Esercizi di Programmazione Lineare
per il corso di
Calcolo Matriciale e Ricerca Operativa

5 dicembre 2017

Programmazione lineare

Esercizio 1.1

Porre in forma standard i seguenti programmi lineari

$$\min\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5 \\ & 2x_1 + 4x_3 = 12 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \text{ libera.} \end{aligned} \qquad (a)$$

$$\max\ 4x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ & 3x_1 + x_3 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ libera},\ x_3 \leq 0. \end{aligned} \qquad (b)$$

$$\min\ 8x_1 - x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_3 \geq 4 \\ & x_2 - x_3 \leq 7 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0. \end{aligned} \qquad (c)$$

$$\max\ 4x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 && \leq 2 \\ & 2x_1 + 7x_2 && = 8 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0. \end{aligned} \tag{d}$$

$$\min 4x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 && \geq 4 \\ & x_2 + x_3 && \leq 7 \\ & x_3 - x_4 && \leq 2 \\ & x_1 - x_4 && = 12 \\ & x_1, x_2.x_3 \geq 0,\ x_4 \text{ libera.} \end{aligned} \tag{e}$$

$$\max\ 2x_1 + 4x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 && \leq 12 \\ & x_1 - x_2 && \geq 2 \\ & x_2 + x_3 && \leq 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ libera},\ x_3 \leq 0. \end{aligned} \tag{f}$$

Esercizio 1.2

Risolvere i seguenti programmi lineari utilizzando il metodo del simplesso.

$$\max\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 && \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 && \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{a}$$

$$\max\ x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 - 2x_2 + x_3 && \leq 2 \\ & 3x_1 - x_2 - 2x_3 && \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{b}$$

$$\max\ 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 && \leq 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 && \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{c}$$

$$\min\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 && \leq 8 \\ & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 && \leq 4 \\ & x_1 + x_3 && \leq 10 \\ & x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{d}$$

$$\max\ x_1 + 3x_2 - x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 && \leq 3 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 && \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 && \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{e}$$

$$\max\ 4x_1 + x_2 + 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & -x_1 + x_2 && \leq 1 \\ & 2x_2 - x_3 && \leq 2 \\ & x_1 + x_3 && \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{f}$$

Esercizio 1.3

Risolvere i seguenti programmi lineari utilizzando il metodo del simplesso.

$$\min\ 6x_1 + x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &10x_1 - 2x_2 + 5x_3 && \geq 15 \\ &x_1 - x_2 + 3x_3 && \geq 6 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \qquad (a)$$

$$\min\ 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &4x_1 + 3x_2 + 2x_4 && \geq 2 \\ &-5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 && \leq 1 \\ &x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{aligned} \qquad (b)$$

$$\min\ 2x_1 + x_2 + 4x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 && = 3 \\ &2x_1 + x_2 + 3x_3 && = 5 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \qquad (c)$$

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &-x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 && = 5 \\ &4x_2 + x_3 + 2x_4 && = 2 \\ &3x_2 - 2x_4 && \leq 6 \\ &x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{aligned} \qquad (d)$$

$$\max\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &\geq 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 &\leq -3 \\ x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{aligned} \qquad (e)$$

$$\min \; x_1 + x_2 - 2x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \qquad (f)$$

offerte/

Esercizio 1.4

Per i programmi lineari dell'esercizio 1.2, dire se le basi finali risultano ottime cambiando l'obiettivo come segue.

(a)	$\max \; 7x_1 + x_2$	(d)	$\min \; 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4$
(b)	$\min \; 4x_1 + 5x_2 - x_3$	(e)	$\max \; 5x_1 + 3x_2$
(c)	$\min \; x_1 + x_2 + x_3$	(f)	$\min \; x_1 + 2x_2 - x_3$

Esercizio 1.5

Per ognuno dei programmi lineari dell'esercizio 1.2, identificare la matrice A_B^{-1}.

Esercizio 1.6

Risolvere i seguenti programmi lineari utilizzando il metodo grafico. Confrontare i risultati con quelli forniti dal simplesso.

$$\max \; x_1 + x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\ x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \qquad (a)$$

$$\min \; 2x_1 + x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&x_1 + 4x_2 &&\geq 8 \\
&x_1 &&\geq 2 \\
&-2x_1 + x_2 &&\leq 4 \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{b}$$

$$\max \; 2x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&x_1 + 4x_2 &&\geq 8 \\
&x_1 &&\geq 2 \\
&-2x_1 + x_2 &&\leq 4 \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{c}$$

$$\max \; \frac{2}{3}x_1 + \frac{8}{3}x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&x_1 + 4x_2 &&\leq 9 \\
&x_1 &&\leq 8 \\
&x_2 &&\leq 2 \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{d}$$

Parte II

Soluzioni

Soluzione Esercizio 1.1.

(a) In base alla definizione di forma standard, è necessario effettuare le seguenti trasformazoni:

- invertire il segno della funzione obiettivo e passare ad un programma di massimo;
- sostituire la variabile libera $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, dove $x_3^+, x_3^- \geq 0$;
- introdurre una variabile di surplus nel primo vincolo per scriverlo in forma di uguaglianza;
- introdurre una variabile di slack nel terzo vincolo per scriverlo in forma di uguaglianza.

Si ottiene quindi

$$- \max \ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3^+ - 2x_3^-$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 - x_3^+ + x_3^- - x_4 && = 5 \\ & 2x_1 + 4x_3^+ - 4x_3^- && = 12 \\ & x_1 + x_2 + x_3^+ - x_3^- + x_5 && = 15 \\ & x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Forma standard:

$$\max \ 4x_1 - x_2^+ + x_2^-$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2^+ - x_2^- + \bar{x}_3 && = 8 \\ & 3x_1 - \bar{x}_3 + x_4 && = 7 \\ & x_1, x_2^+, x_2^-, \bar{x}_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

(c) Forma standard:

$$- \max \ -8x_1 + x_2 + \bar{x}_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 - \bar{x}_3 - x_4 && = 4 \\ & x_2 + \bar{x}_3 + x_5 && = 7 \\ & x_1 - x_2 + x_6 && = 2 \\ & x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, \bar{x}_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(d) Forma standard:

$$\max 4x_1 + \bar{x}_2$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
& x_1 - 2\bar{x}_2 + x_3 && = 2 \\
& 2x_1 - 7\bar{x}_2 && = 8 \\
& x_1, \bar{x}_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(e) Forma standard:

$$
-\max \ -4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4^+ + 2x_4^-
$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_2 - x_5 && = 4 \\
& x_2 + x_3 + x_6 && = 7 \\
& x_3 - x_4^+ + x_4^- + x_7 && = 2 \\
& x_1 - x_4^+ + x_4^- && = 12 \\
& x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_4^+, x_4^- \geq 0.
\end{aligned}
$$

(f) Forma standard:

$$
\max \ 2x_1 - 4\bar{x}_3
$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_2^+ - x_2^- - \bar{x}_3 + x_4 && = 12 \\
& x_1 - x_2^+ + x_2^- - x_5 && = 2 \\
& x_2 - \bar{x}_3 + x_6 && = 4 \\
& x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, \bar{x}_3, x_2^+, x_2^- \geq 0.
\end{aligned}
$$

Soluzione Esercizio 1.2.

Nota: nel seguito denotiamo una base sia indicando le colonne di $T(B)$ che le variabili ad esso associate, ovvero $B = \{A_1, A_2\} \equiv B = \{x_1, x_2\}$.

(a) Come prima cosa occorre *sempre* porre il problema in forma standard, quindi:

$$
\max \ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3
$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
& 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 && = 4 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 && = 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0,
\end{aligned}
$$

dove sono state aggiunte le due variabili di *slack* x_4, $x_5 \geq 0$. La presenza di queste due variabili permette di ottenere una riformulazione immediata rispetto alla base $B^0 = \{x_4, x_5\}$.

$$\mathbf{T}(B^0) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_4 = 4 - 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ x_5 = 1 - 2x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$z = 0 + 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

corrispondente alla soluzione ammissibile di base $x_4 = 4$, $x_5 = 1$, x_1, x_2, $x_3 = 0$. L'esame dei costi ridotti indica che questa soluzione non è ottima, in quanto r_1, $r_2 > 0$. Si sceglie quindi x_1 come variabile entrante (criterio del massimo costo ridotto) nella prossima base. Il pivot – l'elemento **2** – si sceglie osservando che

$$\min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{i1}}\right\}_{\alpha_{i1}>0} = \min\left\{\frac{4}{4}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{\beta_2}{\alpha_{21}},$$

e quindi la variabile uscente risulterà x_5. La riformulazione rispetto alla nuova base $B^1 = B^0 \cup \{x_1\} \setminus \{x_5\} = \{x_4, x_1\}$ si ottiene applicando l'operazione di pivot sull'elemento individuato.

$$\mathbf{T}(B^1) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & \mathbf{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_4 = 2 + 4x_2 + 2x_5 \\ x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

$$z = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{13}{2}x_3 - \tfrac{3}{2}x_5$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

poichè $r_2 > 0$, si effettua l'operazione di pivot sull'elemento $\frac{1}{2}$ evidenziato – scelto con gli stessi criteri utilizzati precedentemente – e si passa alla base $B^2 = B^1 \cup \{x_2\} \setminus \{x_1\}$. Infatti otteniamo:

$$\mathbf{T}(B^2) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 0 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_4 = 6 - 8x_1 - 4x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 1 - 2x_1 - x_3 - x_5 \end{cases}$$

$$z = 2 - x_1 - 7x_3 - 2x_5$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

Poiché r_1, r_3, $r_5 \leq 0$, la soluzione ammissibile di base $x_2 = 1$, $x_4 = 6$, $x_1 = x_3 = x_5 = 0$ risulta ottima, con valore di funzione obiettivo $z = 2$; essendo tutti i costi ridotti strettamente negativi, questa è anche l'unica soluzione ottima.

———◇———

(b) Riscrivendo il programma in forma standard si ottiene

$$\max\ x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 \quad &= 6 \\ x_1, \ldots, x_5 \geq 0, & \end{aligned}$$

con x_4, x_5 variabili di slack. La base iniziale – disponibile immediatamente – è $B^0 = \{x_4, x_5\}$, corrispondente alla seguente riformulazione.

$$\mathbf{T}(B^0) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_4 = 2 - x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_5 = 6 - 3x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

$$z = 0 + x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

Avendo r_1, $r_3 > 0$, si identifica l'elemento pivot evidenziato, che corrisponde al cambio di base $B^1 = B^0 \cup \{x_3\} \setminus \{x_4\}$, cioè alla riformulazione che segue.

$$\mathbf{T}(B^1) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_5 = 10 - 5x_1 + 5x_2 - 2x_4 \end{cases}$$

$$z = 6 - 2x_1 + 4x_2 - 3x_4$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

A questo punto, avendo $r_2 > 0$ ma nessun coefficiente positivo nella colonna corrispondente, si conclude che il problema è *illimitato* (e quindi $S^* = \emptyset$) e non si procede oltre. Si può infatti osservare che lungo la semiretta

$$\begin{aligned} & x_3 = 2 + 2x_2 \\ & x_5 = 10 + 5x_2 \qquad t \in [0, +\infty) \\ & x_2 = t \end{aligned}$$

si trovano soluzioni con $z \to +\infty$ per $t \to +\infty$.

(*c*) Base ottima $B^* = \{x_1, x_3\}$ con $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $z = \frac{16}{3}$.

(*d*) Ricavata la forma standard

$$-\max\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 && = 8 \\ & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_6 && = 4 \\ & x_1 + x_3 + x_7 && = 10 \\ & x_1, \ldots, x_7 \geq 0, \end{aligned}$$

con x_5, x_6, x_7 variabili di slack, l'applicazione del simplesso porta a determinare la base ottima $B^* = \{x_4, x_6, x_3\}$, $x_3 = 10$, $x_4 = 6$, $x_6 = 12$.

(*e*) Il programma in forma standard risulta

$$\max\ x_1 + 3x_2 - x_3$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + x_4 &&= 3\\
&x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 &&= 6\\
&2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 &&= 8\\
&x_1, \dots, x_6 \geq 0,
\end{aligned}
$$

con x_4, x_5, x_6 variabili di slack. L'applicazione del simplesso porta a determinare la base ottima $B^* = \{x_2, x_5, x_6\}$ con $x_2 = 3$, $x_5 = 3$, $x_6 = 5$.

(*f*) Dalla forma standard

$$\max\ 4x_1 + x_2 + 5x_3$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
&-x_1 + x_2 + x_4 &&= 1\\
&2x_2 - x_3 + x_5 &&= 2\\
&x_1 + x_3 + x_6 &&= 1\\
&x_1, \dots, x_6 \geq 0,
\end{aligned}
$$

(x_4, x_5, x_6 variabili di slack) si perviene tramite l'applicazione del simplesso alla base ottima $B^* = \{x_2, x_5, x_3\}$, con $x_2 = x_3 = x_5 = 1$.

Soluzione Esercizio 1.3.

(*a*) Il programma in forma standard è

$$-\max\ -6x_1 - x_2 - 3x_3$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
&10x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 &&= 15\\
&x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 &&= 6\\
&x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Le colonne di x_4, x_5 risultano linearmente indipendenti, (e quindi $\{x_4, x_5\}$ è una base) ma si verifica facilmente che *non corrispondono* ad una soluzione *ammissibile* di base. Occorre quindi procedere alla soluzione del *problema di prima fase,* formulato come segue.

$$\max\ -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
&10x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + s_1 &&= 15\\
&x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 + s_2 &&= 6\\
&x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Le variabili s_1, s_2 sono anche dette *artificiali* in quanto non appartengono al programma originale. La riformulazione associata alla base iniziale $B^0 = \{s_1, s_2\}$ è

$$\mathbf{T}(B^0) = \left(\begin{matrix} \mathbf{10} & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 15 \\ 6 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{cases} s_1 = 15 - 10x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \\ s_2 = 6 - x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 \end{cases}$$
$$z = -21 + 11x_1 - 3x_2 + 8x_3 - x_4 - x_5$$
$$x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0$$

Nota: nella riformulazione sono state eliminate, come dovuto, le variabili in base s_1, s_2 dall'espressione della funzione obiettivo $z = -s_1 - s_2$, per sostituzione dalle relazioni vincolari.
Procedendo ora normalmente, risulta $B^1 = B^0 \cup \{x_1\} \setminus \{s_1\}$, e quindi

$$\mathbf{T}(B^1) = \left(\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \boldsymbol{\frac{5}{2}} & \frac{1}{10} & -1 & \frac{1}{10} & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{matrix}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}s_1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{10}x_4 \\ s_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{10}s_1 + \frac{4}{5}x_2 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{10}x_4 + x_5 \end{cases}$$
$$z = -\frac{9}{2} - \frac{11}{10}s_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{10}x_4 - x_5$$
$$x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0$$

con il pivot selezionato – $\alpha_{23} = \frac{5}{2}$ – si effettua quindi il cambio di base $B^2 = B^1 \cup \{x_3\} \setminus \{s_2\}$ ottenendo la seguente riformulazione (nella quale omettiamo la matrice $T(B^2)$ per brevità):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} - \frac{3}{25}s_1 + \frac{1}{25}x_2 + \frac{1}{5}s_2 + \frac{3}{25}x_4 - \frac{1}{5}x_5 \\ x_3 = \frac{9}{5} + \frac{1}{25}s_1 + \frac{8}{25}x_2 - \frac{2}{5}s_2 - \frac{1}{25}x_4 + \frac{2}{5}x_5 \end{cases}$$
$$z = 0 - s_1 - s_2$$
$$x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0$$

Poiché la prima fase è terminata con $z = 0$, si conclude che il programma lineare iniziale ammette soluzioni ammissibili. La base $B^2 = \{x_1, x_5\}$ ottenuta non contiene variabili artificiali e può essere utilizzata come punto di partenza per l'applicazione del simplesso al programma iniziale. Si possono quindi eliminare s_1, s_2 e le colonne associate e scrivere la riformulazione

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} + \frac{1}{25}x_2 + \frac{3}{25}x_4 - \frac{1}{5}x_5 \\ x_3 = \frac{9}{5} + \frac{8}{25}x_2 - \frac{1}{25}x_4 + \frac{2}{5}x_5 \end{cases}$$
$$z = -9 - \frac{11}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_4$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

Come sopra, nella funzione obiettivo si è provveduto ad eliminare le variabili in base, sostituendo in essa le relazioni vincolari. Non si procede oltre in quanto r_2, r_4, $r_5 \leq 0$, e quindi la base corrente è già ottima.
Nota: la funzione obiettivo originale e quella artificiale sono *completamente scorrelate,* quindi la prima fase non dà in generale alcuna garanzia di ottimalità sulla soluzione ammissibile trovata, che potrebbe essere anche molto lontana dall'ottimo.

(*b*) Il problema in forma standard risulta

$$-\max\ -7x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 &&= 2 \\ &-5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &&= 1 \\ &x_1, \ldots, x_6 \geq 0, \end{aligned}$$

con x_5 variabile di surplus e x_6 variabile di slack. Non avendo una base ammissibile immediatamente disponibile, occorre risolvere il problema di prima fase

$$\max\ -s_1$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 + s_1 &&= 2 \\ &-5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &&= 1 \\ &x_1, \ldots, x_6, s_1 \geq 0. \end{aligned}$$

In questo caso solo una variabile artificiale s_1 è strettamente necessaria, in quanto si vede che $B^0 = \{s_1, x_6\}$ forma già una base ammissibile. Procedendo si ottiene

$$\mathbf{T}(B^0) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} \mathbf{4} & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} s_1 = 2 - 4x_1 - 3x_2 - 2x_4 + x_5 \\ x_6 = 1 + 5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$z = -2 + 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5$$

$$x_1, \ldots, x_5, s_1 \geq 0$$

Facendo pivot sul coefficiente $\alpha_{11} = 4$ si ottiene $B^1 = B^0 \cup \{x_1\} \setminus \{s_1\}$, ovvero

$$\mathbf{T}(B^1) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}s_1 \\ x_6 = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}x_2 - x_3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{4}x_5 - x_6 - \frac{5}{4}s_1 \end{cases}$$

$$z = 0 - s_1$$

$$x_1, \ldots, x_5, s_1 \geq 0$$

Poiché $z = 0$ nella prima fase, si può passare alla riformulazione rispetto a B^1 del programma iniziale ed applicare il simplesso.

$$\mathbf{T}(B^1) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & | & \frac{1}{2} \\ \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 1 & | & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_6 = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}x_2 - x_3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{4}x_5 \end{cases}$$

$$z = -\frac{7}{2} + \frac{13}{4}x_2 + 5x_3 + \frac{9}{2}x_4 - \frac{7}{4}x_5$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Facendo pivot sul $\alpha_{23} = 1$ si cambia $B^2 = B^1 \cup \{x_3\} \setminus \{x_6\}$, ottenendo

$$\mathbf{T}(B^2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & | & \frac{1}{2} \\ \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 1 & | & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_3 = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}x_2 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{4}x_5 - x_6 \end{cases}$$

$$z = 14 - \frac{1}{2}x_2 - 5x_6 - 3x_4 + \frac{9}{2}x_5$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

A questo punto sulla colonna di x_5 si riconosce la condizione di illimitatezza e non si procede oltre. Lungo la semiretta

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_5 \\ x_3 &= \frac{7}{2} + \frac{5}{4}x_5 \qquad t \in [0, +\infty] \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

si trovano soluzioni con $z \to +\infty$ per $t \to +\infty$.

(*c*) La forma standard è

$$-\max\ -2x_1 - x_2 - 4x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Il problema di prima fase risulta

$$\max\ -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 &&= 3\\
&2x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 &&= 5\\
&x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Risolvendo il problema di prima fase si trova la base ammissibile $B = \{x_3, x_1\}$, e da qui la base ottima $B^* = \{x_2, x_1\}$ ($x_2 = 1$, $x_1 = 2$).

———◇———

(d) Il programma in forma standard è (aggiungendo una variabile di slack $x_5 \geq 0$)

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&-x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &&= 5\\
&4x_2 + x_3 + 2x_4 &&= 2\\
&3x_2 - 2x_4 + x_5 &&= 6\\
&x_1, \ldots, x_5 \geq 0,
\end{aligned}$$

ed il relativo problema di prima fase risulta come segue.

$$\max\ -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&-x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &&+ s_1 = 5\\
&4x_2 + x_3 + 2x_4 + s_2 &&= 2\\
&3x_2 - 2x_4 + x_5 &&= 6\\
&x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Partendo dalla base $B^0 = \{s_1, s_2, x_5\}$ ($s_1 = 5$, $s_2 = 2$, $x_5 = 6$) si ottiene quanto segue (omettiamo – per brevità – di riportare la matrice $T(B)$).

$$\begin{cases}
s_1 = 5 + x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4\\
s_2 = 2 - 4x_2 - x_3 - 2x_4\\
x_5 = 6 - 3x_2 + 2x_4
\end{cases}$$

$$z = -7 - x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4$$

$$x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0$$

pivot $\alpha_{24} = 2$; $B^1 = B^0 \cup \{x_4\} \setminus \{s_2\}$,

$$\begin{cases}
s_1 = 4 + x_1 + 4x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}s_2\\
x_4 = 1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_2\\
x_5 = 8 - 7x_2 - x_3 - s_2
\end{cases}$$

$$z = 4 - x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}s_2$$

$$x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0$$

pivot $\alpha_{23} = \frac{1}{2}$; $B^2 = B^1 \cup \{x_3\} \setminus \{x_4\}$,

$$\begin{cases} s_1 = 3 + x_1 + 6x_2 + x_4 + s_2 \\ x_3 = 2 - 4x_2 - 2x_4 - s_2 \\ x_5 = 6 - 3x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

$$z = -3 - x_1 - 2x_2 - x_4 - 2s_2$$

$$x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0$$

Il problema di prima fase è stato risolto all'ottimo, con valore di funzione obiettivo non nullo, quindi per il programma lineare iniziale *non esiste soluzione ammissibile.*

(*e*) La forma standard del programma è

$$\max\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - x_6 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, \ldots, x_6 \geq 0.$$

Dal problema di prima fase si ottiene la base ammissibile $B = \{x_2, x_4\}$, e successivamente, applicando il simplesso alla riformulazione del programma iniziale rispetto a B, si verifica che questo è illimitato.

(*f*) Non esiste soluzione ammissibile.

Soluzione Esercizio 1.4.

(*a*) Dalla riformulazione rispetto alla base finale $\{x_4, x_2\}$ si hanno le relazioni

$$\begin{array}{rrrrr} x_4 = & 6 & -2x_5 & +8x_1 & -4x_3, \\ x_2 = & 1 & -x_5 & -2x_1 & -x_3. \end{array}$$

Utilizzando queste relazioni per eliminare le variabili in base dall'obiettivo $z = 7x_1 + x_2 + 4x_3$ si riformula quest'ultimo come

$$\max \quad z = \quad 1 \quad -x_5 \quad +5x_1 \quad -x_3,$$

dove il costo ridotto $r_1 > 0$ indica che la base $\{x_2, x_4\}$ non è ottima.

(*b*) Tenendo presente che min $4x_1 + 5x_2 - x_3$ equivale a max $-4x_1 - 5x_2 + x_3$ nella forma standard, riformulando rispetto alla base finale $\{x_3, x_5\}$ si ottiene

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_5 = 10 - 5x_1 + 5x_2 - 2x_4 \end{cases}$$

$$z = 2 - 5x_1 - 3x_2 - x_4$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

I costi ridotti r_1, r_2, $r_4 \leq 0$ indicano che la base $\{x_3, x_5\}$ è ottima per il nuovo obiettivo.

———◇———

(c) Non ottima.
(d) Ottima.
(e) Ottima.
(f) Non ottima.

Soluzione Esercizio 1.5.

(a) La A_B^{-1} si legge nella riformulazione finale (o, equivalentemente nella matrice $T(B)$ finale), sotto le colonne che nella formulazione iniziale rappresentavano la matrice identità. Quindi, riportando la riformulazione per intero,

$$\mathbf{T}(B^2) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 0 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_4 = 6 - 8x_1 - 4x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 1 - 2x_1 - x_3 - x_5 \end{cases}$$
$$z = 2 - x_1 - 7x_3 - 2x_5$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

La matrice identità appariva, nella riformulazione iniziale, sotto le colonne di x_4, x_5, quindi

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

———◇———

(b) Analogamente, si ha

$$\mathbf{T}(B^1) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_5 = 10 - 5x_1 + 5x_2 - 2x_4 \end{cases}$$
$$z = 6 - 2x_1 + 4x_2 - 3x_4$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

e risulta, tenendo conto che sotto x_4, x_5 appariva la matrice identità,

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

———◇———

(c) $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

(d) $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(e) $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$(f)\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione Esercizio 1.6.

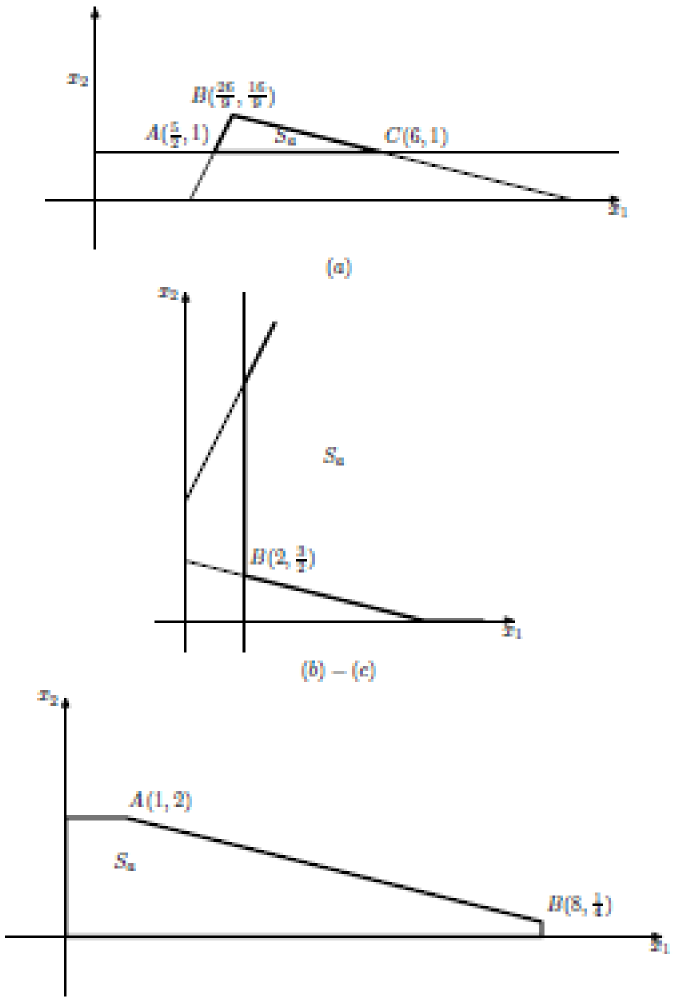

Figura 1.1: Regioni di ammissibilità per l'esercizio 1.6.

La Figura 1.1 illustra le regioni S_a per i programmi lineari in esame. Si possono fare le seguenti considerazioni.
(a) Il punto $(x_1 = 6, x_2 = 1)$ è il punto di S_a più lontano dalla retta $z = 0$, quindi è l'unica soluzione ottima.
(b) Il punto $(x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{2})$ è il punto di S_a più vicino alla retta $z = 0$.
(c) Lungo la semiretta $x_1 \geq 8, x_2 = 0$ che appartiene ad S_a si può osservare che si trovano punti con valore di funzione obiettivo grande a piacere, quindi il problema è illimitato.

(d) Il punto ($x_1 = 1, x_2 = 2$) è a distanza massima dalla retta $z = 0$, e con esso tutti i punti del segmento che lo congiunge a ($x_1 = 8, x_2 = \frac{1}{4}$).