

Corso di Logica

4.3 – Conseguenza logica, validità, soddisfacibilità

Docenti: Alessandro Andretta, Luca Motto Ros, Matteo Viale

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Conseguenza logica

Dati $\Gamma \subseteq \text{Prop}(L)$ e $Q \in \text{Prop}(L)$, diciamo che Q è **conseguenza logica** di Γ , in simboli

$$\Gamma \models Q,$$

se per ogni interpretazione i , se $i \models \Gamma$ allora $i \models Q$. Scriviamo $\Gamma \not\models Q$ per dire che Q NON è conseguenza logica di Γ .

- Quando $\Gamma = \{P_1, \dots, P_n\}$ è un insieme **finito**, allora scriviamo semplicemente

$$P_1, \dots, P_n \models Q$$

invece di $\{P_1, \dots, P_n\} \models Q$ e diciamo che Q è conseguenza logica delle proposizioni P_1, \dots, P_n . In particolare, quando $\Gamma = \{P\}$ scriviamo $P \models Q$ e diciamo che Q è conseguenza logica di P .

- È immediato verificare che

$$P_1, \dots, P_n \models Q \quad \text{se e solo se} \quad \models (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q.$$

Teorema

- ① P è valida (ovvero una tautologia) se e solo se $\neg P$ è insoddisfacibile.
- ② P è soddisfacibile se e solo se $\neg P$ non è valido,
- ③ $\Gamma \models Q$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg Q\}$ è insoddisfacibile.

Dimostrazione.

① e ② sono ovvie.

Dimostriamo che vale anche ③. Assumiamo che $\Gamma \models Q$, e supponiamo per assurdo che $\Gamma \cup \{\neg Q\}$ sia soddisfacibile, ovvero che esista un'interpretazione i tale che $i \models \Gamma \cup \{\neg Q\}$. Allora si avrebbe che, in particolare, $i \models \neg Q$ e $i \models Q$ (poiché $i \models \Gamma$ e $\Gamma \models Q$), contraddizione.

(continua...)

Teorema

- ① P è valida (ovvero una tautologia) se e solo se $\neg P$ è insoddisfacibile.
- ② P è soddisfacibile se e solo se $\neg P$ non è valido,
- ③ $\Gamma \models Q$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg Q\}$ è insoddisfacibile.

Dimostrazione (continuazione)

Assumiamo ora che $\Gamma \cup \{\neg Q\}$ sia insoddisfacibile, e consideriamo una generica interpretazione i tale che $i \models \Gamma$: vogliamo mostrare che allora si deve avere anche $i \models Q$, cosicché $\Gamma \models Q$ per la genericità di i . Poiché $i \not\models \Gamma \cup \{\neg Q\}$ e $i \models \Gamma$, allora $i \not\models \neg Q$. Quindi $i \models Q$, come volevamo. \square

Se $\Gamma = \{P_1, \dots, P_n\}$ è un insieme finito, si può anche osservare direttamente che

$$\begin{aligned} \Gamma \models Q & \text{ se e solo se } (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q \text{ è valida} \\ & \text{ se e solo se } \neg[(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q] \text{ è insoddisfacibile} \\ & \text{ se e solo se } P_1 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \neg Q \text{ è insoddisfacibile} \end{aligned}$$

Equivalenza logica

Date $P, Q \in \text{Prop}(L)$ si dice che P e Q sono **logicamente equivalenti**, e si scrive

$$P \equiv Q,$$

se per ogni interpretazione i si ha $i \models P$ se e solo se $i \models Q$. Scriviamo $P \not\equiv Q$ per dire che P e Q NON sono logicamente equivalenti.

Si noti che

- $P \equiv Q$ se e solo se $\models P \leftrightarrow Q$.
- $P \equiv Q$ se e solo se $P \models Q$ e $Q \models P$.
- $P \equiv Q$ se e solo se $i^*(P) = i^*(Q)$ per ogni interpretazione i .

Osservazione

Per quanto visto, è possibile verificare se

$$P_1, \dots, P_n \models Q \quad \text{oppure} \quad P \equiv Q$$

utilizzando le tavole di verità.

Tuttavia bisogna impostare un'unica tavola di verità in cui valutare simultaneamente *tutte* le proposizioni coinvolte, e non solo calcolare le tavole di verità delle singole proposizioni una alla volta.

Questo perché per stabilire se valgano o meno le relazioni di conseguenza logica ed equivalenza logica bisogna considerare le interpretazioni definite su *tutte* le lettere proposizionali che compaiono in almeno una delle formule P_1, \dots, P_n, Q oppure P, Q , rispettivamente.

Esempio

Per verificare se

$$A \vee (B \rightarrow C) \models A \wedge B$$

bisogna impostare la seguente tavola di verità:

A	B	C	$B \rightarrow C$	$A \vee (B \rightarrow C)$	$A \wedge B$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

e poi osservare che $A \vee (B \rightarrow C) \not\models A \wedge B$ perché, ad esempio, l'interpretazione $i(A) = i(B) = i(C) = 0$ (che corrisponde alla prima riga della tavola di verità) è tale che $i^*(A \vee (B \rightarrow C)) = 1$ ma $i^*(A \wedge B) = 0$.

Ricapitolando...

La **logica proposizionale** ci permette un'analisi logica del ragionamento (matematico) procedendo come segue.

- 1 Si introduce un **linguaggio** “artificiale” L i cui elementi (le lettere proposizionali A, B, \dots) rappresentano le proposizioni atomiche, ovvero quelle non ulteriormente analizzabili mediante l'uso dei connettivi.
- 2 Si considerano i **connettivi**, particolari costanti logiche che permettono di “collegare” una o più proposizioni per formarne di nuove.
- 3 Si introduce il concetto *sintattico* di **formula proposizionale** (o **proposizione**): si introducono regole algoritmiche per costruire e analizzare stringhe di simboli “ben formate”, ovvero tali da poter essere dotate di significato e a cui si può di conseguenza assegnare un valore di verità a partire dall'interpretazione dei suoi elementi costitutivi (ovvero a partire dall'interpretazione delle lettere proposizionali che vi occorrono).

Ricapitolando...

- 4 Si introduce il concetto *semantico* di **modello**, ovvero di una situazione o realtà (astratta) in cui interpretare le formule proposizionali per vedere se, in tale contesto, siano vere o false. In logica proposizionale, questo è realizzato mediante la nozione di **interpretazione**, ovvero di un assegnamento i di valori di verità a *tutte* le lettere proposizionali nel linguaggio L .
- 5 A partire dall'interpretazione i , si definiscono le regole che permettono di calcolare il valore di verità di ogni formula proposizionale nel modello dato (**valutazione** $v = i^*$ e relazione di soddisfazione \models).
- 6 Considerando insieme vari modelli possibili (ovvero varie interpretazioni), si definiscono i concetti di **tautologia**, **contraddizione**, **soddisfacibilità**, **conseguenza logica** e **equivalenza logica**. In particolare, la conseguenza logica $P \models Q$ dà una formulazione matematicamente precisa della nozione intuitiva di “deduzione corretta”: $P \models Q$ significa che dall'ipotesi che P sia vera possiamo concludere che anche la tesi Q deve essere vera.

Ricapitolando...

In questo modo si possono analizzare ragionamenti apparentemente complessi ed evitare errori “logici”.

Esempio

A prima vista, il seguente ragionamento sembrerebbe corretto:

Se io ho ragione tu hai torto, e se tu hai ragione io ho torto: quindi almeno uno di noi due ha ragione.

Consideriamo il linguaggio $L = \{A, B\}$ dove

A = “io ho ragione”

B = “tu hai ragione”

(“avere torto” = “non avere ragione”)

Otteniamo la formula proposizionale $(A \rightarrow \neg B) \wedge (B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \vee B$.

È sempre vera (= una tautologia)? No, l'interpretazione $i(A) = i(B) = 0$ (“entrambi abbiamo torto”) descrive una situazione in cui la proposizione, ovvero il ragionamento dato, non è corretto.