Aritmetica in $\mathbb{Z}$ $\longrightarrow$ restringere il risultato in un insieme (in $\mathbb{Z}$)

$c \mid a \Longrightarrow \frac{a}{c} \in \mathbb{Z}$

$\exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = k \cdot c$

Sia $ax + by = c$ $\longrightarrow$ ha soluzioni se e solo se $MCD(a,b) \mid c$

Identità di Bèzout: Dato $MCD(a,b)$
$\exists m,n \in \mathbb{Z}$ t.c.
$am + bn = MCD(a,b)$

Calcolo MCD attraverso l'algoritmo di Euclide

Es. Trova MCD e identità di Bèzout tra 25 e 15

$MCD(25,15) = 5 \longrightarrow \begin{pmatrix} 25 = 15 \cdot 1 + 10 \\ 15 = 10 \cdot 1 + 5 \\ 10 = 5 \cdot 2 + 0 \end{pmatrix}$

Per id. di B.

Isolo i resti: $5 = 15 - 10 =$
$= 15 - (25 - 15) =$
$= 15 - 25 + 15 =$
$= 2 \cdot 15 - 25$

$\Longrightarrow \quad I = 2 \cdot 15 - 1 \cdot 25$

Es Trovare id. di B. tra 729 e 314

$$
\left.\begin{aligned}
729 &= 2 \cdot 314 + 101 \\
314 &= 3 \cdot 101 + 11 \\
101 &= 9 \cdot 11 + 2 \\
11 &= 5 \cdot 2 + \boxed{1} \\
5 &= 5 \cdot 1
\end{aligned}\right) \Rightarrow MCD(729, 314) = 1
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= 11 - 5 \cdot 2 = \\
&= 11 - (101 - 11 \cdot 9) \cdot 5 = \\
&= 46 \cdot 11 - 5 \cdot 101 = \\
&= 46 \cdot (314 - 3 \cdot 101) - 5 \cdot 101 = \\
&= 46 \cdot 314 - 143 \cdot 101 = \\
&= 46 \cdot 314 - 143 (729 - 2 \cdot 314) = \\
&= 332 \cdot 314 - 143 \cdot 729
\end{aligned}
$$

Es. Trovare le soluzioni dell' equazione

$$314x + 729y = 5$$

$MCD(314, 729) = 1$

$1 \mid 5$? si $\Rightarrow$ ci sono soluzioni

id. di Bezout : $314 \cdot 332 - 143 \cdot 729 = 1$

Moltiplico per 5

$$\Rightarrow 314 \cdot \underbrace{1660}_{=332 \cdot 5} - 715 \cdot \underbrace{729}_{=143 \cdot 5} = \underbrace{5}_{=1 \cdot 5}$$

sono soluzioni

$$
\begin{aligned}
&314x + 729y = 5 \\
- \; &314\bar{x} + 729\bar{y} = 5 \\
&314(x - \bar{x}) + 729(y - \bar{y}) = 5 - 5
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow 314\tilde{x} + 729\tilde{y} = 0$$

Tutte le altre soluzioni sono nella forma

$$\tilde{x} = x - \bar{x} \qquad e \qquad \tilde{y} = y - \bar{y}$$

dove $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ sono soluzioni di $314\tilde{x} + 729\tilde{y} = 0$

$$\tilde{x} = -\frac{729}{314}\tilde{y} \implies \tilde{y} = 314 \cdot k \quad e \quad \tilde{x} = -729k$$

deve essere multiplo di 314

$$\implies \tilde{x} = \frac{25}{15}\tilde{y}$$

multiplo di 3

$\implies$ l'insieme delle soluzioni è:

$$\{(1660 - 729k, -715 + 314k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$