

Sia  $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$   
 $n \longmapsto -2n^2$

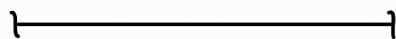
☐ F iniettiva?  $f(1) = f(-1) = -2$

☐ F suriettiva?  $\nexists n \text{ t.c. } f(n) = 3$

☒ V ha immagine contenuta in  $\mathbb{Z}$ ?  $\forall n, f(n) \in \mathbb{Z}$

☒ V  $f(n) = f(-n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ ?

osservazione: se  $f(n) = f(-n)$  allora  $f$  non iniettiva



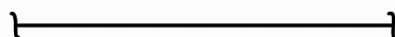
Sia  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $r \longmapsto \langle r^2, r \rangle$

☒ V iniettiva?

☐ F suriettiva?  $\nexists r \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(r) = \langle -1, 0 \rangle$

☒ V ha immagine contenuta in  $\{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\} \times \mathbb{R}$ ?

☐ F  $f(r) = f(-r) \quad \forall r \in \mathbb{R}$ ?



Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- ☐ F Se  $A$  finito allora  $A^{\mathbb{N}}$  è finito  
infinito a prescindere dalla cardinalità di  $A$
- ☐ F Se  $A$  infinito allora  $A^{\mathbb{N}}$  è numerabile  
sse  $A$  numerabile
- ☐ F Se  $\exists f: A \rightarrow B$  suriettiva, allora  $|A| \leq |B|$   
 $|B| \leq |A|$

☒ V  $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$  (infatti:  
 $|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$ )

$$A \text{ numerabile} \Leftrightarrow |A| = |\mathbb{N}|$$

$$A \text{ più che numerabile} \Leftrightarrow |A| > |\mathbb{N}|$$

$$\Leftrightarrow A \text{ infinito non numerabile}$$

—————

Siano  $A, B$  insiemi infiniti

- ☐ F  $A \cap B$  è infinito
- ☒ V  $A \cup B$  è infinito
- ☐ F Se  $A$  più che numerabile e  $B \subseteq A$  allora  $B$  è più che numerabile?
- ☐ F Se  $A$  è numerabile e  $B \subseteq A$  allora  $|B| = |\mathbb{N}|$   
NON PER FORZA

—————

## Esercizio

Sia  $L = \{R\}$  con  $R$  simbolo di relazione binaria.

Trovare un enunciato  $\varphi$  nel linguaggio  $L$  tale che  
 $(\mathbb{Z}, <) \models \varphi$  ma  $(\mathbb{N}, <) \not\models \varphi$

$$\forall y \exists x (R(x, y))$$

—————

Sia  $L = \{R\}$  come sopra.

Trovare un  $L$ -enunciato  $\varphi$  tale che  
 $(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$  ma  $(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi$

$$\forall x \forall y (R(x, y) \longrightarrow \exists z (R(x, y) \wedge R(z, y)))$$

—————

Sia  $L = \{R\}$  come sopra.

Trovare un  $L$ -enunciato  $\varphi$  tale che  
 $(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$  ma  $(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi$

NON ESISTE

—————

Definizione Sia  $\varphi$  un  $L$ -enunciato. Diciamo:

- (1)  $\varphi$  è soddisfacibile se  $\exists$  una  $L$ -struttura  $A$  tale che  
 $A \models \varphi$

(2)  $\varphi$  è valido se  $\forall$  L-struttura  $A$  vale  $A \models \varphi$

### Osservazione

$\neg \varphi$  è soddisfacibile  $\iff \varphi$  non è valido

Dunque " $\varphi$  soddisfacibile ma non valido"

vi sta chiedendo:

- 1) trova  $A$  t.c.  $A \models \varphi$
- 2) trova  $B$  t.c.  $B \models \neg \varphi$

### Esercizio 22

$L = \{f\}$ .  $f$  simbolo di funzione unario.

Sia  $\varphi$  l'enunciato  $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \wedge \exists z \neg \exists x (f(x) = z)$

(1) Dimostrare che  $\varphi$  soddisfacibile ma non valido.

sia  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $x \mapsto x+1$

•  $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$  vero perché

$$f(x) = x+1 = f(y) = y+1 \\ \iff x = y$$

•  $\exists z \neg \exists x (f(x) = z)$

ponendo  $z = 0 \implies \nexists x \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f(x) = x+1 = 0$

$\implies$  soddisfacibile

Sia  $\text{id} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$x \mapsto x$$

dimostriamo che  $\varphi$  non è valido

- la prima parte OK (come sopra)
- per assurdo:  $\exists z \neg \exists x (f(x)=z)$  ma  $x=z$

Quindi: se  $\exists z \Rightarrow \exists x$  ASSURDO

perché per hp  $\neg \exists x$  t.c.  $\text{id}(x)=x$