Esercizi per il corso di Logica

Anno accademico 2022-23

Capitolo 1

Esercizio 1
Costruire la tavola di verità delle seguenti proposizioni:

- $(A \to A) \to A$
- $A \to (A \to A)$
- $A \vee B \to A \wedge B$
- $A \vee (B \wedge C) \to (A \wedge C) \vee D$
- $(A \vee B) \wedge C \to A \wedge (C \vee D)$
- $A \to (B \to A)$.

Esercizio 2
Calcolare le tavole di verità delle proposizioni seguenti:

- $\neg(A \leftrightarrow C) \vee A$
- $C \to (\neg A \vee \neg C)$
- $(A \vee \neg(B \to C)) \wedge (\neg C \vee B)$
- $A \wedge \neg(A \to \neg(\neg A \vee A))$
- $(A \wedge B) \wedge (A \vee B) \wedge (A \to B)$

Esercizio 3
Dimostrare la validità delle seguenti leggi logiche:

legge dell'identità: $A \to A$

legge della doppia negazione: $A \leftrightarrow \neg\neg A$

commutatività di $\wedge$: $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

associatività di $\wedge$: $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

commutatività di $\vee$: $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

associatività di $\vee$: $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

idempotenza di $\wedge$: $A \wedge A \leftrightarrow A$

idempotenza di $\vee$: $A \vee A \leftrightarrow A$

eliminazione di $\wedge$: $A \wedge B \to A$

introduzione di $\vee$: $\mathrm{A} \to \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$

distributività: $\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C})$

distributività: $\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \leftrightarrow (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{C})$

legge di assorbimento: $\mathrm{A} \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \leftrightarrow \mathrm{A}$

legge di assorbimento: $\mathrm{A} \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \mathrm{A}$

legge di De Morgan: $\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow (\neg \mathrm{A} \vee \neg \mathrm{B})$

legge di De Morgan: $\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \leftrightarrow (\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$

legge del terzo escluso: $\neg \mathrm{A} \vee \mathrm{A}$

legge di non contraddizione: $\neg(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{A})$

legge di contrapposizione: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \leftrightarrow \neg \mathrm{B} \to \neg \mathrm{A}$

legge di Lewis, o *ex falso quodlibet*: $\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{A} \to \mathrm{B}$

affermazione del conseguente: $\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$

negazione dell'antecedente: $\neg \mathrm{A} \to (\mathrm{A} \to \mathrm{B})$

legge di riduzione all'assurdo: $(\mathrm{A} \to \mathrm{B} \wedge \neg \mathrm{B}) \to \neg \mathrm{A}$

riduzione all'assurdo debole: $(\mathrm{A} \to \neg \mathrm{A}) \to \neg \mathrm{A}$

***consequentia mirabilis*:** $(\neg \mathrm{A} \to \mathrm{A}) \to \mathrm{A}$

legge di Peirce: $((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to \mathrm{A}) \to \mathrm{A}$

legge di Dummett: $(A \to B) \vee (B \to A)$

***modus ponens*:** $\mathrm{A} \to ((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to \mathrm{B})$

scambio antecedenti: $\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}) \leftrightarrow \mathrm{B} \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C})$

distinzione di casi: $(\mathrm{A} \to \mathrm{C}) \wedge (\mathrm{B} \to \mathrm{C}) \leftrightarrow \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \to \mathrm{C}$

distinzione di casi: $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge (\neg \mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to \mathrm{B}$

distributività di $\to$: $(\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})) \to ((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C}))$

transitività di $\to$: $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \to \mathrm{C}) \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C})$

importazione delle premesse: $\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}) \leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \to \mathrm{C}$

Esercizio 4

Indicare per ciascuna delle seguenti righe se vale la relazione di conseguenza logica indicata, motivando la risposta con la corrispondente tavola di verità:

1. $\neg \mathrm{A} \vee \neg \mathrm{B} \models \neg \mathrm{A} \to \neg \mathrm{B}$
2. $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \models \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$
3. $\neg \mathrm{B} \to \neg \mathrm{A} \models \neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$
4. $\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B} \models \neg \mathrm{A} \to \neg \mathrm{B}$
5. $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \models \mathrm{A}$
6. $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \models \mathrm{B}$

Esercizio 5

Verificare che $\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C})$ e $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C})$ sono logicamente equivalenti, ovvero hanno le medesime tavole di verità.

Esercizio 6
Indicare per ciascuna delle seguenti righe se vale la relazione di equivalenza logica indicata, motivando la risposta con la corrispondente tavola di verità:

1. $\neg A \wedge \neg B \equiv \neg A \to \neg B$
2. $A \to B \equiv \neg A \vee B$
3. $\neg B \to \neg A \equiv \neg A \vee B$
4. $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$
5. $A \to B \equiv B \to A$
6. $(A \to B) \to C \equiv A \to (B \to C)$

Esercizio 7
Verificare che
$$(A \to B) \to (B \to A)$$
non è una tautologia. È soddisfacibile?

Esercizio 8
Dimostrare che
$$\models (A \leftrightarrow B) \vee (\neg A \leftrightarrow B).$$

Esercizio 9
Dimostrare che la proposizione
$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \to (\neg B \wedge C)) \wedge \neg B \wedge (C \to (A \wedge \neg A))$$
è una contraddizione.

Esercizio 10
Dimostrare che la proposizione
$$((A \wedge B) \to C) \wedge (C \to \neg A)$$
è soddisfacibile.

Esercizio 11
La formula $(\neg A \vee B) \to (A \wedge B)$ è soddisfacibile? È una tautologia o una contraddizione?

Capitolo 2

Esercizio 1
Si assuma qui di seguito che A, B, C siano sottoinsiemi dell'universo $\mathcal{U}$. Dimostrare la validità delle seguenti leggi:

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associatività),
2. $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$ (commutatività),
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributività),
4. $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \mathcal{U} = A$,
5. $A \cup \complement A = \mathcal{U}$ e $A \cap \complement A = \emptyset$,
6. $A \cap A = A$ e $A \cup A = A$ (idempotenza),
7. $A \cup (A \cap B) = A$ e $A \cap (A \cup B) = A$ (assorbimento).

Esercizio 2
Per ciascuna delle seguenti equazioni, trovare una dimostrazione per quelle vere ed un controesempio per quelle false:

1. $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$,
2. $(X \setminus Y) \cap (Y \setminus X) = \emptyset$,
3. $X \times \emptyset = \emptyset$,
4. $\complement X \times \complement Y = \complement(X \times Y)$
5. $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$,
6. $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$,
7. $X \cap (Y \times Z) = (X \cap Y) \times (X \cap Z)$.

Esercizio 3
Descrivere $\mathscr{P}(A)$ dove $A = \{0, 1, 2\}$.

Esercizio 4
Descrivere $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$ con $A = \{1\}$.

Esercizio 5
Dimostrare che $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Esercizio 6
Dimostrare che $(A \cup B) \setminus A = B \setminus (A \cap B)$.

Esercizio 7
Definiamo $\preceq$ su $\mathbb{N}$ come

$$n \preceq m \text{ se e solo se } m = nk, \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che $\preceq$ è un ordine non totale su $\mathbb{N}$ che ha minimo e massimo.

Esercizio 8
Siano R ed S relazioni binarie su un insieme X. Per le seguenti affermazioni, trovare una dimostrazione per quelle vere ed un controesempio per quelle false:

1. se R e S sono transitive, anche $R \cup S$, $R \cap S$, $R \circ S$, R^{-1}, $R \circ R$, $\complement R$ sono transitive
2. se R e S sono simmetriche, anche $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1}, $\complement R$ sono simmetriche.

Esercizio 9
Dimostrare che la funzione "moltiplicazione"

$$f \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \qquad (n, m) \mapsto n \cdot m$$

è suriettiva ma non iniettiva.

Esercizio 10
Dimostrare che la funzione

$$f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto 2^n$$

è iniettiva ma non suriettiva.

Esercizio 11
Siano $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$ e $\mathbb{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è dispari}\}$. Dimostrare che

$$f \colon \mathbb{P} \to \mathbb{D}, \qquad n \mapsto n + 1$$

è una biezione.

Esercizio 12
Siano $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$ e $\mathbb{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è dispari}\}$. Dimostrare che la funzione

$$f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{P}, \qquad n \mapsto n + 1$$

è iniettiva ma non suriettiva.

Esercizio 13
Dimostrare che

$$f \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \qquad (n, m) \mapsto 2^n(2m + 1) - 1$$

è una biezione.

Suggerimento. Utilizzare il fatto che ogni $k > 0$ si scrive *in maniera unica* come $2^n(2m + 1)$. Infatti, se $n \in \mathbb{N}$ è massimo tale che $2^n \mid k$, allora $k = 2^n \cdot l$ con l dispari, per cui $l = 2m + 1$ per qualche $m \in \mathbb{N}$.

Esercizio 14
Sia $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ l'insieme di tutte le tuple di numeri naturali (di lunghezza arbitraria). Dimostrare che la funzione

$$f \colon \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \qquad (k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) \mapsto (k_0, k_0, k_1, k_1, \dots, k_{n-1}, k_{n-1})$$

è iniettiva ma non suriettiva.

Esercizio 15
Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se sono iniettive, suriettive, biettive o nessuna delle tre:

- $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 1 + x^2 - x$
- $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \qquad z \mapsto |z|$

- $f\colon A \to \mathbb{N}$, dove A è l'insieme di tutte le persone viventi e per ogni $a \in A$
$$f(a) = \text{l'età di } a.$$
- $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (n, m) \mapsto n \cdot m$
- $f\colon P \to \mathbb{N}$, dove P è l'insieme di tutti i programmi che si possono scrivere in C^{++} e per ogni $p \in P$
$$f(p) = \text{il numero di righe di comando contenute in } p.$$

Esercizio 16
Determinare per quali insiemi A si ha che la funzione $f\colon \mathscr{P}(A) \to \mathbb{N}$ definita da
$$f(B) = \text{il numero di elementi di } B$$
è iniettiva. Per quali A la funzione f è suriettiva? È possibile trovare un A per cui f sia una biezione?

Esercizio 17
Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}$. Spiegare perché da questo segue anche $[a; b] \approx [a; b]^n$ e $(a; b) \approx (a; b)^n$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$.

Esercizio 18
Dimostrare che se Y è un insieme infinito e X è tale che $|X| \leq |Y|$, allora
$$|X \cup Y| = |X \times Y| = |Y|.$$

Suggerimento. Utilizzare il fatto che, essendo Y infinito, si ha $|Y \times Y| = |Y|$.

Esercizio 19
Dimostrare che date due circonferenze C_1, C_2 si ha $|C_1| = |C_2|$ e che $|C_1| = |\mathbb{R}|$.

Esercizio 20
Sia $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'insieme di tutte le funzioni $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

1. Dimostrare che la funzione
$$F\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \qquad f \mapsto \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = f(n)\}$$
è iniettiva.
2. Utilizzando quanto visto a lezione, dimostrare che
$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|.$$

Esercizio 21
Dimostrare che gli insiemi
$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è iniettiva}\}$$
e
$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è suriettiva}\}$$
sono in biezione con $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Concludere che anche l'insieme
$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è biettiva}\}$$
ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Esercizio 22
Dimostrare che l'insieme di tutte le rette nel piano cartesiano è in biezione con $\mathbb{R}$.

Esercizio 23
Dimostrare che l'insieme delle sequenze binarie finite (ovvero l'insieme di tutte le sequenze finite di 0 e 1) è un insieme numerabile.

Esercizio 24
Più in generale, dimostrare che se X è finito o numerabile, allora $X^{<\mathbb{N}}$ è numerabile.

Esercizio 25
Sia X un insieme non vuoto. Una sequenza $s = \langle s_0, \ldots, s_n \rangle \in X^{<\mathbb{N}}$ *contiene ripetizioni* se in s c'è almeno un elemento ripetuto due volte, ovvero se esistono $0 \leq i < j \leq n$ tali che $s_i = s_j$. Se ciò non accade diciamo che s è *senza ripetizioni*.

1. Dimostrare che per ogni insieme X infinito, l'insieme

$$\{s \in X^{<\mathbb{N}} \mid s \text{ è senza ripetizioni}\}$$

   è un insieme infinito.
2. Dimostrare anche che se X è numerabile, allora anche l'insieme delle sequenze senza ripetizioni lo è.
3. Dimostrare che se invece X è finito, allora l'insieme delle sequenze $s \in X^{<\mathbb{N}}$ senza ripetizioni è un insieme finito. (Facoltativo: quanti elementi ha?)
4. Dimostrare che per ogni insieme X non vuoto, l'insieme

$$\{s \in X^{<\mathbb{N}} \mid s \text{ contiene ripetizioni}\}$$

   è un insieme infinito, e che se X è numerabile allora anche l'insieme delle sequenze contenenti ripetizioni lo è.

Esercizio 26
Dimostrare che l'insieme di tutti i programmi che si possono scrivere in un dato linguaggio di programmazione è numerabile.

Capitolo 3

Esercizio 1
Dimostrare che per ogni $n > 0$

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Esercizio 2
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Esercizio 3
Dimostrare che per ogni $n \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 4
Dimostrare che per ogni $n \neq 0$

$$n^3 - n \text{ è divisibile per } 3.$$

Esercizio 5
Dimostrare che per ogni numero naturale n

$$n(n+1) \text{ è divisibile per } 2.$$

Esercizio 6
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$n(n+1)(n+2) \text{ è divisibile per } 3.$$

Esercizio 7
Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$(k+1)^n - 1 \text{ è divisibile per } k,$$

dove $k \geq 2$.

Esercizio 8
Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Esercizio 9
Dimostrare che per ogni $n \geq 4$

$$n! > 2^n.$$

Esercizio 10
Dimostrare che per ogni $n \geq 3$
$$n^2 > 2n + 1.$$

Esercizio 11
Dimostrare che per ogni $n \geq 5$
$$2^n > n^2.$$

Esercizio 12
Dimostrare per induzione che la funzione definita dalle clausole:
$$\begin{cases} f(0, y, z) = z \cdot y \\ f(x + 1, y, z) = z + f(x, y, z) \end{cases}$$
è tale che per ogni $x, y, z \in \mathbb{N}$:
$$f(x, y, z) = z \cdot (x + y)$$

Esercizio 13
Dimostrare per induzione che la funzione definita dalle clausole:
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n + 1) = f(n) + f(n) \end{cases}$$
è tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$:
$$f(n) = 2^n.$$

Esercizio 14
Dimostrare per induzione che la funzione definita dalle clausole:
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n + 1) = (n + 1) + f(n) \end{cases}$$
è tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$:
$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} i$$

Esercizio 15
Sia $s_1, \ldots, s_n$, dove $n > 2$, una sequenza di interi dove s_1 è positivo, s_n è negativo e per ogni i, se $1 \leq i < n$, $s_{i+1} = s_i - 1$ o $s_{i+1} = s_i + 1$. Si dimostri che esiste i, con $1 < i < n$, tale che $s_i = 0$.

Esercizio 16
Si definisca, per $n > 0$, la notazione a^n per induzione su n, come segue:
$$a^1 = a$$
$$a^{k+1} = a^k \cdot a$$
dove a è un elemento di $\mathbb{Z}$ e $\cdot$ indica l'operazione di moltiplicazione. Dimostrare che per ogni $n, m > 0$ valgono le seguenti uguaglianze:

- $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$.

Esercizio 17
Si consideri la dimostrazione del seguente principio combinatorio:

Se M è un insieme con m elementi ed N è un insieme con n elementi, se $m > n$ ed $f\colon M \to N$ è una funzione, allora esistono elementi distinti $a, a' \in M$ tali che $f(a) = f(a')$.

Dimostrazione. Per induzione sul numero di elementi di N. Dato un qualsiasi $b \in N$, si consideri l'insieme

$$f^{-1}(b) = \{x \in M \mid f(x) = b\}.$$

Se $f^{-1}(b)$ è vuoto o contiene un solo elemento di M, si applica l'ipotesi induttiva a $N \setminus \{b\}$. Altrimenti ci sono elementi distinti $a, a' \in f^{-1}(b)$, come si doveva dimostrare. □

- Descrivere con precisione la proprietà $P(n)$ di cui si dimostra per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$.
- Enunciare e dimostrare la base dell'induzione.
- Dimostrare in dettaglio il passo induttivo.

Esercizio 18
Dimostrare per induzione che la funzione definita dalle clausole:

$$\begin{cases} f(0, y, z) = z \times y \\ f(x+1, y, z) = z + f(x, y, z) \end{cases}$$

è tale che per ogni $x, y, z \in \mathbb{N}$

$$f(x, y, z) = (x + y) \times z.$$

Esercizio 19
Dimostrare per induzione che la funzione definita dalle clausole:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = f(n) + f(n) \end{cases}$$

è tale che per ogni $n \geq 0$

$$f(n) = 2^n.$$

Esercizio 20
Dimostrare per induzione che la funzione definita dalle clausole:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = (n+1) + f(n) \end{cases}$$

è tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} i.$$

Esercizio 21
Data la definizione ricorsiva

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(s(n)) = s(s(f(n))) \end{cases}$$

dove $s(n) = n + 1$, si dimostri che per ogni $n \geq 0$

$$f(n) = 2n.$$

Esercizio 22
Data la definizione ricorsiva

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(s(n)) = s(f(n)) \end{cases}$$

dove $s(n) = n + 1$, quale funzione viene definita? Dimostrare che la risposta fornita è corretta.

Esercizio 23
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = n^2$$

dove

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = f(n) + 2n + 1 \end{cases}$$

Esercizio 24
Dimostrare (mediante induzione forte) che ogni affrancatura da 4 centesimi o più può essere ottenuta usando solo francobolli da 2 e 5 centesimi.

Esercizio 25
Si assuma di avere n numeri, $a_1, \ldots, a_n$. Dimostrare mediante induzione forte che, in qualsiasi modo si inseriscano parentesi nel prodotto

$$a_1 \cdots a_n$$

sono necessarie $n - 1$ moltiplicazioni.

Esercizio 26
Cosa c'è di errato nella seguente "dimostrazione" che tutti i numeri naturali coincidono?

Dimostriamo per induzione su $n \geq 1$ che se $X \subseteq \mathbb{N}$ ha esattamente n elementi, allora $\forall x, y \in X\ (x = y)$.

Dimostrazione. Sia $P(n)$ la proprietà che asserisce: se $X \subseteq \mathbb{N}$ ha esattamente n elementi, allora $\forall x, y \in X\ (x = y)$.

Se $P(1)$ è banalmente vera: ogni insieme X contenente esattamente un elemento ha tutti gli elementi uguali.

Supponiamo valga $P(n)$ e sia $X \subseteq \mathbb{N}$ un insieme con $n+1$ elementi. Fissiamo $a, b \in X$ e siano $Y = X \setminus \{a\}$ e $Z = X \setminus \{b\}$. Gli insiemi Y e Z hanno esattamente n elementi quindi possiamo concludere che $\forall x, y \in Y\ (x = y)$ e $\forall x, y \in Z\ (x = y)$. Sia $c \in Y \cap Z = X \setminus \{a, b\}$ arbitrario. Dato che $b, c \in Y$ si ha che $b = c$ e dato che $a, c \in Z$ si ha che $a = c$, da cui $a = b = c$. Quindi $\forall x, y \in X(x = y)$ come richiesto, cioè $P(n+1)$. $\square$

Capitolo 4

Esercizio 1
Discutere se le seguenti stringhe sono proposizioni:

$(\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B})$

$(\mathrm{A})) \wedge \mathrm{B})$

$((\mathrm{A}) \wedge \mathrm{B})$

$((\mathrm{A}) \wedge (\neg(\mathrm{B})))$

$((\mathrm{A}) \rightarrow \wedge)$

A

$((\mathrm{A}))$.

Esercizio 2
Verificare quali delle seguenti stringhe sono proposizioni — secondo la definizione originaria — e quali no, costruendo l'albero sintattico e spiegando dove eventualmente la costruzione fallisce e per quale ragione:

$(\neg(\neg\mathrm{A}))$

$((\mathrm{A}) \rightarrow ((\mathrm{B}) \vee (\neg(\mathrm{C}))))$

$(\neg\neg((\mathrm{A}) \rightarrow (\mathrm{B})))$

$((((\mathrm{A}) \rightarrow (\mathrm{B})) \wedge (\mathrm{A})) \rightarrow (\mathrm{B}))$

$((\neg(\mathrm{A})) \wedge (\mathrm{B})) \vee (\mathrm{C}))$

$(((\neg(\mathrm{A})) \wedge (\mathrm{B})) \vee (\mathrm{C}))$

$((\mathrm{A}) \wedge (\mathrm{B}) \wedge (\mathrm{C}))$.

Esercizio 3
Dare ragioni per le seguenti proprietà:

- Ogni proposizione ha lunghezza maggiore o uguale a 3.
- In ogni proposizione non atomica occorre un connettivo.
- In nessuna proposizione occorrono due connettivi consecutivi.
- In nessuna proposizione occorre la sottosequenza (), né)A.
- In ogni proposizione la sua lunghezza (come lista) è maggiore della sua altezza.
- In ogni proposizione, ogni suo segmento iniziale proprio contiene più parentesi sinistre che destre.

Suggerimento. La dimostrazione di queste proprietà è per induzione sull'altezza delle proposizioni: si dimostrano prima per le proposizioni atomiche (A), quindi supponendo che valgano per proposizioni P, Q si dimostra che valgono anche per $(\neg\mathrm{P})$ e $(\mathrm{P}\Box\mathrm{Q})$ con $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Esercizio 4
Una misura di complessità delle proposizioni è una funzione

$$\mathrm{Prop}(L) \longrightarrow \mathbb{N}$$

che soddisfa la condizione che la misura di una proposizione è maggiore delle misure delle sue sottoproposizioni, e le proposizioni atomiche hanno tutte la stessa misura minima. Il numero (di occorrenze) dei connettivi è una misura di complessità, come lo sono la lunghezza (della stringa) e l'altezza (dell'albero sintattico).

Trovare la relazione tra il numero di occorrenze di connettivi e l'altezza.

Dimostrare con un controesempio che il numero di connettivi diversi non è una misura di complessità.

Esercizio 5
Eliminare le parentesi, applicando le convenzioni sulla priorità dei connettivi, dalle seguenti proposizioni:

$((\mathrm{A}) \wedge ((\neg(\mathrm{B})) \to (\neg(\mathrm{C}))))$

$((\neg(\neg(\neg(\mathrm{A})))) \vee ((\mathrm{A}) \wedge (\mathrm{B})))$

$(((\neg(\mathrm{A})) \vee (\neg(\mathrm{B}))) \wedge ((\neg(\mathrm{A})) \vee (\mathrm{B})))$

$(((\mathrm{A}) \wedge (\neg(\mathrm{B}))) \to ((\mathrm{A}) \vee (\neg(\mathrm{B}))))$.

Esercizio 6
Reintrodurre le parentesi nelle seguenti stringhe in modo da ottenere, se possibile, proposizioni, o se no spiegare il perché:

$\neg\neg\mathrm{A}$

$\neg\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \vee \mathrm{C}$

$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \vee \neg\mathrm{C}$

$(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge \mathrm{A} \to \mathrm{B}$

$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \wedge \mathrm{A} \to \mathrm{B}$

$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \wedge \mathrm{C} \to \neg\mathrm{A}$

$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \mathrm{C} \vee \neg\mathrm{C}$

$\mathrm{A} \wedge (\to \mathrm{C} \vee \mathrm{A})$

$\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B} \to \neg\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$

$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}$.

Esercizio 7
Costruire l'albero sintattico delle seguenti formule (in cui sono state omesse alcune parentesi secondo le convenzioni adottate).

$\neg\mathrm{A} \to \neg[(\mathrm{B} \leftrightarrow \neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{C})) \vee \neg\mathrm{A}]$

$(\mathrm{A} \leftrightarrow \neg\mathrm{B}) \to [\neg(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) \to \neg(\mathrm{C} \wedge \neg\mathrm{D})]$

Calcolare anche l'altezza di ciascun albero e l'altezza della formula a cui è associato.

Esercizio 8
Definire le proposizioni nel seguente modo:

- Ogni lettera A è una proposizione;
- se P è una proposizione, anche ¬(P) è una proposizione;

- se $\Box$ è un connettivo binario e P e Q sono proposizioni, anche $(P)\Box(Q)$ è una proposizione.

Definire il nuovo procedimento per decidere se una data stringa è una proposizione e costruire l'albero sintattico.

Discutere eventuali vantaggi e svantaggi della definizione alternativa.

Capitolo 5

Esercizio 1
Calcolare l'albero sintattico della formula

$$((\exists x(\forall y\,((P(x,y)) \to (Q(x))))) \to ((\forall z(R(z))) \vee (S(z)))).$$

Esercizio 2
Sia $L = \{P, Q, f, a, c\}$ un linguaggio del prim'ordine dove P è un simbolo di predicato binario, Q è un simbolo di predicato unario, f è un simbolo di funzione unario e a, c sono simboli di costante. Per ciascuna occorrenza di variabile nelle seguenti formule, dire se si tratta di un'occorrenza libera o vincolata. Per ciascuna formula, elencare le sue variabili libere e dire se si tratta di un enunciato oppure no.

- $((\forall z(P(z,z))) \wedge (\exists x(\forall y((P(x,y)) \to (P(z,y))))))$
- $(\exists x((\exists y(f(x) = y)) \vee ((f(y) = x) \leftrightarrow (P(x,y)))))$
- $((P(c,c)) \wedge (Q(a)))$
- $(\forall z(\exists y((P(y,x)) \vee (P(c,f(x))))))$
- $((P(z,x)) \to (\exists x(\forall y(P(z,x)))))$

Esercizio 3
Reintrodurre le parentesi nelle seguenti formule, dove P è un simbolo di relazione unario, R è un simbolo di relazione binario, f è un sibolo di funzione binario, g è un simbolo di funzione unario e a, b, c sono simboli di costante.

- $\exists x P(x) \to \forall z R(z,y) \wedge g(x) = f(x,y)$
- $P(x) \wedge \forall z \forall y R(g(z), f(z,y)) \leftrightarrow \neg\forall w(P(w) \wedge P(c))$
- $\forall x \exists y R(x,x) \to \forall z f(z) = a$
- $\forall x(\exists y R(x,x) \to \forall z f(z) = a)$
- $\forall x \exists y(R(x,x) \to \forall z f(z) = a)$
- $\neg P(x) \wedge \forall y R(y,z)$
- $\neg(P(x) \wedge \forall y R(y,z))$

Esercizio 4
Di ciascuna delle formule seguenti (in cui sono state omesse alcune parentesi), determinare l'albero sintattico e l'altezza.

- $\exists x P(x) \to \forall z(f(z) = x \vee \neg R(x,z))$
- $\forall w \exists y(P(x) \wedge R(x,z) \leftrightarrow \exists z \neg\forall v R(z,v))$
- $\neg\exists x(R(x,x) \vee \forall y P(c) \to R(c,c) \wedge P(x))$
- $\exists x \forall z R(x,z) \to \forall z \exists x R(x,z)$
- $P(c) \wedge \forall x(P(x) \to P(f(x))) \to \forall x P(x)$

Di ogni occorrenza di variabile nelle formule precedenti, dire se si tratta di occorrenza libera o vincolata. Elencare le variabili libere di ciascuna formula e dire se si tratta di un enunciato oppure no.

Capitolo 6

Esercizio 1
Sia $L = \{f, g, c\}$ con f e g simboli di funzione binari e c simbolo di costante. Consideriamo la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0\rangle$. Interpretare i seguenti termini in $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione $x/\frac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}$:

- $t_1 : \quad f(g(z, z), y)$
- $t_2 : \quad g(f(c, c), g(c, c))$
- $t_3 : \quad f(c, f(g(x, c), y))$

Determinare per quali $1 \leq i \leq 3$ si ha che

$$\mathcal{A} \models (t_i = y)\left[x/\frac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}\right].$$

Esercizio 2
Sia $L = \{P, f, g, c\}$, con P simbolo di relazione binario, f, g simboli di funzione binari e c simbolo di costante, e si consideri la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, <, +, \cdot, 1\rangle$. Siano φ la formula $P(g(x, x), f(y, c))$ e ψ la formula $(f(x, x) = g(y, c))$. Determinare se

$$\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/1] \qquad \text{e} \qquad \mathcal{A} \models \psi[x/2, y/1].$$

Esercizio 3
Sia $L = \{f, g, h\}$ con f e g simboli di funzione binari e h simbolo di funzione unario. Definiamo per ricorsione i termini $t_n(x)$ e $s_n(y)$ come segue:

$$\begin{aligned} t_0(x) &: \quad x & s_0(y) &: \quad y \\ t_{n+1}(x) &: \quad g(x, t_n(x)) & s_{n+1}(y) &: \quad f(s_n(y), y), \end{aligned}$$

e sia φ_n la formula

$$t_n = h(s_n).$$

Sia $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, \exp_2\rangle$, dove

$$\exp_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad k \mapsto 2^k.$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A} \models \varphi_n[x/2, y/1].$$

Suggerimento. Dimostrare per induzione su $n \geq 0$ che sia $t_n[x/2]$ che $h(s_n)[y/1]$ sono uguali a 2^{n+1}.

Esercizio 4
Sia $L = \{P, f, c\}$ con P simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Determinare se

$$\langle \mathbb{R}, \leq, \cdot, \sqrt{2}\rangle \models \forall x(f(y, x) = y \wedge \exists z(P(y, z) \wedge P(z, f(c, c))))[y/0].$$

Esercizio 5
Sia $L = \{R\}$ con R simbolo di relazione binario. Determinare per quali $1 \leq k \leq 10$ si ha che

$$\langle \mathrm{Div}(k), | \rangle \models \forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x)). \tag{$\dagger$}$$

Più in generale, determinare l'insieme dei $k \in \mathbb{N}$ per cui vale ($\dagger$).

Esercizio 6
Sia $L = \{R, f\}$ un linguaggio del prim'ordine con R simbolo di relazione binario ed f simbolo di funzione binario, e si consideri la formula φ

$$\exists z(f(z,z) = x) \wedge \exists w(R(x,w) \wedge R(w,y)).$$

Si consideri la L-struttura $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, <, + \rangle$. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathcal{B} \models \varphi[x/a, y/b] \quad \text{se e solo se} \quad a < b.$$

Esercizio 7
Sia $L = \{P, f, c\}$ con P simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Si consideri l'enunciato σ

$$\forall x \forall y \, (P(c,y) \wedge f(x,x) = y \to P(x,y)).$$

Dire se σ è vero in ciascuna delle seguenti L-strutture:

- $\langle \mathbb{Z}, <, +, -1 \rangle$
- $\langle \mathbb{Q}, \leq, \cdot, 0 \rangle$
- $\langle \mathbb{R}, \geq, \cdot, 0 \rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, \geq, +, 2 \rangle$

Esercizio 8
Sia $L = \{R, f\}$ con R simbolo di relazione ternario e f simbolo di funzione binario. Consideriamo la formula φ

$$\exists z R(f(x,z), f(z,z), f(z,y)).$$

Sia la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, R^{\mathcal{A}}, + \rangle$ dove $R^{\mathcal{A}}$ è la relazione "essere tra", ovvero

$$R^{\mathcal{A}} = \{(n,m,k) \in \mathbb{N}^3 \mid n < m < k\}.$$

Determinare l'insieme di verità di φ in $\mathcal{A}$.

Esercizio 9
Sia $L = \{f, g, c\}$ con f e g simboli di funzione binari e c simbolo di costante e sia φ la formula

$$\exists z(f(f(g(z,z), g(x,z)), y) = c)$$

Consideriamo la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0 \rangle$.

- È vero che $\mathcal{A} \models \varphi[x/-2, y/1]$?
- È vero che $\mathcal{A} \models \varphi[x/1, y/1]$?

- Determinare l'insieme di verità di φ in $\mathcal{A}$.

Esercizio 10
Sia $L = \{P, f, g, c\}$ un linguaggio dove P è un simbolo di relazione unario, f e g sono simboli di funzione binari e c un simbolo di costante. Sia $\mathcal{A}$ la L-struttura $\langle \mathbb{R}, \mathbb{Z}, +, \cdot, 1\rangle$. Determinare l'insieme di verità in $\mathcal{A}$ delle seguenti formule:

- $f(x, f(c, f(c, c))) = y \wedge P(y)$
- $\exists z(f(x, g(z, z)) = y)$
- $P(x) \wedge (g(x, x) = f(c, c))$
- $\forall y(f(x, y) = y) \vee (x = c)$
- $P(g(x, x)) \wedge P(f(x, c))$
- $\exists y(P(y) \wedge P(f(x, y)))$

Esercizio 11
Sia $L = \{Q, f\}$ con Q simbolo di relazione binario e f simbolo di funzione binario. Sia φ la L-formula

$$\forall x \exists y(\neg Q(x, z) \vee Q(f(y, x), z)).$$

Notiamo che $FV(\varphi) = \{z\}$. Determinare l'insieme di verità di φ in ciascuna delle seguenti strutture:

- $\langle \mathbb{R}, <, +\rangle$
- $\langle \mathbb{N}, |\,, \cdot\rangle$
- $\langle \mathbb{Q}, \geq, -\rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, \leq, \cdot\rangle$

Esercizio 12
Sia $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario e φ l'enunciato

$$\forall x \exists y \forall z(f(f(x, y), z) = z).$$

Dimostrare che φ è soddisfacibile ma non è valido. È vero che $\langle \mathbb{Q}, \cdot\rangle \models \varphi$?

Esercizio 13
Sia $L = \{R\}$ con R simbolo di relazione binario. Dimostrare che

$$\forall x \exists y R(x, y) \not\models \exists y \forall x R(x, y).$$

Esercizio 14
Sia $L = \{P, Q\}$ con P e Q simboli di relazione unari. Dimostrare che

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \not\models \exists x P(x) \to \exists x Q(x).$$

Esercizio 15
Sia $L = \{f, c\}$ con f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Trovare un L-enunciato φ tale che

$$\langle \mathbb{N}, \cdot, 17\rangle \models \varphi \quad \text{ma} \quad \langle \mathbb{N}, \cdot, 12\rangle \not\models \varphi.$$

Giustificare la propria risposta.

Esercizio 16
Sia $L = \{f, c\}$ con f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Trovare un L-enunciato φ tale che

$$\langle \mathbb{N}, \cdot, 1\rangle \not\models \varphi \quad \text{ma} \quad \langle \mathbb{N}, +, 0\rangle \models \varphi.$$

Giustificare la propria risposta.

Esercizio 17
Sia $L = \{R, f, c\}$ con R simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Dimostrare che l'enunciato φ

$$\forall x R(f(x, x), c)$$

è soddisfacibile ma non valido.

Esercizio 18
Consideriamo il linguaggio $L = \{R\}$ con R simbolo di relazione binario. Consideriamo i seguenti enunciati:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 : &\quad \forall x R(x, x) \\
\varphi_2 : &\quad \forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x)) \\
\varphi_3 : &\quad \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z).
\end{aligned}$$

Verificare che $\mathcal{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ se e solo se $R^{\mathcal{A}}$ è una relazione di equivalenza.

Esercizio 19
Siano L e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ come nell'esercizio precedente. Dimostrare che nessuna delle φ_i è conseguenza logica delle rimanenti due.

Esercizio 20
Siano L e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ come negli esercizi precedenti.

- Scrivere un L-enunciato φ_2' tale che per ogni L-struttura $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2' \wedge \varphi_3 \quad \text{se e solo se} \quad R^{\mathcal{A}} \text{ è un ordine.}$$

- Scrivere un L-enunciato φ_4 tale che per ogni L-struttura $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2' \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \quad \text{se e solo se} \quad R^{\mathcal{A}} \text{ è un ordine } \textit{lineare}.$$

- Dimostrare che ciascun enunciato nell'insieme $\{\varphi_1, \varphi_2', \varphi_3, \varphi_4\}$ *non* è conseguenza logica degli altri tre.

Esercizio 21
Siano L e $\varphi_1, \varphi_2', \varphi_3$ come nell'esercizio precedente. Sia ψ l'enunciato

$$\forall x \exists y (x \neq y \wedge R(x, y)).$$

Dimostrare che né $\Gamma \models \psi$, né $\Gamma \models \neg\psi$, dove $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2', \varphi_3\}$. Esistono modelli finiti di $\Gamma \cup \{\psi\}$?

Esercizio 22
Sia $L = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine con f simbolo di relazione funzionale. Consideriamo l'enunciato φ

$$\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \wedge \exists z \neg \exists x (f(x) = z).$$

Dimostrare che φ è soddisfacibile ma non è una tautologia. Che caratteristiche deve avere $f^{\mathcal{A}}$ affinché φ sia vera nella L-sruttura $\mathcal{A}$? Esistono L-strutture $\mathcal{A}$ finite tali che $\mathcal{A} \models \varphi$?

Esercizio 23
Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $\cdot$, $<$ e 10 (interpretati nella maniera usuale), formalizzare in $\mathbb{N}$ l'affermazione:

> Ci sono almeno due numeri quadrati minori di 10.

Esercizio 24
Supponendo che l'universo del discorso sia costituito da tutti i punti e le rette del piano, formalizzare la frase

> Per due punti distinti passa una e una sola retta.

utilizzando il linguaggio contenente i seguenti predicati:

$P(x) \rightsquigarrow$ "x è un punto"

$R(x) \rightsquigarrow$ "x è una retta"

$Q(x, y) \rightsquigarrow$ "y passa per x"

Esercizio 25
Formalizzare in $\mathbb{N}$ l'affermazione

> Esistono infiniti numeri primi.

utilizzando solo il simbolo $<$ di minore stretto e il simbolo di relazione binario $x \mid y$ per "y è divisibile per x".

Esercizio 26
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

> Per ogni $n > 1$ c'è un primo compreso tra n^2 e $(n+1)^2$.

usando soltanto i simboli $\cdot$, $<$ e 1 (interpretati nella maniera usuale) e un simbolo di predicato unario P per "essere primo".

Esercizio 27
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase:

> Per ogni numero k ci sono numeri primi p arbitrariamente grandi tali che $p+k$ è primo e non c'è nessun primo compreso tra p e $p+k$.

utilizzando il linguaggio contenente i simboli $+$, $<$ e il predicato unario P per "essere un numero primo".

Esercizio 28
Formalizzare la frase

> Tutti i nipoti amano i propri nonni.

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone ed utilizzando il linguaggio del prim'ordine formato due simboli di relazione binari G e A interpretati come segue:

- $G(x, y)$ se e solo se x è genitore di y,
- $A(x, y)$ se e solo se x ama y.

Esercizio 29
Formalizzare nel linguaggio L che ha un simbolo di relazione unario P e un simbolo di funzione unario f la seguente frase

> Se ci sono almeno due elementi che soddisfano la proprietà P, allora la funzione f è suriettiva.

(Come universo del discorso si può prendere il dominio di qualunque L-struttura: per la sua forma, la frase è in questo caso indipendente dalla struttura scelta.)

Esercizio 30
Formalizzare le frasi

1. Chi è amico di qualcuno che ama il cinema, ama il cinema.
2. Chi ama il teatro, è amico di qualcuno che ama il teatro.
3. Barbara è amica di Donatella e ama il teatro, ma non il cinema.

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone e utilizzando il linguaggio del prim'ordine formato da due predicati unari C e T, un predicato binario A e due simboli di costante b e d interpretati come segue:

- $C(x) \rightsquigarrow$ "x ama il cinema";
- $T(x) \rightsquigarrow$ "x ama il teatro";
- $A(x, y) \rightsquigarrow$ "x è amico di y";
- $b \rightsquigarrow$ "Barbara";
- $d \rightsquigarrow$ "Donatella".

Esercizio 31
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

> Ogni numero dispari è somma di tre numeri primi.

usando soltanto i simboli di addizione $+$ e un simbolo di predicato unario P per "essere primo".

Esercizio 32
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

> Ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre primi.

usando solo l'ordinamento $<$, la somma $+$ e il predicato unario P per "essere primo".

Esercizio 33
Formalizzare la frase

> Se tutti i tedeschi sono biondi e Andrea non è biondo, allora Andrea non è tedesco.

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone e utilizzando un linguaggio del prim'ordine con due simboli di relazione unari T e B e un simbolo di costante a interpretati come segue:

- $T(x) \rightsquigarrow$ "x è tedesco";
- $B(x) \rightsquigarrow$ "x è biondo";
- $a \rightsquigarrow$ Andrea.

Esercizio 34
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

> Se ci sono numeri arbitrariamente grandi che soddisfano la proprietà P, allora almeno uno di questi è un numero quadrato.

usando solo i simboli $<$ e $\cdot$ (interpretati nella maniera usuale) e il simbolo di relazione unario P.

Esercizio 35
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

> Ogni numero naturale sufficientemente grande è somma di quattro cubi.

usando solo i simboli $<$, $+$ e $\cdot$ (interpretati nella maniera usuale).

Esercizio 36
Formalizzare la frase

> Nessun ladro è onesto, ma c'è un ladro gentiluomo che è onesto.

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone ed utilizzando il linguaggio del prim'ordine formato da tre simboli di relazione unari L, O e G interpretati come segue:

- $L(x) \rightsquigarrow$ "x è un ladro";
- $O(x) \rightsquigarrow$ "x è onesto";
- $G(x) \rightsquigarrow$ "x è un gentiluomo".

Esercizio 37
Formalizzare la seguente frase

> Se ci sono almeno tre elementi che soddisfano la proprietà P, allora ci sono al più due elementi che soddisfano la proprietà Q.

usando il linguaggio formato da due simboli di relazione unari P e Q.

(Come universo del discorso si può prendere il dominio di qualunque L-struttura: per la sua forma, la frase è in questo caso indipendente dalla struttura scelta.)

Esercizio 38
Formalizzare le frasi

1. C'è qualche impiegato che, pur lavorando bene, viene licenziato dal proprio capoufficio.
2. Il capoufficio di Ugo non licenzia alcun impiegato che lavori bene.
3. Qualunque impiegato che non lavori bene viene licenziato dal proprio capoufficio, a meno che si tratti di Ugo.

nel linguaggio formato da due predicati unari I e B, un predicato binario L, un simbolo di funzione unario c e un simbolo di costante u, dove

- $I(x)$ se e solo se x è un impiegato;
- $B(x)$ se e solo se x lavora bene;
- $L(x, y)$ se e solo se x licenzia y;
- $c(x) =$ il capoufficio di x;
- $u =$ Ugo.

Esercizio 39
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

> Presi due interi relativamente primi x e y, c'è un numero primo congruente ad x modulo y.

usando i simboli $+$, $\cdot$, e il predicato P per "essere un numero primo".

Si ricordi che due numeri sono relativamente primi se l'unico divisore comune è 1, e che a è congruente a b modulo p se la differenza tra a e b è un multiplo di p.

Esercizio 40
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

> Il più piccolo numero primo è pari.

usando i simboli $<$, $+$ (interpretati nella maniera usuale) e il predicato unario P per "essere un numero primo".

Esercizio 41
Formalizzare la frase

> Ogni tennista è migliore di qualcun altro, ma Djokovic è il migliore di tutti.

in un linguaggio del prim'ordine con un predicato unario T, un predicato binario M ed un simbolo di costante d, dove

- $T(x)$ se e solo se x è un tennista;
- $M(x, y)$ se e solo se x è migliore di y;

- $d =$ Djokovic.

Esercizio 42
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

> Preso un numero maggiore di 1 e il suo successore, tra i loro quadrati c'è sempre un numero primo.

usando i simboli $<$, $+$, $\cdot$, 1 (interpretati nella maniera usuale) e il predicato unario P per "essere un numero primo".

Esercizio 43
Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $|$, $<$, $+$, 1, 2, tutti interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ le seguenti frasi:

1. Se un numero è minore di un altro, allora quest'ultimo non è minore del primo.
2. Nessun numero è minore di ogni numero.
3. Ogni numero è minore di qualche numero.
4. Ogni numero pari è la somma di due numeri dispari.
5. Solo 1 è minore di ogni numero pari.
6. Tutti i numeri tranne 1 sono maggiori di qualche numero.
7. Il numero minore di 2 è dispari.
8. Esistono numeri primi arbitrariamente grandi. (Teorema di Euclide)
9. Ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due primi. (Congettura di Goldbach)

Esercizio 44
Formalizzare la frase

> Chi non studia e non svolge alcun esercizio non supera l'esame di logica.

in un linguaggio del prim'ordine con due simboli di relazione unari S e E, due simboli di relazione binari F e P, un simbolo di funzione unario f ed un simbolo di costante l interpretati come segue:

- $S(x) \rightsquigarrow$ "x studia";
- $E(x) \rightsquigarrow$ "x è un esercizio";
- $F(x, y) \rightsquigarrow$ "x svolge y";
- $P(x, y) \rightsquigarrow$ "x supera y";
- $f(x) \rightsquigarrow$ "l'esame della materia x";
- $l \rightsquigarrow$ "logica".