Permutazioni

Def. Sia X un insieme non vuoto, si dice permutazione di X una funzione biettiva $f : X \to X$. L'insieme di tutte le permutazioni di X si denota S_X

Def. Una permutazione $\pi \in S_n = S_{I_n}$ e' una funzione biettiva $\pi : I_n \to I_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Es. Sia $\pi : I_5 \to I_5$ l'applicazione biettiva data

$\pi(1) = 2$
$\pi(2) = 5$
$\pi(3) = 3$
$\pi(4) = 1$
$\pi(5) = 4$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Es. $Id : I_5 \to I_5$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Calcola l'inversa π^{-1} di $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Siano $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$

Calcolare $f \circ g$ e $g \circ f$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\sigma \circ \tau \circ \pi \in S_6$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \cdot \tau \cdot \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Def. $\sigma \in S_n$ è un ciclo se $\exists \{x_1 \_\_ x_l\} \in I_n$ t.c.
$$\begin{cases} \sigma(x_1) = x_2 \\ \sigma(x_2) = x_3 \\ \vdots \\ \sigma(x_l) = x_1 \\ \sigma(k) = k \quad \forall k \neq x_i \quad 1 \leq i \leq l \end{cases}$$

Un ciclo $\sigma = (x_1 \; x_2 \; x_3 \_\_ x_l) = (x_2 \; x_3 \_\_ x_l \; x_1)$

Se $l = 2 \rightarrow$ scambio / trasposizione

In S_6 $\quad \sigma = (4 \; 1 \; 2 \; 6)$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

σ^{-1}? $\qquad \sigma^{-1} = (6 \; 2 \; 1 \; 4) = (1 \; 4 \; 6 \; 2)$

Decomporre in cicli disgiunti la seguente permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (1 \; 6)(2 \; 7 \; 4 \; 5)$$

Scrivere $\sigma = (1\ 2\ 5)(1\ 4)$ come prodotto di cicli disgiunti

$$\sigma = (1\ 4\ 2\ 5)$$

Scrivere la permutazione $\pi \in S_8$ come prodotto di cicli disgiunti

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 7 & 6 & 2 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e determinarne il tipo.

$$\pi = (1\ 5\ 2)(3\ 7)(4\ 6\ 8)$$

Tipo $(2, 3, 3)$

Sia $\pi = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 5\ 6\ 1) \in S_6$, la decomposizione in cicli disgiunti è:

$$\pi = (1\ 3\ 4)(2\ 5\ 6)$$

Calcolare il numero dei cicli

(1) di lunghezza 3 in S_6
(2) " " 4 in S_7
(3) " " 9 in S_{11}

$$\boxed{k\text{-cicli in } S_n : \binom{n}{k}(k-1)!}$$

(1) 3-cicli in S_6 : $\binom{6}{3} \cdot 2! = \frac{6!}{3!\,3!} 2 = 40$

(2) 4-cicli in S_7 : $\binom{7}{4} \cdot 3! = \frac{7!}{3!\,4!} \cdot 3! = 210$

(3) 9-cicli in S_{11} : $\binom{11}{9} \cdot 8! = \frac{11!}{9!\,2} \cdot 8! =$

$= 2217600$

Quante sono le permutazioni di tipo (6,3) in S_9 ?

I_9 : $\binom{9}{6} 5! = \frac{9!}{6!\,3!} 5! = 10080$

$I_{9-6} = I_3$: $\binom{3}{3} 2! = 2$

Quante sono le combinazioni di tipo (3,3) in S_{10}?

$$I_{10} : \binom{10}{3}(3-1)! \cdot \frac{1}{2!} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$$

il 3 e' ripetuto 2 volte

Quante sono le permutazioni di tipo (5, 2, 2, 2) in S_{11}

$$S_{11} : \binom{11}{5} \cdot (5-1)! = \frac{11!}{5!\,6!}\,4! = 11088$$

$$S_6 : \frac{1}{3!}\binom{6}{2}(2-1)! = \frac{1}{3!}\,\frac{6!}{2!\,4!} = \frac{5}{2}$$

$$S_4 : \frac{1}{3!}\binom{4}{2} = 1$$

$$S_2 : \frac{1}{3!}\binom{2}{2} = \frac{1}{6}$$

$\sigma = (1\ 5\ 7\ 8\ 2\ 4\ 9\ 6)$ 8-ciclo

$per(\sigma) = 8$ $\qquad \sigma^{98} = ?$

$$\sigma^{98} = (\sigma^8)^{12} \cdot \sigma^2 = id \cdot \sigma^2 =$$

$$= (1\ 7\ 2\ 9)(5\ 8\ 4\ 6)$$