Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano P e Q due formule proposizionali tali che $\mathrm{P} \not\models \mathrm{Q}$. Allora possiamo concludere con certezza che — 2 punti

- ■ P è soddisfacibile
- □ $\mathrm{Q} \models \mathrm{P}$
- ■ Q non è valida
- ■ $\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}$ è soddisfacibile

(b) Sia $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dove $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$, la funzione che misura la distanza tra due punti sulla retta reale, ovvero $f(x, y) = |y - x|$. Allora — 2 punti

- □ f è iniettiva
- ■ f è suriettiva
- □ f è biettiva
- □ esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq y$ ma $f(x, y) = 0$

(c) Sia φ la formula $\exists x \exists y \forall z\, (z = x \vee z = y)$. Allora — 2 punti

- □ φ non è un enunciato
- □ φ è un enunciato valido
- □ se $\mathcal{A} \models \varphi$ allora $\mathcal{A}$ contiene esattamente due elementi
- □ se $\mathcal{A} \models \varphi$ allora $\mathcal{A}$ contiene almeno due elementi

(d) Sia A un insieme non vuoto e $S \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ l'insieme delle sequenze di lunghezza almeno 2 il cui primo e ultimo elemento coincidono. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? — 2 punti

- □ $|A| = |S|$, qualunque sia A.
- □ Se A è finito allora lo è anche S.
- ■ Se $A = \mathbb{Q}$ allora S è numerabile.
- ■ S è infinito, qualunque sia A.

(e) Quali delle seguenti sono formalizzazioni corrette dell'affermazione — 2 punti

"x è un numero dispari"

nel linguaggio $L = \{+, 2\}$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{N}, +, 2\rangle$?

☐ $\forall z\,(z + z = x \to z \notin \mathbb{N})$

☐ $\neg(2 \mid x)$ con $\mid$ relazione di divisibilità

☐ $\exists z\,\neg(z + z = x)$

☐ $\forall x \forall z\,\neg(x = z + z)$

(f) Siano A e B due insiemi. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? — 2 punti

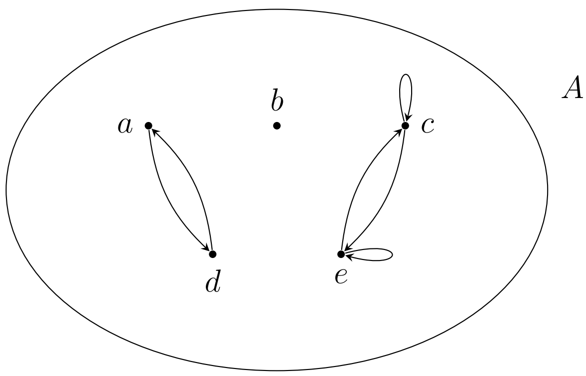
☐ Se $A \subseteq B$, allora A e B non possono essere disgiunti.

■ Se $A \cap B \neq \emptyset$ allora $A \setminus B \neq A$.

■ Se $A \cup B = A \setminus B$ allora $B = \emptyset$.

☐ Se $A \cup B = A$ allora $A \subseteq B$.

(g) Sia R la relazione su $A = \{a, b, c, d, e\}$ rappresentata dal seguente diagramma, dove $x \mathrel{R} y$ se e solo se c'è una freccia che va da x a y. — 2 punti



Allora R è

☐ riflessiva

■ simmetrica

☐ antisimmetrica

☐ transitiva

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{f, g\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f e g sono entrambi simboli di funzione binari. Sia $\varphi(x)$ la formula
$$f(x, x) = g(x, x).$$
Consideriamo le L-strutture $\mathcal{S}_0 = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ e $\mathcal{S}_1 = \langle \mathbb{Q}, +, - \rangle$.

1. Determinare tutti gli $r \in \mathbb{Q}$ per cui si ha
$$\mathcal{S}_0 \models \varphi(x)[x/r]$$
e tutti gli $r \in \mathbb{Q}$ per cui vale
$$\mathcal{S}_1 \models \varphi(x)[x/r].$$
2. Stabilire se
$$\mathcal{S}_0 \models \exists x \exists y \, (\neg(x = y) \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y))$$
e se
$$\mathcal{S}_1 \models \exists x \exists y \, (\neg(x = y) \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y)) \, .$$

Soluzione:

1. In $\mathcal{S}_0$ l'interpretazione della formula $\varphi(x)$ è
$$x + x = x \cdot x,$$
ovvero l'equazione $x^2 = 2x$. Tale equazione è verificata solo quando ad x assegniamo i valori 0 e 2 (ovvero le soluzioni dell'equazione). Quindi $\mathcal{S}_0 \models \varphi(x)[x/r]$ se e solo se $r = 0$ oppure $r = 2$.

   In maniera analoga, in $\mathcal{S}_1$ l'interpretazione della formula $\varphi(x)$ è
$$x + x = x - x,$$
ovvero l'equazione $2x = 0$. Tale equazione è verificata solo quando ad x assegniamo il valore 0 (ovvero l'unica soluzione dell'equazione). Quindi $\mathcal{S}_1 \models \varphi(x)[x/r]$ se e solo se $r = 0$.

2. L'interpretazione di $\exists x \exists y \, (\neg(x = y) \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y))$ in $\mathcal{S}_0$ è "esistono due numeri razionali p, q diversi tra loro per cui vale $p^2 = 2p$ e $q^2 = 2q$", ovvero "l'equazione $x^2 = 2x$ ammette due soluzioni distinte in $\mathbb{Q}$". Quindi per il punto precedente $\mathcal{S}_0 \models \exists x \exists y \, (\neg(x = y) \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y))$ in quanto $x^2 = 2x$ ammette effettivamente le due soluzioni distinte (e razionali) 0 e 2.

   L'interpretazione di $\exists x \exists y \, (\neg(x = y) \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y))$ in $\mathcal{S}_1$ è "esistono due numeri razionali p, q diversi tra loro per cui vale $2p = 0$ e $2q = 0$", ovvero "l'equazione $2x = 0$ ammette due soluzioni distinte in $\mathbb{Q}$". Ma come discusso nel punto precedente, tale equazione ammette un'unica soluzione, ovvero il numero 0. Quindi $\mathcal{S}_1 \not\models \exists x \exists y \, (\neg(x = y) \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y))$.

Esercizio 3 9 punti

Formalizzare le seguenti affermazioni nel linguaggio $L = \{<, |, +\}$, dove $|$ è la relazione di divisibilità, relativamente alla struttura $\langle \mathbb{N}, <, |, + \rangle$:

1. x è dispari,
2. x è uguale ad 1,
3. x è primo,
4. Ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre primi, non necessariamente distinti.

Soluzione:

1. x è dispari se e solo se x non è pari. Quindi x è dispari se e solo se $\mathrm{D}(x)$, dove $\mathrm{D}(x)$ è la formula $\neg \exists y (x = y + y)$.

2. x è uguale ad 1 se e solo se $\mathrm{U}(x)$, dove $\mathrm{U}(x)$ è la formula $\forall y (x \mid y)$.

3. x è primo se e solo se $\mathrm{Pr}(x)$, dove $\mathrm{Pr}(x)$ è la formula
$$\neg \mathrm{U}(x) \land \forall y \, (y \mid x \to y = x \lor \mathrm{U}(y)) \, .$$

4. "Ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre primi, non necessariamente distinti" si formalizza:
$$\exists x \forall y \big(x < y \land \mathrm{D}(y) \to \exists z_1, z_2, z_3 \big(\mathrm{Pr}(z_1) \land \mathrm{Pr}(z_2) \land \mathrm{Pr}(z_3) \land y = z_1 + z_2 + z_3 \big) \big)$$
Se sostituiamo a D e Pr le loro espressioni usando $\leq, |, +$ otteniamo
$$\begin{aligned}
&\exists x \forall y \big(x < y \land \underbrace{\neg \exists w (y = w + w)}_{\mathrm{D}(y)} \to \\
&\qquad \exists z_1, z_2, z_3 \big(\underbrace{\neg \mathrm{U}(z_1) \land \forall w \, (w \mid z_1 \to w = z_1 \lor \mathrm{U}(w))}_{\mathrm{Pr}(z_1)} \\
&\land \underbrace{\neg \mathrm{U}(z_2) \land \forall w \, (w \mid z_2 \to w = z_2 \lor \mathrm{U}(w))}_{\mathrm{Pr}(z_2)} \land \underbrace{\neg \mathrm{U}(z_3) \land \forall w \, (w \mid z_3 \to w = z_3 \lor \mathrm{U}(w))}_{\mathrm{Pr}(z_3)} \\
&\qquad\qquad \land y = z_1 + z_2 + z_3 \big) \big)
\end{aligned}$$
ovvero
$$\begin{aligned}
&\exists x \forall y \Big(x < y \land \neg \exists w (y = w + w) \to \\
&\qquad \exists z_1, z_2, z_3 \big(\neg \underbrace{\forall u (u \mid z_1)}_{\mathrm{U}(z_1)} \land \forall w \big(w \mid z_1 \to w = z_1 \lor \underbrace{\forall u (u \mid w)}_{\mathrm{U}(w)} \big) \\
&\qquad \land \neg \underbrace{\forall u (u \mid z_2)}_{\mathrm{U}(z_2)} \land \forall w \big(w \mid z_2 \to w = z_2 \lor \underbrace{\forall u (u \mid w)}_{\mathrm{U}(w)} \big) \\
&\qquad \land \neg \forall u (u \mid z_3) \land \forall w \big(w \mid z_3 \to w = z_3 \lor \underbrace{\forall u (u \mid w)}_{\mathrm{U}(w)} \big) \\
&\qquad\qquad \land y = z_1 + z_2 + z_3 \big) \Big)
\end{aligned}$$