Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $h(z) = \frac{2z+8}{2} - z$ per ogni $z \in \mathbb{Q}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ h è suriettiva.
- ☐ h è iniettiva.
- ☐ $h(z) = 2$ per qualche $z \in \mathbb{Q}$.
- ■ $h(z) = 4$ per ogni $z \in \mathbb{Q}$.

(b) Dati due insiemi A e B, indichiamo con A^B l'insieme delle funzioni da B in A. Sia C un insieme non vuoto di cardinalità finita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ C^C è un insieme infinito.
- ☐ C^C è certamente in biezione con $\mathcal{P}(A)$.
- ■ $\mathbb{N}^C$ è un insieme infinito numerabile.
- ☐ $C^{\mathbb{N}}$ è necessariamente più che numerabile.

(c) Siano C, D, A lettere proposizionali e R una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

C	D	A	R
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**

- ☐ R $\models$ D $\vee \neg$A $\vee \neg$C

- ☐ R è insoddisfacibile.
- ■ ¬R non è valido.
- ☐ D → A ⊨ ¬R

(d) Sia $L = \{Q\}$ un linguaggio del prim'ordine con Q simbolo di relazione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\neg\exists z \forall w\, Q(z,w)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$? — 2 punti

- ☐ "Non c'è un numero reale più piccolo di tutti gli altri."
- ■ "Ci sono numeri reali arbitrariamente grandi."
- ■ "I numeri reali non hanno un massimo."
- ☐ "Non c'è un numero reale più grande di w."

(e) Sia C un insieme non vuoto e sia $L = \{T\}$ un linguaggio del prim'ordine con T simbolo di relazione binaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle C, T \rangle$, l'affermazione: "T è simmetrica"? — 2 punti

- ■ $\forall x \forall y\, (R(x,y) \to R(y,x))$
- ☐ $\forall x \forall y\, (x = y \to y = x)$
- ☐ $\forall x \forall y\, (R(x,y) = R(y,x))$
- ☐ $\forall x \forall y\, (R(x,y) \wedge R(y,x))$

(f) Siano D, A sottoinsiemi di C e sia $h \colon C \to C$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. — 2 punti

- ☐ Se $h[D] \subseteq h[A]$ allora si deve avere che $D \supseteq A$.
- ■ $h^{-1}[D \cap A] = h^{-1}[D] \cap h^{-1}[A]$.
- ■ $D \subseteq h^{-1}[h[D]]$.
- ☐ Se $D \neq A$ allora certamente accade che $h[D] \neq h[A]$.

(g) Siano S e T formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? — 2 punti

- ■ Se S è insoddisfacibile, allora ¬S è una tautologia.
- ■ ¬(T ∨ S) ≢ ¬T ∨ ¬S
- ☐ Se S non è una tautologia allora S è certamente insoddisfacibile.
- ■ T ≢ S se e solo se $i(\mathrm{T}) \neq i(\mathrm{S})$ per qualche interpretazione i.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{T, h, e\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario T, un simbolo di funzione binario h e un simbolo di costante e. Sia φ la formula

$$(\neg\exists w\,(h(w,w) = z) \to T(h(x,e), z)).$$

Consideriamo la L-struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 1\rangle$.

1. Dire se φ è un enunciato oppure no e, nel secondo caso, cerchiare le occorrenze libere di variabili.
2. È vero che $\mathcal{N} \models \exists w\,(h(w,w) = z)[z/k, w/l]$ se e solo se k è un numero naturale pari?
3. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[z/1, w/0, x/0]$?
4. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[z/2, w/1, x/0]$?
5. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[z/5, w/1, x/5]$?
6. È vero che $\mathcal{N} \models \forall z\,\varphi[z/0, w/0, x/0]$?
7. È vero che $\mathcal{N} \models \forall z\,\varphi[z/0, w/0, x/5]$?
8. È vero che $\mathcal{N} \models \exists x \forall z\,\varphi$?
9. È vero che $\mathcal{N} \models \forall x \forall z\,\varphi$?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. Non è un enunciato. Le occorrenze libere di variabili sono tutte le occorrenze di z, x. Concludiamo che in tutti i punti dell'esercizio è irrilevante controllare l'assegnamento della variabile w.

2. Si è vero poiché la formula in questione asserisce che il numero assegnato a z è ottenuto sommando con se stesso un qualche numero naturale w.

3. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "se z è dispari allora si ha che $x + 1 \leq z$". Se a x viene assegnato 0 e a z viene assegnato 1, allora si ha che l'interpretazione di φ è vera in $\mathcal{N}$: infatti, l'implicazione è vera dato che lo è la sua conclusione (che interpretata nella struttura con l'assegnazione data diventa $0 + 1 \leq 1$).

4. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "se z è dispari allora si ha che $x + 1 \leq z$". Se ad z assegniamo 2 la premessa dell'implicazione è falsa e quindi l'implicazione è vera.

5. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "se z è dispari allora si ha che $x + 1 \leq z$". Se a z viene assegnato 5 e anche a x viene assegnato 5, la premessa dell'implicazione risulta vera (in quanto 5 è effettivamente dispari), ma la sua conclusione è falsa dato che $5 + 1 = 6 > 5$. Quindi l'implicazione è falsa.

6. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "per ogni numero naturale z, se z è dispari allora $x + 1 \leq z$". Se a x viene assegnato 0, l'affermazione risulta vera perché qualunque numero naturale dispari è certamente maggiore o uguale di $0 + 1$, ovvero di 1.

7. Se invece assegniamo a x il numero 5, allora l'interpretazione della formula diventa "ogni numero dispari è maggiore o uguale a $5+1$". Questo è falso perché prendendo $z = 3$ si ha che z è un numero dispari (premessa dell'implicazione vera) ma $3 < 6$ (conclusione dell'implicazione falsa).

8. Per quanto visto ai punti precedenti, l'assegnamento che dà a z il valore 0 mostra la verità in $\mathcal{N}$ dell'enunciato $\exists x \forall z\, \varphi$.

9. Per quanto visto ai punti precedenti, se prendiamo $z = 3$ e $x = 5$ si ha che l'implicazione φ risulta falsa: questo mostra la falsità in $\mathcal{N}$ dell'enunciato $\forall x \forall z\, \varphi$.

Esercizio 3 9 punti

Sia C un insieme non vuoto, siano D, A sottoinsiemi di C e sia $h\colon C \to C$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle C, D, A, h\rangle$ mediante il linguaggio $L = \{D, A, h\}$ con due simboli di predicato unari ed un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. h è biettiva
2. $h \circ h$ è suriettiva
3. $h[A] \subseteq D$
4. $h[D] \cup h[A] = C$.

Soluzione: 1. h è biettiva: $\forall x \forall y(\neg(x = y) \to \neg(h(x) = h(y))) \wedge \forall y \exists x(h(x) = y)$

2. $h \circ h$ è suriettiva: $\forall y \exists x(h(h(x)) = y)$

3. $h[A] \subseteq D$: $\forall x(A(x) \to D(h(x)))$

4. $h[D] \cup h[A] = C$: $\forall y \exists x(h(x) = y \wedge (D(x) \vee A(x)))$