Turma: ______

Nota:

MA 327 Álgebra Linear

Segundo Semestre de 2008

Segunda Prova

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
T o t a l	

ATENÇÃO:
Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativa **não** serão consideradas.
Os sistemas lineares devem ser resolvidos por **escalonamento** de matrizes.

Questão 1. **(3.0 Pontos)**

Considere a transformação linear $T : I\!R^4 \longrightarrow I\!R^3$ definida por:

$$T(x, y, z, t) = (x - 2y + t, 2x + y - z, 5y - z - 2t) .$$

(a) Determine uma base para o subespaço $Ker(T)$ e uma base para o subespaço $Im(T)$.

(b) Determine uma base γ para o espaço vetorial $I\!R^4$ contendo uma base de $Ker(T)$.

(c) Determine a matriz $[T]^{\gamma}_{\beta}$, onde β é a base ordenada de $I\!R^3$ dada por:

$$\beta = \{ (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1) \} .$$

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere $T : I\!R^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(I\!R)$ a transformação linear tal que

$$T(1, 1) = 1 - x \quad \text{e} \quad T(1, -1) = 1 + 3x .$$

Mostre que T é um isomorfismo de $I\!R^2$ em $\mathcal{P}_1(I\!R)$. Determine explicitamente a expressão do isomorfismo inverso $T^{-1}(a_0 + a_1 x)$.

Questão 3. **(2.5 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $I\!R^3$ munido com o seguinte produto interno

$$\langle u , v \rangle = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2 ,$$

onde $u = (x_1 , y_1 , z_1)$ e $v = (x_2 , y_2 , z_2)$. Dados os elementos

$$w_1 = (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad w_2 = (1, 1, 1) ,$$

determine dois elementos $v_1, v_2 \in I\!R^3$ de modo que

$$w_2 = v_1 + v_2 ,$$

com $\{ v_1 , w_1 \}$ um conjunto linearmente dependente e $\{ v_2 , w_1 \}$ um conjunto ortogonal com relação ao produto interno definido acima.

Questão 4. **(2.5 Pontos)**

Considere o seguinte subespaço vetorial W do espaço vetorial real $I\!R^4$ dado por:

$$W = \{ (x, y, z, t) \in I\!R^4 \ / \ z + t = 0 \quad \text{e} \quad x - y = 0 \} .$$

Utilizando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal para o espaço vetorial real $I\!R^4$ contendo uma base ortogonal do subespaço W, com relação ao produto interno canônico de $I\!R^4$.

G A B A R I T O – Turmas C, D e E

Questão 1.

(a) Todo elemento $(x, y, z, t) \in Ker(T)$ satisfaz o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x \; -2y \qquad\quad +t = 0 \\ 2x \; +y \; -z \qquad = 0 \\ \qquad 5y \; -z \; -2t = 0 \end{cases}$$

Colocando na forma matricial e escalonando:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De onde obtemos

$$x = \frac{2}{5}z - \frac{1}{5}t \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{5}z + \frac{2}{5}t\,.$$

Dessa forma, temos que todo elemento $(x, y, z, t) \in Ker(T)$ é escrito da forma:

$$(x, y, z, t) = z\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, 1\right) \qquad \text{para} \qquad z,\, t \in I\!R\,.$$

Como os elementos

$$\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 1, 0\right) \qquad \text{e} \qquad \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, 1\right)$$

são claramente linearmente independentes, temos que

$$\{\,(2, -1, 5, 0)\,,\,(-1, 2, 0, 5)\,\}$$

é uma base de $Ker(T)$. Assim, $dim(Ker(T)) = 2$. Logo, $dim(Im(T)) = 2$.

Sabemos que $Im(T)$ é gerado pela imagem dos elementos de uma base do domínio. Desse modo, considerando a base canônica para $I\!R^4$, temos que $Im(T)$ é gerado por:

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0, 0) &= (1, 2, 0) \\ T(0, 1, 0, 0) &= (-2, 1, 5) \\ T(0, 0, 1, 0) &= (0, -1, -1) \\ T(0, 0, 0, 1) &= (1, 0, -2) \end{aligned}$$

Como a dimensão da imagem é 2, podemos escolher quaisquer dois desses elementos que sejam linearmente independentes, isto é,

$$Im(T) = [(1, 2, 0), (-2, 1, 5), (0, -1, -1), (1, 0, -2)] = [(1, 2, 0), (0, -1, -1)]\,.$$

Assim, temos $\{\,(1, 2, 0),\,(0, -1, -1)\,\}$ é uma base do subespaço $Im(T)$.

(b) Para obter a base γ de $I\!R^4$ temos que acrescentar mais dois elementos a base de $Ker(T)$, de maneira a termos 4 elementos linearmente independentes no $I\!R^4$. Escolhemos então $\gamma = \{(2,-1,5,0),(-1,2,0,5),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$. Quando calculamos T na base canônica de $I\!R^4$, já vimos que os elementos $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$ não estavam no subespaço $Ker(T)$, sendo portanto uma boa escolha. Além disso, a equação

$$a_1(2,-1,5,0) \;+\; a_2(-1,2,0,5) \;+\; a_3(1,0,0,0) \;+\; a_4(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

da origem ao sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2a_1 - 1a_2 + 5a_3 & = & 0 \\ -a_1 + 2a_2 \;+ 5a_4 & = & 0 \\ \quad a_1 & = & 0 \\ \qquad\quad a_2 & = & 0 \end{cases}$$

cuja única solução é $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$.

Logo, γ é um conjunto de 4 elementos do $I\!R^4$ que é linearmente independente. Como $I\!R^4$ tem dimensão 4, resulta que γ é uma base do $I\!R^4$ e contém a base de $Ker(T)$, conforme foi pedido.

(c) Para calcularmos a matriz de T nessa base, temos que calcular T em cada um desses elementos, e escrever o resultado em função da base β:

$$\begin{array}{lcl} T(2,-1,5,0) & = & (0,0,0,0) \\ T(-1,2,0,5) & = & (0,0,0,0) \\ T(1,0,0,0) & = & (1,2,0) \;=\; b_1(1,0,0) \;+\; b_2(1,1,0) \;+\; b_3(0,1,1) \\ T(0,1,0,0) & = & (0,-1,-1) \;=\; c_1(1,0,0) \;+\; c_2(1,1,0) \;+\; c_3(0,1,1) \end{array}$$

que dão origem aos sistemas lineares

$$\begin{cases} b_1 + b_2 & = 1 \\ \quad\;\; b_2 + b_3 & = 2 \\ \qquad\quad\; b_3 & = 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 & = 0 \\ \quad\;\; c_2 + c_3 & = -1 \\ \qquad\quad\; c_3 & = -1 \end{cases}$$

cujas soluções são

$$b_1 = -1 \;,\; b_2 = 2 \;,\; b_3 = 0 \;,\; c_1 = 0 \;,\; c_2 = 0 \;,\; c_3 = -1\,.$$

Assim, a matriz procurada é

$$[T]^{\gamma}_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Questão 2.

Vamos mostrar que T é um isomorfismo mostrando que $\{(1,1),(1,-1)\}$ é uma base de $I\!R^2$, e que $\{1-x, 1+3x\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1(I\!R)$.

Dessa forma teremos que T leva base em base, demonstrando que T é um isomorfismo. Como $I\!R^2$ e $\mathcal{P}_1(I\!R)$ tem dimensão 2, basta mostrar que esses dois conjuntos são linearmente independente, pois cada um deles tem 2 elementos.

Inicialmente, $\{(1,1),(1,-1)\}$ é linearmente independente. Seja a equação

$$a(1,1) \; + \; b(1,-1) \; = \; 0$$

Resulta dela o sistema linear

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a-b = 0 \end{cases} \quad \text{com matriz} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e determinante} \; -2 \neq 0 \; ,$$

logo invertível. Assim, o sistema linear possui somente a solução trivial $a = 0$ e $b = 0$, mostrando que os elementos são linearmente independentes.

Para $\{1-x, 1+3x\}$ procedemos da mesma maneira. A equação

$$a(1 - x) \; + \; b(1 + 3x) \; = \; 0$$

da origem ao sistema

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ -a+3b = 0 \end{cases} \quad \text{com matriz} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e determinante} \; 4 \neq 0 \; ,$$

logo invertível. Assim, o sistema possui somente a solução trivial $a = 0$ e $b = 0$, mostrando que os elementos são linearmente independentes.

Vamos agora determinar a inversa de T. Já sabemos que

$$T^{-1}(1-x) \; = \; (1,1) \qquad \text{e} \qquad T^{-1}(1+3x) \; = \; (1,-1) \; .$$

Vamos então escrever um polinômio nessa base $\{1-x, 1+3x\}$. Seja

$$a_o \; + \; a_1 x \; = \; m(1-x) \; + \; n(1+3x) \; .$$

Logo

$$
\begin{aligned}
T^{-1}(a_o + a_1 x) &= T^{-1}(m(1-x) \;+\; n(1+3x)) \\
&= mT^{-1}(1-x) \;+\; nT^{-1}(1+3x) \\
&= m(1,1) \;+\; n(1,-1) \;=\; (m+n, m-n)
\end{aligned}
$$

Como

$$m(1-x) \;+\; n(1+3x) \;=\; (m+n) \;+\; (-m+3n)x \;,$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} \quad m+n &= \; a_o \\ -m+3n &= \; a_1 \end{cases}$$

com matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & a_o \\ -1 & 3 & | & a_1 \end{bmatrix} \;\sim\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & a_o \\ 0 & 4 & | & a_o + a_1 \end{bmatrix} \;\sim\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \dfrac{3a_o - a_1}{4} \\ 0 & 1 & | & \dfrac{a_o + a_1}{4} \end{bmatrix} .$$

de onde obtemos

$$m \;=\; \frac{3a_o - a_1}{4} \qquad \text{e} \qquad n \;=\; \frac{a_o + a_1}{4} \;.$$

Temos então que

$$m \,+\, n \;=\; a_o \qquad \text{e} \qquad m \,-\, n \;=\; \frac{a_o - a_1}{2} \;,$$

e podemos concluir

$$T^{-1}(a_o \,+\, a_1 x) \;=\; (a_o \,,\, \frac{a_o - a_1}{2}) \;.$$

Questão 3.

Primeira solução:

Tomemos o elemento v_1 como sendo a projeção do elemento w_2 sobre o elemento w_1,

$$v_1 = \frac{\langle w_2 , w_1 \rangle}{\langle w_1 , w_1 \rangle} w_1 = (1,0,1) ,$$

pois $\langle w_2 , w_1 \rangle = 6$ e $\langle w_1 , w_1 \rangle = 6$.

Desse modo, o elemento v_2 ortogonal a w_1 é dado por:

$$v_2 = w_2 - v_1 = (1,1,1) - (1,0,1) = (0,1,0) .$$

Segunda solução:

Como os elementos v_1 e w_1 são linearmente dependentes, temos que $v_1 = \alpha w_1$, para algum escalar $\alpha \neq 0$.

Como v_2 é ortogonal a w_1 , temos que $\langle v_2 , w_1 \rangle = 0$. Assim, fazendo o produto interno entre os elementos $w_2 = v_1 + v_2$ e w_1, obtemos

$$\begin{aligned} 6 = \langle w_2 , w_1 \rangle &= \langle v_1 + v_2 , w_1 \rangle = \langle v_1 , w_1 \rangle + \langle v_2 , w_1 \rangle \\ &= \langle v_1 , w_1 \rangle = \langle \alpha w_1 , w_1 \rangle \\ &= \alpha \langle w_1 , w_1 \rangle \\ &= 6\alpha \end{aligned}$$

Assim, $\alpha = 1$, e obtemos

$$v_1 = (1,0,1) \qquad \text{e} \qquad v_2 = w_2 - v_1 = (1,1,1) - (1,0,1) = (0,1,0) .$$

Questão 4.

Vemos da definição de W que $z = -t$ e $x = y$. Logo

$$W = \{ (y, y, -t, t) \in I\!R^4 \mid y,\, t \in I\!R \} = \{ y(1,1,0,0) + t(0,0,-1,1) \mid y,\, t \in I\!R \} ,$$

isto é, $W = [(1,1,0,0), (0,0,-1,1)]$.

Como os elementos $(1,1,0,0)$ e $(0,0,-1,1)$ são claramente linearmente independentes, temos que $\{ (1,1,0,0), (0,0,-1,1) \}$ é uma base de W.

Completamos essa base de W acrescentando mais dois elementos, pois $dim(I\!R^4) = 4$.

Escolhemos $\gamma = \{ (1,1,0,0), (0,0,-1,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0) \}$, e vamos agora aplicar o método de Gram–Schmidt.

Por simplicidade, vamos denotar os elementos da base γ por:

$$v_1 = (1,1,0,0) \quad , \quad v_2 = (0,0,-1,1) \quad , \quad v_3 = (0,1,0,0) \quad \text{e} \quad v_4 = (0,0,1,0) .$$

Inicialmente escolhemos $q_1 = v_1 = (1,1,0,0)$, o primeiro elemento da base ortogonal.

Em seguida construímos o elemento q_2 da forma:

$$q_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 \,,\, q_1 \rangle}{\langle q_1 \,,\, q_1 \rangle}(1,1,0,0) = (0,0,-1,1) ,$$

A seguir construímos o elemento q_3 da forma:

$$\begin{aligned} q_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3 \,,\, q_1 \rangle}{\langle q_1 \,,\, q_1 \rangle}(1,1,0,0) - \frac{\langle v_3 \,,\, q_2 \rangle}{\langle q_2 \,,\, q_2 \rangle}(0,0,-1,1) \\ &= (0,1,0,0) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

Finalmente, construímos a seguir o elemento q_4 da forma:

$$q_4 = v_4 - \frac{\langle v_4 \,,\, q_1 \rangle}{\langle q_1 \,,\, q_1 \rangle}(1,1,0,0) - \frac{\langle v_4 \,,\, q_2 \rangle}{\langle q_2 \,,\, q_2 \rangle}(0,0,-1,-1) - \frac{\langle v_4 \,,\, q_3 \rangle}{\langle q_3 \,,\, q_3 \rangle}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right)$$

Assim, obtemos

$$q_4 = (0,0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,-1,1) = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) .$$

Obtemos assim a base procurada

$$\left\{(1,1,0,0),(0,0,-1,1),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right),\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Observe que iniciamos com $q_1 \in W$. Também q_2 é uma combinação linear da base de W. Logo, $q_1, q_2 \in W$ é uma base ortogonal de W. Neste problema em particular, os elementos da base de W já eram ortogonais.