

## Soluzione di

### Equazioni non lineari

Data una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  consideriamo il problema di determinare i valori  $\alpha$  tali che  $f(\alpha) = 0$ .

Tali valori sono solitamente chiamati **zeri** o **radici** della funzione  $f$ .

Se  $x$  è tale che  $f(\alpha) = 0$  ed  $f'(\alpha) \neq 0$ ,  $x$  viene chiamata **radice semplice**; in generale, se  $f^{(k)}(\alpha) = 0$ ,  $k = 0, \dots, m-1$  e  $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$  allora  $\alpha$  detta **radice multipla di molteplicità  $m$** .

**Esempi:**

Equazioni algebriche:  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$

Altri esempi di equazioni non lineari:

$$x + 4\sin(x) = 0 \quad e^x + x^2 = 0, \quad \sqrt{x} - \log(x) = 0$$

Le radici di un'equazione non lineare non possono in generale venire espresse in “forma chiusa” e anche quando ciò è possibile la corrispondente espressione può risultare molto complessa. Esistono formule esplicite per il calcolo di radici di polinomi di grado minore di 5. L'applicazione di tali formule non è però così immediata come la nota formula per il calcolo di radici di polinomi di secondo grado e risulta sicuramente preferibile disporre di algoritmi numerici in grado di fornire soluzioni approssimate del problema.

Si ricorre a metodi numerici iterativi approssimanti.

L'approssimazione numerica di una radice  $\alpha$  di  $f(x)$  si basa sull'uso di metodi iterativi che consistono nella costruzione di una successione di iterati  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  che tende alla soluzione del problema  $\alpha$ , cioè

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \alpha \quad (1)$$

## Condizionamento del problema del calcolo degli zeri di una funzione non lineare

Lavorando con il calcolatore, si lavora con numeri finiti e quindi la soluzione che si determina non è quella esatta, ma una sua approssimazione. Occorre valutare quanto differisce questa soluzione da quella vera.

Sia  $\alpha$  tale che  $f(\alpha)=0$ .

Il valore calcolato numericamente  $\tilde{\alpha} = \alpha + \delta$ ,  $\delta > 0$  può essere visto come la radice dell'equazione

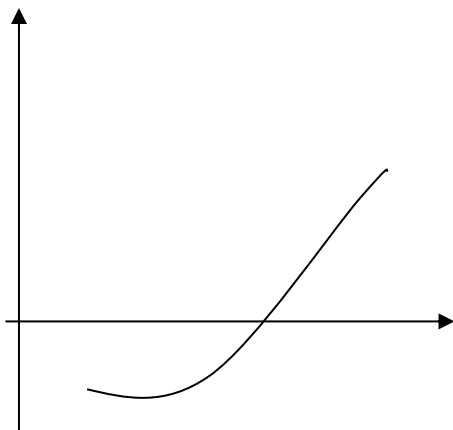
$$\tilde{f}(x) = f(x) + \varepsilon g(x) = 0 \quad (2)$$

dove  $\varepsilon g(x)$  rappresenta la perturbazione della funzione originale.

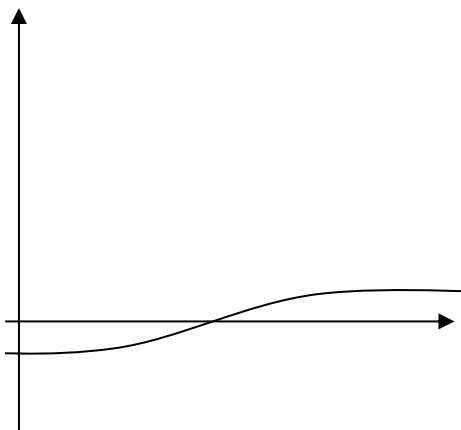
Si dimostra che

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| = |\delta| \approx K |\varepsilon g(\alpha)| \quad (4)$$

dove quantità  $K = \frac{1}{|f'(\alpha)|}$  rappresenta l'indice di condizionamento del problema di calcolare la radice della funzione  $f(x)$ . Come mostrano le figure, se  $f'(\alpha)$  è grande, il problema è ben posto o ben condizionato, se  $f'(\alpha)$  è molto piccolo, vicino allo zero, il problema è mal posto o mal condizionato.



**Ben Condizionato**



**Mal Condizionato**

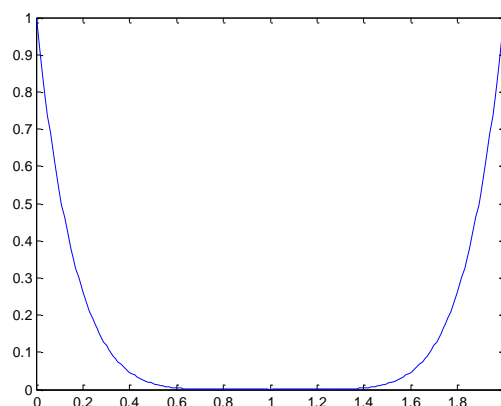
Lo studio precedente ci fa anche capire che il calcolo di radici multiple di molteplicità  $m > 1$  (quelle in cui oltre la funzione si annullano anche le sue derivate fino all'ordine  $m-1$ ) è un problema numericamente molto difficile.

### Esempio

L'equazione:

$$F(x) = (x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 = 0$$

possiede in  $\alpha = 1$  una radice di molteplicità 6, quindi  $F'(1)=0$ , come si vede bene in figura, e il problema della determinazione della radice  $\alpha = 1$  è mal posto.



**Le problematiche legate ai metodi iterativi per la soluzione di equazioni non lineari sono:**

- 1) **Scelta del valore iniziale  $x_0$  (di innesco) e Convergenza** della successione di iterati ad  $\alpha$
- 2) **Ordine di convergenza** della successione di iterati ad  $\alpha$  (ordine del metodo)
- 3) **Criteri di arresto** del metodo iterativo (questo è un problema numerico dovuto al fatto che lavoriamo con i numeri finiti e dobbiamo fare un numero finito di passi)

**DEF:** Un metodo converge **localmente** ad  $\alpha$  se la convergenza della successione  $\{x^{(k)}\}$  dipende in modo critico dalla vicinanza di  $x_0$  ad  $\alpha$ . Il procedimento è **globalmente** convergente quando la convergenza non dipende da quanto  $x_0$  è vicino ad  $\alpha$ , ossia converge per ogni scelta di  $x_0$ .

Per i metodi a convergenza locale la scelta del punto di innesco è cruciale.

## Definizione: Ordine di Convergenza

Sia data una successione di iterati  $\{x_k\}$ , generata da un metodo numerico, convergente ad un limite  $\alpha$  e sia  $e_k = x_k - \alpha$ . Se esistono due numeri reali  **$p \geq 1$**  e  **$c > 0$** , tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$$

si dice che la successione ha **ordine di convergenza  $p$**  e **fattore di convergenza  $c$** .

Ciò significa che esiste un indice  $k_0$ , tale che per  $k > k_0$ , risulta

$$|e_{k+1}| \approx c|e_k|^p$$

Se  $p=1$ , occorre che  $c < 1$  affinché la successione sia convergente. In tal caso si dice convergente linearmente. Risulta:

$$|e_{k+1}| \approx c|e_k| \approx c^2|e_{k-1}| \approx \dots \approx c^{k+1}|e_0|$$

e tanto più piccolo è  $c < 1$  tanto migliore è la convergenza, pur rimanendo lineare.

- se  **$p = 1$**  la convergenza si dice **lineare**
- se  **$1 < p < 2$**  la convergenza si dice **superlineare**
- se  **$p = 2$**  la convergenza si dice **quadratica**

Si dice che il metodo che genera la successione  $\{x_k\}$  ha velocità di convergenza di ordine  $p$  se tale è la successione da esso generata.

## Significato del concetto di ordine di convergenza

Sia  $e_k = x_k - \alpha$ , supponiamo che  $|e_k| \leq \frac{1}{2} 10^{-n}$ , cioè la radice  $x_k$  ha  $n$  decimali corretti,

Se il metodo iterativo ha ordine di convergenza  $p$ , allora

$$|e_{k+1}| \approx c |e_k|^p \leq c \left( \frac{1}{2} 10^{-n} \right)^p = \frac{c}{2^p} 10^{-pn} \text{ cioè la radice } x_k \text{ ha } p \cdot n \text{ decimali corretti.}$$

Il numero di decimali corretti tende ad essere moltiplicato per  $p$  ad ogni passo solo per  $k \rightarrow \infty$ .

## Criteri di arresto

Un metodo numerico convergente genera una successione  $\{x_k\}$  di iterati che soddisfa la (1). Lavorando con un calcolatore non possiamo fare un numero infinito di passi, per cui è necessario fornire delle **condizioni per arrestare il procedimento iterativo**. Vi sono due possibili criteri: il controllo sul valore della funzione nel punto  $x_k$  o il controllo dell'incremento che diamo a  $x_{k-1}$  per ottenere  $x_k$ . In entrambi i metodi si suppone di aver fissato una tolleranza  $\varepsilon$ .

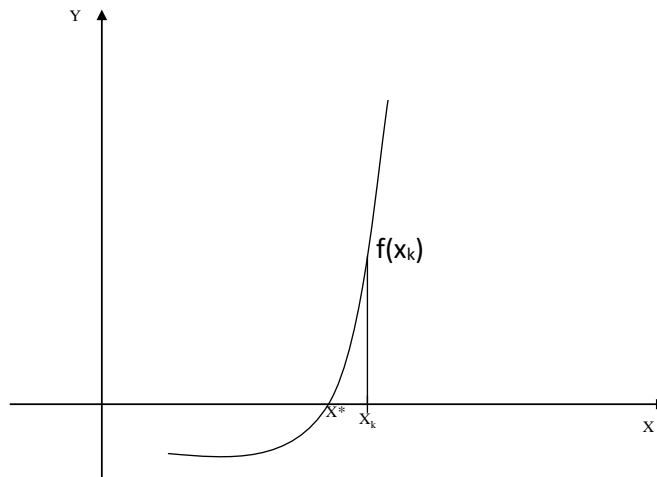
### Controllo sul Valore della funzione:

il processo viene arrestato al passo  $k$  per cui si verifica

$$|f(x_k)| < \varepsilon$$

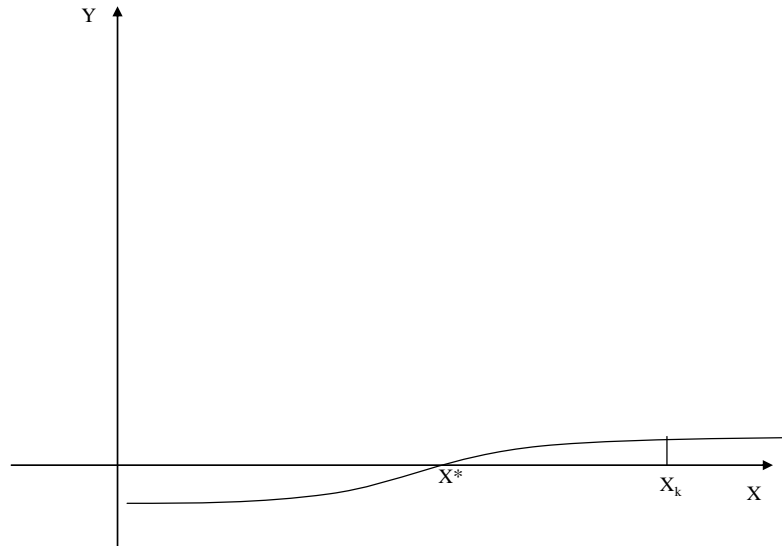
Si possono però verificare situazioni in cui il test si presenta o troppo restrittivo o troppo ottimistico.

### Caso Restrittivo



L'iterato  $x_k$  è vicino a  $\alpha$  anche se  $|f(x_k)|$  è grande.

### Caso Ottimistico



Il valore di  $x_k$  è lontano da  $x^*$  ma  $|f(x_k)|$  è piccolo

Si vede quindi che, se la funzione ha una derivata prima alta nell'intorno della soluzione, il test sul valore della funzione può risultare troppo restrittivo, mentre se ha una derivata piccola allora il test può risultare troppo permissivo.

### **Controllo dell'incremento:**

il processo viene arrestato al passo  $k$  per cui si verifica che la differenza tra due iterati successivi è minore della precisione fissata  $\varepsilon$ , cioè

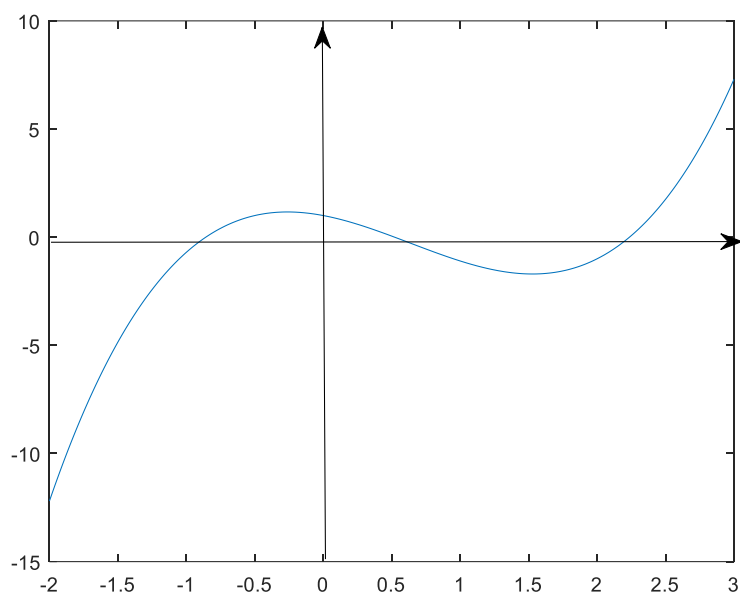
$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

Si può concludere che un criterio d'arresto basato sia sul controllo del valore della funzione sia sul controllo dell'incremento risulta molto più affidabile.

**Localizzare le radici:** determinare il numero delle soluzioni e separare ogni soluzione, cioè individuare, per ogni soluzione, un intervallo che non ne contenga altre. (discretizzando l'intervallo iniziale)

- Applicare per ogni intervallo determinato un metodo iterativo fino alla convergenza ad una soluzione (radice).





## Teorema degli zeri di funzioni continue

Sia  $f(x)$  continua nell'intervallo  $[a, b]$  e sia tale che  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , allora  $f$  ammette almeno uno zero in  $(a, b)$ , cioè esiste almeno un punto  $\alpha$  in  $(a, b)$  tale che  $f(\alpha) = 0$ .

### • Metodo di Bisezione

Il metodo di Bisezione si basa sul teorema degli zeri di funzioni continue.

Sia  $f(a) \cdot f(b) < 0$  e poniamo  $[a_0, b_0] \equiv [a, b]$ .

Il **metodo di bisezione** consiste nel generare una successione di sottointervalli

$I_1 = [a_1, b_1]$ ,  $I_2 = [a_2, b_2]$ , ...,  $I_k = [a_k, b_k]$  tali che racchiudano sempre lo zero cercato, cioè

$$f(a_k) \cdot f(b_k) < 0 \quad e \quad I_k \subset I_{k-1}$$

In particolare si determina

$$c_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1})$$

si calcola  $f(c_k)$  e si determina il sottointervallo che soddisfa le condizioni del teorema.

*Se  $f(c_k) = 0 \Rightarrow c_k$  è la radice  $\alpha$  cercata altrimenti*

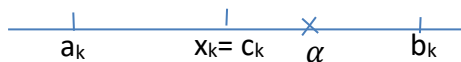
*se  $f(a_{k-1}) \cdot f(c_k) < 0$  si pone  $b_k = c_k$   $a_k = a_{k-1}$*

*se  $f(b_{k-1}) \cdot f(c_k) < 0$  si pone  $a_k = c_k$   $b_k = b_{k-1}$*

In questo modo l'intervallo iniziale viene via via dimezzato. In particolare, dopo  $k$  passi si arriva all'intervallo  $[a_k, b_k]$  di ampiezza

$$(b_k - a_k) = \frac{(b_{k-1} - a_{k-1})}{2} = \dots = \frac{(b_0 - a_0)}{2^k}.$$

La relazione precedente può essere utilizzata per dimostrare che il **metodo converge** con ordine di convergenza  $p=1$  e  $c=1/2$ . Infatti si ha



$$|e_k| = |x_k - \alpha| \leq \frac{1}{2} |b_k - a_k| = \frac{1}{2^{k+1}} |b_0 - a_0|$$

Da cui segue che  $\lim_{k \rightarrow \infty} |e_k| = 0$ , che prova che il metodo di bisezione è convergente.

Il metodo converge linearmente, infatti, poichè

$$|e_{k+1}| = |x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{1}{2^{k+2}} |b_0 - a_0|$$

risulta che

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} \approx \frac{1}{2}$$

Il metodo di bisezione ha ordine di convergenza lineare,  $p=1$ , e fattore di convergenza  $c=1/2$ .

Il metodo di bisezione converge globalmente alla soluzione con la sola ipotesi che  $f$  sia continua nell'intervallo  $[a;b]$ .

La convergenza è garantita qualunque sia l'ampiezza dell'intervallo iniziale  $[a,b]$ .

E' un metodo molto lento. Servono fino a 4 iterazioni per ottenere una cifra significativa esatta nella soluzione approssimata.

Supponiamo che ci vogliano  $j$  iterazioni per ottenere una cifra significativa esatta nella soluzione approssimata:

$$|e_{k+j}| \approx \frac{1}{10} |e_k|$$

Vogliamo stimare il numero di iterazioni  $j$ .

$$|e_{k+j}| \leq \frac{1}{2^{k+1+j}} |b_0 - a_0| \approx \frac{1}{10} \frac{1}{2^{k+1}} |b_0 - a_0| \longrightarrow \frac{1}{2^j} \approx \frac{1}{10} \longrightarrow 2^j \approx 10,$$

da cui segue

$$j \approx \log_2 10 \approx 3.32$$

## Criterio di arresto

Un criterio di arresto del metodo di bisezione è chiedere che l'errore al passo  $k$ ,  $|e_k|$ , sia minore di una precisione fissata  $\varepsilon$ , cioè

$$\left| \frac{b-a}{2^{k+1}} \right| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Questa relazione ci permette di valutare teoricamente quante iterazioni sono necessarie per raggiungere la precisione prefissata. Infatti dalla relazione (2) si ottiene

$$2^{k+1} \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow k \geq \log_2 \left( \frac{b-a}{\varepsilon} \right) - 1$$

Il metodo di Bisezione è un metodo di sicura ma lenta convergenza.

**Osservazione:** Nel programmare l'algoritmo è utile, per vedere il segno di  $F(c_k)$  utilizzare la funzione di libreria

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} = 1 & \text{se } x > 0 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \\ = -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Inoltre quando si va a calcolare il punto  $c_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$  operando con i numeri finiti si può ottenere un risultato errato, cioè fuori dall'intervallo di definizione; infatti ad es. operando con 3 cifre decimali il centro dell'intervallo  $[0.983, 0.986]$  è

$$s_1 = fl(0.983 + 0.986) = fl(1.969) = 0.196 \cdot 10^1$$

$$s_2 = fl\left(\frac{s_1}{2}\right) = fl\left(\frac{0.196 \cdot 10^1}{0.2 \cdot 10^1}\right) = fl(0.98) = 0.980 \quad \text{esterno all'intervallo}$$

Se invece si utilizza la formula 
$$c_k = a_{k-1} + \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$$

si eseguono le seguenti operazioni:

$$s_1 = fl(0.986 - 0.983) = fl(0.003) = 0.300 \cdot 10^{-2}$$

$$s_2 = fl\left(\frac{s_1}{2}\right) = 0.150 \cdot 10^{-2}$$

$$s_3 = fl(0.983 + s_2) = fl(0.9845) = 0.984 \quad oppure \quad 0.985 \quad \text{entrambi interni all'intervallo}$$

**Pseudocodice dell'algoritmo di bisezione per il calcolo degli zeri di una funzione non lineare:**

Dato  $[a, b] = [a_0, b_0]$  tali che  $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ ,  $maxit$ , e  $tol$

$$k = 1$$

*while*  $k \leq maxit$  &&  $abs(b - a) > tol$

$$x_k = a_{k-1} + \frac{(b_{k-1} - a_{k-1})}{2}$$

*if*  $f(x_k) == 0$

*break*

*elseif*  $sign(f(x_k)) \cdot sign(f(a_k)) > 0$

$$a_{k+1} = x_k, \quad b_{k+1} = b_k$$

*elseif*  $sign(f(x_k)) \cdot sign(f(b_k)) > 0$

$$a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = x_k$$

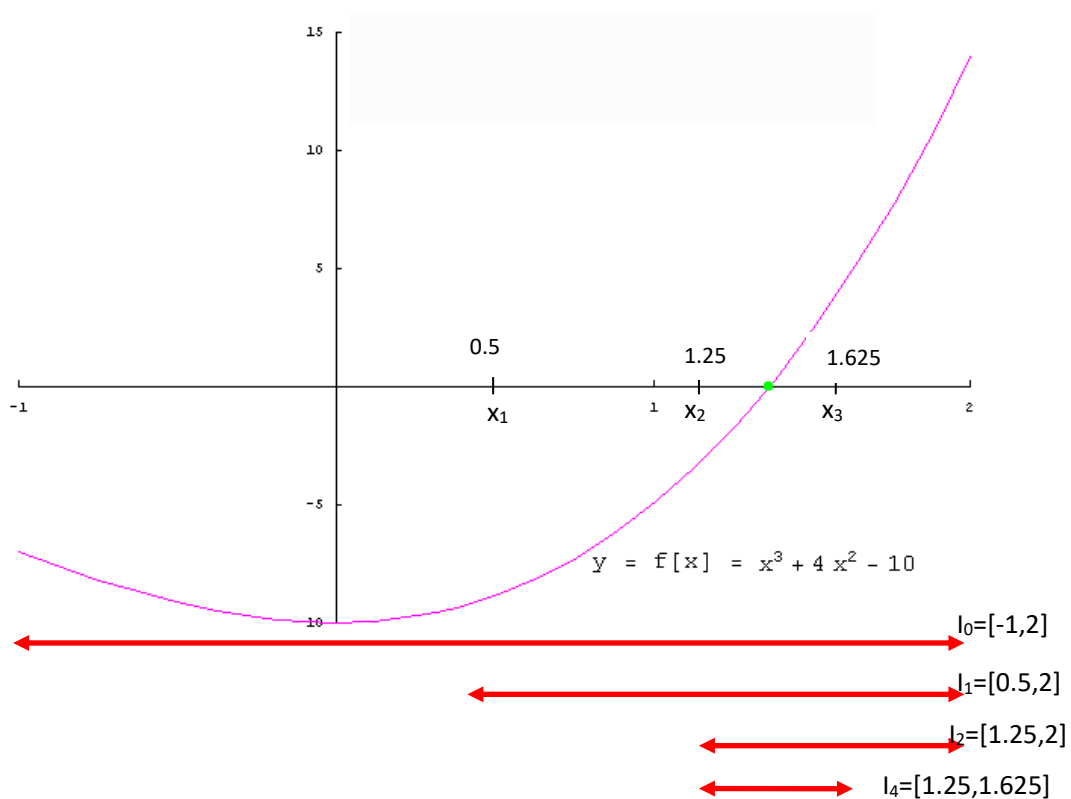
*end*

$$k = k + 1$$

*end*

$$\alpha = x_k$$

✚ Esempio Vogliamo determinare lo zero di  $F(x)=x^3+4x^2-10$  in  $[a,b] = [-1, 2]$ , usando il metodo di Bisezione.



## Metodo della Regula Falsi

Una spiegazione della lenta convergenza può essere ricercata nel fatto che il metodo non trae alcun vantaggio da caratteristiche peculiari della funzione, come la sua derivabilità o la sua forma. Addirittura, il metodo non tiene neanche conto dei valori della funzione, ma soltanto dei segni.

Un modo naturale per migliorare il metodo di bisezione è quello di considerare anche i valori che la funzione assume negli estremi dell'intervallo. Si considera come nuova approssimazione della soluzione l'intersezione dell'asse delle ascisse con la retta passante per  $(a, f(a))$   $(b, f(b))$

$$\begin{cases} y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene: 
$$x = a - f(a) \frac{(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

Il metodo risultante è noto come metodo della **regula falsi o della falsa posizione**

Il metodo genera una successione di intervalli in cui è contenuta la radice: la scelta dell'intervallo in base al segno della funzione, comporta una convergenza globale.

E' più veloce rispetto al metodo di bisezione (**convergenza superlineare**).

In generale l'ampiezza dell'intervallo  $[a_k, b_k]$  non tende a zero pertanto il criterio di arresto basato sull'ampiezza dell'intervallo non è applicabile.

**Pseudocodice dell'algoritmo di falsa posizione per il calcolo degli zeri di una funzione non lineare:**

Dato  $[a, b] = [a_0, b_0]$  tali che  $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ ,  $tol, maxit$

$k = 1$

$valf = f(a)$

**while**  $k \leq maxit \ \&\& \ abs(b - a) > tol \ \&\& \ abs(valf) \geq tol$

$$x_k = a_{k-1} - f(a_{k-1}) \frac{(b_{k-1} - a_{k-1})}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})}$$

$valf = f(x_k)$

**if**  $valf == 0$

break

**elseif**  $sign(valf) \cdot sign(f(a_k)) > 0$

$$a_{k+1} = x_k, \quad b_{k+1} = b_k$$

**elseif**  $sign(valf) \cdot sign(f(b_k)) > 0$

$$a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = x_k$$

**end**

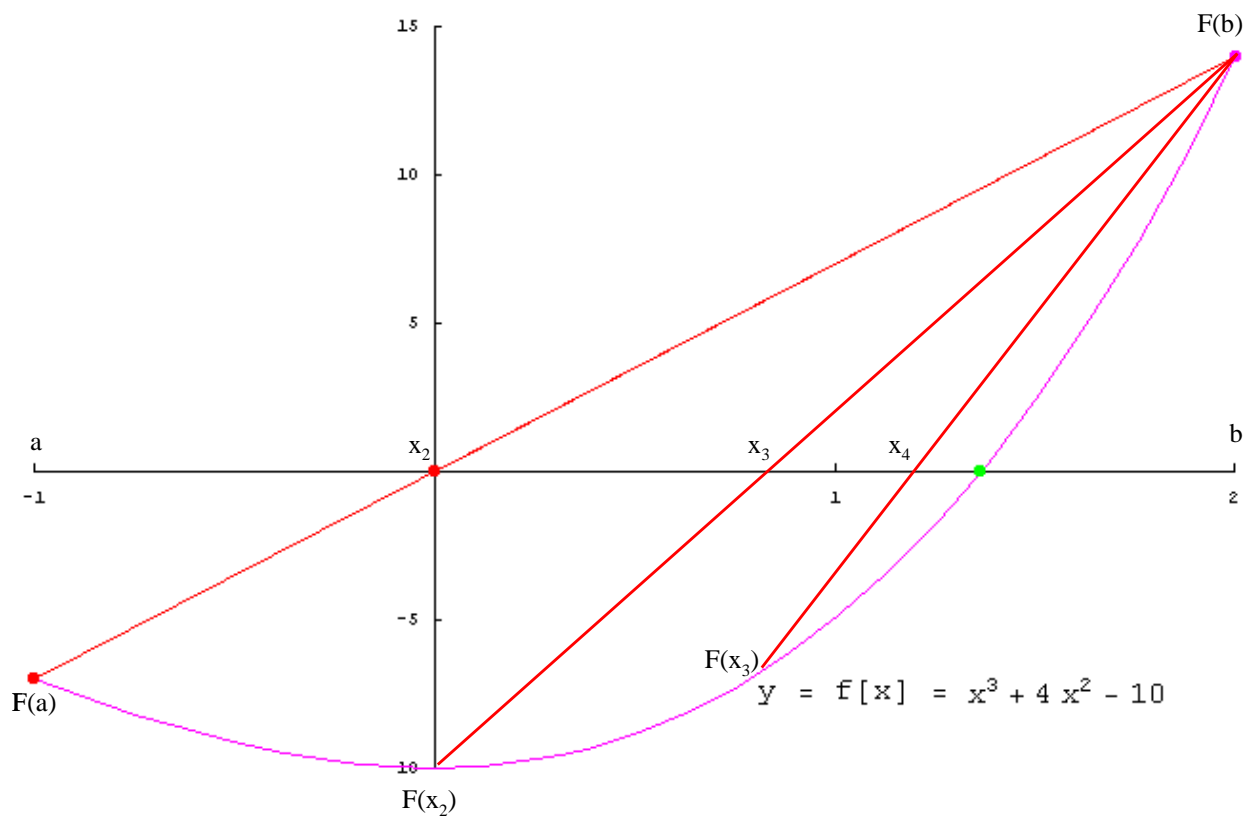
$k = k + 1$

**end**

$\alpha = x_k$



**Esempio:** Vogliamo determinare lo zero di  $f(x)=x^3+4x^2-10$  in  $[a,b] = [-1, 2]$ , usando il metodo della Regola Falsi



## Metodi di linearizzazione

Data  $f(x)$ ,  $x_0$ ,  $f(x_0)$ : si approssima la funzione con una retta per  $(x_0; f(x_0))$

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

Si ottiene una versione linearizzata del problema  $f(x) = 0$ ,

$$\begin{cases} y = f(x_0) + m(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{m}$$

In generale

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m_k}$$

A seconda della scelta di  $m_k$  si ottengono:

**metodo delle corde ( $m_k = m = \text{costante}$ ),**

**metodo delle secanti e metodo di Newton**

### Metodo delle corde

Utilizza un valore costante  $m \neq 0$ .

Il metodo assume la forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m}$$

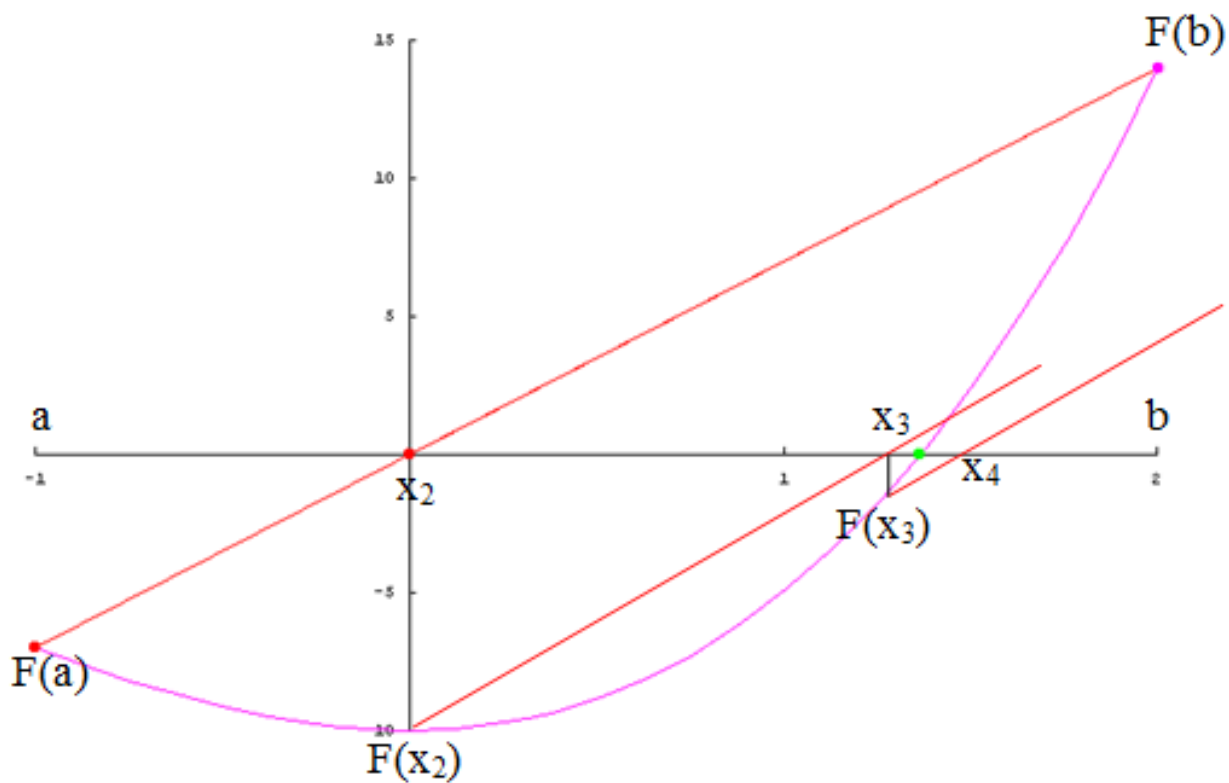
Una scelta classica è quella di utilizzare il coefficiente angolare della retta che congiunge i punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

da cui si ottiene la formula ricorsiva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k)$$

- ✚ Vogliamo determinare lo zero di  $f(x)=x^3 +4x^2-10$  in  $[a,b] = [-1, 2]$ , usando il metodo delle Corde.



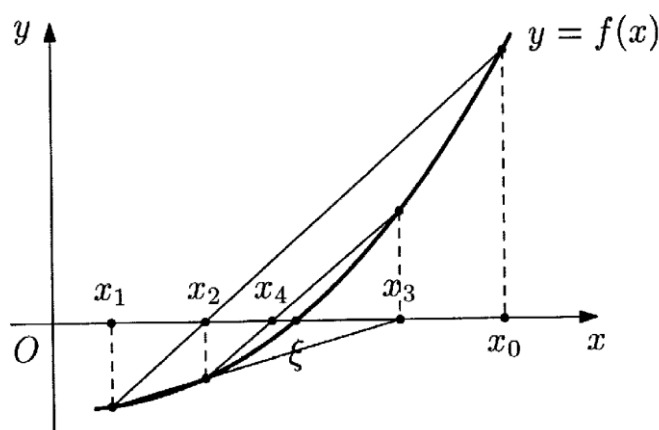
## Metodo delle secanti

Assegnati i due valori iniziali  $x_0, x_1$ , al passo  $k$  l'approssimazione della funzione  $f$  nell'intervallo  $[x_{k-1}, x_k]$  è la retta che passa per i punti  $(x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k, f(x_k))$  con coefficiente angolare

$$m_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

che interseca l'asse  $x$  nel punto di ascissa

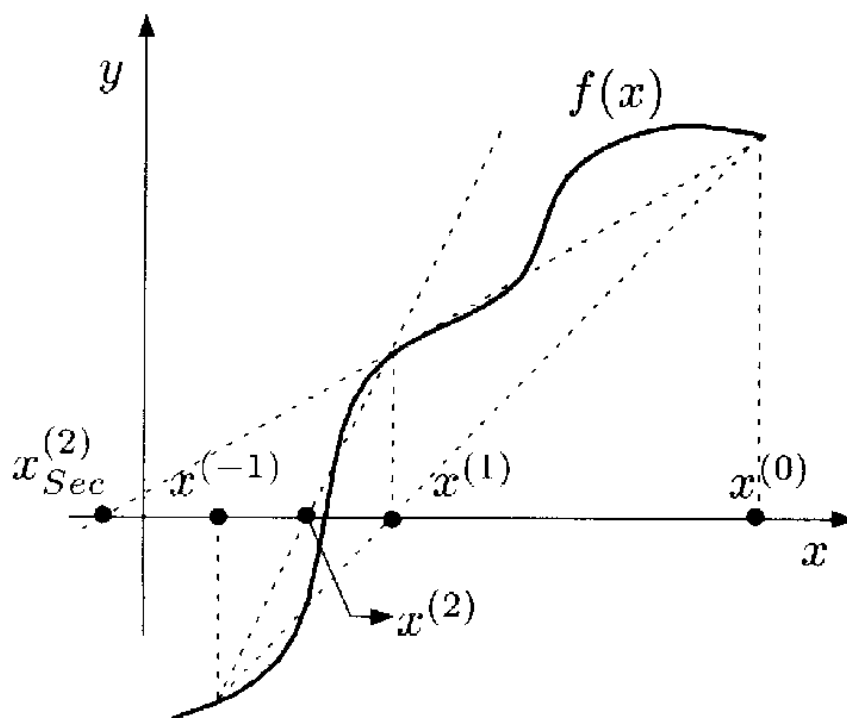
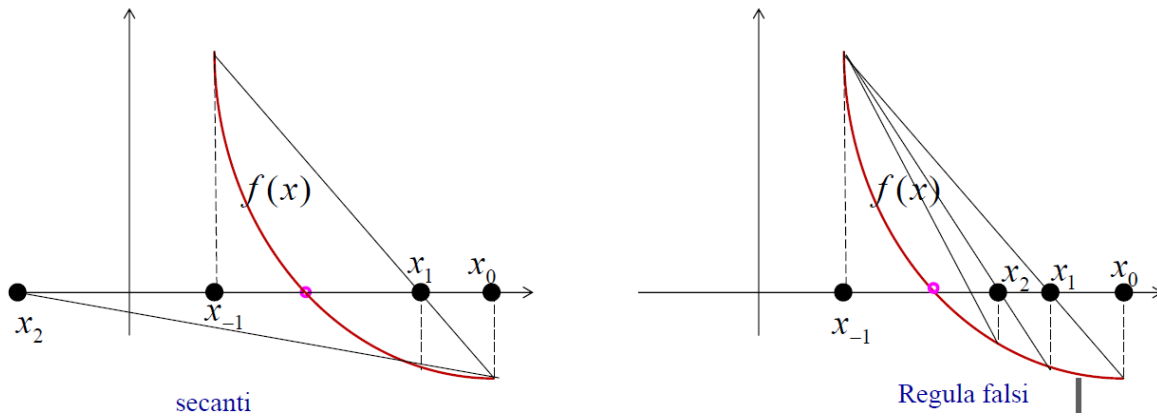
$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$



La convergenza del metodo è garantita se le approssimazioni  $x_0$  ed  $x_1$  si scelgono abbastanza vicine alla soluzione: **convergenza locale**. In tal caso la convergenza è **superlineare** ( $p = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \approx 1.618$ ).

### Confronto tra regola falsi e secanti

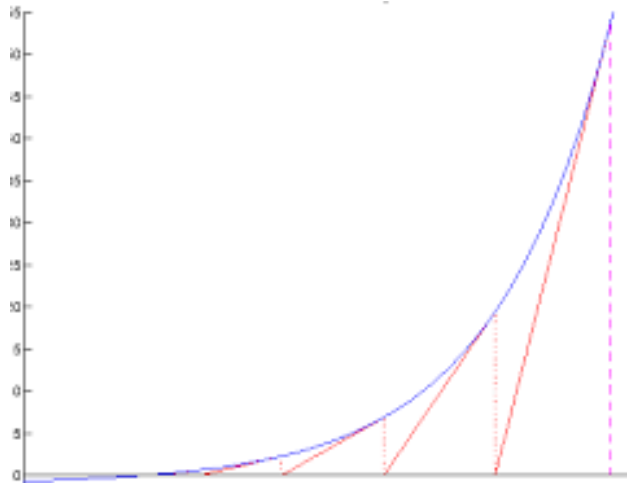
Il metodo delle secanti può essere più veloce ma non converge sempre. Non c'è più la certezza di avere sempre il punto cercato all'interno dell'intervallo.



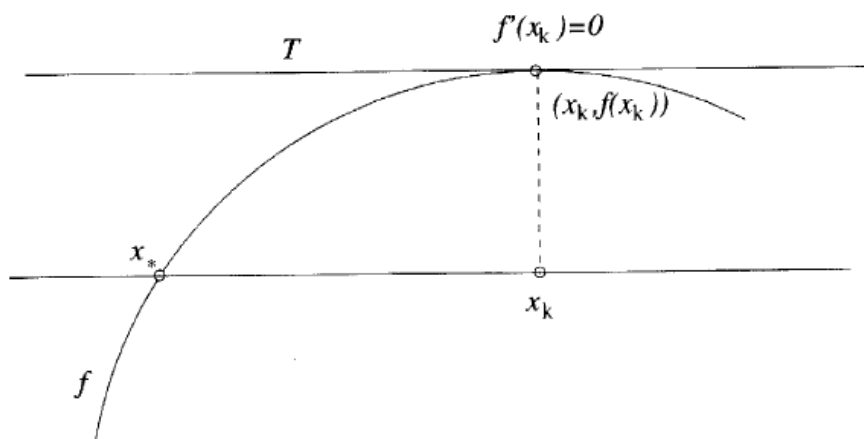
### Metodo di Newton

Nel metodo di Newton, ad ogni passo  $k$ , si considera la retta passante per il punto  $(x_k, f(x_k))$  e tangente alla curva  $f(x)$  e si determina il nuovo iterato come il punto di incontro tra questa retta e l'asse delle  $x$ . Per far ciò, nella formula ricorsiva (4), si pone  $m_k = f'(x_k)$ , ottenendo la formula ricorsiva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



### Problemi con il metodo di Newton:



### Ordine del metodo di Newton:

Mettiamoci nell'ipotesi in  $\alpha$  sia **una radice semplice di  $f(x)$** , cioè  **$f(\alpha)=0$  ed  $f'(\alpha)\neq 0$** . Consideriamo lo sviluppo del primo ordine di  $f(x)$  in un intorno di  $x_k$

$$f(x) \approx f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^2 f''(\zeta)$$
per un opportuno  $\zeta$  compreso tra  $x$  ed  $x_k$ .

Valutiamo in  $\alpha$

$$f(\alpha) = 0 = f(x_k) + (\alpha - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(\alpha - x_k)^2 f''(\zeta)$$

Dividendo per  $f'(x_k)$ :

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (\alpha - x_k) + \frac{\frac{1}{2}(\alpha - x_k)^2 f''(\zeta)}{f'(x_k)} = (\alpha - x_{k+1}) + \frac{\frac{1}{2}(\alpha - x_k)^2 f''(\zeta)}{f'(x_k)}$$
$$= 0$$

Ricordiamo che  $e_{k+1} = x_{k+1} - \alpha$ ,

$-e_{k+1} + \frac{1}{2} \frac{e_k^2 f''(\zeta)}{f'(x_k)} = 0 \Rightarrow e_{k+1} = e_k^2 \frac{1}{2} \frac{f''(\zeta)}{f'(x_k)}$  da cui, ricordando che  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$ , segue che

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad \text{Ordine } p=2, \text{ fattore di convergenza } \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

### Osservazione:

Se  $\alpha$  è uno zero di molteplicità  $m$ , cioè se  $f^{(k)}(\alpha) = 0, k = 0, \dots, m-1$  e  $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$ , allora il metodo di Newton non ha più convergenza quadratica. Si dimostra che diventa a convergenza lineare del tipo

$$|x_{k+1} - \alpha| \approx c|x_k - \alpha|$$

con

$$c = \frac{m-1}{m}.$$

Per esempio per radici doppie,  $m=2$  e quindi  $c = \frac{1}{2}$ .

Metodo di Newton modificato per radici di molteplicità  $m > 1$

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Si dimostra che l'ordine di convergenza del metodo di Newton modificato è 2.

### Ordine dei metodi:

Metodo di Newton	$p=2$	convergenza quadratica
Metodo delle secanti	$p=1.618$	convergenza superlineare
Metodo regula falsi		convergenza superlineare
Metodo di bisezione	$p=1$	convergenza lineare



## Metodi a convergenza globale

La convergenza è assicurata per qualsiasi scelta del punto iniziale appartenente all'intervallo che racchiude la radice, cioè  $x_0$  in  $[a, b]$  (Bisezione, Regula Falsi)

## Metodi a convergenza locale

La convergenza è assicurata per  $x_0$  appartenente ad un intorno della soluzione.  
(Secanti, Newton)

## Teorema di convergenza locale:

Se  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa le seguenti ipotesi

i)  $f(a)f(b) < 0$

ii)  $f, f', f''$  sono continue in  $[a; b]$ , ossia  $f \in C^2[a; b]$

iii)  $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$

allora esiste un intorno  $I \subset [a, b]$  dell'unica radice  $\alpha \in (a, b)$  tale che, se  $x \in I$ , allora la successione di Newton  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  converge ad  $\alpha$ .

Se la funzione soddisfa alcune condizioni, allora esiste un teorema che garantisce che il metodo di Newton converge globalmente:

## Teorema (di convergenza globale del metodo di Newton)

Sia  $f(x) \in C^2[a, b]$ ,  $[a, b]$  intervallo chiuso e limitato. Se sono verificate le seguenti condizioni

1.  $f(a)f(b) < 0$

2.  $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

3.  $f''(x) > 0$  oppure  $f''(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$

4.  $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a \quad \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a$

allora il metodo di Newton **converge** all'unica soluzione  $\alpha$  in  $[a, b]$ ,  
**per ogni scelta di  $x_0$  in  $[a, b]$ .**

- La condizione 1. assicura che una radice in  $(a,b)$  esista.
- La condizione 2. assicura che non vi siano tangenti orizzontali. Questo garantisce, insieme ad 1., che vi sia una sola radice interna ad  $(a,b)$ .
- La condizione 3. assicura che la concavità o convessità sia mantenuta su tutto  $[a,b]$ . Questo garantisce, insieme a 2., che gli iterati  $x_k$  siano monotoni per  $k > 1$ .
- La condizione 4. assicura che le tangenti agli estremi intersecano l'asse  $x$  internamente ad  $(a,b)$ . In tal modo tutti gli iterati  $x_k$  (escluso eventualmente  $x_0$ ) risulteranno interni ad  $(a,b)$ .

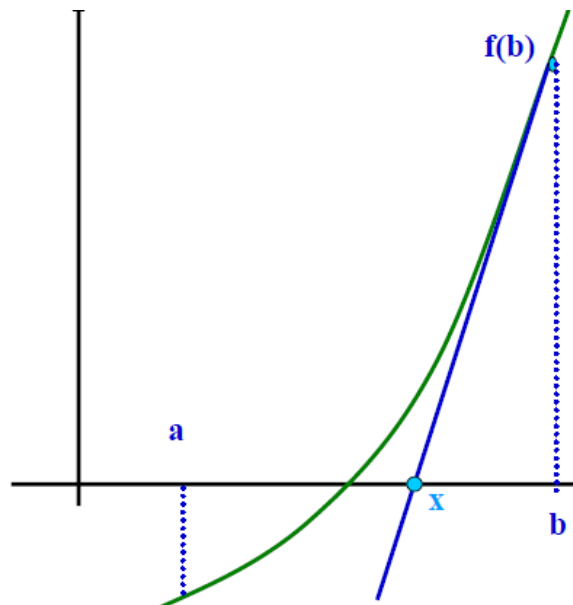
$$\begin{cases} y - f(b) = f'(b)(x - b) \\ y = 0 \end{cases}$$

Infatti, se consideriamo l'intersezione della tangente nell'estremo  $b$  con l'asse  $x$ , si ha

Da cui segue se

$$\left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| = |x - b| < b - a$$

La tangente negli estremi interseca l'asse  $x$  all'interno dell'intervallo  $[a,b]$



### Metodi ibridi

Il metodo di Newton e il metodo delle secanti sono metodi a convergenza locale. La difficoltà pratica sta nel trovare l'intervallo di convergenza, cioè nel trovare un valore iniziale  $x_0$  tale che la successione di iterati converga alla soluzione cercata. Un metodo pratico è quello di far precedere questi metodi da un metodo a convergenza globale come ad esempio il metodo di bisezione. Dopo alcuni passi del metodo globale si innesca quello di ordine superiore. Se esso non converge, si devono fare altri passi del metodo globale.

## Esempi di applicazioni reali

### 1. Piano di investimento

Si vuole calcolare il **tasso medio di rendita**  $r$  di un fondo di investimento in più anni.

Supponiamo che si **investano nel fondo**  $v$  **euro all'inizio di ogni anno** a che alla fine dell'**ennesimo anno** si **sia accumulato un montante pari a**  $M$  **euro**. La seguente relazione **lega**  $M$  **a**  $r$ :

$$M = v \frac{1+r}{r} [(1+r)^n - 1]$$

Si deduce che il tasso di rendimento percentuale  $r$  è lo zero dell'equazione non lineare:

$$f(r) = 0$$

con

$$f(r) = M - v \frac{1+r}{r} [(1+r)^n - 1]$$

Considerando che  $v$  sia pari a 1000 euro e che, dopo 5 anni, il montante  $M$  sia 6000 euro, si ricava che  $f$  nell'intervallo di ricerca  $[0.01, 0.1]$  ha la radice 0.06. In particolare, risolvendo con il metodo di bisezione e utilizzando una precisione pari a  $10^{-12}$ , si ottiene il valore 0.061402 dopo 36 iterazioni. Si può quindi concludere che il tasso di interesse è del 6.14%.

Il metodo di Newton, partendo da  $x_0=0.3$  e con criterio di arresto pari a  $|x_k - x_{k+1}| \leq 10^{-12}$ , converge in 6 iterazioni.

## 2. Anomalia media di un pianeta

Consideriamo l'equazione di Keplero, che lega l'anomalia media di un pianeta ( $m$ ), l'anomalia eccentrica ( $x$ ) e l'eccentricità ( $E$ ) della sua orbita.

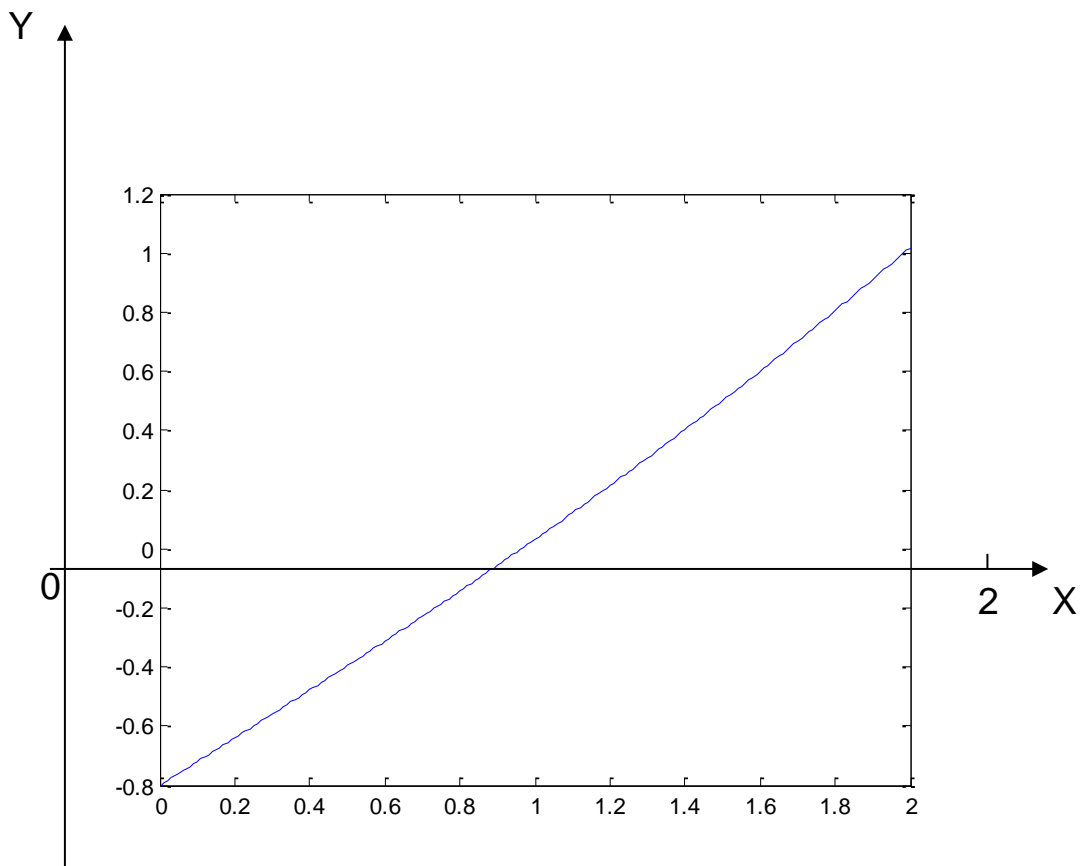
$$m = x - E \sin x$$

Data l'anomalia media  $m=0.8$  e l'eccentricità  $E=0.2$  di un pianeta, vogliamo trovare l'anomalia eccentrica.

Si consideri quindi

$$f(x) = x - E \sin x - m$$

in  $[0, 2]$ .



Si osserva che  $f(0)=-0.8$  e  $f(2)=1$ , quindi l'intervallo contiene sicuramente  $x^*$  tale che  $f(x^*)=0$ . ( $x^*=0.96$ )

### 3. Decadimento di una sostanza chimica

Supponiamo che una reazione chimica origini ad un certo istante  $t$  una certa concentrazione di un particolare ione data dalla legge

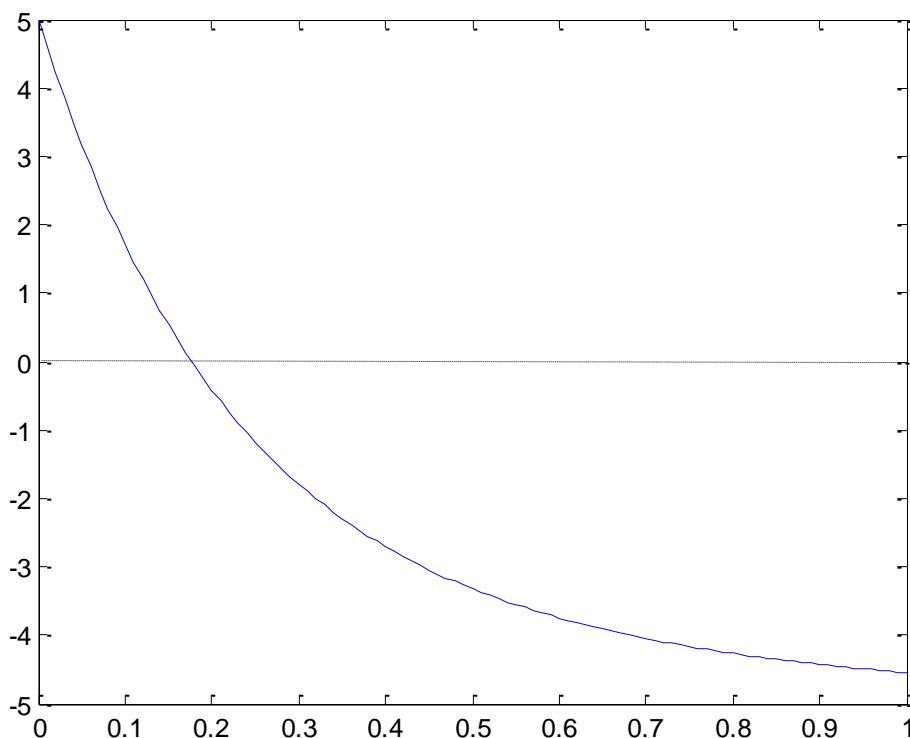
$$c(t) = 7e^{-5t} + 3e^{-2t}$$

All'istante iniziale la concentrazione sarà  $c(0)=10$ , ci chiediamo a quale istante  $t^*$  la concentrazione si sarà dimezzata, ossia  $c(t^*)=5$ .

Tale problema sarà equivalente a quello di determinare lo zero della funzione

$$f(t) = 7e^{-5t} + 3e^{-2t} - 5 = 0$$

Per  $t = [0,1]$ , si ha il seguente grafico



## Sistemi di equazioni non lineari

Un sistema di equazioni non lineari può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

con  $f_i: R^n \rightarrow R$ ,  $i = 1, \dots, n$  funzioni non lineari continue e differenziabili.

Consideriamo la funzione  $F: R^n \rightarrow R^n$ , **funzione a valori vettoriali**,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n \rightarrow F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

calcolare **la soluzione del sistema (1)**, cioè calcolare il vettore  $\alpha =$

$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T \in R^n$  che annulla contemporaneamente le equazioni **equivalente a**  
**calcolare  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T \in R^n$  tale che  $F(\alpha)=0$ .**

Il gradiente di una funzione  $f: R^n \rightarrow R$ , differenziabile è dato da

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Lo **Jacobiano** di  $F(X)$  è la matrice

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Si ha inoltre che  $\nabla F(X) = J^T(X)$

### Esempio 1:

Calcolare il punto di intersezione tra il cerchio di coordinate  $x_1^2 + x_2^2 - 9$  e la retta  $x_1 + x_2 = 3$ .

Si devono trovare i punti che annullano simultaneamente le funzioni

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 9 \text{ e } f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 3$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema non lineare

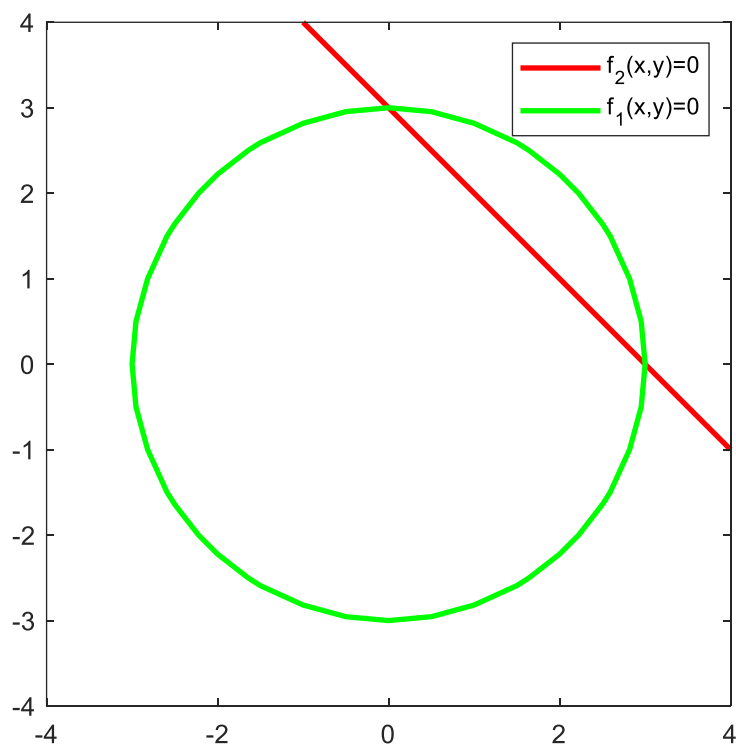
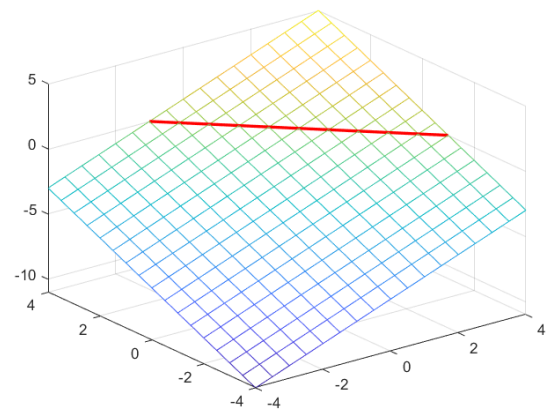
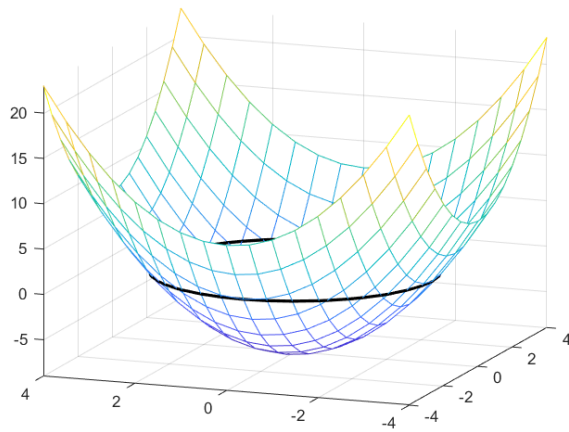
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

**Definizione di curva di livello di una funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .** Dato un valore reale  $k$ , si definisce curva di livello l'insieme dei punti del dominio che soddisfano l'equazione  $f(x, y) = k$ .

Per localizzare le radici del sistema si disegnano le superfici  $z_1 = f_1(x_1, x_2)$

e  $z_2 = f_2(x_1, x_2)$  e le curve di livello  $f_1(x_1, x_2) = 0$  e  $f_2(x_1, x_2) = 0$ .





Dallo studio del grafico, è possibile individuare l'iterato iniziale  $X_0 \in R^2$  a partire dal quale generare la successione di iterati che converge alla soluzione.

## Metodo di Newton Raphson per la soluzione di un sistema di equazioni nonlineari

### Caso n=2

Data

$$F(X) = F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Individuare il vettore  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T \in R^2$  tale che  $F(\alpha) = 0$ .

Consideriamo lo sviluppo troncato al primo ordine di ciascuna delle due funzioni in

un intorno del punto  $X_k = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}]^T \in R^2$

$$\begin{cases} 0 = f_1(X) \approx f_1(X_k) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^{(k)})(x_1 - x_1^{(k)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_2^{(k)})(x_2 - x_2^{(k)}) \\ 0 = f_2(X) \approx f_2(X_k) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^{(k)})(x_1 - x_1^{(k)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_2^{(k)})(x_2 - x_2^{(k)}) \end{cases} \quad (2)$$

Indicato con

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

lo jacobiano di  $F(X)$ , la relazione (2) si può esprimere in forma matriciale come

$$F(X) = 0 \approx F(X_k) + (X - X_k)J(X_k)$$

$$J(X_k)X = X_k J(X_k) - F(X_k)$$

Sotto l'ipotesi che  $\det J(X_k) \neq 0$ , si ricava  $X$  premoltiplicando ambo i membri per  $J^{-1}(X_k)$

$$X = X_k - J^{-1}(X_k)F(X_k)$$

e si determina il procedimento iterativo:

$$X_{k+1} = X_k - J^{-1}(X_k)F(X_k)$$

Si osserva che  $-J^{-1}(X_k)F(X_k)$  è la soluzione del sistema lineare

$$J(X_k)s_k = -F(X_k)$$

quindi

$$X_{k+1} = X_k + s_k$$

L'algoritmo di Newton Raphson si può così schematizzare

L'algoritmo si può così schematizzare

Dato  $X_0 \in R^n$  ed  $F$ , per ogni iterazione  $k$

1. Valutare  $J(X_{k-1})$
2. Risolvere il sistema lineare  $J(X_{k-1})s_{k-1} = -F(X_{k-1})$
3. Porre  $X_k = X_{k-1} + s_{k-1}$

**E' un metodo a convergenza locale e ordine di convergenza quadratico.**

**Nel caso**

$$F(X) = F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 9 \\ x_1 + x_2 - 3 \end{bmatrix}$$

$$J(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Varianti del Metodo di Newton-Raphson

La valutazione dello Jacobiano richiede di conoscere o poter valutare  $n^2$  derivate parziali.

Alcune varianti al metodo possono migliorarne l'efficienza.

### 1. Approssimazione con rapporti incrementali

Sostituire a  $J(X_{k-1})$ , il cui calcolo esplicito può essere molto costoso, una sua approssimazione ottenuta mediante rapporti incrementali n-dimensionali del tipo

$$\left. \frac{\partial f_j}{\partial X_i} \right|_{X=X_{k-1}} \approx (J^{(k-1)})_{ij} = \frac{f_j(X_{k-1} + e_i h_{ij}) - f_j(X_{k-1})}{h_{ij}}$$

Dove  $e_i$  è l'i-esimo vettore della base canonica  $R^n$

$h_{ij}$  incremento scelto ad ogni passo  $k$ .

Il metodo che si ottiene è l'analogo n-dimensionale di quello delle secanti,

### 2. Metodo delle corde.

Si utilizza lo stesso Jacobiano o una sua approssimazione  $J(X_0)$  oppure  $A(X_0)$  per tutte le iterazioni  $k$ . Si potrebbe quindi fattorizzare  $J(X_0)=LU$  e utilizzare i medesimi  $L$  ed  $U$  per ogni iterazione.

### 3. Metodo di Shamanskii

Si valuta lo Jacobiano ogni  $m$  iterazioni e quindi lo si utilizza per le  $m$  iterazioni successive:

$$J^{k+i} = J^i \quad i=1, \dots, m$$

Giunti al calcolo di  $x_{k+m+1}$  si rivaluta lo Jacobiano.

## Metodo di Newton-Raphson per il calcolo del minimo di una funzione in più variabili.

Data  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $f \in C^2$  (differenziabile due volte con continuità), trovare  $x \in R^n$  tale che  $\min_{x \in R^n} f(x)$ .

I punti di stazionarietà locale  $\alpha$  sono soluzione del seguente sistema non lineare

$$\nabla f(\alpha) = 0$$

Applichiamo il metodo di Newton Raphson al sistema non lineare

$$\nabla f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Per verificare poi se tale punto è un massimo, un minimo oppure un punto sella, occorrerà esaminare la matrice hessiana  $H(x) = \nabla^2 f(x)$  in questo punto, dove la matrice hessiana è così definita:

$$(H(x))_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$
$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix}$$

Se il **determinante della matrice Hessiana** calcolata nel punto di **stazionarietà**

- **è positivo e l'elemento in posizione (1,1) è positivo**, si tratta di un minimo locale, ;
- **è positivo e l'elemento in posizione (1,1) è negativo**, si tratta di un massimo locale,
- **è negativo**, si tratta di un punto sella
- **è nullo**, non ci sono informazioni sulla natura del punto di stazionarietà.

Consideriamo uno sviluppo di Taylor del primo ordine di  $\nabla f(x)$  in un intorno di  $x_k \in R^n$ , trascurando il resto

$$\nabla f(x) = 0 \approx \nabla f(x_k) + (x - x_k)H(x_k)$$

$$H(x_k)x = x_k H(x_k) - F(x_k)$$

**L'algoritmo di Newton-Raphson per la minimizzazione diventa:**

Dato  $x_0 \in R^n$  ed  $F$ , per ogni iterazione  $k$

1. Valutare  $H(x_{k-1})$
2. Risolvere il sistema lineare  $H(x_{k-1})s_{k-1} = -\nabla f(x_{k-1})$
3. Porre  $x_k = x_{k-1} + s_{k-1}$

$s_{k-1}$  definisce una direzione di discesa da  $x_{k-1}$  ad  $x_k$