Esercizi di Modellazione per il corso di Calcolo Matriciale e Ricerca Operativa

6 gennaio 2010

Modelli di programmazione lineare

Molti problemi di interesse pratico si prestano ad essere descritti e risolti come *modelli di programmazione matematica.* Un modello (o *programma*) è la descrizione di un problema che richiede di massimizzare (o minimizzare) una funzione di costo o profitto su un certo dominio. La scrittura usuale è

$$\max\ z = f(x) \qquad \text{(oppure: } \min\ z = f(x)) \tag{1}$$

soggetto a

$$g_i(x) \begin{cases} \leq b_i \\ = b_i \\ \geq b_i \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Molti problemi di interesse pratico si prestano ad essere descritti e risolti come *modelli di programmazione matematica.* Un modello (o *programma*) è la descrizione di un problema che richiede di massimizzare (o minimizzare) una funzione di costo o profitto su un certo dominio. La scrittura usuale è

$$\max\ z = f(x) \qquad \text{(oppure: } \min\ z = f(x)) \tag{4}$$

soggetto a

$$g_i(x) \begin{cases} \leq b_i \\ = b_i \\ \geq b_i \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

In un modello sono presenti:

- una serie di *variabili di controllo* in funzione delle quali viene formulato ogni altro elemento del modello; queste variabili, almeno in parte, corrispondono alle quantità agendo sulle quali la soluzione verrà implementata;
- una *funzione obiettivo* $f(x)$ che determina un costo o profitto legato alla soluzione;

- una o più serie di *vincoli,* che correlano tra loro i valori delle variabili, imponendo condizioni di fisica realizzabilità e/o requisiti particolari richiesti alla soluzione.

Tra i modelli di programmazione matematica hanno particolare rilievo i modelli di *programmazione lineare,* nei quali la $f(x)$ e le $g_i(x)$ sono espressioni *lineari.* Un modello di programmazione lineare è quindi esprimibile sempre come

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7}$$

soggetto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{cases} \leq b_i \\ = b_i \\ \geq b_i \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

I campi di esistenza delle variabili x_j sono di solito di tipo continuo (spesso non negativo) oppure intero non negativo ($x_j \in \mathbb{Z}_+$), oppure binario ($x_j \in \{0, 1\}$) a seconda del tipo di decisione che tali variabili modellano.

La particolarità dei modelli lineari è legata alla loro maggiore semplicità, che li rende più facilmente risolvibili rispetto ai modelli non lineari; in effetti sono ormai disponibili pacchetti software commerciali in grado di risolvere in modo efficiente programmi lineari di notevoli dimensioni (intese come quantità di variabili e di vincoli). Questo rende spesso preferibile, per la risoluzione di un problema, lo sviluppo di un modello lineare anche quando un modello non lineare potrebbe essere più compatto.

Lo sviluppo di un modello di programmazione lineare parte dall'analisi di una situazione reale (più o meno schematizzata) e, in modo simile a quanto accade nello sviluppo di una procedura software, richiede di identificare le variabili di controllo ed i rispettivi domini, i vincoli e la funzione obiettivo. Non ci sono regole rigide da seguire: il modello finale nasce spesso — in particolare nela caso di situazioni complesse — per raffinamenti successivi.

ESERCIZIO 1. Scrivere il modello in programmazione lineare del seguente problema. Un'azienda alimentare deve pianificare la produzione di un prodotto per i prossimi 4 mesi. Non ci sono giacenze in magazzino all'inizio del periodo e non ce ne devono essere alla fine dei 4 mesi. La domanda mensile prevista è di 120 ton, 160 ton, 300 ton e 200 ton rispettivamente (ipotesi: la produzione viene stoccata e rilasciata interamente a fine mese). La capacità produttiva mensile è 140 ton, 150 ton, 140 ton e 160 ton rispettivamente ad un costo di 10 euro/ton. In caso di necessità è possibile produrre in straordinario aumentando la capacità mensile di (al più) 50 ton, 75 ton, 70 ton e 80 ton rispettivamente. La produzione straordinaria ha un costo addizionale di 6 euro/ton. Inoltre, per garantire una produzione omogenea si vuole che la produzione ordinaria di ciascun mese sia almeno pari al 10% della produzione totale dei primi tre. Le eventuali giacenze a fine mese costano 5 euro/ton. L'obiettivo è quello di pianificare la produzione di costo minimo.

ESERCIZIO 2. Lo stato di Islandia ha quattro industrie esportatrici: acciaio, motori, elettronica e plastica. Il ministro dell'economia di questo stato vuole massimizzare il saldo esportazioni-importazioni. La moneta di Islandia è il klutz. I prezzi in klutz sul mercato mondiale per unità di acciaio, motori, elettronica e plastica sono rispettivamente 500, 1500, 300 e 1200. La produzione di una unità di acciaio richiede 0.02 unità di motori, 0.01 unità di plastica, 250 klutz di materie prime acquistate sul mercato mondiale e mezzo anno-uomo di manodopera. La produzione di una unità di motori richiede 0.8 unità di acciaio, 0.15 unità di elettronica, 0.11 unità di plastica, 300 klutz di materie prime acquistate sul mercato mondiale e un anno-uomo di manodopera. La produzione di una unità di prodotti elettronici richiede 0.01 unità di acciaio, 0.01 unità di motori, 0.05 unità di plastica, 50 klutz di materie prime acquistate sul mercato mondiale e mezzo anno-uomo di manodopera. La produzione di una unità di plastica richiede 0.03 unità di motori, 0.2 unità di acciaio, 0.05 unità di elettronica, 300 klutz di materie prime acquistate sul mercato mondiale e due anni-uomo di manodopera. La produzione di motori è limitata a 650000 unità, quella di plastica a 60000 unità. La manodopera totale disponibile in Islandia è di 830000 uomini per anno. Acciaio, motori, elettronica e plastica non possono essere importati, ma devono essere prodotti all'interno.

ESERCIZIO 3. Un'azienda agricola produce mais, soia e grano in tre tenute A, B, C. La tenuta A dispone di 600 ettari di terreno e di una riserva di 8×10^6 m^3 di acqua. La tenuta B ha 700 ettari di terreno e 5×10^6 m^3 di acqua. La terza dispone di 450 ettari e di 6×10^6 m^3. Le produzioni di mais, soia e grano garantiscono rispettivamente profitti di 5, 7 e 6 Keuro/ettaro. I consumi di acqua sono di 20000 m^3/ha per il mais,10000 m^3/ha per la soia e 10000 m^3/ha per il grano. Le direttive della comunità europea richiedono che:

- almeno una tenuta lasci 200 ettari di terreno incolto, e
- l'estensione complessiva del terreno coltivato a soia dall'azienda non superi il 40% del totale del suolo coltivato.

Formulare il programma lineare per la massimizzazione del profitto.

ESERCIZIO 4. Una ditta ha la possibilità di attivare, per l'anno corrente, la produzione di quattro tipi di prodotti A, B, C e D. Per ogni tipo di produzione, se attivata, la ditta si impegna a produrre un quantitativo minimo pari rispettivamente a 1000, 1500, 3000 e 2000 unità. La produzione di A, B, C e D richiede un costo fisso per l'attivazione delle rispettive linee di produzione ed una quantità di forza lavoro per ogni unità prodotta, ed ogni unità venduta fornisce un profitto, come specificato dalla seguente tabella (in euro).

Prodotto	**Costo fisso**	**Forza lavoro unit.**	**Profitto unit.**
A	14500	10	50
B	10000	15	60
C	8000	5	55
D	9000	14	80

La ditta dispone per l'anno in corso di 200000 unità complessive di forza lavoro. Inoltre i committenti per la quale essa lavora richiedono che nel caso venga attivata la produzione di A venga anche prodotto almeno uno tra C o D, almeno nei quantitativi minimi sopra indicati.

Formulare il programma lineare per decidere le produzioni da attivare e pianificarne i quantitativi al fine di massimizzare il saldo costi-profitti.

ESERCIZIO 5. Scrivere il modello in programmazione lineare del seguente problema. Un caporeparto di un'officina di un'azienda meccanica deve pianificare l'esecuzione di cinque lotti su di una macchina della durata rispettivamente di 5 minuti, 7 minuti, 4 minuti, 7 minuti e 10 minuti. Non ci può essere sovrapposizione temporale fra i lotti. Il primo lotto ha come ora di consegna desiderata le 10.32, il secondo le 10.38, il terzo le 10.42, il quarto le 10.52 ed il quinto le 10.57. Sia l'errore di un lotto pari al valore assoluto della differenza tra il suo tempo di fine lavorazione e l'ora di consegna. Si vuole minimizzare la somma degli errori dei lotti (ipotesi: il reperto comincia a lavorare alle 8.30).

ESERCIZIO 6. Una ditta che si occupa di riparazioni deve pianificare le assunzioni per i prossimi 5 mesi. All'inizio la ditta dispone di 20 operai esperti; ogni operaio esperto fornisce 150 ore di lavoro al mese e percepisce uno stipendio mensile di 1000 euro. Un operaio neoassunto, durante il primo mese di servizio percepisce uno stipendio di 500 euro e non fornisce in pratica lavoro utile; per questo primo mese gli viene invece affiancato un lavoratore esperto per insegnargli il mestiere. Ogni lavoratore esperto che svolge affiancamento rende per 70 ore di lavoro al mese (anziché 150). Dopo il mese di apprendistato i lavoratori neoassunti diventano esperti, con pari abilità lavorativa e stipendio. Le quantità di ore/lavoro da coprire per i prossimi 5 mesi sono rispettivamente di 2000, 4000, 7000, 3000, 3500 ore. Infine, se si assumono almeno 10 persone nel corso dei primi due mesi, l'azienda puó incassare un contributo statale di 100000 euro. Formulare il programma lineare che consente di pianificare le assunzioni riducendo al minimo i costi del personale nei prossimi cinque mesi.

ESERCIZIO 7. L'azienda PC4All produce pc e deve acquistare le scorte di materie prime necessarie per la produzione dei case. Per produrre i case nel mese corrente sono necessari i seguenti materiali:

- viti: 15000 unità;
- plastica: 1300 kg.;
- acciaio: 2900 kg.

Per effettuare gli acquisti l'azienda si può appoggiare a quattro fornitori, i quali le forniscono le materie prime in lotti contenenti le seguenti quantità di materiale:

	viti	plastica	acciaio
F1	50	3	5
F2	30	4	7
F3	25	1	3
F4	10	8	1

Nell'ottica di gestire al meglio il proprio magazzino, la PC4All intende avere, alla fine del mese, la minor quantità di materiale non utilizzato possibile e, a tal fine, è disposta anche a comprare una quantità di materie prime inferiore alle proprie necessità. Il costo per lo stockaggio o per il mancato acquisto di una unità di materiale è il seguente:

Viti	0.2 euro/pezzo
Plastica	1 euro/kg.
Acciaio	3 euro/kg.

Per motivi commerciali l'azienda, se acquista dei lotti di materiale dal fornitore F1, è impossibilitata a rifornirsi dai fornitori F2 ed F4.

Formulare il modello di programmazione lineare che minimizzi i costi derivanti dallo scostamento tra le quantità di materiali acquistate e quelle necessarie, tenendo conto che non è possibile comprare porzioni di lotto di materiali.

Parte II

Soluzioni

Modelli di programmazione lineare

1. Il problema richiede in più, rispetto ad altri problemi di produzione già risolti, la gestione di scorte di magazzino in un certo numero di periodi di tempo (mesi, in questo caso). Questi problemi, comuni nel settore della pianificazione della produzione, vengono detti *multiperiodali.* In questi casi è utile (anche se non sempre indispensabile) disporre di un insieme di variabili che rappresentano esplicitamente il livello delle giacenze da gestire alla fine (o all'inizio) di ogni periodo. Il problema in esame può essere modellato utilizzando le seguenti variabili.

$x_i =$ produzione ordinaria (in ton.) per il mese $i = 1 \ldots, 4$,

$s_i =$ produzione straordinaria (in ton.) per il mese $i = 1, \ldots, 4$,

$y_i =$ giacenze in magazzino alla fine del mese $i = 1, \ldots, 3$.

Una y_4 non è stata definita, in quanto è esplicitamente richiesto che essa valga zero in ogni soluzione ammissibile. Occorre modellare l'uso della produzione ordinaria e straordinaria, rispettarne i limiti e correlarle alla domanda mensile (che deve essere soddisfatta) ed alle giacenze in magazzino. In base alle variabili specificate, un modello possibile è

$$\min\ 10\sum_{i=1}^{4} x_i + 16\sum_{i=1}^{4} s_i + 5\sum_{i=1}^{3} y_i$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + s_1 \quad\;\; &= 120 + y_1 \\ x_2 + s_2 + y_1 &= 160 + y_2 \\ x_3 + s_3 + y_2 &= 300 + y_3 \\ x_4 + s_4 + y_3 &= 200 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$x_i \geq 0.1\sum_{i=1}^{3}(x_i + s_i) \qquad i = 1, \ldots, 4 \tag{1.2}$$

$$x_1 \leq 140, \quad x_2 \leq 150, \quad x_3 \leq 140, \quad x_4 \leq 160, \tag{1.3}$$

$$s_1 \leq 50, \quad s_2 \leq 75, \quad s_3 \leq 70, \quad s_4 \leq 80, \tag{1.4}$$

$$x_i, s_i, y_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, 4.$$

I vincoli (1.1) svolgono il compito fondamentale di correlare la produzione di ogni mese con livelli di giacenze e domanda, esprimendo il bilancio

$$\begin{aligned}&\text{(produzione mensile)+(giacenze a mese precedente)}\\&\qquad = \text{(domanda mese)+(giacenze a fine mese).}\end{aligned}$$

Le serie successive di vincoli sono piuttosto semplici ed esprimono il requisito sui livelli di produzione ordinaria minimi mensili (10% del totale sui primi tre mesi) e sulle capacità produttive massime (ordinaria e straordinaria) per i quattro mesi.

2. Indicando i prodotti con A, M, E, P (**A**cciaio, **M**otori, **E**lettronica, **P**lastica) si possono riassumere i requisiti per la produzione nella seguente tabella.

	A	M	E	P	Anni uomo	Mat. prime
A		0.02		0.01	0.5	250
M	0.8		0.15	0.11	1.0	300
E	0.01	0.01		0.05	0.5	50
P	0.2	0.03	0.05		2.0	300

Poiché acciaio, motori, elettronica e plastica vanno prodotti internamente e non acquistati, è conveniente scorporare la produzione per uso interno da quella per esportazioni, definendo le variabili

$$\begin{aligned}&x_A, \quad x_M, \quad x_E, \quad x_P,\\&y_A, \quad y_M, \quad y_E, \quad y_P,\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}x_i &= \text{unità di prodotto } i \text{ realizzate per esportazione, } i \in \{A, M, E, P\},\\y_i &= \text{unità di prodotto } i \text{ realizzate per uso interno, } i \in \{A, M, E, P\}.\end{aligned}$$

Dall'analisi del testo, occorre garantire che:

- la produzione interna di ogni prodotto sia sufficiente a supportare la produzione totale;
- le quantità di motori e plastica prodotte non eccedano i limiti imposti;
- il piano produttivo non ecceda il monte-ore diponibile.

Con le variabili precedentemente definite, il modello risulta come segue.

$$\begin{aligned}\max \quad & 500x_A + 1500x_B + 300x_E + 1200x_P\\&-[250(x_A + y_A) + 300(x_M + y_M) + 50(x_E + y_E) + 300(x_P + y_P)]\end{aligned}$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
y_A &\geq 0.8(x_M + y_M) + 0.01(x_E + y_E) + 0.2(x_P + y_P) \\
y_M &\geq 0.02(x_A + y_A) + 0.01(x_E + y_E) + 0.03(x_P + y_P) \\
y_E &\geq 0.15(x_M + y_M) + 0.05(x_P + y_P) \\
y_P &\geq 0.01(x_A + y_A) + 0.11(x_M + y_M) + 0.05(x_E + y_E)
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

$$
\begin{aligned}
x_M + y_M &\leq 650000 \\
x_P + y_P &\leq 600000
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

$$
0.5(x_A + y_A) + (x_M + y_M) + 0.5(x_E + y_E) + 2(x_P + y_P) \leq 830000 \tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
x_A, x_M, x_E, x_P &\geq 0, \\
y_A, y_M, y_E, y_P &\geq 0.
\end{aligned}
$$

La funzione obiettivo rappresenta il saldo esportazioni-importazioni; i vincoli (2.1) impongono che la produzione interna di ogni prodotto sia in grado di supportare la produzione totale; i vincoli (2.2) impongono i limiti richiesti alle produzioni di motori e plastica, ed infine il vincolo (2.3) impone di non eccedere il monte-ore disponibile.

3. È necessario scorporare il prodotto sia per tipologia che per tenuta, altrimenti non è possibile gestire le estensioni coltivate e le riserve d'acqua. Sono quindi necessarie le variabili

$$x_{ij} = \text{ettari della tenuta } j \text{ coltivati a coltura } i,$$

con $i \in \{M, S, G\}$ (**M**ais, **S**oia e **G**rano) e $j \in \{A, B, C\}$. Inoltre tre variabili binarie y_A, y_B ed y_C verranno usate per determinare quale tenuta lascerà 200 ettari incolti ($y_j = 1$ iff la tenuta j lascia 200 ettari incolti). Il modello è il seguente.

$$\max 5(x_{MA} + x_{MB} + x_{MC}) + 7(x_{SA} + x_{SB} + x_{SC}) + 6(x_{GA} + x_{GB} + x_{GC})$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
x_{MA} + x_{SA} + x_{GA} &\leq 600 - 200y_A \\
x_{MB} + x_{SB} + x_{GB} &\leq 700 - 200y_B \\
x_{MC} + x_{SC} + x_{GC} &\leq 450 - 200y_C
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
20000x_{MA} + 10000x_{SA} + 10000x_{GA} &\leq 8 \cdot 10^6 \\
20000x_{MB} + 10000x_{SB} + 10000x_{GB} &\leq 5 \cdot 10^6 \\
20000x_{MC} + 10000x_{SC} + 10000x_{GC} &\leq 6 \cdot 10^6
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

$$
x_{SA} + x_{SB} + x_{SC} \leq 0.4 \sum_{i=M,S,G} \sum_{j=A,B,C} x_{ij} \tag{3.3}
$$

$$
y_A + y_B + y_C \geq 1 \tag{3.3}
$$

$$
x_{ij} \geq 0, \quad y_j \in \{0, 1\}, \qquad i = M, S, G, \quad j = A, B, C.
$$

I vincoli (3.1) impediscono di coltivare in una tenuta più del totale del suolo disponibile; i vincoli (3.2) impediscono di coltivare più di quanto si possa irrigare con le scorte d'acqua delle varie tenute; il vincolo (3.3) stabilisce che non più del 40% del suolo coltivato in totale può essere messo a soia, ed il vincolo (3.3) impone che *almeno* una tenuta lasci 200 ha di suolo incolto. Si noti che in questo caso non è necessario introdurre un big-M per collegare le y_j con le x_{ij}: è sufficiente definire nel modo opportuno i secondi membri dei vincoli (3.1).

4. Il problema proposto riguarda la pianificazione di certi tipi di produzione con costi fissi imputabili alla preparazione degli impianti produttivi e costi variabili legati alle quantità prodotte. La decisione di attivare o meno la produzione di A, B, C o D è di tipo vero/falso, e quindi si può modellare con variabii binarie

$$y_i = 1 \qquad \text{iff si attiva la produzione di } i \in \{A, B, C, D\}.$$

Occorre poi determinare anche i volumi prodotti, rappresentabili mediante un'altra serie di variabili

$$x_i = \qquad \text{numero di unità di tipo } i \text{ prodotte, } i \in \{A, B, C, D\}.$$

Tenuto conto dei dati su quantitativi minimi, profitti unitari e forza lavoro dati dal testo il modello risulta come segue.

$$\begin{aligned} \max \quad & 50x_A + 60x_B + 55x_C + 80x_D \\ & - (14500y_A + 10000y_B + 8000y_C + 9000y_D) \end{aligned}$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_A &\geq 1000y_A \\ x_B &\geq 1500y_B \\ x_C &\geq 3000y_C \\ x_D &\geq 2000y_D \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} x_A &\leq My_A \\ x_B &\leq My_B \\ x_C &\leq My_C \\ x_D &\leq My_D \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$10x_A + 15x_B + 5x_C + 14x_D \leq 2000000 \tag{4.3}$$

$$y_A \leq y_C + y_D \tag{4.4}$$

$$x_i \in \mathbb{Z}_+, y_i \in \{0, 1\}, \qquad i \in \{A, B, C, D\}.$$

I vincoli (4.1) impongono il rispetto dei quantitativi minimi qualora un tipo di produzione venga attivato, mentre i vincoli (4.2) assicurano che non vengano pianificati quantitativi per produzioni non attivate. Il vincolo (4.3) impone di non eccedere la quantità di forza lavoro disponibile; il vincolo (4.4) modella l'implicazione logica

$$y_A \implies y_C \vee y_D,$$

come richiesto dal testo.

5. In questo problema è importante notare che la sequenza delle lavorazioni *non* è predeterminata; essa deve essere quindi determinata dalla soluzione del modello. Rispetto all'esercizio **??**, occorre una serie di variabili in più. Vengono qui proposte due soluzioni possibili.
(a) Una sequenza di lavorazione è determinata quando, per ogni coppia (non ordinata) $\{i, j\}$ di lotti si è in grado di determinare se i viene lavorato prima di j ($i \to j$) o viceversa. Si possono quindi usare le variabili binarie

$$x_{ij} = 1 \text{ iff } i \to j,\ i < j.$$

Si usano inoltre tutte le variabili dell'esercizio **??**. Il valore delle variabili x_{ij} deve poi essere correlato alle variabili t_i mediante una serie di vincoli di tipo big-M. Nel seguito, p_i e d_i rappresentano tempo di lavorazione e scadenza (in minuti dalle 8:30) del lotto i.

$$\min \sum_{i=1}^{5} \Delta_i$$

soggetto a

$$\begin{aligned} \Delta_i &\geq \quad t_i + p_i - d_i & i &= 1, \ldots, 5 \\ \Delta_i &\geq -(t_i + p_i - d_i) & i &= 1, \ldots, 5 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} t_i + p_i &\leq t_j + M(1 - x_{ij}) & i &< j,\ i = 1, \ldots, 5 \\ t_j + p_j &\leq t_i + M x_{ij} & i &< j,\ i = 1, \ldots, 5 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$t_i \geq 0, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i, j = 1, \ldots, 5, \quad i < j.$$

I vincoli (5.1) sono del tipo usato per gestire i valori assoluti; le serie di vincoli (5.2) correlano i valori delle x_{ij} con le t_i:

$$\begin{aligned} x_{ij} = 1 &\implies & t_i + p_i &\leq t_j & (i \to j), \\ x_{ij} = 0 &\implies & t_j + p_j &\leq t_i & (j \to i). \end{aligned}$$

(b) Alternativamente, si può osservare che una sequenza di lavorazione è determinata quando ogni lotto è assegnato ad una e una sola delle posizioni $1, 2, \ldots, 5$ disponibili nell'ordine di lavorazione. Si possono allora utilizzare le seguenti variabili.

$$\begin{aligned} x_{ij} &= 1 \text{ se il lotto } i \text{ è in posizione } j, \text{ 0 altrimenti, } i, j = 1, \ldots, 5; \\ \Delta_{[j]} &= \text{errore del lotto in posizione } j,\ j = 1, \ldots, 5; \\ t_{[j]} &= \text{tempo di inizio lavorazione del lotto in posizione } j,\ j = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Siano p_i e d_i i tempi di lavorazione e le scadenze espresse in minuti per ogni lotto i (nota: questi sono *dati*). Con le variabili definite sopra si può scrivere il seguente modello.

$$\min \sum_{j=1} \Delta_{[j]}$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, 5 \\
&\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \dots, 5
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$t_{[j]} + \sum_{i=1}^{5} p_i x_{ij} \leq t_{[j+1]} \qquad j = 1, \dots, 4 \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{[j]} &\geq \quad t_{[j]} + \sum_{i=1}^{5} p_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{5} d_i x_{ij} \qquad j = 1, \dots, 5 \\
\Delta_{[j]} &\geq -\left(t_{[j]} + \sum_{i=1}^{5} p_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{5} d_i x_{ij}\right) \qquad j = 1, \dots, 5
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\},\ i, j \in \{1, \dots, 5\}, \quad t_{[j]}, \Delta_{[j]} \geq 0,\ j \in \{1, \dots, 5\}.$$

La funzione delle coppie di vincoli (5.1) è cruciale: essi impongono che (1) ogni lotto sia assegnato ad esattamente una posizione della sequenza di lavorazione, e (2) che ogni posizione ospiti esattamente lotto. I vincoli (5.2) impongono la corretta temporizzazione della sequenza (senza sovrapposizioni), ma si noti che sia le $t_{[j]}$ che le $\Delta_{[j]}$ sono indicizzate qui rispetto alla *posizione* nella sequenza, e non rispetto ai lotti: questi vincoli funzionano correttamente grazie alle (5.1): si noti che grazie a questi si ha

$$\sum_{i=1}^{5} p_i x_{ij} = \text{tempo di lavorazione del } j\text{-esimo lotto della sequenza.}$$

I vincoli (5.3) gestiscono i valori assoluti, sempre tenendo conto dell'assegnazione lotti-posizioni; analogamente a prima, si ha

$$\sum_{i=1}^{5} d_i x_{ij} = \text{scadenza del lotto in posizione } j.$$

6. Il problema richiede in pratica di gestire un pool di assunti/neoassunti che varia di mese in mese: è un problema multiperiodale. Una soluzione è un "piano di assunzioni" che permetta di coprire comunque il monte-ore richiesto nei vari mesi compatibilmente con lo svolgimento dell'affiancamento da parte degli esperti. Possiamo modellare la situazione con dieci variabili:

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,$$

dove y_i = disponibilità di esperti al mese i e x_i = numero di persone assunte al mese i. Modelliamo con una variabile logica z la scelta di ottenere o non ottenere il contributo statale. Come ulteriore considerazione, si noti che la x_5 è superflua in quanto assumere all'ultimo mese è un costo, non fornisce forza lavoro sfruttabile entro l'orizzonte temporale coperto dal modello e non influisce sulla possibilità di ottenere il contributo statale. In ogni soluzione ottima si avrà $x_5 = 0$.

In base alle variabili definite il costo del personale (assunzioni e stipendi) totale nei cinque mesi è:

$$f(x) = 500(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 1000(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) - 100000z.$$

Il modello complessivo risulta essere:

$$\min\ 500(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 1000(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) - 100000z$$

soggetto a
(Mese 1)

$$\begin{aligned} &y_1 = 20 \\ &x_1 \leq y_1 \\ &150(y_1 - x_1) + 70x_1 \geq 2000 \end{aligned}$$

(Mese 2)

$$\begin{aligned} &y_2 = y_1 + x_1 \\ &x_2 \leq y_2 \\ &150(y_2 - x_2) + 70x_2 \geq 4000 \end{aligned}$$

(Mese 3)

$$\begin{aligned} &y_3 = y_2 + x_2 \\ &x_3 \leq y_3 \\ &150(y_3 - x_3) + 70x_3 \geq 7000 \end{aligned}$$

(Mese 4)

$$\begin{aligned} &y_4 = y_3 + x_3 \\ &x_4 \leq y_4 \\ &150(y_4 - x_4) + 70x_4 \geq 3000 \end{aligned}$$

(Mese 5)

$$\begin{aligned} &y_5 = y_4 + x_4 \\ &x_5 \leq y_5 \\ &150(y_5 - x_5) + 70x_5 \geq 3500 \end{aligned}$$

(Vincolo logico)

$$x_1 + x_2 \geq 10z$$

$$x_i, y_i \in Z^+\ \forall i, \quad z \in \{0, 1\}$$

7. L'azienda in questione, a detta del testo, paga un costo sia per lo stoccaggio che per il mancato acquisto di materiali. Quindi, tenuto conto dei quantitativi richiesti e del fatto che si può anche comprare meno del fabbisogno, una funzone obiettivo possibile è:

$$0.2|V - 15000| + |P - 1300| + 3|A - 2900|,$$

dove V, P, A sono rispettivamente i quantitativi totali di viti, plastica e acciaio acquistati. I valori assoluti introducono caratteristiche di non linearità nel modello che devono essere opportunamente gestite.

Siccome i fornitori hanno a disposizione lotti dai contenuti standard, una scelta naturale di variabili per descrivere il "piano di approvvigionamento" è:

$$x_1, x_2, x_3, x_4,$$

dove x_i = numero di lotti acquistati dal fornitore F_i. Per gestire i valori assoluti sono necessarie tre variabili ausiliarie y_V, y_P, y_A. Si noti che $|X| = \max(X, -X)$, quindi i valori assoluti si gestiscono con tecniche simili a quelle usate per i problemi min / max. La scelta tra i fornitori $F_2 + F_4$ e F_1 è modellata con una variabile logica z_1; $z_1 = 1$ iff l'azienda si rifornisce presso F_1.

Il modello è il seguente:

$$\min\ 0.2y_V + y_P + 3y_A$$

soggetto a
(Vincoli per gestire i valori assoluti)

$$\begin{aligned}
&50x_1 + 30x_2 + 25x_3 + 10x_4 - 15000 \le y_V \\
&-50x_1 - 30x_2 - 25x_3 - 10x_4 + 15000 \le y_V \\
&3x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 - 1300 \le y_P \\
&-3x_1 - 4x_2 - x_3 - 8x_4 + 1300 \le y_P \\
&5x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - 2900 \le y_A \\
&-5x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 + 2900 \le y_A
\end{aligned}$$

(Vincolo logico — grande M)

$$\begin{aligned}
&x_2 + x_4 \le M(1 - z_1) \\
&x_1 \le M z_1
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in Z^+, \quad y_V, y_P, y_A \in Z^+, \quad z_1 \in \{0, 1\}$$