Es Sia P l'affermazione:

$$A \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \wedge (C \vee D))$$

- P e' tautologia? NO, vedi riga 4
- P e' contraddizione? NO, vedi riga 1
- P e' soddisfacibile? SI, infatti non e' contraddizione

| A | B | C | D | $B \wedge C$ | $A \vee (B \wedge C)$ | $C \vee D$ | $A \wedge (C \vee D)$ | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | V | F | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | F | V | F | F | F |
| V | F | V | V | F | V | V | V | V |
| V | F | V | F | F | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | F | F | V | F | F | F |
| F | V | V | V | V | V | V | F | F |
| F | V | V | F | V | V | V | F | F |
| F | V | F | V | F | F | V | F | V |
| F | V | F | F | F | F | F | F | V |
| F | F | V | V | F | F | V | F | V |
| F | F | V | F | F | F | V | F | V |
| F | F | F | V | F | F | V | F | V |
| F | F | F | F | F | F | F | F | V |

P e' soddisfacibile

# RELAZIONI

→ solitamente all' esame c'è una domanda a crocette

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

$R \subseteq X \times X$ , $R = \{\underbrace{(0,3)}_{0R3}, \underbrace{(2,2)}_{2R2}, \underbrace{(1,2)}_{1R2}\}$

Sia $f$ una funzione $\underbrace{f: X \to X}_{}$ $= R$ $(f \subseteq X \times X)$

- $f$ è riflessiva? Sì! R è riflessiva se $xRx$ , $\forall x \in X$

Proprietà:

Ⓡ Riflessiva : se $\forall x \in X$ , $xRx$ es. $X = \{1\}$ $\{(1,1)\}$ è riflessiva

Ⓢ Simmetrica : se $\forall x, y \in X$ , $xRy \to yRx$

Ⓐ Antisimmetrica: se $\forall x, y \in X$ , $xRy \wedge yRx \longrightarrow x = y$

NON È L'OPPOSTO DELLA SIMMETRIA!

es. l'uguaglianza è simmetrica e antisimmetrica

es. Sia $R$ una relazione binaria su $X$.
Se $R$ e' simmetrica e antisimmetrica,
allora e' vero che $xRy$ se e solo se $x=y$?

Simm: $xRy \wedge yRx$
antis: $xRy \wedge yRx \rightarrow x=y$

| $xRy$ <br> $A$ | $yRx$ <br> $B$ | $x=y$ <br> $C$ | $P_1$ <br> $=$ <br> $A \wedge B$ | $P_2$ <br> $=$ <br> $A \wedge B \rightarrow C$ | $P_1 \wedge P_2$ | $A \Leftrightarrow C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | F | F |
| V | F | V | F | V | F | V |
| V | F | F | F | V | F | F |
| F | V | V | F | V | F | F |
| F | V | F | F | V | F | V |
| F | F | V | F | V | F | F |
| F | F | F | F | V | F | V |

$\neq$

Altra proprietà:

① Transitiva: se $\forall x,y,z$
$xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

Es. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false per ogni scelta possibile di $X$

$\boxed{A}$ $\subseteq$ su $\mathcal{P}(X)$ e' riflessiva V $\forall A \subseteq X$, $A \subseteq A$

$\boxed{B}$ $\subseteq$ su $\mathcal{P}(X)$ e' simmetrica F controesempio: $X = \{1\}$, $A = \emptyset$, $B = X$

$\boxed{C}$ $\subseteq$ su $\mathcal{P}(X)$ e' antisimmetrica V $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

$\boxed{D}$ $\subseteq$ su $\mathcal{P}(X)$ e' transitiva V $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$R$ e' una relazione di equivalenza se e' R + S + T

$R$ e' una relazione di preordine se e' R + T

$R$ e' una relazione d'ordine se e' R + A + T

es. la conseguenza logica $\vDash$ e' una relazione di preordine ma non una relazione d'ordine

es. l'uguaglianza e' l'unica relazione sia di equivalenza che d'ordine.

Es. Sia $R$ la relazione su $\mathbb{N}$ t.c. $aRb$ se
$a \leq b \vee (a$ e' PARI $\wedge\ a = b+1)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boxed{A}$ | $R$ e' (R) | $\boxed{E}$ | $R$ e' relazione di equivalenza |
| $\boxed{B}$ | $R$ e' (S) | $\boxed{F}$ | $R$ e' relazione di preordine |
| $\boxed{C}$ | $R$ e' (A) | $\boxed{G}$ | $R$ e' relazione d'ordine |
| $\boxed{D}$ | $R$ e' (T) | | |

$\boxed{A}$ : $a \leq a \vee (a$ PARI $\wedge\ a = a+1)$ ? V

$\boxed{B}$ : $a \leq b \vee (a$ PARI $\wedge\ a = b+1)$ e
$b \leq a \vee (b$ PARI $\wedge\ b = a+1)$ ?

$a=2 \quad b=3$

$1 \leq 5$ OK $\quad 1R5$

$5 \leq 1 \vee (3$ PARI $\wedge\ 5 = 1+1)$ $\quad 5 \cancel{R} 1$ $\Rightarrow$ F

$\underline{\text{NO}}$ $\quad \underline{\text{NO}}$

$\boxed{C}$ : $a \leq b \vee (a$ PARI $\wedge\ a = b+1)$ e
$b \leq a \vee (b$ PARI $\wedge\ b = a+1)$ $\iff a = b$ ?

$1 \leq 2$ $\underline{\text{SI}}$ $\quad 1R2$

$2 \leq 1 \vee (2$ PARI $\wedge\ 2 = 1+1)$ $\underline{\text{SI}}$ $\quad 2R1$ $\quad$ ma $2 \neq 1 \rightarrow$ F

$\boxed{D}$ $\quad aRb \wedge bRc$
(ho 4 casi):

① $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ $\underline{\text{vero}}$

② $a < b$ e ($b$ PARI e $b = c+1$)
$a < b-1 = c \Rightarrow aRc$ $\underline{\text{vero}}$

③ ($a$ PARI e $a = b+1$) e $b < c$
$a = b+1 \leq c \Rightarrow a \leq c \Rightarrow aRc$ $\underline{\text{vero}}$

$\Rightarrow$ V

④ se a PARI e $a=b+1$ b DISPARI
NON PUÒ SUCCEDERE che $bRc$
($b$ PARI e $b=c+1$)
IMPOSSIBILE

$\boxed{E}$ F infatti R non è simmetrica

$\boxed{F}$ V infatti è riflessiva e transitiva

$\boxed{G}$ F infatti non è antisimmetrica