Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano A, B, C lettere proposizionali e P una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

A	B	C	P
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

- ☐ P non è una tautologia.
- ☐ P $\models$ C.
- ☐ P $\wedge$ C $\models$ B
- ☐ $\neg$P $\wedge$ B è una contraddizione.

(b) Sia φ la formula $\forall x \forall y P(y, x) \rightarrow \exists y P(x, y)$, dove P è un simbolo di predicato binario. 2 punti

- ☐ φ è un enunciato e la variabile x occorre sia libera che vincolata in φ.
- ☐ φ è un enunciato.
- ☐ La variabile x occorre libera e vincolata in φ.
- ☐ La variabile y occorre libera e vincolata in φ.

(c) Siano φ, ψ delle L-formule. 2 punti

- ☐ Se φ è soddisfacibile allora $\psi \to \varphi$ è soddisfacibile.
- ☐ Se $\neg\varphi$ è soddisfacibile allora φ è una tautologia.
- ☐ φ è soddisfacibile se e solo se φ è una tautologia.
- ☐ Se φ è una tautologia allora $\psi \to \varphi$ è soddisfacibile.

(d) Consideriamo il linguaggio L con due simboli di funzione unaria f, g. Quali delle seguenti espressioni sono L-enunciati che formalizzano correttamente relativamente alla L-struttura $\langle A, f, g\rangle$ l'affermazione "la funzione f è l'inversa della funzione g" 2 punti

- ☐ $\forall x(f(g(x)) = x)$
- ☐ $\forall x(f(x) \cdot g(x) = 1)$
- ☐ $\forall x(f(g(x)) = x \wedge g(f(x)) = x)$
- ☐ $f = g^{-1}$

(e) La relazione S su $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definita da $x \mathrel{S} y$ se e solo se $\exists z(x \cdot z = y)$ 2 punti

- ☐ è riflessiva.
- ☐ non è simmetrica.
- ☐ è transitiva.
- ☐ non è una relazione d'equivalenza.

(f) La funzione $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(q) = 2q^2 + 1$ è 2 punti

- ☐ iniettiva ma non suriettiva.
- ☐ suriettiva ma non iniettiva.
- ☐ biettiva.
- ☐ né iniettiva, né suriettiva.

(g) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? 2 punti

- ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 2 = 0\}$
- ☐ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \vee y \notin \mathbb{Q}\}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{Q}\}$
- ☐ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Q}\}$

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 — 9 punti

Sia $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario. Sia φ la L-formula

$$\exists y\,(f(y,y) = x).$$

1. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \varphi[y/2, x/1].$$
2. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \varphi[y/2, x/2].$$
3. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \forall x \varphi[y/2, x/2].$$
4. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \exists x \varphi[y/2, x/1].$$
5. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \varphi[y/1, x/3].$$
6. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \varphi[y/\sqrt{2}, x/-2].$$
7. È vero che $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \forall x\, \varphi[y/1, x/3]$?
8. Sia $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. È vero che $\mathcal{C} \models \forall x\, \varphi[y/1, x/3]$?

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3 — 9 punti

Sia $\langle A, < \rangle$ un ordine lineare stretto e siano B, C sottoinsiemi di A. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle A, <, B, C \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{<, B, C\}$ con un simbolo di relazione binaria e due simboli di predicato unari le seguenti affermazioni:

1. Tra due elementi di A c'è un elemento di B.
2. Dati due elementi distinti di B, uno dei due è minore dell'altro, cioè $\langle B, < \rangle$ è un ordine totale.
3. Ogni elemento di B è minore di ogni elemento di C.
4. C'è un elemento di B che è il minimo di $\langle A, < \rangle$.