

Série d'exercices 3

Exercice 1 Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x} & b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x} & c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \\ d) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} \\ g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} & h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1} \end{array}$$

Exercice 2 1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.

2. Soient m, n des entiers positifs. Étudier $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.

3. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 4 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur \mathbb{R} ?

$$a) f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} ; \quad b) h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}.$$

Exercice 5 Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que pour tout x et x' ($x \neq x'$) de $[a, b]$ on ait : $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[a, b]$. (On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x) - x$).

Exercice 6 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.

Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.

Exercice 8 Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Correction 1 1. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x}$. Si $x > 0$ cette expression vaut $x + 2$ donc la limite à droite en $x = 0$ est $+2$. Si $x < 0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x = 0$ est -2 . Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x = 0$.

2. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x} = x - 2$ pour $x < 0$. Donc la limite quand $x \rightarrow -\infty$ est $-\infty$.

3. $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$, lorsque $x \rightarrow 2$ cette expression tend vers 4.

4. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x$. Lorsque $x \rightarrow \pi$ la limite est donc 2.

5. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$.
Lorsque $x \rightarrow 0$ la limite vaut $\frac{1}{2}$.

6. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}) \times \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, la limite vaut 0.

7. Nous avons l'égalité $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$. Pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ cela donne :

$$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

Lors que $x \rightarrow 0$, alors $a \rightarrow 1$ et la limite cherchée est $\frac{1}{3}$.

Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une fonction f dérivable en a alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Pour la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ ayant $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ cela donne en $a = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

8. $\frac{x^n-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$. Donc si $x \rightarrow 1$ la limite de $\frac{x^n-1}{x-1}$ est n . Donc la limite de $\frac{x-1}{x^n-1}$ en 1 est $\frac{1}{n}$.

La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$ et $a = 1$. Alors $\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $f'(1) = n$.

Correction 2 Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes de racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguée" :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

Appliquons ceci sur un exemple :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{1+x^m - (1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} \end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$.

Distinguons plusieurs cas pour la limite de f en 0.

- Si $m > n$ alors x^{m-n} , et donc $f(x)$, tendent vers 0.
- Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ tendent vers 1.
- Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n - m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n - m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n - m > 0$ impair f n'a pas de limite en 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

Correction 3 1. Soit $p > 0$ la période : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$. Par une récurrence facile on montre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+np) = f(x).$$

Comme f n'est pas constante il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Notons $x_n = a + np$ et $y_n = b + np$. Supposons, par l'absurde, que f a une limite ℓ en $+\infty$. Comme $x_n \rightarrow +\infty$ alors $f(x_n) \rightarrow \ell$. Mais $f(x_n) = f(a + np) = f(a)$, donc $\ell = f(a)$. De même avec la suite (y_n) : $y_n \rightarrow +\infty$ donc $f(y_n) \rightarrow \ell$ et $f(y_n) = f(b + np) = f(b)$, donc $\ell = f(b)$. Comme $f(a) \neq f(b)$ nous obtenons une contradiction.

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$. Notons

$$F = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

F est un ensemble (non vide) de \mathbb{R} , notons $\ell = \sup F$. Comme $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de F , alors $\ell < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, par les propriétés du sup il existe $y_0 \in F$ tel que $\ell - \varepsilon \leq y_0 \leq \ell$. Comme $y_0 \in F$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = y_0$. Comme f est croissante alors :

$$\forall x \geq x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) = y_0 \geq \ell - \varepsilon.$$

De plus par la définition de ℓ :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq \ell.$$

Les deux propriétés précédentes s'écrivent :

$$\forall x \geq x_0 \quad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell.$$

Ce qui exprime bien que la limite de f en $+\infty$ est ℓ .

Correction 4 1. La fonction est définie sur \mathbb{R}^* et elle est continue sur \mathbb{R}^* . Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x = 0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.

$$|f(x)| = |\sin x| |\sin 1/x| \leq |\sin x|.$$

Donc f a une limite en 0 qui vaut 0. Donc en posant $f(0) = 0$, nous obtenons une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue.

2. h est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{(1+x)}.$$

Donc h a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $h(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En -1 la fonction h ne peut être prolongée continuellement, car en -1 , h n'admet de limite finie.

Correction 5 1. Pour toute suite x_n qui tend vers x , on a $|f(x_n) - f(x)| < |x_n - x| \rightarrow 0$.

2. On utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x) - x$.

Correction 6 1. $g(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a)$ et $g(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2})$. Comme $f(a) = f(b)$ alors nous obtenons que $g(a) = -g(\frac{a+b}{2})$. Donc ou bien $g(a) \leq 0$ et $g(\frac{a+b}{2}) \geq 0$ ou bien $g(a) \geq 0$ et $g(\frac{a+b}{2}) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en c pour un c entre a et $\frac{a+b}{2}$.

2. Notons t le temps (en heure) et $d(t)$ la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t . Nous supposons que la fonction $t \mapsto d(t)$ est continue. Soit $f(t) = d(t) - 4t$. Alors $f(0) = 0$ et par hypothèse $f(1) = 0$. Appliquons la question précédente avec $a = 0$, $b = 1$. Il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$. Donc $d(c + \frac{1}{2}) - d(c) = 4(c + \frac{1}{2}) - 4c = 2$. Donc entre c et $c + \frac{1}{2}$, (soit 1/2 heure), la personne parcourt exactement 2 km.

Correction 7 Il existe $x < 0$ tel que $f(x) < 0$ et $y > 0$ tel que $f(y) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f(z) = 0$. Donc f s'annule. Les polynômes de degré impair vérifient les propriétés des limites, donc s'annulent. Ceci est faux, en général, pour les polynômes de degré pair, par exemple regardez $f(x) = x^2 + 1$.

Correction 8 Comme $f(x)^2 = 1$ alors $f(x) = \pm 1$. Attention ! Cela ne veut pas dire que la fonction est constante égale à 1 ou -1 . Supposons, par exemple, qu'il existe x tel que $f(x) = +1$. Montrons que f est constante égale à $+1$. S'il existe $y \neq x$ tel que $f(y) = -1$ alors f est positive en x , négative en y et continue sur I . Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$, ce qui contredit $f(z)^2 = 1$. Donc f est constante égale à $+1$.