Section 4-A: Résolution directe des systèmes linéaires

Rappel sur l'elimination de Gauss

Exemple 1:

Soit le système d'equations:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

Objectif: obtenir un système **triangulaire** équivalent qu'on résolut par remontée

Méthode: mettre des zéros dans la première colonne (sauf à la première ligne) et réitérer

- L_2 devient $L_2 - 3L_3$
- L_3 devient $L_3 + L_1$

Alors on a:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

On réitère le procédé sur le système formé des deux dernières lignes.

Exemple 2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

- $L_i - L_1$ pour $i = \ 2, 3, 4$

On a donc:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Pivot nul: on ne peut itérer directement le procédé. On permute L_4 et L_2.

Résolution machine: problème (et solution!) similaire si le pivot est très petit.

- On prend le plus grand coéf. de la colonne come pivot

Interprétation matricielle de la méthode d'elimination de Gauss

Soit $\mathcal{L}_{ij}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un matrice de transvection, définie par:

$$\mathcal{L}_{ij}(\lambda) = I_{\mathbb{R}^n} + \lambda E_{ij}$$

Avec $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$

E_{ij} est donc un matrice avec un seul coef non nul, à la ligne i et colonne j, qui est egal à 1.

Propriété: Si $i > j$, alors $\mathcal{L}_{ij}(\lambda)$ est triangulaire inférieure, inversible et $\mathcal{L}_{ij}(\lambda)^{-1} = \mathcal{L}_{ij}(-\lambda)$

Opérations lignes: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice: $\tilde{A} = \mathcal{L}_{ij}(\lambda)A$, est la matrice résultant de l'opération $L_i \to L_i + \lambda L_j$

Exemple: Elimination de Gauss vu matriciellement sur l'exemple 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \mathcal{L}_{32}(3)\mathcal{L}_{31}(1)\mathcal{L}_{21}(-3)A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = U$$

$$\text{Posons : } L = (\mathcal{L}_{32}(3)\mathcal{L}_{31}(1)\mathcal{L}_{21}(-3))^{-1} = \mathcal{L}_{21}(3)\mathcal{L}_{32}(-1)\mathcal{L}_{32}(-3)$$

La matrice A admet la **factorisation** $A = LU$

Résoudre $Ax = b$ revient à résoudre $Ly = b$ et $Ux = y$

Théorème:

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Si pour tout $k = 1, \ldots, n$, la sous matrice $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathcal{M}_k(R)$ est inversible (c.a.d. $det(A_k) \neq 0$ alors la matrice A admet une factorisation $A = LU$ où la matrice L est triangulaire inférieure, et la matrice U est diagonale supérieure. De plus, si L contient que des 1 sur la diagonale, la décomposition est unique.

Attention: cette factorisation correspond à l'algorithme de Gauss SANS permutations.

Décompte d'opérations:

A l'étape k (compris entre 1 et $n-1$) (n est la taille de la matrice), on doit faire $n-k$ divisions par le pivot pour le calcul de la k-ième colonne de la matrice L puis, pour la mise à jour de la matrice A, on doit faire $(n-k)^2$ multiplications et $(n-k)^2$ soustractions.

Coût total:

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) + (n-k)^2 = n(n-1)\frac{4n-1}{6} \;{}_{n \to \infty} \frac{2n^3}{3}$$

Applications de la décomposition LU:

Calcul de déterminant: $det(A) = det(L)det(U) = \prod_{i=1}^{n} U_{ii}$

- Coût: $C(n) + n - 1 \; \frac{2n^3}{3}$

Calcul de l'inverse de A: on résout $Av_j = e_j, \; j = 1, \ldots, n$

- Coût: Décomposition LU et résolution de $2n$ systèmes triangulaires $\frac{2n^3}{3} + \frac{4n^3}{3} = 2n^3$

On ne calcule jamais l'inverse d'une matrice pour résoudre un système linéaire.

Décomposition de Cholesky

Définition: une matrice A est symétrique définie positive ssi:

1. $A = A^T$
2. $x^T Ax > 0, \; \forall x \in \mathbb{R}^n$

Théorème: Si A est une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice L triangulaire inférieure telle que $A = LL^T$. La décomposition est unique si on impose les termes diagonaux strictement positifs.

Attention: cette décomposition (dite de CHOLESKY) n'est pas la décomposition LU

Calcul de L: on fait le produit de L et de sa transposée et on identifie avec les coefficients de A. On obtient un système sur les coefficients de L qu'on résout par remonté.

- Coût de calcul divisé par deux par rapport à la décomposition LU