Métodos I - 1S11 - Lista 1

(1) Seja $\mathbf{V} = z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$. Mostre que as componentes de $\mathbf{V}$ em coordenadas cilíndricas circulares são dadas por

$$V_\rho = z\cos\theta - 2\rho\cos\theta\sin\theta,$$
$$V_\theta = -z\sin\theta - 2\rho\cos^2\theta,$$
$$V_z = \rho\sin\theta.$$

(2) Seja o campo vetorial

$$\mathbf{V} = V_\rho(\rho,\theta)\mathbf{e}_\rho + V_\theta(\rho,\theta)\mathbf{e}_\theta.$$

Mostre que $\nabla\times\mathbf{V} = \operatorname{rot}\mathbf{V}$ possui componente apenas na direção z.

(3) Seja o campo vetorial $\mathbf{V} = \rho\mathbf{e}_z$. Mostre que

$$\nabla\times\mathbf{V} = -\mathbf{e}_\theta, \quad \nabla\times(\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})) = 0.$$

(4) Calcule $\partial\mathbf{e}_{q_i}/\partial q_j$ com $i,j = 1,2,3$ quando q_i são as coordenadas cilíndricas e mostre que as únicas derivadas não nulas são

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = -\mathbf{e}_\rho.$$

(5) Sejam as coordenadas esferoidais achatadas (ξ,η,ϕ) dadas por

$$x = a\cosh\xi\cos\eta\cos\phi,$$
$$y = a\cosh\xi\cos\eta\sin\phi,$$
$$z = a\sinh\xi\sin\eta,$$

onde $\xi \geq 0$, $-\pi/2 \leq \eta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Mostre que os fatores de escala são dados por

$$h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta},$$
$$h_\phi = a\cosh\xi\cos\eta.$$

(6) Sejam (u,v,z) as coordenadas cilíndricas parabólicas, definidas como

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv, \quad z = z,$$

com $-\infty < u < +\infty$, $v \geq 0$, $-\infty < z < +\infty$, e $\mathbf{r}$ o vetor posição, $\mathbf{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Mostre que em coordenadas cilíndricas parabólicas temos

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}\,(u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v) + z\mathbf{e}_z.$$

Usando essas coordenadas, mostre que $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$.

(7) Sejam (u,v,z) as coordenadas cilíndricas parabólicas e o campo vetorial

$$\mathbf{V} = \frac{1}{4}\sqrt{u^2+v^2}(-v\mathbf{e}_u + u\mathbf{e}_v).$$

Mostre que $\operatorname{rot}\mathbf{V} = \mathbf{e}_z$.

(8) Sejam as coordenadas (u,v,z) definidas como

$$x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad y = uv, \quad z = z.$$

Mostre que esse sistema de coordenadas não é ortogonal.

(9) Calcule $\partial\mathbf{e}_{q_i}/\partial q_j$ com $i,j = 1,2,3$ quando q_i são as coordenadas esféricas e mostre que as únicas derivadas não nulas são

$$\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\phi} = \sin\theta\mathbf{e}_\phi, \quad \frac{\partial\mathbf{e}_\phi}{\partial\phi} = -\cos\theta\mathbf{e}_\theta - \sin\theta\mathbf{e}_r,$$
$$\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\phi} = \cos\theta\mathbf{e}_\phi, \quad \frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = -\mathbf{e}_r.$$

(10) Seja o campo vetorial

$$\mathbf{V} = \frac{yz}{r(x^2+y^2)}\boldsymbol{i} - \frac{xz}{r(x^2+y^2)}\boldsymbol{j},$$

onde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. (i) Usando coordenadas cartesianas, mostre que

$$\nabla\times\mathbf{V} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

(ii) Mostre que em termos de coordenadas esféricas

$$\mathbf{V} = -\frac{\cot\theta}{r}\mathbf{e}_\phi.$$

(iii) Obtenha o resultado acima para $\nabla\times\mathbf{V}$ usando coordenadas esféricas.

(11) Seja $f(r)$ uma função de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Mostre, usando (i) coordenadas cartesianas e (ii) coordenadas esféricas, que

$$\nabla f(r) = f'(r)\mathbf{e}_r,$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{e}_r f(r)) = \frac{2}{r}f(r) + f'(r),$$
$$\nabla\times(\mathbf{e}_r f(r)) = 0.$$

(12) Sejam

$$\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi},$$
$$\mathbf{V} = V_r\mathbf{e}_r + V_\theta\mathbf{e}_\theta + V_\phi\mathbf{e}_\phi,$$

e $\mathbf{V}\cdot\nabla$ o operador dado por

$$\mathbf{V}\cdot\nabla = V_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{V_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Mostre que

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{V}.$$