SINTASSI

- Variabili $\{v_0, v_1, \dots\}$
- flessibilità del $\boxed{\text{linguaggio}}$ = insieme di simboli $\{R, \dots, f, \dots, c, \dots\}$

  Arietà = con quanti elementi valuto il linguaggio (le costanti non contano)
- Formiamo i $\boxed{\text{termini}}$ = costanti, variabili, simboli di funzione

  es: • x^2+1 è un termine

  • $f(x,y)$ è un termine
- Formule atomiche $(t_1 = t_2)$, $R(t_1, \dots, t_n)$
  - Se φ è formula, allora $(\neg\varphi)$ lo è
  - se φ e ψ sono formule, allora $(\varphi \wedge \psi)$ lo è
  - Se φ è una formula e x variabile, allora $(\exists x \varphi)$ e $(\forall x \varphi)$ sono formule

VARIABILI LIBERE E VINCOLATE

$\exists x (\dots x \dots)$ — vincolate

le variabili attaccate ad un quantificatore e che sono nel suo raggio d'azione sono vincolate

$\exists x (\dots y, \dots)$ — x: vincolata, y: libera

Esempio

$$((\forall z [P(z,z)]) \wedge \exists x (\forall y [P(x,y) \to P(z,y)]))$$

Esercizio 4

Determinare le occorrenze libere e vincolate nelle seguenti formule

$$\underbrace{(\exists \overset{v}{x}(P(\overset{v}{x})))}\ \rightarrow\ \underbrace{\forall \overset{v}{z}(f(\overset{v}{z}) = \overset{L}{x}\ \vee\ \neg R(\overset{L}{x}, \overset{v}{z}))}$$

$$[\underbrace{\exists \overset{v}{x}(\underbrace{\forall \overset{v}{z}(R(\overset{v}{x}, \overset{v}{z}))}\ \rightarrow (\underbrace{\forall \overset{v}{z}(\exists \overset{v}{x}(R(\overset{v}{x}, \overset{v}{z})))}))}]$$

ENUNCIATO = NO variabili libere

$f(c) = d$ → anche questo e' un enunciato
(anche se non ci sono variabili)

SEMANTICA

= interpretazione dei vari simboli

es: $\mathcal{L} = \{R^{(2)}, f^{(2)}, c\}$ e' una L-struttura (binarie)

$\mathcal{A} = (A, R^2, f^2, c^{\mathcal{A}})$

UNIVERSO = insieme non vuoto su cui lavoriamo

- Se R e' simbolo di relazione con arieta' 2, allora $R^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$
- Se f e' simbolo di funzione con arieta' 3, allora $f^{\mathcal{A}} : A^3 \rightarrow A$
- Se c e' un simbolo di costante : $c^{\mathcal{A}} \in A$

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio, sia $\mathcal{A}$ una $\mathcal{L}$-struttura,
si puo' definire $\underbrace{\mathcal{A} \models \varphi}_{\varphi \text{ e' vera in } \mathcal{A}} [x_1 / a_1, \dots, \underbrace{x_n / a_n}]$

sto assegnando ad x_n il valore a_n (che e' una costante)

Se t e' un termine, $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n] \in A$

Esercizio 2

$\mathcal{L} = \{P, f, g, c\}$ con

P simbolo di relazione binaria

f, g simboli di funzione binaria

c simbolo di costante

Sia $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, \overset{P}{<}, \overset{f}{+}, \overset{g}{\cdot}, \overset{c}{1})$

Sia φ la formula $P(g(x,x), f(y,c))$

Sia ψ la formula $(f(x,x) = g(y,c))$

Determinare se 1) $\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/1]$

2) $\mathcal{A} \models \psi[x/2, y/1]$

1) $\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/1] \iff g(\overset{x}{2}, \overset{x}{2}) < f(\overset{y}{1}, \overset{c}{1})$

$\iff 2 \cdot 2 < 1 + 1$ FALSO

2) $\mathcal{A} \models \psi[x/2, y/1] \iff f(\overset{x}{2}, \overset{y}{1}) = g(\overset{x}{1}, \overset{c}{1})$

$\iff 2 + 2 = 1 \cdot 1$ FALSO

Esercizio 7

$\mathcal{L} = \{P, f, c\}$

P binario
f binaria
c costante

Sia φ l'enunciato $\forall x \forall y (P(c,y) \land f(x,x) = y \to P(x,y))$

$(\mathbb{Z}, <, +, -1) \models \varphi$?

VERO $\iff \forall x \in \mathbb{Z}$ e $\forall y \in \mathbb{Z}$

$\underbrace{-1 < y \land x + x = y \Rightarrow x < y}_{\text{FALSO (non è sempre vero, ad esempio se } x = y = 0)}$

Esercizio 16

Sia $\mathcal{L} = \{f, c\}$

φ : $\forall x \forall y (P(c,y) \wedge f(x,x)=y \longrightarrow P(x,y))$

f binaria, c costante.

Trovare un enunciato φ tale che :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \models \varphi \qquad e \qquad (\mathbb{N}, \cdot, 1) \not\models \varphi$$

SOLUZIONE : $\varphi \quad \forall x \exists y (\neg f(x,x) = x)$

infatti $\forall x \in \mathbb{N} \; \exists y \in \mathbb{N} \mid x+y \neq x$

$\forall x \in \mathbb{N} \; \exists y \in \mathbb{N} \mid x \cdot y \neq x$

Esercizio

Sia $\mathcal{L} = \{R\}$ con R simbolo di relazione binaria

Trovare un enunciato φ tale che

$(\mathbb{Z}, <) \models \varphi$ ma $(\mathbb{N}, <) \not\models \varphi$

RICORDA : $A \not\models \varphi \iff A \models \neg\varphi$

SOLUZIONE : $\forall x \exists y [R(y,x) \vee x=y]$

Esercizio

Sia $\mathcal{L} = \{R\}$ come sopra

Trovare un $\mathcal{L}$-enunciato φ t.c. $(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$

ma $(\mathbb{Z}, <) \models \varphi$

$\forall x \forall y [R(x,y) \longrightarrow \exists z (R(x,z) \wedge R(z,y))]$

DEFINIZIONE Sia φ un $\mathcal{L}$-enunciato. Diciamo:

1) φ è soddisfacibile se $\exists$ $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{A}$ t.c. $\mathcal{A} \models \varphi$

2) φ è valida $\forall$ $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{A}$ vale : $\mathcal{A} \models \varphi$

OSSERVAZIONE:

$\neg\varphi$ soddisfacibile $\iff$ φ NON è valida

Esercizio 22

$\mathcal{L} = \{R\}$

f simbolo di funz. unaria

Sia φ l'enunciato $\forall x \forall y \, (f(x) = f(y) \longrightarrow x = y) \wedge \exists z \, \neg \exists w \, (f(w) = z)$

dimostrare che φ è SODDISFACIBILE MA NON VALIDO

cerco $A \models \varphi$: $A = (\mathbb{N}, f)$

con $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$n \longmapsto 2n$

cerco $B \not\models \varphi$ ovvero $B \models \neg\varphi$: $B = (\mathbb{Z}, f)$

con $f : \boxed{\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}}$ DOMINIO $\equiv$ CODOMINIO
$n \longmapsto n^2$