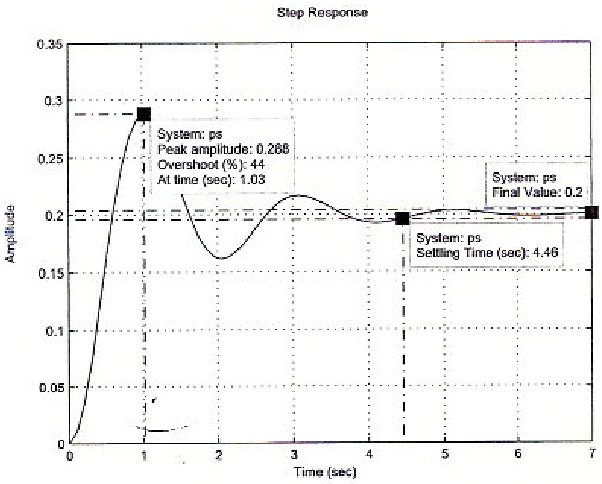
EM707 - Controle de Sistemas Mecânicos - Primeira Prova - 29/08/2007

Nome: Gabarito RA:

1. (valor 2.0) Determine os parâmetros padronizados (freqüência natural, fator de amortecimento e ganho estático) do sistema de segunda ordem cuja resposta a um degrau de amplitude 5 é mostrada na figura a seguir.

   Nota: o tempo de estabilização indicado (*settling time*) é a 2%.



Dados: $PSS = 44\%$

$t_{e2\%} = 4{,}46\ s$

$y_\infty = 0{,}2$

Fator de amortecimento:

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{100}{PSS}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{100}{PSS}\right)\right]^2}}$$

$$\xi = \frac{\ln(100/44)}{\sqrt{\pi^2 + \left[\ln(100/44)\right]^2}}$$

$\xi = 0{,}253$

Freqüência natural:

$$t_{e2\%} = \frac{4}{\xi\omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{4}{\xi \cdot t_{e2\%}} = \frac{4}{0{,}253 \cdot 4{,}46} = 3{,}550\ rad/s$$

Ganho estático:

$5\gamma = y(t \to \infty) = 0{,}2$

$\gamma = 0{,}04$

Respostas: $\xi = 0{,}253$

$\omega_n = 3{,}550\ rad/s$

$\gamma = 0{,}04$

(valor 0.5) Supondo que este seja um sistema massa-mola-amortecedor, determine os valores da massa, constante de amortecimento e constante de rigidez da mola.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\gamma\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$Y(s) \cdot (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) = \gamma\omega_n^2 U(s)$

$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \gamma\omega_n^2 u(t)$

MMA: $\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u(t)$

$\gamma\omega_n^2 = 1/m$; $m = \frac{1}{\gamma\omega_n^2}$

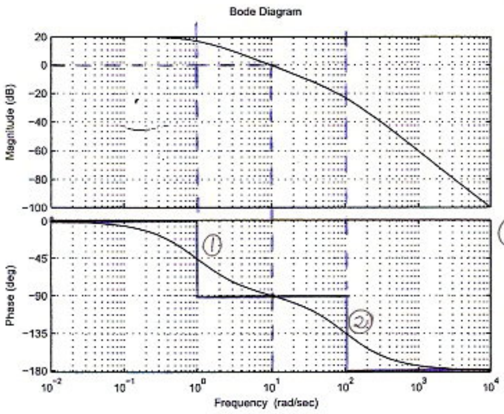
$\boxed{m = 1{,}98\ kg}$

$2\xi\omega_n = c/m$; $c = 2\xi\omega_n . m$

$\boxed{c = 3{,}56\ kg/s}$

$k = m\omega_n^2$; $\boxed{k = 25\ N/m}$

2. (valor 1.0) Determine a equação diferencial do sistema cujo digrama de Bode é apresentado na figura a seguir.



① no ponto $\omega = 10^0$ rad/s :

Amplitude → cai 20dB por década.

Fase → cai 90°

Conclusão: há um pólo simples no semi plano esquerdo. (SPE)

② no ponto $\omega = 10^2$ rad/s :

Amplitude → cai 20dB por década

Fase → cai 90°

Conclusão: pólo simples no SPE

Cálculo de Ko:

$$G(s) = \frac{K_o}{(s+1)(s+100)}$$

Quando $\omega \to 0$; $s = j\omega = 0$

$$G(0) = 20\,dB = \frac{K_o}{(0+1)(0+100)}$$

$$\frac{K_o}{100} = 20\,dB$$

$$K_o = 100 \cdot 10^{(20/20)}$$

$$K_o = 1000$$

Função de transferência:

$$G(s) = \frac{1000}{(s+1)(s+100)}$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1000}{s^2 + 101s + 100}$$

Equação Diferencial:

$$\boxed{\ddot{y} + 101\dot{y} + 100y = 1000\,F(t)}$$

(valor 0.5) Se este sistema for excitado com uma entrada dada por $f(t) = 200sen(10t)$, qual será a sua respectiva resposta de regime?

De acordo com o diagrama de Bode do sistema:

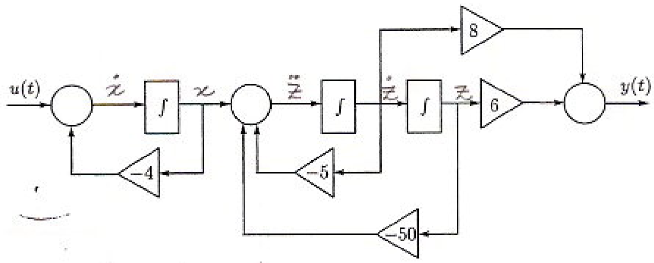
Para a frequência $\omega = 10$ rad/s, a amplitude é $A = 0dB = 1abs$ e a fase é $-90°$.

Logo:

$$y_{regime}(t) = 1 \cdot 200 \cdot \sin(10t - 90°)$$

$$\boxed{y_{regime}(t) = 200 \sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

3. (valor 1.0) Determine a função de transferência correspondente ao diagrama de blocos da figura.



$\dot{x}(t) = u(t) - 4x(t)$

Aplicando Laplace:

$sX(s) = U(s) - 4X(s)$

$(s+4)X(s) = U(s)$

(1) $X(s) = \dfrac{1}{s+4} \cdot U(s)$

$\ddot{z}(t) = x(t) - 50\,z(t) - 5\,\dot{z}(t)$

Aplicando Laplace:

$s^2 Z(s) = X(s) - 50\,Z(s) - 5s\,Z(s)$

$(s^2 + 5s + 50)Z(s) = X(s)$

(2) $Z(s) = \dfrac{1}{(s^2+5s+50)} \cdot X(s)$

$y(t) = 8\dot{z}(t) + 6z(t)$

$Y(s) = 8s\,Z(s) + 6\,Z(s)$

(3) $Y(s) = (8s+6)Z(s)$

Substituindo: (2) em (3)

$Y(s) = (8s+6) \cdot Z(s) =$

$= (8s+6) \cdot \dfrac{1}{(s^2+5s+50)} \cdot X(s)$ (4)

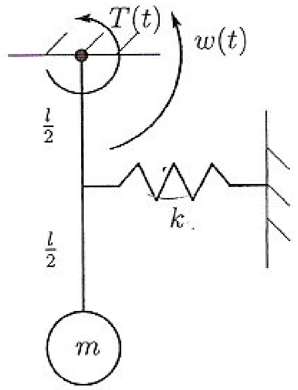
Substituindo (1) em (4):

$$Y(s) = \frac{8s+6}{(s^2+5s+50)} \cdot \frac{1}{(s+4)} \cdot U(s)$$

Logo, a função de transferência é:

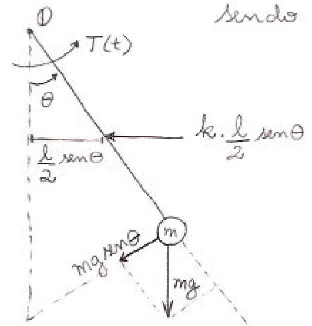
$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8s+6}{(s^2+5s+50)(s+4)}}$$

4. (valor 2.5) Determine a função de transferência entre o torque $T(t)$ e a velocidade angular $w(t)$ do sistema da figura. A haste do pêndulo é rígida, de comprimento l e massa desprezível. A constante de rigidez da mola é k, a massa do pêndulo é m e a aceleração da gravidade é g. Considere pequenos movimentos angulares (modelo linearizado).



Posição genérica:

Sendo $\dot{\theta} = w(t)$



Sendo o ponto O fixo, podemos fazer: $\sum M_o = J_o \cdot \ddot{\theta}$

M_o = momentos em relação a O.

$$J_o \cdot \ddot{\theta} = -k \cdot \frac{l}{2} \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{l}{2} - mg \operatorname{sen}\theta \cdot l + T(t)$$

Linearizando para pequenos deslocamentos: $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

$$J_o \ddot{\theta} + \frac{kl^2}{4} \cdot \theta + mgl\,\theta = T(t)$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + \left(\frac{kl^2}{4} + mgl\right)\theta = T(t)$$

Cálculo de J_o:

$$J_o = \cancel{J_m}^{\,0} + m \cdot l^2$$

$$J_o = ml^2$$

Sabemos que: $\dot{\theta} = w(t) \rightarrow s\,\Theta(s) = W(s)$; $\ddot{\theta} = s^2 \Theta(s) = s\,W(s)$

$$ml^2 s\,W(s) + \left(\frac{kl^2}{4} + mgl\right)\frac{W(s)}{s} = T(s)$$

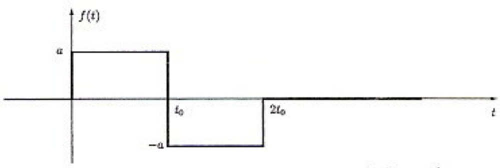
$$ml^2 s^2\, W(s) + \left(\frac{kl^2}{4} + mgl\right) W(s) = s\,T(s)$$

$$\left[ml^2 s^2 + \left(\frac{kl^2}{4} + mgl\right)\right] W(s) = s\,T(s)$$

Função de transferência:

$$\boxed{\frac{W(s)}{T(s)} = \frac{s}{\left[ml^2 s^2 + \left(\frac{kl^2}{4} + mgl\right)\right]}}$$

5. (valor 2.0) Determine a resposta do sistema de primeira ordem cuja constante de tempo é τ e o ganho estático é γ quando for submetido à entrada da figura abaixo.



Sistema de 1^a ordem: $G(s) = \dfrac{\gamma}{\tau s + 1}$

A entrada $F(t)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$F(t) = a.u(t) - 2a.u(t-t_0) + a.u(t-2t_0)$, sendo $u(t)$ a função degrau.

Laplace: $F(s) = \dfrac{a}{s} - \dfrac{2a}{s}.e^{-t_0.s} + \dfrac{a}{s}e^{-2t_0.s}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} \rightarrow Y(s) = \frac{\gamma}{\tau s+1}\cdot\left[\frac{a}{s} - \frac{2a}{s}e^{-t_0 s} + \frac{a}{s}e^{-2t_0 s}\right]$$

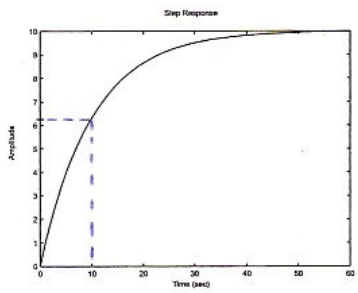
$$Y(s) = \frac{\gamma a}{s(\tau s+1)} - 2.\frac{\gamma a}{s(\tau s+1)}.e^{-t_0 s} + \frac{\gamma a}{s(\tau s+1)}.e^{-2t_0 s}$$

$$\frac{\gamma a}{s(\tau s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s+1} = \frac{A\tau s + A + Bs}{s(\tau s+1)} \rightarrow \left.\begin{matrix} A\tau + B = 0 \\ A = \gamma a \end{matrix}\right\} B = -\gamma a\tau$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\gamma a}{s(\tau s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\gamma a}{s} - \frac{\gamma a\tau}{\tau s+1}\right] = \gamma a\left[u(t) - e^{-\frac{1}{\tau}.t}\right] = \gamma a\left[1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right]u(t)$$

$$\boxed{y(t) = \gamma a\left\{\left[1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right]u(t) - 2\left[1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}\right]u(t-t_0) + \left[1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-2t_0)}\right]u(t-2t_0)\right\}}$$

(valor 0.5) Determine a equação diferencial do sistema de primeira ordem cuja resposta ao degrau de amplitude 2 é mostrada na figura abaixo.



"Em sistemas de 1^a ordem, para $t = \tau$ o sistema atingiu aproximadamente 63% da resposta de regime."

Em regime: $y_\infty = 10$

Degrau de amplitude 2: $2\gamma = 10 \rightarrow \gamma = 5$

63% de $y_\infty = 6,3 \rightarrow \tau = 10s$

Logo: $\boxed{G(s) = \dfrac{\gamma}{\tau s+1} = \dfrac{5}{10s+1}}$

Algumas fórmulas:

$$pss = 100\frac{y_p - \gamma}{\gamma} \qquad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} \left(\left.\frac{d^i f}{dt^i}\right|_{t=0}\right) \qquad t_{e5\%} \approx 3.2\tau = \frac{3.2}{\xi w_n}$$

$$\mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = e^{-sT}F(s) \qquad \mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$$

$$\xi = \frac{ln\frac{100}{pss}}{\sqrt{\pi^2 + \left(ln\frac{100}{pss}\right)^2}} \qquad e_v(t) = \gamma\left(1 \pm \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$t_{e2\%} \approx 4\tau = \frac{4}{\xi w_n} \qquad \delta_l = ln\frac{y_1}{y_2} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[tu(t)] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[sen(wt)] = \frac{w}{s^2+w^2} \qquad G(s) = \frac{\gamma w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$J = \int r^2 dm \qquad G(s) = \frac{\gamma}{\tau s + 1}$$