

Corso di Logica

2.4 – Cenni di Cardinalità

Docenti: Alessandro Andretta, Luca Motto Ros, Matteo Viale

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Quantità

Se vogliamo confrontare due insiemi *finiti*, possiamo determinare quale sia il più grande semplicemente contandone gli elementi.

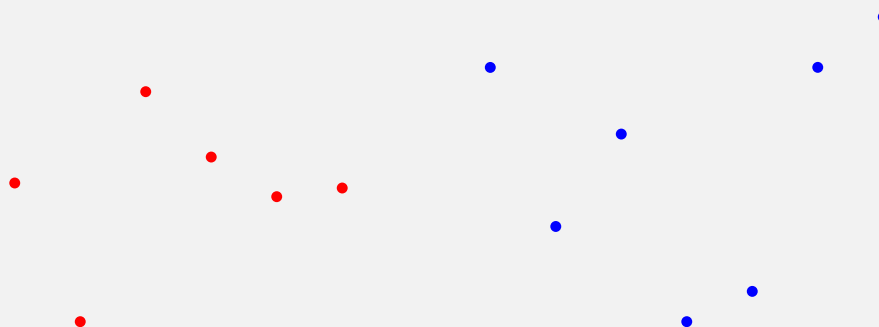
Cosa possiamo dire se vogliamo invece confrontare due insiemi infiniti?

Ad esempio, è più grande l'insieme \mathbb{N} oppure l'insieme \mathbb{Q} ? E che dire di \mathbb{Z} e \mathbb{R} ? L'insieme di tutti i programmi che si possono scrivere in Java è più o meno grande dell'insieme \mathbb{N} ?

Certamente non possiamo pensare di “contarne” gli elementi, visto che sono insiemi infiniti. . .

Abbiamo bisogno di una tecnica diversa
per stabilire **quanti** elementi contiene un insieme!

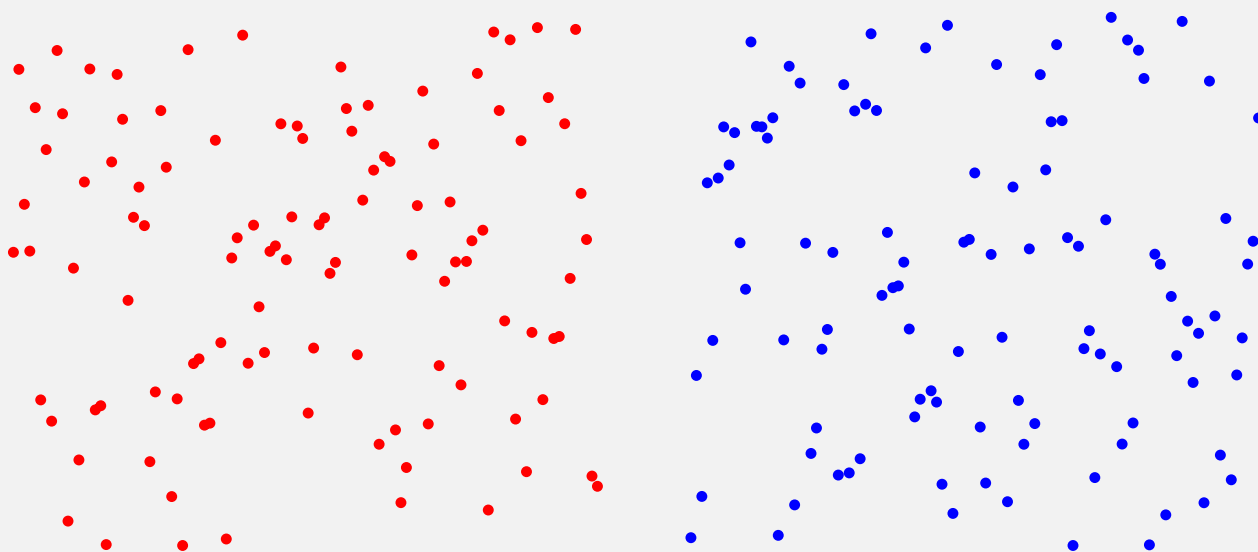
In questa immagine ci sono più punti rossi o più punti blu?



Quasi tutti rispondono (correttamente) che ci sono più punti blu che rossi, perché ci sono 7 punti blu e solo 6 punti rossi.

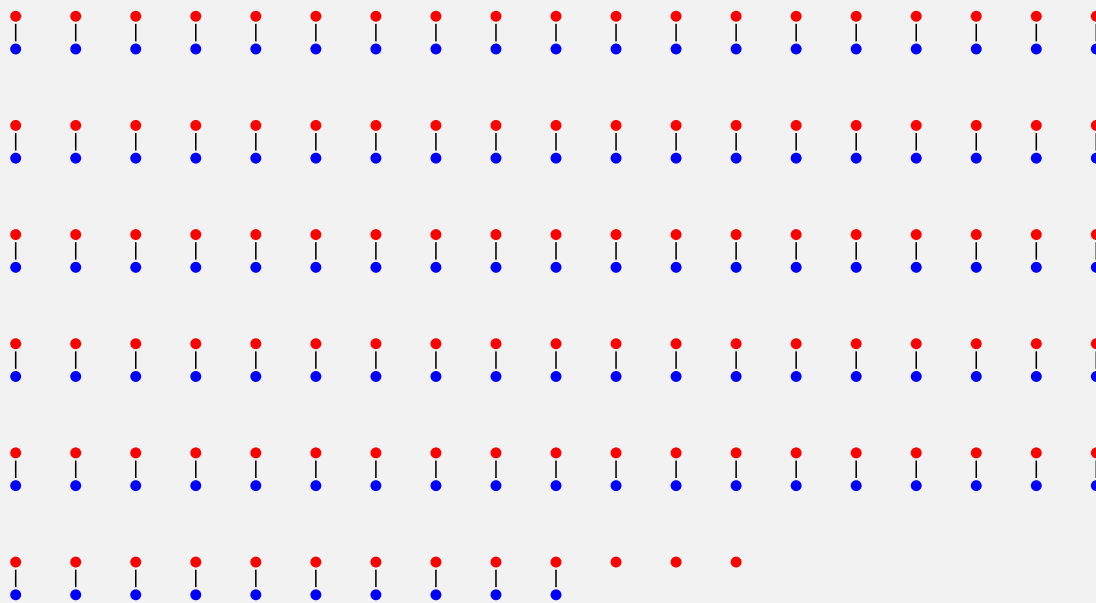
Sembra che, nel caso finito, per determinare se un insieme contenga più elementi di un altro bisogna contare il numero di elementi e confrontare i due numeri così ottenuti. . .

In questa immagine ci sono più punti rossi o più punti blu?



Quasi nessuno riesce a rispondere in poco tempo: è molto difficile contare rapidamente il numero di punti ed è molto difficile non “perdere il conto” e fare errori. Proviamo a disporre gli stessi punti in un modo diverso. . .

In questa immagine ci sono più punti rossi o più punti blu?



Ora è facile rispondere: ci sono più punti rossi! La diversa disposizione ci permette di “accoppiare” gli elementi dei due insiemi (ovvero di stabilire una corrispondenza univoca) e di notare che ci sono 3 punti rossi in più.

Questo piccolo esempio mostra chiaramente che per confrontare la grandezza (in termini di quantità di elementi) di due insiemi la cosa più naturale da fare è quella di tentare di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi: i due insiemi hanno lo stesso numero di elementi se e solo se esiste una biezione tra di essi.

Questo metodo, non richiedendo più di “contare” il numero di elementi, si può applicare senza alcun problema agli insiemi infiniti, e ci porta al concetto fondamentale di **cardinalità**.

Cardinalità

Definizione

Due insiemi X e Y hanno la stessa **cardinalità** se esiste una biezione $f: X \rightarrow Y$.

Scriveremo

$$X \approx Y,$$

oppure

$$|X| = |Y|$$

per indicare che X e Y hanno la stessa **cardinalità**.

Esercizio

La relazione \approx è una relazione di equivalenza.

Insiemi finiti e infiniti

Definizione

Un insieme è **finito** se e solo se è in biezione con $\{0, \dots, n-1\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ (dove poniamo $\{0, \dots, n-1\} = \emptyset$ quando $n = 0$).

Se X è finito ed in biezione con $\{0, \dots, n-1\}$ scriveremo

$$|X| = n.$$

Un insieme che non è finito si dice **infinito**.

Osservazione

Se $|X| = n$ e $|Y| = m$, allora $|X \times Y| = n \cdot m$.

Se inoltre $X \cap Y = \emptyset$, allora $|X \cup Y| = n + m$.

Ordine tra le cardinalità

Definizione

X **si inietta in** Y se esiste una iniezione $f: X \rightarrow Y$. In questo caso scriveremo

$$X \preceq Y$$

oppure

$$|X| \leq |Y|.$$

Scriveremo $X \prec Y$ (oppure $|X| < |Y|$) quando $X \preceq Y$ ma $Y \not\preceq X$.

Esercizio

\preceq è un preordine sugli insiemi (ossia è una relazione riflessiva e transitiva).

Osservazione

Se $X \approx Y$, allora $X \preceq Y$ e $Y \preceq X$. Infatti, $X \approx Y$ se esiste una biezione $f: X \rightarrow Y$: ma allora f stessa mostra anche che $X \preceq Y$, mentre $f^{-1}: Y \rightarrow X$, che è a sua volta una biezione, dimostra che $Y \preceq X$.

Proposizione

Sia $X \neq \emptyset$. Allora $X \preceq Y$ se e solo se c'è una suriezione $g: Y \rightarrow X$.

Quindi per dimostrare che $|X| \leq |Y|$ possiamo mostrare che esiste una iniezione da X in Y oppure, equivalentemente, che esiste una suriezione da Y su X .

Dimostrazione.

Sia $f: X \rightarrow Y$ iniettiva e fissiamo un arbitrario $x_0 \in X$. Allora possiamo definire una suriezione $g: Y \rightarrow X$ ponendo

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{se } y \in f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \\ x_0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Viceversa, se $g: Y \rightarrow X$ è una suriezione, allora per ogni $x \in X$ si ha $g^{-1}(x) \neq \emptyset$. Quindi possiamo definire una funzione $f: X \rightarrow Y$ che scelga per ogni $x \in X$ un punto in $g^{-1}(x)$: tale funzione è necessariamente iniettiva. □

Il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein

Abbiamo osservato che se $X \approx Y$, allora $X \preceq Y$ e $Y \preceq X$.

Dimostreremo ora che vale anche il viceversa: se $X \preceq Y$ e $Y \preceq X$, allora $X \approx Y$, ovvero \approx è la relazione d'equivalenza indotta dal preordine \preceq .

Questo fatto non è per nulla ovvio:

Esempio

Siano $X = [0; 1]$ e $Y = (0; 1)$. Allora si ha che $(0; 1) \preceq [0; 1]$ perché $(0; 1) \subseteq [0; 1]$. Inoltre, la funzione

$$f: [0; 1] \rightarrow (0; 1), \quad x \mapsto \frac{x+1}{3}$$

è chiaramente iniettiva e dimostra che $[0; 1] \preceq (0; 1)$.

Tuttavia, non è così immediato vedere come si possa definire una *biezione* tra $[0; 1]$ e $(0; 1)$. (Dove mandiamo gli estremi 0 e 1 di X ?)

Il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein

La relazione d'equivalenza associata a \preceq è proprio \approx .

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

Se $X \preceq Y$ e $Y \preceq X$ allora $X \approx Y$.

In altre parole $|X| \leq |Y| \leq |X|$ se e solo se $|X| = |Y|$.

Idea della dimostrazione

Siano $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ iniezioni. Definiamo

$$\begin{aligned} X_0 &= X & Y_0 &= Y \\ X_{n+1} &= g[Y_n] & Y_{n+1} &= f[X_n] \end{aligned}$$

Siano $X_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ e $Y_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Definiamo

$$A = X_\infty \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X_{2i} \setminus X_{2i+1}) \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (Y_{2i} \setminus Y_{2i+1}).$$

(continua)

Idea della dimostrazione. (continuazione).

Si verifica che (la restrizione ad A di) f è una biezione tra A e $Y \setminus B$, mentre (la restrizione a B di) g è una biezione tra B e $X \setminus A$. Allora la funzione

$$h: X \rightarrow Y, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X \setminus A \end{cases}$$

è una biezione. □

Negli [Approfondimenti](#) si trova una dimostrazione completa e dettagliata del teorema di Cantor-Schröder-Bernstein.

Corollario

Se $X \subseteq Y$ e $Y \lesssim X$ allora $X \approx Y$.

Dimostrazione.

Se $X \subseteq Y$ allora l'iniezione $f: X \rightarrow Y$ definita da $f(x) = x$ per ogni $x \in X$ mostra che $X \lesssim Y$. Dall'ipotesi $Y \lesssim X$ e dal teorema di Cantor-Schröder-Bernstein segue che $X \approx Y$. □

Insiemi infiniti

Proposizione

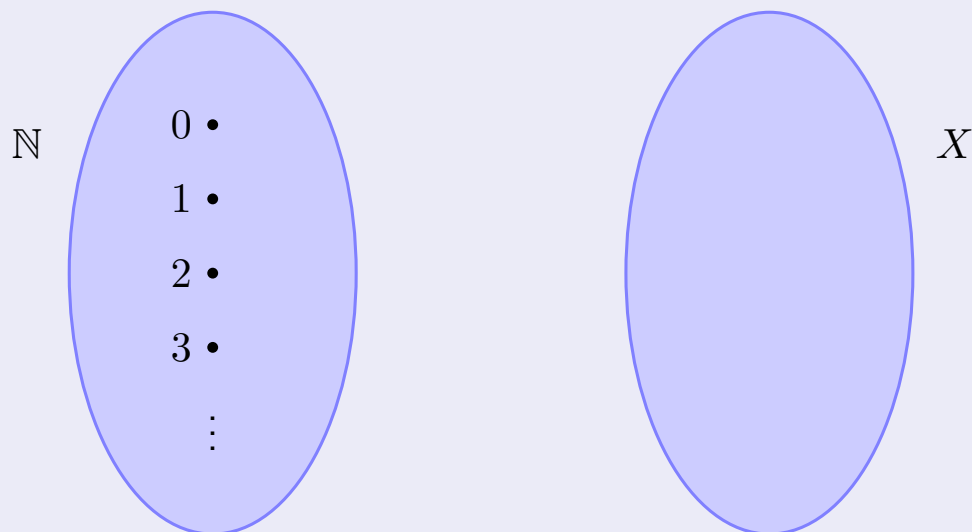
X è infinito se e solo se $\mathbb{N} \lesssim X$. In particolare \mathbb{N} è il più piccolo insieme infinito: se X è infinito $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

Dimostrazione.

Se $\mathbb{N} \lesssim X$, X è chiaramente infinito poiché non esiste una suriezione di $\{0, \dots, n-1\}$ con \mathbb{N} , e quindi a maggior ragione con X , per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(continua)

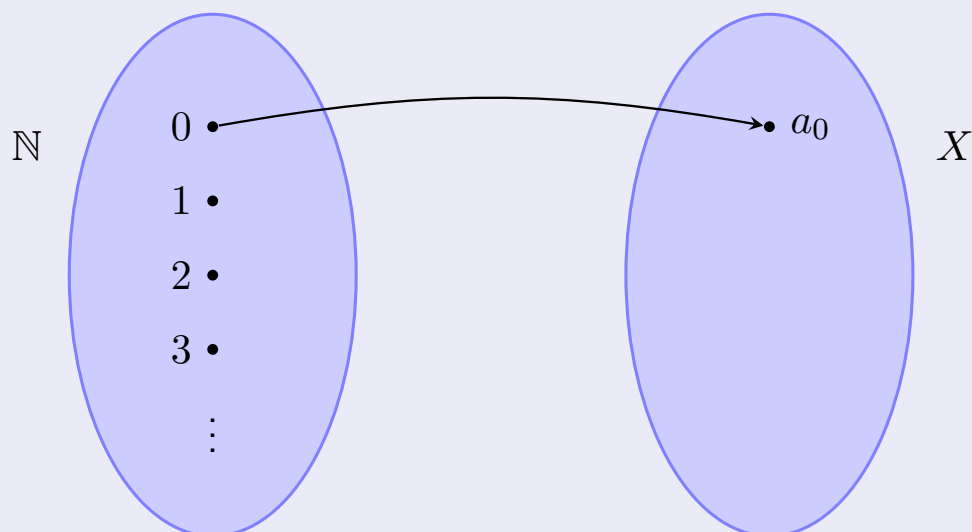
Dimostrazione (continuazione).

Viceversa, assumiamo che X sia infinito.



Dimostrazione (continuazione).

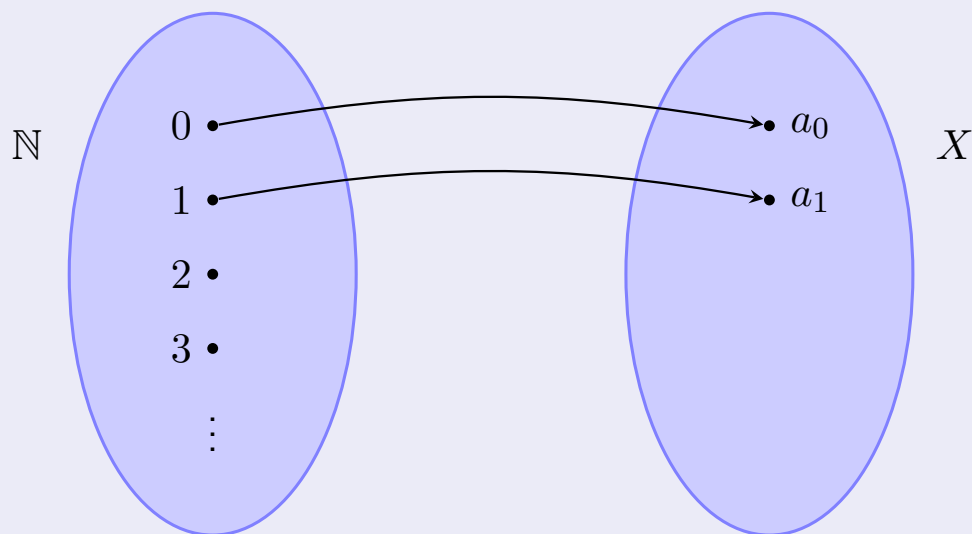
Viceversa, assumiamo che X sia infinito.



X è infinito, quindi esiste $a_0 \in X$.

Dimostrazione (continuazione).

Viceversa, assumiamo che X sia infinito.

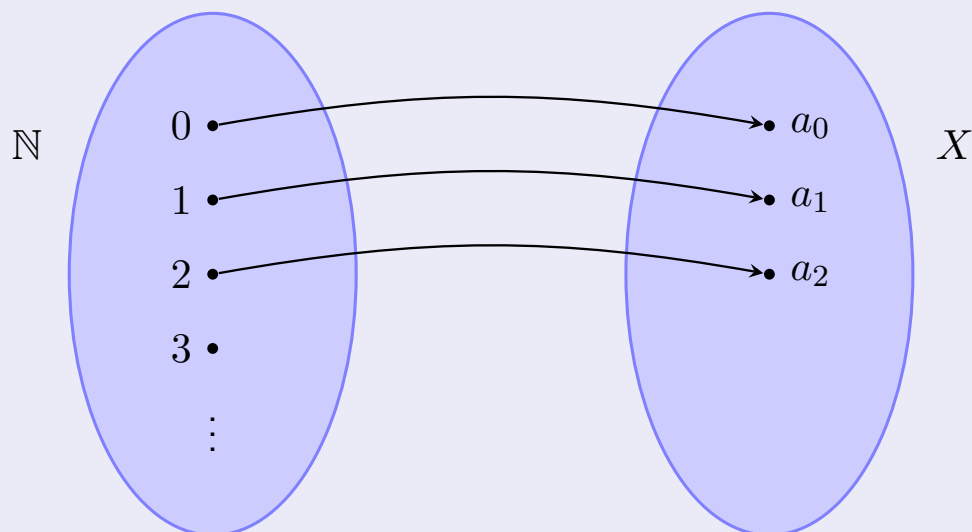


X è infinito, quindi esiste $a_1 \in X \setminus \{a_0\}$.

□

Dimostrazione (continuazione).

Viceversa, assumiamo che X sia infinito.

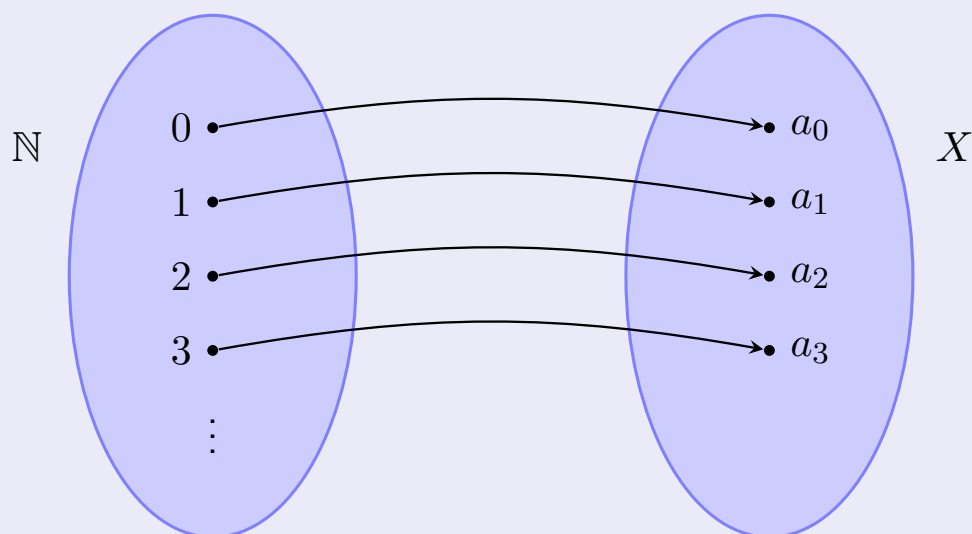


X è infinito, quindi esiste $a_2 \in X \setminus \{a_0, a_1\}$.

□

Dimostrazione (continuazione).

Viceversa, assumiamo che X sia infinito.

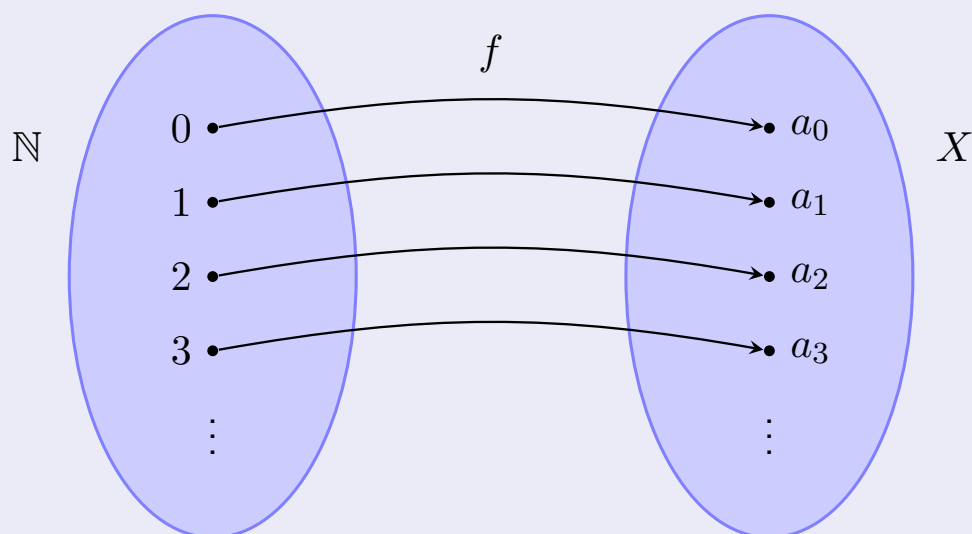


X è infinito, quindi esiste $a_3 \in X \setminus \{a_0, a_1, a_2\}$.

□

Dimostrazione (continuazione).

Viceversa, assumiamo che X sia infinito.



La funzione f così definita è un'iniezione che testimonia $\mathbb{N} \preccurlyeq X$.

□

Due insiemi finiti sono in biezione se e solo se hanno lo stesso numero di elementi. In particolare, non esiste alcuna iniezione (quindi nemmeno una biezione) tra un insieme finito e un suo sottoinsieme proprio.

Questo segue dal

Principio dei cassetti

Se $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, in qualunque modo si dispongano m oggetti in n cassetti, ci sarà almeno un cassetto che contiene più di un oggetto.

Una riformulazione più “matematica” è la seguente:

Sia X un insieme finito con m elementi e Y un insieme finito con n elementi. Se $m > n$, allora per ogni $f: X \rightarrow Y$ esistono $x, x' \in X$ distinti tali che $f(x) = f(x')$.

Nel nostro caso: se X è un qualunque insieme finito con m elementi e Y un suo sottoinsieme proprio, allora il numero n di elementi di Y è strettamente minore di m : quindi non ci può essere nessuna iniezione (e tantomeno una biezione) $f: X \rightarrow Y$.

Al contrario, la funzione f definita da $f(n) = n + 1$ è una biezione tra \mathbb{N} ed il suo sottoinsieme proprio $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$ (più in generale: \mathbb{N} è in biezione con ogni suo sottoinsieme infinito). Questa è una caratteristica degli insiemi infiniti:

Proposizione

Un insieme X è infinito se e solo se esiste $Y \subset X$ tale che $Y \approx X$.

Dimostrazione.

Se X ha n elementi e $Y \subset X$, non si può avere $Y \approx X$ perché Y ha al più $n - 1$ elementi. Se X è infinito, allora esiste una iniezione $j: \mathbb{N} \rightarrow X$. Sia $Y = X \setminus \{j(0)\}$. Allora $Y \subset X$ e si ottiene una biezione $f: X \rightarrow Y$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \notin \text{rng}(j) \\ j(n+1) & \text{se } x = j(n). \end{cases}$$

□

Insiemi numerabili

Definizione

Un insieme si dice **numerabile** se è in biezione con \mathbb{N} , ossia se la sua cardinalità è la più piccola tra quelle infinite.

Osservazione

In particolare se $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ è suriettiva, allora X è finito oppure numerabile. (Infatti, dall'esistenza di f segue che $X \preceq \mathbb{N}$. Se X è infinito, si ha anche $\mathbb{N} \preceq X$, per cui $X \approx \mathbb{N}$ per il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein.)

Per dimostrare che un insieme X è numerabile è sufficiente **enumerare** X , ovvero elencare i suoi elementi in una successione infinita

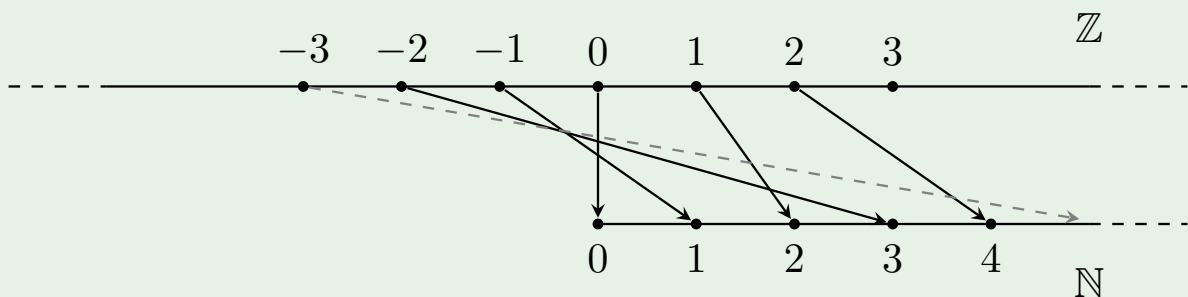
$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

in cui ogni elemento di X compaia una e una sola volta. Infatti, una tale lista definisce in realtà la biezione

$$f: \mathbb{N} \rightarrow X, \quad n \mapsto x_n.$$

Esempio

La funzione $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $f(z) = 2z$ se $z \geq 0$ e $f(z) = -2z - 1$ se $z < 0$ è una biezione.



Quindi \mathbb{Z} è numerabile.

La sua inversa dà la seguente enumerazione di \mathbb{Z} :

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots, -n, n, \dots$$

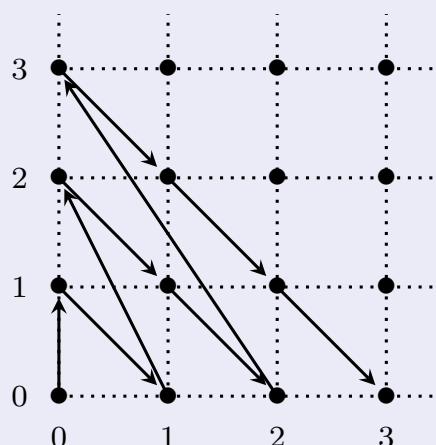
$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$$

Dimostriamo ora che: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

Dimostrazione 1.

L'**enumerazione diagonale** o **triangolare** è ottenuta enumerando \mathbb{N}^2 secondo l'ordinamento

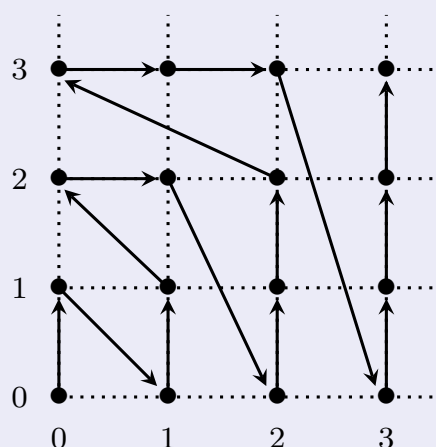
$$(x, y) \triangleleft_T (x', y') \leftrightarrow x + y < x' + y' \vee [x + y = x' + y' \wedge x < x'],$$



Dimostrazione 2.

L'**enumerazione quadrata** è ottenuta enumerando \mathbb{N}^2 secondo l'ordinamento

$$(x, y) \triangleleft_Q (x', y') \leftrightarrow (\max(x, y) < \max(x', y') \vee [\max(x, y) = \max(x', y') \wedge (x < x' \vee [x = x' \wedge y < y'])]),$$



Dimostrazione 3.

Abbiamo già dimostrato che la funzione

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (n, m) \mapsto 2^n \cdot (2m + 1) - 1$$

è una biezione. □

Osservazione

Più in generale si dimostra che, a differenza di ciò che succede per gli insiemi finiti, per ogni insieme X infinito si ha $|X \times X| = |X|$. La dimostrazione di questo risultato però non è per nulla banale.

Corollario

$|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$ per ogni $n \geq 1$. Analogamente, $|X^n| = |X|$ per ogni X infinito.

Vediamo come si costruisce una biezione tra \mathbb{N}^3 e \mathbb{N} . Sia $h_2: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ una qualunque biezione. Definiamo $h_3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ ponendo

$$h_3(n, m, k) = h_2(h_2(n, m), k)$$

Si verifica facilmente che la funzione h_3 è una biezione. Infatti, h_3 si può scrivere come $h_2 \circ (h_2 \times \text{Id})$, dove Id è la funzione identità su \mathbb{N} .

Più in generale, per ogni $n > 2$ la funzione

$$h_n: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto h_2(h_2(\dots h_2(h_2(x_1, x_2), x_3), \dots), x_n)$$

è una biezione.

Si può verificare che $h_{n+1} = h_2 \circ (h_n \times \text{Id})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

\mathbb{Q} è numerabile, ovvero $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ dato che $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

La funzione

$$g: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad (n, m) \mapsto \frac{n}{m+1}$$

è una suriezione perché ogni numero razionale q si può sempre rappresentare come rapporto tra due numeri interi $n/(m+1)$ con denominatore $(m+1)$ strettamente positivo. Perciò $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}|$.

Attenzione! g non è iniettiva, ad esempio $g(-2, 2) = -\frac{2}{3} = g(-4, 5)$.

Fatto cruciale

Poiché il prodotto di due biezioni è ancora una biezione, se $|X| = |Y|$ e $|Z| = |W|$ allora $|X \times Z| = |Y \times W|$.

Quindi $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, da cui $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ è numerabile

Ricordiamo che $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ è l'insieme di tutte le sequenze finite di numeri naturali, ovvero $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ (con la solita convenzione che $\mathbb{N}^0 = \{\varepsilon\}$, dove ε è l'unica sequenza vuota).

Proposizione

$$|\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}|.$$

Per il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein, per ottenere una biezione tra $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ed \mathbb{N} è sufficiente dimostrare che $\mathbb{N} \lesssim \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ e $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \lesssim \mathbb{N}$.

La funzione

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \quad n \mapsto \langle n \rangle$$

è chiaramente iniettiva, quindi $\mathbb{N} \lesssim \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Per definire una funzione iniettiva $f: \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ procediamo nel modo seguente:

Sia $\langle p_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ l'enumerazione di tutti i numeri primi, cioè $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, \dots

Data una sequenza non vuota $s = \langle m_0, m_1, \dots, m_k \rangle \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ costruiamo il numero non nullo

$$f(s) = p_0^{m_0+1} \cdot p_1^{m_1+1} \cdots p_k^{m_k+1}$$

e poniamo $f(\varepsilon) = 0$. Per la fattorizzazione unica, la funzione $f: \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ è iniettiva.

Osservazione

Se avessimo posto semplicemente $f(s) = p_0^{m_0} \cdot p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ la funzione non sarebbe stata iniettiva perché ad esempio

$$f(\langle 0 \rangle) = 2^0 = 1 = 2^0 \cdot 3^0 = f(\langle 0, 0 \rangle).$$

Sequenze finite

Più in generale, dato un insieme X consideriamo l'insieme $X^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ di tutte le sequenze finite a valori in X . Abbiamo visto che se X è infinito allora $X^{<\mathbb{N}}$ è infinito, poiché il suo sottoinsieme $X^1 = \{\langle x \rangle \mid x \in X\}$ è in biezione con X , e quindi è esso stesso infinito.

Se $X \neq \emptyset$ l'insieme $X^{<\mathbb{N}}$ è infinito (indipendentemente dal fatto che X sia finito o infinito).

Infatti, dato qualunque $a \in X$ si può considerare l'iniezione

$$f: \mathbb{N} \rightarrow X^{<\mathbb{N}}, \quad n \mapsto \underbrace{\langle a, a, \dots, a \rangle}_{n \text{ volte}}.$$

Esercizio 1

Dimostrare che se X è finito allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme X^n è finito. Quanti elementi ha X^n ?

Cardinalità dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$

Sia X un insieme non vuoto. Ricordiamo che 2^X è l'insieme di tutte le funzioni da X in $\{0, 1\}$, e che è in biezionamento con l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di X . In particolare, ne segue che se X è finito e ha n elementi allora $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi, da cui

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|.$$

Dimostreremo ora che questa proprietà continua a valere anche quando X è infinito.

Il teorema di Cantor

Chiaramente $X \preceq \mathcal{P}(X)$ poiché $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$ è iniettiva.

Teorema (Cantor)

Non esiste alcuna suriezione da X su $\mathcal{P}(X)$. Quindi $\mathcal{P}(X) \not\preceq X$.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che esista una suriezione $g: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ e sia

$$Y = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}.$$

Fissiamo un $\bar{x} \in X$ tale che $g(\bar{x}) = Y$. Allora

$$\bar{x} \in Y \text{ se e solo se } \bar{x} \notin g(\bar{x}) = Y,$$

contraddizione. □

Quindi per ogni insieme X si ha $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Alcune osservazioni

In particolare $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ non è in biezione con \mathbb{N} , ovvero $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, e lo stesso vale quando \mathbb{N} viene sostituito da \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , e così via.

Inoltre, vale il fatto seguente:

Ogni iniezione (suriezione, biezione) $f: X \rightarrow Y$ induce in maniera canonica la funzione iniettiva (suriettiva, biettiva)

$$\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y), \quad A \mapsto f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Di conseguenza

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{Z})| = |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|.$$

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

Teorema

$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. In particolare, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$.

Poiché

$$|2^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|,$$

è sufficiente dimostrare che $2^{\mathbb{N}} \lesssim \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \lesssim \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Data $f \in 2^{\mathbb{N}}$, sia x_f il numero reale con espansione decimale

$$0, n_0 n_1 n_2 \dots$$

dove $n_i = f(i) + 1$. Chiaramente $x_f \in (0; 1)$ e se $f, f' \in 2^{\mathbb{N}}$ sono distinte allora $x_f \neq x_{f'}$. Quindi la funzione

$$2^{\mathbb{N}} \rightarrow (0; 1), \quad f \mapsto x_f$$

dimostra che $2^{\mathbb{N}} \lesssim (0; 1) \subseteq \mathbb{R}$.

Per dimostrare che $\mathbb{R} \lesssim \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, utilizziamo il seguente

Fatto

I razionali sono densi in \mathbb{R} , ovvero se $x, y \in \mathbb{R}$ sono tali che $x < y$ allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$x < q < y.$$

Consideriamo la funzione

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q}), \quad r \mapsto A_r = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}.$$

Per la densità dei razionali in \mathbb{R} , tale funzione è iniettiva: se $r < r'$ allora preso $q \in \mathbb{Q}$ tale che $r < q < r'$ si ha che $q \in A_{r'} \setminus A_r$. Quindi $\mathbb{R} \lesssim \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Questo conclude la dimostrazione del teorema, ovvero del fatto che

$$\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Alcune osservazioni

Si ricordi che nella prima parte abbiamo in realtà dimostrato che $2^{\mathbb{N}} \lesssim (0; 1)$. Poiché ora abbiamo anche che $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx 2^{\mathbb{N}}$, questo vuol dire che $\mathbb{R} \lesssim (0; 1)$. Ma poiché $(0; 1) \subseteq \mathbb{R}$, si ha che

$$\mathbb{R} \approx (0; 1),$$

ovvero che l'intera retta reale \mathbb{R} e l'intervallo aperto $(0; 1)$ hanno lo stesso numero di punti.

Corollario

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ si ha che

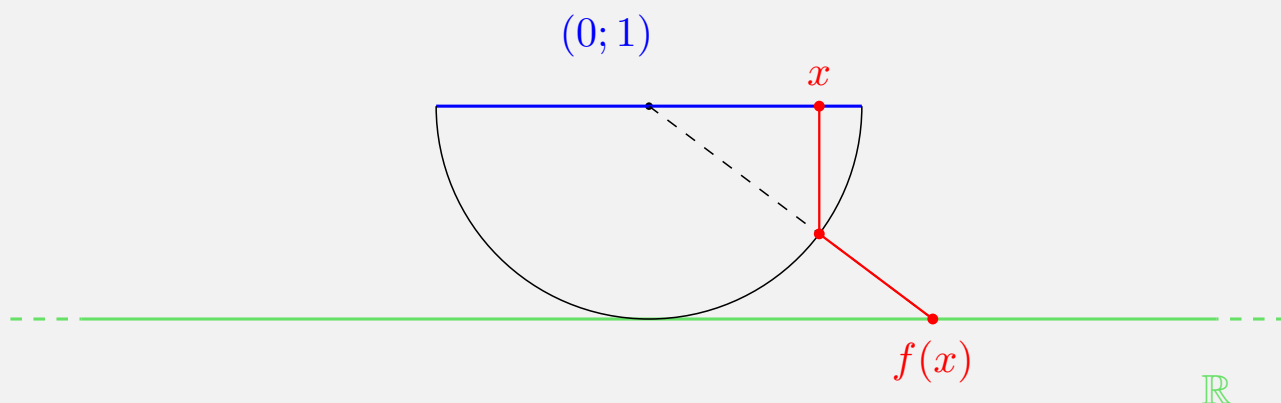
$$\mathbb{R} \approx [a; b] \approx [a; b) \approx (a; b] \approx (a; b).$$

Alcune osservazioni

Il fatto che

$$(0; 1) \approx \mathbb{R}$$

può essere anche dimostrato geometricamente utilizzando la **proiezione stereografica**.



Alcune osservazioni

Poiché \mathbb{R} è un insieme infinito, si ha che

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}.$$

Quindi la retta reale e il piano cartesiano hanno lo stesso numero di punti!

C'è anche una semplice suriezione di $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1] \times [0; 1]$ che permette di ottenere in modo esplicito lo stesso risultato: f assegna (modulo la opportuna attenzione ai numeri che ammettono due espansioni decimali) al numero $x = 0, x_0 x_1 x_2 x_3 \dots$ la coppia (y, z) dove

$$y = 0, x_0 x_2 x_4 x_6 \dots x_{2i} \dots \quad \text{e} \quad z = 0, x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 \dots x_{2i+1} \dots$$

Infatti, data qualunque coppia $(y, z) \in ([0; 1])^2$ con $y = 0, y_0 y_1, \dots$ e $z = 0, z_0 z_1 \dots$ si ha $f(x) = (y, z)$ con $x = 0, y_0 z_0 y_1 z_1 \dots$.

Utilizzando il fatto che l'iniezione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 0)$ testimonia $\mathbb{R} \lesssim \mathbb{R}^2$, si ottiene quindi

$$\mathbb{R} \lesssim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx [0; 1] \times [0; 1] \lesssim [0; 1] \subseteq \mathbb{R}.$$

Esercizio

Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}$. Spiegare perché da questo segue anche $[a; b] \approx [a; b]^n$ e $(a; b) \approx (a; b)^n$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$.

Esercizio

Dimostrare che se Y è un insieme infinito e $X \neq \emptyset$ è tale che $|X| \leq |Y|$, allora

$$|X \cup Y| = |X \times Y| = |Y|.$$

Suggerimento. Utilizzare il fatto che, essendo Y infinito, si ha $|Y \times Y| = |Y|$.

Esercizio

Dimostrare che date due circonferenze C_1, C_2 si ha $|C_1| = |C_2|$ e che $|C_1| = |\mathbb{R}|$.

Esercizio

Sia $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'insieme di tutte le funzioni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

- 1 Dimostrare che la funzione

$$F: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \quad f \mapsto \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = f(n)\}$$

è iniettiva.

- 2 Utilizzando quanto visto a lezione, dimostrare che

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|.$$

Esercizio

Dimostrare che gli insiemi

$$\left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è iniettiva} \right\}$$

e

$$\left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è suriettiva} \right\}$$

sono in biezione con $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Concludere che anche l'insieme

$$\left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è biettiva} \right\}$$

ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Esercizio

Dimostrare che l'insieme di tutte le rette nel piano cartesiano è in biezione con \mathbb{R} .

Esercizio

Dimostrare che l'insieme delle sequenze binarie finite (ovvero l'insieme di tutte le sequenze finite di 0 e 1) è un insieme numerabile.

Esercizio

Più in generale, dimostrare che se X è finito o numerabile, allora $X^{<\mathbb{N}}$ è numerabile.

Sia X un insieme non vuoto. Una sequenza $s = \langle s_0, \dots, s_n \rangle \in X^{<\mathbb{N}}$ contiene ripetizioni se in s c'è almeno un elemento ripetuto due volte, ovvero se esistono $0 \leq i < j \leq n$ tali che $s_i = s_j$. Se ciò non accade diciamo che s è *senza ripetizioni*.

Esercizio

Dimostrare che per ogni insieme X infinito, l'insieme

$$\left\{ s \in X^{<\mathbb{N}} \mid s \text{ è senza ripetizioni} \right\}$$

è un insieme infinito. Dimostrare anche che se X è numerabile, allora anche l'insieme delle sequenze senza ripetizioni lo è.

Esercizio

Dimostrare che se invece X è finito, allora l'insieme delle sequenze $s \in X^{<\mathbb{N}}$ senza ripetizioni è un insieme finito. (Facoltativo: quanti elementi ha?)

Esercizio

Dimostrare che per ogni insieme X non vuoto, l'insieme

$$\left\{ s \in X^{<\mathbb{N}} \mid s \text{ contiene ripetizioni} \right\}$$

è un insieme infinito, e che se X è numerabile allora anche l'insieme delle sequenze contenenti ripetizioni lo è.

Esercizio

Dimostrare che l'insieme di tutti i programmi che si possono scrivere in un dato linguaggio di programmazione è numerabile.

Approfondimenti

Il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

Se $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$ allora $X \approx Y$. In particolare, $|X| \leq |Y| \leq |X|$ se e solo se $|X| = |Y|$.

Dimostrazione.

Siano $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ iniezioni. Definiamo

$$\begin{aligned} X_0 &= X & Y_0 &= Y \\ X_{n+1} &= g[Y_n] & Y_{n+1} &= f[X_n] \end{aligned}$$

Per definizione di Y_{n+1} , ciascuna funzione $f \upharpoonright X_i: X_i \rightarrow Y$ è iniettiva e ha range Y_{i+1} , ovvero è una biezione tra X_i e Y_{i+1} . Da questo segue che per ogni $i \in \mathbb{N}$ la funzione $f \upharpoonright (X_{2i} \setminus X_{2i+1}): X_{2i} \setminus X_{2i+1} \rightarrow Y$ è una funzione iniettiva il cui range è esattamente $Y_{2i+1} \setminus Y_{2i+2}$, quindi è una biezione tra $X_{2i} \setminus X_{2i+1}$ e $Y_{2i+1} \setminus Y_{2i+2}$.

(continua)

Dimostrazione. (continuazione)

Similmente, si dimostra che per ogni $i \in \mathbb{N}$ la funzione

$g \upharpoonright (Y_{2i} \setminus Y_{2i+1}): Y_{2i} \setminus Y_{2i+1} \rightarrow X_{2i+1} \setminus X_{2i+2}$ è una biezione, per cui $g^{-1} \upharpoonright (X_{2i+1} \setminus X_{2i+2})$ è una biezione tra $X_{2i+1} \setminus X_{2i+2}$ e $Y_{2i} \setminus Y_{2i+1}$.

Siano $X_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ e $Y_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Mostriamo ora che la funzione $f \upharpoonright A_\infty: A_\infty \rightarrow Y$ ha range B_∞ , ovvero è una biezione tra A_∞ e B_∞ . Se $x \in A_\infty$, allora $x \in X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi per definizione di Y_{n+1} si ha $f(x) \in Y_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $f(x) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n = Y_\infty$ (il fatto che $f(x) \in Y_0$ è banale perché $Y_0 = Y$). Questo mostra che $\text{rng}(f \upharpoonright X_\infty) \subseteq Y_\infty$. Viceversa, dato $y \in Y_\infty$ allora $y \in Y_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare, poiché $y \in Y_1 = f[X_0] = \text{rng}(f)$ esiste un unico (visto che f è iniettiva) $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Inoltre, poiché $f^{-1}(Y_{n+1}) = X_n$, da $f(x) = y \in Y_{n+1}$ segue $x \in X_n$, perciò $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = X_\infty$. Dato che $f(x) = y$ e $x \in X_\infty$, questo dimostra che $y \in \text{rng}(f \upharpoonright X_\infty)$. Dunque anche $Y_\infty \subseteq \text{rng}(f \upharpoonright X_\infty)$, e per il principio di doppia inclusione $f \upharpoonright X_\infty = Y_\infty$.

(continua)

Dimostrazione. (continuazione).

Dunque abbiamo dimostrato che

- per ogni $i \in \mathbb{N}$, la funzione $f \upharpoonright (X_{2i} \setminus X_{2i+1}): X_{2i} \setminus X_{2i+1} \rightarrow Y$ è una biezione tra $X_{2i} \setminus X_{2i+1}$ e $Y_{2i+1} \setminus Y_{2i+2}$;
- per ogni $i \in \mathbb{N}$, la funzione $g^{-1} \upharpoonright (X_{2i+1} \setminus X_{2i+2})$ è una biezione tra $X_{2i+1} \setminus X_{2i+2}$ e $Y_{2i} \setminus Y_{2i+1}$;
- la funzione $f \upharpoonright A_\infty: A_\infty \rightarrow Y$ è una biezione tra A_∞ e B_∞ .

Quindi la funzione

$$h: X \rightarrow Y, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X_\infty \\ f(x) & \text{se } x \in X_{2i} \setminus X_{2i+1} \text{ per qualche } i \in \mathbb{N} \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X_{2i+1} \setminus X_{2i+2} \text{ per qualche } i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

è una biezione tra X e Y . □