Verifica CMRO A/B — 11 novembre 2009

Esercizio 1.

1. Determinare la distanza tra il punto $\mathbf{x}_0 = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ e la retta
$$R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \mathbf{x} = (-1,2) + t(2,1),\, t \in \mathbb{R}\}.$$
2. Si può affermare che R è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$? Perché?

Soluzione proposta.

1. Si osserva che la retta R può essere espressa in forma cartesiana come segue
$$R = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x - 1 - 2x_2 = -5\right\}.$$
Di conseguenza, applicando la formula vista a lezione, otteniamo:
$$d(x_0, R) = \frac{|1 - 2 + 5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$
2. Affinché R sia un sottospazio devono essere verificate le 3 proprietà definite nella sezione 2.1.2 degli appunti. In particolare si osserva che il vettore nullo non appartiene a R quindi R non può essere un sottospazio.

$\square$

Esercizio 2. È dato l'insieme di vettori $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$, con
$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (1,2,1)\\
\mathbf{v}_2 &= (0,1,0)\\
\mathbf{v}_3 &= (1,0,-1)\\
\mathbf{v}_4 &= (1,\tfrac{3}{2},0)\\
\mathbf{v}_5 &= (2,1,0)
\end{aligned}$$

1. Determinare se S è un insieme libero.
2. Determinare una base dello spazio $V = \mathcal{L}(S)$.
3. Determinare — se possibile — una base di $V = \mathcal{L}(S)$ contenente $\mathbf{v}_4$.

Soluzione proposta. Si consideri la corrispondente matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e la sua riduzione di Gauss Jordan

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Per quanto visto sugli spazi vettoriali delle colonne di $\mathbf{A}$, possiamo dire che:

1. S non è un insieme libero in quanto, ad esempio, $\mathbf{v}_4$ è esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ ponendo $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$.
2. La dimensione degli spazi vettoriali associati alle righe e alle colonne di $\mathbf{A}$ hanno cardinalità 3 visto che, ad esempio, nella riduzione ci sono 3 righe non nulle. Quindi la base cercata deve avere cardinalità 3. Tale base, come indicato dalle colonne ridotte di $\mathbf{A}'$, può essere formata dai primi 3 vettori, ovvero
$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}.$$
3. Per ottenere una base che contiene $\mathbf{v}_4$, basta fare pivot sulla quarta colonna scegliendo, ad esempio, l'elemento $a_{3,4} = \frac{1}{2}$: $\mathbf{A}'$ ottenendo
$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
$\mathbf{A}''$ ci dice che un'altra base è composta da
$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}.$$
Si osserva che facendo pivot su $a_{1,4} = \frac{1}{2}$ otteniamo invece come base $B = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

□

◇

Esercizio 3. Sia $S = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ un insieme di generatori (non necessariamente una base!) di uno spazio V, e sia $S' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subseteq V$ un insieme libero. Dimostrare che esiste una base B di V tale che $S' \subseteq V$.

Traccia: usare il metodo degli scarti successivi su $S \cup S'$.

Soluzione proposta. Come da traccia, applichiamo il metodo degli scarti successivi all'insieme

$$S \cup S' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}.$$

Si osserva che essendo i vettori $\mathbf{v}_i$ linearmente indipendenti (visto che S' è libero), il metodo degli scarti successivi non potrà mai escluderli dalla costruzione della base. Quindi essi saranno contenuti sicuramente nella base B e quindi la tesi è verificata. $\square$

Esercizio 4. Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}:$$

1. $\mathbf{A}$ può avere rango 4? Giustificare la risposta!
2. Determinare il rango di $\mathbf{A}$.

Soluzione proposta.

1. Il rango di una matrice è dato dal numero di righe non nulle e dal numero di colonne ridotte che si possono avere in una matrice dopo la sua riduzione di Gauss Jordan. Quindi il massimo rango è di una matrice $\mathbf{A}^{m \times n}$ è dato dal minimo tra m e n. Nel caso in esame, il rango massimo è uguale a 3. Quindi la matrice non può avere rango 4.
2. Data $\mathbf{A}$ otteniamo la seguente matrice come risultato della riduzione di Gauss Jordan:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da quanto detto al punto precedente, otteniamo che $\sigma(\mathbf{A}) = 3$.

$\square$
