

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: _____

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia P la proposizione $A \wedge B \rightarrow C$. Allora 2 punti

- ☐ Se i è un'interpretazione tale che $i(C) = 0$ allora necessariamente $i(A) = i(B) = 0$.
- ☐ P è conseguenza logica di $A \rightarrow C$.
- ☐ P è una tautologia.
- ☐ P è una contraddizione.

(b) Siano B e C insiemi tali che $C \subseteq B$. Allora possiamo concludere con certezza che 2 punti

- ☐ B e C non possono essere disgiunti.
- ☐ $(B \cup C) \setminus (B \setminus C) = C$.
- ☐ se $|B| \leq |C|$ allora $|B| = |C|$.
- ☐ se $|B| = |C|$ allora $B \setminus C = \emptyset$.

(c) Sia R una relazione binaria su un insieme non vuoto A . 2 punti

- ☐ Se R è riflessiva, allora non può essere anche irreflessiva.
- ☐ Se R è una relazione di equivalenza, allora è anche un preordine.
- ☐ Se R è un ordine e S è un'altra relazione binaria su A tale che $R \subseteq S$, allora S è riflessiva.
- ☐ Se R è antisimmetrica, allora non può essere anche simmetrica.

(d) Consideriamo le funzioni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x^2 + y$ 2 punti
e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 2x)$. Allora

- ☐ la funzione f è iniettiva.
- ☐ $f \circ g(x) = 2x(x + 1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ g è iniettiva e f è l'inversa di g .
- ☐ Esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) = (5, 10)$.

- (e) Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente “ x è un numero primo” utilizzando il linguaggio $\cdot, 1$ e relativamente alla struttura $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$ 2 punti

- ☐ $\neg(x = 1) \vee \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$
- ☐ $\neg(x = 1) \wedge \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$
- ☐ $\exists x \neg(x = 1) \vee \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$
- ☐ $\forall x (\neg(x = 1) \vee \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1))$

- (f) Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x, y)$ formule del prim'ordine e σ un enunciato. 2 punti

- ☐ Se \mathcal{A} è una struttura tale che $\mathcal{A} \models \neg \exists x \varphi(x)$, allora $\mathcal{A} \models \forall x (\varphi(x) \rightarrow \sigma)$.
- ☐ $\forall x \exists y \psi(x, y) \models \exists y \forall x \psi(x, y)$
- ☐ $\neg \exists x \neg \varphi(x) \models \forall x \varphi(x)$
- ☐ Se \mathcal{B} è una struttura tale che $\mathcal{B} \models \exists y \varphi(y)$, allora $\mathcal{B} \models \exists y (\neg \sigma \vee \varphi(y))$.

- (g) Sia $L = \{P, f, g, a\}$ un linguaggio del prim'ordine con P simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione unario, g simbolo di funzione binario e a simbolo di costante. Quali dei seguenti sono L -termini? 2 punti

- ☐ $g(f(f(g(a, a), a)), a)$
- ☐ $f(g(g(a, f(a)), g(f(a), a)))$
- ☐ $P(a, f(a))$
- ☐ $g(g(f(a), f(a)), g(f(a), f(a)))$

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2

9 punti

Sia $L = \{P, R, a\}$ con P ed R simboli di relazione binaria e a simbolo di costante. Consideriamo la L -struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \geq, |, 3 \rangle$, dove $|$ è l'usuale relazione di divisibilità.

Sia φ la formula

$$(P(x, y) \wedge R(a, y))$$

e ψ la formula

$$(P(x, y) \rightarrow R(a, y))$$

1. Determinare se:

- $\mathcal{A} \models \varphi[x/-1000, y/-2000]$,
- $\mathcal{A} \models \varphi[x/-1000, y/-3000]$,
- $\mathcal{A} \models \exists y \varphi[x/-1000, y/-999]$.

2. Determinare se $\mathcal{A} \models \forall x \exists y \varphi[x/0, y/0]$.

3. Determinare se:

- $\mathcal{A} \models \psi[x/-1000, y/-2000]$,
- $\mathcal{A} \models \psi[x/-1000, y/-3000]$,
- $\mathcal{A} \models \forall y \psi[x/-1000, y/-998]$.

4. Determinare se $\mathcal{A} \models \exists x \forall y \psi[x/-1, y/3]$.

5. Determinare se $\forall x \exists y \varphi \models \exists x \forall y \psi$.

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3

9 punti

Sia A un insieme non vuoto e $f: A \rightarrow A$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle A, f \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{f\}$ con un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. f è suriettiva
2. se f è suriettiva, allora f è iniettiva
3. $f \circ f$ è biettiva
4. ogni elemento ha almeno due preimmagini distinte.