Es. Dall'insieme $\{A, B, C, D, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si vogliono scegliere 5 simboli diversi in modo che sia sempre presente almeno una lettera. Quante sono le possibili scelte?

a) $10! - 6!$ b) $4\binom{4}{4}$ ~~c)~~ $4\binom{9}{4}$

d) $\binom{10}{9} - \binom{6}{5}$ e) $\binom{10}{5} - 4$

Perché: devo scegliere 5 simboli su 10
non conta l'ordine

deve essere sempre presente una lettera
$\Rightarrow$ 1 scelta da $\{A, B, C, D\}$
$\Rightarrow$ 4

ora ho altre 4 scelte da fare senza fare distinzioni tra lettere e numeri (quindi mi rimangono 9 simboli tra cui scegliere)

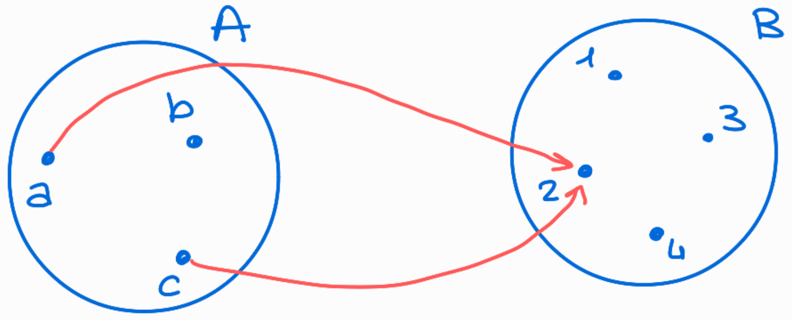
l'ordine non conta e non ho ripetizioni $\Rightarrow$ $\binom{9}{4}$

Per le scelte successive: faccio il prodotto

$\Rightarrow$ $\boxed{4 \cdot \binom{9}{4}}$ possibilità

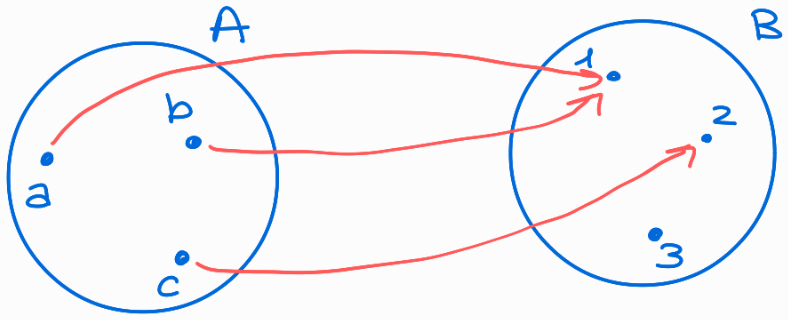
Es. Quali tra le seguenti corrispondenze sono funzioni?

$\boxed{a}$



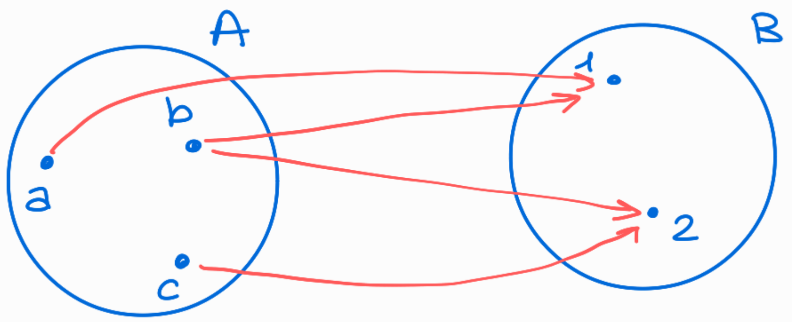
NO FUNZIONE perché b non ha immagine

~~$\boxed{b}$~~



OSS: non iniettiva e non suriettiva

$\boxed{c}$



NO FUNZIONE perché b ha due immagini

funzione $f: A \to B$ se $\forall a \in A$
$\exists! \, b \in B \mid (a,b) \in f$

Es. le seguenti funzioni sono suriettive? iniettive?

① $\rho: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x+1$

② $\psi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x+1$

③ $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x-1 & \text{se } x\in\mathbb{N}, x>0 \end{cases}$

① dati $a,b \in \mathbb{N}$, $a=b \Rightarrow \rho(a)=\rho(b)$?

$\rho(a) = a+1$
$\rho(b) = b+1$ $\quad \Rightarrow a+1=b+1 \Leftrightarrow a=b$

$\Rightarrow$ INIETTIVA

$\nexists x\in\mathbb{N}$ t.c. $\rho(x)=0$

$\Rightarrow$ NO SURIETTIVA

② ψ e' iniettiva (uguale a prima)
ed e' suriettiva perche' $\exists a\in\mathbb{Z}$ t.c. $\psi(a)=0$
infatti per $a=-1$
$\psi(-1)=0$

③ $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Sia $a=0 \neq b=1$ $\quad \varphi(a)=0=\varphi(b)$

$\Rightarrow$ NO INIETTIVA

$\forall x\in\mathbb{N}$, $\varphi(x+1)=x$ e $\varphi(0)=0$

$\Rightarrow$ SURIETTIVA

Def. Due funzioni $f: A \to B$ e $g: A' \to B'$ sono uguali se $A = A'$, $B = B'$ e $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A$

Es. $A = \{0, 1, 2\}$

$$f: A \to \mathbb{R} \qquad g: A \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x - 7 \qquad x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 7$$

Stesso dominio OK

stesso codom. OK

$f(0) = g(0)$ $\quad f(1) = g(1)$ $\quad f(2) = g(2)$ OK

$\Rightarrow$ sono uguali

Es. Sia $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = 3n - 8$. Dire se le seguenti affermaz. sono vere o false

(1) $f^{-1}(1) = \emptyset$ F

(2) f suriettiva F

(3) $f(\mathbb{N}) \in \mathbb{N}$ F

(4) f iniettiva V

(1) $3n - 8 = 1 \Rightarrow 3n = 9 \Rightarrow n = 3$ F

(2) se $z = 2$ $\quad 3n - 8 = z = 2 \Rightarrow n = \frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$ F

(3) se $n = 1 \in \mathbb{N}$ $\quad f(1) = 3 - 8 = -5 \notin \mathbb{N}$ F

(4) Siano $n = m$ $\quad f(n) = 3n - 8 = f(m) = 3m - 8$ V

Es. Sia $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ pari} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Dimostrare che φ è una biezione.

Iniettiva? $\varphi(n) = \varphi(n') \Rightarrow n = n'$?

Oss: $\varphi(n) \geq 0$ se n pari
$\varphi(n) < 0$ se n dispari

Quindi se $n, n' \in \mathbb{N}$ sono t.c. $\varphi(n) = \varphi(n')$
$\Rightarrow$ n e n' sono entrambe pari o entrambe dispari

2 casi:

se n e n' pari: da $\varphi(n) = \varphi(n')$
otteniamo $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$
$\Rightarrow n = n'$ OK

se n e n' dispari: da $\varphi(n) = \varphi(n')$
otteniamo $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$
$\Rightarrow n = n'$ OK

$\Rightarrow$ è iniettiva

Suriettiva? Dobbiamo mostrare che $\forall z \in \mathbb{Z}$
$\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi(n) = z$

Sia $z \in \mathbb{Z}$ distinguo 2 casi

1) se $z \geq 0$ poniamo $n = 2z$

e osserviamo che

$$\varphi(n) = \varphi(2z) = \frac{2z}{2} = z \quad \text{OK}$$

2) se $z < 0$ poniamo $n = -2z-1$

otteniamo che $n \in \mathbb{N}$

perché, essendo $z < 0$

$\Rightarrow z \leq -1$

$\Rightarrow -2z \geq 2$

$\Rightarrow -2z-1 \geq 1 \Rightarrow n \geq 1$

$\in \mathbb{N}$

(n intero positivo dispari)

$$\varphi(n) = \varphi(-2z-1) = -\frac{(-2z-1)+1}{2} = z$$