EE 400 - Métodos da Eng. Elétrica
1ª prova - Gabarito - 03/04/2013 - prof. Rafael

1) A reta $z = -y/2$, $x = 2$ pode ser parametrizada por:

$$x(u) = 2 \quad , \quad y(u) = u \quad , \quad z(u) = -u/2$$

Sejam $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ uma base girante em relação ao sistema $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, isto é:

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos v \, \vec{i} + \operatorname{sen} v \, \vec{j} \\ \vec{j}' = -\operatorname{sen} v \, \vec{i} + \cos v \, \vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{k} \end{cases}$$

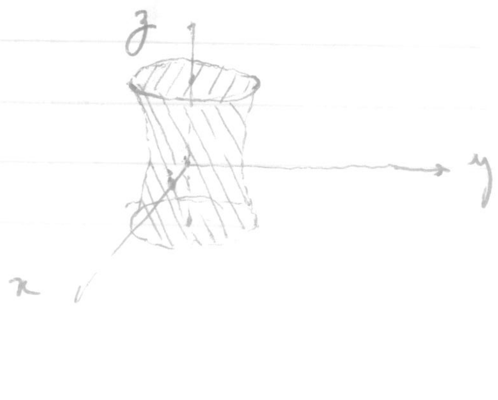
Exprimindo a reta dada no sistema $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ temos:

$$\vec{l}(u) = 2\vec{i}' + u\vec{j}' - \frac{u}{2}\vec{k}'$$

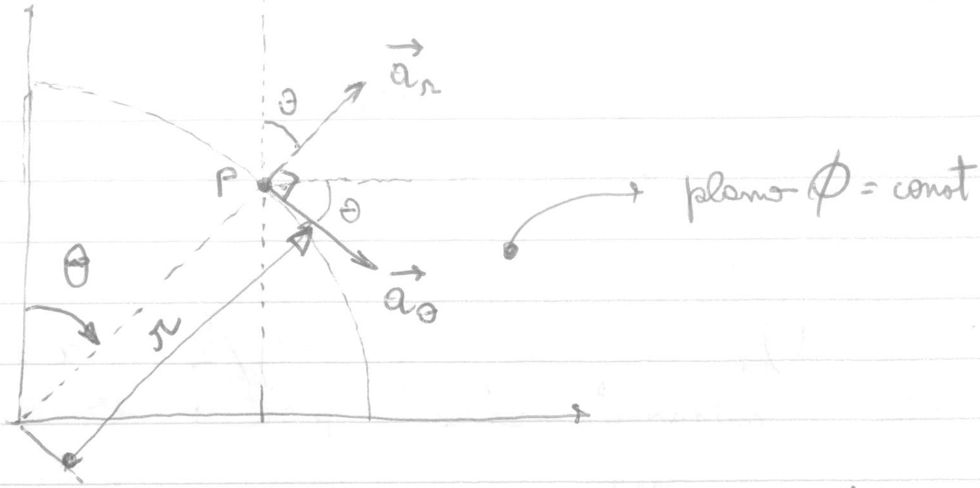
Substituindo temos:

$$\vec{l}(u,v) = 2(\cos v \, \vec{i} + \operatorname{sen} v \, \vec{j}) + u(-\operatorname{sen} v \, \vec{i} + \cos v \, \vec{j}) - \frac{u}{2}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{l}(u,v) = (2\cos v - u \operatorname{sen} v)\vec{i} + (2\operatorname{sen} v + u\cos v)\vec{j} - \frac{u}{2}\vec{k}}$$



2)



Considerando a figura acima correspondente a um plano ϕ = constante, podemos relacionar $\vec{a}_r$ e $\vec{a}_\theta$ com os vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\begin{cases} \vec{a}_r = \operatorname{sen}\theta \cos\phi \, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \, \vec{j} + \cos\theta \, \vec{k} \\ \vec{a}_\theta = \cos\theta \cos\phi \, \vec{i} + \cos\theta \operatorname{sen}\phi \, \vec{j} - \operatorname{sen}\theta \, \vec{k} \end{cases}$$

Portanto:

$$\frac{\partial \vec{a}_r}{\partial \theta} = \cos\theta \cos\phi \, \vec{i} + \cos\theta \operatorname{sen}\phi \, \vec{j} - \operatorname{sen}\theta \, \vec{k} = \vec{a}_\theta$$

$$\frac{\partial \vec{a}_\theta}{\partial \theta} = -\operatorname{sen}\theta \cos\phi \, \vec{i} - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \, \vec{j} - \cos\theta \, \vec{k} = -\vec{a}_r$$

3) Deseja-se calcular:

$$I = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA$$

sendo S delimitado por $r = 1$, $r = 2$, $z = -\frac{\pi}{2}$, $z = \frac{\pi}{2}$

Do teorema de Gauss:

$$I = \int_T \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

sendo T o volume contido pela superf. fechada ~~defin~~ S.

Ora, $\operatorname{div} \vec{F} = \left(\frac{F_r}{r} + \frac{\partial F_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

e $F_r = r \cos z$; $F_\phi = 0$; $F_z = \operatorname{sen} z$

Portanto $\operatorname{div} \vec{F} = \left(\frac{r \cos z}{r} + \frac{\partial (r \cos z)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (0)}{\partial \phi} + \frac{\partial (\operatorname{sen} z)}{\partial z}$

$= 2 \cos z + \cos z = 3 \cos z$

Finalmente ; $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 3 \cos z \; r \, dr \, d\phi \, dz$

$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 3 \cos z \int_1^2 r \, dr \, d\phi \, dz = 2\pi \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) \cdot \left(3 \operatorname{sen} z \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)$

$$\boxed{I = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot 6 = 18\pi}$$

4) Deseja-se calcular a integral:

$$I(R) = \oint_{\Gamma(R)} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

Pelo teorema de Stokes $I(R) = \int_{S(R)} rot\vec{H} \cdot \vec{n}\, dA$

onde $S(R)$ pode ser escolhido como sendo o disco plano (contido em $z=0$) centrado na origem e com raio $= R$; neste caso $\vec{n} = \vec{a}_z$

Contudo, sabemos que $rot\,\vec{H} = \vec{J}$, portanto:

$$I(R) = \begin{cases} \int_{S(R)} \underbrace{J_0(1-r)\vec{a}_z}_{\vec{J}} \cdot \underbrace{\vec{a}_z\, dA}_{\vec{n}\cdot dA} & se\ R \leq 1 \\ \int_{S(1)} \underbrace{J_0(1-r)\vec{a}_z}_{\vec{J}} \cdot \underbrace{\vec{a}_z\, dA}_{\vec{n}\cdot dA} & se\ R > 1 \end{cases}$$

Para $R \leq 1$:

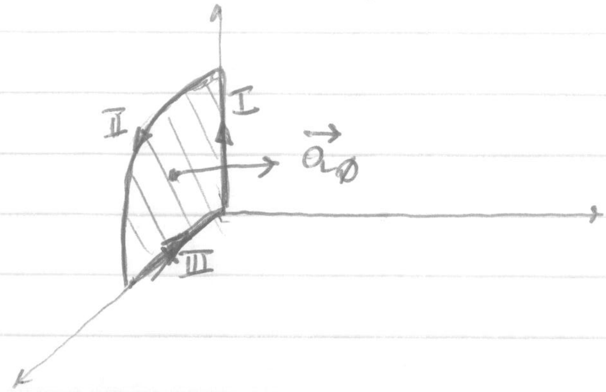
$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R J_0(1-r)\, r\, dr\, d\phi = 2\pi J_0\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3}\right)$$

Para $R > 1$:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 J_0(1-r)\, r\, dr\, d\phi = \frac{\pi J_0}{3}$$

$$\boxed{I(R) = \begin{cases} 2\pi J_0\left(\dfrac{R^2}{2} - \dfrac{R^3}{3}\right) & se\ R \leq 1 \\ \dfrac{\pi J_0}{3} & se\ R > 1 \end{cases}}$$

5) O circuito C é representado na figura:



C é o contorno do "quarto de disco" contido no plano $\phi = 0$. Claramente a normal a esta superfície (S) é o vetor $\vec{a}_\phi$

Pelo teorema de Stokes;

$$I = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot}\,\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \int_S (\text{rot}\,\vec{F}) \cdot \vec{a}_\phi\, dA$$

Portanto o integrando da integral à direita é simplesmente a componente do rot $\vec{F}$ na direção $\vec{a}_\phi$ isto é:

$$\text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{a}_\phi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)$$

sendo $F_r = r^2 \cos\phi$ e $F_\theta = 5r$

$$\Rightarrow \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{a}_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(5r^2) - \frac{\partial}{\partial \theta}(r^2\cos\phi) = 10$$

Portanto $I = 10 \int_S dA = 10\underbrace{\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\text{área do "quarto de disco"}}$

$$\boxed{I = \frac{5\pi}{2}}$$