Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano $h\colon \mathbb{Q}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, dove $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 1, e $k\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 1}$ definite da $h(z) = \sqrt{z-1}$ e $k(w) = w^2 + 1$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. — 2 punti

- ■ $h \circ k(c) = c$ per ogni $c \in \mathbb{Q}$ con $c \geq 0$.
- ■ $h \circ k\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.
- □ k è una funzione iniettiva.
- □ h è una funzione suriettiva.

(b) Sia C un insieme non vuoto di cardinalità finita e D un insieme di cardinalità infinita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. — 2 punti

- □ $C \times D$ ha cardinalità finita.
- □ $C \triangle D$ ha cardinalità finita.
- ■ $C \setminus D$ ha cardinalità finita.
- □ $D \setminus C$ ha cardinalità finita.

(c) Siano C, D, A lettere proposizionali e R una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: — 2 punti

C	D	A	R
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**

- ■ R $\models$ C $\vee \neg$D $\vee \neg$A

■ R è soddisfacibile.
□ R è valido.
□ $C \to D \models R$

(d) Sia $L = \{T\}$ un linguaggio del prim'ordine con T simbolo di relazione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\exists z \forall w\, T(z, w)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$? — 2 punti

□ "Tutti i numeri reali sono più grandi di qualche altro numero."
■ "L'usuale ordine sui numeri reali ha un massimo."
■ "C'è un numero reale più grande di tutti."
□ "C'è un numero reale più grande di w."

(e) Sia C un insieme non vuoto e sia $L = \{h\}$ un linguaggio del prim'ordine con h simbolo di funzione unaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle C, h \rangle$, l'affermazione: "h non è una funzione costante"? — 2 punti

■ $\exists x \exists y \neg(h(x) = h(y))$
□ $\neg \exists c (h(x) = c)$
□ $\forall x \forall y \neg(h(x) = h(y))$
□ $\forall x \exists y \neg(h(x) = h(y))$

(f) Siano T, Q relazioni binarie su un insieme C. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. — 2 punti

□ Se T è riflessiva e $T \supseteq Q$, anche Q è riflessiva.
■ Se per ogni $c \in C$ esiste un solo $d \in C$ tale che $T(c, d)$, allora T è una funzione.
■ Se T è riflessiva e $T \subseteq Q$, anche Q è riflessiva.
■ Se per ogni $c, d \in C$ vale che $T(c, d)$ se e solo se $Q(d, c)$, allora $Q = T^{-1}$.

(g) Siano R e S formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? — 2 punti

■ Se R è soddisfacibile, allora ¬R non è una tautologia.
■ $\neg(R \land S) \equiv \neg R \lor \neg S$
□ Se R è una contraddizione allora ¬R è insoddisfacibile.
■ $R \equiv S$ se e solo se $i(R) = i(S)$ per ogni interpretazione i.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{T, h, e\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario T, un simbolo di funzione binario h e un simbolo di costante e.

Consideriamo la struttura $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, <, +, 1 \rangle$. Stabilire se:

- $\mathcal{Q} \models \neg(x = z) \land \neg(x = h(z, e))[z/3, x/3.5]$
- $\mathcal{Q} \models T(x, z) \lor T(h(z, e), x)[z/3, x/3.5]$
- $\mathcal{Q} \models (\neg(x = z) \land \neg(x = h(z, e))) \to (T(x, z) \lor T(h(z, e), x))[z/3, x/3.5]$
- $\mathcal{Q} \models \forall z \forall x[(\neg(x = z) \land \neg(x = h(z, e))) \to (T(x, z) \lor T(h(z, e), x))][z/3, x/2.5]$

Consideriamo ora la struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, 1 \rangle$.
Verificare se

$$\mathcal{N} \models \forall z \forall x[(\neg(x = z) \land \neg(x = h(z, e))) \to (T(x, z) \lor T(h(z, e), x))][z/3, x/4]$$

L'enunciato $\forall z \forall x[(\neg(x = z) \land \neg(x = h(z, e))) \to (T(x, z) \lor T(h(z, e), x))]$ è una tautologia?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione: Si verifica che:

- $\mathcal{Q} \models \neg(x = z) \land \neg(x = h(z, e))[z/3, x/3.5]$ se e solo se $3.5 \neq 3$ *e* $3.5 \neq 3 + 1 = 4$ che chiaramente è il caso.

- $\mathcal{Q} \models T(x, z) \lor T(h(z, e), x)[z/3, x/3.5]$ se e solo se $3.5 < 3$ *o* $3 + 1 = 4 < 3.5$ che chiaramente non è il caso.

- $\mathcal{Q} \not\models (\neg(x = z) \land \neg(x = h(z, e))) \to (T(x, z) \lor T(h(z, e), x))[z/3, x/3.5]$ dato che, come verificato nei due punti precedenti, la premessa dell'implicazione è verificata con l'assegnamento dato, mentre la tesi non lo è con lo stesso assegnamento.

- $\mathcal{Q} \not\models \forall z \forall x[(\neg(x = z) \land \neg(x = h(z, e))) \to (T(x, z) \lor T(h(z, e), x))][z/3, x/2.5]$ come testimoniato dall'assegnamento al punto precedente alle variabili z, x.

Sia ψ l'enunciato

$$\forall z \forall x[(\neg(x = z) \land \neg(x = h(z, e))) \to (T(x, z) \lor T(h(z, e), x))].$$

Sia in $\mathcal{Q}$ che in $\mathcal{N}$, l'interpretazione di ψ è

> Per ogni z e x, se x è diverso sia da z che da $z + 1$ allora o $x < z$ oppure $z + 1 < x$. (Equivalentemente: per ogni z non c'è alcun x strettamente compreso tra z e $z + 1$.)

Quindi si ha che:

- $\mathcal{Q} \not\models \psi$. Infatti, l'assegnamento $z = 3$ e $x = 3.5$ mostra che x è strettamente compreso tra z e $z + 1$ (come già visto per la soluzione del terzo e quarto item dell'esercizio).

- Al contrario, $\mathcal{N} \models \psi$ perché non c'è nessun numero naturale strettamente compreso tra due numeri consecutivi arbitrari (ovvero tra due numeri del tipo z e $z+1$).

L'enunciato ψ non è una tautologia in quanto risulta falso nella struttura $\mathcal{Q}$.

Esercizio 3 9 punti

Sia C un insieme non vuoto e $T \subseteq C \times C$ una relazione binaria. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle C, T \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{T\}$ con un simbolo di relazione binaria le seguenti affermazioni:

1. T è antisimmetrica
2. T è una relazione di equivalenza
3. T^{-1} è transitiva
4. $\mathrm{dom}(T) \neq C$.

Soluzione: 1. T è antisimmetrica: $\forall x \forall y (T(x, y) \wedge T(y, x) \rightarrow x = y)$

2. T è una relazione di equivalenza:

$$\forall x T(x, x) \wedge \forall x \forall y (T(x, y) \rightarrow T(y, x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (T(x, y) \wedge T(y, z) \rightarrow T(x, z))$$

3. T^{-1} è transitiva: $\forall x \forall y \forall z (T(y, x) \wedge T(z, y) \rightarrow T(z, x))$

4. $\mathrm{dom}(T) \neq C$: $\exists x \forall y \neg T(x, y)$