Prova di Logica Matematica 15 luglio 2022 Versione 4

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) La relazione R su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definita da $w \; R \; x$ se e solo se $w \mid x$ — 2 punti

- ☐ è simmetrica.
- ☐ è transitiva.
- ☐ è riflessiva.
- ☐ è un ordine lineare.

(b) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? — 2 punti

- ☐ $\{w \in \mathbb{R} \mid \sqrt{w} \in \mathbb{Q}\}$
- ☐ $\{(w, x) \in \mathbb{R}^2 \mid w \in \mathbb{Q} \vee x \notin \mathbb{N}\}$
- ☐ $\{w \in \mathbb{R} \mid w^2 - 2w - 5 = 0\}$
- ☐ $\{(w, x) \in \mathbb{R}^2 \mid w \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{Z}\}$

(c) La funzione $k \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definita da $k(t) = 5t^2 - 1$ è — 2 punti

- ☐ né iniettiva, né suriettiva.
- ☐ iniettiva ma non suriettiva.
- ☐ biettiva.
- ☐ suriettiva ma non iniettiva.

(d) Sia φ la formula $\forall x S(w,x) \leftrightarrow \exists w \exists x S(x,w)$, dove S è un simbolo di predicato binario. 2 punti

- ☐ φ è un enunciato.
- ☐ La variabile w occorre libera e vincolata in φ.
- ☐ La variabile x occorre libera e vincolata in φ.
- ☐ φ è un enunciato e la variabile w occorre sia libera che vincolata in φ.

(e) Consideriamo il linguaggio L con due simboli di funzione unaria k, f. Quali delle seguenti espressioni sono L-enunciati che formalizzano correttamente relativamente alla L-struttura $\langle D, k, f \rangle$ l'affermazione "la funzione k è l'inversa della funzione f" 2 punti

- ☐ $\forall x(k(x) \cdot f(x) = 1)$
- ☐ $\forall x(k(f(x)) = x \wedge f(k(x)) = x)$
- ☐ $\forall x(k(f(x)) = x)$
- ☐ $k = f^{-1}$

(f) Siano φ, ψ delle L-formule. 2 punti

- ☐ Se φ è una tautologia allora ¬φ → ψ è una tautologia.
- ☐ Se φ è soddisfacibile allora ¬φ → ψ è soddisfacibile.
- ☐ Se ¬φ è soddisfacibile allora φ è soddisfacibile.
- ☐ φ è soddisfacibile se e solo se ψ è soddisfacibile.

(g) Siano D, A, B lettere proposizionali e S una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

D	A	B	S
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

- ☐ S ∨ B è una tautologia.
- ☐ S non è valida.
- ☐ S ≡ B → A
- ☐ S ⊨ ¬A.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{k\}$ con k simbolo di funzione binario. Sia ψ la L-formula

$$\exists x\,(k(x,x) = w).$$

1. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \psi[y/2, x/1].$$
2. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \psi[y/2, x/2].$$
3. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \forall w \psi[y/2, x/2].$$
4. Stabilire se
$$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \models \exists w \psi[y/2, x/1].$$
5. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \psi[y/1, x/3].$$
6. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \psi[y/\sqrt{2}, x/-2].$$
7. È vero che $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \forall w\, \psi[y/1, x/3]$?
8. Sia $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. È vero che $\mathcal{C} \models \forall w\, \psi[y/1, x/3]$?

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3 — 9 punti

Sia $\langle D, < \rangle$ un ordine lineare stretto e siano A, B sottoinsiemi di D. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle D, <, A, B \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{<, A, B\}$ con un simbolo di relazione binaria e due simboli di predicato unari le seguenti affermazioni:

1. Tra due elementi di A non c'è alcun elemento di B.
2. Dati due elementi di B, c'è necessariamente un elemento di A che è minore di entrambi.
3. Ogni elemento di A è minore di qualche elemento di B.
4. Il più piccolo elemento di B coincide con il più grande elemento di A.