Prova de Eletromagnetismo EE 521 – 2 de julho de 2009.
Prof. Cesar Pagan. FEEC – UNICAMP

Nome: «nome» RA: «N»

1. **(2,0) Lei de Biot-Savart.** Use a Lei de Biot-Savart para calcular a densidade de campo magnético **B** na origem do arranjo representado na figura ao lado. Considere que os fios retos se estendem até o infinito. Faça um esquema de todos os elementos usados na solução.

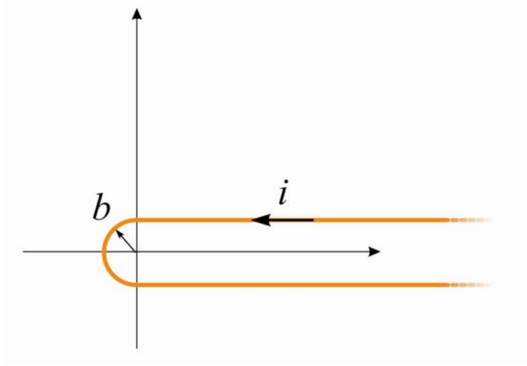

Figura 1: Aplicação da Lei de Biot-Savart (Problema 1).

Solução:
Podemos dividir o problema em três partes, uma referente à reta de cima, outra para o semi-círculo e outra para a reta de baixo, conforme a figura 2.

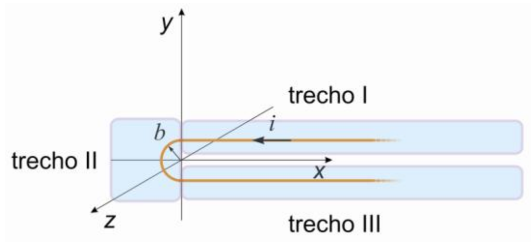

Figura 2: O arranjo foi dividido em três trechos para facilitar os cálculos.

Primeiro, definimos um sistema de eixos *dextrógiro,* isto é, um sistema para o qual o produto vetorial é definido como $\hat{\mathbf{e}}_x$ X $\hat{\mathbf{e}}_y$ = $\hat{\mathbf{e}}_z$ segundo a regra da mão direita.

A Lei de Biot-Savart é dada pela expressão:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{i d\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \qquad (1)$$

Para aplicá-la, precisamos definir **r**, **r´**, e $d\boldsymbol{\ell}$.

Façamos isso para o trecho I (reta superior):

- **r** é a posição em que se mede o campo, no caso **r=0**;
- **r´** é a posição do elemento de corrente. Logo **r´=** $x\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_y$; e
- $d\boldsymbol{\ell}$ (vetor) é o tamanho do elemento de corrente, $d\boldsymbol{\ell} = dx\hat{\mathbf{e}}_x$. Usamos porque a integração será feita no sentido da corrente, ou seja, de +∞ até zero. Este caminho de integração produz elementos dx negativos. Se, por outro lado, adotássemos o sinal negativo, $d\boldsymbol{\ell} = -dx\hat{\mathbf{e}}_x$, a integração deveria ser feita no sentido convencional, isto é, de zero até +∞.

Assim, temos:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{I}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\infty}^{0} \frac{i dx \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \times \left(-\mathrm{x}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} - \mathrm{b}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\right)}{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2)$$

Fazendo o produto vetorial, temos $\hat{\mathbf{e}}_x$ X $\hat{\mathbf{e}}_x$ = **0** e $\hat{\mathbf{e}}_x$ X($-\hat{\mathbf{e}}_y$)= ($-\hat{\mathbf{e}}_z$), de onde resulta:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{I}}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 i \mathrm{b}}{4\pi} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} \int_{\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i \mathrm{b}}{4\pi} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (3)$$

Considerando $x = b\ \mathrm{tg}\,\theta$ e $dx = b\sec^2\theta d\theta$, obtemos:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{I}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i \mathrm{b}}{4\pi} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} \int_{0}^{\pi/2} \frac{b\sec^2\theta d\theta}{(b^2 \mathrm{tg}^2\theta + b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi \mathrm{b}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^3\theta} = \frac{\mu_0 i}{4\pi \mathrm{b}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} \int_{0}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi \mathrm{b}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} \qquad (4)$$

Para a contribuição do trecho III, temos uma situação simétrica, para o que basta multiplicar $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$ por dois. Para provar esta afirmação, observamos que, neste caso, **r´=** $x\hat{\mathbf{e}}_x - b\hat{\mathbf{e}}_y$ e que os limites de integração mudam para seguir o sentido da corrente, de zero até +∞.

Temos

$$\mathbf{B}_{\mathbf{III}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\infty} \frac{idx\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \times (-\mathrm{x}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} + \mathrm{b}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}})}{(x^2+b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i\mathrm{b}}{4\pi}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}} \qquad (5)$$

que é o mesmo resultado que (3).

Para o trecho semi-circular:

- **r** é a posição em que se mede o campo, no caso **r=0**;
- **r´** é a posição do elemento de corrente. Logo **r´=** $b\hat{\mathbf{e}}_\rho$; e
- $d\boldsymbol{\ell}$ (vetor) é o tamanho do elemento de corrente, $d\boldsymbol{\ell} = bd\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi$.
  Assim, temos:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{II}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{ibd\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi \times (-\mathrm{b}\hat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\rho}})}{(b^2)^{3/2}} \qquad (6)$$

Como $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ X $(-\hat{\mathbf{e}}_\rho) = \hat{\mathbf{e}}_z$, obtemos

$$\mathbf{B}_{\mathbf{II}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi b}\hat{\mathbf{e}}_z\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\phi = \frac{\mu_0 i}{4b}\hat{\mathbf{e}}_z \qquad (7)$$

Conhecendo os valores de $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{II}}$ e $\mathbf{B}_{\mathrm{III}}$, obtermos o valor do campo na origem do arranjo:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_{\mathbf{I}} + \mathbf{B}_{\mathbf{II}} + \mathbf{B}_{\mathbf{III}} = 2\mathbf{B}_{\mathbf{I}} + \mathbf{B}_{\mathbf{II}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi b}\hat{\mathbf{e}}_z + \frac{\mu_0 i}{4b}\hat{\mathbf{e}}_z \qquad (8)$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\mu_0 i}{b}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\right)} \qquad (9)$$

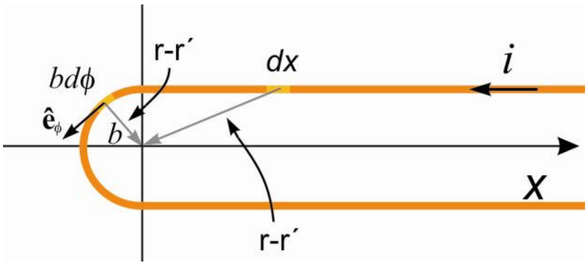

Figura 3: Elementos utilizados nos cálculos para solução deste problema.

2. **(3,0) Lei de Ampère**. Um cabo coaxial com condutor interno de raio *a* e condutor externo de raio interno *b* e raio externo *c,* como na figura, conduz uma corrente I.
   a. (2,0) Calcule a intensidade de campo magnético **H** em todo o espaço (no interior do condutor interno, no espaço entre os condutores, no interior do condutor externo e fora do arranjo). Defina a direção de **H**. Faça um esquema de sua solução.
   b. (1,0) Faça um gráfico representando a *H* em função da distância ao eixo de simetria.

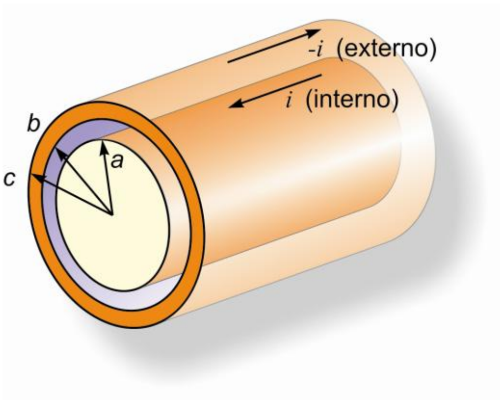

Figura 4: Calculo da intensidade de campo magnético **H** para o Cabo coaxial (Problema 2).

Solução:

A Lei de Ampère é dada pela expressão:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\ell = i \, . \qquad (1)$$

Utilizaremos como caminho *fechado* de integração, circunferências com centro no eixo de simetria do cabo coaxial, integrando no sentido anti-horário. Com esta opção, a contribuição da corrente que está no sentido para fora da folha de papel produz uma contribuição positiva para **H**.

Dividimos o problema em 4 segmentos:

Para ρ < a:

$$\int_0^{2\pi} H_\phi (\hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi)\rho d\phi = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi 2\pi\rho = i(\rho) \, .$$

onde i(ρ) é a corrente que passa por dentro da superfície limitada por uma circunferência de raio ρ. Para encontrar o valor de i(ρ), calculamos o valor da densidade de corrente J, que é a corrente por unidade de área que passa pelo condutor central. Supondo que densidade é homogênea, temos

$$J = \frac{i}{\pi a^2} \, ,$$

que multiplicado pela área limitada por ρ, $\pi\rho^2$, resulta em i(ρ):

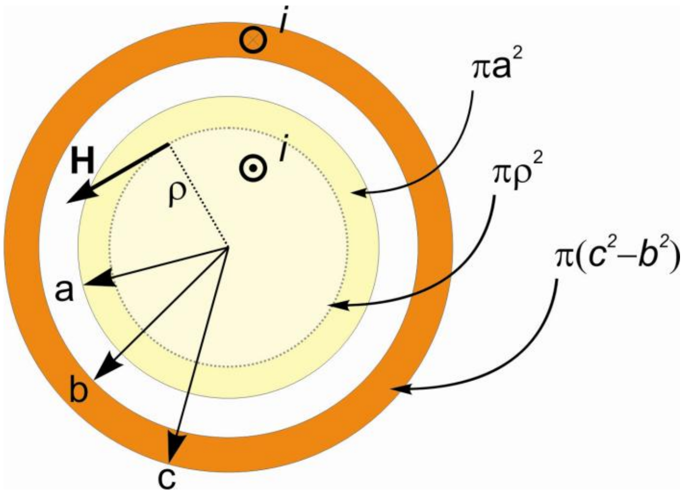

Figura 5: Segundo a Lei de Ampère, o campo magnético é proporcional à corrente que atravessa o caminho de integração.

$$i(\rho) = J\pi\rho^2 = \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} i = \frac{\rho^2}{a^2} i \, .$$

Com este resultado é possível encontrar o campo dentro do condutor interno:

$$H_\phi = \frac{\rho^2 i}{2\pi\rho a^2} = \frac{i}{2\pi a^2}\rho \, .$$

ou

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{i}{2\pi a^2}\rho$$

Concluímos que a intensidade de campo magnético **H** cresce linearmente no para ρ<*a*.

Para a <ρ <b:

A corrente envolvida neste caso é exatamente i, e os cálculos são mais simples:

$$\int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi 2\pi\rho = i$$

$$H_\phi = \frac{i}{2\pi\rho}$$

ou

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{i}{2\pi\rho}$$

Para b <ρ<c:

Fazemos de maneira similar à região em que ρ <a. Aqui, a corrente está entrando e se distribui por uma superfície $A=\pi(c^2-b^2)$,

$$J = \frac{i}{\pi(c^2 - b^2)}.$$

A corrente envolvida pela superfície de integração inclui a corrente do condutor interno, apontada para fora e portanto positiva, e a fração $(\rho^2-b^2)/(c^2-b^2)$ do condutor externo, com corrente negativa:

$$i(\rho) = i - \frac{\pi(\rho^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} i = \frac{c^2 - b^2 - \rho^2 + b^2}{c^2 - b^2} i = \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} i,$$

e assim,

$$\int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi 2\pi\rho = \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} i$$

$$H_\phi = \frac{i}{2\pi\rho}\left[\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}\right]$$

Logo

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{e}}\phi \frac{i}{2\pi\rho}\left[\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}\right]$$

Para ρ >c:

Neste região a soma das correntes que atravessa a superfície envolvida é zero, o que resulta em um campo magnético nulo, ou seja,

$$\int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi 2\pi\rho = 0$$

Logo

$\mathbf{H} = \mathbf{0}$.

Um gráfico para representar a intensidade de campo magnético no cabo coaxial é dado na figura ao lado.

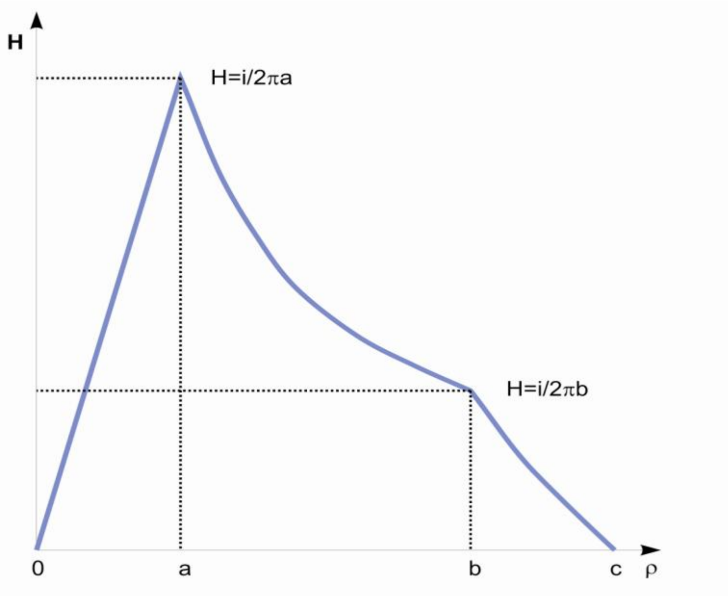

Figura 6: Módulo da intensidade de campo magnético **H** em um cabo coaxial como função da distância ao eixo de simetria. O campo está na direção $\hat{\mathbf{e}}_\phi$.

3. **(2,0) Indutância.** Uma espira circular de raio *a* tem no seu centro uma outra espira circular de raio *b*<<*a*. Os planos das duas espiras formam um ângulo θ entre si. Calcule a indutância mútua entre as espiras.

Solução:

Para calcular a indutância mútua, iniciamos calculando a densidade de fluxo magnético **B** provocada pela espira de raio *a* no ponto central do dispositivo, o qual consideraremos a origem do sistema de coordenadas. Para obter seu valor utilizamos a Lei de Biot-Savart:

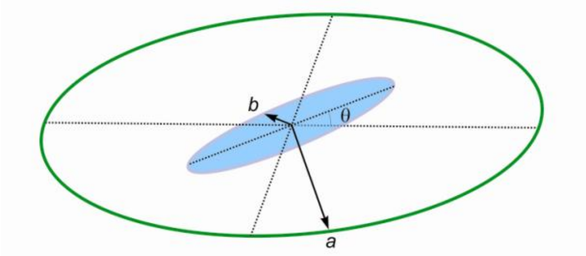

Figura 7: Duas espiras concêntricas, formando um ângulo θ entre si.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ibd\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi \times (-\mathrm{b}\hat{\mathbf{e}}_\rho)}{(b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2a}\hat{\mathbf{e}}_z \qquad (1)$$

Como b<<a, supomos que o campo **B** é aproximadamente constante no interior da espira de raio *b.* Para saber a indutância mútua precisamos calcular o fluxo que atravessa a espira menor, o que é feito pela integral do fluxo:

$$\Phi = \int_{\substack{\text{Espria menor}\\ \text{de raio b}}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\substack{\text{Espria menor}\\ \text{de raio b}}} \frac{\mu_0 i}{2a}\hat{e}_z \cdot \hat{e}_n dS \qquad (2)$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_n$ é um versor unitário alinhado com a normal ao plano da espira menor e inclinado θ radianos em relação à normal ao plano da espira maior. Disto resulta

$$\Phi = \int_{\substack{\text{Espria menor}\\ \text{de raio b}}} \frac{\mu_0 i}{2a}\cos(\theta) dS = \frac{\mu_0 i \pi b^2}{2a}\cos(\theta) \qquad (3)$$

Como para meios lineares a indutância é a razão entre fluxo e corrente, temos que a indutância é:

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 \pi b^2}{2a}\cos\theta} \qquad (4)$$

4. **(3,0) Lei de Faraday:** Uma espira quadrada possui lado *L* e tem uma resistência *R*. A espira pertence ao plano *z=0,* com seus vértices em *(0,0,0), (0,L,0), (L,L,0)* e *(L,0,0)* em *t=0*. A espira se move com velocidade $\mathbf{v}=v_y\hat{\mathbf{e}}_y$ em uma densidade de campo

$$\mathbf{B}=B_0 cos(\omega t-kx)\hat{\mathbf{e}}_z.$$

Encontre uma função do tempo que expresse a perda ôhmica que é entregue à espira.

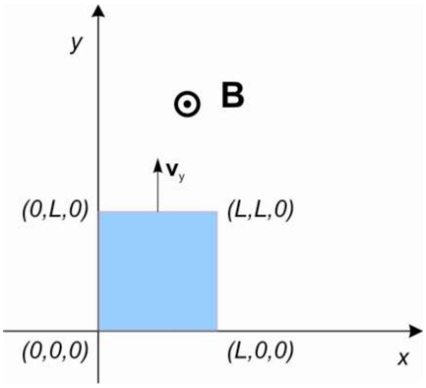

Figura 8: Uso da Lei de Faraday para calcular a perda ôhmica no circuito.

Solução:

O campo não varia com y, que é a direção do movimento, portanto não há variação de fluxo. Fisicamente, aparecerá um campo elétrico alinhado ao longo dos lados superior e inferior do quadrado, ambos com o mesmo módulo e apontados para o sentido de $-\hat{\mathbf{e}}_x$, e intensidade v_yB. Porém, como ambos são iguais, não haverá corrente em função deste fato. Somado a este efeito, no entanto, está a variação da densidade de fluxo magnético com o tempo, o que produzirá uma força eletromotriz no circuito no valor da derivada do fluxo:

$$\Phi = \int_0^L\int_0^L \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_z dxdy = \int_0^L\int_0^L B_0\cos(\omega t - kx)(\hat{\mathbf{e}}_z\cdot\hat{\mathbf{e}}_z)dxdy = \int_0^L\int_0^L B_0\cos(\omega t - kx)dxdy = L\int_0^L B_0\cos(\omega t - kx)dx$$

$$\Phi = L\frac{1}{K}B_0 sen(\omega t - kx)\Big|_0^L = L\frac{1}{K}[B_0 sen(\omega t - kL) - B_0 sen(\omega t)]$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{\omega}{K}[B_0\cos(\omega t - kL) - B_0\cos(\omega t)]$$

A perda ôhmica é dada pela expressão $P=E^2/R$, ou seja

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{L^2B_0{}^2\omega^2}{K^2R}[\cos(\omega t - kL) - \cos(\omega t)]^2.$$