

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: _____

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano $\varphi(z)$ e $\psi(z, w)$ formule del prim'ordine e σ un enunciato. 2 punti

- ☐ $\forall z \neg \varphi(z) \models \neg \exists z \varphi(z)$
- ☐ Se \mathcal{C} è una struttura tale che $\mathcal{C} \models \neg \exists z \varphi(z)$, allora $\mathcal{C} \models \forall z (\varphi(z) \rightarrow \sigma)$.
- ☐ Se \mathcal{D} è una struttura tale che $\mathcal{D} \models \exists w \varphi(w)$, allora $\mathcal{D} \models \exists w (\neg \sigma \vee \varphi(w))$.
- ☐ $\forall z \exists w \psi(w, z) \models \exists w \forall z \psi(w, z)$

(b) Consideriamo le funzioni $h: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(z, w) \mapsto 4z^2 + w$ e $k: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $z \mapsto (z, 4z)$. Allora 2 punti

- ☐ k è iniettiva e h è l'inversa di k .
- ☐ Esiste $z \in \mathbb{Z}$ tale che $k(z) = (1, 4)$.
- ☐ la funzione h è iniettiva.
- ☐ $h \circ k(z) = 4z(z + 1)$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$.

(c) Sia R la proposizione $\neg A \rightarrow \neg C \vee \neg D$. Allora 2 punti

- ☐ R è conseguenza logica di $C \rightarrow A$.
- ☐ R non è soddisfacibile.
- ☐ Se i è un'interpretazione tale che $i(A) = 0$ allora necessariamente $i(C) = i(D) = 0$.
- ☐ R è una tautologia.

(d) Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente "x è un numero primo" utilizzando il linguaggio $\cdot, 1$ e relativamente alla struttura $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$ 2 punti

- ☐ $\neg(x = 1) \wedge \forall y (y \cdot x = x \cdot x \vee x \cdot y = x)$
- ☐ $x = x \cdot 1 \wedge \forall y (\neg \exists z (x \cdot y = z))$
- ☐ $(x = 1) \vee \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$
- ☐ $\neg(x = 1) \wedge \forall y (\exists z (y \cdot z = x) \rightarrow y = 1 \vee y = x)$

- (e) Sia T una relazione binaria su un insieme non vuoto C . 2 punti
- ☐ Se T è un preordine e Q è un'altra relazione binaria su C tale che $T \subseteq Q$, allora Q è riflessiva.
 - ☐ Se T è antisimmetrica, allora non può essere anche simmetrica.
 - ☐ Se T è riflessiva, allora non può essere anche irreflessiva.
 - ☐ Se T è una relazione di equivalenza, allora è anche un preordine.
- (f) Sia $L = \{R, h, k, c\}$ un linguaggio del prim'ordine con R simbolo di relazione binario, h simbolo di funzione unario, k simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Quali dei seguenti sono L -termini? 2 punti
- ☐ $h(k(k(c, h(c)), k(h(c), c)))$
 - ☐ $k(k(h(c), h(c)), k(h(c), h(c)))$
 - ☐ $k(h(h(k(c, c), c)), c)$
 - ☐ $R(c, h(c))$
- (g) Siano D e A insiemi tali che $A \subseteq D$. Allora possiamo concludere con certezza che 2 punti
- ☐ $(D \cup A) \setminus (D \setminus A) = A$.
 - ☐ se $|D| = |A|$ allora $D \setminus A$ è finito.
 - ☐ D e A non possono essere disgiunti.
 - ☐ se $|D| \leq |A|$ allora $|D| = |A|$.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2

9 punti

Sia $L = \{R, T, c\}$ con R ed T simboli di relazione binaria e c simbolo di costante. Consideriamo la L -struttura $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Z}, >, |, 3 \rangle$, dove $|$ è l'usuale relazione di divisibilità.

Sia φ la formula

$$(R(z, w) \wedge T(c, w))$$

e ψ la formula

$$(R(z, w) \rightarrow T(c, w))$$

1. Determinare se:

- $\mathcal{C} \models \varphi[z/-1000, w/-2000]$,
- $\mathcal{C} \models \varphi[z/-1000, w/-3000]$,
- $\mathcal{C} \models \exists w \varphi[z/-1000, w/-999]$.

2. Determinare se $\mathcal{C} \models \forall z \exists w \varphi[z/0, w/0]$.

3. Determinare se:

- $\mathcal{C} \models \psi[z/-1000, w/-2000]$,
- $\mathcal{C} \models \psi[z/-1000, w/-3000]$,
- $\mathcal{C} \models \forall w \psi[z/-1000, w/-998]$.

4. Determinare se $\mathcal{C} \models \exists z \forall w \psi[z/-1, w/3]$.

5. Determinare se $\forall z \exists w \varphi \models \exists z \forall w \psi$.

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3

9 punti

Sia C un insieme non vuoto e $h: C \rightarrow C$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle C, h \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{h\}$ con un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. h è biettiva
2. se h è biettiva, allora h è una funzione costante (ovvero il suo range contiene un solo punto)
3. $h \circ h$ è suriettiva
4. ogni elemento ha almeno due preimmagini distinte.