BURKINA INSTITUT OF TECHNOLOGIE

. . . .

UNITE DE FORMATION EN SCIENCES ET TECHNOLOGIES

. . . .

DEPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

SEMESTRE I

Cours d'Analyse de première année

Enseignant : Hamed OUEDRAOGO

Date : 00 novembre 2022

Table des matières

Chapitre 1

Les nombres Réels

1.1 Introduction

Vous avez rencontré jusqu'à présent différents types de nombres : d'abord les entiers naturels, dès la petite enfance, puis au collège les entiers relatifs et les rationnels. Vous avez noté $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, et $\mathbb{Q}$ celui des rationnels. En identifiant les entiers naturels aux entiers relatifs positifs, vous avez écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, puis en identifiant les entiers relatifs aux fractions rationnelles dont le dénominateur est 1, vous avez aussi écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Dans $\mathbb{Q}$ vous savez faire des additions et des soustractions, des multiplications et des divisions. Vous savez aussi comparer deux nombres rationnels quelconques. Vous savez situer ces nombres sur une droite : il suffit de choisir une origine (qui représentera le nombre 0), une unité de longueur et un sens de parcours (généralement de gauche à droite). On parle alors de la « droite numérique » : le nombre rationnel x est représenté par le point d'abscisse x sur la droite.
La question suivante se pose alors : tout point de la droite numérique a-t-il pour abscisse un nombre rationnel ? La réponse est non : on peut construire un carré dont le côté a pour longueur 1 ; la diagonale de ce carré a une longueur l qui vérifie $l^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ (Th. de Pythagore). Il suffit de reporter cette longueur sur la droite pour déterminer un point d'abscisse l. Or $l \notin \mathbb{Q}$ car :

Proposition 1.1.1 *Il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est* 2*.*

Preuve : *On raisonne par l'absurde : supposons le contraire.*
Il existe une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ *telle que* $2 = \frac{p^2}{q^2}$*. Mais alors* $p^2 = 2q$*, donc* p^2 *est*

pair. Puisque seuls les nombres pairs ont un carré pair, p est pair et s'écrit $p = 2k$. Du coup $2q^2 = 4k^2$ donc q^2 est pair, et q est pair. C'est absurde puisque la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible . $\square$

On introduit alors intuitivement l'ensemble des nombres réels (qu'on note $\mathbb{R}$) comme l'ensemble des abscisses de tous les points de la droite numérique. Ainsi $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (comme $l = \sqrt{2}, e$ ou π) s'appellent les nombres irrationnels. L'ensemble $\mathbb{R}$ s'identifie à la droite numérique et l'on dit indifféremment « point » ou « nombre réel ».

Dans $\mathbb{R}$ vous pouvez faire additions, soustractions, multiplications et divisions, et aussi comparer deux nombres réels quelconques.

Cette représentation géométrique des nombres réelles est très utile, mais pour faire de l'Analyse rigoureusement il est nécessaire de bien préciser les propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$.

1.2 Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.2.1 *Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$, et m un nombre réel. On dit que :*

1. m est un majorant de A lorsque $a \leq m$ pour tout $a \in A$.

2. m est un minorant de A lorsque $m \leq a$ pour tout $a \in A$.

Remarque 1.2.2 ***,exemples***

1. Si m est un majorant de A, alors tout réel $m' \geq m$ est aussi un majorant de A.

Si m est un minorant de A, alors tout $m' \leq m$ est aussi un minorant de A.

2. L'ensemble $A = [3, +\infty[$ n'a pas de majorant, 3 est un minorant de A.

Soit $I =]4, 11[$: 4 est un minorant de I, 11 est un majorant de I.

Il est sûrement clair pour vous que l'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de majorant dans $\mathbb{R}$. Un minorant de $\mathbb{N}$ est, par exemple, 0.

Définition 1.2.3 *Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$.*

1. S'il existe M majorant de A tel que $M \in A$, alors M est unique. On dit que M est le plus grand élément, ou le maximum, de A (on note $M = max(A)$).

2. S'il existe m minorant de A tel que $m \in A$, alors m est unique. On dit que m est le plus petit élément, ou le minimum, de A (on note $m = min(A)$).

Exemple 1.2.4 *1. $max([1,2]) = 2$ puisque 2 est un majorant de $[1,2]$ et $2 \in [1,2]$. De même, $min([1,2]) = 1$.*
2. L'ensemble $A =]1,3[$ est majoré et minoré, mais n'a pas de plus grand ni de plus petit élément : en effet, soit $x_0 \in A$, alors x_0 n'est pas un majorant ni un minorant de A car $1 < \frac{1+x_0}{2} < x_0 < \frac{3+x_0}{2} < 3$.
Soit $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.
On a $max(A) = 1$: 1 est un majorant de A et $1 \in A$.
Bien que A soit minoré (par exemple par 0), il n'admet pas de plus petit élément : fixons $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n_0} \in A$ n'est pas minorant de A car $\frac{1}{n_0} < \frac{1}{n_0}$ et $\frac{1}{n_0+1} \in A$.

Définition 1.2.5 *Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$, et b un nombre réel.*
1. S'il existe un réel b vérifiant
(a) b est un majorant de A.
(b) Si m est un majorant de A, on a $b \leq m$.
alors b est unique, on dit que b est la borne supérieure de A (on note $b = sup(A)$).
En résumé : $sup(A)$ est le plus petit des majorants de A.
2. S'il existe un réel b vérifiant
(a) b est un minorant de A.
(b) Si m est un minorant de A, on a $m \leq b$.
alors b est unique, on dit que b est la borne inférieure de A (on note $b = inf(A)$).
En résumé : $inf(A)$ est le plus grand des minorants de A.

Remarque 1.2.6 ***, exemple***
1. On montre facilement que :
Si $max(A)$ existe, alors $sup(A)$ existe et $sup(A) = max(A)$.
Si $sup(A)$ existe et $sup(A) \in A$, alors $max(A)$ existe et $max(A) = sup(A)$.
On a des résultats analogues pour min(A) et inf(A)
2. Soit $A =]1,3[$. On a $sup(A) = 3$ car 3 est un majorant de A et, comme nous avons vu précédemment, $x_0 < 3$ n'est plus majorant de A. De même, $inf(A) = 1$.

Proposition 1.2.7 ***(Caractérisation de la borne supérieure)***
Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$, et b un réel. Les deux énoncés suivants sont équivalents

1. b est la borne supérieure de A.

2. b est un majorant de A et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe au moins un élément de A dans l'intervalle $[b - \epsilon, b]$.

Preuve : *Si b est la borne supérieure de A, c'est un majorant de A, et pour tout $\epsilon > 0$, $b - \epsilon$ n'est pas un majorant de A : il existe un élément x de A qui est supérieur à $b - \epsilon$. Puisque b est un majorant de A, on a aussi $x \leq b$, donc $x \in [b - \epsilon, b]$.*
Réciproquement, si 2. est vraie, alors b est bien le plus petit des majorants de A. $\square$

Proposition 1.2.8 ***(Caractérisation de la borne inférieure)***
Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$, et b un réel. Les deux énoncés suivants sont équivalents

1. b est la borne inférieure de A.

2. b est un minorant de A et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe au moins un élément de A dans l'intervalle $[b, b + \epsilon]$.

Exemple 1.2.9 *Soit $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.*
Utilisons la caractérisation de la borne inférieure pour montrer que $inf(A) = 0$:

- 0 *est un minorant de A.*
- *Fixons $\epsilon > 0$ et montrons qu'il existe au moins un élément de A dans l'intervalle $[0, 0 + \epsilon]$:*

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geq \frac{1}{\epsilon}$ (l'existence de n_0 est conséquence de la Propriété d'Archimède : voir dans la suite), on a bien $\frac{1}{n_0} \in [0, \epsilon]$.

1.3 La propriété de la borne supérieure

Bien entendu, si $A \subset \mathbb{R}$ n'admet pas de majorant, A n'a pas non plus de borne supérieure : c'est le seul cas où une partie (non-vide) de $\mathbb{R}$ n'a pas de borne supérieure, comme l'affirme le résultat fondamental suivant :

Théorème 1.3.1 ***(La propriété de la borne supérieure)***
Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A est majorée, alors A admet une borne supérieure.

2. Si A est minorée, alors A admet une borne inférieure.

Nous admettrons ce Théorème, dont la démonstration utilise la construction rigoureuse des nombres réels à partir des rationnels.

La propriété de la borne supérieure marque la différence essentielle entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ car elle n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$: Une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ n'admet pas, en général, une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exemple : en effet, considérons $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$.

∘ A n'est pas vide (par exemple $1 \in A$)

∘ A est majrée par 2 (si $x > 2$, alors $x^2 > 4$ et $x \notin A$) A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

1.4 Intervalle dans $\mathbb{R}$

Définition 1.4.1 *Les intervalles de* $\mathbb{R}$ *sont les ensembles*

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$,

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$,

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$,

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$,

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$,

$] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$,

$] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$.

Définition 1.4.2 *Un ensemble* C *est dit convexe lorsque, pour tous* x *et* y *de* C*, l'intervale (segment)* $[x, y]$ *est complètement dans* C*, c'est-à-dire :* $\forall x, y \in C$, $\forall t \in [0, 1]$ $tx + (1 - t)y \in C$

Proposition 1.4.3 *Les intervalles de* X *sont les parties convexes de* $\mathbb{R}$*, c'est-à-dire les parties* P *de* $\mathbb{R}$ *telles que, quels que soient* $x, y \in P$, $x < y$*, on a* $[x, y] \subset P$.

Preuve : *Les intervalles sont évidemment convexes. Réciproquement, si* P *est une partie convexe de* $\mathbb{R}$*, soit* $a = infP$, $b = supP$*. Alors* $]a, b[\subset P$ *et la seule question est de savoir si* a, b *sont ou non infinis et sont ou non dans* P*. On a huit cas possibles :*

1. $-\infty < a$, $b < +\infty$, $a \in P$, $b \in P$, *alors* $P = [a, b]$;
2. $-\infty < a$, $b < +\infty$, $a \in P$, $b \notin P$, *alors* $P = [a, b[$;
3. $-\infty < a$, $b < +\infty$, $a \notin P$, $b \in P$, *alors* $P =]a, b]$;
4. $-\infty < a$, $b < +\infty$, $a \notin P$, $b \notin P$, *alors* $P =]a, b[$;

5. $a = -\infty, b < +\infty$, $b \in P$, *alors* $P = [-\infty, b]$ *;*

6. $a = -\infty$, $b < +\infty$, $b \notin P$, *alors* $P =]-\infty, b[$ *;*

7. $a > -\infty$, $b = +\infty$, $a \in P$, *alors* $P = [a, +\infty]$ *;*

8. $a > -\infty$, $b = +\infty$, $a \notin P$, *alors* $P =]a, +\infty[$.

1.4.1 Caractérisation des intervalles

Proposition 1.4.4 *Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$.*

Les énoncés suivants sont équivalents :

1. A est un intervalle.

2. Pour tous $\alpha \leq \beta$, $\alpha, \beta \in A$, l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est inclus dans A.

Preuve : *L'implication $1 \Rightarrow 2$ est évidente.*

Montrons que $2 \Rightarrow 1$. Supposons d ?abord A majoré et minoré.

On sait alors que $a = inf(A)$ et $b = sup(A)$ existent. On a $A \subset [a, b]$.

De plus, $]a, b[\subset A$. En effet, si $a < x < b$, il existe un élément $\beta \in A$ dans l'intervalle $[x, b]$ (car x n'est pas un majorant de A). De même, il existe $\alpha \in A$ dans $[a, x]$ (puisque x n'est pas un minorant de A). Par conséquent, $x \in [\alpha, \beta] \subset A$ d'après l'hypothèse 2.

Comme $A \subset [a, b]$ et $]a, b[\subset A$, A est l'un des 4 intervalles de bornes a et b. Vous etes invités à compléter la démonstration si A n'est pas majoré ou minoré. $\square$

1.4.2 $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1.4.5 *L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est $\mathbb{R}$ auquel on ajoute les éléments $+\infty$ et $-\infty$.*

$$\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

. Il est muni d'une relation d'ordre totale héritée de celle sur $\mathbb{R}$ en posant de plus pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$, on a : $-\infty \leq x \leq +\infty$.

On a les propriétés suivantes :

- $+\infty$ est le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}$;
- $-\infty$ est le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}$;
- toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$;
- toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1.5 Propriété d'Archimède

Il est sûrement clair pour vous que :

Pour tout nombre réel x, on peut trouver un entier naturel n tel que $x < n$.

Cette propriété porte le nom de Propriété d'Archimède.

Il est très facile de montrer que $\mathbb{Q}$ vérifie cette propriété. En effet, soit $r \in \mathbb{Q}$, si $r \leq 0$, alors $n = 1$ convient. Si $r > 0$, alors il s'écrit $r = \frac{l}{m}$, avec $l, m \in \mathbb{N}^*$ et $n = l + 1$ convient.

Nous allons montrer, à partir de la propriété de la borne supérieure, que $\mathbb{R}$ vérifie aussi la Propriété d'Archimède :

Proposition 1.5.1 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < n$.*

Preuve : *Par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $n \leq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\mathbb{N}$ est une partie non vide et majorée (par x) de $\mathbb{R}$ et elle admet donc une borne supérieure $s = sup(\mathbb{N})$.*

En particulier $n + 1 \leq s$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $n \leq s - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Absurde : $s - 1$ est un majorant de $\mathbb{N}$ strictement inférieur à $s = sup(\mathbb{N})$. $\square$

Proposition 1.5.2 *$\mathbb{R}$ est Archimédien, c'est-à-dire : pour tout $x > 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.*

Preuve : *Supposons que ce soit faux : il existe $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $nx \leq y$. Alors l'ensemble $A = \{nx; n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée $(pary)$ de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne supérieure $a \in \mathbb{R}$. En particulier, pour tout $n\mathbb{N}$ on $a(n+1)x \leq a$ et donc $nx \leq a - x$. Donc $a - x$ est un majorant de A et $a - x < a$. C'est impossible car a est la borne supérieure de A.* $\square$

1.5.1 Développement décimal d'un réel

Une application immédiate de la Propriété d'Archimède est de permettre de définir la partie entière d'un réel.

Proposition 1.5.3 *Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif m tel que $m \leq x < m + 1$. On le note $m = E(x)$: c'est la partie entière du réel x.*

Preuve : *Soit $x \in \mathbb{R}^+$, et A la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = \{p \in \mathbb{N}, x \geq p\}$. A n'est pas vide puisque $0 \in A$. De plus, grâce à la propriété d'Archimède, il existe un entier n tel que*

$x < n$: tous les éléments de A sont donc inférieurs à n : A est un ensemble fini, donc admet un élément maximum m. Par définition de A on a alors $m \leq x < m+1$ puisque $m+1 \notin A$.

Pour $x < 0$, on applique ce qui précède à $-x$: au total, on a alors montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier m tel que $m \leq x < m+1$.

Il reste à voir qu'il ne peut pas y en avoir un second : supposons que l'on ait aussi $m_0 \leq x < m_0+1$. On aurait $-m_0-1 < -x \leq -m_0$ et donc $m-m_0-1 < 0 < m-m_0+1$, ce qui, pour des entiers, entraîne $m-m_0 = 0$. $\square$

On peut être bien plus précis

Proposition 1.5.4 *Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique entier q_n tel que $\frac{q_n}{10^n} \leq x < \frac{q_n+1}{10^n}$.*

Le rationnel décimal $\frac{q_n}{10^n}$ (respectivement, $\frac{q_n+1}{10^n}$) est appelé valeur décimale approchée à $10^{?n}$ près par défaut (respectivement, par excès) du réel x.

Preuve : *L'entier $q_n = E(10^n x)$ convient, et c'est le seul.*

1.5.2 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

On a bien compris maintenant que $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Cependant, grâce à la propriété d'Archimède, on montre que ces deux ensembles ne sont pas très différents :

Proposition 1.5.5 *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle $]a,b[$ non-vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un rationnel.*

Preuve : *Puisque $b-a > 0$, la propriété d'Archimède permet d'affirmer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{b-a}$. Posons alors $m = E(na)$: on a $m \leq na < m+1$, donc $\frac{m}{n} \leq a \leq \frac{m+1}{n} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b$. Le nombre rationnel $\frac{(m+1)}{n}$ appartient donc a $]a,b[$.*

Proposition 1.5.6 *Etant donnés $x,y \in \mathbb{R}$, $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $]x,y[$.*

Preuve : *Posons : $q = [\frac{1}{y-x}] + 1$ et $p = [qx]$. On a alors : $q > \frac{1}{y-x}$, $q \geq 1 > 0$ et $a \leq qx < p+1$. On en déduit alors $a < \frac{p+1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + (y-x) = y$. Donc le rationnel $\frac{p+1}{q}$ est dans l'intervalle $]x,y[$.*

Peut-on aussi trouver un irrationnel dans cet intervalle ? C'est facile : on peut trouver un rationnel r dans l'intervalle $]x+\sqrt{2}, y+\sqrt{2}[$, le nombre $r-\sqrt{2}$ est irrationnel et est dans l'intervalle $]x, y[$. $\square$

1.6 Valeur absolue, distance

Définition 1.6.1 *La valeur absolue d ?un nombre réel a est le nombre, noté $|a|$, défini par :* $|a| = \begin{cases} a & , \ si \quad a \geq 0; \\ -a & , \ si \quad a \leq 0. \end{cases}$

Proposition 1.6.2 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :*

1) $|a| = |-a|$,

2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

3) $a \neq 0 \Rightarrow |a| > 0$,

4) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ *ou* $a = -b$,

5) $|a| = \sqrt{a^2}$,

6) $|a|^2 = a^2$,

7) $|ab| = |a||b|$,

8)$|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.

Définition 1.6.3 *On définit la distance entre les nombres réels a et b (notée $d(a, b)$) par* $d(a, b) = |a-b|$.

Proposition 1.6.4 *Soit a un réel positif. On a :*

1. $|x| \leq a \Leftrightarrow d(x, 0) \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$,

2. $|x| \geq a \Leftrightarrow d(x, 0) \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ *ou* $x \geq a \Leftrightarrow x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

Plus généralement :

Proposition 1.6.5 *Soient $c, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. On a :*

$$|x-c| \leq r \Leftrightarrow d(x, c) \leq r \Leftrightarrow x \in [c-r, c+r]$$

Proposition 1.6.6 *Soient a et b deux réels. On a :*

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

Ce résultat est connu sous le nom de inégalité triangulaire.

1.7 Notions topologiques

Définition 1.7.1 ***(Intérieur d'un ensemble)****.*

Soit $A \subset R$ et $a \in \mathbb{R}$. Nous dirons que a est un point intérieure de A s'il existe un nombre réel positif δ, tel que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$. L'ensemble des points intérieurs est nommé intérieur de A est noté par intA ou $\overset{\circ}{A}$.

Définition 1.7.2 ***(adhérence d'un ensemble)***

. Soit $A \cup R$ et $a \in \mathbb{R}$. Nous dirons que a est un point adhérent de A si $\forall \delta > 0$ on a :

$$]a - \delta, a + \delta[\cap A \neq \emptyset$$

. L'ensemble des points adhérents est nommé adhérence de A est noté par $\overline{A}$.

Définition 1.7.3 ***(point d'accumulation)***

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Nous dirons que a est un point d'accumulation de A si $\forall \delta > 0$ on a :

$$(]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[) \cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble des points d'accumulations est nommé ensemble dérivé de A est noté par A'. On a : $\overline{A} = A \cup A'$.

Exemple 1.7.4 *Adhérence et accumulation ne coïncident pas en générale. Soit l'ensemble $A = \{1\} \cup]2, 3[$. On vérifie que :*

$$\overline{A} = \{1\} \cup [2, 3], \quad A' = [2, 3]$$

Notions de **voisinage**, **fermés**, **ouverts** vus en classe.

Exercices :

Exercice 1 :

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrer que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

3. En déduire qu'entre deux nombres il y a toujours un nombre irrationnel.

4. Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnel.

Exercice 2 :

Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont le développement décimaux périodique sont donnée par :

a. $3.14\overline{14}$ b. $0.99\overline{9}$ c. $3.149\overline{9}$.

Exercice 3 :

Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $max(x, y)$. De même on notera $min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y.

1. a)Démontrer que :

$$max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad et \quad min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

b)Trouver une formule pour $max(x, y, z)$.

2. Soiebt A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

On définit $A + B = \{x + y/x \in A, y \in B\}$. Montrer que si A et B sont majorées alors $(A + B)$ est majorés et on a $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$.

Exercice 4 :

Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n/n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n0}$ sinon.

Exercice 5 :

Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{a + b}$$

. **Exercice 6 :**

Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q}, \quad]0,1[\cap\mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}, \quad \{(-1)^n + \frac{1}{n} \quad /n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 7 :

1) Donner la signification de $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

3)Déterminer si les ensembles sont ils ouverts, fermés ou ni l'un ni l'autre :

$$\emptyset, \quad \mathbb{R}, \quad [2,3] \cup \{-1\}, \quad \bigcap_{n>0}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[, \quad \bigcup_{n>0} [0, 1 - \frac{1}{n}[.$$

4) Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $int(A \cup B) = int(A) \cap int(B)$

Chapitre 2

Suites numériques

Chapitre 3

Fonctions numériques d'une variable réelle

Exercises

Exercise 1 :

Let f(x) be a function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Use the following mathematical symbols $(\forall, \exists, \Rightarrow)$ to write the following sentences :

1. f tends to 0 when x tends to ∞.

2. f does not tends to 3 when x tends to 1.

3. f tends to $+\infty$ when x tends to $+\infty$.

Exercise 2 :

1. We note $f(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{x+5}$ for $x \geq 3$. What is the limit of f in $+\infty$. ?

1. We note $g(x) = \sqrt{x^2+2x+7} - (x+5)$ for $x \in \mathbb{R}$. What is the limit of g in $+\infty$?. And in $-\infty$?

Exercise 3 : For all $x \in \mathbb{R}$, we note $f(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^2 + 1$ and $g(x) = x^6 - x^5 + 3x^4 - x + 3$. Show that it exists $x_0 \in \mathbb{R}$ such that $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercise 4 :

Consider a function $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues such that $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Show that it exists λ such that f is bounded on $[\lambda, +\infty[$. Deduce that f is bounded on $[0, +\infty[$. Is it true that there is $a \in [0, +\infty[$ such that $\sup\limits_{[0,+\infty[} f = f(a)$. ?

Exercise 4 :

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues and $x_0 \in \mathbb{R}$ such that $f(x_0) > 0$. Show that it exist an interval

$[a, b]$ of $\mathbb{R}$ (with $a < b$) such that :

$$\forall x \in [a, b] : f(x) > \frac{f(x_0)}{3}$$

. **Exercise 5 :**

Consider a function $G :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ checking for a constant $\mu > 0$ the following property :

$$\forall (x, z) \in]0, 1[\times]0, 1[, \quad |G(x) - G(z)| \leq \mu\sqrt{|x - z|}. \qquad \circledast$$

1. Show that G is continuous on $]0, 1[$

. 2. Show that G is bounded on $]0, 1[$.

3. Give an example of a continuous function of $]0, 1[$ in $\mathbb{R}$ and unbounded.

4. Give an example of function G non-constant checking $\circledast$.