Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta 12 Febbraio 2020 – Versione A

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA ....

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte. Per essere sufficiente un compito deve raggiungere almeno 18 punti.

Esercizio 1.

1. (Punti 3) In quanti modi diversi 4 persone possono sedersi in una fila di 10 sedie?
2. (Punti 4) Un allenatore di calcio ha nella sua squadra 3 portieri, 8 difensori, 8 centrocampisti e 6 attaccanti. In quanti modi diversi può scegliere 1 portiere, 4 difensori, 4 centrocampisti e 2 attaccanti?
3. (Punti 4) Ho 15 monete da 1 euro e 4 salvadanai. In quanti modi diversi posso mettere tutte le monete nei 4 salvadanai in modo che nessun salvadanaio sia vuoto?

Soluzione.

1. Sono dati dalle disposizioni semplici $D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$
2. I modi in cui scegliere 1 portiere tra 3 è dato da $\binom{3}{1}$; i modi in cui scegliere 4 difensori tra 8 è dato da $\binom{8}{4}$; i modi in cui scegliere 4 centrocampisti tra 8 è dato da $\binom{8}{4}$; i modi in cui scegliere 2 attaccanti tra 6 è dato da $\binom{6}{2}$. In totale, l'allenatore può effettuare $\binom{3}{1} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{6}{2}$ scelte.
3. Siccome ogni salvadanaio deve contenere almeno una moneta, rimangono 11 monete da distribuire nei 4 salvadanai. I modi in cui farlo sono dati dalle combinazioni con ripetizione $C^r_{4,11} = \binom{11+4-1}{4-1} = \binom{14}{3}$

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 2. 1. (Punti 3) Calcolare la decomposizione in cicli disgiunti della permutazione

$$\sigma = (2\ 8\ 3\ 5)(1\ 7\ 4\ 3)(2\ 7\ 6) \in \mathcal{S}_8.$$

2. (Punti 4) Determinare tipo, periodo e parità della permutazione σ^2 (con σ del punto precedente).

3. (Punti 4) Si considerino le permutazioni $\alpha = (1\ 3\ 5\ 6)(2\ 4)$ e $\beta = (1\ 5)(3\ 6)(2\ 7\ 4)$ in $\mathcal{S}_8$. Calcolare $\langle\alpha\rangle \cap \langle\beta\rangle$.

Soluzione.

1. Il calcolo fornisce $\sigma = (1\ 7\ 6\ 8\ 3)(2\ 4\ 5)$.

2. Si ha $\sigma^2 = (1\ 6\ 3\ 7\ 8)(2\ 5\ 4)$ che ha tipo $(3, 5)$, periodo $\mathrm{mcm}(3, 5) = 15$ ed è pari.

3. Poiché α e β sono già dati come composizione di cicli disgiunti i loro periodi sono rispettivamente $\mathrm{mcm}(2, 4) = 4$ e $\mathrm{mcm}(2, 2, 3) = 6$. Quindi si ha

$$\langle\alpha\rangle = \{\mathrm{id}, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}, \qquad \langle\beta\rangle = \{\mathrm{id}, \beta, \beta^2, \beta^3\,\beta^4, \beta^5\}.$$

Il calcolo esplicito mostra che l'unica uguaglianza non banale è $\alpha^2 = \beta^3 = (1\ 5)(3\ 6)$ e quindi

$$\langle\alpha\rangle \cap \langle\beta\rangle = \{\mathrm{id}, (1\ 5)(3\ 6)\}.$$

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 3. 1. (Punti 3) Si consideri il gruppo $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{30}$, determinare l'ordine di $\langle(6,5)\rangle$ e $\langle(5,6)\rangle$.

2. (Punti 4) Determinare le soluzioni della congruenza $12x \equiv 16 \pmod{40}$ in $\mathbb{Z}_{40}$.

3. (Punti 4) Sia $(G,*)$ un gruppo ciclico di ordine 30 con generatore g, dimostrare che la seguente funzione è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Z}_{18}, \quad \varphi(g^k) = \overline{6k}.$$

Dire se si tratta di un omomorfismo iniettivo e/o suriettivo.

Soluzione.

1. Il più piccolo intero k tale per cui $6k \equiv 0 \pmod{24}$ è 4, ovvero l'ordine del sottogruppo ciclico $\langle 6\rangle$ di $\mathbb{Z}_{24}$ è 4. Analogamente il più piccolo intero k tale per cui $5k \equiv 0 \pmod{30}$ è 6, ovvero l'ordine del sottogruppo ciclico $\langle 5\rangle$ di $\mathbb{Z}_{30}$ è 6. Dunque l'ordine del sottogruppo ciclico $\langle(6,5)\rangle$ è $\mathrm{mcm}(4,6) = 12$.
Analogamente si osserva che l'ordine di $\langle 5\rangle$ in $\mathbb{Z}_{24}$ è 24 e l'ordine di $\langle 6\rangle$ in $\mathbb{Z}_{30}$ è 5. Quindi $|\langle(5,6)\rangle| = \mathrm{mcm}(24,5) = 120$.

2. Siccome $\mathrm{MCD}(12,40) = 4$ divide 16, la congruenza ha soluzioni che si ottengono risolvendo la congruenza $3x \equiv 4 \pmod{10}$. Tale congruenza si risolve facilmente calcolando l'inverso di 3 in $\mathbb{Z}_{10}$ che è 7, da cui $x \equiv 8 \pmod{10}$. Quindi le soluzioni della congruenza in $\mathbb{Z}_{40}$ sono $\overline{8}, \overline{18}, \overline{28}, \overline{38}$.

3. Siccome G è un gruppo ciclico di ordine 30 e generatore g un suo generico elemento sarà della forma g^k con k intero compreso tra 0 e 29. Inoltre, siccome G ha ordine 30, per ogni intero h si ha $g^k = g^{k+30h}$. Per verificare che φ sia ben definita occorre che $\varphi(g^k) = \varphi(g^{k+30h})$ e in effetti:

$$\varphi(g^{k+30h}) = \overline{6(k+30h)} = \overline{6k+180h} = \overline{6k} = \varphi(g^k)$$

in quanto $180 = 6 \cdot 3 \cdot 10 \equiv 0 \pmod{18}$.
Per ogni $g^a, g^b \in G$ si ha

$$\varphi(g^a * g^b) = \varphi(g^{a+b}) = \overline{6(a+b)} = \overline{6a} + \overline{6b} = \varphi(g^a) + \varphi(g^b),$$

ovvero φ è un omomorfismo.
Siccome $|G| > |\mathbb{Z}_{18}|$, φ non può essere iniettiva e non è suriettiva poiché $Im\varphi = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}\}$.