Sintassi

- Variabili $\{v_0, v_1, \dots\}$

arietà

- Linguaggio = insieme di simboli $\{R, \dots, f, \dots, c, \dots\}$

→ formiamo i termini : costanti,
variabili,
$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$

ad esempio:

- x^2+1
- $f(x,y)$

} sono solo oggetti, non sono né veri né falsi

→ formule atomiche: $(t_1 = t_2)$, $R(t_1, \dots, t_n)$ } ha senso chiedersi se è vero o falso

- Se φ è una formula, allora $(\neg\varphi)$ lo è
- Se φ e ψ sono formule, allora $(\varphi \wedge \psi)$ lo è
- Se φ è formula e x variabile, allora $(\exists x \varphi)$ e $(\forall x \varphi)$ lo sono

Se ho qualcosa della forma: $\exists \underset{\uparrow}{x} (\dots\dots \underset{\uparrow}{x} \dots\dots)$

vincolata vincolata

invece se: $\exists \underset{\uparrow}{x} (\dots\dots y \dots)$

vincolata ↖ libera

Esempio

$$\Big(\underbrace{(\forall z (P(z,z)))}_{z \text{ vincolata}} \wedge \exists x (\forall y \underbrace{(P(x,y) \to P(z,y))}_{x,y \text{ vincolata},\ z \text{ libera}})\Big)$$

Esercizio 4 Determinare le occorrenze libere e vincolate nelle seguenti formule:

$$\exists \underset{V}{x}\, P(\underset{V}{x}) \longrightarrow \forall \underset{V}{z}\, (f(\underset{V}{z}) = \underset{L}{x} \vee \neg R(\underset{L}{x}, \underset{V}{z}))$$

$$\exists \underset{V}{x}\, \forall \underset{V}{z}\, R(\underset{V}{x}, \underset{V}{z}) \longrightarrow \forall \underset{V}{z}\, \exists \underset{V}{x}\, R(\underset{V}{x}, \underset{V}{z})$$

tutte vincolate $\Rightarrow$ ENUNCIATO

oppure se non ci sono variabili (es. $f(c)=d$)

Semantica

- Linguaggio: $L = \{R, f, c\}$
- Struttura: $\mathcal{A} = \{\underbrace{A}_{\text{universo}}, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}\}$

universo = insieme non vuoto

Se R è un simbolo di relazione con arietà 2 allora $R^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$

Se f è un simbolo di funzione con arietà 3 allora $f^{\mathcal{A}}: A^3 \longrightarrow A$

Se c è un simbolo di costante: $c^{\mathcal{A}} \in A$

Esempio $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, <, +, 0)$

$$R^{\mathcal{A}} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x<y\}$$

$$f^{\mathcal{A}}(x,y) = x+y$$

$$c^{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}$$

Sia L un linguaggio, sia $\mathcal{A}$ una L-struttura, si può definire

$$\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/n]$$

soddisfa

sostituisco in φ a_1 in x_1 (etc)

Se t è un termine, $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/n] \in A$

Esempio

$$\varphi: \quad \exists x(R(x,y))[\boxed{\cancel{x/2}}, y/3]$$

x è una variabile vincolata quindi non posso assegnargli un valore

$\hookrightarrow \quad \exists x \in A : x<3$

Es. $\quad L = \{R\} \qquad \mathcal{A} = (\mathbb{N}, <)$

$$\mathcal{A} \models \exists x(R(x,y))[x/5, y/3] \ ?$$

Vero $\iff \exists x \in \mathbb{N}$ t.c. $x<3$ $\quad$ sì

Esercizio 2 $\quad L = \{P, f, g, c\}$

P: simbolo di relazione binaria

f, g: simboli di funzione binaria

c: simbolo di costante

Sia $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, <, +, \cdot, 1)$

Sia φ la formula $P(g(x,x), f(y,c))$

Sia ψ la formula $(f(x,x) = g(y,c))$

Determinare se $\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/1]$

" " $\mathcal{A} \models \psi[x/2, y/1]$

φ: $x^2 < y + 1 \iff 4 < 2$ NO

ψ: $2x = y \cdot 1 \iff 4 = 1$ NO

Esercizio 7 $\quad L = \{P, f, c\}$

φ: $\forall x \forall y (P(c,y) \wedge f(x,x) = y \rightarrow P(x,y))$

$(\mathbb{Z}, <, +, -1) \models \varphi$

φ: $\forall x \forall y \quad -1 < y \wedge 2x = y \rightarrow x < y$

vera $\iff \forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}$

se $-1 < y$ e $2x = y \Rightarrow x < y$

FALSA

Esercizio 16

$L = \{ f, c \}$

Trovare un enunciato φ tale che

$$(\mathbb{N}, +, 0) \models \varphi \quad \text{e} \quad (\mathbb{N}, \cdot, 1) \not\models \varphi$$

$$\varphi: \quad \forall x \, \exists y \, \neg(f(x,y) = x)$$

$\forall x \in \mathbb{N} \ \exists y \in \mathbb{N}$ t.c. $x + y \neq x$ vero

$\forall x \in \mathbb{N} \ \exists y \in \mathbb{N}$ t.c. $xy \neq x$ falso per $x = 0$