Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №13
3 ВАРИАНТ

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович
Ссылка на репозиторий: https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs
Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна
Дата сдачи: 19.05.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} + 7\frac{\partial u}{\partial x} - 8\frac{\partial u}{\partial y} = 0,2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + t\sin xy$	$x \in [0,1]$ $y \in [0,1]$ $t \in [0,1]$	$u(t=0,x,y) = ye^x$ $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=0, y) = t \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1, y) = 2t \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y=0) = t \\ \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y=1) = 2t \end{cases}$

Для заданного уравнения:

1. записать неявную разностную схему;
2. записать схему расщепления;
3. привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;
4. проверить сходимость прогонки;
5. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
6. составить алгоритм (блок-схему) расчёта.

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,2\frac{\partial u}{\partial x} - 0,1\frac{\partial u}{\partial y} + \sin x + \sin y$	$x \in [0,1]$ $y \in [0,1]$ $t \in [0,1]$	$u(t=0,x,y) = 0$ $\begin{cases} u(t, x=0, y) = \sin y \\ u(t, x=1, y) = \cos y \end{cases}$ $\begin{cases} u(t, x, y=0) = \sin x \\ u(t, x, y=1) = \cos x \end{cases}$

Для заданного уравнения:

7. записать явную разностную схему;
8. записать условие устойчивости на шаг;
9. записать рекуррентное соотношение;
10. составить алгоритм (блок-схему) расчёта.

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 20$	$x \in [0,1]$ $y \in [0,1]$	$\begin{cases} u(x=0,y) = y^2 \\ u(x=1,y) = y^2+1 \end{cases}$ $\begin{cases} u(x,y=0) = x^2 \\ u(x,y=1) = x^2+1 \end{cases}$

Для заданного уравнения:

11. представить задачу в нестационарном виде;
12. записать схему переменных направлений;
13. привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;
14. проверить сходимость прогонки;
15. записать итерационное прогоночное соотношение;
16. записать условие для окончания итерационного процесса;
17. записать начальное приближение;
18. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} + 5(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) = 7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$	$x \in [0,1]$ $y \in [0,1]$ $t \in [0,1]$	$u(t=0,x,y) = 0$ $\begin{cases} u(t,x=0,y) = 0 \\ u(t,x=1,y) = y \end{cases}$ $u(t,x,y=0) = x$

Для заданного уравнения:

19. записать схему предиктор-корректор;
20. записать рекуррентное прогоночное соотношение для предиктора;
21. записать рекуррентное прогоночное соотношение для корректора;
22. указать порядок аппроксимации разностной схемы;

Выполнение задачи

Задание 1

Задание 2

Задание 3

Задание 4

Задание 5

Задание 6

Задание 7

Записать явную разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} - 0,2\frac{u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}{h_x} + 0,1\frac{u_{i,j}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{h_y} = \sin{(i-1)h_x)} + \sin{(j-1)h_y)}. \qquad (1)$$

Задание 8

Записать условие устойчивости на шаг: $\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|-0,2|}{hx} + \frac{|0,1|}{hy}}$.

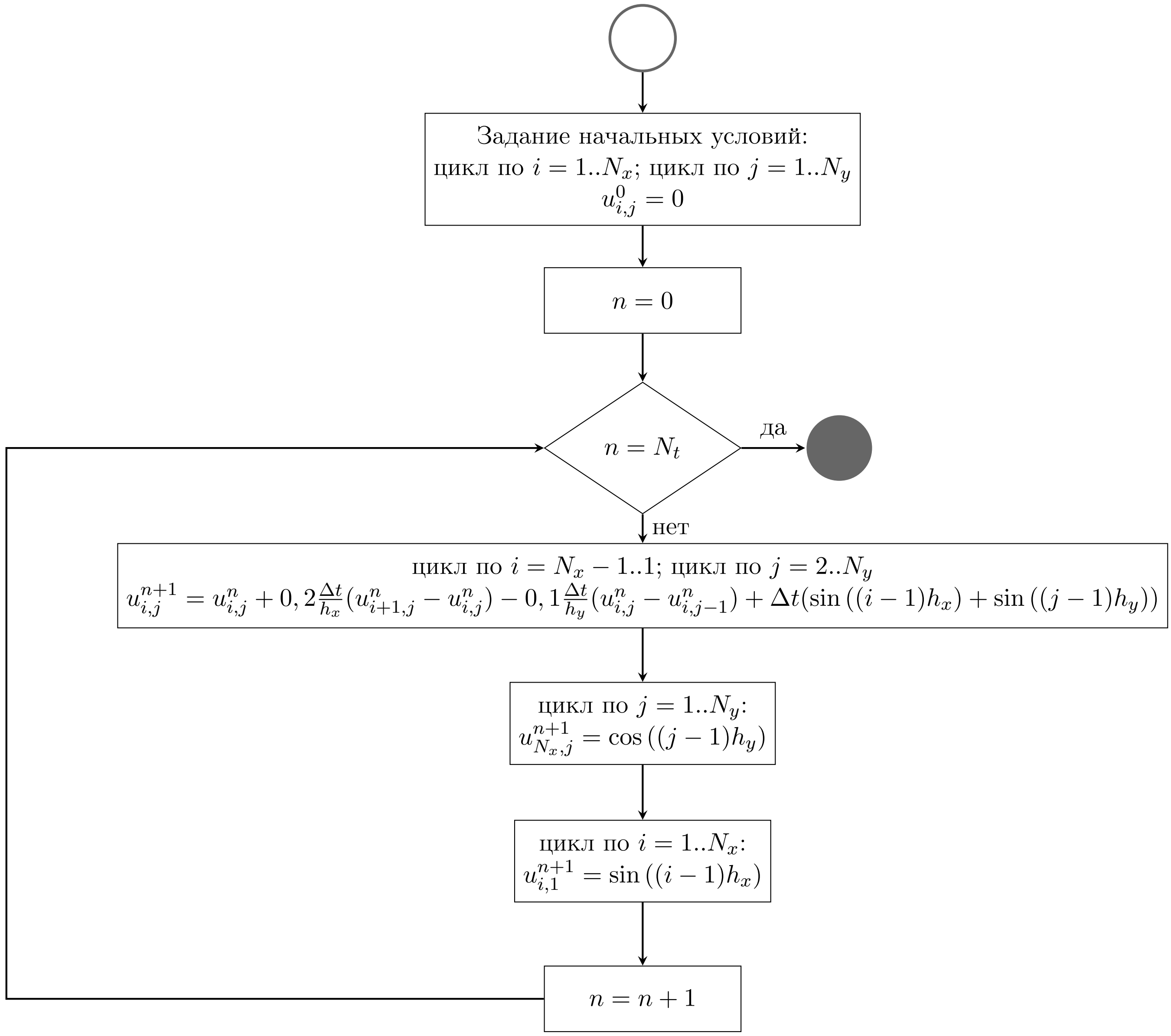
Задание 9

Вывести рекуррентное соотношение для схемы (1):
Выражаю $u_{i,j}^{n+1}$ из разностной схемы (1):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + 0,2\frac{\Delta t}{h_x}(u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}) - 0,1\frac{\Delta t}{h_y}(u_{i,j}^{n} - u_{i,j-1}^{n}) + \Delta t(\sin{((i-1)h_x)} + \sin{((j-1)h_y)}).$$

Задание 10

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта схемы (1):



Задание 11

Представить задачу в нестационарном виде:

Для численного решения дифференциальных уравнений эллиптического типа используют **метод установления**, заключающийся в преобразовании стационарной задачи в нестационарную. С этой целью в уравнение, описывающее стационарную задачу, следует добавить фиктивную производную по времени:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 20 \to \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 20. \tag{2}$$

При этом искомая функция станет уже функцией трёх переменных:

$$u(x, y) \to \tilde{u}(x, y, \tau).$$

Задание 12

Записать схему переменных направлений для уравнения (2):

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t} &= \frac{2}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}+\frac{8}{2}\frac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}, \\ \frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{2}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}+\frac{8}{2}\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}-20. \end{aligned} \tag{3}$$

Первая подсхема в схеме переменных направлений (3) аппроксимирует производную по времени на первом полушаге интервала Δt и является неявной по координате x и явной по координате y. Вторая подсхема аппроксимирует производную по времени на втором полушаге интервала Δt и является неявной по координате y и явной по координате x.

Задание 13

Записать итерационное прогоночное соотношение для схем (3):

Первая подсхема

Приведу первую подсхему (3) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{2}{2}\frac{\Delta t}{h_x^2}u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+(1+2\frac{\Delta t}{h_x^2})u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\frac{2}{2}\frac{\Delta t}{h_x^2}u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}=u_{i,j}^{n}+\frac{8}{2}\Delta t\frac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}.$$

Вторая подсхема

Приведу вторую подсхему (3) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{8}{2}\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j+1}^{n+1}+(1+8\frac{\Delta t}{h_y^2})u_{i,j}^{n+1}-\frac{8}{2}\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j-1}^{n+1}=u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{2}{2}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}-20.$$

Задание 14

Проверить сходимость прогонки для схем (3):

Первая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению первой подсхемы (3), имеют вид:

$$a_i=-\tfrac{2}{2}\tfrac{\Delta t}{h_x^2},\quad b_i=1+2\tfrac{\Delta t}{h_x^2},\quad c_i=-\tfrac{2}{2}\tfrac{\Delta t}{h_x^2},\quad \xi_{i,j}^{n}=u_{i,j}^{n}+\tfrac{8}{2}\Delta t\tfrac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}.$$

Легко видеть, что для первой подсхемы (3) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_i|+|c_i|=2\frac{\Delta t}{h_x^2}<1+2\frac{\Delta t}{h_x^2}=|b_i|.$$

Вторая подсхема

Коэффициенты, соответствующие уравнению второй подсхемы (3), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = -\tfrac{8}{2}\tfrac{\Delta t}{h_y^2},\quad \tilde{b}_j = 1 + 8\tfrac{\Delta t}{h_y^2},\quad \tilde{c}_j = -\tfrac{8}{2}\tfrac{\Delta t}{h_y^2},\quad \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{2}\tfrac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} - 20.$$

Легко видеть, что для второй подсхемы (3) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = 8\frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 8\frac{\Delta t}{h_y^2} = |\tilde{b}_j|.$$

Задание 15

Записать рекуррентное прогоночное соотношение для схем (3):

Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы (3) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i\alpha_{i-1}},\ \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i\beta_{i-1}}{b_i + c_i\alpha_{i-1}}.$$

Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы (3) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+1} + \tilde{\beta}_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j\tilde{\alpha}_{j-1}},\ \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_j\tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j\tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

Задание 16

Записать условие для окончания итерационного процесса:

Расчёт итераций следует продолжать до тех пор, пока итерационный процесс не сойдётся, т.е. пока не будет выполняться условие, в разностном представлении соответствующее неравенству:

$$||u^{n+1} - u^n|| = \sqrt{h_x h_y \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}(u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n)^2} \le \epsilon,$$

где ϵ - некоторая наперёд заданная положительная величина, характеризующая точность вычислений.

Задание 17

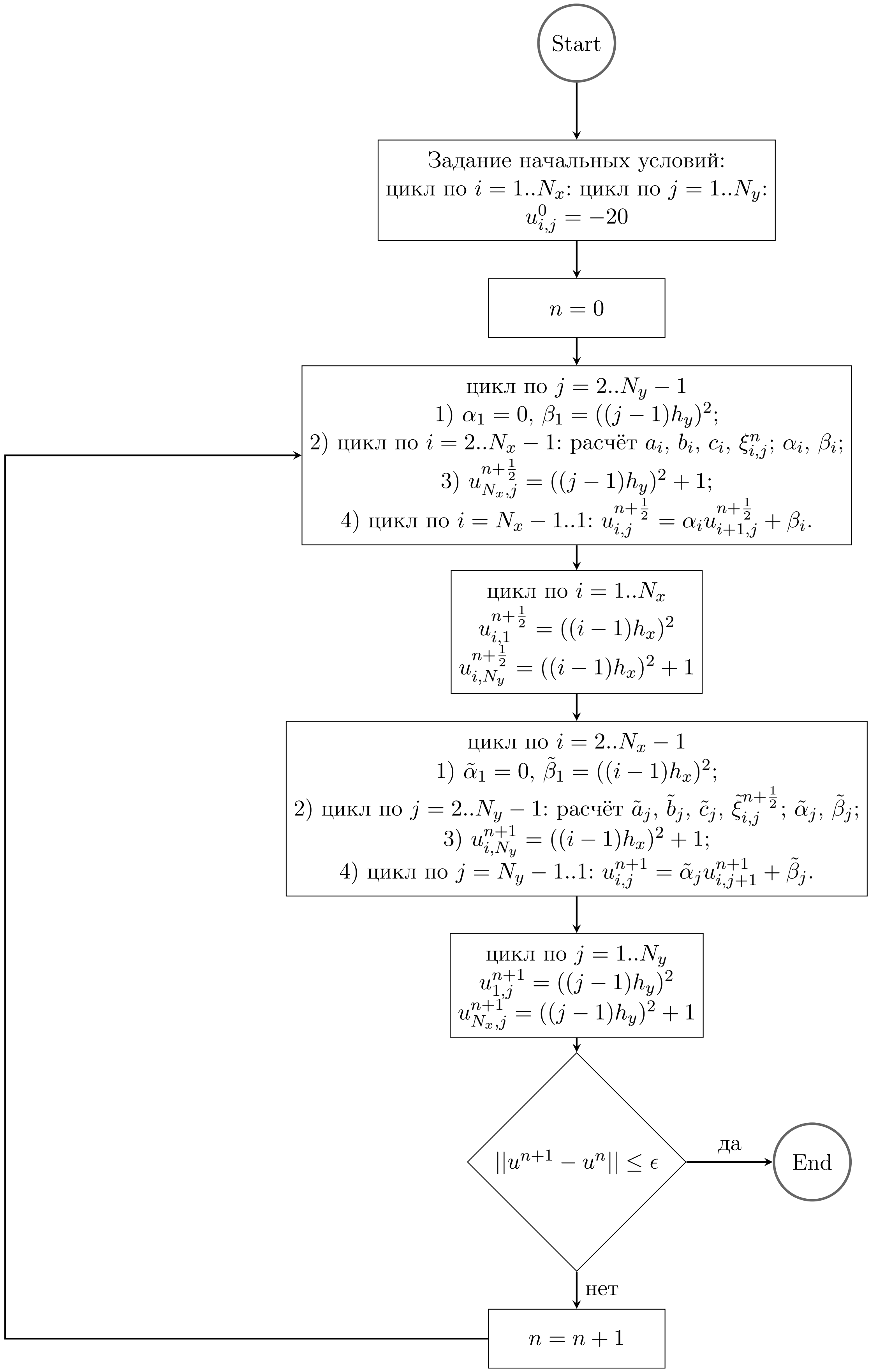
Записать начальное приближение:

В качестве нулевой итерации (начального условия, необходимого для решения в связи с введением фиктивной производной по времени) обычно задают свободный член исходного дифференциального уравнения:

$$u^0_{i,j} = -20.$$

Задание 18

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта для схемы (3):


Start
Задание начальных условий:
цикл по $i = 1..N_x$: цикл по $j = 1..N_y$:
$u^0_{i,j} = -20$
$n = 0$
цикл по $j = 2..N_y - 1$
1) $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = ((j-1)h_y)^2$;
2) цикл по $i = 2..N_x - 1$: расчёт a_i, b_i, c_i, $\xi^n_{i,j}$; α_i, β_i;
3) $u^{n+\frac{1}{2}}_{N_x,j} = ((j-1)h_y)^2 + 1$;
4) цикл по $i = N_x - 1..1$: $u^{n+\frac{1}{2}}_{i,j} = \alpha_i u^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j} + \beta_i$.
цикл по $i = 1..N_x$
$u^{n+\frac{1}{2}}_{i,1} = ((i-1)h_x)^2$
$u^{n+\frac{1}{2}}_{i,N_y} = ((i-1)h_x)^2 + 1$
цикл по $i = 2..N_x - 1$
1) $\tilde{\alpha}_1 = 0$, $\tilde{\beta}_1 = ((i-1)h_x)^2$;
2) цикл по $j = 2..N_y - 1$: расчёт $\tilde{a}_j$, $\tilde{b}_j$, $\tilde{c}_j$, $\tilde{\xi}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}$; $\tilde{\alpha}_j$, $\tilde{\beta}_j$;
3) $u^{n+1}_{i,N_y} = ((i-1)h_x)^2 + 1$;
4) цикл по $j = N_y - 1..1$: $u^{n+1}_{i,j} = \tilde{\alpha}_j u^{n+1}_{i,j+1} + \tilde{\beta}_j$.
цикл по $j = 1..N_y$
$u^{n+1}_{1,j} = ((j-1)h_y)^2$
$u^{n+1}_{N_x,j} = ((j-1)h_y)^2 + 1$
$||u^{n+1} - u^n|| \leq \epsilon$
да
End
нет
$n = n + 1$

Задание 19

Записать схему предиктор-корректор:

Данная схема требует особого способа расщепления интервала Δt: интервал Δt между точками t^n и t^{n+1} на разностной сетке делится пополам; интервал $\Delta t/2$ между точками t^n и $t^{n+\frac{1}{2}}$ снова делится пополам.

На первом полушаге интервала $\Delta t/2$ записывается неявная разностная схема, в которой учитывается только производная второго порядка по координате x:

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t/2} + 5\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{4}}}{h_x} = 7\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{4}}}{h_x^2} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}. \tag{4}$$

На втором полушаге интервала $\Delta t/2$ записывается неявная разностная схема, в которой учитывается только производная второго порядка по координате y:

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}}}{\Delta t/2} + 5\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y} = 0. \tag{5}$$

Результатом последовательного решения подсхем (4), (5), называемых в совокупности **предиктором**, являются значения функции $u(t, x, y)$ на шаге по времени $(n+\frac{1}{2})$. Для завершения расчётов на всём интервале Δt используется поправочное разностное соотношение, называемое **корректором**:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} + 5\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} + 5\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y} = 7\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Таким образом, схема предиктор-корректор в случае двумерных задач состоит из трёх подсхем.

Задание 20

Записать рекуррентное прогоночное соотношение для предиктора:

Первая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсхемы предиктора (4) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{4}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i\alpha_{i-1}},\ \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^{n} - c_i\beta_{i-1}}{b_i + c_i\alpha_{i-1}}.$$

Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы предиктора (5) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j\tilde{\alpha}_{j-1}},\ \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{4}} - \tilde{c}_j\tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j\tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

Задание 21

Записать рекуррентное прогоночное соотношение для корректора (6):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \Delta t(-5\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} - 5\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y} + 7\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}).$$

Задание 22

Указать порядок аппроксимации разностной схемы: $O(\Delta t^2, h_x, h_y)$.