2ª Chamada de MA-211/A/B (06/12/2010)

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

RA: _______ Nome: GABARITO

Turma: ____

1. A temperatura $T(x,y)$ em graus Celsius em um ponto (x,y) de uma placa aquecida é dada por $T(x,y)=\dfrac{300}{x^2+y^2+3}$, onde x e y são medidos em centímetros.

(a) (0,5 ponto) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura no ponto $P=(1\ ,\ 1)$?

(b) (0,5 ponto) Encontre a taxa máxima de crescimento da temperatura em P.

(c) (1,0 ponto) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto P em direção ao ponto $Q=.(0\ ,\ 2)$.

2. (2,0 pontos) Determine os pontos do elipsóide $x^2+2y^2+3z^2=1$ cuja soma das coordenadas seja máxima.

3. (2,0 pontos) Determine a área da parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4z$ que está dentro do parabolóide $z=x^2+y^2$.

4. (2,0 pontos) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\vec{F}(x,y)=(\text{sen}(x)-y,\ e^y-x^2)$ para movimentar um objeto no sentido anti-horário, uma vez em torno da circunferência $x^2+y^2=a^2$, $(a>0)$. (**Sugestão:** usar o Teorema de Green)

5. (2,0 pontos) Calcule a integral de superfície $\iint\limits_{\sigma}\vec{F}\cdot\mathbf{\vec{n}}\ dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=(3y^2z^3,\ 9x^2yz^2,\ -4xy^2)$ e σ é a superfície do cubo com vértices $(\pm1,\ \pm1,\ \pm1)$ orientada positivamente (para fora). (**Sugestão:** usar o Teorema da Divergência)

Gabarito - Q1

(a) A direç de maior crescimento é dada pelo vetor

unitário $u = \dfrac{\nabla T(P)}{\|\nabla T(P)\|}$.

0,2

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} = -\frac{300.2x}{(x^2+y^2+3)^2} = -\frac{600x}{(x^2+y^2+3)^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(1,1) = -\frac{600}{5^2} = -24$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = -\frac{600y}{(x^2+y^2+3)^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y}(1,1) = -\frac{600}{5^2} = -24$$

0,2

Assim, $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1) \Rightarrow \underline{u = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1,1)}$.

0,1

b) A taxa máxima de crescimento da temperatura em P

é $\|\nabla T(P)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}(P)\right)^2} = \frac{600}{25}\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$

[redacted]

c) Queremos a taxa de variação de T na direção de $Q-P=(-1,1)$.

Como $\vec{u}\cdot(Q-P)=0$, essa taxa de variação é nula.

1,0

$(0,4)$

Obs: • Taxa de variação $= \nabla T(P)\cdot\vec{u}$, onde

$(0,4)$

$\vec{u}=\dfrac{Q-P}{\|Q-P\|}$ → vale 0,8. Conta certa vale 0,2.

• Se errar o ponto em que é aplicado ∇T, perde 0,2.

• Se trocar $\vec{u}$ por $\dfrac{Q}{\|Q\|}$, perde 0,5.

Q2 Problema de multiplicadores de Lagrange: $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$,

$$g(x,y,z) = x+y+z.$$

Queremos o máximo de g restrita à superfície $f(x,y,z)=1$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange devemos ter para algum $\lambda \neq 0$

$$\nabla g(x,y,z) = \lambda \nabla f(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 1 = \lambda.2x \\ 1 = \lambda.4y \\ 1 = \lambda.6z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x = 4y = 6z \\ \Rightarrow \boxed{x = 2y = 3z} \end{array}$$

1,0

Como $x^2+2y^2+3z^2 = 1$, $x^2+2\left(\frac{x}{2}\right)^2+3\left(\frac{x}{3}\right)^2 = 1$

$$\Rightarrow x^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{11}$$. Como $x>0$

$11/_6$

0,3

(caso contrário a soma é mínima), 0,3

$x = \sqrt{\frac{6}{11}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{11}},\ z = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{11}}$.

$\Rightarrow P = \left(\sqrt{\frac{6}{11}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{11}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{11}}\right)$ é tal que

$g(P)$ é máximo sobre $\{f(x,y,z) = 1\}$

0,4

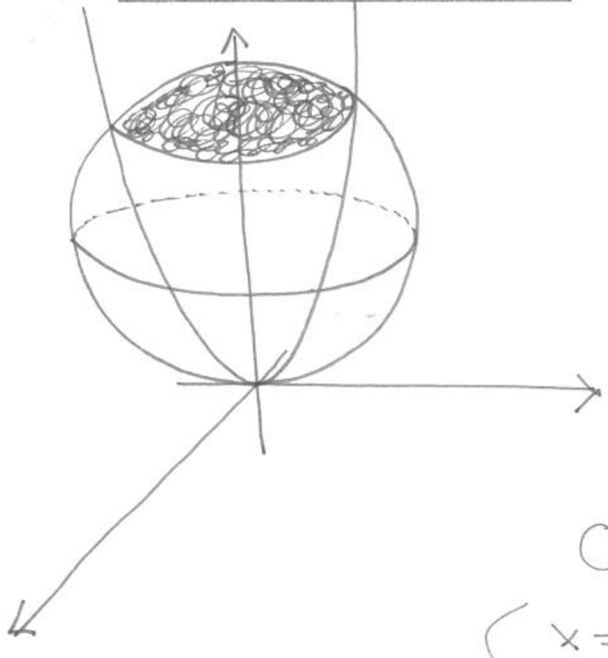
Verificando que P pertence à superfície.

$x^2 = \frac{6}{11},\ y^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{11},\ z^2 = \frac{1}{9}\cdot\frac{6}{11}$

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = \frac{6}{11}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 1$ ✓

Gabarito - Questão 3

III EBED
Escola Brasileira de
Equações Diferenciais
4 a 8 de maio de 2009



Interseção da esfera com o parabolóide:

$$\left.\begin{matrix} z = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 4z \end{matrix}\right\} \quad \boxed{x^2+y^2 = 3}$$

$+0,$

Coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

onde: $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$0 \leq \phi \leq \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{\pi}{6}$$

Além disso, para pontos sobre a esfera temos

$$(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta)^2 + (\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta)^2 + (\rho\cos\phi)^2 = 4\rho\cos\phi$$

$$\boxed{\rho = 4\cos\phi}$$

A parametrização então fica

$$\vec{r}(\theta,\phi) = (2\operatorname{sen}2\phi\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}2\phi\operatorname{sen}\theta,\ 4\cos^2\phi) \quad +$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 \,\text{sen}\, 2\phi \,\text{sen}\, \theta & 2 \,\text{sen}\, 2\phi \cos\theta & 0 \\ 4\cos 2\phi \cos\theta & 4\cos 2\phi \,\text{sen}\, \theta & -4 \,\text{sen}\, 2\phi \end{vmatrix}$$

$$= \left(-8 \,\text{sen}^2 2\phi \cos\theta \,, -8 \,\text{sen}^2 2\phi \,\text{sen}\,\theta \,, -8 \,\text{sen}\, 2\phi \cos 2\phi \right)$$

Logo

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right\| = 8 \,\text{sen}\, 2\phi$$

+ 0,5

Assim

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/6} 8 \,\text{sen}\, 2\phi \; d\phi \right) d\theta$$

$$= 16\pi \left[-\frac{\cos 2\phi}{2} \Big|_0^{\pi/6} \right]$$

$$= 16\pi \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 4\pi$$

+ 0,5

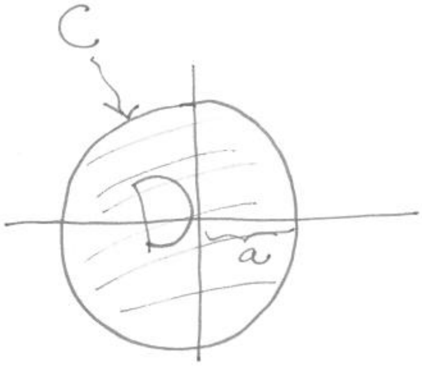
III EBED
Escola Brasileira de
Equações Diferenciais
4 a 8 de maio de 2009

Gabarito Questão 4

Por definição, o trabalho é

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C (\operatorname{sen} x - y)\,dx + (e^{y} - x^2)\,dy$$

$+\ 0{,}5$



Green

$$= \iint_D (-2x+1)\,dx\,dy$$

$+\ 0{,}5$

$$= -2\int_{-a}^{a}\left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\right)dx + \underbrace{\iint_D dx\,dy}_{=\text{Área}(D)}$$

$$= \underbrace{-4\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx}_{=0 \text{ (função ímpar)}} + \text{Área}(D)$$

$$= \pi a^2$$

$+\ 1{,}0$

Gabarito Questão 5

Pelo Teorema da Divergência

$$\iint_{\sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz \quad \text{——— } +0{,}5$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 9x^2z^2\,dx\,dy\,dz \quad \text{——— } +0{,}5$$

$$= 9\cdot 2\cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1}\cdot \left.\frac{z^3}{3}\right|_{-1}^{1}$$

$$= 9\cdot 2\cdot \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$= 8 \quad \text{——— } +1{,}0$$