1ª Prova

MA-311 — Cálculo III

1º Semestre de 2011

Nome: GABARITO	RA:
Assinatura: TURMAS DA TARDE	Prof.:

Esta prova tem um total de 5 questões valendo 10 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA!

1	2.0	
2	2.0	
3	2.0	
4	2.0	
5	2.0	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*2.0 pontos*) Dada a equação

$$y' = -\frac{4x + 3y}{2x + y} \qquad x > 0, \quad y > 0$$

   (a) (0.5) Mostre que a equação é homogênea e diga qual a substituição (i.e. mudança de variável) utilizada que torna a equação separável.

   (b) (1.5) Resolva a equação.

2. (*2.0 pontos*) Encontre um fator integrante e resolva a equação:

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\ dx + (x^2 + y^2)\ dy = 0.$$

3. (*2.0 pontos*) Considere a equação diferencial

$$x^2y'' - 6y = 0, \qquad x > 0.$$

   Dado que $y_1(x) = x^3$ é uma solução da equação, use o método de **redução de ordem** para determinar uma segunda solução da forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$.

4. (*2.0 pontos*) Considere a e.d.o.

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} = 5 + 2x^2 + 6e^x \text{sen } x$$

   (a) Encontre a solução geral da equação homogênea associada.

   (b) Usando o método de coeficientes indeterminados encontrar a forma da solução particular **SEM** calcular os coeficientes.

5. (*2.0 pontos*)

   (a) Resolva a seguinte equação de Euler-Cauchy: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x > 0.$

   (b) Use o método de **variação dos parâmetros** para resolver a seguinte equação:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x, \qquad x > 0.$$

(1) $y' = -\dfrac{4x+3y}{2x+y}$, $x>0$, $y>0$. $(*)$

(a) $f(x,y) = -\dfrac{4x+3y}{2x+y}$, $f(ax,ay) = -\dfrac{4ax+3ay}{2ax+ay} = f(x,y)$

$v = y/x$, $y = xv$, $y' = \dfrac{dy}{dx} = v + \dfrac{dv}{dx} = v + v'$

0,5

(b) $v + x\dfrac{dv}{dx} = f(1,v) = -\dfrac{4+3v}{2+v}$

$\Longrightarrow \quad x\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{4+3v}{2+v} - v = -\dfrac{v^2+5v+4}{2+v}$

$\Longrightarrow \quad (**) \quad \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{M(x)} dx + \underbrace{\dfrac{2+v}{v^2+5v+4}}_{N(v)} dv = 0$

0,5

$$\frac{2+v}{v^2+5v+4} = \frac{2/3}{v+4} + \frac{1/3}{v+1}$$

0,3

$$H_2(v) = \int \frac{2+v}{v^2+5v+4}\,dv = \frac{2}{3}\int \frac{dv}{v+4} + \frac{1}{3}\int \frac{dv}{v+1}$$

$$= \frac{2}{3}\ln|v+4| + \frac{1}{3}\ln|v+1|$$

0,4

$$H_1(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$C = H_1(x) + H_2(v) = \ln|x| + \frac{2}{3}\ln|v+4| + \frac{1}{3}\ln|v+1|$$

(solução geral de $(**)$)

$$C = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left(\left|\frac{y+4x}{x}\right|^2 \left|\frac{y+x}{x}\right|\right)$$

$C = |y+4x|^2\,|y+x|$ (solução geral de $(*)$)

0,3

$$(2) \quad \underbrace{(3x^2y + 2xy + y^3)}_{M}\,dx + \underbrace{(x^2+y^2)}_{N}\,dy = 0 \quad (*)$$

$$M_y = 3x^2 + 2x + 3y^2 \,, \quad N_x = 2x$$

$$P = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x^2+3y^2}{x^2+y^2} = 3 \text{ (depende somente de } x)$$

$$u(x) = \exp\left(\int P(x)\,dx\right) = \exp\left(\int 3\,dx\right) = e^{3x} \text{ (fator integrante)}$$

1,0

$$(**) \quad \underbrace{e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3)}_{M_1 = \psi_x}\,dx + \underbrace{e^{3x}(x^2+y^2)}_{N_1 = \psi_y}\,dy = 0$$

$$(M_1)_y = 3x^2e^{3x} + 2x e^{3x} + 3y^2 e^{3x} = (N_1)_x \Rightarrow (**) \text{ é exata}$$

$$\psi(x,y) = \int N_1\,dy + h(x) = \int e^{3x}(x^2+y^2)\,dy + h(x)$$

$$= x^2y\,e^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x} + h(x)$$

0,4

$$\begin{cases} \psi_x = e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3) = M_1 \\ \psi_x = e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3) + h'(x) \end{cases} \Rightarrow h'(x) = 0$$

$$\Rightarrow h(x) = 0$$

0,3

$$\psi(x,y) = e^{3x}\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) \text{ (função potencial)}$$

$$C = e^{3x}\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) \quad \text{(solução geral de } (*))$$

0,3

(3) $x^2 y'' - 6y = 0$ (I)

$y_1(x) = x^3$ solução particular de (I)

$y_2(x) = y_1(x)\, v(x) = x^3 v$

$y_2' = 3x^2 v + x^3 v'$

$y_2'' = 6xv + 6x^2 v' + x^3 v''$

0,3

$$0 = x^2 y_2'' - 6y_2 = x^2\left(6xv + 6x^2 v' + x^3 v''\right) - 6x^3 v$$

$$0 = 6x^4 v' + x^5 v''$$

$$0 = 6v' + x v'' \quad (\text{II})$$

0,6

$$z = v' \implies 0 = 6z + xz'$$

$$\implies 0 = z' + \frac{6}{x} z \quad (\text{III})$$

0,2

$$z = C_1 \exp\left(-\int \frac{6}{x}\, dx\right) = C_1 x^{-6} \quad \text{(solução geral de (III))}$$

$$\frac{dv}{dx} = v' = z = C_1 x^{-6}$$

0,5

$$v = \int C_1 x^{-6}\, dx = -\frac{C_1}{5} x^{-5} + C_2 = C_3 x^{-5} + C_2$$

(solução geral de (II))

0,2

$$y_2 = \left(C_3 x^{-5} + C_2\right) x^3 = C_3 x^{-2} + C_2 x^3$$

(solução geral de (I))

$y_2(x) = x^{-2}$ (solução particular de (I))

0,2

(4) (a) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} = 0$

$$Q(r) = r^5 - 2r^4 + 2r^3 = r^3(r^2 - 2r + 2)$$

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4, \ \sqrt{\Delta} = \pm 2i$$

$$\begin{cases} r_1 = 0 \text{ é raiz com multiplicidade 3 de } Q(r) \\ r_2 = 1 + i \text{ e } \bar{r}_2 = 1 - i \text{ são raizes complexas de } Q(r) \end{cases}$$

0,3

$$\boxed{\begin{array}{c} y_H(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x \cos x + C_5 e^x \operatorname{sen} x \\ \text{(solução geral da equação homogênea)} \end{array}}$$

0,4

(b) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} = 5 + 2x^2$ (I)

$$y_{p_1}(x) = x^s (A_0 x^2 + A_1 x + A_2)$$

$s = 0, 1, 2$ não servem

$s = 3 \Rightarrow \boxed{y_{p_1}(x) = x^3 (A_0 x^2 + A_1 x + A_2)}$ solução particular de (I)

0,5

$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} = 6e^x \operatorname{sen} x$ (II)

$$y_{p_2}(x) = x^s e^x (B_1 \cos x + B_2 \operatorname{sen} x)$$

$s = 0$ não serve

$s = 1 \Rightarrow \boxed{y_{p_2}(x) = x e^x (B_1 \cos x + B_2 \operatorname{sen} x)}$

0,5

(solução particular de (II))

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$$

(solução particular da equação dada)

0,3

(5) a) (1) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x \,, \quad x > 0$

$$\Downarrow \quad z = \ln x \,, \quad x = e^z \,, \; \alpha = -2 \,, \; \beta = 2$$

(2) $\dfrac{d^2y}{dz^2} - 3\dfrac{dy}{dz} + 2y = e^z$

0,4

(3) $\dfrac{d^2y}{dz^2} - 3\dfrac{dy}{dz} + 2y = 0$

$Q(r) = r^2 - 3r + 2 = 0 \implies \Delta = 1 \implies r = 1$ e 2

0,4 $\quad y_H(z) = C_1 e^z + C_2 e^{2z}$ (solução geral de (3))

$y_H(x) = C_1 x + C_2 x^2$ (resposta de (a))

b) $y_p(z) = u_1 e^z + u_2 e^{2z}$ (solução particular de (2))

$$\begin{cases} u_1' e^z + u_2' e^{2z} = 0 \\ u_1' e^z + u_2' 2e^{2z} = e^z \end{cases} \qquad W(e^z, e^{2z}) = \begin{vmatrix} e^z & e^{2z} \\ e^z & 2e^{2z} \end{vmatrix} = e^{3z}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2z} \\ e^z & 2e^{2z} \end{vmatrix}}{e^{3z}} = -1 \implies u_1(z) = -z$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^z & 0 \\ e^z & e^z \end{vmatrix}}{e^{3z}} = e^{-z} \implies u_1(z) = -e^{-z}$$

0,8 $\quad y_p(z) = -z e^z - e^{-z} e^{2z} = -e^z(z+1)$ (solução particular de (2))

$y_p(x) = -x(1 + \ln x)$ (solução particular de (1))

$y_p(z) = C_1 e^z + C_2 e^{-z} - e^z(z+1)$ (solução geral de (2))

$y_p(x) = C_1 x + C_2 x^2 - x(1 + \ln x)$ (solução geral de (1))

0,4

5b) (outra forma) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ soluções L.I. da homogênea

$y_p(x) = u_1 x + u_2 x^2$ (solução particular de (1))

$$\begin{cases} u_1' x + u_2' x^2 = 0 \\ u_1' \cdot 1 + u_2' 2x = 1/x \end{cases} \qquad W(x, x^2) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 1/x & 2x \end{vmatrix}}{x^2} = -\frac{1}{x} \implies u_1 = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1/x \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{1}{x^2} \implies u_2 = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$y_p(x) = (-\ln x) x - \frac{1}{x} x^2 = -x(1 + \ln x)$$

(solução particular de (1))

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = C_1 x + C_2 x^2 - x(1 + \ln x)$$

(solução geral de (1))