Corso di Matematica Discreta

Appunti su: RELAZIONI

Sia A un insieme non vuoto.

Definizione 1. *Sia $n \geq 2$. Una* **relazione** n**-aria** *nell'insieme A è il dato di un sottoinsieme*

$$\Gamma \subseteq \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fattori}} = A^n.$$

Quando $n = 2$ o 3 si parla di relazioni **binarie** o **ternarie** rispettivamente. Fissata una relazione n-aria Γ in A diremo che n elementi $a_1, ..., a_n$ di A (anche ripetuti) sono in **relazione** (tramite Γ) se e soltanto se

$$(a_1, ..., a_n) \in \Gamma.$$

Diamo alcuni esempi.

1. Sia $A = \pi$ il piano della geometria euclidea che pensiamo dotato di coordinate cartesiane. Poniamo

   - $n = 3$ e

     $$\Gamma_1 = \left\{(P, Q, R) \in \pi^3 \text{ tali che } \begin{matrix} P, Q, R \text{ non sono tutti uguali} \\ \text{e giacciono sulla stessa retta} \end{matrix}\right\}.$$

     Tramite Γ_1 tre punti del piano sono in relazione se e soltanto se individuano una ed una sola retta. Ad esempio $P = (-2, -2)$, $Q = (0, 0)$ e $R = (1, 1)$ sono in relazione mentre $P' = (1, 0)$, $Q' = (0, 1)$ e $R' = (1, -1)$ non sono in relazione.

   - $n = 3$ e

     $$\Gamma_2 = \left\{(P, Q, R) \in \pi^3 \text{ tali che } P, Q, R \text{ sono vertici di un triangolo rettangolo}\right\}.$$

     Ad esempio, in questo caso $P = (0, 0)$, $Q = (4, 0)$ e $R = (0, -1)$ sono in relazione mentre $P' = (1, 1)$, $Q' = (0, 1)$ e $R' = (-1, -1)$ non sono in relazione.

   - $n = 4$ e

     $$\Gamma_3 = \left\{(P_i = (x_i, y_i)) \in \pi^4 \text{ tali che } \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ y_1+y_2+y_3+y_4=0 \end{pmatrix}\right\}.$$

     Ad esempio, in questo caso $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (-1, 1)$, $P_3 = (2, -3)$ e $P_4 = (-2, 0)$ sono in relazione mentre $Q_1 = (0, 0)$, $Q_2 = (0, 1)$, $Q_3 = (3, -1)$ e $Q_4 = (1, 1)$ non sono in relazione.

2. Sia $A = \mathbb{Z}$, insieme dei numeri interi. Poniamo

- $n = 3$ e
$$\Gamma_1 = \Big\{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \text{ tali che } a + b > c\Big\}$$
Ad esempio, $a = 3$, $b = 2$ e $c = 4$ sono in relazione[1] tramite Γ_1 mentre $x = 1$, $y = -2$ e $z = 0$ non lo sono.
- $n = 4$ e
$$\Gamma_2 = \Big\{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \text{ tali che } a + b = c + d\Big\}$$
Ad esempio, $a = 1$, $b = -3$, $c = -2$ e $d = 0$ sono in relazione tramite Γ_2 mentre $w = 3$, $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2$ non lo sono non lo sono.

Da ora in poi ci interesseremo esclusivamente di **relazioni binarie** ($n = 2$).
Data una relazione binaria $\Gamma \subset A \times A$ ed elementi a, $b \in \Gamma$ scriveremo alternativamente
$$a\Gamma b \qquad \text{"}a \text{ è in relazione con } b\text{”}$$
per dire che $(a, b) \in \Gamma$.
Data una relazione binaria $\Gamma \subset A \times A$ siamo interessati ad analizzare le proprietà seguenti:

1. **proprietà riflessiva:** per ogni $a \in A$ si ha $a\Gamma a$;
2. **proprietà simmetrica:** ogni qual volta a e b sono tali che $a\Gamma b$ allora anche $b\Gamma a$;
3. **proprietà antisimmetrica:** se a e b sono tali che $a\Gamma b$ e $b\Gamma a$ allora è $a = b$;
4. **proprietà transitiva:** se a, b e c sono tali che $a\Gamma b$ e $b\Gamma c$ allora anche $a\Gamma c$.

Queste quattro proprietà possono o non possono risultare soddisfatte per una data relazione binaria. Facciamo alcuni esempi.

1. Sia A l'insieme delle rette del piano euclideo. Consideriamo le seguenti due relazioni in A. Date rette r ed s poniamo
$$r\Gamma_1 s \quad \Leftrightarrow \quad r \text{ ed } s \text{ sono perpendicolari,}$$
e
$$r\Gamma_2 s \quad \Leftrightarrow \quad r \text{ ed } s \text{ sono parallele oppure coincidenti,}$$
Come si verifica facilmente Γ_1 è simmetrica ma non è né riflessiva, né antisimmetrica, né transitiva. Invece Γ_2 è riflessiva, simmetrica e transitiva ma non antisimmetrica.

[1]si noti che l'ordine in cui sono assegnati i valori può essere importante, ad esempio $(4, 2, 3) \notin \Gamma_1$.

2. Sia A un insieme qualunque e sia $P = \mathcal{P}(A)$ il suo insieme delle parti. In P consideriamo le due relazioni seguenti:

$$S\Gamma_1 T \quad \Leftrightarrow \quad S \cap T = \emptyset,$$

e

$$S\Gamma_2 T \quad \Leftrightarrow \quad S \cup T = A.$$

Allora Γ_1 e Γ_2 sono simmetriche ma non sono né riflessive, né antisimmetriche, né transitive.

3. In $A = \mathbb{Z}$ poniamo

$$m\Gamma_1 n \quad \Leftrightarrow \quad m \leq n,$$

oppure

$$m\Gamma_2 n \quad \Leftrightarrow \quad m \text{ divide } n.$$

Entrambe le relazioni sono riflessive e transitive, ma mentre Γ_1 è antisimmetrica (infatti $m \leq n$ e $n \leq m$ sono valide contemporaneamente solo se $m = n$) la Γ_2 non lo è in quanto, ad esempio, 2 divide -2, -2 divide 2 ma $2 \neq -2$.

4. In $A = \mathbb{Z}$ consideriamo la relazione

$$m\Gamma n \quad \Leftrightarrow \quad m - n \text{ è pari.}$$

Allora Γ è riflessiva (perché $n - n = 0$ è pari), simmetrica (perché $n - m = -(m - n)$) e transitiva (perché se $m - n = 2a$ e $n - p = 2b$ anche $m - p = 2(a + b)$ è pari), ma non antisimmetrica.

Diremo che una relazione binaria è:

- una relazione di **equivalenza** se è riflessiva, simmetrica e transitiva;
- una relazione di **ordine** se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva;

Negli esempi sopra la Γ_2 nell'esempio 1 e quella dell'esempio 4 sono equivalenze, la Γ_1 dell'esempio 3 è di ordine.
Esercizio:

1. L'unica relazione che è contemporaneamente un'equivalenza e di ordine è l'uguaglianza:

$$a\Gamma b \quad \Leftrightarrow \quad a = b.$$

2. Nell'esempio 3 sopra se restringiamo la relazione Γ_2 ad $\mathbb{N}$, allora otteniamo una relazione d'ordine.

Restringiamo ora l'attenzione alle relazioni d'equivalenza. Sia dunque

$$\Gamma \subset A \times A$$

una certa relazione di equivalenza. Se $a\Gamma b$ diremo che a e b sono equivalenti. Dato un elemento $a \in A$ possiamo considerare il sottoinsieme di A degli elementi ad esso equivalenti, ovvero

$$C_a = \{x \in A \text{ tali che } x\Gamma a\} = \{x \in A \text{ tali che } a\Gamma x\}$$

(le due formulazioni sono equivalenti perché la relazione è simmetrica). Tale sottoinsieme è detto la **classe di equivalenza** di a. Osserviamo che:

1. dalla riflessività di Γ segue che $a \in C_a$ (e quindi, in particolare, $C_a \neq \emptyset$);
2. dalla simmetricità di Γ segue che se $b \in C_a$ allora $a \in C_b$;
3. dalla transitività di Γ segue che se $b \in C_a$ e $c \in C_b$ allora $c \in C_a$. cioè che $C_b \subseteq C_a$. Ma per simmetricità allora anche $C_a \subseteq C_b$ e quindi $C_a = C_b$.

Siano ora a, $b \in A$ con rispettive classi di equivalenza C_a e C_b e sia $x \in C_a \cap C_b$. Per quanto detto nell'osservazione 3 sopra deve risultare $C_x = C_a$ e $C_x = C_b$ e quindi $C_a = C_b$. Quindi le classi di equivalenza soddisfano le proprietà seguenti:

1. sono non vuote;
2. sono un ricoprimento, in quanto ogni elemento di a appartiene ad una classe di equivalenza (osservazione 1 sopra);
3. se due classi di equivalenza hanno intersezione non vuota allora coincidono (osservazione 3 sopra).

Dunque le classi di equivalenza formano una **partizione** dell'insieme A.
Viceversa, assegnata una partizione

$$A = \bigcup_{i \in I} C_i$$

possiamo definire un'equivalenza in A dichiarando equivalenti gli elementi che appartengono ad un medesimo sottoinsieme della partizione. Cioè, posto C_a l'unico sottoinsieme della partizione contenente l'elemento $a \in A$, dichiarando

$$a\Gamma b \quad \Leftrightarrow \quad C_a = C_b.$$

Infatti:

1. $a\Gamma a$ perché $C_a = C_a$ (riflessiva),
2. se $a\Gamma b$ allora $C_a = C_b$ e quindi $b\Gamma a$ (simmetrica),
3. se $a\Gamma b$ e $b\Gamma c$ allora $C_a = C_b = C_c$ e quindi $a\Gamma c$ (transitiva).