Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia $L = \{k\}$ un linguaggio del prim'ordine con k simbolo di funzione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\neg\forall w\,(k(w,w) = w)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$? 2 punti

- ☐ "Tutti i numeri reali coincidono con il proprio quadrato."
- ☐ "Nessun numero reale coincide con il proprio quadrato."
- ☐ "Non tutti i numeri reali coincidono con il proprio quadrato."
- ☐ "Esiste un numero reale w tale che $w \cdot w \neq w$."

(b) Siano Q, R relazioni binarie su un insieme D. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ Se per ogni $d, e \in D$ vale che $Q(d, e)$ se e solo se $R(e, d)$, allora $R = Q^{-1}$.
- ☐ Se Q è riflessiva e $Q \supseteq R$, anche R è riflessiva.
- ☐ Se Q è riflessiva e $Q \subseteq R$, anche R è riflessiva.
- ☐ Se per ogni $d \in D$ esiste un solo $e \in D$ tale che $Q(d, e)$, allora Q è una funzione.

(c) Siano $k \colon \mathbb{Q}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, dove $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 1, e $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 1}$ definite da $k(w) = \sqrt{w-1}$ e $f(x) = x^2 + 1$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ f è una funzione iniettiva.
- ☐ $k \circ f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.
- ☐ $k \circ f(d) = d$ per ogni $d \in \mathbb{Q}$ con $d \geq 0$.
- ☐ k è una funzione suriettiva.

(d) Siano S e P formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ☐ S è una tautologia se e solo se ¬S è insoddisfacibile.
- ☐ S $\models$ P $\rightarrow$ S
- ☐ S $\vee$ P $\equiv$ ¬S $\rightarrow$ P
- ☐ Se S è soddisfacibile allora ¬S è certamente insoddisfacibile.

(e) Sia D un insieme non vuoto di cardinalità finita e A un insieme di cardinalità infinita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ $A \setminus D$ ha cardinalità finita.
- ☐ $D \times A$ ha cardinalità finita.
- ☐ $D \setminus A$ ha cardinalità finita.
- ☐ $D \triangle A$ ha cardinalità finita.

(f) Sia D un insieme non vuoto e sia $L = \{k\}$ un linguaggio del prim'ordine con k simbolo di funzione unaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle D, k \rangle$, l'affermazione: "k è biettiva"? 2 punti

- ☐ $\exists x \forall y(k(x) = y) \wedge \forall x \forall y(x = y \rightarrow k(x) = k(y))$
- ☐ $\forall x \forall y(k(x) = k(y) \leftrightarrow x = y)$
- ☐ $\forall x \forall y(k(x) = k(y) \rightarrow x = y) \wedge \exists x \forall y(k(x) = y)$
- ☐ $\forall x \forall y(k(x) = k(y) \rightarrow x = y) \wedge \forall y \exists x(k(x) = y)$

(g) Siano D, A, B lettere proposizionali e S una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

D	A	B	S
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**

- ☐ ¬S è soddisfacibile.
- ☐ S non è soddisfacibile.
- ☐ D $\leftrightarrow$ A $\models$ S
- ☐ S $\models$ ¬(A $\wedge$ B)

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{Q, k, a\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario Q, un simbolo di funzione binario k e un simbolo di costante a.

Consideriamo la struttura $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, <, +, 1 \rangle$. Stabilire se:

- $\mathcal{Q} \models \neg(y = w) \land \neg(y = k(w, a))[w/4, y/4.5]$
- $\mathcal{Q} \models Q(y, w) \lor Q(k(w, a), y)[w/4, y/4.5]$
- $\mathcal{Q} \models (\neg(y = w) \land \neg(y = k(w, a))) \to (Q(y, w) \lor Q(k(w, a), y))[w/4, y/4.5]$
- $\mathcal{Q} \models \forall w \forall y[(\neg(y = w) \land \neg(y = k(w, a))) \to (Q(y, w) \lor Q(k(w, a), y))][w/4, y/3.5]$

Consideriamo ora la struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, 1 \rangle$.

Verificare se

$$\mathcal{N} \models \forall w \forall y[(\neg(y = w) \land \neg(y = k(w, a))) \to (Q(y, w) \lor Q(k(w, a), y))][w/4, y/5]$$

L'enunciato $\forall w \forall y[(\neg(y = w) \land \neg(y = k(w, a))) \to (Q(y, w) \lor Q(k(w, a), y))]$ è una tautologia?

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3

9 punti

Sia D un insieme non vuoto e $Q \subseteq D \times D$ una relazione binaria. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle D, Q \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{Q\}$ con un simbolo di relazione binaria le seguenti affermazioni:

1. Q è transitiva
2. Q è un pre-ordine
3. Q^{-1} è irriflessiva
4. $\mathrm{ran}(Q) \neq D$.