Sia $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$n \longmapsto -2n^2$

$\boxed{F}$ iniettiva ? $f(1) = f(-1) = -2$

$\boxed{F}$ suriettiva ? $\nexists n$ t.c. $f(n) = 3$

$\boxed{V}$ ha immagine contenuta in $\mathbb{Z}$? $\forall n \; f(n) \in \mathbb{Z}$

$\boxed{V}$ $\underbrace{f(n) = f(-n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}}$?

osservazione: se $f(n) = f(-n)$ allora f non iniettiva

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$r \longmapsto \langle r^2, r \rangle$

$\boxed{V}$ iniettiva ?

$\boxed{F}$ suriettiva ? $\nexists r \in \mathbb{R}$ t.c. $f(r) = \langle -1, 0 \rangle$

$\boxed{V}$ ha immagine contenuta in $\{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\} \times \mathbb{R}$?

$\boxed{F}$ $f(r) = f(-r) \quad \forall r \in \mathbb{R}$?

Quale delle seguenti affermazioni è vera ?

$\boxed{F}$ Se A finito allora $\underbrace{A^{<\mathbb{N}}}$ è finito

infinito a prescindere dalla cardinalità di A

$\boxed{F}$ Se A infinito allora $A^{<\mathbb{N}}$ è $\underbrace{\text{numerabile}}$

sse A numerabile

$\boxed{F}$ Se $\exists f : A \to B$ suriettiva , allora $\underbrace{|A| \leq |B|}$

$|B| \leq |A|$

$\boxed{V}$ $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$ (infatti : $|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$)

A numerabile $\Longleftrightarrow |A| = |\mathbb{N}|$

A più che numerabile $\Longleftrightarrow |A| > |\mathbb{N}|$

$\Longleftrightarrow$ A infinito non numerabile

Siano A, B insiemi infiniti

$\boxed{F}$ $A \cap B$ è infinito

$\boxed{V}$ $A \cup B$ è infinito

$\boxed{F}$ Se A più che numerabile e $B \subseteq A$ allora B è più che numerabile ?

$\boxed{F}$ Se A è numerabile e $B \subseteq A$ allora $|B| = |\mathbb{N}|$

NON PER FORZA

Esercizio

Sia $L = \{R\}$ con R simbolo di relazione binaria.
Trovare un enunciato φ nel linguaggio L tale che
$(\mathbb{Z}, <) \models \varphi$ ma $(\mathbb{N}, <) \not\models \varphi$

$$\forall y \exists x (R(x,y))$$

Sia $L = \{R\}$ come sopra.
Trovare un L-enunciato φ tale che
$(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$ ma $(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi$

$$\forall x \forall y (R(x,y) \longrightarrow \exists z (R(x,y) \wedge R(z,y)))$$

Sia $L = \{R\}$ come sopra.
Trovare un L-enunciato φ tale che
$(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$ ma $(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi$

<u>NON ESISTE</u>

<u>Definizione</u> Sia φ un L-enunciato. Diciamo:

(1) φ è soddisfacibile se $\exists$ una L-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \varphi$

(2) φ è valido se $\forall$ L-struttura $\mathcal{A}$ vale $\mathcal{A} \models \varphi$

Osservazione

$\neg\varphi$ è soddisfacibile $\iff$ φ non è valido

Dunque "φ soddisfacibile ma non valido" vi sta chiedendo:

1) trova $\mathcal{A}$ t.c. $\mathcal{A} \models \varphi$
2) trova $\mathcal{B}$ t.c. $\mathcal{B} \models \neg\varphi$

Esercizio 22

$L = \{f\}$. f simbolo di funzione unario.

Sia φ l'enunciato $\forall x \forall y \, (f(x) = f(y) \to x = y) \wedge$
$\wedge \exists z \neg \exists x \, (f(x) = z)$

(1) Dimostrare che φ soddisfacibile ma non valido.

sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \mapsto x+1$

- $\forall x \forall y \, (f(x) = f(y) \to x = y)$ vero perché

$$f(x) = x+1 = f(y) = y+1$$
$$\iff x = y$$

- $\exists z \neg \exists x \, (f(x) = z)$

ponendo $z = 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{N}$ t.c. $f(x) = x+1 = 0$

$\Rightarrow$ soddisfacibile

Sia $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$x \mapsto x$

dimostriamo che φ non è valido

- la prima parte OK (come sopra)
- Per assurdo: $\exists z \neg \exists x \, (f(x) = z)$ ma $x = z$

  Quindi se $\exists z \Rightarrow \exists x$ ASSURDO

  perché per hp $\neg \exists x$ t.c. $id(x) = x$