Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) La funzione $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $h(q) = 4q^2 - 1$ è — 2 punti

1p

- ☐ biettiva.
- ☐ iniettiva ma non suriettiva.
- ☐ né iniettiva, né suriettiva.
- ☐ suriettiva ma non iniettiva.

(b) Consideriamo il linguaggio L con due simboli di funzione unaria h, k. Quali delle seguenti espressioni sono L-enunciati che formalizzano correttamente relativamente alla L-struttura $\langle C, h, k\rangle$ l'affermazione "la funzione h è l'inversa della funzione k" — 2 punti

2p

- ☐ $\forall x(h(k(x)) = x \wedge k(h(x)) = x)$
- ☐ $h = k^{-1}$
- ☐ $\forall x(h(k(x)) = x)$
- ☐ $\forall x(h(x) \cdot k(x) = 1)$

(c) Siano C, D, A lettere proposizionali e R una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: — 2 punti

2p

C	D	A	R
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

- ☐ R $\models$ D.
- ☐ $\neg$R $\wedge$ D è una contraddizione.

☐ R non è insoddisfacibile.

☐ R ∧ A ⊨ D

(d) La relazione Q su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definita da $z \, Q \, w$ se e solo se $\exists x(z \cdot x = w)$ — 2 punti

2p

☐ è transitiva.

☐ non è una relazione d'equivalenza.

☐ è riflessiva.

☐ non è simmetrica.

(e) Siano φ, ψ delle L-formule. — 2 punti

2p

☐ φ è soddisfacibile se e solo se $\neg\varphi \to \psi$ è soddisfacibile.

☐ Se φ è una tautologia allora $\neg\varphi \to \psi$ è soddisfacibile.

☐ Se φ è soddisfacibile allora $\neg\psi \to \varphi$ è soddisfacibile.

☐ Se $\neg\varphi$ è soddisfacibile allora $\neg\varphi \to \psi$ è soddisfacibile.

(f) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? — 2 punti

2p

☐ $\{(z, w) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{Z} \vee w \notin \mathbb{Q}\}$

☐ $\{(z, w) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{Z} \wedge w \in \mathbb{Q}\}$

☐ $\{z \in \mathbb{R} \mid z^2 - 3z + 4 = 0\}$

☐ $\{z \in \mathbb{R} \mid \sqrt{z} \in \mathbb{N}\}$

(g) Sia φ la formula $\forall z \forall w R(w, z) \vee \neg\exists w R(z, w)$, dove R è un simbolo di predicato binario. — 2 punti

2p

☐ φ è un enunciato.

☐ La variabile w occorre libera e vincolata in φ.

☐ φ è un enunciato e la variabile z occorre sia libera che vincolata in φ.

☐ La variabile z occorre libera e vincolata in φ.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{h\}$ con h simbolo di funzione binario. Sia ψ la L-formula

$$\exists w\,(h(w,w) = z).$$

1. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \psi[y/2, x/1].$$
2. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \psi[y/2, x/2].$$
3. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \forall z \psi[y/2, x/2].$$
4. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \exists z \psi[y/2, x/1].$$
5. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \psi[y/1, x/3].$$
6. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \psi[y/\sqrt{2}, x/-2].$$
7. È vero che $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \forall z\, \psi[y/1, x/3]$?
8. Sia $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. È vero che $\mathcal{C} \models \forall z\, \psi[y/1, x/3]$?

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3 — 9 punti

Sia $\langle C, < \rangle$ un ordine lineare stretto e siano D, A sottoinsiemi di C. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle C, <, D, A \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{<, D, A\}$ con un simbolo di relazione binaria e due simboli di predicato unari le seguenti affermazioni:

1. Tra due elementi di D c'è un elemento di A.
2. Dati due elementi di D, c'è necessariamente un elemento di A che è maggiore di entrambi.
3. Qualche elemento di D è minore di qualche elemento di A.
4. Il più grande elemento di D coincide con il più piccolo elemento di A.