

Corso di Logica

6.3 – Conseguenza Logica, Validità e Soddisfacibilità

Docenti: Alessandro Andretta, Luca Motto Ros, Matteo Viale

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Alcune nozioni logiche

Sia φ un L -enunciato.

- Se \mathcal{A} è una L -struttura tale che $\mathcal{A} \models \varphi$ diciamo che φ è **vero** nella struttura \mathcal{A} , o che \mathcal{A} è un **modello** di φ , o che \mathcal{A} **soddisfa** φ .
- Se esiste almeno una L -struttura \mathcal{A} tale che $\mathcal{A} \models \varphi$, allora si dice che φ è **soddisfacibile** o **coerente**.
- Se non esiste alcun modello di φ , si dice che φ è **insoddisfacibile**, o **incoerente**, o **contraddittorio**, o una **contraddizione**.
- Se per ogni L -struttura \mathcal{A} si ha che $\mathcal{A} \models \varphi$, si dice che φ è **(logicamente) valido**, o **logicamente vero**, e si scrive

$$\models \varphi.$$

Queste nozioni si possono estendere anche ad insiemi di L -enunciati.

Sia Γ un insieme (finito o infinito) di L -enunciati.

- Una L -struttura \mathcal{A} è un **modello** di Γ , in simboli

$$\mathcal{A} \models \Gamma,$$

se $\mathcal{A} \models \varphi$ per ogni $\varphi \in \Gamma$. In questo caso diciamo che Γ è **soddisfatto** da \mathcal{A} , o che \mathcal{A} **soddisfa** Γ .

- Γ si dice **soddisfacibile** (o **coerente**) se $\mathcal{A} \models \Gamma$ per qualche L -struttura \mathcal{A} ; in caso contrario, ovvero se $\mathcal{A} \not\models \Gamma$ per ogni L -struttura \mathcal{A} , si dice che Γ è **insoddisfacibile** (o **incoerente**).
- Γ si dice **valido** se $\mathcal{A} \models \Gamma$ per ogni L -struttura \mathcal{A} . In questo caso scriviamo $\models \Gamma$.

Si verifica facilmente che se $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ è un insieme **finito** di L -enunciati, allora Γ è soddisfacibile/insoddisfacibile/valido se e solo l'enunciato $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ è soddisfacibile/insoddisfacibile/valido.

Osservazione. Il numero di interpretazioni di una formula proposizionale è finito (ci sono 2^n possibili interpretazioni se la proposizione contiene n lettere proposizionali): dunque si può controllare se essa è una tautologia, o se è insoddisfacibile considerando esplicitamente tutte le possibilità.

Di contro, non c'è limite al numero di L -strutture che possono soddisfare o meno un dato L -enunciato φ : dunque sarà in generale più facile dimostrare che φ è soddisfacibile (basta trovare una struttura \mathcal{A} tale che $\mathcal{A} \models \varphi$) piuttosto che dimostrare la sua validità o insoddisfacibilità (bisognerebbe controllare se *tutte* le L -strutture soddisfano o meno φ).

Conseguenza logica

Sia L un linguaggio, sia Γ un insieme di L -enunciati e sia φ un L -enunciato. Diremo che φ è **conseguenza logica** di Γ , in simboli

$$\Gamma \models \varphi$$

se: per ogni L -struttura \mathcal{A} , se $\mathcal{A} \models \Gamma$ allora $\mathcal{A} \models \varphi$.

Scriveremo $\Gamma \not\models \varphi$ per dire che φ NON è conseguenza logica di Γ .

Quando $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ è un insieme finito scriveremo

$$\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$$

invece di $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \models \varphi$, e se $\Gamma = \{\psi\}$ scriveremo semplicemente

$$\psi \models \varphi.$$

Inoltre si verifica facilmente che

$$\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi \quad \text{se e solo se} \quad \models (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi.$$

Attenzione!

Il simbolo \models ha tre significati distinti:

- $\mathcal{A} \models \varphi$ (o $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$), significa che \mathcal{A} soddisfa φ (mediante l'assegnazione $x_1/a_1, \dots, x_n/a_n$); quindi \models denota una relazione tra *strutture* e enunciati/formule (**relazione di soddisfazione**).
- $\models \varphi$ significa che φ è un **enunciato valido**; quindi in questo caso \models denota una *proprietà* che gli enunciati possono o non possono avere (quella di essere validi).
- $\Gamma \models \varphi$ significa che l'enunciato φ è vero in ogni struttura in cui tutti gli enunciati in Γ sono veri; quindi in questo caso \models denota una relazione tra *insiemi di enunciati* e singoli enunciati (**relazione di conseguenza logica**).

Ragionando esattamente come nel caso della logica proposizionale, si dimostra il teorema seguente.

Teorema

- ① φ è *valido* se e solo se $\neg\varphi$ è *insoddisfacibile*.
- ② φ è *soddisfacibile* se e solo se $\neg\varphi$ non è *valido*,
- ③ $\Gamma \models \varphi$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è *insoddisfacibile*.

Dimostrazione.

① e ② sono ovvie.

Dimostriamo che vale anche ③. Se $\Gamma \models \varphi$ e per assurdo $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ per qualche \mathcal{A} , allora si avrebbe che, in particolare, $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ e $\mathcal{A} \models \varphi$ (poiché $\mathcal{A} \models \Gamma$ e $\Gamma \models \varphi$), contraddizione.

Viceversa, supponiamo $\mathcal{A} \models \Gamma$. Se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è insoddisfacibile, allora $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$, cioè $\mathcal{A} \models \varphi$. Poiché \mathcal{A} è arbitrario, segue che $\Gamma \models \varphi$. □

Equivalenza logica

Sia L un linguaggio. Due L -enunciati φ e ψ sono **logicamente equivalenti**, in simboli $\varphi \equiv \psi$, se

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{se e solo se} \quad \mathcal{A} \models \psi$$

per ogni struttura \mathcal{A} .

Scriveremo $\varphi \not\equiv \psi$ per dire che φ e ψ NON sono logicamente equivalenti.

Come nel caso della logica proposizionale, si ha che

$$\begin{array}{lll} \varphi \equiv \psi & \text{se e solo se} & \varphi \models \psi \text{ e } \psi \models \varphi \\ \varphi \equiv \psi & \text{se e solo se} & \models \varphi \leftrightarrow \psi \end{array}$$

Esempio

Sia $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione unario, e sia φ l'enunciato

$$\forall y \exists x (f(x) = y).$$

Per mostrare che φ è soddisfacibile, bisogna trovare una L -struttura \mathcal{A} tale che $\mathcal{A} \models \varphi$.

Per fare in modo che φ sia vero in \mathcal{A} , bisogna allora “scegliere” una funzione $f^{\mathcal{A}}$ tale che ogni elemento y del dominio della struttura sia immagine mediante $f^{\mathcal{A}}$ di qualche elemento x .

Quindi si può considerare, ad esempio, la struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}} \rangle$ dove

$$f^{\mathcal{A}}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Infatti, in \mathcal{A} è vero che per ogni intero y esiste un intero x tale che $x + 1 = y$: basta prendere $x = y - 1$. Dunque $\mathcal{A} \models \varphi$ e abbiamo mostrato che φ è soddisfacibile.

Esempio (continua)

Se si fosse considerata al posto di \mathcal{A} la struttura $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathcal{B}} \rangle$, dove $f^{\mathcal{B}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è nuovamente definita da $x \mapsto x + 1$, l'enunciato φ

$$\forall y \exists x (f(x) = y)$$

non sarebbe risultato vero in \mathcal{B} , poiché se si considera $y = 0$ non esiste nessun numero naturale x tale che $x + 1 = y$. Dunque $\mathcal{B} \not\models \varphi$. Le due strutture \mathcal{A} e \mathcal{B} dimostrano in particolare che φ è soddisfacibile ma non valido.

Più in generale, si può osservare che per ogni L -struttura \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ se e solo se } f^{\mathcal{M}} \text{ è una funzione suriettiva.}$$

Esempio

Consideriamo ora il linguaggio $L = \{R\}$, dove R è un simbolo di relazione binario, e sia φ l'enunciato

$$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z (\neg(z = x) \wedge \neg(z = y) \wedge (R(x, z) \wedge R(z, y)))).$$

Consideriamo la L -struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, < \rangle$ (ovvero la relazione binaria $R^{\mathcal{A}}$ su \mathbb{R} è $<$). Allora l'“interpretazione” di φ in \mathcal{A} è: “per ogni coppia di numeri reali x e y tali che $x < y$ esiste un altro reale z diverso da x e da y tale che $x < z < y$ ” (ovvero i numeri reali sono *densi* rispetto a $<$). Tale affermazione è vera in \mathbb{R} : dati x e y tali che $x < y$, basta prendere ad esempio $z = \frac{x+y}{2}$. Quindi $\mathcal{A} \models \varphi$.

Invece φ è falsa nella L -struttura $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$, poiché se si considera $y = x + 1$ si ha che $x < y$ ma non esiste nessun intero tra x e y che sia diverso da entrambi. Dunque φ è nuovamente soddisfacibile ma non valido.

Esempio

Sia ora $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ un linguaggio dove $+$ e \cdot sono simboli di funzione binari e 0 e 1 sono simboli di costante. Sia $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ una L -struttura (ovvero si interpreti il simbolo $+$ come l'usuale somma tra numeri reali, \cdot come il prodotto, 0 come il numero reale 0 e 1 come il numero reale 1). Per comodità, utilizzeremo la notazione *infissa*, ovvero scriveremo $x + y$ al posto di $+(x, y)$ e $x \cdot y$ al posto di $\cdot(x, y)$.

Sia φ l'enunciato

$$\forall x \exists y (1 + x \cdot x = y).$$

L'“interpretazione” di φ in \mathcal{A} dice che per ogni reale x deve esistere un reale y tale che $x^2 + 1 = y$: questo è vero in \mathbb{R} , dunque $\mathcal{A} \models \varphi$.

Sia ora ψ l'enunciato

$$\forall y \exists x (1 + x \cdot x = y).$$

In questo caso, ψ è falsa in \mathcal{A} poiché se si considera $y = 0$ allora non esiste nessun x tale che $x^2 + 1 = y$. Dunque $\mathcal{A} \not\models \psi$.

Esempio

Consideriamo il linguaggio $L = \{R\}$ con R simbolo di relazione binario. Consideriamo i seguenti enunciati:

$$\varphi_1 : \quad \forall x R(x, x)$$

$$\varphi_2 : \quad \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$$

$$\varphi_3 : \quad \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)).$$

Allora per ogni L -struttura \mathcal{A} si ha che

$\mathcal{A} \models \varphi_1$ se e solo se $R^{\mathcal{A}}$ è una relazione riflessiva;

$\mathcal{A} \models \varphi_2$ se e solo se $R^{\mathcal{A}}$ è una relazione simmetrica;

$\mathcal{A} \models \varphi_3$ se e solo se $R^{\mathcal{A}}$ è una relazione transitiva.

Quindi $\mathcal{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ se e solo se $R^{\mathcal{A}}$ è una relazione di equivalenza.

... continua

Esempio (continua)

Siano L e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ come nella slide precedente. Dimostriamo che nessuna delle φ_i è conseguenza logica delle rimanenti due, ovvero

$$\{\varphi_2, \varphi_3\} \not\models \varphi_1$$

$$\{\varphi_1, \varphi_3\} \not\models \varphi_2$$

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} \not\models \varphi_3$$

Dobbiamo trovare per ogni $1 \leq i \leq 3$ una L -struttura \mathcal{A}_i tale che $\mathcal{A}_i \models \varphi_j$ per ogni $j \neq i$ ma $\mathcal{A}_i \not\models \varphi_i$. Allora basta considerare:

- $\mathcal{A}_1 = \langle A, \emptyset \rangle$, ovvero una struttura con dominio un insieme non vuoto e $R^{\mathcal{A}_1}$ la relazione vuota;
- $\mathcal{A}_2 = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ o più in generale, un qualunque ordine (non banale);
- $\mathcal{A}_3 = \langle \mathbb{Z}, R^{\mathcal{A}_3} \rangle$ dove per ogni $k, l \in \mathbb{Z}$

$$R^{\mathcal{A}_3}(k, l) \quad \text{se e solo se} \quad |k - l| \leq 1.$$

Ripasso...

- Per dimostrare che un enunciato φ è **soddisfacibile** bisogna trovare una struttura \mathcal{A} tale che $\mathcal{A} \models \varphi$.
- Per dimostrare che un enunciato φ **NON è valido** bisogna trovare una struttura \mathcal{A} tale che $\mathcal{A} \not\models \varphi$ (equivalentemente, $\mathcal{A} \models \neg\varphi$).
- Per dimostrare che un enunciato φ **NON è conseguenza logica** di un insieme di enunciati Γ bisogna trovare una struttura \mathcal{A} tale che $\mathcal{A} \models \Gamma$ ma $\mathcal{A} \not\models \varphi$. In particolare, per dimostrare che

$$\psi_1, \dots, \psi_n \not\models \varphi$$

bisogna trovare una struttura \mathcal{A} tale che

$$\mathcal{A} \models \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \wedge \neg\varphi.$$

- Per dimostrare che due enunciati φ e ψ **NON sono logicamente equivalenti**, ovvero che $\varphi \not\equiv \psi$, bisogna trovare una struttura \mathcal{A} tale che $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \neg\psi$ oppure $\mathcal{A} \models \psi \wedge \neg\varphi$.

Esercizio

Sia $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario e φ l'enunciato

$$\forall x \exists y \forall z (f(f(x, y), z) = z).$$

Dimostrare che φ è soddisfacibile ma non è valido.

Basta osservare che $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \varphi$ ma $\langle \mathbb{N}, + \rangle \not\models \varphi$.

Esercizio per casa

È vero che $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle \models \varphi$?

Esercizio

Sia $L = \{R\}$ con R simbolo di relazione binario. Dimostrare che

$$\forall x \exists y R(x, y) \not\models \exists y \forall x R(x, y).$$

Bisogna dimostrare che esiste una L -struttura \mathcal{A} tale che $\mathcal{A} \models \forall x \exists y R(x, y)$ ma $\mathcal{A} \not\models \exists y \forall x R(x, y)$, ovvero $\mathcal{A} \models \neg \exists y \forall x R(x, y)$.

Basta allora considerare $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.

Esercizio

Sia $L = \{P, Q\}$ con P e Q simboli di relazione unari. Dimostrare che

$$\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \not\models \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x).$$

Bisogna trovare una L -struttura \mathcal{A} tale che

$$\mathcal{A} \models \exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad \text{ma} \quad \mathcal{A} \not\models \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x).$$

La condizione $\mathcal{A} \models \exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$ equivale a $\mathcal{A} \models \exists x (\neg P(x) \vee Q(x))$, mentre la condizione $\mathcal{A} \not\models \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ equivale a $\mathcal{A} \models \exists x P(x)$ ma $\mathcal{A} \models \neg \exists x Q(x)$. Per l'ultima condizione, nessun x deve avere la proprietà Q . Quindi se si deve avere $\mathcal{A} \models \exists x (\neg P(x) \vee Q(x))$ bisogna che ci sia qualche x per cui non vale P . D'altra parte se deve essere vero che $\mathcal{A} \models \exists x P(x)$, vuol dire che ci deve essere qualche x per cui vale P . Quindi $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$ deve essere tale che

$$Q^{\mathcal{A}} = \emptyset \quad P^{\mathcal{A}} \neq A \quad P^{\mathcal{A}} \neq \emptyset.$$

Basta allora porre $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$ con

$$A = \mathbb{N} \quad P^{\mathcal{A}} = \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad Q^{\mathcal{A}} = \emptyset.$$

Esercizio

Sia $L = \{f, c\}$ con f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Trovare un L -enunciato φ tale che

$$\langle \mathbb{N}, \cdot, 17 \rangle \models \varphi \quad \text{ma} \quad \langle \mathbb{N}, \cdot, 12 \rangle \not\models \varphi.$$

Osserviamo subito che 17 è un numero primo mentre 12 è scomponibile, ad esempio, in $4 \cdot 3$. Bisogna allora cercare di trovare un L -enunciato che dica c ha solo divisori banali,

ovvero

per ogni x e y , se $x \cdot y = c$ allora $x = 1$ oppure $y = 1$.

L'espressione " $x = 1$ " può essere resa, nel linguaggio dato, con

$$\forall z (f(x, z) = z),$$

e similmente per " $y = 1$ ". Allora φ può essere l'enunciato

$$\forall x \forall y (f(x, y) = c \rightarrow \forall z (f(x, z) = z) \vee \forall z (f(y, z) = z)).$$

Esercizio

Sia $L = \{R, f, c\}$ con R simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Dimostrare che l'enunciato φ

$$\forall x R(f(x, x), c)$$

è soddisfacibile ma non valido.

Si ha

$$\langle \mathbb{R}, \geq, \cdot, 0 \rangle \models \varphi$$

ma

$$\langle \mathbb{R}, \leq, \cdot, 0 \rangle \not\models \varphi.$$

Esercizio

Sia $L = \{R\}$ con R simbolo di relazione binario. Determinare per quali $1 \leq k \leq 10$ si ha che

$$\langle \text{Div}(k), | \rangle \models \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x)).$$

Si ha che $\langle \text{Div}(k), | \rangle \models \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$ se e solo se $|$ è un ordine lineare su $\text{Div}(k)$. Questo è vero se e solo se nella scomposizione in fattori primi di k compare *un solo* numero primo, ovvero se e solo se $k = p^n$ con p primo e $n \in \mathbb{N}$.

Quindi $\langle \text{Div}(k), | \rangle \models \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$ per $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.