# Algorithmenentwurf HA 1

Lukas Brandt: 7011823, Clemens Damke: 7011488, Lukas Giesel: 7011495
14. April 1016

## Aufgabe 1

*zu zeigen:* (†) Theorem aus Aufgabenstellung.

- *Induktionsanfang:* $n = 1$
  $\implies T(n) = T(1) \leq c$
  Falls:
  - **a < b:** $T(1) \leq c < c \cdot \underbrace{\frac{b}{b-a}}_{>1} \cdot 1$ ✓
  - **a = b:** $T(1) \leq c = c \cdot 1 \cdot (\underbrace{\log_b 1}_{=0} + 1)$ ✓
  - **a > b:** $T(1) \leq c < c \cdot \underbrace{\frac{b}{a-b}}_{>1} \cdot \underbrace{1^{\log_b a}}_{=1}$ ✓
- *Induktionsvoraussetzung:* (†) gilt für ein beliebiges aber festes $n$.
- *Induktionsschritt:* $n \to n \cdot b$ (nächste Potenz von $b$)
  per Definition:
  $$T(nb) \leq a \cdot T(\frac{nb}{b}) + c \cdot nb = a \cdot T(n) + c \cdot nb$$
  Falls:
  - **a < b:**
  $$\begin{aligned} T(nb) &\leq a \cdot T(n) + c \cdot nb \\ &\underset{\text{I.V.}}{\leq} a \cdot (c \cdot \frac{b}{b-a} \cdot n) + c \cdot nb \\ &= (c \cdot nb \cdot \frac{a}{b-a}) + c \cdot nb = c \cdot nb \cdot (\frac{a}{b-a} + 1) \\ &= c \cdot \frac{b}{b-a} \cdot nb \end{aligned}$$
  - **a = b:**
  $$\begin{aligned} T(nb) &\leq a \cdot T(n) + c \cdot nb \\ &\underset{\text{I.V.}}{\leq} a \cdot (cn \cdot (\log_b n + 1)) + c \cdot nb \\ &\underset{\text{a=b}}{=} b \cdot cn \cdot (\log_b n + 1) + c \cdot nb = c \cdot nb \cdot (\log_b (nb) + 1) \end{aligned}$$

– **a > b:**

$$\begin{aligned}
T(nb) &\leq a \cdot T(n) + c \cdot nb \\
&\underset{\text{I.V.}}{\leq} a \cdot (c \cdot \frac{a}{a-b} \cdot n^{\log_b a}) + c \cdot nb \\
&= ac \cdot \frac{a}{a-b} \cdot n^{\log_b a} + c \cdot nb \\
&= b^{\log_b a} c \cdot \frac{a}{a-b} \cdot n^{\log_b a} + c \cdot nb \\
&= c \cdot \frac{a}{a-b} \cdot (nb)^{\log_b a} + c \cdot nb
\end{aligned}$$

■

# Aufgabe 2

## a. Funktionen ordnen

$$\mathcal{O}(42) \underset{1}{\subset} \mathcal{O}(n^{10}) \underset{2}{\subset} \mathcal{O}(\sqrt{n}^{\log n}) \underset{3}{\subset} \mathcal{O}(5^{\frac{n}{2}}) \underset{4}{\subset} \mathcal{O}(3^{3n \log n})$$

*Korrektheit:*

1 $\forall n > \sqrt[10]{42} : \; 42 < n^{10}$ ✓

2 $\forall n > 2^{20} : \; 10 < \frac{1}{2} \log n \implies n^{10} < n^{\frac{1}{2} \log n} = \sqrt{n}^{\log n}$ ✓

3

$$\begin{aligned}
n \to \infty : \quad & \frac{1}{2}(\log n)^2 < n \log \sqrt{5} \\
\implies & \frac{1}{2} \log n < n \cdot \frac{\log \sqrt{5}}{\log n} = n \cdot \log_n \sqrt{5} \\
\implies & n^{\frac{1}{2} \log n} < n^{n \cdot \log_n \sqrt{5}} \\
\implies & \sqrt{n}^{\log n} < 5^{\frac{n}{2}} \quad ✓
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
n \to \infty : \quad & \frac{1}{2} \cdot n < \log_5(9) \cdot n \log n \\
\implies & 5^{\frac{n}{2}} < 5^{\log_5(9) \cdot n \log n} \\
\implies & 5^{\frac{n}{2}} < 9^{n \log n} = 3^{3n \log n} \quad ✓
\end{aligned}$$

## b. Laufzeiteigenschaften

1. Korrekt, denn:

$$\begin{aligned}
f(n) \in \Omega(g(n)) &\implies \exists c_0 > 0, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : \; c_0 g(n) \leq f(n) \\
&\implies \exists \underbrace{c_1 > 0}_{\text{z. B. } c_1 = c_0^{-1}}, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : \; g(n) \leq c_1 f(n) \\
\text{da } f(n) \in \mathbb{N} : f(n) \leq f(n)^2 &\implies \exists c_1 > 0, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : \; g(n) \leq c_1 f(n)^2 \\
&\implies g(n) \in \mathcal{O}(f(n)^2) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

2. Falsch, denn:

$$\begin{aligned}
\text{sei} f(n) = n, \quad g(n) = \log_2 n \qquad &\implies f(n) \in \Omega(g(n)) \\
2^{f(n)} = 2^n \quad 2^{g(n)} = 2^{log_2 n} = n &
\end{aligned}$$

$$\text{Angenommen } 2^{f(n)} \in \mathcal{O}(2^{g(n)}) \implies 2^n \in \mathcal{O}(n) \quad \lightning \text{ falsch}$$

3. Falsch, denn:

$$\begin{aligned}
\text{sei} f(n) = n, \; g(n) = 1, \; h(n) = n &\implies f(n) \in \Omega(g(n)) \\
\text{Angenommen } f(n) \cdot h(n) \in \mathcal{O}(g(n) \cdot h(n)) &\implies n^2 \in \mathcal{O}(n) \quad \lightning \text{ falsch}
\end{aligned}$$