

Corso di Logica

6.4 – Esercizi di formalizzazione

Docenti: Alessandro Andretta, Luca Motto Ros, Matteo Viale

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Esercizio

Formalizzare in \mathbb{N} la seguente frase

Per ogni $n > 1$ c'è un primo compreso tra n^2 e $(n + 1)^2$

usando soltanto i simboli \cdot , $<$ e 1 (interpretati nella maniera usuale) e un simbolo di predicato unario P per “essere primo”.

$$\forall x (x > 1 \rightarrow \exists y \exists z (x < y \wedge \neg \exists w (x < w < y) \wedge x \cdot x < z < y \cdot y \wedge P(z)))$$

Alternativa:

$$\forall x \forall y (x > 1 \wedge x < y \wedge \neg \exists w (x < w < y) \rightarrow \exists z (x \cdot x < z < y \cdot y \wedge P(z)))$$

Esercizio

Formalizzare in \mathbb{N} la seguente frase:

Per ogni numero k ci sono numeri primi p arbitrariamente grandi tali che $p + k$ è primo e non c'è nessun primo compreso tra p e $p + k$.

utilizzando il linguaggio contenente i simboli $+$, $<$ e il predicato unario P per “essere un numero primo”.

$$\forall x \forall y \exists z (y < z \wedge P(z) \wedge P(z + x) \wedge \neg \exists w (z < w < z + x \wedge P(w)))$$

Esercizio

Formalizzare la frase

Tutti i nipoti amano i propri nonni.

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone ed utilizzando il linguaggio del prim'ordine formato due simboli di relazione binari G e A interpretati come segue:

- $G(x, y)$ se e solo se x è genitore di y ,
- $A(x, y)$ se e solo se x ama y .

$$\forall x \forall y (\exists z (G(z, x) \wedge G(y, z)) \rightarrow A(x, y))$$

Alternativa equivalente:

$$\forall x \forall y \forall z (G(y, x) \wedge G(z, y) \rightarrow A(x, z))$$

Esercizio

Formalizzare nel linguaggio L che ha un simbolo di relazione unario P e un simbolo di funzione unario f la seguente frase

Se ci sono almeno due elementi che soddisfano la proprietà P , allora la funzione f è suriettiva.

(Come universo del discorso si può prendere il dominio di qualunque L -struttura: per la sua forma, la frase è in questo caso indipendente dalla struttura scelta.)

$$\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y)) \rightarrow \forall y \exists x (f(x) = y)$$

Esercizio

Formalizzare le frasi

- ① *Chi è amico di qualcuno che ama il cinema, ama il cinema.*
- ② *Chi ama il teatro, è amico di qualcuno che ama il teatro.*
- ③ *Barbara è amica di Donatella e ama il teatro, ma non il cinema.*

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone e utilizzando il linguaggio del prim'ordine formato da:

- un simbolo di relazione unario C : $C(x) \rightsquigarrow$ “ x ama il cinema”;
- un simbolo di relazione unario T : $T(x) \rightsquigarrow$ “ x ama il teatro”;
- un simbolo di relazione binario A : $A(x, y) \rightsquigarrow$ “ x è amico di y ”;
- due simboli di costante b e c interpretati come Barbara e Donatella.

- ① $\forall x (\exists y (A(x, y) \wedge C(y)) \rightarrow C(x))$
- ② $\forall x (T(x) \rightarrow \exists y (A(x, y) \wedge T(y)))$
- ③ $A(b, d) \wedge T(b) \wedge \neg C(b)$

Esercizio

Formalizzare in \mathbb{N} la seguente frase

Ogni numero dispari è somma di tre numeri primi.

usando soltanto i simboli di addizione $+$ e un simbolo di predicato unario P per “essere primo”.

$$\forall x (\neg \exists y (y + y = x) \rightarrow \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \\ (P(z_1) \wedge P(z_2) \wedge P(z_3) \wedge x = z_1 + z_2 + z_3))$$

Esercizio

Formalizzare in \mathbb{N} la seguente frase

Ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre primi.

usando solo l'ordinamento $<$, la somma $+$ e il predicato unario P per “essere primo”.

$$\exists x \forall y (x < y \wedge \neg \exists z (z + z = y) \rightarrow \exists w_1 \exists w_2 \exists w_3 \\ (P(w_1) \wedge P(w_2) \wedge P(w_3) \wedge y = w_1 + w_2 + w_3))$$

Esercizio

Formalizzare la frase

Se tutti i tedeschi sono biondi e Andrea non è biondo, allora Andrea non è tedesco.

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone e utilizzando un linguaggio del prim'ordine con due simboli di relazione unari T e B e un simbolo di costante a interpretati come segue:

- $T(x) \rightsquigarrow$ “ x è tedesco”;
- $B(x) \rightsquigarrow$ “ x è biondo”;
- $a \rightsquigarrow$ Andrea.

$$\forall x(T(x) \rightarrow B(x)) \wedge \neg B(a) \rightarrow \neg T(a)$$

Esercizio

Formalizzare in \mathbb{N} la seguente frase

Se ci sono numeri arbitrariamente grandi che soddisfano la proprietà P , allora almeno uno di questi è un numero quadrato.

usando solo i simboli $<$ e \cdot (interpretati nella maniera usuale) e il simbolo di relazione unario P .

$$\forall x \exists y (x < y \wedge P(y)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge \exists z (x = z \cdot z))$$

Alternativa più breve:

$$\forall x \exists y (x < y \wedge P(y)) \rightarrow \exists x P(x \cdot x)$$

Esercizio

Formalizzare in \mathbb{N} la frase

Ogni numero naturale sufficientemente grande è somma di quattro cubi.

usando solo i simboli $<$, $+$ e \cdot (interpretati nella maniera usuale).

$$\exists x \forall y (x < y \rightarrow \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4 \\ (y = z_1 \cdot z_1 \cdot z_1 + z_2 \cdot z_2 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_3 \cdot z_3 + z_4 \cdot z_4 \cdot z_4))$$

Esercizio

Formalizzare la frase

Nessun ladro è onesto, ma c'è un ladro gentiluomo che è onesto.

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone ed utilizzando il linguaggio del prim'ordine formato da tre simboli di relazione unari L , O e G interpretati come segue:

- $L(x) \rightsquigarrow$ “ x è un ladro”;
- $O(x) \rightsquigarrow$ “ x è onesto”;
- $G(x) \rightsquigarrow$ “ x è un gentiluomo”.

$$\neg \exists x (L(x) \wedge O(x)) \wedge \exists x (L(x) \wedge G(x) \wedge O(x))$$

Alternativa:

$$\forall x (L(x) \rightarrow \neg O(x)) \wedge \exists x (L(x) \wedge G(x) \wedge O(x))$$

Esercizio

Formalizzare la seguente frase

Se ci sono almeno tre elementi che soddisfano la proprietà P , allora ci sono al più due elementi che soddisfano la proprietà Q .

usando il linguaggio formato da due simboli di relazione unari P e Q .

(Come universo del discorso si può prendere il dominio di qualunque L -struttura: per la sua forma, la frase è in questo caso indipendente dalla struttura scelta.)

$$\begin{aligned} & \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge P(z)) \\ & \rightarrow \neg \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge Q(x) \wedge Q(y) \wedge Q(z)) \end{aligned}$$

Esercizio

Formalizzare le frasi

- ❶ *C'è qualche impiegato che, pur lavorando bene, viene licenziato dal proprio capoufficio.*
- ❷ *Il capoufficio di Ugo non licenzia alcun impiegato che lavori bene.*
- ❸ *Qualunque impiegato che non lavori bene viene licenziato dal proprio capoufficio, a meno che si tratti di Ugo.*

nel linguaggio formato da due predicati unari I e B , un predicato binario L , un simbolo di funzione unario c e un simbolo di costante u , dove

- $I(x)$ se e solo se x è un impiegato;
- $B(x)$ se e solo se x lavora bene;
- $L(x, y)$ se e solo se x licenzia y ;
- $c(x)$ = il capoufficio di x ;
- u = Ugo.

Esercizio

Formalizzare in \mathbb{N} la frase

Il più piccolo numero primo è pari.

usando i simboli $<$, $+$ (interpretati nella maniera usuale) e il predicato unario P per “essere un numero primo”.

$$\forall x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \wedge y \neq x \rightarrow x < y) \rightarrow \exists z (x = z + z))$$

Esercizio

Formalizzare in \mathbb{N} la seguente frase

Preso un numero maggiore di 1 e il suo successore, tra i loro quadrati c'è sempre un numero primo.

usando i simboli $<$, $+$, \cdot , 1 (interpretati nella maniera usuale) e il predicato unario P per “essere un numero primo”.

$$\forall x \forall y (1 < x \wedge y = x + 1 \rightarrow \exists z (P(z) \wedge x \cdot x < z < y \cdot y))$$

Alternativa più breve:

$$\forall x (1 < x \rightarrow \exists z (P(z) \wedge x \cdot x < z < (x + 1) \cdot (x + 1)))$$

Esercizio

Formalizzare la frase

Chi non studia e non svolge alcun esercizio non supera l'esame di logica.

in un linguaggio del prim'ordine con due simboli di relazione unari S e E , due simboli di relazione binari F e P , un simbolo di funzione unario f ed un simbolo di costante l interpretati come segue:

- $S(x) \rightsquigarrow$ “ x studia”;
- $E(x) \rightsquigarrow$ “ x è un esercizio”;
- $F(x, y) \rightsquigarrow$ “ x svolge y ”;
- $P(x, y) \rightsquigarrow$ “ x supera y ”;
- $f(x) \rightsquigarrow$ “l'esame della materia x ”;
- $l \rightsquigarrow$ “logica”.

$$\forall x (\neg S(x) \wedge \forall y (E(y) \rightarrow \neg F(x, y)) \rightarrow \neg P(x, f(l)))$$