Turma:

Nota:

MA 327 Álgebra Linear

Segundo Semestre de 2006

E X A M E

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
T o t a l	

Questão 1. **(3.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $I\!R^4$ e os seguintes subespaços

$$\begin{aligned} U &= \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x+y-z+t = 0 \quad \text{e} \quad z-t = 0 \} \\ W &= \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x+y+z = 0 \} \end{aligned}$$

(a) Determine uma base para o subespaço $U + W$.

(b) O subespaço $U + W$ é uma soma direta dos subespaços U e W? Justifique.

(c) Determine uma base para o subespaço $U \cap W$.

(d) Determine o operador linear T sobre $I\!R^4$ tal que $Im(T) = U \cap W$ e $Ker(T) = W$.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_3(I\!R)$ e o subconjunto U definido por:

$$U = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(I\!R) \ / \ p(1) + p(-1) = 0 \} .$$

O subconjunto U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(I\!R)$? Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, determine uma base para U.

Questão 3. **(3.0 Pontos)**

Considere o operador linear T sobre $I\!R^2$ tal que

$$[T]^\alpha_\gamma = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha = \{ (0,1), (1,0) \}$ e $\gamma = \{ (-1,0), (0,-1) \}$ são bases ordenadas de $I\!R^2$.

(a) Determine $T(1,0)$ e $T(0,1)$.

(b) Determine a matriz $[I]^\alpha_\gamma$.

(c) Determine explicitamente a expressão do operador linear T.

(d) O operador linear T^2 é diagonalizável? Justifique.

Questão 4. **(3.0 Pontos)**

Sejam A e B matrizes similares de ordem n. Pede–se:

(a) Mostre que A e B possuem os mesmos autovalores.

(b) Determine a relação entre os autovetores das matrizes A e B.

(c) Mostre que se A é uma matriz diagonalizável, então B é uma matriz diagonalizável.

G A B A R I T O

Questão 1. **(3.0 Pontos)**

(a) Os elementos $(x, y, z, t) \in U$ podem ser escritos como:

$$(x, y, z, t) \;=\; y(-1, 1, 0, 0) \;+\; t(0, 0, 1, 1) \qquad \text{para} \qquad y,\, t \in I\!R\,.$$

Assim, o conjunto $\{\, (-1, 1, 0, 0)\,,\, (0, 0, 1, 1)\,\}$ é uma base para o subespaço U.

Os elementos $(x, y, z, t) \in W$ podem ser escritos como:

$$(x, y, z, t) \;=\; y(-1, 1, 0, 0) \;+\; z(-1, 0, 1, 0) \;+\; t(0, 0, 0, 1) \qquad \text{para} \qquad y,\, z,\, t \in I\!R\,.$$

Assim, o conjunto $\{\, (-1, 1, 0, 0)\,,\, (-1, 0, 1, 0)\,,\, (0, 0, 0, 1)\,\}$ é uma base para o subespaço W.

Podemos verificar que o conjunto $\{\, (-1, 1, 0, 0)\,,\, (0, 0, 1, 1)\,,\, (-1, 0, 1, 0)\,,\, (0, 0, 0, 1)\,\}$ é uma base para o subespaço $U + W$.

(b) Pelo Teorema da dimensão da soma de subespaços, temos que

$$dim(U + W) \;=\; dim(U) \;+\; dim(W) \;-\; dim(U \cap W)\,.$$

Como $dim(U) = 2$, $dim(W) = 3$ e $dim(U + W) = 4$, obtemos $dim(U \cap W) = 1$. Logo, o subespaço $U + W$ não é uma soma direta dos subespaços U e W.

(c) Como $dim(U \cap W) = 1$ e o elemento $(-1, 1, 0, 0)$ pertence tanto ao subespaço U quanto ao subespaço W, podemos concluir que $U \cap W = [(-1, 1, 0, 0)]$.

(d) Vamos determinar o operador linear T sobre $I\!R^4$ de modo que $Ker(T) = W$ e $Im(T) = U \cap W$. Pelo item **(a)**, temos que $\{\, (-1, 1, 0, 0)\,,\, (-1, 0, 1, 0)\,,\, (0, 0, 0, 1)\,\}$ é uma base para o subespaço $Ker(T)$. Completando a base do núcleo de T, obtemos que $\{\, (-1, 1, 0, 0)\,,\, (-1, 0, 1, 0)\,,\, (0, 0, 0, 1)\,,\, (0, 0, 1, 0)\,\}$ é uma base para $I\!R^4$. Assim, o operador linear T é determinado por:

$$\begin{aligned}
T(-1, 1, 0, 0) &= (0, 0, 0, 0) \\
T(-1, 0, 1, 0) &= (0, 0, 0, 0) \\
T(0, 0, 0, 1) &= (0, 0, 0, 0) \\
T(0, 0, 1, 0) &= (-1, 1, 0, 0)
\end{aligned}$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Inicialmente, vamos verificar se o subconjunto U é um subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Temos que o polinômio identicamente nulo, isto é, $p(x) = 0$ para todo x, que é o elemento neutro da operação de adição, pertence ao subconjunto U.

Tomando os elemento $p(x)$, $q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, isto é,

$$p(1) + p(-1) = 0 \qquad \text{e} \qquad q(1) + q(-1) = 0 \,,$$

temos que

$$(p + q)(1) + (p + q)(-1) = (\, p(1) + p(-1)\,) + (\, q(1) + q(-1)\,) = 0 \,.$$

Portanto, o elemento $(\, p(x) + q(x)\,) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Agora, tomando o elemento $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$(\lambda p)(1) + (\lambda p)(-1) = \lambda p(1) + \lambda p(-1) = \lambda(\, p(1) + p(-1)\,) = 0 \,.$$

Portanto, o elemento $\lambda p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Assim, mostramos que o subconjunto U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Finalmente, vamos determinar uma base para o subespaço U. Para isso, consideramos um elemento $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e, impondo a condição $p(1) + p(-1) = 0$, obtemos

$$(\, a + b + c + d\,) + (\, a - b + c - d\,) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a + c = 0 \,.$$

Assim, temos que $a = -c$ com $b, c, d \in \mathbb{R}$.

Desse modo, os elementos $p(x) \in U$ podem ser representados da seguinte forma:

$$p(x) = c(-1 + x^2) + bx + dx^3 \qquad \text{para} \qquad b, c, d \in \mathbb{R} \,.$$

Portanto, o conjunto $\{\, -1 + x^2 \,,\, x \,,\, x^3 \,\}$ é uma base para o subespaço U.

Questão 3. **(3.0 Pontos)**

(a) Utilizando a matriz $[T]^{\alpha}_{\gamma}$, obtemos

$$\begin{aligned} T(0,1) &= -1(-1,0) + 0(0,-1) = (1,0) \\ T(1,0) &= -1(-1,0) - 1(0,-1) = (1,1) \end{aligned}$$

Assim, temos que $T(0,1) = (1,0)$ e $T(1,0) = (1,1)$.

(b) Representando o elemento $(0,1)$ da base α em relação à base γ, temos

$$(0,1) = a(-1,0) + b(0,-1) .$$

Logo, $a = 0$ e $b = -1$.

Representando o elemento $(1,0)$ da base α em relação à base γ, temos

$$(1,0) = c(-1,0) + d(0,-1) .$$

Logo, $c = -1$ e $d = 0$. Portanto, obtemos

$$[I]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

que é a matriz de mudança da base ordenada α para a base ordenada γ.

(c) Utilizando o resultado do item **(b)**, obtemos

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= xT(1,0) + yT(0,1) \\ &= x(1,1) + y(1,0) \\ &= (x+y\,,\,x) \end{aligned}$$

Portanto, $T(x,y) = (x+y\,,\,x)$ para todo $(x,y) \in I\!R^2$.

(d) Utilizando o resultado do item **(c)**, obtemos

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{ (1,0)\,,\,(0,1) \}$ é a base canônica de $I\!R^2$.

Sabemos que a matriz $[T^2]_{\beta}^{\beta}$ é dada por:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico do operador linear T^2 é dado por:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1\,.$$

Portanto, os autovalores do operador T^2 são

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\,.$$

Como os autovalores de T são distintos, sabemos que T é um operador diagonalizável.

Questão 4. **(3.0 Pontos)**

(a) Considerando que a matriz B é similar à matriz A, existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1}AP$. Inicialmente, tomando o polinômio característico da matriz B, obtemos

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(B - \lambda I_n) \\ &= det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1} P) \\ &= det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\ &= det(P^{-1})\, det(A - \lambda I_n)\, det(P) \\ &= det(A - \lambda I_n)\,, \end{aligned}$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Assim, mostramos que as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico. Como os autovalores são as raízes do polinômio característico, temos que as matrizes A e B possuem os mesmos autovalores.

(b) Seja X um autovetor da matriz B associado ao autovalor λ, isto é,

$$BX = \lambda X \iff P^{-1}APX = \lambda X \iff A(PX) = \lambda(PX)\,.$$

Portanto, obtemos que PX é um autovetor da matriz A associado ao autovalor λ.

(c) Considerando que A é uma matriz diagonalizável, existe uma matriz Q invertível tal que $A = Q\Lambda Q^{-1}$, onde Λ é uma matriz diagonal. Como B é similar a matriz A, obtemos

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}(Q\Lambda Q^{-1})P = (P^{-1}Q)\Lambda(Q^{-1}P) = (Q^{-1}P)^{-1}\,\Lambda\,(Q^{-1}P)\,.$$

Assim, mostramos que B é similar à matriz diagonal Λ. Logo, B é diagonalizável.