**Prova di Logica Matematica** 18 febbraio 2022 Versione 2

**Istruzioni esame**

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

**Cognome, nome e matricola:** ______________________________

## Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia $B$ un insieme non vuoto e sia $L = \{g\}$ un linguaggio del prim'ordine con $g$ simbolo di funzione unaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle B, g\rangle$, l'affermazione: "$g$ è suriettiva"? 2 punti

- ☐ $\exists x \forall y (g(x) = y)$
- ☐ $\forall x \forall y (g(x) = y)$
- ☐ $\forall x \exists y (g(x) = y)$
- ☐ $\forall y \exists x (g(x) = y)$

(b) Sia $L = \{g\}$ un linguaggio del prim'ordine con $g$ simbolo di funzione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\neg\exists y\, (g(y, y) = y)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{Q}, +\rangle$? 2 punti

- ☐ "C'è un numero razionale che è il doppio di se stesso."
- ☐ "C'è un numero razionale che non è il doppio di se stesso."
- ☐ "Tutti i numeri razionali $y$ sono tali che $y + y \neq y$."
- ☐ "Nessun numero razionale è il doppio di se stesso."

(c) Sia $B$ un insieme non vuoto di cardinalità finita e $C$ un insieme di cardinalità infinita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ $B \times C$ ha cardinalità finita.
- ☐ $B \setminus C$ ha cardinalità finita.
- ☐ $B \triangle C$ ha cardinalità finita.
- ☐ $C \setminus B$ ha cardinalità finita.

(d) Siano $S$, $P$ relazioni binarie su un insieme $B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ Se per ogni $b \in B$ esiste un solo $c \in B$ tale che $S(b, c)$, allora $S$ è una funzione.
- ☐ Se $S$ è riflessiva e $S \subseteq P$, anche $P$ è riflessiva.
- ☐ Se $S$ è riflessiva e $S \supseteq P$, anche $P$ è riflessiva.
- ☐ Se per ogni $b, c \in B$ vale che $S(b, c)$ se e solo se $P(c, b)$, allora $P = S^{-1}$.

(e) Siano Q e R formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ☐ $\neg Q \vee (R \to Q)$ è una tautologia.
- ☐ Se Q è una tautologia allora non è soddisfacibile.
- ☐ $Q \leftrightarrow R \equiv (Q \to R) \wedge (R \to Q)$
- ☐ Se $Q \models R$, allora $\neg Q \vee R$ è una tautologia.

(f) Siano B, C, D lettere proposizionali e Q una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

| B | C | D | Q |
|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **F** |
| **V** | **V** | **F** | **F** |
| **V** | **F** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** | **F** |
| **F** | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** | **F** |

- ☐ $B \wedge C \models Q$
- ☐ Q è insoddisfacibile.
- ☐ $\neg Q$ è soddisfacibile.
- ☐ $Q \models \neg C$

(g) Siano $g\colon \mathbb{Q}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, dove $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 1, e $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 1}$ definite da $g(y) = \sqrt{y-1}$ e $h(z) = z^2 + 1$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ $g$ è una funzione suriettiva.
- ☐ $g \circ h(b) = b$ per ogni $b \in \mathbb{Q}$ con $b \geq 0$.
- ☐ $h$ è una funzione iniettiva.
- ☐ $g \circ h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

12,5

7,5

## Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{S, g, d\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario $S$, un simbolo di funzione binario $g$ e un simbolo di costante $d$.

Consideriamo la struttura $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, <, +, 1 \rangle$. Stabilire se:

- $\mathcal{Q} \models \neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))[y/2, w/2.5]$ v
- $\mathcal{Q} \models S(w, y) \vee S(g(y, d), w)[y/2, w/2.5]$ f
- $\mathcal{Q} \models (\neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))) \to (S(w, y) \vee S(g(y, d), w))[y/2, w/2.5]$ f
- $\mathcal{Q} \models \forall y \forall w[(\neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))) \to (S(w, y) \vee S(g(y, d), w))][y/2, w/1.5]$ f

Consideriamo ora la struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, 1 \rangle$.

Verificare se

$$\mathcal{N} \models \forall y \forall w[(\neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))) \to (S(w, y) \vee S(g(y, d), w))][y/2, w/3]$$ v

L'enunciato $\forall y \forall w[(\neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))) \to (S(w, y) \vee S(g(y, d), w))]$ è una tautologia?

Giustificare le proprie risposte.

6,75

## Esercizio 3 9 punti

Sia $B$ un insieme non vuoto e $S \subseteq B \times B$ una relazione binaria. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle B, S \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{S\}$ con un simbolo di relazione binaria le seguenti affermazioni:

1. $S$ è simmetrica
2. $S$ è un ordine
3. $S^{-1}$ è antisimmetrica
4. $\text{ran}(S) = B$.