Instituto de Física Gleb Wataghin
UNICAMP

F315 Mecânica Geral - 3a. Prova - turmas A e D

1o. Semestre de 2011

Nome: GABARITO RA: Turma:

1. (3,5 pontos) A Equação de Euler:

   Utilizando a Equação de Euler, determine a forma da curva que representa a geodésica que une dois pontos quaisquer num espaço plano bidimensional. (Lembrete: uma geodésica é, por definição, a curva que apresenta menor comprimento entre dois pontos pertencentes a um determinado espaço.)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \implies S = \int_1^2 ds$$

$$\implies S = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$\implies f = \sqrt{1 + x'^2} \quad \text{onde} \quad x' = \frac{dx}{dy}$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, utilizaremos a 2ª forma da Eq. de Euler:

$$\implies f - x' \frac{\partial f}{\partial x'} = \text{const} \implies \sqrt{x'^2 + 1} - x' \frac{1}{2} \frac{2x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = \text{const} = C_1$$

$$\implies x' = \sqrt{\frac{1 + C_1^2}{C_1^2}} \implies \boxed{x = \sqrt{\frac{1 + C_1^2}{C_1^2}}\, y + C_2} \implies \text{Equação da Reta}$$

A geodésica num espaço plano bidimensional é uma reta.

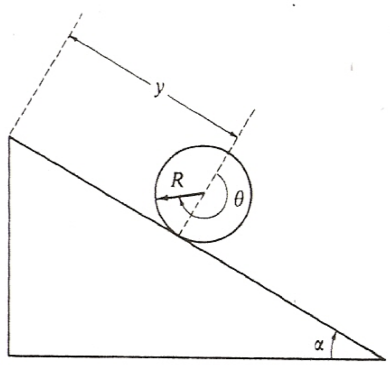
Nome: **RA:** **Turma:**

2. (3,5 pontos) O formalismo Lagrangiano:

   Um aro unidimensional circular de massa M e raio R rola sem deslizar num plano inclinado que forma uma ângulo α com a horizontal, conforme mostrado na figura abaixo.

   (a) Escreva a Lagrangiana do sistema.

   (b) Através das Equações de Euler-Lagrange, encontre as Equações de Movimento do Sistema.



a) $T = \frac{1}{2} M\dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$

onde $I = MR^2$ é o momento de inércia do aro.

$U = -Mgy \sin\alpha$

$$\boxed{L = T - U = \frac{1}{2} M\dot{y}^2 + \frac{1}{2} MR^2\dot{\theta}^2 + Mgy \sin\alpha}$$

b) Vínculo : $\boxed{y = R\theta} \Longrightarrow \dot{y} = R\dot{\theta} \Longrightarrow \ddot{y} = R\ddot{\theta} \Longrightarrow$

$L = M\dot{y}^2 + Mgy \sin\alpha$

Euler - Lagrange : $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \Longrightarrow Mg \sin\alpha - 2M\ddot{y} = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{y} = \frac{g}{2} \sin\alpha \\ \ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{R} \end{cases}}$$

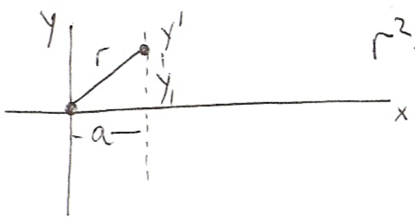
Nome: **RA:** **Turma:**

3. (3,5 pontos) O formalismo Hamiltoniano:

   Dado um sistema de coordenadas cartesiano bidimensional xy, nota-se que uma partícula se move ao longo de um eixo y' que é paralelo ao eixo y. A distância entre y e y' é a. A partícula sofre a ação de uma força que é proporcional a sua distância r à origem do sistema xy e pode ser escrita como $F = -kr$, onde k é uma constante positiva.

   (a) Escreva a Hamiltoniana do sistema.

   (b) Uitlizando as Equações de Hamilton, escreva as equações do movimento do sistema.



$r^2 = a^2 + y^2$

a) $T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$

$U = \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} k (a^2 + y^2)$

$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k (a^2 + z^2)$

mom. generalizado:

$\Longrightarrow \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}$

Como T é função quadrática de $\dot{y}^2$ e U só depende da posição

$\Longrightarrow \quad \boxed{H = T + U = \frac{1}{2} \frac{p_y^2}{m} + \frac{1}{2} k (a^2 + y^2)}$

b) Eq. do Movimento:

$$\begin{cases} \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial z} = -k y \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_y}{m} \end{cases} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad \boxed{\ddot{y} = \frac{\dot{p}_y}{m} = -\frac{k y}{m}} \quad \Longrightarrow \quad y = A \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \theta_0\right]$