Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) La funzione $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $h(q) = 4q^2 - 1$ è — 2 punti

- ☐ biettiva.
- ☐ iniettiva ma non suriettiva.
- ■ né iniettiva, né suriettiva.
- ☐ suriettiva ma non iniettiva.

(b) Consideriamo il linguaggio L con due simboli di funzione unaria h, k. Quali delle seguenti espressioni sono L-enunciati che formalizzano correttamente relativamente alla L-struttura $\langle C, h, k\rangle$ l'affermazione "la funzione h è l'inversa della funzione k" — 2 punti

- ■ $\forall x(h(k(x)) = x \wedge k(h(x)) = x)$
- ☐ $h = k^{-1}$
- ☐ $\forall x(h(k(x)) = x)$
- ☐ $\forall x(h(x) \cdot k(x) = 1)$

(c) Siano C, D, A lettere proposizionali e R una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: — 2 punti

C	D	A	R
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

- ☐ R $\models$ D.
- ■ $\neg$R $\wedge$ D è una contraddizione.

- ■ R non è insoddisfacibile.
- ■ $R \wedge A \models D$

(d) La relazione Q su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definita da $z \, Q \, w$ se e solo se $\exists x(z \cdot x = w)$ — 2 punti

- ■ è transitiva.
- □ non è una relazione d'equivalenza.
- ■ è riflessiva.
- □ non è simmetrica.

(e) Siano φ, ψ delle L-formule. — 2 punti

- □ φ è soddisfacibile se e solo se $\neg\varphi \to \psi$ è soddisfacibile.
- ■ Se φ è una tautologia allora $\neg\varphi \to \psi$ è soddisfacibile.
- ■ Se φ è soddisfacibile allora $\neg\psi \to \varphi$ è soddisfacibile.
- □ Se $\neg\varphi$ è soddisfacibile allora $\neg\varphi \to \psi$ è soddisfacibile.

(f) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? — 2 punti

- □ $\{(z, w) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{Z} \vee w \notin \mathbb{Q}\}$
- ■ $\{(z, w) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{Z} \wedge w \in \mathbb{Q}\}$
- □ $\{z \in \mathbb{R} \mid z^2 - 3z + 4 = 0\}$
- ■ $\{z \in \mathbb{R} \mid \sqrt{z} \in \mathbb{N}\}$

(g) Sia φ la formula $\forall z \forall w R(w, z) \vee \neg\exists w R(z, w)$, dove R è un simbolo di predicato binario. — 2 punti

- □ φ è un enunciato.
- □ La variabile w occorre libera e vincolata in φ.
- □ φ è un enunciato e la variabile z occorre sia libera che vincolata in φ.
- ■ La variabile z occorre libera e vincolata in φ.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{h\}$ con h simbolo di funzione binario. Sia ψ la L-formula

$$\exists w\,(h(w,w) = z).$$

1. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \psi[y/2, x/1].$$
2. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \psi[y/2, x/2].$$
3. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \forall z \psi[y/2, x/2].$$
4. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \exists z \psi[y/2, x/1].$$
5. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \psi[y/1, x/3].$$
6. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \psi[y/\sqrt{2}, x/-2].$$
7. È vero che $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \forall z\, \psi[y/1, x/3]$?
8. Sia $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. È vero che $\mathcal{C} \models \forall z\, \psi[y/1, x/3]$?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. L'interpretazione di ψ in $\langle \mathbb{N}, + \rangle$: "Esiste un numero naturale w tale che $z = w + w$ (ovvero $z = 2w$)". Dunque la risposta al primo punto è no poiché 1 è un numero naturale dispari.

2. Per quanto visto sopra la risposta al secondo punto si poiché 2 è un numero naturale pari.

3. Per quanto visto sopra si ha che
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \not\models \forall z \psi[y/2, x/2]$$
come testimoniato dai numeri dispari (se assegnati a z per ψ nella struttura $\langle \mathbb{N}, + \rangle$).

4. Per quanto visto sopra si ha che
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \exists z \psi[y/2, x/2]$$
come testimoniato da qualunque numero pari (se assegnato a z per ψ nella struttura $\langle \mathbb{N}, + \rangle$).

5. Posto $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, l'interpretazione di ψ in $\mathcal{B}$ è: "Esiste un numero reale w tale che $z = w \cdot w$ (ovvero $z = w^2$)". Quindi la risposta al punto quattro è positiva in quanto 3 è il quadrato del numero reale $\sqrt{3}$.

6. Per quanto scritto sopra la risposta al punto cinque è negativa in quanto -2 è un numero reale negativo e quindi non può essere il quadrato di alcun numero reale.

7. Per quanto visto al punto cinque, si ha che $\mathcal{B} \not\models \forall z\, \psi$: per esempio -3 è un assegnamento alla variabile z che testimonia questa asserzione (se assegnato a z per ψ nella struttura $\mathcal{B}$).

8. Per quanto visto ai punti precedenti si ha che $\mathcal{C} \models \forall z\, \psi$: infatti, tutti i numeri reali strettamente positivi sono il quadrato di un numero reale strettamente positivo.

Esercizio 3 9 punti

Sia $\langle C, < \rangle$ un ordine lineare stretto e siano D, A sottoinsiemi di C. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle C, <, D, A \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{<, D, A\}$ con un simbolo di relazione binaria e due simboli di predicato unari le seguenti affermazioni:

1. Tra due elementi di D c'è un elemento di A.
2. Dati due elementi di D, c'è necessariamente un elemento di A che è maggiore di entrambi.
3. Qualche elemento di D è minore di qualche elemento di A.
4. Il più grande elemento di D coincide con il più piccolo elemento di A.

Soluzione: 1. Tra due elementi di D c'è un elemento di A:
$\forall x \forall y\, (x < y \wedge D(x) \wedge D(y) \to \exists z (A(z) \wedge x < z \wedge z < y)))$.

2. Dati due elementi di D, c'è necessariamente un elemento di A che è maggiore di entrambi:
$\forall x \forall y (D(x) \wedge D(y) \to \exists z (A(z) \wedge x < z \wedge y < z))$

3. Qualche elemento di D è minore di qualche elemento di A:
$\exists x \exists y (D(x) \wedge A(y) \wedge x < y)$

4. Il più grande elemento di D coincide con il più piccolo elemento di A:
$\exists x (D(x) \wedge \forall y (D(y) \to y < x \vee x = y) \wedge A(x) \wedge \forall y (A(y) \to x < y \vee x = y))$