Definizione:

Due insiemi X e Y hanno la stessa cardinalità se $\exists f: X \to Y$ biettiva.

Si scrive $X \approx Y$ o $|X| = |Y|$

relazione di equivalenza

INFATTI:

- riflessività: $\exists$ funzione identità
- simmetria: se $f: X \to Y$ biettiva $\Rightarrow \exists f^{-1}: Y \to X$ biettiva
- transitività: se $f: X \to Y$ biettiva e $g: Y \to Z$ biettiva $\Rightarrow \exists\, g \circ f: X \to Z$ biettiva

Insieme FINITO $\Leftrightarrow$ in biezione con $\{0, 1, \dots, n-1\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.

si scrive $|X| = n$

non finito = infinito

Oss. Se $|X| = n$ e $|Y| = m$ allora $|X \times Y| = n \cdot m$

Definizione

X si inietta in Y se $\exists f: X \to Y$ iniettiva.

Si scrive $X \precsim Y$ o $|X| \leq |Y|$

Se $X \precsim Y$ ma $Y \not\precsim X \Rightarrow X \prec Y$

preordine

↓

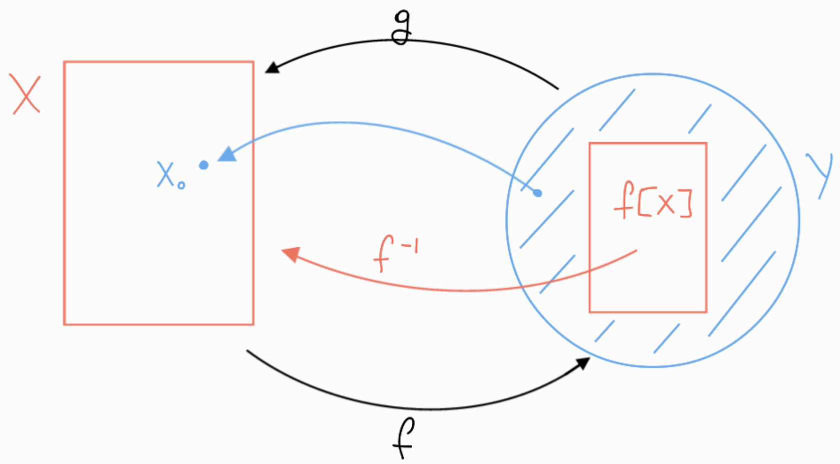
INFATTI:

- riflessiva: $\exists f : X \to X$ iniettiva, cioè identità
- transitiva: se $f : X \to Y$ biettiva e $g : Y \to Z$ biettiva
  $\Rightarrow \exists\, g \circ f : X \to Z$ biettiva

<u>Oss</u>: Se $X \approx Y$ allora $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$

<u>Prop</u>. Sia $X \neq \emptyset$
$X \precsim Y \iff \exists g : Y \to X$ suriettiva

Per dimostrare che $|X| \leq |Y|$
si mostra che $\exists$ iniezione da X in Y
oppure che $\exists$ suriezione da Y in X



TEOREMA DI CANTOR-SCHRÖDER-BERNSTEIN

Se $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$ allora $X \approx Y$

ovvero $|X| \leq |Y| \leq |X| \iff |X| = |Y|$

<u>Corollario</u> Se $X \subseteq Y$ e $Y \precsim X$
allora $X \approx Y$

X INFINITO $\iff \mathbb{N} \precsim X$ ($\mathbb{N}$ si inietta in X)

$\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme infinito.

Quindi $|\mathbb{N}| \leq |X|$

<u>Oss.</u> Dati X e Y FINITI con $Y \subset X$
(quindi $|Y| < |X|$ e Y è un sottoinsieme proprio di X)

Non esiste alcuna iniezione $f: X \to Y$

<u>Prop.</u> X INFINITO $\iff \exists Y \subset X$ t.c. $Y \approx X$

X NUMERABILE se in biezione con $\mathbb{N}$
ossia $|X| = |\mathbb{N}|$

Se $f: \mathbb{N} \to X$ suriettiva $\Rightarrow X$ è FINITO oppure NUMERABILE

Per dimostrare che X è numerabile è sufficiente elencare i suoi elementi in una successione infinita in cui ogni elemento di X compaia una e una sola volta:

$$f: \mathbb{N} \to X \qquad \text{biettiva}$$
$$n \mapsto x_n$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ $\xrightarrow{\text{in generale}}$ $|X \times X| = |X|$

(X infinito)

$|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}| \quad \forall n \geq 1$ $\xrightarrow{\text{in generale}}$ $|X^n| = |X|$

(X infinito)

$\mathbb{Q}$ e' numerabile , ovvero $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ numerabile , ovvero $|\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}|$

insieme di tutte le sequenze finite di numeri naturali

in generale → Se $X \neq \emptyset \implies X^{<\mathbb{N}}$ infinito

(indipendentemente dal fatto che X sia finito o infinito)

Sia $X \neq \emptyset$.

Se X finito e $|X| = n \implies |\underbrace{\mathcal{P}}_{\text{insieme delle parti}}(X)| = 2^n$

$\implies |X| < |\mathcal{P}(X)|$

Sia X INFINITO $\implies X \not\approx \mathcal{P}(X)$

Teorema di Cantor

$\nexists$ suriezione da X su $\mathcal{P}(X)$ ovvero $\mathcal{P}(X) \not\preceq X$

$\implies \forall X$ (finito o infinito) $\implies |X| < |\mathcal{P}(X)|$

Osservazioni

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ (idem per $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ etc.)

Ogni iniezione (o suriezione o biezione) $f: X \to Y$
genera la funzione iniettiva (o suriettiva o biettiva) :

$$\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y) , \quad \underbrace{A}_{\subseteq X} \longmapsto \underbrace{f[A]}_{\subseteq Y} = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

$$\Longrightarrow \quad |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{Z})| = |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$$

Teorema $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

L'insieme delle parti di $\mathbb{N}$ non e' numerabile

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$

Dato $(0;1) \subseteq \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{R} \approx (0;1)$

inoltre $\mathbb{R} \approx [a;b] \approx [a;b) \approx (a;b] \approx (a;b)$
$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \ , \quad a < b$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$$