0) = 0 \\ \frac{du}{dx}(x = 1) = 1 \end{cases}$ |

Для заданного уравнения:

11. представить задачу в нестационарном виде;
12. записать разностную схему Кранка-Николсона;
13. привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки;
14. проверить сходимость прогонки;
15. найти α_1, β_1 ;
16. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
17. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;

| Уравнение | Интервалы переменных | Начальные и граничные условия |
|--|--|--|
| $\frac{\partial u}{\partial t} + 8\frac{\partial u}{\partial y} = 7ty\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5t\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3u^2$ | $x \in [0, 1]$ $y \in [0, 1]$ $t \in [0, 1]$ | $u(t = 0, x, y) = 0$ $\begin{cases} u(t, x = 0, y) = ty \\ u(t, x = 1, y) = t^2y \\ u(t, x, y = 0) = tx \\ u(t, x, y = 1) = t^2x \end{cases}$ |

Для заданного уравнения:

18. записать схему предиктор-корректор;
19. записать рекуррентное прогоночное соотношение для предиктора;
20. записать рекуррентное прогоночное соотношение для корректора;
21. указать порядок аппроксимации разностной схемы;

Выполнение задачи

Задание 1

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 0,2 \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + 0,5 \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + 5(n+1)\Delta t u_{i,j}^{n+1}. \quad (1)$$

Задание 2

Записать схему переменных направлений для схемы (1):

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{0,2}{2} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{0,5}{2} \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}, \\ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{0,2}{2} \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{0,5}{2} \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} - \\ &\quad - 5(n + \frac{1}{2})\Delta t u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Первая подсхема в схеме переменных направлений (2) аппроксимирует производную по времени на первом полушаге интервала Δt и является неявной по координате x и явной по координате y . Вторая подсхема аппроксимирует производную по времени на втором полушаге интервала Δt и является неявной по координате y и явной по координате x .

Задание 3

Привести схемы (2) к виду, удобному для использования метода прогонки:

Первая подсхема

Приведу первую подсхему (2) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$\frac{0,2}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 0,2 \frac{\Delta t}{h_x^2}) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{0,2}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^n + \frac{0,5}{2} \Delta t \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}.$$

Вторая подсхема

Приведу вторую подсхему (2) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$\begin{aligned} -\frac{0,5}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2} u_{i,j+1}^{n+1} + (1 + 0,5 \frac{\Delta t}{h_y^2}) u_{i,j}^{n+1} - \frac{0,5}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2} u_{i,j-1}^{n+1} &= u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{0,2}{2} \Delta t \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \\ &\quad + \Delta t (-5(n + \frac{1}{2}) \Delta t u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Задание 4

Проверить сходимость прогонки для схем (2):

Первая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению первой подсхемы (2), имеют вид:

$$a_i = -\frac{0,5}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad b_i = 1 + 0, 2 \frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad c_i = -\frac{0,2}{2} \frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad \xi_{i,j}^n = u_{i,j}^n + \frac{0,5}{2} \Delta t \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}.$$

Легко видеть, что для первой подсхемы (2) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_i| + |c_i| = 0, 2 \frac{\Delta t}{h_x^2} < 1 + 0, 2 \frac{\Delta t}{h_x^2} = |b_i|.$$

Вторая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению второй подсхемы (2), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = -\frac{0,5}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_j = 1 + 0, 5 \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{c}_j = -\frac{0,5}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{0,2}{2} \Delta t \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \Delta t (-5(n + \frac{1}{2}) \Delta t u^{n+\frac{1}{2}}).$$

Легко видеть, что для второй подсхемы (2) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = 0, 5 \frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 0, 5 \frac{\Delta t}{h_y^2} = |\tilde{b}_j|.$$

Задание 5

Записать рекуррентное прогоночное соотношение для схем (2):

Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы (2) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i \beta_{i-1}}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}.$$

Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы (2) имеет вид:

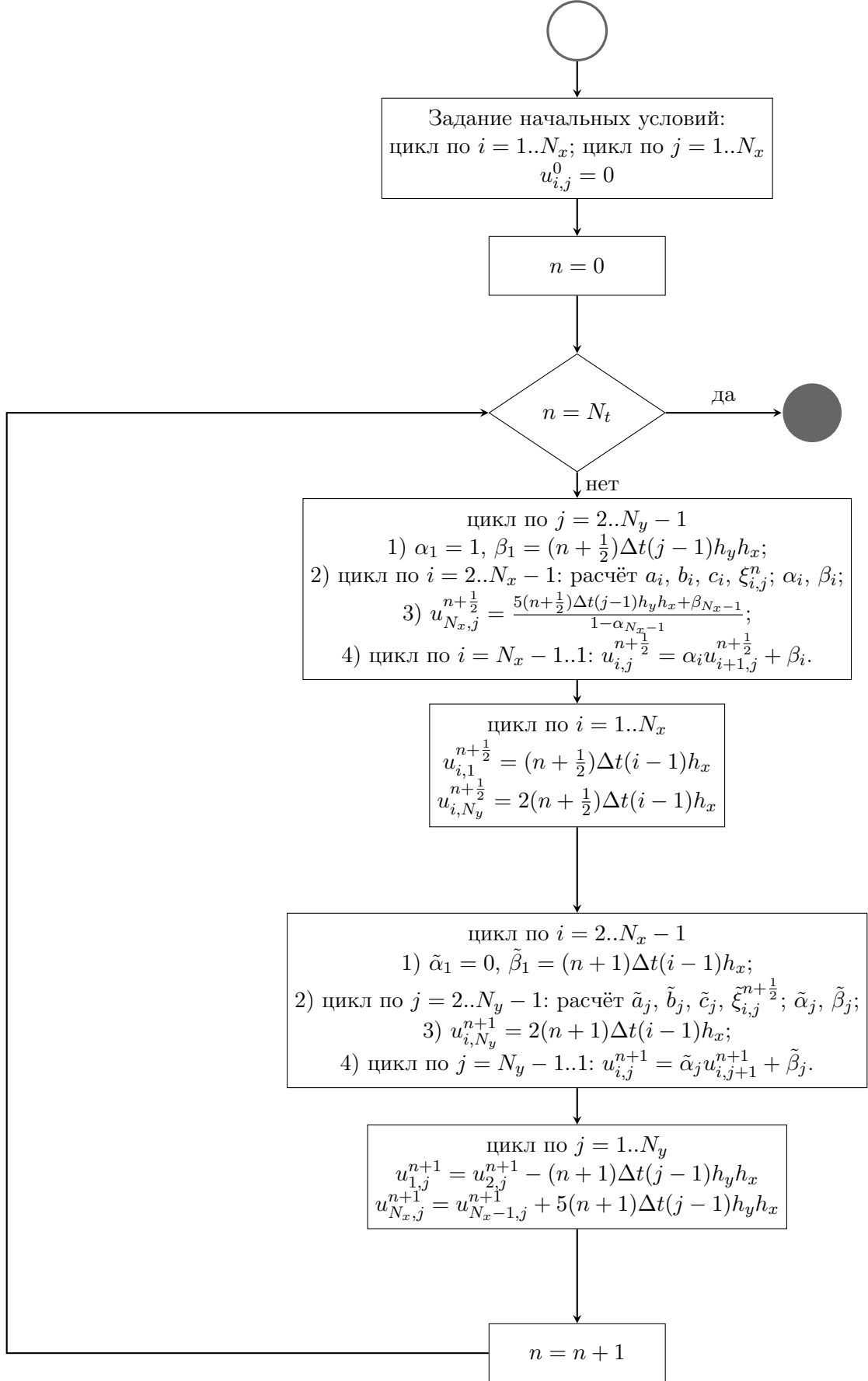
$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+1} + \tilde{\beta}_j.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_j \tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

Задание 6

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта для схем (2):



Задание 7

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - 2 \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h_x} + 0,05 \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y} = 0. \quad (3)$$

Задание 8

Записать схему расщепления для схемы (3): Рассмотрю метод разрешения неявной разностной схемы (3), называемый **методом дробных шагов**. Данный метод позволяет представить разностной схему (3) в виде двух подсхем, каждая из которых может быть решена с помощью метода прогонки.

Разобью пополам интервал Δt между точками t^n и t^{n+1} на разностной сетке и обозначу полученную промежуточную точку как $t^{n+\frac{1}{2}}$.

Запишу на первом полушаге интервала Δt неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную по координате x :

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - 2 \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} = 0. \quad (4)$$

Запишу на втором полушаге интервала Δt неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную порядка по координате y :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + 0,05 \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y} = 0. \quad (5)$$

Складывая подсхемы (4) и (5), получаю соотношение, отличающееся от неявной разностной схемы (3) только тем, что вторая производная по координате x аппроксимирована в нём не на $(n+1)$ -м шаге по времени, а на шаге $(n + \frac{1}{2})$:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - 2 \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} + 0,05 \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение из условия задачи может быть аппроксимировано с помощью последовательного разрешения двух подсхем (4), (5), называемых в совокупности **схемой расщепления**.

Задание 9

Вывести рекуррентное соотношение для подсхем (4) и (5):

Первая подсхема

Выражаю $u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ и разностной схемы (4):

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2\frac{\Delta t}{h_x}}{1 + 2\frac{\Delta t}{h_x}} u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{u_{i,j}^n}{1 + 2\frac{\Delta t}{h_x}}.$$

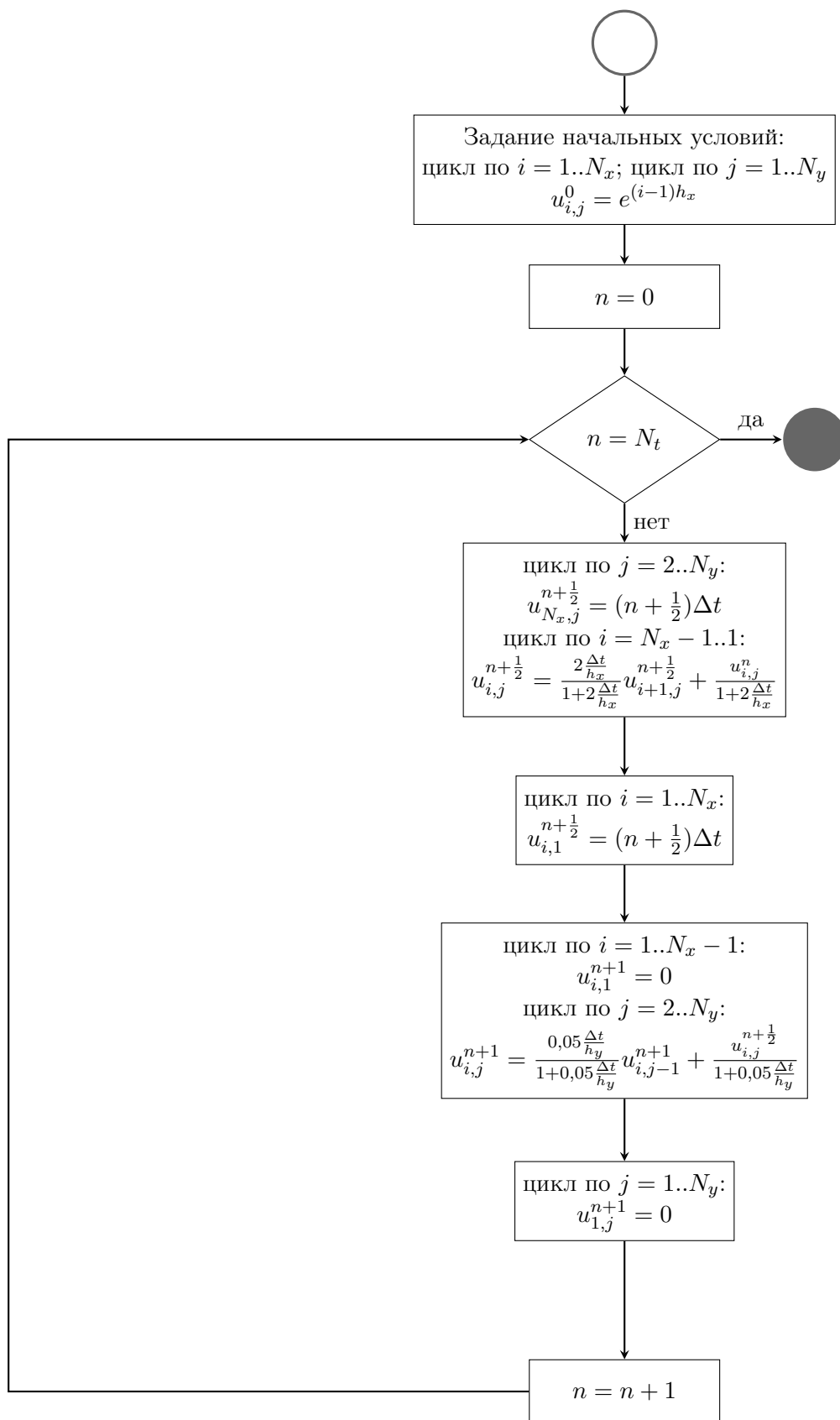
Вторая подсхема

Выражаю $u_{i,j}^{n+1}$ и разностной схемы (5):

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{0,05\frac{\Delta t}{h_y}}{1 + 0,05\frac{\Delta t}{h_y}} u_{i,j-1}^{n+1} + \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{1 + 0,05\frac{\Delta t}{h_y}}.$$

Задание 10

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта схемы (6):



Задание 11

Представить задачу в нестационарном виде:

Представлю стационарную задачу в нестационарном виде. Для этого в уравнение

необходимо добавить фиктивную производную по времени:

$$-\frac{du}{dx} = 0, 3\frac{d^2u}{dx^2} - 3x^2 \rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0, 3\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - 3x^2. \quad (7)$$

При этом искомая функция станет уже функцией двух переменных:

$$u(x) \rightarrow \tilde{u}(x, \tau).$$

Задание 12

Записать разностную схему Кранка-Николсона для уравнения (7):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} - \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = \frac{0,3}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{0,3}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 3((j-1)h)^2. \quad (8)$$

Задание 13

Привести схему (8) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-(\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{0,3}{2} \frac{\Delta t}{h^2})u_{j+1}^{n+1} + (1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + 0,3 \frac{\Delta t}{h^2})u_j^{n+1} - \frac{0,3}{2} \frac{\Delta t}{h^2}u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + \frac{0,3}{2} \frac{\Delta t}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h}(u_{j+1}^n - u_j^n) - \Delta t 3((j-1)h_x)^2.$$

Введу следующие обозначения:

$$a_j = -(\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{0,3}{2} \frac{\Delta t}{h^2}), \quad b_j = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + 0,3 \frac{\Delta t}{h^2}, \quad c_j = -\frac{0,3}{2} \frac{\Delta t}{h^2}, \\ \xi_j^n = u_j^n + \frac{0,3}{2} \frac{\Delta t}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h}(u_{j+1}^n - u_j^n) - \Delta t 3((j-1)h_x)^2.$$

С учётом обозначений равенство будет иметь вид:

$$\alpha_j u_{j+1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j-1}^{n+1} = \xi_j^n.$$

Данное преобразование называется *преобразованием схемы Кранка-Николсона к виду, удобному для использования метода прогонки*.

Задание 14

Проверить сходимость прогонки:

Легко видеть, что для разностной схемы (8) достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_j| + |c_j| = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + 0,3 \frac{\Delta t}{h^2} < 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + 0,3 \frac{\Delta t}{h^2} = |b_j|.$$

Задание 15

Найти α_1, β_1 :

Для реализации разностной схемы Кранка-Николсона требуется ввести некоторое дополнительное условие, связывающее значения функции $u(t, x)$ на $(n+1)$ -м шаге по времени. Представлю это дополнительное условие в виде линейной зависимости

$$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j, \quad (9)$$

справедливой для любого из значений $j = 1..N - 1$.

Соотношение (9) называют **рекуррентным прогоночным соотношением**, а коэффициенты α_j, β_j - **прогоночными коэффициентами**.

Для определения прогоночных коэффициентов на 1 -м шаге по координате x , используя рекуррентное прогоночное соотношение (9), записанное для $j = 1$:

$$u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1$$

и левое граничное условие:

$$u_1^{n+1} = u_2^{n+1}.$$

Сравнивая эти два соотношения, получаю:

$$\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0.$$

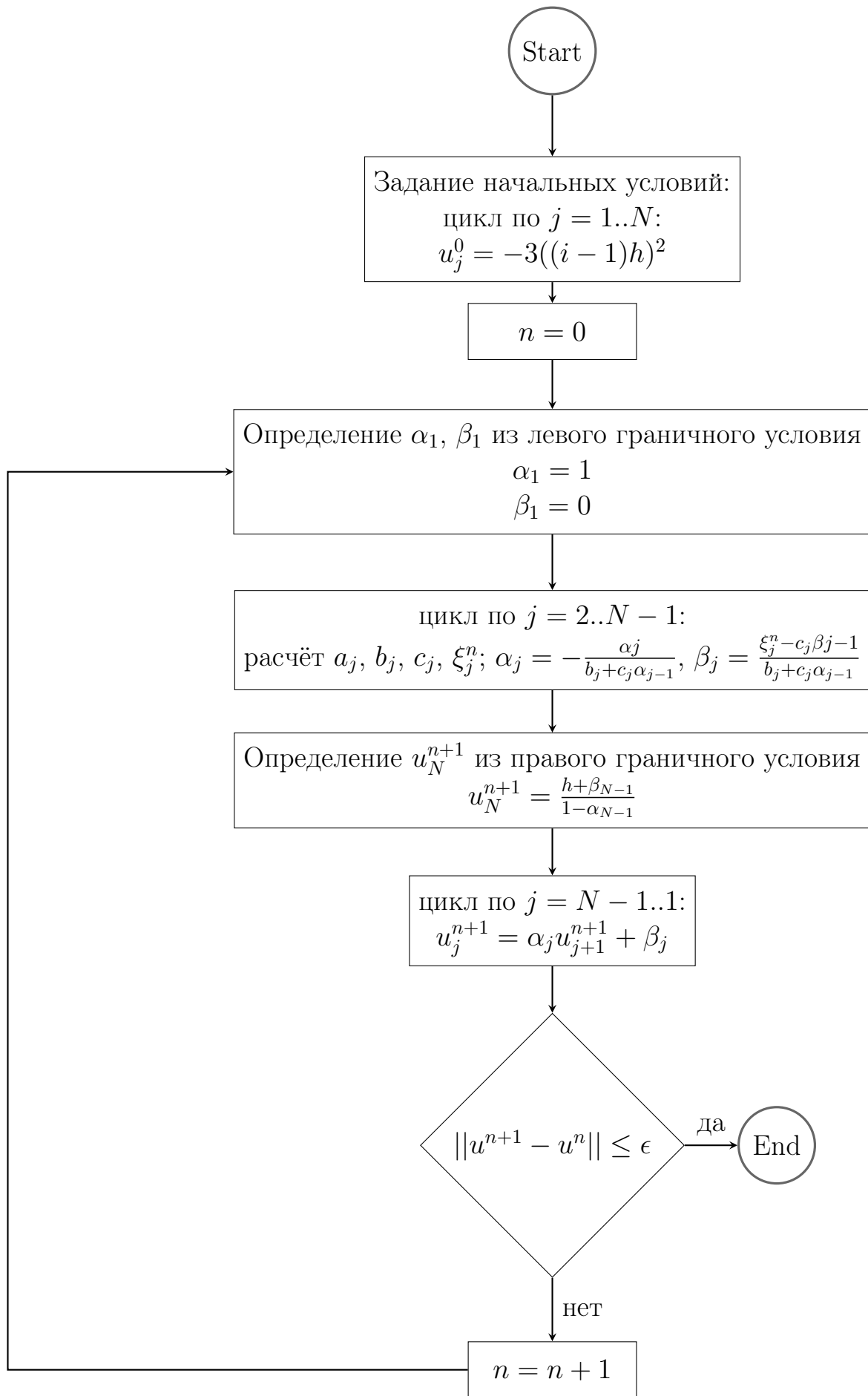
Задание 16

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Соотношение (9) является **рекуррентным прогоночным соотношением**.

Задание 17

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:



Задание 18

Записать схему предиктор-корректор:

Данная схема требует особого способа расщепления интервала Δt : интервал Δt между точками t^n и t^{n+1} на разностной сетке делится пополам; интервал $\Delta t/2$ между точками t^n и $t^{n+\frac{1}{2}}$ снова делится пополам.

На первом полушаге интервала $\Delta t/2$ записывается неявная разностная схема, в которой учитывается только производная второго порядка по координате x :

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - u_{i,j}^n}{\Delta t/2} = 7(n + \frac{1}{4})\Delta t(j-1)h_y \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{4}}}{h_x^2} - 3(u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} * u_{i,j}^n). \quad (10)$$

На втором полушаге интервала $\Delta t/2$ записывается неявная разностная схема, в которой учитывается только производная второго порядка по координате y :

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}}{\Delta t/2} + 8 \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y} = 5(n + \frac{1}{2})\Delta t \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2}. \quad (11)$$

Результатом последовательного решения подсхем (10), (11), называемых в совокупности **предиктором**, являются значения функции $u(t, x, y)$ на шаге по времени $(n + \frac{1}{2})$. Для завершения расчётов на всём интервале Δt используется поправочное разностное соотношение, называемое **корректором**:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + 8 \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y} = 7(n + \frac{1}{2})\Delta t(j-1)h_y \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + 5(n + \frac{1}{2})\Delta t \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2} - 3(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}})^2. \quad (12)$$

Таким образом, схема предиктор-корректор в случае двумерных задач состоит из трёх подсхем.

Задание 19

Записать рекуррентное прогоночное соотношение для предиктора:

Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы предиктора (10) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i \beta_{i-1}}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}.$$

Вторая подсьема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсьемы предиктора (11) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - \tilde{c}_j \tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

Задание 20

Записать рекуррентное прогоночное соотношение для корректора (12):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left(-8 \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y} + 7 \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t (j-1) h_y \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + 5 \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2} - 3(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}})^2 \right).$$

Задание 21

Определить порядок аппроксимации разностной схемы: $O(\Delta t^2, h_x^2, h_y)$.