Forma generale di un PL

$$\max/\min z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

Soggetto a

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &\geq b_i \qquad i = 1, \dots, k \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &\leq b_i \qquad i = k+1, \dots, l \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \qquad i = l+1, \dots, m \end{aligned}$$

Forma standard di un PL

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

Soggetto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

Caratteristiche:

> Programma di massimizzazione;
> Vincoli di uguaglianza;
> Disuguaglianze $x_j \geq 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, n$

Ogni programma lineare può essere scritto in forma standard.

Trasformazione in forma standard

- Da min a max

$$\min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \qquad \Leftrightarrow \qquad \max \quad \bar{z} = -\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

soggetto a $x \in S_a$ soggetto a $x \in S_a$

- Eliminazione di variabili non-positive

$$x_j \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_j = -\bar{x}_j \ , \qquad \bar{x}_j \geq 0$$

Eliminazione di variabili libere (ovvero senza vincolo di segno)

$$x_j \text{ libera} \quad \Leftrightarrow \quad x_j = x_j^+ - x_j^- \ , \qquad x_j^+, x_j^- \geq 0$$

Eliminazione di disuguaglianze

1)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i \qquad y_i \geq 0$$

y_i : variabile di slack
Rappresenta la differenza (non negativa) tra l'espressione e il vincolo.

2)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i = b_i \qquad y_i \geq 0$$

y_i : variabile di surplus.

Ipotesi di lavoro e notazioni

Il programma lineare in forma standard si può scrivere in forma matriciale:

$$\max \left\{ \mathrm{z} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

La disuguaglianza $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ vale componente per componente, ovvero:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \vdots \\ \geq 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}, \qquad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$$

$$\mathrm{S_a} = \{ \mathbf{x} : \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \} \qquad \text{regione ammissibile}$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{\mathrm{n}})$$

$$\mathbf{x} = \text{variabili di controllo}$$

Possiamo fare alcune ipotesi sul rango:

Se $\rho(\mathbf{A}) = m$, dove $m < n - n° \, righe\ nulle\ o\ contraddittorie$

allora si hanno infinite soluzioni per $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Insiemi convessi

Dati due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e dato $\alpha \in [0,1]$, il punto $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + (1-\alpha)\mathbf{v}$ è una combinazione lineare convessa di $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

- Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se, per ogni coppia $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$, tutte le combinazioni lineari convesse di $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono elementi di S.
- Dato S convesso, $\mathbf{x} \in S$ è un vertice di S se $\nexists\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S,\ \mathbf{u} \neq \mathbf{v},\ \text{t.c.}\ \mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + (1-\alpha)\mathbf{v}$
- Dato S convesso, $\mathbf{x} \in S$ è un vertice di S se $\nexists\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S,\ \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\ \text{t.c.}\ \mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$
  (punto medio)

Teorema

Se il programma lineare $\max\left\{ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$ ammette soluzioni ottime, allora almeno una di esse è un vertice di $S_a = \{ \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$.

- Sia $\mathbf{x}^*$ ottimo: $z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \max\{ \mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S_a \}$

  > Se $\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^*$ vertice

  > Se $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$ ho due possibilità:

  1) $\mathbf{x}^*$ è un vertice e il teorema vale
  2) $\mathbf{x}^*$ non è un vertice

  Nel secondo caso possiamo provare un altro risultato:
  Genero un nuovo ottimo $\mathbf{x}'$ con una componente nulla in più rispetto a $\mathbf{x}^*$

  $$\Rightarrow \ \exists\, \mathbf{x}' \in S_a \ \text{t.c.} \ \ \mathbf{x}' \text{ è ottimo, e } \{ i : x_i' > 0 \} \subset \{ i : x_i^* > 0 \}$$

  Di nuovo, se $\mathbf{x}'$ non è a sua volta un vertice, genero $\boldsymbol{x}''$ con una componente nulla in più, e così via.
  Posso ripetere questo procedimento per al massimo k volte, fino a trovare un vertice.

- Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_a$ distinti, con $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$
  ho due possibilità:

  1) $u_i = v_i = x_i^* = 0 \quad \text{per} \quad i = k+1, \dots, n$

  $$\frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}v_i = 0\,, \qquad u_i, v_i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u_i = v_i = 0$$

  2) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono soluzioni ottime!

  Consideriamo le soluzioni $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{y} \qquad \text{con } \mathbf{y} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \neq 0\,, \text{ e } \exists\, y_i < 0$

  Ci chiediamo per quali $\varepsilon > 0$ risulta $x' \in S_a$:

  $$x' \in S_a \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}\,, \quad \boldsymbol{x}' \geq \mathbf{0}$$

  Quindi:

  $$\varepsilon = \min\left\{ -\frac{x_i^*}{y_i} : \ y_i < 0 \right\}$$

Lemma

Sia $\mathbf{x} \in S_a$

$\mathbf{x}$ è un vertice di S_a $\quad \leftrightarrow \quad$ le colonne di $\mathbf{A}$ in $\left\{ \mathbf{A}_j : x_j > 0 \right\}$ sono linearmente indipendenti.

Insiemi di variabili di base

Siano $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}$

$$\max \left\{ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

$B = \{x_{j1}, x_{j2}, \dots x_{jm}\}$ è un insieme di variabili di base se e solo se le colonne $\mathbf{A}_{j1}, \dots, \mathbf{A}_{jm}$ formano una base dello spazio generato dalle colonne di $\mathbf{A}$.

$\mathbf{A}_B = (A_j : x_j \in B)$ *matrice di base (quadrata e invertibile!)*

$\boldsymbol{N} = \{x_1, x_2, \dots x_n\} \backslash B$ *variabili fuori base*

Notazioni

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_B = (x_j : x_j \in B) \quad \mathbf{x}_N = (x_j : x_j \in N)$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}_B = (c_j : c_j \in B) \quad \mathbf{c}_N = (c_j : c_j \in N)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_B \, \mathbf{A}_N) \qquad A_B = (A_j : x_j \in B) \quad A_N = (A_j : x_j \in N)$$

Soluzioni di base

Definizione

Data una base B, la soluzione di base del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ associata a B è l'unica sua soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(B)$ che ha $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$

Quindi $\mathbf{x}(B) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ mi dà la soluzione

Definizione

Se $\mathbf{x}(B) \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(B) \in S_a$ è una soluzione ammissibile di base (ovvero B è una base ammissibile).
B è degenere se $x_j(B) = 0$ per qualche $x_j \in B$.

Teorema fondamentale della PL

Se il programma lineare ammette soluzioni ottime, allora almeno una di esse è un vertice di $S_a = \{ \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$.

Lemma

Sia $\mathbf{x} \in \mathrm{S_a}$.

$\mathbf{x}$ è un vertice di $\mathrm{S_a}$ se e solo se le colonne di $\mathbf{A}$ in $\left\{\mathbf{A}_\mathrm{j} : \mathrm{x_j} > 0\right\}$ sono linearmente indipendenti.

Proprietà

Sia $\bar{\mathbf{x}} \in \mathrm{S_a}$.

$\bar{\mathbf{x}}$ è una soluzione ammissibile di base se e solo se $\bar{\mathbf{x}}$ è un vertice di $\mathrm{S_a}$.

Riformulazione

$$\mathbf{x}_\mathrm{B} = \mathbf{A}_\mathrm{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_\mathrm{B}^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{N}\mathbf{x}_\mathrm{N}$$

$$\mathrm{z} = \mathrm{z(B)} + \mathbf{r}^\mathrm{T}(\mathrm{B})\mathbf{x}_\mathrm{N}$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x}\big(\mathrm{B}\big) = \mathrm{z(B)}$$

$\mathbf{r}(\mathrm{B}) = (\mathrm{r_j} : \mathrm{x_j} \in \mathrm{N})$ costi ridotti delle variabili fuori base

$$r_j = c_j - \mathbf{c}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}_\mathrm{B}^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{N}$$

Ora so riformulare il programma lineare $\max\left\{\mathrm{z} = \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\right\}$

Rispetto alla base B:

$$\max\ \mathrm{z} = \mathrm{z(B)} + \mathbf{r}^\mathrm{T}(\mathrm{B})\mathbf{x}_\mathrm{N}$$

Soggetto a $\quad \mathbf{x}_\mathrm{B} = \mathbf{A}_\mathrm{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_\mathrm{B}^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{N}\mathbf{x}_\mathrm{N}$

$$\mathbf{x}_\mathrm{B} \geq 0\,, \qquad \mathbf{x}_\mathrm{N} \geq 0$$