3ª Prova

MA-311 - Vespertino — Cálculo III

1º Semestre de 2011

Nome: GABARITO	RA:
Assinatura:	Prof.:

Esta prova tem um total de 5 questões valendo 11 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA!

1	1.5	
2	1.5	
3	2.5	
4	2.5	
5	2.0	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*1.5 pontos*)

   (a) (0.8) Encontre uma representação em série de potências em torno de $x_0 = 0$ para a função:
   $$f(x) = \int_0^x \text{sen } t^2 dt$$

   (b) (0.7) Encontre o intervalo de convergência da série
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k3^k}(x-2)^{2k}$$

2. (*1.5 pontos*) Considere a equação diferencial $(3-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$

   (a) Mostre que $x_0 = 0$ é um ponto ordinário desta equação.

   (b) Dado que a fórmula de recorrência da equação em (a) é:
   $$a_{n+2} = \frac{n+1}{3(n+2)}a_n, \quad n \geq 0$$
   determine a solução satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = -2$. Determine o termo geral desta solução.

   (c) Determine o raio mínimo de convergência da série de potências da solução em (b).

3. (*2.5 pontos*) Considere a equação diferencial $x^2y'' + (x^2 + \frac{1}{4})y = 0$

   (a) Mostre que $x = 0$ é ponto singular regular desta equação diferencial.

   (b) Determine a relação de recorrência, a equação indicial e suas raízes.

   (c) Determine a solução em série de Frobenius em torno do ponto $x = 0$, correspondente à maior raiz da equação indicial. Determine a expressão do termo geral desta solução.

   (d) Qual é o raio mínimo de convergência da série de potências da solução em (c)?

4. (*2.5 pontos*) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função par periódica de período 2π e tal que $f(x) = x$ para $0 \leq x < \pi$.

   (a) Encontre a série de Fourier de $f(x)$.

   (b) Usando (a) determine a soma da série numérica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

5. (*2.0 pontos*) Resolva o seguinte problema de valor de contorno usando o método de separação de variáveis justificando detalhadamente TODA a análise:
   $$\begin{cases} u_t = 5u_{xx} & 0 \leq x \leq 3, \quad t > 0; \\ u(0,t) = u(3,t) = 0; & \\ u(x,0) = -2\text{sen } 2\pi x + 4\text{sen } 3\pi x. & \end{cases}$$

1 (a) $\operatorname{sen} x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}$

$\underline{x = t^2}$

$$\operatorname{sen} t^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{4m+2}}{(2m+1)!}, \forall t \in \mathbb{R}$$

0,3

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2 \, dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \int_0^x t^{4m+2} \, dt$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{4m+3}}{(2m+1)! \, (4m+3)}, \forall x \in \mathbb{R},$$

0,5

1 (b) $a_m = \frac{(-1)^m}{m 3^m} (x-2)^{2m}, \quad a = 2$

$$\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} = \frac{|x-2|^{2m+2}}{(m+1) 3^{m+1}} \cdot \frac{m 3^m}{|x-2|^{2m}} = \frac{|x-2|^2}{3} \left(\frac{1}{1 + 1/m} \right)$$

0,2

$\left\{ \begin{array}{l} L = \lim_{m\to\infty} \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} = \frac{|x-2|^2}{3} < 1 \text{ a série converge (Critério da Razão)} \\ L > 1 \text{ a série diverge} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} L < 1 \iff |x-2|^2 < 3 \iff |x-2| < \sqrt{3} \\ r = \sqrt{3} \text{ é o raio de convergência} \end{array} \right.$

0,2

$\underline{x = a - r = 2 - \sqrt{3}}$: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}$ ← converge pelo Critério para séries alternadas

$\underline{x = a + r = 2 + \sqrt{3}}$: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}$

$I = [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$ é o intervalo de convergência

0,3

2 (a) $(3-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$, $P(x) = 3-x^2$, $Q(x) = -3x$
$R(x) = -1$

0,1 $P(0) = 3 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ é um ponto ordinário da equação

2 (b) $a_{m+2} = \dfrac{m+1}{3(m+2)} a_m$, $m \geq 0$.

$m=0 \Rightarrow a_2 = \dfrac{a_0}{2\cdot 3}$, $m=1 \Rightarrow a_3 = \dfrac{2}{3\cdot 3} a_1$

$m=2 \Rightarrow a_4 = \dfrac{3}{3\cdot 4} a_2 = \dfrac{1\cdot 3}{3^2\cdot 2\cdot 4} a_0$, $m=3 \Rightarrow a_5 = \dfrac{4}{3.5} a_3 = \dfrac{2.4}{3^2\cdot 3\cdot 5} a_1$

0,2 $a_6 = \dfrac{5}{3\cdot 6} a_4 = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{3^3 (2\cdot 4\cdot 6)} a_0$, $a_7 = \dfrac{6}{3\cdot 7} a_5 = \dfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3^3(3\cdot 5\cdot 7)} a_1$

$$a_{2m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)\, a_0}{3^m\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2m))} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{3^m\cdot 2^m\,(m!)} a_0, \quad m \geq 1$$

0,3 $$a_{2m+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2m)\, a_1}{3^m(3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1))} = \frac{2^m(m!)\, a_1}{3^m(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1))}, \quad m \geq 1$$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{3^m\cdot 2^m\,(m!)} x^{2m}$$

0,3 $$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m\,(m!)}{3^m(1.3.5\cdots(2m+1))} x^{2m+1}$$

$$\begin{cases} 1 = y(0) = a_0 \\ -2 = y'(0) = a_1 \end{cases}$$

0,2 $$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) = y_1(x) - \frac{1}{2} y_2(x)$$

2 (c) $p(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)} = -\dfrac{3x}{3-x^2} = -\dfrac{3x}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}$

$\rho_1 =$ raio de convergência da série de $p(x) = \min\{|\sqrt{3}-0|, |-\sqrt{3}-0|\} = \sqrt{3}$

$q(x) = \dfrac{R(x)}{P(x)} = -\dfrac{1}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}$

$\rho_2 =$ raio de convergência da série de $q(x) = \min\{\sqrt{3}, \sqrt{3}\} = \sqrt{3}$

0,4 $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} = \sqrt{3}$ é o raio mínimo de convergência

3) $x^2 y'' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) y = 0$, $\quad P(x) = x^2$, $Q(x) = 0$, $R(x) = x^2 + \frac{1}{4}$

a)
0,3
$$\begin{cases} P(0) = 0^2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{Q(x)}{P(x)} x = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 = p_0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{R(x)}{P(x)} x^2 = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} = q_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ é um ponto} \\ \text{singular regular} \end{cases}$$

b)
0,3
$$0 = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r^2 - r + \frac{1}{4} \quad (\text{equação indicial}) \Longrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}, \quad y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1}, \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2}$$

$$0 = x^2 y'' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) y = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r}$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4} a_m x^{m+r}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r} + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$$
$$= \underset{0}{\underset{\#}{a_0}} x^r \left[r(r-1) + \frac{1}{4}\right] + a_1 x^{r+1} \left[(r+1) r + \frac{1}{4}\right] + \sum_{m=2}^{\infty} \left[(m+r)(m+r-1) a_m + \frac{1}{4} a_m + a_{m-2}\right] x^{m+r}$$
0,3

0,4 $$a_m = -\frac{a_{m-2}}{(m+r)(m+r-1) + \frac{1}{4}}, \quad m \geq 2 \quad (\text{relação de recorrência})$$

c)
0,2 $$r = \frac{1}{2} \Longrightarrow a_m = -\frac{a_{m-2}}{m^2}, \quad m \geq 2, \quad a_1 = 0$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{3^2} = 0, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2},$$

0,1 $$a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}, \quad a_m = 0 \text{ para } m \text{ ímpar}$$

0,3 $$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2m)^2} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m \geq 1.$$

0,2 $$a_0 = 1 \Longrightarrow y = x^{1/2} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}\right), \quad x > 0.$$

3(d); $p(x) = \frac{0}{x^2} = 0$, $x\,p(x) = 0$

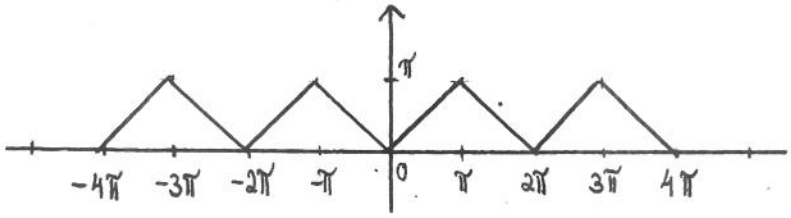
A série de potências de $x\,p(x)$ em torno de $x_0 = 0$ tem raio de convergência $\rho_1 = +\infty$

$q(x) = \dfrac{x^2 + \frac{1}{4}}{x^2}$, $x^2 q(x) = x^2 + \frac{1}{4}$

A série de potências de $x^2 q(x)$ em torno de $x_0 = 0$ tem raio de convergência $\rho_2 = +\infty$.

$\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} = +\infty$ é o raio mínimo de convergência

4(a)



$f(x)$ é contínua.

$f(x)$ é par $\Longrightarrow b_m = 0 \ \forall\, m \geqslant 1$ $\qquad L = \pi$, $T = 2L = 2\pi$ período

0,3

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \pi$$

0,2

$$m \geqslant 1, \quad a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos mx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\,\mathrm{sen}\,mx}{m} + \frac{\cos mx}{m^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi m^2}\left(\cos m\pi - 1\right)$$

0,5

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m^2}\left(\cos m\pi - 1\right)\cos(mx)$$

é a série de Fourier de f que converge para $f(x)$ para $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

0,5

4(b) $\quad a_m = \dfrac{2}{\pi m^2}\left(\cos m\pi - 1\right) = \dfrac{2}{\pi m^2}\left((-1)^m - 1\right)$

$$a_{2k} = 0 \ \forall\, k \geqslant 1, \qquad a_{2k-1} = -\frac{4}{\pi(2k-1)^2}, \ k \geqslant 1$$

Então

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

e assim

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

1,0

5) $\alpha^2 = 5$, $L = 3$, $f(x) = -2\,\text{sen}\,2\pi x + 4\,\text{sen}\,3\pi x$

(1) $u(x,t) = X(x)T(t)$, $u_{xx} = X''T$, $u_t = XT'$

(2) $\dfrac{X''}{X} = \dfrac{T'}{\alpha^2 T} = -\sigma$ (constante) $\Rightarrow \begin{cases} (3)\ X'' + \sigma X = 0 \\ (4)\ T' + \alpha^2 \sigma T = 0 \end{cases}$

0,2

$\begin{cases} 0 = u(0,t) = X(0)T(t) \\ 0 = u(L,t) = X(L)T(t) \end{cases}$ $\quad T(t) = 0\ \forall t \geq 0 \Rightarrow u(x,t) = 0, \forall x,t$

$\Rightarrow f(x) = u(x,0) = 0, \forall x$ (contradição)

$\circledast$

0,2 $\Rightarrow$ (5) $X(0) = X(L) = 0$

$\underline{\underline{\sigma = 0}}$: $X = k_1 x + k_2$

$0 = X(0) = X(L) \Rightarrow k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0, \forall x,t$

$\overset{\circledast}{\Rightarrow}$ contradição

$\underline{\underline{\sigma < 0}}$: $\sigma = -\lambda^2$, $\lambda > 0 \Rightarrow X = k_1 e^{\lambda x} + k_2 e^{-\lambda x}$

$0 = X(0) = X(L) \Rightarrow k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0, \forall x,t$

0,2

$\overset{\circledast}{\Rightarrow}$ contradição

$\underline{\underline{\sigma > 0}}$: $\sigma = \lambda^2$, $\lambda > 0 \Rightarrow X = k_1 \cos \lambda x + k_2\,\text{sen}\,\lambda x$

$0 = X(0) = k_1 \Rightarrow X = k_2\,\text{sen}\,\lambda x$

$0 = X(L) = \underset{\neq 0}{k_1}\,\text{sen}\,\lambda L \Rightarrow \text{sen}\,\lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L = m\pi,\ m \geq 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{m\pi}{L},\ m \geq 1}$

$X_m(x) = \text{sen}\,\frac{m\pi x}{L}$, $m \geq 1$ é solução de (3) satisfazendo (5)

(4) $T' + \dfrac{\alpha^2 m^2 \pi^2}{L^2} T = 0 \Rightarrow T_m(t) = e^{-\alpha^2 m^2 \pi^2 t / L^2}$, $m \geq 1$

0,4

(b) $u_m(x,t) = X_m(x)T_m(t) = e^{-\alpha^2 m^2 \pi^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}, \quad m \geq 1,$

são soluções da equação do calor satisfazendo as condições de contorno.

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-\alpha^2 m^2 \pi^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \qquad \begin{cases} \alpha^2 = 5 \\ L = 3 \end{cases}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-\frac{5\pi^2}{9} m^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{3}\right)$$

0,4

$$u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{3}\right) = c_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} + c_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{3} + \cdots$$

$$= f(x) = -2 \operatorname{sen} 2\pi x + 4 \operatorname{sen} 3\pi x$$

$$= \underbrace{-2}_{c_6} \operatorname{sen} \frac{6\pi x}{3} + \underbrace{4}_{c_9} \operatorname{sen} \frac{9\pi x}{3}$$

$$u(x,t) = -2 \underbrace{e^{-\frac{5\pi^2}{9} 6^2 t}}_{e^{-20\pi^2 t}} \operatorname{sen} 2\pi x + 4 \underbrace{e^{-\frac{5\pi^2}{9} 9^2 t}}_{e^{-45\pi^2 t}} \operatorname{sen} 3\pi x$$

0,6