Principio di doppia inclusione $\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \wedge \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$

De Morgan $\complement(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \complement\mathrm{A} \cap \complement\mathrm{B}$ e $\complement(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \complement\mathrm{A} \cup \complement\mathrm{B}$

Proprietà distributiva
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *e*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Relazione n-aria
Sottoinsieme di $\mathrm{A}_0 \times \mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_{\mathrm{n}-1}$. Sia $R \subseteq \mathrm{A} \times B$:
$dom(R) = \{a \in A \,|\, (a, b) \in R \text{ per qualche } b \in B\}$
$rng(R) = \{b \in B \,|\, (a, b) \in R \text{ per qualche } a \in A\}$
$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$

Proprietà per relazioni binarie
riflessiva: $aRa \; \forall a \in A$
irriflessiva: $\neg(aRa) \; \forall a \in A$
simmetrica: $aRb \rightarrow bRa$
antisimmetrica: $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$ (non è l'opposto di simmetria)
transitiva: $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$

Relazione di equivalenza R riflessiva, simmetrica e transitiva

Relazione d'ordine R riflessiva, antisimmetrica e transitiva

Ordine stretto R irriflessiva, antisimmetrica e transitiva

Pre-ordine R riflessiva e transitiva

N.B. Unica R sia simmetrica che antisimmetrica: uguaglianza.

Funzione
Relazione $f: A \rightarrow B$ tale che
$\forall a \in A \; \exists b \in B \; t.c. (a, b) \in f$ e $b_1 = b_2 \; \forall (a, b_1), (a, b_2) \in f$
$A = dom(f)$ $\quad B$ *codominio*
$b = f(a)$ *immagina di a mediante f*
$rng(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$ *range o immagine di f*
$f^{-1}[\{b\}] = \{a \in A \mid f(a) = b\}$
preimmagine o controimmagine di $b \in B$

Composizione di funzioni
$f: A \rightarrow B$ *e* $g: B \rightarrow C$
$g \circ f : A \rightarrow C \quad a \mapsto g(f(a))$

Proprietà delle funzioni
iniettiva: $a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ *oppure*
$f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$
suriettiva: $\forall b \in B \;\; b = f(a)$ *per qualche*
$a \in A$ *oppure* $rng(f) = B$
biettiva se sia iniettiva che suriettiva

Inversa $f^{-1}: rng(f) \rightarrow A \quad b \mapsto f^{-1}[\{b\}]$

Stringhe finite su A
Sequenza finita di simboli di A.
insieme di tutte le stringhe finite su A: $A^{<\mathbb{N}}$
$lh(s)$ lunghezza della stringa s
stringa vuota = ε
Insieme delle stringhe di lunghezza n (finito): A^n

Stringhe infinite su A (successione)
Sequenza infinita di simboli di A.
insieme di tutte le stringhe infinite su A: $A^{\mathbb{N}}$

Cardinalità Due insiemi X e Y hanno la stessa cardinalità ($\mathrm{X} \approx \mathrm{Y}$ o $|\mathrm{X}| = |\mathrm{Y}|$) se esiste biezione $\mathrm{f}: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$.

X si inietta in Y ($\mathrm{X} \precsim \mathrm{Y}$ o $|\mathrm{X}| \leq |\mathrm{Y}|$) se esiste iniezione $\mathrm{f}: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$.

$\mathrm{X} \precsim \mathrm{Y}$ sse c'è una suriezione $\mathrm{g}: \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{X}$.

Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein Se $\mathrm{X} \precsim \mathrm{Y}$ e $\mathrm{Y} \precsim \mathrm{X}$ allora $\mathrm{X} \approx \mathrm{Y}$.

Insieme **finito** sse in biezione con $\{0, \ldots, n-1\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.
Si scrive $|\mathrm{X}| = \mathbb{N}$.
X infinito sse $\mathbb{N} \precsim \mathrm{X}$ ovvero $|\mathbb{N}| \leq |\mathrm{X}|$.
X infinito sse esiste $Y \subset \mathrm{X}$ tale che $\mathrm{X} \approx \mathrm{Y}$.
X **numerabile** se in biezione con $\mathbb{N}$.
X **più che numerabile** se in biezione con $\mathbb{R}$.
Se X numerabile, anche X^n con $n \in \mathbb{N}$ lo è.
$\mathrm{X}^{<\mathbb{N}}$ è infinito (sempre). Se X numerabile, anche $\mathrm{X}^{<\mathbb{N}}$ lo è.
$\mathrm{X}^{\mathbb{N}}$ e $P(\mathrm{X})$ sono infiniti più che numerabili.

Teorema di Cantor $|\mathrm{X}| < |P(\mathrm{X})|$

Criterio di priorità dei connettivi:
$\neg \; \forall \; \exists$
$\wedge \; \vee$
$\rightarrow$
$\leftrightarrow$

Linguaggio del prim'ordine $L = Const \cup Func \cup Rel$

Arietà: dice quanti argomenti contiene la funzione o relazione

L-Termini $Term = (\{(,)\} \cup Const \cup Func)$

Formula atomica $\left(R\left(t_1, \dots, t_n\right)\right)$ $oppure$ $(t_1 = t_2)$

L-Formule $Fml = (L \cup Vbl \cup \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$
$si\ indicano\ con\ lettere\ greche\ minuscole\ (es.\ \varphi)$

Variabili (Vbl**) vincolate:** Sotto il raggio d'azione di un quantificatore.
Altrimenti **libere** ($FV(\varphi)$)

L-enunciato φ è enunciato se non contiene variabili libere.

L-struttura $\mathcal{A} = \left\langle A, R^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}}, \dots, c^{\mathcal{A}}, \dots \right\rangle$

Assegnazione in $\mathcal{A}$ per $\{x_1, \dots, x_n\}$: Associo ad ogni x_i il valore di $a_i \in A$
si scrive: $x_1/a_1, \dots, x_n/a_n$

Interpretazione di un L-termine t in $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione: $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$

Una L-formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ è vera in una L-struttura $\mathcal{A}$ mediante un'assegnazione:

$\mathcal{A} \vDash \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$

Sia φ un L-enunciato.

- Se φ è **vero** in $\mathcal{A}$ si scrive $\mathcal{A} \vDash \varphi$ (φ **soddisfa** $\mathcal{A}$ / $\mathcal{A}$ **modello** di φ)
- φ **soddisfacibile/coerente** se esiste almeno una L-struttura $\mathcal{A}$ t.c. $\mathcal{A} \vDash \varphi$
- φ **insoddisfacibile/incoerente/contraddizione** se non esiste alcun modello φ
- φ **logicamente valido/vero** ($\vDash \varphi$) se $\forall \mathcal{A}$ si ha che $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Sia Γ un insieme di L-enunciati e φ un L-enunciato.
φ conseguenza logica di Γ ($\Gamma \vDash \varphi$) quando per ogni L-struttura $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A} \vDash \Gamma$ allora $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Teorema
1. φ valido sse $\neg\varphi$ è contraddizione
2. φ soddisfacibile sse $\neg\varphi$ non è valido
3. $\Gamma \vDash \varphi$ sse $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è insoddisfacibile

Equivalenza logica Due L-enunciati φ e ψ sono logicamente equivalenti ($\varphi \equiv \psi$) se, per ogni L-struttura A, si ha che $\mathcal{A} \vDash \varphi \leftrightarrow \mathcal{A} \vDash$

Valgono le seguenti equivalenze:

- $\varphi \equiv \psi$ $se\ e\ solo\ se$ $\vDash \left(\varphi \leftrightarrow \psi\right)$
- $\varphi \equiv \psi$ $se\ e\ solo\ se\ \varphi \vDash \psi$ e $\psi \vDash \varphi$

Formalizzazione:

> *"ogni x t.c. … è …"* $\forall x[\dots \rightarrow \dots]$
> *"esiste x … t.c. …"* $\exists x[\dots \wedge \dots]$
> Esprimere "*sufficientemente grande"* :
come dire *"esiste un numero x tale che ogni numero più grande di x è …"*
$\exists x \forall y[x < y \rightarrow \dots]$
> Esprimere *"arbitrariamente grande*":
Come dire *"per ogni numero x ne esiste uno più grande tale che x è …"*
$\forall x \exists y\left[x < y \wedge \dots\right]$ (esempio *"esistono infiniti numeri primi"*)
> Se nel testo vengono esplicitati (ad esempio) x e y
$\cancel{\forall x \exists y} \forall z \exists w \dots \left[x \dots y \dots z \dots w \dots\right]$