Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano A, B, C lettere proposizionali e P una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

A	B	C	P
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**

- ☐ P è una tautologia.
- ☐ $P \models C \vee \neg A$
- ☐ $A \vee B \models P$
- ☐ P è soddisfacibile.

(b) Siano P e Q formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ☐ $P \equiv Q$ se e solo se $\models P \to Q$
- ☐ Se P è valido, allora è anche soddisfacibile.
- ☐ $P \vee (P \to Q)$ è una tautologia.
- ☐ $P \to Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

(c) Sia A un insieme non vuoto e sia $L = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine con f simbolo di funzione unaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle A, f\rangle$, l'affermazione: "f non è iniettiva"? 2 punti

- ☐ $\forall x \forall y (x = y \to f(x) = f(y))$
- ☐ $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y)$
- ☐ $\exists x \exists y (\neg(x = y)) \wedge f(x) = f(y))$
- ☐ $\forall x \exists y (f(x) = f(y) \wedge \neg(x = y))$

(d) Sia A un insieme non vuoto di cardinalità finita e B un insieme di cardinalità infinita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ $A \setminus B$ ha cardinalità finita.
- ☐ $B \setminus A$ ha cardinalità finita.
- ☐ $A \times B$ ha cardinalità finita.
- ☐ $A \triangle B$ ha cardinalità finita.

(e) Sia $L = \{R\}$ un linguaggio del prim'ordine con R simbolo di relazione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\forall x \exists y\, R(x, y)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$? 2 punti

- ☐ "Dato un numero razionale, ce n'è sempre uno più grande."
- ☐ "C'è un numero razionale più grande di x."
- ☐ "C'è un numero razionale più grande di tutti."
- ☐ "Ci sono numeri razionali arbitrariamente grandi."

(f) Siano $f\colon \mathbb{Q}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, dove $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 1, e $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 1}$ definite da $f(x) = \sqrt{x - 1}$ e $g(y) = y^2 + 1$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ $f \circ g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.
- ☐ f è una funzione suriettiva.
- ☐ $f \circ g(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$ con $a \geq 0$.
- ☐ g è una funzione iniettiva.

(g) Siano R, S relazioni binarie su un insieme A. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ Se R è riflessiva e $R \subseteq S$, anche S è riflessiva.
- ☐ Se R è riflessiva e $R \supseteq S$, anche S è riflessiva.
- ☐ Se per ogni $a, b \in A$ vale che $R(a, b)$ se e solo se $S(b, a)$, allora $S = R^{-1}$.
- ☐ Se per ogni $a \in A$ esiste un solo $b \in A$ tale che $R(a, b)$, allora R è una funzione.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{R, f, c\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario R, un simbolo di funzione binario f e un simbolo di costante c.

Consideriamo la struttura $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, <, +, 1 \rangle$. Stabilire se:

- $\mathcal{Q} \models \neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))[x/1, z/1.5]$
- $\mathcal{Q} \models R(z, x) \vee R(f(x, c), z)[x/1, z/1.5]$
- $\mathcal{Q} \models (\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))) \to (R(z, x) \vee R(f(x, c), z))[x/1, z/1.5]$
- $\mathcal{Q} \models \forall x \forall z[(\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))) \to (R(z, x) \vee R(f(x, c), z))][x/1, z/0.5]$

Consideriamo ora la struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, 1 \rangle$.

Verificare se

$$\mathcal{N} \models \forall x \forall z[(\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))) \to (R(z, x) \vee R(f(x, c), z))][x/1, z/2]$$

L'enunciato $\forall x \forall z[(\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c))) \to (R(z, x) \vee R(f(x, c), z))]$ è una tautologia?

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3 — 9 punti

Sia A un insieme non vuoto e $R \subseteq A \times A$ una relazione binaria. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle A, R \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{R\}$ con un simbolo di relazione binaria le seguenti affermazioni:

1. R è irriflessiva
2. R è un ordine lineare
3. R^{-1} è simmetrica
4. $\mathrm{dom}(R) = A$.