

Równanie zachowania energii (równanie Bernoulliego)

Przewidywanie zachowania się układów fizycznych zawsze zaprzętało głowy naukowców. Aby można było prognozować przebieg zjawisk fizycznych najpierw należy umieć prawidłowo opisywać ich stan bieżący. Jedną z dziedzin, gdzie stosuje się prognozowanie zachowań układu jest modelowanie numeryczne dynamiki przepływu wody. Zmierzają one do symulowania reżimu przepływu wody poprzez określenie parametrów takich jak napężenie, ciśnienie, prędkość przepływu, natężenie przepływu w każdym punkcie w przestrzeni i w dowolnym czasie.

Dzięki rozwojowi technik komputerowych możliwe stało się modelowanie numeryczne w układzie jednowymiarowym (1D), dwu- i trzy-wymiarowym (2D i 3D). Modele te różni stopień skomplikowania opisu matematycznego przebiegu zjawiska, ilość danych wejściowych, sposób wizualizacji danych ... Obecnie stosowane modele hydroinformatyczne umożliwiają symulowanie układu zwierciadła wody w warunkach ustalonego i nieustalonego przepływu wody, transportu rumowiska, meandrowanie koryt rzek itp. W obliczeniach uwzględnia się ruch spiralny wody, zmianę wartości szorstkości podłoża w czasie przejścia fali powodziowej i wiele innych zjawisk towarzyszących przepływowi. Są to skomplikowane modele numeryczne.

Zanim rozpoczniemy przygodę z modelowaniem numerycznym przepływu wody i będziemy odpowiedzialni za wyniki obliczeń (czytaj: zarabiać) musimy cofnąć się w czasie do XVIII wieku, kiedy Daniel Bernoulli (ur. 8 lutego 1700 w Groningen, zm. 17 marca 1782 w Bazylei) – szwajcarski matematyk i fizyk podał równanie ruchu stacjonarnego cieczy idealnej zwane równaniem Bernoulliego (1738 rok). Równanie to zostało wyprowadzone dla cieczy idealnej. Przepływ wody jest na tyle skomplikowanym zagadnieniem, że wydawało się niemożliwe jego numeryczne opisanie. Wprowadzono, więc pojęcie cieczy idealnej. Ciecz idealna jest wytworem wyobraźni ludzkiej: taka ciecz nie ma lepkości, jest nieściśliwa, ma jednakową gęstość w całej swojej objętości, nie posiada zanieczyszczeń.

Ciecz idealną od cieczy rzeczywistej najbardziej różni brak lepkości. Przy ciśnieniach występujących w przyrodzie, np. wodę można uznać za ciecz nieściśliwą, różnice gęstości w danej objętości wody też można uznać za wielkość nieznaczącą, ale pominięcie lepkości prowadzi do niezgodności wyników obliczeń z wynikami pomiarów a często do paradoksów. W następnych latach zmodyfikowano równanie wzbogacając je o człon uwzględniający wpływ lepkości cieczy na warunki jej przepływu.

1. Wprowadzenie

Najprostszą postacią zapisu równania Bernoulliego dla cieczy idealnej w ruchu ustalonym jest:

$$E = \text{stała dla strug cieczy} \quad (1)$$

które oznacza, że w ruchu ustalonym cieczy idealnej energia E poruszających się w strudze cząstek płynu jest wartością stałą. Energia ta jest sumą wielkości, których zależność opisana jest wzorem:

$$E = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const \quad (2)$$

Jeżeli równanie (2) pomnożymy stronami przez masę m , gęstość ρ lub podzielimy przez przyspieszenie ziemskie g równanie to przekształca się do postaci odpowiednio (3), (4) lub (5).

Po pomnożeniu stronami przez masę m otrzymujemy:

$$\underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{\text{energia kinetyczna}} + \underbrace{\frac{mp}{\gamma}}_{\text{praca sił ciśnieniowych}} + \underbrace{mgz}_{\text{energia potencjalna}} = const \quad (3)$$

Pierwszy człon w równaniu 3 wyraża energię kinetyczną, ostatni energię potencjalną. Suma tych dwóch elementów stanowi energię mechaniczną. Wyrażenie mp/γ jest to praca sił ciśnieniowych. Całość to równanie zachowania energii mechanicznej.

W przypadku, gdy obie strony równania pomnożymy przez gęstość ośrodka ρ poszczególne człony równania reprezentują ciśnienia: dynamiczne, statyczne i hydrostatyczne, razem stanowią ciśnienie całkowite.

$$\underbrace{\frac{\rho v^2}{2}}_{\text{ciśnienie dynamiczne}} + \underbrace{p}_{\text{ciśnienie statyczne}} + \underbrace{\rho z}_{\text{ciśnienie hydrostatyczne}} = const \quad (4)$$

Po podzieleniu obu stron równania (2) przez przyspieszenie ziemskie g kolejne wyrażenia w równaniu (5) oznaczają wysokości: prędkości, ciśnienia i położenia.

$$\underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\text{wysokość prędkości}} + \underbrace{\frac{p}{\gamma}}_{\text{wysokość ciśnienia}} + \underbrace{z}_{\text{wysokość położenia}} = const \quad (5)$$

Sprawdzamy jednostki:

$$\frac{v^2}{2g} \Rightarrow \frac{\left(\frac{m}{s}\right)^2}{\frac{m}{s^2}} = \frac{m^2}{s^2} \frac{s^2}{m} = m, \quad \frac{p}{\gamma} \Rightarrow \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{N}{m^3}} = \frac{N}{m^2} \frac{m^3}{N} = m, \quad z \Rightarrow m$$

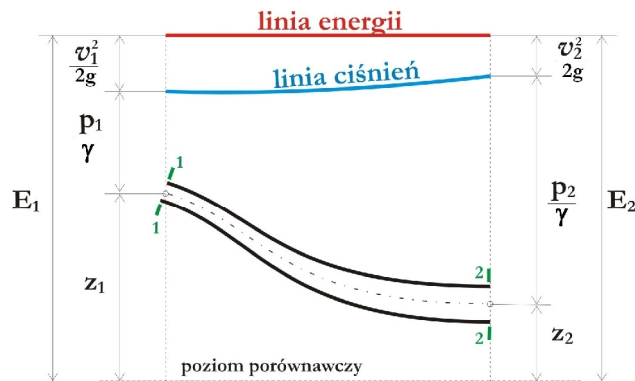
Jednostką kolejnych członów równania (5) jest [m], czyli długość (wysokość). Z tego względu istnieje możliwość wykonania wykresu (Rys.1), który będzie reprezentował równanie Bernoulliego (wykres Ancony). Jednocześnie należy zaznaczyć, że ta postać równania Bernoulliego jest najbardziej czytelnym zapisem pozwalającym na szybką jego interpretację i znajduje szerokie zastosowanie. Stosujemy je do obliczeń parametrów przepływu w przewodach zamkniętych (przepływ odbywa się pod ciśnieniem) jak i korytach otwartych (ze swobodnym układem zwierciadła wody).

W czasie rozwiązywania zadań najczęściej korzystamy z równania Bernoulliego w postaci (5) wyprowadzonym dla dwóch kolejnych przekrojów poprzecznych. Dla wybranej linii prądu cieczy idealnej energia nie zmienia się ani w przestrzeni ani w czasie, czyli w kolejnych punktach energia jest stała $E_1=E_2=E_3= \dots E_n$. Indeksy oznaczają kolejne przekroje. Dla dwóch wybranych przekrojów energia jest stała:

$$E_1=E_2 \quad (6)$$

Po podstawieniu wzoru (5) do równania (6) otrzymujemy

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (6a)$$



Rys.1. Wykres linii ciśnień i linii energii dla cieczy idealnej

Zasadę zachowania energii dla cieczy idealnej przedstawiono graficznie na Rys. 1. Linia energii dla cieczy idealnej jest linią poziomą, ponieważ $E_1 = E_2$. Rzędna linii energii w każdym punkcie linii prądu (osi przewodu) zależy od wartości prędkości w przekroju, ciśnienia oraz położenia przekroju. Ze względu na zmienną geometrię przekroju poprzecznego płynącej strugi prędkość przepływu wody w przekroju 1-1 jest inna niż w przekroju 2-2. Z warunków przepływu wynika, że prędkość w przekroju 1-1 jest większa niż w przekroju 2-2 (mniejsze pole powierzchni przekroju strugi większa prędkość przepływu wody, większe pole powierzchni mniejsza prędkość). Jednocześnie:

$$\frac{v_1^2}{2g} > \frac{v_2^2}{2g}$$

Zmiany prędkości pociągają za sobą zmiany ciśnienia w poszczególnych przekrojach:

$$\frac{p_1}{\gamma} < \frac{p_2}{\gamma}$$

Pomimo zmian położenia przekrojów z_1 i z_2 , wartości prędkości v_1 i v_2 oraz ciśnień p_1 i p_2 suma energii dla cieczy idealnej w kolejnych przekrojach jest niezmienna.

W równaniu (6a) występuje sześć zmiennych: dwie prędkości v , dwa ciśnienia p i dwie wysokości z . W celu redukcji ich ilości wybiera się przekroje oraz przyjmuje poziom porównawczy w charakterystycznych miejscach. Przykład objaśniający procedurę obliczeniową przedstawiono poniżej.

2.1. Przykład 1

Obliczyć wartość natężenia przepływu na wylocie z rurociągu dla schematu pokazanego na Rys. 2 (ciecz idealna) dla następujących danych;

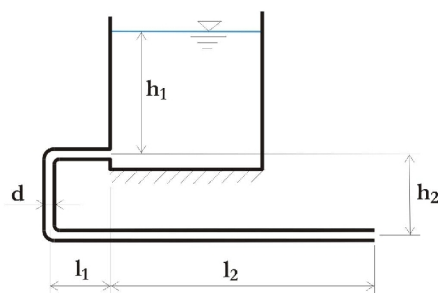
$$h_1 = 3,0 \text{ m},$$

$$h_2 = 1,5 \text{ m},$$

$$l_1 = 2,0 \text{ m},$$

$$l_2 = 14 \text{ m},$$

$$d = 2,5 \text{ cm}.$$



Rys.2. Schemat obliczeniowy

Wartość przepływu Q [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$] obliczymy ze wzoru:

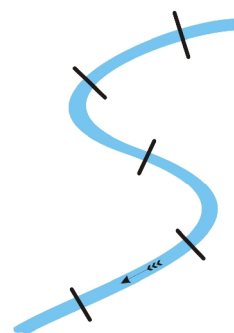
$$Q = vF \quad (7)$$

gdzie; v - prędkość przepływu wody [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$],
 F - pole powierzchni przekroju strugi [m^2].

Pole powierzchni traktujemy jako wielkość o znanej wartości – znamy średnicę przewodu. Prędkość przepływu wody obliczymy wykorzystując równanie Bernoulliego. W celu jego zastosowania należy przyjąć poziom porównawczego oraz wybrać przekroje poprzecznych, w których będziemy wykonywać obliczenia.

Przekroje poprzeczne przyjmujemy zawsze prostopadłe do kierunku przepływu strugi (Rys. 3), w miejscach charakterystycznych, to znaczy jeden w miejscu gdzie chcemy coś obliczyć, kolejny (poprzedni lub następny) w miejscu gdzie znane są jakiekolwiek parametry. Lokalizacja przekrojów obliczeniowych wpływa na wynik obliczeń, nie każda para przekrojów prowadzi do rozwiązania, w skrajnych przypadkach mogą pojawić się sprzeczne wyniki.

wpływ na ich przebieg (prostotę lub stopień skomplikowania).



Rys.3. Przekroje poprzeczne prostopadłe do kierunku przepływu

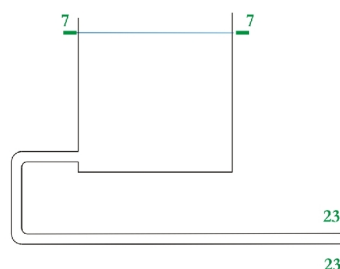
Poziom porównawczy jest to pozioma płaszczyzna. Od płaszczyzny tej liczyć będziemy położenie przekrojów z . Przyjęcie poziomego porównawczego nie wpływa na wynik obliczeń, jedynie ma

Procedurę obliczeniową związaną z obliczeniem prędkości przepływu (wykorzystaniem równania Bernoulliego) przeprowadzimy w następujących etapach:

Etap 1 – wybór przekrojów poprzecznych

Obliczenia przeprowadzimy dla dwóch wybranych przekrojów poprzecznych. Pierwszy z nich zostanie zlokalizowany w miejscu, gdzie spodziewamy się określić szukaną wartość, czyli prędkość przepływu (a następnie natężenie przepływu). Miejsmem tym jest wylot z rurociągu – przekrój 23-23. Przy wyborze drugiego będziemy kierować się „dostępnością danych wyjściowych”. Należy pamiętać, że w równaniu Bernoulliego występuje sześć niewiadomych. Redukcja ich ilości jest, więc kluczowym zagadnieniem. Wynika z tego, że korzystnie byłoby zlokalizować ten przekrój w miejscu gdzie dostępna jest informacja o stanie układu. Dla naszego układu takim

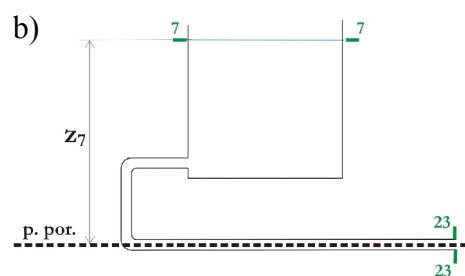
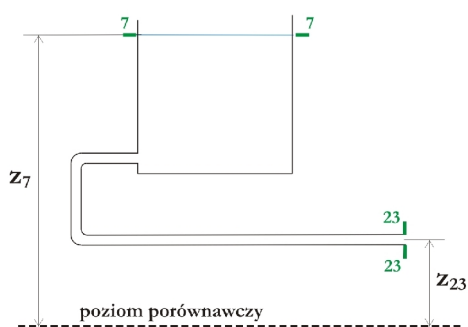
miejsmem jest zwierciadło wody – ciśnienie na jego powierzchni odpowiada ciśnieniu atmosferycznemu oraz znane jest napełnienie. Przekrój ten oznaczmy 7-7 (będzie to przekrój początkowy).



Rys.4. Wybór przekrojów poprzecznych

Etap 2 – przyjęcie poziomu porównawczego

Poziom porównawczy jest poziomą płaszczyzną odniesienia, służącą do lokalizacji przekrojów. Jej usytuowanie nie wpływa na wynik, każda spełni swoje zadanie. Ale pamiętając o potrzebie redukcji niewiadomych w równaniu Bernoulliego wskazane jest jej usytuowanie w miejscach charakterystycznych. Wariantowe przyjęcia poziomu porównawczego przedstawiono na Rys. 5 i b).



Rys.5. Przyjęcia poziomu porównawczego, a) na dowolnej wysokości, b) w osi przewodu, w przekroju 23-23

Z analizy Rys. 5a wynika, że odległość z_{23} nie jest znana. Co prawda odległość ta zredukowałaby się w równaniu Bernoulliego, ale będziemy stosować rozwiązania najefektywniejsze. Z tego względu rekomendowane jest przyjęcie poziomu porównawczego w osi przewodu, w przekroju 23-23.

Etap 3 – oszacowanie wartości zmiennych w równaniu Bernoulliego,

Dla tak wybranych przekrojów i przyjętego poziomu porównawczego (Rys. 5b) szacujemy wartości

poszczególnych parametrów występujących w równaniu.

Parametr z w równaniu Bernoulliego jest to odległość przekroju od poziomu porównawczego (jego środka). Odległość pomiędzy poziomem zwierciadła wody a poziomem porównawczym jest sumą odległości $h_1 + h_2$, przekrój 23-23 zlokalizowany jest na przekroju $z_{23}=0$. Ciśnienie w przekroju 7-7 odpowiada ciśnieniu atmosferycznemu. Podobnie w przekroju 23-23 – woda wypływając z rurociągu wpływa do przestrzeni o ciśnieniu atmosferycznym. Prędkość v_{23} jest wartością szukaną – niewiadomą, w

przekroju 7-7 ma wartość zero. W krótkim czasie ilość wody, która wypłynie ze zbiornika spowoduje obniżenie zwierciadła wody o wartość niezauważalną, bliską zero. W takich warunkach można przyjąć, że zwierciadło wody jest stałe a tym samym brak jest przepływu wody (w warunkach przepływu ustalonego zwierciadło wody jest niezmiennie). Podsumujemy:

$$\begin{array}{ll} v_7 = 0 & v_{23} = ? \\ p_7 = p_{atm} & p_{23} = p_{atm} \\ z_7 = h_1 + h_2 & z_{23} = 0 \end{array}$$

Etap 4 – rozwiązanie równania Bernoulliego

$$\frac{v_7^2}{2g} + \frac{p_7}{\gamma} + z_7 = \frac{v_{23}^2}{2g} + \frac{p_{23}}{\gamma} + z_{23} \quad (8)$$

$$0 + \frac{p_{atm}}{\gamma} + h_1 + h_2 = \frac{v_{23}^2}{2g} + \frac{p_{atm}}{\gamma} + 0 \quad (8a)$$

$$\frac{v_{23}^2}{2g} = h_1 + h_2 \quad (8b)$$

$$v_{23} = \sqrt{2g(h_1 + h_2)} \quad (8c)$$

$$v_{23} = \sqrt{2g(3 + 1,5)} = 9,40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Natężenie przepływu wyniesie, więc (7):

$$Q = v_{23} F = v_{23} \frac{\pi d^2}{4} = 9,40 \cdot \frac{\pi \cdot 0,025^2}{4} = 0,00461 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

2.2. Wnioski

Natężenie przepływu przy założeniu, że woda ma właściwości cieczy idealnej wynosi $Q = 4,61 \text{ l/s}$.

Wniosek merytoryczny: Prędkość wypływu ze zbiornika została opisana wzorem (8c). Wynika z niego, że prędkość przepływu wody zależy od różnicy poziomów zwierciadła wody w zbiorniku i wylotu z przewodu oraz przyspieszenia ziemskiego. Na wynik nie ma wpływu ani długość i średnicy przewodu, jego ukształtowania, szorstkości materiału, z którego jest wykonany, temperatury cieczy czy też UWAGA rodzaju cieczy. Wynika to z faktu, że obliczenia wykonano dla cieczy idealnej, która

pozbawiona jest lepkości. Spodziewać się należy, że wynik pomiaru znacząco będzie różnił się od uzyskanej wartości.

W kolejnym zadaniu przeprowadzimy obliczenia dla cieczy rzeczywistej.

Wniosek praktyczny: Natężenie przepływu zależy od powierzchni przekroju poprzecznego strugi oraz prędkość przepływu wody. Do obliczenia wartości prędkości wykorzystaliśmy równanie Bernoulliego. Procedura obliczeniowa składa się z następujących etapów:

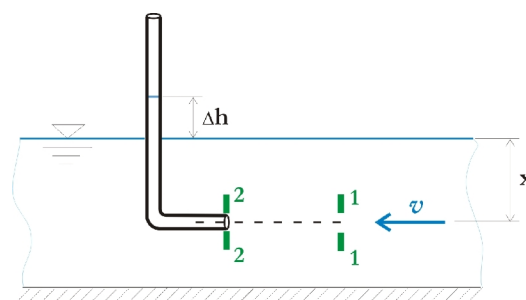
1. wybór przekrojów obliczeniowych,
2. przyjęcie poziomu porównawczego,
3. przyjęcie założeń,
4. rozwiązanie równanie Bernoulliego.

3.1. Przykład 2

Prędkość przepływu wody w korycie otwartym zmierzono przy pomocy rurki Pitota. Różnica poziomów wody $\Delta h = 60 \text{ mm}$. Obliczyć prędkość przepływu wody.

Czy zakrzywioną rurką umieszczoną w strumieniu przepływającej wody można określić prędkość przepływającej wody? Mierzac tylko spiętrzenie wody w pionowej części rurki? Odpowiedź jest twierdząca – rzeczywiście tak prostym przyrządem można zmierzyć prędkość

przepływającej wody. Wykorzystamy w tym celu równanie Bernoulliego.



Rys.6. Pomiar prędkości przepływu wody przy pomocy rurki Pitota

W pierwszej kolejności wybieramy przekroje i przyjmujemy poziom porównawczy. Jeden przekrój usytuujemy na wlocie do rurki w jej poziomej części – przekrój 2-2. Ciśnienie dynamiczne pochodzące od przepływającej wody (patrz równanie 4) powoduje podniesienie się zwierciadła wody w pionowej części rurki – im większa prędkość przepływu wody tym różnica poziomów wody Δh ma większe wartości. Jednocześnie wlot do rurki opływany jest strumieniem wody. Ponieważ woda w rurce nie porusza się łatwo jest określić wartość ciśnienia w przekroju 2-2. Przekrój początkowy przyjmiemy w dowolnym miejscu na wysokości wlotu do rurki Pitota w takiej minimalnej odległości aby uniknąć zakłócenia przepływu wywołanego obecnością przyrządu pomiarowego. Poziom porównawczy przyjmiemy na wysokości wlotu do rurki.

Równanie Bernoulliego dla przekrojów 1-1 i 2-2 ma postać:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (9)$$

Szacujemy wartości poszczególnych elementów:

$$v_1 = ?$$

$$v_2 = 0$$

$$p_1 = p_{atm} + \gamma x$$

$$p_2 = p_{atm} + \gamma(x + \Delta h)$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 0$$

Po podstawieniu do równania (9) otrzymujemy:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_{atm} + \gamma x}{\gamma} + 0 = 0 + \frac{p_{atm} + \gamma(x + Dh)}{\gamma} + 0 \quad (9a)$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = \Delta h \quad (9b)$$

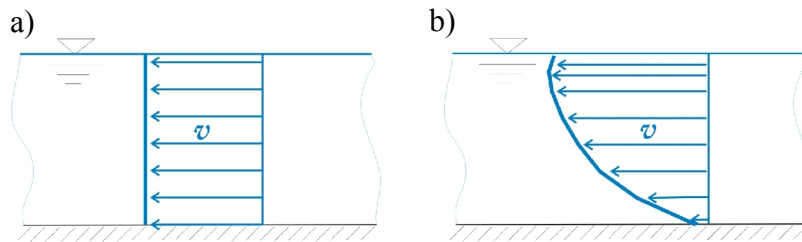
$$v_1 = \sqrt{2g\Delta h} \quad (9b)$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot 0,06} = 1,85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3.2. Dyskusja

Otrzymany wynik jest prędkością lokalną, występującą w wybranej strudze cieczy. Zmiana zagłębienia końcówki rurki Pitota spowoduje pomiar dla innej linii prądu. Po wykonaniu serii pomiarów prędkości od dna do zwierciadła wody otrzymuje się pionowy rozkład prędkości przepływu wody.

W cieczy idealnej, która pozbawiona jest lepkości pojedyncze warstwy przepływającej cieczy przesuwały się po sobie bez tarcia. W takim przypadku rozkład pionowy prędkości przedstawiona na Rys. 7a. W całym pionie prędkość ma jednakową wartość.



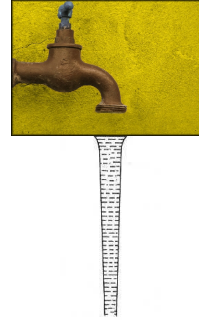
Rys.7. Rozkład prędkości przepływu wody dla cieczy: a) idealnej, b) rzeczywistej

Opory ruchu wywołane tarcie między cząsteczkami cieczy oraz pomiędzy cieczą o podłożem powoduje zróżnicowanie prędkości przepływu wody (Rys. 7b). Prowadzi to do występowania pulsacji przepływu wody w ruchu turbulentnym. W ruchu turbulentnym występują trzy składowe prędkości: v_x , v_y i v_z .

Pomimo prostoty wykonania i zastosowania rurki Pitota w pomiarach laboratoryjnych ruchu turbulentnego nie znalazła szerszego zastosowania ze względu na niestabilność poziomu zwierciadła wody (odczyt Δh obarczony dużą niepewnością). Jej modyfikacja wprowadzona przez Prandta nie usunęła całkowicie tej niedogodności. Rurka Pitota z powodzeniem służy do pomiaru przepływu gazów.

4.1. Przykład 3

Wartość natężenia przepływu można określić na podstawie zmian geometrii swobodnego strumienia wody pod wpływem przyciągania ziemskiego. Przyspieszenie ziemskie sprawia, że prędkość wypływającego strumienia rośnie w kierunku przepływu.



Rys.8. Schemat obliczeniowy (fot. Arch.)

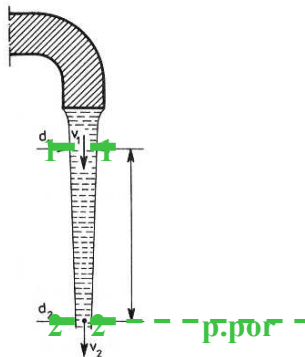
Obliczenie przepływu

$$Q = v \cdot F$$

gdzie: Q – przepływ [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$], F – pole powierzchni [m^2], v – prędkość przepływu [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]

Do obliczenia prędkości przepływu wykorzystamy równanie Bernoulliego:

1. Przyjęcie przekrojów i poziomu porównawczego



Rys.9. Schemat obliczeniowy

2. Równanie Bernoulliego dla cieczy idealnej

$$\begin{aligned} \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 &= \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \\ \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_{atm}}{\gamma} + l &= \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_{atm}}{\gamma} + 0 \\ \frac{v_1^2}{2g} + l &= \frac{v_2^2}{2g} \end{aligned}$$

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = l$$

Równanie z dwoma niewiadomymi wspomagamy równaniem ciągłości strugi $Q_1 = Q_2$

$$\begin{cases} \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = l \\ Q = v_1 F_1 = v_2 F_2 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_2 &= \frac{v_1 F_1}{F_2} = \frac{v_1 \frac{\pi d_1^2}{4}}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = \frac{v_1 d_1^2}{d_2^2} \\ \frac{\left(\frac{v_1 d_1^2}{d_2^2} \right)^2 - v_1^2}{2g} &= l \end{aligned} \right.$$

Obliczamy prędkość v_1

$$\begin{aligned} \frac{\frac{v_1^2 d_1^4}{d_2^4} - v_1^2}{2g} &= l \\ v_1^2 \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right) &= l \cdot 2g \end{aligned}$$

$$v_1^2 \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right) = 2gl$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gl}{\left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right)}}$$

Stąd, korzystając z równania ciągłości strugi $Q = v_1 \cdot F_1$ (mnożymy obie strony równania przez pole powierzchni F_1)

$$v_1 F_1 = \sqrt{\frac{2gl}{\left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right)}} F_1$$

Po przekształceniu:

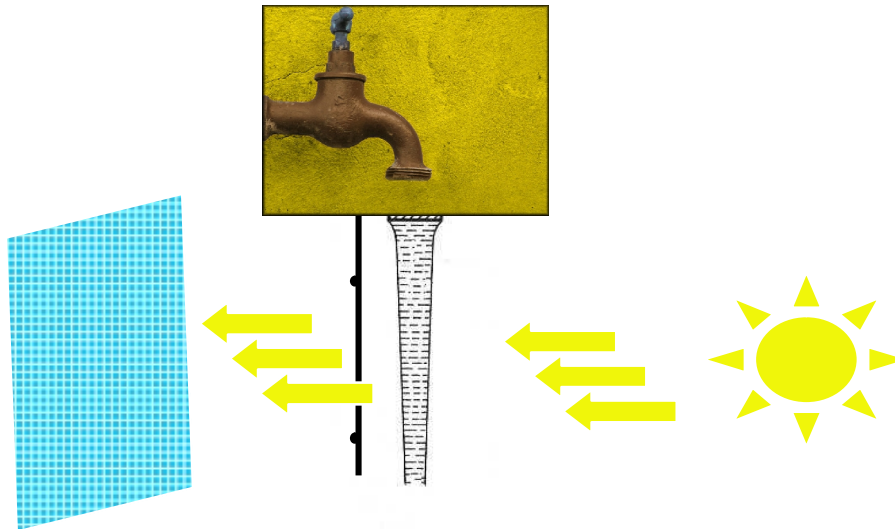
$$Q = \frac{\pi d_1^2 \sqrt{2gl}}{4 \sqrt{\left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right)}}$$

Z powyższego równania wynika, że wystarczy zmierzyć tylko trzy wielkości liniowe aby określić natężenie przepływu

Jednostką przepływu jest $[m^3 \cdot s^{-1}]$: sekunda pochodzi z przyspieszenia ziemskiego.

4.2. Dyskusja wyników

Problemem w przedstawionej metodzie jest dokładność pomiaru średnic d_1 oraz d_2 . Można zwiększyć dokładność pomiaru średnic rzutując strumień wody na papier milimetrowy i źródło światła.



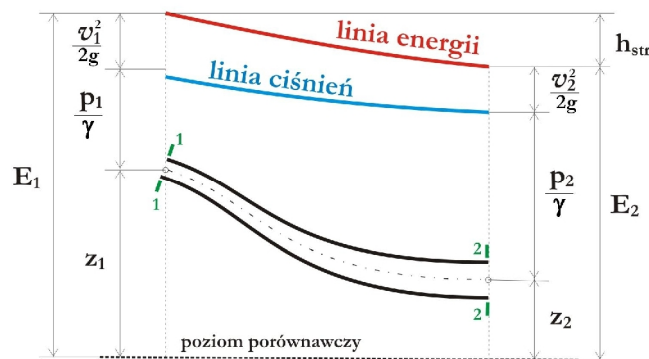
Rys.10. Zwiększenie dokładności odczytu średnic d_1 oraz d_2

Równanie zachowania energii (równanie Bernoulliego) dla cieczy rzeczywistej

Równanie Bernoulliego dla cieczy idealnej zostało wyprowadzone przy założeniu, że ciecz nie posiada lepkości. Takie podejście umożliwiło napisanie równania, które opisuje ruch cieczy lecz wynik obliczeń nie odpowiadał wynikom doświadczeń. Opory ruchu wywołane lepkością cieczy sprawiają, że część energii zostaje zużyta na ich pokonanie. Dla wybranej strugi cieczy w dwóch przekrojach równanie (6) dla cieczy rzeczywistej zapiszemy:

$$E_1 = E_2 + \sum h_{str} \quad (10)$$

gdzie: $\sum h_{str}$ – suma strat hydraulicznych reprezentująca opory ruchu pomiędzy przekrojami 1-1 i 2-2. W sposób graficzny przedstawione zostały one na Rys. 11. Jeżeli straty mają wartość dodatnią z przedstawionego zapisu wynika, że energia w kolejnym przekroju zawsze jest mniejsza w stosunku przekroju poprzedzającego.



Rys.11. Wykres linii ciśnień i linii energii dla cieczy rzeczywistej

5. Wprowadzenie

Równanie Bernoulliego dla cieczy rzeczywistej:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \sum h_{str} \quad (11)$$

gdzie:

$\sum h_{str}$ - wysokość strat hydraulicznych na długości od przekroju 1 do przekroju 2. Straty hydrauliczne liczymy jako sumę strat na długości h_l oraz strat miejscowych h_m .

$$\sum h_{str} = h_l + h_m \quad (12)$$

1. Straty na długości są wynikiem oddziaływania ścianek przewodu lub koryta a strumieniem cieczy czyli wywołane lepkością:

$$h_s = \xi_l \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad [\text{m}] \quad (13)$$

gdzie: ξ_l – współczynnik strat na długości,
 l – długość przewodu,
 d – średnica,
 v – prędkość przepływu,
 λ – współczynnik oporów liniowych:

- dla przepływu laminarnego $Re < 2320$

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (13a)$$

Re – liczba Reynoldsa, $Re = \rho v d / \mu$

- dla przepływu burzliwego $Re < 80000$

wg Blasiusa
$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \quad (13b)$$

- dla przepływu burzliwego

wg Nikuradsego
$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \log \frac{d}{k} + 1.38\right)^2} \quad (13c)$$

k – średnia wartość nierówności ścian przewodu,

wg Colebrook-White'a
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3.71d} \right] \quad (13d)$$

z równania Darcy'ego-Weisbacha
$$\lambda = \frac{8g}{c^2} \quad (13e)$$

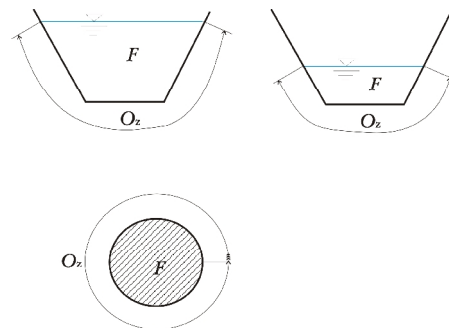
c – współczynnik prędkości, wg Manninga $c = \frac{1}{n} R_h^{1/6}$

R_h – promień hydrauliczny $R_h = \frac{F}{O_z}$

F – pole powierzchni przekroju poprzecznego,

O_z – obwód zwilżony. Na

Rys. 12 przedstawiono przekroje z określonym obwodem zwilżonym – jest to ta część przekroju, która styka się z wodą. W przypadku przewodów pracujących pod ciśnieniem, które są wypełnione całkowicie cieczą obwód zwilżony równa się obwodowi strugi cieczy.



Rys.12. Obwód zwilżony O_z w przypadku koryt otwartych i przewodu pracującego pod ciśnieniem

2. Straty lokalne długości są wynikiem lokalnego zaburzenia przepływu wywołaną zmianą średnicy przekroju, załamaniem przewodu lub obecnością przeszkód:

$$h_s = \xi_m \frac{v^2}{2g} \quad [\text{m}] \quad (14)$$

ξ_m – współczynnik strat miejscowych. Wartość współczynnika opisana jest równaniem lub odczytuje się ją z tabeli w zależności od genezy jej powstania.

6.1. Przykład 1

Obliczyć wartość natężenia przepływu na wylocie z rurociągu dla schematu pokazanego na Rys. 13 (ciecz rzeczywista) dla następujących danych;

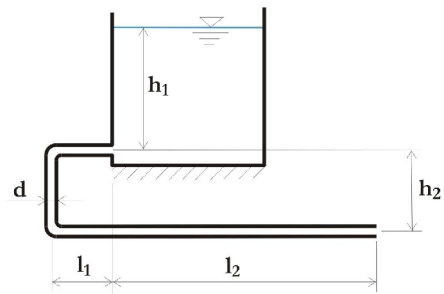
$$h_1 = 3,0 \text{ m},$$

$$h_2 = 1,5 \text{ m},$$

$$l_1 = 2,0 \text{ m},$$

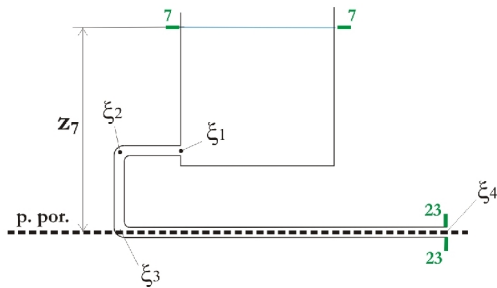
$$l_2 = 14 \text{ m},$$

$$d = 2,5 \text{ cm}.$$



Rys.13. Schemat obliczeniowy

Wartość przepływu obliczymy ze wzoru $Q = vF$. Pole powierzchni traktujemy jako wielkość o znanej wartości – znamy średnicę przewodu. Prędkość przepływu wody obliczymy wykorzystując równanie Bernoulliego – wybieramy przekroje poprzeczne: jeden przekrój na powierzchni zwierciadła wody w zbiorniku, drugi na wylocie z przewodu oraz przyjmujemy poziom porównawczy w osi przewodu (Rys. 14).



Rys.14. Przekroje i poziom porównawczy

Oszacowanie wartości elementów r-B:

$$v_7 = 0$$

$$v_{23} = ?$$

$$p_7 = p_{atm}$$

$$p_{23} = p_{atm}$$

$$z_7 = h_1 + h_2$$

$$z_{23} = 0$$

Rozwiązanie równania Bernoulliego

$$\frac{v_7^2}{2g} + \frac{p_7}{\gamma} + z_7 = \frac{v_{23}^2}{2g} + \frac{p_{23}}{\gamma} + z_{23} + \sum h_{str}$$

$$0 + \frac{p_{atm}}{\gamma} + h_1 + h_2 = \frac{v_{23}^2}{2g} + \frac{p_{atm}}{\gamma} + 0 + \sum h_{str} \quad (15a)$$

$$h_1 + h_2 = \frac{v_{23}^2}{2g} + \sum h_{str} \quad (15b)$$

Sumę strat obliczymy ze wzoru (12), gdzie w pierwszej kolejności należy obliczyć straty na długości i miejscowe. Straty na długości powstają na całej długości przewodu, straty miejscowe wystąpią na wlocie do przewodu ξ_1 , na załamaniu przewodu ξ_2 i ξ_3 oraz na wylocie z przewodu ξ_4 . Zarówno straty miejscowe jak i na długości wywołane są przepływem wody poruszającej się z prędkością v_{23} (prędkość średnia w przekroju).

Straty na długości h_l	Straty miejscowe h_m
<p>n- współczynnik szorstkości (materiału, z którego wykonany jest przewód), $n=0,011$, R_h – promień hydrauliczny</p> $R_h = \frac{F}{O_z} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} = \frac{0,025}{4} = 0.00625 \text{ m}$ <p>c- współczynnik prędkości</p> $c = \frac{1}{n} R_h^{1/6} = \frac{1}{0,011} 0.00625^{1/6} = 39,02$ <p>λ – współczynnik oporów liniowych</p> $\lambda = \frac{8g}{c^2} = \frac{8g}{39,02^2} = 0,052$ <p>Współczynnik strat na długości</p> $\xi_l = \lambda \frac{2l_1 + h_2 + l_2}{d} = 0,052 \frac{19,5}{0,025} = 37,12$	<p>Dla wymienionych miejsc wartości współczynników strat miejscowych odczytano z tablic:</p> <p>$\xi_1 = 0,5$; wlot o ostrej krawędzi, $\xi_2 = \xi_3 = 0,26$; kolanko, $\xi_4 = 0$ (w zależności od źródła strata na wylocie ma wartość dodatnią lub zero),</p> <p>$\xi_l = 0,5 + 0,26 + 0,26 = 1,02$</p>
Straty na długości $h_l = \xi_l \frac{v_{23}^2}{2g} = 37,12 \frac{v_{23}^2}{2g}$	Straty miejscowe $h_m = \xi_m \frac{v_{23}^2}{2g} = 1,02 \frac{v_{23}^2}{2g}$
Suma strat $\sum h_{str} = 38,14 \frac{v_{23}^2}{2g}$	

$$h_1 + h_2 = \frac{v_{23}^2}{2g} + 38,14 \frac{v_{23}^2}{2g} \quad (15c)$$

$$2g(h_1 + h_2) = 39,14 v_{23}^2 \quad (15d)$$

$$v_{23} = \sqrt{\frac{2g(h_1 + h_2)}{39,14}} \quad (15e)$$

$$v_{23} = \sqrt{\frac{2g(3,0 + 1,5)}{39,14}} = 1,52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Natężenie przepływu wyniesie, więc (7):

$$Q = v_{23} F = v_{23} \frac{\pi d^2}{4} = 1,52 \cdot \frac{\pi \cdot 0,025^2}{4} = 0,00075 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

6.2. Odpowiedź

W przypadku cieczy rzeczywistej prędkość przepływu wody wynosi $v = 1,52 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a natężenie przepływu $Q = 0,75 \text{ l/s}$. Dla cieczy idealnej parametry te miały wartości odpowiednio: $v = 9,40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ i $Q = 4,61 \text{ l/s}$. Rozbieżności w wynikach są efektem nieuwzględnienia w obliczeniach lepkości cieczy. Część energii cieczy musi zostać zużyta na pokonanie oporów ruchu, które są wynikiem oddziaływania cząstek cieczy zarówno między sobą jak i względem podłoża, po którym się poruszają.

Literatura:

Błażejowski R., 1991, 100 prostych ćwiczeń z wodą i powietrzem, Wyd. Nauk.-Techn., Warszawa,
Lewandowski J.B., 2006, Mechanika płynów, Wyd. AR w Poznaniu
Orzechowski Z., Prywer J., Zarzycki R., 2001, Mechanika płynów w inżynierii środowiska, WNT, Warszawa
Sobota J., 1994, Hydraulika, t. I i II, AR Wrocław
Troskoleński A.T., 1969, Hydromechanika, WNT, Warszawa