Problemi e modelli

Un problema viene definito per mezzo di:

- Una descrizione dei suoi *parametri*;
- Una descrizione delle proprietà che devono caratterizzare la soluzione desiderata, dette *variabili*.

Molto spesso un problema viene definito fornendo l'insieme delle possibili soluzioni, ovvero l'*insieme ammissibile*, specificato indicando una serie di condizioni (vincoli) che gli elementi devono soddisfare.

In un problema di ottimizzazione viene definita una *funzione obiettivo* che fornisce il costo o il beneficio associato ad ogni soluzione.
La soluzione è quindi un elemento che rende minima o massima la funzione obiettivo.

Il senso di definire un problema di ottimizzazione è legato alla possibilità di sviluppare *algoritmi* in grado di risolvere efficientemente delle istanze.
Un algoritmo che determina una soluzione ottima per qualsiasi istanza del problema viene detto algoritmo *esatto*.

Possono esistere diversi algoritmi per risolvere istanze dello stesso problema.
Poiché gli algoritmi esatti possono avere complessità troppo elevata, in generale si è interessati ad ottenere buone soluzioni, quindi il problema si riduce nel determinare una qualsiasi *soluzione ammissibile*.

Modelli

Molti problemi di interesse pratico si prestano ad essere descritti e risolti come *modelli di programmazione matematica*.

Modello: descrizione di un problema che richiede di massimizzare oppure minimizzare la funzione di costo o profitto su un certo dominio.

Generalmente viene scritto come:

$$\max\ z = f(x) \qquad \text{Oppure:} \qquad \min\ z = f(x)$$

Soggetto a

$$g_i(x) \begin{cases} \leq\ b_i \\ =\ b_i \\ \geq\ b_i \end{cases} \qquad i = 1, \dots, m \qquad \text{(vincoli)}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n \qquad \text{(dominio)}$$

In un modello sono presenti:

- *Variabili di controllo* in funzione delle quali viene formulato ogni altro elemento del modello; queste corrispondono alle quantità;
- *Funzione obiettivo* $f(x)$ che determina un costo o profitto legato alla soluzione;
- Una o più serie di *vincoli*, che correlano tra loro i valori delle variabili, imponendo condizioni e/o requisiti particolari.

Hanno particolare rilievo i modelli di *programmazione lineare*, nei quali $f(x)$ e $g_i(x)$ sono espressioni *lineari*.

Questi ultimi sono esprimibili come:

$$\max \qquad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Soggetto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{cases} \leq\ b_i \\ = b_i \\ \geq b_i \end{cases} \qquad i = 1, \dots, m \qquad \text{(vincoli)}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n \qquad \text{(dominio)}$$

I campi di esistenza delle variabili x_i sono di tipo continuo oppure intero non negativo ($x_j \in \mathbb{Z}_+$) oppure binario($x_j \in \{0, 1\}$).

Lo sviluppo di un modello di programmazione lineare parte dall'analisi di una situazione reale e richiede di identificare le variabili di controllo ed i rispettivi domini, vincoli e la funzione obiettivo.

Tipi di soluzione.

Le variabili di controllo determinano la struttura della soluzione di un problema, permettendone la realizzazione.
Bisogna quindi definire le variabili $x_1, x_2, x_3, \dots$

A volte può non essere evidente quale sia la scelta migliore per le variabili decisionali.

Regola pratica: Una definizione di variabili è soddisfacente quando permette di scrivere in modo semplice la funzione obiettivo.

Altre volte è necessario l'utilizzo di una variabile con due indici (ovvero x_{ij}) in quanto occorre tenere assieme le due componenti che sono interessate dalla variabile decisionale del problema.

In alcuni problemi l'obiettivo specificato impone la necessità di scrivere un programma di min/max o max/min con una funzione obiettivo del tipo:

$$max_j \left\{ c \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \right\}$$

Tale espressione però *non è lineare* e quindi proibita.
Per conservare la linearità del modello, occorre introdurre una variabile ausiliaria ed una serie di vincoli come segue:

$$\min y$$

$$\dots vari\ vincoli \dots$$

$$c \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \le y \qquad j = 1, \dots, m$$

$$\dots dominio \dots \quad y \ge 0$$

Esistono anche problemi in cui si modella un tipo di decisione puramente *binaria*.
In questo caso è possibile inserire nel programma variabili binarie, cioè interi con valori limitati all'insieme $\{0, 1\}$.

In caso di decisione affermativa $variabile = 1$, altrimenti $variabile = 0$.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & se \dots \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

I vincoli vengono poi rappresentati in forma compatta come (ad esempio):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1 \qquad \forall i$$

Un ultimo caso è quello dei problemi con vincoli logici, in cui è necessario modellare proposizioni logiche con variabili binarie.
La "trasformazione" da proposizione logica a equazione lineare con vincolo binario avviene come segue:

$x_1 \vee x_2$	$x_1 + x_2 \geq 1$
$x_1 \vee \neg x_2$	$x_1 + (1 - x_2) \geq 1$ $x_1 - x_2 \geq 0$
$x_1 \rightarrow y$	$x \leq y$
$x_1 \wedge x_2 \rightarrow y$	$x_1 + x_2 - 1 \leq y$
$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k \rightarrow y$	$\sum_{i=1}^{k} x_i - (k-1) \leq y$
$x_1 \vee x_2 \rightarrow y$	$x_1 + x_2 \leq 2y$
$x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k \rightarrow y$	$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq ky$ oppure: $x_i \leq y \quad i = 1, \dots, k$

Ci sono esercizi in cui si mettono in relazione due livelli decisionali differenti (solitamente variabili binarie e variabili di altro tipo).
La tecnica del **Big-M** ci permette di scrivere in modo lineare la relazione logica tra i due livelli decisionali.
Si definisce quindi una costante M estremamente grande da utilizzare all'interno del modello per definire variabili non vincolate.