

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: _____

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) Sia S una relazione binaria su un insieme non vuoto B . 2 punti
- ☐ Se S è una relazione di equivalenza, allora è anche un preordine.
 - ☐ Se S è simmetrica, allora non può essere anche antisimmetrica.
 - ☐ Se S è irriflessiva, allora non può essere anche riflessiva.
 - ☐ Se S è una relazione d'equivalenza e P è un'altra relazione binaria su B tale che $S \subseteq P$, allora P è riflessiva.
- (b) Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente 2 punti
 “ x è un numero primo” utilizzando il linguaggio $\cdot, 1$ e relativamente alla struttura $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$
- ☐ $\neg(x = 1) \wedge \forall y(\neg \exists z(\neg(z = x) \wedge \neg(z = 1) \wedge y \cdot z = x))$
 - ☐ $\forall x \exists y(x \cdot y = x \wedge y \cdot x)$
 - ☐ $\exists y \exists z(x = y \cdot z \rightarrow y = x \vee z = x)$
 - ☐ $\neg(x = 1) \rightarrow \forall y \forall z(y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$
- (c) Consideriamo le funzioni $g: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}, (y, z) \mapsto 3y^2 + z$ 2 punti
 e $h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^2, y \mapsto (y, 3y)$. Allora
- ☐ h è iniettiva ed è l'inversa di g .
 - ☐ la funzione g è iniettiva.
 - ☐ Esistono $y, z \in \mathbb{Q}$ tali che $g(y, z) = 0$.
 - ☐ $g \circ h(y) = 3y(y + 1)$ per ogni $y \in \mathbb{Q}$.
- (d) Sia $L = \{Q, g, h, b\}$ un linguaggio del prim'ordine con Q simbolo di relazione 2 punti
 binario, g simbolo di funzione unario, h simbolo di funzione binario e b
 simbolo di costante. Quali dei seguenti sono L -termini?
- ☐ $h(h(g(b), g(b)), h(g(b), g(b)))$
 - ☐ $h(g(g(h(b, b), b)), b)$
 - ☐ $g(h(h(b, g(b)), h(g(b), b)))$
 - ☐ $Q(b, g(b))$

(e) Siano C e D insiemi tali che $D \subseteq C$. Allora possiamo concludere con certezza che 2 punti

- ☐ se D è più che numerabile allora anche C lo è.
- ☐ $C \setminus D \neq C$.
- ☐ se C e D sono entrambi infiniti e numerabili allora $C \setminus D = \emptyset$.
- ☐ $(C \cap D) \cup (C \setminus D) = C$.

(f) Sia Q la proposizione $\neg(B \wedge C \wedge \neg D)$. Allora 2 punti

- ☐ Q è una tautologia.
- ☐ Se i è un'interpretazione tale che $i(D) = 0$ allora necessariamente $i(B) = i(C) = 0$.
- ☐ Q è insoddisfacibile.
- ☐ Q è conseguenza logica di $B \rightarrow D$.

(g) Siano $\varphi(y)$ e $\psi(y, z)$ formule del prim'ordine e σ un enunciato. 2 punti

- ☐ $\forall y \neg \varphi(y) \models \exists y \varphi(y)$
- ☐ $\exists y \forall z \psi(z, y) \models \forall z \exists y \psi(z, y)$
- ☐ Se \mathcal{C} è una struttura tale che $\mathcal{C} \models \exists z \neg \varphi(z)$, allora $\mathcal{C} \models \exists z (\neg \sigma \vee \neg \varphi(z))$.
- ☐ Se \mathcal{B} è una struttura tale che $\mathcal{B} \models \forall y \neg \varphi(y)$, allora $\mathcal{B} \models \forall y (\varphi(y) \rightarrow \sigma)$.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2

9 punti

Sia $L = \{Q, g, b\}$ con Q simbolo di relazione binaria, g simbolo di funzione binaria e b simbolo di costante. Consideriamo la L -struttura $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, >, \cdot, 3 \rangle$, dove \cdot è l'usuale funzione moltiplicazione.

Sia φ la formula

$$(Q(y, z) \wedge \exists w (g(b, w) = z))$$

e ψ la formula

$$(Q(y, z) \rightarrow \exists w (g(b, w) = z))$$

1. Determinare se:

- $\mathcal{B} \models \varphi[y/-1000, z/-2000]$,
- $\mathcal{B} \models \varphi[y/-1000, z/-3000]$,
- $\mathcal{B} \models \exists z \varphi[y/-1000, z/-999]$.

2. Determinare se $\mathcal{B} \models \forall y \exists z \varphi[y/0, z/0]$.

3. Determinare se:

- $\mathcal{B} \models \psi[y/-1000, z/-2000]$,
- $\mathcal{B} \models \psi[y/-1000, z/-3000]$,
- $\mathcal{B} \models \forall z \psi[y/-1000, z/-998]$.

4. Determinare se $\mathcal{B} \models \exists y \forall z \psi[y/-1, z/3]$.

5. Determinare se $\forall y \exists z \varphi \models \exists y \forall z \psi$.

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3

9 punti

Sia B un insieme non vuoto e $g: B \rightarrow B$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle B, g \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{g\}$ con un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. g è iniettiva
2. se g è iniettiva, allora g è biettiva
3. $g \circ g$ è una funzione costante (ovvero il suo range contiene un solo punto)
4. ogni elemento ha almeno due preimmagini distinte.