Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $h(z) = \frac{2z+8}{2} - z$ per ogni $z \in \mathbb{Q}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ h è suriettiva.
- ☐ h è iniettiva.
- ☐ $h(z) = 2$ per qualche $z \in \mathbb{Q}$.
- ☐ $h(z) = 4$ per ogni $z \in \mathbb{Q}$.

(b) Dati due insiemi A e B, indichiamo con A^B l'insieme delle funzioni da B in A. Sia C un insieme non vuoto di cardinalità finita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ☐ C^C è un insieme infinito.
- ☐ C^C è certamente in biezione con $\mathcal{P}(A)$.
- ☐ $\mathbb{N}^C$ è un insieme infinito numerabile.
- ☐ $C^{\mathbb{N}}$ è necessariamente più che numerabile.

(c) Siano C, D, A lettere proposizionali e R una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

C	D	A	R
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**

- ☐ R $\models$ D $\lor \neg$A $\lor \neg$C

- ☐ R è insoddisfacibile.
- ☐ ¬R non è valido.
- ☐ D → A ⊨ ¬R

(d) Sia $L = \{Q\}$ un linguaggio del prim'ordine con Q simbolo di relazione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\neg\exists z \forall w\, Q(z, w)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$? — 2 punti

- ☐ "Non c'è un numero reale più piccolo di tutti gli altri."
- ☐ "Ci sono numeri reali arbitrariamente grandi."
- ☐ "I numeri reali non hanno un massimo."
- ☐ "Non c'è un numero reale più grande di w."

(e) Sia C un insieme non vuoto e sia $L = \{T\}$ un linguaggio del prim'ordine con T simbolo di relazione binaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle C, T \rangle$, l'affermazione: "T è simmetrica"? — 2 punti

- ☐ $\forall x \forall y\, (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
- ☐ $\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow y = x)$
- ☐ $\forall x \forall y\, (R(x, y) = R(y, x))$
- ☐ $\forall x \forall y\, (R(x, y) \wedge R(y, x))$

(f) Siano D, A sottoinsiemi di C e sia $h \colon C \rightarrow C$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. — 2 punti

- ☐ Se $h[D] \subseteq h[A]$ allora si deve avere che $D \supseteq A$.
- ☐ $h^{-1}[D \cap A] = h^{-1}[D] \cap h^{-1}[A]$.
- ☐ $D \subseteq h^{-1}[h[D]]$.
- ☐ Se $D \neq A$ allora certamente accade che $h[D] \neq h[A]$.

(g) Siano S e T formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? — 2 punti

- ☐ Se S è insoddisfacibile, allora ¬S è una tautologia.
- ☐ $\neg(\mathrm{T} \vee \mathrm{S}) \not\equiv \neg\mathrm{T} \vee \neg\mathrm{S}$
- ☐ Se S non è una tautologia allora S è certamente insoddisfacibile.
- ☐ $\mathrm{T} \not\equiv \mathrm{S}$ se e solo se $i(\mathrm{T}) \neq i(\mathrm{S})$ per qualche interpretazione i.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{T, h, e\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario T, un simbolo di funzione binario h e un simbolo di costante e. Sia φ la formula

$$(\neg\exists w\,(h(w,w) = z) \to T(h(x,e), z)).$$

Consideriamo la L-struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 1\rangle$.

1. Dire se φ è un enunciato oppure no e, nel secondo caso, cerchiare le occorrenze libere di variabili.
2. È vero che $\mathcal{N} \models \exists w\,(h(w,w) = z)[z/k, w/l]$ se e solo se k è un numero naturale pari?
3. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[z/1, w/0, x/0]$?
4. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[z/2, w/1, x/0]$?
5. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[z/5, w/1, x/5]$?
6. È vero che $\mathcal{N} \models \forall z\,\varphi[z/0, w/0, x/0]$?
7. È vero che $\mathcal{N} \models \forall z\,\varphi[z/0, w/0, x/5]$?
8. È vero che $\mathcal{N} \models \exists x\forall z\,\varphi$?
9. È vero che $\mathcal{N} \models \forall x\forall z\,\varphi$?

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3 9 punti

Sia C un insieme non vuoto, siano D, A sottoinsiemi di C e sia $h\colon C \to C$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle C, D, A, h\rangle$ mediante il linguaggio $L = \{D, A, h\}$ con due simboli di predicato unari ed un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. h è biettiva
2. $h \circ h$ è suriettiva
3. $h[A] \subseteq D$
4. $h[D] \cup h[A] = C$.