Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia B un insieme non vuoto e sia $L = \{g\}$ un linguaggio del prim'ordine con g simbolo di funzione unaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle B, g\rangle$, l'affermazione: "g è suriettiva"? 2 punti

☐ $\exists x \forall y(g(x) = y)$
☐ $\forall x \forall y(g(x) = y)$
☐ $\forall x \exists y(g(x) = y)$
■ $\forall y \exists x(g(x) = y)$

(b) Sia $L = \{g\}$ un linguaggio del prim'ordine con g simbolo di funzione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\neg\exists y\,(g(y, y) = y)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{Q}, +\rangle$? 2 punti

☐ "C'è un numero razionale che è il doppio di se stesso."
☐ "C'è un numero razionale che non è il doppio di se stesso."
■ "Tutti i numeri razionali y sono tali che $y + y \neq y$."
■ "Nessun numero razionale è il doppio di se stesso."

(c) Sia B un insieme non vuoto di cardinalità finita e C un insieme di cardinalità infinita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

☐ $B \times C$ ha cardinalità finita.
■ $B \setminus C$ ha cardinalità finita.
☐ $B \triangle C$ ha cardinalità finita.
☐ $C \setminus B$ ha cardinalità finita.

(d) Siano S, P relazioni binarie su un insieme B. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

■ Se per ogni $b \in B$ esiste un solo $c \in B$ tale che $S(b, c)$, allora S è una funzione.
■ Se S è riflessiva e $S \subseteq P$, anche P è riflessiva.
☐ Se S è riflessiva e $S \supseteq P$, anche P è riflessiva.
■ Se per ogni $b, c \in B$ vale che $S(b, c)$ se e solo se $P(c, b)$, allora $P = S^{-1}$.

(e) Siano Q e R formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ■ $\neg Q \vee (R \rightarrow Q)$ è una tautologia.
- □ Se Q è una tautologia allora non è soddisfacibile.
- ■ $Q \leftrightarrow R \equiv (Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)$
- ■ Se $Q \models R$, allora $\neg Q \vee R$ è una tautologia.

(f) Siano B, C, D lettere proposizionali e Q una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

B	C	D	Q
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**

- □ $B \wedge C \models Q$
- □ Q è insoddisfacibile.
- ■ $\neg Q$ è soddisfacibile.
- ■ $Q \models \neg C$

(g) Siano $g\colon \mathbb{Q}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}$, dove $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 1, e $h\colon \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 1}$ definite da $g(y) = \sqrt{y-1}$ e $h(z) = z^2 + 1$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- □ g è una funzione suriettiva.
- ■ $g \circ h(b) = b$ per ogni $b \in \mathbb{Q}$ con $b \geq 0$.
- □ h è una funzione iniettiva.
- ■ $g \circ h\colon \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{S, g, d\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario S, un simbolo di funzione binario g e un simbolo di costante d.

Consideriamo la struttura $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, <, +, 1 \rangle$. Stabilire se:

- $\mathcal{Q} \models \neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))[y/2, w/2.5]$
- $\mathcal{Q} \models S(w, y) \vee S(g(y, d), w)[y/2, w/2.5]$
- $\mathcal{Q} \models (\neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))) \rightarrow (S(w, y) \vee S(g(y, d), w))[y/2, w/2.5]$
- $\mathcal{Q} \models \forall y \forall w[(\neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))) \rightarrow (S(w, y) \vee S(g(y, d), w))][y/2, w/1.5]$

Consideriamo ora la struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, 1 \rangle$.

Verificare se

$$\mathcal{N} \models \forall y \forall w[(\neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))) \rightarrow (S(w, y) \vee S(g(y, d), w))][y/2, w/3]$$

L'enunciato $\forall y \forall w[(\neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))) \rightarrow (S(w, y) \vee S(g(y, d), w))]$ è una tautologia?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione: Si verifica che:

- $\mathcal{Q} \models \neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))[y/2, w/2.5]$ se e solo se $2.5 \neq 2$ *e* $2.5 \neq 2 + 1 = 3$ che chiaramente è il caso.

- $\mathcal{Q} \models S(w, y) \vee S(g(y, d), w)[y/2, w/2.5]$ se e solo se $2.5 < 2$ *o* $2 + 1 = 3 < 2.5$ che chiaramente non è il caso.

- $\mathcal{Q} \not\models (\neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))) \rightarrow (S(w, y) \vee S(g(y, d), w))[y/2, w/2.5]$ dato che, come verificato nei due punti precedenti, la premessa dell'implicazione è verificata con l'assegnamento dato, mentre la tesi non lo è con lo stesso assegnamento.

- $\mathcal{Q} \not\models \forall y \forall w[(\neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))) \rightarrow (S(w, y) \vee S(g(y, d), w))][y/2, w/1.5]$ come testimoniato dall'assegnamento al punto precedente alle variabili y, w.

Sia ψ l'enunciato

$$\forall y \forall w[(\neg(w = y) \wedge \neg(w = g(y, d))) \rightarrow (S(w, y) \vee S(g(y, d), w))].$$

Sia in $\mathcal{Q}$ che in $\mathcal{N}$, l'interpretazione di ψ è

> Per ogni y e w, se w è diverso sia da y che da $y + 1$ allora o $w < y$ oppure $y + 1 < w$. (Equivalentemente: per ogni y non c'è alcun w strettamente compreso tra y e $y + 1$.)

Quindi si ha che:

- $\mathcal{Q} \not\models \psi$. Infatti, l'assegnamento $y = 2$ e $w = 2.5$ mostra che w è strettamente compreso tra y e $y + 1$ (come già visto per la soluzione del terzo e quarto item dell'esercizio).

- Al contrario, $\mathcal{N} \models \psi$ perché non c'è nessun numero naturale strettamente compreso tra due numeri consecutivi arbitrari (ovvero tra due numeri del tipo y e $y+1$).

L'enunciato ψ non è una tautologia in quanto risulta falso nella struttura $\mathcal{Q}$.

Esercizio 3 9 punti

Sia B un insieme non vuoto e $S \subseteq B \times B$ una relazione binaria. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle B, S\rangle$ mediante il linguaggio $L = \{S\}$ con un simbolo di relazione binaria le seguenti affermazioni:

1. S è simmetrica
2. S è un ordine
3. S^{-1} è antisimmetrica
4. $\mathrm{ran}(S) = B$.

Soluzione: 1. S è simmetrica: $\forall x \forall y (S(x,y) \rightarrow S(y,x))$

2. S è un ordine:

$$\forall x S(x,x) \wedge \forall x \forall y (S(x,y) \wedge S(y,x) \rightarrow x = y) \wedge \forall x \forall y \forall z (S(x,y) \wedge S(y,z) \rightarrow S(x,z))$$

3. S^{-1} è antisimmetrica: $\forall x \forall y (S(y,x) \wedge S(x,y) \rightarrow y = x)$

4. $\mathrm{ran}(S) = B$: $\forall y \exists x S(x,y)$