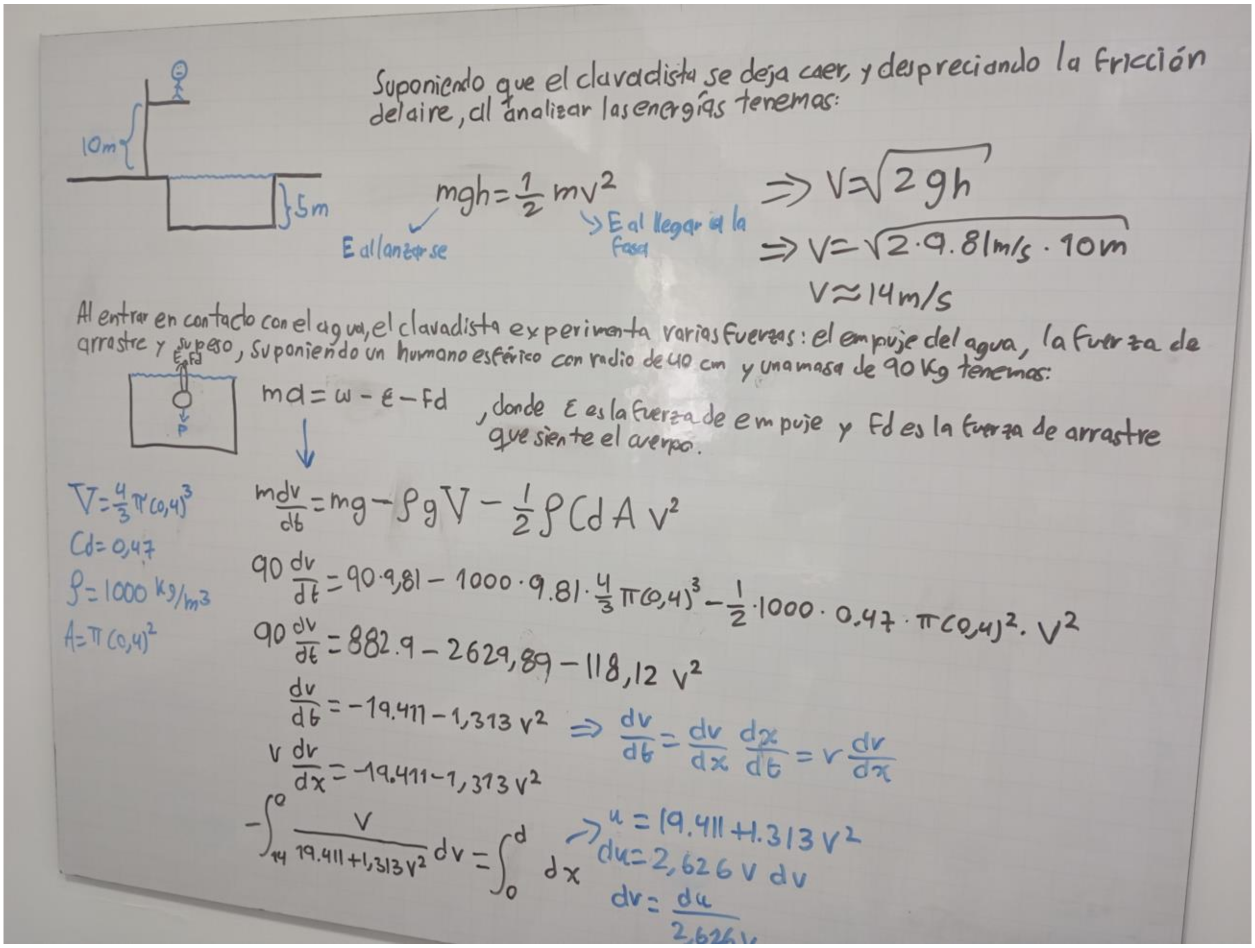
Desarrollo tareas primera semana

Héctor Cortés 2230669 – Deiner Durán 2230673



Suponiendo que el clavadista se deja caer, y despreciando la fricción del aire, al analizar las energías tenemos:

10m

5m

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

E al lanzarse

E al llegar a la fosa

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2 \cdot 9.81 m/s \cdot 10m}$$

$$V \approx 14 m/s$$

Al entrar en contacto con el agua, el clavadista experimenta varias fuerzas: el empuje del agua, la fuerza de arrastre y su peso, suponiendo un humano esférico con radio de 40 cm y una masa de 90 Kg tenemos:

E, Fd, P

$ma = w - E - Fd$, donde E es la fuerza de empuje y Fd es la fuerza de arrastre que siente el cuerpo.

$V = \frac{4}{3}\pi(0,4)^3$

$Cd = 0,47$

$\rho = 1000\ kg/m^3$

$A = \pi(0,4)^2$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \rho g V - \frac{1}{2}\rho\, Cd\, A\, v^2$$

$$90\frac{dv}{dt} = 90 \cdot 9,81 - 1000 \cdot 9.81 \cdot \frac{4}{3}\pi(0,4)^3 - \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 0.47 \cdot \pi(0,4)^2 \cdot V^2$$

$$90\frac{dv}{dt} = 882.9 - 2629,89 - 118,12\, v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -19.411 - 1,313\, v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

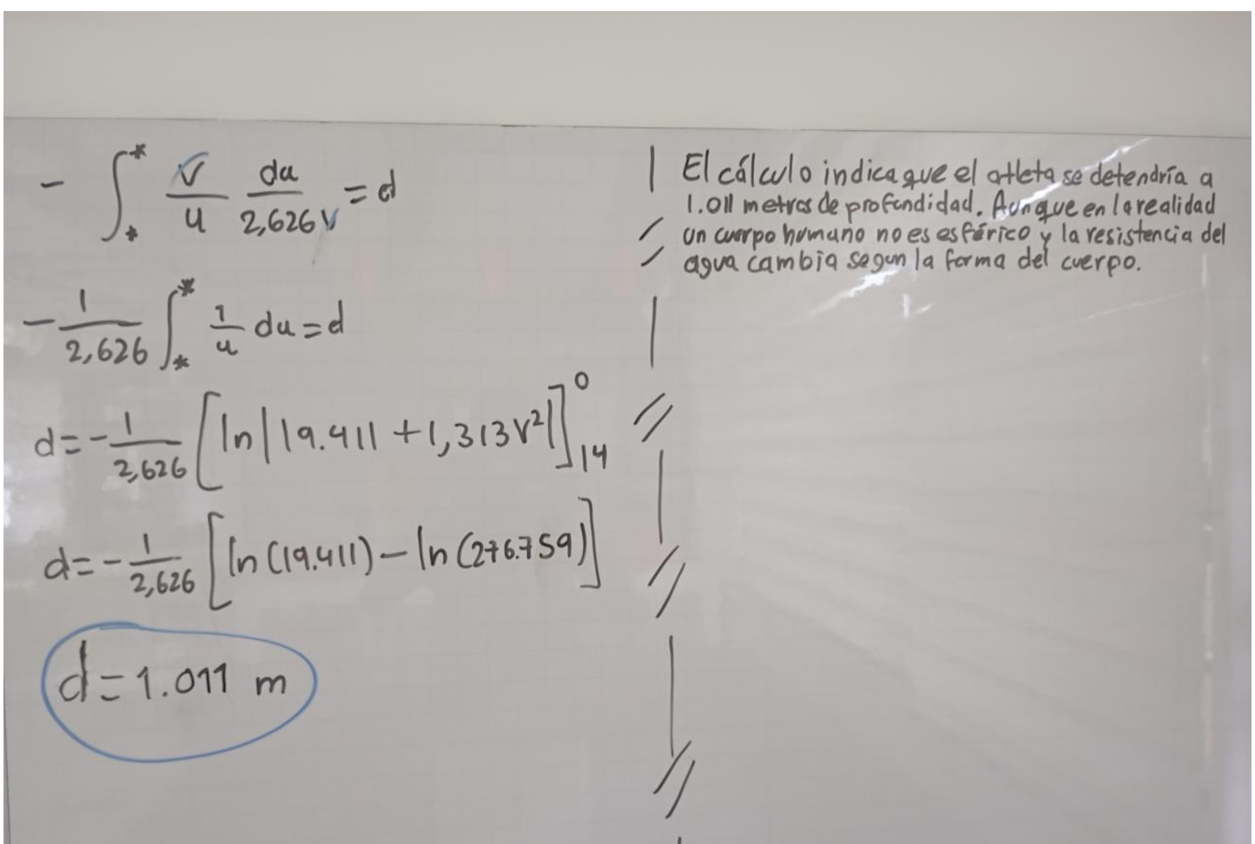
$$v\frac{dv}{dx} = -19.411 - 1,313\, v^2$$

$$-\int_{14}^{0} \frac{v}{19.411 + 1,313v^2}\, dv = \int_0^d dx$$

$$\rightarrow u = 19.411 + 1.313 v^2$$

$$du = 2,626\, v\, dv$$

$$dv = \frac{du}{2,626 v}$$



$$-\int_*^* \frac{v}{u}\frac{du}{2,626 v} = d$$

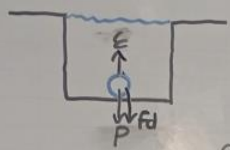
$$-\frac{1}{2,626}\int_*^* \frac{1}{u}\, du = d$$

$$d = -\frac{1}{2,626}\left[\ln\left|19.411 + 1,313v^2\right|\right]_{14}^{0}$$

$$d = -\frac{1}{2,626}\left[\ln(19.411) - \ln(276.759)\right]$$

$$d = 1.011\ m$$

El cálculo indica que el atleta se detendría a 1.011 metros de profundidad. Aunque en la realidad un cuerpo humano no es esférico y la resistencia del agua cambia según la forma del cuerpo.



$$m\frac{dv}{dt} = \rho g V - mg - \frac{1}{2}\rho C_d A v^2$$

Diametro = 5 cm
Radio = 0,025 m

$V = \frac{4}{3}\pi(0{,}025)^3$

$C_d = 0{,}47$

$\rho = 1000 kg/m^3$

$A = \pi(0{,}025)^2$

$\rho_{corcho} = 240 Kg/m^3$

$m = \rho_{corcho} V \approx 0{,}0157 Kg$

$$0{,}0157\frac{dv}{dt} = 1000\cdot 9{,}81\cdot\frac{4}{3}\pi(0{,}025)^3 - 0{,}0157\cdot 9{,}81 - \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 0{,}47\cdot\pi(0{,}025)^2\cdot v^2$$

$$0{,}0157\frac{dv}{dt} = 0{,}642 - 0{,}154 - 0{,}461v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = 31{,}08 - 29{,}36v^2 \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

$$v\frac{dv}{dx} = 31{,}08 - 29{,}36v^2$$

$$\int_0^v \frac{v}{31{,}08 - 29{,}36v^2}\,dv = \int_0^5 dx$$

$u = 31.08 - 29{,}36v^2$

$du = -58{,}72v^2\,dv$

$dv = \frac{du}{-58{,}72}$

$$\int_*^* \frac{\cancel{v}}{u}\,\frac{du}{-58{,}72\cancel{v}} = 5$$

$$-\frac{1}{58{,}72}\int_*^* \frac{1}{u}\,du = 5$$

$$\Big[\ln|31{,}08 - 29{,}36v^2|\Big]_0^v = -293{,}6$$

$$\ln|31{,}08 - 29{,}36v^2| - \ln(31{,}08) = -293{,}6$$

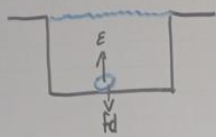
$$\ln\left(\frac{31{,}08 - 29{,}36v^2}{31{,}08}\right) = -293{,}6$$

$$\frac{31{,}08 - 29{,}36v^2}{31{,}08} = e^{-293{,}6} \qquad \rightarrow e^{-293{,}6} \approx 0$$

$$31{,}08 - 29{,}36v^2 = 29{,}94\, e^{-293{,}6}$$

$$31{,}08 - 29{,}36v^2 = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{31{,}08}{29{,}36}} \approx 1{,}03 \text{ m/s}$$



$$P = P_{atm} + \rho g h \qquad P_{fondo} = 101325\ Pa + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 5 \approx 150375\ Pa$$

A temperatura constante, se cumple la ley de Boyle:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow V(h) = V_{fondo} \frac{P_{fondo}}{P_{atm} + \rho g h}$$

Así el empuje de la burbuja es:

$$E = \rho g V(h) = \rho g V_{fondo} \frac{P_{fondo}}{P_{atm} + \rho g h}$$

La fuerza de arrastre:

$$F_d = \frac{1}{2} \rho C_d A(h) v^2 \qquad C_d = 0{,}47$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} \rho C_d \pi \left(\frac{3 V_{fondo}}{4\pi} \frac{P_{fondo}}{P_{atm} + \rho g h} \right)^{2/3} v^2$$

Para hallar $A(h)$ partimos de:

$$V(h) = \frac{4}{3} \pi r(h)^3 \qquad \Rightarrow A(h) = \pi \left(\frac{3 V(h)}{4\pi} \right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow r(h) = \left(\frac{3 V(h)}{4\pi} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow A(h) = \pi R(h)^2$$

$$A(h) = \pi \left(\frac{3 V_{fondo}}{4\pi} \frac{P_{fondo}}{P_{atm} + \rho g h} \right)^{2/3}$$

Por lo que la ecuación diferencial del movimiento nos queda:

$ma = E - F_d - W$, suponiendo que la masa es despreciable y la burbuja alcanza su velocidad terminal muy rápidamente ($F_d = E$), tenemos:

$$\rho g V(h) = \frac{1}{2} \rho C_d A(h) v^2 \rightarrow v(h) = \sqrt{\frac{2 g V(h)}{C_d A(h)}}$$

→ En la superficie $h = 0$

$$\hookrightarrow v(0) = \sqrt{\frac{2 g V(0)}{C_d A(0)}}$$

Suponiendo que el radio de la burbuja en el fondo es de 0,01 m tenemos:

$$V(0) = V_{fondo} \frac{P_{fondo}}{P_{atm}} = \frac{4}{3} \pi (0{,}01)^3 \cdot \frac{150375}{101325} \approx 6{,}22 \times 10^{-6}\ m^3$$

$$A(0) = \pi \left(\frac{3 V_{fondo}}{4\pi} \frac{P_{fondo}}{P_{atm}} \right)^{2/3} = \pi \left(\frac{3 \cdot \frac{4}{3} \pi (0{,}01)^3}{4\pi} \frac{150375}{101325} \right)^{2/3} \simeq 4{,}09 \times 10^{-4}\ m^2$$

$$v(0) = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}22 \times 10^{-6}}{0{,}47 \cdot 4{,}09 \times 10^{-4}}} \approx 0{,}796\ m/s^2$$

2. $\mathbb{F} = e\mathbb{E} + \frac{e}{c}\mathbb{V} \times \mathbb{B}$ donde $\mathbb{V} \ll c$.

a) Demostrar que si no hay campo eléctrico la trayectoria es un círculo de radio

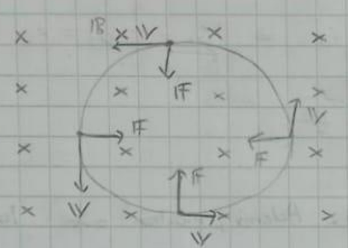
$$r = \frac{cmv}{e\mathbb{B}} = \frac{\mathbb{V}}{\omega_c}$$

donde $\omega_c = {}^{e\mathbb{B}}/_{mc}$ la frecuencia ciclotrónica.

Como se dice que $E=0$ entonces la fuerza es:

$$\mathbb{F} = \frac{e}{c}\mathbb{V} \times \mathbb{B}$$

Como la partícula va en dirección normal:



El campo $\mathbb{B}$ va hacia adentro y y por regla de la mano derecha la fuerza $\mathbb{F}$ va hacia el centro en todo momento, es decir, es una aceleración centrípeta:

$$F_c = ma_c = \frac{mV^2}{r}\hat{e}_r$$

Entonces se iguala a la ecuación dada:

$$\mathbb{F} = \frac{e}{c}\mathbb{V}\times\mathbb{B} = m\frac{V^2}{r}\hat{e}_r$$

$$= \frac{e}{c}VB(\hat{e}_\theta \times \hat{e}_z) = \frac{e}{c}VB\cancel{\hat{e}_r} = \frac{mV^2}{r}\cancel{\hat{e}_r}$$

Se resuelve para r:

$$r = \frac{mVc}{eB} = \frac{V}{\omega_c} \quad \text{donde } \omega_c = {}^{eB}/_{mc}$$

Entonces la partícula tendrá una trayectoria como un círculo.

b) Si se hace coincidir el eje z con la dirección $\mathbb{B}$ y $\mathbb{E}$ con el eje y. Entonces

$$\mathbb{B} = B\hat{e}_z \quad \wedge \quad \mathbb{E} = E_y\hat{e}_y + E_z\hat{e}_z$$

demostrar que $z = z(t)$ es:

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m}t^2 \quad \text{donde } z(0) = z_0 \text{ y } \dot{z}(0) = \dot{z}_0.$$

⇒ Se usa la ecuación con los nuevos valores de $\mathbb{B}$ y $\mathbb{E}$:

$$\mathbb{F} = e\left(E_y\hat{e}_y + E_z\hat{e}_z\right) + \frac{e}{c}\left[V_x\hat{e}_x + V_y\hat{e}_y + V_z\hat{e}_z\right]\times\left[B\hat{e}_z\right]$$

$$\mathbb{F} = eE_y\hat{e}_y + eE_z\hat{e}_z - \frac{Be}{c}V_x\hat{e}_y + \frac{Be}{c}V_y\hat{e}_x$$

Solo hay un término en $z = z(t)$:

$$F_z = eE_z \rightarrow \text{Se usa } \mathbb{F} = ma$$

$$m\frac{dV_z}{dt} = eE_z \rightarrow \int dV_z = \int^t \frac{eE_z}{m} dt$$

$$\rightarrow V_z = \frac{eE_z}{m}t + C_1 \Rightarrow C_1 = \dot{z}(0) = \dot{z}_0$$

$$\frac{dr_z}{dt} = \frac{eE_z t}{m} + \dot{z}_0 \Rightarrow \int dr_z = \int \left\langle \frac{eE_z t}{m} + \dot{z}_0 \right\rangle dt$$

$$\rightarrow r_z = \frac{1}{2}\frac{eE_z t^2}{m} + \dot{z}_0 t + C_2 \Rightarrow C_2 = z(0) = z_0$$

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m}t^2$$

c) Hallar las expresiones para $x(t)$ y $y(t)$. Además, mostrar que los valores medios en el tiempo son:

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{cE_y}{B} \quad , \quad \langle \dot{y} \rangle = 0$$

Las componentes x y y de la fuerza son:

$$F_x = \frac{e}{c}V_y B$$

$$F_y = eE_y - \frac{e}{c}V_x B$$

Se pueden reescribir como E.D.O.

$$m\frac{dV_x}{dt} = \frac{e}{c}V_y B \Rightarrow \frac{dV_x}{dt} = \frac{e}{mc}V_y B \quad (1)$$

$$m\frac{dV_y}{dt} = eE_y - \frac{e}{c}V_x B \Rightarrow \frac{dV_y}{dt} = \frac{e}{m}E_y - \frac{e}{mc}V_x B \quad (2)$$

$\rightarrow$ Se solucionan las E.D.O.s:

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{e}{m}E_y - \omega_c V_x \Rightarrow \frac{d^2V_y}{dt^2} = -\omega_c \frac{d}{dt}V_x \quad (1)$$

$$\frac{d^2V_y}{dt^2} = -\omega_c^2 V_y \Rightarrow \frac{d^2V_y}{dt^2} + \omega_c^2 V_y = 0 \Rightarrow \text{Ecuación oscilador armónico simple.}$$

$$V_y = A\sin(\omega_c t) + B\cos(\omega_c t)$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \omega_c V_y \Rightarrow \frac{d^2V_x}{dt^2} = \omega_c \frac{d}{dt} V_y \rightarrow ②$$

$$\frac{d\dot{V}_x}{dt^2} = \omega_c \left(\frac{eE_y}{m} - \omega_c V_x \right)$$

$$\frac{d^2V_x}{dt^2} + \omega^2_c V_x = \omega_c \frac{eE_y}{m}$$

→ Solución particular:

$$y_p = k \qquad y'_p = 0 \qquad y''_p = 0$$

$$\omega_c^2 k = \omega_c \frac{eE_y}{m}$$

$$k = \frac{eE_y}{m\omega_c} = \frac{eE_y}{m\left(\frac{eB}{mc}\right)} = \frac{cE_y}{B}$$

Sol:

$$V_x = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t) + \frac{cE_y}{B}$$

⇒ El valor medio de tiempo para x es:

$$\langle V_x \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \left\langle A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t) + \frac{cE_y}{B} \right\rangle dt$$

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{1}{T}\left[\frac{-A}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + \frac{B}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + \frac{cE_y t}{B} \right]\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{-A}{\omega_c}\sin(\omega_c T) + \frac{B}{\omega_c}\cos(\omega_c T) + \frac{cE_y T}{B} - \frac{B}{\omega_c} \right]$$

como $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$

$$= \frac{1}{\cancel{T}}\left[\frac{-A}{\omega_c}\sin\left(\cancel{\omega_c \frac{2\pi}{\omega_c}}^{=0}\right) + \cancel{\frac{B}{\omega_c}\cos(2\pi)}^{=1} + \frac{cE_y \cancel{T}}{B} - \cancel{\frac{B}{\omega_c}} \right]$$

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{cE_y}{B}$$

⇒ El valor medio para y es:

$$\langle \dot{y} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \left\langle A\sin(\omega_c t) + B\cos(\omega_c t) \right\rangle dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\cancel{\frac{A}{\omega_c}\cos(2\pi)}^{=1} - \cancel{\frac{B}{\omega_c}\sin(2\pi)}^{=0} - \cancel{\frac{A}{\omega_c}} \right]$$

$$\langle \dot{y} \rangle = 0$$

d) Halle las expresiones de x y y acomodando las condiciones iniciales para que

$$x(t) = \frac{A}{\omega_c} \operatorname{Sen}(\omega_c t) + \frac{cE_y}{B} t \quad \wedge \quad y(t) = \frac{A}{\omega_c}\left[\operatorname{Cos}(\omega_c t) - 1\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = A\cos(\omega_c t) + B\sin\omega_c t + \frac{cE_y}{B}$$

$$\int dx = \int_0^T \left\langle A\cos(\omega_c t) + B\sin\omega_c t + \frac{cE_y}{B} \right\rangle dt$$

$$x(t) = \left[-\frac{A}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + \frac{B}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + \frac{cE_y}{B} t\right]_0^{\tau}$$

como A y B dependen de las condiciones iniciales se ajustan para que se vaya B:

$$x(t) = \frac{A}{\omega_c}\sin(\omega_c \tau) + \frac{cE_y}{B}\tau$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = A\sin(\omega_c t) + B\cos(\omega_c t)$$

$$\int dy = \int_0^{\tau} \left\langle A\sin(\omega_c t) + B\cos(\omega_c t) \right\rangle dt$$

$$y(t) = \left[\frac{A}{\omega_c}\cos(\omega_c t) - B\sin(\omega_c t)\right]\Big|_0^{\tau}$$

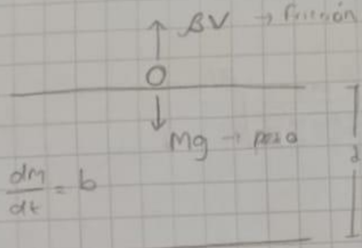
como B no importa se elimina:

$$y(t) = \frac{A}{\omega_c}\cos(\omega_c \tau) - \frac{A}{\omega_c}\underbrace{\cos(0)}_{=1}$$

$$y(t) = \frac{A}{\omega_c}\left[\cos(\omega_c \tau) - 1\right]$$

3)

a)



$\frac{dm}{dt} = b$

La masa varía en función del tiempo:

$$\frac{dm}{dt} = b$$

$$\int dm = \int_0^t b\,dt$$

$$m(t) = m_0 + bt$$

⇒ La sumatoria de fuerzas sobre la gota es:

$$\sum F_y = m(t)g - \beta V$$

⇒ La fuerza total sobre la gota es

$$F_T = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} mV = \left(\frac{dm}{dt}\right)^{\to b} V + m(t)\frac{dV}{dt}$$

Regla de la ...

$$F_T = bV + m(t)\frac{dV}{dt}$$

→ Igualando:

$$m(t)g - \beta V = bV + m(t)\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{(\beta + b)}{m(t)} V = g$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{(\beta + b)}{m_0 + bt} V = g \quad //$$

b) Se resuelve la E.D:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{(\beta + b)}{m_0 + bt} V = g \Rightarrow \mu(t) = e^{\int \frac{(\beta+b)}{m_0+bt} dt}$$

$u = m_0 + bt$

$\frac{du}{dt} = b$

$dt = \frac{du}{b}$

$$\mu(t) = e^{\frac{(\beta+b)}{b} \int \frac{1}{u} du}$$

$$\mu(t) = e^{\ln(m_0+bt)^{\left(\frac{\beta+b}{b}\right)}} = (m_0 + bt)^{\left(\frac{\beta+b}{b}\right)}$$

$$\int \left\langle (m_0+bt)^{\frac{\beta+b}{b}} V \right\rangle = \int_0^t g(m_0+b\tau)^{\left(\frac{\beta+b}{b}\right)} d\tau = \frac{g}{b}\int_0^t (\omega)^{\left(\frac{\beta+b}{b}\right)} d\omega$$

$$V(t) = \frac{g}{\beta + b}\left[(m_0+bt) - m_0\left(\frac{m_0}{m_0+bt}\right)^{\beta/b}\right]$$

⇒ El tiempo donde es $2m_0$ es:

$$m(t) = 2m_0 = m_0 + bt \Rightarrow \frac{m_0}{b} = t$$

→ Se reemplaza:

$$V\left(\frac{m_0}{b}\right) = \frac{g}{\beta+b}\left[\left(m_0 + b\left(\frac{m_0}{b}\right) - m_0\left(\frac{m_0}{m_0+\cancel{b}\frac{m_0}{\cancel{b}}}\right)^{\beta/b}\right]$$

$$V\left(\frac{m_0}{b}\right) = \frac{g}{\beta+b}\left[2m_0 - \frac{1}{2}m_0\right]^{\beta/b}$$

$$V\left(\frac{m_0}{b}\right) = \frac{g}{\beta+b}\left[\frac{3}{2}m_0\right]^{\beta/b}$$

3) La velocidad límite es cuando: $\frac{dV}{dt} = 0$

$$m_f \underbrace{\cancel{\frac{dV}{dt}}}_{=0} = m_f g - \beta V$$

$$V = \frac{m_f g}{\beta} \quad \text{donde} \quad M_f = 2m_0$$

$$V = \frac{2m_0 g}{\beta}$$ → Los 3 son valores conocidos.