Corso di Studi in Informatica
Matematica Discreta

Prova scritta 23 Gennaio 2020 – Versione A

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA ....

Rispondere a ciascuna domanda, motivando adeguatamente le risposte. Per essere sufficiente un compito deve raggiungere almeno 18 punti.

Esercizio 1.

1. (Punti 3) Calcolare il numero degli anagrammi della parola

   PARALLELEPIPEDO.

2. (Punti 4) Si consideri l'insieme $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E, F, 1, 2, 3, 4\}$ i cui elementi sono lettere e cifre. Calcolare il numero degli ordinamenti di $\mathcal{A}$ in cui compaiono solo cifre nei due posti centrali.

3. (Punti 4) Sia $\mathcal{A}$ l'insieme del punto precedente. Calcolare il numero dei sottoinsiemi di A costituiti da 2 lettere e 3 cifre.

Soluzione.

1. La parola PARALLELEPIPEDO è costituita da 15 lettere di cui la A ripetuta 2 volte, la E 3 volte, la L 3 volte e la P 3 volte. Dunque applicando la formula si ottiene immediatamente
$$\frac{15!}{(3!)^3 \cdot 2!} = 3,027,024,000.$$

2. Poiché le cifre a disposizione sono 4 ci sono $4 \cdot 3 = 12$ modi di piazzare 2 cifre nei posti centrali. Gli altri 8 simboli possono essere ordinati a piacere nei posti restanti per cui il totale degli ordinamenti voluti è
$$12 \cdot 8! = 483,840.$$

3. Ci sono $\binom{6}{2}$ scelte di 2 lettere fra le 6 a disposizione e $\binom{4}{3}$ modi di scegliere 3 lettere fra 4. Quindi il totale dei sottoinsiemi come da richiesta è
$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 15 \cdot 4 = 60.$$

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 2. Si considerino le seguenti permutazioni in S_8:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (Punti 3) Scrivere σ, τ, $(\sigma \circ \tau)^{-1}$ come prodotto di cicli disgiunti e determinarne il periodo.
2. (Punti 4) Scrivere $(\sigma \circ \tau)^{9074}$ come prodotto di cicli disgiunti.
3. (Punti 4) Dimostrare che $H = \{\alpha \in S_8 : \alpha \circ \sigma = \sigma \circ \alpha\}$ è un sottogruppo di S_8. Esibire un elemento in H diverso dall'identità e un elemento che non appartiene ad H.

Soluzione.

1. Si ha
$$\sigma = (1428)(35)(67), \quad \tau = (256)(378), \quad (\sigma \circ \tau)^{-1} = (17586324).$$
Dunque σ ha periodo 4, τ ha periodo 3, $(\sigma \circ \tau)^{-1}$ ha periodo 8

2. Siccome $\sigma \circ \tau = (14236857)$ ha periodo 8, si ha
$$(\sigma \circ \tau)^{9074} = (\sigma \circ \tau)^{8 \cdot 1134 + 2} = (\sigma \circ \tau)^2 = (1265)(3874).$$

3. Si osservi che $\beta \in H$ implica $\beta^{-1} \in H$, infatti
$$\beta \circ \sigma = \sigma \circ \beta \Rightarrow (\beta^{-1} \circ \beta) \circ (\sigma \circ \beta^{-1}) = (\beta^{-1} \circ \sigma) \circ (\beta \circ \beta^{-1}) \Rightarrow \sigma \circ \beta^{-1} = \beta^{-1} \circ \sigma,$$
avendo moltiplicato ambo i membri della prima ugualianza per β^{-1} sia a sinistra che a destra e avendo usato la proprietà associativa dell'operazione. Ora, per ogni $\alpha, \beta \in H$ dimostriamo che $\alpha \circ \beta^{-1} \in H$:
$$(\alpha \circ \beta^{-1}) \circ \sigma = \alpha \circ (\beta^{-1} \circ \sigma) = \alpha \circ (\sigma \circ \beta^{-1}) = (\alpha \circ \sigma) \circ \beta^{-1} = (\sigma \circ \alpha) \circ \beta^{-1} = \sigma \circ (\alpha \circ \beta^{-1}).$$
Un elemento diverso dall'identità in H è la permutazione σ^2, infatti $\sigma^2 \circ \sigma = \sigma^3$ e $\sigma \circ \sigma^2 = \sigma^3$. Un elemento che non appartiene ad H è τ, infatti $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 3. 1. (Punti 4) Solo una tra le classi $\overline{5}$, $\overline{6}$ e $\overline{14}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{28}$. Dire quale e calcolarne l'inversa.

2. (Punti 4) Calcolare il resto della divisione di 7^{530} per 32.

3. (Punti 3) Si considerino le seguenti funzioni $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e si dica quali sono omomorfismi di gruppo e quali no.

$$f(a,b) = 5a - 2b, \qquad g(a,b) = 2a + 3b - 1, \qquad h(a,b) = a^2 - 5b.$$

Soluzione.

1. La classe invertibile è $\overline{5}$ perché $\mathrm{MCD}(5,28) = 1$ mentre $\mathrm{MCD}(6,28) = 2$ e $\mathrm{MCD}(14,28) = 14$. Il calcolo dell'identità di Bezout mediante l'algoritmo di divisione fornisce

$$1 = 2 \cdot 28 - 11 \cdot 5$$

per cui $\overline{5}^{-1} = \overline{-11} = \overline{17}$.

2. Poiché $\mathrm{MCD}(7,32) = 1$ possiamo applicare il teorema di Eulero. Siccome $\varphi(32) = \varphi(2^5) = (2-1) \cdot 2^4 = 16$ e $530 = 33 \cdot 16 + 2$ si ottiene

$$[7^{530}]_{32} = [7]_{32}^{530} = [7]_{32}^{2} = [49]_{32} = [17]_{32}.$$

Quindi i resto è 17.

3. L'unico omomorfismo è f in quanto

$$f(a,b) + f(a',b') = (5a - 2b) + (5a' - 2b') = 5(a + a') - 2(b + b') = f(a + a', b + b')$$

per ogni a, b, a', $b' \in \mathbb{Z}$. La funzione g non è un omomorfismo perché $g(0,0) = -1 \neq 0$ e h neppure perchè, ad esempio, $h(2,0) = 4$ mentre $h(1,0) + h(1,0) = 1 + 1 = 2$.