

**Istruzioni esame**

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

**Cognome, nome e matricola:** \_\_\_\_\_

**Esercizio 1**

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) Siano  $h: \mathbb{Q}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\mathbb{Q}_{\geq 1}$  è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 1, e  $k: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 1}$  definite da  $h(z) = \sqrt{z-1}$  e  $k(w) = w^2 + 1$ . Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti
- ☐  $h \circ k(c) = c$  per ogni  $c \in \mathbb{Q}$  con  $c \geq 0$ .
- ☐  $h \circ k: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- ☐  $k$  è una funzione iniettiva.
- ☐  $h$  è una funzione suriettiva.
- (b) Sia  $C$  un insieme non vuoto di cardinalità finita e  $D$  un insieme di cardinalità infinita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti
- ☐  $C \times D$  ha cardinalità finita.
- ☐  $C \triangle D$  ha cardinalità finita.
- ☐  $C \setminus D$  ha cardinalità finita.
- ☐  $D \setminus C$  ha cardinalità finita.
- (c) Siano  $C, D, A$  lettere proposizionali e  $R$  una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

C	D	A	R
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

☐  $R \models C \vee \neg D \vee \neg A$

- ☐  $R$  è soddisfacibile.  
☐  $R$  è valido.  
☐  $C \rightarrow D \models R$
- (d) Sia  $L = \{T\}$  un linguaggio del prim'ordine con  $T$  simbolo di relazione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula  $\exists z \forall w T(z, w)$  relativamente alla struttura  $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$ ? 2 punti
- ☐ “Tutti i numeri reali sono più grandi di qualche altro numero.”  
☐ “L'usuale ordine sui numeri reali ha un massimo.”  
☐ “ $C$  è un numero reale più grande di tutti.”  
☐ “ $C$  è un numero reale più grande di  $w$ .”
- (e) Sia  $C$  un insieme non vuoto e sia  $L = \{h\}$  un linguaggio del prim'ordine con  $h$  simbolo di funzione unaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura  $\langle C, h \rangle$ , l'affermazione: “ $h$  non è una funzione costante”? 2 punti
- ☐  $\exists x \exists y \neg (h(x) = h(y))$   
☐  $\neg \exists c (h(x) = c)$   
☐  $\forall x \forall y \neg (h(x) = h(y))$   
☐  $\forall x \exists y \neg (h(x) = h(y))$
- (f) Siano  $T, Q$  relazioni binarie su un insieme  $C$ . Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti
- ☐ Se  $T$  è riflessiva e  $T \supseteq Q$ , anche  $Q$  è riflessiva.  
☐ Se per ogni  $c \in C$  esiste un solo  $d \in C$  tale che  $T(c, d)$ , allora  $T$  è una funzione.  
☐ Se  $T$  è riflessiva e  $T \subseteq Q$ , anche  $Q$  è riflessiva.  
☐ Se per ogni  $c, d \in C$  vale che  $T(c, d)$  se e solo se  $Q(d, c)$ , allora  $Q = T^{-1}$ .
- (g) Siano  $R$  e  $S$  formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti
- ☐ Se  $R$  è soddisfacibile, allora  $\neg R$  non è una tautologia.  
☐  $\neg(R \wedge S) \equiv \neg R \vee \neg S$   
☐ Se  $R$  è una contraddizione allora  $\neg R$  è insoddisfacibile.  
☐  $R \equiv S$  se e solo se  $i(R) = i(S)$  per ogni interpretazione  $i$ .

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

**Esercizio 2**

9 punti

Sia  $L = \{T, h, e\}$  un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario  $T$ , un simbolo di funzione binario  $h$  e un simbolo di costante  $e$ .

Consideriamo la struttura  $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, <, +, 1 \rangle$ . Stabilire se:

- $\mathcal{Q} \models \neg(x = z) \wedge \neg(x = h(z, e))[z/3, x/3.5]$
- $\mathcal{Q} \models T(x, z) \vee T(h(z, e), x)[z/3, x/3.5]$
- $\mathcal{Q} \models (\neg(x = z) \wedge \neg(x = h(z, e))) \rightarrow (T(x, z) \vee T(h(z, e), x))[z/3, x/3.5]$
- $\mathcal{Q} \models \forall z \forall x [(\neg(x = z) \wedge \neg(x = h(z, e))) \rightarrow (T(x, z) \vee T(h(z, e), x))][z/3, x/2.5]$

Consideriamo ora la struttura  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, 1 \rangle$ .

Verificare se

$$\mathcal{N} \models \forall z \forall x [(\neg(x = z) \wedge \neg(x = h(z, e))) \rightarrow (T(x, z) \vee T(h(z, e), x))][z/3, x/4]$$

L'enunciato  $\forall z \forall x [(\neg(x = z) \wedge \neg(x = h(z, e))) \rightarrow (T(x, z) \vee T(h(z, e), x))]$  è una tautologia?

Giustificare le proprie risposte.



**Esercizio 3**

9 punti

Sia  $C$  un insieme non vuoto e  $T \subseteq C \times C$  una relazione binaria. Formalizzare relativamente alla struttura  $\langle C, T \rangle$  mediante il linguaggio  $L = \{T\}$  con un simbolo di relazione binaria le seguenti affermazioni:

1.  $T$  è antisimmetrica
2.  $T$  è una relazione di equivalenza
3.  $T^{-1}$  è transitiva
4.  $\text{dom}(T) \neq C$ .