

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: _____

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) La funzione $h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definita da $h(q) = 4q^2 - 1$ è 2 punti

- ☐ biettiva.
☐ iniettiva ma non suriettiva.
☐ né iniettiva, né suriettiva.
☐ suriettiva ma non iniettiva.

(b) Consideriamo il linguaggio L con due simboli di funzione unaria h, k . Quali delle seguenti espressioni sono L -enunciati che formalizzano correttamente relativamente alla L -struttura $\langle C, h, k \rangle$ l'affermazione "la funzione h è l'inversa della funzione k " 2 punti

- ☐ $\forall x(h(k(x)) = x \wedge k(h(x)) = x)$
☐ $h = k^{-1}$
☐ $\forall x(h(k(x)) = x)$
☐ $\forall x(h(x) \cdot k(x) = 1)$

(c) Siano C, D, A lettere proposizionali e R una formula proposizionale scritta a partire da esse che abbia la seguente tavola di verità: 2 punti

C	D	A	R
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

- ☐ $R \models D$.
☐ $\neg R \wedge D$ è una contraddizione.

- ☐ R non è insoddisfacibile.
 - ☐ $R \wedge A \models D$
- (d) La relazione Q su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definita da $z Q w$ se e solo se $\exists x(z \cdot x = w)$ 2 punti
- ☐ è transitiva.
 - ☐ non è una relazione d'equivalenza.
 - ☐ è riflessiva.
 - ☐ non è simmetrica.
- (e) Siano φ, ψ delle L -formule. 2 punti
- ☐ φ è soddisfacibile se e solo se $\neg\varphi \rightarrow \psi$ è soddisfacibile.
 - ☐ Se φ è una tautologia allora $\neg\varphi \rightarrow \psi$ è soddisfacibile.
 - ☐ Se φ è soddisfacibile allora $\neg\psi \rightarrow \varphi$ è soddisfacibile.
 - ☐ Se $\neg\varphi$ è soddisfacibile allora $\neg\varphi \rightarrow \psi$ è soddisfacibile.
- (f) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? 2 punti
- ☐ $\{(z, w) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{Z} \vee w \notin \mathbb{Q}\}$
 - ☐ $\{(z, w) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{Z} \wedge w \in \mathbb{Q}\}$
 - ☐ $\{z \in \mathbb{R} \mid z^2 - 3z + 4 = 0\}$
 - ☐ $\{z \in \mathbb{R} \mid \sqrt{z} \in \mathbb{N}\}$
- (g) Sia φ la formula $\forall z \forall w R(w, z) \vee \neg \exists w R(z, w)$, dove R è un simbolo di predicato binario. 2 punti
- ☐ φ è un enunciato.
 - ☐ La variabile w occorre libera e vincolata in φ .
 - ☐ φ è un enunciato e la variabile z occorre sia libera che vincolata in φ .
 - ☐ La variabile z occorre libera e vincolata in φ .

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2

9 punti

Sia $L = \{h\}$ con h simbolo di funzione binario. Sia ψ la L -formula

$$\exists w (h(w, w) = z).$$

1. Stabilire se

$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \psi[y/2, x/1].$$

2. Stabilire se

$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \psi[y/2, x/2].$$

3. Stabilire se

$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \forall z \psi[y/2, x/2].$$

4. Stabilire se

$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \exists z \psi[y/2, x/1].$$

5. Stabilire se

$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \psi[y/1, x/3].$$

6. Stabilire se

$$\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \psi[y/\sqrt{2}, x/-2].$$

7. È vero che $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle \models \forall z \psi[y/1, x/3]$?

8. Sia $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. È vero che $\mathcal{C} \models \forall z \psi[y/1, x/3]$?

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3

9 punti

Sia $\langle C, < \rangle$ un ordine lineare stretto e siano D, A sottoinsiemi di C . Formalizzare relativamente alla struttura $\langle C, <, D, A \rangle$ mediante il linguaggio $L = \{<, D, A\}$ con un simbolo di relazione binaria e due simboli di predicato unari le seguenti affermazioni:

1. Tra due elementi di D c'è un elemento di A .
2. Dati due elementi di D , c'è necessariamente un elemento di A che è maggiore di entrambi.
3. Qualche elemento di D è minore di qualche elemento di A .
4. Il più grande elemento di D coincide con il più piccolo elemento di A .