Esercizio 1
Dimostrare che per ogni $n > 0$

$$P(n): \quad \sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Caso base: $n=1$

$$\sum_{i=1}^{1}(3i-2) = 3-2 = 1$$

$$\frac{1(3-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{OK}$$

Suppongo che valga $P(n)$
$\Rightarrow$ Passo induttivo: $P(n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(3i-2) = \boxed{\sum_{i=1}^{n}(3i-2)} + 3\cdot(n+1)-2$$

PASSO INDUTTIVO

$$= \boxed{\frac{n(3n-1)}{2}} + 3n+3-2$$

$$= \frac{n(3n-1)+2(3n+1)}{2}$$

$$= \frac{3n^2+5n+2}{2}$$

$$\frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} =$$

$$= \frac{3n^2+5n+2}{2} \quad \text{OK}$$

=

Esercizio 2

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

$$P(1): \sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 2$$

$$\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{OK}$$

Suppongo che valga $P(n)$

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} i(i+1)} + (n+1)(n+2)$$

PASSO INDUTTIVO

$$= \boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$\frac{(n+1)[(n+1)+1][(n+1)+2]}{3} \quad \text{OK}$$

Esercizio 3
Dimostrare che per ogni $n \geq 0$

$$P(n): \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$P(1): \quad \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1$$

$$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Suppongo che valga $P(n)$

$$P(n+1): \quad \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2} + (n+1)^2$$

PASSO INDUTTIVO

$$= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$=$

OK

Esercizio 4
Dimostrare che per ogni $n \neq 0$

$$P(n): \quad n^3 - n \text{ è divisibile per } 3.$$

Base induttiva: $n=1$

$P(1): \quad 1^3 - 1 = 0 \qquad 3 \mid 0$ ok

Suppongo che valga $P(n)$

$$P(n+1): \quad (n+1)^3 - (n+1) =$$

$$= n^3 + 1 + 3n^2 + 3n - n - 1 =$$

$$= n^3 - n + 3n^2 + 3n =$$

$$= \underbrace{(n^3 - n)}_{\substack{\text{divis. x } 3 \\ \text{per hp}}} + \underbrace{3(n^2 + n)}_{\text{divisibile x } 3} \qquad \text{ok}$$

Esercizio 5
Dimostrare che per ogni numero naturale n

$$P(n): \quad n(n+1) \text{ è divisibile per } 2.$$

Base induttiva: $n=0$

$P(0): \quad 0 \cdot (0+1) = 0 \qquad 2 \mid 0$ ok

Suppongo che valga $P(n)$

$$P(n+1): \quad (n+1)(n+2) =$$

$$\underbrace{n(n+1)}_{\text{divisibile per 2 (per hp)}} + \underbrace{2(n+1)}_{\text{divisibile} \times 2} \qquad \text{OK}$$

Esercizio 6
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \quad n(n+1)(n+2) \text{ è divisibile per } 3.$$

Base induttiva : $n=0$

$P(0) = 0 \longrightarrow 3|0$ OK

hp: vale $P(n)$

$P(n+1)$: $(n+1)(n+2)(n+3)$

$$\underbrace{n(n+1)(n+2)}_{\text{OK per hp}} + \underbrace{3(n+1)(n+2)}_{\text{OK}}$$

Esercizio 7
Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$P(n): \quad (k+1)^n - 1 \text{ è divisibile per } k,$$

dove $k \geq 2$.

$P(1) = (k+1)^1 - 1 = k$ OK

hp: vale $P(n)$

$P(n+1)$: $(k+1)^{n+1} - 1 =$

$= (k+1)^n (k+1) - 1 =$

$$= \underbrace{k(k+1)^n}_{\text{OK}} + \underbrace{1(k+1)^n - 1}_{\text{OK per hp.}}$$

Esercizio 8
Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Base induttiva : $n=1$
$P(1)$: $1! \geq 2^{1-1} = 1$ OK

hp : vale $P(n)$
$P(n+1)$: $(n+1)! \geq 2^{(n+1)-1}$

$$(n+1) \cdot \underline{n!} \geq \underline{2^{n-1}} \cdot 2$$

vero per hp. induttiva

$(n+1) \geq 2$ vero perché $n \geq 1$

Esercizio 9
Dimostrare che per ogni $n \geq 4$

$$P(n): \; n! > 2^n.$$

Base : $n=4$
$P(4)$: $4! = 24 > 2^4 = 16$ OK

hp: $P(n)$ vale
$P(n+1)$: $(n+1)! > 2^{n+1}$

$$\iff (n+1)\underline{n!} > \underline{2^n} \cdot 2$$

vero per hp

$\implies n+1 > 2$ vero perché $n \geq 4$

Esercizio 10
Dimostrare che per ogni $n \geq 3$

$$P(n):\ n^2 > 2n + 1.$$

Base induttiva: $n=3$

$P(3)$: $3^2 = 9 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$ ok

hp: vale $P(n)$

$\Rightarrow P(n+1)$: $(n+1)^2 > 2n+2$

$$\Rightarrow (n+1)^2 > 2 \cdot (n+1)$$

$$\Rightarrow n^2 + 2n + 2 > 2n + 2$$

vero $\forall n \geq 3$