FORMALIZZAZIONE

CONNETTIVI LOGICI

Sono "gratis" in tutti i linguaggi

$\wedge \quad \vee \quad \neg \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

(anche l'uguale $=$)

Esercizio

In $\mathbb{N}$ con un simbolo di predicato $P(x)$ che è interpretato come "x è primo", relazione binaria $<$, funzione binaria $+$, costante 1

$$\mathcal{L} = \langle P, <, +, 1 \rangle$$

Formalizzare la frase "ogni numero dispari sufficientemente grande è la somma di 3 primi".

SVOLGIMENTO:

- Creo una formula $D(x)$ che significa "x è dispari"

In teoria diremmo che $x = 2y + 1$ (definizione di dispari)
MA non ho né la costante 2 né la moltiplicazione in $\mathcal{L}$
Quindi posso scrivere

$$D(x): \text{“} \exists y \, [x = y + y + 1] \text{”}$$

- Scrivo una formula $S(x)$ che significhi "x è somma di 3 primi"

$$S(x): \text{“} \exists u \exists v \exists w \, [P(u) \wedge P(v) \wedge P(w) \wedge x = (u+v)+w] \text{”}$$

- "$\underbrace{\text{Ogni}}_{\forall x}$ $\underbrace{\text{numero dispari}}_{D(x)}$ $\underbrace{\text{è}}_{\rightarrow}$ la $\underbrace{\text{somma di 3 primi}}_{S(x)}$"

$$\forall x \, [D(x) \rightarrow S(x)]$$

- Esprimere "sufficientemente grande":

$\parallel$

$\boxed{\text{" esiste un numero } x \text{ tale che ogni numero più grande di } x \text{ è ... "}}$

$$\exists x \forall y [x < y \longrightarrow \dots]$$

- Metto tutto insieme:

$$\text{"} \exists x \forall y [D(x) \wedge x < y \longrightarrow S(x)] \text{"}$$

Volendo possiamo scriverlo esplicitando $D(x)$ e $S(x)$

$$\exists x \forall y [\underbrace{\exists z (y = z + z + 1)}_{D(x)} \wedge (x < y) \longrightarrow \underbrace{\exists u \exists v \exists w (P(u) \wedge P(v) \wedge P(w) \wedge y = (u+v)+w }_{S(x)}]$$

ATTENZIONE

La frase "esistono primi arbitrariamente grandi ..."

è diversa da "per ogni x sufficientemente grande ..."

e si scrive: $\forall x \exists y [x < y \wedge P(x)]$

Esercizio

In $\mathbb{Z}$, con $\cdot$ simbolo moltiplicazione

① esprimere "y è diviso da x"

② si aggiunge costante 0 al linguaggio.

esprimere "se un numero è non nullo, allora non può essere diviso da 0"

SVOLGIMENTO:

① $\mathcal{L} = \langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ $\quad \phi(x,z)$: $\cancel{\exists x \exists y}$ $\exists z \, [x \cdot z = y]$

sono variabili libere (ci vengono esplicitate dal testo)

② $\mathcal{L} = \langle \mathbb{Z}, \cdot, 0 \rangle$

$\forall x [\neg(x = 0)]$ = "per ogni x non nullo"

$\forall x \exists y [\neg(y \cdot 0 = x)]$ = "x non divisibile per 0"

diventa: "$\forall x [\neg(x = 0) \longrightarrow \neg \exists y \, (y \cdot 0 = x)]$"

- "Ogni n t.c. ... è ..."

  $\forall x [\, \dots \longrightarrow \dots \,]$

- "esiste n ... t.c. ..."

  $\exists x [\, \dots \wedge \dots \,]$

- "ogni n sufficientemente grande in $\mathbb{N}$ ($, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$)"

  $\exists x \forall y \, [\, y > x \longrightarrow \dots \,]$

  $x < y$
  $y \geq x$ etc
  a seconda del linguaggio

- "esiste n arbitrariamente grande ..."

  $\forall x \exists y \, [\, y > x \wedge \dots \,]$

Esercizio

In $\mathbb{N}$ con simboli $P(x)$ "x è numero primo" e $<$

scrivere "esistono infiniti numeri primi"

"

$$\forall x \exists y \, [x < y \land P(x)]$$

Esercizio

Scrivere "esistono infiniti numeri primi"

con:

1) $\langle \mathbb{N}, \cdot, +, \leq, 1 \rangle$

2) $\langle \mathbb{N}, |, 1, \geq \rangle$

3) $\langle \mathbb{N}, \cdot, > \rangle$

1) "x è primo"

$P(x): \quad \neg(x=1) \land \forall y \, [\exists z \, (y = x \cdot z) \longrightarrow (y=1 \lor y=x)]$

oppure

$P(x): \quad \neg(x=1) \land \neg \exists y \exists z \, [x = y \cdot z \land (\neg(y=1) \land \neg(y=x))]$

" esistono infiniti numeri t.c. $P(x)$ "

$$\forall w \exists x \, [w \leq x \land P(x)]$$

2) $P(x): \quad \neg(x=1) \land \forall y \, [y | x \longrightarrow y=1 \lor y=x]$

$$\forall w \exists x \, [x \geq w \land P(x)]$$

3) Non ho 1 $\Rightarrow$ esprimo 1 come numero che moltiplicato $\forall y$ a qualunque y dà come risultato y $\Rightarrow x \cdot y = y$

$\Leftrightarrow x = 1$

$P(x): \quad \neg \forall y \, (xy = y) \land \forall y \, [\exists z (y \cdot z = x) \rightarrow (y = x \lor \forall w \, (y \cdot w = w))]$

oppure $\exists y [\neg(x \cdot y = y)]$

$$\forall v \exists x \, [x > v \land P(x)]$$