Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano A, B, C lettere proposizionali e P una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

A	B	C	P
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**

- ☐ P è una tautologia.
- ■ $P \models C \vee \neg A$
- ☐ $A \vee B \models P$
- ■ P è soddisfacibile.

(b) Siano P e Q formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ☐ $P \equiv Q$ se e solo se $\models P \to Q$
- ■ Se P è valido, allora è anche soddisfacibile.
- ■ $P \vee (P \to Q)$ è una tautologia.
- ■ $P \to Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

(c) Sia A un insieme non vuoto e sia $L = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine con f simbolo di funzione unaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle A, f\rangle$, l'affermazione: "f non è iniettiva"? — 2 punti

- ☐ $\forall x \forall y (x = y \to f(x) = f(y))$
- ☐ $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y)$
- ■ $\exists x \exists y (\neg(x = y)) \wedge f(x) = f(y))$
- ☐ $\forall x \exists y (f(x) = f(y) \wedge \neg(x = y))$

(d) Sia A un insieme non vuoto di cardinalità finita e B un insieme di cardinalità infinita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. — 2 punti

- ■ $A \setminus B$ ha cardinalità finita.
- ☐ $B \setminus A$ ha cardinalità finita.
- ☐ $A \times B$ ha cardinalità finita.
- ☐ $A \triangle B$ ha cardinalità finita.

(e) Sia $L = \{R\}$ un linguaggio del prim'ordine con R simbolo di relazione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\forall x \exists y\, R(x, y)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$? — 2 punti

- ■ "Dato un numero razionale, ce n'è sempre uno più grande."
- ☐ "C'è un numero razionale più grande di x."
- ☐ "C'è un numero razionale più grande di tutti."
- ■ "Ci sono numeri razionali arbitrariamente grandi."

(f) Siano $f\colon \mathbb{Q}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, dove $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 1, e $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 1}$ definite da $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(y) = y^2 + 1$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. — 2 punti

- ■ $f \circ g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.
- ☐ f è una funzione suriettiva.
- ■ $f \circ g(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$ con $a \geq 0$.
- ☐ g è una funzione iniettiva.

(g) Siano R, S relazioni binarie su un insieme A. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. — 2 punti

- ■ Se R è riflessiva e $R \subseteq S$, anche S è riflessiva.
- ☐ Se R è riflessiva e $R \supseteq S$, anche S è riflessiva.
- ■ Se per ogni $a, b \in A$ vale che $R(a, b)$ se e solo se $S(b, a)$, allora $S = R^{-1}$.
- ■ Se per ogni $a \in A$ esiste un solo $b \in A$ tale che $R(a, b)$, allora R è una funzione.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{R, f, c\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario R, un simbolo di funzione binario f e un simbolo di costante c.

Consideriamo la struttura $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, <, +, 1 \rangle$. Stabilire se:

- $\mathcal{Q} \models \neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))[x/1, z/1.5]$
- $\mathcal{Q} \models R(z, x) \vee R(f(x, c), z)[x/1, z/1.5]$
- $\mathcal{Q} \models (\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))) \to (R(z, x) \vee R(f(x, c), z))[x/1, z/1.5]$
- $\mathcal{Q} \models \forall x \forall z[(\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))) \to (R(z, x) \vee R(f(x, c), z))][x/1, z/0.5]$

Consideriamo ora la struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, 1 \rangle$.

Verificare se

$$\mathcal{N} \models \forall x \forall z[(\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))) \to (R(z, x) \vee R(f(x, c), z))][x/1, z/2]$$

L'enunciato $\forall x \forall z[(\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))) \to (R(z, x) \vee R(f(x, c), z))]$ è una tautologia?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione: Si verifica che:

- $\mathcal{Q} \models \neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))[x/1, z/1.5]$ se e solo se $1.5 \neq 1$ *e* $1.5 \neq 1 + 1 = 2$ che chiaramente è il caso.

- $\mathcal{Q} \models R(z, x) \vee R(f(x, c), z)[x/1, z/1.5]$ se e solo se $1.5 < 1$ *o* $1 + 1 = 2 < 1.5$ che chiaramente non è il caso.

- $\mathcal{Q} \not\models (\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))) \to (R(z, x) \vee R(f(x, c), z))[x/1, z/1.5]$ dato che, come verificato nei due punti precedenti, la premessa dell'implicazione è verificata con l'assegnamento dato, mentre la tesi non lo è con lo stesso assegnamento.

- $\mathcal{Q} \not\models \forall x \forall z[(\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))) \to (R(z, x) \vee R(f(x, c), z))][x/1, z/0.5]$ come testimoniato dall'assegnamento al punto precedente alle variabili x, z.

Sia ψ l'enunciato

$$\forall x \forall z[(\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))) \to (R(z, x) \vee R(f(x, c), z))].$$

Sia in $\mathcal{Q}$ che in $\mathcal{N}$, l'interpretazione di ψ è

> Per ogni x e z, se z è diverso sia da x che da $x + 1$ allora o $z < x$ oppure $x + 1 < z$. (Equivalentemente: per ogni x non c'è alcun z strettamente compreso tra x e $x + 1$.)

Quindi si ha che:

- $\mathcal{Q} \not\models \psi$. Infatti, l'assegnamento $x = 1$ e $z = 1.5$ mostra che z è strettamente compreso tra x e $x + 1$ (come già visto per la soluzione del terzo e quarto item dell'esercizio).

- Al contrario, $\mathcal{N} \models \psi$ perché non c'è nessun numero naturale strettamente compreso tra due numeri consecutivi arbitrari (ovvero tra due numeri del tipo x e $x+1$).

L'enunciato ψ non è una tautologia in quanto risulta falso nella struttura $\mathcal{Q}$.

Esercizio 3 9 punti

Sia A un insieme non vuoto e $R \subseteq A \times A$ una relazione binaria. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle A, R \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{R\}$ con un simbolo di relazione binaria le seguenti affermazioni:

1. R è irriflessiva
2. R è un ordine lineare
3. R^{-1} è simmetrica
4. $\mathrm{dom}(R) = A$.

Soluzione: 1. R è irriflessiva: $\forall x \neg R(x, x)$

2. R è un ordine lineare:

$$\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \to x = y) \\ \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z) \wedge \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x)$$

3. R^{-1} è simmetrica: $\forall x \forall y (R(y, x) \to R(x, y))$

4. $\mathrm{dom}(R) = A$: $\forall x \exists y R(x, y)$