EE400 _ Métodos da Eng. Elétrica
2ª prova _ 15/05/2013 _ prof. Rafael

1) $$2(\cosh z)^2 + (\operatorname{senh} z)^2 = 0$$

$$2\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right)^2 = 0$$

$$2 \cdot \frac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{4} + \frac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{4} = 0$$

$$\frac{3e^{2z}+3e^{-2z}}{4} = -\frac{1}{2}$$

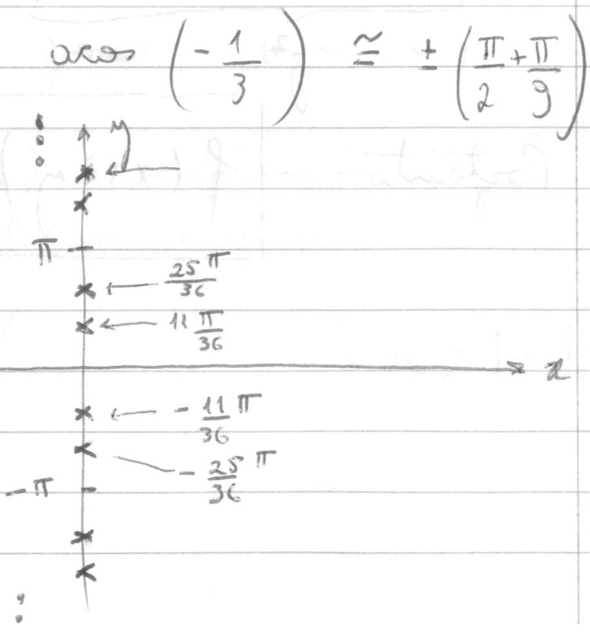
$$\frac{3}{2}\left(\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cosh(2z) = -\frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \cosh(2x)\cos 2y = -1/3 \\ \operatorname{senh}(2x)\operatorname{sen} 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad ; \quad 2y = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \cong \pm\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}\right) \pm 2n\pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pm \dfrac{11}{36}\pi \pm n\pi \end{array}}$$



2) $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^x \operatorname{sen} y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (cond. C-R)

$\Rightarrow 2x + e^x \operatorname{sen} y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2xy - e^x \cos y + k_1(x) = v(y,x)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (cond. C-R)

$\Rightarrow -2y + e^x \cos y = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2xy - e^x \cos y + k_2(y) = v(x,y)$

Em conclusão $k_1(x) = k_2(y) = k$ (constante)

$v(x,y) = 2xy - e^x \cos y + k$

$\Rightarrow f(x+iy) = x^2 - y^2 + e^x \cancel{\operatorname{sen}} y + i\left(2xy - e^x \cos y + k\right)$

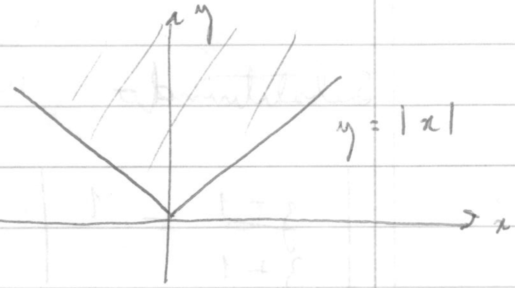
$= \left[x^2 - y^2 + i\,2xy\right] + \left[e^x \operatorname{sen} y - i\,e^x \cos y\right] + ik$

$= \underbrace{\left[(x^2-y^2) + i(2xy)\right]}_{z^2} + (-i)\underbrace{\left[e^x \cos y + i\,e^x \operatorname{sen} y\right]}_{e^z} + ik$

Portanto: $\boxed{f(x+iy) = f(z) = z^2 - i\left(e^z - k\right)}$

3) Consideremos inicialmente a função $g(z) = \frac{1}{z}$

Esta função, como demonstrado em aula, transforma retas e círculos da forma $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$ em retas e círculos da forma: $Du^2 + Dv^2 + Bu - Cv + A = 0$



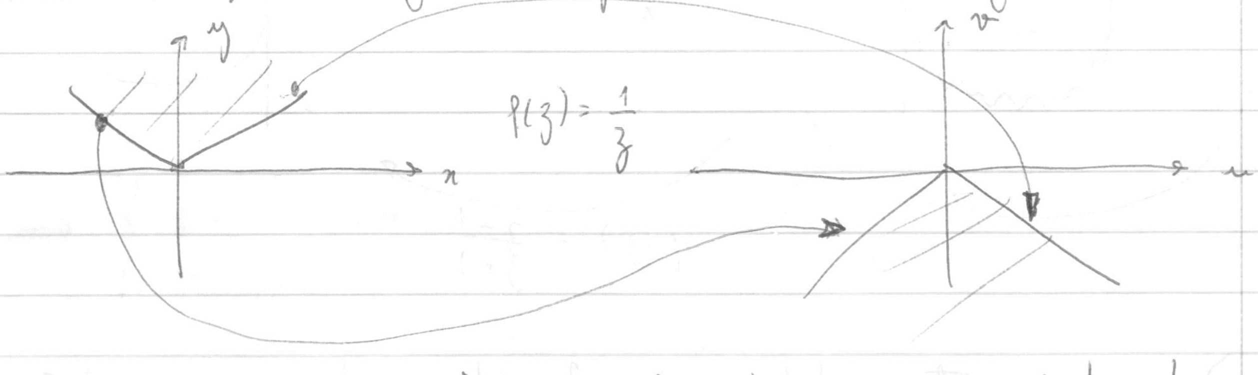
Conforme a figura, a região $y > |x|$ é delimitada por duas semi-retas: $y = x \quad (x \geq 0)$

e $y = -x \quad (x < 0)$

A reta $\overbrace{y = x}^{(A = D = 0,\ B = -C = 1)} \quad (x \geq 0)$ tem por imagem a reta $u + v = 0 \implies v = -u \quad (u \geq 0)$

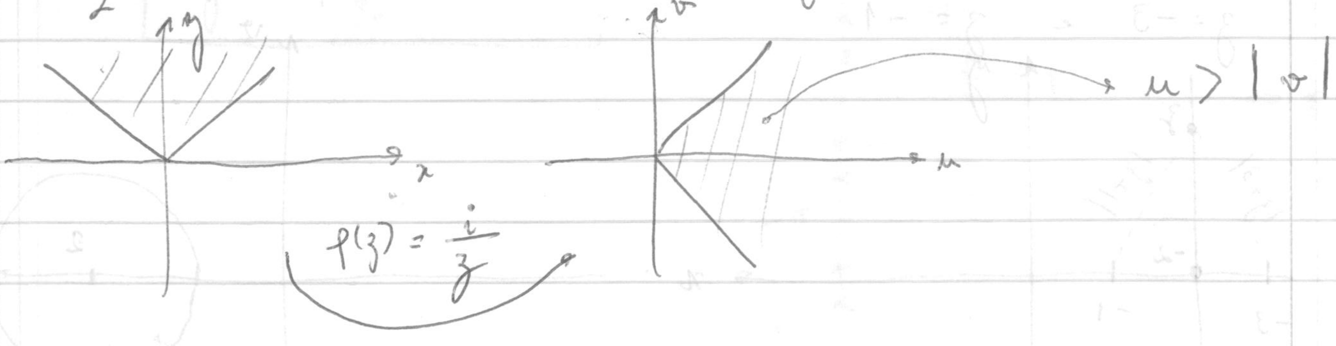
A reta $y = -x \ (x < 0)$ $(A = D = 0,\ B = C = 1)$ tem por imagem a reta $v = u \quad (u < 0)$

Portanto a imagem da região $y > |x|$ é dada pela região representada a seguir:



ou seja, a ~~região~~ dada por $v < |u|$

A função $f(z) = i/z = i\,g(z)$ e implica num giro de $\frac{\pi}{2}$ radianos em relação à figura anterior:



4) $w = f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

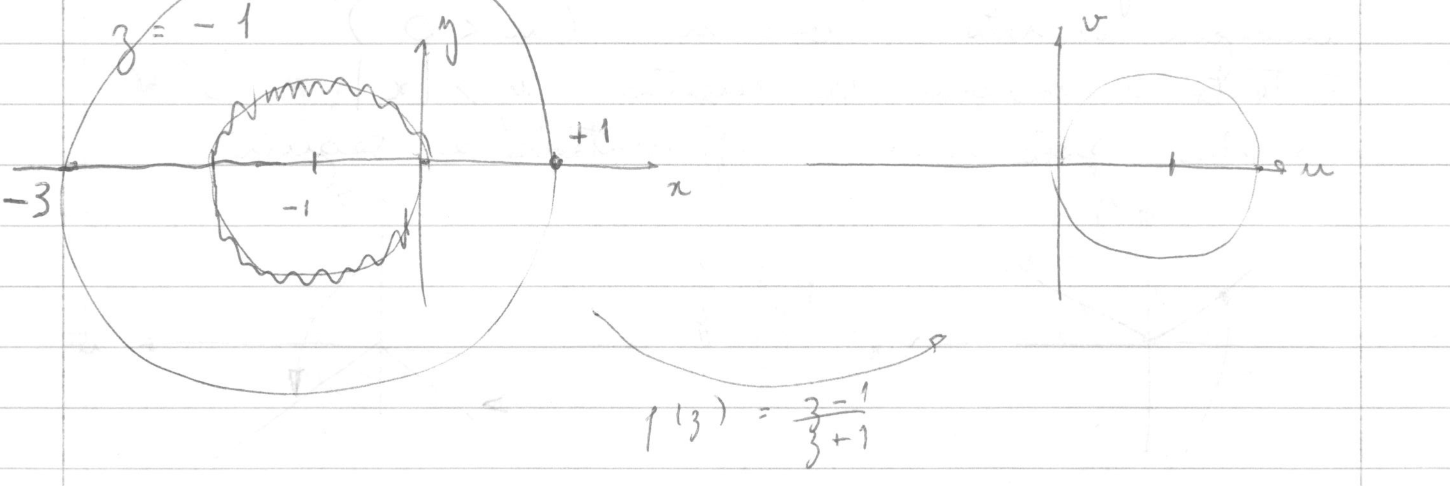
a) Qual a curva no plano z, que tem por imagem o círculo $|w - 1| = 1$?

Substituindo $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ na eq. do círculo, obtém-se:

$$\left| \frac{z-1}{z+1} - 1 \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{z-1-z-1}{z+1} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|z+1|} = 1 \Rightarrow |z+1| = 2$$

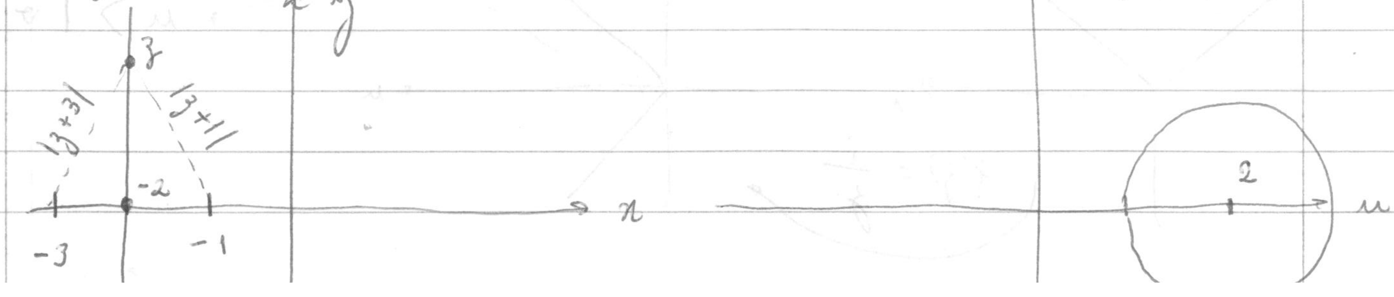
Portanto é um círculo de raio ~~unitário~~ $= 2$ centrado em $z = -1$



b) Analogamente, p/ o círculo $|w - 2| = 1$ obtemos

$$\left| \frac{z-1-2z-2}{z+1} \right| = 1 \Rightarrow |z+3| = |z+1|$$ que é

a reta mediana do segmento formado pelos pontos $z = -3$ e $z = -1$



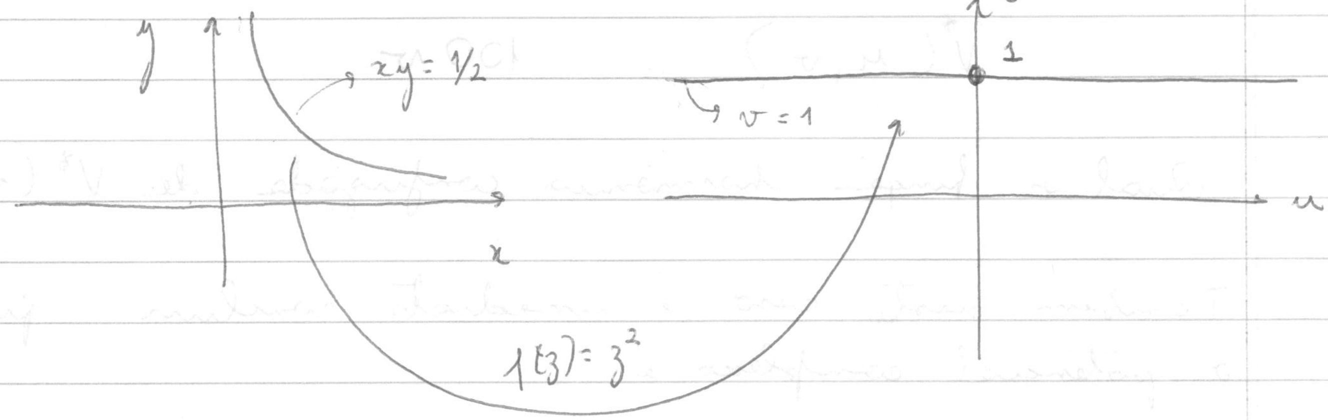
5) a) $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i\,(2xy)$

Portanto $u(x,y) = x^2 - y^2$

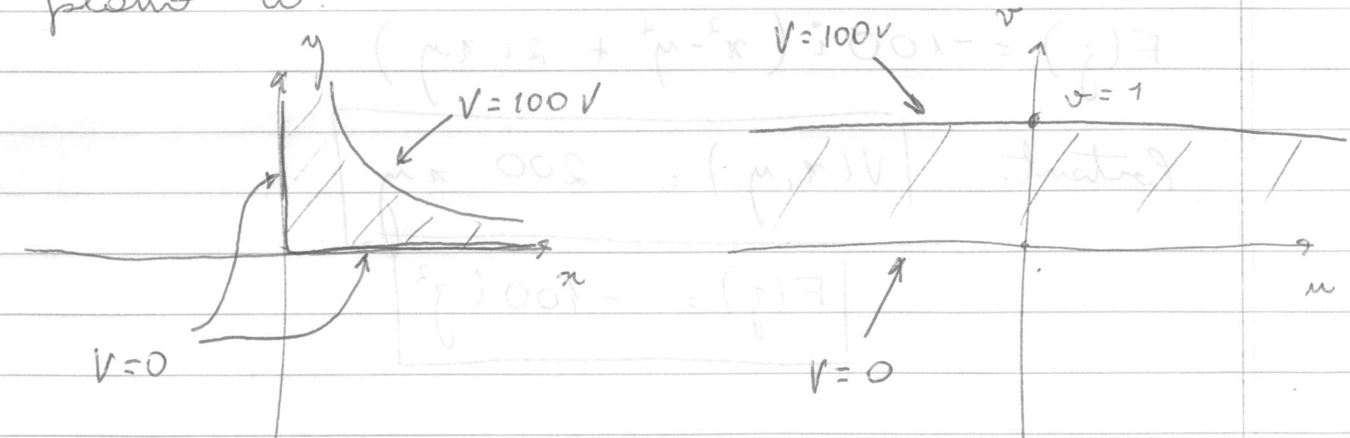
$v(x,y) = 2xy$

se, no plano z, $xy = 1/2$ então teremos

$v(x,y) = 2xy = 2 \times \frac{1}{2} = 1 =$ constante



b) É imediato verificar que o mapeamento $f(z) = z^2$ mapeia a região situada entre o ramo da hipérbole $xy = 1/2$ e o semi-eixos positivos $x > 0$ e $y > 0$, no plano z na região situada entre as retas $v = 0$ e $v = 1$ no plano w.



Portanto, se conhecermos o potencial complexo para as placas infinitas ~~mostradas~~ paralelas no plano w, fica fácil o cálculo do potencial no plano z.

Conforme visto em sala de aula, o potencial entre placas paralelas infinitas é sempre proporcional à distância as placas, satisfazendo as cond. de contorno. Neste $V=0$ para $v=0$ e $V=100$ para $v=1$, portanto é imediato concluir que

$$V^*(u,v) = 100v$$

Qual a função harmônica conjugada de $V^*(u,v)$?

Também neste caso é imediato concluir que o potencial complexo é

$$F^*(u,v) = 100v - i\,100u = V^*(u,v) + i\,T^*(u,v)$$
$$= -100i\,(u+iv) = -100i\,w$$

Considerando agora que $w = z^2$, temos:

$$F^*(w) = F^*(z^2) = -100i\,z^2 = F(z) = V(z) + i\,T(z)$$

$$F(z) = -100i\,(x^2 - y^2 + 2ixy)$$

Portanto $\boxed{V(x,y) = 200\,xy}$

$$\boxed{F(z) = -100i\,z^2}$$