

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: _____

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) Siano P e Q due formule proposizionali tali che $P \not\models Q$. Allora possiamo concludere con certezza che 2 punti
- ☒ P è soddisfacibile
 - ☐ $Q \models P$
 - ☒ Q non è valida
 - ☒ $P \wedge \neg Q$ è soddisfacibile
- (b) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, dove $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$, la funzione che misura la distanza tra due punti sulla retta reale, ovvero $f(x, y) = |y - x|$. Allora 2 punti
- ☐ f è iniettiva
 - ☒ f è suriettiva
 - ☐ f è biettiva
 - ☐ esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq y$ ma $f(x, y) = 0$
- (c) Sia φ la formula $\exists x \exists y \forall z (z = x \vee z = y)$. Allora 2 punti
- ☐ φ non è un enunciato
 - ☐ φ è un enunciato valido
 - ☐ se $\mathcal{A} \models \varphi$ allora \mathcal{A} contiene esattamente due elementi
 - ☐ se $\mathcal{A} \models \varphi$ allora \mathcal{A} contiene almeno due elementi
- (d) Sia A un insieme non vuoto e $S \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ l'insieme delle sequenze di lunghezza almeno 2 il cui primo e ultimo elemento coincidono. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti
- ☐ $|A| = |S|$, qualunque sia A .
 - ☐ Se A è finito allora lo è anche S .
 - ☒ Se $A = \mathbb{Q}$ allora S è numerabile.
 - ☒ S è infinito, qualunque sia A .

(e) Quali delle seguenti sono formalizzazioni corrette dell'affermazione

2 punti

“ x è un numero dispari”

nel linguaggio $L = \{+, 2\}$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{N}, +, 2 \rangle$?

- ☐ $\forall z (z + z = x \rightarrow z \notin \mathbb{N})$
- ☐ $\neg(2 \mid x)$ con \mid relazione di divisibilità
- ☐ $\exists z \neg(z + z = x)$
- ☐ $\forall x \forall z \neg(x = z + z)$

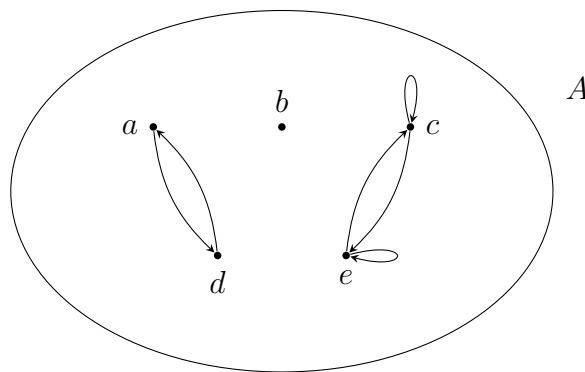
(f) Siano A e B due insiemi. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

2 punti

- ☐ Se $A \subseteq B$, allora A e B non possono essere disgiunti.
- ☒ Se $A \cap B \neq \emptyset$ allora $A \setminus B \neq A$.
- ☒ Se $A \cup B = A \setminus B$ allora $B = \emptyset$.
- ☐ Se $A \cup B = A$ allora $A \subseteq B$.

(g) Sia R la relazione su $A = \{a, b, c, d, e\}$ rappresentata dal seguente diagramma, dove $x R y$ se e solo se c'è una freccia che va da x a y .

2 punti



Allora R è

- ☐ riflessiva
- ☒ simmetrica
- ☐ antisimmetrica
- ☐ transitiva

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2

9 punti

Sia $L = \{f, g\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f e g sono entrambi simboli di funzione binari. Sia $\varphi(x)$ la formula

$$f(x, x) = g(x, x).$$

Consideriamo le L -strutture $\mathcal{S}_0 = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ e $\mathcal{S}_1 = \langle \mathbb{Q}, +, - \rangle$.

1. Determinare tutti gli $r \in \mathbb{Q}$ per cui si ha

$$\mathcal{S}_0 \models \varphi(x)[x/r]$$

e tutti gli $r \in \mathbb{Q}$ per cui vale

$$\mathcal{S}_1 \models \varphi(x)[x/r].$$

2. Stabilire se

$$\mathcal{S}_0 \models \exists x \exists y (\neg(x = y) \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y))$$

e se

$$\mathcal{S}_1 \models \exists x \exists y (\neg(x = y) \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y)).$$

Esercizio 3

9 punti

Formalizzare le seguenti affermazioni nel linguaggio $L = \{<, |, +\}$, dove $|$ è la relazione di divisibilità, relativamente alla struttura $\langle \mathbb{N}, <, |, + \rangle$:

1. x è dispari,
2. x è uguale ad 1,
3. x è primo,
4. Ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre primi, non necessariamente distinti.

