Algorithmenentwurf HA 10

Lukas Brandt: 7011823, Clemens Damke: 7011488, Lukas Giesel: 7011495

30. Juni 2016

Aufgabe 21

a. Algorithmus

$$in_G(v) := \{(v_1, v_2) \in E \mid v_2 = v\} \text{ mit } G = (V, E)$$

$$out_G(v) := \{(v_1, v_2) \in E \mid v_1 = v\} \text{ mit } G = (V, E), \qquad w_G(v) := \frac{|in_G(v)|}{|out_G(v)|}$$

$$ind(V, E) := (V,\ \{e \in E \cap V^2\})$$

Algorithm 1 Maximaler azyklischer Teilgraph Approximation

```
1: function DAG(G)
2:     (V, E) ← G
3:     if |V| = 0 then return ∅

4:     s ← null
5:     for v ∈ V do
6:         if s = null ∨ w_G(v) < w_G(s) then s ← v
7:     return out_G(s) ∪ DAG(ind(V\{s}, E))
```

b. Korrektheit und Laufzeit

Die Funktionen in_G, out_G und w_G lassen sich alle in $\mathcal{O}(|V|)$ berechnen, da jeder Knoten höchstens $|V| - 1$ Nachbarn haben kann.
Die Zeilen 1 – 4 sind in $\mathcal{O}(1)$ ausführbar.
Die Zeilen 5 – 6 benötigen $\mathcal{O}(|V|^2)$, da $2|V|$-mal w_G aufgerufen wird.
Zeile 7 benötigt $\mathcal{O}(|V| + |V|^3) = \mathcal{O}(|V|^3)$, da es genau $|V| - 1$ rekursive Aufrufe von *dag* gibt, die wegen den Zeilen 5 – 6 jeweils $\mathcal{O}(|V|^2)$ benötigen.

Insgesamt hat *dag* also eine Zeitkomplexität von $\mathcal{O}(|V|^3)$.

$dag(G)$ berechnet die Kantenmenge eines DAGs von G.
Denn $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \forall (s_i, s_j) \in dag(G) : i < j$, wobei s_1 das im ersten / direkten Aufruf von *dag* und s_n das im letzten rekursiven Aufruf selektierte s ist. Es gibt also eine topologische Sortierung von $(V, dag(G))$.

c. Approximationsfaktor

$$\frac{\sum_{v \in V} |in_G(v)|}{\sum_{v \in V} |out_G(v)|} = 1$$

$\Longrightarrow \exists v \in V : w_G(v) \leq 1$

Seien $s_1, \ldots, s_n$ definiert, wie in Aufgabenteil b.

Seien $G_1, \ldots, G_n$ die nach *dag* übergebenen Graphen, mit $G_1 = G$ und $G_n = (\{s_n\}, \emptyset)$.

$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : w_{G_i}(s_i) \leq 1 \land in_{G_i}(s_i) = in_G(s_i) \backslash (\cup_{j \in \{1,\ldots,i-1\}} out_{G_j}(s_j))$

$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : |out_{G_i}(s_i)| \geq |in_{G_i}(s_i)|$

$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} \land |out_{G_i}(s_i)| \geq |in_G(s_i)|$: min. die Hälfte der Kanten von s_i in $deg(G)$.

$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} \land |out_{G_i}(s_i)| < |in_G(s_i)| : in_G(s_i) \backslash in_{G_i}(s_i)$ sind bereits in $deg(G)$.

$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} \land |out_{G_i}(s_i)| < |in_G(s_i)| : |out_{G_i}(s_i) \cup in_G(s_i) \backslash in_{G_i}(s_i)| \geq |in_G(s_i)|$

$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} \land |out_{G_i}(s_i)| < |in_G(s_i)|$: min. die Hälfte der Kanten von s_i in $deg(G)$.

$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}$: min. die Hälfte der Kanten von s_i in $deg(G)$.

$\Longrightarrow$ Da $\{s_1, \ldots, s_n\} = V$, ist mindestens die Hälfte der Kanten von G in $deg(G)$.

$\Longrightarrow$ Da $|E| \geq |optDag(G)| \geq |dag(G)| \geq \frac{1}{2}|E|$, hat *dag* eine Güte von $\frac{1}{2}$.

$\blacksquare$