

Taller de momentos de Inercia y Autovalores

Deiner Samuel Duran Cáceres - 2230673

Héctor Dario Cortes Martinez - 2230669

Estudiantes de Física

Luis Alberto Nuñez de Villavicencio Martínez

Profesor a cargo

Escuela de Física

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga, Colombia

23 de mayo de 2025

Índice

1. Introducción	2
2. Metodología	3
2.1. 2 Dimensiones	3
2.2. 3 Dimensiones	3
3. Resultados	4
3.1. 2 Dimensiones	4
3.2. 3 Dimensiones	7

1. Introducción

En el estudio de los fenómenos físicos, es común partir de modelos idealizados con propiedades simétricas, lo cual permite comprender los principios fundamentales antes de extrapolar a sistemas más complejos y realistas. En particular, cuando se analiza un sistema compuesto por múltiples partículas, es habitual tratarlo como un solo cuerpo rígido, sobre el cual se aplican las leyes del movimiento para estudiar las interacciones involucradas.

Uno de los conceptos clave en el análisis del movimiento rotacional es el momento de inercia, una magnitud física que cuantifica la resistencia de un objeto a cambiar su estado de rotación respecto a un eje determinado. Este puede considerarse el análogo rotacional de la masa en el movimiento lineal. Dependiendo de la distribución de la masa, el momento de inercia puede calcularse de forma discreta, mediante sumatorias, o de forma continua, mediante integrales.

Sin embargo, esta descripción escalar resulta suficiente solo en sistemas con simetría simple y rotaciones alrededor de un único eje. En situaciones más generales, donde un cuerpo puede rotar en torno a diferentes ejes o en múltiples direcciones simultáneamente, se requiere una descripción más completa. Es aquí donde entra en juego el concepto del tensor de inercia, una matriz simétrica que generaliza el momento de inercia y permite describir completamente la distribución de masa de un cuerpo respecto a todos los posibles ejes de rotación que pasan por un punto dado, usualmente el centro de masa.

El tensor de inercia no solo permite calcular los momentos de inercia respecto a cualquier eje arbitrario, sino que también proporciona información sobre los ejes principales de inercia y la dinámica rotacional completa del cuerpo rígido. Esta herramienta es fundamental en la mecánica del cuerpo rígido, especialmente en el estudio del movimiento tridimensional y la estabilidad de sistemas rotacionales.

2. Metodología

Para estudiar estos sistemas en donde no se cumplen simetrías sino que al contrario, las partículas están distribuidas en múltiples direcciones, se plantea este taller en el cual se toma la información de 1533 partículas como su masa y posición en el espacio y se procesan computacionalmente para encontrar información clave como lo son los momentos y ejes principales de inercia. Lo anterior en dos partes, cuando se consideran 2 dimensiones y cuando se considera todo el espacio de 3 dimensiones.

2.1. 2 Dimensiones

Se consideran el conjunto de partículas distribuidas en coordenadas (x_i, y_i) . A partir de estos datos se calculan los siguientes momentos:

- **Momento de orden cero:** Representa la masa total del sistema,

$$M = \sum_i m_i, \quad (1)$$

- **Momento de orden uno:** Determina la posición del centro de masa,

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i, \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i, \quad (2)$$

- **Momento de orden dos:** Se calcula la matriz de inercia respecto al centro de masa,

$$I = \begin{bmatrix} \sum_i m_i (y_i - y_{\text{cm}})^2 & -\sum_i m_i (x_i - x_{\text{cm}})(y_i - y_{\text{cm}}) \\ -\sum_i m_i (x_i - x_{\text{cm}})(y_i - y_{\text{cm}}) & \sum_i m_i (x_i - x_{\text{cm}})^2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

- **Autovalores y autovectores:** Se determinan para analizar la orientación de los ejes principales de inercia.
- **Gráfico:** Se muestra la distribución espacial de las partículas con sus respectivas masas y la ubicación del centro de masa.

2.2. 3 Dimensiones

De igual modo, se aplican los mismos principios que para el caso anterior pero ahora teniendo en cuenta la componente z de las posiciones de los datos. En ese caso los ítems calculados son:

- **Momento de orden cero** que representa la masa total del sistema,

$$M = \sum_i m_i, \quad (4)$$

- **Momento de orden uno** que determina la posición del centro de masas en tres dimensiones,

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \quad z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \quad (5)$$

- **Momento de orden dos** que es la matriz de inercia con respecto al centro de masas,

$$I_{xx} = \sum_i m_i [(y_i - y_{cm})^2 + (z_i - z_{cm})^2] \quad I_{xy} = - \sum_i m_i (x_i - x_{cm})(y_i - y_{cm}), \quad (6)$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i [(x_i - x_{cm})^2 + (z_i - z_{cm})^2] \quad I_{xz} = - \sum_i m_i (x_i - x_{cm})(z_i - z_{cm}), \quad (7)$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i [(x_i - x_{cm})^2 + (y_i - y_{cm})^2] \quad I_{yz} = - \sum_i m_i (y_i - y_{cm})(z_i - z_{cm}), \quad (8)$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Y se tienen en cuenta también los **autovalores y autovectores** para analizar la orientación de los ejes principales de inercia. Además, se compactaron los datos en gráficos de la distribución espacial de las partículas con su respectiva masa y ubicación del centro de masas.

3. Resultados

Los datos propuestos fueron analizados en un código de Python adjunto a este documento y se pudieron encontrar los siguientes resultados:

3.1. 2 Dimensiones

Aunque este es el caso para dos dimensiones, el momento de orden cero que corresponde a la masa total del sistema es igual sin importar las dimensiones que se tengan en cuenta, ya que las partículas no varían su masa respecto a su ubicación en el plano. En base a esto, el momento de orden cero calculado fue de

$$M = \sum_i m_i = 4627[M]. \quad (10)$$

Por otro lado, el momento de inercia de primer orden, que determina la posición del centro de masa para ambas coordenadas es

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i = 825,815[cm] \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i = 776,919[cm], \quad (11)$$

posición que se puede ver mejor en la gráfica (1), que muestra el centro de masas acompañado en medio del sistema de partículas y, como se puede ver, aunque tiende a ubicarse en el centro geométrico de la distribución, esto se cumple ya que la distribución de masas es casi homogénea y hay simetría en la figura general del sistema.

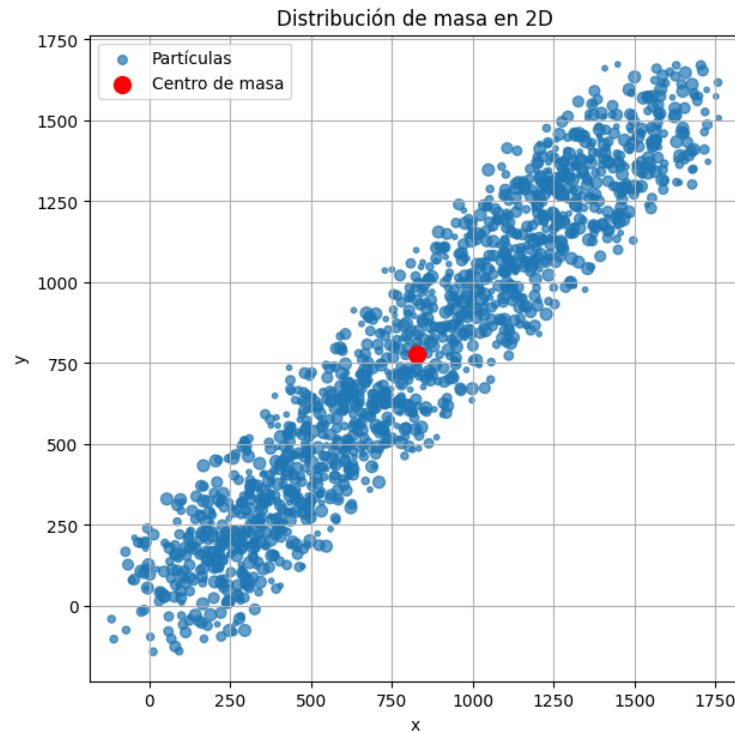


Figura 1: Posición del centro de masas en dos dimensiones

Finalmente, el momento de inercia de orden dos, es decir, la matriz de inercia respecto al eje cartesiano es

$$I = \begin{bmatrix} 9,63660148 \times 10^8 & -9,11747911 \times 10^8 \\ -9,11747911 \times 10^8 & 9,58535589 \times 10^8 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Sin embargo, en muchas ocasiones, la base original en la que se expresa el tensor de inercia no resulta ser la más conveniente para el análisis, ya que la matriz del tensor de inercia presenta componentes fuera de la diagonal. Estos términos, conocidos como productos de inercia, complican tanto la interpretación física como los cálculos involucrados en el estudio de la dinámica rotacional.

Para simplificar esta situación, se recurre al planteamiento de un problema de valores y vectores propios aplicado al tensor de inercia. La solución de este problema permite encontrar un sistema de coordenadas ortogonal, llamado el sistema de ejes principales de inercia, en el cual la matriz del tensor de inercia se vuelve diagonal. En esta nueva base, los valores propios corresponden a los momentos principales de inercia, que son los momentos de inercia respecto a los ejes principales y, los vectores propios asociados definen las direcciones de esos ejes principales de rotación. Siguiendo este análisis, los vectores cartesianos sobre el que esta la figura (1) no se consideran autovectores del tensor de inercia debido a que tiene término fuera de la diagonal no nulos.

Al resolver el problema de valores y vectores propios, se tiene que los valores y su vector

correspondiente son

$$\lambda_1 = 4,93463569 \times 10^7 \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -0,7061125 \\ -0,70809967 \end{bmatrix} \quad (13)$$

y también

$$\lambda_2 = 1,87284938 \times 10^9 \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -0,70809967 \\ 0,7061125 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Y para transformar los vectores de la base cartesiana a la base de autovectores, se plantea una matriz de cambio de base definida a partir de la combinación de los anteriores autovectores, en este caso la matriz es

$$P = \begin{bmatrix} -0,7061125 & -0,70809967 \\ -0,70809967 & 0,7061125 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Este nuevo eje de referencia se puede ver en la figura (2), donde las líneas negras sobre el centro de masas corresponden a la base del nuevo eje de referencia y en donde están los momentos principales de inercia, los cuales también forman la matriz de inercia,

$$I_{\text{principal}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,93463569 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 1,87284938 \times 10^9 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

la cual solo tiene términos en la diagonal como se esperaba de este nuevo y mejor eje coordenado

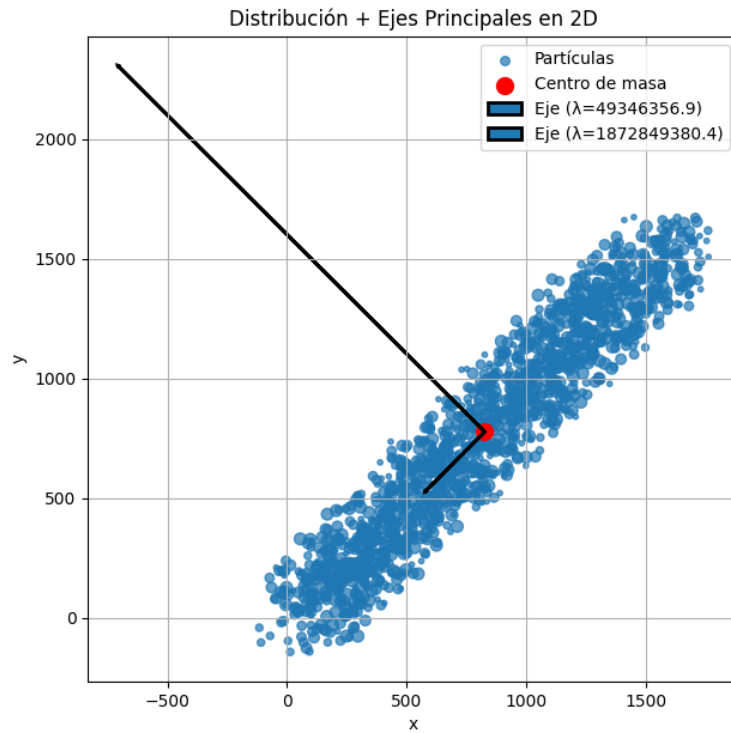


Figura 2: Ejes principales de inercia para Dos Dimensiones

3.2. 3 Dimensiones

Ahora se aplican los mismo análisis que en el caso anterior pero incluyendo a la dimensión z. En ese caso, el momento de orden cero es el mismo ya que no varía la masa en función de la componente z. Por su parte, los momentos de grado uno, es decir, las posiciones del momento de masas son

$$x_{cm} = 825,815[cm] \quad y_{cm} = 776,919[cm] \quad z_{cm} = 15,503[cm], \quad (17)$$

las cuales están representadas en el espacio 3D en la figura (3):

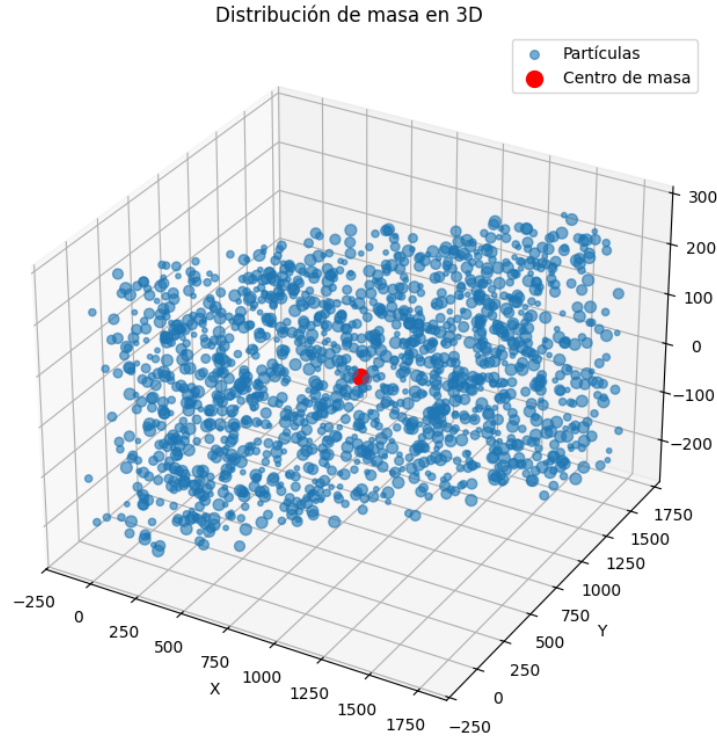


Figura 3: Distribución de Masas 3D

Además, la matriz de inercia desde el espacio tridimensional cartesiano es

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1,06550347 \times 10^9 & -9,11747911 \times 10^8 & 7,14204864 \times 10^6 \\ -9,11747911 \times 10^8 & 1,06037891 \times 10^9 & 1,92959724 \times 10^6 \\ 7,14204864 \times 10^6 & 1,92959724 \times 10^6 & 1,92219574 \times 10^9 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

aunque tampoco es la mejor adaptación del momento de inercia de segundo orden debido a los términos no nulos fuera de la diagonal, por lo que se puede decir que el espacio tridimensional cartesiano no son autovectores del momento principal de inercia.

Para encontrar la mejor base que describa esta distribución de partículas, se hace nuevamente el problema de autovalores y autovectores, cuyos resultados ahora son:

$$\lambda_1 = 1,51166481 \times 10^8 \quad , \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -0,70611307 \\ -0,70808985 \\ 0,00361904 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\lambda_2 = 1,92196006 \times 10^9 \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0,04694255 \\ -0,05190995 \\ -0,99754787 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\lambda_3 = 1,97495158 \times 10^9 \quad , \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0,70654139 \\ -0,7042117 \\ 0,06989384 \end{bmatrix} . \quad (21)$$

Y en base a estos autovectores se construye la matriz de transformación que permite convertir vectores del espacio tridimensional cartesiano al eje coordenado principal de inercia. La matriz de transformación es

$$P = \begin{bmatrix} -0,70611307 & 0,04694255 & 0,70654139 \\ -0,70808985 & -0,05190995 & -0,7042117 \\ 0,00361904 & -0,99754787 & 0,06989384 \end{bmatrix} \quad (22)$$

mientras que los momentos principales de inercia en este nuevo eje coordenado son

$$I_{\text{principal}} = \begin{bmatrix} 1,51166481 \times 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 1,92196006 \times 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1,97495158 \times 10^9 \end{bmatrix} , \quad (23)$$

la cual como se puede ver es más fácil de trabajar ya que sus únicos términos son los que están en su diagonal, por lo que no hay términos de momentos cruzados, es decir, los momentos están desacoplados.

Finalmente, en la figura (4) se ve la diferencia entre el eje de momentos principales de inercia (líneas negras) y el eje tridimensional cartesiano, es decir, el eje mostrado en la figura es el óptimo para el desarrollo de problema matemático.

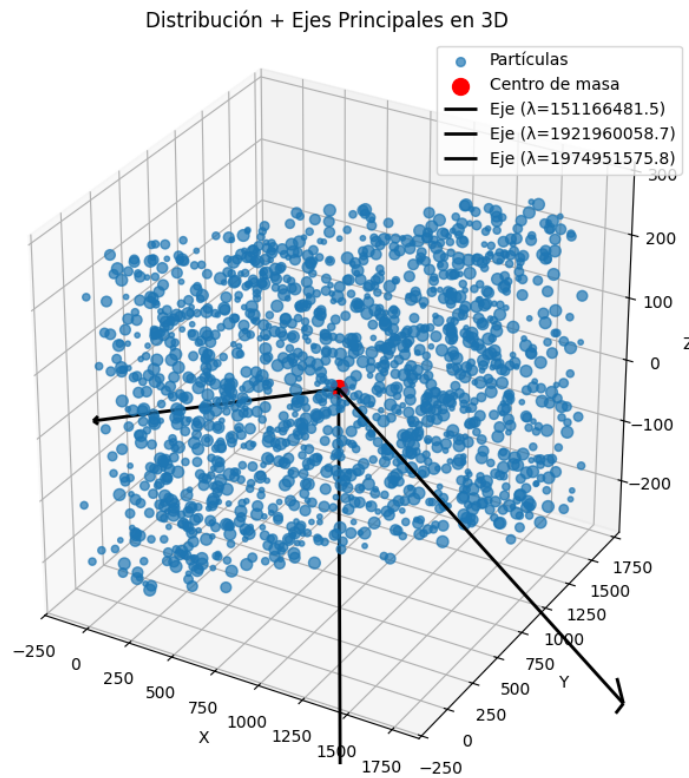


Figura 4: Ejes principales de Inercia en 3D

En este taller se analizó el significado físico de los distintos grados del tensor de inercia. Además, se destacó la utilidad de plantear el problema de autovalores y autovectores para simplificar el estudio de las matrices de inercia, permitiendo así seleccionar un sistema de referencia adecuado que facilite tanto la interpretación como los cálculos de los modelos que se deseen analizar.