Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta 14 Luglio 2020

Esercizio 1. I circoli di tennis "Laver" e "Rosewall" si sfidano su un match di 7 incontri: 4 singolari maschili, 2 singolari femminili ed un doppio misto. Il doppio misto è giocato da tennisti e tenniste già selezionate per i singoli.

1. Il circolo "Laver" ha 8 tennisti e 5 tenniste di buon livello tra cui selezionare la squadra. Quante sono le squadre possibili tra cui il "Laver" deve sceglierne una?
2. Formate le squadre, i partecipanti verranno accoppiati casualmente (tennisti con tennisti e tenniste con tenniste) per i 6 singolari e un tennista ed una tennista per squadra verranno sorteggiati per il doppio misto. Quanti sono teoricamente i possibili accoppiamenti fra le due squadre?
3. I sette incontri vengono disputati consecutivamente: prima i 4 singoli maschili, poi i 2 singoli femminili, poi il doppio. Quanti sono i possibili ordinamenti dei sette incontri?

Soluzione.

1. Il "Laver" deve scegliere 4 tennisti fra 8 e 2 tenniste fra 5. Poiché le scelte sono indipendenti il numero totale è
$$\binom{8}{4} \cdot \binom{5}{2} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 700.$$
2. Ci sono $4! = 24$ modi di accoppiare i tennisti fra di loro e $2! = 2$ modi per le tenniste. Inoltre ogni squadra può scegliere $4 \cdot 2 = 8$ diverse coppie miste che quindi daranno luogo ad $8^2 = 64$ possibili accoppiamenti per il doppio. Poichè tutte queste scelte sono fra loro indipendenti il totale dei possibili abbinamenti è
$$24 \cdot 2 \cdot 64 = 3072.$$
3. Ci sono $4! = 24$ per ordinare i singolari maschili e $2! = 2$ per ordinare i singolari femminili. Siccome l'unico incontro di doppio verrà giocato per ultimo il totale degli ordinamenti è $24 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.

Esercizio 2.

1. Risolvere la congruenza $15X \equiv 6 \mod 33$ In $\mathbb{Z}_{33}$.
2. Verificare che il gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_{11}^\times$ delle classi invertibili modulo 11 è ciclico e generato da $[2]_{11}$. Determinare tutti gli altri generatori.
3. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{Z}_{11}^\times \to \mathbb{Z}_{20}$, $f([2]_{11}^k) = [2k]_{20}$ è un omomorfismo iniettivo.

Soluzione.

1. Poiché $3 = \mathrm{MCD}(15, 33)$ divide 6 la congruenza si riduce a $5X \equiv 2 \mod 11$ che ha $\overline{7}$ come unica soluzione modulo 11. Quindi le soluzioni in $\mathbb{Z}_{33}$ sono $\{[7]_{33}, [18]_{33}, [29]_{33}\}$.

2. Il calcolo diretto delle potenze $[2]_{11}^k$ mostra che $[2]_{11}$ genera $\mathbb{Z}_{11}^\times$. Dunque i generatori sono le potenze $[2]_{11}^k$ con $\mathrm{MCD}(k, 10) = 1$, ovvero

$$[2]_{11}, \quad [2]_{11}^3 = [8]_{11}, \quad [2]_{11}^7 = [7]_{11}, \quad [2]_{11}^9 = [6]_{11}.$$

3. Siccome il periodo di $[2]_{11}$ è 10 per controllare che f è ben definita basta osservare che se 10 divide $r - s$ allora 20 divide $2r - 2s = 2(r - s)$. È un omomorfismo perché

$$f([2]_{11}^r \cdot [2]_{11}^s) = f([2]_{11}^{r+s}) = \overline{2(r+s)} = \overline{2r} + \overline{2s} = f([2]_{11}^r) + f([2]_{11}^s).$$

ed è iniettivo perché 20 divide $2k$ se e soltanto se 10 divide k, cosicché $\ker(f) = \{[1]_{11}\}$.