Mecânica – F315 B

2ª prova - 24 de outubro de 2008

Nome: GABARITO RA:______

Questão 1 (2,5)

Um oscilador harmônico sub-amortecido, está inicialmente em repouso, estando distante x_0 de sua posição de equilíbrio. Sabe-se que em quatro ciclos de sua oscilação sua amplitude cai para um 1/e do valor inicial.

a) Obtenha a distância da posição de equilíbrio em função do tempo;.(1,0)
b) Obtenha a razão da freqüência angular de oscilação com a freqüência angular de ressonância (ω_1/ω_0). (1,0)
c) Obtenha a energia cinética em função do tempo para este oscilador.(0.5)

a) $x(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\right)$

$x(0) = x_0 \Rightarrow x_0 = A$

$v(0) = 0$

$v(t) = -\gamma(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t)e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t}\omega_1(-A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t)$

$v(0) = -\gamma A + \omega_1 B = 0 \Rightarrow B = \gamma A/\omega_1$

$A = x_0$

$B = \gamma x_0/\omega_1 \Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\gamma t}x_0\left(\cos\omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)}$

$\frac{1}{8\pi}$

b) $e^{-\gamma 4T} = e^{-1}$ $\quad T = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \gamma\frac{8\pi}{\omega_1} = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\omega_1}{8\pi}$

$\Rightarrow \cancel{\gamma}\frac{\omega_1}{8\pi} = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} \Rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_1^2}{(8\pi)^2}$

$\omega_1^2\left(1 + \frac{1}{(8\pi)^2}\right) = \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{8\pi}{\sqrt{(8\pi)^2+1}}}$

$\omega_1^2\left(\frac{(8\pi)^2+1}{(8\pi)^2}\right) = \omega_0^2$

c) $T(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) \Rightarrow T(t) = \frac{1}{2}m v^2(t)$

$v(t) = e^{-\gamma t}\left[\cos\omega_1 t(-\gamma A + \omega_1 B) + \sin\omega_1 t(-\gamma B - \omega_1 A)\right]$

$$v(t) = e^{-rt}\left[\cos\omega_1 t\,\cancel{(-\gamma x_0 + \gamma x_0)} - \sin\omega_1 t\left(\frac{\gamma^2 x_0}{\omega_1} + x_0\omega_1\right)\right]$$

$$v(t) = -\frac{e^{-rt}x_0}{\omega_1}\left[\gamma^2 + \omega_1^2\right]$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$\omega_1^2 + \gamma^2 = \omega_0^2$$

$$v(t) = -\frac{e^{-rt}x_0}{\omega_1}\omega_0^2 \sin\omega_1 t$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\frac{x_0^2}{\omega_1^2}\omega_0^4 e^{-2rt}\sin^2\omega_1 t}$$

Questão 2 (2,5)

Uma força $F_0\cos(\omega t)$ é aplicada a um oscilador harmônico sub-amortecido a partir do tempo t = 0, quando o sistema estava com velocidade v_0 no ponto de equilíbrio. Considere a freqüência de oscilação ω_1, o fator de amortecimento γ e a freqüência natural de oscilação ω_0.

a) Obtenha a solução não homogênea do oscilador.(1,0)
b) Obtenha a equação horária do oscilador. (1,0)
c) Se a potência média da força sobre o oscilador cai para a metade do valor máximo quando $\omega - \omega_0 = 0,9\,\omega_0$, obtenha γ em função de ω_0. (0,5)

(a) $$x_{NH}(t) = \frac{F_0}{mR(\omega)} \cos[\omega t - \beta(\omega)]$$

$$R(\omega) = \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}$$

$$\beta(\omega) = tg^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

(b) $$x = e^{-\gamma t}\left(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\right) + \frac{F_0}{mR(\omega)}\cos[\omega t - \beta(\omega)]$$

$$x(0) = 0 \qquad A + \frac{F_0\cos(-\beta)}{mR} = 0 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{F_0\cos\beta}{mR}}$$

$$v = -\gamma e^{-\gamma t}(\quad) + e^{-\gamma t}\omega_1\left(-A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t\right) - \frac{\omega F_0}{mR}\sin[\omega t - \beta]$$

$$v(0) = -\gamma A + \omega_1 B - \frac{\omega F_0}{mR}\sin(-\beta) = v_0$$

$$B = \frac{1}{\omega_1}\left[v_0 - \gamma\frac{F_0\cos\beta}{mR} - \frac{\omega F_0}{mR}\sin\beta\right]$$

$$x = \frac{F_0}{mR}\left\{\cos(\omega t - \beta) - e^{-\gamma t}\left[\cos\beta\cos\omega_1 t + \left(\frac{\gamma}{\omega_1}\cos\beta + \frac{\omega}{\omega_1}\sin\beta\right)\sin\omega_1 t - \frac{v_0}{\omega_1}\frac{mR}{F_0}\right]\right\}$$

(c) $$\omega - \omega_0 = \gamma = 0,9\,\omega_0$$

$$\boxed{\gamma = 0,9\,\omega_0}$$

Questão 3(2,5)

Considere uma força periódica F(t) com período T, dada pela figura abaixo. Obtenha:

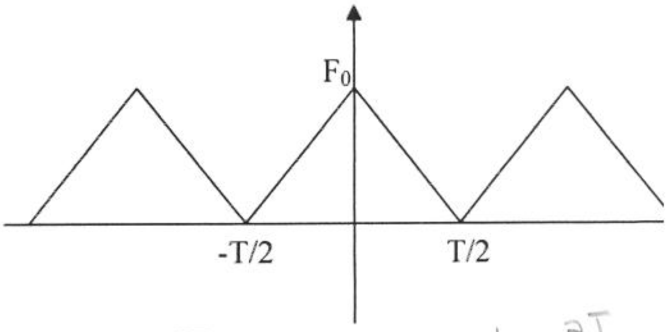
(a) A expressão matemática desta força para -T/2 < t < T/2 sabendo que o formado do pulso é composto por dois segmentos de reta; (0,5)

(b) Considerando argumentos de simetria, obtenha os coeficientes da série de Fourier da forma mais simples possível em termos de integrais; (0,5)

(c) Obtenha os coeficientes de Fourier e escreva F(t) em função dos coeficientes de Fourier na forma mais sintética; (1,0);

$$\int \cos(kx)(ax+b)dx = (1/k)\left[(ax+b)sen(kx) + \frac{a}{k}\cos(kx)\right];$$

$$\int sen(kx)(ax+b)dx = (1/k)\left[-(ax+b)\cos(kx) + \frac{a}{k}sen(kx)\right]$$



(a) $f = at + b$ $\quad t = -T/2 \quad f = 0 \Rightarrow -\frac{aT}{2} + b = 0 \Rightarrow b = \frac{aT}{2}$

$t = 0 \quad f = F_0 \qquad b = F_0 \Rightarrow a = \frac{2F_0}{T}$

$-T/2 < t < 0 \Rightarrow F(t) = \frac{2F_0}{T}t + F_0 = F_0\left(\frac{2}{T}t + 1\right)$

$f = at + b \quad t = T/2 \quad f = 0 \qquad \frac{aT}{2} + b = 0 \Rightarrow a = -\frac{2F_0}{T}$

$t = 0 \quad f = F_0 \qquad b = F_0$

$0 < t < T/2 \Rightarrow F(t) = F_0\left(-\frac{2}{T}t + 1\right)$

$$F(t) = \begin{cases} F_0\left(\frac{2}{T}t + 1\right) & \frac{T}{2} < t < 0 \\ F_0\left(-\frac{2}{T}t + 1\right) & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

(b) Função par $\quad B_n = 0$

$$A_n = \frac{2}{T} \times 2 \int_{-T/2}^{0} F_0\left(\frac{2}{T}t + 1\right)\cos\left(\frac{n2\pi}{T}t\right)dt$$

$$\Rightarrow \boxed{A_n = \frac{4}{T}\int_{-T/2}^{0} F_0\left(\frac{2}{T}t + 1\right)\cos\left(\frac{n2\pi}{T}t\right)dt \;, n>0 \qquad B_n = 0 \;; \; A_0 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{T}} \cdot \frac{\cancel{T}F_0}{\cancel{2}} \Rightarrow A_0 = F_0}$$

(c) $\quad k = \frac{n 2\pi}{T} \qquad a = \frac{2}{T} \qquad b = 1$

$$\Rightarrow A_n = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{T}} \times \frac{\cancel{T} F_0}{n 2\pi}\left[\left(\frac{2}{T}t + 1\right)\sin\frac{n2\pi t}{T} + \frac{2\cancel{T}}{\cancel{T}\, n2\pi}\cos\left(\frac{n2\pi}{T}t\right)\right]_{-T/2}^{0}$$

$$A_n = \frac{2F_0}{n\pi}\left[\left(\frac{2}{T}t + 1\right)\sin\frac{n2\pi t}{T} + \frac{1}{n\pi}\cos\left(\frac{n2\pi}{T}t\right)\right]_{-T/2}^{0}$$

$$A_n = \frac{2F_0}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi}\cos\left(\frac{n2\pi}{\cancel{T}}\,\frac{(-\cancel{T})}{\cancel{2}}\right)\right]$$

$$A_n = \frac{2F_0}{(n\pi)^2}\left[1 - \cos n\pi\right]$$

$p = 0, 1, 2, \ldots$

par $\quad n = 2p$

$\cos n\pi = \cos 2p\pi = 1 \Rightarrow A_n = 0$

impar $\quad n = 2p+1$

$\cos[(2p+1)\pi] = -1 \quad A_n = \frac{4}{(n\pi)^2}$

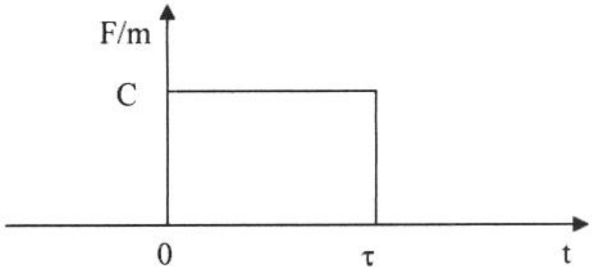
$$A_n = \frac{4F_0}{(2p+1)^2\pi^2} \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\boxed{F(t) = F_0 + \frac{4F_0}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2p+1)\frac{2\pi}{T}t\right]}{(2p+1)^2}}$$

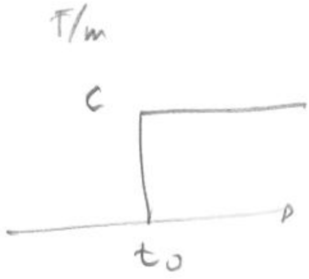
Questão 4 (2,5)

Uma partícula de massa m está em repouso em sua posição de equilíbrio ligada a uma mola cuja outra extremidade é fixa. Considere uma força de impulso constante C ocorrendo entre o tempo t = 0 e t = τ. Considerando o sistema na condição de amortecimento crítico com constante de amortecimento γ e freqüência angular de ressonância ω_0, obtenha:

(a) x(t) para $0 < t < \tau$;(1,0)
(b) x(t) para $t > \tau$; (1,5)



$$x(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt) + \underbrace{\frac{C}{\omega_0^2}}_{x_{NH}}$$



Consideremos uma função degrau em $t = t_0$

$$x_{t_0}(t) = e^{-\gamma(t-t_0)}\left[A + B(t-t_0)\right] + \frac{C}{\omega_0^2} \; ; \quad t > t_0$$

$$x_{t_0}(t = t_0) = A + \frac{C}{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow A = -\frac{C}{\omega_0^2}$$

$$v(t) = -\gamma e^{-\gamma(t-t_0)}\left[A + B(t-t_0)\right] + e^{-\gamma(t-t_0)} B$$

$$v(t_0) = 0 \Rightarrow -\gamma A + B = 0 \Rightarrow B = \gamma A = \frac{\gamma C}{\omega_0^2}$$

$$x_{t_0} = e^{-\gamma(t-t_0)}\left(-\frac{C}{\omega_0^2}\right)\left[1 + \gamma(t-t_0)\right] + \frac{C}{\omega_0^2}$$

$$x_{t_0} = \frac{C}{\omega_0^2}\left\{1 - e^{-\gamma(t-t_0)}\left[1 + \gamma(t-t_0)\right]\right\}$$

(a) $0 < t < \tau$ $\quad \boxed{x_a(t) = x_0 = \frac{C}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\gamma t}(1 + \gamma t)\right]}$

(b) $t > \tau$ $\quad x(t) = x_0 - x_\tau = \frac{C}{\omega_0}\left[e^{-\gamma(t-\tau)}\left[1 + \gamma(t-\tau)\right] - e^{-\gamma t}(1+\gamma t)\right]$

$$\boxed{x(t) = \frac{C}{\omega_0} e^{-\gamma t}\left[e^{\gamma\tau}\left[1 + \gamma(t-\tau)\right] - (1 + \gamma t)\right]}$$