

Funzioni

Def. Dati due insiemi A e B il loro prodotto cartesiano è

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

Una **relazione binaria** è un sottoinsieme di $A \times B$

Una funzione $f: A \rightarrow B$ è una relazione binaria $f \subseteq A \times B$ tale che $\forall a \in A \exists ! b \in B$ t.c. $\langle a, b \rangle \in f$

Se è così, scriviamo $f: A \rightarrow B$ $a \mapsto f(a)$

Data $f: A \rightarrow B$, è iniettiva se, dati $a_1, a_2 \in A$, se $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$f: A \rightarrow B$ è suriettiva se, $\forall b \in B \exists a \in A$ t.c. $f(a) = b$

$f: A \rightarrow B$ è iniettiva se iniettiva + suriettiva

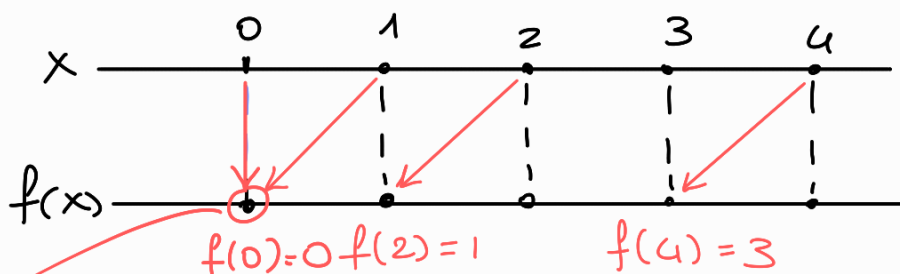
TRUCCO: se A ha un solo elemento, f è iniettiva

Esempio

- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n$ identit 
sia iniettiva che suriettiva

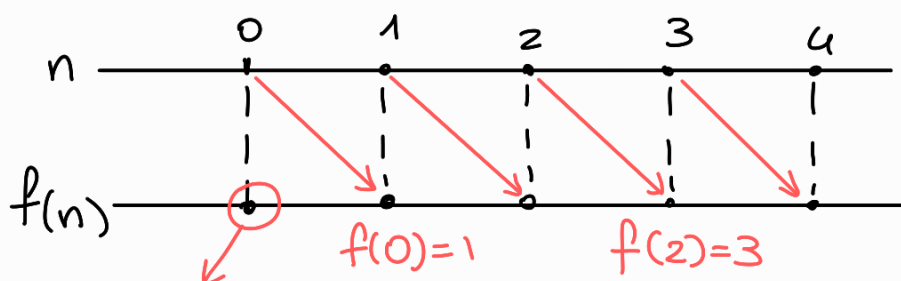
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $n \mapsto \begin{cases} n-1 & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \end{cases}$

e' suriettiva



non iniettiva
perche' $f(0)=f(1)$

- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$
iniettiva ma non suriettiva



non appartiene
a $\text{Im}(f) \Rightarrow$ no suriettiva.

Esercizio Le seguenti funzioni sono iniettive?
sono suriettive?

• $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - x + 1$$

NO INIETTIVA (parabola)

NO SURIETTIVA (sotto il vertice
della parabola
 $\nexists f$)

Iniettiva?

presi $a, b \in \mathbb{Q}$ se $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

se $a = 0$ e $b = 1$

$$f(a) = 1 = f(b) \Rightarrow \text{NO INIETTIVA}$$

Suriettiva? prendo $y = -1 \in \mathbb{R}$

$$\exists x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } x^2 - x + 1 = -1 ?$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 = \underline{\underline{-7}} < 0$$

$$\Rightarrow \nexists x$$

NO SURIETTIVA

• $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ $z \mapsto |z|$

PROPRIO: $|z| = \begin{cases} z & \text{se } z \geq 0 \\ -z & \text{se } z < 0 \end{cases}$

INIETTIVA?

$$a = 1 \quad b = -1 \quad (a \neq b)$$

$$f(a) = 1 \quad f(b) = -(-1) = 1$$

$$\Rightarrow \text{NO INIETTIVA}$$

SURIETTIVA?

$$\forall b \in \mathbb{N}, \text{ voglio che } \forall a \in \mathbb{Z}, f(a) = b$$

$$\text{Prendo } a = b \Rightarrow f(a) = f(b) = |b| = b$$

$$\Rightarrow \underline{\text{SURIETTIVA}}$$

- $P = \{ \text{persone in vita} \}$
 $f: P \rightarrow \mathbb{N}, a \mapsto \text{età di } a$

INIETTIVA? $\exists a_1, a_2 \in P$ t.c. $a_1 \neq a_2$
 $\Rightarrow \text{età di } a_1 = \text{età di } a_2$

NO INIETTIVA

SURIETTIVA? NO perché non esiste (ad esempio)
 nessuna persona che ha 200 anni

- $f: \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $\langle n, m \rangle \mapsto n \cdot m$

INIETTIVA? se prendo $\langle 0, 1 \rangle$ e $\langle 0, 3 \rangle$
 $f(\langle 0, 1 \rangle) = 0$ $f(\langle 0, 3 \rangle) = 0$
NO INIETTIVA

SURIETTIVA? $\forall b \in \mathbb{Z}$ cerco $\langle n, m \rangle$ t.c.
 $f(\langle n, m \rangle) = b$
 Dato b , scelgo $\langle 1, b \rangle$ e ottengo
 $f(\langle 1, b \rangle) = b$
 \Rightarrow SURIETTIVA

Esercizio tratto da esame

Le seguenti funzioni sono iniettive?
sono suriettive?

• $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 3x+4$$

Vedo che $f(x) = 3x+4$ è una retta in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di pendenza $m=3 \Rightarrow$ SIA INIETTIVA CHE SURIETTIVA

Altro modo: prendo a, b . Assumo $f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow a = b$$

$$f(a) = 3a+4 = 3b+4 = f(b)$$

$$3a = 3b \Rightarrow a = b \quad \underline{\text{OK INIETT.}}$$

Sia dato $b \in \mathbb{R}$.

Cerco x t.c. $f(x) = b$

$$\text{Sia } x = \frac{b-4}{3} \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{b-4}{3}\right) = b$$

OK SURIETT.

- $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 3x+4$

INIETTIVA? prendo $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$

$$f(x_1) = 3x_1 + 4 = 3x_2 + 4 = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \underline{\underline{SI}}$$

SURIETTIVA? Dato $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Q}$
 $\Rightarrow \nexists b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ t.c. } f(x) = b$
 (es. $b = \sqrt{2}$) NO

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2 \cdot |x|$

INIETTIVA? NO perché se $a = 1$ e $b = -1$
 $f(a) = f(b) = 2$

SURIETTIVA? NO perché $\nexists x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } 2 \cdot |x| < 0$
 ($f(x)$ è sempre positivo)

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
 $x \mapsto 2 \cdot |x|$

INIETTIVA? NO perché se $a = 1$ e $b = -1$
 $f(a) = f(b) = 2$

SURIETTIVA? SI Prendo $b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad x = \frac{b}{2}$
 $f(x) = f\left(\frac{b}{2}\right) = 2 \cdot \frac{b}{2} = b$

Esercizio

Sia $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ l'insieme delle sequenze finite di numeri naturali
(es. $\langle 0, 1, 2, 2, 3, 0 \rangle \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$)

• Shift

$$r: \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$$

$$\langle k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \rangle \mapsto \langle 0, k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \rangle$$

prende una sequenza e "shifta" di 1
gli elementi

es:

7	1	2	3
---	---	---	---



0	7	1	2	3
---	---	---	---	---

INIETTIVA? Se $\langle 0, k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \rangle = \langle 0, l_1, \dots, l_{n-1} \rangle$
allora $k_0 = l_0, \dots, k_{n-1} = l_{n-1}$

SI

SURIETTIVA? NO se volessi ottenere $\langle 1, 2, 3 \rangle$
sarebbe impossibile perché posso
avere solo stringhe che iniziano
per 0.

• $s: \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$
 $\langle k_0, \dots, k_{n-1} \rangle \mapsto \langle k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \rangle$ (shift a dx)

INIETTIVA? NO perché prese $\langle 1, 5 \rangle$ e $\langle 2, 5 \rangle$
 $s(1, 5) = \langle 5 \rangle = s(2, 5)$

SURIETTIVA? SI perché data $\langle k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \rangle$
trovo ad esempio $\langle 6, k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \rangle$
 $s(6, k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) = \langle k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \rangle$