Algorithmenentwurf HA 4

Lukas Brandt: 7011823, Clemens Damke: 7011488, Lukas Giesel: 7011495
5. Mai 2016

Aufgabe 7

a. Beweis Optimalität

$$\begin{aligned}
\text{Rucksackgröße } g &\in \mathbb{R}_{>0} \\
\text{Gewichte } G &:= (g_1, \ldots, g_n),\ g_i \in \mathbb{R}_{>0} \\
\text{Werte } W &:= (w_1, \ldots, w_n),\ w_i \in \mathbb{R}_{>0} \\
r_i &:= \frac{w_i}{g_i}
\end{aligned}$$

Seien G und W so sortiert, dass gilt $\forall i < j : r_i < r_j$.

Falls $\exists\ i \neq j : r_i = r_j$, können i und j durch einen Gegenstand k mit Wert $w_k = w_i + w_j$ und Gewicht $g_k = g_i + g_j$ ersetzt werden, da die Anteile von i und j an k in der Lösung keine Rolle spielen.

$$\begin{aligned}
\text{Lösung } l &:= (l_1, \ldots, l_n),\ l_i \in [0,1],\ \sum g_i \cdot l_i \leq g \\
w(l) &:= \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot l_i
\end{aligned}$$

z. z. Der Greedy-Algorithmus aus der VL ermittelt ein optimales l ($\neg\exists\ l' : w(l) < w(l')$).

Angenommen: $\exists\ l' : w(l) < w(l')$

$\implies \exists x : l_x \neq l'_x,\ i := \min x$

Falls $l_i < l'_i$:

Gemäß Konstruktion ist l_i bereits maximal (1 oder so groß, dass $w(l) = g$). ↯

Falls $l_i > l'_i$:

$\implies \exists j : l_j < l'_j,$ da sonst $w(l) > w(l')$.

$\implies j > i,$ da bei i der erste Unterschied zwischen l und l' ist.

$\implies r_i > r_j$

Sei:

$$\begin{aligned}
l'' &:= (l''_1, \ldots l''_n) = (l'_1, \ldots, l'_{i-1},\ x\ , l'_{i+1}, \ldots, l'_{j-1},\ y\ , l'_{j+1}, l'_n) \\
x &:= \min\{1,\ l'_i + \frac{g_j \cdot l'_j}{g_i}\},\ y := \ l'_j - \frac{(x - l'_i) \cdot g_i}{g_j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies w(l'') = w(l') + w_i \cdot (x - l'_i) + w_j \cdot (y - l'_j) \\
&\implies w(l'') = w(l') + w_i \cdot (x - l'_i) - w_j \cdot \frac{(x - l'_i) \cdot g_i}{g_j} \\
&\implies w(l'') = w(l') + r_i \cdot g_i \cdot (x - l'_i) - r_j \cdot (x - l'_i) \cdot g_i \\
&\implies w(l'') = w(l') + \underbrace{(r_i - r_j)}_{>0} \cdot \underbrace{g_i}_{>0} \cdot \underbrace{(x - l'_i)}_{>0} \\
&\implies w(l'') > w(l') \implies l' \text{ nicht optimal.} ↯
\end{aligned}$$

Bleibt z. z. l'' ist valide Lösung:

1 $\sum g_i \cdot l''_i = g \Leftrightarrow x \cdot g_i + y \cdot g_j = l'_i \cdot g_i + l'_j \cdot g_j$

Falls $x = 1$:

$$x \cdot g_i + y \cdot g_j = g_i + (l'_j - \frac{(1 - l'_i) \cdot g_i}{g_j}) \cdot g_j = l'_i \cdot g_i + l'_j \cdot g_j \checkmark$$

Falls $x \neq 1$:

$$\begin{aligned}
x \cdot g_i + y \cdot g_j &= (l'_i + \frac{g_j \cdot l'_j}{g_i}) \cdot g_i + (l'_j - \frac{((l'_i + \frac{g_j \cdot l'_j}{g_i}) - l'_i) \cdot g_i}{g_j}) \cdot g_j \\
&= l'_i \cdot g_i + l'_j \cdot g_j + l'_j \cdot g_j - (l'_i + \frac{g_j \cdot l'_j}{g_i}) \cdot g_i + l'_i \cdot g_i \\
&= 2 \cdot l'_i \cdot g_i + 2 \cdot l'_j \cdot g_j - l'_i \cdot g_i - l'_j \cdot g_j \\
&= l'_i \cdot g_i + l'_j \cdot g_j \checkmark
\end{aligned}$$

2 $x \in [l'_i, 1] \subseteq [0, 1]$ (offensichtlich gemäß Definition), $y \in [0, l'_j] \subseteq [0, 1]$:

$$\frac{(x - l'_i) \cdot g_i}{g_j} \leq \frac{(\frac{g_j \cdot l'_j}{g_i}) \cdot g_i}{g_j} = l'_j \implies y \geq 0 \implies y \in [0, l'_j] \checkmark$$

■

b. Beweis 0–1-Rucksackproblem Ungeeignetheit

$$\begin{aligned}
\alpha &> 1 \\
g_\alpha &:= \alpha + 1 \\
G_\alpha &:= (1, \alpha + 1) \\
W_\alpha &:= (1, \alpha) \\
r_1 = 1,\ r_2 &= \frac{\alpha}{\alpha + 1}
\end{aligned}$$

Greedy wird immer die Lösung $l_g = (1, 0)$ mit $w(l_g) = 1$ wählen, da $\forall \alpha : r_1 > r_2$.
Optimal wäre allerdings $l_o = (0, 1)$ mit $w(l_o) = \alpha$.

$$\implies \frac{w(l_g)}{w(l_o)} = \frac{1}{\alpha} \implies \text{Greedy } \alpha\text{-mal schlechter, als das Optimum.}$$

■