Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano A, B, C lettere proposizionali e P una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

A	B	C	P
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

■ P non è una tautologia.
□ P $\models$ C.
■ P $\wedge$ C $\models$ B
■ $\neg$P $\wedge$ B è una contraddizione.

(b) Sia φ la formula $\forall x \forall y P(y, x) \rightarrow \exists y P(x, y)$, dove P è un simbolo di predicato binario. 2 punti

□ φ è un enunciato e la variabile x occorre sia libera che vincolata in φ.
□ φ è un enunciato.
■ La variabile x occorre libera e vincolata in φ.
□ La variabile y occorre libera e vincolata in φ.

(c) Siano φ, ψ delle L-formule. 2 punti

- ■ Se φ è soddisfacibile allora $\psi \to \varphi$ è soddisfacibile.
- □ Se $\neg\varphi$ è soddisfacibile allora φ è una tautologia.
- □ φ è soddisfacibile se e solo se φ è una tautologia.
- ■ Se φ è una tautologia allora $\psi \to \varphi$ è soddisfacibile.

(d) Consideriamo il linguaggio L con due simboli di funzione unaria f, g. Quali delle seguenti espressioni sono L-enunciati che formalizzano correttamente relativamente alla L-struttura $\langle A, f, g \rangle$ l'affermazione "la funzione f è l'inversa della funzione g" 2 punti

- □ $\forall x(f(g(x)) = x)$
- □ $\forall x(f(x) \cdot g(x) = 1)$
- ■ $\forall x(f(g(x)) = x \wedge g(f(x)) = x)$
- □ $f = g^{-1}$

(e) La relazione S su $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definita da $x \mathrel{S} y$ se e solo se $\exists z(x \cdot z = y)$ 2 punti

- ■ è riflessiva.
- □ non è simmetrica.
- ■ è transitiva.
- □ non è una relazione d'equivalenza.

(f) La funzione $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(q) = 2q^2 + 1$ è 2 punti

- □ iniettiva ma non suriettiva.
- □ suriettiva ma non iniettiva.
- □ biettiva.
- ■ né iniettiva, né suriettiva.

(g) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? 2 punti

- □ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 2 = 0\}$
- □ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \vee y \notin \mathbb{Q}\}$
- ■ $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{Q}\}$
- ■ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Q}\}$

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario. Sia φ la L-formula

$$\exists y\,(f(y,y) = x).$$

1. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \varphi[y/2, x/1].$$
2. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \varphi[y/2, x/2].$$
3. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \forall x \varphi[y/2, x/2].$$
4. Stabilire se
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \exists x \varphi[y/2, x/1].$$
5. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \varphi[y/1, x/3].$$
6. Stabilire se
$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \varphi[y/\sqrt{2}, x/-2].$$
7. È vero che $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \forall x\, \varphi[y/1, x/3]$?
8. Sia $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. È vero che $\mathcal{C} \models \forall x\, \varphi[y/1, x/3]$?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. L'interpretazione di φ in $\langle \mathbb{N}, + \rangle$: "Esiste un numero naturale y tale che $x = y + y$ (ovvero $x = 2y$)". Dunque la risposta al primo punto è no poiché 1 è un numero naturale dispari.

2. Per quanto visto sopra la risposta al secondo punto si poiché 2 è un numero naturale pari.

3. Per quanto visto sopra si ha che
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \not\models \forall x \varphi[y/2, x/2]$$
come testimoniato dai numeri dispari (se assegnati a x per φ nella struttura $\langle \mathbb{N}, + \rangle$).

4. Per quanto visto sopra si ha che
$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \exists x \varphi[y/2, x/2]$$
come testimoniato da qualunque numero pari (se assegnato a x per φ nella struttura $\langle \mathbb{N}, + \rangle$).

5. Posto $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, l'interpretazione di φ in $\mathcal{B}$ è: "Esiste un numero reale y tale che $x = y \cdot y$ (ovvero $x = y^2$)". Quindi la risposta al punto quattro è positiva in quanto 3 è il quadrato del numero reale $\sqrt{3}$.

6. Per quanto scritto sopra la risposta al punto cinque è negativa in quanto -2 è un numero reale negativo e quindi non può essere il quadrato di alcun numero reale.

7. Per quanto visto al punto cinque, si ha che $\mathcal{B} \not\models \forall x\, \varphi$: per esempio -3 è un assegnamento alla variabile x che testimonia questa asserzione (se assegnato a x per φ nella struttura $\mathcal{B}$).

8. Per quanto visto ai punti precedenti si ha che $\mathcal{C} \models \forall x\, \varphi$: infatti, tutti i numeri reali strettamente positivi sono il quadrato di un numero reale strettamente positivo.

Esercizio 3 9 punti

Sia $\langle A, < \rangle$ un ordine lineare stretto e siano B, C sottoinsiemi di A. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle A, <, B, C \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{<, B, C\}$ con un simbolo di relazione binaria e due simboli di predicato unari le seguenti affermazioni:

1. Tra due elementi di A c'è un elemento di B.
2. Dati due elementi distinti di B, uno dei due è minore dell'altro, cioè $\langle B, < \rangle$ è un ordine totale.
3. Ogni elemento di B è minore di ogni elemento di C.
4. C'è un elemento di B che è il minimo di $\langle A, < \rangle$.

Soluzione: 1. Tra due elementi di A c'è un elemento di B:
$\forall x \forall y\, (x < y \rightarrow \exists z (B(z) \land x < z \land z < y)))$.

2. Dati due elementi distinti di B, uno dei due è minore dell'altro, cioè $\langle B, < \rangle$ è un ordine totale:
$\forall x \forall y (\neg (x = y) \land B(x) \land B(y) \rightarrow x < y \lor y < x)$

3. Ogni elemento di B è minore di ogni elemento di C:
$\forall x \forall y (B(x) \land C(y) \rightarrow x < y)$

4. C'è un elemento di B che è il minimo di $\langle A, < \rangle$:
$\exists x (B(x) \land \forall y (x < y \lor x = y))$