Principio di doppia inclusione $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$

De Morgan $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ e $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

Proprietà distributiva
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Relazione n-aria
Sottoinsieme di $A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_{n-1}$. Sia $R \subseteq A \times B$:
$dom(R) = \{a \in A \,|(a,b) \in R \;\; per\ qualche\ b \in B\}$
$rng(R) = \{b \in B \,|(a,b) \in R \;\; per\ qualche\ a \in A\}$
$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$

Proprietà per relazioni binarie
$riflessiva$: $aRa \ \forall a \in A$
$irriflessiva$: $\neg(aRa) \ \forall a \in A$
$simmetrica$: $aRb \rightarrow bRa$
$antisimmetrica$: $aRb \land bRa \rightarrow a = b$ (non è l'opposto di simmetria)
$transitiva$: $aRb \land bRc \rightarrow aRc$

Relazione di equivalenza R riflessiva, simmetrica e transitiva

Relazione d'ordine R riflessiva, antisimmetrica e transitiva

Ordine stretto R irriflessiva, antisimmetrica e transitiva

Pre-ordine R riflessiva e transitiva

N.B. Unica R sia simmetrica che antisimmetrica: uguaglianza.

Funzione
Relazione $f: A \rightarrow B$ tale che
$\forall a \in A \;\; \exists b \in B \; t.c. (a,b) \in f$ e $b_1 = b_2 \; \forall (a, b_1), (a, b_2) \in f$
$A = dom(f) \qquad B\ codominio$
$b = f(a) \;\; immagina\ di\ a\ mediante\ f$
$rng(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \;\; range\ o\ immagine\ di\ f$
$f^{-1}[\{b\}] = \{a \in A \mid f(a) = b\}$
$preimmagine\ o\ controimmagine\ di\ b \in B$

Composizione di funzioni
$f: A \rightarrow B \;\; e \;\; g: B \rightarrow C$
$g \circ f : A \rightarrow C \quad a \mapsto g(f(a))$

Proprietà delle funzioni
$iniettiva$: $a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ $oppure$
$f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$
$suriettiva$: $\forall b \in B \;\; b = f(a) \;\; per\ qualche$
$a \in A \;\; oppure \;\; rng(f) = B$
$biettiva\ se\ sia\ iniettiva\ che\ suriettiva$

Inversa f^{-1}: $rng(f) \rightarrow A \quad b \mapsto f^{-1}[\{b\}]$

Stringhe finite su A
Sequenza finita di simboli di A.
insieme di tutte le stringhe finite su A: $A^{<\mathbb{N}}$
$lh(s)$ lunghezza della stringa s
stringa vuota = ε
Insieme delle stringhe di lunghezza n (finito): A^n

Stringhe infinite su A (successione)
Sequenza infinita di simboli di A.
insieme di tutte le stringhe infinite su A: $A^{\mathbb{N}}$

Cardinalità Due insiemi X e Y hanno la stessa cardinalità ($X \approx Y$ o $|X| = |Y|$) se esiste biezione $f: X \rightarrow Y$.

X si inietta in Y ($X \lesssim Y$ o $|X| \leq |Y|$) se esiste iniezione $f: X \rightarrow Y$.

$X \lesssim Y$ sse c'è una suriezione $g: Y \rightarrow X$.

Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein Se $X \lesssim Y$ e $Y \lesssim X$ allora $X \approx Y$.

Insieme **finito** sse in biezione con $\{0, \dots, n-1\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.
Si scrive $|X| = \mathbb{N}$.

X infinito sse $\mathbb{N} \lesssim X$ ovvero $|\mathbb{N}| \leq |X|$.
X infinito sse esiste $Y \subset X$ tale che $X \approx Y$.
X **numerabile** se in biezione con $\mathbb{N}$.
X **più che numerabile** se in biezione con $\mathbb{R}$.
Se X numerabile, anche X^n con $n \in \mathbb{N}$ lo è.
$X^{<\mathbb{N}}$ è infinito (sempre). Se X numerabile, anche $X^{<\mathbb{N}}$ lo è.
$X^{\mathbb{N}}$ e $P(X)$ sono infiniti più che numerabili (sempre).

Teorema di Cantor $|X| < |P(X)|$

Criterio di priorità dei connettivi:
$\neg \; \forall \; \exists$
$\land \; \lor$
$\rightarrow$
$\leftrightarrow$

Linguaggio del prim'ordine $L = Const \cup Func \cup Rel$

Arietà: dice quanti argomenti contiene la funzione o relazione

L-Termini $Term = (\ \{(,)\} \cup Const \cup Func\ )$

Formula atomica $\left(R(t_1, \dots, t_n)\right)\ \ oppure\ \ (t_1 = t_2)$

L-Formule $Fml = (\ L \cup Vbl \cup \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\ )$
$si\ indicano\ con\ lettere\ greche\ minuscole\ (es.\ \varphi)$

Variabili (Vbl**) vincolate:** Sotto il raggio d'azione di un quantificatore.
Altrimenti **libere** ($FV(\varphi)$)

L-enunciato φ è enunciato se non contiene variabili libere.

L-struttura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}}, \dots, c^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$

Assegnazione in $\mathcal{A}$ per $\{x_1, \dots, x_n\}$: Associo ad ogni x_i il valore di $a_i \in A$
si scrive: $x_1/a_1, \dots, x_n/a_n$

Interpretazione di un L-termine t in $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione: $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$

Una L-formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ è vera in una L-struttura $\mathcal{A}$ mediante un'assegnazione:
$\mathcal{A} \vDash \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$

Sia φ un L-enunciato.
- Se φ è **vero** in $\mathcal{A}$ si scrive $\mathcal{A} \vDash \varphi$ (φ **soddisfa** $\mathcal{A}$ / $\mathcal{A}$ **modello** di φ)
- φ **soddisfacibile/coerente** se esiste almeno una L-struttura $\mathcal{A}$ t.c. $\mathcal{A} \vDash \varphi$
- φ **insoddisfacibile/incoerente/contraddizione** se non esiste alcun modello φ
- φ **logicamente valido/vero** ($\vDash \varphi$) se $\forall \mathcal{A}$ si ha che $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Sia Γ un insieme di L-enunciati e φ un L-enunciato.
φ conseguenza logica di Γ ($\Gamma \vDash \varphi$) quando per ogni L-struttura $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A} \vDash \Gamma$ allora $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Teorema
1. φ valido sse $\neg\varphi$ è contraddizione
2. φ soddisfacibile sse $\neg\varphi$ non è valido
3. $\Gamma \vDash \varphi$ sse $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è insoddisfacibile

Equivalenza logica Due L-enunciati φ e ψ sono logicamente equivalenti ($\varphi \equiv \psi$) se, per ogni L-struttura A, si ha che $\mathcal{A} \vDash \varphi \leftrightarrow \mathcal{A} \vDash$

Valgono le seguenti equivalenze:
- $\varphi \equiv \psi\ \ se\ e\ solo\ se\ \ \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$
- $\varphi \equiv \psi\ \ se\ e\ solo\ se\ \varphi \vDash \psi\ \ e\ \ \psi \vDash \varphi$

Formalizzazione:
> *"ogni x t.c. … è …"* $\forall x[\dots \rightarrow \dots]$
> *"esiste x … t.c. …"* $\exists x[\dots \wedge \dots]$
> Esprimere "*sufficientemente grande*" :
come dire *"esiste un numero x tale che ogni numero più grande di x è …"*
$\exists x \forall y[x < y \rightarrow \dots]$
> Esprimere *"arbitrariamente grande*":
Come dire *"per ogni numero x ne esiste uno più grande tale che x è …"*
$\forall x \exists y[x < y \wedge \dots]$ (esempio *"esistono infiniti numeri primi"*)
> Se nel testo vengono esplicitati (ad esempio) *x* e *y*
$\cancel{\forall x \exists y} \forall z \exists w \dots [x \dots y \dots z \dots w \dots]$