CARDINALITÀ

<u>Definizione</u> $|X| = |Y| \iff \exists f: X \to Y$ biezione

<u>Definizione</u> se $\exists X$ finito, $|X| = |\{0, \dots, n-1\}|$ significa che X ha n elementi

<u>Definizione</u> X è numerabile se $|X| = |\mathbb{N}|$

<u>Osservazione</u> Se X è numerabile, allora è infinito.

NON TUTTI GLI INFINITI SONO NUMERABILI

Ad esempio: $\mathbb{R}$ non è numerabile (infatti: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$)

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sono numerabili ($|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$)

<u>Definizione</u> $|X| \leq |Y| \iff \exists f: X \to Y$ iniettiva

$|X| < |Y| \iff |X| \leq |Y|$ ma $|X| \neq |Y|$

<u>Proposizione</u> $X \neq \emptyset$. Allora $|X| \leq |Y| \iff \exists f: X \to Y$ suriettiva

Esempio di esercizio:

Sia $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

f è suriettiva? NO!

$\downarrow$

se lo fosse, allora $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{Q}|$

ma so che $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$

$\Rightarrow$ ASSURDO

Teorema (Cantor - S - B):

$$|X| = |Y| \iff |X| \leq |Y| \text{ e } |Y| \leq |X|$$

Esercizio

Dimostrere che l'insieme di tutte le rette nel piano ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$r \longmapsto (m, q)$$

$y = mx + q$ retta in xy $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$x = q$ retta verticale in xy $\forall x \in \mathbb{R}$

Per $(m,q), (m',q') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad y = mx + q = m'x + q'$
$\iff m = m', \ q = q'$

$|\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$?

Per C.S.B. $\quad |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}|$ e $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}^2|$

quindi $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$ e $|\mathbb{R} \cup \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

allora $\quad |\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

Siano X e Y due insiemi tali che:

(1) X ha almeno due elementi

(2) $|X| \leq |Y|$

(3) Y e' infinito

Allora $|X \cup Y| = |X \times Y| = |Y|$

Dimostrazione:

Voglio dimostrare che $|Y| \overset{?}{\underset{①}{\leq}} |X \cup Y| \overset{?}{\underset{②}{\leq}} |X \times Y| \overset{?}{\underset{③}{\leq}} |Y \times Y| \leq |Y|$

dato per buono dal problema

① $Y \subseteq X \cup Y$

$\Rightarrow |Y| \leq |X \cup Y|$ ovvio

② Richiede $f: X \cup Y \longrightarrow X \times Y$ iniettiva.

Possiamo assumere $X \cap Y = \emptyset$ (DISGIUNTI).

Scegliamo $x_1, x_2 \in X$ $\quad x_1 \neq x_2$

$y_1, y_2 \in Y$ $\quad y_1 \neq y_2$

$$f: X \cup Y \longrightarrow X \times Y : \begin{cases} \text{se } x \in X \setminus \{x_1\} & f(x) = (x, y_1) \\ \text{se } x = x_1 & f(x) = (x_1, y_2) \\ \text{se } y \in Y \setminus \{y_1\} & f(y) = (x_2, y) \\ \text{se } y = y_1 & f(y) = (x_1, y_1) \end{cases}$$

ESERCIZIO f iniettiva?

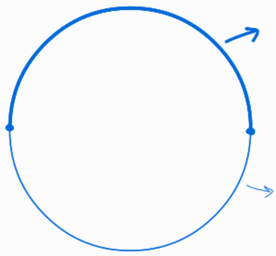
(3) $|X \times Y| \leq |Y \times Y|$

$$|X| \leq |Y| \Rightarrow |X \times Y| \leq |Y \times Y|$$

Esercizio Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ una circonferenza

Dimostrare che $|C| = |\mathbb{R}|$

Suggerimento:



$C = X \cup Y$

$X \cup Y = C$ $X =$  $\Rightarrow |X| = |[0,1]| = |\mathbb{R}|$ (visto a lezione)

$Y =$  $|Y| = |(0,1)| = |\mathbb{R}|$

$$\Rightarrow |C| = |X \cup Y| = |Y| = |\mathbb{R}|$$

Esercizio Dato A. $A^{\mathbb{N}} = \{ f \mid f : \mathbb{N} \to A \}$

$A^{<\mathbb{N}} = \{$ sequenze finite di elementi di $A \}$

Esercizio $\quad A$ insieme con un elemento

$$1 = |A^{\mathbb{N}}| < |A^{<\mathbb{N}}| \qquad \text{V o F ?}$$

L'unico elemento di $A^{\mathbb{N}}$ è $f: \mathbb{N} \to A$
$n \mapsto a$

$A^{<\mathbb{N}}$ è infinito $\qquad f: \mathbb{N} \longrightarrow A^{<\mathbb{N}}$
$$n \longmapsto \underbrace{\langle a, a, a, \dots, a \rangle}_{n \text{ volte}}$$

Se A ha più di un elemento

$$\underbrace{|\{0,1\}^{<\mathbb{N}}|}_{= |\mathbb{N}|} < \underbrace{|\{0,1\}^{\mathbb{N}}|}_{= |\mathbb{R}|}$$