GABARITO 2ª PROVA SEXTA DIURNO

1a) $y = mx$ ($m \in \mathbb{R}$ constante)

$$x \neq 0 \Rightarrow f(x, mx) = \frac{x^3 - mx^2 - m^3x^3}{x^2 + m^2x^2} = \frac{x(1-m^3) - m}{1+m^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x(1-m^3) - m}{1+m^2} = -\frac{m}{1+m^2}$$

1,0

Como o limite acima depende do caminho (depende de m) segue que o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe e assim f não é contínua em $(0,0)$.

0,3

1b)

$$\left|\frac{x^3 - 2xy^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|x|^3 + 2|x|y^2}{x^2+y^2}$$

$$\leqslant |x| \frac{x^2}{x^2+y^2} + 2|x| \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$\leqslant |x| + 2|x| = 3|x|$$

Temos então que

$$0 \leqslant \left|\frac{x^3 - 2xy^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant 3|x|$$

0,7

e como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|x| = 0$, segue pelo Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3 - 2xy^2}{x^2+y^2}\right| = 0 \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

0,5

1b) Usando coordenadas polares. $x = r\cos\theta$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$$\frac{x^3 - 2xy^2}{x^2+y^2} = \frac{r^3(\cos^3\theta - 2\cos\theta\,\text{sen}^2\theta)}{r^2} = \longrightarrow$$

$$= \underline{r(\cos^3\theta - 2\cos\theta\,\text{sen}^2\theta)} \xrightarrow{*} 0,$$ quando $r \to 0$, logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

até aqui (0,7)

$\lim_{r\to 0}$ (0,5)

OBSERVAÇÃO: Note que (*) vale pois

$(\cos^3\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta)$

é limitado.

2) $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ (elipsóide, superfície de nível de f)

$\Pi: 2x + 3y - 3z = 1$, $\vec{n} = (2,3,-3)$, $\vec{n} \perp \Pi$

$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2$

$\nabla f(x,y,z) = (2x, 6y, 2z)$ 0,5

$(2x, 6y, 2z) = \lambda(2,3,-3) \iff \begin{cases} 2x = 2\lambda \\ 6y = 3\lambda \\ 2z = -3\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda/2 \\ z = -3\lambda/2 \end{cases}$ 1,0

$1 = x^2 + 3y^2 + z^2 = \lambda^2 + 3\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\lambda}{2}\right)^2 = \lambda^2\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\right) = 4\lambda^2$

$\boxed{\lambda = \pm 1/2}$

$\underline{\lambda = 1/2}$: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = -\frac{3}{4}$

$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

$\underline{\lambda = -1/2}$: $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = \frac{3}{4}$

$Q = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

<u>Resposta</u>. São os pontos P e Q. 1.0

3) a) $f(x,y) = x^2 + \operatorname{sen}(xy)$

$\nabla f(x,y) = (2x + y\cos(xy),\ x\cos(xy))$

$\nabla f(1,0) = (2,1)$

$u = (a,b), \quad a^2+b^2 = 1$

$1 = D_u f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot u = (2,1)\cdot(a,b) = 2a+b$

$\begin{cases} b+2a = 1 \implies b = 1-2a \\ a^2+b^2 = 1 \end{cases}$

1,0

$1 = a^2 + (1-2a)^2 = a^2 + 1 - 4a + 4a^2 = 5a^2 - 4a + 1$

$\implies 0 = 5a^2 - 4a = a(5a-4) \implies \begin{cases} a = 0 \text{ ou} \\ a = 4/5 \end{cases}$

$\underline{a=0} \implies b = 1 \implies \boxed{u_1 = (0,1)}$

0,5

$\underline{a = \frac{4}{5}} \implies b = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5} \implies \boxed{u_2 = (4/5, -3/5)}$

0,5

As direções das derivadas direcionais são as direções dos vetores $u_1 = (0,1)$ e $u_2 = (4/5, -3/5)$.

b) Taxa de crescimento máxima $= \|\nabla f(1,0)\| = \|(2,1)\| = \sqrt{5}$

$D_u f(1,0) = 1 \neq \sqrt{5} \implies$ 1 não é taxa de crescimento máxima

0,5

(Outra solução do item 3a)

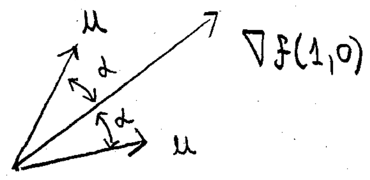
Temos que

$$1 = D_u f(1,0) = \|\nabla f(1,0)\| \cos\alpha = \sqrt{5}\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \left(0 < \alpha < \pi/2\right)$$

0,7

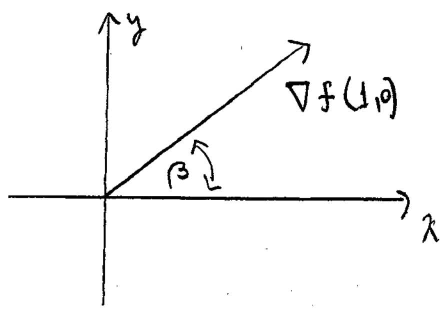
Portanto u é um dos dois vetores unitários que fazem um ângulo $\alpha = \arccos(1/\sqrt{5})$ com o vetor gradiente $(2,1)$



0,5

$$(2,1) = \sqrt{5}\,(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta) \Longrightarrow \cos\beta = 2/\sqrt{5}$$

$$\Longrightarrow \beta = \arccos\left(2/\sqrt{5}\right)$$



$\beta+\alpha$ ou $\beta-\alpha$ são os ângulos que o vetor unitário u poderá fazer com o eixo dos x's.

0,8

4) $z = f(x+at) + g(x-at)$

$u = x+at \quad , \quad v = x-at$

Aplicando a Regra da Cadeia obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial t} = f'(u)a - g'(v)a$$ 0,3

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(f'(u)a - g'(v)a\right) = a\frac{\partial}{\partial t}\left(f'(u)\right) - a\frac{\partial}{\partial t}\left(g'(v)\right)$$ 0,7

$$= a f''(u)\frac{\partial u}{\partial t} - a g''(v)\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 f''(u) + a^2 g''(v)$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = f'(u) + g'(v)$$ 0,3

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(u) + g'(v)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(u)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(g'(v)\right)$$ 0,7

$$= f''(u)\frac{\partial u}{\partial x} + g''(v)\frac{\partial v}{\partial x} = f''(u) + g''(v)$$

e portanto segue que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\left(f''(u) + g''(v)\right) = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$ 0,5

Obs: $\frac{\partial z}{\partial f}$? ou $\frac{\partial z}{\partial g}$? $\longrightarrow$ $-0,6$ z não é função de f