

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) La formula $\forall x \forall y [R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y))]$
- ☐ non è un enunciato.
 - ☐ per essere valutata in una struttura richiede di assegnare un valore alla x .
 - ☐ è verificata in $\langle \mathbb{N}, < \rangle$.
 - ☒ è verificata in $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$.
- (b) La funzione $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, n \mapsto -2n^2$
- ☐ è iniettiva.
 - ☐ è suriettiva.
 - ☒ ha immagine contenuta in \mathbb{Z} .
 - ☒ è tale che $f(n) = f(-n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- (c) La proposizione $(A \vee \neg B) \leftrightarrow (\neg(B \wedge \neg A))$
- ☒ è una tautologia.
 - ☐ non è soddisfacibile.
 - ☒ è conseguenza logica di $A \vee \neg A$.
 - ☐ ha come connettivo principale \vee .
- (d) Ricordiamo che $\text{Div}(k)$ è l'insieme dei divisori di k e $|$ la relazione di divisibilità.
- ☐ $\text{Div}(20) \subseteq \text{Div}(24)$.
 - ☐ $\langle \text{Div}(27), | \rangle$ NON è un ordine lineare.
 - ☒ $\text{Div}(36) \cap \text{Div}(24) = \text{Div}(12)$.
 - ☐ $\text{Div}(24)$ ha la stessa cardinalità di $\text{Div}(6) \times \text{Div}(6)$.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) La proposizione $(A \vee \neg A) \rightarrow B$ è

- ☐ una tautologia.
- ☒ soddisfacibile, ma non valida.
- ☐ una contraddizione.
- ☒ logicamente equivalente a B .

(b) La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + 5$ è

- ☒ iniettiva.
- ☒ suriettiva.
- ☒ biettiva.
- ☐ né iniettiva, né suriettiva.

(c) Sia φ la formula del prim'ordine $\forall x[(R(x, y) \wedge \exists y P(y)) \rightarrow \exists z R(f(z), x)]$.

Allora

- ☐ le variabili libere di φ sono y e z .
- ☒ y ha sia occorrenze libere che vincolate in φ .
- ☒ tutte le occorrenze di x sono vincolate.
- ☐ φ è un enunciato.

(d) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$ allora

- ☒ $A \setminus B = \{1, 3\}$.
- ☒ $\{2, 3, 4\} \subseteq A \cup B$.
- ☒ $A \cap B \neq \emptyset$.
- ☒ $A \times B$ ha 6 elementi.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia φ la formula $\forall x \exists z \neg R(x, z)$.

- ☐ φ NON è un enunciato.
- ☐ $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \models \varphi$.
- ☒ $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle \models \varphi$.
- ☒ φ è soddisfacibile ma non valida.

(b) La funzione $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto -x + 5$

- ☐ non è iniettiva ma è suriettiva.
- ☒ è biettiva.
- ☐ è iniettiva ma non suriettiva.
- ☒ è tale che $x < y$ se e solo se $f(x) > f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$.

(c) La proposizione $A \vee (B \wedge \neg A)$

- ☒ è soddisfacibile.
- ☐ è logicamente equivalente a $A \vee \neg B$.
- ☒ ha come conseguenza logica $B \vee \neg B$.
- ☒ è conseguenza logica di A .

(d) Se $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è un numero pari}\}$ e $B = \text{Div}(30)$ è l'insieme dei divisori di 30, allora

- ☒ $A \cap B = \{2, 6, 10, 30\}$.
- ☒ $\{3, 4, 20\} \subseteq A \cup B$.
- ☐ $A \cup B = \mathbb{N}$.
- ☒ $A \times B$ è infinito.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia a_n , $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$\begin{aligned}a_0 &= k \\ a_{n+1} &= a_n \cdot a_n.\end{aligned}$$

■ Se $k = 0$, allora $a_n = 0$ per ogni n .

■ Se $k = 1$, allora $a_n = 1$ per ogni n .

■ Se $k = 2$, allora $a_2 = 16$.

□ Se $k = 3$, allora $a_2 < 80$.

(b) Sia φ la formula $\forall w(w = f(w, z))$.

■ $\langle \mathbb{R}, + \rangle \models \varphi[z/0]$

■ $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \varphi[z/1, w/1]$

□ φ richiede di assegnare un valore a w per essere valutata in una struttura.

■ φ richiede di assegnare un valore a z per essere valutata in una struttura.

(c) La funzione $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto 3^n$

■ è iniettiva.

□ è suriettiva.

□ è tale che $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$.

■ è tale che $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$.

(d) Se $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r^2 - 5r + 6 = 0\}$ e $B = \text{Div}(36)$ è l'insieme dei divisori di 36, allora

■ $A \cap B = A$.

□ $A \setminus B \neq \emptyset$.

■ $A \cup B \subseteq B$.

□ $A \times B$ è infinito.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) La proposizione $(A \rightarrow \neg B) \vee (B \rightarrow \neg A)$
- ☒ è logicamente equivalente ad $\neg(A \wedge B)$.
 - ☐ è una tautologia.
 - ☒ è conseguenza logica di $\neg(A \vee \neg A)$.
 - ☐ ha come conseguenza logica $\neg(A \vee \neg A)$.
- (b) La funzione $f: \{0, 1\}^{<\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$, $\langle s_1, \dots, s_n \rangle \mapsto \langle 1 - s_1, \dots, 1 - s_n \rangle$
- ☒ è iniettiva.
 - ☒ è suriettiva.
 - ☐ ha immagine contenuta in $\{0, 1\}^n$ per un opportuno $n \in \mathbb{N}$.
 - ☒ è tale che $f \circ f$ è la funzione identità, ovvero $f(f(s)) = s$ per ogni $s \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$.
- (c) Sia φ la formula $\forall z \forall w [(R(z, w) \wedge R(w, x)) \rightarrow R(z, x)]$.
- ☐ φ è un enunciato.
 - ☒ $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \models \varphi[x/n, w/n, z/n]$ per qualsiasi $n \in \mathbb{Z}$.
 - ☐ φ ha almeno una occorrenza libera della variabile w .
 - ☐ $\mathcal{A} \models \varphi[x/5]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, R^{\mathcal{A}} \rangle$ e $R^{\mathcal{A}} = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 5 \rangle\}$.
- (d) Sia A un insieme infinito e B un insieme finito.
- ☐ $|A| \leq |B|$.
 - ☐ Esiste una suriezione $g: B \rightarrow A$.
 - ☐ $B \times A$ è finito se $B \neq \emptyset$.
 - ☐ $B \times A$ è infinito se $B = \emptyset$.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia a_n , $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_{n+1} &= a_n + n + 1. \end{aligned}$$

- ☒ $a_2 = 3$.
- ☐ $a_3 = 5$.
- ☒ $a_3 = 0 + 1 + 2 + 3$.
- ☒ $a_n = \sum_{i=0}^n i$.

(b) La funzione $f: \{0, 2, 4\}^{<\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}^{<\mathbb{N}}$, $\langle s_1, \dots, s_n \rangle \mapsto \langle \frac{s_1}{2}, \dots, \frac{s_n}{2} \rangle$

- ☒ è iniettiva.
- ☐ è suriettiva.
- ☐ ha immagine contenuta in $\{0, 2\}^{<\mathbb{N}}$.
- ☒ è tale che $(f \circ f)(s) \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ per ogni $s \in \{0, 4\}^{<\mathbb{N}}$.

(c) La proposizione $\neg A \rightarrow (A \vee \neg B)$

- ☐ è una tautologia.
- ☒ è logicamente equivalente a $A \vee \neg B$.
- ☐ ha come conseguenza logica $\neg B$.
- ☒ è conseguenza logica di $\neg B$.

(d) Sia $L = \{f, g, h\}$ con f, g simboli di funzione binari ed h simbolo di funzione unario. Sia t_1 il termine $f(x, h(x))$ e t_2 il termine $g(h(x), h(h(x)))$.

- ☐ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, - \rangle \models \varphi_1[x/1]$, dove φ_1 è la formula $t_1 = t_2$.
- ☒ $\langle \mathbb{Z}, \cdot, +, - \rangle \models \varphi_2[x/0]$, dove φ_2 è la formula $t_1 = t_2$.
- ☒ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, - \rangle \models \varphi_3[y/0]$, dove φ_3 è la formula $\forall x(t_1 = y)$.
- ☒ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, - \rangle \models \varphi_4[x/3, y/-9]$, dove φ_4 è la formula $t_2 = y$.

Attenzione! L'interpretazione della funzione h in ciascuna delle strutture precedenti è la funzione **unaria** $-: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $k \mapsto -k$.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia a_n , $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$\begin{aligned}a_0 &= k \\ a_{n+1} &= a_n + a_n.\end{aligned}$$

- ☒ Se $k = 0$ allora $a_n = 0$ per ogni n .
- ☐ Se $k = 1$ allora $a_3 \neq 8$.
- ☐ Se $k = 1$ allora $a_n \neq 2^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.
- ☒ Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $a_n = k \cdot 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(b) La funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle r_0, r_1 \rangle \mapsto r_0 \cdot r_1 + r_0$

- ☐ è iniettiva.
- ☒ è suriettiva.
- ☐ ha immagine contenuta in \mathbb{Q} .
- ☒ è tale che $f(\langle r, 0 \rangle) = r$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.

(c) La formula $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

- ☒ è una contraddizione.
- ☐ è logicamente equivalente a $A \vee \neg B$.
- ☒ ha come conseguenza logica $\neg A$.
- ☐ è conseguenza logica di $\neg(A \vee B)$.

(d) Sia A l'insieme dei numeri razionali positivi e B l'insieme dei numeri interi.

- ☐ $|A| > |B|$.
- ☒ $|A \times B| = |A|$.
- ☒ $|A \cap B| = |A|$.
- ☒ $|A^B| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$, dove A^B è l'insieme di tutte le funzioni da B in A .

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) Sia φ la formula $f(g(x, y), z) = g(f(x, y), z)$ nel linguaggio $L = \{f, g\}$, dove f e g sono entrambi simboli di funzione binari.
- ☐ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \not\models \varphi[x/0, y/1, z/7]$.
 - ☒ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \models \psi[x/2, y/2, z/7]$, dove ψ è la formula $\exists x \exists y \varphi$.
 - ☒ $\exists x \exists y \varphi$ ha come unica variabile libera z .
 - ☐ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \models \varphi[x/2, y/2, z/0]$.
- (b) La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, r \mapsto \langle r^2, r \rangle$
- ☒ è iniettiva.
 - ☐ è suriettiva.
 - ☒ ha immagine contenuta in $\{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\} \times \mathbb{R}$.
 - ☐ è tale che $f(r) = f(-r)$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.
- (c) La proposizione $\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(A \wedge \neg B)$
- ☒ è una tautologia.
 - ☐ è logicamente equivalente a A .
 - ☐ ha come conseguenza logica $\neg B$.
 - ☒ è conseguenza logica di $\neg(A \vee B)$.
- (d) Sia A l'insieme dei numeri razionali maggiori di 0 e $|$ la relazione di divisibilità su A (ossia dati $q, s \in A$, vale la relazione $q \mid s$ se e solo se esiste $r \in A$ tale che $q \cdot r = s$).
- ☒ $q \mid s$ per ogni $q, s \in A$.
 - ☒ $|$ è una relazione transitiva su A .
 - ☐ $|$ NON è una relazione simmetrica su A .
 - ☒ $|$ è una relazione di equivalenza su A .

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 = 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
- ☐ $|A \cap B| > 1$.
 - ☐ $A \setminus B = \emptyset$.
 - ☒ $|B \times A| = |B|$.
 - ☒ $\mathbb{R} \setminus (B \cup A) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq 0 \text{ e } a \neq -2\}$.
- (b) La funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto \frac{n}{n+1}$
- ☒ è iniettiva.
 - ☐ è suriettiva.
 - ☒ ha immagine contenuta in \mathbb{Q} .
 - ☒ ha immagine contenuta in $[0; 1)$.
- (c) Sia $L = \{R, f, h\}$ con R simbolo di funzione binario, f simbolo di funzione binario e h simbolo di funzione unario. Sia t_1 il termine $f(x, h(y))$ e t_2 il termine $h(f(x, y))$.
- ☐ $\langle \mathbb{Z}, <, +, - \rangle \models R(t_1, t_2)[x/2, y/3]$.
 - ☒ $\langle \mathbb{Z}, <, +, - \rangle \models \varphi[x/2, y/3]$, dove φ è la formula $\exists x \exists y \neg R(t_1, t_2)$.
 - ☒ $\exists x \exists y \neg R(t_1, t_2)$ è un enunciato.
 - ☐ $\langle \mathbb{Z}, <, +, - \rangle \models \psi[x/2, y/3]$, dove ψ è la formula $\forall x \forall y R(t_1, t_2)$.
- Attenzione!* L'interpretazione della funzione h in ciascuna delle strutture precedenti è la funzione **unaria** $-: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, k \mapsto -k$.
- (d) Sia $|$ la relazione di divisibilità sui numeri interi (ossia dati $q, s \in \mathbb{Z}$, vale la relazione $q \mid s$ se e solo se esiste $r \in \mathbb{Z}$ tale che $q \cdot r = s$).
- ☐ $q \mid s$ per ogni $q, s \in \mathbb{Z}$.
 - ☒ $|$ è una relazione riflessiva e transitiva su \mathbb{Z} .
 - ☒ $3 \mid -3$ e $-3 \mid 3$.
 - ☐ $|$ è una relazione di ordine su \mathbb{Z} .

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Quali delle seguenti sono formalizzazioni corrette (in \mathbb{N}) dell'affermazione

Due numeri consecutivi non possono essere entrambi pari.

nel linguaggio costituito dai simboli $+$ e 1 (interpretati nella maniera usuale)?

☐ $\forall x \forall y [y = x + 1 \rightarrow \exists z (x = z + z) \vee \exists z (y = z + z)]$.

☒ $\forall x \forall y [y = x + 1 \rightarrow \neg(\exists z (x = z + z) \wedge \exists z (y = z + z))]$.

☒ $\forall x \forall y \neg(\exists z (x = z + z) \wedge \exists z (x + 1 = z + z))$.

☐ $\forall x \forall y [y = x + 1 \rightarrow (\neg \exists z (x = z + z) \wedge \neg \exists z (y = z + z))]$.

(b) La relazione R su \mathbb{Z} definita da $x R y$ se e solo se x e y sono due interi consecutivi (ovvero $|x - y| = 1$)

☐ è riflessiva.

☒ è simmetrica.

☐ antisimmetrica.

☐ transitiva.

(c) Sia $A = \{a, b, c\}$. L'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A

☒ ha 8 elementi.

☒ ha un massimo e un minimo rispetto alla relazione \subseteq .

☒ contiene almeno due elementi x e y tali che $x \cap y \neq \emptyset$.

☒ contiene almeno due elementi x e y tali che $x \cap y = \emptyset$.

(d) Sia $L = \{R\}$ con R simbolo di relazione binario. Sia $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$ un ordine, ovvero una L -struttura tale che $R^{\mathcal{A}}$ è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva su A . Se sappiamo che $\mathcal{A} \models \exists x \forall y R(x, y) \wedge \forall x \exists y R(x, y)$, allora

☒ \mathcal{A} ha un minimo.

☐ certamente \mathcal{A} non ha un massimo.

☒ \mathcal{A} può avere sia un minimo che un massimo.

☐ può essere che \mathcal{A} non abbia né massimo né minimo.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano P e Q due proposizioni tali che $Q \models P$. Allora

- ☒ $Q \models P \wedge Q$.
- ☒ $Q \wedge \neg P$ è certamente insoddisfacibile.
- ☒ $Q \rightarrow P$ è certamente una tautologia.
- ☐ $P \rightarrow Q$ è certamente una tautologia.

(b) La funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

- ☐ È iniettiva.
- ☒ È suriettiva.
- ☒ È tale che $f(x, y) = f(-x, -y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
- ☒ È tale che $f(x, x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(c) Sia φ la formula $\forall x(\exists y R(y, x) \rightarrow R(x, y))$.

- ☐ φ è un enunciato.
- ☐ Tutte le occorrenze della variabile y sono vincolate.
- ☐ Tutte le occorrenze della variabile y sono libere.
- ☒ Tutte le occorrenze della variabile x sono vincolate.

(d) Si ricordi che per $a, b \in \mathbb{R}$,

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

- ☐ Esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e $[a; b] = \emptyset$.
- ☒ Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \leq b$, l'insieme $[a; b] \cap \mathbb{N}$ è finito.
- ☐ Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \leq b$, l'insieme $[a; b] \cap \mathbb{Q}$ è infinito.
- ☒ $[0; 1] \cap \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x = 0\}$.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia P una tautologia. Allora

- ☒ P è soddisfacibile.
- ☐ Per ogni Q , la proposizione $P \rightarrow Q$ è una tautologia.
- ☒ Per ogni Q , la proposizione $Q \rightarrow P$ è una tautologia.
- ☒ $\neg P$ è una contraddizione.

(b) Consideriamo la funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$. Allora

- ☒ f è iniettiva.
- ☒ l'immagine di f è un sottoinsieme proprio di \mathbb{N} .
- ☒ $f(f(n)) \neq 4$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- ☐ $f(n) > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) Sia X l'insieme delle nazioni europee e sia R la seguente relazione binaria su X :

$$x R y \quad \text{se e solo se} \quad x \text{ confina con } y.$$

- ☐ R è una relazione transitiva.
- ☒ R è una relazione simmetrica.
- ☐ R è un ordine.
- ☒ Esistono $x, y \in X$ tali che *non* vale $x R y$.

(d) Sia φ la formula

$$\forall x(P(x, y) \rightarrow \exists y \forall z P(z, y))$$

- ☐ φ è un enunciato.
- ☐ Le variabili che occorrono vincolate (almeno una volta) in φ sono: x e y .
- ☒ La variabile y occorre sia libera che vincolata nella formula φ .
- ☐ La variabile z occorre sia libera che vincolata nella formula φ .

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) Sia A l'insieme dei numeri razionali positivi e B l'insieme dei numeri interi.
- ☐ $|A| > |B|$.
 - ☒ $|A \times B| = |A|$.
 - ☒ $|A \cap B| = |A|$.
 - ☒ $|A^B| = |2^{\mathbb{N}}|$.
- (b) La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, r \mapsto \langle r^2, r \rangle$
- ☒ è iniettiva.
 - ☐ è suriettiva.
 - ☒ ha immagine contenuta in $\{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\} \times \mathbb{R}$.
 - ☐ è tale che $f(r) = f(-r)$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.
- (c) Sia data la formula $\varphi \equiv (f(g(x, y), z) = g(f(x, y), z))$ nel linguaggio $L = \{f, g\}$ con due simboli di funzioni binari f, g :
- ☐ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \not\models \varphi[x/0, y/1, z/7]$.
 - ☒ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \models \exists x \exists y \varphi[x/2, y/2, z/7]$.
 - ☒ $\exists x \exists y \varphi$ ha come unica variabile libera z .
 - ☐ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \models \varphi[x/2, y/2, z/0]$.
- (d) La formula $\neg A \rightarrow (A \vee \neg B)$
- ☐ è una tautologia.
 - ☒ è logicamente equivalente a $A \vee \neg B$.
 - ☐ Ha come conseguenza logica $\neg B$.
 - ☒ È conseguenza logica di $\neg B$.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia $L = \{P, f, a\}$ con P simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione binario e a simbolo di costante. Quali delle seguenti sono L -formule?

- ☐ $\exists x (P(f(y, x), a) = a)$.
- ☐ $P(a, f(f(x), f(x)))$.
- ☐ $\forall a P(a, a)$.
- ☒ $\exists y (f(x, y) = a) \wedge \forall y P(x, y)$.

(b) Sia R la relazione “avere lo stesso peso”.

- ☒ R è una relazione simmetrica.
- ☐ R è una relazione di ordine.
- ☒ R è una relazione di equivalenza.
- ☒ R è una relazione di pre-ordine.

(c) Sia $\varphi(x)$ la formula $\exists y (y = f(a, a) \wedge g(y, x) = a)$

nel linguaggio $L = \{f, g, a\}$. Consideriamo la L -struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 1 \rangle$.

- ☒ $\mathcal{A} \models \varphi[x/2^{-1}]$.
- ☐ $\mathcal{A} \models \varphi[x/2]$.
- ☒ $\mathcal{A} \models \exists x \varphi(x)$.
- ☐ $\mathcal{A} \models \forall x \varphi(x)$.

(d) La formula $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

- ☐ è conseguenza logica di A .
- ☐ è logicamente equivalente a A .
- ☐ è vera solo quando A e B sono false, mentre C è vera.
- ☒ è falsa solo quando A e B sono vere, mentre C è falsa.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia P la proposizione $A \wedge (\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$.

- ☒ P è soddisfacibile.
- ☒ $\neg P$ è soddisfacibile.
- ☒ Per ogni valutazione v , il valore di $v(P)$ non dipende dal valore di $v(B)$.
- ☐ P è vera se e solo se B è vera.

(b) La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 - x$

- ☐ è tale che $x \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ☒ è tale che $f(x) = 0$ per qualche $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ è iniettiva.
- ☐ è suriettiva.

(c) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- ☐ Se A è un insieme finito, anche $A^{<\mathbb{N}}$ lo è.
- ☐ Se A è infinito, allora $A^{<\mathbb{N}}$ è un insieme numerabile.
- ☐ Se esiste una suriezione $f: A \rightarrow B$, allora $|A| \leq |B|$.
- ☒ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

(d) Sia $L = \{R, f, a\}$ con R simbolo di relazione unario, f simbolo di funzione binario e a simbolo di costante. Sia φ la stringa

$$(\exists x((\forall y(R(f(x, y)))) \wedge ((R(a)) \rightarrow (f(a, a) = a))))$$

- ☒ φ è una formula del prim'ordine nel linguaggio L .
- ☐ φ contiene variabili libere.
- ☒ L'altezza di φ è 3.
- ☐ Nel raggio d'azione di $\forall y$ compare il simbolo di costante a .

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia P una contraddizione e Q una proposizione qualsiasi.

- ☒ $P \rightarrow Q$ è una tautologia.
- ☐ $P \wedge Q$ è soddisfacibile.
- ☒ $Q \rightarrow P$ è logicamente equivalente a $\neg Q$.
- ☐ $Q \rightarrow P$ è logicamente equivalente a Q .

(b) Sia A un insieme non vuoto.

- ☐ $A^{<\mathbb{N}}$ è finito quando A lo è.
- ☒ $A^{<\mathbb{N}}$ è numerabile se $|A| \leq |\mathbb{N}|$.
- ☒ $A^n \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- ☒ Quando $|A| = 1$ si ha che $|A^{\mathbb{N}}| < |A^{<\mathbb{N}}|$.

(c) La relazione R su \mathbb{N} definita da $x R y$ se e solo se $|x - y| \leq 2$ è

- ☒ riflessiva.
- ☒ simmetrica.
- ☐ transitiva.
- ☐ una relazione d'equivalenza.

(d) Consideriamo le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - 4$.

- ☒ La funzione g è una biezione.
- ☐ La funzione f è una biezione.
- ☐ La funzione $f \circ g$ è una biezione.
- ☐ La funzione $g \circ f$ è una biezione.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia Q una tautologia e P una proposizione soddisfacibile ma non valida.

- ☒ $P \rightarrow Q$ è una tautologia.
- ☐ $P \wedge Q$ non è logicamente equivalente a P .
- ☐ $Q \models P$ è vero.
- ☒ $Q \rightarrow P$ è logicamente equivalente a P .

(b) Siano A e B insiemi non vuoti.

- ☐ $A \times B$ è *finito* se almeno uno tra A e B lo è.
- ☒ $|A^B| = 1$ se e solo se $|A| = 1$.
- ☒ Se $A \subseteq B$ allora $A^n \subseteq B^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- ☒ Se $A \subseteq B$ e $|B| \leq |A|$ allora $|A| = |B|$.

(c) La relazione S su $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definita da $x S y$ se e solo se $\exists z(x \cdot z = y)$

- ☒ è riflessiva.
- ☐ non è simmetrica.
- ☒ è transitiva.
- ☐ non è una relazione d'equivalenza.

(d) Consideriamo le funzioni $f: \mathbb{Q} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto \frac{1}{x-1}$
e $g: \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto \frac{1}{x} + 1$.

- ☒ La funzione g è iniettiva.
- ☒ 0 è nel codominio di f .
- ☒ $(g \circ f)(2) = 2$.
- ☒ 1 è nel codominio di g .

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) Siano P e Q proposizioni tali che $P \models Q$.
- Se P è una tautologia allora anche Q lo è.
 - $P \wedge \neg Q$ è soddisfacibile.
 - Se Q è una contraddizione allora anche P lo è.
 - Necessariamente vale anche $Q \models P$.
- (b) Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione iniettiva.
- Per ogni $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ contiene esattamente un elemento.
 - Se B è finito anche A lo è.
 - Se $|A| = |B|$ allora f è anche suriettiva.
 - Se B è infinito anche A lo è.
- (c) Sia $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario. Consideriamo la L -struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ e sia φ la formula $\forall x[(f(y, x) = z) \wedge \exists z(f(z, z) = x)]$.
- L'insieme di verità di φ in \mathcal{A} è un sottoinsieme di \mathbb{N}^2 .
 - L'insieme delle variabili libere di φ è $\{y, z\}$.
 - φ è un enunciato.
 - L'altezza di φ è 3.
- (d) Siano A , B e C insiemi non vuoti.
- $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) = (A \cup C) \setminus B$.
 - Se $C \cap (A \cap B) = \emptyset$ allora $C \cap (A \cup B) = \emptyset$.
 - Se $C \cap (A \cup B) = \emptyset$ allora $C \cap (A \cap B) = \emptyset$.
 - Se $A \times B \subseteq A \times C$ allora $B \subseteq C$.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili?

- ☒ $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{Q}\}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 2 = 0\}$
- ☒ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Q}\}$
- ☐ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \vee y \notin \mathbb{Q}\}$

(b) Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione suriettiva.

- ☐ Per ogni $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ contiene esattamente un elemento.
- ☒ Se A è finito anche B lo è.
- ☐ Se $|A| = |B|$ allora f è anche iniettiva.
- ☒ Se B è infinito anche A lo è.

(c) Sia φ la formula $\forall x \exists z \neg R(x, z)$.

- ☐ φ non è un enunciato.
- ☐ $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \models \varphi$.
- ☒ $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle \models \varphi$.
- ☒ φ è soddisfacibile ma non valida.

(d) Sia $a_m, m \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$\begin{aligned}a_0 &= n \\ a_{m+1} &= 2a_m.\end{aligned}$$

- ☒ Se $n = 0$, allora $a_m = 0$ per ogni m .
- ☐ Se $n = 1$, allora $a_m = 1$ per ogni m .
- ☒ Se $n = 2$ allora $a_m = 2^{m+1}$ per ogni m .
- ☐ Se $n = 3$ allora $a_3 < 10$.

Domande a risposta multipla

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) Sia X l'insieme degli abitanti di Torino e R la relazione binaria su X definita da $x R y$ se e solo se x abita a meno di 50 metri da y .
- ☒ R è una relazione riflessiva.
 - ☐ R è una relazione transitiva.
 - ☒ R è una relazione simmetrica.
 - ☐ R è una relazione d'equivalenza.
- (b) Siano A e B due insiemi infiniti.
- ☐ $A \cap B$ deve anch'esso essere infinito.
 - ☒ $A \cup B$ deve anch'esso essere infinito.
 - ☐ Se A è più che numerabile e $B \subseteq A$, anche B deve essere più che numerabile.
 - ☒ Se A è numerabile e $B \subseteq A$, allora $|B| = |\mathbb{N}|$.
- (c) Sia φ la formula $\forall x \forall z [x = y \rightarrow f(x, z) = z]$.
- ☒ φ non è un enunciato.
 - ☐ Nessuna variabile occorre libera in φ .
 - ☒ $\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \varphi[y/0]$.
 - ☒ L'insieme di verità di φ in $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ è costituito da un solo elemento.
- (d) La funzione $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definita da $f(q) = 2q^2 + 1$ è
- ☐ iniettiva ma non suriettiva.
 - ☐ suriettiva ma non iniettiva.
 - ☐ biettiva.
 - ☒ né iniettiva, né suriettiva.