Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia B un insieme non vuoto e sia $L = \{S\}$ un linguaggio del prim'ordine con S simbolo di relazione binaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle B, S\rangle$, l'affermazione: "S è irriflessiva"? 2 punti

☐ $\forall x \forall y\, (\neg(R(x,y) \to x = y))$
☐ $\forall x \neg(R(x,x) = x)$
☐ $\exists x \neg R(x,x)$
■ $\forall x \neg R(x,x)$

(b) Sia $L = \{h\}$ un linguaggio del prim'ordine con h simbolo di funzione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\forall y \forall z\, (h(y,z) = h(z,y))$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{Q}, \cdot\rangle$? 2 punti

☐ "Il prodotto tra numeri razionali è associativo."
☐ "Ciascun numero razionale y è divisibile per z."
■ "Non esistono numeri razionali y, z tali che $y \cdot z \neq z \cdot y$."
■ "L'operazione di moltiplicazione tra numeri razionali è commutativa."

(c) Dati due insiemi D e A, indichiamo con D^A l'insieme delle funzioni da A in D. Sia B un insieme non vuoto di cardinalità finita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

☐ B^B è un insieme infinito.
■ $\mathbb{N}^B$ è un insieme infinito numerabile.
☐ B^B è certamente in biezione con $\mathcal{P}(A)$.
☐ $B^{\mathbb{N}}$ è necessariamente più che numerabile.

(d) Siano C, D sottoinsiemi di B e sia $g\colon B \to B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

■ $g^{-1}[C \cup D] = g^{-1}[C] \cup g^{-1}[D]$.
■ $C \subseteq g^{-1}[g[C]]$.
☐ Se $g[C] \subseteq g[D]$ allora si deve avere che $C \subseteq D$.
☐ Se $C \supseteq D$ allora certamente accade che $g[C] \subseteq g[D]$.

(e) Siano R e S formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ■ $\neg\neg R \vee (\neg S \to \neg R)$ è una tautologia.
- □ Se S è soddisfacibile allora certamente non è una tautologia.
- ■ $\neg(S \leftrightarrow R) \not\equiv \neg(S \to R) \wedge \neg(R \to S)$
- ■ Se $S \models R$, allora $\neg(S \wedge \neg R)$ è una tautologia.

(f) Siano B, C, D lettere proposizionali e Q una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

B	C	D	Q
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**

- □ $\neg C \wedge D \models \neg Q$
- ■ $\neg Q$ non è insoddisfacibile.
- □ $\neg Q$ è insoddisfacibile.
- □ $Q \models \neg D$

(g) Sia $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $g(y) = \frac{3y+9}{3} - y$ per ogni $y \in \mathbb{Z}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. 2 punti

- ■ $g(y) = 3$ per ogni $y \in \mathbb{Z}$.
- □ g è iniettiva.
- □ $g(y) = 5$ per qualche $y \in \mathbb{Z}$.
- □ g è suriettiva.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{S, g, d\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario S, un simbolo di funzione binario g e un simbolo di costante d. Sia φ la formula

$$(\neg\exists z\,(g(z,z) = y) \to S(g(w,d),y)).$$

Consideriamo la L-struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 1\rangle$.

1. Dire se φ è un enunciato oppure no e, nel secondo caso, cerchiare le occorrenze libere di variabili.
2. È vero che $\mathcal{N} \models \exists z\,(g(z,z) = y)[y/m, z/k]$ se e solo se m è un numero naturale pari?
3. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[y/1, z/0, w/0]$?
4. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[y/2, z/1, w/0]$?
5. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[y/5, z/1, w/5]$?
6. È vero che $\mathcal{N} \models \forall y\,\varphi[y/0, z/0, w/0]$?
7. È vero che $\mathcal{N} \models \forall y\,\varphi[y/0, z/0, w/5]$?
8. È vero che $\mathcal{N} \models \exists w \forall y\,\varphi$?
9. È vero che $\mathcal{N} \models \forall w \forall y\,\varphi$?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. Non è un enunciato. Le occorrenze libere di variabili sono tutte le occorrenze di y, w. Concludiamo che in tutti i punti dell'esercizio è irrilevante controllare l'assegnamento della variabile z.

2. Si è vero poiché la formula in questione asserisce che il numero assegnato a y è ottenuto sommando con se stesso un qualche numero naturale z.

3. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "se y è dispari allora si ha che $w + 1 \leq y$". Se a w viene assegnato 0 e a y viene assegnato 1, allora si ha che l'interpretazione di φ è vera in $\mathcal{N}$: infatti, l'implicazione è vera dato che lo è la sua conclusione (che interpretata nella struttura con l'assegnazione data diventa $0 + 1 \leq 1$).

4. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "se y è dispari allora si ha che $w + 1 \leq y$". Se ad y assegniamo 2 la premessa dell'implicazione è falsa e quindi l'implicazione è vera.

5. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "se y è dispari allora si ha che $w + 1 \leq y$". Se a y viene assegnato 5 e anche a w viene assegnato 5, la premessa dell'implicazione risulta vera (in quanto 5 è effettivamente dispari), ma la sua conclusione è falsa dato che $5 + 1 = 6 > 5$. Quindi l'implicazione è falsa.

6. L'interpretazione di φ in $\mathcal{N}$ è: "per ogni numero naturale y, se y è dispari allora $w + 1 \leq y$". Se a w viene assegnato 0, l'affermazione risulta vera perché qualunque numero naturale dispari è certamente maggiore o uguale di $0 + 1$, ovvero di 1.

7. Se invece assegniamo a w il numero 5, allora l'interpretazione della formula diventa "ogni numero dispari è maggiore o uguale a $5+1$". Questo è falso perché prendendo $y = 3$ si ha che y è un numero dispari (premessa dell'implicazione vera) ma $3 < 6$ (conclusione dell'implicazione falsa).

8. Per quanto visto ai punti precedenti, l'assegnamento che dà a z il valore 0 mostra la verità in $\mathcal{N}$ dell'enunciato $\exists w \forall y\, \varphi$.

9. Per quanto visto ai punti precedenti, se prendiamo $y = 3$ e $w = 5$ si ha che l'implicazione φ risulta falsa: questo mostra la falsità in $\mathcal{N}$ dell'enunciato $\forall w \forall y\, \varphi$.

Esercizio 3 9 punti

Sia B un insieme non vuoto, siano C, D sottoinsiemi di B e sia $g\colon B \to B$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle B, C, D, g\rangle$ mediante il linguaggio $L = \{C, D, g\}$ con due simboli di predicato unari ed un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. g è suriettiva
2. $g \circ g$ è la funzione identica (ovvero manda ciascun elemento di B in se stesso)
3. $g^{-1}[C] \subseteq D$
4. $g[C] \subseteq D$.

Soluzione: 1. g è suriettiva: $\forall y \exists x (g(x) = y)$

2. $g \circ g$ è la funzione identica: $\forall x (g(g(x)) = x)$

3. $g^{-1}[C] \subseteq D$: $\forall x (C(g(x)) \to D(x))$

4. $g[C] \subseteq D$: $\forall x (C(x) \to D(g(x)))$