SCHEMA

Sia A un insieme non vuoto

(1) Se A e' finito, allora $|A^{<\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}|$

(2) se A e' infinito, allora $|A^{<\mathbb{N}}| = |A|$

Riguardo $A^{\mathbb{N}}$

(1) Se $|A| = 1$, allora $|A^{\mathbb{N}}| = 1$

(2) $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Dato una proprietà P, se vale $P(0)$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, vale $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Allora $\forall k \in \mathbb{N}$ vale $P(k)$

Base: $P(0)$ oppure >0

Passo induttivo:
- Ipotesi $P(n)$
- Tesi $P(n+1)$

Es. $\forall n > 0$ vale $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$P(1)$: $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ OK

$P(n+1)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 =$$

$$= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} + n^2+2n+1$$

$$= \frac{2n^3+2n^2+n^2+n+6n^2+12n+6}{6}$$

$$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} =$$

$$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} \quad \text{ok}$$

Es Per ogni $n \in \mathbb{N}$

$P(n)$: $n^3 - n$ e' divisibile per 3

Base: $P(0) = 0^3 - 0 = 0$ divisibile per 3 ok

n e' divisibile per k se $\exists \ell$ t.c. $n = k\ell$

$P(n+1) = (n+1)^3 - (n+1)$ div. per 3 ?

$$(n+1)^3 - n - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n - \cancel{1} =$$

$$= n^3 + 3n^2 + 2n =$$

$$= \underbrace{(n^3 - n)}_{\substack{\text{div per 3} \\ \text{(per ipotesi)}}} + \underbrace{3(n^2+1)}_{\text{div. per 3}} \quad \text{OK}$$

<u>Es.</u> $\forall n \geq 4 \qquad 2^n < n!$

PROMEMORIA $\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$

$P(4)$: $\qquad 2^4 = 16 < 4! = 24!$

$P(n+1)$: $\qquad 2^{n+1} = \underline{2^n \cdot 2} < (n+1)! = \underline{(n+1) \cdot n!}$

so che $\quad 2 \cdot 2^n < n! \cdot 2$

ma $\quad 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! \quad$ perche $n \geq 4$

$\Longrightarrow \qquad 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 < 2 \cdot n! < (n+1)!$