Algorithmenentwurf HA 7

Lukas Brandt: 7011823, Clemens Damke: 7011488, Lukas Giesel: 7011495
9. Juni 2016

Aufgabe 15

a. Fehlerwahrscheinlichkeitsschranke

$$A^t := \sum_{i=1}^{t} A_i,\ A_i \in \{0, 1\}$$
$$\Pr(A_i = 0 \mid x \in L) \leq \frac{1}{3},\ \Pr(A_i = 1 \mid x \notin L) \leq \frac{1}{3}$$

Fehlerwahrscheinlichkeit α_1 von A^t mit $x \in L$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[A_i \mid x \in L] = 1 \cdot (1 - \Pr(A_i = 0 \mid x \in L)) \geq \frac{2}{3} \\
\implies &\mathbb{E}[A^t \mid x \in L] = \mathbb{E}[A_i \mid x \in L] \cdot t \geq \frac{2}{3}\, t \\
&\alpha_1 = \Pr(A^t < \frac{t}{2} \mid x \in L) \\
&\quad = \Pr(A^t < \mu \cdot (1 - \delta) \mid x \in L),\ \mu := \frac{2}{3}\, t \leq \mathbb{E}[A^t \mid x \in L],\ \delta := \frac{1}{4} \\
&\quad \underset{\text{Chernoff}}{\leq} \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu} = \left(\frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\frac{3}{4}^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}\, t} = \left(\frac{64}{27\, e}\right)^{\frac{1}{6}\, t}
\end{aligned}$$

Fehlerwahrscheinlichkeit α_2 von A^t mit $x \notin L$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[A_i \mid x \notin L] = 1 \cdot \Pr(A_i = 1 \mid x \notin L) \leq \frac{1}{3} \\
\implies &\mathbb{E}[A^t \mid x \notin L] = \mathbb{E}[A_i \mid x \notin L] \cdot t \leq \frac{1}{3}\, t \\
&\alpha_2 = \Pr(A^t \geq \frac{t}{2} \mid x \in L) \\
&\quad = \Pr(A^t \geq \mu \cdot (1 + \delta) \mid x \in L),\ \mu := \frac{1}{3}\, t \geq \mathbb{E}[A^t \mid x \notin L],\ \delta := \frac{1}{2} \\
&\quad \underset{\text{Chernoff}}{\leq} \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu} = \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}\, t} = \left(\frac{8\, e}{27}\right)^{\frac{1}{6}\, t}
\end{aligned}$$

Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit α von A^t:

$$\alpha \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2\} \leq \left(\frac{64}{27\, e}\right)^{\frac{1}{6}\, t},\ \text{denn}\ \frac{64}{27\, e} > \frac{8\, e}{27}$$

b. Maximale Fehlerwahrscheinlichkeit $\mathbf{n}^{-1}$

$$\begin{aligned}\alpha \leq \left(\frac{64}{27\,e}\right)^{\frac{1}{6}\,t} &\leq \frac{1}{n}\\ \log\left(\frac{64}{27\,e}\right)\cdot\frac{1}{6}\,t &\leq -\log n\\ t &\geq 6\log_{\left(\frac{27\,e}{64}\right)} n\end{aligned}$$

c. Maximale Fehlerwahrscheinlichkeit $\mathbf{n}^{-2}$

$$\begin{aligned}\alpha \leq \left(\frac{64}{27\,e}\right)^{\frac{1}{6}\,t} &\leq \frac{1}{n^2}\\ \log\left(\frac{64}{27\,e}\right)\cdot\frac{1}{6}\,t &\leq -2\log n\\ t &\geq 12\log_{\left(\frac{27\,e}{64}\right)} n\end{aligned}$$