Altri esercizi di combinatoria ...

Es

90 persone

Quante squadre da 6 posso formare?

Combinazioni semplici : $\frac{90!}{(90-6)!\,6!} = \boxed{\frac{90!}{84!\,6!}}$

Quante squadre con ruoli?

- 2 Bande
- 1 alzatore
- 1 opposto
- 2 centrali

- Bande : $\binom{90}{2}$ $\rightarrow$ mi rimangono 88 persone
- centrali : $\binom{88}{2}$ $\rightarrow$ mi rimangono 86 persone
- alzatore : 86
- opposto : 85

$$\Rightarrow \binom{90}{2}\cdot\binom{88}{2}\cdot 86\cdot 85 = \frac{90!}{84!\,2!\,2!}$$

Es. Anagrammi di PATATE $= \frac{6!}{2!\,2!}$

Es Creo dei team di ricerca a partire da 90 persone. Ogni team deve avere 5 ruoli assegnati (meneper, sviluppo, ricerca, commerciale, segreteria). Posso assegnare più ruoli alla stessa persona. In quanti modi posso creare questi team?

90^5 (Disposizioni con ripetizione)

$$\underset{M}{\boxed{90}} \times \underset{SV}{\boxed{90}} \times \underset{R}{\boxed{90}} \times \underset{C}{\boxed{90}} \times \underset{SG}{\boxed{90}}$$

→ ogni quadrato e' un ruolo e per ogni ruolo posso scegliere tra 90 persone

Es Voglio creare una bomboniera con 6 confetti.

Dispongo di confetti:
- normali
- cioccolaTo
- nocciola

Quanti tipi diversI di bomboniera posso scegliere?

Combinazioni con ripetizione:

$$C'_{n,k} = C'_{3,6} = \frac{(3+6-1)!}{(3-1)! \cdot 6!} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$$

Es Un giardiniere ha 12 tipi di piante.

1. In una aiuola deve piazzare 5 piante diverse. Quanti modi?
2. In un'altra ne deve piazzare 15, almeno una di ciascun tipo. In quanti modi?
3. Lungo un muro deve piazzare 24 piante, esattamente 2 di ciascun tipo. In quanti modi?

① Dobbiamo scegliere 5 elementi DISTINTI, quindi non ci sono ripetizioni. Inoltre l'ordine in cui gli elementi compaiono non conta.

$\Rightarrow$ Uso combinazioni semplici $n=12$ e $k=5$

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad C_{12,5} = \frac{12!}{(12-5)!\,5!} = \frac{12!}{7!\,5!} = 792$$

② Dobbiamo scegliere raggruppamenti di 15, $15>12$, quindi ho ripetizioni! Inoltre l'ordine in cui gli elementi compaiono non conta.

Devo per forza scegliere uno da ogni tipo di pianta, quindi, visto che l'ordine non conta, ho un solo modo per sceglierle.

Ora possiamo scegliere in qualunque modo le rimanenti 3, che possono anche ripetersi, perciò combino $n=12$ elementi in gruppi da $k=3$.

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$C'_{12,3} = \frac{(12+3-1)!}{(12-1)!\,3!} = \frac{14!}{11!\,3!} = 14\cdot 13\cdot 2$$

(3) Devo piazzare 24 piante: coppie di tipi distinti
Uso permutazioni con ripetizione di $n=24$ elementi in cui ognuno dei 12 elementi si ripete $k=2$ volte

$$P'_n = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

$$P'_{24} = \frac{24!}{\underbrace{2! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2!}_{12 \text{ volte}}} = \frac{24!}{(2)^{12}}$$

Esercizio

(1) Quante sigle ci sono di 3 lettere senza ripetizioni seguite da 3 cifre (possibilmente ripetute)?

$n = 21$ lettere
$k = 3$
L'ordine conta e non ci sono ripetizioni
$\Rightarrow$ Disposizioni semplici $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

$$D_{21,3} = \frac{21!}{18!} = 7980$$

$n = 10$
$k = 3$
l'ordine conta e sono possibili le ripetizioni
$\Rightarrow$ Disposizioni ripetute: $D'_{n,k} = n^k$

$$D'_{10,3} = 10^3 = 1000$$

Per il metodo delle scelte successive:

$$D_{21,3} \cdot D'_{10,3} = 7980000$$

② Anagrammi di "SILLOGISMO"

Permutazioni con ripetizione: $n = 10$

$$P'_n = \frac{10!}{2!2!2!2!} = \frac{10!}{16} = \boxed{226800}$$

③ Quanti sono i numeri tra 1 e 4200 che non sono divisibili né per 2, né per 3, né per 7?

$I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1 \leq 4200\}$ $\quad |I| = 4200$

$\underline{X_K} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divisibile per } K\}$

→ $X_2 = \{n \in I \mid n = 2m \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$

→ $X_3 = \{n \in I \mid n = 3m \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$

→ $X_7 = \{n \in I \mid n = 7m \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$

$Z = I \setminus (X_2 \cup X_3 \cup X_7)$

$$|X_K| = \frac{I}{K}$$

$$|X_2 \cap X_3 \cap X_4| = \frac{|I|}{mcm(2,3,7)} = \frac{4200}{42} = 100$$

$$|X_2 \cap X_3| = \frac{|I|}{mcm(2,3)} = \frac{4200}{6} = 700$$

$$|X_2 \cap X_7| = \frac{|I|}{mcm(2,7)} = \frac{4200}{14} = 300$$

$$|X_3 \cap X_7| = \frac{|I|}{mcm(3,7)} = \frac{4200}{21} = 200$$

Principio di inclusione-esclusione:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

$$\Rightarrow |X_2 \cup X_3 \cup X_7| = 3000$$

$$|Z| = |I \setminus (X_2 \cup X_3 \cup X_7)| = 1200$$