Esercizi vari di Logica

(tratti da esami degli anni precedenti)

Anno accademico 2021-22

1 Insiemi, relazioni, funzioni e cardinalità

Esercizio 1
Disegnare il diagramma di Hasse dei seguenti reticoli (dove l'ordine è dato dalla relazione di divisibilità):

- reticolo dei divisori di 20;
- reticolo dei divisori di 105.

Soluzione:

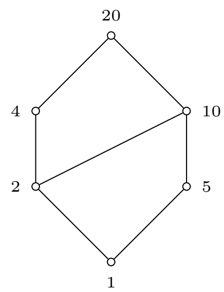

Figura 1: Reticolo dei divisori di 20.

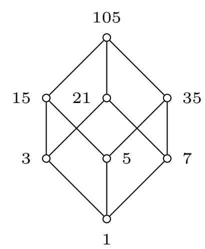

Figura 2: Reticolo dei divisori di 105.

Esercizio 2
Giustificando la propria risposta, dire per ciascuna delle seguenti funzioni se è iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuna delle tre.

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 3x+4.$
- $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 3x+4.$
- $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 2 \cdot |x|$
- $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\leq 0}, \qquad x \mapsto -2 \cdot |x|$

dove $|x|$ indica il valore assoluto di x e $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\}$.

Soluzione:

- f *è iniettiva*: se $x, y \in \mathbb{R}$ sono tali che $f(x) = f(y)$, allora $3x+4 = 3y+4$ da cui sottraendo 4 e dividendo poi per 3 si ottiene $x = y$.

  f *è suriettiva*: dato qualunque $y \in \mathbb{R}$, ponendo $x = \frac{y-4}{3}$ si ha

  $$f(x) = f\left(\frac{y-4}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{y-4}{3}\right) + 4 = (y-4) + 4 = y.$$

  Quindi f è una funzione *biettiva*.

- g *è iniettiva*: come nel caso di f, da $g(x) = g(y)$ segue che $x = y$ (infatti, g è la restrizione di f a $\mathbb{Q}$).

  g *NON è suriettiva*: infatti se $x \in \mathbb{Q}$ allora anche $g(x) = 3x+4 \in \mathbb{Q}$. Quindi dato $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non esiste alcun $x \in \mathbb{Q}$ tale che $g(x) = y$.

  Quindi g non è nemmeno *biettiva*.

- h *NON è iniettiva*: ad esempio, si ha che $1 \neq -1$ ma $h(1) = 2 \cdot |1| = 2 \cdot 1 = 2$ e $h(-1) = 2 \cdot |-1| = 2 \cdot 1 = 2$, ovvero $h(1) = h(-1)$.

  h *NON è suriettiva*: dato qualunque $x \in \mathbb{R}$, si ha che $h(x) = 2 \cdot |x| \geq 0$. Quindi dato $y \in \mathbb{R}$ tale che $y < 0$, non esiste nessun $x \in \mathbb{R}$ per cui valga $h(x) = y$.

  In particolare, h non è nemmeno una funzione *biettiva*.

- k *NON è iniettiva*: ad esempio, si ha che $1 \neq -1$ ma $k(1) = -2 \cdot |1| = -2 \cdot 1 = -2$ e $k(-1) = -2 \cdot |-1| = -2 \cdot 1 = -2$, ovvero $k(1) = k(-1)$.

  k *è suriettiva*: dato qualunque $y \in \mathbb{R}_{\leq 0}$, basta porre $x = \frac{y}{2}$ per avere che

  $$k(x) = k\left(\frac{y}{2}\right) = -2 \cdot \left|\frac{y}{2}\right| = -2 \cdot -\left(\frac{y}{2}\right) = y,$$

  dove la penultima uguaglianza vale poiché $y \leq 0$, da cui anche $\frac{y}{2} \leq 0$.

  Poiché non è iniettiva, h non è nemmeno una funzione *biettiva*.

Esercizio 3
Sia

$$\mathrm{Fin} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ è finito}\}$$

e si ricordi che $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ è l'insieme di tutte le sequenze finite di numeri naturali. Dimostrare che

$$|\mathrm{Fin}| = |\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}|.$$

Soluzione: Si ha $\mathbb{N} \preceq \mathrm{Fin}$ via la mappa $n \mapsto \{n\}$, $\mathrm{Fin} \preceq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ via la mappa che associa ad $A \in \mathrm{Fin}$ la sequenza che enumera A in ordine crescente, e $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \approx \mathbb{N}$ per quanto visto a lezione. Quindi

$$\mathrm{Fin} \approx \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \approx \mathbb{N}$$

per il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein.

Esercizio 4
Si consideri l'insieme

$$D = \left\{ w \in \{a, b\}^{<\mathbb{N}} \mid a \text{ e } b \text{ compaiono in } w \text{ lo stesso numero di volte} \right\}.$$

Dimostrare che D è numerabile.

Soluzione:

Esercizio 5
Dimostrare che l'insieme

$$D = \left\{ s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N}\,(s(2k) = s(2k+1)) \right\}$$

è in biezione con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. È vero che D è numerabile?

Soluzione: La funzione $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to D$, $s \mapsto s'$ è una biezione, dove $s'(2n) = s'(2n+1) = s(n)$.

Esercizio 6
Dimostrare $D = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ è in biezione con $\mathbb{N}$.

Soluzione: $\mathbb{N} \subseteq D$ e $D \subseteq \mathbb{Q}$ quindi per il Teorema di Cantor-Shröder-Bernstein D è numerabile.

Esercizio 7
Sia $L = \{f, a\}$ un linguaggio del prim'ordine costituito dal simbolo di funzione unario f e dal simbolo di costante a. Sia Term l'insieme di tutti i termini nel linguaggio L. Dimostrare che l'insieme

$$A = \{t \in \mathrm{Term} \mid t \text{ non contiene variabili}\}$$

è un insieme numerabile, ovvero $|A| = |\mathbb{N}|$.

Suggerimento: Osservare che $a \in A$ e che se $t \in A$ allora $f(t) \in A$.

Soluzione: Gli elementi di A sono

$$a \qquad f(a) \qquad f(f(a)) \qquad f(f(f(a))) \qquad \dots \qquad f(\dots f(a) \dots) \qquad \dots.$$

Poiché $A \subseteq \{f, a, (,)\}^{<\mathbb{N}}$ si ha che $|A| \leq |\mathbb{N}|$. Viceversa, possiamo definire per ricorsione la successione di termini t_n, $n \in \mathbb{N}$, ponendo

$$t_0 = a$$
$$t_{n+1} = f(t_n).$$

La funzione $n \mapsto t_n$ è chiaramente iniettiva poiché t_n contiene n occorrenze del simbolo f, e testimonia quindi che $|\mathbb{N}| \leq |A|$. Per il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein, possiamo concludere che $|A| = |\mathbb{N}|$.

Osservazione: Si può anche notare direttamente che la funzione $n \mapsto t_n$ è una biezione tra $\mathbb{N}$ e A.

Esercizio 8
Dimostrare che

$$|A| = |B|$$

dove

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è un quadrato perfetto}\}$$

e

$$B = \left\{ \frac{1}{p+1} \mid p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Soluzione: Osserviamo che $A = \{m^2 \mid m \in \mathbb{N}\}$. La funzione

$$f \colon A \to B, \qquad m^2 \mapsto \frac{1}{m+1}$$

è allora una biezione che testimonia $A \approx B$.

2 Principio di induzione

Esercizio 1
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la relazione

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+3) = n^2 + 4n + 3.$$

Soluzione: Per induzione su $n \geq 0$.

Passo base $(n = 0)$
$\sum_{i=0}^{0}(2i+3) = 2 \cdot 0 + 3 = 3 = 0^2 + 4 \cdot 0 + 3.$

Passo induttivo

Ipotesi induttiva: $\sum_{i=0}^{n}(2i+3) = n^2 + 4n + 3.$

Tesi induttiva: $\sum_{i=0}^{n+1}(2i+3) = (n+1)^2 + 4(n+1) + 3.$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}(2i+3) &= \sum_{i=0}^{n}(2i+3) + 2(n+1) + 3 \\
&= n^2 + 4n + 3 + 2(n+1) + 3 \qquad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= n^2 + 6n + 8 \\
&= n^2 + 2n + 1 + 4n + 7 \\
&= (n+1)^2 + 4n + 7 \\
&= (n+1)^2 + 4n + 4 + 3 \\
&= (n+1)^2 + 4(n+1) + 3.
\end{aligned}$$

Esercizio 2
Definiamo la successione dei c_n per ricorsione su $n \in \mathbb{N}$ come segue:

$$c_0 = 2$$
$$c_{n+1} = \frac{1}{c_n}.$$

Dimostrare che per ogni $n \geq 0$

$$1/2 \leq c_n \leq 2.$$

Soluzione: Per induzione su $n \in \mathbb{N}$.

Passo base $(n = 0)$

Per definizione, si ha che

$$c_0 = 2$$

è un numero compreso nei valori richiesti, ossia

$$1/2 \leq c_0 \leq 2.$$

Passo induttivo

Ipotesi induttiva:
$$1/2 \leq c_n \leq 2.$$

Tesi induttiva:
$$1/2 \leq c_{n+1} \leq 2.$$

Verifichiamo dunque la tesi induttiva, sfruttando la definizione di c_{n+1} e l'ipotesi induttiva. Osserviamo che se $0 < c_n \leq 2$ allora

$$c_{n+1} = \frac{1}{c_n} \geq \frac{1}{2}.$$

Similmente se $c_n \geq \frac{1}{2}$, allora $c_n > 0$ e quindi si ha che

$$c_{n+1} = \frac{1}{c_n} \leq 2.$$

Quindi se vale $\frac{1}{2} \leq c_n \leq 2$, vale anche $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{c_n} = c_{n+1} \leq 2$
La tesi induttiva è dunque verificata come richiesto.

Esercizio 3
Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$a_0 = 1$$
$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} \cdot a_n$$

Dimostrare che per ogni $n > 0$
$$0 < a_n < 1.$$

Suggerimento: Per il passo induttivo, osservare innanzitutto che se $0 < r < 1$ allora anche $0 < \frac{1}{2} \cdot r < 1$ e $0 < 1 - r < 1$.

Soluzione: Per induzione su $n \geq 1$.

Passo base $(n = 1)$. Si ha $a_1 = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, per cui $0 < a_1 < 1$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $0 < a_n < 1$

Tesi induttiva: $0 < a_{n+1} < 1$

Osserviamo che poiché $0 < a_n < 1$ per ipotesi induttiva, allora vale anche $0 < \frac{1}{2} \cdot a_n < 1$
Poiché $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} \cdot a_n$, da $0 < \frac{1}{2} \cdot a_n$ segue che $a_{n+1} < 1$, mentre da $\frac{1}{2} \cdot a_n < 1$ segue che $a_{n+1} > 0$. Quindi $0 < a_{n+1} < 1$, come desiderato.

Esercizio 4
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = \frac{3n^2+5n+2}{2}.$$

Soluzione: Per induzione:

CASO BASE, $n = 0$**:**

$$\sum_{k=0}^{n} 3k+1 = 3\cdot 0+1 = 1 = \frac{3\cdot 0^2+5\cdot 0+2}{2}.$$

La tesi è verificata.

PASSO INDUTTIVO, $n = m+1$**:** Da un alto ho che:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 3k+1 =& (\sum_{k=0}^{m} 3k+1) + 3(m+1)+1 =^{Hp.Ind.}\\ &= \frac{3m^2+5m+2}{2} + 3m+4 =\\ &= \frac{3m^2+5m+2+6m+8}{2} =\\ &= \frac{3m^2+11m+10}{2}.\end{aligned}$$

D'altra parte osserviamo anche che:

$$\frac{3(m+1)^2+5(m+1)+2}{2} = \frac{3m^2+6m+3+5m+5+2}{2} = \frac{3m^2+11m+10}{2}.$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{n} 3k+1 = \frac{3m^2+11m+10}{2} = \frac{3(m+1)^2+5(m+1)+2}{2}.$$

La tesi è verificata anche per il passo induttivo.

Esercizio 5
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

Soluzione: Per induzione su $n \geq 0$.

Base $(n = 0)$

$$\sum_{i=0}^{0} 3^i = 3^0 = 1 = \frac{3-1}{2} = \frac{3^{0+1}-1}{2}.$$

Passo induttivo

Ipotesi induttiva: $\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

Tesi induttiva: $\sum_{i=0}^{n+1} 3^i = \frac{3^{(n+1)+1}-1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 3^i &= \sum_{i=0}^{n} 3^i + 3^{n+1} \\
&= \frac{3^{n+1}-1}{2} + 3^{n+1} && \text{per ip.ind.} \\
&= \frac{3^{n+1}-1+2\cdot 3^{n+1}}{2} \\
&= \frac{3\cdot 3^{n+1}-1}{2} \\
&= \frac{3^{(n+1)+1}-1}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6
Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Soluzione: Base ($n = 1$):

$$\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1(1+1) = 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3} = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$$

Passo induttivo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) &= \left(\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\right) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+3)(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}
\end{aligned}$$

Esercizio 7
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Soluzione: Base ($n = 0$):

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2^1 - 1 = 2^{0+1} - 1$$

Passi induttivo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} 2^i &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}\\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1\\ &= 2^{(n+1)+1} - 1\end{aligned}$$

Esercizio 8
Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} m = m \cdot n$$

ricordando che per convenzione $\sum_{i=1}^{0} m = 0$.

Soluzione: Sia $m \in \mathbb{N}$ un generico numero naturale, procediamo per induzione su n.
Base ($n = 0$):

$$\sum_{i=1}^{0} m = 0 = m \cdot 0$$

Passo induttivo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} m &= \left(\sum_{i=1}^{n} m\right) + m\\ &= (m \cdot n) + m \quad \text{per ipotesi induttiva}\\ &= m \cdot (n+1)\end{aligned}$$

Esercizio 9
Dato un linguaggio del prim'ordine L con un simbolo funzionale binario f ed un simbolo di costante a, dimostrare per induzione che per ogni $n > 0$ esiste un L-termine che contiene $2n$ occorrenze del simbolo a.

Soluzione: Se $n = 1$ allora si prende $f(a, a)$. Se la proposizione è vera per un generico k, allora sia t un termine con $2k$ occorrenze di a: la proposizione resta vera al passo induttivo prendendo per esempio $f(t, f(a, a))$ che contiene appunto $2k + 2 = 2(k + 1)$ occorrenze di a.

Esercizio 10
Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$

Soluzione:

Esercizio 11
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono esattamente 2^n stringhe di lunghezza n sull'alfabeto $A = \{0, 1\}$.

Soluzione:

Esercizio 12
Dimostrare per induzione che se n è dispari e $a_1, \ldots, a_n$ sono dispari, allora $\sum_{i=1}^{n} a_i$ è dispari.

Soluzione: Sia $P(n)$ l'affermazione: se $a_1, \ldots, a_{2n+1}$ sono dispari, allora $\sum_{i=1}^{2n+1} a_i$ è dispari.

Caso base. $P(0)$ dice che se a_1 è dispari, allora a_1 è dispari; quindi $P(0)$ vale.

Passo induttivo: $\sum_{i=1}^{2(k+1)+1} a_i = (\sum_{i=1}^{2k+1} a_i) + a_{2k+2} + a_{2k+3}$, per ipotesi induttiva $\sum_{i=1}^{2k+1} a_i$ è dispari e $a_{2k+2} + a_{2k+3}$ è pari, in quanto somma di 2 dispari, quindi $\sum_{i=1}^{2(k+1)+1} a_i$ è la somma di un pari e di un dispari, che è dspari.

Esercizio 13
Dimostrare per induzione che $\sum_{k=1}^{n}(4k + 1) = n(2n + 3)$.

Soluzione: Sia $P(n)$ l'affermazione: $\sum_{k=1}^{n}(4k + 1) = n(2n + 3)$.

Caso base. $P(1)$ dice che se $4 \cdot 1 + 1 = 5 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 3)$; quindi $P(1)$ vale.

Passo induttivo: $\sum_{k=1}^{m}(4k + 1) = m(2m + 3)$, per ipotesi induttiva $\sum_{k=1}^{m+1}(4k + 1) = (\sum_{k=1}^{m}(4k + 1)) + 4(m + 1) + 1 = m(2m + 3) + 4(m + 1) + 1 = 2m^2 + 7m + 5 = (m + 1)(2(m + 1) + 3)$.

Esercizio 14
Dimostrare per induzione che se $n \geq 1$ allora

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n - 1) \cdot 2^n + 1$$

Soluzione: Sia $P(n)$ l'affermazione $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n - 1) \cdot 2^n + 1$.

Caso base. Se $n = 1$ allora $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot 2^0 = 1$ e $(n - 1) \cdot 2^n + 1 = 0 \cdot 2^1 + 1$, quindi $P(1)$ èverificata.

Passo induttivo: supponiamo che la formula valga per un certo $m \geq 1$ e dimostriamola per $m + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k \cdot 2^{k-1} &= [\sum_{k=1}^{m} k \cdot 2^{k-1}] + (m + 1)2^m \\
&= [(m - 1) \cdot 2^m + 1] + (m + 1)2^m && \text{ipotesi induttiva} \\
&= (m - 1 + m + 1) \cdot 2^m + 1 \\
&= m \cdot 2^{m+1} + 1,
\end{aligned}$$

che è quanto dovevamo dimostrare.

Esercizio 15
Dimostrare per induzione che se $n \geq 1$ allora

$$\prod_{i=1}^{n}(4i-2) = \frac{(2n)!}{n!},$$

dove $\prod_{i=1}^{n}(4i-2) = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)$.

Soluzione: Caso base: $n = 1$. Allora $2 = \frac{2!}{1!}$.
Passo induttivo: $2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2) \cdot (4(n+1)-2) = \frac{(2n)!}{n!} \cdot (4n+2) = \frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}$

Esercizio 16
Data la definizione ricorsiva

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(n+1) &= 1 - f(n) \end{aligned}$$

dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) \in \{0, 1\}.$$

Soluzione:

Esercizio 17
Dato un alfabeto A, dimostrare per induzione che per ogni coppia di stringhe $s, t \in A^*$, la lunghezza della concatenazione di s con t è la somma delle lunghezze di s e di t, in simboli:

$$\mathrm{lh}(st) = \mathrm{lh}(s) + \mathrm{lh}(t)$$

Soluzione: Induzione sulla lunghezza di s.
Caso base: $s = \langle\rangle$. Allora

$$\begin{aligned} \mathrm{lh}(st) &= \mathrm{lh}(\langle\rangle t) \\ &= \mathrm{lh}(t) \\ &= 0 + \mathrm{lh}(t) \\ &= \mathrm{lh}(\langle\rangle) + \mathrm{lh}(t) \end{aligned}$$

Passo induttivo:

$$\begin{aligned} \mathrm{lh}((as)t) &= \mathrm{lh}(a(st)) \\ &= 1 + \mathrm{lh}(st) \\ &= 1 + \mathrm{lh}(s) + \mathrm{lh}(t) \\ &= \mathrm{lh}(as) + \mathrm{lh}(t) \end{aligned}$$

Esercizio 18
Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

Soluzione: Caso Base:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{0(0+1)}{2} \\ &= \frac{1}{6}0(0+1)(0+2)\end{aligned}$$

Passo induttivo: supponiamo che $\sum_{k=0}^{m} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$ valga per un qualche m fissato.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+1} \frac{k(k+1)}{2} &= (\sum_{k=0}^{m} \frac{k(k+1)}{2}) + \frac{(m+1)(m+2)}{2} \\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(m+2) + \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad \text{per ipotesi induttiva} \\ &= (m+1)(m+2)\left(\frac{1}{6}m + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)\end{aligned}$$

Esercizio 19
Dimostrare per induzione che esistono $n!$ permutazioni di un insieme con n elementi, dove $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Suggerimento. Si osservi che una permutazione di un insieme di $n+1$ elementi è determinata dalla scelta di un elemento dell'insieme con una permutazione dei restanti n elementi.

Soluzione: Caso Base: Se l'insieme è vuoto, allora chiaramente la funzione vuota è l'unica permutazione.
Passo induttivo: Assumiamo che ogni insieme di n elementi ammetta $n!$ permutazioni. Sia X un insieme di $n+1$ elementi: allora $X \setminus \{x\}$ ammette $n!$ permutazioni, per ipotesi induttiva, per ciascuna delle $n+1$ scelte posibili di $x \in X$, che dà un totale di $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ permutazioni.

Esercizio 20
Si dimostri per induzione strutturale che il numero di parentesi in una formula è sempre pari.

Soluzione: La base è ovvia: la formula è (A) per una lettera proposizionale A.
Per il passo induttivo, assumiamo che le formule φ, ψ contengano un numero pari di parentesi: si esaminano tutti i casi possibili ed in ciascuno si osserva che le parentesi sono in numero pari. Per esempio, se le parentesi di φ sono $2n$, le parentesi di ψ sono $2m$, allora le parentesi della formula $(\varphi \wedge \psi)$ sono $2n+2m+2 = 2(n+m+1)$, che è un numero pari.

Esercizio 21
Dimostrare per induzione su n che la funzione f definita ricorsivamente dalle clausole

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(n+1) &= 1 - f(n) \end{aligned}$$

soddisfa le condizioni seguenti, per ogni numero naturale n:

$$\begin{aligned} f(n) &= 0 && \text{se } n \text{ è pari} \\ f(n) &= 1 && \text{se } n \text{ è dispari} \end{aligned}$$

Soluzione: Sia $P(n)$ la proposizione:

$$\begin{aligned} f(n) &= 0 && \text{se } n \text{ è pari} \\ f(n) &= 1 && \text{se } n \text{ è dispari} \end{aligned}$$

Base: $P(0)$ è vera perché 0 è pari e $f(0) = 0$.
Passo induttivo: l'ipotesi induttiva è $P(n)$, bisogna dimostrare $P(n+1)$, cioè che

$$\begin{aligned} f(n) &= 0 && \text{se } n+1 \text{ è pari} \\ f(n+1) &= 1 && \text{se } n+1 \text{ è dispari} \end{aligned}$$

Procediamo per casi:
Se $n+1$ è pari, allora n è dispari, e applicando l'ipotesi induttiva abbiamo $f(n) = 1$, perciò

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 1 - f(n) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se $n+1$ è dispari, allora n è pari, e applicando l'ipotesi induttiva abbiamo $f(n) = 0$, perciò

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 1 - f(n) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Allora $P(n+1)$ è vera, che conclude la dimostrazione per induzione.

Esercizio 22
Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita per ricorsione dalle clausole

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(n+1) &= f(n) + 2n - 1. \end{aligned}$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(n) = n^2 - 2n.$$

Soluzione: Per induzione su $n \geq 0$.

Passo base $(n = 0)$**.** Si ha che $f(0) = 0 = 0^2 - 2 \cdot 0$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $f(n) = n^2 - 2n$

Tesi induttiva: $f(n+1) = (n+1)^2 - 2(n+1)$.

Usando la definizione di f si ha che

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + 2n - 1 && \text{(per definizione di } f\text{)} \\ &= n^2 - 2n + 2n - 1 && \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 \\ &= (n+1)^2 - 2n - 2 \\ &= (n+1)^2 - 2(n+1). \end{aligned}$$

Esercizio 23
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=0}^{n} (2i - 3) = n^2 - 2n - 3.$$

Soluzione: Per induzione su $n \geq 0$.

Passo base $(n = 0)$**.** Si ha che $\sum_{i=0}^{0}(2i - 3) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $\sum_{i=0}^{n}(2i - 3) = n^2 - 2n - 3$

Tesi induttiva: $\sum_{i=0}^{n+1}(2i - 3) = (n+1)^2 - 2(n+1) - 3$.

Si ha che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}(2i-3) &= \sum_{i=0}^{n}(2i-3) + 2(n+1) - 3 \\
&= n^2 - 2n - 3 + 2(n+1) - 3 && \text{(per ipotesi induttiva)} \\
&= n^2 - 2n - 3 + 2n + 2 - 3 \\
&= n^2 + 2n + 1 - 2n - 3 + 1 - 3 \\
&= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - 3 \\
&= (n+1)^2 - 2(n+1) - 3.
\end{aligned}$$

Esercizio 24
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=0}^{n}(4i+4) = (n+1)(2n+4).$$

Soluzione: Per induzione su $n \geq 0$.

Passo base $(n = 0)$**.** Si ha che $\sum_{i=0}^{0}(4i+4) = 4 = (0+1)(2 \cdot 0 + 4)$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $\sum_{i=0}^{n}(4i+4) = (n+1)(2n+4)$.

Tesi induttiva: $\sum_{i=0}^{n+1}(4i+4) = ((n+1)+1)(2(n+1)+4)$.

Sviluppando il primo termine dell'uguaglianza si ha che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}(4i+4) &= \sum_{i=0}^{n}(4i+4) + (4(n+1)+4) \\
&= (n+1)(2n+4) + (4(n+1)+4) && \text{(per ipotesi induttiva)} \\
&= 2n^2 + 4n + 2n + 4 + 4n + 4 + 4 \\
&= 2n^2 + 10n + 12.
\end{aligned}$$

D'altra parte, sviluppando il secondo termine dell'uguaglianza si ha che

$$\begin{aligned}
((n+1)+1)(2(n+1)+4) &= (n+2)(2n+6) \\
&= 2n^2 + 6n + 4n + 12 \\
&= 2n^2 + 10n + 12.
\end{aligned}$$

Dunque anche la tesi induttiva è verificata e la dimostrazione per induzione è completa.

Esercizio 25
Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 4n + 8. \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n = (n+1)(2n+4).$$

Soluzione: Per induzione su $n \geq 0$.

Passo base $(n = 0)$**.** Si ha che $a_0 = 4 = (0+1)(2 \cdot 0 + 4)$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $a_n = (n+1)(2n+4)$.

Tesi induttiva: $a_{n+1} = ((n+1)+1)(2(n+1)+4)$.

Per definizione di a_{n+1} si ha che

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 4n + 8 \\ &= (n+1)(2n+4) + 4n + 8 && \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= 2n^2 + 4n + 2n + 4 + 4n + 8 \\ &= 2n^2 + 10n + 12. \end{aligned}$$

D'altra parte, sviluppando il secondo termine dell'uguaglianza della tesi induttiva si ha che

$$\begin{aligned} ((n+1)+1)(2(n+1)+4) &= (n+2)(2n+6) \\ &= 2n^2 + 6n + 4n + 12 \\ &= 2n^2 + 10n + 12. \end{aligned}$$

Dunque anche la tesi induttiva è verificata e la dimostrazione per induzione è completa.

Esercizio 26
Siano a e b due numeri naturali. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza

$$(a+b)^n \geq a^n + b^n.$$

Soluzione: Per induzione su $n \geq 1$.

Passo base $(n = 1)$**.** Si ha che $(a+b)^1 = a + b = a^1 + b^1$, dunque in particolare $(a+b)^1 \geq a^1 + b^1$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $(a+b)^n \geq a^n + b^n$.

Tesi induttiva: $(a+b)^{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$.

Utilizzando la definizione di esponenziale e il fatto che $a + b$, ba^n e ab^n sono tutti numeri maggiori o uguali a 0, si ottiene che

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\ &\geq (a^n + b^n) \cdot (a+b) && \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= a^{n+1} + ba^n + ab^n + b^{n+1} \\ &\geq a^{n+1} + b^{n+1}, \end{aligned}$$

come desiderato.

3 Logica proposizionale

Esercizio 1
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: &\quad \neg \mathrm{A} \to \neg \mathrm{B} \\ \mathrm{Q}: &\quad \neg \mathrm{B} \to \neg \mathrm{A} \\ \mathrm{R}: &\quad \neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B} \end{aligned}$$

Determinare se:

1. $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$;
2. $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \models \mathrm{P}$;
3. $\mathrm{P} \wedge \mathrm{R} \equiv \mathrm{Q}$.

Soluzione: Si ha che:

- $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q}$ se e solo se la formula $\mathrm{P}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{P}_n \to \mathrm{Q}$ è una tautologia.
- $\mathrm{S} \equiv \mathrm{T}$ se e solo se la formula $\mathrm{S} \leftrightarrow \mathrm{T}$ è una tautologia.

Calcolando le tavole di verità di P, Q e R si verifica che:

1. $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \not\models \mathrm{R}$ poichè la formula $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \to \mathrm{R}$ non è una tautologia (è falsa se A e B sono entrambe vere);
2. $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \models \mathrm{P}$ poichè la formula $\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R} \to \mathrm{P}$ è una tautologia;
3. $\mathrm{P} \wedge \mathrm{R} \not\equiv \mathrm{Q}$ poichè la formula $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{R}) \leftrightarrow \mathrm{Q}$ non è una tautologia (è falsa se A è falsa e B è vera);

Esercizio 2
Sia P la proposizione

$$\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \to \mathrm{A}).$$

Giustificando le proprie risposte, dire quale delle seguenti proposizioni sono conseguenza logica di P:

1. $\mathrm{A} \leftrightarrow \neg \mathrm{A}$
2. $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \vee (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$
3. $\neg \mathrm{B} \to \mathrm{A}$

Soluzione: Utilizzando le tavole di verità, si vede che la seconda e la terza proposizione sono conseguenza logica di P, la prima no.

Esercizio 3
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{P}_0: & A \wedge \neg B \\ \mathrm{P}_1: & B \vee \neg C \\ \mathrm{P}_2: & A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C) \end{array}$$

Determinare se:

1. $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1 \models \mathrm{P}_2$;
2. $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_1 \models \mathrm{P}_0$;
3. $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_2 \models \mathrm{P}_1$.

Soluzione: Calcolando le tavole di verità di P_0, P_1 e P_2 si verifica che:

1. $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1 \models \mathrm{P}_2$;
2. $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_1 \not\models \mathrm{P}_0$;
3. $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_2 \models \mathrm{P}_1$.

Esercizio 4
Sia P la proposizione $\neg(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \vee \neg\mathrm{B}$. Giustificando la propria risposta, determinare quali delle seguenti sono conseguenza logica di P:

1. $\neg\mathrm{B}$
2. $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$
3. $\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}$
4. $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$

Soluzione: Utilizzando le tavole di verità si ottiene facilmente che solo la formula $\neg\mathrm{B}$ è conseguenza logica di P (in effetti, si può controllare che è addirittura logicamente equivalente ad essa).

Esercizio 5
Sia P la proposizione $\neg(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \vee \neg\mathrm{B}$. Giustificando la propria risposta, determinare quali delle seguenti sono conseguenza logica di P:

1. $\neg\mathrm{B}$
2. $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$
3. $\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}$
4. $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$

Soluzione: Utilizzando le tavole di verità si ottiene facilmente che solo la formula $\neg B$ è conseguenza logica di P (in effetti, si può controllare che è addirittura logicamente equivalente ad essa).

Esercizio 6
Sia P la proposizione $\neg(A \rightarrow B) \vee B$. Giustificando la propria risposta, determinare quali delle seguenti sono conseguenza logica di P:

1. $\neg A$
2. $A \wedge B$
3. $A \vee B$
4. $A \rightarrow B$

Soluzione: Utilizzando le tavole di verità si ottiene facilmente che solo la formula $A \vee B$ è conseguenza logica di P (in effetti, si può controllare che è addirittura logicamente equivalente ad essa).

Esercizio 7
Sia P la proposizione $\neg(B \rightarrow A) \vee (B \vee A)$. Giustificando la propria risposta, verificare quali delle seguenti proposizioni sono logicamente equivalenti a P, quali sono conseguenza logica di P, quali non sono né l'una né l'altra:

1. $B \rightarrow A$
2. $\neg B \rightarrow A$
3. B
4. $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

Soluzione: Utilizzando le tavole di verità si ottiene facilmente che:

- $B \rightarrow A$ non è conseguenza logica di P, quindi non è nemmeno logicamente equivalente ad esso.
- B è logicamente equivalente a P.
- $\neg B \rightarrow A$ è conseguenza logica di P, ma non è logicamente equivalente ad esso.
- $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ è conseguenza logica di P, ma non è logicamente equivalente ad esso.

Esercizio 8
Giustificando la propria risposta, determinare se è vero che

$$\neg B \vee A\,,\ \neg(C \wedge A) \models C \rightarrow \neg B.$$

Soluzione: Utilizzando le tavole di verità si vede che effettivamente l'affermazione è corretta. Alternativamente si può ragionare come segue. Se A è vera, allora affinchè siano vere le premesse della conseguenza logica si deve avere che C è falsa: ma in tali casi anche l'implicazione $\mathrm{C} \to \neg\mathrm{B}$ è vera. Se invece A è falsa, allora affinchè siano vere le premesse della conseguenza logica si deve avere che $\neg\mathrm{B}$ è vera: ma anche in questo caso l'implicazione $\mathrm{C} \to \neg\mathrm{B}$ risulta automaticamente vera. Perciò in ogni caso (valutazione) in cui le due premesse sono vere anche la conclusione è vera, da cui la conseguenza logica.

Esercizio 9

1. Dimostrare mediante tavole di verità che vale la seguente relazione:

$$\neg\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B}, \mathrm{B} \wedge \neg\mathrm{C} \models \neg\mathrm{A} \to \neg\mathrm{C}$$

2. Dimostrare mediante tavole di verità:

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B}, \mathrm{C} \to \mathrm{B}, \neg\mathrm{B} \not\models \mathrm{A} \vee \mathrm{C}$$

Soluzione: (1) Ovviamente basta controllare le 8 righe della tavola di verità. In alternativa, si può ragionare come segue: se v è una valutazione che rende vere tutte le premesse, in particolare $v(\mathrm{B} \wedge \neg\mathrm{C}) = T$, da cui $v(\neg\mathrm{C}) = T$ e quindi $v(\neg\mathrm{A} \to \neg\mathrm{C}) = T$.
(2) In questo caso bisogna trovare v che renda vere tutte le premesse e falsa la conclusione. Per una tale v si deve avere $v(\mathrm{A}) = v(\mathrm{C}) = F$. Basta prendere v tale che $v(\mathrm{B}) = F$ per ottenere la conclusione.

Esercizio 10

1. Indicare, se esiste, una valutazione delle lettere proposizionali $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ che dimostri che $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge (\neg\mathrm{A} \to \mathrm{C})$ non è conseguenza logica di $(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) \vee (\neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{C})$, motivando la scelta.
2. Si consideri la proposizione "Solo gli studenti che prendono almeno 18 allo scritto possono essere ammessi all'orale": quale dei seguenti casi esclude?
(1) Alice ha preso 18 allo scritto ma non è ammessa all'orale;
(2) Bice ha preso 18 allo scritto ed è ammessa all'orale;
(3) Carlo ha preso 17 allo scritto ed è ammesso all'orale;
(4) Davide ha preso 17 allo scritto e non è ammesso all'orale.

Soluzione: (1) Basta considerare la valutazione v tale che $v(\mathrm{A}) = 1$, $v(\mathrm{B}) = 0$, o la valutazione v' tale che $v'(\mathrm{A}) = v'(\mathrm{C}) = 0$.
(2) Il caso (3).

Esercizio 11
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: &\quad \mathrm{A} \to \mathrm{B} \\ \mathrm{Q}: &\quad \mathrm{B} \to \mathrm{A} \\ \mathrm{R}: &\quad \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \end{aligned}$$

Determinare se:

1. $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$;
2. $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \models \mathrm{P}$;
3. $\mathrm{P}, \mathrm{R} \models \mathrm{Q}$.

Soluzione: Si ha che $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q}$ se e solo se la formula $\mathrm{P}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{P}_n \rightarrow \mathrm{Q}$ è una tautologia.

Calcolando le tavole di verità di P, Q e R si verifica che:

1. $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \not\models \mathrm{R}$ poichè la formula $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}$ non è una tautologia (è falsa se A e B sono entrambe false);
2. $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \not\models \mathrm{P}$ poichè la formula $\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{P}$ non è una tautologia (è falsa se B è falsa e A è vera);
3. $\mathrm{P}, \mathrm{R} \not\models \mathrm{Q}$ poichè la formula $\mathrm{P} \wedge \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{Q}$ non è una tautologia (è falsa se A è falsa e B è vera);

Esercizio 12
Data la formula proposizionale

$$(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \vee (\neg \mathrm{A} \rightarrow \neg \mathrm{C})$$

indicare quali delle seguenti formule ne sono conseguenze logiche:

1. A
2. B
3. $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}$
4. $\neg \mathrm{A} \vee (\neg \mathrm{A} \rightarrow \neg \mathrm{C})$

Soluzione: Solo (4) è conseguenza logica della formula. Negli altri casi per avere controesempi basta considerare $\mathrm{A} = F, \mathrm{B} = F, \mathrm{C} = F$.

Esercizio 13
Data la seguente formula proposizionale P

$$(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B} \wedge \neg \mathrm{C}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \neg \mathrm{C}),$$

quali delle seguenti formule **non** sono conseguenze logiche di P?

1. $(\mathrm{C} \rightarrow \mathrm{B}) \rightarrow \neg \mathrm{A}$
2. $\mathrm{A} \vee \mathrm{C}$
3. $\neg \mathrm{C}$
4. $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \rightarrow \mathrm{C}$

Soluzione: Solo 1 e 4 non sono conseguenze logiche della formula. Infatti, per 1 basta considerare il caso in cui A è vero e B, C falsi; per 4 basta considerare il caso in cui A, B sono veri e C falso.

Esercizio 14
Indicare per ciascuna delle seguenti righe se vale la relazione di conseguenza logica indicata, motivando la risposta con la corrispondente tavola di verità:

1. $\neg \mathrm{A} \vee \neg \mathrm{B} \models \neg \mathrm{A} \rightarrow \neg \mathrm{B}$
2. $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \models \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$
3. $\neg \mathrm{B} \rightarrow \neg \mathrm{A} \models \neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$
4. $\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B} \models \neg \mathrm{A} \rightarrow \neg \mathrm{B}$

Soluzione: (1) non vale, per esempio, se A è falsa e B vera. (2) è falsa quando A, B sono false. (3) è vera, ed esprime una forma della legge di contrapposizione. (4) è vera.

Esercizio 15
Verificare se la seguente affermazione è valida o meno:

$$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}, (\mathrm{R} \wedge \mathrm{P}) \rightarrow \mathrm{Q}, \neg \mathrm{R} \not\models \mathrm{P}$$

Soluzione: Basta osservare che la valutazione v tale che $v(\mathrm{Q}) = 1, v(\mathrm{P}) = v(\mathrm{R}) = 0$ rende vere tutte le premesse e falsa la conclusione per concludere che P non è conseguenza logica di $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}, (\mathrm{R} \wedge \mathrm{P}) \rightarrow \mathrm{Q}, \neg \mathrm{R}$.
(2) (a), (c) e (d).

Esercizio 16
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{P}_0 : & \mathrm{B} \wedge \neg \mathrm{A} \\ \mathrm{P}_1 : & \mathrm{C} \vee \neg \mathrm{B} \\ \mathrm{P}_2 : & \mathrm{C} \leftrightarrow (\neg \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \end{array}$$

Determinare se:

1. $\mathrm{P}_0 \models \mathrm{P}_2 \vee \mathrm{P}_1$;
2. $\mathrm{P}_1 \models \mathrm{P}_0 \wedge \mathrm{P}_2$;
3. $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1 \models \mathrm{P}_2$.

Soluzione: Si ha che $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q}$ se e solo se la formula $\mathrm{P}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{P}_n \rightarrow \mathrm{Q}$ è una tautologia.

Calcolando le tavole di verità di P_0, P_1 e P_2 si verifica che:

1. $\mathrm{P}_0 \not\models \mathrm{P}_2 \vee \mathrm{P}_1$ poichè la formula $\mathrm{P}_0 \rightarrow \mathrm{P}_2 \vee \mathrm{P}_1$ non è una tautologia (è falsa se C e A sono entrambe false e B è vera);

2. $\mathrm{P}_1 \not\models \mathrm{P}_0 \wedge \mathrm{P}_2$ poichè la formula $\mathrm{P}_1 \rightarrow \mathrm{P}_0 \wedge \mathrm{P}_2$ non è una tautologia (è falsa se C e A sono entrambe vere);

3. $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1 \models \mathrm{P}_2$ poichè la formula $\mathrm{P}_0 \wedge \mathrm{P}_1 \rightarrow \mathrm{P}_2$ è una tautologia.

Esercizio 17
Usare il calcolo proposizionale per risolvere il seguente problema:

> Alessandro, Beatrice e Carlo vanno al ristorante. Se Alessandro ordina una pizza altrettanto fa Beatrice; Beatrice o Carlo, ma non entrambi, ordinano una pizza; Alessandro o Carlo, o entrambi, ordinano una pizza. Se Carlo ordina una pizza, altrettanto fa Alessandro. Chi ordina una pizza?

Soluzione: $A \to B$, $B \oplus C$, $A \vee C$, $C \to A$ sono vere. Poiché $C \to A$ è equivalente a $\neg C \vee A$, e dato che vale $A \vee C$, segue A, quindi B, quindi $\neg C$. Riassumendo: Alessandro e Beatrice ordinano la pizza, Carlo no.

Esercizio 18
Siano date le formule

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: &\quad \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C} \\ \mathrm{Q}: &\quad \neg\mathrm{A} \to \mathrm{B} \\ \mathrm{R}: &\quad \neg\mathrm{C} \to \mathrm{A} \end{aligned}$$

Giustificando le proprie risposte, verificare se:

1. $\mathrm{Q} \models \mathrm{P}$
2. $\mathrm{R} \models \mathrm{P}$
3. $\mathrm{R} \vee \mathrm{Q} \equiv \mathrm{P}$

Soluzione: Le tavole di verità delle tre formule mostrano che:

1. Ogni volta che Q è vera anche P lo è, quindi $\mathrm{Q} \models \mathrm{P}$ (si può osservare che Q ha la stessa tavola di verità di $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$: quindi se $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ è vera, chiaramente lo è anche $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}$).

2. Ogni volta che R è vera anche P lo è, quindi $\mathrm{R} \models \mathrm{P}$ (basta osservare che R ha la stessa tavola di verità di $\mathrm{C} \vee \mathrm{A}$: quindi se $\mathrm{C} \vee \mathrm{A}$ è vera, lo è anche $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}$).

3. $\mathrm{R} \vee \mathrm{Q}$ e P hanno la stessa tavola di verità e quindi sono logicamente equivalenti.

Esercizio 19
Siano date le formule

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: &\quad (\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) \to \neg\mathrm{C} \\ \mathrm{Q}: &\quad \neg\mathrm{B} \to \mathrm{A} \\ \mathrm{R}: &\quad \neg\mathrm{B} \to \neg\mathrm{C} \end{aligned}$$

Giustificando le proprie risposte, verificare se:

1. $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$
2. $\mathrm{R}, \mathrm{P} \models \mathrm{Q}$
3. $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \equiv \mathrm{R}$

Soluzione: Le tavole di verità delle tre formule mostrano che:

1. Ogni volta che in cui sia Q che P sono vere, anche R lo è; quindi $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$.
2. Se C, B, A sono tutte false si ha che R e P sono entrambe vere, mentre Q è falsa, quindi $\mathrm{R}, \mathrm{P} \not\models \mathrm{Q}$.
3. $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ e R non hanno la stessa tavola di verità e quindi non sono logicamente equivalenti (se C, B, A sono tutte false, $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ è falso mentre R è vera).

NOTA BENE: *Anche se in questa soluzione le tavole di verità delle tre formule non vengono presentate, si raccomanda di riportare le tavole nella soluzione a tutti gli studenti che le utilizzano come strumento per risolvere l'esercizio.*

Esercizio 20
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_0 : &\quad \neg \mathrm{A} \to \mathrm{C} \\ \mathrm{Q}_1 : &\quad \neg \mathrm{A} \to \neg \mathrm{B} \\ \mathrm{Q}_2 : &\quad (\mathrm{B} \vee \neg \mathrm{C}) \to \mathrm{A} \end{aligned}$$

Determinare se:

1. $\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1 \models \mathrm{Q}_2$;
2. $\mathrm{Q}_2 \models \mathrm{Q}_0 \wedge \mathrm{Q}_1$;
3. $\mathrm{Q}_0 \vee \mathrm{Q}_1 \equiv \mathrm{Q}_2$.

Soluzione:

$$\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q}$$

se e solo se ogni interpretazione delle variabili proposizionali che compaiono in almeno una tra $\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n, \mathrm{Q}$ che rende vera tutte le formule $\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n$, rende vera anche Q.

$$\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$$

se e solo se

$$\mathrm{P} \models \mathrm{Q} \text{ e } \mathrm{P} \models \mathrm{Q}$$

se e solo se P e Q hanno la stessa tavola di verità.

Le tavole di verità delle tre formule mostrano che:

1. Ogni volta che Q_0 e Q_1 sono vere, lo è anche Q_2.
   Quindi $\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1 \models \mathrm{Q}_2$.
2. Ogni volta che Q_2 è vera lo sono anche Q_1 e Q_0, e quindi lo è anche $\mathrm{Q}_0 \wedge \mathrm{Q}_1$.
   Quindi $\mathrm{Q}_2 \models \mathrm{Q}_0 \wedge \mathrm{Q}_1$.
3. $\mathrm{Q}_0 \vee \mathrm{Q}_1$ e Q_2 non hanno la stessa tavola di verità e quindi non sono logicamente equivalenti.

Esercizio 21
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{S}_0: & \neg \mathrm{C} \leftrightarrow \mathrm{A} \\ \mathrm{S}_1: & \neg \mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B} \\ \mathrm{S}_2: & \mathrm{B} \rightarrow (\mathrm{A} \vee \mathrm{C}) \end{array}$$

Determinare se:

1. $\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1 \models \mathrm{S}_2$;
2. $\mathrm{S}_2 \models \mathrm{S}_0 \wedge \mathrm{S}_1$;
3. $\mathrm{S}_2 \equiv \mathrm{S}_1 \vee \mathrm{S}_0$.

Soluzione:

$$\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q}$$

se e solo se ogni interpretazione delle variabili proposizionali che compaiono in almeno una tra $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n, \mathrm{Q}$ che rende vera tutte le formule $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n$, rende vera anche Q.

$$\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$$

se e solo se

$$\mathrm{P} \models \mathrm{Q} \text{ e } \mathrm{P} \models \mathrm{Q}$$

se e solo se P e Q hanno la stessa tavola di verità.

Le tavole di verità delle tre formule mostrano che:

1. Ogni volta che S_0 e S_1 sono vere, lo è anche S_2.
   Quindi $\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1 \models \mathrm{S}_2$.
2. Se B e A sono vere, S_2 è vera mentre S_1 è falsa, quindi lo è anche $\mathrm{S}_0 \wedge \mathrm{S}_1$.
   Quindi $\mathrm{S}_2 \not\models \mathrm{S}_0 \wedge \mathrm{S}_1$.
3. $\mathrm{S}_1 \vee \mathrm{S}_0$ e S_2 non hanno la stessa tavola di verità (per esempio se A e C sono false e B è vera si ha che S_2 è falsa, mentre $\mathrm{S}_1 \vee \mathrm{S}_0$ è vera), quindi non sono logicamente equivalenti.

Esercizio 22
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Q}_0: & (\neg \mathrm{C} \wedge \mathrm{A}) \vee (\mathrm{C} \wedge \neg \mathrm{A}) \\ \mathrm{Q}_1: & (\neg \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}) \\ \mathrm{Q}_2: & \neg \mathrm{B} \vee \mathrm{A} \vee \mathrm{C} \end{array}$$

Giustificando le proprie risposte, determinare se:

1. $\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1 \models \mathrm{Q}_2$;
2. $\mathrm{Q}_2 \models \mathrm{Q}_0 \wedge \mathrm{Q}_1$;

3. $Q_2 \equiv Q_1 \vee Q_0$.

Soluzione:

$$P_0, \ldots, P_n \models Q$$

se e solo se ogni interpretazione delle variabili proposizionali che compaiono in almeno una tra $P_0, \ldots, P_n, Q$ che rende vera tutte le formule $P_0, \ldots, P_n$, rende vera anche Q.

$$P \equiv Q$$

se e solo se

$$P \models Q \text{ e } P \models Q$$

se e solo se P e Q hanno la stessa tavola di verità.

Le tavole di verità delle tre formule mostrano che:

1. Ogni volta che Q_0 e Q_1 sono vere, lo è anche Q_2.

   Quindi $Q_0, Q_1 \models Q_2$.

2. Se B e A sono vere, Q_2 è vera mentre Q_1 è falsa, quindi lo è anche $Q_0 \wedge Q_1$.

   Quindi $Q_2 \not\models Q_0 \wedge Q_1$.

3. $Q_1 \vee Q_0$ e Q_2 non hanno la stessa tavola di verità (per esempio se A e C sono false e B è vera si ha che Q_2 è falsa, mentre $Q_1 \vee Q_0$ è vera), quindi non sono logicamente equivalenti.

4 Logica del prim'ordine: semantica

Esercizio 1
Sia $L = \{R, f\}$, dove R simbolo di relazione binario e f simbolo di funzione binario. Sia φ la seguente formula
$$\forall x \exists y R(f(x, y), z).$$

1. Sottolineare (nel caso in cui ve ne siano) ciascuna occorrenza libera di variabile in φ.
2. Determinare se $\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/5, z/0]$ dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq, + \rangle$.
3. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{Z}$ si ha che $\mathcal{B} \models \varphi[x/2, y/5, z/k]$ dove $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, \geq, \cdot \rangle$.

Giustificare le proprie risposte.

Suggerimento. Nel terzo punto distinguere i casi $k \leq 0$ e $k > 0$.

Soluzione:

1. $\forall x \exists y R(f(x, y), \underline{z})$.
2. Bisogna determinare se è vero in $\mathbb{N}$ che per ogni $x \in \mathbb{N}$ esiste $y \in \mathbb{N}$ tale che $x + y \leq 0$. Osserviamo che se $x > 0$ non ci può essere alcun $y \in \mathbb{N}$ tale che $x + y \leq 0$: infatti qualunque sia y si avrebbe $0 < x \leq x + y$. Di conseguenza abbiamo verificato che $\mathcal{A} \not\models \varphi[x/2, y/5, z/0]$.
3. Si ha $\mathcal{B} \models \varphi[x/2, y/5, z/k]$ se e solo se $k \leq 0$. Bisogna infatti determinare per quali $k \in \mathbb{Z}$ si ha che per ogni $x \in \mathbb{Z}$ esiste $y \in \mathbb{Z}$ tale che $x \cdot y \geq k$. Se $k \leq 0$, allora dato qualunque $x \in \mathbb{Z}$ basterà porre $y = 0$ ottenendo $x \cdot y = x \cdot 0 = 0 \geq k$. Se invece $k > 0$, posto $x = 0$ non si potrà trovare un $y \in \mathbb{Z}$ per cui $x \cdot y \geq k$, perché in ogni caso si avrà $x \cdot y = 0 \cdot y = 0 < k$.

Esercizio 2
Sia $L = \{f\}$ un linguaggio costituito da un unico simbolo di funzione binario. Sia φ la formula
$$\forall y \forall z (f(y, z) = x \rightarrow y = x \vee z = x).$$

1. Determinare tutti gli $n \in \mathbb{N}$ tali che $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle \models \varphi[x/n]$.
2. Determinare tutti gli $n \in \mathbb{N}$ tali che $\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \varphi[x/n]$.
3. Dimostrare che $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle \not\models \varphi[x/3]$.

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. L'interpretazione di φ nella struttura data è:

   Per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, se $i \cdot j = x$ allora $i = x$ oppure $j = x$.

   Quindi $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle \models \varphi[x/n]$ se e solo se $n = 0$, $n = 1$ oppure n è un numero primo.

2. L'interpretazione di φ nella struttura data è:

   Per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, se $i + j = x$ allora $i = x$ oppure $j = x$.

   Se $n > 1$, allora $n = i + j$ con $i = n - 1$ e $j = 1$: siccome $n \neq n - 1$ e, nel nostro caso, $n \neq 1$, si ha $\langle \mathbb{N}, + \rangle \not\models \varphi[x/n]$. D'altra parte, se $i + j = 1$ allora $i = 1$ e $j = 0$, oppure $i = 0$ e $j = 1$; inoltre se $i + j = 0$ allora $i = j = 0$. Quindi $\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \varphi[x/n]$ se e solo se $n = 0$ oppure $n = 1$.

3. L'interpretazione di φ nella struttura data è:

   Per ogni $i, j \in \mathbb{Z}$, se $i \cdot j = x$ allora $i = x$ oppure $j = x$.

   Poiché $3 = (-3) \cdot (-1)$ ma $3 \neq -3$ e $3 \neq -1$, ponendo $i = -3$ e $j = -1$ si vede che $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle \not\models \varphi[x/3]$.

Esercizio 3
Sia $L = \{f, g, c\}$, dove f e g sono simboli di funzione binari e c è un simbolo di costante. Sia φ la formula

$$\forall x \forall y (f(g(x, x), c) = f(c, g(y, y)) \to x = y).$$

1. Dimostrare che $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle \models \varphi$.
2. Dimostrare che $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle \not\models \varphi$.

Soluzione:

1. L'interpretazione di φ in $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ è

   Per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $(x \cdot x) + 0 = 0 + (y \cdot y)$ allora $x = y$.

   Chiaramente $(x \cdot x) + 0 = 0 + (y \cdot y)$ se e solo se $x^2 = y^2$. Ma in $\mathbb{N}$ si ha che se $n, m \in \mathbb{N}$ sono diversi, allora $n^2 \neq m^2$. Quindi è vero che se $x^2 = y^2$ allora $x = y$, perciò $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle \models \varphi$.

2. L'interpretazione di φ in $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ è

   Per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$, se $(x \cdot x) + 0 = 0 + (y \cdot y)$ allora $x = y$.

   Ponendo ad esempio $x = 10$ e $y = -10$ si ha che

   $$(10 \cdot 10) + 0 = 100 + 0 = 0 + 100 = 0 + ((-10) \cdot (-10)),$$

   ma chiaramente $1 \neq -1$: quindi $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle \not\models \varphi$.

   Osservazione: Al posto di 10 e -10, si poteva prendere qualunque intero non nullo k e porre $x = k$ e $y = -k$.

3. Le due strutture non possono essere isomorfe perché non soddisfano gli stessi enunciati, come testimoniato dall'enunciato φ stesso.

Esercizio 4
Sia φ la formula

$$\exists x \forall y R(x, y)$$

e ψ la formula

$$\forall y \exists x R(x,y)$$

dimostrare che ψ $\not\models$ φ.

Soluzione: Consideriamo la $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \geq)$ con $\mathcal{L} = \{R\}$ e $\leq$ interpretazione del simbolo di relazione binaria $\mathcal{L}$.

L'interpretazione di ϕ in $\mathcal{N}$ asserisce che esiste un numero maggiore o uguale di tutti gli altri, e quindi è falsa. Invece l'interpretazione di ψ in $\mathcal{N}$ asserisce che ogni numero n ha un altro numero m che ne è maggiore o uguale ed è quindi vera.

Quindi $\mathcal{N}$ testimonia che ϕ non è conseguenza logica di ϕ

Esercizio 5
Sia $L = \{R, f, a, c\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario R, un simbolo di funzione binario f e due simboli di costante a e c. Sia φ l'enunciato

$$\forall x\, (\exists y R(y, f(x,y)) \to \exists z\, (R(a,z) \wedge R(z,x)))$$

e sia ψ l'enunciato

$$\forall x \forall z (\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x,c)) \to R(z,x) \vee R(f(x,c), z))$$

Per ciascuna delle seguenti L-strutture, determinare se gli enunciati φ e ψ sono veri in esse oppure no.

- $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, <, +, 0, 1 \rangle$
- $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, 0, 1 \rangle$

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione: In entrambe le strutture, l'interpretazione di φ è

> Per ogni x, se per qualche y si ha che $y < x+y$ allora c'è un z strettamente compreso tra 0 e x.

mentre l'interpretazione di ψ è

> Per ogni x e z, se z è diverso sia da x che da $x+1$ allora o $z < x$ oppure $x+1 < z$. (Equivalentemente: per ogni x non c'è alcun z strettamente compreso tra x e $x+1$.)

Quindi si ha che:

- In $\mathcal{Q}$ la formula φ è vera (cioè $\mathcal{Q} \models \varphi$). Infatti un arbitrario numero razionale x soddisfa la premessa dell'implicazione ("per qualche y si ha che $y < x+y$") se e solo se $x > 0$, e in tal caso è vero che c'è un z tale che $0 < z < x$.

- In $\mathcal{N}$ la formula φ è invece falsa (cioè $\mathcal{N} \not\models \varphi$). Infatti un arbitrario numero naturale x soddisfa la premessa dell'implicazione ("per qualche y si ha che $y < x + y$") se e solo se $x \neq 0$. Tuttavia, ponendo $x = 1$ si ha un numero che soddisfa la premessa dell'implicazione ma non la sua conclusione (non c'è nessun numero naturale strettamente compreso tra 0 e 1).

- Si ha che $\mathcal{Q} \not\models \psi$. Infatti, ponendo $x = 0$ e $z = \frac{1}{2}$ si ha che z è strettamente compreso tra 0 e $0 + 1$.

- Al contrario, $\mathcal{N} \models \psi$ perché non c'è nessun numero naturale strettamente compreso tra due numeri consecutivi arbitrari (ovvero tra due numeri del tipo x e $x + 1$).

Esercizio 6
Sia $L = \{f, g\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f e g sono entrambi simboli di funzione binari. Sia $\varphi(x)$ la formula
$$f(x, x) = g(x, x).$$
Consideriamo le due L-strutture seguenti:

- $\mathcal{R}_0 = \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$
- $\mathcal{R}_1 = \langle \mathbb{R}, +, - \rangle$

Giustificando la propria risposta, determinare tutti gli $r \in \mathbb{R}$ per cui si ha
$$\mathcal{R}_0 \models \varphi[x/r]$$
e tutti gli $r \in \mathbb{R}$ per cui vale
$$\mathcal{R}_1 \models \varphi[x/r].$$

Soluzione: L'interpretazione di $\varphi(x)$ in $\mathcal{R}_0$ è
$$x + x = x \cdot x,$$
ovvero
$$x^2 = 2x.$$
Quindi $\mathcal{R}_0 \models \varphi[r]$ se e solo se $r = 0$ oppure $r = 2$.

Similmente, l'interpretazione di $\varphi(x)$ in $\mathcal{R}_1$ è
$$x + x = x - x,$$
ovvero
$$2x = 0.$$
Quindi $\mathcal{R}_1 \models \varphi[r]$ se e solo se $r = 0$.

Esercizio 7
Sia $L = \{R, f, c\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario R, un simbolo di funzione binario f e un simbolo di costante c. Sia φ la formula
$$\forall x\, (\neg \exists y\, (f(y, y) = x) \to R(f(z, c), x)).$$
Consideriamo la L-struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 1 \rangle$.

1. Dire se φ è un enunciato oppure no, e nel secondo caso cerchiare le occorrenze libere di variabili.
2. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[x/0, y/0, z/0]$?
3. Trovare un'assegnazione $x/n, y/m, z/k$ tale che $\mathcal{N} \not\models \varphi[x/n, y/m, z/k]$.
4. Determinare se è vero che $\mathcal{N} \models \forall z \varphi$.

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. Non è un enunciato. C'è solo un'occorrenza libera di variabile, ovvero l'unica occorrenza di z.

2. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "Per ogni x dispari si ha che $z + 1 \leq x$". Se $\alpha_1(z) = 0$ allora si ha che $\mathcal{N} \models \varphi[\alpha_1]$ poiché è vero (in $\mathbb{N}$) che $\alpha_1(z) + 1$, ovvero il numero 1, è minore o uguale di tutti i numeri dispari.

3. Per quanto detto prima, un'assegnazione α_2 tale che $\alpha_2(z) = 1$ rende falsa la formula in $\mathcal{N}$: infatti se $x = 1$ si ha che x è dispari ma non è vero che $\alpha_2(z) + 1$, ovvero il numero 2, è minore o uguale di 1.

4. La formula $\forall z \varphi$ è falsa in $\mathcal{N}$ per il punto precedente (si ricordi che per definizione $\mathcal{N} \models \forall z \varphi$ se e solo se $\mathcal{N} \models \varphi[\alpha_{z \to n}]$ per ogni assegnazione α ed ogni $n \in \mathbb{N}$).

Esercizio 8
Sia $L = \{R, P, c\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario R, un simbolo di relazione unario P, e un simbolo di costante c. Sia φ l'enunciato

$$\exists y\, P(y) \wedge \forall x\, (P(x) \to R(c, x))$$

e sia ψ l'enunciato

$$\forall x\, R(c, x))$$

Dimostrare che

$$\varphi \not\models \psi.$$

Soluzione: Consideriamo la L-struttura $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \leq, \mathbb{N}, 0)$. Allora φ interpretata in $\mathcal{Z}$ vuol dire "esiste un numero naturale, e ogni numero naturale è maggiore o uguale a 0", mentre ψ interpretata in $\mathcal{Z}$ vuol dire "ogni intero è maggiore o uguale a 0". Quindi $\mathcal{Z} \models \varphi$ ma $\mathcal{Z} \not\models \psi$, per cui $\varphi \not\models \psi$.

Esercizio 9
Trovare l'insieme di verità in $\langle \mathbb{N}, |, 1 \rangle$ (dove i simboli $|$ e 1 sono interpretati nella maniera naturale) della seguente formula:

$$\exists y\, (y \mid x \wedge y \neq 1 \wedge y \neq x)\,.$$

Soluzione: L'insieme di verità è l'insieme dei numeri che non sono primi e diversi da 1.

Esercizio 10
Dimostrare che il seguente enunciato non è logicamente valido

$$\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) \rightarrow \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

costruendo una opportuna struttura in cui l'enunciato risulti falso.

Soluzione: Basta prendere una struttura $\mathcal{A}$ di supporto $\mathbb{N}$ in cui $P^{\mathcal{A}}$ èl'insieme dei numeri pari e $Q^{\mathcal{A}}$ èl'insieme dei numeri dispari.

Esercizio 11
Dimostrare che la formula $\forall x(C(x) \rightarrow S(x))$ non è conseguenza logica delle formule

$$\forall x(R(x) \rightarrow S(x)), \forall x(R(x) \rightarrow C(x)).$$

Soluzione:

Esercizio 12
Trovare l'insieme di verità in $\mathbb{N}$ della seguente formula:

$$\exists y\,(y \mid x \wedge P(y) \wedge \forall z(z \mid x \wedge P(z) \rightarrow z = y),)$$

dove $\mid$ denota la relazione di divisibilità e P il predicato per essere un numero primo.

Soluzione: L'insieme di verità è l'insieme dei numeri della forma p^n con p primo e $n \geq 1$.

Esercizio 13
Sia L un linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo relazionale binario P. Sia $\mathcal{A}$ la L-struttura il cui supporto consiste dell'insieme delle persone e $a\ P^{\mathcal{A}}\ b$ se e solo se a è genitore di b. Trovare una formula $\varphi(x)$ il cui insieme di verità in $\mathcal{A}$ è l'insieme delle persone che sono zio/zia di qualcuno.

Soluzione:

$$\varphi(x): \qquad \exists u \exists y \exists z(uPx \wedge uPy \wedge yPz \wedge x \neq y)$$

Esercizio 14
Sia L un linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo funzionale binario $\cdot$. Sia $\mathcal{A}$ la L-struttura il cui universo è l'insieme $\mathbb{N}$ e in cui $\cdot^{\mathcal{A}}$ è la moltiplicazione. Trovare una formula $\varphi(x, y)$ il cui insieme di verità in $\mathcal{A}$ è la relazione che vale tra x e y quando hanno un divisore in comune.

Soluzione:

$$\varphi(x, y): \qquad \exists u \exists v \exists c\ ((u \cdot c = x) \wedge (v \cdot c = y) \wedge \neg(u = x))$$

(La formula $\neg(u = x)$ serve ad escludere il caso in cui il divisore comune c è 1.)

Esercizio 15
Dimostrare, costruendo una opportuna struttura, che

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x))\,, \exists x\,(R(x) \land \neg Q(x)) \not\models \exists x\,(R(x) \land P(x))$$

per un linguaggio del prim'ordine con simboli predicativi unari P, Q, R.

Soluzione:

Esercizio 16
Dimostrare che

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x))\,, \exists x\,(Q(x) \land R(x)) \not\models \forall x(P(x) \to R(x))$$

Soluzione: È sufficiente trovare una struttura $\mathcal{M}$ in cui la premessa è vera ma la conclusione è falsa, e questo accade quando

- $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$,
- $Q^{\mathcal{M}} \cap R^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$,
- $P^{\mathcal{M}} \not\subseteq R^{\mathcal{M}}$.

Queste condizioni sono soddisfatte, ad esempio, nella struttura $\mathcal{M}$ dove

- $|\mathcal{M}| = \{a, b, c\}$,
- $P^{\mathcal{M}} = \{a\}$,
- $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$,
- $R^{\mathcal{M}} = \{b\}$.

Esercizio 17
Sia $L = \{R\}$ un linguaggio costituito da un unico simbolo di relazione binario. Si considerino le L-strutture

- $\langle \mathbb{N}, | \rangle$, dove $|$ è la relazione di divisibilità tra numeri naturali;
- $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$;
- $\langle \mathbb{Z}, \geq \rangle$.

Stabilire quali tra le precedenti L-strutture è un modello dell'enunciato

$$\exists x \exists y (\neg R(x, y) \land \neg R(y, x)).$$

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. La L-struttura $(\mathbb{N}, |)$ soddisfa l'enunciato $\exists x \exists y(\neg R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$, mentre le altre L-strutture proposte no.

2. $(\mathbb{N}, |)$ non è isomorfa a nessuna delle altre strutture per il punto precedente. Le due strutture $(\mathbb{Z}, \leq)$ e $(\mathbb{Z}, \geq)$ risultano invece isomorfe mediante la funzione
$$f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad x \mapsto -x.$$

Esercizio 18
Sia $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binario. Consideriamo la L-struttura
$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle,$$
dove $|$ è l'usuale relazione di divisibilità. Sia $\varphi(x)$ la L-formula
$$\neg \forall y P(x,y) \wedge \forall z (P(z,x) \wedge \neg(z = x) \to \forall y P(z,y)).$$

1. Quali delle tre affermazioni seguenti sono corrette?
$$\mathcal{A} \models \varphi(x)[x/1] \qquad\qquad \mathcal{A} \models \varphi(x)[x/3] \qquad\qquad \mathcal{A} \models \varphi(x)[x/4]$$

2. Determinare l'insieme di verità di $\varphi(x)$ in $\mathcal{A}$.

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione: Dato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha che

- $\mathcal{A} \models \neg \forall y P(x,y)[x/n]$ se e solo se $n \neq 1$;
- $\mathcal{A} \models \forall z (P(z,x) \wedge \neg(z = x) \to \forall y P(z,y))[x/n]$ se e solo se ogni divisore di n diverso da n stesso coincide con 1 (in altre parole: gli unici divisori di n sono 1 ed n stesso).

Di conseguenza

1. $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)[x/1]$ per il primo punto, $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)[x/4]$ per il secondo punto, mentre $\mathcal{A} \models \varphi(x)[x/3]$.

2. Ricordiamo che, per definizione, l'insieme di verità di φ in $\mathcal{A}$ è
$$\varphi(\mathcal{A}) = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \mathcal{A} \models \varphi[x/n]\}.$$
Quindi
$$\varphi(\mathcal{A}) = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid n \text{ è un numero primo}\}.$$

Esercizio 19
Sia $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario. Sia $\varphi(x)$ la L-formula
$$\exists y\, (f(y,y) = x).$$

1. Determinare l'insieme di verità di $\varphi(x)$ nella L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$.
2. Determinare l'insieme di verità di $\varphi(x)$ nella L-struttura $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$.
3. Sia $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. È vero che $\mathcal{C} \models \forall x\, \varphi(x)$?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. L'interpretazione di $\varphi(x)$ in $\mathcal{A}$: "Esiste un numero naturale y tale che $x = y + y$ (ovvero $x = 2y$)". Dunque
$$\varphi(\mathcal{A}) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è un numero pari}\}.$$
2. L'interpretazione di $\varphi(x)$ in $\mathcal{B}$: "Esiste un numero reale y tale che $x = y \cdot y$ (ovvero $x = y^2$)". Quindi
$$\varphi(\mathcal{B}) = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}.$$
3. Per quanto visto al punto precedente, si ha che $\mathcal{C} \models \forall x\, \varphi(x)$: infatti, tutti i numeri reali strettamente positivi sono il quadrato di un numero reale strettamente positivo.

Esercizio 20
Sia $L = \{f, a\}$ con f simbolo di funzione unario e a simbolo di costante. Sia φ l'enunciato
$$\forall x(\neg(x = a) \rightarrow \exists y(f(y) = x)).$$
Giustificando le proprie risposte, determinare quali delle seguenti L-strutture soddisfano φ.

1. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathcal{A}}, 0 \rangle$, dove $f^{\mathcal{A}} \colon \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è definita da $f^{\mathcal{A}}(n) = n + 1$;
2. $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Q}, f^{\mathcal{B}}, 0 \rangle$, dove $f^{\mathcal{B}} \colon \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ è definita da $f^{\mathcal{B}}(q) = q + 1$;
3. $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathcal{C}}, 0 \rangle$, dove $f^{\mathcal{C}} \colon \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ è definita da $f^{\mathcal{C}}(z) = 2z$;

Soluzione:

1. L'enunciato φ interpretato in $\mathcal{A}$ afferma che

   > Per ogni numero naturale n diverso da 0 esiste un numero naturale m tale che $n = m + 1$ (ovvero n è il successore di m).

   Quindi si ha che $\mathcal{A} \models \varphi$: dato un qualunque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ basta considerare $m = n - 1$.
2. L'enunciato φ interpretato in $\mathcal{B}$ afferma che

   > Per ogni numero razionale q diverso da 0 esiste un numero razionale p tale che $q = p + 1$.

   Quindi si ha che $\mathcal{B} \models \varphi$: dato un qualunque $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ basta considerare $p = q - 1$.

   [Si noti che, a differenza del punto precedente, la formula a destra dell'implicazione è in realtà verificata in $\mathcal{B}$ anche quando $q = 0$.]

3. L'enunciato φ interpretato in $\mathcal{C}$ afferma che

   > Per ogni numero intero z diverso da 0 esiste un numero intero di cui z è il doppio.

   In questo caso si ha che $\mathcal{C} \not\models \varphi$: se ad esempio $z = 5$ si ha che $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ma z non è il doppio di alcun numero intero.

Esercizio 21
Sia $L = \{P, R, a\}$ con P ed R simboli di relazione binaria e a simbolo di costante. Consideriamo la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq, |, 2 \rangle$, dove $|$ è l'usuale relazione di divisibilità.

Siano φ l'enunciato

$$\forall x \exists y \, (P(x, y) \wedge R(a, y))$$

e ψ l'enunciato

$$\exists x \forall y \, (P(x, y) \rightarrow R(a, y))$$

1. Determinare se $\mathcal{A} \models \varphi$.
2. Determinare se $\mathcal{A} \models \psi$.
3. Determinare se $\varphi \models \psi$.

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. L'enunciato φ interpretato in $\mathcal{A}$ afferma che

   > Vi sono numeri pari arbitrariamente grandi.

   Quindi si ha che $\mathcal{A} \models \varphi$.

2. L'enunciato ψ interpretato in $\mathcal{A}$ afferma che

   > Tutti i numeri naturali sufficientemente grandi sono pari.

   Quindi si ha che $\mathcal{A} \not\models \psi$.

3. Poiché $\mathcal{A} \models \varphi$ ma $\mathcal{A} \not\models \psi$, per definizione di conseguenza logica si ha che $\varphi \not\models \psi$.

Esercizio 22
Sia $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binaria. Sia φ l'enunciato

$$\forall x \exists y \neg P(x, y).$$

1. Determinare se $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \models \varphi$.
2. Determinare se $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle \models \varphi$.
3. L'enunciato φ è soddisfacibile? È valido?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. L'enunciato φ interpretato in $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ afferma che

   > Per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che $x \not\leq y$ (ovvero tale che $y < x$).

   Ma se $x = 0$, un tale y non può esistere (0 è il più piccolo tra i numeri naturali). Quindi $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \not\models \varphi$.

2. L'enunciato φ interpretato in $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$ afferma che

   > Per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che $x \not\geq y$ (ovvero tale che $x < y$).

   Questo equivale a dire che ci sono numeri naturali arbitrariamente grandi, quindi $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle \models \varphi$.

3. Per quanto visto ai punti precedenti, φ è soddisfacibile (è vero, ad esempio, in $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$) ma non valido (per esempio non è soddisfatto in $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$).

5 Logica del prim'ordine: formalizzazione

Esercizio 1
Formalizzare in $\mathbb{Z}$ la seguente affermazione

La somma di tre numeri dispari è un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo $+$ (interpretato nella maniera usuale).

Suggerimento. Scrivere prima una L-formula $P(x)$ che formalizzi "x è un numero pari".

Soluzione: Sia $P(x)$ la formula
$$\exists z(z + z = x)$$
che asserisce che x è un numero pari. Allora l'affermazione del testo si può formalizzare come
$$\forall x \forall y \forall z\, ((\neg P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(z)) \to P(x + y + z)).$$

Esercizio 2
Formalizzare in $\mathbb{Z}$ la seguente affermazione

Il doppio di un numero pari è un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente i simboli $+$ e 1 (interpretati nella maniera usuale) e il simbolo $|$ per la relazione di divisibilità.

Suggerimento. Scrivere prima una L-formula $P(w)$ che formalizzi "w è un numero pari".

Soluzione: Sia $P(w)$ la formula
$$(1 + 1) \mid w$$
che asserisce che w è un numero divisibile per 2 (ovvero un numero pari). Allora l'affermazione del testo si può formalizzare come
$$\forall x\, (P(x) \to P(x + x)).$$

Esercizio 3
Formalizzare in $\mathbb{Q}$ la seguente affermazione

Il quadrato di un numero strettamente negativo è strettamente positivo.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli $\cdot$ e $<$ (interpretati nella maniera usuale).

Suggerimento. Scrivere prima una L-formula $Z(w)$ che formalizzi "w è il numero 0".

Soluzione: Sia $Z(w)$ la formula
$$\forall y\, (w \cdot y = w)$$
che asserisce che w è il numero 0. Allora l'affermazione del testo si può formalizzare come
$$\forall x\, \forall w\, (Z(w) \wedge x < w \to w < x \cdot x).$$

Esercizio 4

1. Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

   Esiste un numero naturale che è la radice quadrata di y.

   utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$ e $\cdot$ interpretati nella maniera usuale.
2. Utilizzando lo stesso linguaggio, formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

   Ci sono numeri arbitrariamente grandi che hanno una radice quadrata.

Soluzione:

1. Una possibile formalizzazione è
$$\exists z(y = z \cdot z).$$
2. Una possibile formalizzazione è
$$\forall x \exists y(x < y \land \exists z(y = z \cdot z)).$$

Esercizio 5
Formalizzare la seguente frase:

Esiste una costante k ed infiniti numeri primi p tali che $p+k$ è anch'esso primo.

utilizzando il linguaggio contenente soltanto i simboli $\cdot, +$, $\leq$ e 1 (interpretati nella maniera usuale).

Soluzione:
$$\exists k \forall m \exists p \, (m \leq p \land \psi(p) \land \psi(p+k)$$
dove $\psi(x)$ è la formula
$$\forall z(\exists w \, z \cdot w = x \rightarrow (z = 1 \lor z = x))$$
che asserisce che x è un numero primo.

Esercizio 6
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione

Il cubo di un numero pari è anch'esso un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli $\cdot$ e $+$ (interpretati nella maniera usuale).

Soluzione:
$$\forall x(\exists y(\exists z(y = z + z) \land x = y \cdot y \cdot y) \rightarrow \exists w(x = w + w))$$
oppure più semplicemente
$$\forall x(\exists z(x = z + z) \rightarrow \exists w(x \cdot x \cdot x = w + w))$$

Esercizio 7
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione

Ogni numero maggiore di 1 è diviso da un numero primo.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli $\cdot$ e $<$ (interpretati nella maniera usuale).

Suggerimento. Scrivere prima una L-formula $P(w)$ che formalizzi "w è un numero primo" e una L-formula $D(w,x)$ che formalizzi "w divide x".

Soluzione: Sia $P(w)$ la formula

$$\forall y \forall z\, (w = y \cdot z \to w = y \vee w = z)$$

che asserisce che w è un numero primo, e sia $D(w,x)$ la formula

$$\exists v (x = w \cdot v)$$

che asserisce che w divide x. Allora l'affermazione del testo si può formalizzare come

$$\forall x\, (\exists y (y < x \wedge \forall z (y \cdot z = z)) \to \exists w (P(w) \wedge D(w,x))).$$

Esercizio 8
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione

Ci sono numeri pari arbitrariamente grandi la cui metà è un quadrato perfetto.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli $<$, $\cdot$ e $+$ (interpretati nella maniera usuale).

Soluzione:

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \exists z (y = z + z \wedge \exists w (z = w \cdot w)))$$

Varianti: "non è un quadrato perfetto" e/o nel linguaggio sostituire $+$ con 2

Esercizio 9
Formalizzare in $\mathbb{R}$ la seguente affermazione

Il prodotto di un numero per il suo opposto è l'opposto del suo quadrato.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente i simboli $\cdot$ e 0 (interpretati nella maniera usuale). Si ricordi che l'opposto di un numero reale è il numero stesso cambiato di segno.

Suggerimento. Scrivere prima una L-formula $Z(x,y)$ che formalizzi "x è l'opposto di y", sfruttando il fatto che un numero e il suo opposto hanno lo stesso quadrato (attenzione: bisogna distinguere il caso in cui y sia il numero 0 dai restanti casi).

Soluzione: Sia $Z(x, y)$ la formula

$$(y = 0 \land x = y) \lor (\neg(y = 0) \land \neg(x = y) \land x \cdot x = y \cdot y\ )$$

che asserisce che x è l'opposto di y. (Letteralmente: "o y è il numero 0 e $x = y$, oppure y è diverso da 0 e x è un numero diverso da y che ha lo stesso quadrato".) Allora l'affermazione del testo si può formalizzare come

$$\forall y \forall x (Z(x, y) \to Z(x \cdot y, y \cdot y)).$$

Esercizio 10
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione

Il cubo di un numero pari è anch'esso un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli $\cdot$ e $+$ (interpretati nella maniera usuale).

Soluzione:
$$\forall x (\exists y (\exists z (y = z + z) \land x = y \cdot y \cdot y) \to \exists w (x = w + w))$$
oppure più semplicemente

$$\forall x (\exists z (x = z + z) \to \exists w (x \cdot x \cdot x = w + w))$$

Esercizio 11
Formalizzare in $\mathbb{N}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente il simbolo relazionale binario $<$, ed il simbolo funzionale binario $+$:

Ogni numero pari sufficientemente grande è la somma di due numeri pari distinti.

Soluzione: Sia $P(x) \equiv \exists y\ (x = y + y)$ la formalizzazione di "x è pari". Allora la proposizione si formalizza come

$$\exists s \forall x\ ((P(x) \land s < x) \to \exists i \exists j\ (\neg(i = j) \land P(i) \land P(j) \land x = i + j)).$$

Esercizio 12
Formalizzare (in un universo il cui dominio è l'insieme degli esseri umani) in un linguaggio del prim'ordine con un simbolo relazionale $G(x, y)$ per "x è genitore di y" ed un simbolo predicativo unario $B(x)$ per "x ha i baffi" il seguente enunciato:

C'è chi ha un cugino i cui nonni hanno tutti i baffi.

Suggerimento. Definire prima formule $N[x, y]$ e $C[x, y]$ per formalizzare le relazioni: "x è nonno di y" e "x è cugino di y".

Soluzione: Ponendo $N[x,y] \equiv \exists z\ (G(x,z) \wedge G(z,y))$ e $C[x,y] \equiv \exists z \exists a \exists b\ G(z,a) \wedge G(z,b) \wedge a \neq b \wedge G(a,x) \wedge G(b,y)$, per formalizzare le relazioni: x nonno di y e x cugino di y, abbiamo:

$$\exists p \exists c\ (C[c,p] \wedge \forall x\ (N[x,c] \to B(x))$$

Esercizio 13
Formalizzare in $\mathbb{N}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente soltanto un simbolo $\cdot$ per il prodotto tra numeri naturali:

> Tutti i multipli di un multiplo di un numero, sono multipli di quel numero.

Si consiglia di definire prima una formula $M(x,y)$ che formalizzi "x è multiplo di y".

Soluzione: Ponendo $M(x,y) \equiv \exists z\ (x = z \cdot y)$ abbiamo:

$$\forall a(\forall x(\exists y(M(y,a) \wedge M(x,y)) \to M(x,a)))$$

Esercizio 14
Formalizzare in $\mathbb{N}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente soltanto un simbolo funzionale binario $\cdot$ per il prodotto tra numeri naturali:

> Tutti i divisori di un prodotto di due numeri naturali sono divisori di uno dei due.

Soluzione: Ponendo $D(x,y) \equiv \exists z\ (y = z \cdot x)$ abbiamo:

$$\forall a \forall x \forall y (D(a, x \cdot y) \to D(a,x) \vee D(a,y))$$

Esercizio 15
Formalizzare in $\mathbb{N}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente il simbolo relazionale binario $<$, il simbolo funzionale binario / per la divisione, la costante 0 (tutti interpretati nella maniera usuale), e il simbolo predicativo unario N, dove $N(x)$ è interpretato come "x è un numero naturale":

> Per ogni coppia di numeri naturali distinti c'è un numero razionale compreso strettamente tra essi.

Soluzione:

$$\forall x \forall y\ (N(x) \wedge N(y) \wedge (x < y) \to \exists p \exists q (N(p) \wedge N(q) \wedge \neg(q = 0) \wedge x < p/q \wedge p/q < y))$$

Esercizio 16
Formalizzare il seguente enunciato nel linguaggio contenente il simbolo relazionale binario A, dove $A(x,y)$ è interpretato come "x è antenato di y" e l'universo di discorso si intende costituito da tutte le persone:

Ci sono figli unici.

Soluzione: Sia $G(x, y) \equiv \neg(x = y) \wedge \forall z\ (A(x, z) \wedge A(z, y) \rightarrow x = z \vee y = z)$. Allora la proposizione si formalizza come

$$\exists p \exists q\ (\exists r\ (G(r, p) \wedge G(r, q) \wedge \neg(p = q))).$$

Esercizio 17
Formalizzare in $\mathbb{N}$ con il linguaggio contenente i simboli $<$, $\times$ e 1 la seguente proposizione (falsa):

Tutti i numeri sufficientemente grandi ammettono almeno due divisori primi.

Definire prima, mediante opportune formule da usare come abbreviazioni, la relazione di divisibilità e la proprietà di essere un numero primo.

Soluzione:

Esercizio 18
Formalizzare in $\mathbb{N}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente i simboli $<$, $\times$, $+$ e 1:

Ci sono infiniti numeri n tali che $3n^2 + 1$ è un quadrato perfetto

Soluzione: $\forall k \exists n (k < n \wedge \exists m\, (m \times m = (1 + 1 + 1) \times n \times n + 1))$

Esercizio 19
Formalizzare in $\mathbb{R}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente i simboli 1, $+$ e $\cdot$:

Se n e m sono coprimi (cioè relativamente primi), allora $n \cdot a + m \cdot b = 1$ per qualche a e b.

Soluzione: $\forall n, m [\forall x\, (\exists y (x \cdot y = n) \wedge \exists z (x \cdot z = m) \rightarrow x = 1) \rightarrow \exists a, b\, (n \cdot a + m \cdot b = 1)]$.

Esercizio 20
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

Se ci sono elementi arbitrariamente piccoli che godono della proprietà P, allora la funzione f è suriettiva

utilizzando il linguaggio contenente i simboli: P, $<$ e f.

Soluzione:

$$\forall x \exists y\, (y < x \wedge P(y)) \rightarrow \forall y \exists x (f(x) = y)$$

Esercizio 21
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione in un linguaggio contenente un simbolo di predicato unario P che descrive la proprietà di essere un numero primo, il simbolo $<$ di relazione binaria per l'ordinamento, il simbolo di funzione binaria $+$ per la somma, e la costante 1:

> Ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre numeri primi, non necessariamente distinti

Soluzione:

$$\exists x \forall y (x < y \land \exists w (w + w + 1 = y) \to \exists z_1, z_2, z_3 (P(z_1) \land P(z_2) \land P(z_3) \land y = z_1 + z_2 + z_3))$$

Esercizio 22
Sia L un linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo relazionale binario P. Sia $\mathcal{A}$ la L-struttura il cui supporto consiste dell'insieme delle persone, $a\ P^{\mathcal{A}}\ b$ se e solo se a è genitore di b. Formalizzare in $\mathcal{A}$ la seguente affermazione:

> Tutti i cugini dei fratelli di una persona sono anche cugini di quella persona.

Soluzione: Sia $C(x, y) = \exists n \exists a \exists b\ (a \neq b \land P(n, a) \land P(n, b) \land P(a, x) \land P(b, y))$ una abbreviazione della formalizzazione di "x è cugino di y". Allora

$$\forall p \forall b\ ((b \neq p \land \exists x\ (P(x, p) \land P(x, b))) \to \forall c\ (C(c, b) \to C(c, p)))$$

Esercizio 23
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione:

> Se a e b sono relativamente primi, allora ci sono infiniti numeri primi congruenti ad a modulo b

usando i simboli 1, $<$, $+$ e $\cdot$.

Suggerimento. Cominciare a formalizzare il predicato di divisibilità $\mid$ e il predicato di primalità Pr.

Soluzione: $x \mid y$ se e solo se $\exists z\, (z \cdot x = y)$
$\mathrm{Pr}(x)$ è formalizzato come $\forall y\, (y \mid x \to y = x \lor y = 1)$

$$\forall a \forall b \big(\forall x\, (x \mid a \land x \mid b \to x = 1) \\ \to \forall x \exists y\, (x < y\ \land \mathrm{Pr}(y) \land \exists v\, (v \cdot a + b = y))\big)$$

Esercizio 24
Sia L in un linguaggio del prim'ordine in cui ci sono costanti individuali g per Giuseppe, m per Maria e i simboli relazionali binari S, F, dove $S(x, y)$ significa che x ha sposato y e $F(x, y)$ significa che y è figlio di x. Sia $\mathcal{A}$ la L-struttura il cui supporto consiste dell'insieme delle persone. Formalizzare in $\mathcal{A}$ la seguente frase:

Uno dei cugini di Giuseppe ha sposato una nipote di Maria

Soluzione: La formula che formalizza l'asserzione "x è cugino di z" è

$$\exists u, v, w[F(u, z) \wedge F(v, u) \wedge F(v, w) \wedge F(w, x) \wedge u \neq w \wedge x \neq z] \qquad (\varphi_C(x, z))$$

mentre la frase "y è nipote di z" può essere intesa in due modi:

1. z è il nonno (o la nonna) di y, oppure
2. z è lo zio (o la zia) di y

e quindi otteniamo due possibili formalizzazioni:

$$\exists u[F(u, y) \wedge F(z, u)] \qquad (\varphi_{N_1}(y, z))$$
$$\exists u, v[F(u, z) \wedge F(v, u) \wedge F(v, y) \wedge v \neq z] \qquad (\varphi_{N_2}(y, z))$$

quindi la formalizzazione della frase è

$$\exists x, y\,(\varphi_C(x, g) \wedge \varphi_N(y, m) \wedge S(x, y))$$

dove φ_N è φ_{N_1} oppure φ_{N_2}. Nel caso 1 (nipote di zio) possiamo riscrivere la formula così

$$\begin{aligned}\exists x, y, u, v, v', z(&F(u, y) \wedge F(m, u)\\ &\wedge F(v, x) \wedge F(z, v) \wedge F(z, v') \wedge F(v', g) \wedge \neg(v = v') \wedge \neg(x = g)\\ &\wedge S(x, y))\end{aligned}$$

Nel caso 2 (nipote di nonno) possiamo riscrivere la formula così

$$\begin{aligned}\exists x, y, u, w, v, v', z(&F(u, y) \wedge F(w, u) \wedge F(w, m) \wedge \neg(m = u)\\ &\wedge F(v, x) \wedge F(z, v) \wedge F(z, v') \wedge F(v', g) \wedge \neg(v = v') \wedge \neg(x = g)\\ &\wedge S(x, y))\end{aligned}$$

Esercizio 25
Formalizzare in $\mathbb{N}$ l'affermazione

Ogni numero pari maggiore di 2 è il prodotto di due numeri pari distinti.

utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$, $\cdot$ e 2 (tutti interpretati nella maniera usuale).

Suggerimento: Scrivere prima una formula $\varphi(x)$ che formalizzi "x è pari".

Soluzione: Una formula $\varphi(x)$ che formalizza "x è pari" è $\exists u\,(2 \cdot u = x)$. Una possibile formalizzazione dell'affermazione richiesta è:

$$\forall x\,[(\varphi(x) \wedge 2 < x) \to \exists w \exists z\,(z \neq w \wedge \varphi(w) \wedge \varphi(z) \wedge w \cdot z = x)].$$

Esercizio 26
Formalizzare in $\mathbb{N}$ l'affermazione

Esistono infiniti numeri primi.

utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$, $\cdot$ e 1 (tutti interpretati nella maniera usuale).

Suggerimento: Scrivere prima una formula $\varphi(x)$ che formalizzi "x è un numero primo".

Soluzione: Una formula $\varphi(x)$ che formalizza "x è un numero primo" è

$$(1 < x) \wedge \forall u \forall w\, ((u \cdot w = x) \rightarrow (u = x \vee w = x)).$$

Una possibile formalizzazione dell'affermazione richiesta è:

$$\forall y \exists x\, [(y < x) \wedge \varphi(x)].$$

Esercizio 27 1.

Formalizzare in $\mathbb{R}$ la frase

Il numero y è la radice cubica di qualche numero.

utilizzando il linguaggio formato dal simbolo $\cdot$ interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<, \cdot$ interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{R}$ la frase

   Ci sono numeri arbitrariamente grandi che hanno una radice cubica.

Soluzione:

1. Una possibile formalizzazione è

$$\exists z(y \cdot y \cdot y = z).$$

2. Una possibile formalizzazione è

$$\forall x \exists y(x < y \wedge \exists z(z \cdot z \cdot z = y)).$$

Esercizio 28 1.

Formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

Il numero y ammette una radice quadrata.

utilizzando il linguaggio formato dal simbolo $\cdot$ di moltiplicazione interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $>, \cdot$ interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

   Ci sono numeri arbitrariamente grandi che sono il quadrato di qualche numero.

Soluzione:

1. Una possibile formalizzazione è

$$\exists z(z \cdot z = y).$$

2. Una possibile formalizzazione è

$$\forall x \exists y(y > x \land \exists z(z \cdot z = y)).$$

Esercizio 29 1.

Formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

Il numero y è diviso dal numero x.

utilizzando il linguaggio formato dal simbolo $\cdot$ di moltiplicazione interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $0, \cdot$ interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

Se un numero è non nullo, non può essere diviso da 0.

Soluzione:

1. Una possibile formalizzazione è

$$\exists z(z \cdot x = y).$$

2. Una possibile formalizzazione è

$$\forall y(\neg(y = 0) \to \neg \exists z(z \cdot 0 = y)).$$