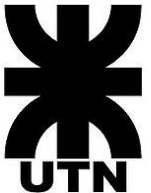


ÁLGEBRA DE BOOLE

Técnicas Digitales I

Luis Eduardo Toledo



ÁLGEBRA DE BOOLE

- Se conoce con ese nombre en honor a George Boole, matemático inglés quien en 1854 publicó un libro donde se presentaba la teoría matemática de la lógica.
- Se utiliza para describir la interconexión de compuertas digitales y para transformar diagramas de circuitos en expresiones algebraicas.

ÁLGEBRA DE BOOLE: DEFINICIÓN

- Un álgebra de Boole es toda clase o conjunto de elementos que pueden tomar dos valores perfectamente diferenciados, que se suelen asignar a los números 0 y 1 de un código binario.
- Dichos elementos están relacionados mediante las operaciones binarias denominadas suma lógica (+), producto lógico (.) y complementación o inversión (/) y cumplen con los siguientes postulados:

POSTULADOS

a) Ambas operaciones son **conmutativas**, es decir si a y b son elementos del álgebra se verifica:

$$a+b = b+a$$

$$a.b = b.a$$

b) Posee dos **elementos neutros**, el 0 y el 1, que cumplen la propiedad de identidad con respecto a cada una de las operaciones suma lógica y producto lógico:

$$0+a=a$$

$$1.a=a$$

POSTULADOS

c) Cada operación es **distributiva** con respecto a la otra:

$$a.(b+c) = a.b+a.c$$

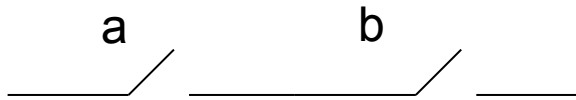
$$a+b.c = (a+b).(a+c)$$

d) Para cada elemento “a” del álgebra existe un elemento “/a” (se lo llama **a negado**) tal que:

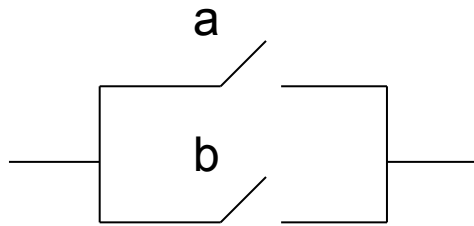
$$a + /a = 1$$

$$a . /a = 0$$

EJEMPLO CON LLAVES



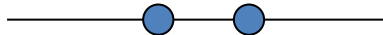
$a \cdot b$ conexión serie
Producto lógico



$a + b$ conexión paralela
Suma lógica



"0" circuito abierto



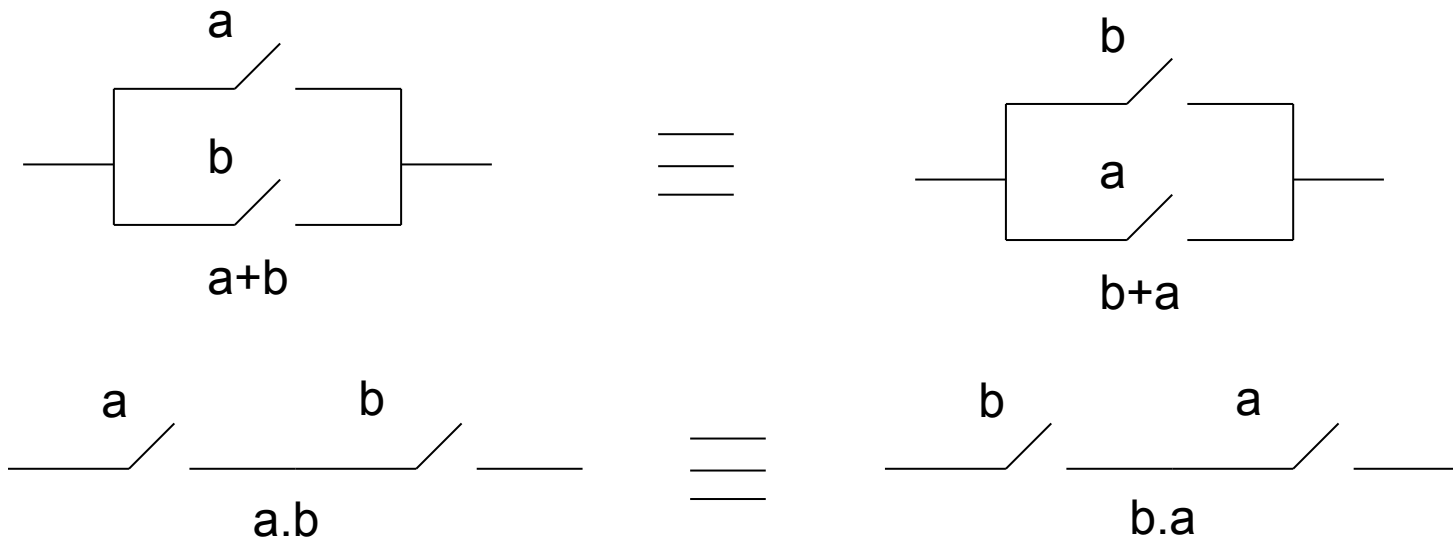
"1" corto circuito

POSTULADOS CON LLAVES

a) Ambas operaciones son conmutativas, es decir si a y b son elementos del álgebra se verifica:

$$a+b = b+a$$

$$a.b = b.a$$

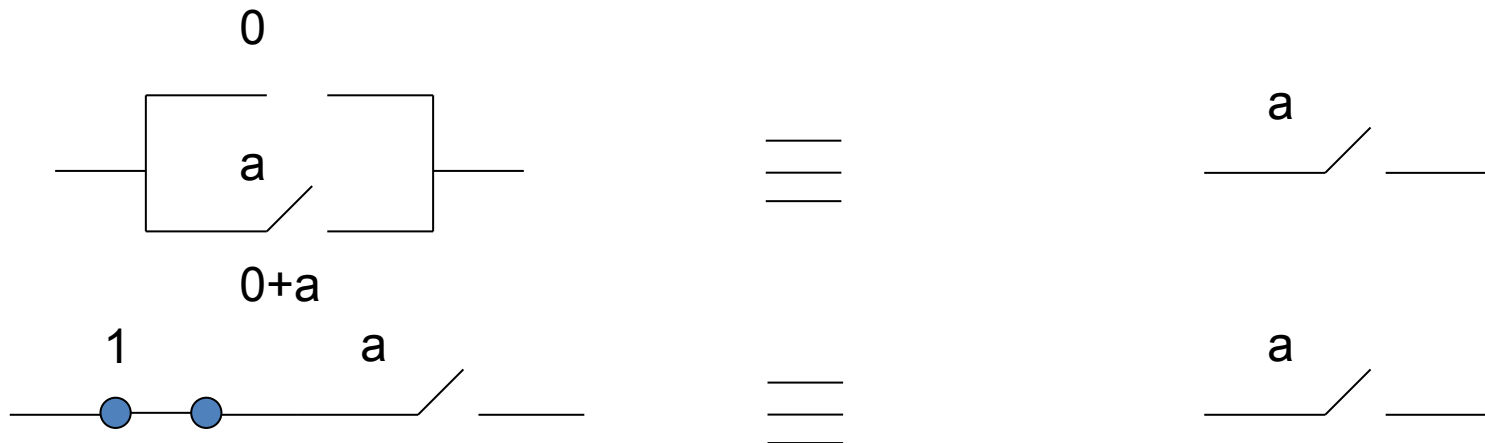


POSTULADOS CON LLAVES

b) Posee dos elementos neutros, el 0 y el 1, que cumplen la propiedad de identidad con respecto a cada una de las operaciones suma lógica y producto lógico:

$$0+a=a$$

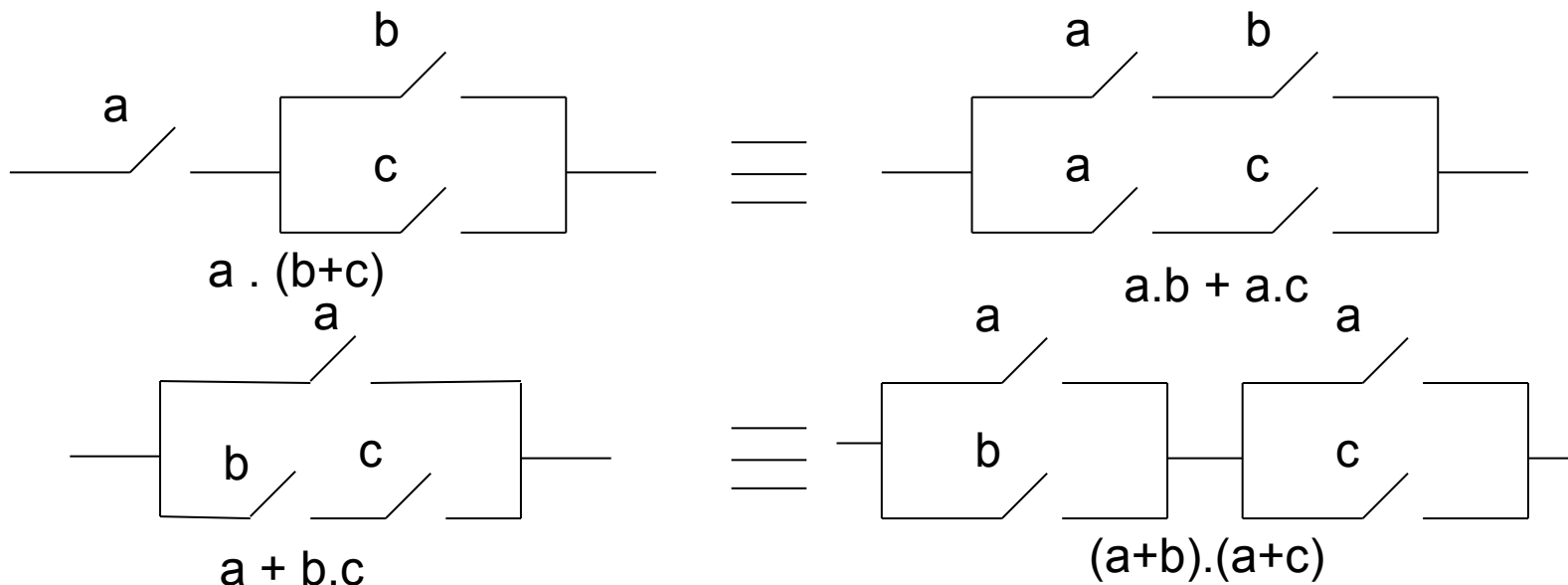
$$1.a=a$$



POSTULADOS CON LLAVES

c) Cada operación es distributiva con respecto a la otra:

$$a.(b+c) = a.b+a.c$$
$$a+b.c = (a+b).(a+c)$$

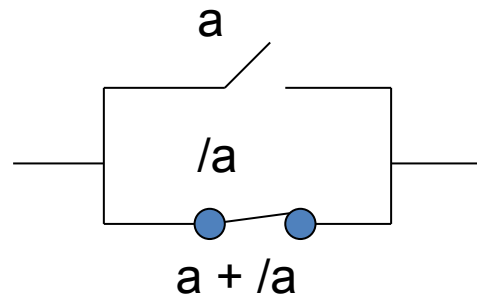


POSTULADOS CON LLAVES

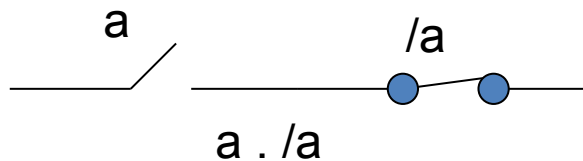
d) Para cada elemento a del álgebra existe un elemento $/a$ (a negado) tal que:

$$a + /a = 1$$

$$a \cdot /a = 0$$



\equiv
 \equiv
 \equiv 1



\equiv
 \equiv
 \equiv 0

LÓGICA Y COMPUERTAS

Los posibles valores binarios de la operación OR lógica son los siguientes:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

de la operación AND lógica:

$$0 \cdot 0 = 0$$

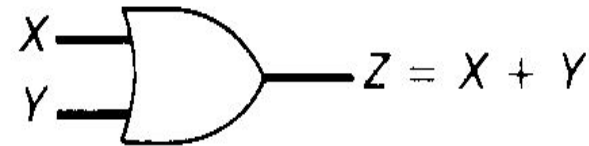
$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

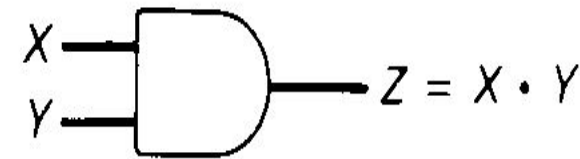
$$1 \cdot 1 = 1$$

de la operación NOT

$x = 1$ / $x = 0$ y viceversa.



Compuerta OR



Compuerta AND



Compuerta NOT o inversor

LÓGICA Y TABLA DE VERDAD

Una tabla de verdad es una disposición de las combinaciones de las variables binarias que muestra la relación entre los valores que pueden tomar las variables y el resultado de la operación.

Tablas de verdad de las tres operaciones lógicas

AND			OR			NOT	
X	Y	$X \cdot Y$	X	Y	$X + Y$	X	\bar{X}
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

TEOREMAS

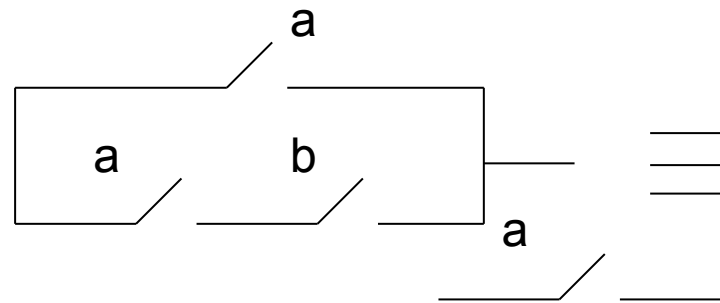
1) Principio de dualidad.

Dada una igualdad, si se cambia suma lógica (+) por producto lógico (.), producto lógico por suma lógica, ceros por unos y unos por ceros, la igualdad permanece válida.

Se demuestra por la simetría de los postulados!!

2) Ley de Absorción

$$a + a \cdot b = a$$



TEOREMAS

3) Teorema del consenso

$$x.y + /x.z + y.z = x.y + /x.z$$

Se demuestra que el tercer término es redundante y se puede eliminar.

$$\begin{aligned} x.y + /x.z + y.z &= x.y + /x.z + y.z (x + /x) \\ &= x.y + /x.z + x.y.z + /x.y.z \\ &= x.y + x.y.z + /x.z + /x.y.z \\ &= x.y (1 + z) + /x.z (1 + y) \\ &= x.y + /x.z \end{aligned}$$

TEOREMAS

4) Teorema de De Morgan

$$\overline{(x+y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$$

Tablas de verdad para verificar el teorema de DeMorgan

A.	X	Y	X + Y	$\overline{(X + Y)}$	B.	X	Y	\overline{X}	\overline{Y}	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$
	0	0	0	1		0	0	1	1	1
	0	1	1	0		0	1	1	0	0
	1	0	1	0		1	0	0	1	0
	1	1	1	0		1	1	0	0	0