## Esercizi

**Esercizio 1.** *Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: per ogni* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$*, si ha che* $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

***Traccia:***

*(1) Osservare che qualunque vettore* $\mathbf{v}$ *si può esprimere come* $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\,\mathbf{u}$*, dove* $\mathbf{u}$ *è un* versore *con la stessa direzione e verso di* $\mathbf{v}$.
*(2) Presi due versori qualunque* $\mathbf{u}_1$ *e* $\mathbf{u}_2$*, osservare che*

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 - 2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2,$$
$$\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\|^2 = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + 2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2,$$

*e dimostrare che* $|\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2| \leq 1$.

**Esercizio 2.** *Produrre le rappresentazioni cartesiane per le seguenti rette e tracciarne il grafico (se possibile). Dalla rappresentazione cartesiana tornare poi a quella parametrica.*

$$\text{(a)} \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - \frac{1}{2}t \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + \frac{1}{4}t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \\ y = -\frac{3}{4} - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

$$\text{(e)} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{3}t \\ x_3 = \frac{1}{2} + t \\ x_4 = 2 - t \end{cases} \qquad \text{(f)} \begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{4}t \\ x_2 = 1 + \frac{1}{3}t \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = 2 - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

**Esercizio 3.** *Determinare le intersezioni tra i seguenti insiemi di punti.*

*(a) In* $\mathbb{R}^2$*, le rette rappresentate da*

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 2t \\ x_2 = -1 - \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad e \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}s \\ x_2 = 1 + \frac{1}{2}s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

*(b) In* $\mathbb{R}^3$*, le rette rappresentate da*

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{2}t \\ x_2 = 1 + \frac{3}{2}t \\ x_3 = \quad - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad e \quad \begin{cases} x_1 = 1 + s \\ x_2 = 4 + \frac{5}{3}s \\ x_3 = -4 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

(c) *In* $\mathbb{R}^3$*, la retta*

$$r = \left\{(x_1, x_2, x_3)\colon (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0) + t(-1, \tfrac{1}{2}, 1),\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

*e il piano* $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3)\colon 2x_1 + x_2 - x_3 = 4\}$.

(d) *In* $\mathbb{R}^3$*, i due piani*

$$\Pi_1 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\colon x_1 - x_2 + 2x_3 = 1\right\}$$
$$\Pi_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\colon x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\right\}.$$

(e) *In* $\mathbb{R}^3$*, i due piani*

$$\Pi_1 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\colon 2x_1 - x_2 + x_3 = 2\right\}$$
$$\Pi_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\colon -x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 = 3\right\}.$$

(f) *In* $\mathbb{R}^3$*, la retta*

$$r = \{(x_1, x_2, x_3)\colon (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1) + t(2, 1, -3),\ t \in \mathbb{R}\}$$

*e il piano* $\Pi = \left\{(x_1, x_2, x_3)\colon \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 = 0\right\}$.

**Esercizio 4.** *Dati un punto* $\mathbf{x}_0$ *e un piano* $\Pi$*, se si traccia una retta* $r$ *passante per* $\mathbf{x}_0$ *e ortogonale a un (iper)piano* $\Pi$*, questa intersecherà* $\Pi$ *in un punto* $\mathbf{y}$*. La distanza di* $\mathbf{x}_0$ *da* $\Pi$ *è la lunghezza del segmento di* $r$ *che congiunge* $\mathbf{x}_0$ *a* $\mathbf{y}$*. Il punto* $\mathbf{y}$ *è il punto di* $\Pi$ *che ha la minima distanza da* $\mathbf{x}_0$*, ed è anche detto* proiezione *di* $\mathbf{x}_0$ *su* $\Pi$*.*

*Calcolare la distanza tra:*

(a) *Il punto* $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$ *e la retta in* $\mathbb{R}^2$

$$r = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\colon 2x_1 + x_2 = 3\right\}.$$

(b) *Il punto* $\mathbf{x}_0 = (-1, 1)$ *e la retta in* $\mathbb{R}^2$

$$r = \left\{x \in \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2) = (2, 1) + t(-\tfrac{1}{2}, 1)\right\}$$

(c) *Il punto* $\mathbf{x}_0 = (2, 1, -3)$ *e il piano in* $\mathbb{R}^3$

$$\Pi = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\colon 2x_1 - x_2 + x_3 = 2\right\}.$$

(d) *Il punto* $\mathbf{x}_0 = (1, -1, 0, 2)$ *e l'iperpiano in* $\mathbb{R}^4$

$$\Pi = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\colon -x_1 + 2x_2 - x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 = 5\right\}.$$

**Esercizio 5.** *Generalizzare le tecniche usate nell'esercizio 4, e calcolare che in* $\mathbb{R}^n$ *la distanza tra un punto* $\mathbf{x}_0$ *e un iperpiano* $\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v}\mathbf{x} = \alpha\}$ *è data da*

$$d(\mathbf{x}_0, \Pi) = \frac{|\mathbf{v}\mathbf{x}_0 - \alpha|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

**Esercizio 6.** *Calcolare i seguenti prodotti di matrici.*

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 7.** *Una caratteristica interessante del prodotto di matrici è la possibilità di eseguirlo* a blocchi. *Si prendano ad esempio le matrici*

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

*Si può immaginare di decomporre queste matrici in blocchi secondo lo schema tracciato, definendo*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

*In queste definizioni si è posto*

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Si può verificare (e dimostrare con passaggi algebrici non complicati ma noiosi) che*

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} = \\ = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right). \tag{1}$$

*La formula per la moltiplicazione di matrici può essere quindi applicata a blocchi, purchè i blocchi nei quali vengono suddivise le matrici da moltiplicare siano di dimensioni compatibili per la moltiplicazione.*

*Calcolare i blocchi dell'esempio:* $\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}$, $\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22}$, ...

*Calcolare i seguenti prodotti di matrici, quando possibile, lavorando a blocchi.*

*(a)* $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

*(b)* $$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3} \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

*(c)* $$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

*(d)* $$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & -1 \\ \hline 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

*La decomposizione in blocchi può velocizzare sensibilemente i calcoli in applicazioni dove le matrici da moltiplicare presentano grandi blocchi con struttura particolare: blocchi nulli, blocchi-identità, blocchi diagonali. Ad esempio, nel prodotto* (1) *sono particolarmente semplici i prodotti di blocchi che coinvolgono blocchi dalla struttura semplice come* $\mathbf{A}_{21}$ *o* $\mathbf{B}_{12}$ *(blocco-identità).*

**Esercizio 8.** *Risolvere i seguenti sistemi lineari.*

$$(a) \begin{cases} 2x_1 & & +x_3 & & = 1 \\ & x_2 & +3x_3 & & = 2 \\ x_1 & & +2x_3 + 2x_4 & & = 2 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} & 2x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & & +x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 & & & +\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 & & +x_3 + x_4 & & +3x_5 = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & & = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 + x_4 & & = 1 \\ x_1 + 2x_2 & +\frac{3}{2}x_3 + 2x_4 & & = 2 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} x_1 + x_2 & \frac{1}{2}x_3 & & = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 + x_4 & & = 1 \\ 2x_1 + \frac{5}{2}x_2 & +\frac{3}{2}x_3 + x_4 & & = 2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x_1 & +\frac{1}{2}x_3 = 1 \\ x_2 & +x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 & -x_3 = 0 \end{cases} \qquad (f) \begin{cases} x_1 & \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ x_2 & +x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 & -x_3 = -1 \end{cases}$$

**Esercizio 9.** *Per ognuno dei sistemi del tipo* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *risolti nell'esercizio precedente, ricavare la matrice di trasformazione* $\mathbf{P}$ *corrispondente all'operazione di riduzione e verificare che* $\mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$ *corrisponde al sistema ridotto.*

**Esercizio 10.** *Invertire, se possibile, ognuna delle seguenti matrici.*

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 11.** *Identificare l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi al variare del parametro* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 & +x_3 = 1 \\ x_1 & +\lambda x_3 = 1 \\ x_2 & +x_3 = 3 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} (\lambda - 1)x_1 & +x_2 + \lambda x_3 & = 0 \\ \lambda(1-\lambda)x_1 & +(1-\lambda)x_2 - 2\lambda^2 x_3 & = 2 \\ (\lambda - 1)x_1 & +2x_2 - 2x_3 & = \lambda + 3 \end{cases}$$

**Esercizio 12.** *Determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ le seguenti matrici sono invertibili.*

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ (2\lambda - 1) & 0 & 3 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \lambda & 0 \\ (\lambda^2 + 1) & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Soluzioni

**1.** Sfruttando la prima parte della traccia e dati due versori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, si può riscrivere $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \, \mathbf{u}_1$ e $\mathbf{w} = \|\mathbf{w}\| \, \mathbf{u}_2$ ottenendo quindi che

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = |\|\mathbf{v}\| \, \mathbf{u}_1 \cdot \|\mathbf{w}\| \, \mathbf{u}_2| = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \, |\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2|$$

da cui risulterebbe verificata la tesi $\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \leq 1$ se e solo se $|\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2| \leq 1$.

Questo fatto lo si può dimostrare invece sfruttando la seconda parte della traccia.

Si osservi che, comunque si scelgano i versori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, si deve avere $0 \leq \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2$; allora deve valere

$$0 \leq \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 - 2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 2 - 2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$$

(il modulo di un versore è uguale a 1) e quindi

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \leq 1.$$

Con analogo ragionamento, da $0 \leq \|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\|^2$ si ottiene $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \geq -1$. In definitiva, si ha

$$-1 \leq \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \text{ e } \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \leq 1 \iff |\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2| \leq 1,$$

e questo prova quanto richiesto.

**2. Nota:** si tenga presente che ogni retta ammette *infinite* rappresentazioni parametriche e infinite rappresentazioni cartesiane. Le rappresentazioni qui ottenute si ottengono solo a patto di effettuare esattamente le stesse manipolazioni algebriche usate nelle soluzioni proposte. Si possono quindi ottenere altre rappresentazioni, formalmente diverse ma completamente equivalenti a quelle qui proposte.

**(a)** passaggio da parametrica a cartesiana.

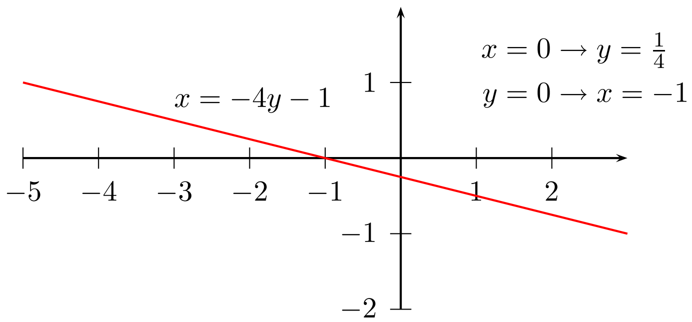
Da $y = -1 - \frac{1}{2}t$ si ottiene $t = -2y - 2$. Sostituendo $t$ nella prima equazione si ha l'equazione cartesiana della retta $x = -4y - 1$.

Passaggio da cartesiana a parametrica.

Ponendo $x = t$ si ottiene $y = -\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}$ e quindi

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t \end{cases} \quad \text{o, equivalentemente, } r = \{(x, y) : (x, y) = (0, -\tfrac{1}{4}) + (1, -\tfrac{1}{4})t\}.$$

Il grafico della retta è il seguente.




**(b)** Forma cartesiana. $-\frac{1}{3}x + y = 1$.
Forma parametrica.

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + \frac{1}{3}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**(c)** passaggio da parametrica a cartesiana. Ricavando ad esempio dalla prima equazione $t = 2 - x$, le altre due equazioni parametriche corrispondono a

$$\begin{cases} y = 1 + \frac{1}{4}(2 - x) \\ z = 2 - x \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{4}x + y = \frac{3}{2} \\ x + z = 2. \end{cases}$$

Quest'ultima è una delle possibili rappresentazioni parametriche della retta in esame.

Passaggio da cartesiana a parametrica. Ponendo $x = t$, $t \in \mathbb{R}$ nella rappresentazione cartesiana trovata, si ottiene

$$\begin{cases} x = t \\ \frac{1}{4}x + y = \frac{3}{2} \\ x + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**(d)** passaggio da parametrica a cartesiana. Ricavando dalla seconda equazione $t = -\frac{3}{4} - y$ e sostituendo si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(-\frac{3}{4} - y) \\ z = 1 + 2(-\frac{3}{4} - y) \end{cases} \implies \begin{cases} x + \frac{3}{2}y = -\frac{5}{8} \\ 2y + z = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Passaggio da cartesiana a parametrica. Ponendo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ si ottiene

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}t \\ y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**(e)** Passaggio da parametrica a cartesiana. Ricavando $t = 2 - x_4$ dalla quarta equazione e sostituendo nelle altre si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{3}(2 - x_4) \\ x_3 = \frac{1}{2} + (2 - x_4) \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{7}{3} \\ x_3 + x_4 = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Passaggio da cartesiana a parametrica.

Ponendo $x_4 = t$, $t \in \mathbb{R}$, si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}t \\ x_3 = \frac{5}{2} - t \\ x_4 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**(f)** Forma cartesiana.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{9}{4} \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}x_3 + x_4 = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Forma parametrica.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}t \\ x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t \\ x_3 = t \\ x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**3.** (a) La seconda retta ammette l'equazione cartesiana

$$-\tfrac{1}{3}x_1 + x_2 = 1.$$

Sostituendo in questa equazione le equazioni parametriche della prima retta si ha

$$-\tfrac{1}{3}(3 + 2t) + (-1 - \tfrac{1}{2}t) = 1.$$

L'equazione ammette la soluzione unica $t = -\frac{18}{7}$, corrispondente al punto $\mathbf{x}_0$ di coordinate

$$\mathbf{x}_0 = \left(3 - 2\tfrac{18}{7}, -1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{18}{7}\right) = \left(-\tfrac{15}{7}, \tfrac{2}{7}\right).$$

(b) La prima retta ammette le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_2 = 2 \\ x_2 + \frac{3}{4}x_3 = 1. \end{cases}$$

Sostituendovi le equazioni parametriche della seconda retta si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} (1+s) - \frac{1}{4}(-4+s) = 2 \\ (4+\frac{5}{3}s) + \frac{3}{4}(-4+s) = 1, \end{cases}$$

corrispondenti a

$$\begin{cases} \frac{3}{4}s = 0 \\ \frac{29}{12}s = 0 \end{cases} \implies s = 0.$$

Il punto di intersezione è quindi $\mathbf{x}_0 = (1, 4, -4)$ (sostituendo $s = 0$ nelle equazioni parametriche della seconda retta).

(c) Sostituendo le equazioni parametriche della retta $r$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 2 + \frac{1}{2}t \qquad t \in \mathbb{R} \\ x_3 = t \end{cases}$$

nell'equazione cartesiana del piano $\Pi$ si ottiene la condizione

$$2(1-t) + (2 + \tfrac{1}{2}t) - t = 4$$

che è soddisfatta per $t = 0$. Quindi $r \cap \Pi = \{(1, 2, 0)\}$.

(d) Il piano $\Pi_1$ ammette la rappresentazione parametrica (in due parametri $t, s$)

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \qquad\qquad t, s \in \mathbb{R}. \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s \end{cases}$$

Bisogna determinare per quali valori di $t, s$ queste coordinate soddisfano l'equazione cartesiana di $\Pi_2$. Sostituendo le coordinate parametriche dei punti di $\Pi_1$ nell'equazione cartesiana di $\Pi_2$ si ottiene la condizione

$$t + 2s - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}s) = 2 \iff t + s = \tfrac{5}{3} \iff s = \tfrac{5}{3} - t.$$

L'intersezione $\Pi_1 \cap \Pi_2$ contiene quindi tutti i punti di $\Pi_1$ generati dalle coppie $t, s$ per le quali $s = \frac{5}{3} - t$. Cioè

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s = \frac{5}{3} - t \qquad t \in \mathbb{R} \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(\frac{5}{3} - t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \frac{5}{3} - t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ x_3 = \frac{4}{3} - t \end{cases}$$

Si noti che $\Pi_1 \cap \Pi_2$ è una retta in $\mathbb{R}^3$.

(e) Il piano $\Pi_1$ ammette la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo nell'equazione cartesiana di $\Pi_2$ si ottiene

$$-\left(1 + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}s\right) + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}s = 3 \iff 0 = 4.$$

Questa condizione non può essere soddisfatta per alcun valore di $t, s$ e quindi $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$.

(f) $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{(-11, -4, 19)\}$.

**4.** (a) La retta $T$ perpendicolare a $r$ e passante per $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$ ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2t \\ x_2 = 1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(Si ricordi che la retta $r$ è un iperpiano in $\mathbb{R}^2$, quindi è perpendicolare al vettore $\mathbf{v}$ che ha per componenti i coefficienti dell'equazione cartesiana di $r$ $\mathbf{v}\mathbf{x} = \alpha \iff (2, 1)(x_1, x_2) = 3$ ). Il punto di intersezione $\mathbf{y}$ tra $T$ e $r$ si ottiene sostituendo le equazioni parametriche di $T$ nell'equazione cartesiana di $r$:

$$2(2 + 2t) + (1 + t) = 3 \iff 5t = -2 \iff t = -\tfrac{2}{5}.$$

Il punto $\mathbf{y}$ ha quindi coordinate

$$\mathbf{y} = \left(2 - 2 \cdot \tfrac{2}{5}, 1 - \tfrac{2}{5}\right) = \left(\tfrac{6}{5}, \tfrac{3}{5}\right).$$

La distanza cercata è

$$d(\mathbf{x}_0, r) = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\| = \sqrt{\left(2 - \tfrac{6}{5}\right)^2 + \left(1 - \tfrac{3}{5}\right)^2} = \tfrac{2}{\sqrt{5}}.$$

(b) $d(\mathbf{x}_0, r) = \frac{6}{\sqrt{5}}$.
(c) $d(\mathbf{x}_0, \Pi) = \frac{2}{\sqrt{6}}$.
(d) $d(\mathbf{x}_0, \Pi) = \frac{7}{2\sqrt{6}}$.

**5.** Dati $\Pi$ e $\mathbf{x}_0$, la retta in $\mathbb{R}^n$ perpendicolare a $\Pi$ e passante per $\mathbf{x}_0$ è la

$$T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v},\ t \in \mathbb{R}\}.$$

La retta $T$ interseca $\Pi$ per $t$ che soddisfa

$$\mathbf{v}\mathbf{x} = \alpha \iff \mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) = \alpha \iff \mathbf{v}\mathbf{x}_0 + t\,\|\mathbf{v}\|^2 = \alpha$$

cioè per

$$t = \frac{\alpha - \mathbf{v}\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Le componenti del punto di intersezione $\mathbf{y}$ tra $\Pi$ e $T$ si ricavano sostituendo il valore trovato per $t$ nelle equazioni della retta $T$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \frac{\alpha - \mathbf{v}\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}.$$

Ora, calcolando $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\|$ si ha

$$d(\mathbf{x}_0, \Pi) = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\| = \left\| \frac{\mathbf{v}\mathbf{x}_0 - \alpha}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} \right\| = \frac{|\mathbf{v}\mathbf{x}_0 - \alpha|}{\|\mathbf{v}\|^2}\|\mathbf{v}\| = \frac{|\mathbf{v}\mathbf{x}_0 - \alpha|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

**6.** Nel caso (c) il prodotto non si può calcolare: le matrici date sono di dimensioni incompatibili. Negli altri casi si ottiene quanto segue.

$$(a) \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ \frac{9}{2} & \frac{23}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 6 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**7.** Per il prodotto a blocchi dell'esempio si ottiene quanto segue.

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Nel caso (d) i blocchi individuati non hanno dimensioni compatibili, quindi i prodotti non si possono calcolare. Negli altri casi si ottiene quanto segue.

$$(a) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 1 \\ \frac{9}{2} & \frac{23}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$(b) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 6 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$(c) \quad \left(\begin{array}{cccc} 9 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{32}{3} \\ \hline 1 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{8}{3} \\ 4 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

**8.** (a) Il sistema dato si risolve riducendo la matrice completa

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2 \leftarrow \frac{1}{2}E_2]{E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{2}E_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{3}{2}} & 2 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 \leftarrow \frac{2}{3}E_3]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 - \frac{1}{3}E_3 \\ E_2 \leftarrow E_2 - 2E_3}}$$

$$\xrightarrow[E_3 \leftarrow \frac{2}{3}E_3]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 - \frac{1}{3}E_3 \\ E_2 \leftarrow E_2 - 2E_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \end{array}\right) = (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}').$$

Il sistema iniziale equivale quindi a

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - \frac{2}{3}x_4 = 0 \\ \quad x_2 \qquad\quad - 4x_4 = -1 \\ \qquad\quad x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 1 \end{cases} \text{con infinite soluzioni:} \begin{cases} x_1 = 0 + \frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = -1 + 4x_4 \\ x_3 = 1 - \frac{4}{3}x_3 \end{cases} \quad x_4 \in \mathbb{R} \text{ (libera).}$$

(b) Riducendo la matrice completa si ottiene quanto segue.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_1 \leftrightarrow E_2]{E_3 \leftarrow E_3 - 2E_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2 \leftarrow \frac{1}{2}E_2]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 - \frac{1}{2}E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3 + \frac{1}{2}E_2}}$$

$$\xrightarrow[E_2 \leftarrow \frac{1}{2}E_2]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 - \frac{1}{2}E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3 + \frac{1}{2}E_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{5}{4}} & 0 & \frac{5}{2} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 \leftarrow \frac{4}{5}E_3]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 + \frac{1}{5}E_3 \\ E_2 \leftarrow E_2 - \frac{1}{5}E_3}}$$

$$\xrightarrow[E_3 \leftarrow \frac{4}{5}E_3]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 + \frac{1}{5}E_3 \\ E_2 \leftarrow E_2 - \frac{1}{5}E_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{12}{5} \end{array}\right) = (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}').$$

Questo corrisponde alle infinite soluzioni

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{5} & -\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = \frac{3}{5} & \\ x_3 = -\frac{12}{5} & \qquad - 2x_5 \end{cases} \qquad x_4, x_5 \in \mathbb{R},\ \text{libere.}$$

(c) Riduzione dellla matrice completa:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 \leftarrow E_3 - E_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2 \leftarrow 2E_2]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 - 2E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3 - 2E_2}}$$

$$\xrightarrow[E_2 \leftarrow 2E_2]{\substack{E_1 \leftarrow E_1 - 2E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3 - 2E_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$$

Le soluzioni sono quindi infinite:

$$\begin{cases} x_1 = -2 & +\frac{1}{2}x_2 + 2x_4 \\ x_2 = 2 & -x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R},\ \text{libere.}$$