**Istruzioni esame**

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

**Cognome, nome e matricola:** ____________________

## Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) La relazione $R$ su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definita da $w \; R \; x$ se e solo se $w \mid x$ — 2 punti

- ☐ è simmetrica.
- ■ è transitiva.
- ■ è riflessiva.
- ☐ è un ordine lineare.

(b) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? — 2 punti

- ■ $\{w \in \mathbb{R} \mid \sqrt{w} \in \mathbb{Q}\}$
- ☐ $\{(w, x) \in \mathbb{R}^2 \mid w \in \mathbb{Q} \lor x \notin \mathbb{N}\}$
- ☐ $\{w \in \mathbb{R} \mid w^2 - 2w - 5 = 0\}$
- ■ $\{(w, x) \in \mathbb{R}^2 \mid w \in \mathbb{N} \land x \in \mathbb{Z}\}$

(c) La funzione $k \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definita da $k(t) = 5t^2 - 1$ è — 2 punti

- ■ né iniettiva, né suriettiva.
- ☐ iniettiva ma non suriettiva.
- ☐ biettiva.
- ☐ suriettiva ma non iniettiva.

(d) Sia φ la formula $\forall x S(w,x) \leftrightarrow \exists w \exists x S(x,w)$, dove $S$ è un simbolo di predicato binario. 2 punti

- ☐ φ è un enunciato.
- ■ La variabile $w$ occorre libera e vincolata in φ.
- ☐ La variabile $x$ occorre libera e vincolata in φ.
- ☐ φ è un enunciato e la variabile $w$ occorre sia libera che vincolata in φ.

(e) Consideriamo il linguaggio $L$ con due simboli di funzione unaria $k, f$. Quali delle seguenti espressioni sono $L$-enunciati che formalizzano correttamente relativamente alla $L$-struttura $\langle D, k, f\rangle$ l'affermazione "la funzione $k$ è l'inversa della funzione $f$" 2 punti

- ☐ $\forall x(k(x) \cdot f(x) = 1)$
- ■ $\forall x(k(f(x)) = x \wedge f(k(x)) = x)$
- ☐ $\forall x(k(f(x)) = x)$
- ☐ $k = f^{-1}$

(f) Siano φ, ψ delle $L$-formule. 2 punti

- ■ Se φ è una tautologia allora ¬φ → ψ è una tautologia.
- ■ Se φ è soddisfacibile allora ¬φ → ψ è soddisfacibile.
- ☐ Se ¬φ è soddisfacibile allora φ è soddisfacibile.
- ☐ φ è soddisfacibile se e solo se ψ è soddisfacibile.

(g) Siano D, A, B lettere proposizionali e S una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

| D | A | B | S |
|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **V** | **F** | **V** |
| **V** | **F** | **V** | **F** |
| **V** | **F** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** | **V** |
| **F** | **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **F** | **V** |

- ■ S ∨ B è una tautologia.
- ■ S non è valida.
- ■ S ≡ B → A
- ☐ S ⊨ ¬A.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

**Esercizio 2** 9 punti

Sia $L = \{k\}$ con $k$ simbolo di funzione binario. Sia $\psi$ la $L$-formula

$$\exists x\,(k(x,x) = w).$$

1. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \psi[y/2, x/1].$$
2. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \psi[y/2, x/2].$$
3. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \forall w \psi[y/2, x/2].$$
4. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \exists w \psi[y/2, x/1].$$
5. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \psi[y/1, x/3].$$
6. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \psi[y/\sqrt{2}, x/-2].$$
7. È vero che $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \forall w\, \psi[y/1, x/3]$?
8. Sia $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. È vero che $\mathcal{C} \models \forall w\, \psi[y/1, x/3]$?

Giustificare le proprie risposte.

**Soluzione:**

1. L'interpretazione di $\psi$ in $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$: "Esiste un numero intero $x$ tale che $w = x + x$ (ovvero $w = 2x$)". Dunque la risposta al primo punto è no poiché 1 è un numero intero dispari.

2. Per quanto visto sopra la risposta al secondo punto si poiché 2 è un numero intero pari.

3. Per quanto visto sopra si ha che
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \not\models \forall w \psi[y/2, x/2]$$
come testimoniato dai numeri dispari (se assegnati a $w$ per $\psi$ nella struttura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$).

4. Per quanto visto sopra si ha che
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \exists w \psi[y/2, x/2]$$
come testimoniato da qualunque numero pari (se assegnato a $w$ per $\psi$ nella struttura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$).

5. Posto $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, l'interpretazione di $\psi$ in $\mathcal{B}$ è: "Esiste un numero reale $x$ tale che $w = x \cdot x$ (ovvero $w = x^2$)". Quindi la risposta al punto quattro è positiva in quanto 3 è il quadrato del numero reale $\sqrt{3}$.

6. Per quanto scritto sopra la risposta al punto cinque è negativa in quanto $-2$ è un numero reale negativo e quindi non può essere il quadrato di alcun numero reale.

7. Per quanto visto al punto cinque, si ha che $\mathcal{B} \not\models \forall w\, \psi$: per esempio $-3$ è un assegnamento alla variabile $w$ che testimonia questa asserzione (se assegnato a $w$ per $\psi$ nella struttura $\mathcal{B}$).

8. Per quanto visto ai punti precedenti si ha che $\mathcal{C} \models \forall w\, \psi$: infatti, tutti i numeri reali strettamente positivi sono il quadrato di un numero reale strettamente positivo.

**Esercizio 3** 9 punti

Sia $\langle D, < \rangle$ un ordine lineare stretto e siano $A, B$ sottoinsiemi di $D$. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle D, <, A, B \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{<, A, B\}$ con un simbolo di relazione binaria e due simboli di predicato unari le seguenti affermazioni:

1. Tra due elementi di $A$ non c'è alcun elemento di $B$.
2. Dati due elementi di $B$, c'è necessariamente un elemento di $A$ che è minore di entrambi.
3. Ogni elemento di $A$ è minore di qualche elemento di $B$.
4. Il più piccolo elemento di $B$ coincide con il più grande elemento di $A$.

**Soluzione:** 1. Tra due elementi di $A$ non c'è alcun elemento di $B$:
$\forall x \forall y\, (x < y \wedge A(x) \wedge A(y) \to \neg \exists z (B(z) \wedge x < z \wedge z < y)))$.

2. Dati due elementi di $B$, c'è necessariamente un elemento di $A$ che è minore di entrambi:
$\forall x \forall y (B(x) \wedge B(y) \to \exists z (A(z) \wedge z < x \wedge z < y))$

3. Ogni elemento di $A$ è minore di qualche elemento di $B$:
$\forall x (A(x) \to \exists y (B(y) \wedge x < y)$

4. Il più piccolo elemento di $B$ coincide con il più grande elemento di $A$:
$\exists x (B(x) \wedge \forall y (B(y) \to x < y \vee x = y) \wedge A(x) \wedge \forall y (A(y) \to y < x \vee x = y))$