1.

Para un cuerpo rígido de masa M apoyado en un punto fijo, torque de fuerzas gravitatorias respecto a eje es

$$T(\theta) = \mathbb{F} \times \mathbb{r} = |\mathbb{W}||\mathbb{r}| \operatorname{sen}\theta = -Mgd \operatorname{sen}\theta$$

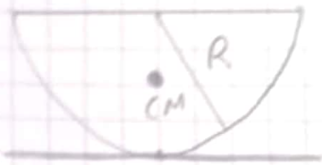
Para oscilaciones pequeñas $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$. además

$$T = I_{apoyo}\ddot{\theta} = -Mgd\operatorname{sen}\theta = I_{apoyo}\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow I_{apoyo}\ddot{\theta} + Mgd\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{Mgd}{I_{apoyo}}$$

a)



Suponiendo una distribución homogénea de masa, el CM está ubicado en el centroide del semicírculo

$$h = \frac{4R}{3\pi}$$

Ahora, se halla el I_{apoyo}

$$I_{cm} = \int y^2 dm \quad , \quad \sigma = \frac{M}{Área} = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{2M}{\pi R^2}$$

$dm = \sigma dA = \sigma r dr d\theta$ (coords. polares) $y = r\operatorname{sen}\theta$

$$I_{cm} = \int_0^R \int_0^\pi (r\operatorname{sen}\theta)^2 \cdot \sigma r d\theta dr = \sigma \int_0^R \int_0^\pi r^3 \operatorname{sen}^2\theta d\theta dr$$

$$= \sigma \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^R r^3 dr = \sigma \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{4} = \frac{2M}{\cancel{\pi} R^2} \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{4} MR^2$$

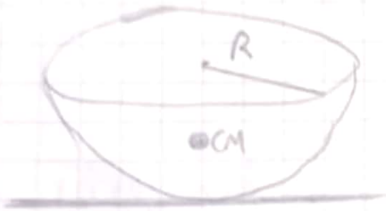
Aplicando el teorema de Steiner

$$I_{apo} = I_{cm} + Mh^2 = \frac{1}{4}MR^2 + M\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = MR^2\left(\frac{1}{4} + \frac{16}{9\pi^2}\right)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{Mgh}{I_{apoyo}} = \frac{Mg\frac{4R}{3\pi}}{MR^2\left(\frac{1}{4}+\frac{16}{9\pi^2}\right)} = \frac{4g}{3\pi R\left(\frac{1}{4}+\frac{16}{9\pi^2}\right)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{3\pi R\left(\frac{1}{4}+\frac{16}{9\pi^2}\right)}}$$

b)



Suponiendo una distribución homogénea de masa, el CM de la semiesfera está ubicado en

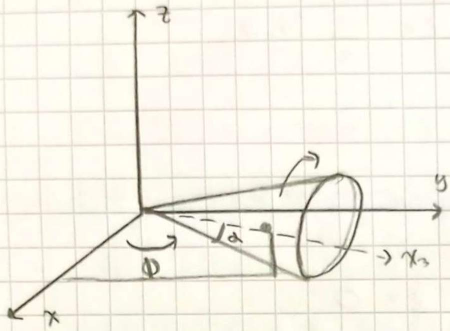
$$z_{cm} = \frac{3R}{8}$$

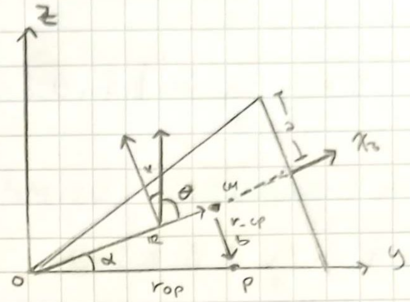
Usando el teorem de Steiner

$$I_{apoyo} = I_{CM} + M(z_{cm})^2 = \frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{3R}{8}\right)^2 = \frac{173}{320}MR^2$$

$$\omega^2 = \left(\frac{Mg\frac{3R}{8}}{\frac{173}{320}MR^2}\right) = \frac{120g}{173R} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{120g}{173R}}$$

2. Un cono circular uniforme de altura h ángulo de vértice α y masa M rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).





a) Encuentre la energía cinética.

Hay 5 grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$.

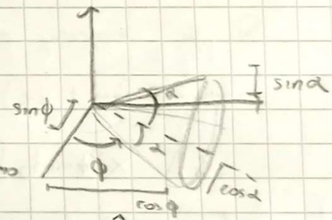
⇒ Como el cono está sobre el plano horizontal $\theta = cte$

$$\pi/2 = \theta + \alpha \quad y \quad \alpha = \tan\left(\frac{|r_{cp}|}{|r_{op}|}\right) \rightarrow a = h\tan(\alpha)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{|r_{cp}|}{|r_{op}|}\right).$$

Como el cono es uniforme, el centro de masa CM está a 1/4 de altura de su base, o sea a 3/4 de su altura desde el vértice y como el cono tiene altura h, el vector de la posición del centro de masas es:

$$\mathbb{R}_{cm} = \frac{3}{4} h \hat{x}_3$$



Teniendo en cuenta la geometría, $\hat{x}_3$ se escribe como

$$\hat{x}_3 = \cos\phi \cos\alpha\, \hat{x} + \sin\phi \cos\alpha\, \hat{y} + \sin\alpha\, \hat{z}$$

pero como $\alpha = \pi/2 - \theta$, $\cos(\pi/2 - \theta) = \underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1} \sin(\theta) + \underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} \cos(\theta)$

$$\hat{x}_3 = \cos\phi \sin\theta\, \hat{x} + \sin\theta \sin\phi\, \hat{y} + \sin\alpha\, \hat{z}$$

y como $\sin(\pi/2 - \theta) = -\underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} \sin(\theta) + \underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1} \cos(\theta)$

$$\hat{x}_3 = \cos\phi \sin\theta\, \hat{x} + \sin\theta \sin\phi\, \hat{y} + \cos\theta\, \hat{z}$$

Entonces el vector al centro de masas es

$$\mathbb{R}_{cm} = \frac{3}{4} h \left[\cos\phi \sin\theta\, \hat{x} + \sin\theta \sin\phi\, \hat{y} + \cos\theta\, \hat{z}\right]$$

Las componentes para cada dirección son:

$$x = \frac{3h}{4} \cos\phi \,\text{Sen}\,\theta \qquad z = \frac{3h}{4}\cos\theta$$

$$y = \frac{3h}{4} \sin\phi \sin\theta$$

y las velocidades, teniendo en cuenta que $\theta \equiv cte$

$$\dot{x} = -\frac{3h}{4}\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta \qquad \dot{z} = 0$$

$$\dot{y} = \frac{3h}{4}\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta$$

Para la rotación, se sabe que rueda sin deslizar o sea:

$$\mathbb{r}_{op} = \dot{\mathbb{R}} + \tilde{\Omega} \times \mathbb{r}_{cp} = 0$$

donde $\mathbb{r}_{op}$ es la posición del punto donde el cono está en contacto con el plano (x,y) y $\mathbb{r}_{cp}$ es el vector posición desde el centro de masas hasta dicho punto. Al desarrollar:

$$\tilde{\Omega} \times \mathbb{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3\hat{x}_1 - \tilde{\Omega}^1\hat{x}_3)$$

donde b es la distancia del centro de masas al punto donde el cono esta en contacto con el plano (x,y) "p".

Si se proyecta en las coordenadas reales, la ecuación para $\mathbb{r}_{op}$ es:

$$(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z})\cdot\hat{x} + b\tilde{\Omega}^3(\hat{x}_1\cdot\hat{x}) - b\tilde{\Omega}^1(\hat{x}_3\cdot\hat{x}) = 0$$

$$i)\quad \dot{x} + b[\tilde{\Omega}^3(\hat{x}_1\cdot\hat{x}) - \tilde{\Omega}^1(\hat{x}_3\cdot\hat{x})] = 0$$

$$(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z})\cdot\hat{y} + b\tilde{\Omega}^3(\hat{x}_1\cdot\hat{y}) - b\tilde{\Omega}^1(\hat{x}_3\cdot\hat{y}) = 0$$

$$ii)\quad \dot{y} + b[\tilde{\Omega}^3(\hat{x}_1\cdot\hat{y}) - \tilde{\Omega}^1(\hat{x}_3\cdot\hat{y})] = 0$$

$$(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \overset{=0}{\cancel{\dot{z}\hat{z}}})\cdot\hat{z} + b\tilde{\Omega}^3(\hat{x}_1\cdot\hat{z}) - b\tilde{\Omega}^1(\hat{x}_3\cdot\hat{z}) = 0$$

$$iii)\quad b[\tilde{\Omega}^3(\hat{x}_1\cdot\hat{z}) - \tilde{\Omega}^1(\hat{x}_3\cdot\hat{z})] = 0$$

Las velocidades angulares para el centro de masas son:

$$\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\,\text{Sen}\,\theta\,\text{Sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi \qquad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\,\text{Sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{Sen}\,\psi \qquad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

pero como $\theta = cte$, en este sistema:

$$\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\,\text{Sen}\,\theta\,\text{Sen}\,\psi \qquad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\,\text{Sen}\,\theta\cos\psi \qquad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

Entonces las ecuaciones quedan como

i) $\dot{x} + b[(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(\hat{x}_1\cdot\hat{y}) - (\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)(\hat{x}_3\cdot\hat{x})] = 0$

pero como $\hat{x}_1\cdot\hat{x} = \cos\phi$ y $\hat{x}_3\cdot\hat{x} = 0$

$$\dot{x} + b\dot{\psi}\cos\phi + b\dot{\phi}\cos\phi\cos\theta = 0$$

Ecuaciones de ligadura

ii) $\dot{y} + b[(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(\hat{x}_2\cdot\hat{y}) - (\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)(\hat{x}_3\cdot\hat{y})] = 0$

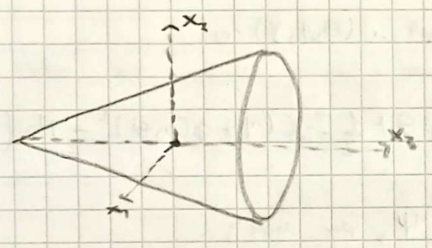
pero como $\hat{x}_2\cdot y = \sin\phi$ y $\hat{x}_3\cdot\hat{y} = 0$

$$\dot{y} + b\dot{\psi}\sin\phi + b\dot{\phi}\sin\phi\cos\theta = 0$$

iii) $b[(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(\hat{x}_1\cdot\hat{z}) - (\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)(\hat{x}_3\cdot\hat{z})] = 0$

pero como $\dot{z} = 0$, entonces no afecta esta ecuación.

El cono tiene simetrías:



Como $x_2 = x_1$ debido a que son círculos en el plano (x_2, x_1), entonces se dice que

$$I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$$

Entonces, la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_{11}(\tilde{\Omega}^{1^2} + \tilde{\Omega}^{2^2}) + \frac{1}{2}I_{33}(\tilde{\Omega}^{3^2})$$

y reemplazando la $\tilde{\Omega}^i$:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_{11}(\dot{\phi}^2\sin^2\theta\sin^2\psi + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\cos^2\psi) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2$$

Como $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$;

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_{11}(\dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2$$

Ahora se reemplaza $\dot{x}$ y $\dot{y}$ con las ecuaciones de ligadura.

$$\dot{x} + \dot{y}^2 = (-b\dot{\psi}\cos\phi - b\dot{\phi}\cos\phi\cos\theta)^2 + (-b\dot{\psi}\sin\phi - b\dot{\phi}\sin\phi\cos\theta)^2$$

$$= b^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi\cos^2\theta + 2b^2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos^2\phi\cos\theta + b^2\dot{\psi}^2\cos^2\phi$$

$$+ b^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi\cos^2\theta + 2b^2\dot{\phi}\dot{\psi}\sin^2\phi\cos\theta + b^2\dot{\psi}^2\sin^2\phi$$

$$= b^2\dot{\phi}^2\cos^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + 2b\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi)$$

$$+ b^2\psi^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi)$$

$$= b^2\dot{\phi}^2\cos^2\theta + 2b^2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta + b^2\dot{\psi}^2$$

a) · Sea la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} Mb^2 \left(\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}^2 \right) + \frac{1}{2} I_{11} \dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2$$

pero como $\theta = \pi/2 - \alpha$, en términos de α la energía es

$$T = \frac{1}{2} Mb^2 \left(\dot{\phi} \sin^2\alpha + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\alpha + \dot{\psi}^2 \right) + \frac{1}{2} I_{11} \dot{\phi}^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi}\sin\alpha)^2$$

↳ Energía cinética.

b) El tiempo que tarda en volver a su posición original.

Sea la energía potencial del sistema

$$V = Mgz = Mgb = Mg\left(\frac{3h}{4}\cos\theta\right)$$

de modo que la Lagrangiana en términos de (θ, ϕ, ψ) es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Mb^2 \left(\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}^2 \right) + \frac{1}{2} I_{11} \dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - Mg\left(\frac{3h}{a}\cos\theta\right)$$

Se tienen dos componentes cíclicas ϕ y ψ, por ende:

i) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad P_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = cte$

$$P_\psi = Mb^2 (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) + I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = cte$$

$$P_\psi = (Mb^2 + I_{33})\,\omega_3$$

si se considera que ω_3 es la velocidad angular efectiva $\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

ii) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = cte$

$$P_\phi = \dot{\phi}\left(Mb^2 \cos^2\theta + I_{11}\sin^2\theta \right) + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(Mb^2 + I_{33})\cos\theta$$

$$P_\phi = \dot{\phi}\left(Mb^2 \cos^2\theta + I_{11}\sin^2\theta \right) + \omega_3 (Mb^2 + I_{33})\cos\theta$$

→ Si se despeja ω_3 en $P_\psi \Rightarrow \omega_3 = \frac{P_\psi}{Mb^2 + I_{33}}$

y se reemplaza en $P_\phi = 0$

$$\dot{\phi}\left(Mb^2 \cos^2\theta + I_{11}\sin^2\theta \right) = -\frac{P_\psi}{Mb^2 + I_{33}} (Mb^2 + I_{33})\cos\theta$$

$$\dot{\phi} = -\frac{(Mb^2 + I_{33})\,\omega_3 \cos\theta}{(Mb^2 \cos^2\theta + I_{11}\sin^2\theta)}$$

Para rodadura pura se considera $\omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta$

$$\dot{\phi}^2 = \frac{(Mb^2 + I_{33})\cos^2\theta}{Mb^2\cos^2\theta + I_{11}\sin^2\theta}$$

El tiempo para volver a la posición original es el inverso de la frecuencia de precesión $\dot{\phi}$, o sea

$$T = \frac{2\pi}{|\dot{\phi}|} = 2\pi\sqrt{\frac{Mb^2\cos^2\theta + I_{11}\sin^2\theta}{(Mb^2 + I_{33})\cos^2\theta}}$$

pero como $\theta = \pi/2 - \alpha$ y se conoce α, entonces:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Mb^2\sin^2\alpha + I_{11}\cos^2\alpha}{(Mb^2 + I_{33})\sin^2\alpha}}$$

↳ Periodo de precesión.

c) Hallar las componentes del momento angular del cono.

El momento angular $\mathbb{L}$ para los ejes del centro de masa son:

$$\mathbb{L} = I_{11}\Omega_1\hat{x}_1 + I_{22}\Omega_2\hat{x}_2 + I_{33}\Omega_3\hat{x}_3$$

como es un cono con simetría $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$ y las componentes de $\tilde{\Omega}$ son:

$$\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\operatorname{Sen}\theta\operatorname{Sen}\psi \qquad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\operatorname{Sen}\theta\cos\psi \qquad \tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

o sea;

$$L_1 = I_{11}\dot{\phi}\cos\theta\operatorname{Sen}\psi$$

$$L_2 = I_{22}\dot{\phi}\operatorname{Sen}\theta\cos\psi$$

$$L_3 = I_{33}\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

En caso que se asuma $\psi = 0$, por como se acomodó el eje $\hat{x}_3$ respecto al cono, las componentes serán.

$$L_1 = 0 \qquad L_2 = I_{22}\dot{\phi}\operatorname{Sen}\theta \qquad L_3 = I_{33}\dot{\phi}\cos\theta$$

Si se busca llevar al eje de laboratorio, se le aplica la matriz de rotación

$$\mathbb{L}_{lab} = \mathbb{R}\cdot\mathbb{L}_{cuerpo}$$

por componentes es:

$$\mathbb{L}_{lab} = I_2\dot{\phi}\operatorname{Sen}\theta\,(\mathbb{R}\cdot\hat{x}_2) + I_3\dot{\phi}\cos\theta\,(\mathbb{R}\cdot\hat{x}_3)$$

Pero según se ubicaron los ejes al inicio:

$$\hat{X}_3 = \cos\phi \sin\theta \, \hat{x} + \sin\phi \sin\theta \, \hat{y} + \cos\theta \, \hat{z}$$

$$\hat{X}_2 = -\sin\phi \, \hat{x} + \cos\phi \, \hat{y}$$

entonces se puede sustituir como

$$L_{xyz} = I_{22}\dot{\phi} \sin\theta \left(-\sin\phi \, \hat{x} + \cos\phi \, \hat{y} \right) + I_{33}\dot{\phi} \cos\theta \left(\cos\phi \sin\theta \, \hat{x} + \sin\phi \sin\theta \, \hat{y} + \cos\theta \, \hat{z} \right)$$

o acomodado por componentes:

$$L_x = \dot{\phi} \left(-I_{22} \sin\phi \sin\theta + I_3 \cos\theta \cos\phi \sin\theta \right)$$

$$L_y = \dot{\phi} \left(I_{22} \sin\theta \cos\phi + I_3 \cos\theta \sin\phi \sin\theta \right)$$

$$L_z = I_{33} \dot{\phi} \cos\theta \cos\theta$$

como $\theta = \pi/2 - \alpha$

$$L_x = \dot{\phi} \left(-I_{22} \sin\phi \cos\alpha + I_{33} \sin\alpha \cos\phi \cos\alpha \right)$$

$$L_y = \dot{\phi} \left(I_{22} \cos\alpha \cos\phi + I_{33} \sin\alpha \sin\phi \cos\alpha \right)$$

$$L_z = I_{33} \sin^2\alpha$$

↳ Componentes del momento angular en los ejes de laboratorio asumiendo configuración inicial $\psi = 0$ pero $\dot{\psi} = 0$ debido a la posición del eje $\hat{x}_3$.