Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia $L = \{k\}$ un linguaggio del prim'ordine con k simbolo di funzione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\neg\forall w\,(k(w,w) = w)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$? 2 punti

- ☐ "Tutti i numeri reali coincidono con il proprio quadrato."
- ☐ "Nessun numero reale coincide con il proprio quadrato."
- ■ "Non tutti i numeri reali coincidono con il proprio quadrato."
- ■ "Esiste un numero reale w tale che $w \cdot w \neq w$."

(b) Siano Q, R relazioni binarie su un insieme D. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ■ Se per ogni $d, e \in D$ vale che $Q(d,e)$ se e solo se $R(e,d)$, allora $R = Q^{-1}$.
- ☐ Se Q è riflessiva e $Q \supseteq R$, anche R è riflessiva.
- ■ Se Q è riflessiva e $Q \subseteq R$, anche R è riflessiva.
- ■ Se per ogni $d \in D$ esiste un solo $e \in D$ tale che $Q(d,e)$, allora Q è una funzione.

(c) Siano $k\colon \mathbb{Q}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, dove $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 1, e $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 1}$ definite da $k(w) = \sqrt{w-1}$ e $f(x) = x^2 + 1$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ f è una funzione iniettiva.
- ■ $k \circ f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.
- ■ $k \circ f(d) = d$ per ogni $d \in \mathbb{Q}$ con $d \geq 0$.
- ☐ k è una funzione suriettiva.

(d) Siano S e P formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ■ S è una tautologia se e solo se $\neg$S è insoddisfacibile.
- ■ S $\models$ P $\rightarrow$ S
- ■ S $\vee$ P $\equiv$ $\neg$S $\rightarrow$ P
- □ Se S è soddisfacibile allora $\neg$S è certamente insoddisfacibile.

(e) Sia D un insieme non vuoto di cardinalità finita e A un insieme di cardinalità infinita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- □ $A \setminus D$ ha cardinalità finita.
- □ $D \times A$ ha cardinalità finita.
- ■ $D \setminus A$ ha cardinalità finita.
- □ $D \bigtriangleup A$ ha cardinalità finita.

(f) Sia D un insieme non vuoto e sia $L = \{k\}$ un linguaggio del prim'ordine con k simbolo di funzione unaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle D, k\rangle$, l'affermazione: "k è biettiva"? 2 punti

- □ $\exists x \forall y(k(x) = y) \wedge \forall x \forall y(x = y \rightarrow k(x) = k(y))$
- □ $\forall x \forall y(k(x) = k(y) \leftrightarrow x = y)$
- □ $\forall x \forall y(k(x) = k(y) \rightarrow x = y) \wedge \exists x \forall y(k(x) = y)$
- ■ $\forall x \forall y(k(x) = k(y) \rightarrow x = y) \wedge \forall y \exists x(k(x) = y)$

(g) Siano D, A, B lettere proposizionali e S una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

D	A	B	S
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**

- ■ $\neg$S è soddisfacibile.
- □ S non è soddisfacibile.
- □ D $\leftrightarrow$ A $\models$ S
- ■ S $\models$ $\neg$(A $\wedge$ B)

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{Q, k, a\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario Q, un simbolo di funzione binario k e un simbolo di costante a.

Consideriamo la struttura $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, <, +, 1 \rangle$. Stabilire se:

- $\mathcal{Q} \models \neg(y = w) \wedge \neg(y = k(w, a))[w/4, y/4.5]$
- $\mathcal{Q} \models Q(y, w) \vee Q(k(w, a), y)[w/4, y/4.5]$
- $\mathcal{Q} \models (\neg(y = w) \wedge \neg(y = k(w, a))) \to (Q(y, w) \vee Q(k(w, a), y))[w/4, y/4.5]$
- $\mathcal{Q} \models \forall w \forall y[(\neg(y = w) \wedge \neg(y = k(w, a))) \to (Q(y, w) \vee Q(k(w, a), y))][w/4, y/3.5]$

Consideriamo ora la struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, 1 \rangle$.

Verificare se

$$\mathcal{N} \models \forall w \forall y[(\neg(y = w) \wedge \neg(y = k(w, a))) \to (Q(y, w) \vee Q(k(w, a), y))][w/4, y/5]$$

L'enunciato $\forall w \forall y[(\neg(y = w) \wedge \neg(y = k(w, a))) \to (Q(y, w) \vee Q(k(w, a), y))]$ è una tautologia?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione: Si verifica che:

- $\mathcal{Q} \models \neg(y = w) \wedge \neg(y = k(w, a))[w/4, y/4.5]$ se e solo se $4.5 \neq 4$ *e* $4.5 \neq 4 + 1 = 5$ che chiaramente è il caso.

- $\mathcal{Q} \models Q(y, w) \vee Q(k(w, a), y)[w/4, y/4.5]$ se e solo se $4.5 < 4$ *o* $4 + 1 = 5 < 4.5$ che chiaramente non è il caso.

- $\mathcal{Q} \not\models (\neg(y = w) \wedge \neg(y = k(w, a))) \to (Q(y, w) \vee Q(k(w, a), y))[w/4, y/4.5]$ dato che, come verificato nei due punti precedenti, la premessa dell'implicazione è verificata con l'assegnamento dato, mentre la tesi non lo è con lo stesso assegnamento.

- $\mathcal{Q} \not\models \forall w \forall y[(\neg(y = w) \wedge \neg(y = k(w, a))) \to (Q(y, w) \vee Q(k(w, a), y))][w/4, y/3.5]$ come testimoniato dall'assegnamento al punto precedente alle variabili w, y.

Sia ψ l'enunciato

$$\forall w \forall y[(\neg(y = w) \wedge \neg(y = k(w, a))) \to (Q(y, w) \vee Q(k(w, a), y))].$$

Sia in $\mathcal{Q}$ che in $\mathcal{N}$, l'interpretazione di ψ è

> Per ogni w e y, se y è diverso sia da w che da $w + 1$ allora o $y < w$ oppure $w + 1 < y$. (Equivalentemente: per ogni w non c'è alcun y strettamente compreso tra w e $w + 1$.)

Quindi si ha che:

- $\mathcal{Q} \not\models \psi$. Infatti, l'assegnamento $w = 4$ e $y = 4.5$ mostra che y è strettamente compreso tra w e $w + 1$ (come già visto per la soluzione del terzo e quarto item dell'esercizio).

- Al contrario, $\mathcal{N} \models \psi$ perché non c'è nessun numero naturale strettamente compreso tra due numeri consecutivi arbitrari (ovvero tra due numeri del tipo w e $w+1$).

L'enunciato ψ non è una tautologia in quanto risulta falso nella struttura $\mathcal{Q}$.

Esercizio 3 9 punti

Sia D un insieme non vuoto e $Q \subseteq D \times D$ una relazione binaria. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle D, Q \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{Q\}$ con un simbolo di relazione binaria le seguenti affermazioni:

1. Q è transitiva
2. Q è un pre-ordine
3. Q^{-1} è irriflessiva
4. $\mathrm{ran}(Q) \neq D$.

Soluzione: 1. Q è transitiva: $\forall x \forall y \forall z (Q(x,y) \land Q(y,z) \to Q(x,z))$

2. Q è un pre-ordine:

$$\forall x Q(x,x) \land \forall x \forall y \forall z (Q(x,y) \land Q(y,z) \to Q(x,z))$$

3. Q^{-1} è irriflessiva: $\forall x \neg Q(x,x)$

4. $\mathrm{ran}(Q) \neq D$: $\exists y \forall x \neg Q(x,y)$