Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia $L = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine con f simbolo di funzione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\exists w \neg \exists x\, (f(w,x) \neq x)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{R}, + \rangle$? 2 punti

- ☐ "La somma sui reali è commutativa."
- ☐ "Nessun numero reale sommato a w dà un numero diverso da x."
- ■ "Esiste un elemento neutro per la somma sui reali."
- ■ "Esiste un numero reale w tale che $w + x = x$, qualunque sia x."

(b) Siano A, B sottoinsiemi di D e sia $k\colon D \to D$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ Se $A \supseteq B$ allora certamente accade che $k[A] \subseteq k[B]$.
- ☐ Se $k[A] \subseteq k[B]$ allora si deve avere che $A \subseteq B$.
- ■ $A \subseteq k^{-1}[k[A]]$.
- ■ $k^{-1}[A \cup B] = k^{-1}[A] \cup k^{-1}[B]$.

(c) Sia $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $k(w) = \frac{3w+6}{3} - w$ per ogni $w \in \mathbb{R}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ $k(w) = 4$ per qualche $w \in \mathbb{R}$.
- ☐ k è suriettiva.
- ☐ k è iniettiva.
- ■ $k(w) = 2$ per ogni $w \in \mathbb{R}$.

(d) Siano P e Q formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ■ Q è soddisfacibile se e solo se ¬Q non è una tautologia.
- ■ $\neg \mathrm{P} \models \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$
- ■ $\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P} \equiv \neg(\mathrm{Q} \rightarrow \neg \mathrm{P})$
- □ Anche se P è insoddisfacibile, ¬P può non essere soddisfacibile.

(e) Dati due insiemi B e C, indichiamo con B^C l'insieme delle funzioni da C in B. Sia D un insieme non vuoto di cardinalità finita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- □ $D^{\mathbb{N}}$ è necessariamente più che numerabile.
- □ D^D è un insieme infinito.
- ■ $\mathbb{N}^D$ è un insieme infinito numerabile.
- □ D^D è certamente in biezione con $\mathcal{P}(A)$.

(f) Sia D un insieme non vuoto e sia $L = \{Q\}$ un linguaggio del prim'ordine con Q simbolo di relazione binaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle D, Q\rangle$, l'affermazione: "Q è antisimmetrica"? 2 punti

- □ $\exists x \exists y\, (R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y)$
- □ $\forall x \forall y\, (R(x,y) = R(y,x) \rightarrow x = y)$
- □ $\forall x \exists y\, (R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y)$
- ■ $\forall x \forall y\, (R(x,y) \rightarrow (R(y,x) \rightarrow x = y))$

(g) Siano D, A, B lettere proposizionali e S una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

D	A	B	S
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**

- □ ¬S è insoddisfacibile.
- ■ ¬S è soddisfacibile.
- □ $\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B} \models \neg \mathrm{S}$
- □ $\mathrm{S} \models \neg \mathrm{B} \wedge \mathrm{D}$

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{Q, k, a\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario Q, un simbolo di funzione binario k e un simbolo di costante a. Sia φ la formula

$$(\neg \exists x\,(k(x,x) = w) \to Q(k(y,a), w)).$$

Consideriamo la L-struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 1 \rangle$.

1. Dire se φ è un enunciato oppure no e, nel secondo caso, cerchiare le occorrenze libere di variabili.
2. È vero che $\mathcal{N} \models \exists x\,(k(x,x) = w)[w/l, x/n]$ se e solo se l è un numero naturale pari?
3. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[w/1, x/0, y/0]$?
4. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[w/2, x/1, y/0]$?
5. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[w/5, x/1, y/5]$?
6. È vero che $\mathcal{N} \models \forall w\, \varphi[w/0, x/0, y/0]$?
7. È vero che $\mathcal{N} \models \forall w\, \varphi[w/0, x/0, y/5]$?
8. È vero che $\mathcal{N} \models \exists y \forall w\, \varphi$?
9. È vero che $\mathcal{N} \models \forall y \forall w\, \varphi$?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. Non è un enunciato. Le occorrenze libere di variabili sono tutte le occorrenze di w, y. Concludiamo che in tutti i punti dell'esercizio è irrilevante controllare l'assegnamento della variabile x.

2. Si è vero poiché la formula in questione asserisce che il numero assegnato a w è ottenuto sommando con se stesso un qualche numero naturale x.

3. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "se w è dispari allora si ha che $y + 1 \leq w$". Se a y viene assegnato 0 e a w viene assegnato 1, allora si ha che l'interpretazione di φ è vera in $\mathcal{N}$: infatti, l'implicazione è vera dato che lo è la sua conclusione (che interpretata nella struttura con l'assegnazione data diventa $0 + 1 \leq 1$).

4. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "se w è dispari allora si ha che $y + 1 \leq w$". Se ad w assegniamo 2 la premessa dell'implicazione è falsa e quindi l'implicazione è vera.

5. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "se w è dispari allora si ha che $y + 1 \leq w$". Se a w viene assegnato 5 e anche a y viene assegnato 5, la premessa dell'implicazione risulta vera (in quanto 5 è effettivamente dispari), ma la sua conclusione è falsa dato che $5 + 1 = 6 > 5$. Quindi l'implicazione è falsa.

6. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "per ogni numero naturale w, se w è dispari allora $y + 1 \leq w$". Se a y viene assegnato 0, l'affermazione risulta vera perché qualunque numero naturale dispari è certamente maggiore o uguale di $0 + 1$, ovvero di 1.

7. Se invece assegniamo a y il numero 5, allora l'interpretazione della formula diventa "ogni numero dispari è maggiore o uguale a $5+1$". Questo è falso perché prendendo $w = 3$ si ha che w è un numero dispari (premessa dell'implicazione vera) ma $3 < 6$ (conclusione dell'implicazione falsa).

8. Per quanto visto ai punti precedenti, l'assegnamento che dà a z il valore 0 mostra la verità in $\mathcal{N}$ dell'enunciato $\exists y \forall w\ \varphi$.

9. Per quanto visto ai punti precedenti, se prendiamo $w = 3$ e $y = 5$ si ha che l'implicazione φ risulta falsa: questo mostra la falsità in $\mathcal{N}$ dell'enunciato $\forall y \forall w\ \varphi$.

Esercizio 3 9 punti

Sia D un insieme non vuoto, siano A, B sottoinsiemi di D e sia $k\colon D \to D$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle D, A, B, k\rangle$ mediante il linguaggio $L = \{A, B, k\}$ con due simboli di predicato unari ed un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. k è l'identità (ovvero manda ciascun elemento di D in se stesso)
2. $k \circ k$ è iniettiva
3. $k^{-1}[B] \subseteq A$
4. $k[A] \cup k[B] \neq D$.

Soluzione: 1. k è l'identità: $\forall x(k(x) = x)$

2. $k \circ k$ è iniettiva: $\forall x \forall y(\neg(x = y) \to \neg(k(k(x)) = k(k(y))))$

3. $k^{-1}[B] \subseteq A$: $\forall x(B(k(x)) \to A(x))$

4. $k[A] \cup k[B] \neq D$: $\exists y \forall x((A(x) \vee B(x)) \to \neg(k(x) = y))$