Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano φ, ψ delle L-formule. 2 punti

- ☐ Se $\neg\varphi$ è soddisfacibile allora φ è una contraddizione proposizionale.
- ☐ Se φ è una tautologia allora $\neg\varphi$ è una contraddizione proposizionale.
- ☐ Se φ è soddisfacibile allora $\psi \vee \varphi$ è soddisfacibile.
- ☐ φ è soddisfacibile se e solo se $\neg\varphi$ è una tautologia.

(b) La relazione P su $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definita da $y\ P\ z$ se e solo se $y \mid z$ 2 punti

- ☐ è simmetrica.
- ☐ è transitiva.
- ☐ è un ordine lineare.
- ☐ è riflessiva.

(c) Consideriamo il linguaggio L con due simboli di funzione unaria g, h. Quali delle seguenti espressioni sono L-enunciati che formalizzano correttamente relativamente alla L-struttura $\langle B, g, h\rangle$ l'affermazione "la funzione g è l'inversa della funzione h" 2 punti

- ☐ $\forall x(g(h(x)) = x \wedge h(g(x)) = x)$
- ☐ $\forall x(g(h(x)) = x)$
- ☐ $g = h^{-1}$
- ☐ $\forall x(g(x) \cdot h(x) = 1)$

(d) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? 2 punti

- ☐ $\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - 4y - 3 = 0\}$
- ☐ $\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{Q} \vee z \notin \mathbb{N}\}$
- ☐ $\{y \in \mathbb{R} \mid \sqrt{y} \in \mathbb{Z}\}$

(e) Sia φ la formula $\forall z Q(y,z) \wedge \exists y \exists z Q(z,y)$, dove Q è un simbolo di predicato binario. 2 punti

- ☐ La variabile y occorre libera e vincolata in φ.
- ☐ φ è un enunciato e la variabile y occorre sia libera che vincolata in φ.
- ☐ La variabile z occorre libera e vincolata in φ.
- ☐ φ è un enunciato.

(f) Siano B, C, D lettere proposizionali e Q una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

B	C	D	Q
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

- ☐ $\mathrm{Q} \equiv \mathrm{D} \to \mathrm{C}$
- ☐ Q non è una contraddizione.
- ☐ $\mathrm{Q} \vee \mathrm{D}$ è una tautologia.
- ☐ $\mathrm{Q} \models \neg \mathrm{D}$.

(g) La funzione $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definita da $g(t) = 3t^2 + 1$ è 2 punti

- ☐ suriettiva ma non iniettiva.
- ☐ biettiva.
- ☐ né iniettiva, né suriettiva.
- ☐ iniettiva ma non suriettiva.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{g\}$ con g simbolo di funzione binario. Sia φ la L-formula

$$\exists z\,(g(z,z) = y).$$

1. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \varphi[y/2, x/1].$$
2. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \varphi[y/2, x/2].$$
3. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \forall y \varphi[y/2, x/2].$$
4. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \exists y \varphi[y/2, x/1].$$
5. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \varphi[y/1, x/3].$$
6. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \varphi[y/\sqrt{2}, x/-2].$$
7. È vero che $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \forall y\, \varphi[y/1, x/3]$?
8. Sia $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. È vero che $\mathcal{C} \models \forall y\, \varphi[y/1, x/3]$?

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3 9 punti

Sia $\langle B, < \rangle$ un ordine lineare stretto e siano C, D sottoinsiemi di B. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle B, <, C, D \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{<, C, D\}$ con un simbolo di relazione binaria e due simboli di predicato unari le seguenti affermazioni:

1. Tra due elementi di C c'è un elemento di C.
2. Ci sono due elementi distinti di D tali che nessuno dei due è minore dell'altro, cioè $\langle D, < \rangle$ non è un ordine totale.
3. Qualche elemento di C è minore di ogni elemento di D.
4. C'è un elemento di C che è il massimo di $\langle B, < \rangle$.