

Algorithmenentwurf HA 4

LUKAS BRANDT: 7011823, CLEMENS DAMKE: 7011488, LUKAS GIESEL: 7011495
5. MAI 2016

Aufgabe 7

a. Beweis Optimalität

Rucksackgröße $g \in \mathbb{R}_{>0}$

Gewichte $G := (g_1, \dots, g_n)$, $g_i \in \mathbb{R}_{>0}$

Werte $W := (w_1, \dots, w_n)$, $w_i \in \mathbb{R}_{>0}$

$$r_i := \frac{w_i}{g_i}$$

Seien G und W so sortiert, dass gilt $\forall i < j : r_i \leq r_j$.

Lösung $l := (l_1, \dots, l_n)$, $l_i \in [0, 1]$, $\sum g_i \cdot l_i \leq g$

$$w(l) := \sum_{i=1}^n w_i \cdot l_i$$

z. z. Der Greedy-Algorithmus aus der VL ermittelt ein optimales l ($\neg \exists l' : w(l) < w(l')$).

Angenommen: $\exists l' : w(l) < w(l')$

$$\implies \exists x : l_x \neq l'_x, \quad i := \min x$$

Falls $l_i < l'_i$:

Gemäß Konstruktion ist l_i bereits maximal (1 oder so groß, dass $w(l) = g$). \nexists

Falls $l_i > l'_i$:

$$\implies \exists j : l_j < l'_j, \text{ da sonst } w(l) > w(l').$$

$$\implies j > i, \text{ da bei } i \text{ der erste Unterschied zwischen } l \text{ und } l' \text{ ist.}$$

$$\implies r_i \geq r_j$$

Falls $r_i = r_j$:

Wähle andere i, j mit $i < j \wedge l_i > l'_i \wedge l_j < l'_j \wedge r_i > r_j$.

Falls kein solches Paar existiert:

$$\forall l_i \neq l'_j : r_i = r_j \implies w(l) = w(l') \quad \nexists$$

Falls $r_i > r_j$:

$$\begin{aligned}
l'' &:= (l''_1, \dots, l''_n) = (l'_1, \dots, l'_{i-1}, x, l'_{i+1}, \dots, l'_{j-1}, y, l'_{j+1}, l'_n) \\
x &:= \min\{1, l'_i + \frac{g_j \cdot l'_j}{g_i}\}, \quad y := l'_j - \frac{(x - l'_i) \cdot g_i}{g_j} \\
\implies w(l'') &= w(l') + w_i \cdot (x - l'_i) + w_j \cdot (y - l'_j) \\
\implies w(l'') &= w(l') + w_i \cdot (x - l'_i) - w_j \cdot \frac{(x - l'_i) \cdot g_i}{g_j} \\
\implies w(l'') &= w(l') + r_i \cdot g_i \cdot (x - l'_i) - r_j \cdot (x - l'_i) \cdot g_i \\
\implies w(l'') &= w(l') + \underbrace{(r_i - r_j)}_{>0} \cdot \underbrace{g_i}_{>0} \cdot \underbrace{(x - l'_i)}_{>0} \\
\implies w(l'') &> w(l') \implies l' \text{ nicht optimal. } \nexists
\end{aligned}$$

Bleibt z. z. l'' ist valide Lösung: $\sum g_i \cdot l''_i = g \Leftrightarrow x \cdot g_i + y \cdot g_j = l'_i \cdot g_i + l'_j \cdot g_j$.

Falls $x = 1$:

$$x \cdot g_i + y \cdot g_j = g_i + (l'_j - \frac{(1 - l'_i) \cdot g_i}{g_j}) \cdot g_j = l'_i \cdot g_i + l'_j \cdot g_j$$

Falls $x \neq 1$:

$$\begin{aligned}
x \cdot g_i + y \cdot g_j &= (l'_i + \frac{g_j \cdot l'_j}{g_i}) \cdot g_i + (l'_j - \frac{((l'_i + \frac{g_j \cdot l'_j}{g_i}) - l'_i) \cdot g_i}{g_j}) \cdot g_j \\
&= l'_i \cdot g_i + l'_j \cdot g_j + l'_j \cdot g_j - (l'_i + \frac{g_j \cdot l'_j}{g_i}) \cdot g_i + l'_i \cdot g_i \\
&= 2 \cdot l'_i \cdot g_i + 2 \cdot l'_j \cdot g_j - l'_i \cdot g_i - l'_j \cdot g_j \\
&= l'_i \cdot g_i + l'_j \cdot g_j
\end{aligned}$$

■

b. Beweis 0-1-Rucksackproblem Ungeeignetheit

$$\begin{aligned}
\alpha &> 1 \\
g_\alpha &:= \alpha + 1 \\
G_\alpha &:= (1, \alpha + 1) \\
W_\alpha &:= (1, \alpha) \\
r_1 &= 1, \quad r_2 = \frac{\alpha}{\alpha + 1}
\end{aligned}$$

Greedy wird immer die Lösung $l_g = (1, 0)$ mit $w(l_g) = 1$ wählen, da $\forall \alpha : r_1 > r_2$.

Optimal wäre allerdings $l_o = (0, 1)$ mit $w(l_o) = \alpha$.

$$\implies \frac{w(l_g)}{w(l_o)} = \frac{1}{\alpha} \implies \text{Greedy } \alpha\text{-mal schlechter, als das Optimum.}$$

■