Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
EE400 - Métodos da Engenharia Elétrica
1ª prova - 03/04/2013 - prof. Rafael

1) Obtenha em coordenadas cartesianas as equações paramétricas (em função de u e v) do hiperbolóide de uma folha obtido pela rotação da reta $z = -\frac{y}{2}$, $x = 2$ em torno do eixo z.

2) Considere os vetores $\vec{a}_r$, $\vec{a}_\theta$ e $\vec{a}_\phi$, que constituem uma base ortonormal no sistema de coordenadas esféricas. Mostre que $\frac{\partial \vec{a}_r}{\partial \theta} = \vec{a}_\theta$ e que $\frac{\partial \vec{a}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{a}_r$

3) Considere o vetor $\vec{F} = r \cos z \; \vec{a}_r + \sin z \; \vec{a}_z$, expresso em coordenadas cilíndricas. Calcule o fluxo deste vetor através da superfície fechada limitada pelos cilindros $r = 1$ e $r = 2$ e pelos planos $z = -\frac{\pi}{2}$ e $z = \frac{\pi}{2}$.

4) Considere uma região do espaço $\mathcal{R}^3$ onde a densidade de corrente (expressa em $[A/m^2]$) é dada por:

$$\vec{J} = \begin{cases} J_0(1-r)\vec{a}_z & \text{se } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases}$$

Seja $I(R) = \oint_{\gamma(R)} \vec{H} \cdot d\vec{l}$, onde $\vec{H}$ é a intensidade de campo magnético e $\gamma(R)$ é o círculo de raio R, centrado na origem e contido no plano $z = 0$. Sabendo que em cada ponto $rot\vec{H} = \vec{J}$, calcule $I(R)$ em função de R, para todo $R \geq 0$.

5) Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$ sendo $\vec{F} = r^2 \cos\phi \; \vec{a}_r + 5r \; \vec{a}_\theta + r^2 \sin\theta \sin\phi \; \vec{a}_\phi$ (em coordenadas esféricas) e C o circuito fechado definido pelos três trechos a seguir:
trecho I: $r = t$ $(0 \leq t \leq 1)$, $\theta = 0$, $\phi = 0$;
trecho II: $r = 1$, $\theta = t$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$, $\phi = 0$;
trecho III: $r = 1 - t$ $(0 \leq t \leq 1)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$.

Fórmulas:

Em coordenadas cilíndricas:

$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dr}{dt}\ \vec{a_r} + r\ \frac{d\phi}{dt}\ \vec{a_\phi} + \frac{dz}{dt}\ \vec{a_z}$

$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{a_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{a_\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{a_z}$

$\text{div}(\vec{v}) = (\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

$\text{rot}(\vec{v}) = (\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z})\vec{a_r} + (\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r})\vec{a_\phi} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi})\vec{a_z}$

Em coordenadas esféricas:

$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{a_r} + r\ \frac{d\theta}{dt}\vec{a_\theta} + r\ sen\theta\ \frac{d\phi}{dt}\ \vec{a_\phi}$

$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{a_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{a_\theta} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{a_\phi}$

$\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial (sen\theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{rsen\theta}(\frac{\partial (v_\phi sen\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi})\vec{a_r} + \frac{1}{r}(\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r})\vec{a_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta})\vec{a_\phi}$

Teorema de Gauss: $\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\ \ \text{dA} = \int_T\ (\text{div}\vec{F}\ )\ \text{dV}$

Teorema de Stokes: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S\ (\text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}\ )\ \text{dA}$