Corso di Logica
6.2 – Interpretazione

Docenti: Alessandro Andretta, Luca Motto Ros, Matteo Viale

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Interpretazione in una struttura

Le (L-)strutture giocano nella logica del prim'ordine un ruolo analogo a quello delle interpretazioni/valutazioni nel caso della logica proposizionale!

Definiremo ora cosa vuol dire *interpretare* una L-formula φ in una data L-struttura $\mathcal{A}$ e, nel caso φ sia un enunciato, daremo una definizione rigorosa di cosa vuol dire che (l'interpretazione di) φ è vera in $\mathcal{A}$, in simboli

$$\mathcal{A} \models \varphi.$$

Incominciamo con alcuni esempi.

Sia $L = \{f, g, c\}$ un linguaggio con due simboli di funzione binaria f, g e un simbolo di costante c. Sia t_1 il termine $g(x, x)$ e t_2 il termine $f(c, c)$. Interpretando i simboli del linguaggio nelle L-strutture

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 1 \rangle \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 1 \rangle$$

possiamo vedere t_1 come il termine che rappresenta il polinomio x^2 (scritto nella forma $x \cdot x$) e t_2 come il termine che rappresenta il numero 2 (scritto nella forma $1 + 1$). La formula atomica $(t_1 = t_2)$ rappresenta quindi nel nostro linguaggio l'equazione $x^2 = 2$.

Questa formula non è né vera né falsa in $\mathcal{A}$, dipende dal valore di x!

(È vera se a x assegniamo il valore $\sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}$, falsa in tutti gli altri casi.)

Consideriamo ora la formula

$$\exists x(g(x, x) = f(c, c)).$$

Interpretata in $\mathcal{A}$ o in $\mathcal{B}$, la formula corrisponde all'affermazione

L'equazione $x^2 = 2$ ammette soluzioni.

Tale formula risulta vera in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 1 \rangle$ (perché in $\mathbb{R}$ troviamo le due soluzioni dell'equazione $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$) ma falsa in $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot 1 \rangle$ (perché $\sqrt{2}$ non è un numero razionale).

La differenza di comportamento tra le formule $g(x,x) = f(c,c)$ e $\exists x(g(x,x) = f(c,c))$ quando cerchiamo di valutare se siano vere o meno in $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dipende dal fatto che la prima formula contiene la variabile libera x, mentre la seconda non ha variabili libere (ovvero è un enunciato).

- La verità di $\exists x(g(x,x) = f(c,c))$ (e, più in generale, degli enunciati) dipende solo dalla struttura in cui decidiamo di valutarla.
- La verità di $g(x,x) = f(c,c)$ (e, più in generale, delle formule con variabili libere) dipende sia dalla struttura scelta che dal valore assegnato ad x (o più in generale a tutte le variabili libere della formula).

Assegnazioni

Per dare una definizione rigorosa di cosa vuol dire interpretare una formula in una struttura, bisogna incominciare con l'interpretazione degli L-termini in una data L-struttura $\mathcal{A}$.

L'interpretazione dei simboli di costante e funzione è ovvia, essendo esplicitamente data nella definizione stessa di L-struttura.

Quello che manca, tuttavia, è il modo per specificare l'interpretazione delle (eventuali) variabili di un termine: a questo scopo, introduciamo l'idea di **assegnazione**.

Assegnazioni

Definizione

Un'**assegnazione** (nella L-struttura $\mathcal{A}$) per un insieme di variabili $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ è una funzione che associa ad ogni variabile x_i dell'insieme un elemento $a_i \in A$ (per ogni $1 \leq i \leq n$). Una tale assegnazione verrà di solito denotata con

$$x_1/a_1, x_2/a_2, \ldots, x_n/a_n$$

Ad esempio, se $\mathcal{A}$ ha dominio $\mathbb{N}$, un'assegnazione per l'insieme di variabili $\{x, y, z\}$ è una qualunque funzione $\{x, y, z\} \to \mathbb{N}$, ad esempio

$$x \mapsto 24 \qquad y \mapsto 2 \qquad z \mapsto 9$$

o in notazione compatta

$$x/24, y/2, z/9$$

Interpretazione di termini

Sia $\mathcal{A}$ una L-struttura (con dominio A) e t un L-termine.

L'**interpretazione** del termine $t(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$ si indica con

$$t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$

ed è definita per ricorsione sulla struttura del termine:

- se t è la variabile x_i (per qualche $1 \leq i \leq n$), allora $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ è l'elemento a_i, ovvero l'immagine di x_i mediante l'assegnazione data;
- se t è una costante c, allora $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ è l'elemento $c^{\mathcal{A}}$;
- se t è $f(t_1, \ldots, t_k)$, allora $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ è l'elemento

$$f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n], \ldots, t_k^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]).$$

Alcune osservazioni

- L'interpretazione $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ di $t(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathcal{A}$ mediante $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$ è sempre un elemento del dominio A di $\mathcal{A}$.
- È possibile che nella lista $x_1, \ldots, x_n$ vi siano anche variabili che in realtà non occorrono in $t(x_1, \ldots, x_n)$: l'assegnazione data a tali variabili non influisce nel determinare $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$. In altre parole: l'interpretazione di $t(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathcal{A}$ mediante $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$ dipende solo dai valori che l'assegnazione assume sulle variabili (libere) che occorrono in t. In particolare, se t non contiene variabili (libere) allora l'interpretazione $t^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ di t in $\mathcal{A}$ non dipende per nulla dall'assegnazione $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$.

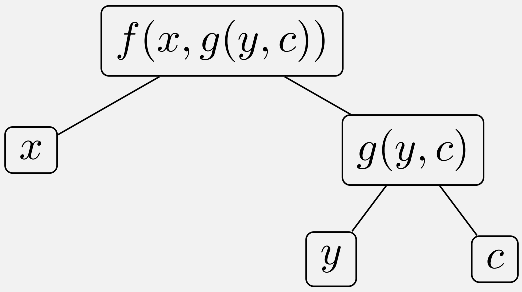
Ad esempio, se $t(x, y, z)$ è il termine $f(x, f(c, y))$ nel linguaggio $L = \{f, c\}$ (con f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante), allora l'interpretazione $t^{\mathcal{A}}[x/12, y/3, z/8]$ di $t(x, y, z)$ in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ mediante $x/12, y/3, z/8$ non dipende in alcun modo dal fatto che l'assegnazione dà a z il valore 8, visto che z non occorre in t.

Interpretazione di termini e albero sintattico

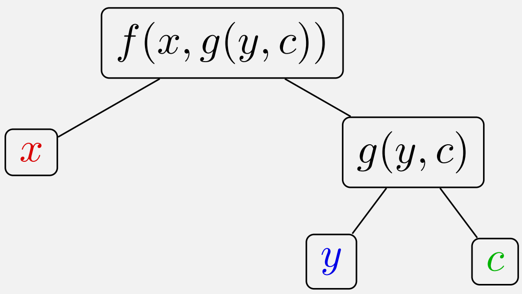
Per interpretare correttamente un termine t in una struttura $\mathcal{A}$ mediante $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$ si può sfruttare il suo albero sintattico, secondo il seguente algoritmo:

- Dato il termine t, se ne costruisce l'albero sintattico.
- Se una foglia contiene una costante c del linguaggio, allora si sostituisce con $c^{\mathcal{A}}$.
- Se una foglia contiene una variabile x_i (per qualche $1 \leq i \leq n$), allora si sostituisce con il valore datole dall'assegnazione, ovvero con a_i.
- Si procede dal basso verso l'alto sostituendo ciascuna etichetta di un nodo con la sua interpretazione in $\mathcal{A}$ come segue. Se l'etichetta è del tipo $f(t_1, \ldots, t_k)$, nei nodi successori ci saranno i termini t_1, ..., t_k, che nel frattempo saranno stati sostituiti con le loro interpretazioni $t_1^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, ..., $t_k^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, rispettivamente; allora si sostituisce l'etichetta del nodo in questione con
$$f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n], \ldots, t_k^{\mathcal{A}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]).$$

Ad esempio, dato il linguaggio $L = \{f, g, c\}$ interpretiamo in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ il termine $t(x, y, z)$ dato da $f(x, g(y, c))$ mediante l'assegnazione $x/2, y/3, z/5$.

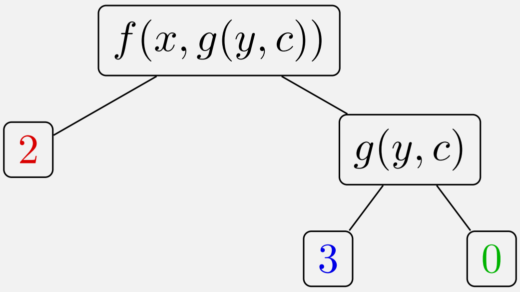


Ad esempio, dato il linguaggio $L = \{f, g, c\}$ interpretiamo in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ il termine $t(x, y, z)$ dato da $f(x, g(y, c))$ mediante l'assegnazione $x/2, y/3, z/5$.



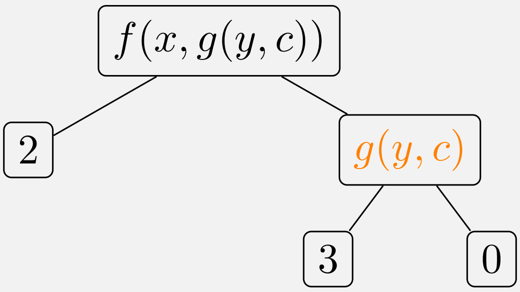
Sostituiamo le etichette delle foglie.

Ad esempio, dato il linguaggio $L = \{f, g, c\}$ interpretiamo in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ il termine $t(x, y, z)$ dato da $f(x, g(y, c))$ mediante l'assegnazione $x/2, y/3, z/5$.



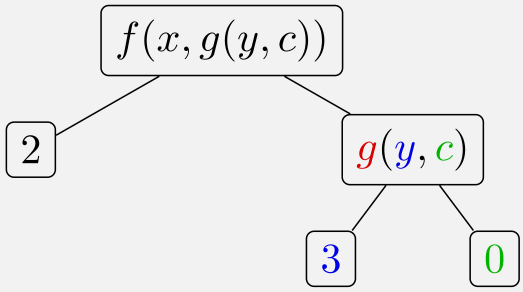
Sostituiamo le etichette delle foglie.

Ad esempio, dato il linguaggio $L = \{f, g, c\}$ interpretiamo in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ il termine $t(x, y, z)$ dato da $f(x, g(y, c))$ mediante l'assegnazione $x/2, y/3, z/5$.



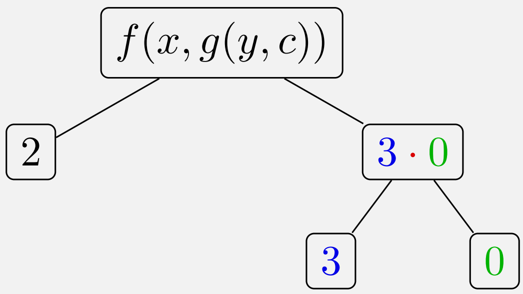
Sostituiamo le etichette delle foglie. Poi procediamo sostituendo le etichette dei nodi dal basso verso l'alto.

Ad esempio, dato il linguaggio $L = \{f, g, c\}$ interpretiamo in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ il termine $t(x, y, z)$ dato da $f(x, g(y, c))$ mediante l'assegnazione $x/2, y/3, z/5$.



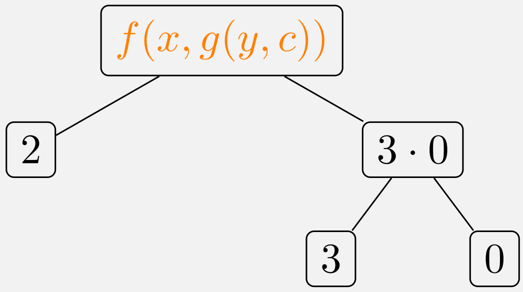
Sostituiamo le etichette delle foglie. Poi procediamo sostituendo le etichette dei nodi dal basso verso l'alto.

Ad esempio, dato il linguaggio $L = \{f, g, c\}$ interpretiamo in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ il termine $t(x, y, z)$ dato da $f(x, g(y, c))$ mediante l'assegnazione $x/2, y/3, z/5$.



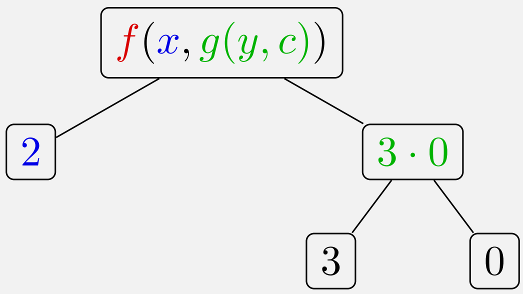
Sostituiamo le etichette delle foglie. Poi procediamo sostituendo le etichette dei nodi dal basso verso l'alto.

Ad esempio, dato il linguaggio $L = \{f, g, c\}$ interpretiamo in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ il termine $t(x, y, z)$ dato da $f(x, g(y, c))$ mediante l'assegnazione $x/2, y/3, z/5$.



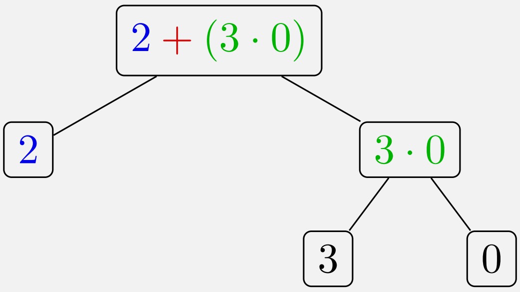
Sostituiamo le etichette delle foglie. Poi procediamo sostituendo le etichette dei nodi dal basso verso l'alto.

Ad esempio, dato il linguaggio $L = \{f, g, c\}$ interpretiamo in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ il termine $t(x, y, z)$ dato da $f(x, g(y, c))$ mediante l'assegnazione $x/2, y/3, z/5$.



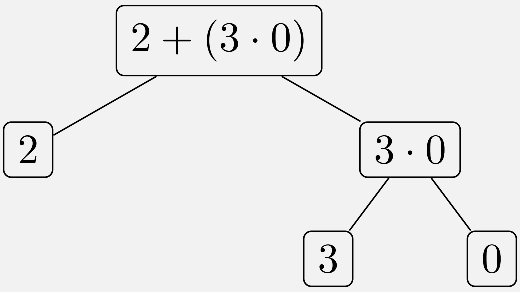
Sostituiamo le etichette delle foglie. Poi procediamo sostituendo le etichette dei nodi dal basso verso l'alto.

Ad esempio, dato il linguaggio $L = \{f, g, c\}$ interpretiamo in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ il termine $t(x, y, z)$ dato da $f(x, g(y, c))$ mediante l'assegnazione $x/2, y/3, z/5$.



Sostituiamo le etichette delle foglie. Poi procediamo sostituendo le etichette dei nodi dal basso verso l'alto.

Ad esempio, dato il linguaggio $L = \{f, g, c\}$ interpretiamo in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ il termine $t(x, y, z)$ dato da $f(x, g(y, c))$ mediante l'assegnazione $x/2, y/3, z/5$.



Sostituiamo le etichette delle foglie. Poi procediamo sostituendo le etichette dei nodi dal basso verso l'alto. Il **risultato** che si ottiene svolgendo i calcoli nell'espressione che abbiamo sostituito all'etichetta della radice è proprio l'interpretazione cercata, ovvero

$$t^{\mathcal{A}}[x/2, y/3, z/5] = 2 + (3 \cdot 0) = 2.$$

Osservazione: Non abbiamo mai dovuto utilizzare il fatto che z vada sostituito con 5: questo perché z non compare affatto nel termine dato!

Esempio

Sia $L = \{f, g\}$ con f e g simboli di funzione binari, e sia $t(x, y)$ il termine $f(x, g(y, x))$.

Consideriamo la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ e l'assegnazione $x/2, y/3$.

Allora

$$t^{\mathcal{A}}[x/2, y/3] = 2 + (3 \cdot 2) = 8.$$

Se invece $\mathcal{B}$ è la L-struttura $\langle \mathbb{Z}, \cdot, - \rangle$, allora $t^{\mathcal{B}}[x/-2, y/6]$ è

$$t^{\mathcal{B}}[x/-2, y/6] = (-2) \cdot (6 - (-2)) = (-2) \cdot 8 = -16.$$

Esercizio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f e g simboli di funzione binari e c simbolo di costante. Consideriamo la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0 \rangle$. Interpretare i seguenti termini in $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione $x/\frac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}$:

- $t_1 : \quad f(g(z, z), y)$;
- $t_2 : \quad g(f(c, c), g(c, c))$;
- $t_3 : \quad f(c, f(g(x, c), y))$.

$$t_1^{\mathcal{A}}\left[x/\tfrac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}\right] = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) + (-2) = 2 - 2 = 0.$$

$$t_2^{\mathcal{A}}\left[x/\tfrac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}\right] = (0 + 0) \cdot (0 \cdot 0) = 0 \cdot 0 = 0.$$

$$\begin{aligned} t_3^{\mathcal{A}}\left[x/\tfrac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}\right] &= 0 + \left(\left(\tfrac{2}{3} \cdot 0\right) + (-2)\right) \\ &= 0 + (0 + (-2)) = 0 + (-2) = -2. \end{aligned}$$

Interpretazione di formule (1)

Definiamo ora per ricorsione sulla sua complessità cosa vuol dire che una L-formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ **è vera in una L-struttura** $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$, in simboli

$$\mathcal{A} \models \varphi\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]\,.$$

- Se φ è una formula atomica del tipo $(t = s)$ con t ed s termini, allora $\mathcal{A} \models \varphi\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se
$$t^{\mathcal{A}}\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] = s^{\mathcal{A}}\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]\,.$$
- Se φ è una formula atomica del tipo $(P(t_1, \ldots, t_k))$ con P simbolo di relazione k-ario e t_1, ..., t_k termini, allora $\mathcal{A} \models \varphi\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se
$$(t_1^{\mathcal{A}}\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]\,, \ldots, t_k^{\mathcal{A}}\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]) \in P^{\mathcal{A}},$$
ovvero se $t_1^{\mathcal{A}}\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, ..., $t_k^{\mathcal{A}}\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, che sono elementi del dominio di $\mathcal{A}$, sono in relazione rispetto all'interpretazione $P^{\mathcal{A}}$ del simbolo P in $\mathcal{A}$.

Esempio

Siano dati

- il linguaggio $L = \{P, f, g, c\}$, con P simbolo di relazione binario, f, g simboli di funzione binari e c simbolo di costante;
- la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, <, +, \cdot, 1 \rangle$;
- la formula atomica $\varphi(x, y)$ data da $P(g(x, x), f(y, c))$;
- l'assegnazione $x/1, y/2$.

Vogliamo determinare se $\mathcal{A} \models \varphi[x/1, y/2]$.

La formula $\varphi(x, y)$ è del tipo $P(t_1, t_2)$, dove t_1 è il termine $g(x, x)$ e t_2 è il termine $f(y, c)$. Quindi

$$\mathcal{A} \models \varphi[x/1, y/2] \qquad \text{se e solo se} \qquad t_1^{\mathcal{A}}[x/1, y/2] < t_2^{\mathcal{A}}[x/1, y/2].$$

Poiché $\quad t_1^{\mathcal{A}}[x/1, y/2] = 1 \cdot 1 = 1 \quad$ e $\quad t_2^{\mathcal{A}}[x/1, y/2] = 2 + 1 = 3$,
si ha che effettivamente $t_1^{\mathcal{A}}[x/1, y/2] = 1 < 3 = t_2^{\mathcal{A}}[x/1, y/2]$,
perciò $\mathcal{A} \models \varphi[x/1, y/2]$.

Esercizio

Siano L, $\mathcal{A}$ e $\varphi(x, y)$ come nell'esempio precedente. Sia inoltre $\psi(x, y)$ la formula

$$(f(x, x) = g(y, c)).$$

Determinare se

$$\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/1] \qquad \text{e} \qquad \mathcal{A} \models \psi[x/2, y/1].$$

Interpretazione di formule (2)

- Se φ è una negazione $(\neg\psi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se non è vero che $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$.
- Se φ è una disgiunzione $(\psi \vee \chi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ oppure $\mathcal{A} \models \chi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ (o entrambe).
- Se φ è una congiunzione $(\psi \wedge \chi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ e $\mathcal{A} \models \chi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$.
- Se φ è un'implicazione $(\psi \rightarrow \chi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ implica che $\mathcal{A} \models \chi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$.
- Se φ è una bi-implicazione $(\psi \leftrightarrow \chi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ implica $\mathcal{A} \models \chi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ e viceversa.

Interpretazione di formule (3)

- Se φ è una formula esistenziale $(\exists y\, \psi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se

  per qualche $b \in A$ si ha che $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, y/b]$.

- Se φ è una formula universale $(\forall y\, \psi)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se

  per ogni $b \in A$ si ha che $\mathcal{A} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, y/b]$.

La scrittura $\mathcal{A} \not\models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ significa: non è vero che $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, ovvero φ non è vera nella struttura $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$.

In particolare, $\mathcal{A} \not\models (\exists y\, \psi)\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se

per ogni $b \in A$ si ha che $\mathcal{A} \not\models \psi\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, y/b]$

e $\mathcal{A} \not\models (\forall y\, \psi)\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ se e solo se

per qualche $b \in A$ si ha che $\mathcal{A} \not\models \psi\,[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, y/b]$.

Osservazione importante

Come nel caso dei termini, la verità di una formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ in una struttura $\mathcal{A}$ mediante un'assegnazione $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$ *dipende solo dai valori che l'assegnazione dà alle variabili che* **occorrono libere** *in* φ.

Un esempio

Consideriamo il linguaggio $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binario e la formula φ

$$\exists z(P(x,z) \wedge P(z,y)).$$

Sia $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ e consideriamo l'assegnazione $x/2, y/4, z/4$.
Osserviamo che solo x, y sono variabili libere in φ, mentre z non lo è.

Per definizione, $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$ se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$,

ossia se e solo se in $\mathbb{N}$ è vero che

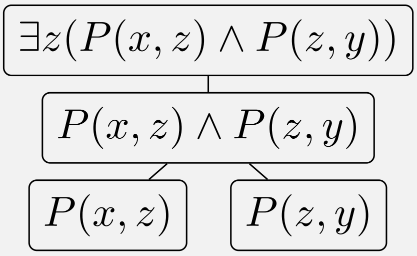
$$2 < n \quad \text{e} \quad n < 4 \quad \textit{per qualche } n \in \mathbb{N}.$$

Per $n = 3$ si ha che effettivamente $2 < n < 4$,
quindi $\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/3]$, da cui
$\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/4, z/4]$.

Ad essere più precisi, la definizione ricorsiva che abbiamo visto permette di "scaricare" il problema di determinare se φ è vera in $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione $x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n$ sulle sottoformule di φ che compaiono nel suo albero sintattico, fino a giungere alle sue sottoformule atomiche (quelle che compaiono nelle foglie dell'albero): queste vengono valutate nella struttura mediante l'assegnazione che man mano si è creata, e a sua volta questo permette, risalendo lungo l'albero, di determinare se è vero o no che $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$.

Riprendiamo l'esempio precedente...

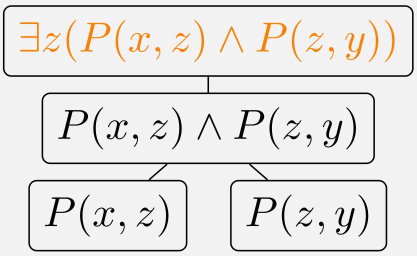
È vero che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))\,[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?



Riprendiamo l'esempio precedente...

È vero che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))\,[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$$\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$$



Riprendiamo l'esempio precedente...

È vero che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))\,[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$\exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))$

$P(x,z) \wedge P(z,y)$

$P(x,z)$ $\quad$ $P(z,y)$

$$\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$$

se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$$

Riprendiamo l'esempio precedente...

È vero che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))\,[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$\exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))$

$P(x,z) \wedge P(z,y)$

$P(x,z)$ $\quad$ $P(z,y)$

$$\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$$

se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$$

se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Riprendiamo l'esempio precedente. . .

È vero che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \land P(z,y))\,[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$\exists z(P(x,z) \land P(z,y))$

$P(x,z) \land P(z,y)$

$P(x,z)$ $P(z,y)$

$\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \land P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$

se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \land P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$
$2 < n$ e $n < 4$

Riprendiamo l'esempio precedente. . .

È vero che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \land P(z,y))\,[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$\exists z(P(x,z) \land P(z,y))$

$P(x,z) \land P(z,y)$

$P(x,z)$ $P(z,y)$

$\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \land P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$

se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \land P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

ponendo $n = 3$ è vero che
$2 < 3$ e $3 < 4$

Riprendiamo l'esempio precedente...

È vero che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))\,[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

- $\exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))$
  - $P(x,z) \wedge P(z,y)$
    - $P(x,z)$
    - $P(z,y)$

$$\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$$

se e solo se

per qualche $n \in \mathbb{N}$
$$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$$

se e solo se

è vero che per qualche $n \in \mathbb{N}$
$2 < n$ e $n < 4$

Riprendiamo l'esempio precedente...

È vero che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))\,[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

- $\exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))$
  - $P(x,z) \wedge P(z,y)$
    - $P(x,z)$
    - $P(z,y)$

$$\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$$

se e solo se

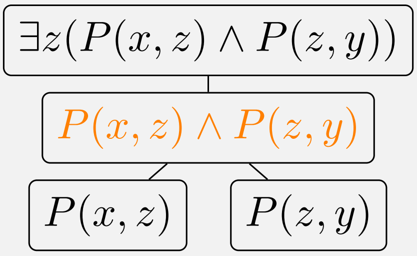
per qualche $n \in \mathbb{N}$
$$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$$

se e solo se

è vero che per qualche $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Riprendiamo l'esempio precedente. . .

È vero che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))\,[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?



$$\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$$

se e solo se

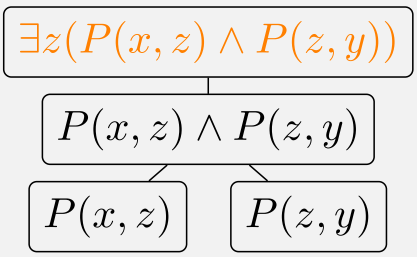
è vero che per qualche $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

è vero che per qualche $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Riprendiamo l'esempio precedente. . .

È vero che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))\,[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?



$$\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$$

se e solo se

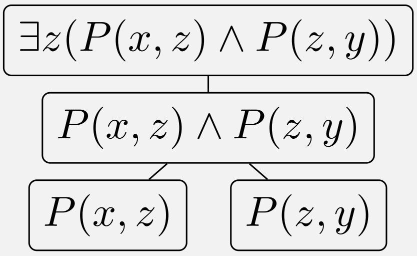
è vero che per qualche $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

è vero che per qualche $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Riprendiamo l'esempio precedente...

È vero che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))\,[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?



$$\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$$

se e solo se

è vero che per qualche $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

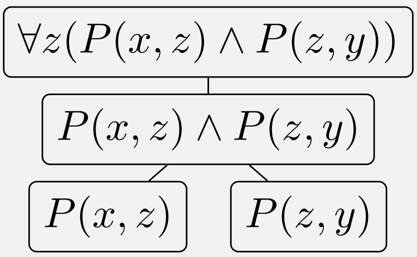
se e solo se

è vero che per qualche $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Quindi si ha che $\mathcal{A} \models \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$.

Un altro esempio

È vero che $\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?



Un altro esempio

È vero che $\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$$\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$$

- $\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))$
  - $P(x,z) \wedge P(z,y)$
    - $P(x,z)$
    - $P(z,y)$

Un altro esempio

È vero che $\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$$\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$$

se e solo se

per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$$

- $\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))$
  - $P(x,z) \wedge P(z,y)$
    - $P(x,z)$
    - $P(z,y)$

Un altro esempio

È vero che $\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))$

$P(x,z) \wedge P(z,y)$

$P(x,z)$ $\quad$ $P(z,y)$

$\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$

se e solo se

per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Un altro esempio

È vero che $\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))$

$P(x,z) \wedge P(z,y)$

$P(x,z)$ $\quad$ $P(z,y)$

$\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$

se e solo se

per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

per ogni $n \in \mathbb{N}$
$2 < n$ e $n < 4$

Un altro esempio

È vero che $\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$$\boxed{\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))}$$
$$\boxed{P(x,z) \wedge P(z,y)}$$
$$\boxed{P(x,z)} \quad \boxed{P(z,y)}$$

$\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$

se e solo se

per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

ma ponendo ad esempio $n = 5$ si ha che
$2 < 5$ ma non vale $5 < 4$

Un altro esempio

È vero che $\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$$\boxed{\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))}$$
$$\boxed{P(x,z) \wedge P(z,y)}$$
$$\boxed{P(x,z)} \quad \boxed{P(z,y)}$$

$\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$

se e solo se

per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

non è vero che per ogni $n \in \mathbb{N}$
$2 < n$ e $n < 4$

Un altro esempio

È vero che $\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))$

$P(x,z) \wedge P(z,y)$

$P(x,z)$ $P(z,y)$

$\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$

se e solo se

per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

non è vero che per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Un altro esempio

È vero che $\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))$

$P(x,z) \wedge P(z,y)$

$P(x,z)$ $P(z,y)$

$\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$

se e solo se

non è vero che per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

non è vero che per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Un altro esempio

È vero che $\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))$

$P(x,z) \wedge P(z,y)$

$P(x,z)$ $\quad$ $P(z,y)$

$\mathcal{A} \not\models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$

se e solo se

non è vero che per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

non è vero che per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Un altro esempio

È vero che $\mathcal{A} \models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$, dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$?

$\forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))$

$P(x,z) \wedge P(z,y)$

$P(x,z)$ $\quad$ $P(z,y)$

$\mathcal{A} \not\models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$

se e solo se

non è vero che per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models (P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/n]$

se e solo se

non è vero che per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A} \models P(x,z)[x/2, y/4, z/n]$ e $\mathcal{A} \models P(z,y)[x/2, y/4, z/n]$

Quindi si ha che $\mathcal{A} \not\models \forall z(P(x,z) \wedge P(z,y))[x/2, y/4, z/4]$.

Esercizio

Sia $L = \{P, f, c\}$ con P simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Determinare se

$$\langle \mathbb{R}, \leq, \cdot, \sqrt{2} \rangle \models \forall x(f(y,x) = y \wedge \exists z(P(y,z) \wedge P(z, f(c,c))))[y/0].$$

Nel caso di formule semplici, si può determinare se $\mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ "interpretando" la formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathcal{A}$ per capirne il significato.

Sia $L = \{R, f\}$ un linguaggio del prim'ordine con R simbolo di relazione binario ed f simbolo di funzione binario, consideriamo la formula $\varphi(x,y)$

$$\exists z(f(z,z) = x) \wedge \exists w(R(x,w) \wedge R(w,y))$$

e la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <, + \rangle$. L'interpretazione di $\varphi(x,y)$ in $\mathcal{A}$ è

Esiste $z \in \mathbb{N}$ tale che $z + z = x$ ed esiste $w \in \mathbb{N}$ tale che ($x < w$ e $w < y$)

ovvero

> "*x è pari* e *x e y sono numeri non consecutivi con x più piccolo di y.*"

Quindi si ha ad esempio $\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/6]$ ma $\mathcal{A} \not\models \varphi[x/2, y/3]$ e $\mathcal{A} \not\models \varphi[x/3, y/6]$.

Esercizio

Siano L e $\varphi(x, y)$ come nell'esercizio precedente. Consideriamo la L-struttura $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, <, + \rangle$. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathcal{B} \models \varphi[x/a, y/b] \text{ se e solo se } a < b.$$

Interpretando analogamente a prima la formula $\varphi(x, y)$ in $\mathcal{B}$ si ottiene

Esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che $z + z = x$ ed esiste $w \in \mathbb{R}$ tale che $(x < w$ e $w < y)$.

In $\mathbb{R}$ la prima parte è vera per ogni possibile valore di x (la metà di un numero reale è ancora un numero reale). La seconda parte è invece vera se e solo se il valore assegnato ad x è minore del valore assegnato a y (quando $x < y$ basta considerare $w = \frac{x+y}{2}$ per avere $x < w < y$). Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \models \varphi[x/a, y/b] \quad &\text{se e solo se} \quad \mathcal{B} \models \exists w (R(x, w) \wedge R(w, y))[x/a, y/b] \\ &\text{se e solo se} \quad a < b. \end{aligned}$$

Verità di un enunciato

Dato che la verità di una formula in una struttura mediante un'assegnazione *dipende solo dai valori dati dall'assegnazione alle sue variabili libere*, allora per determinare la verità di un enunciato, ovvero di una formula che non ha variabili libere, NON è necessario avere a disposizione nessuna assegnazione.

Per questa ragione, quando φ è un enunciato che risulta vero in una struttura $\mathcal{A}$ scriveremo semplicemente

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

e diremo che φ è **vero** (o **soddisfatto**) **in** $\mathcal{A}$, o che $\mathcal{A}$ è un **modello di** φ, o ancora che $\mathcal{A}$ **soddisfa** φ.

La relazione $\models$ (che è una relazione tra strutture ed enunciati) si chiama anche **relazione di soddisfazione**. La scrittura $\mathcal{A} \not\models \varphi$ significa che $\mathcal{A}$ NON è un modello di φ (equivalentemente: $\mathcal{A}$ è un modello di $\neg\varphi$).

Esempio

Sia $L = \{P, f, c\}$ con P simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Consideriamo l'enunciato σ

$$\forall x \forall y\, ((P(c, y) \wedge f(x, x) = y) \to P(x, y)).$$

Interpretando σ nella L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <, +, 2 \rangle$ si ottiene

Per ogni $x, y \in \mathbb{N}$ (se $(2 < y$ e $x + x = y)$ allora $x < y)$,

ovvero

> *"La metà di un numero pari $n \in \mathbb{N}$ che sia maggiore di 2 è minore di n stesso".*

Questo è vero perché se $n = 2k$ e $n > 2$, allora $k > 1$ e quindi $n = 2k = k + k > k$. Perciò $\mathcal{A} \models \sigma$.

Non abbiamo avuto bisogno di nessuna assegnazione per valutare σ in $\mathcal{A}$!

Esercizio

Siano L e σ come nell'esempio precedente. Dire se σ è vero in ciascuna delle seguenti L-strutture.

- $\langle \mathbb{Z}, <, +, -1 \rangle$
- $\langle \mathbb{Q}, \leq, \cdot, 0 \rangle$
- $\langle \mathbb{R}, \geq, \cdot, 0 \rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, \geq, +, 2 \rangle$

Insiemi di verità

Quando una L-formula contiene variabili libere ha senso chiedersi quali assegnazioni in una data L-struttura $\mathcal{A}$ la rendano vera (in $\mathcal{A}$).

Definizione

Sia L un linguaggio, φ una L-formula con $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\} \neq \emptyset$ e $\mathcal{A}$ una L-struttura. L'**insieme di verità** di φ in $\mathcal{A}$ è l'insieme

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]\}.$$

In altre parole, $\varphi(A)$ è l'insieme delle n-uple $(a_1, \dots, a_n)$ di elementi del dominio di $\mathcal{A}$ che rendono vera φ in $\mathcal{A}$ quando vengano assegnati alle variabili libere di φ. Si osservi che il numero di variabili libere determina l'arietà della relazione $\varphi(A)$: se φ ha un'unica variabile libera allora $\varphi(A)$ è un sottoinsieme di A, se φ ha due variabili libere allora $\varphi(A)$ è un sottoinsieme di A^2 (ovvero una relazione binaria su A), se φ ha tre variabili libere allora $\varphi(A)$ è un sottoinsieme di A^3 (ovvero una relazione ternaria su A), e così via.

Esempi

Sia $L = \{f, a\}$ con f simbolo di funzione binaria e a simbolo di costante. Consideriamo la formula φ

$$\exists x(f(x, y) = a).$$

Si osservi che $FV(\varphi) = \{y\}$. Consideriamo ora la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$. L'insieme di verità $\varphi(\mathcal{A})$ di φ in $\mathcal{A}$ sarà un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ (poiché φ ha un'unica variabile libera). Più precisamente

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{k \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{A} \models \exists x(f(x, y) = a)\,[y/k]\},$$

ovvero $\varphi(\mathcal{A})$ è l'insieme di tutti i $k \in \mathbb{Z}$ per cui esiste un $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x + k = 0$. Questo è vero per ogni intero k (basta porre $x = -k$), per cui $\varphi(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}$.

Considerando invece $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$, si ha che

$$\varphi(\mathcal{B}) = \{0\}.$$

Sia ora $L = \{f, g\}$ con f e g simboli di funzione binari e consideriamo la formula φ

$$f(x,x) = g(x,x).$$

In questo caso $FV(\varphi) = \{x\}$, quindi $\varphi(\mathcal{A})$ sarà un sottoinsieme del dominio di $\mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ si ha che $r \in \varphi(\mathcal{A})$ se e solo se $\mathcal{A} \models (f(x,x) = g(x,x))[x/r]$ se e solo se $r + r = r \cdot r$ se e solo se $r^2 = 2r$. Risolvendo (in $\mathbb{R}$) quest'ultima equazione si ottiene

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{0, 2\}.$$

Sia $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario e consideriamo la formula φ

$$\exists z(f(x,z) = y).$$

Si ha $FV(\varphi) = \{x, y\}$, per cui $\varphi(\mathcal{A})$ sarà un sottoinsieme di A^2, ovvero una relazione binaria sul dominio di $\mathcal{A}$.

Sia $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$. Allora $(n,m) \in \varphi(\mathcal{A})$ se e solo se $\mathcal{A} \models \exists z(f(x,z) = y)[x/n, y/m]$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $n + k = m$. Questo accade esattamente quando $n \leq m$, perciò

$$\varphi(\mathcal{A}) = \left\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\right\},$$

ovvero l'insieme di verità di φ in $\mathcal{A}$ è la relazione di minore o uguale $\leq$.

Considerando invece $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ si ha che $(n,m) \in \varphi(\mathcal{B})$ se e solo se $m = n \cdot k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, ovvero

$$\varphi(\mathcal{B}) = \left\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid m \text{ è un multiplo di } n\right\}.$$

Dunque l'insieme di verità di φ in $\mathcal{B}$ è la relazione di divisibilità $|$.

Sia $L = \{P, f, c\}$ con P simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Consideriamo la formula φ

$$P(f(x,x), c)$$

e notiamo che $FV(\varphi) = \{x\}$. Se $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, <, +, 0 \rangle$, allora $k \in \varphi(\mathcal{A})$ se e solo se $k + k < 0$: questo è vero per $k < 0$ e falso per $k \geq 0$, per cui

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{k \in \mathbb{Z} \mid k < 0\},$$

cioè $\varphi(\mathcal{A})$ è l'insieme degli interi negativi.

Se invece $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, <, \cdot, 0 \rangle$, allora $\varphi(\mathcal{B})$ è l'insieme vuoto: infatti non c'è nessun intero il cui quadrato sia minore di 0.

Sia $L = \{P, f\}$ con P simbolo di relazione binario e f simbolo di funzione binario. Consideriamo la formula φ

$$P(y,z) \wedge \exists x \neg(f(y,x) = y) \wedge \exists x (f(x,x) = z).$$

e osserviamo che $FV(\varphi) = \{y, z\}$. L'insieme di verità di φ in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <, \cdot \rangle$ è l'insieme delle coppie $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tali che

Sia $L = \{P, f\}$ con P simbolo di relazione binario e f simbolo di funzione binario. Consideriamo la formula φ

$$P(y, z) \land \exists x \neg(f(y, x) = y) \land \exists x(f(x, x) = z).$$

e osserviamo che $FV(\varphi) = \{y, z\}$. L'insieme di verità di φ in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <, \cdot \rangle$ è l'insieme delle coppie $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tali che

- $n < m$

Sia $L = \{P, f\}$ con P simbolo di relazione binario e f simbolo di funzione binario. Consideriamo la formula φ

$$P(y, z) \land \exists x \neg(f(y, x) = y) \land \exists x(f(x, x) = z).$$

e osserviamo che $FV(\varphi) = \{y, z\}$. L'insieme di verità di φ in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <, \cdot \rangle$ è l'insieme delle coppie $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tali che

- $n < m$
- esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $n \cdot k \neq n$,

Sia $L = \{P, f\}$ con P simbolo di relazione binario e f simbolo di funzione binario. Consideriamo la formula φ

$$P(y, z) \wedge \exists x \neg (f(y, x) = y) \wedge \exists x (f(x, x) = z).$$

e osserviamo che $FV(\varphi) = \{y, z\}$. L'insieme di verità di φ in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <, \cdot \rangle$ è l'insieme delle coppie $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tali che

- $n < m$
- esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $n \cdot k \neq n$, ovvero $n \neq 0$

Sia $L = \{P, f\}$ con P simbolo di relazione binario e f simbolo di funzione binario. Consideriamo la formula φ

$$P(y, z) \wedge \exists x \neg (f(y, x) = y) \wedge \exists x (f(x, x) = z).$$

e osserviamo che $FV(\varphi) = \{y, z\}$. L'insieme di verità di φ in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <, \cdot \rangle$ è l'insieme delle coppie $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tali che

- $n < m$
- esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $n \cdot k \neq n$, ovvero $n \neq 0$
- m è un quadrato perfetto.

Sia $L = \{P, f\}$ con P simbolo di relazione binario e f simbolo di funzione binario. Consideriamo la formula φ

$$P(y, z) \wedge \exists x \neg (f(y, x) = y) \wedge \exists x (f(x, x) = z).$$

e osserviamo che $FV(\varphi) = \{y, z\}$. L'insieme di verità di φ in $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <, \cdot \rangle$ è l'insieme delle coppie $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tali che

- $n < m$
- esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $n \cdot k \neq n$, ovvero $n \neq 0$
- m è un quadrato perfetto.

Quindi

$$\varphi(\mathcal{A}) = \left\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \neq 0 \text{ e } m \text{ è un quadrato perfetto maggiore di } n\right\}.$$

Esercizi

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f e g simboli di funzione binari e c simbolo di costante e sia $\varphi(x, y)$ la formula

$$\exists z (f(f(g(z, z), g(x, z)), y) = c)$$

Consideriamo la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0 \rangle$.

- È vero che $\mathcal{A} \models \varphi[x/-2, y/1]$?
- È vero che $\mathcal{A} \models \varphi[x/1, y/1]$?
- Determinare l'insieme di verità in $\mathcal{A}$ di $\varphi(x, y)$.

Dati $b, c \in \mathbb{R}$, si ha che $\mathcal{A} \models \varphi[b, c]$ se e solo se l'equazione $z^2 + bz + c = 0$ ammette una soluzione (che sia un numero reale). Quindi $\mathcal{A} \models \varphi[x/-2, y/1]$, $\mathcal{A} \not\models \varphi[x/1, y/1]$ e

$$\varphi(\mathcal{A}) = \left\{(b, c) \in \mathbb{R}^2 \mid b^2 - 4c \geq 0\right\}.$$

Sia $L = \{P, f, g, c\}$ un linguaggio dove P è un simbolo di relazione unario, f e g sono simboli di funzione binari e c un simbolo di costante. Sia $\mathcal{A}$ la L-struttura $\langle \mathbb{R}, \mathbb{Z}, +, \cdot, 1 \rangle$. Determinare l'insieme di verità in $\mathcal{A}$ delle seguenti formule:

- $f(x, f(c, f(c, c))) = y \wedge P(y)$
- $\exists z(f(x, g(z, z)) = y)$
- $P(x) \wedge (g(x, x) = f(c, c))$
- $\forall y(f(x, y) = y) \vee (x = c)$
- $P(g(x, x)) \wedge P(f(x, c))$
- $\exists y(P(y) \wedge P(f(x, y)))$

Sia $L = \{Q, f\}$ con Q simbolo di relazione binario e f simbolo di funzione binario. Sia φ la L-formula

$$\forall x \exists y(\neg Q(x, z) \vee Q(f(y, x), z)).$$

Notiamo che $FV(\varphi) = \{z\}$. Determinare l'insieme di verità di φ in ciascuna delle seguenti strutture:

- $\langle \mathbb{R}, <, + \rangle$
- $\langle \mathbb{N}, |, \cdot \rangle$
- $\langle \mathbb{Q}, \geq, - \rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, \leq, \cdot \rangle$