Esercizio 14
Sia $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ l'insieme di tutte le tuple di numeri naturali (di lunghezza arbitraria). Dimostrare che la funzione

$$f\colon \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \qquad (k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) \mapsto (k_0, k_0, k_1, k_1, \ldots, k_{n-1}, k_{n-1})$$

è iniettiva ma non suriettiva.

INIETTIVITA' $f : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ iniettiva se, dati $s_1, s_2 \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,

$f(s_1) = f(s_2) \Longrightarrow s_1 = s_2$

Sia $s_1 = (k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$, $\ell_1 = n$

$s_2 = (t_0, t_1, \ldots, t_{m-1})$, $\ell_2 = m$

$f(s_1) = (k_0, k_0, k_1, k_1, \ldots, k_{n-1}, k_{n-1})$, $\ell_1' = 2 \cdot n$

$f(s_2) = (t_0, t_0, t_1, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_{m-1})$, $\ell_2' = 2 \cdot m$

$(k_0, k_0, k_1, k_1, \ldots, k_{n-1}, k_{n-1}) = (t_0, t_0, t_1, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_{m-1})$

$\Longleftrightarrow k_0 = t_0 , \; k_1 = t_1 , \; \ldots , \; k_{n-1} = t_{m-1} , \; m = n$

$\Longleftrightarrow s_1 = s_2$

SURIETTIVITA' $f : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ suriettiva se $\forall t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \; \exists s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ t.c. $f(s) = t$

Sia $|s| = 0$

$\nexists s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ t.c. $f(s) = t$, dove $|t| = 2 \cdot |s| = 0$