

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: _____

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) Sia $L = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine con f simbolo di funzione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\exists w \neg \exists x (f(w, x) \neq x)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{R}, + \rangle$? 2 punti
- ☐ “La somma sui reali è commutativa.”
 - ☐ “Nessun numero reale sommato a w dà un numero diverso da x .”
 - ☒ “Esiste un elemento neutro per la somma sui reali.”
 - ☒ “Esiste un numero reale w tale che $w + x = x$, qualunque sia x .”
- (b) Siano A, B sottoinsiemi di D e sia $k: D \rightarrow D$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti
- ☐ Se $A \supseteq B$ allora certamente accade che $k[A] \subseteq k[B]$.
 - ☐ Se $k[A] \subseteq k[B]$ allora si deve avere che $A \subseteq B$.
 - ☒ $A \subseteq k^{-1}[k[A]]$.
 - ☒ $k^{-1}[A \cup B] = k^{-1}[A] \cup k^{-1}[B]$.
- (c) Sia $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $k(w) = \frac{3w+6}{3} - w$ per ogni $w \in \mathbb{R}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti
- ☐ $k(w) = 4$ per qualche $w \in \mathbb{R}$.
 - ☐ k è suriettiva.
 - ☐ k è iniettiva.
 - ☒ $k(w) = 2$ per ogni $w \in \mathbb{R}$.

- (d) Siano P e Q formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ☒ Q è soddisfacibile se e solo se $\neg Q$ non è una tautologia.
☐ $\neg P \models P \rightarrow Q$
☒ $Q \wedge P \equiv \neg(Q \rightarrow \neg P)$
☐ Anche se P è insoddisfacibile, $\neg P$ può non essere soddisfacibile.

- (e) Dati due insiemi B e C , indichiamo con B^C l'insieme delle funzioni da C in B . Sia D un insieme non vuoto di cardinalità finita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ $D^{\mathbb{N}}$ è necessariamente più che numerabile.
☐ D^D è un insieme infinito.
☒ \mathbb{N}^D è un insieme infinito numerabile.
☐ D^D è certamente in biezion con $\mathcal{P}(A)$.

- (f) Sia D un insieme non vuoto e sia $L = \{Q\}$ un linguaggio del prim'ordine con Q simbolo di relazione binaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle D, Q \rangle$, l'affermazione: " Q è antisimmetrica"? 2 punti
1,5p

- ☐ $\exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y)$
☒ $\forall x \forall y (R(x, y) = R(y, x) \rightarrow x = y)$
☐ $\forall x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y)$
☒ $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow (R(y, x) \rightarrow x = y))$

- (g) Siano D, A, B lettere proposizionali e S una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

D	A	B	S
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	F

- ☐ $\neg S$ è insoddisfacibile.
☒ $\neg S$ è soddisfacibile.
☐ $A \leftrightarrow B \models \neg S$
☐ $S \models \neg B \wedge D$

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2

9 punti

Sia $L = \{Q, k, a\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario Q , un simbolo di funzione binario k e un simbolo di costante a . Sia φ la formula

$$(\neg \exists x (k(x, x) = w) \rightarrow Q(k(y, a), w)).$$

Consideriamo la L -struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 1 \rangle$.

1. Dire se φ è un enunciato oppure no e, nel secondo caso, cerchiare le occorrenze libere di variabili.
2. È vero che $\mathcal{N} \models \exists x (k(x, x) = w)[w/l, x/n]$ se e solo se l è un numero naturale pari? ☐
3. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[w/1, x/0, y/0]$? ☐
4. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[w/2, x/1, y/0]$? ☐
5. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[w/5, x/1, y/5]$? ☐
6. È vero che $\mathcal{N} \models \forall w \varphi[w/0, x/0, y/0]$? ☐
7. È vero che $\mathcal{N} \models \forall w \varphi[w/0, x/0, y/5]$? ☐
8. È vero che $\mathcal{N} \models \exists y \forall w \varphi$? ☐
9. È vero che $\mathcal{N} \models \forall y \forall w \varphi$? ☐

Giustificare le proprie risposte.



Esercizio 3

9 punti

Sia D un insieme non vuoto, siano A, B sottoinsiemi di D e sia $k: D \rightarrow D$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle D, A, B, k \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{A, B, k\}$ con due simboli di predicato unari ed un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. k è l'identità (ovvero manda ciascun elemento di D in se stesso)
2. $k \circ k$ è iniettiva
3. $k^{-1}[B] \subseteq A$
4. $k[A] \cup k[B] \neq D$.