Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente "x è un numero primo" utilizzando il linguaggio $\cdot, 1$ e relativamente alla struttura $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$ — 2 punti

- ■ $\neg(x = 1) \land \neg\exists y \exists z (y \cdot z = x \land \neg(y = 1) \land \neg(z = 1))$
- □ $\exists x \neg(x = 1) \land \neg\exists y(\neg(y = 1) \land y \cdot x = x)$
- □ $(x = 1) \to \forall y \forall z (y \cdot z = x \to y = 1 \lor z = 1)$
- □ $\neg(x = 1) \land \forall y \forall z (x = y \cdot z \land y = 1 \land x = 1)$

(b) Sia $L = \{S, k, f, d\}$ un linguaggio del prim'ordine con S simbolo di relazione binario, k simbolo di funzione unario, f simbolo di funzione binario e d simbolo di costante. Quali dei seguenti sono L-termini? — 2 punti

- □ $S(d, k(d))$
- ■ $k(f(f(d, k(d)), f(k(d), d)))$
- □ $f(k(k(f(d, d), d)), d)$
- ■ $f(f(k(d), k(d)), f(k(d), k(d)))$

(c) Siano $\varphi(w)$ e $\psi(w, x)$ formule del prim'ordine e σ un enunciato. — 2 punti

- ■ Se $\mathcal{A}$ è una struttura tale che $\mathcal{A} \models \exists x \neg\varphi(x)$, allora $\mathcal{A} \models \exists x (\neg\sigma \lor \neg\varphi(x))$.
- ■ Se $\mathcal{D}$ è una struttura tale che $\mathcal{D} \models \forall w \neg\varphi(w)$, allora $\mathcal{D} \models \forall w (\varphi(w) \to \sigma)$.
- ■ $\exists w \forall x \, \psi(w, x) \models \forall x \exists w \, \psi(w, x)$
- □ $\neg\exists w \neg\varphi(w) \models \forall w \neg\varphi(w)$

(d) Siano A e B insiemi tali che $B \subseteq A$. Allora possiamo concludere con certezza che — 2 punti

- ■ $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$.
- ■ se B è più che numerabile allora anche A lo è.
- □ se A e B sono entrambi infiniti e numerabili allora $A \setminus B$ è finito.
- □ $A \setminus B \neq A$.

(e) Consideriamo le funzioni $k\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad (w,x) \mapsto 5w^2 + x$ 2 punti
e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2, \quad w \mapsto (w, 5w)$. Allora

■ $k \circ f(w) = 5w(w+1)$ per ogni $w \in \mathbb{N}$.

□ f è iniettiva ed è l'inversa di k.

□ la funzione k è iniettiva.

■ Esistono $w, x \in \mathbb{N}$ tali che $k(w,x) = 1$.

(f) Sia Q una relazione binaria su un insieme non vuoto D. 2 punti

□ Se Q è simmetrica, allora non può essere anche antisimmetrica.

■ Se Q è irriflessiva, allora non può essere anche riflessiva.

■ Se Q è una relazione di equivalenza, allora è anche un preordine.

■ Se Q è una relazione d'equivalenza e R è un'altra relazione binaria su D tale che $Q \subseteq R$, allora R è riflessiva.

(g) Sia S la proposizione $\neg \mathrm{D} \vee (\mathrm{A} \to \mathrm{B})$. Allora 2 punti

□ S è tale che $i^*(\mathrm{S}) = 0$ per ogni interpretazione i.

□ Se i è un'interpretazone tale che $i(\mathrm{B}) = 0$ allora necessariamente $i(\mathrm{D}) = i(\mathrm{A}) = 0$.

□ S è una tautologia.

■ S è conseguenza logica di $\mathrm{D} \to \mathrm{B}$.

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{S, k, d\}$ con S simbolo di relazione binaria, k simbolo di funzione binaria e d simbolo di costante. Consideriamo la L-struttura $\mathcal{D} = \langle \mathbb{Z}, \geq, \cdot, 3 \rangle$, dove $\cdot$ è l'usuale funzione moltiplicazione.

Sia φ la formula

$$(S(w, x) \land \exists y\, (k(d, y) = x))$$

e ψ la formula

$$(S(w, x) \to \exists y\, (k(d, y) = x))$$

1. Determinare se:
   - $\mathcal{D} \models \varphi[w/-1000, x/-2000]$,
   - $\mathcal{D} \models \varphi[w/-1000, x/-3000]$,
   - $\mathcal{D} \models \exists x\, \varphi[w/-1000, x/-999]$.
2. Determinare se $\mathcal{D} \models \forall w \exists x \varphi[w/0, x/0]$.
3. Determinare se:
   - $\mathcal{D} \models \psi[w/-1000, x/-2000]$,
   - $\mathcal{D} \models \psi[w/-1000, x/-3000]$,
   - $\mathcal{D} \models \forall x\, \psi[w/-1000, x/-998]$.
4. Determinare se $\mathcal{D} \models \exists w \forall x\, \psi[w/-1, x/3]$.
5. Determinare se $\forall w \exists x\, \varphi \models \exists w \forall x\, \psi$.

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. La formula φ è verificata in $\mathcal{D}$ con l'assegnamento w/n e x/m se e solo se $n \geq m$ e m è multiplo di 3. Quindi
   - $\mathcal{D} \not\models \varphi[w/-1000, x/-2000]$ perché -2000 non è multiplo di 3
   - $\mathcal{D} \models \varphi[w/-1000, x/-3000]$ perché -3000 è multiplo di 3 e $-1000 \geq -3000$
   - $\mathcal{D} \models \exists x\, \varphi[w/-1000, x/-999]$, come mostrato dall'assegnazione di x a -3000 nel punto precedente.

2. L'enunciato $\forall w \exists x\, \varphi$ interpretato in $\mathcal{D}$ afferma che

   > Per ogni numero intero w esiste un numero intero x minore o uguale a w che è un multiplo di 3,

   ovvero

   > Vi sono numeri interi arbitrariamente piccoli che sono multipli di 3.

   Quindi si ha che $\mathcal{D} \models \forall w \exists x\, \varphi$.

3. La formula ψ è verificata in $\mathcal{D}$ con l'assegnamento w/n e x/m se e solo se si verifica che

> Se $n \geq m$, allora m è multiplo di 3.

Quindi

- $\mathcal{D} \not\models \psi[w/-1000, x/-2000]$ perché $-1000 \geq -2000$ ma -2000 non è multiplo di 3, e quindi l'antecedente dell'implicazione in ψ è vero mentre il conseguente è falso;
- $\mathcal{D} \models \psi[w/-1000, x/-3000]$ perché -3000 è multiplo di 3 e quindi con questi assegnamenti il conseguente dell'implicazione in ψ è verificato, rendendo quindi vera ψ stessa. (Si può notare che anche l'antecedente dell'implicazione in ψ è vero con tale assegnamento, anche se questo è di fatto irrilevante nel determinare se $\psi[w/-1000, x/-3000]$ sia vera in $\mathcal{D}$.)
- $\mathcal{D} \not\models \forall x\, \psi[w/-1000, x/-998]$, come mostrato dall'assegnazione di x a -2000 nel punto precedente.

4. L'enunciato $\exists w \forall x\, \psi$ interpretato in $\mathcal{D}$ afferma che

   > Esiste un numero intero w tale che tutti i numeri interi minori o uguali ad esso sono multipli di 3,

   ovvero

   > Tutti i numeri interi sufficientemente piccoli sono multipli di 3.

   Quindi si ha che $\mathcal{D} \not\models \exists w \forall x\, \psi$.

5. Poiché $\mathcal{D} \models \forall w \exists x\, \varphi$ ma $\mathcal{D} \not\models \exists w \forall x\, \psi$, per definizione di conseguenza logica si ha che $\forall w \exists x\, \varphi \not\models \exists w \forall x\, \psi$.

Esercizio 3 9 punti

Sia D un insieme non vuoto e $k\colon D \to D$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle D, k\rangle$ mediante il linguaggio $L = \{k\}$ con un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. k è una funzione costante (ovvero il suo range contiene un solo punto)
2. se k è una funzione costante, allora k è suriettiva
3. $k \circ k$ è iniettiva
4. ogni elemento ha almeno due preimmagini distinte.

Soluzione:

1. k è una funzione costante: $\exists y \forall x (k(x) = y)$.
2. se k è una funzione costante, allora k è suriettiva:
   $\exists y \forall x (k(x) = y) \to \forall y \exists x (k(x) = y)$.
3. $k \circ k$ è iniettiva: $\forall x \forall y (k(k(x)) = k(k(y)) \to x = y)$.
4. ogni elemento ha almeno due preimmagini distinte:
   $\forall y \exists x_1 \exists x_2 (\neg(x_1 = x_2) \land k(x_1) = y \land k(x_2) = y)$.