Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano A, B, C lettere proposizionali e P una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

A	B	C	P
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**

- ☐ $\neg$P non è una tautologia.
- ☐ P $\models$ A $\vee$ $\neg$B
- ☐ B $\vee$ C $\models$ $\neg$P
- ☐ P è insoddisfacibile.

(b) Siano Q e R formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ☐ Q $\not\equiv$ R se e solo se $\models \neg$(Q $\to$ R)
- ☐ Se R è insoddisfacibile, allora $\neg$R è soddisfacibile.
- ☐ $\neg$R $\vee$ (Q $\to$ R) è una tautologia.
- ☐ R $\to$ Q $\equiv$ $\neg$R $\vee$ $\neg\neg$Q

(c) Sia A un insieme non vuoto e sia $L = \{R\}$ un linguaggio del prim'ordine con R simbolo di relazione binaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle A, R\rangle$, l'affermazione: "R è riflessiva"? 2 punti

- ☐ $\forall x\,(R(x,x) \to x = x)$
- ☐ $\forall x\,(R \to x = x)$
- ☐ $\forall x\,(R(x,x))$
- ☐ $\forall x\,(R(x) = x)$

(d) Dati due insiemi C e D, indichiamo con C^D l'insieme delle funzioni da D in C. Sia A un insieme non vuoto di cardinalità finita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ $\mathbb{N}^A$ è un insieme infinito numerabile.
- ☐ $A^{\mathbb{N}}$ è necessariamente più che numerabile.
- ☐ A^A è un insieme infinito.
- ☐ A^A è certamente in biezione con $\mathcal{P}(A)$.

(e) Sia $L = \{S\}$ un linguaggio del prim'ordine con S simbolo di relazione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\forall x \exists y\, S(y,x)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$? 2 punti

- ☐ "Dato un numero razionale, ce n'è sempre uno più piccolo."
- ☐ "C'è un numero razionale più piccolo di x."
- ☐ "C'è un numero razionale più piccolo di tutti."
- ☐ "Ci sono numeri razionali arbitrariamente piccoli."

(f) Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(x) = \frac{2x+10}{2} - x$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ f è iniettiva.
- ☐ $f(x) = 5$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.
- ☐ f è suriettiva.
- ☐ $f(x) = 3$ per qualche $x \in \mathbb{N}$.

(g) Siano B, C sottoinsiemi di A e sia $f\colon A \to A$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ $B \subseteq f^{-1}[f[B]]$.
- ☐ Se $f[B] \subseteq f[C]$ allora si deve avere che $B \supseteq C$.
- ☐ Se $B \neq C$ allora certamente accade che $f[B] \neq f[C]$.
- ☐ $f^{-1}[B \cap C] = f^{-1}[B] \cap f^{-1}[C]$.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{R, f, c\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario R, un simbolo di funzione binario f e un simbolo di costante c. Sia φ la formula

$$(\neg \exists y\,(f(y, y) = x) \rightarrow R(f(z, c), x)).$$

Consideriamo la L-struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 1 \rangle$.

1. Dire se φ è un enunciato oppure no e, nel secondo caso, cerchiare le occorrenze libere di variabili.
2. È vero che $\mathcal{N} \models \exists y\,(f(y, y) = x)[x/n, y/m]$ se e solo se n è un numero naturale pari?
3. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[x/1, y/0, z/0]$?
4. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[x/2, y/1, z/0]$?
5. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[x/5, y/1, z/5]$?
6. È vero che $\mathcal{N} \models \forall x\,\varphi[x/0, y/0, z/0]$?
7. È vero che $\mathcal{N} \models \forall x\,\varphi[x/0, y/0, z/5]$?
8. È vero che $\mathcal{N} \models \exists z \forall x\,\varphi$?
9. È vero che $\mathcal{N} \models \forall z \forall x\,\varphi$?

Giustificare le proprie risposte.

Pagina 4 di 5

Esercizio 3 9 punti

Sia A un insieme non vuoto, siano B, C sottoinsiemi di A e sia $f\colon A \to A$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle A, B, C, f\rangle$ mediante il linguaggio $L = \{B, C, f\}$ con due simboli di predicato unari ed un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. f è iniettiva
2. $f \circ f$ è una funzione costante
3. $f[B] \subseteq C$
4. $\operatorname{rng}(f) = C$.