

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И.
Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №12

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович
Ссылка на репозиторий: [https://github.com/
CorgiPuppy/
num-methods-eq-math-phys-chem-labs](https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs)
Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна
Дата сдачи: 12.05.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи	1
Выполнение задачи	3
Задание 1	3
Задание 2	3
Задание 3	3
Задание 4	3
Задание 5	3
Задание 6	4
Задание 7	4
Задание 8	4
Задание 9	5
Задание 10	5
Задание 11	7
Задание 12	7
Задание 13	7
Задание 14	7
Задание 15	8
Задание 16	8
Задание 17	10
Задание 18	10
Задание 19	10
Задание 20	10

Описание задачи

Уравнение	Интервал переменной	Метод	Граничные условия
$\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + x$	$x \in [0, 1]$	Установление с явной схемой; Установление с неявной схемой; Установление со схемой Кранка-Николсона	$\begin{cases} u(x=0) = 0 \\ \frac{du}{dx}(x=1) = 1 \end{cases}$

Для заданного уравнения:

1. представить задачу в нестационарном виде;
2. записать явную разностную схему;
3. вывести рекуррентное соотношение;
4. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
5. записать неявную разностную схему;
6. привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки;
7. проверить сходимость прогонки;
8. найти $\alpha_1, \beta_1, u_N^{n+1}$;
9. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
10. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
11. записать разностную схему Кранка-Николсона;
12. привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки;
13. проверить сходимость прогонки;
14. найти $\alpha_1, \beta_1, u_N^{n+1}$;
15. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
16. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;

Уравнение	Интервал переменной	Метод	Граничные условия
$-\frac{du}{dx} = 4\frac{d^2u}{dx^2} + 2x$	$x \in [0, 1]$	Установление с явной схемой; Установление со схемой Кранка-Николсона	$\begin{cases} \frac{du}{dx}(x=0) = 2 \\ u(x=1) = 2 \end{cases}$

Для заданного уравнения:

17. представить задачу в нестационарном виде;
18. записать явную разностную схему;
19. вывести рекуррентное соотношение;
20. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;
21. записать разностную схему Кранка-Николсона;
22. привести схему к виду, удобному для использования метода прогонки;
23. проверить сходимость прогонки;
24. найти $\alpha_1, \beta_1, u_N^{n+1}$;
25. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
26. составить алгоритм (блок-схему) расчёта;

Выполнение задачи

Задание 1

Представить задачу в нестационарном виде:

Представлю стационарную задачу в нестационарном виде. Для этого в уравнение необходимо добавить фиктивную производную по времени:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + x \rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + x. \quad (1)$$

При этом искомая функция станет уже функцией двух переменных:

$$u(x) \rightarrow \tilde{u}(x, \tau).$$

Задание 2

Записать явную разностную схему для уравнения (1):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + (j-1)h. \quad (2)$$

Задание 3

Вывести рекуррентное соотношение для уравнения (2):

Выражая из разностной схемы (2) величину u_j^{n+1} , получаю рекуррентное соотношение

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \left[\frac{1}{h} (u_{j-1}^n - u_j^n) + \frac{1}{h^2} (u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n) + (j-1)h \right],$$

которое с учётом равенства $\Delta t = \frac{h^2}{h+2}$ преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{h^2}{h+2} \left[\frac{1}{h^2} u_{j+1}^n - \left(2\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} \right) u_j^n + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} \right) u_{j-1}^n + (j-1)h \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + (1+h)u_{j-1}^n + h^2(j-1)h}{h+2}. \end{aligned}$$

Задание 4

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:

Задание 5

Записать неявную разностную схему для уравнения (1):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + (j-1)h. \quad (3)$$

Задание 6

Привести схему (3) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{\Delta t}{h^2}u_{j+1}^{n+1} + (1 + \frac{\Delta t}{h} + 2\frac{\Delta t}{h^2})u_j^{n+1} - (\frac{\Delta t}{h} + \frac{\Delta t}{h^2})u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + \Delta t(j-1)h.$$

Введу следующие обозначения:

$$a_j = -\frac{\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + \frac{\Delta t}{h} + 2\frac{\Delta t}{h^2}, \quad c_j = -(\frac{\Delta t}{h} + \frac{\Delta t}{h^2}), \\ \xi_j^n = u_j^n + \Delta t(j-1)h.$$

С учётом обозначений равенство будет иметь вид:

$$\alpha_j u_{j+1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j-1}^{n+1} = \xi_j^n.$$

Данное преобразование называется *преобразованием неявной схемы к виду, удобному для использования метода прогонки*.

Задание 7

Проверить сходимость прогонки:

Легко видеть, что для разностной схемы (3) достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_j| + |c_j| = \frac{\Delta t}{h} + 2\frac{\Delta t}{h^2} < 1 + \frac{\Delta t}{h} + 2\frac{\Delta t}{h^2} = |b_j|.$$

Задание 8

Найти $\alpha_1, \beta_1, u_N^{n+1}$:

Для реализации неявной разностной схемы требуется ввести некоторое дополнительное условие, связывающее значения функции $u(t, x)$ на $(n+1)$ -м шаге по времени. Представлю это дополнительное условие в виде линейной зависимости

$$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j, \quad (4)$$

справедливой для любого из значений $j = 1..N-1$.

Соотношение (4) называют **рекуррентным прогоночным соотношением**, а коэффициенты α_j, β_j - **прогоночными коэффициентами**.

Для определения прогоночных коэффициентов на 1-м шаге по координате x , используя рекуррентное прогоночное соотношение (4), записанное для $j = 1$:

$$u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1$$

и левое граничное условие:

$$u_1^{n+1} = 0.$$

Сравнивая эти два соотношения, получаю:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0.$$

Значение функции $u(t, x)$ на $(n+1)$ -м шаге по времени в крайней правой точке, которое можно определить из правого граничного условия:

$$u_N^{n+1} = u_{N-1}^{n+1} + h.$$

Используя рекуррентное прогоночное соотношение (6), записанное для $j = N - 1$:

$$u_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1}$$

и подставив его в значение функции $u(t, x)$ на $(n+1)$ -м шаге по времени в крайней правой точке, можно записать в ином виде:

$$\begin{aligned} u_N^{n+1} &= \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1} + h \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_N^{n+1} = \frac{\beta_{N-1} + h}{1 - \alpha_{N-1}}. \end{aligned}$$

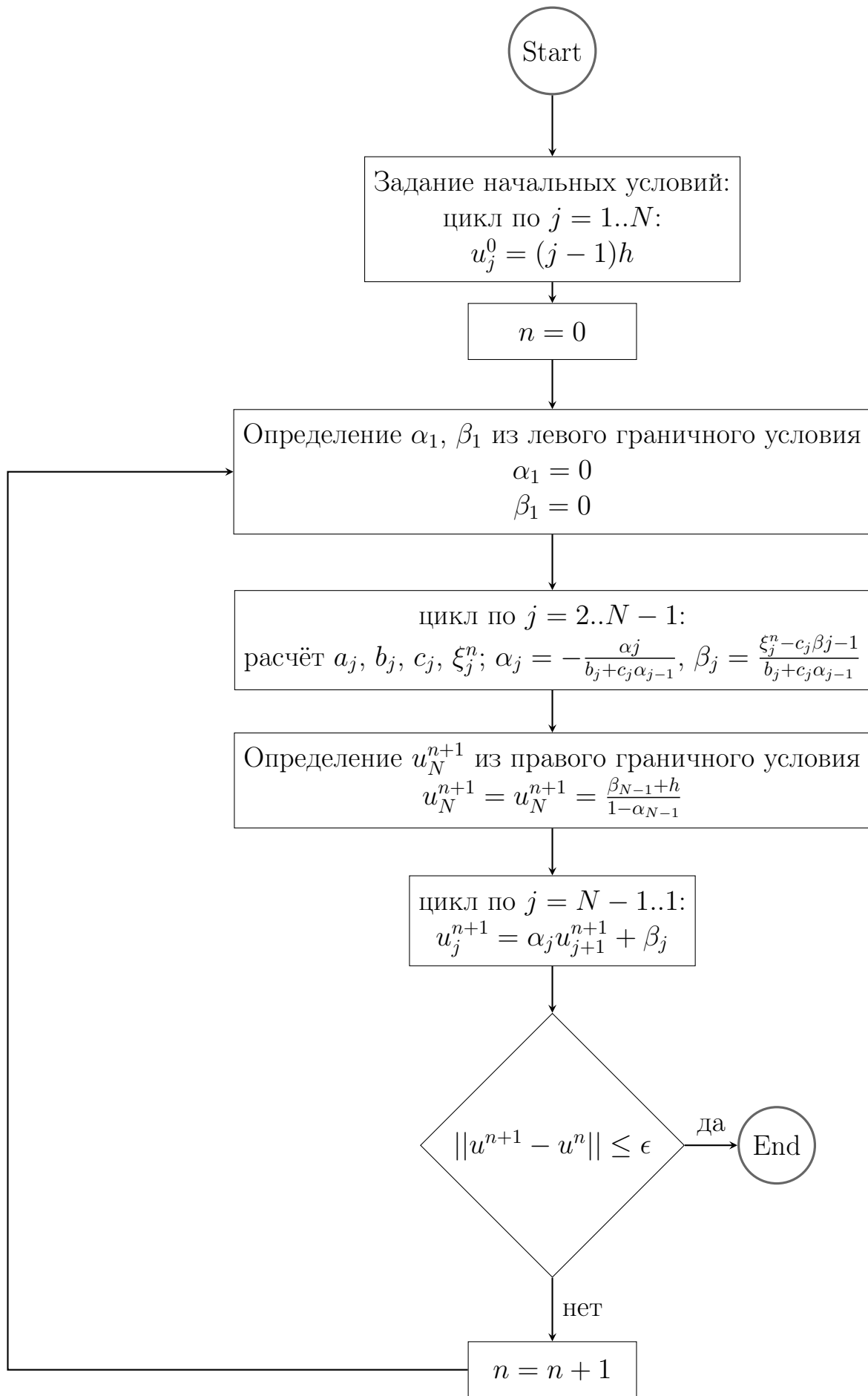
Задание 9

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Соотношение (4) является **рекуррентным прогоночным соотношением**.

Задание 10

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:



Задание 11

Записать разностную схему Кранка-Николсона для уравнения (1):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + (j-1)h. \quad (5)$$

Задание 12

Привести схему (5) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2} u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_j^{n+1} - \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \Delta t(j-1)h.$$

Введу следующие обозначения:

$$a_j = -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{\Delta t}{h^2}, \quad c_j = -\left(\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2}\right), \\ \xi_j^n = u_j^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \Delta t(j-1)h.$$

С учётом обозначений равенство будет иметь вид:

$$\alpha_j u_{j+1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j-1}^{n+1} = \xi_j^n.$$

Данное преобразование называется *преобразованием схемы Кранка-Николсона к виду, удобному для использования метода прогонки*.

Задание 13

Проверить сходимость прогонки:

Легко видеть, что для разностной схемы (5) достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_j| + |c_j| = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{\Delta t}{h^2} < 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h} + \frac{\Delta t}{h^2} = |b_j|.$$

Задание 14

Найти $\alpha_1, \beta_1, u_N^{n+1}$:

Для реализации разностной схемы Кранка-Николсона требуется ввести некоторое дополнительное условие, связывающее значения функции $u(t, x)$ на $(n+1)$ -м шаге по времени. Представлю это дополнительное условие в виде линейной зависимости

$$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j, \quad (6)$$

справедливой для любого из значений $j = 1..N-1$.

Соотношение (6) называют **рекуррентным прогоночным соотношением**, а коэффициенты α_j, β_j - **прогоночными коэффициентами**.

Для определения прогоночных коэффициентов на 1 -м шаге по координате x , используя рекуррентное прогоночное соотношение (6), записанное для $j = 1$:

$$u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1$$

и левое граничное условие:

$$u_1^{n+1} = 0.$$

Сравнивая эти два соотношения, получаю:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0.$$

Значение функции $u(t, x)$ на $(n+1)$ -м шаге по времени в крайней правой точке, которое можно определить из правого граничного условия:

$$u_N^{n+1} = u_{N-1}^{n+1} + h.$$

Используя рекуррентное прогоночное соотношение (6), записанное для $j = N - 1$:

$$u_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1}$$

и подставив его в значение функции $u(t, x)$ на $(n+1)$ -м шаге по времени в крайней правой точке, можно записать в ином виде:

$$\begin{aligned} u_N^{n+1} &= \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1} + h \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_N^{n+1} = \frac{\beta_{N-1} + h}{1 - \alpha_{N-1}}. \end{aligned}$$

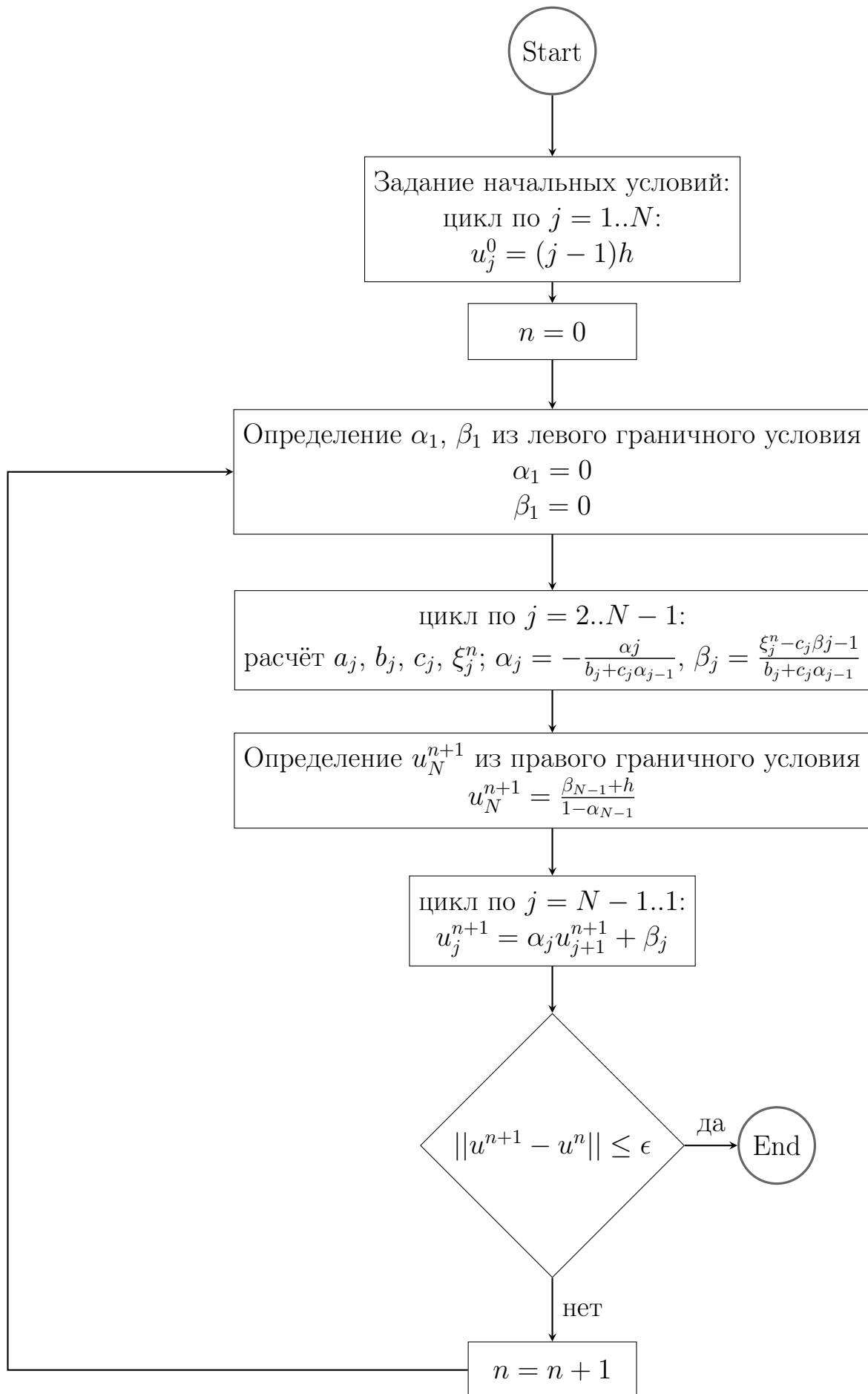
Задание 15

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Соотношение (6) является **рекуррентным прогоночным соотношением**.

Задание 16

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:



Задание 17

Представить задачу в нестационарном виде:

Представляю стационарную задачу в нестационарном виде. Для этого в уравнение необходимо добавить фиктивную производную по времени:

$$-\frac{du}{dx} = 4\frac{d^2u}{dx^2} + 2x \rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 4\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + 2x. \quad (7)$$

При этом искомая функция станет уже функцией двух переменных:

$$u(x) \rightarrow \tilde{u}(x, \tau).$$

Задание 18

Записать явную разностную схему для уравнения (7):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 4\frac{u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + 2(j-1)h. \quad (8)$$

Задание 19

Вывести рекуррентное соотношение для уравнения (8):

Выражая из разностной схемы (8) величину u_j^{n+1} , получаю рекуррентное соотношение

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \left[\frac{1}{h}(u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{4}{h^2}(u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n) + 2(j-1)h \right],$$

которое с учётом равенства $\Delta t = \frac{h^2}{h+2}$ преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{h^2}{h+8} \left[\left(\frac{4}{h^2} + \frac{1}{h} \right) u_{j+1}^n - \left(\frac{8}{h^2} + \frac{1}{h} \right) u_j^n + \frac{4}{h^2} u_{j-1}^n + 2(j-1)h \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_j^{n+1} = \frac{u_{j-1}^n + (8+h)u_{j+1}^n + 2(j-1)h}{h+8}. \end{aligned}$$

Задание 20

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта: