Algorithmenentwurf HA 9

Lukas Brandt: 7011823, Clemens Damke: 7011488, Lukas Giesel: 7011495
23. Juni 2016

Aufgabe 19

a. Korrektheit

- **Invariante:** $\frac{1}{2}\sum_{v\in A} d(v,\, A\cup B) \leq \sum_{v\in A} d(v,B) \wedge \frac{1}{2}\sum_{v\in B} d(v,\, A\cup B) \leq \sum_{v\in B} d(v,A)$
- **Initialisierung:**

$$\begin{aligned} & A = \{v_1\},\ B = \{v_2\} \\ \Longrightarrow\ & d(v_1,\, A\cup B) = d(v_1,\, B),\ d(v_2,\, A\cup B) = d(v_2,\, A) \\ \Longrightarrow\ & \frac{d(v_1,\, A\cup B)}{2} \leq d(v_1,B)\ \wedge\ \frac{d(v_2,\, A\cup B)}{2} \leq d(v_2,A) \end{aligned}$$

- **Erhaltung:**
  - **Falls** $d(v,A) > d(v,B)$**:**

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & B' = B \cup \{v\} \\ \Longrightarrow\ & \forall\, v_0 \in V : d(v_0,\, A\cup B') = d(v_0,\, A\cup B\cup \{v\}) \end{aligned}$$

Erster Teil der Invariante:

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & \forall\, v_0 \in A : d(v_0,\, A\cup B') - d(v_0,\, A\cup B) = d(v_0,\, B') - d(v_0,\, B) \\ \Longrightarrow\ & \forall\, v_0 \in A : \frac{d(v_0,\, A\cup B')}{2} \leq d(v_0, B') \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{2}\sum_{v_0\in A} d(v_0,\, A\cup B') \leq \sum_{v_0\in A} d(v_0, B') \end{aligned}$$

Zweiter Teil der Invariante:

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & d(v,\, A\cup B') = d(v,\, A) + d(v,\, B) \leq 2\cdot d(v,\, A) \\ \Longrightarrow\ & \frac{d(v,\, A\cup B')}{2} \leq d(v,A) \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{2}\sum_{v_0\in B'} d(v_0,\, A\cup B') \leq d(v,A) + \frac{1}{2}\sum_{v_0\in B} d(v_0,\, A\cup B') \end{aligned}$$

Angenommen $\frac{1}{2}\sum_{v_0\in B} d(v_0,\, A \cup B') > \sum_{v_0\in B} d(v_0, A)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{v_0\in B} d(v_0,\, A \cup B') = \frac{1}{2}\sum_{v_0\in B} d(v_0,\, A \cup B) + \frac{1}{2}\sum_{v_0\in B} d(v_0,\, \{v\})\\
\Longrightarrow\ &\frac{1}{2}\sum_{v_0\in B} d(v_0,\, \{v\}) > \frac{1}{2}\sum_{v_0\in B} d(v_0,\, A) - \sum_{v_0\in B} d(v_0, A \cup B)\\
\Longrightarrow\ &\sum_{v_0\in B} d(v_0,\, \{v\}) > \sum_{v_0\in B} d(v_0,\, A) - d(v_0,\, B)\\
\Longrightarrow\ &d(v, A) > d(v, B) > \sum_{v_0\in B} d(v_0,\, A) - d(v_0,\, B)\\
\Longrightarrow\ &?
\end{aligned}$$

- **Sonst:** Analog zum ersten Fall mit A und B vertauscht.

- **Terminierung:**

$$\begin{aligned}
&A \cup B = V\\
\Longrightarrow\ &d(v, A \cup B) = deg(v)\\
\Longrightarrow\ &\frac{1}{2}\sum_{v\in A} deg(v) \leq \sum_{v\in A} d(v, B) \wedge \frac{1}{2}\sum_{v\in B} deg(v) \leq \sum_{v\in B} d(v, A)\\
\Longrightarrow\ &\frac{1}{2}|E| \leq \sum_{v\in A} d(v, B) = \sum_{v\in B} d(v, A) \leq optSplit(G) \leq |E|
\end{aligned}$$

b. Laufzeit

$\mathcal{O}(|V|^2)$, da die for-Schleife $\mathcal{O}(|V|)$ mal und die darin geschachtelten $d(v, X)$-Aufrufe in $\mathcal{O}(|A|) = \mathcal{O}(|V|)$ bzw. $\mathcal{O}(|B|) = \mathcal{O}(|V|)$ sind, da $\forall x \in X : \{v, x\} \in E$ geprüft werden muss.