**Istruzioni esame**

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

**Cognome, nome e matricola:** ____________________

## Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siano A, B, C lettere proposizionali e P una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

| A | B | C | P |
|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **V** | **F** | **F** |
| **V** | **F** | **V** | **F** |
| **V** | **F** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** | **V** |
| **F** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** | **V** |

■ $\neg$P non è una tautologia.
□ P $\models$ A $\vee$ $\neg$B
□ B $\vee$ C $\models$ $\neg$P
□ P è insoddisfacibile.

(b) Siano Q e R formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

□ Q $\not\equiv$ R se e solo se $\models \neg$(Q $\to$ R)
■ Se R è insoddisfacibile, allora $\neg$R è soddisfacibile.
■ $\neg$R $\vee$ (Q $\to$ R) è una tautologia.
■ R $\to$ Q $\equiv$ $\neg$R $\vee$ $\neg\neg$Q

(c) Sia $A$ un insieme non vuoto e sia $L = \{R\}$ un linguaggio del prim'ordine con $R$ simbolo di relazione binaria. Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente, relativamente alla struttura $\langle A, R\rangle$, l'affermazione: "$R$ è riflessiva"? — 2 punti

- ☐ $\forall x\,(R(x,x) \to x = x)$
- ☐ $\forall x\,(R \to x = x)$
- ■ $\forall x\,(R(x,x))$
- ☐ $\forall x\,(R(x) = x)$

(d) Dati due insiemi $C$ e $D$, indichiamo con $C^D$ l'insieme delle funzioni da $D$ in $C$. Sia $A$ un insieme non vuoto di cardinalità finita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. — 2 punti

- ■ $\mathbb{N}^A$ è un insieme infinito numerabile.
- ☐ $A^{\mathbb{N}}$ è necessariamente più che numerabile.
- ☐ $A^A$ è un insieme infinito.
- ☐ $A^A$ è certamente in biezione con $\mathcal{P}(A)$.

(e) Sia $L = \{S\}$ un linguaggio del prim'ordine con $S$ simbolo di relazione binario. Quali delle seguenti affermazioni sono formalizzate dalla formula $\forall x \exists y\, S(y,x)$ relativamente alla struttura $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$? — 2 punti

- ■ "Dato un numero razionale, ce n'è sempre uno più piccolo."
- ☐ "C'è un numero razionale più piccolo di $x$."
- ☐ "C'è un numero razionale più piccolo di tutti."
- ■ "Ci sono numeri razionali arbitrariamente piccoli."

(f) Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(x) = \frac{2x+10}{2} - x$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. — 2 punti

- ☐ $f$ è iniettiva.
- ■ $f(x) = 5$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.
- ☐ $f$ è suriettiva.
- ☐ $f(x) = 3$ per qualche $x \in \mathbb{N}$.

(g) Siano $B$, $C$ sottoinsiemi di $A$ e sia $f\colon A \to A$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette. — 2 punti

- ■ $B \subseteq f^{-1}[f[B]]$.
- ☐ Se $f[B] \subseteq f[C]$ allora si deve avere che $B \supseteq C$.
- ☐ Se $B \neq C$ allora certamente accade che $f[B] \neq f[C]$.
- ■ $f^{-1}[B \cap C] = f^{-1}[B] \cap f^{-1}[C]$.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

**Esercizio 2** 9 punti

Sia $L = \{R, f, c\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario $R$, un simbolo di funzione binario $f$ e un simbolo di costante $c$. Sia $\varphi$ la formula

$$(\neg \exists y\, (f(y, y) = x) \to R(f(z, c), x)).$$

Consideriamo la $L$-struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 1 \rangle$.

1. Dire se $\varphi$ è un enunciato oppure no e, nel secondo caso, cerchiare le occorrenze libere di variabili.
2. È vero che $\mathcal{N} \models \exists y\, (f(y, y) = x)[x/n, y/m]$ se e solo se $n$ è un numero naturale pari?
3. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[x/1, y/0, z/0]$?
4. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[x/2, y/1, z/0]$?
5. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[x/5, y/1, z/5]$?
6. È vero che $\mathcal{N} \models \forall x\, \varphi[x/0, y/0, z/0]$?
7. È vero che $\mathcal{N} \models \forall x\, \varphi[x/0, y/0, z/5]$?
8. È vero che $\mathcal{N} \models \exists z \forall x\, \varphi$?
9. È vero che $\mathcal{N} \models \forall z \forall x\, \varphi$?

Giustificare le proprie risposte.

**Soluzione:**

1. Non è un enunciato. Le occorrenze libere di variabili sono tutte le occorrenze di $x, z$. Concludiamo che in tutti i punti dell'esercizio è irrilevante controllare l'assegnamento della variabile $y$.

2. Si è vero poiché la formula in questione asserisce che il numero assegnato a $x$ è ottenuto sommando con se stesso un qualche numero naturale $y$.

3. L'interpretazione di $\varphi$ in $\mathcal{N}$ è: "se $x$ è dispari allora si ha che $z + 1 \leq x$". Se a $z$ viene assegnato 0 e a $x$ viene assegnato 1, allora si ha che l'interpretazione di $\varphi$ è vera in $\mathcal{N}$: infatti, l'implicazione è vera dato che lo è la sua conclusione (che interpretata nella struttura con l'assegnazione data diventa $0 + 1 \leq 1$).

4. L'interpretazione di $\varphi$ in $\mathcal{N}$ è: "se $x$ è dispari allora si ha che $z + 1 \leq x$". Se ad $x$ assegniamo 2 la premessa dell'implicazione è falsa e quindi l'implicazione è vera.

5. L'interpretazione di $\varphi$ in $\mathcal{N}$ è: "se $x$ è dispari allora si ha che $z + 1 \leq x$". Se a $x$ viene assegnato 5 e anche a $z$ viene assegnato 5, la premessa dell'implicazione risulta vera (in quanto 5 è effettivamente dispari), ma la sua conclusione è falsa dato che $5 + 1 = 6 > 5$. Quindi l'implicazione è falsa.

6. L'interpretazione di $\varphi$ in $\mathcal{N}$ è: "per ogni numero naturale $x$, se $x$ è dispari allora $z + 1 \leq x$". Se a $z$ viene assegnato 0, l'affermazione risulta vera perché qualunque numero naturale dispari è certamente maggiore o uguale di $0 + 1$, ovvero di 1.

7. Se invece assegniamo a $z$ il numero 5, allora l'interpretazione della formula diventa "ogni numero dispari è maggiore o uguale a $5+1$". Questo è falso perché prendendo $x = 3$ si ha che $x$ è un numero dispari (premessa dell'implicazione vera) ma $3 < 6$ (conclusione dell'implicazione falsa).

8. Per quanto visto ai punti precedenti, l'assegnamento che dà a $z$ il valore 0 mostra la verità in $\mathcal{N}$ dell'enunciato $\exists z \forall x\, \varphi$.

9. Per quanto visto ai punti precedenti, se prendiamo $x = 3$ e $z = 5$ si ha che l'implicazione $\varphi$ risulta falsa: questo mostra la falsità in $\mathcal{N}$ dell'enunciato $\forall z \forall x\, \varphi$.

**Esercizio 3** 9 punti

Sia $A$ un insieme non vuoto, siano $B, C$ sottoinsiemi di $A$ e sia $f\colon A \to A$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle A, B, C, f\rangle$ mediante il linguaggio $L = \{B, C, f\}$ con due simboli di predicato unari ed un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. $f$ è iniettiva
2. $f \circ f$ è una funzione costante
3. $f[B] \subseteq C$
4. $\mathrm{rng}(f) = C$.

**Soluzione:** 1. $f$ è iniettiva: $\forall x \forall y\,(\neg(x = y) \to \neg(f(x) = f(y))))$

2. $f \circ f$ è una funzione costante: $\exists y \forall x(f(f(x)) = y)$

3. $f[B] \subseteq C$: $\forall x(B(x) \to C(f(x)))$

4. $\mathrm{rng}(f) = C$: $\forall y(C(y) \to \exists x\,(f(x) = y)) \wedge \forall x\, C(f(x))$