Prova di Logica Matematica 28 gennaio 2022 Versione 2

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia S una relazione binaria su un insieme non vuoto B. 2 punti

■ Se S è una relazione di equivalenza, allora è anche un preordine.

□ Se S è simmetrica, allora non può essere anche antisimmetrica.

■ Se S è irriflessiva, allora non può essere anche riflessiva.

■ Se S è una relazione d'equivalenza e P è un'altra relazione binaria su B tale che $S \subseteq P$, allora P è riflessiva.

(b) Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente "x è un numero primo" utilizzando il linguaggio $\cdot, 1$ e relativamente alla struttura $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$ 2 punti

■ $\neg(x = 1) \wedge \forall y(\neg \exists z(\neg(z = x) \wedge \neg(z = 1) \wedge y \cdot z = x))$

□ $\forall x \exists y(x \cdot y = x \wedge y \cdot x)$

□ $\exists y \exists z(x = y \cdot z \to y = x \vee z = x)$

□ $\neg(x = 1) \to \forall y \forall z(y \cdot z = x \to y = 1 \vee z = 1)$

(c) Consideriamo le funzioni $g \colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}, \quad (y, z) \mapsto 3y^2 + z$ e $h \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2, \quad y \mapsto (y, 3y)$. Allora 2 punti

□ h è iniettiva ed è l'inversa di g.

□ la funzione g è iniettiva.

■ Esistono $y, z \in \mathbb{Q}$ tali che $g(y, z) = 0$.

■ $g \circ h(y) = 3y(y + 1)$ per ogni $y \in \mathbb{Q}$.

(d) Sia $L = \{Q, g, h, b\}$ un linguaggio del prim'ordine con Q simbolo di relazione binario, g simbolo di funzione unario, h simbolo di funzione binario e b simbolo di costante. Quali dei seguenti sono L-termini? 2 punti

■ $h(h(g(b), g(b)), h(g(b), g(b)))$

□ $h(g(g(h(b, b), b)), b)$

■ $g(h(h(b, g(b)), h(g(b), b)))$

□ $Q(b, g(b))$

(e) Siano C e D insiemi tali che $D \subseteq C$. Allora possiamo concludere con certezza che 2 punti

- ■ se D è più che numerabile allora anche C lo è.
- □ $C \setminus D \neq C$.
- □ se C e D sono entrambi infiniti e numerabili allora $C \setminus D = \emptyset$.
- ■ $(C \cap D) \cup (C \setminus D) = C$.

(f) Sia Q la proposizione $\neg(\mathrm{B} \wedge \mathrm{C} \wedge \neg \mathrm{D})$. Allora 2 punti

- □ Q è una tautologia.
- □ Se i è un'interpretazone tale che $i(\mathrm{D}) = 0$ allora necessariamente $i(\mathrm{B}) = i(\mathrm{C}) = 0$.
- □ Q è insoddisfacibile.
- ■ Q è conseguenza logica di $\mathrm{B} \to \mathrm{D}$.

(g) Siano $\varphi(y)$ e $\psi(y, z)$ formule del prim'ordine e σ un enunciato. 2 punti

- □ $\forall y \neg \varphi(y) \models \exists y\, \varphi(y)$
- ■ $\exists y \forall z\, \psi(z, y) \models \forall z \exists y\, \psi(z, y)$
- ■ Se $\mathcal{C}$ è una struttura tale che $\mathcal{C} \models \exists z \neg \varphi(z)$, allora $\mathcal{C} \models \exists z\, (\neg \sigma \vee \neg \varphi(z))$.
- ■ Se $\mathcal{B}$ è una struttura tale che $\mathcal{B} \models \forall y \neg \varphi(y)$, allora $\mathcal{B} \models \forall y\, (\varphi(y) \to \sigma)$.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{Q, g, b\}$ con Q simbolo di relazione binaria, g simbolo di funzione binaria e b simbolo di costante. Consideriamo la L-struttura $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, >, \cdot, 3\rangle$, dove $\cdot$ è l'usuale funzione moltiplicazione.

Sia φ la formula

$$(Q(y, z) \land \exists w\, (g(b, w) = z))$$

e ψ la formula

$$(Q(y, z) \to \exists w\, (g(b, w) = z))$$

1. Determinare se:
   - $\mathcal{B} \models \varphi[y/-1000, z/-2000]$,
   - $\mathcal{B} \models \varphi[y/-1000, z/-3000]$,
   - $\mathcal{B} \models \exists z\, \varphi[y/-1000, z/-999]$.
2. Determinare se $\mathcal{B} \models \forall y \exists z \varphi[y/0, z/0]$.
3. Determinare se:
   - $\mathcal{B} \models \psi[y/-1000, z/-2000]$,
   - $\mathcal{B} \models \psi[y/-1000, z/-3000]$,
   - $\mathcal{B} \models \forall z\, \psi[y/-1000, z/-998]$.
4. Determinare se $\mathcal{B} \models \exists y \forall z\, \psi[y/-1, z/3]$.
5. Determinare se $\forall y \exists z\, \varphi \models \exists y \forall z\, \psi$.

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. La formula φ è verificata in $\mathcal{B}$ con l'assegnamento y/n e z/m se e solo se $n > m$ e m è multiplo di 3. Quindi
   - $\mathcal{B} \not\models \varphi[y/-1000, z/-2000]$ perché -2000 non è multiplo di 3
   - $\mathcal{B} \models \varphi[y/-1000, z/-3000]$ perché -3000 è multiplo di 3 e $-1000 > -3000$
   - $\mathcal{B} \models \exists z\, \varphi[y/-1000, z/-999]$, come mostrato dall'assegnazione di z a -3000 nel punto precedente.

2. L'enunciato $\forall y \exists z\, \varphi$ interpretato in $\mathcal{B}$ afferma che

   > Per ogni numero intero y esiste un numero intero z minore di y che è un multiplo di 3,

   ovvero

   > Vi sono numeri interi arbitrariamente piccoli che sono multipli di 3.

   Quindi si ha che $\mathcal{B} \models \forall y \exists z\, \varphi$.

3. La formula ψ è verificata in $\mathcal{B}$ con l'assegnamento y/n e z/m se e solo se si verifica che

> Se $n > m$, allora m è multiplo di 3.

Quindi

- $\mathcal{B} \not\models \psi[y/-1000, z/-2000]$ perché $-1000 > -2000$ ma -2000 non è multiplo di 3, e quindi l'antecedente dell'implicazione in ψ è vero mentre il conseguente è falso;
- $\mathcal{B} \models \psi[y/-1000, z/-3000]$ perché -3000 è multiplo di 3 e quindi con questi assegnamenti il conseguente dell'implicazione in ψ è verificato, rendendo quindi vera ψ stessa. (Si può notare che anche l'antecedente dell'implicazione in ψ è vero con tale assegnamento, anche se questo è di fatto irrilevante nel determinare se $\psi[y/-1000, z/-3000]$ sia vera in $\mathcal{B}$.)
- $\mathcal{B} \not\models \forall z\, \psi[y/-1000, z/-998]$, come mostrato dall'assegnazione di z a -2000 nel punto precedente.

4. L'enunciato $\exists y \forall z\, \psi$ interpretato in $\mathcal{B}$ afferma che

   > Esiste un numero intero y tale che tutti i numeri interi minori di esso sono multipli di 3,

   ovvero

   > Tutti i numeri interi sufficientemente piccoli sono multipli di 3.

   Quindi si ha che $\mathcal{B} \not\models \exists y \forall z\, \psi$.

5. Poiché $\mathcal{B} \models \forall y \exists z\, \varphi$ ma $\mathcal{B} \not\models \exists y \forall z\, \psi$, per definizione di conseguenza logica si ha che $\forall y \exists z\, \varphi \not\models \exists y \forall z\, \psi$.

Esercizio 3 9 punti

Sia B un insieme non vuoto e $g\colon B \to B$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle B, g\rangle$ mediante il linguaggio $L = \{g\}$ con un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. g è iniettiva
2. se g è iniettiva, allora g è biettiva
3. $g \circ g$ è una funzione costante (ovvero il suo range contiene un solo punto)
4. ogni elemento ha almeno due preimmagini distinte.

Soluzione:

1. g è iniettiva: $\forall x \forall y (g(x) = g(y) \to x = y)$.
2. se g è iniettiva, allora g è biettiva:
   $\forall x \forall y (g(x) = g(y) \to x = y) \to [\forall y \exists x (g(x) = y) \land \forall x \forall y (g(x) = g(y) \to x = y)]$.
3. $g \circ g$ è una funzione costante: $\exists y \forall x (g(g(x)) = y)$.
4. ogni elemento ha almeno due preimmagini distinte:
   $\forall y \exists x_1 \exists x_2 (\neg(x_1 = x_2) \land g(x_1) = y \land g(x_2) = y)$.