Turma:

Nota:

MA 327 Álgebra Linear

Primeiro Semestre de 2006

Segunda Prova

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
T o t a l	

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

A matriz de mudança da base ordenada $\alpha = \{ p_1(x), p_2(x), p_3(x) \}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, onde

$$p_1(x) = 1 - x , \quad p_2(x) = 1 + x \quad \text{e} \quad p_3(x) = 1 - x^2 ,$$

para uma base ordenada $\gamma = \{ q_1(x), q_2(x), q_3(x) \}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é dada por:

$$[I]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Determine a base ordenada γ. Dado o polinômio $p(x) = 3 - x + 2x^2$ determine seu vetor de coordenadas $[p(x)]_{\alpha}$, com relação à base ordenada α.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Determine explicitamente a expressão de uma transformação linear T de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

(a) O elemento $p(x) = (1 + x^2) \in Ker(T)$.

(b) O elemento $q(x) = 1 \notin Ker(T)$.

(c) O elemento $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in Im(T)$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear **injetora**. Mostre que se $\{ v_1, \cdots, v_m \}$ é linearmente independente em V, então $\{ T(v_1), \cdots, T(v_m) \}$ é linearmente independente em W.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Diga se é Falsa ou Verdadeira cada uma das afirmações abaixo, justificando sua resposta.

(a) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que é injetora.

(b) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que é sobrejetora.

(c) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que é bijetora.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$T(1, -1) = 2 + x \qquad \text{e} \qquad T(0, 1) = x - 1 .$$

Mostre que T é um isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ em $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Determine o isomorfismo inverso T^{-1} de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^2$.

Boa Prova !

G A B A R I T O

Questão 1. (2.0 Pontos)

Da matriz de mudança de base $[I]^{\alpha}_{\gamma}$, sabemos que

$$\begin{aligned} p_1(x) &= q_1(x) + q_2(x) \\ p_2(x) &= 2q_1(x) + q_2(x) \\ p_3(x) &= q_3(x) \end{aligned}$$

Da última equação, temos que $q_3(x) = 1 - x^2$. Das duas primeiras equações, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} q_1(x) + q_2(x) = p_1(x) \\ 2q_1(x) + q_2(x) = p_2(x) \end{cases} \iff \begin{cases} q_1(x) + q_2(x) = p_1(x) \\ q_2(x) = 2p_1(x) - p_2(x) \end{cases}$$

que possui a solução $q_1(x) = p_2(x) - p_1(x)$ e $q_2(x) = 2p_1(x) - p_2(x)$.

Assim, obtemos

$$q_1(x) = 2x \,, \quad q_2(x) = 1 - 3x \quad \text{e} \quad q_3(x) = 1 - x^2$$

que são os elementos da base ordenada γ.

Vamos encontrar o vetor de coordenadas do elemento $p(x) = 3 - x + 2x^2$ com relação à base ordenada α. Para isso, basta fazer

$$\begin{aligned} p(x) &= a\,p_1(x) + b\,p_2(x) + c\,p_3(x) \\ 3 - x + 2x^2 &= a(1 - x) + b(1 + x) + c(1 - x^2) \end{aligned}$$

obtendo o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ -a + b = -1 \\ -c = 2 \end{cases}$$

que possui como solução $a = 3$, $b = 2$ e $c = -2$. Assim, temos

$$[p(x)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Da condição **(a)** temos que

$$T(1 + x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da condição **(b)**, isto é, $q(x) = 1 \notin Ker(T)$, implica que o elemento $r(x) = x^2$ não pode pertencer ao $Ker(T)$, pois podemos escrever $q(x) = p(x) - r(x)$. Claramente, se o elemento $r(x) \in Ker(T)$, então $q(x) \in Ker(T)$, o que contradiz a hipótese.

Assim, podemos considerar a seguinte transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, com $\{ 1 + x^2 \}$ a base para $Ker(T)$, dada por:

$$\begin{aligned} T(1 + x^2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ T(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ T(x) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde estamos escolhendo $\gamma = \{ 1 + x^2, 1, x \}$ uma base ordenada para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, que foi obtida completando a base do $Ker(T)$.

Vamos tomar um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e representa–lo com relação à base ordenada γ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} p(x) &= d_1(1 + x^2) + d_2 + d_3x \\ &= (d_1 + d_2) + d_3x + d_1x^2 \end{aligned}$$

obtendo o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = a \\ d_1 = c \\ d_3 = b \end{cases}$$

que possui somente a solução $d_1 = c$, $d_2 = a - c$ e $d_3 = b$. Desse modo, temos que

$$p(x) = c(1 + x^2) + (a - c) + bx.$$

Agora, fazendo $T(p(x)) = T(a + bx + cx^2)$, obtemos

$$T(a + bx + cx^2) = c\,T(1 + x^2) + (a - c)\,T(1) + b\,T(x) = \begin{bmatrix} 2b & a - c \\ a - c & b \end{bmatrix}.$$

Assim, encontramos uma transformação T com as propriedades pedidas.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Tomando uma combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\, T(v_i) \;=\; 0_W \,,$$

e como T é uma transformação linear, podemos escrever

$$T\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\, v_i \right) \;=\; 0_W \,.$$

Considerando a hipótese que T é injetora, isto é, $Ker(T) = \{\, 0_V \,\}$, temos que

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\, v_i \;=\; 0_V \,.$$

Como $\{\, v_1 \,,\, \cdots \,,\, v_m \,\}$ é linearmente independente em V, implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0 \,.$$

Portanto, $\{\, T(v_1) \,,\, \cdots \,,\, T(v_m) \,\}$ é linearmente independente em W.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

(a) A afirmação é **Falsa**.
De fato, considerando uma transformação linear T injetora, isto é, $Ker(T) = \{\, 0_V \,\}$, pelo **Teorema do núcleo e da imagem**, temos que $dim(\, Im(T)\,) = 4$. O que não é possível, pois $Im(T)$ é um subespaço de $I\!R^3$ e $dim(\, I\!R^3\,) = 3$. Logo, não existe uma transformação linear T injetora de $I\!R^4$ em $I\!R^3$.

(b) A afirmação é **Verdadeira**.
De fato, considerando uma transformação linear T tal que $dim(\, Ker(T)\,) = 1$, pelo **Teorema do núcleo e da imagem**, temos que $dim(\, Im(T)\,) = 3$. Como $Im(T)$ é um subespaço de $\mathcal{P}_2(I\!R)$, tem–se que $Im(T) = \mathcal{P}_2(I\!R)$, pois $dim(\, \mathcal{P}_2(I\!R)\,) = 3$. Logo, existe uma transformação linear T sobrejetora de $I\!R^4$ em $\mathcal{P}_2(I\!R)$.

(c) A afirmação é **Falsa**.
De fato, considerando uma transformação linear T injetora, isto é, $Ker(T) = \{\, 0_V \,\}$, pelo **Teorema do núcleo e da imagem**, temos que $dim(\, Im(T)\,) = 2$. Logo, tem–se que $Im(T) \neq \mathcal{P}_2(I\!R)$, pois $dim(\, \mathcal{P}_2(I\!R)\,) = 3$. Portanto, não existe uma transformação linear T bijetora de $I\!R^2$ em $\mathcal{P}_2(I\!R)$.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Temos que $\gamma = \{ (1,-1), (0,1) \}$ é uma base para o $I\!R^2$. De fato, considere a combinação linear nula

$$a(1,-1) + b(0,1) = (0,0) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & & & = & 0 \\ -a & + & b & = & 0 \end{array} \right. .$$

Assim, obtemos $a = b = 0$. Logo, γ é linearmente independente em $I\!R^2$.

Vamos tomar um elemento genérico $(a,b) \in I\!R^2$ e representa–lo com relação à base ordenada γ

$$(a,b) = c(1,-1) + d(0,1) = (c, -c+d) .$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} c & & & = & a \\ -c & + & d & = & b \end{array} \right.$$

que possui como solução $c = a$ e $d = a + b$. Desse modo, temos que

$$(a,b) = a(1,-1) + (a+b)(0,1) .$$

Agora, fazendo

$$\begin{aligned} T(a,b) &= aT(1,-1) + (a+b)T(0,1) \\ &= a(2+x) + (a+b)(x-1) \\ &= (a - b) + (2a + b)x \end{aligned}$$

obtemos a transformação linear T.

Para mostrar que T é um isomorfismo, basta mostrar que $Ker(T) = \{ 0_{I\!R^2} \}$. Assim, considerando um elemento $(a,b) \in Ker(T)$, temos que

$$T(a,b) = (a - b) + (2a + b)x = 0_{\mathcal{P}_1(I\!R)} \qquad \text{para todo} \qquad x \in I\!R$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a & - & b & = & 0 \\ 2a & + & b & = & 0 \end{array} \right.$$

que possui somente a solução trivial $a = b = 0$. Logo, T é um isomorfismo.

Vamos encontrar o isomorfismo inverso T^{-1}. Dado um elemento $p(x) = a + bx \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, supomos que $T^{-1}(a + bx) = (c, d)$. Assim, temos que $T(c, d) = a + bx$, isto é,

$$(c - d) + (2c + d)x = a + bx\,,$$

obtendo o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} c - d = a \\ 2c + d = b \end{cases}$$

que possui como solução $c = \dfrac{a+b}{3}$ e $d = \dfrac{b-2a}{3}$.

Portanto, temos que o isomorfismo inverso é dado por:

$$T^{-1}(a + bx) = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{b-2a}{3} \right).$$