Prova di Logica Matematica 15 luglio 2022 Versione 2

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano φ, ψ delle L-formule. 2 punti

- ☐ Se $\neg\varphi$ è soddisfacibile allora φ è una contraddizione proposizionale.
- ■ Se φ è una tautologia allora $\neg\varphi$ è una contraddizione proposizionale.
- ■ Se φ è soddisfacibile allora $\psi \vee \varphi$ è soddisfacibile.
- ☐ φ è soddisfacibile se e solo se $\neg\varphi$ è una tautologia.

(b) La relazione P su $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definita da $y \; P \; z$ se e solo se $y \mid z$ 2 punti

- ☐ è simmetrica.
- ■ è transitiva.
- ☐ è un ordine lineare.
- ■ è riflessiva.

(c) Consideriamo il linguaggio L con due simboli di funzione unaria g, h. Quali delle seguenti espressioni sono L-enunciati che formalizzano correttamente relativamente alla L-struttura $\langle B, g, h\rangle$ l'affermazione "la funzione g è l'inversa della funzione h" 2 punti

- ■ $\forall x(g(h(x)) = x \wedge h(g(x)) = x)$
- ☐ $\forall x(g(h(x)) = x)$
- ☐ $g = h^{-1}$
- ☐ $\forall x(g(x) \cdot h(x) = 1)$

(d) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? 2 punti

- ■ $\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - 4y - 3 = 0\}$
- ☐ $\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{Q} \vee z \notin \mathbb{N}\}$
- ■ $\{y \in \mathbb{R} \mid \sqrt{y} \in \mathbb{Z}\}$

(e) Sia φ la formula $\forall z Q(y,z) \wedge \exists y \exists z Q(z,y)$, dove Q è un simbolo di predicato binario. 2 punti

- ■ La variabile y occorre libera e vincolata in φ.
- □ φ è un enunciato e la variabile y occorre sia libera che vincolata in φ.
- □ La variabile z occorre libera e vincolata in φ.
- □ φ è un enunciato.

(f) Siano B, C, D lettere proposizionali e Q una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

B	C	D	Q
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

- ■ $\mathrm{Q} \equiv \mathrm{D} \to \mathrm{C}$
- ■ Q non è una contraddizione.
- ■ $\mathrm{Q} \vee \mathrm{D}$ è una tautologia.
- □ $\mathrm{Q} \models \neg \mathrm{D}$.

(g) La funzione $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definita da $g(t) = 3t^2 + 1$ è 2 punti

- □ suriettiva ma non iniettiva.
- □ biettiva.
- ■ né iniettiva, né suriettiva.
- □ iniettiva ma non suriettiva.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{g\}$ con g simbolo di funzione binario. Sia φ la L-formula

$$\exists z\,(g(z,z) = y).$$

1. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \varphi[y/2, x/1].$$
2. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \varphi[y/2, x/2].$$
3. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \forall y \varphi[y/2, x/2].$$
4. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \exists y \varphi[y/2, x/1].$$
5. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \varphi[y/1, x/3].$$
6. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \varphi[y/\sqrt{2}, x/-2].$$
7. È vero che $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \forall y\, \varphi[y/1, x/3]$?
8. Sia $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. È vero che $\mathcal{C} \models \forall y\, \varphi[y/1, x/3]$?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. L'interpretazione di φ in $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: "Esiste un numero intero z tale che $y = z + z$ (ovvero $y = 2z$)". Dunque la risposta al primo punto è no poiché 1 è un numero intero dispari.

2. Per quanto visto sopra la risposta al secondo punto si poiché 2 è un numero intero pari.

3. Per quanto visto sopra si ha che
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \not\models \forall y \varphi[y/2, x/2]$$
come testimoniato dai numeri dispari (se assegnati a y per φ nella struttura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$).

4. Per quanto visto sopra si ha che
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \exists y \varphi[y/2, x/2]$$
come testimoniato da qualunque numero pari (se assegnato a y per φ nella struttura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$).

5. Posto $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, l'interpretazione di φ in $\mathcal{B}$ è: "Esiste un numero reale z tale che $y = z \cdot z$ (ovvero $y = z^2$)". Quindi la risposta al punto quattro è positiva in quanto 3 è il quadrato del numero reale $\sqrt{3}$.

6. Per quanto scritto sopra la risposta al punto cinque è negativa in quanto -2 è un numero reale negativo e quindi non può essere il quadrato di alcun numero reale.

7. Per quanto visto al punto cinque, si ha che $\mathcal{B} \not\models \forall y\, \varphi$: per esempio -3 è un assegnamento alla variabile y che testimonia questa asserzione (se assegnato a y per φ nella struttura $\mathcal{B}$).

8. Per quanto visto ai punti precedenti si ha che $\mathcal{C} \models \forall y\, \varphi$: infatti, tutti i numeri reali strettamente positivi sono il quadrato di un numero reale strettamente positivo.

Esercizio 3 9 punti

Sia $\langle B, < \rangle$ un ordine lineare stretto e siano C, D sottoinsiemi di B. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle B, <, C, D \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{<, C, D\}$ con un simbolo di relazione binaria e due simboli di predicato unari le seguenti affermazioni:

1. Tra due elementi di C c'è un elemento di C.
2. Ci sono due elementi distinti di D tali che nessuno dei due è minore dell'altro, cioè $\langle D, < \rangle$ non è un ordine totale.
3. Qualche elemento di C è minore di ogni elemento di D.
4. C'è un elemento di C che è il massimo di $\langle B, < \rangle$.

Soluzione: 1. Tra due elementi di C c'è un elemento di C:
$\forall x \forall y\, (x < y \wedge C(x) \wedge C(y) \rightarrow \exists z(C(z) \wedge x < z \wedge z < y)))$.

2. Ci sono due elementi distinti di D tali che nessuno dei due è minore dell'altro, cioè $\langle D, < \rangle$ non è un ordine totale:
$\exists x \exists y(D(x) \wedge D(y) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x < y \vee y < x))$

3. Qualche elemento di C è minore di ogni elemento di D:
$\exists x(C(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow x < y))$

4. C'è un elemento di C che è il massimo di $\langle B, < \rangle$:
$\exists x(C(x) \wedge \forall y(y < x \vee x = y))$