Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia B un insieme non vuoto e sia $L = \{S\}$ un linguaggio del prim'ordine con S simbolo di relazione binaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle B, S\rangle$, l'affermazione: "S è irriflessiva"? 2 punti

- ☐ $\forall x \forall y\, (\neg(R(x, y) \to x = y))$
- ☐ $\forall x \neg(R(x, x) = x)$
- ☐ $\exists x \neg R(x, x)$
- ☐ $\forall x \neg R(x, x)$

(b) Sia $L = \{h\}$ un linguaggio del prim'ordine con h simbolo di funzione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\forall y \forall z\, (h(y, z) = h(z, y))$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{Q}, \cdot\rangle$? 2 punti

- ☐ "Il prodotto tra numeri razionali è associativo."
- ☐ "Ciascun numero razionale y è divisibile per z."
- ☐ "Non esistono numeri razionali y, z tali che $y \cdot z \neq z \cdot y$."
- ☐ "L'operazione di moltiplicazione tra numeri razionali è commutativa."

(c) Dati due insiemi D e A, indichiamo con D^A l'insieme delle funzioni da A in D. Sia B un insieme non vuoto di cardinalità finita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ B^B è un insieme infinito.
- ☐ $\mathbb{N}^B$ è un insieme infinito numerabile.
- ☐ B^B è certamente in biezione con $\mathcal{P}(A)$.
- ☐ $B^{\mathbb{N}}$ è necessariamente più che numerabile.

(d) Siano C, D sottoinsiemi di B e sia $g\colon B \to B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ $g^{-1}[C \cup D] = g^{-1}[C] \cup g^{-1}[D]$.
- ☐ $C \subseteq g^{-1}[g[C]]$.
- ☐ Se $g[C] \subseteq g[D]$ allora si deve avere che $C \subseteq D$.
- ☐ Se $C \supseteq D$ allora certamente accade che $g[C] \subseteq g[D]$.

(e) Siano R e S formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ☐ $\neg\neg R \vee (\neg S \to \neg R)$ è una tautologia.
- ☐ Se S è soddisfacibile allora certamente non è una tautologia.
- ☐ $\neg(S \leftrightarrow R) \not\equiv \neg(S \to R) \wedge \neg(R \to S)$
- ☐ Se $S \models R$, allora $\neg(S \wedge \neg R)$ è una tautologia.

(f) Siano B, C, D lettere proposizionali e Q una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

B	C	D	Q
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**

- ☐ $\neg C \wedge D \models \neg Q$
- ☐ $\neg Q$ non è insoddisfacibile.
- ☐ $\neg Q$ è insoddisfacibile.
- ☐ $Q \models \neg D$

(g) Sia $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $g(y) = \frac{3y+9}{3} - y$ per ogni $y \in \mathbb{Z}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ $g(y) = 3$ per ogni $y \in \mathbb{Z}$.
- ☐ g è iniettiva.
- ☐ $g(y) = 5$ per qualche $y \in \mathbb{Z}$.
- ☐ g è suriettiva.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{S, g, d\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario S, un simbolo di funzione binario g e un simbolo di costante d. Sia φ la formula

$$(\neg \exists z\, (g(z, z) = y) \to S(g(w, d), y)).$$

Consideriamo la L-struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 1 \rangle$.

1. Dire se φ è un enunciato oppure no e, nel secondo caso, cerchiare le occorrenze libere di variabili.
2. È vero che $\mathcal{N} \models \exists z\, (g(z, z) = y)[y/m, z/k]$ se e solo se m è un numero naturale pari?
3. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[y/1, z/0, w/0]$?
4. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[y/2, z/1, w/0]$?
5. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[y/5, z/1, w/5]$?
6. È vero che $\mathcal{N} \models \forall y\, \varphi[y/0, z/0, w/0]$?
7. È vero che $\mathcal{N} \models \forall y\, \varphi[y/0, z/0, w/5]$?
8. È vero che $\mathcal{N} \models \exists w \forall y\, \varphi$?
9. È vero che $\mathcal{N} \models \forall w \forall y\, \varphi$?

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3 — 9 punti

Sia B un insieme non vuoto, siano C, D sottoinsiemi di B e sia $g\colon B \to B$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle B, C, D, g\rangle$ mediante il linguaggio $L = \{C, D, g\}$ con due simboli di predicato unari ed un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. g è suriettiva
2. $g \circ g$ è la funzione identica (ovvero manda ciascun elemento di B in se stesso)
3. $g^{-1}[C] \subseteq D$
4. $g[C] \subseteq D$.