Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano $\varphi(z)$ e $\psi(z,w)$ formule del prim'ordine e σ un enunciato. 2 punti

■ $\forall z \neg\varphi(z) \models \neg\exists z\, \varphi(z)$

■ Se $\mathcal{C}$ è una struttura tale che $\mathcal{C} \models \neg\exists z \varphi(z)$, allora $\mathcal{C} \models \forall z\, (\varphi(z) \to \sigma)$.

■ Se $\mathcal{D}$ è una struttura tale che $\mathcal{D} \models \exists w\, \varphi(w)$, allora $\mathcal{D} \models \exists w\, (\neg\sigma \vee \varphi(w))$.

□ $\forall z \exists w\, \psi(w,z) \models \exists w \forall z\, \psi(w,z)$

(b) Consideriamo le funzioni $h\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}, \quad (z,w) \mapsto 4z^2 + w$ 2 punti
e $k\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2, \quad z \mapsto (z, 4z)$. Allora

□ k è iniettiva e h è l'inversa di k.

■ Esiste $z \in \mathbb{Z}$ tale che $k(z) = (1,4)$.

□ la funzione h è iniettiva.

■ $h \circ k(z) = 4z(z+1)$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$.

(c) Sia R la proposizione $\neg\mathrm{A} \to \neg\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{D}$. Allora 2 punti

■ R è conseguenza logica di $\mathrm{C} \to \mathrm{A}$.

□ R non è soddisfacibile.

□ Se i è un'interpretazone tale che $i(\mathrm{A}) = 0$ allora necessariamente $i(\mathrm{C}) = i(\mathrm{D}) = 0$.

□ R è una tautologia.

(d) Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente 2 punti
"x è un numero primo" utilizzando il linguaggio $\cdot, 1$ e relativamente alla struttura $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$

□ $\neg(x = 1) \wedge \forall y (y \cdot x = x \cdot x \vee x \cdot y = x)$

□ $x = x \cdot 1 \wedge \forall y (\neg\exists z (x \cdot y = z))$

□ $(x = 1) \vee \forall y \forall z (y \cdot z = x \to y = 1 \vee z = 1)$

■ $\neg(x = 1) \wedge \forall y (\exists z (y \cdot z = x) \to y = 1 \vee y = x)$

(e) Sia T una relazione binaria su un insieme non vuoto C. 2 punti

■ Se T è un preordine e Q è un'altra relazione binaria su C tale che $T \subseteq Q$, allora Q è riflessiva.

□ Se T è antisimmetrica, allora non può essere anche simmetrica.

■ Se T è riflessiva, allora non può essere anche irriflessiva.

■ Se T è una relazione di equivalenza, allora è anche un preordine.

(f) Sia $L = \{R, h, k, c\}$ un linguaggio del prim'ordine con R simbolo di relazione binario, h simbolo di funzione unario, k simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Quali dei seguenti sono L-termini? 2 punti

■ $h(k(k(c, h(c)), k(h(c), c)))$

■ $k(k(h(c), h(c)), k(h(c), h(c)))$

□ $k(h(h(k(c, c), c)), c)$

□ $R(c, h(c))$

(g) Siano D e A insiemi tali che $A \subseteq D$. Allora possiamo concludere con certezza che 2 punti

■ $(D \cup A) \setminus (D \setminus A) = A$.

□ se $|D| = |A|$ allora $D \setminus A$ è finito.

□ D e A non possono essere disgiunti.

■ se $|D| \leq |A|$ allora $|D| = |A|$.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{R, T, c\}$ con R ed T simboli di relazione binaria e c simbolo di costante. Consideriamo la L-struttura $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Z}, >, |, 3 \rangle$, dove $|$ è l'usuale relazione di divisibilità.

Sia φ la formula

$$(R(z, w) \wedge T(c, w))$$

e ψ la formula

$$(R(z, w) \rightarrow T(c, w))$$

1. Determinare se:
   - $\mathcal{C} \models \varphi[z/-1000, w/-2000]$,
   - $\mathcal{C} \models \varphi[z/-1000, w/-3000]$,
   - $\mathcal{C} \models \exists w\, \varphi[z/-1000, w/-999]$.
2. Determinare se $\mathcal{C} \models \forall z \exists w \varphi[z/0, w/0]$.
3. Determinare se:
   - $\mathcal{C} \models \psi[z/-1000, w/-2000]$,
   - $\mathcal{C} \models \psi[z/-1000, w/-3000]$,
   - $\mathcal{C} \models \forall w\, \psi[z/-1000, w/-998]$.
4. Determinare se $\mathcal{C} \models \exists z \forall w\, \psi[z/-1, w/3]$.
5. Determinare se $\forall z \exists w\, \varphi \models \exists z \forall w\, \psi$.

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. La formula φ è verificata in $\mathcal{C}$ con l'assegnamento z/n e w/m se e solo se $n > m$ e m è multiplo di 3. Quindi
   - $\mathcal{C} \not\models \varphi[z/-1000, w/-2000]$ perché -2000 non è multiplo di 3
   - $\mathcal{C} \models \varphi[z/-1000, w/-3000]$ perché -3000 è multiplo di 3 e $-1000 > -3000$
   - $\mathcal{C} \models \exists w\, \varphi[z/-1000, w/-999]$, come mostrato dall'assegnazione di w a -3000 nel punto precedente.

2. L'enunciato $\forall z \exists w\, \varphi$ interpretato in $\mathcal{C}$ afferma che

   > Per ogni numero intero z esiste un numero intero w minore di z che è divisibile per 3,

   ovvero

   > Vi sono numeri interi arbitrariamente piccoli che sono multipli di 3.

   Quindi si ha che $\mathcal{C} \models \forall z \exists w\, \varphi$.

3. La formula ψ è verificata in $\mathcal{C}$ con l'assegnamento z/n e w/m se e solo se si verifica che

Se $n > m$, allora m è multiplo di 3.

Quindi

- $\mathcal{C} \not\models \psi[z/-1000, w/-2000]$ perché $-1000 > -2000$ ma -2000 non è multiplo di 3, e quindi l'antecedente dell'implicazione in ψ è vero mentre il conseguente è falso;
- $\mathcal{C} \models \psi[z/-1000, w/-3000]$ perché -3000 è multiplo di 3 e quindi con questi assegnamenti il conseguente dell'implicazione in ψ è verificato, rendendo quindi vera ψ stessa. (Si può notare che anche l'antecedente dell'implicazione in ψ è vero con tale assegnamento, anche se questo è di fatto irrilevante nel determinare se $\psi[z/-1000, w/-3000]$ sia vera in $\mathcal{C}$.)
- $\mathcal{C} \not\models \forall w\, \psi[z/-1000, w/-998]$, come mostrato dall'assegnazione di w a -2000 nel punto precedente.

4. L'enunciato $\exists z \forall w\, \psi$ interpretato in $\mathcal{C}$ afferma che

   Esiste un numero intero z tale che tutti i numeri interi minori di esso sono divisibili per 3,

   ovvero

   Tutti i numeri interi sufficientemente piccoli sono multipli di 3.

   Quindi si ha che $\mathcal{C} \not\models \exists z \forall w\, \psi$.

5. Poiché $\mathcal{C} \models \forall z \exists w\, \varphi$ ma $\mathcal{C} \not\models \exists z \forall w\, \psi$, per definizione di conseguenza logica si ha che $\forall z \exists w\, \varphi \not\models \exists z \forall w\, \psi$.

Esercizio 3 9 punti

Sia C un insieme non vuoto e $h \colon C \to C$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle C, h \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{h\}$ con un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. h è biettiva
2. se h è biettiva, allora h è una funzione costante (ovvero il suo range contiene un solo punto)
3. $h \circ h$ è suriettiva
4. ogni elemento ha almeno due preimmagini distinte.

Soluzione:

1. h è biettiva: $\forall y \exists x (h(x) = y) \wedge \forall x \forall y (h(x) = h(y) \to x = y)$.
2. se h è biettiva, allora h è una funzione costante:
   $[\forall y \exists x (h(x) = y) \wedge \forall x \forall y (h(x) = h(y) \to x = y)] \to \exists y \forall x (h(x) = y)$.
3. $h \circ h$ è suriettiva: $\forall y \exists x (h(h(x)) = y)$.
4. ogni elemento ha almeno due preimmagini distinte:
   $\forall y \exists x_1 \exists x_2 (\neg(x_1 = x_2) \wedge h(x_1) = y \wedge h(x_2) = y)$.