Turma:

MA 141 P Geometria analítica

Segundo Semestre de 2008

Prof. Marcos Jardim

Segunda Chamada - 2/12/2008
Terceira Prova da Turma Especial

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Q 1 (P1)	
Q 2 (P1)	
Q 3 (P2)	
Q 4 (P2)	
Q 5 (P3)	
Q 6 (P3)	
T o t a l	

Alunos da turma especial:

Fazer apenas 5 questões quaisquer.

Alunos da turma regular:

Fazer obrigatoriamente as questões da provas que está sendo reposta, mais 3 das outras 4 questões.

Questão 1 (1 ponto cada item)

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + az = b \end{cases}$$

(i) Para que valores de a, b o sistema admite uma única solução?

(ii) Para que valores de a, b o sistema é impossível?

Solução:

O determinante da matriz associada ao sistema é

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix} = a - 8$$

Portanto, se $a \neq 8$ o sistema acima tem solução única para qualquer $b \in \mathbb{R}$.

O sistema poderá ser impossível apenas quando $a = 8$; escalonando a matriz acima com este valor do parâmetro a obtemos, após alguns passos, a matriz aumentada

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b - 10 \end{array}\right)$$

Portanto se $a = 8$ e $b \neq 10$ o sistema é impossível.

Questão 2 (1 ponto cada item)

Considere os seguintes pontos no espaço: $A = (3, -2, 8)$, $B = (0, 0, 2)$ e $C = (-3, -5, 10)$.

(i) Mostre que o triângulo de vértices A, B e C é retângulo.

(ii) Determine a área de tal triângulo.

Solução: Os lados do triângulo ABC são

$$\vec{AB} = (-3, 2, -6) \quad , \quad \vec{AC} = (-6, -3, 2) \quad \text{e} \quad \vec{BC} = (-3, -5, 8).$$

Note que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, mostrando que o triângulo ABC possui um ângulo reto no vértice A. Para a área de ABC:

$$\text{Area} \;=\; \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}||\vec{AB}|| \cdot ||\vec{AC}|| = \frac{49}{2}.$$

Questão 3 (1 ponto cada item)

(a) Encontre a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $P = (1, 2, 1)$ e que contém a reta interseção entre os planos $\pi : 2x - 3y + 4z - 1 = 0$ e $\alpha : x - 3y - 2z + 2 = 0$

(b) Qual a posição relativa (paralelas, concorrentes ou reversas) das retas $r : 2 - x = \frac{y-1}{3} = y - 5$ e $s : x = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{3}$? Justifique sua resposta.

Solução:

(a) O primeiro passo é calcular o vetor diretor da reta de interseção, que é dado pelo vetor

$$\vec{n}_\pi \times \vec{n}_\alpha = (2, -3, 4) \times (1, -3, -2) = (18, 8, -3)$$

Em seguida, é necessário determinar um ponto na reta de interseção, o que pode ser feito fazendo $z = 0$ nas equações dos planos e resolvendo o sistema 2×2 resultante:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - 3y = -2 \end{cases} \Rightarrow \; x = 3 \; , \; y = 5/3$$

Portanto o ponto $Q = (3, 5/3, 0)$ também pertence ao plano desejado, logo o vetor $\vec{PQ} = (2, -1/3, -1)$ é paralelo a este plano. Então o vetor normal será dado por

$$(18, 8, -3) \times (2, -1/3, -1) = (9, -12, 22)$$

e a equação do plano é

$$9(x - 1) - 12(y - 2) + 22(z - 1) = 0.$$

(b) Basta calcular o determinante formada pelos vetores $\vec{v}_r = (1, 3, 1)$ (vetor diretor da reta r), $\vec{v}_s = (1, 4, 3)$ (vetor diretor da reta s) e $\vec{P_r P_s} = (2, 1, 3)$, onde $P_r = (2, 1, 5)$ é uma ponto da reta r e $P_s = (0, 0, 2)$ é uma ponto da reta s. Desta forma:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 11$$

donde se conclui que as retas são reversas, pois $\det \neq 0$.

Questão 4 (2 pontos)

Encontre a equação cartesiana da seção cônica cujos focos são $F_1 = (0, 0)$ e $F_2 = (1, 1)$ e que satisfaz $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 4$. Qual é sua excentricidade?

Solução: Veja que

$$\text{dist}(P, F_1) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \text{dist}(P, F_2) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

portanto a condição dada é

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 4.$$

Tomando $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e quadrando os dois lados obtemos:

$$-(x + y + 7) = 4\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Quandrando os dois lados da igualdade mais uma vez, obtemos

$$15x^2 + 15y^2 - 2xy - 14x - 14y = 49.$$

A excentricidade da elipse acima é a distância entre os focos pela metade da distância que a define, ou seja $e = \sqrt{2}/2$.

Questão 5 (2 pontos)
Identifique a cônica (elipse, hipérbole ou parábola)

$$x^2 - 2xy + y^2 + 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 1 = 0,$$

e ache o seu centro.

Solução: O primeiro passo é encontrar os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eles são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$ donde se pode concluir que a cônica é uma parábola.
Para encontrar o seu centro, é preciso reescrever a equação da cônica nas coordenadas x' e y'. O autovetor de norma 1do autovalor $\lambda_1 = 0$ é $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e a matriz de rotação da cônica é

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Portanto nas coordenadas x' e y' temos

$$2y'^2 + 2x' - 4y' + 1 = 0$$

que, após completar os quadrados, simplifica para

$$2(y' - 1)^2 + 2(x' - 1/2) = 0$$

portanto o centro da parábola é o ponto $(1, 1/2)$.

Questão 6 (2 pontos)

Identifique a quádrica (elipsóide, hiperbolóide de uma ou duas folhas, parabolóide elíptico ou hiperbólico) e ache sua equação nas variáveis x', y' e z':

$$2x^2 + 7y^2 + 2z^2 - 6xz = 4.$$

Solução: Primeiramente, calculemos os autovalores da matriz associada a quádrica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico é dado por:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{1}) = (7 - \lambda)[(2 - \lambda)^2 - 9]$$

As raízes de $p_A(\lambda) = 0$ são -1, 7 e 5. A equação nas variáveis x', y' e z' fica sendo:

$$-x'^2 + 7y'^2 + 5z'^2 = 4.$$

Como dois coeficientes são positivos e um é negativo, a quádrica é um hiperbolóide de 1 folha.