

ME-310 Probabilidade II

Lista 3

1. Seja X uma v.a. Exponencial com parâmetro λ . Calcule $E(X^2 \mid X < 2)$.
2. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x, y) = 2e^{-2x}/x$, se $x \geq 0$, $0 \leq y \leq x$ (e $f(x, y) = 0$, caso contrário). Calcule $\mathbb{E}(Y^3 \mid X)$.
3. Pedro se perdeu na mata e pode escolher uma das 3 trilhas. Se ele escolher a primeira trilha, ele vai caminhar por 2 horas e voltar ao mesmo lugar; se ele escolher a segunda, ele vai caminhar por 6 horas e sairá da mata; se ele escolher a terceira, ele vai caminhar por 4 horas, e voltar ao mesmo lugar. Seja X o tempo até Pedro sair da mata. Calcule $\mathbb{E}X$ se
 - (a) Pedro sempre escolhe uma das trilhas ao acaso;
 - (b) Pedro não pega o mesmo caminho errado duas vezes.
4. Uma moeda viciada, com $\mathbf{P}(\text{cara}) = p$ é lançada até obter 3 caras seguidas. Calcule o número médio dos lançamentos necessários.
5. Suponha que X tem uma distribuição de Poisson com parâmetro λ , onde λ é uma v.a. Exponencial com parâmetro 1. Mostre que $\mathbf{P}(X = n) = (1/2)^{n+1}$.
6. Numa gaveta tem 3 moedas. Seja $p_i = \mathbf{P}(\text{cara no lançamento da moeda } i)$. Suponha que $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.4$ e $p_3 = 0.5$. Uma moeda destas 3 é escolhida ao acaso e lançada 10 vezes. Seja N o número de caras. Calcule $\mathbf{P}(N = k)$, $k = 0, \dots, n$. Se depois de cada lançamento a moeda é colocada de volta (e para próximo lançamento escolhemos uma moeda ao acaso de novo) N terá distribuição binomial?
7. Sejam X e Y v.a. i.i.d. Geométricas com parâmetro p . Ache a distribuição condicional de X dado $X + Y = n$.

Dica:

Seja W o número de tentativas para obter r sucessos no total numa sequência de experimentos independentes com probabilidade de sucesso p em cada experimento. Então W tem distribuição binomial negativa com parâmetros r, p e

$$\mathbf{P}(W = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, \dots$$

8. Sejam X_1, X_2, \dots v.a. independentes, com $\mathbb{E}X_i = \mu$ e $\text{Var } X_i = \sigma^2$ para todo i . Seja $N \in \{0, 1, \dots\}$ uma v.a. independente dos X_i 's. Usando a fórmula para variância condicional, mostre que

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) = \mathbb{E}N \sigma^2 + \mu^2 \text{Var } N.$$

9. Mostre que

$$\text{Cov}(X, \mathbb{E}(Y \mid X)) = \text{Cov}(X, Y).$$

10. Suponha que se o pai tem altura x cm, então o filho, quando adulto, tem altura que é uma v.a. Normal com média $x + 1$ e variância 4. Qual é a melhor estimativa para a altura do filho de um homem com altura 180 cm?

11. Mostre que $a = \mathbb{E}X$ minimiza $\mathbb{E}(X - a)^2$.

Probabilidade 2 - ME310 - Lista 3

September 15, 2012

Lembrando:

1. $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T = t))$
2. $f_{X/Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)}{f_Y(y)} \cdot f_{Y/X}(x, y)$
3. Binomial Negativa: $X \sim BinNeg(r, p)$ então $P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}, \forall n \geq r$
4. Variância em termos da Variância condicional (pg. 413 Ross) $Var(X) = \mathbf{E}(Var(X/Y)) + Var(\mathbf{E}(X/Y))$

1) Seja X uma v.a. Exponencial com parâmetro λ . Calcule $\mathbf{E}(X^2/X < 2)$.

Resp. 1)

- $X \sim \exp(\lambda) \implies f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbf{I}_{\{x \geq 0\}}$
- Seja $Y = \mathbf{I}_{\{X < 2\}} \implies f_Y(y = 1) = P(X < 2) = \int_{-\infty}^2 f_X(x) dx = 1 - e^{-2 \cdot \lambda}$
- Lembrando: $f_{X/Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)}{f_Y(y)} \cdot f_{Y/X}(x, y)$
- $f_{Y/X}(x, y) = \mathbf{I}_{\{x < 2\}}$
- $\mathbf{E}(X^2/X \leq 2) = \mathbf{E}(X^2/Y = 1) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X/Y}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbf{I}_{\{x \geq 0\}} \cdot \mathbf{I}_{\{x < 2\}}}{1 - e^{-2 \cdot \lambda}} dx = \frac{\lambda}{1 - e^{-2 \cdot \lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbf{I}_{\{x \geq 0\}} \cdot \mathbf{I}_{\{x < 2\}} dx = \frac{\lambda}{1 - e^{-2 \cdot \lambda}} (-x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot x}}{\lambda^2} \Big|_{x=0}^2 + 2 \int_0^2 x \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx) = \frac{\lambda}{1 - e^{-2 \cdot \lambda}} \cdot (-4 \cdot \frac{e^{-4 \cdot \lambda}}{\lambda} + 2(-x \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot x}}{\lambda^2} \Big|_{x=0}^2 + \int_0^2 \frac{e^{-\lambda \cdot x}}{\lambda^2} dx)) = \frac{\lambda}{1 - e^{-2 \cdot \lambda}} \cdot (-4 \cdot \frac{e^{-4 \cdot \lambda}}{\lambda} - 4 \cdot \frac{e^{-2 \cdot \lambda}}{\lambda^2} - 2 \cdot \frac{e^{-2 \cdot \lambda}}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^3})$

2) A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x, y) = \frac{2 \cdot e^{-2x}}{x} \cdot \mathbf{I}_{\{0 \leq y \leq x\}}$. Calcule $E(Y^3/X)$.

Resp. 2)

- $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \cdot e^{-2x}}{x} \cdot \mathbf{I}_{\{0 \leq y \leq x\}} dy = \frac{2 \cdot e^{-2x}}{x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{\{0 \leq y \leq x\}} dy = \frac{2 \cdot e^{-2x}}{x} \cdot y \Big|_{y=0}^{y=x} = 2 \cdot e^{-2x}$
- $\mathbf{E}(Y^3/X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \cdot f_{Y/X}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \cdot \frac{f(x, y)}{f_X(y)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \cdot \frac{2 \cdot e^{-2x}}{x} \cdot \mathbf{I}_{\{0 \leq y \leq x\}} \cdot \frac{1}{2e^{-2x}} dy = \int_0^x \frac{y^3}{x} dy = \frac{y^4}{4 \cdot x} \Big|_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{4}$

3) Pedro se perdeu na mata e pode escolher uma das 3 trilhas. Se ele escolher a primeira trilha, ele vai caminhar por 2 horas e voltar ao mesmo lugar, se ele escolher a segunda, ele vai caminhar por 6 horas e sairá da mata, se ele escolher a terceira, ele vai caminhar por 4 horas e voltar ao mesmo lugar. Seja X o tempo até Pedro sair da mata. Calcule $\mathbf{E}(X)$ se

a) Pedro sempre escolhe uma das trilhas ao acaso.

Resp. a)

- $\mathbf{E}(x/T = 1) = \mathbf{E}(x) + 2$
- $\mathbf{E}(x/T = 2) = 6$

- $\mathbf{E}(x/T = 3) = \mathbf{E}(x) + 4$
- $p(T = 1) = p(T = 2) = p(T = 3) = \frac{1}{3}$
- $\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(x/T = t)) = \sum_{t=1}^{t=3} \mathbf{E}(X/T = t) \cdot p(T = t) = \frac{1}{3} \cdot (\mathbf{E}(X/T = 1) + \mathbf{E}(X/T = 2) + \mathbf{E}(X/T = 3)) = \frac{1}{3} \cdot (\mathbf{E}(x) + 2 + 6 + \mathbf{E}(x) + 4) \implies \mathbf{E}(x) = 12$

b) Pedro não pega o mesmo caminho errado duas vezes.

Resp. b)

Vamos quebrar o problema em uma árvore de probabilidades

- $\mathbf{E}(X/T_1 = 2) = 6$
- $\mathbf{E}(X/T_1 = 3, T_2 = 2) = 10$
- $\mathbf{E}(X/T_1 = 1, T_2 = 2) = 8$
- $\mathbf{E}(X/T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 2) = 12$
- $\mathbf{E}(X/T_1 = 3, T_2 = 1, T_3 = 2) = 12$
- $\mathbf{E}(X/T_1 = 3, T_2 = 1) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T_1 = 3, T_2 = 1, T_3)) = 1 \cdot \mathbf{E}(X/T_1 = 3, T_2 = 1, T_3 = 2) = 12$
- $\mathbf{E}(X/T_1 = 1, T_2 = 3) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T_1 = 1, T_2 = 3, T_3)) = 1 \cdot \mathbf{E}(X/T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 2) = 12$
- $\mathbf{E}(X/T_1 = 1) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T_1 = 1, T_2)) = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{E}(X/T_1 = 1, T_2 = 2) + \mathbf{E}(X/T_1 = 1, T_2 = 3)) = \frac{1}{2} \cdot (8 + 12) = 10$
- $\mathbf{E}(X/T_1 = 3) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T_1 = 3, T_2)) = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{E}(X/T_1 = 3, T_2 = 1) + \mathbf{E}(X/T_1 = 3, T_2 = 2)) = \frac{1}{2} \cdot (12 + 10) = 11$
- $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/T)) = \frac{1}{3} \cdot (\mathbf{E}(X/T_1 = 1) + \mathbf{E}(X/T_1 = 2) + \mathbf{E}(X/T_1 = 3)) = \frac{1}{3} \cdot (10 + 6 + 11) = 9$

4) Uma moeda viciada, com $P(\text{cara}) = p$ é lançada até obter 3 caras seguidas. Calcule o número médio dos lançamentos necessários.

Resp. 4) Seja $\text{Cara} = C$, $\text{Coroa} = K$

- $P(C) = p$
- $\mathbf{E}(X/L_1 = K) = \mathbf{E}(X) + 1$
- $\mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = K) = \mathbf{E}(X) + 2$

- $\mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C, L_3 = C) = 3$
- $\mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C, L_3 = K) = \mathbf{E}(X) + 3$
- $\mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C, L_3)) = p \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C, L_3 = C) + (1-p) \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C, L_3 = K) = p \cdot 3 + (1-p) \cdot (\mathbf{E}(x) + 3)$
- $\mathbf{E}(X/L_1 = C) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2)) = p \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = C) + (1-p) \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = C, L_2 = K) = p \cdot (p \cdot 3 + (1-p) \cdot (\mathbf{E}(x) + 3)) + (1-p) \cdot (\mathbf{E}(X) + 2)$
- $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X/L_1)) = p \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = C) + (1-p) \cdot \mathbf{E}(X/L_1 = K) = p \cdot (p \cdot p \cdot 3 + (1-p) \cdot (\mathbf{E}(x) + 3)) + (1-p) \cdot (\mathbf{E}(X) + 2) = (1-p) \cdot (\mathbf{E}(X) + 1) = 3 \cdot p^2 - p^3 \cdot \mathbf{E}(X) + p - 2 \cdot p^2 + \mathbf{E}(X) + 1 \implies p^3 \cdot \mathbf{E}(X) = p^2 + p + 1 \implies \mathbf{E}(X) = \frac{p^2 + p + 1}{p^3}$

5) Suponha que X tem uma distribuição de Poisson com parâmetro λ , onde λ é uma v.a. Exponencial com parâmetro 1. Mostre que $P(X = n) = (\frac{1}{2})^{n+1}$.

Resp. 5)

- $X \sim \text{Poisson}(\lambda); \lambda \sim \text{Exp}(1)$
- $f_\lambda(h) = e^{-h}$
- $f_{X/\lambda}(n, h) = \frac{f_{X,\lambda}(n, h)}{f_\lambda(h)} \implies f_{X,\lambda}(n, h) = f_{X/\lambda}(n, h) \cdot f_\lambda(h)$
- $f_{X/\lambda}(n, h) = P(X = n/\lambda = h) = e^{-h} \cdot \frac{h^n}{n!} \cdot \mathbf{I}_{\{y \geq 0\}}$
- $P(X = n) = \mathbf{E}(P(X = n, \lambda = h)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(n, h) dh = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X/\lambda}(n, h) \cdot f_\lambda(h) dh = \int_0^{\infty} e^{-h} \cdot \frac{h^n}{n!} \cdot e^{-h} dh = \frac{1}{n!} \cdot (h^n \cdot \frac{e^{-2h}}{-2} \Big|_{h=0}^{h=\infty} + \int_0^{\infty} n \cdot \frac{e^{-2h}}{2} \cdot h^{n-1} dh) \stackrel{\text{partes, partes} \dots nX}{=} \frac{1}{n!} \cdot \int_0^{\infty} n! \cdot \frac{e^{-2h}}{2^n} \cdot y^0 dh = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2h}}{2^n} dh = -\frac{e^{-2h}}{2^{n+1}} \Big|_{h=0}^{h=\infty} = \frac{1}{2^{n+1}}$

6) Numa gaveta tem 3 moedas. Seja $p_i = P(\text{carano lançamento da moeda } i)$. Suponha que $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.4$ e $p_3 = 0.5$. Uma moeda destas 3 é escolhida ao acaso e lançada 10 vezes. Seja N o número de caras (C).

a) Calcule $P(N = k)$, $k = 0, \dots, n$.

Resp. 6)

- seja N = 'número de caras' e M = 'qual das moedas está sendo jogada ($i=1,2,3$)'

- $P(N = k/M = i) = \binom{10}{k} \cdot p_i^k \cdot (1 - p_i)^{10-k}$
- $P(N = k) = \mathbf{E}(P(N = k/M)) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{i=3} \binom{10}{k} \cdot p_i^k \cdot (1 - p_i)^{10-k}$

b) Se depois de cada lançamento a moeda é colocada de volta (e para próximo lançamento escolhemos uma moeda ao acaso de novo) N terá distribuição binomial?

- Seja $X_i = \text{'i-ésimo lançamento'}$
- $P(X_i = C) = \mathbf{E}(P(X_i = C/M)) = \frac{1}{3} \cdot (0.3 + 0.4 + 0.5) = 0.4$
- Dessa forma, podemos considerar que cada lançamento é uma variável aleatória com probabilidade $p_i = 0.4$, dessa forma $N \sim \text{Bin}(10, 0.4)$

7) Sejam X e Y v.a. i.i.d. Geométricas com parâmetro p. Ache a distribuição condicional de X dado $X + Y = n$.

Dica: Seja W o número de tentativas para obter r sucessos no total numa sequência de experimentos independentes com probabilidade de sucesso p em cada experimento. Então W tem distribuição binomial negativa com parâmetros r, p e $P(W = n) = \binom{n-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$, $n = r, r+1, \dots$

Resp. 7)

- A definição de uma binomial negativa: Tentativas independentes com mesma probabilidade de sucesso p. A probabilidade de acumular r acertos em n tentativas é: $P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$
- $X, Y \sim \text{Geometrica}(p)$ então $P(X = n) = P(Y = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$
- $P(X + Y = n) = P(W = n)$, 'duas sequências de experimentos independentes para acumular 2 sucessos (Geométricas=chance de acertar exatamente na i-ésima jogada=1 sucesso) com exatamente n tentativas'
- $P(X/X+Y = n) = \frac{P(X=x, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=x, Y=n-x)}{P(X+Y=n)} \stackrel{\text{indep}}{=} \frac{P(X=x) \cdot P(Y=n-x)}{P(X+Y=n)} = \frac{(1-p)^{x-1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-x-1} \cdot p}{\binom{n-1}{2-1} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1} \cdot \mathbf{I}_{\{x \in \mathbb{N}\}}$

8) Sejam X_1, X_2, \dots v.a. independentes, com $\mathbf{E}(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$ para todo i . Seja uma v.a. independente dos X_i 's. Usando a fórmula para variância condicional, mostre que:
 $Var(\sum_{i=1}^{i=N} X_i) = \sigma^2 \mathbf{E}(N) + \mu^2 Var(N)$

Resp. 8)

- $W = \sum_{i=1}^{i=N} X_i$
- $\mathbf{E}(X_i) = \mu$
- $Var(X_i) = \sigma^2$
- $\mathbf{E}(W/N) = \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{i=k} X_i/N = k) = \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{E}(X_i) = N \cdot \mu$, pg.414 Ross
- $Var(W/N) = Var(\sum_{i=1}^{i=k} X_i/N = k) = \sum_{i=1}^{i=N} Var(X_i) = N \cdot \sigma^2$, pg.414 Ross
- $Var(W) = \mathbf{E}(Var(W/N)) + Var(\mathbf{E}(W/N)) = \mathbf{E}(N) \cdot \sigma^2 + Var(N) \cdot \mu^2$

9) Mostre que $Cov(X, E(Y/X)) = Cov(X, Y)$.

Resp. 9)

- $Cov(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y)))$, pg. 385 Ross
- $W = \mathbf{E}(Y/X)$
- $Cov(X, W) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(W)) \cdot (W - \mathbf{E}(W))) = \mathbf{E}(XW - X\mathbf{E}(W) - \mathbf{E}(X)W + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(W)) = \mathbf{E}(XW) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(W) = \mathbf{E}(X\mathbf{E}(Y/X)) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \mathbf{E}(Y/X) \cdot f_X(x) dx - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y/X}(x, y) dy \cdot f_X(x) dx - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} dy \cdot f_X(x) dx - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = Cov(X, Y)$

10) Suponha que se o pai tem altura x cm, então o filho, quando adulto, tem altura que é uma v.a. Normal com média $x + 1$ e variância 4. Qual é a melhor estimativa para a altura do filho de um homem com altura 180 cm?

Resp. 10)

- $F \sim N(181, 4)$

- A melhor estimativa para o filho é $\mathbf{E}(F) = 181$, outra forma de ver isso, é procurarmos pelo ponto máximo de $f_F(a) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, ou seja, tal que $\frac{df_F(a)}{dx} = 0$ e $\frac{d^2 f_F(a)}{dx^2} < 0$, mas $\frac{df_F(a)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2}\right) = 0 \implies x = \mu = 181$ e $\frac{d^2 f_F(a)}{dx^2} = k \cdot \left(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2}\right) \cdot \left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2}\right) + e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right) < 0$ se $x = \mu$

11) Mostre que $a = \mathbf{E}(X)$ minimiza $\mathbf{E}((X-a)^2)$

Resp. 11)

Basta mostrar que $\frac{d\mathbf{E}((X-a)^2)}{dx} = 0$ e $\frac{d^2 \mathbf{E}((X-a)^2)}{dx^2} > 0$ se $a = \mathbf{E}(X)$

- Considere $\frac{d\mathbf{E}((X-a)^2)}{dx}$ mas pela propriedade linear da esperança, ao aplicar um operador linear temos $\frac{d\mathbf{E}((X-a)^2)}{dx} = \mathbf{E}\left(\frac{d(X-a)^2}{dx}\right) = \mathbf{E}(2(X-a)) = 2\mathbf{E}(X) - 2\mathbf{E}(a) = 0$ se $a = \mathbf{E}(X)$ e além disso, $\frac{d^2 \mathbf{E}((X-a)^2)}{dx^2} = \mathbf{E}\left(\frac{d^2 (X-a)^2}{dx^2}\right) = \mathbf{E}(2X) = 2\mathbf{E}(X) > 0$ se $a = \mathbf{E}(X)$. Com isso mostramos que este é ponto de mínimo

Este solucionário foi feito para a disciplina ME310 - 2Sem 2012.
Caso encontre algum erro, por favor peça alteração informando o
erro em nosso grupo de discussão:
<https://groups.google.com/forum/?fromgroups#!forum/me310-2s-2012>
Bons estudos,
Eric.