/

Mecânica – F315 B

1ª prova - 4 de setembro de 2008

Nome: GABARITO RA:______

Questão 1 (2,5)

Uma partícula de massa m move-se num plano horizontal com velocidade angular constante ω e com o vetor posição dado por $\vec{r} = r_0\theta\hat{\boldsymbol{r}}$.

a) Obtenha a velocidade da partícula em coordenadas polares.(0,5)
b) Obtenha a força sobre a partícula em coordenadas polares. (1,0)
c) Encontre a potência instantânea, sabendo-se que $P = \vec{F}.\vec{v}$. (0,5)
d) Se θ(t=0) = 0, qual é a velocidade, a força e a potência em t=0? (0,5)

a) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r_0\dot{\theta}\hat{r} + r_0\theta\frac{d\hat{r}}{dt} = r_0\dot{\theta}\hat{r} + r_0\theta\dot{\theta}\hat{\theta}$

$$\boxed{\bar{v} = r_0\omega(\hat{r} + \theta\hat{\theta})}$$

b) $\vec{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \cancel{r_0\dot{\omega}(\hat{r}+\theta\hat{\theta})} + r_0\omega(\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\theta}\hat{\theta} - \theta\dot{\theta}\hat{r})$

$= r_0\omega(2\omega\hat{\theta} - \theta\omega\hat{r}) \Rightarrow \vec{a} = r_0\omega^2(2\hat{\theta} - \theta\hat{r})$

$\bar{F} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\bar{F} = mr_0\omega^2(2\hat{\theta} - \theta\hat{r})}$

c) $P = \bar{F}.\bar{v} = mr_0^2\omega^3(2\theta - \theta) \Rightarrow \boxed{P = m\theta r_0^2\omega^3}$

d)
$$\boxed{\begin{aligned}\bar{v} &= r_0\omega\hat{r}\\ \bar{F} &= 2mr_0\omega^2\hat{\theta}\\ P &= 0\end{aligned}}$$

Questão 2 (2,5)

Uma partícula está sujeita a uma força gravitacional que diminui no tempo como $F(t) = - mge^{-\alpha t}\,\hat{y}$. Em t=0, y=0 e $v=v_0\hat{y}$, ou seja, a partícula é jogada para cima.

a) Obtenha a velocidade em função do tempo desta partícula. (0,5)
b) Qual é a velocidade máxima v_{0max} para que a partícula chegue a uma altura máxima e volte para y=0?(0,5)
c) Na condição do item b, quanto tempo leva para a partícula atingir a máxima altura? (0,5)
d) Obtenha y(t) para a partícula? (0,5)
e) No caso da partícula não voltar, qual a altura que ela estará após um tempo longo, $\tau >> 1/\alpha$?(0,5)

$\hat{y}$

a) $$\cancel{m}\frac{dv}{dt} = -\cancel{m}g e^{-\alpha t} \Rightarrow dv = -g e^{-\alpha t}\, dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv' = -g\int_0^t e^{-\alpha t'} dt' \Rightarrow v - v_0 = \frac{g}{\alpha} e^{-\alpha t'}\Big|_0^t$$

$$v - v_0 = \frac{g}{\alpha}\left(e^{-\alpha t} - 1\right) \Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 - \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}$$

b) em algum ponto $v(t) = 0$

$$v(t) = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

como $\left(1 - e^{-\alpha t}\right) > 0 \Rightarrow v_0 > \frac{g}{\alpha} \Rightarrow \boxed{v_{0MAX} = \frac{g}{\alpha}}$

c) $$\frac{v_0 \alpha}{g} = 1 - e^{-\alpha t} \Rightarrow e^{-\alpha t} = 1 - \frac{v_0\alpha}{g} \Rightarrow -\alpha t = \ln\left(1 - \frac{v_0\alpha}{g}\right)$$

$$-\alpha t = \ln\left(\frac{g - v_0\alpha}{g}\right) \Rightarrow \boxed{t = 1/\alpha \ln\left(\frac{g}{g - v_0\alpha}\right)}$$

ou $$t = (1/\alpha)\ln\left(\frac{v_{0MAX}}{v_{0MAX} - v_0}\right)$$

d) $$\int_0^y dy' = \int_0^t \left(v_0 - \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t'}\right)\right) dt \Rightarrow y(t) = \left(v_0 - g/\alpha\right)t + \frac{g}{\alpha^2} e^{-\alpha t'}\Big|_0^t$$

$$\boxed{y(t) = (v_0 - g/\alpha)\,t + \frac{g}{\alpha^2}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}$$

e) $t \gg \frac{1}{\alpha}$ $\qquad e^{-\alpha t} \sim 0$

$$y(t) \sim \left(v_0 - g/\alpha\right)t + \frac{g}{\alpha^2}$$

velocidade uniforme

(Notem que $v_0 > g/\alpha$ $\Rightarrow v_{uniforme} > 0$

Não perguntado $\quad \alpha t \ll 0$

$e^{-\alpha t} \sim 1 - e^{-\alpha t} \Rightarrow y(t) = v_0 t$

Questão 3(2,5)

Considere um projétil de massa m lançado verticalmente para cima com velocidade v_0 num campo gravitacional constante com aceleração g para baixo.

(a) Obtenha v(t) para o caso de termos uma resistência do ar proporcional à velocidade instantânea por uma constante b. (deduza) (1,0)

(b) Encontre o tempo τ que a partícula leva para chegar à sua altura máxima. (1,0)

(c) Por aproximação, obtenha uma expressão de τ em termos de τ_0, onde τ_0 é tempo necessário para chegar à máxima altura caso não houvesse resistência do ar. Restrinja-se a termos da ordem de τ_0^2.(0,5)

(a) $$m\frac{dv}{dt} = -mg - bv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \frac{b}{m}v$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{g+\frac{b}{m}v'} = -\int_{t_0}^{t} dt' \Rightarrow \frac{m}{b}\ln\left(\frac{g+\frac{b}{m}v}{g+\frac{b}{m}v_0}\right) = -(t-t_0)$$

$$g+\frac{b}{m}v = \left(g+\frac{b}{m}v_0\right)e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = -\frac{mg}{b}\left[1 - e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}\right] + v_0 e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}}$$

(b) $$v(\tau) = 0 \Rightarrow -\frac{mg}{b} + e^{-\frac{b}{m}\underbrace{(t-t_0)}_{\tau}}\left(\frac{mg}{b} + v_0\right) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{b}{m}\tau} = \frac{mg/b}{mg/b + v_0} = \frac{1}{1 + v_0 b/mg}$$

$$\frac{b}{m}\tau = \ln\left(1 + v_0 b/mg\right) \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{m}{b}\ln\left(1 + bv_0/mg\right)}$$

(c) Sem viscosidade $\tau_0 = v_0/g \leftarrow v = v_0 - gt = 0$

$$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} \qquad \tau \sim \frac{m}{b}\left(\frac{bv_0}{mg} - \frac{b^2v_0^2}{m^2g^2}\right)$$

$$\boxed{\tau \sim \tau_0 - b/2m\, \tau_0^2}$$

Questão 4 (2,5)

Uma partícula de massa m está sujeita a uma força cuja energia potencial é $V(x) = ax^2 - bx^3$.

(a) Qual é a força sobre a partícula? (0,5)
(b) Encontre os pontos de equilíbrio estável e instável, se houver. (1,0)
(c) Se a partícula parte de x=0 com velocidade v_0 para qualquer lado, qual é o limite de $|v_0|$ para que a partícula se mantenha em uma região em torno de x=0?(1,0)

(a) $F = -\frac{dV}{dx} = -2ax + 3bx^2$

(b) Pontos críticos: $F = 0 = \frac{dV}{dx}$

$$\Rightarrow 2ax - 3bx^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

ou $2a - 3bx = 0$

$x = \frac{2a}{3b}$

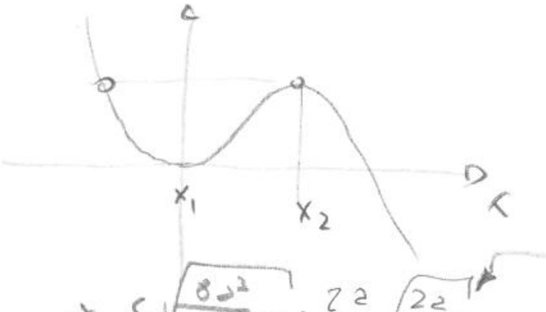
$$\frac{d^2V}{dx^2} = 2a - 6bx$$

$\Rightarrow x_1 = 0 \; ; \; \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_1} = 2a \; ;$ estável se $a > 0$, instável se $a < 0$

$x_2 = \frac{2a}{3b} \; ; \; \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_2} = -2a \; ;$ instável se $a < 0$, estável se $a > 0$

(c) Como a partícula a mantém-se em torno de $x=0$, $a > 0$

$x = 0$ é estável. $V(0) = 0 \Rightarrow E = K = \frac{1}{2} m v_0^2$



$V(x_s) = E$, para que $K = 0$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = a x_2^2 - b x_2^3$$

$$|v_0| \leq \sqrt{\frac{2}{m}\left(a x_2^2 - b x_2^3\right)} \Rightarrow \boxed{v_0 \leq x_2 \sqrt{\frac{2}{m}(a - b x_2)}}$$

$v_0 \leq \sqrt{\frac{8a^3}{27b^2 [illegible]}} = \frac{2a}{3b}\sqrt{\frac{2a}{[illegible]}}$