



Scuola di Scienze della Natura  
Corso di Laurea Triennale in Informatica

APPUNTI  
DI  
CALCOLO MATRICIALE  
E  
RICERCA OPERATIVA

**Corso A: Andrea Grosso**

**Corso B: Roberto Aringhieri**

**Corso C: Andrea Grosso / Roberto Aringhieri**

Anno Accademico 2022/2023



# Prefazione

Gli appunti di Calcolo Matriciale e Ricerca Operativa (CMRO) sono giunti alla loro dodicesima edizione, seguendo l'evoluzione dei contenuti dell'insegnamento dall'Anno Accademico 2009–2010.

Dall'Anno Accademico 2017–2018, l'insegnamento di CMRO è passato da 60 a 48 ore di aula a seguito delle decisioni prese dal Consiglio di Corso di Studi di Informatica che hanno l'obiettivo di commisurare in modo più preciso lo sforzo degli studenti in relazione ai contenuti dell'insegnamento.

Viene introdotta la seguente notazione. Alcune parti di questi appunti saranno contrassegnate da **un asterisco** o **due asterischi** nel titolo. Questi contrassegni mettono in evidenza i contenuti che sono di approfondimento e quindi lasciati allo studio individuale. Come esempio, nel primo capitolo, l'intera sezione 1.5 è composta da materiale di approfondimento pur trattando lo stesso tema della sezione 1.4.

La differenza tra il singolo ed il doppio asterisco è semplice. Il materiale contrassegnato con un singolo asterisco è fortemente indicato come materiale di approfondimento utile ai fini del superamento dell'esame. Al contrario, il materiale contrassegnato con un doppio asterisco ha scopo puramente di approfondimento culturale.

Il contrassegno posto su una parte indica che anche tutte le parti sottostanti sono materiali di approfondimento. Ad esempio, l'asterisco nella sezione 1.5 indica che tutte le sottosezioni da 1.5.1 a 1.5.9 sono materiale di approfondimento. Infine, non tutte le parti sono indicizzate per questioni di spazio. Quindi troverete alcune parti degli appunti indicate come approfondimento pur non essendo indicizzate.



# Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>PROBLEMI E MODELLI</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Introduzione . . . . .  | 1         |
| 1.2      | Problemi . . . . .  | 2         |
| 1.3      | Modelli . . . . .   | 4         |
| 1.4      | <b>Programmazione Lineare per esempi</b> . . . . .                    | 6         |
| 1.4.1    | Il problema dei compagni di merende. . . . .                          | 6         |
| 1.4.2    | Un problema semplice di pianificazione della produzione. . . . .      | 7         |
| 1.4.3    | Un problema meno semplice di pianificazione della produzione. . . . . | 8         |
| 1.4.4    | Il problema del distributore di giornali. . . . .                     | 9         |
| 1.4.5    | Il problema del personale di un motel. . . . .                        | 11        |
| 1.4.6    | Un problema di schedulazione dei lavori. . . . .                      | 12        |
| 1.4.7    | Un problema di copertura tramite l'apertura di impianti. . . . .      | 14        |
| 1.4.8    | Un altro problema di pianificazione della produzione. . . . .         | 16        |
| 1.5      | <b>Programmazione Lineare: modelli classici*</b> . . . . .            | 17        |
| 1.5.1    | Zaino 0-1 e Bin Packing. . . . .                                      | 18        |
| 1.5.2    | Assegnamento e Matching. . . . .                                      | 19        |
| 1.5.3    | Set-Covering, Set-Packing e Set-Partitioning. . . . .                 | 20        |
| 1.5.4    | Facility Location. . . . .  | 21        |
| 1.5.5    | Traveling Salesman (Problema del commesso viaggiatore). . . . .       | 22        |
| 1.5.6    | Vincoli disgiuntivi. . . . .  | 23        |
| 1.5.7    | Scheduling. . . . .   | 23        |
| 1.5.8    | Relazioni Logiche. . . . .  | 24        |
| 1.5.9    | Soddisfattibilità Proposizionale. . . . .                             | 25        |
| <b>2</b> | <b>ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE</b>                                    | <b>27</b> |
| 2.1      | <b>Risoluzione di sistemi di equazioni lineari</b> . . . . .          | 27        |
| 2.1.1    | Il metodo di Gauss. . . . .   | 27        |
| 2.1.2    | Matrici di trasformazione. . . . .                                    | 33        |
| 2.1.3    | Equazioni matriciali. . . . .   | 36        |
| 2.1.4    | Inversione di matrici quadrate. . . . .                               | 36        |
| 2.2      | <b>Indipendenza lineare e basi</b> . . . . .                          | 39        |
| 2.2.1    | Combinazioni lineari di vettori. . . . .                              | 39        |
| 2.2.2    | Indipendenza lineare. . . . .   | 40        |
| 2.2.3    | Basi. . . . .   | 42        |
| 2.2.4    | La riduzione di Gauss-Jordan e l'estrazione di una base.. . . .       | 45        |
| 2.2.5    | Soluzioni di base di un sistema lineare. . . . .                      | 47        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>3</b>   | <b>PROGRAMMAZIONE LINEARE E DUALITÀ</b>             | <b>49</b>  |
| <b>3.1</b> | <b>Programmi lineari e forma standard</b>           | <b>49</b>  |
| 3.1.1      | Problemi di ottimizzazione e programmi lineari.     | 49         |
| 3.1.2      | Forma standard.                                     | 50         |
| 3.1.3      | Conversione di un programma in forma standard.      | 51         |
| 3.1.4      | Forma canonica di un programma lineare.             | 53         |
| 3.1.5      | Poliedri e politopi.                                | 53         |
| 3.1.6      | Il metodo grafico in due variabili.                 | 54         |
| <b>3.2</b> | <b>Geometria della regione ammissibile</b>          | <b>55</b>  |
| 3.2.1      | Richiami e definizioni.                             | 55         |
| 3.2.2      | Risultati fondamentali.                             | 56         |
| <b>3.3</b> | <b>Condizioni di ottimalità**</b>                   | <b>59</b>  |
| 3.3.1      | Il Lemma di Farkas.                                 | 59         |
| 3.3.2      | Ottimalità di una soluzione ammissibile.            | 59         |
| <b>3.4</b> | <b>Dualità**</b>                                    | <b>63</b>  |
| 3.4.1      | Programma duale.                                    | 63         |
| 3.4.2      | Simmetria primale-duale.                            | 63         |
| 3.4.3      | Teoria della dualità.                               | 66         |
| <b>4</b>   | <b>IL METODO DEL SIMPLESSO</b>                      | <b>69</b>  |
| <b>4.1</b> | <b>Soluzioni di base di un programma lineare</b>    | <b>69</b>  |
| 4.1.1      | Assunzioni fondamentali.                            | 69         |
| 4.1.2      | Soluzioni ammissibili di base.                      | 69         |
| <b>4.2</b> | <b>L'algoritmo del simplesso</b>                    | <b>72</b>  |
| 4.2.1      | Idea generale.                                      | 72         |
| 4.2.2      | Riformulazione e criterio di ottimalità.            | 72         |
| 4.2.3      | Condizioni per l'illimitatezza.                     | 76         |
| 4.2.4      | Cambio di base.                                     | 78         |
| 4.2.5      | Lo schema di algoritmo.                             | 82         |
| 4.2.6      | Scelta della variabile entrante.                    | 84         |
| 4.2.7      | Metodo del simplesso ed interpretazione geometrica. | 86         |
| <b>4.3</b> | <b>Generazione di una base ammissibile</b>          | <b>88</b>  |
| 4.3.1      | Programma di prima fase.                            | 89         |
| <b>4.4</b> | <b>Regola anticiclo**</b>                           | <b>92</b>  |
| <b>A</b>   | <b>VETTORI, MATRICI E SISTEMI LINEARI</b>           | <b>95</b>  |
| <b>A.1</b> | <b>Vettori: definizioni</b>                         | <b>95</b>  |
| <b>A.2</b> | <b>Geometria dei vettori nello spazio</b>           | <b>99</b>  |
| <b>A.3</b> | <b>Matrici: definizioni</b>                         | <b>107</b> |
| <b>B</b>   | <b>CASO DI STUDIO</b>                               | <b>113</b> |
| <b>B.1</b> | <b>Gestione di una rete di teleriscaldamento**</b>  | <b>113</b> |

# Capitolo 1

## Problemi e Modelli

In questo capitolo, viene introdotto il concetto di problema computazionale ed alcuni concetti di base ad esso collegato che verranno ripresi ed approfonditi in altri insegnamenti, sia di Ricerca Operativa ma non solo. Successivamente, dopo aver discusso delle semplici regole per la definizione di un modello di programmazione lineare, saranno illustrate, tramite la discussione di semplici problemi, alcune delle principali *tecniche* di modellazione.

L'ultima parte del capitolo sarà invece dedicata ad illustrare alcuni dei problemi classici e più rappresentativi della Ricerca Operativa, problemi che sono stati oggetto di approfonditi studi.

### 1.1 Introduzione

La *Ricerca Operativa* ha come oggetto lo studio e la messa a punto di metodologie per la soluzione di problemi decisionali. I problemi affrontati nell'ambito della Ricerca Operativa sono tipicamente quelli in cui bisogna prendere decisioni sull'uso di risorse disponibili in quantità limitata in modo da rispettare un insieme assegnato di vincoli, massimizzando il *beneficio* ottenibile dall'uso delle risorse stesse.

Un processo decisionale può, in modo schematico, essere decomposto nelle seguenti fasi:

1. individuazione del problema;
2. analisi della realtà e raccolta dei dati;
3. costruzione del modello;
4. determinazione di una o più soluzioni;
5. analisi dei risultati ottenuti.

Chiaramente questi punti non vanno visti come strettamente sequenziali; in un processo decisionale reale è infatti frequente il caso che una delle fasi richieda modifiche dei risultati ottenuti in una fase precedente. Ad esempio, nella costruzione del modello può

emergere l'esigenza di nuovi dati in aggiunta a quelli raccolti nella fase precedente. La stessa raccolta dei dati presuppone un'idea sul tipo di modello che sarà costruito. In questo capitolo, ci concentreremo soprattutto sulla parte di costruzione del modello, che più si presta – assieme alla parte di determinazione della/e soluzione – ad una rigorosa trattazione matematica, ed ai quali sono dirette gran parte delle metodologie messe a punto nell'ambito della Ricerca Operativa.

Il *modello* è una descrizione, in generale per mezzo di strumenti di tipo logico–matematico, della porzione di realtà di interesse ai fini del processo decisionale. Ricordiamo qui tre classi principali di modelli: giochi, modelli di simulazione, modelli analitici.

- Nei giochi, la difficoltà di modellare in modo matematico il comportamento degli individui o dei gruppi di individui presenti nella realtà sotto esame viene superata introducendo direttamente l'uomo nel modello attraverso i giocatori, a ciascuno dei quali viene affidato un prefissato ruolo.
- Nei modelli di simulazione si cerca di descrivere nel modo più accurato possibile il comportamento del sistema che si vuole studiare per mezzo di relazioni matematiche; quindi si studia su calcolatore la sua risposta a sollecitazioni che vengono realizzate, in genere per mezzo di generatori di numeri pseudo casuali, in modo che siano il più possibile simili a quelle reali.
- Nei modelli analitici invece tutto il sistema sotto esame è descritto per mezzo di relazioni matematiche (o logiche) tra variabili che rappresentano gli elementi del sistema; quindi si cercano valori per tali variabili che soddisfano i vincoli e che massimizzino o minimizzino una funzione obiettivo opportunamente definita.

Alla Simulazione – ed alla sua integrazione con l'ottimizzazione – è dedicato l'insegnamento di “Modelli e Metodi per il Supporto alle Decisioni” all'interno della laurea magistrale. Qui invece restringeremo la nostra attenzione ai modelli analitici di Programmazione Lineare.

Nell'analizzare la realtà per mezzo di modelli non va mai dimenticato lo scarto esistente tra la realtà stessa ed il modello: la soluzione di un problema è in realtà sempre la soluzione della rappresentazione che abbiamo costruito del problema reale. È sempre necessario prestare grande attenzione alla fondatezza del modello costruito: il modello sarà sempre una descrizione molto limitata della realtà, ma dovrà rappresentare con ragionevole accuratezza gli aspetti che interessano ai fini della soluzione del problema decisionale che si sta affrontando.

## 1.2 Problemi

Diamo adesso una serie di definizioni riguardanti i problemi di ottimizzazione. Nel seguito per problema intenderemo una domanda espressa in termini generali, la cui risposta dipende da un certo numero di *parametri* e *variabili*.

Un problema viene usualmente definito per mezzo di:

---



- una descrizione dei suoi parametri, in generale lasciati indeterminati;
- una descrizione delle proprietà che devono caratterizzare la risposta o soluzione desiderata.

Un'istanza di un dato problema  $P$  è quella particolare domanda che si ottiene specificando valori per tutti i parametri di  $P$ . Molto spesso un problema viene definito fornendo l'insieme  $F$  delle possibili risposte o soluzioni, detto *insieme ammissibile*. Frequentemente  $F$  viene specificato indicando un insieme di *supporto*  $F'$  tale che  $F \subseteq F'$ , ed ulteriori condizioni (vincoli) che gli elementi di  $F$  devono soddisfare. In questo caso, si parla spesso degli elementi di  $F' \setminus F$  come di *soluzioni non ammissibili*.

In un problema di ottimizzazione, sull'insieme ammissibile  $F$  viene definita una funzione obiettivo

$$c : F \mapsto R$$

che fornisce il costo o il beneficio associato ad ogni soluzione; la soluzione del problema è un elemento di  $F$  che rende minima, oppure massima, la funzione obiettivo. Un generico problema di minimo può essere scritto come

$$P : \quad \min\{c(x) : x \in F\}$$

Sostituendo  $\min$  con  $\max$  – come sappiamo – si ottiene un problema di massimo. Chiamiamo

$$z^* = \min\{c(x) : x \in F\}$$

il valore ottimo del problema. Una soluzione ammissibile  $x^* \in F$  tale che  $c(x^*) = z^*$  è detta soluzione ottima per  $P$ .

In certi casi ciò che il problema richiede è semplicemente la determinazione di una qualsiasi soluzione ammissibile, ovvero di fornire un elemento  $x \in F$ , se ne esiste uno, oppure di dichiarare che  $F$  è vuoto; in questo caso si parla di *problema decisionale* oppure di *problema di esistenza*. Dato un problema decisionale definito su  $F \subseteq F'$ , ad esso è naturalmente associato il problema di certificato: dato  $x \in F'$ , verificare se  $x \in F$ . Il problema di certificato è un problema decisionale che richiede semplicemente una risposta “sì” oppure “no”.

**Algoritmi e Complessità.** Il senso di definire un problema di ottimizzazione è, almeno per le applicazioni pratiche, direttamente collegato alla possibilità di sviluppare procedure di calcolo o *algoritmi* in grado di risolverne efficientemente le istanze.

In generale, un algoritmo che risolve il problema  $P$  è una procedura che prende in input una qualsiasi istanza  $I$  di  $P$  e fornisce in output una soluzione ottima  $x^*$  per quell'istanza  $I$ . Un algoritmo per  $P$  che determina una soluzione ottima per qualsiasi istanza del problema viene detto algoritmo *esatto*.

Possono esistere diversi algoritmi per risolvere istanze dello stesso problema  $P$ . In tal caso, è evidente che conviene scegliere l'algoritmo più efficiente in termini di tempo di calcolo. Data un'istanza  $I$  di dimensione  $n$  del problema  $P$ , si definisce con  $T(n)$  la funzione che conta il numero di operazioni elementari necessarie all'algoritmo per risolvere  $I$ . Ad

esempio, dato il problema di trovare l'elemento di minimo valore in un insieme di  $n$  elementi, saranno necessari  $T(n) = n - 1$  confronti tra coppie di elementi diversi.

Per semplificare il confronto tra algoritmi, si introduce il concetto di *complessità* di un algoritmo, ovvero lo studio della funzione  $T(n)$  al tendere di  $n$  all'infinito. In altre parole, la complessità di un algoritmo è l'ordine di grandezza della funzione  $T(n)$ .

Dal punto di vista della complessità dei corrispondenti algoritmi di soluzione, i problemi di ottimizzazione possono essere divisi in due classi: la classe dei problemi polinomiali  $P$  e la classe dei problemi  $\mathcal{NP}$ -ardui ( $\mathcal{NP}$ -completi quando si parli di problemi decisionali).

Data l'esistenza di problemi per i quali non si conoscono algoritmi risolutivi di complessità polinomiale, è opportuno discutere più in dettaglio cosa significhi risolvere un problema di ottimizzazione.

**Progettazione ed analisi di algoritmi.** Poiché gli algoritmi esatti possono avere complessità troppo elevata, ad esempio esponenziale nelle dimensioni dell'istanza, e quindi difficilmente utilizzabili in pratica, ci si trova spesso nella necessità di ricorrere ad algoritmi euristici ossia algoritmi che determinano solamente una qualsiasi soluzione ammissibile, e quindi un'approssimazione superiore per problemi di minimo o inferiore per un problema di massimo del valore ottimo dell'istanza.

In generale si è interessati ad ottenere *buone* valutazioni superiori; per questo è opportuno introdurre misure che indichino *quanto buona* è una data soluzione. Si noti che per molti problemi di ottimizzazione, il problema di determinare una qualsiasi soluzione ammissibile ha la stessa complessità del problema originario; quindi, in generale gli algoritmi euristici possono *fallire*, ossia non riportare nessuna soluzione ammissibile anche per istanze in cui  $F \neq \emptyset$ . In questo caso, si assume che la valutazione superiore o inferiore, ottenuta dall'algoritmo sia  $+\infty$  o  $-\infty$ , ossia “arbitrariamente cattiva”.

Lo studio di algoritmi di ottimizzazione sarà approfondito nei due insegnamenti di “Ottimizzazione Combinatoria e Metodi Numerici” e “Modelli e Metodi per il Supporto alle Decisioni”.

## 1.3 Modelli

Molti problemi di interesse pratico si prestano ad essere descritti e risolti come *modelli di programmazione matematica*. Un modello (o *programma*) è la descrizione di un problema che richiede di massimizzare (o minimizzare) una funzione di costo o profitto su un certo dominio. La scrittura usuale è

$$(1.1) \quad \max z = f(x) \quad (\text{oppure: } \min z = f(x))$$


---

soggetto a

$$(1.2) \quad g_i(x) \begin{cases} \leq b_i \\ = b_i \\ \geq b_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(1.3) \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n.$$

In un modello sono presenti:

- una serie di *variabili di controllo* in funzione delle quali viene formulato ogni altro elemento del modello; queste variabili, almeno in parte, corrispondono alle quantità agendo sulle quali la soluzione verrà implementata;
- una *funzione obiettivo*  $f(x)$  che determina un costo o profitto legato alla soluzione;
- una o più serie di *vincoli*, che correlano tra loro i valori delle variabili, imponendo condizioni di fisica realizzabilità e/o requisiti particolari richiesti alla soluzione.

Tra i modelli di programmazione matematica hanno particolare rilievo i modelli di *programmazione lineare*, nei quali la  $f(x)$  e le  $g_i(x)$  sono espressioni *lineari*. Un modello di programmazione lineare è quindi esprimibile sempre come

$$(1.4) \quad \max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

soggetto a

$$(1.5) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq b_i \\ = b_i \\ \geq b_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(1.6) \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n.$$

I campi di esistenza delle variabili  $x_j$  sono di solito di tipo continuo (spesso non negativo) oppure intero non negativo ( $x_j \in \mathbb{Z}_+$ ), oppure binario ( $x_j \in \{0, 1\}$ ) a seconda del tipo di decisione che tali variabili modellano.

La particolarità dei modelli lineari è legata alla loro maggiore semplicità, che li rende più facilmente risolvibili rispetto ai modelli non lineari; in effetti sono ormai disponibili pacchetti software commerciali in grado di risolvere in modo efficiente programmi lineari di notevoli dimensioni (intese come quantità di variabili e di vincoli). Questo rende spesso preferibile, per la risoluzione di un problema, lo sviluppo di un modello lineare anche quando un modello non lineare potrebbe essere più compatto.

Lo sviluppo di un modello di programmazione lineare parte dall'analisi di una situazione reale (più o meno schematizzata) e, in modo simile a quanto accade nello sviluppo di una procedura software, richiede di identificare le variabili di controllo ed i rispettivi domini, i vincoli e la funzione obiettivo. Non ci sono regole rigide da seguire: il modello finale nasce spesso — in particolare nella caso di situazioni complesse — per raffinamenti successivi.

## 1.4 Programmazione Lineare per esempi

In questa sezione, saranno illustrate alcune tecniche per la definizione di modelli di programmazione lineare analizzando alcuni problemi semplici come esempio.

**1.4.1 Il problema dei compagni di merende.** Un gruppo di amici dovendo fare una gita ha deciso di mettere cibi e bevande in un unico zaino da 10 Kg. Lo zaino può essere riempito con

1. Cioccolata (confezioni da 500 g.)
2. Succhi di frutta (bottiglie da 1 l.)
3. Lattine di birra (formato da 0.33 l.)
4. Panini imbottiti (da 100 g. l'uno)
5. Acqua minerale (bottiglie da 1 l.)
6. Pacchi di biscotti (confezioni da 500 g.)

Dopo un'indagine tra i partecipanti alla gita (si poteva dare un voto da 1 a 100 ad ogni prodotto) sono stati determinati i seguenti punteggi.

| Prodotto         | Punti |
|------------------|-------|
| Cioccolata       | 10    |
| Succhi di frutta | 30    |
| Lattine di birra | 6     |

| Prodotto           | Punti |
|--------------------|-------|
| Panini imbottiti   | 20    |
| Acqua minerale     | 20    |
| Pacchi di biscotti | 8     |

Per non scontentare nessuno si è deciso di portare almeno:

- 2 confezioni di cioccolata;
- 2 bottiglie di succo di frutta;
- 6 lattine di birra;
- 10 panini imbottiti;
- 2 conf. di biscotti.

Formulare il modello di Programmazione Lineare che massimizzi il punteggio rispettando il vincolo di capacità dello zaino.

**Soluzione.** Le variabili di controllo determinano la struttura della soluzione di un problema, permettendone la realizzazione. Quindi in questo caso è naturale definire le variabili

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,$$

con il significato

$x_i \equiv$  unità di alimento ( $i$ ) caricate nello zaino.

Con questa scelta di variabili si può ottenere il seguente modello, nel quale compaiono due serie di vincoli: (1) un vincolo relativo alla capacità dello zaino, che non può essere superata, e (2) vincoli relativi ai quantitativi minimi di alimenti da caricare.

$$\max 10x_1 + 30x_2 + 6x_3 + 20x_4 + 20x_5 + 8x_6$$

soggetto a

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{10}x_4 + x_5 + \frac{1}{2}x_6 \leq 10$$

$$x_1 \geq 2, \quad x_2 \geq 2, \quad x_3 \geq 6,$$

$$x_4 \geq 10, \quad x_6 \geq 2,$$

$$x_1, \dots, x_6 \in \mathbb{Z}_+.$$

**Focus.** Considerate le richieste minime di oggetti da inserire nello zaino, si potrebbe essere portati a ridurre la capacità totale dello zaino dello spazio occupato per soddisfare le richieste minime. Questa scelta – valida per il problema specifico in esame – ha l’effetto di rendere il modello meno generale e più legato alla particolare istanza.

In tal caso, quali sono le modifiche da apportare al modello proposto come soluzione? La soluzione del modello modificato come deve essere trattata rispetto al problema dato?

**1.4.2 Un problema semplice di pianificazione della produzione.** L’acciaieria PLASTIK deve evadere un ordine di 1000 tonnellate di acciaio INOX. Per questa produzione servono manganese (almeno l’1% in peso), cromo (almeno il 18%) e molibdeno (almeno il 2%).

I fornitori di metalli non ferrosi vendono — per esigenze di mercato — questi prodotti in tre tipi di confezioni differenti. La prima confezione contiene 2 Kg. di manganese, 2 Kg. di cromo e 1 Kg. di molibdeno e costa 10 euro. La seconda confezione contiene 2 Kg. di manganese, 3 Kg. di cromo e 1 Kg. di molibdeno e costa 15 euro. La terza confezione contiene 1 Kg. di manganese, 2 Kg. di cromo e 5 Kg. di molibdeno e costa 20 euro.

Formulare il modello di Programmazione Lineare per minimizzare il costo di acquisto delle confezioni.

**Soluzione.** Le variabili più naturali sono  $x_1, x_2, x_3$ , dove  $x_i \equiv$  numero di confezioni di tipo  $i$  acquistato. Con la scelta di variabili indicata invece, si ottiene il modello

$$\min 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$$

soggetto a

$$(1.7) \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10000$$

$$(1.8) \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 180000$$

$$(1.9) \quad x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 20000$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+,$$

dove i vincoli (1.7), (1.8) e (1.9) rappresentano i quantitativi minimi di manganese, cromo e molibdeno da garantire, rispettivamente.

**Focus.** A volte può non essere evidente quale sia la scelta *migliore* per le variabili decisionali. Come descritto nel paragrafo 1.3, una buona regola pratica è la seguente: una definizione di variabili è soddisfacente quando essa permette di scrivere in modo *semplice* la funzione obiettivo (o comunque i vincoli più significativi) del modello.

Ad esempio, nel caso in esame, usare variabili che rappresentano le quantità di materiali (manganese, cromo, molibdeno) acquistate anziché le confezioni non sarebbe soddisfacente in quanto renderebbe più difficile descrivere la funzione obiettivo.

### 1.4.3 Un problema meno semplice di pianificazione della produzione.

Un'azienda produce tre modelli 1, 2 e 3 di un certo prodotto. Ciascun modello richiede due tipi di materiali grezzi ( $A$  e  $B$ ) di cui sono disponibili rispettivamente 4000 e 6000 unità. In particolare, per produrre una unità del modello 1 sono necessarie 2 unità di  $A$  e 4 unità di  $B$ ; per una unità del modello 2 sono necessarie 3 unità di  $A$  e 2 unità di  $B$ ; per una unità del modello 3 sono necessarie 5 unità di  $A$  e 7 di  $B$ . Il modello 1 richiede, per ogni unità prodotta, il doppio di forza lavoro rispetto al modello 2 e il triplo rispetto al modello 3. La forza lavoro presente in azienda è in grado di produrre al massimo l'equivalente di 700 unità/giorno del modello 1. Il settore marketing dell'azienda ha reso noto che la domanda minima per ciascun modello è rispettivamente di 200, 200 e 150 unità. Il profitto unitario di ogni modello è di 30, 20 e 50 euro, rispettivamente.

Formulare il programma lineare per pianificare la produzione giornaliera massimizzando il profitto.

**Soluzione.** Le variabili  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  sono sufficienti a modellare il problema, con  $x_i \equiv$  numero di unità di tipo  $i$  prodotte. Quindi si ha

$$\max \quad 30x_1 + 20x_2 + 50x_3$$

soggetto a

$$(1.10) \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 4000 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &\leq 6000 \end{aligned}$$

$$(1.11) \quad x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 700$$

$$(1.12) \quad \begin{aligned} x_1 &\geq 200, & x_2 &\geq 200, & x_3 &\geq 150 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

con i vincoli (1.10), (1.11) e (1.12) che rappresentano i vincoli sulla disponibilità di materie prime, sulla forza lavoro disponibile e sui requisiti minimi di produzione stabiliti dal marketing, rispettivamente.

**Focus.** Il punto cruciale di questo esercizio sta nella capacità di saper descrivere il vincolo di risorsa (1.11) in termini relativi e non assoluti come nell'esercizio precedente e nei vincoli (1.10).

**1.4.4 Il problema del distributore di giornali.** La casa editrice ANALFABETA pubblica un quotidiano che viene distribuito da quattro centri di smistamento  $S_1, S_2, S_3, S_4$  che richiedono rispettivamente almeno 100000, 150000, 50000 e 75000 copie. Il giornale viene stampato in tre tipografie  $T_1, T_2, T_3$  che producono rispettivamente al massimo 125000, 180000 e 70000 copie

I costi per la spedizione sono di 2 centesimi di euro/Km. per giornale e le distanze tra le tipografie ed i centri di smistamento sono rispettivamente di 20, 25, 15 e 5 Km. per la prima tipografia, di 12, 14, 18 e 30 Km per la seconda, e di 19, 11, 40 e 12 Km per la terza.

- (a) Formulare il modello di Programmazione Lineare per pianificare le spedizioni a costo totale minimo.
- (b) Si definisca il costo di approvvigionamento di un centro di smistamento come il costo totale delle spedizioni verso quel centro. Formulare il modello di Programmazione Lineare che *minimizza il massimo costo di approvvigionamento*.

**Soluzione.** (a) Per come sono specificati i costi di spedizione, la scelta “naturale” per la definizione delle variabili di controllo è la seguente:

$$x_{ij} \equiv \text{numero di copie spedite da } T_i \text{ a } S_j.$$

Considerato che il costo per copia è costante in quanto non dipende dalla tratta, di fatto dobbiamo minimizzare la distanza totale percorsa. Posto  $c$  il costo per km per giornale e  $d_{ij}$  la distanza tra  $T_i$  a  $S_j$ , il modello diventa

$$\min z \equiv c \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 d_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$(1.13) \quad \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 125000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 180000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 70000 \end{aligned}$$

$$(1.14) \quad \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 100000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 150000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 50000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 75000 \end{aligned}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \forall i, j.$$

I vincoli (1.13) e (1.14) impongono che ogni tipografia spedisca non più giornali di quanti ne stampa (per la realizzabilità “fisica” della soluzione) e che ogni centro ne riceva una quantità pari almeno al proprio fabbisogno.

I vincoli (1.13) e (1.14) possono essere descritti in forma compatta come segue. Posto  $D_j$  la domanda dell’ $j$ -esimo centro di smistamento ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) e  $P_i$  la produzione dell’ $i$ -esima tipografia, abbiamo che i vincoli (1.13) e (1.14) possono essere rispettivamente riscritti come

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 x_{ij} &\leq P_i \quad \forall i = 1, \dots, 3 \\ \sum_{i=1}^3 x_{ij} &\geq D_j \quad \forall j = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

**Focus.** Il punto focale di questo esercizio è l’utilizzo – per la prima volta nei nostri esempi – di una variabile con due indici, ovvero  $x_{ij}$ . I due indici sono necessari in quanto occorre tenere assieme le due componenti, ovvero le tipografie ed i centri di smistamento, che sono interessate dalla variabile decisionale del problema.

(b) L’obiettivo specificato pone la necessità di scrivere un programma di minimo con una funzione obiettivo del tipo

$$\max_j \left\{ c \sum_{i=1}^3 d_{ij} x_{ij} \right\}.$$

Tale espressione è però *non lineare* e quindi proibita nel tipo di modelli qui trattato. Per conservare la linearità del modello, occorre introdurre una variabile ausiliaria ed una serie di vincoli come segue.

$$\min y$$



soggetto a

$$(1.15) \quad \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 125000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 180000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 70000 \end{aligned}$$

$$(1.16) \quad \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 100000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 150000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 50000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 75000 \end{aligned}$$

$$(1.17) \quad \begin{aligned} c \sum_{i=1}^3 d_{ij} x_{ij} &\leq y \quad j = 1, \dots, 4 \\ x_{ij} &\in \mathbb{Z}_+, \forall i, j, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

La variabile ausiliaria  $y$  ed i vincoli (1.17) permettono di gestire l'obiettivo "min / max" conservando la linearità del modello: in ogni soluzione *ottima* di questo programma lineare, il valore assunto da  $y$  coincide esattamente con  $\max_j \{c \sum_{i=1}^n d_{ij} x_{ij}\}$ . I vincoli (1.15) e (1.16) hanno il ruolo già noto.

**Focus.** Il trucco utilizzato per linearizzare la funzione non lineare è derivato dalla definizione di massimo, ovvero  $M = \max\{x, y, z\}$ . In modo del tutto equivalente,  $M$  è il massimo tra  $x$ ,  $y$  e  $z$  **se e solo se** valgono le seguenti:

$$x \leq M, \quad y \leq M, \quad z \leq M.$$

Nel modello appena presentato, la variabile ausiliaria  $y$  gioca il ruolo di  $M$  ed i vincoli (1.17) giocano il ruolo delle 3 disequazioni.

**Nota:** in caso di funzioni obiettivo max min basta invertire il verso delle disuguaglianze.

**1.4.5 Il problema del personale di un motel.** Un motel autostradale, dovendo garantire un servizio continuato 24 ore su 24, ha bisogno di un numero minimo di inservienti per ogni ora del giorno secondo la seguente tabella.

| Fascia oraria | Numero min. | Fascia oraria | Numero min. |
|---------------|-------------|---------------|-------------|
| 02-06         | 4           | 14-18         | 7           |
| 06-10         | 8           | 18-22         | 12          |
| 10-14         | 10          | 22-02         | 4           |

Ciascun inserviente lavora 8 ore consecutive al giorno.

Formulare il modello di Programmazione Lineare per garantire la presenza richiesta utilizzando il minor numero possibile di inservienti.

**Soluzione.** Questo problema richiede, per essere modellato in modo semplice, una definizione accorta di variabili. Occorre tener presente che: (1) esiste una soluzione ottima dove ogni inserviente comincia lavorare all'inizio di una fascia oraria e ne copre esattamente due; (2) ogni inserviente ha (naturalmente) un unico orario di inizio turno. Quindi è possibile definire:

$x_i \equiv$  numero di inservienti che cominciano il turno nella fascia  $i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ).

Con queste variabili si ottiene il modello

$$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

soggetto a

$$(1.18) \quad x_1 + x_6 \geq 4$$

$$(1.19) \quad x_1 + x_2 \geq 8$$

$$(1.20) \quad x_2 + x_3 \geq 10$$

$$(1.21) \quad x_3 + x_4 \geq 7$$

$$(1.22) \quad x_4 + x_5 \geq 12$$

$$(1.23) \quad x_5 + x_6 \geq 4$$

$$x_1, \dots, x_6 \in \mathbb{Z}_+.$$

Poiché ogni inserviente che comincia il turno nella fascia  $i$  copre le fasce  $i$  ed  $i+1$  (modulo 6), i vincoli (1.18)–(1.23) garantiscono la copertura richiesta in ogni fascia. La funzione obiettivo rappresenta esattamente il numero di inservienti necessari.

**Focus.** Come nell'esempio relativo all'acciaieria PLASTIK, anche in questo esercizio risulta fondamentale la scelta della variabile decisionale. Infatti, senza considerare l'aspetto temporale nella variabile decisionale (il numero di lavoratori che cominciano) scrivere i vincoli (1.18)–(1.23) sarebbe difficile in quanto non sapremmo distinguere – e quindi contare – i lavoratori che sono all'inizio o alla fine del turno lavorativo.

**1.4.6 Un problema di schedulazione dei lavori.** Scrivere il modello in programmazione lineare del seguente problema. Un caporeparto di un'officina di un'azienda meccanica deve pianificare l'esecuzione di cinque lotti su di una macchina della durata rispettivamente di 5 minuti, 7 minuti, 4 minuti, 7 minuti e 10 minuti. La sequenza di esecuzione (1, 2, 3, 4, 5) è data e non ci può essere sovrapposizione temporale fra i lotti. Il primo lotto ha come ora di consegna desiderata le 10.32, il secondo le 10.38, il terzo le 10.42, il quarto le 10.52 ed il quinto le 10.57. Sia l'errore di un lotto pari al valore assoluto della differenza tra il suo tempo di fine lavorazione e l'ora di consegna. Si vuole minimizzare la somma degli errori dei lotti (ipotesi: il reparto comincia a lavorare alle 8.30).

**Soluzione.** Il problema richiede di scrivere un modello in grado di determinare gli istanti di inizio lavorazione dei lotti in esame; si può assumere come “zero” del tempo l’ora delle 8:30, per cui i lotti hanno date di scadenza (espresse in minuti) di 122, 128, 132, 142 e 147. Una serie di variabili è necessaria per rappresentare i tempi di inizio lavorazione:

$t_i \equiv$  istante di lavorazione (in minuti dalle 8:30) del lotto  $i$ .

Inoltre l’errore del lotto  $i$  è dato da  $\Delta_i = |t_i + p_i - d_i|$ , dove  $p_i$  e  $d_i$  indicano rispettivamente il tempo di lavorazione e la scadenza del lotto. La funzione obiettivo è quindi del tipo

$$\sum_{i=1}^5 |t_i + p_i - d_i|.$$

Questo genere di funzione è *non lineare* quindi occorre nuovamente ricorrere ad un espediente per rappresentare i valori assoluti in un modello lineare. Ricordando che  $|x| = \max(x, -x)$ , si può pensare di utilizzare la stessa tecnica usata per obiettivi di tipo “min / max”. Si introducono quindi le variabili

$\Delta_i \equiv$  errore del lotto  $i$ .

Il modello è quindi il seguente.

$$\min \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5$$

soggetto a

$$(1.24) \quad \begin{aligned} t_1 + 5 &\leq t_2 & (1 \rightarrow 2) \\ t_2 + 7 &\leq t_3 & (2 \rightarrow 3) \\ t_3 + 4 &\leq t_4 & (3 \rightarrow 4) \\ t_4 + 7 &\leq t_5 & (4 \rightarrow 5) \end{aligned}$$

$$(1.25) \quad \begin{aligned} \Delta_1 &\geq t_1 + 5 - 122 \\ \Delta_1 &\geq -(t_1 + 5 - 122) \\ \Delta_2 &\geq t_2 + 7 - 128 \\ \Delta_2 &\geq -(t_2 + 7 - 128) \\ \Delta_3 &\geq t_3 + 4 - 132 \\ \Delta_3 &\geq -(t_3 + 4 - 132) \\ \Delta_4 &\geq t_4 + 7 - 142 \\ \Delta_4 &\geq -(t_4 + 7 - 142) \\ \Delta_5 &\geq t_5 + 10 - 147 \\ \Delta_5 &\geq -(t_5 + 10 - 147) \\ t_i &\geq 0, \quad \Delta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

I vincoli (1.24) garantiscono il rispetto della sequenza di lavorazione che, secondo il testo, è predeterminata, mentre i vincoli (1.25) vincolano i  $\Delta_i$  ad assumere il valore assoluto di  $t_i + p_i - d_i$ .

**Focus.** In questo esercizio sono due gli aspetti interessanti. Il primo riguarda i vincoli (1.24) che modellano la precedenza tra due o più elementi dello stesso sistema che stiamo modellando. Il secondo riguarda invece la modellazione del valore assoluto sfruttando la definizione  $|x| = \max(x, -x)$  che determina le coppie di vincoli (1.25) per ogni  $\Delta_i$ . Osserviamo che le coppie di vincoli lavorano in modo alternativo, ovvero solo uno dei due vincoli  $\Delta_i \geq (t_i + p_i - d_i)$  e  $\Delta_i \geq -(t_i + p_i - d_i)$  è soddisfatto come uguaglianza mentre l'altro viene soddisfatto col minore stretto.

**1.4.7 Un problema di copertura tramite l'apertura di impianti.** Scrivere il modello in programmazione lineare del seguente problema.

Si consideri un territorio sul quale siano localizzati 7 punti di domanda (ad es. 7 città) indicati in tabella con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Si considerino, inoltre, 5 punti di offerta indicati in tabella con  $A, B, C, D, E$  nei quali potrebbero essere aperti dei centri vendita di un'impresa di distribuzione. Tale impresa è interessata a soddisfare la domanda sopramenzionata in modo tale che i clienti non percorrano più di 30 minuti di auto per raggiungere almeno uno dei centri vendita. In tabella, per ogni coppia di punti di domanda e di offerta, viene indicato il tempo auto necessario.

L'impresa ha inoltre fatto sapere che accetterà soluzioni che prevedano l'attivazione del centro vendita  $B$  solo se è già attivo uno dei centri  $C$  o  $D$ .

L'apertura dei centri vendita costa rispettivamente (in milioni di euro):  $A = 310$ ,  $B = 250$ ,  $C = 260$ ,  $D = 330$ ,  $E = 280$ .

L'obiettivo dell'impresa è di minimizzare i costi di apertura dei centri vendita garantendo il fatto che tutti i punti di domanda vengano serviti.

|   | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 41  | 33  | 24  | 29  | 58  |
| 2 | 25  | 12  | 22  | 58  | 41  |
| 3 | 21  | 43  | 34  | 54  | 18  |
| 4 | 21  | 42  | 39  | 26  | 18  |
| 5 | 11  | 23  | 24  | 29  | 53  |
| 6 | 47  | 23  | 19  | 16  | 31  |
| 7 | 37  | 47  | 51  | 26  | 19  |

**Soluzione.** L'apertura di un centro è una decisione che differisce da quelle modellate fino a questo momento, per il fatto di essere puramente *binaria* (un centro viene aperto oppure no, non esistono casi intermedi). Per modellare questo genere di decisioni, è possibile inserire nei programmi lineari variabili binarie, cioè interi con valori limitati all'insieme  $\{0, 1\}$ .

Il problema in esame si può modellare con cinque variabili binarie  $A, B, C, D, E$  che rappresentano l'apertura (variabile = 1) o la non-apertura (variabile = 0) del rispettivo

centro.

$$\min 310A + 250B + 260C + 330D + 280E$$

soggetto a

$$(1.26) \quad C + D \geq 1$$

$$(1.27) \quad A + B + C \geq 1$$

$$(1.28) \quad A + E \geq 1$$

$$(1.29) \quad A + D + E \geq 1$$

$$(1.30) \quad A + B + C + D \geq 1$$

$$(1.31) \quad B + C + D \geq 1$$

$$(1.32) \quad D + E \geq 1$$

$$(1.33) \quad B \leq C + D$$

I vincoli (1.26)–(1.32) modellano operatori logici di tipo **or**: in base ai tempi di percorrenza dati, per servire il punto 1 occorre aprire  $C$  oppure  $D$ ; per servire il punto 2 occorre aprire  $A$  oppure  $B$  oppure  $C$ , e così via. Il vincolo (1.33) modella un’implicazione logica

$$B \implies C \vee D$$

(il requisito “ $B$  apre solo se ...” specificato dal testo: confrontare con la tabella di verità dell’operatore logico).

**Focus.** In relazione alle variabili decisionali di tipo binario, a parte il loro campo di esistenza, **non hanno alcun ruolo privilegiato** rispetto alle altre; in particolare, non sono disponibili i consueti operatori logici (tipo **and**, **or**, **not**) comuni nei linguaggi di programmazione, che vanno quindi “emulati” per mezzo di espressioni lineari puramente algebriche.

Inoltre, **non è consentito** in alcun modo introdurre prodotti del tipo (variabile logica)  $\times$  (altre variabili), errore sorprendentemente comune.

Si noti anche che nell’insieme di vincoli (1.26)–(1.33) esistono vincoli *ridondanti*: ad esempio, (1.26) implica (1.30), (1.31) e (1.33); questi tre vincoli potrebbero quindi essere rimossi dal modello. Questa operazione non è strettamente necessaria ai fini della correttezza del modello, ma è desiderabile in ambito applicativo, in quanto semplifica la risoluzione del modello.

Mostriamo come i vincoli (1.26)–(1.32) possono essere scritti in forma compatta. Supponiamo di introdurre la matrice  $\mathbf{A}^{7 \times 5}$  definendo i suoi elementi  $a_{ij}$  come segue

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se distanza tra città } i \text{ e centro } j \leq 30 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Definiamo quindi la variabile  $x_j$  come una variabile binaria che assume valore 1 se il centro  $j$  viene aperto, 0 altrimenti. Allora i vincoli (1.26)–(1.32) possono essere riscritti in forma

compatta ed equivalente come

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{1} \quad \text{t.c.} \quad \mathbf{x} \in \{0, 1\}^5.$$

I vincoli rappresentati in forma compatta matriciale sono equivalenti ai seguenti:

$$\sum_{j=1}^5 a_{ij} x_j \geq 1, \quad \forall i.$$

**Focus.** L'utilizzo del **parametro ausiliario**  $a_{ij}$  consente di far emergere l'informazione che è implicitamente contenuta tra le informazioni relative alla distanza ed alla soglia dei 30 minuti. Tale parametro si ottiene con una fase di *preprocessing* dei parametri iniziali che definiscono l'istanza che intendiamo risolvere col modello.

**1.4.8 Un altro problema di pianificazione della produzione.** Una raffineria produce benzina verde e gasolio a partire da due tipi di greggio A e B, usando tre impianti. Il primo impianto può produrre 2 barili di verde e 3 di gasolio a partire da 4 barili di greggio tipo A e 3 barili di greggio tipo B. Il secondo impianto può produrre 4 barili di verde e 2 di gasolio a partire da 3 barili di A e 4 barili di B. Il terzo può produrre 2 barili di verde e 2 barili di gasolio a partire da 3 barili di A e 3 barili di B. Gli impianti lavorano *sempre* con le proporzioni specificate. La benzina verde viene venduta a 40\$/barile, la gasolio a 50\$/barile. Sono disponibili per questo mese 5000 barili di greggio A e 6000 barili di greggio B. Per esigenze legate ad altre lavorazioni, almeno uno tra gli impianti deve produrre non più di 1000 barili. Formulare il programma lineare per massimizzare il profitto legato alla produzione mensile.

**Soluzione.** La definizione di variabili che porta a realizzare il modello più conciso è probabilmente la seguente:

$$\begin{aligned} x_i &\equiv \text{numero di lavorazioni svolte all'impianto } i = 1, 2, 3. \\ y_i &\equiv \begin{cases} 1 & \text{iff l'impianto } i \text{ è limitato a 1000 barili,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

La definizione suggerita di  $x_i$  permette di gestire il funzionamento degli impianti con le proporzioni specificate, senza ricorrere a vincoli addizionali. Il modello risulta

$$\max 40(2x_1 + 4x_2 + 2x_3) + 50(3x_1 + 2x_2 + 2x_3)$$

soggetto a

$$(1.34) \quad \begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\leq 5000 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leq 6000 \end{aligned}$$

$$(1.35) \quad y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$$

$$(1.36) \quad \begin{aligned} 5x_1 &\leq 1000y_1 + M(1 - y_1) \\ 6x_2 &\leq 1000y_2 + M(1 - y_2) \\ 4x_3 &\leq 1000y_3 + M(1 - y_3) \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0, \quad y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

I vincoli (1.34) sono relativi al magazzino disponibile per i due tipi di greggio, che limita la produzione. Il vincolo (1.35) impone che almeno un impianto sia limitato a 1000 barili. I vincoli (1.36) svolgono l'importante funzione di collegare i valori delle variabili binarie  $y_i$  con i valori delle  $x_i$ ; la costante  $M$  (detta spesso “big-M”) è una costante estremamente grande. Si noti che ad esempio il primo vincolo di questa serie implica:

$$\begin{aligned} y_1 = 1 &\implies 5x_1 \leq 1000, \\ y_1 = 0 &\implies 5x_1 \leq M \quad (\text{cioè } 5x_1 \text{ non vincolato}). \end{aligned}$$

Questa tecnica del “big-M” è comunemente usata per correlare variabili binarie e variabili di altro tipo.

**Focus.** Questo è il primo esercizio nel quale si mettono in relazione due livelli decisionali differenti, ovvero quello relativo al numero di lavorazioni e quello relativo a quale impianto limitare.

Dal punto di vista modellistico, la principale difficoltà risiede nel collegare i due livelli decisionali, ovvero, come per il vincolo logico (1.33) utilizzato nel precedente esercizio, fare in modo che ad un assegnamento di valori ad una variabile corrisponda un assegnamento di valori conseguente alla variabile collegata.

La soluzione più intuitiva ma **clamorosamente sbagliata** sarebbe quella di moltiplicare le due variabili decisionali ottenendo così una formulazione non lineare. Al contrario, la tecnica del **Big-M** ci permette di scrivere in modo lineare la relazione logica tra i due livelli decisionali.

## 1.5 Programmazione Lineare: modelli classici\*

Questa sezione illustra alcuni dei modelli “classici” studiati in Ricerca Operativa ed in particolare nell'ambito dell'ottimizzazione combinatoria. Sono intesi come classici nel senso che sono quelli che hanno ricevuto, negli anni, maggiore attenzione da parte della comunità scientifica e, di conseguenza, sforzi per la progettazione di algoritmi per la loro soluzione. Tutto questo per merito della loro struttura matematica esemplificativa di tanti problemi reali. Nei problemi che seguono infatti scopriremo strutture di vincoli che sono

già state viste nei precedenti esempi. La gran parte dei problemi presentati in questa sezione sono problemi di ottimizzazione  $\mathcal{NP}$ -ardui.

La formulazione dei problemi presentati nel seguito prevede i seguenti passi: (i) definizione delle variabili, (ii) definizione dei vincoli, (iii) definizione della funzione obiettivo.

**1.5.1 Zaino 0-1 e Bin Packing.** Siano dati  $n$  progetti. Il  $j$ -esimo progetto,  $j = 1, \dots, n$  è caratterizzato da un costo  $a_j$  e da un ritorno atteso  $c_j$ . Si può decidere di investire in un progetto oppure no, cioè non è possibile frazionare nessuno dei progetti; si ha inoltre a disposizione un budget  $b$  per finanziare i progetti. Il problema di scegliere un sottoinsieme di progetti in modo tale da massimizzare il ritorno atteso, non eccedendo i vincoli di budget è il *problema dello zaino binario*. La formulazione del problema consiste quindi in:

- **variabili:**  $x_j = 1$  se si investe nel progetto  $j$ ,  $x_j = 0$  altrimenti.
- **vincoli:** non è consentito eccedere il budget a disposizione

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b$$

ed inoltre le variabili  $x_j$  sono binarie

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

- **funzione obiettivo:** si vuole massimizzare il ritorno atteso

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Il problema può essere quindi formulato come:

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, x \in B^n = \{0, 1\}^n \right\}$$

In questo caso il  $j$ -esimo evento è il  $j$ -esimo progetto. Questo problema è detto problema dello zaino per l'analogia con il problema dell'escursionista che deve decidere cosa mettere nello zaino, data una limitazione di peso su ciò che può portarsi dietro.

Il problema del Bin packing è simile al problema dello zaino. Si supponga quindi di avere  $n$  oggetti ed  $m$  zaini o "bin" (con  $m > n$ ). Sia  $w_j$  il peso dell'oggetto  $j$  e  $C$  la capacità di ciascun bin (identica per tutti). Si assume, senza perdita di generalità, che i pesi  $w_j$  e la capacità del bin  $C$  siano degli interi positivi tali che valga  $w_j \leq C$ , per  $j = 1, \dots, n$ . Il problema consiste nell'assegnare tutti gli  $n$  oggetti a qualche bin in modo da non eccederne la capacità con l'obiettivo di minimizzare il numero di bin usati. Abbiamo quindi:

- **variabili:**  $y_i = 1$  se si usa il bin  $i$ , 0 altrimenti (per  $i = 1, \dots, m$ )  
 $x_{ij} = 1$  se l'oggetto  $j$  è assegnato al bin  $i$ , 0 altrimenti (per  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ ).



- **vincoli:** si può assegnare ciascun oggetto ad un unico bin

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

gli oggetti assegnati a bin aperti non devono eccedere la capacità del bin stesso

$$\sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq C y_i, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

ed inoltre le variabili  $x_{ij}$  ed  $y_i$  sono binarie

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

e

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

- **funzione obiettivo:** si vuole minimizzare il numero di bin utilizzati

$$\min \sum_{i=1}^m y_i$$

La formulazione completa del problema è lasciata per esercizio.

**1.5.2 Assegnamento e Matching.** Un altro classico problema riguarda l'assegnamento di persone a job. Supponiamo che ci siano  $n$  persone e  $m$  job, con  $n \geq m$ . Ogni job deve essere eseguito esattamente da una persona; inoltre, ogni persona può svolgere, al più, un job. Alcune persone sono più adatte a svolgere determinati job di altre, così viene stimato il costo  $c_{ij}$  di assegnare la persona  $j$  al job  $i$ . Il problema consiste nell'assegnare le persone ai job in modo tale da minimizzare il costo di completamento di tutti i job.

Per formulare questo problema, noto come *problema di assegnamento*, si segue la solita metodologia:

- **variabili:** si introducono le variabili binarie  $x_{ij}$ , con  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  corrispondenti all'evento di assegnare la persona  $j$  al job  $i$ . Cioè:  
 $x_{ij} = 1$  se il job  $i$  è assegnato alla persona  $j$ ,  $x_{ij} = 0$  altrimenti.
- **vincoli:** poiché esattamente una persona deve svolgere il job  $i$ , si ha il vincolo:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Poiché ogni persona non può effettuare più di un job, si ha il vincolo:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

ed inoltre le variabili  $x_{ij}$  sono binarie

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, n$$

- **funzione obiettivo:** si vuole trovare un assegnamento di costo minimo, cioè

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Nel problema di assegnamento gli  $m + n$  elementi sono partizionati in insiemi disgiunti di job e persone. Ma in altri modelli di questo tipo, non è possibile assumere una tale partizione.

Consideriamo ad esempio il caso di  $2n$  studenti che devono essere assegnati ad  $n$  camere doppie: in questo caso ad ogni studente deve essere assegnato esattamente un compagno di stanza. Supponiamo che l' $ij$ -esimo evento, con  $i < j$ , corrisponda ad assegnare gli studenti  $i$  e  $j$  alla stessa stanza; supponiamo anche che ci sia un beneficio pari a  $c_{ij}$  quando gli studenti  $i$  e  $j$  condividono la stessa camera. Il problema

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=i+1}^{2n} c_{ij} x_{ij} : \sum_{k < i} x_{ki} + \sum_{j > i} x_{ij} = 1, i = 1, \dots, 2n, x \in \{0, 1\}^{n(2n-1)} \right\}$$

è noto come *problema di accoppiamento* o *matching*.

**1.5.3 Set-Covering, Set-Packing e Set-Partitioning.** Sia  $M = \{1, \dots, m\}$  un insieme finito e sia  $\{M_j\}$  per  $j \in N = \{1, \dots, n\}$  una collezione di sottoinsiemi di  $M$ . Per esempio, la collezione potrebbe essere costituita da tutti i sottoinsiemi di dimensione  $k$ , per qualche  $k \leq m$ .

Si dice che  $F \subseteq N$  *copre*  $M$  se  $\cup_{j \in F} M_j = M$ . Si dice invece che  $F \subseteq N$  è un *packing* rispetto ad  $M$  se  $M_j \cap M_k = \emptyset$  per tutti i  $j, k \in F, j \neq k$ . Se invece  $F \subseteq N$  è sia un covering che un packing, allora  $F$  si dice una *partizione* di  $M$ . Nel problema di set-covering,  $c_j$  è il costo di  $M_j$  e cerchiamo una copertura di costo minimo; nel problema di set-packing,  $c_j$  è il peso di  $M_j$  e cerchiamo un packing di peso massimo.

Questi problemi possono essere formulati seguendo i seguenti passi:

- **variabili:**

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in F \\ 0 & \text{se } j \notin F \end{cases}$$

- **vincoli:** indichiamo con  $A$  la matrice di incidenza  $m \times n$  della famiglia  $\{M_j\}$  per  $j \in N$ ; cioè, per  $i \in M$ ,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in M_j \\ 0 & \text{se } i \notin M_j \end{cases}$$

Allora  $F$  è una copertura (rispettivamente packing e partizione) se e solo se  $x \in B^n$  soddisfa  $Ax \geq 1$  (rispettivamente  $Ax \leq 1$ ,  $Ax = 1$ ), dove  $1$  è un vettore di dimensione  $m$  le cui componenti sono tutte uguali ad 1.

- **funzione obiettivo:** nel caso del problema di set-covering la funzione obiettivo diviene

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Si osservi che un problema di assegnamento con  $m$  job e  $m$  persone è un problema di set-partitioning in cui  $M = \{1, \dots, m, m+1, \dots, 2m\}$  e  $M_j$  per  $j = 1, \dots, m^2$  è un sottoinsieme di  $M$  costituito da un job e da una persona.

Molti problemi pratici possono essere formulati come problemi di set-covering; una tipica applicazione consiste nella localizzazione di impianti. Si veda, ad esempio, il problema descritto nella sezione 1.4.7 a pagina 14.

I modelli di set-covering, set-packing e set-partitioning, mostrano come utilizzare vincoli lineari su variabili binarie per rappresentare relazioni tra le variabili stesse o tra gli eventi che esse rappresentano. Un vincolo di packing stabilisce che al più uno tra un insieme di eventi può verificarsi, mentre i vincoli di covering e di partitioning stabiliscono rispettivamente che almeno uno, ed esattamente uno tra un insieme di eventi deve verificarsi.

**1.5.4 Facility Location.** Questa classe di problemi riguarda la localizzazione di facility per servire i clienti al minor costo possibile. Siano dati un insieme  $N = \{1, \dots, n\}$  di potenziali siti per l'installazione delle facility e un insieme di clienti  $I = \{1, \dots, m\}$ . Aprire una facility nel sito  $j$  ha un costo  $c_j$  per  $j \in N$ . Questo problema è tuttavia più complesso del set-covering perché ogni cliente ha anche una domanda per una certa merce e soddisfare la domanda del cliente  $i$  attraverso la facility  $j$  ha un costo complessivo pari ad  $h_{ij}$ . Il problema di ottimizzazione consiste nel selezionare un sottoinsieme di località in cui aprire le facility e nell'assegnare i clienti a queste facility in modo tale da minimizzare il costo totale. In un problema di facility location non capacitato, non c'è nessuna restrizione sul numero di clienti che una facility può servire.

Occorre come al solito seguire i seguenti passi:

- **variabili:** Oltre alla variabile binaria  $x_j = 1$ , se si installa una facility nel sito  $j$  e  $x_j = 0$  altrimenti, si introduce la variabile continua  $y_{ij}$ , che rappresenta la frazione della domanda del cliente  $i$  soddisfatta dalla facility  $j$ .
- **vincoli:** la domanda di ogni cliente deve essere soddisfatta, cioè

$$\sum_{j \in N} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I$$

Inoltre il cliente  $i$  può essere servito da  $j$  solo se la facility  $j$  è stata aperta, cioè

$$y_{ij} - x_j \leq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in N$$

Si hanno poi i vincoli sulle variabili  $x \in B^n$ ,  $y \in R_+^{mn}$ .

- **funzione obiettivo:** occorre minimizzare sia i costi di installazione delle facility che i costi di servizio dei clienti, cioè:

$$\min \sum_{j \in N} c_j x_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in N} h_{ij} y_{ij}$$

Può essere poco realistico assumere che una facility possa servire un numero qualsiasi di clienti: supponiamo che la facility  $j$  abbia una capacità pari a  $u_j$  e che il cliente  $i$  abbia una domanda pari a  $b_i$ . In questo caso  $y_{ij}$  rappresenta la quantità di merce inviata dalla facility  $j$  al cliente  $i$  e  $h_{ij}$  è il costo unitario di trasporto. Nel problema di facility location capacitato i vincoli divengono quindi:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} y_{ij} &= b_i \quad \forall i \in I \\ \sum_{i \in I} y_{ij} - u_j x_j &\leq 0 \quad \forall j \in N \end{aligned}$$

**1.5.5 Traveling Salesman (Problema del commesso viaggiatore).** Siano dati un insieme di nodi  $V = \{1, \dots, n\}$  ed un insieme di archi  $A$ , con  $|A| = m$ . I nodi rappresentano le città e gli archi rappresentano coppie ordinate di città tra cui esistono strade dirette. Per ogni  $(i, j) \in A$ ,  $c_{ij}$  è il tempo necessario per andare dalla città  $i$  alla città  $j$ . Il commesso viaggiatore deve visitare ciascuna delle  $n$  città esattamente una volta e poi tornare al punto di partenza: si vuole determinare l'ordine in cui egli dovrebbe effettuare il suo tour in modo tale da terminare il prima possibile.

- **variabili:**  $x_{ij} = 1$  se il commesso viaggiatore va direttamente dalla città  $i$  alla città  $j$  e  $x_{ij} = 0$  altrimenti.
- **vincoli:** Il commesso viaggiatore entra nella città  $j$  esattamente una volta

$$\sum_{\{i: (i,j) \in A\}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V$$

Egli lascia la città  $i$  esattamente una volta

$$\sum_{\{j: (i,j) \in A\}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V$$

Le variabili del problema sono binarie, cioè  $x \in B^{|A|}$ .

I vincoli finora introdotti sono sostanzialmente i vincoli del problema di accoppiamento perfetto, una soluzione del quale potrebbe essere della forma mostrata in figura 1.1, cioè un insieme di subtours disconnessi. Per eliminare queste soluzioni, occorre introdurre ulteriori vincoli che garantiscano la connettività imponendo che il commesso viaggiatore passi da un sottoinsieme di città all'altro. Vincoli di questo tipo sono detti vincoli di *cut-set* e possono essere formulati come

$$\sum_{\{(i,j) \in A: i \in U, j \in V \setminus U\}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall U \subset V \text{ t.c. } 2 \leq |U| \leq |V| - 2$$

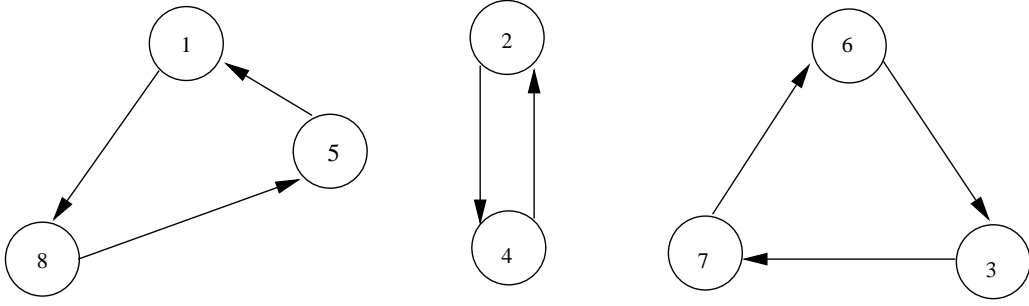


Figura 1.1: Subtour.

oppure equivalentemente come

$$\sum_{\{(i,j) \in A: i \in U, j \in U\}} x_{ij} \leq |U| - 1 \quad \forall U \subset V \text{ t.c. } 2 \leq |U| \leq |V| - 2$$

- **funzione obiettivo:** Si vuole minimizzare il tempo totale necessario per terminare il tour, cioè

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

Indipendentemente dalla formalizzazione scelta, i vincoli di cut-set sono all'incirca  $2^{|V|}$ : occorrerà quindi determinare formulazioni più compatte o ricorrere a metodologie che consentano di trattare con successo un gran numero di vincoli.

**1.5.6 Vincoli disgiuntivi.** In generale, in un problema di ottimizzazione, si assume che tutti i vincoli debbano essere soddisfatti. In alcune applicazioni tuttavia, solo uno tra due vincoli deve essere soddisfatto o più in generale  $k$  su  $m$ : in questo caso si dice che i vincoli sono *disgiuntivi*.

Si consideri ad esempio il semplice caso in cui si vuol definire una variabile che assuma il minimo di altre due variabili, cioè  $y = \min(u_1, u_2)$ . Ciò può essere fatto con le seguenti disuguaglianze

$$y \leq u_1 \quad \text{e} \quad y \leq u_2$$

insieme ad una tra le seguenti disuguaglianze

$$y \geq u_1 \quad \text{o} \quad y \geq u_2.$$

**1.5.7 Scheduling.** I vincoli disgiuntivi si incontrano di sovente nei problemi di scheduling in cui vari job devono essere eseguiti su una macchina e l'ordine in cui vengono effettuati non è rilevante. In questo caso si ottengono vincoli disgiuntivi del tipo o “il job  $k$  precede il job  $j$  sulla macchina  $i$ ” o viceversa.

Sia  $n$  il numero dei job ed  $m$  il numero di macchine. Supponiamo inoltre che ogni job debba essere eseguito su ogni macchina, e che per ogni job l'ordine con cui deve essere eseguito

sulle varie macchine sia fissato: cioè, il job  $j$  deve essere eseguito prima sulla macchina  $j(1)$ , poi sulla macchina  $j(2)$  e così via. Ciascuna macchina può eseguire un solo job per volta, ed inoltre una volta che un job è partito su una macchina deve essere eseguito fino al suo completamento. L'obiettivo è quello di minimizzare il tempo di completamento di tutti i job. I dati che specificano un'istanza del problema sono oltre naturalmente ad  $n$  e  $m$ , il tempo di elaborazione del job  $j$  sulla macchina  $i$ , indicato con  $p_{ij}$  per ogni  $i, j$  e l'ordine di macchina  $j(1), \dots, j(m)$  per ogni job  $j$ .

Sia inoltre  $t_{ij}$  il tempo di inizio del job  $j$  sulla macchina  $i$ . Poiché la  $(r+1)$ -esima passata sul job  $j$  non può iniziare prima che la passata di indice  $r$  sia stata completata, avremo i seguenti vincoli:

$$t_{j(r+1),j} \geq t_{j(r),j} + p_{j(r),j} \quad \forall r = 1, \dots, m-1, \forall j$$

Per rappresentare i vincoli disgiuntivi relativi ai job  $j$  e  $k$  sulla macchina  $i$ , definiamo la variabile  $x_{ijk} = 1$  se il job  $j$  precede il job  $k$  sulla macchina  $i$  e  $x_{ijk} = 0$  altrimenti dove  $j < k$ . Si hanno quindi i vincoli:

$$\begin{aligned} t_{ik} &\geq t_{ij} + p_{ij} & \text{se } x_{ijk} &= 1 \\ t_{ij} &\geq t_{ik} + p_{ik} & \text{se } x_{ijk} &= 0 \end{aligned}$$

Data una limitazione superiore  $\omega$  su  $t_{ij} - t_{ik} + p_{ij}$  per ogni  $i, j, k$ , si ottengono i vincoli disgiuntivi:

$$\begin{aligned} t_{ij} - t_{ik} &\leq -p_{ij} + \omega(1 - x_{ijk}) & \forall i, j, k \\ t_{ik} - t_{ij} &\leq -p_{ik} + \omega x_{ijk} & \forall i, j, k \end{aligned}$$

In questo caso la funzione obiettivo è

$$\min \sum_{j=1}^n t_{j(m),j}$$

Questo modello richiede  $m \binom{n}{2}$  variabili binarie. A differenza dei modelli di programmazione intera precedentemente visti, questo modello di programmazione intera mista non è stato risolto con successo per valori di  $m$  ed  $n$  che siano di interesse pratico, proprio a causa dell'elevato numero di variabili.

Appare quindi evidente la necessità di determinare buone formulazioni per risolvere in modo efficiente i problemi di programmazione intera.

**1.5.8 Relazioni Logiche.** Spesso, le relazioni tra i valori di variabili booleane sono assimilabili alle ben note relazioni logiche tra variabili proposizionali, ossia variabili che possono assumere i valori vero o falso. In effetti, si possono costruire vincoli lineari tra variabili logiche equivalenti alle classiche relazioni logiche del calcolo proposizionale. Nel seguito, dato un letterale (proposizione elementare)  $a$  del calcolo proposizionale indicheremo con  $x(a)$  la corrispondente variabile booleana, associando il valore 1 di  $x(a)$  al valore *vero* di  $a$  ed il valore 0 di  $x(a)$  al valore *falso* di  $a$ . Analizziamo adesso le più comuni relazioni tra variabili proposizionali.

**Negazione.** Data la variabile proposizionale  $a$ , la variabile complementare  $b = \neg a$  viene rappresentata facilmente dalla variabile complementare  $x(b) = 1 - x(a)$ , con  $x(b) \in \{0, 1\}$ . Se si hanno due variabili proposizionali  $a$  e  $b$  e si vuole imporre che una sia il complemento dell'altra, è sufficiente imporre alle corrispondenti variabili booleane di rispettare il vincolo  $x(a) + x(b) = 1$ .

**Implicazione.** La relazione logica  $a \Rightarrow b$  ( $a$  implica  $b$ ) è esprimibile mediante la disuguaglianza  $x(b) \geq x(a)$ ; infatti,  $x(b)$  è forzata ad assumere il valore 1 se  $x(a) = 1$ .

**Unione (Or).** Date due variabili proposizionali  $a$  e  $b$ , la variabile  $c = a \vee b$ , che assume il valore vero quando almeno una delle due variabili è vera, può essere espressa mediante le seguenti relazioni:

$$x(c) \geq x(a), \quad x(c) \geq x(b), \quad x(c) \leq x(a) + x(b), \quad x(c) \in \{0, 1\}$$

Infatti, le due prime disuguaglianze impongono alla variabile booleana  $x(c)$  di assumere il valore 1 se una delle due altre variabili ha il valore 1. La terza impone il valore  $x(c) = 0$  se  $x(a) = x(b) = 0$ .

**Unione esclusiva (Or esclusivo).** Date due variabili proposizionali  $a$  e  $b$ , la variabile  $c = a \oplus b$ , che assume il valore vero quando una sola delle due variabili è vera, può essere espressa mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} x(c) &\geq x(a) - x(b), \quad x(c) \geq x(b) - x(a), \\ x(c) &\leq x(a) + x(b), \quad x(c) \leq 2 - x(a) - x(b), \quad x(c) \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Infatti, le due prime disuguaglianze impongono alla variabile booleana  $x(c)$  di assumere il valore 1 quando una sola delle due altre variabili ha il valore 1. La terza impone il valore  $x(c) = 0$  se  $x(a) = x(b) = 0$  e la quarta impone  $x(c) = 0$  se  $x(a) = x(b) = 1$ .

**Intersezione (And).** Date due variabili logiche  $a$  e  $b$ , la variabile  $c = a \wedge b$ , che assume il valore vero solo quando entrambe le due variabili siano vere, può essere espressa mediante le seguenti relazioni:

$$x(c) \leq x(a), \quad x(c) \leq x(b), \quad x(c) \geq x(a) + x(b) - 1, \quad x(c) \in \{0, 1\}.$$

Infatti, le prime due disuguaglianze impongono alla variabile booleana  $x(c)$  di assumere il valore 0 quando almeno una delle due altre variabili ha il valore 0. La terza impone il valore  $x(c) = 1$  se  $x(a) = x(b) = 1$ .

**1.5.9 Soddisfattibilità Proposizionale.** In generale, è possibile formulare molti problemi del calcolo proposizionale sotto forma di problemi di ottimizzazione. Questo tipo di formulazione permette di utilizzare tecniche di ottimizzazione in alternativa o in appoggio alle normali tecniche inferenziali usate nel calcolo logico.

Il problema della Soddisfattibilità Proposizionale richiede di determinare se una data formula del calcolo proposizionale in *Forma Normale Congiuntiva* (FNC)

$$A = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$$

è soddisfattibile, dove  $C_1, C_2, \dots, C_m$  sono clausole del tipo

$$C_i = \pm P_1 \vee \pm P_2 \vee \dots \vee \pm P_r$$

e con  $\pm P_j$  si indica o il letterale  $P_j$  o la sua negazione  $\neg P_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Si vuole cioè determinare se esiste un assegnamento di valore di verità vero o falso alle proposizioni elementari  $P_1, P_2, \dots, P_n$  che renda vera la formula  $A$ . Siccome qualsiasi formula del calcolo proposizionale può essere portata in FNC, questo problema ha rilevanti applicazioni pratiche, ad esempio per il progetto e la verifica di circuiti digitali VLSI.

Introduciamo  $n$  variabili logiche  $x_j$  associate ai letterali  $P_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e definiamo

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il letterale } P_j \text{ appare diretto nella clausola } C_i \\ -1 & \text{se il letterale } P_j \text{ appare negato nella clausola } C_i \\ 0 & \text{se il letterale } P_j \text{ non appare nella clausola } C_i \end{cases}$$

Dato un qualunque vettore  $x \in \{0, 1\}^n$ , che possiamo interpretare come un assegnamento di valori di verità agli  $n$  letterali  $P_1, \dots, P_n$ , è facile verificare che la clausola  $C_i$  è soddisfatta dall'assegnamento di valori di verità corrispondente ad  $x$  se e solo se risulta

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq 1 - n(i),$$

dove  $n(i)$  è il numero di letterali che appaiono negati in  $C_i$ . Di conseguenza, una formulazione per il problema è la seguente:

$$\max z = \sum_j a_{ij} x_j \quad \text{t.c.} \quad \sum_j a_{ij} x_j \geq 1 - n(i), \quad i = 2, \dots, m \quad x_j \in \{0, 1\}^n.$$

Una qualsiasi soluzione ammissibile  $x$  per il problema corrisponde ad un assegnamento di valori di verità alle proposizioni elementari che rende vere tutte le clausole  $C_2, C_3, \dots, C_m$ . Se la soluzione ottima  $x^*$  del problema soddisfa anche la clausola  $C_1$ , cioè se risulta

$$\sum_j a_{1j} x_j^* \geq 1 - n(1),$$

allora  $x^*$  corrisponde ad un assegnamento di valori di verità alle proposizioni elementari che soddisfa  $A$ , e quindi  $A$  è soddisfattibile; altrimenti, non può esistere nessun assegnamento di valori di verità alle variabili che soddisfa contemporaneamente  $C_1$  e tutte le altre clausole, e quindi  $A$  non è soddisfattibile.

Esiste una diretta connessione tra problemi legati al calcolo logico e problemi di ottimizzazione. Questo permette di utilizzare tecniche di ottimizzazione per la soluzione di problemi relativi al calcolo logico e, viceversa, tecniche di inferenza per risolvere problemi di ottimizzazione. Esistono persino alcuni interessanti risultati teorici che mostrano come le deduzioni logiche nel calcolo proposizionale possono essere viste come combinazioni lineari dei vincoli nella corrispondente formulazione di Programmazione Lineare con variabili intere, e quindi come le tecniche inferenziali siano un caso particolare di alcune tecniche per la risoluzione di problemi di Programmazione Lineare con variabili intere, dimostrando come la relazione tra ottimizzazione e calcolo logico sia profonda.



# Capitolo 2

# Elementi di algebra lineare

In questo capitolo sono introdotti alcuni elementi di base dell'algebra lineare. Come introduzione al capitolo si invitano gli studenti a leggere e studiare alcuni richiami su vettori, matrici e sistemi lineari riportati nell'appendice A.

## 2.1 Risoluzione di sistemi di equazioni lineari

Un sistema di equazioni lineari in  $m$  equazioni e  $n$  incognite è un insieme di equazioni

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (2.1) \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

dove sono dati i coefficienti  $a_{ij}$  per ogni  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1 \dots, n$  e tutti i termini noti  $b_i$ , per  $i = 1, \dots, m$ . Risolvere il sistema significa determinare — se esistono — i valori delle incognite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  per i quali tutte le uguaglianze (2.1) sono soddisfatte.

Il sistema (2.1) si scrive in notazione matriciale compatta come

$$(2.2) \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{con} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e con il vettore-colonna di incognite  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ .

**2.1.1 Il metodo di Gauss.** Un metodo sistematico per risolvere i sistemi di equazioni lineari si basa sulla possibilità di trasformare ogni sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  in uno equivalente  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  ma “facile” da risolvere.

La seguente proprietà identifica tre tipi di *trasformazioni elementari* che trasformano un sistema in uno equivalente.

**Proprietà 2.1.** Siano  $E_1, \dots, E_m$  le equazioni del sistema (2.1); Le soluzioni del sistema non cambiano se:

- (i) due equazioni vengono permutate ( $E_p \leftrightarrow E_q$ );
- (ii) una equazione  $E_p$

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p$$

viene sostituita da  $\lambda E_p$ , con  $\lambda \neq 0$  ( $E_p \leftarrow \lambda E_p$ ):

$$\lambda a_{p1}x_1 + \lambda a_{p2}x_2 + \dots + \lambda a_{pn}x_n = \lambda b_p.$$

- (iii) considerate due equazioni  $E_p, E_q$

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p$$

$$a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \dots + a_{qn}x_n = b_q$$

si sostituisce  $E_q$  con  $E_q + \lambda E_p$  ( $E_q \leftarrow E_q + \lambda E_p$ ), per un qualunque  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p$$

$$(a_{q1} + \lambda a_{p1})x_1 + (a_{q2} + \lambda a_{p2})x_2 + \dots + (a_{qn} + \lambda a_{pn})x_n = (b_q + \lambda b_p)$$

*Dimostrazione.* La (i) e la (ii) sono ovvie. Per la (iii), si deve dimostrare che

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ soddisfa } E_p, E_q \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ soddisfa } E_p, E_q + \lambda E_p.$$

( $\implies$ ) Si prenda qualunque  $x_1, \dots, x_n$  che soddisfa  $E_p, E_q$ ; risulta allora per ipotesi

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \quad (E_p)$$

mentre per  $(E_q + \lambda E_p)$  si ha

$$\begin{aligned} & (a_{q1} + \lambda a_{p1})x_1 + (a_{q2} + \lambda a_{p2})x_2 + \dots + (a_{qn} + \lambda a_{pn})x_n = \\ &= \underbrace{a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \dots + a_{qn}x_n}_{= b_q \text{ per ipotesi}} + \lambda \underbrace{(a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n)}_{= b_p \text{ per ipotesi}} = \\ &= b_q + \lambda b_p. \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ) Si ponga  $E'_q = (\lambda E_p + E_q)$ ; allora si può osservare che  $E_q = E'_q + (-\lambda)E_p$ , dove  $-\lambda \neq 0$ . Quindi ogni  $(x_1, \dots, x_n)$  che soddisfa  $E_p, E'_q$  soddisfa anche  $E_p, E_q$  per l'implicazione già dimostrata.  $\square$

Le trasformazioni elementari sulle equazioni

$$\begin{array}{lll} E_p \leftrightarrow E_q & & \leftrightarrow: \text{“scambia di posto”} \\ E_p \leftarrow \lambda E_p & (\text{con } \lambda \neq 0) & \leftarrow: \text{“sostituisci con”} \\ E_q \leftarrow E_q + \lambda E_p & & \end{array}$$

corrispondono ad altrettante trasformazioni elementari dello stesso genere sulle righe  $\mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^m$  della matrice dei coefficienti  $\mathbf{A}$  e sulle componenti  $b_1, \dots, b_m$  del vettore-colonna dei termini noti.

|       | Equazioni   | Righe   | Componenti                         |
|-------|---|---|------------------------------------|
| (2.3) | $E_p \leftrightarrow E_q$                           | $\mathbf{A}^p \leftrightarrow \mathbf{A}^q$                   | $b_p \leftrightarrow b_q$          |
|       | $E_p \leftarrow \lambda E_p \quad (\lambda \neq 0)$ | $\mathbf{A}^p \leftarrow \lambda \mathbf{A}^p$                | $b_p \leftarrow \lambda b_p$       |
|       | $E_q \leftarrow E_q + \lambda E_p$                  | $\mathbf{A}^q \leftarrow \mathbf{A}^q + \lambda \mathbf{A}^p$ | $b_q \leftarrow b_q + \lambda b_p$ |

Il metodo di riduzione di Gauss permette di ridurre un sistema di equazioni lineari  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ad un sistema equivalente  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  nel quale, grazie alla struttura di  $\mathbf{A}'$ , è immediato stabilire se esso:

- ammette soluzione unica, oppure
- ammette infinite soluzioni, oppure
- non ammette soluzioni.

**Algoritmo di riduzione per righe di Gauss/Jordan.** Nel seguito illustriamo l'algoritmo di riduzione per righe di Gauss/Jordan.

```

1: for  $p = 1, \dots, m$  do
2:   if  $\langle \text{almeno uno tra } \mathbf{A}^p, \dots, \mathbf{A}^m \text{ è } \neq 0 \rangle$  then
3:     Scegli  $a_{rs} \neq 0$  con  $r \geq p$  e  $s$  minimo possibile.;
4:     for  $i = 1, \dots, m, i \neq r$  do
5:       Poni  $\mathbf{A}^i \leftarrow \mathbf{A}^i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} \mathbf{A}^r$ ;  $b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} b_r$ ;  $\triangleright$  Cioè  $E_i \leftarrow E_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} E_r$ ;
6:     end for
7:     Poni  $\mathbf{A}^r \leftarrow \frac{1}{a_{rs}} \mathbf{A}^r$ ;  $b_r \leftarrow \frac{1}{a_{rs}} b_r$ ;  $\triangleright$  Cioè  $E_r \leftarrow \frac{1}{a_{rs}} E_r$ ;
8:     Scambia  $\mathbf{A}^p \leftrightarrow \mathbf{A}^r$ ;  $b_p \leftrightarrow b_r$ ;  $\triangleright$  Cioè  $E_p \leftrightarrow E_r$ ;
9:   end if
10: end for

```

Si osserva che la sequenza di operazioni, descritte nelle linee 3–8, è particolarmente importante, ed è chiamata complessivamente *operazione di pivot* sul coefficiente  $a_{rs}$ . Il risultato dell'operazione di pivot è che la colonna  $s$  assume una forma particolarmente semplice: l'elemento  $r$ -esimo diventa uguale a 1, mentre tutti gli altri vengono azzerati:

$$(2.4) \quad \mathbf{A}_s \xrightarrow{\text{diventa}} \mathbf{A}'_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{"1" su riga } r).$$

Una colonna con questa forma verrà chiamata *colonna ridotta*.

**Esempio 2.1.** (a) Sia dato il seguente sistema

$$\begin{cases} -2x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione del metodo di Gauss/Jordan porta ed effettuare le seguenti trasformazioni. Per semplicità si rappresenta il sistema con una singola matrice “completa”  $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$  sulla quale si effettuano trasformazioni su righe.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 & | & 1 \\ \mathbf{3} & 1 & -1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{3}E_2 \\ E_1 \leftrightarrow E_2}]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 + 0E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{3}E_2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_2 \leftarrow -\frac{1}{2}E_2}]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 + \frac{1}{6}E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{6}E_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & | & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & | & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & | & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & | & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_1 \leftarrow E_1 + \frac{1}{4}E_3}]{\substack{E_2 \leftarrow E_2 + 0E_3 \\ E_3 \leftarrow \frac{3}{4}E_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & | & \frac{11}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & | & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

Il sistema iniziale equivale quindi a

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{8}x_4 = \frac{11}{8} \\ x_2 - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2} \\ x_3 + \frac{1}{8}x_4 = \frac{5}{8} \end{cases}$$

che si risolve per ispezione, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{8} - \frac{7}{8}x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 \end{cases} \quad (x_4 \in \mathbb{R}), \text{ libera.}$$

Quest'ultima espressione fornisce i valori delle variabili  $x_1, x_2, x_3$  che soddisfano le equazioni del sistema *in funzione del valore assunto dalla variabile  $x_4$*  (che viene chiamata variabile *libera*). Ciò vuol dire che il sistema ammette *infinita* soluzioni, una per ogni valore attribuibile alla  $x_4$ . Un sistema di equazioni può avere nella soluzione zero, una o più variabili libere.

(b) Il seguente sistema ammette soluzione unica.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Infatti, riducendo, si ottiene quanto segue.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & | & 4 \\ 0 & 0 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema equivale a

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{2}{3} \\ x_2 & = 1 \\ x_3 & = \frac{4}{3} \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = 0 \quad (\text{ridondante}) \end{cases}$$

(c) Il seguente sistema non ammette soluzioni.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Riducendo si ottiene:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

e quindi il sistema equivale a

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_3 = \frac{7}{5} \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -\frac{1}{5} \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

dove l'ultima equazione è contraddittoria.

**Risultato della procedura di riduzione.** Al termine della procedura di riduzione, il sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  è stato trasformato in un sistema equivalente  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ . La risolubilità o meno del sistema si deduce dal confronto della matrice ridotta  $\mathbf{A}'$  e del vettore-colonna ridotto  $\mathbf{b}'$ . La matrice ridotta  $\mathbf{A}'$  ha una forma particolare.

- Da sinistra a destra, appaiono un certo numero  $k$  di colonne ridotte del tipo (2.4), non necessariamente contigue. Questo è garantito dalla scelta dei coefficienti  $a_{rs}$  sui quali l'algoritmo esegue le operazioni di pivot (riga 3 dell'algoritmo). Il numero  $k$  di colonne ridotte è  $\leq \min\{m, n\}$  (dimensioni di  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ).
- Gli elementi unitari delle colonne ridotte appaiono sulle righe successive  $1, 2, \dots, k$ . Questo è garantito dall'operazione di scambio che segue ogni operazione di pivot.
- Le righe di indici  $k+1, \dots, m$  (se ce ne sono) sono tutte nulle — altrimenti l'algoritmo avrebbe generato un'ulteriore colonna ridotta con un 1 su una di queste righe.

$$(2.5) \quad (\mathbf{A}' | \mathbf{b}') = \left( \begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,k+1} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{2,k+1} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{k,k+1} & \dots & \alpha_{kn} & \beta_k \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n \end{array} \right).$$

A riduzione terminata si possono avere quindi due possibilità:

- (i) Ad ogni riga nulla di  $\mathbf{A}'$  corrisponde una componente nulla di  $\mathbf{b}'$ . In questo caso il sistema di equazioni è risolvibile, con  $n - k$  variabili libere (0 variabili libere = soluzione unica). Le variabili libere sono quelle che moltiplicano le colonne non-ridotte.
- (ii) Esiste una riga nulla di  $\mathbf{A}'$  per la quale la corrispondente componente di  $\mathbf{b}'$  è non-nulla. In questo caso il sistema non ha soluzioni, perché nel sistema ridotto si ha almeno una equazione inconsistente, del tipo

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = \beta \quad (\beta \neq 0).$$

**Complessità della procedura di riduzione\*\*.** In questo paragrafo, a titolo di esempio, studiamo la complessità dell'algoritmo di riduzione per righe di Gauss/Jordan. Studiare la complessità di un algoritmo significa essenzialmente individuare la generica funzione  $T(n)$  che “conta” il numero di operazioni elementari che l'algoritmo compie prima di completare la sua esecuzione, dove  $n$  rappresenta la dimensione dell'input da esaminare. Per operazioni elementari si intendono tutte le operazioni aritmetiche, i confronti, gli assegnamenti, e si suppone che ogni operazione elementare abbia costo pari a 1. Infine, si osserva che l'analisi si compie considerando il *caso pessimo*, ovvero quel caso in input che obbliga l'algoritmo a lavorare il più possibile.

L'input in esame è quindi una generica matrice  $\mathbf{A}$  con  $n$  righe ed  $m$  colonne (compresa quella dei termini noti). Quindi, nel nostro caso, dobbiamo individuare la funzione  $T(n, m)$ . Riprendendo lo schema di algoritmo riportato a pagina 29, si osserva che l'operazione di pivot sul coefficiente  $a_{rs}$  è ripetuta per tutte le  $n$  righe. In prima approssimazione, la funzione  $T(n, m)$  dell'algoritmo è data dal costo dell'operazione di pivot moltiplicato  $n$ .

Vediamo invece di determinare il costo dell'algoritmo partendo dal costo della singola operazione di pivot. Ogni operazione di pivot può essere composta dalle 3 possibili operazioni descritte in (2.3). Ognuna di queste operazioni per riga coinvolge quindi, nel caso pessimo, gli  $m - r + 1$  elementi appartenenti alla riga  $r$  del pivot  $a_{rs}$ . Per ciascuno di questi elementi, si eseguono un numero costante di operazioni elementari per tutte le  $n$  rimanenti righe. Ovvero abbiamo:

$$T_r(n, m) = n(m - r + 1).$$

Sommando su tutte le possibili righe, otteniamo:

$$T(n, m) = \sum_{r=1}^n T_r(n, m) = \sum_{r=1}^n n(m - r + 1) = n \sum_{r=1}^n (m - r + 1).$$

Supponendo che  $n \leq m$ , nel caso pessimo ( $n = m$ ) la sommatoria corrisponde alla somma dei primi  $m$  numeri che sappiamo essere pari a  $\frac{m(m+1)}{2}$ . Di conseguenza, otteniamo che

$$\text{se } n \leq m \implies T(n, m) = m \frac{m(m+1)}{2},$$

il cui ordine di grandezza è  $O(m^3)$ . In modo speculare si può mostrare che, nel caso  $n \geq m$ , la complessità dell'algoritmo risulta  $O(n^3)$ . La dimostrazione viene lasciata per esercizio.

**2.1.2 Matrici di trasformazione.** Le trasformazioni elementari (2.3) permettono di convertire matrici e vettori — e i sistemi lineari che questi rappresentano — in matrici e vettori formalmente più semplici ma ad essi equivalenti. Spesso nelle applicazioni sorge la necessità di tenere traccia di lunghe sequenze di trasformazioni per poi ri-applicarle a varie matrici o vettori. In questo caso non è necessario memorizzare una lista esplicita di trasformazioni, ma una singola matrice.

Data una matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , per ognuna delle trasformazioni elementari (2.3) si può osservare che le due operazioni seguenti sono equivalenti:

- effettuare la trasformazione sulle righe della matrice  $\mathbf{A}$ ;
- effettuare la trasformazione sulle righe di una matrice identità  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e moltiplicare  $\mathbf{A}$  a sinistra per la matrice così trasformata.

**Esempio 2.2.** Sia data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) La trasformazione  $T_1: E_1 \leftrightarrow E_2$  sulle righe di  $\mathbf{A}$  produce la matrice trasformata  $\mathbf{A}'$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La stessa matrice si ottiene moltiplicando

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove  $\mathbf{T}_1$  è la matrice identità con le righe 1 e 2 permutate.

(b) La trasformazione  $T_2: E_4 \leftarrow \frac{1}{2}E_4$  produce la matrice trasformata  $\mathbf{A}''$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2}E_4} \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

ottenibile anche come

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{T}_2 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) La trasformazione  $T_3: E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3$  produce la matrice trasformata  $\mathbf{A}'''$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che si può anche ottenere calcolando

$$\mathbf{A}''' = \mathbf{T}_3 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{T}_3$  corrisponde all'identità trasformata secondo la trasformazione  $T_3$ .

Il risultato di una successione di trasformazioni  $T_1, T_2, \dots, T_s$  applicate alla matrice  $\mathbf{A}$  corrisponde al prodotto

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{T}_s \mathbf{T}_{s-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1}_{\mathbf{P}} \mathbf{A}.$$

Si noti che la matrice

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_s \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_s \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{I}$$

è la matrice identità trasformata dalla sequenza  $T_1, T_2, \dots, T_s$ .

**Esempio 2.3** (continua dal precedente). Si vuole applicare alla precedente matrice  $\mathbf{A}$  la successione di trasformazioni

$$\begin{aligned} T_1: E_1 &\leftrightarrow E_2, \\ T_2: E_4 &\leftarrow \frac{1}{2}E_4, \\ T_3: E_1 &\leftarrow E_1 + 2E_3. \end{aligned}$$



Eseguendo direttamente la sequenza, si ottiene

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \\ & \xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lo stesso risultato si può ottenere moltiplicando  $\mathbf{A}$  per la matrice di trasformazione  $\mathbf{P}$ . La  $\mathbf{P}$  può essere calcolata indifferentemente come prodotto delle matrici di trasformazione elementari o trasformando la matrice identità.

Calcolando il prodotto:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1 \leftrightarrow E_2} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Trasformando  $\mathbf{I}$ :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \\ & \xrightarrow{E_4 \leftarrow \frac{1}{2} E_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Infine si ottiene, con un singolo prodotto matriciale:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Osservazione 2.1.** Ridurre un sistema di equazioni lineari  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ad uno equivalente  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  per mezzo di trasformazioni elementari corrisponde a moltiplicarne a sinistra ambo i membri per una opportuna matrice  $\mathbf{P}$  di trasformazione elementare:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{equivale a} \quad \underbrace{\mathbf{P}\mathbf{A}}_{\mathbf{A}'} \mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{P}\mathbf{b}}_{\mathbf{b}'}.$$

**2.1.3 Equazioni matriciali.** Generalizzando il concetto di sistema lineare, si può pensare di avere nell'espressione

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

anziché un vettore di incognite e uno di termini noti un'intera matrice di incognite  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$$

e una matrice di termini noti  $\mathbf{B}$ , di dimensioni compatibili:

$$(2.6) \quad \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times p}.$$

Determinare i valori di  $\mathbf{X}$  che soddisfano l'equazione (2.6) corrisponde a risolvere i sistemi

$$(2.7) \quad \mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \mathbf{B}_1, \mathbf{A}\mathbf{X}_2 = \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{X}_p = \mathbf{B}_p,$$

dove  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$  e  $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p$  sono i vettori-colonna delle matrici  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{B}$ . Il metodo di Gauss/Jordan può immediatamente essere esteso in modo da combinare i vettori-riga di  $\mathbf{B}$  anziché i numeri  $b_1, \dots, b_m$ , e quindi i sistemi (2.7) possono essere risolti “in parallelo”.

**Esempio 2.4.** Determinare  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tale che

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B},$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Costruendo la matrice completa  $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$  e riducendo si ottiene:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right).$$

L'equazione matriciale equivale allora a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e quindi si deve avere

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**2.1.4 Inversione di matrici quadrate.** Una matrice quadrata  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è detta invertibile se esiste una matrice  $\mathbf{A}^{-1}$  tale che

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Non tutte le matrici quadrate sono invertibili.

**Una classe di matrici invertibili.** Si può osservare che le matrici di trasformazione elementare sono invertibili: per ogni  $\mathbf{T}$  corrispondente a una trasformazione elementare, la matrice inversa è proprio la matrice della trasformazione inversa.

**Esempio 2.5.** Nei seguenti casi, verificare che  $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1 \leftrightarrow E_2}, & \mathbf{T}^{-1} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1 \leftrightarrow E_2} \\ \mathbf{T} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2 \leftarrow \frac{1}{2}E_2}, & \mathbf{T}^{-1} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2 \leftarrow 2E_2} \\ \mathbf{T} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2 \leftarrow E_2 + 3E_3}, & \mathbf{T}^{-1} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2 \leftarrow E_2 - 3E_3}. \end{aligned}$$

Più in generale, ogni matrice di trasformazione  $\mathbf{P}$  ottenuta come prodotto di matrici di trasformazione elementare è invertibile: se

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_{s-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1,$$

la sua inversa è

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \dots \mathbf{T}_{s-1}^{-1} \mathbf{T}_s^{-1}.$$

Infatti si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} &= \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \dots \mathbf{T}_{s-1}^{-1} \underbrace{\mathbf{T}_s^{-1} \mathbf{T}_s}_{=\mathbf{I}} \mathbf{T}_{s-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 = \\ &= \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \dots \underbrace{\mathbf{T}_{s-1}^{-1} \mathbf{T}_{s-1}}_{=\mathbf{I}} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 = \\ &= \dots = \mathbf{I}. \\ \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} &= \mathbf{T}_s \mathbf{T}_{s-1} \dots \mathbf{T}_2 \underbrace{\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_1^{-1}}_{=\mathbf{I}} \mathbf{T}_2^{-1} \dots \mathbf{T}_{s-1}^{-1} \mathbf{T}_s^{-1} = \\ &= \mathbf{T}_s \mathbf{T}_{s-1} \dots \underbrace{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_2^{-1}}_{=\mathbf{I}} \dots \mathbf{T}_{s-1}^{-1} \mathbf{T}_s^{-1} = \\ &= \dots = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Per determinare l'inversa di una generica matrice quadrata  $\mathbf{A}$  si può anzitutto cercare una matrice che produca l'identità moltiplicando a destra; ciò significa determinare  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

tale che

$$(2.8) \quad \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}.$$

L'equazione matriciale (2.8) si può risolvere riducendola con il metodo di Gauss/Jordan. L'applicazione della riduzione porta in questo caso a due possibili risultati:

- matrice  $\mathbf{A}$  ridotta contiene una o più righe nulle, oppure
- coincide con l'identità.

Nel primo caso la matrice  $\mathbf{A}$  non è invertibile; nel secondo caso la matrice  $\mathbf{X}$  è univocamente determinata.

Se si è potuta determinare la matrice  $\mathbf{X}$  che soddisfa l'equazione matriciale (2.8), si può dimostrare che per questa  $\mathbf{X}$  risulta anche  $\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , e quindi  $\mathbf{X}$  è l'inversa cercata. Infatti la riduzione dell'equazione corrisponde a moltiplicare a sinistra ambo i membri per una matrice di trasformazione  $\mathbf{P}$  tale che  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ ; quindi

$$\underbrace{\mathbf{P}\mathbf{A}}_{=\mathbf{I}}\mathbf{X} = \mathbf{P} \iff \mathbf{X} = \mathbf{P}.$$

Ciò significa che la matrice di trasformazione  $\mathbf{P}$  coincide proprio con la  $\mathbf{X}$  già determinata, e che

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$$

cioè la  $\mathbf{X}$  calcolata è l'inversa  $\mathbf{A}^{-1}$  che si voleva determinare.

**Esempio 2.6.** Sia data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per quanto detto, per calcolare l'inversa è sufficiente risolvere  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ . Si opera quindi per riduzione.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

La  $\mathbf{A}^{-1}$  cercata si legge direttamente dalla parte destra

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Indipendenza lineare e basi

**2.2.1 Combinazioni lineari di vettori.** Dato un insieme di  $k > 0$  vettori  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice che un vettore  $\mathbf{w}$  è una *combinazione lineare* dei vettori di  $S$  se esistono  $k$  coefficienti  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  per cui risulta

$$(2.9) \quad \mathbf{w} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_k \mathbf{v}_k.$$

Si definisce l'insieme

$$(2.10) \quad \mathcal{L}(S) = \{\mathbf{w} : \mathbf{w} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_k \mathbf{v}_k, \text{ con } x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\}$$

che contiene tutti i vettori ricavabili come combinazioni lineari dei vettori di  $S$ . L'insieme  $\mathcal{L}(S)$  è chiamato anche *span* di  $S$  o anche lo *spazio generato da  $S$* .

**Osservazione 2.2.** Se si costruisce una matrice  $\mathbf{A}_S \in \mathbb{R}^{n \times k}$  che ha per vettori-colonna i vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , dire che  $\mathbf{w}$  è combinazione lineare di  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  equivale a dire che il sistema con incognite (in colonna)  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$

$$\mathbf{A}_S \mathbf{x} = \mathbf{w}$$

ammette soluzioni.

**Esempio 2.7.** Presi i vettori di  $\mathbb{R}^3$  (scritti come vettori-colonna)

$$(2.11) \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix},$$

un vettore  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$  appartiene a  $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  se e solo se esistono  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

tali che

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

ovvero se ammette almeno una soluzione il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = w_1 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_3 = w_2 \\ x_2 + 2x_3 = w_3 \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_S} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}}.$$

**2.2.2 Indipendenza lineare.** I vettori di un insieme  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  (con  $k > 0$ ) sono detti tra loro *linearmente indipendenti* se

$$\sum_{j=1}^k x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \implies x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0.$$

In questo caso l'insieme  $S$  è anche chiamato un *insieme libero*.

**Proprietà 2.2.** Vale che:

- (i) Se  $S$  è un insieme libero, allora  $\mathbf{0} \notin S$ .
- (ii) Se  $S$  è un insieme libero e  $S' \subseteq S$  e  $S' \neq \emptyset$ , allora  $S'$  è un insieme libero.
- (iii) Se  $S_1, S_2$  sono insiemi liberi,  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$  è un insieme libero.

*Dimostrazione.* Sviluppabile per esercizio. □

**Proprietà 2.3.** Sono condizioni equivalenti:

- (i)  $x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \implies x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ .
- (ii)  $\mathbf{0} \notin S$ , e per nessun  $\mathbf{v}_j$  risulta  $\mathbf{v}_j \in \mathcal{L}(S \setminus \{\mathbf{v}_j\})$ .
- (iii) ogni  $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(S)$  si esprime con un'unica combinazione lineare  $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^k x_j \mathbf{v}_j$  (i coefficienti  $x_j$  sono univocamente determinati).

Le condizioni (ii) e (iii) si possono interpretare come segue, se si considera la matrice  $\mathbf{A}_S$  che ha per vettori-colonna  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ .

- (ii) I vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  sono linearmente indipendenti se e solo se  $\mathbf{A}_S \mathbf{x} = \mathbf{0}$  ammette come *unica* soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- (iii) I vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  sono linearmente indipendenti se e solo se, per ogni distinto  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , il sistema  $\mathbf{A}_S \mathbf{x} = \mathbf{w}$  non ha mai infinite soluzioni (a seconda di  $\mathbf{w}$ , o ne ha una sola o non ne ha nessuna).

*Dimostrazione.* (i)  $\implies$  (ii). Immediato: sia per assurdo  $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S)$ , quindi  $\mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^k x_j \mathbf{v}_j$ . Allora risulta  $\mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^k x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$  per opportuni  $x_j$ , e questa combinazione lineare non ha tutti i coefficienti nulli.

(ii)  $\implies$  (iii). Per assurdo, sia  $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^k x_j \mathbf{v}_j$ ,  $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^k y_j \mathbf{v}_j$ , con almeno un  $x_j \neq y_j$ . Allora  $\mathbf{0} = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \sum_{j=1}^k \underbrace{(x_j - y_j)}_{z_j} \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^k z_j \mathbf{v}_j$  con  $z_j$  non tutti nulli. Sia ad esempio

$z_k \neq 0$ , allora risulta  $\mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{z_j}{z_k} \mathbf{v}_j$ . Contraddizione.

(iii)  $\implies$  (i). Risulta sempre  $\mathbf{0} \in \mathcal{L}(S)$  perchè ovviamente  $\mathbf{0} = \sum_{j=1}^k x_j \mathbf{v}_j$  quando  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ . Inoltre per ipotesi questa combinazione è unica, quindi

$$\sum_{j=1}^k x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \implies x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0.$$

□

**Osservazione 2.3.** Se  $S$  non è un insieme libero, allora almeno uno dei suoi elementi è combinazione lineare degli altri. Si supponga ad esempio che  $\mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^{k-1} x_j \mathbf{v}_j$ . Si vede facilmente che

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \setminus \{\mathbf{v}_k\})$$

infatti per ogni  $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(S)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \sum_{j=1}^k y_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{k-1} y_j \mathbf{v}_j + y_k \mathbf{v}_k = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} y_j \mathbf{v}_j + y_k \sum_{j=1}^{k-1} x_j \mathbf{v}_j = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} (y_j + y_k x_j) \mathbf{v}_j \iff \mathbf{w} \in \mathcal{L}(S \setminus \{\mathbf{v}_k\}). \end{aligned}$$

Cioè: eliminando da un insieme di vettori un elemento che è combinazione lineare dagli altri, lo span dell'insieme non cambia. Analogamente, lo span non cambia se si aggiunge ad  $S$  un vettore  $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(S)$ .

**Esempio 2.8.** I tre vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  degli esempi precedenti non formano un insieme di vettori linearmente indipendenti. Infatti il sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

equivale (applicando la riduzione di Gauss) a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \text{ (ridondante)}. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono quindi

$$\begin{cases} x_1 = 0 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = 0 - 2x_3 \end{cases} \quad \text{con la variabile } x_3 \text{ libera.}$$

Quindi ci sono combinazioni lineari  $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$  con  $x_3 \neq 0$ , e per la Proprietà 2.3(iii) i tre vettori non sono tra loro linearmente indipendenti.

Si può giungere alla stessa conclusione usando la Proprietà 2.3(iii), osservando come già fatto in precedenza che

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2.$$

I due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  sono invece linearmente indipendenti, infatti il sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ha come unica soluzione  $x_1 = x_2 = 0$  (i dettagli della risoluzione sono ovvi).

**2.2.3 Basi.** Dato un insieme  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di vettori di  $\mathbb{R}^n$ , con  $\text{span } \mathcal{L}(S)$ , un insieme  $B \subseteq \mathcal{L}(S)$  è una *base* di  $\mathcal{L}(S)$  se

- $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(S)$  e
- $B$  è un insieme libero.

**Nota.** Se  $B \subseteq S$  (cioè la base è *estratta* da  $S$ ),  $B$  è un sottoinsieme libero massimale di  $S$ .

**Metodo degli scarti successivi.** Usando la Proprietà 2.3(ii) si può determinare un primo metodo per estrarre una base da  $S$ .

```

1: Poni  $B := \emptyset$ ;
2: for  $\langle \text{ogni } \mathbf{v}_i \in S \rangle$  do
3:   if  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{v}_i \notin \mathcal{L}(B)$  then
4:     Poni  $B := B \cup \{\mathbf{v}_i\}$ ;
5:   else
6:     Scarta  $\mathbf{v}_i$ ;
7:   end if
8: end for
```



**Osservazione 2.4.** (a) Il metodo più banale per verificare se  $\mathbf{v}_i \in \mathcal{L}(B)$  alla riga 3 consiste nel determinare se il sistema

$$\sum_{\mathbf{v}_j \in B} x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i$$

ammette soluzioni.

(b) Il risultato del metodo degli scarti successivi è diverso a seconda dell'ordine nel quale vengono considerati gli elementi di  $S$ .

**Esempio 2.9.** Lavorando sempre con i tre vettori definiti dalle formule (2.11): (a) considerando la sequenza  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ , il metodo degli scarti successivi inserisce in  $B$  prima  $\mathbf{v}_1$ , poi  $\mathbf{v}_2$ , e infine scarta  $\mathbf{v}_3$  perché è combinazione lineare dei precedenti.

(b) Usando invece la sequenza  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2$ , il metodo fa quanto segue.

- Conserva  $\mathbf{v}_1$  perché è  $\neq \mathbf{0}$ , quindi pone  $B = \{\mathbf{v}_1\}$ .
- Conserva  $\mathbf{v}_3$  perché  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$  sono linearmente indipendenti, infatti

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riduz.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_1 = x_2 = 0.$$

Quindi pone  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ .

- Infine scarta  $\mathbf{v}_2$ , perché risulta  $\mathbf{v}_2 = -\frac{1}{4}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riduz.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Perciò  $\mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$  ammette come basi sia  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  che  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ . Si può verificare che anche  $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  è una base valida.

Il risultato principale riguardante le basi è il fatto che esse hanno tutte lo stesso numero di elementi. Per giungere a dimostrarlo, serve un risultato intermedio.

**Proprietà 2.4.** Data una base  $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  di  $\mathcal{L}(S)$ , per ogni  $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(S) \setminus \{\mathbf{0}\}$  esiste un  $\mathbf{v}_j \in B$  tale che  $(B \cup \{\mathbf{w}\}) \setminus \{\mathbf{v}_j\}$  è una base di  $\mathcal{L}(S)$ .

*Dimostrazione.* L'insieme  $S = B \cup \{\mathbf{w}\}$  non è un insieme libero, e risulta  $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(B)$ . Applicando il metodo degli scarti successivi alla sequenza di vettori

$$\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$$

si ha che

- il vettore  $\mathbf{w}$  non viene scartato (perché è  $\neq \mathbf{0}$  e viene considerato per primo);
- almeno uno tra  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  viene scartato (perché gli elementi di  $B \cup \{\mathbf{w}\}$  non sono linearmente indipendenti).

Per completare la dimostrazione della tesi occorre dimostrare che non si scarta più di un elemento.

Per assurdo: si assuma che vengano scartati successivamente due vettori  $\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_q \in B$  ( $p < q$ ). Si deduce allora quanto segue.

Il primo vettore  $\mathbf{v}_p$  viene scartato perché è combinazione lineare dei precedenti:  $\mathbf{v}_p = x_0 \mathbf{w} + \sum_{i=1}^{p-1} x_i \mathbf{v}_i$ , cioè

$$(2.12) \quad x_0 \mathbf{w} + x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + x_{p-1} \mathbf{v}_{p-1} - \mathbf{v}_p = \mathbf{0},$$

per opportuni coefficienti  $x_0, \dots, x_{p-1}$ . Nell'equazione (2.12) si deve avere  $x_0 \neq 0$ , altrimenti risulterebbe  $x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + x_{p-1} \mathbf{v}_{p-1} - \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ , contraddicendo l'indipendenza lineare degli elementi di  $B$ . Se il secondo vettore  $\mathbf{v}_q$  viene scartato a una delle iterazioni successive, questo avviene perché per opportuni coefficienti  $y_0, \dots, y_{q-1}$  risulta

$$(2.13) \quad y_0 \mathbf{w} + y_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + y_{p-1} \mathbf{v}_{p-1} + y_{p+1} \mathbf{v}_{p+1} + \cdots + y_{q-1} \mathbf{v}_{q-1} - \mathbf{v}_q = \mathbf{0}.$$

Come sopra, deve risultare  $y_0 \neq 0$ . Dividendo l'equazione (2.12) per  $x_0$  e la (2.13) per  $y_0$  e sottraendo membro a membro si ottiene

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x_1}{x_0} - \frac{y_1}{y_0} \right) \mathbf{v}_1 + \cdots + \left( \frac{x_{p-1}}{x_0} - \frac{y_{p-1}}{y_0} \right) \mathbf{v}_{p-1} - \frac{1}{x_0} \mathbf{v}_p + \\ & - \frac{y_{p+1}}{y_0} \mathbf{v}_{p+1} \cdots - \frac{y_{q-1}}{y_0} \mathbf{v}_{q-1} + \frac{1}{y_0} \mathbf{v}_q = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

dove almeno i coefficienti di  $\mathbf{v}_p$  e  $\mathbf{v}_q$  sono  $\neq 0$ . Questo contraddice l'ipotesi che i vettori della base  $B$  siano linearmente indipendenti.  $\square$

**Proprietà 2.5.** *Se  $B$  e  $B'$  sono due basi di  $\mathcal{L}(S)$ , si ha necessariamente  $|B| = |B'|$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ ,  $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_q\}$ .

Per assurdo, si supponga  $p > q$ . Si applichi il metodo degli scarti successivi alla sequenza di generatori

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_q.$$

Per la Proprietà 2.4 il metodo scarta esattamente uno dei vettori  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q$ . Per semplicità, si supponga che sia  $\mathbf{w}_q$  ad essere scartato. Si ottiene quindi una base  $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{q-1}\}$ . Riapplicando il metodo sulla sequenza di generatori

$$\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{q-1}$$

si scarta di nuovo uno dei  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{q-1}$ :  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  non possono essere scartati perché sono non nulli e tra loro linearmente indipendenti. Di nuovo, per semplicità, si supponga che

sia  $\mathbf{w}_{q-1}$  l'elemento scartato, fornendo la base  $B_2 = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{q-2}\}$ . Reiterando, si ottiene ragionando in modo analogo, per un certo numero  $m$  di iterazioni:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{q-2} & \xrightarrow{\text{scarto } \mathbf{w}_{q-2}} & B_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{q-3}\} \\ & \vdots & \\ \mathbf{v}_m, \dots, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{q-m+1} & \xrightarrow{\text{scarto } \mathbf{w}_{q-m+1}} & B_m = \{\mathbf{v}_m, \dots, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{q-m}\} \end{array}$$

Ad ogni iterazione si scarta un elemento di  $S$ , e l'insieme ottenuto  $B_m$  è sempre una base di  $\mathcal{L}(S)$ .

Eseguendo esattamente  $q$  iterazioni si eliminano tutti gli elementi di  $B$ , e si ottiene una base

$$B_q = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\} \quad \text{con } q < p.$$

Quindi i vettori  $\mathbf{v}_{q+1}, \dots, \mathbf{v}_p \in B$  devono essere combinazioni lineari dei soli  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ , contraddicendo l'ipotesi che  $B$  fosse una base (e quindi con elementi linearmente indipendenti tra loro).

Scambiando il ruolo di  $B$  e  $B'$  si dimostra allo stesso modo che non si può avere  $q > p$ .  $\square$

**2.2.4 La riduzione di Gauss-Jordan e l'estrazione di una base.** Si consideri una matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Applicando la riduzione completa di Gauss-Jordan su  $\mathbf{A}$  come se si stesse risolvendo un sistema del tipo  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , si ottiene una matrice finale  $\mathbf{A}' = \mathbf{P}\mathbf{A}$  del tipo (2.5), dove determinate colonne — ad esempio le  $\mathbf{A}'_1, \dots, \mathbf{A}'_k$  — sono colonne ridotte. Vale la seguente proprietà.

**Proprietà 2.6.** Siano  $S = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\}$ ,  $S' = \{\mathbf{A}'_1, \dots, \mathbf{A}'_n\}$  gli insiemi dei vettori-colonna di  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}'$  rispettivamente. Presi  $B = \{\mathbf{A}_{j_1}, \mathbf{A}_{j_2}, \dots, \mathbf{A}_{j_k}\}$  e  $B' = \{\mathbf{A}'_{j_1}, \mathbf{A}'_{j_2}, \dots, \mathbf{A}'_{j_k}\}$  risulta

- (a)  $B$  è libero se e solo se  $B'$  è libero;
- (b)  $B$  è una base di  $\mathcal{L}(\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\})$  se e solo se  $B'$  è una base di  $\mathcal{L}(\{\mathbf{A}'_1, \dots, \mathbf{A}'_n\})$ .

*Dimostrazione.* Per entrambi i casi, basta osservare che qualunque sistema del tipo

$$\sum_{r=1}^k x_{j_r} \mathbf{A}_{j_r} = \mathbf{A}_s \quad \text{con } (s \in \{1, \dots, n\})$$

è equivalente al corrispondente

$$\sum_{r=1}^k x_{j_r} \mathbf{A}'_{j_r} = \mathbf{A}'_s \quad \text{con } (s \in \{1, \dots, n\})$$

dove le colonne  $\mathbf{A}'_j = \mathbf{P}\mathbf{A}_j$  sono le colonne trasformate dalla procedura di Gauss-Jordan. Le trasformazioni elementari preservano quindi l'indipendenza (e la dipendenza) lineare tra le corrispondenti colonne di  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}'$ .  $\square$

**Esempio 2.10.** È data la seguente matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vuole determinare (a) il suo rango e (b) una base  $B$  dell'insieme  $S$  composto dalle colonne di  $\mathbf{A}$ . (c) Si vuole anche determinare, se esiste, una base  $B'$  contenente la colonna  $\mathbf{A}_4$ . (d) Determinare infine i coefficienti con cui bisogna combinare le colonne di  $B'$  per ottenere ognuna delle colonne non in base.

Lo strumento principale per indagare queste caratteristiche di  $\mathbf{A}$  è costituito dalla riduzione della matrice per mezzo di trasformazioni elementari.

(a) Per determinare il rango di  $\mathbf{A}$  è sufficiente ridurre la matrice con il metodo di Gauss/Jordan (nota: anche altre riduzioni sono sufficienti).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \mathbf{A}'. \end{aligned}$$

Dalla matrice così ridotta si osserva che (a)  $\rho(\mathbf{A}) = 3$ , e (b) che

$$\begin{aligned} B &= \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

è una base di  $S = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5\}$ .

*Cambi di base.* (c) Per introdurre la colonna  $\mathbf{A}_4$  in una base è corretto usare il metodo degli scarti successivi sull'insieme di generatori  $\{\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\}$ . In questa situazione è però più semplice continuare a sfruttare il meccanismo della riduzione ed effettuare un'operazione di pivot su un elemento non nullo di  $\mathbf{A}'_4$ . Ad esempio:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \mathbf{A}''.$$

Effettuando un'operazione di pivot sull'elemento  $(3, 4)$  di  $\mathbf{A}''$  entra nella base  $\mathbf{A}_4$  come desiderato, ed esce  $\mathbf{A}_3$ , producendo la nuova base  $B' = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\}$ . Se si fosse scelto l'elemento  $(2, 4)$  sarebbe uscito dalla base  $\mathbf{A}_2$ .

(d) Per esprimere i vettori-colonna  $\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_5$  come combinazioni dei vettori di  $B'$  occorre risolvere i sistemi

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{B'} \mathbf{x} &= \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_{B'} \mathbf{x} &= \mathbf{A}_5 \end{aligned} \quad \text{con} \quad \mathbf{A}_{B'} = (\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \mathbf{A}_4) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La riduzione di entrambi i sistemi è però già stata effettuata implicitamente calcolando  $\mathbf{A}''$ . I coefficienti con cui occorre combinare  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4$  per ottenere  $\mathbf{A}_3$  si leggono direttamente sulla terza colonna di  $\mathbf{A}''$ :

$$\mathbf{A}_3 = \frac{3}{2}\mathbf{A}_1 - \frac{8}{5}\mathbf{A}_2 + \frac{4}{5}\mathbf{A}_4.$$

Analogamente si ottiene

$$\mathbf{A}_5 = -\frac{1}{5}\mathbf{A}_2 + \frac{3}{5}\mathbf{A}_4.$$

**2.2.5 Soluzioni di base di un sistema lineare.** Dato un sistema di  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite

$$(2.14) \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

se questo ammette soluzioni, ad ogni base  $B = \{\mathbf{A}_{j_1}, \mathbf{A}_{j_2}, \dots, \mathbf{A}_{j_k}\}$  estratta dalle colonne di  $\mathbf{A} \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n\}$  si può associare una *soluzione di base* del sistema, definita come segue.

L'insieme delle colonne di  $\mathbf{A}$  non appartenenti a  $B$  si denota con  $N = \{\mathbf{A}_{N_1}, \mathbf{A}_{N_2}, \dots, \mathbf{A}_{N_{n-k}}\}$ . Il sistema di equazioni si può riscrivere raggruppando colonne e variabili come

$$\sum_{j: \mathbf{A}_j \in B} x_j \mathbf{A}_j + \sum_{j: \mathbf{A}_j \notin B} x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{b}$$

ovvero

$$\mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b},$$

definendo

$$\mathbf{A}_B = (\mathbf{A}_{j_1} \mathbf{A}_{j_2} \dots \mathbf{A}_{j_k}) \quad (\text{matrice di base})$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_k} \end{pmatrix} \quad (\text{vettore delle variabili di base})$$

$$\mathbf{A}_N = (\mathbf{A}_{N_1} \mathbf{A}_{N_2} \dots \mathbf{A}_{N_{n-k}}) \quad (\text{matrice delle colonne fuori base})$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ \vdots \\ x_{N_{n-k}} \end{pmatrix} \quad (\text{vettore delle variabili fuori base}).$$

La *soluzione di base* del sistema (2.14) associata a  $B$  è quella che soddisfa le condizioni

$$\mathbf{A}_B \mathbf{x}_B = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_N = \mathbf{0}.$$

**Osservazione 2.5.** Se il sistema (2.14) non è privo di soluzioni:

- esso ammette sempre almeno una soluzione di base;
- il sistema  $\mathbf{A}_B \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$  ha soluzione unica;
- la soluzione di base associata a  $B$  è l'unica soluzione che ha  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ ;
- le variabili componenti di  $\mathbf{x}_B$  formano un insieme di variabili *massimale* per

il quale il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_N = \mathbf{0} \end{cases}$$

ammette una soluzione unica.

La cardinalità di una base estratta dalle colonne di  $\mathbf{A}$  è sempre uguale al numero di equazioni non ridondanti del sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , e questo numero viene anche chiamato *rango* del sistema o della matrice, e denotato  $\rho(\mathbf{A})$ .

---

## Capitolo 3

# Programmazione lineare e dualità

### 3.1 Programmi lineari e forma standard

**3.1.1 Problemi di ottimizzazione e programmi lineari.** Dato un insieme (finito o infinito)  $S_a$  e una funzione  $f: S_a \rightarrow \mathbb{R}$ , un *problema di ottimizzazione* consiste nel determinare un elemento  $x^* \in S_a$  tale che

$$(3.1) \quad f(x^*) = \max \{z = f(x) : x \in S_a\}$$

oppure – eventualmente – stabilire che tale elemento non esiste.

L'insieme  $S_a$  è detto *insieme delle soluzioni ammissibili* (o *regione ammissibile*), i suoi elementi sono detti *soluzioni ammissibili* del problema, la  $f$  è chiamata *funzione obiettivo* e le  $x^*$  che soddisfano la (3.1) sono dette *soluzioni ottime*. L'insieme delle soluzioni ottime del problema è definito come

$$S^* = \{x^* : f(x^*) \geq f(x), \quad \forall x \in S_a\}.$$

Benché la definizione data riguardi un problema di *massimizzazione*, non c'è alcuna difficoltà nel comprendervi anche problemi di *minimizzazione* nei quali si cerca un  $x^*$  con  $f(x^*) \leq f(x)$  per ogni  $x \in S_a$ , in quanto

$$(3.2) \quad \min \{z = f(x) : x \in S_a\} \equiv -\max \{z = -f(x) : x \in S_a\}.$$

Il problema (3.1) è detto problema di *programmazione lineare* (o semplicemente *programma lineare*) se  $S_a$  è costituito da tutti e soli i punti (scritti come vettori-colonna)  $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  che soddisfano una serie di relazioni lineari (dette *vincoli*)

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} b_i \quad i = 1, \dots, m,$$

e la funzione obiettivo  $f(x)$  si scrive come

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

La scrittura convenzionale di un programma lineare in forma generale è la seguente, con opportune costanti  $b_i, c_j, a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ .

$$(3.3a) \quad \max z = c_1x_1 + \dots + a_nx_n \quad \left( \text{oppure: } \min z = \sum_{j=1}^n c_jx_j \right)$$

soggetto a

$$(3.3b) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \quad i = 1, \dots, k,$$

$$(3.3c) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad i = k+1, \dots, l,$$

$$(3.3d) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad i = l+1, \dots, m,$$

**3.1.2 Forma standard.** Un caso particolarmente importante è quello in cui il programma lineare si presenta nella *forma standard*

$$(3.4a) \quad \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

soggetto a

$$(3.4b) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$(3.4c) \quad x_1, \dots, x_n \geq 0.$$

Questa corrisponde ad un programma nel quale:

- la funzione obiettivo deve essere massimizzata;
- gli unici vincoli di disuguaglianza impongono la non-negatività di tutte le variabili;
- tutti gli altri vincoli sono vincoli di uguaglianza.

In forma compatta (matriciale), il programma (3.4a)–(3.4c) si scrive convenzionalmente come

$$\max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

dove si è definito

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si osserva che la disuguaglianza  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  significa  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ .



**3.1.3 Conversione di un programma in forma standard.** Senza perdita di generalità, lo studio delle proprietà dei programmi lineari può limitarsi allo studio dei programmi in forma standard.

Le seguenti conversioni permettono di riscrivere *qualunque* programma lineare nella forma generale (3.3a)–(3.3d) come un programma lineare equivalente in forma standard.

**C0.** In base alla (3.2) ogni programma di minimizzazione può essere convertito in un programma di massimizzazione equivalente, cambiando segno alla funzione obiettivo.

**C1.** Per ogni variabile  $x_i$  per la quale appare il vincolo  $x_i \leq 0$ , si applica il cambio di variabili

$$\bar{x}_i = -x_i.$$

**C2.** Per ogni variabile libera in segno si introducono due variabili  $x_i^+, x_i^-$  e si applica il cambio di variabili

$$x_i = x_i^+ - x_i^-$$

aggiungendo i vincoli

$$x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0.$$

**C3.** Per ogni vincolo del tipo (3.3b) si introduce una nuova variabile  $x_{n+i}$  (detta variabile di *surplus* associata al vincolo  $i$ -esimo) e si sostituisce

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$$

con

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i,$$

$$x_{n+i} \geq 0.$$

**C4.** Per ogni vincolo del tipo (3.3c) si introduce una nuova variabile  $x_{n+i}$  (detta variabile di *slack* associata al vincolo  $i$ -esimo) e si sostituisce

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$$

con

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,$$

$$x_{n+i} \geq 0.$$


---

**Esempio 3.1.** Il programma lineare

$$\min z = 4x_1 + 5x_2 - x_3$$

soggetto a

$$2x_1 + x_3 \geq 7$$

$$x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + 2x_2 = 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ libera,}$$

si può trasformare in un programma equivalente in forma standard come segue.

Applicando la **C0** si passa al programma equivalente di massimizzazione

$$\max z = -4x_1 - 5x_2 + x_3$$

soggetto a

$$2x_1 + x_3 \geq 7$$

$$x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + 2x_2 = 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ libera.}$$

Applicando **C1** si cambia  $\bar{x}_2 = -x_2$ .

$$\max z = -4x_1 + 5\bar{x}_2 + x_3$$

soggetto a

$$2x_1 + x_3 \geq 7$$

$$x_1 - \bar{x}_2 \leq 16$$

$$x_1 - 2\bar{x}_2 = 8$$

$$x_1, \bar{x}_2 \geq 0, x_3 \text{ libera.}$$

Applicando **C2** si sostituisce  $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ .

$$\max z = -4x_1 + 5\bar{x}_2 + x_3^+ - x_3^-$$

soggetto a

$$2x_1 + x_3^+ - x_3^- \geq 7$$

$$x_1 - \bar{x}_2 \leq 16$$

$$x_1 - 2\bar{x}_2 = 8$$

$$x_1, \bar{x}_2, x_3^+, x_3^- \geq 0.$$

Infine, applicando **C3** e **C4** con l'introduzione di una variabile di surplus  $x_4$  e di una variabile di slack  $x_5$  si ottiene

$$\max z = -4x_1 + 5\bar{x}_2 + x_3^+ - x_3^-$$

soggetto a

$$2x_1 + x_3^+ - x_3^- - x_4 = 7$$

$$x_1 - \bar{x}_2 + x_5 = 16$$

$$x_1 - 2\bar{x}_2 = 8$$

$$x_1, \bar{x}_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0.$$

**3.1.4 Forma canonica di un programma lineare.** Un programma lineare è detto in *forma canonica* se presenta solo variabili non negative e vincoli di disuguaglianza, cioè è scritto come

$$(3.5) \quad \max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \quad (\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}).$$

Ogni programma lineare in forma generale può essere riscritto come un programma equivalente in forma canonica. A tale scopo, è sufficiente

- trasformare il programma in forma standard,

e poi

- sostituire ogni vincolo di uguaglianza

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

con la coppia di vincoli

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i.$$

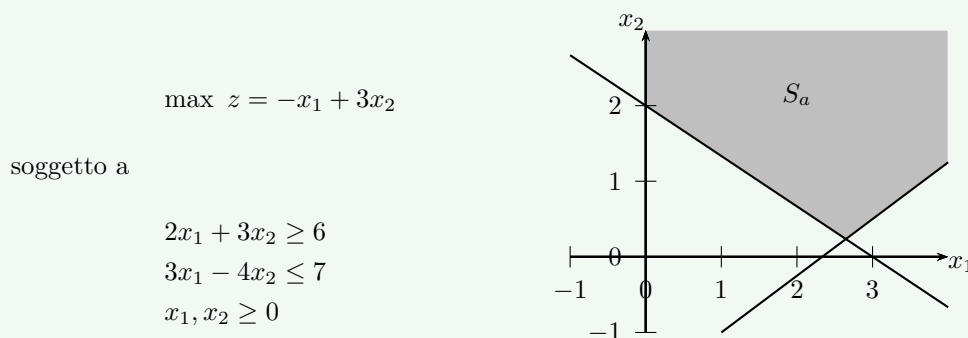
**3.1.5 Poliedri e politopi.** La regione ammissibile  $S_a$  di un programma lineare è in generale l'intersezione di un numero finito di semispazi e iperpiani. È quindi ovvia la seguente

**Proprietà 3.1.** La regione  $S_a = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$  è un insieme convesso.

In particolare, un tale insieme di punti è chiamato *poliedro convesso*; se inoltre il poliedro è limitato viene anche chiamato *politopo*.

**Esempio 3.2.**

(a) Il seguente programma lineare ha, nel piano  $(x_1, x_2)$ , la regione ammissibile rappresentata in figura. In questo caso si tratta di un poliedro convesso illimitato

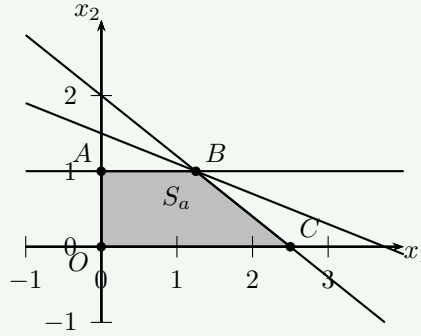


La regione  $S_a$  è data dall'intersezione dei semipiani

$$\begin{aligned}\Pi_1^{\geq} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: 2x_1 + 3x_2 \geq 6\}, & \Pi_2^{\leq} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: 3x_1 - 4x_2 \leq 7\}, \\ \Pi_3^{\geq} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: x_1 \geq 0\}, & \Pi_4^{\geq} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: x_2 \geq 0\}.\end{aligned}$$

(b) Il seguente programma ha invece una regione ammissibile che è un politopo convesso — si tratta del poligono  $OABC$ .

$$\begin{aligned}\max \quad & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & \\ & 4x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 \leq 15 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$



Qui  $S_a$  è l'intersezione dei semipiani

$$\begin{aligned}\Pi_1^{\leq} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: 4x_1 + 5x_2 \leq 10\}, & \Pi_2^{\leq} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: 4x_1 + 10x_2 \leq 15\}, \\ \Pi_3^{\leq} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: x_2 \leq 1\}, & \Pi_4^{\geq} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: x_1 \geq 0\}, \\ \Pi_5^{\geq} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: x_2 \geq 0\}.\end{aligned}$$

**3.1.6 Il metodo grafico in due variabili.** Se il programma lineare in esame è formulato in due sole variabili — per semplicità,  $x_1, x_2$  — la regione ammissibile  $S_a$  e la ricerca di soluzioni ottime si prestano ad essere studiate graficamente. In particolare, è sufficiente

- rappresentare la  $S_a$  nel piano  $(x_1, x_2)$ ;
- se  $S_a \neq \emptyset$ , studiare graficamente il fascio di rette

$$c_1x_1 + c_2x_2 = z$$

(dette anche rette isoprofitto) per valori crescenti del parametro  $z$ .

Se  $S_a \neq \emptyset$ , sono possibili due casi:

- esiste un valore massimo  $z = z^*$  per il quale la retta  $c_1x_1 + c_2x_2 = z$  ha intersezione non vuota con  $S_a$ , mentre tale intersezione è vuota per  $z > z^*$ ; in questo caso  $z^*$  è il valore ottimo per il programma studiato, e si è identificato graficamente l'insieme delle soluzioni ottime

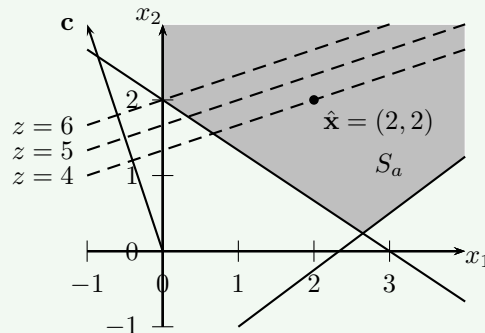
$$S^* = \{(x_1, x_2)^T \in S_a: c_1x_1 + c_2x_2 = z^*\}.$$

- la retta  $c_1x_1 + c_2x_2 = z$  ha intersezione non vuota con  $S_a$  per valori arbitrariamente grandi di  $z$ ; in questo caso risulta  $S^* = \emptyset$ , e il programma in esame ha funzione obiettivo non limitata superiormente. Si noti che questo può accadere solo (ma non necessariamente) se  $S_a$  è un poliedro illimitato.

**Esempio 3.3.**

(a) Si consideri il seguente programma lineare, già studiato negli esempi precedenti.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & 3x_1 - 4x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



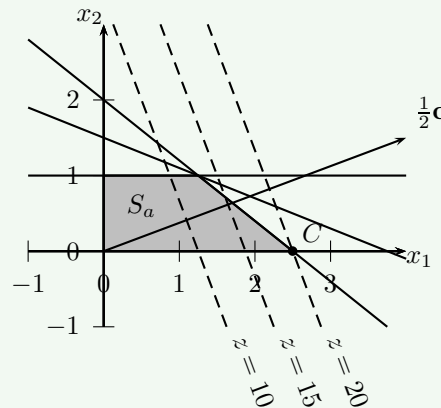
Ogni retta isoprofitto ha espressione  $-x_1 + 3x_2 = z$ , per  $z$  fissato. Si sceglie un  $\hat{\mathbf{x}} \in S_a$  e si traccia la retta isoprofitto passante per questo punto: ad esempio, per  $\hat{\mathbf{x}} = (2, 2)$ , dove la funzione obiettivo vale  $z = -2 + 3 \cdot 2 = 4$ , passa la retta isoprofitto

$$-x_1 + 3x_2 = 4.$$

Per valori crescenti di  $z$ , la retta isoprofitto si sposta nella direzione identificata dal vettore  $\mathbf{c} = (-1, 3)^T$ ; sono tracciate come esempio le rette per  $z = 4, 5, 6$ . Vista la forma della regione ammissibile  $S_a$  e la direzione di crescita di  $z$ , l'intersezione di tali rette con  $S_a$  non è mai vuota per quanto grande sia  $z$ . Il programma lineare è quindi privo di soluzione ottimale, perché la funzione obiettivo è illimitata superiormente.

(b) Si consideri il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 8x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 4x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & 4x_1 + 10x_2 \leq 15 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



In figura sono tracciate come esempio le rette isoprofitto  $8x_1 + 3x_2 = z$  per  $z = 10, 15, 20$ . La direzione di crescita di  $z$  è data dalla direzione del vettore  $\mathbf{c} = (8, 3)^T$ . La retta che interseca  $S_a$  con  $z$  massima possibile è quella che passa per il punto  $(\frac{5}{2}, 0)$ , che risulta quindi ottimo.

## 3.2 Geometria della regione ammissibile

**3.2.1 Richiami e definizioni.** Un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  è combinazione lineare convessa di altri due punti  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  se esiste  $\alpha \in (0, 1)$  tale che  $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + (1 - \alpha)\mathbf{v}$ . Un insieme di

punti  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  è *convesso* se per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$  tutti i punti del segmento

$$\overline{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \{\mathbf{x}(t) = \alpha\mathbf{u} + (1 - \alpha)\mathbf{v}\}$$

appartengono a  $S$ .

Un punto  $\mathbf{x}$  di un insieme convesso  $S$  è un *punto di estremo* (o *vertice*) di  $S$  se non esistono due punti distinti  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$  e  $\alpha \in (0, 1)$  tale che

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + (1 - \alpha)\mathbf{v}.$$

**Osservazione 3.1.** Ciò equivale a dire che  $\mathbf{x}$  non è punto interno di alcun segmento interamente contenuto in  $S$  (se un segmento incluso in  $S$  contiene  $\mathbf{x}$ , questo può solo essere un estremo del segmento). In  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ , ciò corrisponde alla classica nozione (intuitiva) di vertice. La definizione data sopra è valida per qualunque numero di dimensioni.

Spesso è utile considerare la seguente definizione alternativa di punto di estremo: un punto  $\mathbf{x}$  di un insieme convesso  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  è un punto di estremo o vertice di  $S$  tale che non esistono due punti distinti  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$  per cui  $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$  (cioè,  $\mathbf{x}$  non è punto medio di alcun segmento contenuto in  $S$ ).

Si può verificare facilmente che le due definizioni sono equivalenti (per esercizio).

**3.2.2 Risultati fondamentali.** I punti di estremo della regione ammissibile di un programma lineare hanno una particolare importanza, come affermato nel Teorema Fondamentale. Prima di enunciare tale teorema e dimostrarlo, occorre introdurre il seguente risultato.

**Lemma 3.2.** Data una retta  $r$  in  $\mathbb{R}^k$ , se esiste un suo punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k$ , allora esiste anche un punto di  $r$  posto sulla frontiera di  $\mathbb{R}_+^k$ .

*Dimostrazione del Lemma 3.2.* Dire che un punto è sulla frontiera di  $\mathbb{R}_+^k$  vuol dire che almeno una delle sue componenti è nulla (si trova su un piano coordinato). Se una delle componenti  $x_1, \dots, x_k$  è nulla, allora il lemma vale in quanto  $x$  stesso è posto sulla frontiera. Siano allora  $x_1, \dots, x_k > 0$  (punto interno ad  $\mathbb{R}_+^k$ ). Si consideri una rappresentazione parametrica di  $r$  data da

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

con almeno una componente di  $\mathbf{v}$  strettamente positiva (è sempre possibile trovare un tale  $\mathbf{v}$ ). Si può verificare che per il valore del parametro

$$(3.6) \quad t_0 = \max \left\{ -\frac{x_j}{v_j} : v_j > 0 \right\}$$

il punto  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x} + t_0\mathbf{v}$  ha tutte le componenti  $\geq 0$  e almeno una esattamente nulla — quella dell'indice che corrisponde al valore del  $\max \{\cdot\}$  nell'equazione (3.6).  $\square$

**Teorema 3.3** (Teorema fondamentale della programmazione lineare — Dantzig, 1947). *Se il programma lineare*

$$\max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

*ammette soluzioni ottime, allora almeno una di esse è un vertice di  $S_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ .*

*Dimostrazione del Teorema 3.3.* Si scelga un ottimo  $\mathbf{x}^*$  con il minimo numero possibile di componenti strettamente positive. Se  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ , esso è ovviamente un vertice (l'origine non può essere combinazione lineare convessa di vettori  $\geq \mathbf{0}$ ). Se  $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$ , sia per semplicità

$$\mathbf{x}^* = (\underbrace{x_1^*, \dots, x_k^*}_{>0}, \underbrace{x_{k+1}^*, \dots, x_n^*}_{=0})^T.$$

Per assurdo, sia  $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$ , per  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_a$  distinti. Si può osservare che

(i)  $z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{c}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{c}^T \mathbf{v} \implies \mathbf{c}^T \mathbf{u} = \mathbf{c}^T \mathbf{v} = z^*$ , cioè anche  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  sono soluzioni ottime;

(ii) Per ognuna delle componenti di indice  $j = k+1, \dots, n$ ,

$$0 = x_j^* = \frac{1}{2}u_j + \frac{1}{2}v_j, u_j, v_j \geq 0 \implies u_j = v_j = 0;$$

nel seguito si lavorerà sulle componenti  $1, \dots, k$ , fissando a zero tutte le altre.

La condizione  $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$  implica che  $\mathbf{x}^*$  sia il punto medio del segmento teso tra  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ; quindi i tre punti  $(x_1^*, \dots, x_k^*)^T, (u_1, \dots, u_k)^T, (v_1, \dots, v_k)^T \in \mathbb{R}_+^k$  giacciono su una stessa retta  $r$  in  $\mathbb{R}^k$ . Le condizioni di ammissibilità e ottimalità e le osservazioni (i), (ii), implicano che, in  $\mathbb{R}^k$ , i punti  $(x_1^*, \dots, x_k^*)^T, (u_1, \dots, u_k)^T, (v_1, \dots, v_k)^T$  appartengano agli  $m+1$  (iper)piani in  $\mathbb{R}^k$  di equazioni

$$\begin{aligned} \Pi_i : & a_{i1}x_1 + \dots + a_{ik}x_k = b_i & i = 1, \dots, m \text{ (ammissibilità),} \\ \Pi^* : & c_1x_1 + \dots + c_kx_k = z^* & \text{(ottimalità).} \end{aligned}$$

Come conseguenza, l'intera retta  $r$  è costituita da punti appartenenti a  $\Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_m \cap \Pi^*$ . La retta  $r$  interseca l'ortante  $\mathbb{R}_+^k$ , quindi per il Lemma 3.2 ha almeno un punto di intersezione  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)^T$  con la frontiera dell'ortante  $\mathbb{R}_+^k$ ; essendo su un piano coordinato, almeno una tra le componenti di  $\mathbf{y}$   $y_1, \dots, y_k$  è nulla: per semplicità, si assuma  $y_k = 0$ . Allora la seguente soluzione è ammissibile e ottima per il programma lineare considerato:

$$\mathbf{x}' = (\underbrace{y_1, \dots, y_{k-1}, y_k = 0}_{=\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k \text{ zeri}})^T.$$

Questo è in contraddizione con il fatto che  $\mathbf{x}^*$  sia stato scelto in modo da avere il minimo numero possibile di componenti strettamente positive (infatti  $\mathbf{x}'$  ne ha almeno una in meno, la  $k$ -esima).  $\square$

Come riconoscere se un punto di una regione ammissibile  $S_a = \{\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  è un vertice? Esiste una semplice caratterizzazione dei vertici di  $S_a$ , data dal seguente risultato.

**Lemma 3.4.** *Per qualunque  $\mathbf{x} \in S_a$ , sono condizioni equivalenti:*

- (i)  $\mathbf{x}$  è un vertice di  $S_a$ ;
- (ii) il sottoinsieme delle colonne di  $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$  tale che  $\{\mathbf{A}_j: x_j > 0\}$  è linearmente indipendente.

*Dimostrazione.* (i)  $\implies$  (ii). Sia  $\mathbf{x}$  un vertice di  $S_a$ . Siano  $x_1, x_2, \dots, x_k$  le componenti strettamente positive di  $\mathbf{x}$ , e quindi  $x_j = 0$  per ogni altro indice  $j > k$ . Per l'ammissibilità di  $\mathbf{x}$  risulta

$$\sum_{j=1}^k x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{b}.$$

Per assurdo, siano  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$  linearmente dipendenti. Questa ipotesi implica che il sistema di equazioni lineari

$$y_1 \mathbf{A}_1 + \dots + y_k \mathbf{A}_k = \mathbf{0}$$

abbia almeno una soluzione  $(y_1, \dots, y_k)^T \neq \mathbf{0}$ . Per  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo si ottiene allora

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k (x_j + \varepsilon y_j) \mathbf{A}_j &= \mathbf{b} \\ \sum_{j=1}^k (x_j - \varepsilon y_j) \mathbf{A}_j &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

con  $(x_j \pm \varepsilon y_j) \geq 0$  per ogni  $j = 1, \dots, k$ . Allora sono elementi di  $S_a$  le soluzioni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  così definite:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (x_1 + \varepsilon y_1, \dots, x_k + \varepsilon y_k, 0, \dots, 0)^T, \\ \mathbf{v} &= (x_1 - \varepsilon y_1, \dots, x_k - \varepsilon y_k, 0, \dots, 0)^T. \end{aligned}$$

Da queste, il vertice  $\mathbf{x}$  si ottiene come  $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$  — assurdo.

(ii)  $\implies$  (i). Siano per semplicità  $x_1, \dots, x_k$  le componenti strettamente positive di  $\mathbf{x}$ . Per assurdo, si supponga che  $\mathbf{x}$  non sia un vertice, cioè  $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$  con  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_a$  distinti. Per le componenti  $j = k+1, \dots, n$  risulta

$$0 = x_j = \frac{1}{2}u_j + \frac{1}{2}v_j, \quad u_j, v_j \geq 0 \implies u_j = v_j = 0.$$

Per le componenti  $j = 1, \dots, k$ , l'ammissibilità di  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_a$  implica che devono valere le condizioni

$$\begin{aligned} u_1 \mathbf{A}_1 + \dots + u_k \mathbf{A}_k &= \mathbf{b}, \\ v_1 \mathbf{A}_1 + \dots + v_k \mathbf{A}_k &= \mathbf{b}, \end{aligned}$$



e quindi  $\sum_{j=1}^k (u_j - v_j) \mathbf{A}_j = \mathbf{0}$  con  $(u_1 - v_1, \dots, u_k - v_k)^T \neq \mathbf{0}$ , contraddicendo l'indipendenza lineare delle colonne  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ .  $\square$

Il lemma, oltre ad offrire un metodo algebrico per riconoscere un vertice di  $S_a$ , evidenzia l'utilità del Teorema Fondamentale: il numero di vertici di  $S_a$  è al più pari al numero di insiemi liberi di colonne estraibili dalla matrice  $\mathbf{A}$ . Questo numero è finito, quindi la soluzione ottima di un programma lineare si può cercare nell'insieme finito dei vertici di  $S_a$ , anziché nell'intero  $S_a$  che ha in generale la potenza del continuo.

### 3.3 Condizioni di ottimalità\*\*

**3.3.1 Il Lemma di Farkas.** Il seguente risultato, dato senza dimostrazione, costituisce uno strumento potente per affrontare le successive dimostrazioni.

**Lemma 3.5** (Farkas, 1920). *Dati  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ , esattamente una delle seguenti condizioni è soddisfatta.*

- (i) esiste  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_q)^T \in \mathbb{R}_+^q$  tale che  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ;
- (ii) esiste  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)^T \in \mathbb{R}^p$  tale che  $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{v}^T \mathbf{b} < 0$ .

Il Lemma di Farkas è un risultato di tipo “esclusivo”: fissati  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{b}$ , si ha sempre che una sola delle condizioni (i), (ii) è verificata: (i) vale se e solo se (ii) non vale, e viceversa (ii) vale se e solo se (i) non vale. Le due condizioni non possono mai essere entrambe vere o entrambe false.

Il lemma assicura, ad esempio, che se un sistema di uguaglianze  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  non ha soluzioni a variabili non negative, allora è sempre possibile combinare linearmente le uguaglianze nel sistema in modo da ottenerne una contraddittoria.

**Esempio 3.4.** Il sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

non ammette soluzioni; è intuitivamente possibile dimostrare questo osservando che, se si moltiplica la prima equazione per 1 e la seconda per  $-2$  e si sommano, si ottiene l'equazione

$$3x_2 + 5x_3 = -5,$$

che è incompatibile con le condizioni  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ . Il Lemma di Farkas assicura che quando un tale sistema è privo di soluzioni esistono sempre gli opportuni coefficienti con cui combinare le equazioni in modo da ottenerne una assurda.

**3.3.2 Ottimalità di una soluzione ammissibile.** Per un programma lineare

$$\max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

si possono determinare le seguenti condizioni di ottimalità.

**Lemma 3.6.** *Per ogni  $\mathbf{x}^* \in S_a = \{\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ , sono condizioni equivalenti:*

- (i)  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ ;
- (ii) non esiste  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$\begin{aligned} \mathbf{Ay} &= \mathbf{0}, & \mathbf{c}^T \mathbf{y} &= 1, \\ & \text{con } y_j \geq 0 \text{ per ogni indice } j \text{ tale che } x_j^* = 0. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* (i)  $\implies$  (ii). Per assurdo, si supponga che esista un tale  $\mathbf{y}$ . Allora, per  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo risulta  $(\mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$ , e

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{y}) = \mathbf{b}.$$

Quindi  $(\mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{y}) \in S_a$ , e inoltre

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{y}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{c}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* + \varepsilon,$$

contraddicendo l'ottimalità di  $\mathbf{x}^*$ .

$\neg(i) \implies \neg(ii)$ . Se  $\mathbf{x}^*$  non è una soluzione ottima, esiste un  $\mathbf{x}' \in S_a$  tale che  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}' - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \delta > 0$ . Ponendo  $\mathbf{y} = \frac{1}{\delta}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*)$  risulta

$$\mathbf{c}^T \mathbf{y} = \frac{\mathbf{c}^T(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*)}{\delta} = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{x}' - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*}{\delta} = 1.$$

Poiché  $\mathbf{x}^*, \mathbf{x}' \in S_a$ , risulta  $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$  e  $\mathbf{Ax}' = \mathbf{b}$ , quindi

$$\mathbf{Ay} = \frac{1}{\delta} \mathbf{A}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*) = \frac{1}{\delta} \mathbf{Ax}' - \frac{1}{\delta} \mathbf{Ax}^* = \frac{1}{\delta} \mathbf{b} - \frac{1}{\delta} \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Infine, per ogni indice  $j$  tale che  $x_j^* = 0$ , risulta  $y_j = x'_j - x_j^* = x'_j \geq 0$ . □

**Teorema 3.7.** *Dato un programma lineare  $\max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ , le seguenti condizioni sono equivalenti.*

- (i) *Esiste una soluzione ammissibile tale che*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

- (ii) *Esiste un  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_m^*)^T \in \mathbb{R}^m$  tale che*

$$(3.7) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_j \geq c_j & \text{per ogni } j = 1, \dots, n, \\ \mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_j = c_j & \text{per ogni } j \text{ tale che } x_j^* > 0, \end{cases}$$

*Dimostrazione.* La condizione (i) vuol dire che il programma lineare

$$\max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

ammette una soluzione ottima di valore finito  $z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$ . La soluzione ottima  $\mathbf{x}^*$  avrà (zero o più) componenti strettamente positive e (zero o più) componenti nulle. Siano per semplicità  $x_1^*, \dots, x_k^* > 0$  e  $x_{k+1}^* = \dots = x_n^* = 0$ . In base al Lemma 3.6 l'ottimalità di  $\mathbf{x}^*$  si ha se e solo se non esiste  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$  tale che

$$(3.8) \quad \begin{cases} y_1 \mathbf{A}_1 + \dots + y_n \mathbf{A}_n = \mathbf{0}, \\ c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 1 \\ y_{k+1}, \dots, y_n \geq 0. \end{cases}$$

Sostituendo ognuna delle variabili libere in segno  $y_1, \dots, y_k$  con la differenza  $y_j = y_j^+ - y_j^-$  di due variabili non negative  $y_j^+, y_j^- \geq 0$ , il sistema (3.8) equivale al seguente sistema in  $n + k$  variabili e  $m + 1$  equazioni:

$$(3.9) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^k y_j^+ \mathbf{A}_j - \sum_{j=1}^k y_j^- \mathbf{A}_j + \sum_{j=k+1}^n y_j \mathbf{A}_j = \mathbf{0}, \\ \sum_{j=1}^k c_j y_j^+ - \sum_{j=1}^k c_j y_j^- + \sum_{j=k+1}^n c_j y_j = 1 \\ y_j^+, y_j^- \geq 0 \quad j = 1, \dots, k, \\ y_j \geq 0 \quad j = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

In base al Lemma di Farkas, il sistema (3.9) non ammette soluzioni se e solo se esiste almeno un  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1})^T$  tale che

$$(3.10) \quad \begin{cases} \begin{cases} (v_1, \dots, v_m) \mathbf{A}_j + v_{m+1} c_j \geq 0 \\ -(v_1, \dots, v_m) \mathbf{A}_j - v_{m+1} c_j \geq 0 \end{cases} & \iff (v_1, \dots, v_m) \mathbf{A}_j + v_{m+1} c_j = 0 \\ & j = 1, \dots, k, \\ (v_1, \dots, v_m) \mathbf{A}_j + v_{m+1} c_j \geq 0 & j = k+1, \dots, n, \\ v_{m+1} < 0. \end{cases}$$

Fissato un tale  $\mathbf{v}$ , essendo  $v_{m+1} < 0$  si possono dividere le relazioni (3.10) per  $-v_{m+1}$ ; definendo  $\mathbf{u} = -\frac{1}{v_{m+1}}(v_1, \dots, v_m)^T$  le (3.10) divise per  $-v_{m+1}$  si scrivono come

$$\begin{cases} \mathbf{u}^T \mathbf{A}_j - c_j = 0 & j = 1, \dots, k, \\ \mathbf{u}^T \mathbf{A}_j - c_j \geq 0 & j = k+1, \dots, n, \end{cases}$$

che corrispondono alle condizioni scritte nel punto (ii).  $\square$

Data una soluzione ammissibile  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  di  $\max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ , il vettore  $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$ , se esiste, certifica che  $\mathbf{x}^*$  è una soluzione ottima per il programma lineare dato, senza bisogno di confrontare  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$  con il valore di funzione obiettivo di tutte le altre soluzioni ammissibili. Questo vettore appartiene all'insieme

$$D_a = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{u}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T\} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{u}^T \mathbf{A}_j \geq c_j, j = 1, \dots, n\}.$$

In effetti, risulta che questo  $\mathbf{u}^*$  si può trovare risolvendo un nuovo programma lineare le cui soluzioni soddisfano i vincoli  $\mathbf{u}^T \mathbf{A}_j \geq c_j$ .

**Teorema 3.8.** *Se esiste finito un ottimo*

$$(3.11) \quad z^* = \max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

*allora esiste anche finito l'ottimo*

$$(3.12) \quad w^* = \min \{w = \mathbf{u}^T \mathbf{b} : \mathbf{u}^T \mathbf{A}_j \geq c_j, j = 1, \dots, n\},$$

*e risulta  $z^* = w^*$ .*

*Dimostrazione.* Se esiste finito  $z^*$ , esso è il valore di una soluzione ottima  $\mathbf{x}^*$ :  $z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$ . Dal teorema precedente risulta che se il programma (3.11) ammette un ottimo finito  $\mathbf{x}^*$  allora esiste il “vettore-certificato”  $\mathbf{u}^*$  che soddisfa le condizioni

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_j &\geq c_j && \text{per ogni } j = 1, \dots, n, \\ \mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_j &= c_j && \text{per ogni } j \text{ tale che } x_j^* > 0. \end{aligned}$$

Ciò implica che:

- $\mathbf{u}^*$  è una soluzione ammissibile del programma (3.12);
- il valore della soluzione  $\mathbf{u}^*$  è

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} &= \mathbf{u}^{*T} \mathbf{A} \mathbf{x}^* = \\ &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_j) x_j^* = \\ &= \sum_{j: x_j^* > 0} (\mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_j) x_j^* = \sum_{j: x_j^* > 0} c_j x_j^* = z^*. \end{aligned}$$

Per dimostrare che  $\mathbf{u}^*$  è ottima, basta far vedere che

$$\mathbf{u}^T \in D_a \implies \mathbf{u}^T \mathbf{b} \geq z^*.$$

Sia  $\mathbf{u}$  una soluzione ammissibile del secondo programma; essa soddisfa

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A}_j \geq c_j \quad j = 1, \dots, n.$$

Moltiplicando ambo i membri di ogni uguaglianza per  $x_j^*$  e sommando su tutti gli indici  $j = 1, \dots, n$  risulta che vale

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n c_j x_j^*}_{=z^*} \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{u}^T \mathbf{A}_j x_j^* = \mathbf{u}^T \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{x}^*}_{=\mathbf{b}} = \mathbf{u}^T \mathbf{b}.$$

□

## 3.4 Dualità\*\*

**3.4.1 Programma duale.** Il programma lineare (3.12) — che non è in forma standard, ma può esservi trasformato se necessario — è anche detto il *programma duale* di (3.11). Le condizioni (3.7) mettono in relazione i valori delle variabili dell'ottimo  $\mathbf{x}^*$  del problema primale con i valori delle variabili dell'ottimo  $\mathbf{u}^*$  del problema duale.

**Esempio 3.5.** Per il programma lineare

$$\max z = -2x_1 - x_2$$

soggetto a

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 = 2$$

$$x_2 + x_5 = 7$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (-2, -1, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{b} &= (3, 2, 7)^T \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi il duale risulta essere

$$\min w = 3u_1 + 2u_2 + 7u_3$$

soggetto a

$$u_1 - u_2 \geq -2$$

$$2u_1 + u_2 + u_3 \geq -1$$

$$-u_1 \geq 0$$

$$-u_2 \geq 0$$

$$u_3 \geq 0$$

**3.4.2 Simmetria primale-duale.** Nella coppia (3.11)–(3.12) non è realmente importante quale dei due sia chiamato primale e quale sia chiamato duale, perché la relazione di dualità è simmetrica.

**Proprietà 3.9.** Il programma (3.11) è il duale di (3.12).

*Dimostrazione.* Poiché la coppia (3.11)–(3.12) è scritta per un primale in forma standard, occorre prima trasformare (3.12) in forma standard. Cambiando segno alla funzione obiettivo e sostituendo le variabili libere  $u \in \mathbb{R}^m$  con  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ ,  $\mathbf{u}^+ \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u}^- \geq \mathbf{0}$ , il programma (3.12) equivale a

$$\max \{ \bar{w} = \mathbf{b}^T \mathbf{u}^- - \mathbf{b}^T \mathbf{u}^+ : \mathbf{A}^T \mathbf{u}^+ - \mathbf{A}^T \mathbf{u}^- \geq \mathbf{c}, \mathbf{u}^+, \mathbf{u}^- \geq \mathbf{0} \}$$

e infine, introducendo un vettore di variabili di surplus  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$  per ottenere vincoli di uguaglianza,

$$\max \left\{ \bar{w} = \mathbf{b}^T \mathbf{u}^- - \mathbf{b}^T \mathbf{u}^+ : \mathbf{A}^T \mathbf{u}^+ - \mathbf{A}^T \mathbf{u}^- - \mathbf{y} = \mathbf{c}, \right. \\ \left. \mathbf{u}^+, \mathbf{u}^- \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \right\},$$

equivalente a

$$\max \left\{ \bar{w} = \mathbf{b}^T \mathbf{u}^- - \mathbf{b}^T \mathbf{u}^+ : -\mathbf{A}^T \mathbf{u}^+ + \mathbf{A}^T \mathbf{u}^- + \mathbf{y} = -\mathbf{c}, \right. \\ \left. \mathbf{u}^+, \mathbf{u}^- \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \right\},$$

cioè

$$(3.13) \quad \max \bar{w} = \begin{pmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

soggetto a

$$(3.14) \quad \begin{pmatrix} -\mathbf{A}^T & \mathbf{A}^T & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = -\mathbf{c} \quad (\text{con } \mathbf{I} \text{ matrice identità } n \times n)$$

$$(3.15) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Scrivendo il duale di (3.13)–(3.15), si ottiene, con variabili  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,

$$\min \bar{w} = -\mathbf{x}^T \mathbf{c}$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T &\geq -\mathbf{b}^T \\ \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T &\geq \mathbf{b}^T \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

che, osservando che  $\min -\mathbf{x}^T \mathbf{c} \equiv \max \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  e

$$-\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \geq -\mathbf{b}^T, \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \geq \mathbf{b}^T \iff \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

risulta equivalente a (3.11). □

**Esempio 3.6.** Il programma

$$\min w = 3u_1 + 2u_2 + 7u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &\geq -2 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 &\geq -1 \\ -u_1 &\geq 0 \\ -u_2 &\geq 0 \\ u_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ottenuto come duale dell'esempio 3.5, si può scrivere come

$$\max \bar{w} = 3\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 - 7u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 - \bar{u}_2 + y_1 &= 2 \\ 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - u_3 + y_2 &= 1 \\ \bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

con  $\bar{u}_1 = -u_1$ ,  $\bar{u}_2 = -u_2$  e con  $y_1, y_2$  introdotte per eliminare le disuguaglianze. Il duale è, nelle variabili  $x_1, x_2$ ,

$$\min \bar{z} = 2x_1 + x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ -x_1 + x_2 &\geq 2 \\ -x_2 &\geq -7 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

che si vede facilmente essere equivalente a

$$\max z = -2x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - x_4 &= 2 \\ x_2 + x_5 &= 7 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

**Notazione: richiami.** D'ora in poi, quando si considera una coppia primale-duale, accanto alle notazioni per la regione ammissibile primale

$$S_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

e per la regione ottima

$$S^* = \{\mathbf{x}^* \in S_a : \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in S_a\}$$

si useranno anche la regione ammissibile duale

$$D_a = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{u}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T\}$$

e la regione ottima duale

$$D^* = \{\mathbf{u}^* \in D_a : \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} \leq \mathbf{u}^T \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{u} \in D_a\}.$$

**3.4.3 Teoria della dualità.** Rivisitando i risultati precedenti alla luce della simmetria primale-duale, si ottiene il seguente

**Teorema 3.10** (Teorema della dualità forte). *Dati un programma lineare primale (3.11) ed il suo duale (3.12) risulta che*

(i) *il primale ammette una soluzione ottima finita  $\mathbf{x}^*$  se e solo se*

(ii) *il duale ammette una soluzione ottima finita  $\mathbf{u}^*$ .*

*Inoltre le due soluzioni hanno lo stesso valore  $z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} = w^*$ .*

Questo teorema corrisponde al Teorema 3.8: esso dice esplicitamente (i)  $\implies$  (ii), mentre (ii)  $\implies$  (i) segue dalla simmetria della relazione primale-duale.

**Corollario 3.11** (Condizioni di complementarietà primale-duale).  *$x^* \in S_a$  e  $u^* \in D_a$  sono soluzioni ottime per il primale e il duale rispettivamente se e solo se risulta*

$$(3.16) \quad (\mathbf{u}^{*T} \mathbf{A} - \mathbf{c}^T) \mathbf{x}^* = 0.$$

*Dimostrazione.* Dal Teorema 3.10 risulta, per gli ottimi  $\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*$ :

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} = \mathbf{u}^{*T} \mathbf{A} \mathbf{x}^*$$

e quindi  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{u}^{*T} \mathbf{A} \mathbf{x}^*$ , cioè  $(\mathbf{u}^{*T} \mathbf{A} - \mathbf{c}^T) \mathbf{x}^* = 0$ .  $\square$

Si noti che le (3.16) non sono che un altro modo di scrivere le condizioni (3.7). La quantità

$$(\mathbf{u}^{*T} \mathbf{A} - \mathbf{c}^T) \mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^n (\mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_j - c_j) x_j^*$$

a causa dell'ammissibilità di  $\mathbf{x}^*$  e  $\mathbf{u}^*$  è una somma di termini  $(\mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_j - c_j) x_j^*$  non negativi. Per annullarla occorre quindi che siano nulli tutti i termini  $(\mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_j - c_j) x_j^*$ . Le condizioni (3.16) sono quindi equivalenti a

$$\begin{aligned} x_j^* > 0 &\implies \mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_j = c_j & j = 1, \dots, n \\ \mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_j > c_j &\implies x_j^* = 0 & j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Le condizioni di complementarietà primale-duale si possono utilizzare per dedurre la soluzione ottima del programma duale a partire dalla soluzione ottima del primale, o viceversa.



**Esempio 3.7.** Si consideri ancora il programma lineare in forma standard

$$\max z = 8x_1 + 3x_2$$

soggetto a

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10$$

$$4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15$$

$$x_2 + x_5 = 1$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

La soluzione ottima — si può ricavare da quella ottenuta con il metodo grafico in precedenti esempi — è  $(x_1^* = \frac{5}{2}, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 5, x_5^* = 1)$ . Il programma duale è il seguente.

$$\min w = 10u_1 + 15u_2 + u_3$$

soggetto a

$$4u_1 + 4u_2 \geq 8$$

$$5u_1 + 10u_2 + u_3 \geq 3$$

$$u_1 \geq 0$$

$$u_2 \geq 0$$

$$u_3 \geq 0$$

La soluzione ottima del duale si può ricavare direttamente dalla soluzione ottima del primale, per mezzo delle condizioni di complementarità. In particolare risulta:

$$x_1^* > 0 \implies 4u_1^* + 4u_2^* = 8$$

$$x_4^* > 0 \implies u_2^* = 0$$

$$x_5^* > 0 \implies u_3^* = 0,$$

e quindi l'ottimo duale è (risolvendo il sistema nelle variabili  $u_1, u_2, u_3$ ) ( $u_1^* = 2, u_2^* = 0, u_3^* = 0$ ). È facile verificare l'ammissibilità duale, e inoltre risulta  $w^* = 10u_1^* + 15u_2^* + u_3^* = 20 = z^*$ .

Il programma primale ed il suo duale sono problemi “gemelli”: definito uno risulta automaticamente definito anche l'altro, e risolvendo uno si risolve implicitamente anche l'altro. Questo è utile nella pratica in quanto esistono situazioni in cui è più “facile” risolvere un membro della coppia primale-duale piuttosto che l'altro.

**Esempio 3.8.** Si vuole risolvere il programma lineare

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

soggetto a

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Il programma ha tre variabili, e non è quindi agevole applicare il metodo grafico. Si può però

osservare che il programma duale ha solo due variabili.

$$\min w = 4u_1 + 3u_2$$

soggetto a

$$u_1 + 2u_2 \geq 2$$

$$-u_1 + u_2 \geq 3$$

$$2u_1 - u_2 \geq -1$$

L'ottimo duale si può identificare con il metodo grafico (dettagli omissi), e risulta essere nel punto  $(u_1^* = 2, u_2^* = 5)$ . In base alle condizioni di complementarità si deduce

$$u_1^* + 2u_2^* > 2 \implies x_1^* = 0.$$

L'ottimo primale deve avere quindi  $x_1^* = 0$ ; in più, per essere ammissibile deve soddisfare

$$\begin{cases} x_1^* - x_2^* + 2x_3^* = 4 \\ 2x_1^* + x_2^* - x_3^* = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} -x_2^* + 2x_3^* = 4 \\ x_2^* - x_3^* = 3 \end{cases}$$

e quindi l'ottimo primale risulta essere  $(x_1^* = 0, x_2^* = 10, x_3^* = 7)$ . Si noti ancora che  $z^* = 23 = w^*$ .

Per concludere, riportiamo sotto forma di corollario il seguente risultato che è direttamente collegato a quanto sancito dal Teorema 3.10.

**Proprietà 3.12** (Dualità debole).  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{u}^T \mathbf{b}$  per ogni  $\mathbf{x} \in S_a$ ,  $\mathbf{u} \in D_a$ .

*Dimostrazione.* Per l'ammissibilità di  $x$  e  $u$  risulta  $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}$  e  $\mathbf{x} \geq 0$ , cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{A}_j - c_j &\geq 0 & j = 1, \dots, n, \\ x_j &\geq 0 & j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Moltiplicando e sommando su ogni  $j = 1, \dots, n$  si ha

$$0 \leq \sum_{j=1}^n (\mathbf{u}^T \mathbf{A}_j - c_j) x_j = (\mathbf{u}^T \mathbf{A} - \mathbf{c}^T) \mathbf{x} = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

ed essendo  $\mathbf{x} \in S_a \implies \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , allora vale  $\mathbf{u}^T \mathbf{b} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq 0$ . □

I valori  $w$  della funzione obiettivo duale calcolati per gli  $\mathbf{u} \in D_a$  forniscono limiti superiori (*upper bound*) ai valori della funzione obiettivo del primale.

La proprietà di dualità debole fornisce anche un importante risultato negativo: se la funzione obiettivo del duale  $w$  non è limitata inferiormente su  $D_a$ , il primale è privo di soluzioni ammissibili. In modo simmetrico, se la funzione obiettivo primale è illimitata superiormente su  $S_a$ , risulta  $D_a = \emptyset$ .

# Capitolo 4

## Il metodo del simplesso

### 4.1 Soluzioni di base di un programma lineare

**4.1.1 Assunzioni fondamentali.** Considerato che ogni programma lineare si può trasformare in un programma lineare equivalente in forma standard (si veda la sezione 3.1.2), nel seguito si considerano (salvo diverso avviso) sempre programmi lineari espressi con la seguente forma standard

$$\max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Si assume inoltre — per evitare casi “banali” — che

$$\text{la matrice } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ abbia } m < n \text{ e } \rho(\mathbf{A}) = m.$$

**4.1.2 Soluzioni ammissibili di base.** Dato un programma lineare in forma standard, un insieme di  $m$  variabili  $B = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}\}$  è detto *insieme di variabili di base* (o semplicemente *base*, con un abuso di terminologia) se le colonne di  $\mathbf{A} - \mathbf{A}_{j_1}, \dots, \mathbf{A}_{j_m}$  — sono tra loro linearmente indipendenti — poiché  $\rho(\mathbf{A}) = m$ , esse formano una base dello spazio delle colonne di  $\mathbf{A}$ . Le rimanenti variabili  $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \setminus B$  sono dette variabili *fuori base*.

*Notazioni e osservazioni.* È conveniente spezzare il sistema di vincoli  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  evidenziando separatamente le componenti in base e fuori base, eventualmente riordinando le componenti di  $\mathbf{x}$  e le colonne di  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b},$$

dove  $\mathbf{x}_B = (x_j : x_j \in B)$ ,  $\mathbf{x}_N = (x_j : x_j \in N)$ . La matrice quadrata  $\mathbf{A}_B = (\mathbf{A}_{j_1}, \dots, \mathbf{A}_{j_m}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  formata dalle colonne di indice  $j_1, j_2, \dots, j_m$  di  $\mathbf{A}$  è anche chiamata *matrice di base* associata a  $B$ . Il sottovettore di  $\mathbf{x}(B)$  formato dalle variabili di base  $\mathbf{x}_B = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})$  è la soluzione unica del sistema di equazioni lineari  $\mathbf{A}_B \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ . La matrice di base  $\mathbf{A}_B$  è sempre invertibile, e la sua matrice inversa  $\mathbf{A}_B^{-1}$  è detta *matrice di base inversa*. Conoscendo la matrice di base inversa, il valore delle componenti di  $\mathbf{x}_B$  nella soluzione ammissibile

di base associata a  $B$  si calcola immediatamente come  $\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$ . La soluzione

$$\mathbf{x}(B) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_N = \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

è detta *soluzione di base* del sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  associata a  $B$ . Essa è l'unica soluzione per la quale  $x_j = 0 \ \forall x_j \notin B$ .

Se per una soluzione di base  $\mathbf{x}(B)$  risulta anche

$$x_j(B) \geq 0 \text{ per ogni } x_j \in B$$

allora  $\mathbf{x}(B) \in S_a$ , e si dice che:

- $B$  è una *base ammissibile* per il programma lineare;
- $\mathbf{x}(B)$  è la *soluzione ammissibile di base* associata a  $B$ .

Se una o più componenti  $x_j(B) \in B$  risultano nulle la base  $B$  è detta *degenere*.

**Esempio 4.1.** Il programma lineare

$$\max z = 8x_1 + 3x_2$$

soggetto a

$$4x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$4x_1 + 10x_2 \leq 15$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

equivale al seguente programma in forma standard.

$$\max z = 8x_1 + 3x_2$$

soggetto a

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10$$

$$4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15$$

$$x_2 + x_5 = 1$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

Si possono identificare le seguenti basi ammissibili.

$$(4.1a) \quad \{\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5\} \implies \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4.1b) \quad \{\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\} \implies \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(4.1c) \quad \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\} \implies \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4.1d) \quad \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\} \implies \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 4 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4.1e) \quad \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_5\} \implies \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4.1f) \quad \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5\} \implies \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Non sono riportate esplicitamente le variabili fuori base, perché esse hanno sempre valore 0. Si noti come le basi degeneri (4.1c)–(4.1e) descrivano tutte la stessa soluzione, pur essendo basi distinte. È invece una base *non ammissibile*, ad esempio, la

$$(4.1g) \quad \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_5\} \implies \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

perché la  $\mathbf{x}_B$  viola i vincoli di non-negatività.

Il seguente Lemma integra e completa l'insieme dei risultati che caratterizzano i vertici di un poliedro descritti nel Lemma 3.4.

**Lemma 4.1.** *Dato un programma lineare in forma standard, sono condizioni equivalenti:*

- (i)  $\mathbf{x} \in S_a$  è una soluzione ammissibile di base;
- (ii)  $\mathbf{x}$  è un vertice di  $S_a$ .

*Dimostrazione.* Siano per semplicità  $x_1, x_2, \dots, x_k$  le componenti strettamente positive di  $\mathbf{x}$ .

(i)  $\implies$  (ii) è immediata in quanto per definizione di soluzione ammissibile di base si deve avere  $\{x_1, \dots, x_k\} \subset B$ , quindi le colonne  $\{\mathbf{A}_j: x_j > 0\}$  sono linearmente indipendenti. Applicando il Lemma 3.4 si ha che  $\mathbf{x}$  è un vertice di  $S_a$ .

(ii)  $\implies$  (i) Se  $\mathbf{x}$  è un vertice di  $S_a$ , per il Lemma 3.4 le colonne in  $C = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k\}$  devono essere linearmente indipendenti. Se  $k = m$  allora  $B = \{x_1, \dots, x_k\}$  è un insieme di

variabili di base. Se  $k < m$ , l'insieme  $C$  si può completare ad una base dello spazio delle colonne della matrice  $\mathbf{A}$  aggiungendovi altre  $p = m - k$  colonne  $\mathbf{A}_{j_1}, \dots, \mathbf{A}_{j_p}$ . L'insieme  $B = \{x_1, \dots, x_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_p}\}$  è un insieme di variabili di base degenere dove le componenti nulle sono  $x_{j_1}, \dots, x_{j_p}$ .  $\square$

## 4.2 L'algoritmo del simplesso

**4.2.1 Idea generale.** Dato un programma lineare

$$\max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

il Teorema Fondamentale della programmazione lineare assicura che se esso ammette soluzioni ottime, almeno una di esse si trova tra le soluzioni di base; è quindi possibile in linea di principio determinare l'ottimo del programma enumerando e valutando tutte le soluzioni di base. Un tale approccio è computazionalmente inefficiente perché il numero delle basi può essere estremamente grande; è invece preferibile sfruttare un algoritmo che effettua un'esplorazione "intelligente" dell'insieme delle soluzioni ammissibili di base.

L'algoritmo del simplesso, sviluppato negli anni 40 da George B. Dantzig, genera una sequenza finita di basi ammissibili

$$(4.2) \quad B^0, B^1, \dots, B^t \quad \text{con valori } z(B^0) \leq z(B^1) \leq \dots \leq z(B^t).$$

La sequenza si arresta quando

- la base  $B^t$  si dimostra ottima,

oppure

- si dimostra che la funzione obiettivo è superiormente illimitata (e quindi  $S^* = \emptyset$ ).

Gli elementi necessari a progettare l'algoritmo del simplesso sono i seguenti:

1. un *criterio di ottimalità* che permetta di riconoscere una base ottima;
2. un *criterio di illimitatezza* che permetta di stabilire se un programma lineare ha una funzione obiettivo illimitata superiormente;
3. un metodo per generare, partendo da una base  $B^k$ , la successiva base nella sequenza (4.2) (*cambio di base*).

**4.2.2 Riformulazione e criterio di ottimalità.** Data una base ammissibile  $B = \{\mathbf{A}_{B_1}, \dots, \mathbf{A}_{B_m}\}$ , si vuole capire se la soluzione ammissibile di base associata a  $B$  è ottima o se esiste una base ammissibile  $B'$  *migliore* di  $B$ .

Sia  $\mathbf{x}(B)$  la soluzione ammissibile di base corrispondente a  $B$ , e  $z(B)$  il suo valore di funzione obiettivo. Le soluzioni ammissibili che costituiscono  $S_a$  sono tutte e sole le  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$  (in generale non di base) che soddisfano le condizioni

$$\mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0},$$

ovvero

$$\mathbf{x}_B + \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}.$$

Questo implica che per ogni soluzione ammissibile  $\mathbf{x} \in S_a$  si possono scrivere le variabili in base come variabili dipendenti da quelle fuori base:

$$(4.3) \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N, \quad \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}.$$

Il valore di una soluzione ammissibile  $\mathbf{x} \in S_a$  si può allora scrivere in funzione delle sole  $\mathbf{x}_N$ , sostituendo in  $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  i valori delle  $\mathbf{x}_B$  dati dalle (4.3):

$$(4.4) \quad \begin{aligned} z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N = \\ &= \mathbf{c}_B^T [\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N] + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N = \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + [\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N] \mathbf{x}_N = \\ &= z(B) + \mathbf{r}_N^T \mathbf{x}_N \end{aligned}$$

dove si è posto  $\mathbf{r}_N^T = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$ . Di conseguenza, si definisce il vettore  $\mathbf{r}_N$  come

$$\mathbf{r}_N^T = (r_{N_1}, \dots, r_{N_{n-m}}) = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N.$$

Le componenti del vettore  $\mathbf{r}_N$  (che possiede una componente per ogni variabile fuori base) sono dette *costi ridotti*:

$$(4.5) \quad r_j = c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_j \quad (\text{con } x_j \text{ fuori base}).$$

La combinazione delle equazioni (4.3) e (4.4) costituisce la *reformulazione rispetto alla base B* del programma lineare in esame:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ z &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{r}_N^T \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &\geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

**Osservazione 4.1.** La riformulazione dei vincoli  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  rispetto alla base  $B$  corrisponde a ottenere una matrice completa del sistema  $\mathbf{T}(B) = \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  ridotta dalla trasformazione  $\mathbf{A}_B^{-1}$ :

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \xrightarrow{\mathbf{A}_B^{-1}} \underbrace{(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A} \mid \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b})}_{\mathbf{T}(B)} \iff \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}.$$

**Esempio 4.2.**

Si vuole riformulare il seguente programma lineare rispetto alla base  $B = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\}$ .

$$\max 8x_1 + 3x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + x_3 &= 10 \\ 4x_1 + 10x_2 + x_4 &= 15 \\ x_2 + x_5 &= 1 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

La riformulazione può essere ottenuta in vari modi diversi, tutti equivalenti.

(a) Calcolando direttamente la matrice inversa di

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 4 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

e calcolando:

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_N^T &= \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = \\ &= (0 \ 0) - (8 \ 3 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = (-2 \ 7) \end{aligned}$$

$$z(B) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = (8 \ 3 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 13.$$

Con i dati calcolati le equazioni della riformulazione si scrivono come

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_5 \\ x_2 = 1 - x_5 \\ x_4 = 0 + x_3 + 5x_5 \\ z = 13 - 2x_3 + 7x_5 \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

(b) Gli stessi calcoli si possono svolgere per mezzo di una serie di operazioni di pivot. Prima di tutto si riduce la matrice completa  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  del sistema dei vincoli in modo che le colonne che costituiscono la base  $B$  si trasformino in colonne ridotte. Al termine dell'operazione si ottiene una matrice ridotta

$$\mathbf{T}(B) = \mathbf{A}_B^{-1} \cdot (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right),$$

contenente le colonne che appariranno nella riformulazione.

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{ccccc|c} 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{10}{4} \\ 0 & \mathbf{5} & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) = \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathbf{T}(B). \end{aligned}$$



Questa matrice completa  $\mathbf{T}(B)$  corrisponde al sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{5}{4}x_5 = \frac{5}{4} \\ x_2 + x_5 = 1 \\ -x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_5 \\ x_2 = 1 - x_5 \\ x_4 = 0 + x_3 + 5x_5 \end{cases}$$

Infine, sostituendo le  $x_1, x_2, x_4$  nella funzione obiettivo:

$$\begin{aligned} z &= 8x_1 + 3x_2 = 8\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_5\right) + 3(1 - x_5) = \\ &= 13 - 2x_3 + 7x_5, \end{aligned}$$

senza dimenticare i vincoli di non-negatività  $x_1, \dots, x_5 \geq 0$ .

**Interpretazione del costo ridotto.** Si consideri il programma lineare limitato alle variabili  $x_{B_1}, \dots, x_{B_m}, x_j$ , e si supponga che  $B$  sia una base non degenera (cioè  $\mathbf{x}_B > \mathbf{0}$ ). I vincoli del programma si scrivono, riformulati rispetto a  $B$ , come

$$\mathbf{x}_B + x_j \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \quad \mathbf{x}_B > \mathbf{0}, x_j \geq 0.$$

Esiste un'unica soluzione ammissibile con  $x_j = 0$ , che è proprio la soluzione ammissibile di base associata a  $B$ . Poiché  $B$  non è degenera, esistono soluzioni ammissibili (non di base) con  $x_j = \varepsilon > 0$  per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - x_j \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_j \quad (x_j = \varepsilon).$$

Il valore  $\varepsilon$  attribuito alla  $x_j$  è sufficientemente piccolo da non rendere negativa nessuna componente di  $\mathbf{x}_B$ . Il valore della funzione obiettivo per queste soluzioni ammissibili è

$$\begin{aligned} z(\varepsilon) &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + c_j x_j = \\ &= \mathbf{c}_B^T [\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - x_j \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_j] + c_j x_j = \\ &= \underbrace{\mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}}_{z(B)} + \underbrace{[c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_j]}_{r_j} x_j = \\ &= z(B) + r_j x_j = z(B) + r_j \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi se  $r_j > 0$  risulta  $z(\varepsilon) > z(B)$ .

Un valore di  $r_j$  positivo indica quindi che esistono soluzioni ammissibili con  $x_j > 0$  che sono *migliori* della soluzione ammissibile di base. In altre parole, il costo ridotto ci permette di individuare le variabili  $x_j$  che sono “redditizie” nel senso del miglioramento della soluzione associata ad una certa base.

**Esempio 4.3.**

Considerato l'esempio 4.2, si esamini la riformulazione ottenuta rispetto alla base  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4$ :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_5 \\ x_2 = 1 - x_5 \\ x_4 = 0 + x_3 + 5x_5 \\ z = 13 - 2x_3 + 7x_5 \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

La variabile  $x_5$  appare nella funzione obiettivo riformulata con un costo ridotto pari a  $7 > 0$ . Si può generare quindi una soluzione nella quale  $x_3$  rimane fissata a 0 e  $x_5 = \varepsilon > 0$  per  $\varepsilon$  “abbastanza piccolo”:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}x_5 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}\varepsilon \\ x_2 = 1 - x_5 = 1 - \varepsilon \\ x_4 = 0 + 5x_5 = 0 + 5\varepsilon \\ x_5 = \varepsilon \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Questa soluzione rimane ammissibile per ogni  $0 < \varepsilon \leq 1$ ; inoltre il valore della funzione obiettivo calcolato per questa soluzione è, usando la funzione obiettivo riformulata:

$$z(\varepsilon) = 13 - \underbrace{2x_3}_{=0} + \underbrace{7x_5}_{7\varepsilon} = 13 + 7\varepsilon > 13.$$

Esistono quindi soluzioni con  $x_5 > 0$  *migliori* della soluzione ammissibile di base associata a  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\}$ .

L'assenza di variabili “redditizie” rispetto a una base  $B$  è sufficiente a certificare l'ottimalità di  $B$ .

**Proprietà 4.2.** *Se  $B$  è una base ammissibile, condizione sufficiente perché  $\mathbf{x}(B)$  sia ottima è che risulti*

$$r_j \leq 0 \quad \text{per ogni variabile } x_j \text{ fuori base.}$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $\bar{\mathbf{x}} \in S_a$  distinta da  $\mathbf{x}(B)$  si deve necessariamente avere  $\bar{\mathbf{x}}_N \neq \mathbf{0}$ . Inoltre per ipotesi risulta  $r_j \leq 0$  per ogni  $\bar{x}_j$  fuori base.

Per l'equazione (4.4), il costo di qualunque  $\bar{\mathbf{x}} \in S_a$  distinta da  $\mathbf{x}(B)$  è quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{c}_B^T \bar{\mathbf{x}}_B + \mathbf{c}_N^T \bar{\mathbf{x}}_N = \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{r}_N^T \bar{\mathbf{x}}_N = \\ &= z(B) + \underbrace{r_{N_1} \bar{x}_{N_1} + \dots + r_{N_{n-m}} \bar{x}_{N_{n-m}}}_{\leq 0} \leq z(B), \end{aligned}$$

e ciò prova l'ottimalità di  $\mathbf{x}(B)$ . □

**4.2.3 Condizioni per l'illimitatezza.** Un programma lineare può non essere privo di soluzioni ammissibili ma non ammettere soluzioni ottime, se la funzione obiettivo non

è limitata superiormente. Ciò significa che, preso *qualunque* numero  $M$  grande a piacere, esiste sempre un  $\mathbf{x} \in S_a$  (dipendente da  $M$ ) per cui  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} > M$ . In queste condizioni l'insieme  $\{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  pur non essendo vuoto *non ha un elemento massimo*. Si veda anche l'esempio 3.3 di pagina 55.

La seguente proprietà stabilisce una condizione sufficiente per certificare l'illimitatezza della funzione obiettivo, esaminando semplicemente i costi ridotti e i vincoli riformulati rispetto a una base ammissibile  $B$ .

**Proprietà 4.3.** *Condizione sufficiente perché la funzione obiettivo sia illimitata superiormente è che nella riformulazione rispetto a una base  $B$  risulti*

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_k \leq \mathbf{0}, \quad r_k > 0 \quad \text{per almeno una variabile } x_k \text{ fuori base.}$$

*Dimostrazione.* Si consideri la seguente soluzione  $\mathbf{x}(t)$  (che *non* è di base) parametrizzata dal valore  $t > 0$ .

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_B(t) &= \mathbf{x}(B) - \underbrace{t \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_k}_{\geq \mathbf{0}} \\ x_k(t) &= t \\ x_j(t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{per } x_j \text{ fuori base e } j \neq k.$$

La soluzione  $\mathbf{x}(t)$  soddisfa i vincoli del problema, come si può osservare dai vincoli riformulati rispetto a  $B$ : per il vettore  $\mathbf{x}(t)$ , i vincoli

$$\mathbf{x}_B + \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \quad \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

equivalgono a

$$\mathbf{x}_B(t) = \underbrace{\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}}_{\geq \mathbf{0}} - \underbrace{t \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_k}_{\geq \mathbf{0}} \quad \mathbf{x}_B(t) \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

dove risulta, per ogni valore di  $t > 0$ ,  $\mathbf{x}_B(t) \geq \mathbf{0}$ ,  $x_k(t) = t > 0$  e  $x_j(t) = 0$  per ogni altra variabile fuori base. Quindi  $\mathbf{x}(t) \in S_a$  per qualunque valore di  $t > 0$ .

Il costo della soluzione  $\mathbf{x}(t)$  è

$$z(t) = z(B) + r_k x_k(t) = z(B) + \underbrace{r_k t}_{> 0}.$$

Dato  $M \in \mathbb{R}$  grande a piacere, è sufficiente fissare  $t$  a un valore positivo superiore a  $[M - z(B)]/r_k$  per ottenere  $z(t) > M$ .  $\square$

**Esempio 4.4.**

Il programma lineare

$$\max z = -x_1 + 3x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ 3x_1 - 4x_2 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ammette la seguente forma standard.

$$\max z = -x_1 + 3x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_4 &= 7 \\ x_1, \dots, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Riformulando vincoli e funzione obiettivo rispetto alla base  $B = \{x_2, x_4\}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & -4 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) &\longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 2 \\ \frac{17}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 15 \end{array} \right) & \text{nota: } \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ \begin{cases} x_2 = 2 & -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 = 15 & -\frac{17}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3 \end{cases} & \\ z = 6 - 3x_1 + x_3 & \text{nota: } r_3 > 0 \\ x_1, \dots, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si può costruire la seguente soluzione del sistema di vincoli, con  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_2 = 2 & -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 & = 2 + \frac{1}{3}t \\ x_4 = 15 & -\frac{17}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3 & = 15 + \frac{4}{3}t \\ x_3 = t \\ x_1 = 0 \end{cases} \\ z = 6 - 3x_1 + x_3 = 6 + t, \end{aligned}$$

Si può osservare che le  $x_1, \dots, x_4$  rimangono non negative per ogni  $t > 0$ , e il valore di queste soluzioni è  $z(t) = 6 + t$ . Per  $t \rightarrow \infty$  il valore della soluzione ammissibile così generata cresce indefinitamente. Non esiste quindi una soluzione “migliore” delle altre.

#### 4.2.4 Cambio di base. Dato un programma lineare

$$\max \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

si considerino due basi  $B, B'$  (non necessariamente ammissibili) ad esso associate. Le basi  $B$  e  $B'$  sono dette *adiacenti* se  $\mathbf{T}(B')$  si ottiene da  $\mathbf{T}(B)$  con una singola operazione di

pivot su un elemento  $\alpha_{pq} \neq 0$ .

$$(4.7) \quad \mathbf{T}(B) = (\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} \mid \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \dots & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pq} & \dots & \beta_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right)$$

$$(4.8) \quad \mathbf{T}(B') = (\mathbf{A}_{B'}^{-1}\mathbf{A} \mid \mathbf{A}_{B'}^{-1}\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} \alpha'_{11} & \dots & 0 & \dots & \beta'_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \alpha'_{p1} & \dots & 1 & \dots & \beta'_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \alpha'_{m1} & \dots & 0 & \dots & \beta'_m \end{array} \right)$$

#### Esempio 4.5.

Si consideri il programma lineare

$$\max 8x_1 + 3x_2$$

soggetto a

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10$$

$$4x_1 + 10x_2 + x_4 = 15$$

$$x_2 + x_5 = 1$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

Le basi  $B = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\}$  e  $B' = \{\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\}$  sono adiacenti:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_5 \\ x_2 = 1 - x_5 \\ x_4 = 0 + x_3 + 5x_5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_5 = -1 + \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 \\ x_2 = 2 - \frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_4 = -5 + 4x_1 + 2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z &= 13 - 2x_3 + 7x_5 & \longrightarrow & z = 6 + \frac{28}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_3 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0 & & x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

**Osservazione 4.2.** L'esempio mette in evidenza che, anche se  $B$  è una base ammissibile, una base adiacente  $B'$  non è necessariamente ammissibile anch'essa. Per passare ad una base adiacente ammissibile occorre scegliere l'elemento-pivot in modo opportuno.

**Proprietà 4.4.** Se  $B$  è una base ammissibile e in  $\mathbf{T}(B)$  risulta

$$\alpha_{pq} > 0, \\ \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}} = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{iq}} : \alpha_{iq} > 0, i = 1, \dots, m \right\},$$

allora anche  $B'$  è una base ammissibile.

*Dimostrazione.* Da  $\mathbf{T}(B)$ , si ricava  $\mathbf{T}(B')$  effettuando le trasformazioni elementari che realizzano l'operazione di pivot:

$$E_i \leftarrow E_i - \frac{\alpha_{iq}}{\alpha_{pq}} E_p \quad i = 1, \dots, m, i \neq p, \\ E_p \leftarrow \frac{1}{\alpha_{pq}} E_p.$$

e quindi i  $\beta'$  di  $\mathbf{T}(B')$  valgono

$$\beta'_i = \left( \beta_i - \beta_p \frac{\alpha_{iq}}{\alpha_{pq}} \right) \quad i = 1, \dots, m, i \neq p \\ \beta'_p = \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}.$$

Si vuole dimostrare che la base  $B'$  è ammissibile, cioè  $\beta'_1, \dots, \beta'_m \geq 0$ .

Poiché  $B$  è una base ammissibile, deve avere  $\beta_1, \dots, \beta_m \geq 0$ , e quindi risulta che

$$\beta'_p = \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}} \geq 0.$$

Per ognuno degli altri  $\beta_i$  con  $i \neq p$  sono possibili due casi.

(a)  $\alpha_{iq} \leq 0$ : in questo caso risulta

$$\beta'_i = \beta_i - \underbrace{\beta_p \frac{\alpha_{iq}}{\alpha_{pq}}}_{\leq 0} \geq \beta_i \geq 0.$$

(b)  $\alpha_{iq} > 0$ : in questo caso risulta

$$\beta'_i = \beta_i - \beta_p \frac{\alpha_{iq}}{\alpha_{pq}} = \\ = \underbrace{\alpha_{iq}}_{>0} \underbrace{\left( \frac{\beta_i}{\alpha_{iq}} - \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}} \right)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Questo prova l'ammissibilità di  $B'$ . □

Considerando sempre le basi adiacenti  $B$  e  $B'$  relative alle equazioni (4.7) e (4.8), siano  $\mathbf{r}_N^T = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$  i costi ridotti calcolati per la base  $B$ . La seguente proprietà stabilisce una condizione sufficiente affinché sia garantito che  $z(B') \geq z(B)$ .

**Proprietà 4.5.** *Se risulta  $\alpha_{pq} > 0$  e  $r_q > 0$ , allora  $z(B') \geq z(B)$ .*

*Dimostrazione.* Basta osservare che con l'operazione di pivot la variabile  $x_q$  entra nella nuova base  $B'$  con un valore pari a  $\frac{\beta_p}{\alpha_{pq}} \geq 0$ . Il valore della funzione obiettivo per una qualunque soluzione si può calcolare usando l'espressione riformulata rispetto a  $B$ :

$$z = z(B) + \mathbf{r}_N^T \mathbf{x}_N.$$

Per la soluzione di base associata a  $B'$ , l'unica componente non nulla di  $\mathbf{x}_N$  è  $x_q = \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}$ , quindi

$$z(B') = z(B) + r_q x_q = z(B) + r_q \underbrace{\frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}}_{\geq 0} \geq z(B).$$

□

Combinando le Proprietà 4.4 e 4.5 si ottiene un modo per scegliere l'elemento pivot per un cambio di base che garantisca il mantenimento dell'ammissibilità e la crescita della funzione obiettivo.

**Regola per scegliere il pivot.** Scegliere come pivot un elemento  $\alpha_{pq} > 0$  tale che

$$r_q > 0 \quad e \quad \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}} = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{iq}} : \alpha_{iq} > 0, i = 1, \dots, m \right\}.$$

**Esempio 4.6.**

È dato il programma lineare

$$\max z = 3x_1 - x_2$$

soggetto a

$$2x_1 - x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

che corrisponde al seguente programma in forma standard.

$$\max z = 3x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_5 &= 8 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Si osserva immediatamente che la base  $B = \{\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5\}$  è ammissibile, e corrisponde alla riformulazione

$$\mathbf{T}(B) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_3 = 3 - 2x_1 + x_2 \\ x_4 = 1 + x_1 - x_2 \\ x_5 = 8 - x_1 \end{cases}$$

$$z = 0 + 3x_1 - x_2$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

Per ottenere una soluzione di base ammissibile con  $z$  maggiore di 0 occorre cercare un elemento pivot sulla colonna 1, perché  $r_1 = 3 > 0$ . Su questa colonna si sceglie il primo elemento (il **2** evidenziato) perché risulta

$$\underbrace{\frac{\beta_1}{\alpha_{11}} = \frac{3}{2}}_{\text{minimo}}, \quad \frac{\beta_3}{\alpha_{13}} = \frac{8}{1},$$

mentre si scarta  $\alpha_{12}$  perché  $< 0$ . Eseguendo l'operazione di pivot si passa alla nuova base  $B' = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5\}$ . Anche prima di calcolare la riformulazione completa si sa che risulterà  $z(B') = 0 + 3 \cdot \frac{3}{2}$ .

$$\mathbf{T}(B') = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{13}{2} \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_5 = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$$z = 0 + 3x_1 - x_2 =$$

$$= 0 + 3\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right) - x_2 =$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

**4.2.5 Lo schema di algoritmo.** Se per un programma lineare in forma standard è nota una base ammissibile iniziale  $B^0$ , tutte le proprietà precedentemente esaminate permettono di formulare il seguente algoritmo.

- 1:  $B := B^0$ ;  $\ell := 1$ ; Riformula il programma rispetto a  $B$ ;
- 2: **loop**
- 3:   **if**  $r_j \leq 0 \quad \forall \mathbf{A}_j \notin B$  **then**
- 4:     **return**  $z(B)$ ; ▷ valore ottimo!
- 5:   **else**



```

6:      Scegli una  $x_q$  con  $r_q > 0$ ;
7:      if  $\alpha_{iq} \leq 0 \forall i = 1, \dots, m$  then
8:          return  $+\infty$ ; ▷  $z$  illimitata sup.
9:      else
10:         Scegli  $\alpha_{pq}$  tale che
            
$$r_q > 0, \quad \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}} = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{iq}} : \alpha_{iq} > 0, i = 1, \dots, m \right\};$$

11:         Esegui pivot su  $\alpha_{pq}$ , ottenendo nuova base  $B^\ell$  e relativa
            riformulazione;
12:          $B := B^\ell$ ;  $\ell := \ell + 1$ ; ▷ Nuova base.
13:     end if
14: end if
15: end loop

```

L'algoritmo termina quando si verificano i due seguenti casi:

(a) La base corrente  $B$  risulta ottima, per la Proprietà 4.2 (righe 3–4 dell'algoritmo)

oppure

(b) il problema risulta illimitato, per la Proprietà 4.3 (righe 7–8 dell'algoritmo).

Se il programma lineare in esame non ha basi degeneri, si può osservare facilmente che per la sequenza di basi  $B^0, B^1, \dots$  generate nelle successive iterazioni la successione dei valori

$$z(B^0) < z(B^1) < \dots$$

è strettamente crescente, e segue facilmente la seguente

**Proprietà 4.6.** *L'algoritmo del simplesso termina in un numero finito di iterazioni.*

*Dimostrazione.* Se la successione  $z(B^0) < z(B^1) < \dots$  è strettamente crescente, ciò vuol dire che l'algoritmo non genera mai una stessa base ammissibile più di una volta. Il numero di possibili basi ammissibili del problema è un numero finito  $|\mathcal{B}_a|$ , quindi in al più  $|\mathcal{B}_a|$  iterazioni si deve raggiungere una delle condizioni di uscita.  $\square$

La Proprietà 4.6 vale anche in presenza di basi degeneri, purché ad ogni iterazione si osservino alcune regole supplementari nella scelta dell'elemento pivot.

**Esempio 4.7.**

Riprendendo l'esempio 4.6, dalla riformulazione rispetto a  $B'$ :

$$\mathbf{T}(B') = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{13}{2} \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} & +\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_5 = \frac{13}{2} & -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ z = \frac{9}{2} & +\frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Si sceglie un nuovo elemento pivot sulla colonna 2 perché  $r_2 = \frac{1}{2} > 0$ ; confrontando quindi

$$\frac{\beta_2}{\alpha_{22}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\beta_3}{\alpha_{23}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{1}{2}},$$

si sceglie elemento pivot  $\alpha_{22} = \frac{1}{2}$ . Eseguendo il cambio di base si ottiene la riformulazione rispetto a  $B'' = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_5\}$ .

$$\mathbf{T}(B'') = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = 4 & -x_3 - x_4 \\ x_2 = 5 & -x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 4 & +x_3 + x_4 \\ z = 7 & -2x_3 - x_4. \end{cases}$$

Avendo  $r_3, r_4 \leq 0$ , la soluzione

$$\underbrace{x_1 = 4, x_2 = 5, x_5 = 4}_{\mathbf{x}_{B''}}, \underbrace{x_3 = 0, x_4 = 0}_{\mathbf{x}_{N''}}$$

è ottima, per la Proprietà 4.2.

**4.2.6 Scelta della variabile entrante.** La regola per scegliere il pivot – ottenuta combinando le Proprietà 4.4 e 4.5 – afferma, tra le altre cose, che è **sufficiente** scegliere una qualsiasi variabile entrante con costo ridotto positivo per poter generare una successiva base ammissibile e migliorante.

Ma in presenza di più variabili fuori base con costo ridotto positivo, quale variabile è meglio scegliere? Ovvero esiste una regola che garantisca il raggiungimento della base ottima  $B^t$  o la verifica della condizione di illimitatezza eseguendo il minimo numero di iterazioni possibili? **La risposta è purtroppo no.**

Nel seguito adotteremo comunque la seguente regola che estende l'algoritmo del simplesso presentato in sezione 4.2.5.

**Regola di scelta della variabile entrante.** In presenza di più variabili fuori base con costo ridotto positivo, la variabile entrante  $x_q \in N$  è tale che  $r_q = \max\{r_k : x_k \in N\} > 0$ .

In altre parole, scegliamo la variabile fuori base con costo ridotto più grande. Il seguente esempio mostra come questa regola non garantisca di fare il numero minimo di passi dell'algoritmo del simplesso per raggiungere la condizione di terminazione.

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 1 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Partendo dalla base data dalle variabili  $x_4$  e  $x_5$  otteniamo la seguente riformulazione:

$$\mathbf{T}(B^0) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_4 = 4 - 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ x_5 = 1 - 2x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$z = 0 + 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

Si può osservare che abbiamo costi ridotti positivi e, di conseguenza, la base corrente non è ottima. Scegliendo la variabile fuori base con costo ridotto maggiore, la variabile  $x_1$  è candidata a entrare in base rispetto la variabile  $x_2$ . La colonna di  $x_1$  nella riformulazione non verifica la condizione di illimitatezza. Possiamo quindi effettuare un cambio di base facendo pivot sull'elemento 2, individuato applicando la regola del rapporto minimo. Di conseguenza, esce di base la variabile  $x_5$ . Si osserva infine che nella prossima riformulazione avremo che  $x_1 = \frac{1}{2}$  e di conseguenza  $z = \frac{3}{2}$ .

La nuova riformulazione è la seguente:

$$\mathbf{T}(B^1) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_4 = 2 + 4x_2 + 2x_5 \\ x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

$$z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{13}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_5$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

Anche in questo caso la base corrente non è ottima. La variabile che entra in base è l'unica con costo ridotto positivo, ovvero  $x_2$ . Osserviamo che la colonna di  $x_2$  non verifica la condizione di illimitatezza. Facendo pivot su  $\frac{1}{2}$  esce di base  $x_1$  ottenendo una nuova base nella quale risulta  $x_2 = 1$  e  $z = 2$ .

La nuova riformulazione è la seguente:

$$\mathbf{T}(B^2) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 8 & 0 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_4 = 6 - 8x_1 - 4x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 1 - 2x_1 - x_3 - x_5 \end{cases}$$

$$z = 2 - x_1 - 7x_3 - 2x_5$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Si osserva che la base corrente risulta ottima visto che i costi ridotti sono tutti negativi. La soluzione ottima ottenuta è quindi  $x_2^* = 1$ ,  $x_4^* = 6$ ,  $x_1^* = x_3^* = x_5^* = 0$  con valore pari a  $z^* = 2$ .

Osserviamo che nelle varie iterazioni, l'algoritmo prima inserisce  $x_1$ , poi leva  $x_1$  per inserire  $x_2$ , trovando infine la soluzione ottima. Tuttavia, in  $\mathbf{T}(B^0)$ , anche  $x_2$  aveva costo ridotto positivo anche se minore di quello di  $x_1$ . Questo esempio dimostra l'enunciato, ovvero la regola proposta non garantisce di eseguire il numero minimo di passi dell'algoritmo del simplesso.

Ci chiediamo infine come avremmo potuto scegliere la  $x_2$  anziché la  $x_1$ . Sfruttando la regola del rapporto minimo, si può osservare che possiamo stimare il valore della successiva base, che sarà data dal valore della base corrente  $z(B)$  più  $r_q x_q$  con  $x_q = \frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}$ . Nel nostro esempio, alla prima iterazione facendo entrare  $x_1$  con valore  $\frac{1}{2}$  otterremo una soluzione pari a  $\frac{3}{2}$  mentre facendo entrare  $x_2$  con valore 1 otterremo una soluzione pari a 2. Scegliendo quindi la variabile entrate con la stima del valore della successiva base avremmo potuto risparmiare – nell'esempio considerato – un'iterazione dell'algoritmo del simplesso. Tuttavia, anche questa nuova potenziale regola non garantisce di eseguire il numero minimo di passi dell'algoritmo del simplesso.

**4.2.7 Metodo del simplesso ed interpretazione geometrica.** In questa sezione, attraverso un esempio, cerchiamo di illustrare il significato geometrico dell'algoritmo del simplesso appena illustrato.

Si consideri il programma lineare

$$\max z = 4x_1 + x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

che nella sua forma standard risulta riformulato come

$$\max z = 4x_1 + x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_5 &= 2 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che la trasformazione in forma standard determina anche una base iniziale ammissibile individuata dalle variabili  $B^0 = \{\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5\}$ . Abbiamo quindi la sequenza

---

di iterazioni del semplice dove il pivot ad ogni iterazione è evidenziato in grassetto:

$$\mathbf{T}(B^0) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_3 = 3 - x_1 + x_2 \\ x_4 = 5 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 2 - x_1 \end{cases}$$

$$z = 0 + 4x_1 + x_2$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$$\mathbf{T}(B^1) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_3 = 1 + x_2 + x_5 \\ x_4 = 1 - x_2 + 2x_5 \\ x_1 = 2 - x_5 \end{cases}$$

$$z = 8 - 4x_5 + x_2$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

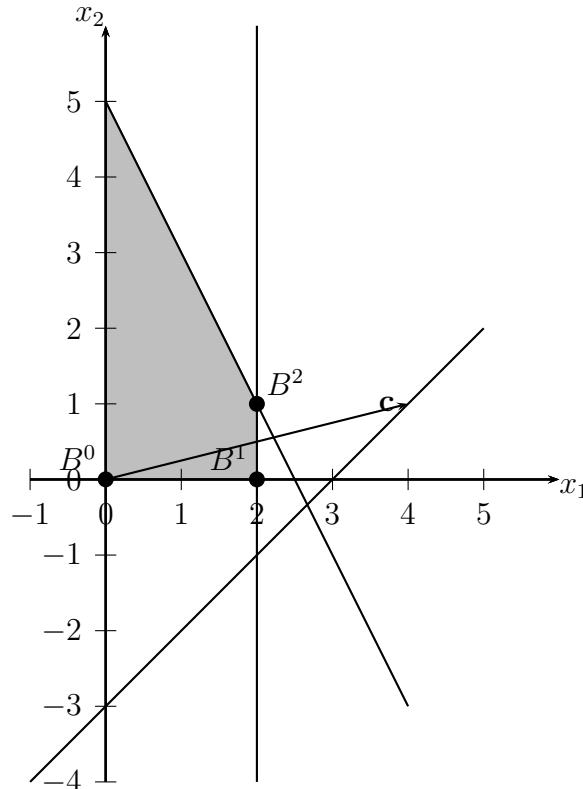
$$\mathbf{T}(B^2) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_3 = 2 - x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_1 = 2 - x_5 \end{cases}$$

$$z = 9 - 2x_5 - x_4$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

L'algoritmo termina con la base ottima  $B^2 = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\}$  alla quale corrisponde una soluzione di valore  $z^* = 9$  e  $x_1^* = 2$ ,  $x_2^* = 1$ ,  $x_3^* = 2$  e  $x_4^* = x_5^* = 0$ .

Se risolviamo il programma lineare iniziale col metodo grafico, otteniamo la seguente regione ammissibile:



Nel grafico, il punto denotato con  $B^2$  denota il punto di ottimo mentre i punti  $B^0$  e  $B^1$  denotano la sequenza della basi che il simplesso ha percorso per raggiungerlo. Commentiamo ora le iterazioni dell'algoritmo del simplesso attraverso il disegno della regione ammissibile.

Alla prima iterazione, il simplesso si muove dalla base  $B^0$  alla base  $B^1$  mettendo in base la variabile  $x_1$ . Sul grafico osserviamo infatti uno spostamento lungo  $x_1$  pari a 2 andando a finire sul vertice  $B^1$  composto dal **terzo** vincolo ( $x_1 \leq 2$ ) e dal vincolo di segno. Osserviamo che le operazioni del simplesso determinano l'elemento di pivot proprio sul **terzo** elemento della colonna relativa a  $x_1$ , ovvero in corrispondenza del terzo vincolo (righe = vincoli nella matrice  $T(B)$ ). Inoltre, il terzo elemento per il pivot è scelto in quanto il suo rapporto è quello minimo ed esattamente pari a 2, ovvero lo spostamento massimo che posso avere muovendomi lungo  $x_1$  senza uscire dalla regione ammissibile  $S_a$ , come si evince anche guardando il grafico della regione ammissibile. Analoga osservazione può essera fatta alla seconda iterazione considerando l'entrata in base della variabile  $x_2$  al posto di  $x_4$  che determina uno spostamento di dimensione 1 parallelamente all'asse  $x_2$  facendo pivot sul secondo elemento della colonna corrispondente alla variabile  $x_2$ .

Osserviamo anche che il costo ridotto della variabile  $x_5$  uscita di base è pari a 4 (si veda la seconda riformulazione) ovvero l'esatto opposto del costo ridotto che ha portato  $x_1$  in base (si veda la prima riformulazione). Questa non è una coincidenza ma è conseguenza del fatto che l'incremento della funzione obiettivo alla prima iterazione si deve interamente alla variabile  $x_1$  entrata in base al posto di  $x_5$ . Nota che analoga osservazione si può fare considerando la seconda iterazione e le variabili che entra in base  $x_2$  e la variabile  $x_4$  che esce.

Osserviamo infine che il simplesso termina i suoi spostamenti sulla base ottima  $B^2$ . La base risulta ottima in quanto i costi ridotti associati alle variabili fuori base sono tutti negativi, ovvero rappresentano direzioni di decrescita della funzione obiettivo. Infatti, dal grafico si osserva che  $B^2$  è l'ultimo punto della  $S_a$  che incontriamo muovendoci lungo la direzione del vettore di costo  $c$ . In altre parole, tracciando la retta di isoprofitto su  $B^2$ , risulta che la  $S_a$  del problema risiede tutta nella parte geometrica nella quale la funzione obiettivo non può che decrescere.

### 4.3 Generazione di una base ammissibile

La formulazione data dell'algoritmo del simplesso presuppone la conoscenza di una base ammissibile iniziale  $B^0$ , che però non è sempre evidente. La ricerca di una base ammissibile iniziale può però essere effettuata sempre per mezzo dell'algoritmo del simplesso.

Si consideri un programma lineare

$$(4.9) \quad \max\{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

dove  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ; quest'ultima condizione non è restrittiva in quanto si può sempre ottenere, eventualmente moltiplicando per  $-1$  ambo i membri in uno o più vincoli. Se nella matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  compaiono le colonne della matrice-identità  $m \times m$ , le variabili corrispondenti

a tali colonne formano una base ammissibile, identificabile per ispezione. Se invece non è possibile identificare una base ammissibile per ispezione si può procedere come segue per ottenerne una.

**4.3.1 Programma di prima fase.** Si definisce *programma di prima fase* associato al programma lineare (4.9) il seguente programma lineare, che oltre al vettore di variabili  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  comprende il vettore di *variabili artificiali*  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m)^T$ .

$$(4.10) \quad \max \left\{ \zeta = - \sum_{i=1}^m s_i : \mathbf{Ax} + \mathbf{s} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \right\}$$

Per questo programma si può osservare facilmente che:

- possiede sempre soluzioni ammissibili, in quanto  $\mathbf{s} = \mathbf{b}, \mathbf{x} = \mathbf{0}$  è una sua soluzione ammissibile di base;
- inoltre ammette sempre soluzioni ottime, in quanto

$$(4.11) \quad \zeta = - \sum_{i=1}^m s_i \leq 0 \quad \text{per ogni } (\mathbf{x}, \mathbf{s}) \text{ ammissibile,}$$

e quindi la funzione obiettivo non può essere illimitata.

Con queste considerazioni si può dimostrare la seguente

**Proprietà 4.7.** *Il programma (4.9) ammette soluzioni ammissibili se e solo se il programma (4.10) ha un ottimo con valore  $\zeta^* = 0$ .*

**Esempio 4.8.** (a) Si determini una base ammissibile per il programma lineare

$$\max -x_1 + 2x_2$$

soggetto a

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$x_1 - 2x_2 - x_4 = 7$$

$$x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

La matrice dei coefficienti non contiene un blocco-identità  $3 \times 3$ , quindi si imposta il problema di prima fase.

$$\max \zeta = -s_1 - s_2 - s_3$$

soggetto a

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + s_1 = 6$$

$$x_1 - 2x_2 - x_4 + s_2 = 7$$

$$x_2 + x_3 + s_3 = 3$$

$$x_1, \dots, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

Partendo dalla base ammissibile  $B^0 = \{\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7\}$  — variabili  $s_1, s_2, s_3$  — e applicando l'algoritmo del simplesso si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(B^0) &= \left( \begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) & \begin{cases} s_1 = 6 & -2x_1 - 3x_2 & +x_3 \\ s_2 = 7 & -x_1 + 2x_2 & & +x_4 \\ s_3 = 3 & & -x_2 & -x_3 \end{cases} \\ & & \zeta = -16 + 3x_1 + 2x_2 - x_4 \\ & & x_1, \dots, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \\ \\ \mathbf{T}(B^1) &= \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) & \begin{cases} x_1 = 3 & -\frac{1}{2}s_1 - \frac{3}{2}s_2 & +\frac{1}{2}s_3 \\ s_2 = 4 & +\frac{1}{2}s_1 + \frac{7}{2}s_2 & -\frac{1}{2}s_3 + x_4 \\ s_3 = 3 & & -x_2 & -1x_3 \end{cases} \\ & & \zeta = -7 - \frac{3}{2}s_1 - \frac{5}{2}s_2 + \frac{3}{2}s_3 - x_4 \\ & & x_1, \dots, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \\ \\ \mathbf{T}(B^2) &= \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -\frac{7}{2} & 1 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) & \begin{cases} x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}s_1 & -2x_2 - \frac{1}{2}s_3 \\ s_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}s_1 & +4x_2 + \frac{1}{2}s_3 & +x_4 \\ x_3 = 3 & & -x_2 - s_3 \end{cases} \\ & & \zeta = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}s_1 - 4x_2 - \frac{3}{2}s_3 - x_4 \\ & & x_1, \dots, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{aligned}$$

La base  $B^2$  risulta ottima per il problema di prima fase (notare i costi ridotti  $\leq 0$ ). Avendo trovato un ottimo di valore  $\zeta^* < 0$ , risulta che il programma lineare originale non possiede soluzioni ammissibili.

(b) Si determini una soluzione ottima per il seguente programma lineare.

$$\max z = x_1 - x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 &+ 2x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Il problema di prima fase associato al programma lineare dato è

$$\max \zeta = -s_1 - s_2 - s_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &+ s_1 = 4 \\ x_2 + x_3 &+ s_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 &+ 2x_4 + s_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 &\geq 0. \end{aligned}$$



Partendo dalla base  $B^0 = \{\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7\}$  si ottiene quanto segue

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(B^0) &= \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{cases} s_1 = 4 & -x_1 + 2x_2 & +x_3 \\ s_2 = 2 & & -x_1 & -x_3 \\ s_3 = 1 & +x_1 - x_2 & & -2x_4 \end{cases} \\
 &\quad \zeta = -7 + 2x_4 \\
 &\quad x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \\
 \\
 \mathbf{T}(B^1) &= \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad \begin{cases} s_1 = 4 & -1x_1 + 2x_2 & +x_3 \\ s_2 = 2 & & -x_2 & -x_3 \\ x_4 = \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 & & -\frac{1}{2}s_3 \end{cases} \\
 &\quad \zeta = -6 + x_1 - x_2 - s_3 \\
 &\quad x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \\
 \\
 \mathbf{T}(B^2) &= \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = 4 & +2x_2 + x_3 & & -s_1 \\ s_2 = 2 & & -1x_2 & -x_3 \\ x_4 = \frac{5}{2} & +\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_1 & & -\frac{1}{2}s_3 \end{cases} \\
 &\quad \zeta = -2 + x_2 + x_3 - s_1 - s_3 \\
 &\quad x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \\
 \\
 \mathbf{T}(B^3) &= \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = 8 & -s_1 - x_3 & -2s_2 \\ x_2 = 2 & & -x_3 & -s_2 \\ x_4 = \frac{7}{2} & -\frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2 & & -\frac{1}{2}s_3 \end{cases} \\
 &\quad \zeta = 0 - s_1 - s_2 - s_3 \\
 &\quad x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

La base  $B^3 = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\}$  è ottima per il programma di prima fase (costi ridotti  $\leq 0$  per tutte le variabili fuori base). Il programma lineare originale ha quindi  $B^3$  come base ammissibile; si vuole ora ottenere la riformulazione del programma originale rispetto alla base  $B^3$ , e proseguire nella ricerca della soluzione ottima. Eliminando le variabili artificiali  $s_1, s_2, s_3$ , si ottiene la riformulazione dei vincoli

$$\mathbf{T}(B^3) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = 8 & -x_3 \\ x_2 = 2 & -x_3 \\ x_4 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Sostituendo  $x_1, x_2, x_4$  nella funzione obiettivo  $z = x_1 - x_2 + 3x_3$  si ottiene

$$z = (8 - x_3) - (2 - x_3) + 3x_3 = 6 + 3x_3.$$

La riformulazione completa è quindi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(B^3) &= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = 8 & -x_3 \\ x_2 = 2 & -x_3 \\ x_4 = \frac{7}{2} \end{cases} \\
 &\quad z = 6 + 3x_3 \\
 &\quad x_1, \dots, x_4 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Si può quindi risolvere il programma originale riapplicando il simplesso partendo dalla base  $B^3$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(B^3) &= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = 8 - x_3 \\ x_2 = 2 - x_3 \\ x_4 = \frac{7}{2} \end{cases} \\ &\quad z = 6 + 3x_3 \\ &\quad x_1, \dots, x_4 \geq 0, \\ \mathbf{T}(B^4) &= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = 6 - x_2 \\ x_3 = 2 - x_2 \\ x_4 = \frac{7}{2} \end{cases} \\ &\quad z = 12 - 3x_2 \\ &\quad x_1, \dots, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

La base  $B^4 = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$  è quindi ottima.

## 4.4 Regola anticiclo\*\*

In presenza di soluzioni di base degeneri, l'algoritmo del simplesso può non convergere ad una soluzione ottima ed entrare in un ciclo infinito di cambi di base. E' quindi necessario, al fine di garantire la correttezza e la terminazione dell'algoritmo del simplesso, studiare un metodo per evitare i cicli.

Sebbene sia un caso raro, l'algoritmo cicla non appena il valore della variabile che deve uscire dalla base è uguale a zero. Ad esempio, si consideri il seguente programma lineare

$$\max z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + x_5 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_6 &= 0 \\ x_1 + x_7 &= 1 \\ x_1, \dots, x_7 &\geq 0. \end{aligned}$$

Osserviamo per prima cosa che il programma lineare in esame altro non è che la forma standard del programma lineare con vincoli di minore o uguale e senza le 3 variabili di surplus  $x_5, x_6$  e  $x_7$ . Mostriamo, sinteticamente, come l'algoritmo del simplesso può entrare in un ciclo infinito durante la soluzione del programma lineare dato. Lo svolgimento passo passo dell'algoritmo è lasciato come esercizio.

Si supponga di avere  $B^0 = \{\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7\}$  come base iniziale, ottenendo quindi  $x_{B^0}^T = [0, 0, 1]$  ed un'unica variabile non di base con costo ridotto positivo  $r_1 = 10$ . Allora, l'algoritmo esegue le seguenti 6 iterazioni in sequenza:

**iterazione 1:** dato che l'unico costo ridotto positivo è  $r_1 = 10$ ,  $\mathbf{A}_1$  entra in base ed esce  $\mathbf{A}_5$ ; la nuova base è quindi  $B^1 = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7\}$  e  $x_{B^1}^T = [0, 0, 1]$ ;

**iterazione 2:** i costi ridotti positivi sono  $r_2 = 53$  and  $r_3 = 41$ ;  $\mathbf{A}_2$  entra in base ed esce  $\mathbf{A}_6$ ; la nuova base è quindi  $B^2 = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_7\}$  e  $x_{B^2}^T = [0, 0, 1]$ ;

**iterazione 3:** l'unico costo ridotto positivo è  $r_3 = \frac{29}{2}$ ;  $\mathbf{A}_3$  entra in base ed esce  $\mathbf{A}_1$ ; la nuova base è quindi  $B^3 = \{\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_7\}$  e  $x_{B^3}^T = [0, 0, 1]$ ;

**iterazione 4:** i costi ridotti positivi sono  $r_4 = 18$  and  $r_5 = 15$ ;  $\mathbf{A}_4$  entra in base ed esce  $\mathbf{A}_2$ ; la nuova base è quindi  $B^4 = \{\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_7\}$  e  $x_{B^4}^T = [0, 0, 1]$ ;

**iterazione 5:** l'unico costo ridotto positivo è  $r_5 = \frac{21}{2}$ ;  $\mathbf{A}_5$  entra in base ed esce  $\mathbf{A}_3$ ; la nuova base è quindi  $B^5 = \{\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_7\}$  e  $x_{B^5}^T = [0, 0, 1]$ ;

**iterazione 6:** i costi ridotti positivi sono  $r_1 = 22$  and  $r_6 = 24$ ;  $\mathbf{A}_6$  entra in base ed esce  $\mathbf{A}_4$ ; la nuova base è quindi  $B^6 = \{\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7\}$  e  $x_{B^6}^T = [0, 0, 1]$ .

Come si osserva facilmente che la base  $B^0$  corrisponde alla base  $B^6$  ottenendo quindi un ciclo nel quale le 6 basi si ripetono all'infinito.

Al fine di evitare tali cicli si introduce la *regola anticiclo di Bland* che permette di evitare cicli durante la soluzione di un qualsiasi programma lineare.

**Teorema 4.8** (Regola anticiclo di Bland). *Ad ogni cambio di base, si consideri la seguente regola:*

- *entra in base la variabile non di base che ha indice più basso tra quelle con costo ridotto positivo, ovvero*

$$q = \min\{j : r_j > 0\}.$$

- *esce dalla base la variabile di base con indice più piccolo.*

*Applicando questa regola, l'algoritmo del simplesso termina correttamente in un numero finito di passi.*

Considerato l'esempio di partenza, applicando la regola anticiclo di Bland le prime 5 iterazioni rimangono invariate portando l'algoritmo ad avere la base  $B^5 = \{\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_7\}$ . In questo caso, applicando la nuova regola, entra in base  $\mathbf{A}_1$  anziché  $\mathbf{A}_6$ , ed esce  $\mathbf{A}_4$  ottenendo quindi  $B^6 = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_7\}$  e  $x_{B^6}^T = [0, 0, 1]$ .

Al passo successivo, in quanto uniche scelte possibile, entra in base  $\mathbf{A}_3$  ed esce  $\mathbf{A}_7$  determinando la base  $B^7 = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_5\}$  e la soluzione di base  $x_{B^7}^T = [1, 1, 2]$  che risulta ottima in quanto tutti i costi ridotti sono negativi.



# Appendice A

## Vettori, matrici e sistemi lineari

### A.1 Vettori: definizioni

**A.1.1 Vettori e componenti.** Un *vettore*  $\mathbf{v}$  a  $n$  componenti (o a  $n$  *dimensioni*) è una  $n$ -upla ordinata di numeri reali  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ; l'insieme di tutti i vettori a  $n$  componenti è indicato con il simbolo  $\mathbb{R}^n$ . Le quantità  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono detti *componenti* di  $\mathbf{v}$ . Due vettori  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  sono uguali se e solo se  $v_1 = w_1, v_2 = w_2, \dots, v_n = w_n$ .

Il vettore

$$(A.1) \quad \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ zeri}} = \mathbf{0}$$

è detto *vettore nullo*. Si noti che l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  può essere visto come l'insieme  $\mathbb{R}^1$  dei vettori a una sola componente; nel calcolo vettoriale i numeri reali sono anche detti *scalari*.

**A.1.2 Operazioni sui vettori e proprietà.** Sull'insieme di vettori  $\mathbb{R}^n$  possono essere definite due operazioni fondamentali.

**Somma:** dati due vettori  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , è definito il vettore somma

$$(A.2) \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

dove la somma effettuata su ogni componente è la somma usata per i normali numeri reali.

*Esempio.* In  $\mathbb{R}^3$ ,  $(3, 7, 9) + (5, -2, 0) = (8, 5, 9)$ .

**Prodotto numero-vettore:** dati un vettore  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  e un numero  $a \in \mathbb{R}$ , è definito il vettore

$$(A.3) \quad a \cdot \mathbf{v} = (a \cdot v_1, a \cdot v_2, \dots, a \cdot v_n)$$

dove il prodotto effettuato su ogni componente è il normale prodotto di numeri reali.

*Esempio.* In  $\mathbb{R}^4$ ,  $3 \cdot (9, 81, \frac{3}{2}, 100) = (27, 243, \frac{9}{2}, 300)$ .

Queste operazioni godono delle seguenti proprietà, che sono facilmente dimostrabili a partire dalle definizioni date.

**Proprietà associativa della somma:** per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  risulta

$$(A.4) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

**Esistenza dell'elemento neutro per la somma:** esiste  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  tale che per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  risulta

$$(A.5) \quad \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}.$$

**Esistenza e unicità dell'opposto:** dato  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , esiste unico il suo *opposto*  $-\mathbf{v}$ , tale che

$$(A.6) \quad \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Nota: la differenza di vettori  $\mathbf{w} - \mathbf{v}$  è definita come  $\mathbf{w} + (-\mathbf{v})$ .

**Proprietà commutativa della somma:** per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  risulta

$$(A.7) \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}.$$

**Esistenza dell'elemento neutro per il prodotto numero-vettore:** esiste un elemento  $1 \in \mathbb{R}$  tale che, per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ :

$$(A.8) \quad 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

**Proprietà distributive:** per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  risulta

$$(A.9) \quad a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w},$$

per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  risulta

$$(A.10) \quad (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}.$$

Da quelle enunciate seguono (le dimostrazioni sono omesse e vengono lasciate per esercizio):

**Legge di annullamento del prodotto:** si ha  $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$  se e solo se vale  $a = 0$  o  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

**Opposto del vettore  $a\mathbf{v}$ :** per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  risulta

- (i)  $-(a\mathbf{v}) = (-a)\mathbf{v}$ ;
- (ii)  $-(a\mathbf{v}) = a \cdot (-\mathbf{v})$ ;
- (iii)  $-\mathbf{v} = -1 \cdot \mathbf{v}$ .

**A.1.3 Struttura di spazio vettoriale.** Un insieme  $V$  sul quale siano definite le operazioni di somma tra elementi di  $V$  e di prodotto tra un numero e un elemento di  $V$ , è detto *spazio vettoriale* (sull'insieme dei numeri  $\mathbb{R}$ ) se le due operazioni godono delle seguenti proprietà:

- associativa della somma;
- esistenza dell'elemento neutro della somma e dell'opposto;
- commutativa della somma;
- esistenza dell'elemento neutro del prodotto numero-vettore;
- le proprietà distributive (A.9) e (A.10).

Per quanto osservato,  $\mathbb{R}^n$  è uno spazio vettoriale.

Uno spazio vettoriale  $V$  non deve necessariamente essere costituito da  $n$ -uple di numeri reali; si possono definire spazi di funzioni, o spazi nei quali la somma e il prodotto non sono definiti nel modo “tradizionale”. Nel corso comunque si tratteranno solo  $\mathbb{R}^n$  e suoi sottoinsiemi.

**A.1.4 Prodotto scalare, modulo di un vettore e proprietà.** Oltre alle operazioni fondamentali, su  $\mathbb{R}^n$  si può definire la seguente operazione.

**Prodotto scalare:** dati due vettori  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , è definito il loro *prodotto scalare* come

$$(A.11) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Si noti che il prodotto scalare ha come risultato un numero (uno *scalare*, appunto) e non un nuovo vettore.

*Esempio.* In  $\mathbb{R}^3$ ,  $(3, 7, 9) \cdot (1, 2, -1) = 3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) = 3 + 14 - 9 = 8$ .

Si definisce *modulo* di un vettore  $\mathbf{v}$  il numero non negativo  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$ . Un vettore con modulo pari a 1 è anche detto *versore*.

Le operazioni di somma vettoriale e prodotto numero-vettore presentano proprietà — come associatività, commutatività e distributività — analoghe alle tradizionali operazioni di somma e prodotto tra numeri. Ciò è abbastanza ovvio, perché in queste operazioni le componenti dei vettori non “interagiscono” tra loro: somme e prodotti sono eseguiti componente per componente, in modo separato.

Il prodotto scalare tra due vettori invece combina le loro componenti per produrre un singolo numero. Tuttavia anche questo prodotto si comporta in modo abbastanza familiare rispetto a un'operazione come la somma. Valgono le seguenti proprietà.

**Proprietà A.1.** Per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , risulta  $\mathbf{v}\mathbf{w} = \mathbf{w}\mathbf{v}$ .

La dimostrazione segue in modo immediato dalla definizione e dalla commutatività del prodotto di numeri reali.

**Proprietà A.2.** Per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  risulta  $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}$ .

*Dimostrazione.* Applicando le definizioni di somma e prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^n u_i(v_i + w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n u_i v_i + u_i w_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n u_i v_i}_{\mathbf{u}\mathbf{v}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n u_i w_i}_{\mathbf{u}\mathbf{w}} \\ &= \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}. \end{aligned}$$

□

**Proprietà A.3.** Per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  e  $a \in \mathbb{R}$  risulta  $(a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ .

*Dimostrazione.* Di nuovo, applicando la definizione di prodotto:

$$(a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n a v_i w_i = a \sum_{i=1}^n v_i w_i = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

□

E' importante osservare che il prodotto scalare *non* gode della proprietà associativa. Dati  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , in generale  $(\mathbf{u}\mathbf{v})\mathbf{w} \neq \mathbf{u}(\mathbf{v}\mathbf{w})$ . Ad esempio, prendendo in  $\mathbb{R}^2$   $\mathbf{u} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 1)$  e  $\mathbf{w} = (1, 1)$  risulta

$$(\mathbf{u}\mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{v}\mathbf{w}) = (1, 0).$$



## A.2 Geometria dei vettori nello spazio

I vettori in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  hanno una corrispondenza immediata con i punti del piano ( $\mathbb{R}^2$ ) o dello spazio ( $\mathbb{R}^3$ ): fissato un punto origine e un'unità di misura, le componenti di un vettore  $\mathbf{v}$  identificano univocamente un punto nel piano o nello spazio. Graficamente, la rappresentazione è data dal punto stesso o da un segmento orientato, diretto dall'origine al punto stesso come mostrato in Figura A.1.

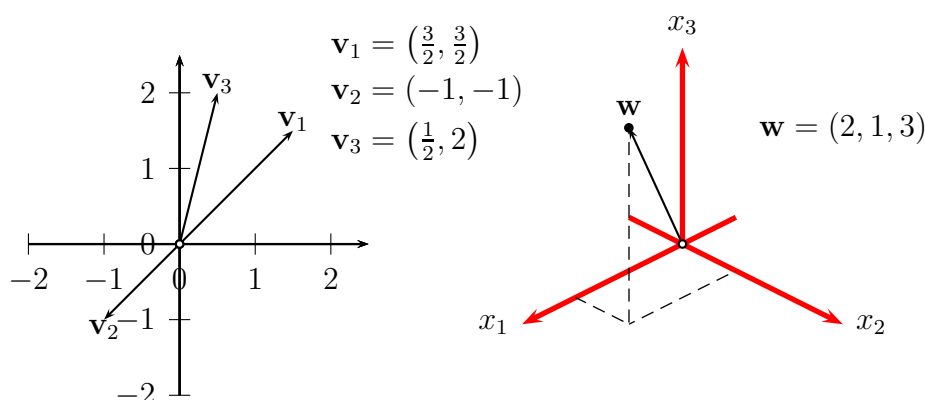


Figura A.1: Rappresentazione geometrica di un vettore in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

**A.2.1 Somma vettoriale.** La definizione della somma di vettori rispetta la *regola del parallelogramma* usata spesso in fisica per la somma dei vettori-forze: *per sommare due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  si traccia il parallelogramma che ha per lati  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , e il vettore somma è la diagonale tesa tra l'origine e ed il vertice del parallelogramma ad essa opposto.*

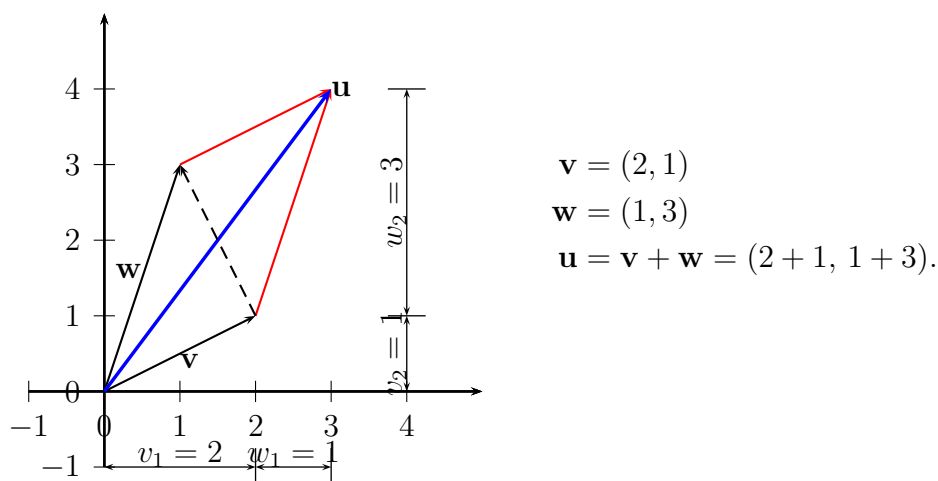


Figura A.2: Somma tra vettori.

Il vettore-diagonale  $\mathbf{u}$  è la somma risultante da  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  come illustrato in Figura A.2. Si noti che l'altra diagonale (tratteggiata) del parallelogramma rappresenta la differenza  $\mathbf{w} - \mathbf{v}$  — basta riportare il vettore nell'origine.

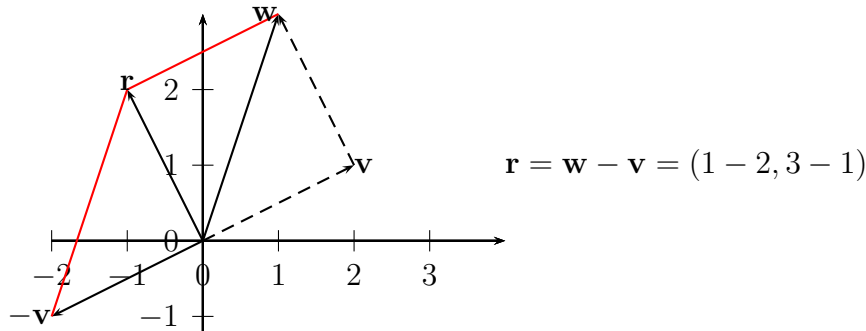


Figura A.3: Differenza tra vettori.

La Figura A.3 illustra la differenza tra due vettori.

**A.2.2 Modulo di un vettore.** Il modulo di un vettore  $\mathbf{v}$  corrisponde alla distanza dall'origine del punto che esso rappresenta come illustrato in Figura A.4.

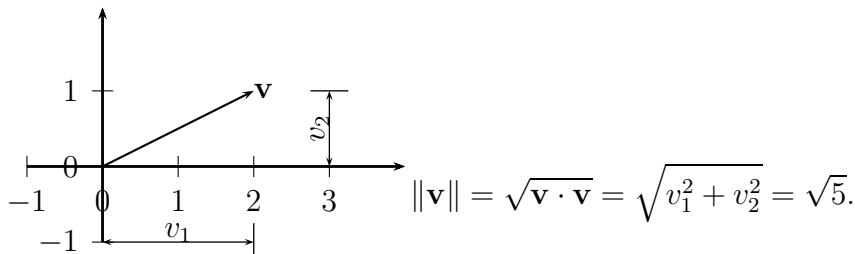


Figura A.4: Modulo di un vettore.

In  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  questo corrisponde al tradizionale teorema di Pitagora. Si noti anche che, dati due punti  $v, w \in \mathbb{R}^2$ , il modulo della differenza

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2}$$

è la distanza euclidea tra i due punti. Per  $n > 2$  la distanza euclidea tra due punti  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$  è definita sempre come  $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ .

**A.2.3 Prodotto per un numero.** Il vettore  $a\mathbf{v}$  è un vettore con modulo pari a  $|a| \|\mathbf{v}\|$ . Se  $a > 0$ ,  $a\mathbf{v}$  ha verso uguale a quello di  $\mathbf{v}$ , se  $a < 0$   $a\mathbf{v}$  ha verso *opposto* a quello di  $\mathbf{v}$ . Un esempio è riportato in Figura A.5.

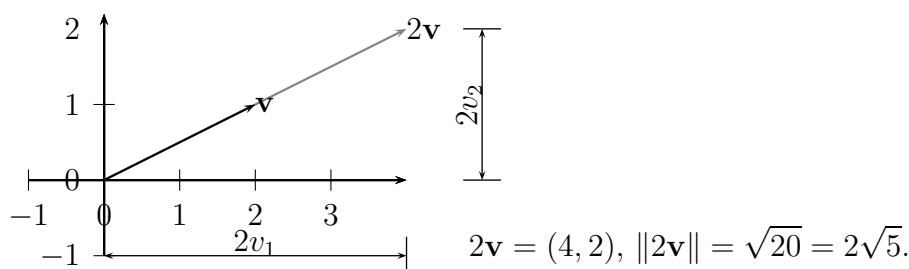


Figura A.5: Prodotto di un vettore per un numero.

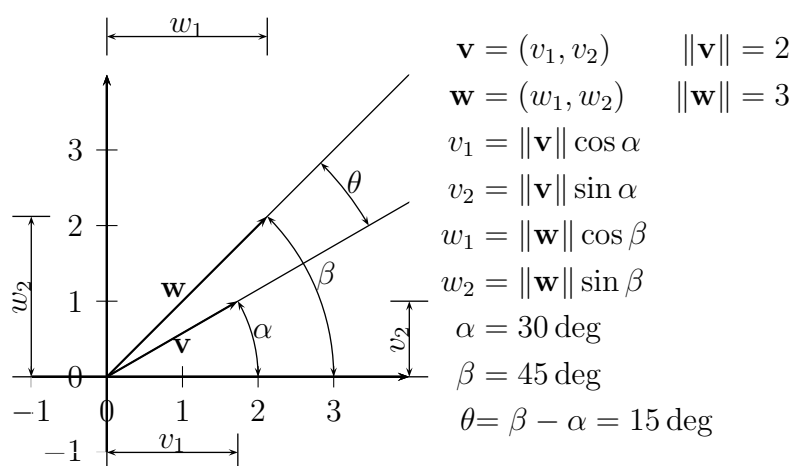


Figura A.6: Prodotto scalare.

**A.2.4 Prodotto scalare.** Nel piano  $\mathbb{R}^2$  e nello spazio  $\mathbb{R}^3$ , il prodotto scalare di due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  è pari a  $\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cos \theta$ , dove  $\theta$  è la misura dell'angolo compreso tra i due vettori.

Nell'esempio in  $\mathbb{R}^2$  riportato in Figura A.6 si può osservare che

$$\begin{aligned}
 \mathbf{vw} &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \\
 &= \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \alpha \cos \beta + \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin \alpha \sin \beta \\
 &= \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \underbrace{(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}_{\cos(\beta - \alpha)} \\
 &= \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta.
 \end{aligned}$$

La seguente proprietà — evidente in  $\mathbb{R}^2$  — lega il valore assoluto di un prodotto scalare e i moduli dei vettori (in qualunque spazio  $\mathbb{R}^n$ ).

**Proprietà A.4** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , si ha che  $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ .*

In  $\mathbb{R}^n$ , il prodotto scalare permette di definire l'angolo tra due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  anche per  $n > 3$ :

$$\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \arccos \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}.$$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz garantisce che l'argomento di arccos sia sempre un numero compreso tra  $-1$  e  $1$ .

Due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono *ortogonali* quando  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$  (cioè  $\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \pi/2$ ).

**Proiezioni ortogonali.** Se  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{u}$  è un versore di  $\mathbb{R}^n$  (cioè  $\|\mathbf{u}\| = 1$ ), il prodotto scalare  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$  indica la lunghezza del segmento che costituisce la proiezione ortogonale di  $\mathbf{v}$  sulla retta passante per l'origine su cui giace  $\mathbf{u}$ . In Figura A.7 è riportato un esempio di proiezione.

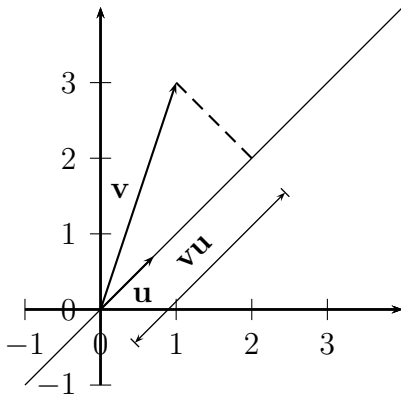


Figura A.7: Proiezione ortogonale.

**A.2.5 Rette nello spazio.** Una retta  $r$  nello spazio è identificata per mezzo di due elementi:

- un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  appartenente a  $r$ ;
- un vettore  $\mathbf{v}$  parallelo a  $r$ .

L'insieme dei punti appartenenti a tale retta è

$$(A.12) \quad r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}\}.$$

La rappresentazione

$$(A.13) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \quad t \in \mathbb{R}$$

dei punti della retta è detta *rappresentazione parametrica*; ogni valore del *parametro* reale  $t$  identifica un diverso punto di  $r$ . In fisica, la rappresentazione parametrica di una retta corrisponde alla descrizione del moto di un corpo puntiforme che si muove lungo  $r$  ad una velocità costante pari al modulo  $\|\mathbf{v}\|$ , mentre il parametro  $t$  rappresenta l'istante di tempo nel quale il corpo si trova nel punto  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$  come illustrato in Figura A.8.

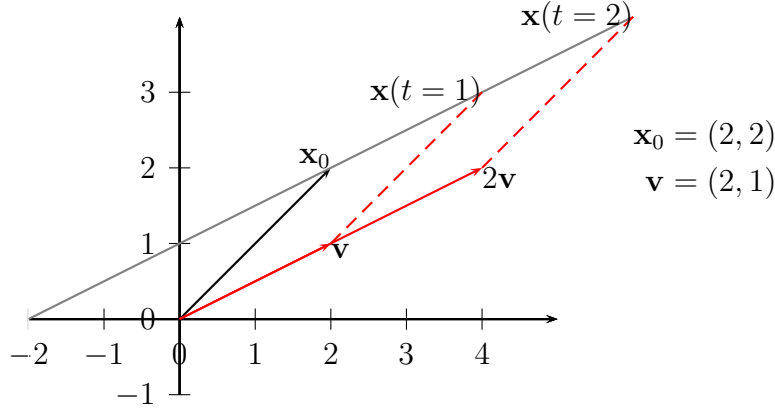


Figura A.8: Rappresentazione parametrica di una retta.

Nello spazio a due dimensioni  $\mathbb{R}^2$ , una retta si può rappresentare anche in forma *cartesiana*, per mezzo di un'equazione di primo grado nelle coordinate:

$$(A.14) \quad r = \{(x_1, x_2): ax_1 + bx_2 = c\}.$$

Per una qualunque retta in  $\mathbb{R}^2$  è sempre possibile passare dalla rappresentazione parametrica a una cartesiana e viceversa. Ad esempio, data la retta

$$(A.15) \quad r = \{(x_1, x_2): (x_1, x_2) = (2, 2) + (2, 1)t\} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 = 2 + 2t \\ x_2 = 2 + t \end{cases}$$

è sufficiente eliminare  $t$  dalle espressioni di  $x_1$  e  $x_2$ : dalla seconda equazione si ottiene  $t = (x_2 - 2)$  e, sostituendo nella prima:

$$(A.16) \quad x_1 = 2 + 2(x_2 - 2) \quad \text{quindi} \quad r = \{(x_1, x_2): x_1 - 2x_2 = -2\},$$

che costituisce una rappresentazione della retta in forma cartesiana. Dalla rappresentazione cartesiana è possibile tornare ad una rappresentazione parametrica — non necessariamente la stessa — prendendo una variabile come parametro e ricavando l'altra in funzione del parametro: ad esempio partendo da

$$(A.17) \quad x_1 - 2x_2 = -2$$

si pone  $x_1 = t$  e di conseguenza si ottiene  $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + 2) = 1 + \frac{1}{2}t$ . La retta è quindi anche rappresentabile come

$$(A.18) \quad r = \{(x_1, x_2): (x_1, x_2) = (0, 1) + (1, \tfrac{1}{2})t\} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 = 0 + t \\ x_2 = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Le equazioni (A.15), (A.16) e (A.18) *rappresentano tutte la stessa retta*.

Nello spazio tridimensionale  $\mathbb{R}^3$ , la rappresentazione parametrica di una retta richiede sempre un punto (vettore)  $\mathbf{x}_0$  appartenente alla retta e un vettore  $\mathbf{v}$  che specifica una direzione. Ad esempio,

$$(A.19) \quad (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, \frac{1}{2}) + (1, 3, 2)t \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 1 + 3t \\ x_3 = \frac{1}{2} + 2t \end{cases}$$

La rappresentazione cartesiana della stessa retta richiede due equazioni indipendenti: ricavando ad esempio dalla  $x_1 = 1 + t \implies t = x_1 - 1$  ed eliminando quindi il parametro sostituendo nella seconda e nella terza, si ha

$$(A.20) \quad \begin{cases} x_2 = 1 + 3(x_1 - 1) \\ x_3 = \frac{1}{2} + 2(x_1 - 1) \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Di nuovo, è possibile tornare ad una rappresentazione parametrica scegliendo una delle variabili come parametro. Ad esempio, ponendo  $x_3 = t$  si ottiene

$$(A.21) \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + t = -\frac{3}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t \\ x_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Analogamente al caso di  $\mathbb{R}^2$ , le equazioni (A.19), (A.20) e (A.21) sono rappresentazioni diverse ma equivalenti della stessa retta.

In generale, in  $\mathbb{R}^n$ , una retta può essere descritta tramite la forma parametrica (A.13) con opportuni  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{v}$ , oppure in forma cartesiana per mezzo di  $n - 1$  equazioni nelle coordinate.

**A.2.6 Segmenti di retta e insiemi convessi.** Usando la rappresentazione parametrica della retta è molto semplice descrivere anche un altro ente geometrico di uso comune: il segmento. Dati due punti  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ , l'insieme dei punti del segmento  $\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$  è descrivibile come

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)t, 0 \leq t \leq 1\} = \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2, 0 \leq t \leq 1\}. \end{aligned}$$

Dati due vettori  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ , ogni vettore  $\mathbf{y}$  ottenuto come

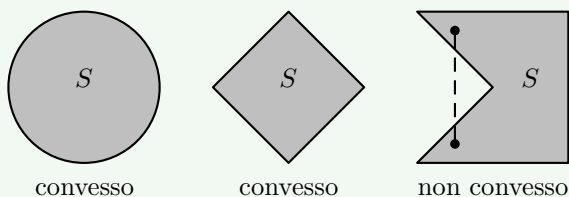
$$(A.22) \quad \mathbf{y} = (1 - t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2 \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1$$

è detto *combinazione lineare convessa* di  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ .

Un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  è detto *convesso* se per ogni coppia di punti  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$  anche tutte le combinazioni lineari convesse di  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  appartengono a  $S$ .

Si osserva che questa definizione è coerente con la definizione tradizionale di insieme convesso data dalla geometria elementare, ovvero  $S$  è convesso se, dati due punti in  $S$  l'intero segmento che li congiunge è incluso in  $S$ .

**Esempio A.1** (Esempi in  $\mathbb{R}^2$ ).



È immediato dimostrare la seguente proprietà.

**Proprietà A.5.** Se  $S_1, S_2$  sono insiemi convessi, anche  $S_1 \cap S_2$  è un insieme convesso.

Più in generale, l'intersezione di una collezione finita di insiemi convessi  $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k$  è ancora un insieme convesso.

**A.2.7 Iperpiani.** Si prendano un vettore non nullo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  e un numero  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; l'insieme di punti

$$(A.23) \quad \Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \alpha\}$$

è un *iperpiano* in  $\mathbb{R}^n$ .

*Definizione alternativa:* un iperpiano  $\Pi$  è identificato da un punto  $\mathbf{x}_0$  ad esso appartenente ed un vettore  $\mathbf{v}$ , ed è costituito da tutti i punti  $\mathbf{x}$  tali che il vettore  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  è ortogonale a  $\mathbf{v}$

$$(A.24) \quad \Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_0\}.$$

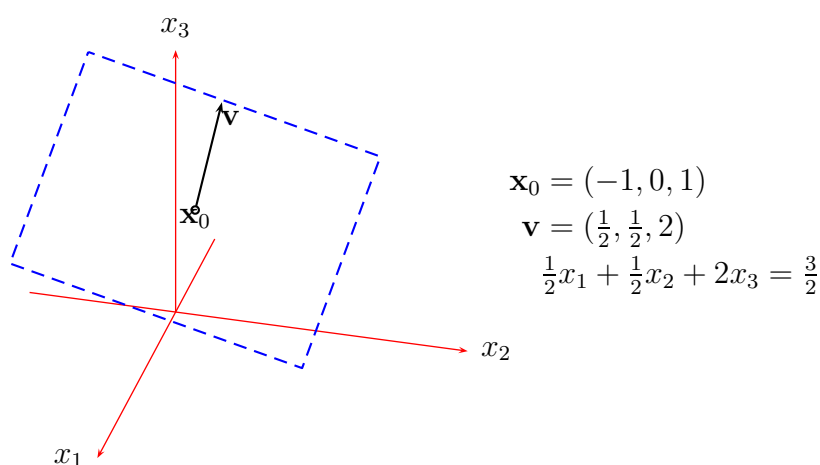
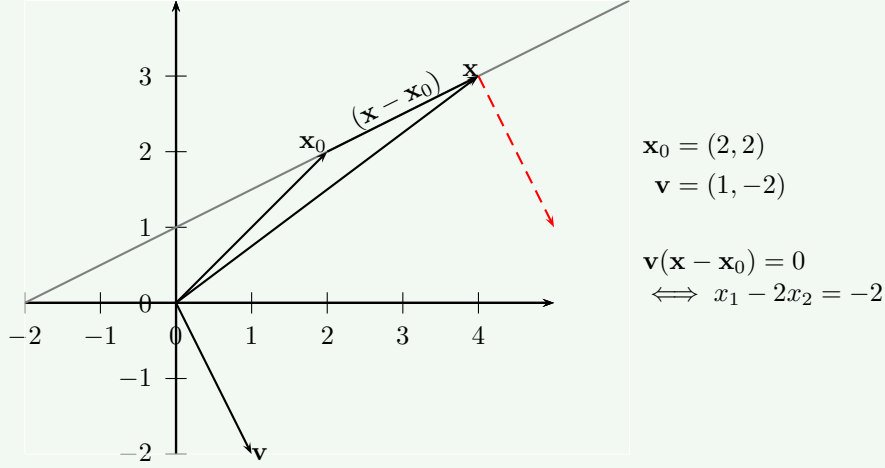


Figura A.9: Esempio di iperpiano in  $\mathbb{R}^3$ .

In  $\mathbb{R}^3$  (si veda Figura A.9), l'iperpiano corrisponde al tradizionale concetto di piano nello spazio; in  $\mathbb{R}^2$  esso corrisponde alla retta come mostrato nell'esempio che segue.

**Esempio A.2.** La retta identificata dalle equazioni (A.15) o (A.16) corrisponde all'insieme dei punti  $\mathbf{x}$  tali che  $\mathbf{x} - (2, 2)$  è ortogonale a  $\mathbf{v} = (1, -2)$ .



In  $\mathbb{R}^3$  un piano si può anche rappresentare in forma parametrica, utilizzando due parametri  $t_1, t_2$ , un punto  $\mathbf{x}_0$  e due vettori *non paralleli*  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ :

$$(A.25) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Ad esempio, il piano  $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = \frac{3}{2}$  si può rappresentare utilizzando la forma (A.25), prendendo due variabili arbitrarie come parametri indipendenti: ponendo  $x_1 = t_1, x_2 = t_2$  si ottiene

$$(A.26) \quad \begin{cases} x_1 = & t_1 \\ x_2 = & t_2 \\ x_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t_1 - \frac{1}{4}t_2 \end{cases} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

che corrisponde a una rappresentazione di tipo (A.25) con  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \frac{3}{4})$ ,  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -\frac{1}{4})$  e  $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -\frac{1}{4})$ . In generale, un iperpiano in  $\mathbb{R}^n$  si può rappresentare in forma parametrica con  $n - 1$  vettori opportuni e altrettanti parametri indipendenti.

**A.2.8 Semispazi.** Dato un iperpiano in  $\mathbb{R}^n$   $\mathbf{v}\mathbf{x} = \alpha$ , gli insiemi

$$(A.27) \quad \Pi^{\geq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}\mathbf{x} \geq \alpha\}$$

$$(A.28) \quad \Pi^{\leq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}\mathbf{x} \leq \alpha\}$$

$$(A.29) \quad \Pi^{>} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}\mathbf{x} > \alpha\}$$

$$(A.30) \quad \Pi^{<} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}\mathbf{x} < \alpha\}$$

sono detti *semispazi*. L'interpretazione geometrica del concetto di semispazio è piuttosto semplice: se  $\mathbf{x}_0$  è un punto appartenente al piano  $\mathbf{v}\mathbf{x} = \alpha$ , il semispazio (A.27) è l'insieme di tutti quei punti  $\mathbf{x}$  per i quali il vettore  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  forma con il vettore  $\mathbf{v}$  un angolo non



superiore a un angolo retto. Graficamente, il vettore  $\mathbf{v}$  “punta” in direzione dei punti dell’insieme. Il semispazio (A.28) formato dai punti  $\mathbf{x}$  per i quali  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  forma con  $\mathbf{v}$  un angolo non inferiore a un angolo retto (considerare la direzione *opposta* a quella indicata dal vettore  $\mathbf{v}$ ). Si veda a tal proposito la Figura A.10.

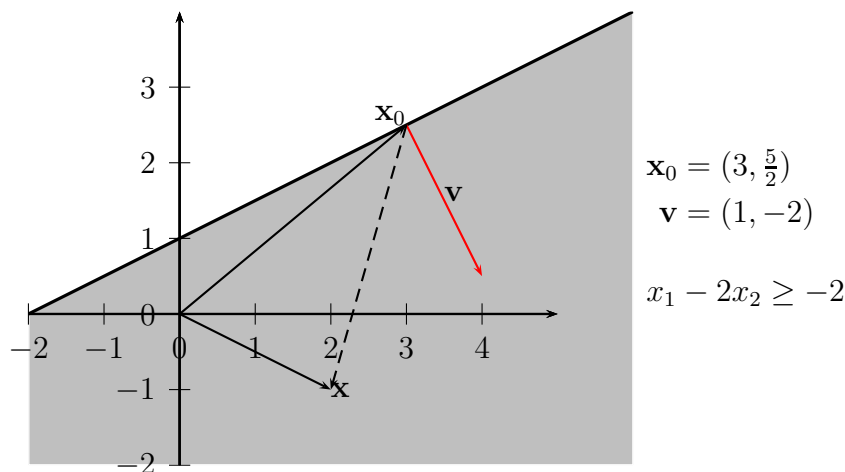


Figura A.10: Esempio di semispazio.

Gli insiemi (A.29) e (A.30) sono di forma analoga, ma la retta  $\mathbf{v}\mathbf{x} = \alpha$  (il “bordo” della regione) esclusa dall’insieme.

## A.3 Matrici: definizioni

**A.3.1 Matrici e operazioni su matrici.** Una *matrice* è una tabella di numeri indicizzata per righe e colonne:

$$(A.31) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

L’insieme di tutte le possibili matrici di numeri reali con  $m$  righe e  $n$  colonne si indica con il simbolo  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .

Tra vettori e matrici, le relazioni — anche di semplice rappresentazione — sono strettissime. Una matrice può essere vista come un insieme indicizzato di vettori-riga o come un insieme indicizzato di vettori-colonna. Ad esempio:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} & 9 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^3 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \mathbf{A}_3 \quad \mathbf{A}_4 \quad \mathbf{A}_5),$$

è un elemento di  $\mathbb{R}^{3 \times 5}$  con vettori-riga

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^1 &= (1, -\tfrac{1}{2}, 9, 7, 1), \\ \mathbf{A}^2 &= (2, 9, 0, 3, 1), \\ \mathbf{A}^3 &= (0, 1, 0, 0, 0),\end{aligned}$$

e con vettori-colonna

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, le matrici di  $\mathbb{R}^{1 \times n}$  e di  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  rappresentano fedelmente i vettori di  $\mathbb{R}^n$ , con le componenti riportate in riga o in colonna, rispettivamente.

Due matrici con le stesse dimensioni sono uguali se i rispettivi elementi in ogni posizione  $(i, j)$  sono uguali.

**A.3.2 Operazioni su matrici.** Sulle matrici di  $\mathbb{R}^{m \times n}$  è possibile definire operazioni simili a quelle definite per i vettori.

**Somma:** date due matrici  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , con

$$(A.32) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

la matrice somma è definita come

$$(A.33) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Esempio.*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Prodotto per un numero:** data  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la matrice  $\alpha \mathbf{A}$  è definita come

$$(A.34) \quad \alpha \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Prodotto matriciale:** date due matrici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times k}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times n}$

$$(A.35) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix},$$

si definisce una matrice prodotto  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$(A.36) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

dove ogni elemento  $c_{ij}$  è calcolato come prodotto scalare dell' $i$ -esimo vettore-riga di  $\mathbf{A}$  e del  $j$ -esimo vettore-colonna di  $\mathbf{B}$ :

$$(A.37) \quad c_{ij} = \mathbf{A}^i \cdot \mathbf{B}_j = \sum_{p=1}^k a_{ip} b_{pj}.$$

*Esempio.*

$$(A.38) \quad \underbrace{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{4 \times 3}, \quad \underbrace{\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 4}, \quad \underbrace{\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{4 \times 4}.$$

**Trasposizione:** data una matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , la sua *matrice trasposta*  $\mathbf{A}^T$  è una matrice di  $\mathbb{R}^{n \times m}$  le cui colonne coincidono con le righe di  $\mathbf{A}$ .

*Esempio.*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come nel caso dei vettori, la somma matriciale e il prodotto numero-matrice presentano proprietà familiari, di facile dimostrazione. Di seguito si intende  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , e con  $\mathbf{0}$  si indica la matrice di  $\mathbb{R}^{m \times n}$  con tutti gli elementi nulli.

**Proprietà A.6** (Proprietà somma matriciale e prodotto numero-matrice).  
**Commutatività:**  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ .

**Associatività:**  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ .

**Elemento nullo per la somma:**  $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ .

**Distributività:**  $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$      $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$      $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Annullamento del prodotto:** se  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{0} \iff \alpha = 0$  o  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

**Esistenza dell'opposto:**  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{0} \iff \mathbf{B} = (-1)\mathbf{A}$ .

Il prodotto di matrici gode delle seguenti proprietà. Nel seguito si assume che le matrici  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  abbiano le dimensioni appropriate perché prodotti e somme siano ben definiti.

**Proprietà A.7** (Proprietà prodotto di matrici). **Associatività:**  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ .

**Distributività a destra:**  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ .

**Distributività a sinistra:**  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ .

**Prodotto per un numero:**  $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$ .

**Trasposizione:**  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ .

Il prodotto di matrici *non* è commutativo. In generale, se il prodotto  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  esiste, il prodotto  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  potrebbe non essere neanche definito.

**Esempio A.3.**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

ma  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  non è definita. Inoltre, anche quando  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  è definita, la commutatività non vale:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 11 \\ 6 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre si ha

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le matrici sono uno strumento formale estremamente potente per manipolare espressioni complesse.

**A.3.3 Matrice identità e matrice inversa.** La matrice

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad n \text{ righe} \times n \text{ colonne}$$

è chiamata *matrice identità* di  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , e costituisce un elemento neutro del prodotto matriciale:

$$(A.39) \quad \begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{A} && \text{per ogni } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times n} \\ \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{A} && \text{per ogni } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times k}. \end{aligned}$$

La dimostrazione segue facilmente dalla definizione (A.37).

Si consideri ora il prodotto matriciale tra matrici *quadrate*, cioè tra elementi di  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Date  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , anche il prodotto  $\mathbf{AB}$  è ancora un elemento di  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . La matrice identità è l'*unica* matrice di  $\mathbb{R}^{n \times n}$  per la quale vale

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{per ogni } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Data  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se esiste in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  una matrice  $\mathbf{A}^{-1}$  tale che

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I},$$

essa è detta *matrice inversa* di  $\mathbf{A}$ . Una matrice per la quale esiste l'inversa è detta *invertibile*.

Non tutte le matrici sono invertibili.

**Esempio A.4.** La matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

non è invertibile, perchè per qualunque altra matrice la si moltiplichi il risultato non avrà mai il numero 1 nella cella (3, 3) (e quindi il risultato non potrà mai essere  $\mathbf{I}$ ).

**A.3.4 Applicazioni lineari\*\*.** Una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un'applicazione *lineare* da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  se per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  per cui  $f$  è definita e per qualunque  $\alpha \in \mathbb{R}$  risulta

$$(A.40) \quad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}),$$

$$(A.41) \quad f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}).$$

Si può dimostrare che qualunque applicazione lineare da  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è calcolabile per mezzo di un opportuno prodotto matriciale tra i vettori  $\mathbf{x}$  di  $\mathbb{R}^n$  e un'opportuna matrice di  $\mathbb{R}^{m \times n}$ :

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}.$$

**Esempio A.5.** L'applicazione lineare da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

è l'applicazione lineare che ad ogni vettore  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  nello spazio bidimensionale  $\mathbb{R}^2$  fa corrispondere il vettore  $f(\mathbf{x})$  ottenuto ruotando  $\mathbf{x}$  di un angolo  $\theta$  in senso orario intorno all'origine.

Operazioni di questo genere, estese a  $\mathbb{R}^3$ , sono ad esempio di uso comune in computer graphics.

---

# Appendice B

## Caso di studio

### B.1 Gestione di una rete di teleriscaldamento\*\*

Negli esempi illustrati nel Capitolo 1, si può osservare come spesso le variabili decisionali non sono quasi mai continue, ovvero i modelli proposti come soluzione non sono direttamente risolvibili con l'algoritmo del simplesso. I metodi per risolvere questo tipo di problemi saranno illustrati e studiati nei successivi insegnamenti di “Ottimizzazione Combinatoria e Metodi Numerici” e “Modelli e Metodi per il Supporto alle Decisioni”

Fortunatamente, per tutti i problemi che si possono incontrare in realtà, non è necessario ricorrere a metodi più sofisticati del metodo del simplesso. Il problema che andiamo ora a studiare – quello della gestione quotidiana di una rete di teleriscaldamento – è uno di quelli.

**B.1.1 Descrizione della rete di teleriscaldamento di Ferrara.** La presenza di una fonte geotermica a bassa entalpia nei pressi della città di Ferrara, ha portato alla realizzazione di una rete di teleriscaldamento che sfruttasse tale risorsa integrata da un inceneritore di rifiuti urbani e da caldaie a gas.

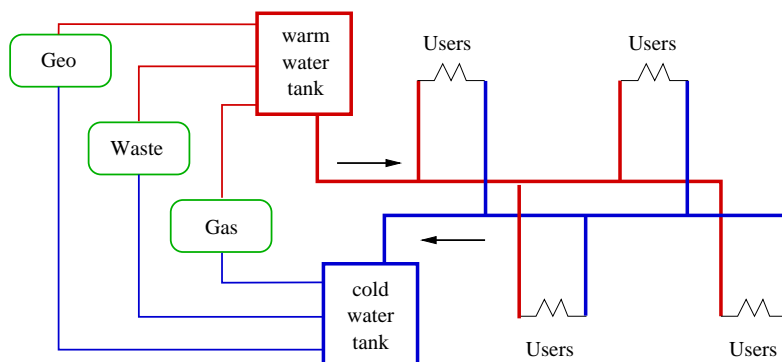


Figura B.1: Esempificazione della rete di teleriscaldamento.

Per descrivere al meglio il sistema, analizzeremo separatamente la parte delle risorse da quella della rete. Le risorse utilizzate sono:

- *geotermia (G)*: una fonte a 100-105° è pompata da due pozzi la cui portata è pari a 400 m<sup>3</sup>/h e successivamente reiniettata nel sottosuolo; il suo costo è composto di tre parti: una fissa sulla concessione e una sulla portata impegnata annualmente, ed una variabile sulla portata effettivamente utilizzata; la componente variabile incide nella misura del 1% sul costo totale. L'energia nominale fornibile è pari a 12 Gcal/ora; in realtà essa dipende dalla differenza tra la temperatura del flusso freddo proveniente dalle cisterne e quella del flusso caldo proveniente dalla fonte geotermica all'interno dello scambiatore di calore.
- *rifiuti urbani (U)*: esiste un moderno inceneritore di rifiuti che fornisce energia nominale di circa 11 Gcal/ora ottenuta dall'incenerimento di circa 600 tonnellate/ora di rifiuti; essa si riduce a causa di perdite e dispersioni a 8,5 Gcal/ora. È prevista l'installazione di una turbina per generare energia elettrica da un minimo di 1,3MW ad un massimo di 3,3MW. I costi, ai fini della produzione di calore, è considerato pari a zero visto che l'attività di raccolta e selezione va comunque fatta per rispettare gli obblighi di legge;
- *gas metano (S)*: la centrale a gas è costituita da 4 caldaie indipendenti, ognuna delle quali richiede un tempo di setup di circa 40 minuti; il costo è misurato in termini di costo unitario al metro cubo; l'energia complessiva fornibile è pari a 36 Gcal/ora data da due caldaie da 12 Gcal/ora e due da 6 Gcal/ora; una delle caldaie da 12 Gcal/ora è tenuta come riserva per intervenire in caso di situazioni di emergenza (guasti, manutenzioni, ecc.); il rendimento delle caldaie è del 80%.

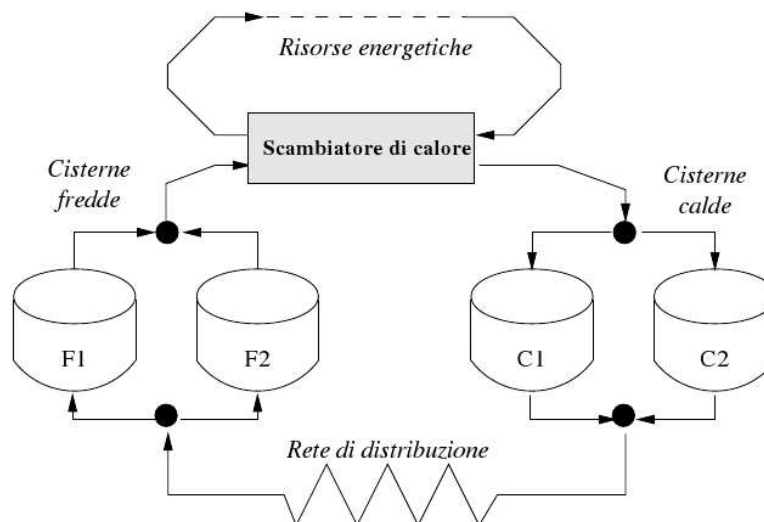


Figura B.2: Funzionamento della rete di teleriscaldamento.

La rete di distribuzione del teleriscaldamento (si veda Figura B.2) ha la forma di rete ad albero a doppio percorso, sia in andata che in ritorno. L'acqua a temperatura di



circa 90°C, viene pompata dalla *cisterna calda* nella rete attraverso una centralina di pompaggio composta da quattro unità le quali si attivano successivamente all'aumentare della richiesta di volume d'acqua. Se non vi è nessuna richiesta, la centralina non pompa e nella rete non circola acqua. Le acque reflue, intorno ai 60°C, vengono convogliate presso il sistema di *cisterne fredde* le quali permettono di suddividerle a seconda della temperatura di ritorno. L'acqua da scaldare viene convogliata dalle cisterne fredde presso lo scambiatore di calore e, successivamente, immessa nelle cisterne calde, le quali possono mantenerne inalterata la temperatura per oltre 5 ore. La loro capacità complessiva è di 1000 metri cubi dei quali solo 800 sono realmente utilizzabili per questioni tecniche dovute al pompaggio dalla e nella cisterna. Si osserva che data la dimensione di ogni cisterna e l'entità della domanda termica in metri cubi, nell'arco di 5 ore avviene un ricambio completo dell'acqua in esse contenute.

**Attuale politica di gestione.** La politica di utilizzo delle risorse è semplice: per soddisfare la domanda di calore, si attiva primariamente la fonte geotermica, successivamente l'inceneritore dei rifiuti ed infine, per coprire i picchi di utenza, le caldaie a gas. Generalmente, le acque di ritorno più fredde vengono riscaldate dal calore generato dalla fonte geotermica, le altre invece dal calore ottenuto dall'incenerimento dei rifiuti e dal gas, come illustrato in figura B.2. Questa semplice politica ha permesso di gestire in maniera abbastanza efficace il servizio di teleriscaldamento.

Si prevede l'introduzione di un elemento di novità ovvero l'introduzione di un cogeneratore di energia elettrica sfruttando il calore prodotto dall'inceneritore. L'energia elettrica prodotta verrà poi venduta sul mercato elettrico con una tariffa multioraria, ovvero con un prezzo che varia a seconda dell'ora della fornitura dell'energia. A tale scopo è necessario quindi studiare il problema che tenga in considerazione la produzione di calore per soddisfare la domanda della rete massimizzando il guadagno giornaliero dovuto al ricavo ottenuto dalla vendita della corrente meno il costo di produzione.

**B.1.2 Definizione del modello.** Consideriamo il problema di gestione della rete formulato come segue:

Considerato un orizzonte temporale  $T$ , per ogni intervallo di tempo  $t$  di  $T$  sia conosciuto il fabbisogno termico, il prezzo di vendita dell'energia elettrica ed il costo delle risorse, si vuole determinare la quantità di ciascuna risorsa energetica da destinare alla produzione di calore o di energia elettrica, tenendo conto dei vincoli tecnologici dell'impianto e i vincoli di gestione del servizio con l'obiettivo di massimizzare i guadagni del sistema.

Il sistema da modellare può venire riassunto brevemente come segue. La rete di distribuzione è costituita da due circuiti uno dell'acqua calda che fluisce dalla centrale di generazione verso gli utenti, e uno dell'acqua fredda che torna alla centrale provenendo dagli utenti. Nel circuito dell'acqua calda la temperatura di riferimento è di 90°C pari a quella del flusso geotermico in arrivo dal pozzo, mentre la temperatura nel circuito dell'acqua fredda varia a seconda dell'orario e delle condizioni meteorologiche, e si aggira intorno ai 60°C. L'acqua fredda viene portata alla temperatura di 90°C mediante le tre

fonti energetiche (G, U, e S), e viene immagazzinata nella cisterna coibentata prima di venire immessa nel circuito secondo l'effettiva domanda degli utenti. L'energia derivante dall'incenerimento dei rifiuti (U) può venire utilizzata per generare energia elettrica.

In questa fase quindi la temperatura di ritorno dalla rete è un dato rilevato dall'azienda; di conseguenza non consideriamo esplicitamente la rete. Questa scelta sintetizza la situazione attuale dell'azienda la quale non possiede gli strumenti di controllo per intervenire sul funzionamento della rete rispetto ad un uso efficiente del calore inviato in rete.

I dati del problema sono i seguenti:

- $t \in \{0, \dots, T\}$  : istanti in cui viene suddiviso l'orizzonte temporale di pianificazione: assumiamo che l'orizzonte sia di 24 ore e gli intervalli di tempo compresi tra due istanti successivi siano di un'ora;
- $r \in R = \{G, U, S\}$  : tipo di risorse energetiche;
- $w, W \in \mathbb{R}_+$  : capacità di produzione minima e massima di elettricità;
- $Q_t^r \in \mathbb{R}_+$  : produzione massima in Mcal della risorsa  $r \in R$  in  $[t-1, t]$ ;
- $D_t^C \in \mathbb{R}_+$  : domanda di calore in Mcal durante l'intervallo  $[t-1, t]$ ;
- $D_t^V \in \mathbb{R}_+$  : domanda di flusso caldo in  $m^3$  durante l'intervallo  $[t-1, t]$ ;
- $V \in \mathbb{R}_+$  : capacità in  $m^3$  delle scorte termiche nelle cisterne calde;
- $c_t^r \in \mathbb{R}_+$  : costo di produzione di una Mcal con  $r \in R$  in  $[t-1, t]$ ;
- $g_t \in \mathbb{R}_+$  : ricavo unitario per kWh di energia elettrica in  $[t-1, t]$ ;
- $\tau_t^F \in [50, 90]$  : temperatura di ritorno dell'acqua dalla rete.

Il costo  $c_t^U$  è di natura non lineare in quanto soggetto alle economie di scala perseguibili nello sfruttamento dell'impianto. D'altra parte la legge vigente impone alle aziende ex-municipalizzate l'incenerimento dei rifiuti, indipendentemente dalla produzione di energia. Quindi il costo di produzione dall'incenerimento dei rifiuti può essere considerato nullo. La natura degli altri costi è lineare quanto quella dei ricavi  $g_t$ .

La domanda di calore  $D_t^V$  può essere ottenuta attraverso la seguente relazione di bilancio termico:

$$(B.1) \quad D_t^C = (90 - \tau_t^F) D_t^V$$

nella quale la quantità di flusso  $D_t^V$  a 90°C da pompare nella rete è determinata dalla domanda di calore  $D_t^C$  e dalla differenza tra temperatura di mandata (90°C) e temperatura del flusso di ritorno  $\tau_t^F$ .

Le variabili decisionali del problema sono:

- $q_t^r \in \mathbb{R}_+$  : quantità di energia termica (Mcal) ottenuta dalla risorsa  $r \in R$  utilizzato durante l'intervallo  $[t-1, t]$ ;
- $x_t \in \mathbb{R}_+$  : quantità di flusso caldo ( $m^3$ ) prodotto durante l'intervallo  $[t-1, t]$ ;
- $y_t^U \in \mathbb{R}_+$  : quantità di energia elettrica prodotta durante l'intervallo di tempo  $[t-1, t]$  misurata in kWh;
- $z_t \in \mathbb{R}_+$  : quantità di scorta termica presente nella cisterna calda al tempo  $t$  espressa in  $m^3$ .

I flussi, o *portate*, sono espressi in  $m^3$  per unità di tempo. La figura B.3 illustra la relazione tra le variabili che determinano le portate tra due intervalli di tempo successivi.

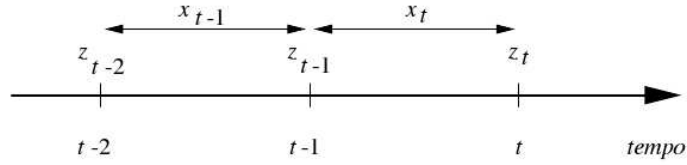


Figura B.3: Relazioni tra variabili in intervalli temporali successivi.

Osserviamo che la variabile  $y_t^U$  misura la quantità di energia elettrica prodotta in un'ora. Essa è ottenuta attraverso la turbina a vapore che trasforma il calore generato in energia elettrica. Tale trasformazione segue una legge non lineare nota soltanto nei punti indicati nella tabella B.1.

|                | kWh prodotti | MCal necessari |
|----------------|--------------|----------------|
| spenta         | 0            | 0              |
| min produzione | 1300         | 1500           |
| max produzione | 3300         | 8500           |

Tabella B.1: Mcal necessari alla produzione di elettricità

Nel nostro modello utilizziamo un'approssimazione lineare ottenuta interpolando i punti noti. Denotando tale funzione con  $f_c(y_t^U)$ , per interpolazione otteniamo

$$(B.2) \quad f_c(y_t^U) = \frac{7}{2}y_t^U - 3050.$$

La funzione  $f_c(y_t^U)$  restituisce la quantità di energia in Mcal che è necessaria per produrre  $y_t^U$  kWh di energia elettrica.

La definizione della funzione  $f_c$  richiede la presenza nel modello di un vincolo alla variabile  $y_t^U$  del seguente tipo:

$$1300 \equiv w \leq y_t^U \leq W \equiv 3300.$$

Vediamo ora di esprimere i vincoli di trasformazione. Il sistema di riscaldamento dell'acqua da inviare nella rete prevede la presenza di uno scambiatore di calore al quale viene inviato, da una parte il flusso caldo ottenuto dalle risorse, e dall'altra il flusso freddo da inviare nella rete attraverso il pompaggio dalla cisterna calda.

Posto  $q_t$  pari a  $q_t^R + q_t^U + q_t^S$ , in analogia a quanto visto per l'equazione (B.1), deve valere la seguente equazione di bilancio termico:

$$(B.3) \quad q_t = x_t(90 - \tau_t^F).$$

dove  $q_t$  è misurato in Mcal per unità di tempo.

I vincoli di capacità sulla produzione di calore sono quindi esprimibili nel seguente modo:

$$\begin{aligned} 0 &\leq q_t^r \leq Q_t^r, \quad r = \{G, S\}, \\ 0 &\leq q_t^U + f_c(y_t^U) \leq Q_t^U. \end{aligned}$$

dove  $Q_t^G = 400(90 - \tau_t^F)$  (400 è la portata oraria in  $m^3$  della fonte geotermica) e  $Q_t^S = 24$  Gcal. Si osserva che:

- la fonte geotermica ha portata costante pari a 400  $m^3$  orari;
- l'inceneritore dei rifiuti e le caldaie a gas hanno capacità di produzione termica costante.

La fonte geotermica ha una produzione di energia termica in funzione del cosiddetto *delta della temperatura* " $\Delta\tau_t^F$ " pari a  $90 - \tau_t^F$ : essa produrrà maggiore energia termica tanto più il  $\Delta\tau_t^F$  è grande. Questo è il motivo principale che ha portato l'azienda ad utilizzare la fonte geotermica per riscaldare le acque reflue più fredde.

Il costo dovuto all'utilizzo della geotermia e delle caldaie a gas può essere espresso come:

$$c_t^r q_t^r, \quad t \in T, \quad r \in \{G, S\}.$$

Il modello matematico quindi è il seguente:

$$(B.4) \quad \mathbf{P1} : \max \sum_{t \in T} (g_t y_t^U - c_t^G q_t^G - c_t^S q_t^S)$$

$$(B.5) \quad \text{t.c.} \quad x_t + z_{t-1} - z_t = D_t^V, \quad t \in T$$

$$(B.6) \quad (90 - \tau_t^F)x_t = q_t, \quad t \in T$$

$$(B.7) \quad q_t = q_t^G + q_t^U + q_t^S, \quad t \in T$$

$$(B.8) \quad 0 \leq q_t^G \leq 400(90 - \tau_t^F), \quad t \in T$$

$$(B.9) \quad 0 \leq q_t^S \leq Q_t^S, \quad t \in T$$

$$(B.10) \quad 0 \leq q_t^U + f_c(y_t^U) \leq Q_t^U, \quad t \in T$$

$$(B.11) \quad w \leq y_t^U \leq W, \quad t \in T$$

$$(B.12) \quad 0 \leq z_t \leq V, \quad t \in T.$$

$$(B.13) \quad z_t, q_t, q_t^r, x_t, y_t^U \in \mathbb{R}_+$$

Assumiamo  $z_0$  uguale alla quantità di acqua immagazzinata all'inizio del periodo di pianificazione. Per rispettare la ciclicità del problema possiamo imporre il vincolo che la quantità di acqua calda immagazzinata al termine della pianificazione sia uguale a quella che si aveva all'inizio, cioè  $z_0 = z_T$ . Ricordiamo che il vincolo (B.11) può risultare ridondante a seconda di come viene definita la funzione  $f_c(y_t^U)$ . Considerato ogni singolo intervallo di tempo, il problema può essere descritto come in figura B.4 dove  $F_t$ ,  $E_t$  corrispondono rispettivamente al flusso per teleriscaldamento ed all'energia elettrica prodotti nell'intervallo  $t$ .

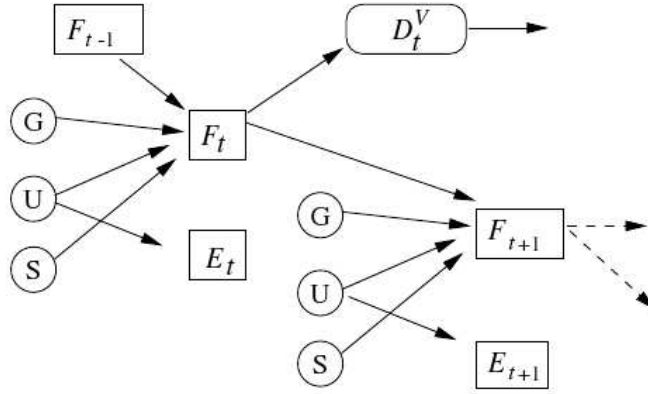


Figura B.4: Relazioni tra intervalli successivi.

La domanda di flusso  $D_t^V$  in ogni intervallo  $t$ , è quindi soddisfatta dal flusso riscaldato durante l'intervallo ( $x_t$ ) più le scorte termiche disponibili dall'intervallo  $t - 1$  ( $z_{t-1}$ ) meno quelle immagazzinate per l'intervallo successivo ( $z_t$ ) (equazione (B.5)).

Gli altri vincoli rappresentano la massima capacità di produzione e la capacità dei serbatoi per le scorte di acqua calda. Si osserva infine come sia possibile riscrivere l'intero modello **P1** in funzione delle sole variabili  $q$  e  $z$  con la seguente sostituzione ricavata da (B.6)

$$x_t = \frac{1}{90 - \tau_t^F} q_t, \quad t \in T.$$

**Estensione del modello.** Il modello può essere esteso considerando i costi imposti dai tempi di setup dovuti all'accensione ed allo spegnimento delle caldaie a gas che risulteranno più frequenti nel momento in cui sarà necessario sostituire il calore dell'inceneritore sottratto per la produzione di energia elettrica.

Il modello presentato è inoltre la base per descrivere modelli per il design di una rete di teleriscaldamento dove per design della rete si può intendere non solo la decisione di quale zona servire ma anche di quale tipo di scambiatore di calore installare presso l'utenza finale: scambiatori meno efficienti sfrutteranno di meno il calore portato dall'acqua determinando maggiore richiesta di flusso caldo pur restituendolo a temperature più elevate; viceversa, scambiatori più efficienti determinano una domanda minore di flusso caldo intesi come metri cubi pompati in rete. In sintesi, scambiatori più efficienti determinano

una riduzione della quantità di flusso da portare a temperatura e da pompare in rete e quindi un risparmio nei costi di gestione.

Si osserva, che dal punto di vista modellistico, la decisione di quale scambiatore installare si può modellare con “normali” variabili binarie. Di conseguenza, l’installazione di un certo scambiatore determina una diversa temperatura di ritorno  $\tau_t^F$  inversamente proporzionale all’efficienza dello scambiatore. In altre parole  $\tau_t^F$  non è più un parametro del problema ma diventa una variabile del problema stesso che dipende dalla scelta dello scambiatore installato presso l’utenza finale.

Come conseguenza, da un punto di vista modellistico, perdiamo la linearità del modello dato che dalla (B.1) risulta  $\tau_t^F D_t^V$ , ovvero il modello contiene un vincolo con il prodotto di due variabili del modello e risulta quindi non lineare. Fortunatamente, grazie ad opportune tecniche di linearizzazione, è possibile ricondurre il problema ad un problema di programmazione lineare.

**B.1.3 Soluzione e discussione dei risultati.** Risolvendo il modello proposto è possibile confrontare le politiche dell’azienda che gestisce il servizio di teleriscaldamento e di valutare l’impatto della vendita di energia elettrica. I dati utilizzati nelle analisi – che non riportiamo per semplici esigenze di spazio – sono quelli resi disponibili dall’azienda, e consistono nei costi di produzione, nella domanda di calore e delle temperature di ritorno rilevate per ogni intervallo orario. Dall’insieme dei dati forniti, sono state selezionate sette giornate tipo in modo da creare un campione, anche se limitato, di tutte le possibili giornate nell’arco di un anno.

**Confronto tra la politica dell’azienda e quella proposta dal modello.** La situazione considerata è quindi quella senza alcuna produzione di energia elettrica. In questo caso, utilizziamo il nostro modello fissando le variabili di produzione dell’energia elettrica a 0 per qualsiasi intervallo. Il costo presunto della politica aziendale – che prevede di soddisfare la domanda di calore con la risorsa energetica più economica a disposizione – è ottenuto calcolando le Mcalorie ottenute dalla geotermia e dalle caldaie a gas sulla base dei dati forniti dall’azienda. Una sintesi di questi risultati è riportata in Tabella B.2. Osserviamo che la colonna del costo totale del modello, riporta il valore della funzione obiettivo (B.4) cambiato di segno: infatti, non avendo produzione di energia elettrica, la funzione obiettivo avrà, per qualsiasi istanza del problema, valore negativo.

Si può osservare come, nonostante la relativa semplicità del problema dovuta alla assenza del generatore di energia elettrica, sia possibile raggiungere significativi risparmi nella gestione. Il risparmio è ovviamente maggiore quando i costi sono più elevati, anche se in certe giornate si raggiungono buoni livelli ugualmente.

La Figura B.5 invece evidenzia la differenza tra le due politiche di gestione rispetto la produzione di MCal per soddisfare la domanda proveniente dalla rete.

Si osserva, ad esempio, che la politica dell’azienda tende ad essere più conservativa nel senso di avere una produzione di energia quasi costante per gran parte della giornata e

| giorno  | costo totale |          |         | costo metano |         |       |
|---------|--------------|----------|---------|--------------|---------|-------|
|         | azienda      | modello  | % gap   | azienda      | modello | % gap |
| Gen. 31 | 14171,36     | 13917,00 | -1,79   | 113,53       | 111,31  | -1,96 |
| Feb. 28 | 390,10       | 390,10   | 0       | 0            | 0       | 0     |
| Mar. 25 | 361,33       | 291,44   | -19,34  | 0            | 0       | 0     |
| Apr. 23 | 376,10       | 254,65   | -32,29  | 0            | 0       | 0     |
| Apr. 30 | 269,56       | 49,48    | -81,64  | 0            | 0       | 0     |
| Set. 29 | 47,23        | 0        | -100,00 | 0            | 0       | 0     |
| Ott. 29 | 4901,61      | 4773,34  | -2,62   | 37,11        | 35,61   | -4,03 |

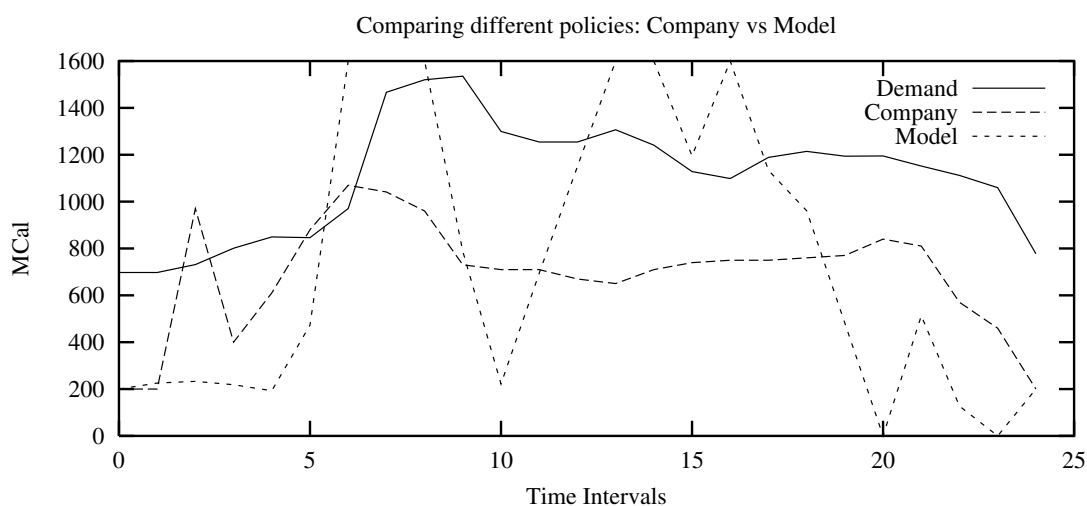
Tabella B.2: Confronto tra politiche: modello *vs.* azienda (in Euro).

Figura B.5: Confronto tra politiche di gestione (31 gennaio).

contando nella riserva delle cisterne. Viceversa, la politica suggerita dal modello è “a picchi” ovvero si produce l’energia quando è richiesta dalla rete.

**Cogenerazione e vendita dell’energia elettrica.** Come detto, l’introduzione della cogenerazione prevede la vendita dell’energia elettrica prodotta secondo una tariffa multioraria e multiperiodo. La tabella B.3 ne riporta un esempio articolata per fasce orarie e per periodi dell’anno.

I risultati della sperimentazione sulle sette giornate scelte è riportato nella tabella B.4. Ad una prima analisi, si osserva che nelle giornate con maggiore domanda, ovvero in quelle di gennaio e ottobre, il risultato della funzione obiettivo è negativo. Tuttavia, il modello decide comunque di produrre energia elettrica ritenendolo conveniente. Ad esempio, considerando le giornate del 31 gennaio e 29 ottobre, il valore della funzione obiettivo riportato in Tabella B.4 è migliore di quelli in Tabella B.2.

Inoltre, gli stessi giorni risultano conveniente da un punto di vista finanziario se si tiene in considerazione il guadagno dovuto alla vendita del calore alla rete: tale valore infatti non

| intervallo orario | Ottobre-Marzo | Aprile-Settembre |
|-------------------|---------------|------------------|
| 0-6               | 0,05          | 0,05             |
| 6-7               | 0,07          | 0,07             |
| 7-8               | 0,10          | 0,09             |
| 8-9               | 0,11          | 0,09             |
| 9-10              | 0,12          | 0,10             |
| 10-11             | 0,11          | 0,10             |
| 11-12             | 0,10          | 0,10             |
| 12-16             | 0,10          | 0,09             |
| 16-17             | 0,11          | 0,09             |
| 17-18             | 0,12          | 0,09             |
| 18-19             | 0,11          | 0,09             |
| 19-21             | 0,10          | 0,09             |
| 21-22             | 0,07          | 0,07             |
| 22-24             | 0,05          | 0,05             |

Tabella B.3: Tariffe di vendita dell'energia elettrica in Euro per  $kW/h$ .

entra nel modello considerato che, data la domanda da soddisfare obbligatoriamente, il ricavo relativo risulta essere costante, cioè indipendente dalla soluzione ottima del modello.

| giorno         | Guadagno | F.O.   | MCal geo | MCal rifiuti | MCal metano | kW/h  |
|----------------|----------|--------|----------|--------------|-------------|-------|
| <b>Gen. 31</b> | 31042    | -13280 | 235020   | 168000       | 246737      | 3120  |
| <b>Feb. 28</b> | 33281    | 2197   | 304200   | 163393       | 65          | 32516 |
| <b>Mar. 25</b> | 34252    | 7237   | 295920   | 110283       | 0           | 47691 |
| <b>Apr. 23</b> | 28446    | 3738   | 297160   | 7564         | 0           | 57593 |
| <b>Apr. 30</b> | 22290    | 5639   | 244262   | 0            | 0           | 79200 |
| <b>Set. 29</b> | 13498    | 5845   | 111409   | 0            | 0           | 79200 |
| <b>Ott. 29</b> | 33517    | -4600  | 284600   | 168000       | 107476      | 31200 |

Tabella B.4: Introduzione della cogenerazione: risultati.

In conclusione, le analisi effettuate in questa sezione sono del tutto indicative viste il basso numero di giorni presi in considerazione. D'altra parte le scelte dei giorni effettuata al fine di modellare tutte le possibili configurazioni di domanda termica nel corso dell'anno garantisce che le conclusioni derivate dalle analisi si discostino dalla realtà solo per i valori numerici che andrebbero calcolati con maggiore precisione attuando una sperimentazione su più ampia scala impiegando strumenti quali l'allargamento dell'orizzonte di pianificazione nel modello oppure avviando esperimenti di simulazione. La scelta tra quale dei due strumenti impiegare si basa sostanzialmente sulla necessità o meno di ripetere più volte l'analisi rispetto scenari diversi: se il modello con orizzonte esteso richiede tempi lunghi di calcolo, può essere scelta la simulazione in quanto estremamente più efficiente al prezzo di una presunta minore accuratezza nei risultati forniti.