

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д.И.
Менделеева»

ОТЧЕТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ №9

Выполнил студент группы КС-36: Золотухин Андрей Александрович
Ссылка на репозиторий: [https://github.com/
CorgiPuppy/
num-methods-eq-math-phys-chem-labs](https://github.com/CorgiPuppy/num-methods-eq-math-phys-chem-labs)
Приняла: Кольцова Элеонора Моисеевна
Дата сдачи: 21.04.2025

Москва
2025

Оглавление

Описание задачи	1
Выполнение задачи	2
Задание 1	2
Задание 2	2
Задание 3	2
Задание 4	3
Задание 5	3
Задание 6	4

Описание задачи

Уравнение	Интервалы переменных	Начальные и граничные условия
$\frac{\partial u}{\partial t} = 2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + t + x^2 t + y t x$	$x \in [0, 1]$ $y \in [0, 1]$ $t \in [0, 1]$	$u(t = 0, x, y) = x + y$ $\begin{cases} u(t, x = 0, y) = t + y \\ u(t, x = 1, y) = 2t + y + 1 \\ u(t, x, y = 0) = t x^2 + x \\ u(t, x, y = 1) = 2t + x + 1 \end{cases}$

Для заданного уравнения:

1. записать неявную разностную схему;
2. записать схему расщепления;
3. привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки;
4. проверить сходимость прогонки;
5. записать рекуррентное прогоночное соотношение;
6. составить алгоритм (блок-схему) расчёта.

Выполнение задачи

Задание 1

Записать неявную разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 2\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}\right) + (n+1)\Delta t + ((i-1)h_x)^2(n+1)\Delta t + (j-1)h_y + (i-1)h_x. \quad (1)$$

Задание 2

Записать схему расщепления:

Рассмотрю метод разрешения неявной разностной схемы (1), называемый **методом дробных шагов**. Данный метод позволяет представить разностной схему (1) в виде двух подсхем, каждая из которых может быть решена с помощью метода прогонки.

Разобью пополам интервал Δt между точками t^n и t^{n+1} на разностной сетке и обозначу полученную промежуточную точку как $t^{n+\frac{1}{2}}$.

Запишу на первом полушаге интервала Δt неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную второго порядка по координате x :

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 2\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + (n + \frac{1}{2})\Delta t + ((i-1)h_x)^2(n + \frac{1}{2})\Delta t + (j-1)h_y + (i-1)h_x. \quad (2)$$

Запишу на втором полушаге интервала Δt неявную разностную схему, которая будет учитывать только производную вторую порядка по координате y :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 2\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}. \quad (3)$$

Складывая подсхемы (2) и (3), получаю соотношение, отличающееся от неявной разностной схемы (1) только тем, что вторая производная по координате x аппроксимирована в нём не на $(n+1)$ -м шаге по времени, а на шаге $(n + \frac{1}{2})$:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = 2\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + 2\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + (n + \frac{1}{2})\Delta t + ((i-1)h_x)^2(n + \frac{1}{2})\Delta t + (j-1)h_y + (i-1)h_x. \quad (4)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение из условия задачи может быть аппроксимировано с помощью последовательного разрешения двух подсхем (2), (3), называемых в совокупности **схемой расщепления**.

Задание 3

Привести схемы к виду, удобному для использования метода прогонки:

Первая подсхема

Приведу подсхему (2) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-2\frac{\Delta t}{h_x^2}u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 4\frac{\Delta t}{h_x^2})u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\frac{\Delta t}{h_x^2}u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^n + \Delta t((n + \frac{1}{2})\Delta t + ((i-1)h_x)^2(n + \frac{1}{2})\Delta t + (j-1)h_y + (i-1)h_x).$$

Вторая подсьема

Приведу подсьему (3) к виду, удобному для использования метода прогонки:

$$-2\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j+1}^{n+1} + (1 + 4\frac{\Delta t}{h_y^2})u_{i,j}^{n+1} - 2\frac{\Delta t}{h_y^2}u_{i,j-1}^{n+1} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Задание 4

Проверить сходимость прогонки:

Первая подсьема

Коэффициенты, соответствующие уравнению (2), имеют вид:

$$a_i = c_i = -2\frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad b_i = 1 + 4\frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad \xi_{i,j}^n = u_{i,j}^n + \Delta t((n + \frac{1}{2})\Delta t + ((i-1)h_x)^2(n + \frac{1}{2})\Delta t + (j-1)h_y + (i-1)h_x).$$

Легко видеть, что для первой подсьемы (2) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_j| + |c_j| = 4\frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 4\frac{\Delta t}{h_x^2} = |b_j|.$$

Вторая подсьема

Коэффициенты, соответствующие уравнению (3), имеют вид:

$$\tilde{a}_j = \tilde{c}_j = -2\frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_j = 1 + 4\frac{\Delta t}{h_x^2}, \quad \tilde{\xi}_{i,j}^n = u_{i,j}^n + \Delta t((n + \frac{1}{2})\Delta t + ((i-1)h_x)^2(n + \frac{1}{2})\Delta t + (j-1)h_y + (i-1)h_x).$$

Легко видеть, что для второй подсьемы (3) схемы расщепления достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|\tilde{a}_j| + |\tilde{c}_j| = 4\frac{\Delta t}{h_y^2} < 1 + 4\frac{\Delta t}{h_x^2} = |\tilde{b}_j|.$$

Задание 5

Записать рекуррентное прогоночное соотношение:

Первая подсьема

Рекуррентное прогоночное соотношение для первой подсьемы (2) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{\xi_{i,j}^n - c_i \beta_{i-1}}{b_i + c_i \alpha_{i-1}}.$$

Вторая подсхема

Рекуррентное прогоночное соотношение для второй подсхемы (3) имеет вид:

$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{\alpha}_j u_{i,j+1}^{n+1} + \tilde{\beta}_i.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_j \tilde{\beta}_{j-1}}{\tilde{b}_j + \tilde{c}_j \tilde{\alpha}_{j-1}}.$$

Задание 6

Составить алгоритм (блок-схему) расчёта:

