Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 10 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia P la proposizione $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \to \mathrm{C}$. Allora — 2 punti

- ☐ Se i è un'interpretazone tale che $i(\mathrm{C}) = 0$ allora necessariamente $i(\mathrm{A}) = i(\mathrm{B}) = 0$.
- ■ P è conseguenza logica di $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$.
- ☐ P è una tautologia.
- ☐ P è una contraddizione.

(b) Siano B e C insiemi tali che $C \subseteq B$. Allora possiamo concludere con certezza che — 2 punti

- ☐ B e C non possono essere disgiunti.
- ■ $(B \cup C) \setminus (B \setminus C) = C$.
- ■ se $|B| \leq |C|$ allora $|B| = |C|$.
- ☐ se $|B| = |C|$ allora $B \setminus C = \emptyset$.

(c) Sia R una relazione binaria su un insieme non vuoto A. — 2 punti

- ■ Se R è riflessiva, allora non può essere anche irriflessiva.
- ■ Se R è una relazione di equivalenza, allora è anche un preordine.
- ■ Se R è un ordine e S è un'altra relazione binaria su A tale che $R \subseteq S$, allora S è riflessiva.
- ☐ Se R è antisimmetrica, allora non può essere anche simmetrica.

(d) Consideriamo le funzioni $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 2x^2 + y$ e $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x, 2x)$. Allora — 2 punti

- ☐ la funzione f è iniettiva.
- ■ $f \circ g(x) = 2x(x + 1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ g è iniettiva e f è l'inversa di g.
- ■ Esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) = (5, 10)$.

(e) Quali delle seguenti sono formule che formalizzano correttamente "x è un numero primo" utilizzando il linguaggio $\cdot, 1$ e relativamente alla struttura $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$ — 2 punti

- ☐ $\neg(x = 1) \vee \forall y \forall z(y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$
- ■ $\neg(x = 1) \wedge \forall y \forall z(y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$
- ☐ $\exists x \neg(x = 1) \vee \forall y \forall z(y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$
- ☐ $\forall x(\neg(x = 1) \vee \forall y \forall z(y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1))$

(f) Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x, y)$ formule del prim'ordine e σ un enunciato. — 2 punti

- ■ Se $\mathcal{A}$ è una struttura tale che $\mathcal{A} \models \neg\exists x \varphi(x)$, allora $\mathcal{A} \models \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \sigma)$.
- ☐ $\forall x \exists y\, \psi(x, y) \models \exists y \forall x\, \psi(x, y)$
- ■ $\neg\exists x \neg\varphi(x) \models \forall x\, \varphi(x)$
- ■ Se $\mathcal{B}$ è una struttura tale che $\mathcal{B} \models \exists y\, \varphi(y)$, allora $\mathcal{B} \models \exists y\, (\neg\sigma \vee \varphi(y))$.

(g) Sia $L = \{P, f, g, a\}$ un linguaggio del prim'ordine con P simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione unario, g simbolo di funzione binario e a simbolo di costante. Quali dei seguenti sono L-termini? — 2 punti

- ☐ $g(f(f(g(a, a), a)), a)$
- ■ $f(g(g(a, f(a)), g(f(a), a)))$
- ☐ $P(a, f(a))$
- ■ $g(g(f(a), f(a)), g(f(a), f(a)))$

Punteggio totale primo esercizio: 14 punti

Esercizio 2 9 punti

Sia $L = \{P, R, a\}$ con P ed R simboli di relazione binaria e a simbolo di costante. Consideriamo la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \geq, |, 3 \rangle$, dove $|$ è l'usuale relazione di divisibilità.

Sia φ la formula
$$(P(x, y) \wedge R(a, y))$$
e ψ la formula
$$(P(x, y) \to R(a, y))$$

1. Determinare se:
   - $\mathcal{A} \models \varphi[x/-1000, y/-2000]$,
   - $\mathcal{A} \models \varphi[x/-1000, y/-3000]$,
   - $\mathcal{A} \models \exists y\, \varphi[x/-1000, y/-999]$.
2. Determinare se $\mathcal{A} \models \forall x \exists y \varphi[x/0, y/0]$.
3. Determinare se:
   - $\mathcal{A} \models \psi[x/-1000, y/-2000]$,
   - $\mathcal{A} \models \psi[x/-1000, y/-3000]$,
   - $\mathcal{A} \models \forall y\, \psi[x/-1000, y/-998]$.
4. Determinare se $\mathcal{A} \models \exists x \forall y\, \psi[x/-1, y/3]$.
5. Determinare se $\forall x \exists y\, \varphi \models \exists x \forall y\, \psi$.

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. La formula φ è verificata in $\mathcal{A}$ con l'assegnamento x/n e y/m se e solo se $n \geq m$ e m è multiplo di 3. Quindi
   - $\mathcal{A} \not\models \varphi[x/-1000, y/-2000]$ perché -2000 non è multiplo di 3
   - $\mathcal{A} \models \varphi[x/-1000, y/-3000]$ perché -3000 è multiplo di 3 e $-1000 \geq -3000$
   - $\mathcal{A} \models \exists y\, \varphi[x/-1000, y/-999]$, come mostrato dall'assegnazione di y a -3000 nel punto precedente.

2. L'enunciato $\forall x \exists y\, \varphi$ interpretato in $\mathcal{A}$ afferma che

   > Per ogni numero intero x esiste un numero intero y minore o uguale ad x che è divisibile per 3,

   ovvero

   > Vi sono numeri interi arbitrariamente piccoli che sono multipli di 3.

   Quindi si ha che $\mathcal{A} \models \forall x \exists y\, \varphi$.

3. La formula ψ è verificata in $\mathcal{A}$ con l'assegnamento x/n e y/m se e solo se si verifica che

> Se $n \geq m$, allora m è multiplo di 3.

Quindi

- $\mathcal{A} \not\models \psi[x/-1000, y/-2000]$ perché $-1000 \geq -2000$ ma -2000 non è multiplo di 3, e quindi l'antecedente dell'implicazione in ψ è vero mentre il conseguente è falso;
- $\mathcal{A} \models \psi[x/-1000, y/-3000]$ perché -3000 è multiplo di 3 e quindi con questi assegnamenti il conseguente dell'implicazione in ψ è verificato, rendendo quindi vera ψ stessa. (Si può notare che anche l'antecedente dell'implicazione in ψ è vero con tale assegnamento, anche se questo è di fatto irrilevante nel determinare se $\psi[x/-1000, y/-3000]$ sia vera in $\mathcal{A}$.)
- $\mathcal{A} \not\models \forall y\, \psi[x/-1000, y/-998]$, come mostrato dall'assegnazione di y a -2000 nel punto precedente.

4. L'enunciato $\exists x \forall y\, \psi$ interpretato in $\mathcal{A}$ afferma che

> Esiste un numero intero x tale che tutti i numeri interi minori o uguali ad esso sono divisibili per 3,

ovvero

> Tutti i numeri interi sufficientemente piccoli sono multipli di 3.

Quindi si ha che $\mathcal{A} \not\models \exists x \forall y\, \psi$.

5. Poiché $\mathcal{A} \models \forall x \exists y\, \varphi$ ma $\mathcal{A} \not\models \exists x \forall y\, \psi$, per definizione di conseguenza logica si ha che $\forall x \exists y\, \varphi \not\models \exists x \forall y\, \psi$.

Esercizio 3 9 punti

Sia A un insieme non vuoto e $f: A \to A$ una funzione. Formalizzare relativamente alla struttura $\langle A, f\rangle$ mediante il linguaggio $L = \{f\}$ con un simbolo di funzione unario le seguenti affermazioni:

1. f è suriettiva
2. se f è suriettiva, allora f è iniettiva
3. $f \circ f$ è biettiva
4. ogni elemento ha almeno due preimmagini distinte.

Soluzione:

1. f è suriettiva: $\forall y \exists x (f(x) = y)$.
2. se f è suriettiva, allora f è iniettiva:
   $\forall y \exists x (f(x) = y) \to \forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y)$.
3. $f \circ f$ è biettiva: $\forall y \exists x (f(f(x)) = y) \wedge \forall x \forall y (f(f(x)) = f(f(y)) \to x = y)$.
4. ogni elemento ha almeno due preimmagini distinte:
   $\forall y \exists x_1 \exists x_2 (\neg(x_1 = x_2) \wedge f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y)$.