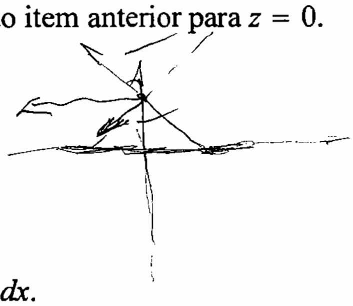
EE521- Turma B - 2º Semestre/2005 - Prova Nº 1 - 19/09/2005

Questão 1. O segmento de reta no eixo X com $-a < x < a$ está eletricamente carregado com densidade linear de carga dada por $\lambda(x) = \dfrac{\lambda_0 x^3}{a^3}$, onde λ_0 é uma constante. Determine: a) o campo elétrico, $\mathbf{E}$, nos pontos do eixo Z com $z > 0$; b) o campo $\mathbf{E}$ do item anterior para $z = 0$.



Solução

a)

$$\mathbf{E}(z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\dfrac{\lambda_0 x^3}{a^3}(z\hat{\mathbf{z}} - x\hat{\mathbf{x}})}{(z^2+x^2)^{3/2}}dx.$$

$$E_z = \frac{\lambda_0 z}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\int_{-a}^{a}\frac{x^3}{(z^2+x^2)^{3/2}}dx = 0$$

porque $\dfrac{x^3}{(z^2+x^2)^{3/2}}$ como função de x é ímpar.

$$E_x = \frac{-\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\int_{-a}^{a}\frac{x^4}{(z^2+x^2)^{3/2}}dx.$$

$$\int\frac{x^4 dx}{(z^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x^3+3z^2x}{2\sqrt{x^2+z^2}} - \frac{3}{2}z^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+z^2}\right),$$

e, portanto,

$$\int_{-a}^{a}\frac{x^4}{(z^2+x^2)^{3/2}}dx = \frac{a^3+3z^2a}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{3}{2}z^2\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+z^2}}{-a+\sqrt{a^2+z^2}}\right).$$

$$\mathbf{E}(z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{-\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{a+\dfrac{3z^2}{a}}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{3z^2}{2a^2}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+z^2}}{-a+\sqrt{a^2+z^2}}\right)\right]\hat{\mathbf{x}}.$$

b)

Com z igual a zero a expressão

$$-\frac{3z^2}{2a^2}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+z^2}}{-a+\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

é indefinida, note que o denominador da fração entre parênteses vai a zero. No entanto,

$$-\frac{3z^2}{2a^2}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+z^2}}{-a+\sqrt{a^2+z^2}}\right) = -\frac{3z^2}{2a^2}\ln\frac{\left(a+\sqrt{a^2+z^2}\right)^2}{z^2}$$
$$= \frac{3}{a^2}z^2\ln z - \frac{3z^2}{a^2}\ln\left(a+\sqrt{a^2+z^2}\right).$$

Como $z^2 \ln z \to 0$ quando $z \to 0$, verifica-se que a expressão acima também tende a zero. No limite

$$\mathbf{E}(0\hat{\mathbf{z}}) = \frac{-\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 a}\hat{\mathbf{x}}$$

Este resultado também pode ser verificado, mais fácilmente, avaliando a integral, para E_x com $z = 0$:

$$E_x = \frac{-\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\int_{-a}^{a}\frac{x^4}{(x^2)^{3/2}}dx$$
$$\frac{-\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\int_{-a}^{a}\frac{x^4}{(x^2)^{3/2}}dx = \frac{-\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\int_{-a}^{a}\sqrt{x^2}\,dx$$
$$= \frac{-\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}2\int_0^a x dx = \frac{-\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}2\frac{a^2}{2} = \frac{-\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Questão 2. O campo elétrico descrito por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & 0 \le r = |\mathbf{r}| < a \\ E_0 \exp\left(-\frac{r}{a}\right)\hat{\mathbf{r}} & r > a \end{cases}$$

é produzido por uma distribuição de carga volumétrica, com densidade de carga ρ, na região $r > a$, e uma distribuição de carga superficial uniforme , densidade superficial σ_0, na superfície $r = a$. Determine: a) a função ρ; b) a constante σ_0; c) a carga total do sistema.
Sugestão: use a lei de Gauss.

Solução

a)

$$
\begin{aligned}
\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_0 \exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right) \\
&= \varepsilon_0 E_0 \frac{1}{r^2}\left(2r \exp\left(-\frac{r}{a}\right) + r^2\left(\frac{-1}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right) \\
&= \varepsilon_0 E_0 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)
\end{aligned}
$$

b)

A carga contida em uma esfera de raio $R > a$ centrada na origem é

$$
Q(R) = \varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \varepsilon_0 E_r (4\pi R^2) = \varepsilon_0 E_0 \exp\left(-\frac{R}{a}\right)(4\pi R^2)
$$

onde S representa a superfície esférica de raio R . Quando $R \to a$, a carga acima tende para a carga total na superfície da esfera de raio a, Q_a:

$$
Q_a = \varepsilon_0 E_0 \exp(-1)(4\pi a^2) = \frac{4\pi a^2 \varepsilon_0 E_0}{e}
$$

e

$$
\sigma_0 = \frac{Q_a}{4\pi a^2} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{e}
$$

onde $e = \exp(1) \cong 2.718$.

c)

A carga total é o limite

$$
\begin{aligned}
Q_T = \lim_{R\to\infty} Q(R) &= \lim_{R\to\infty}\left(\varepsilon_0 E_0 \exp\left(-\frac{R}{a}\right)(4\pi R^2)\right) \\
&= \varepsilon_0 E_0 4\pi a^2 \lim_{R\to\infty}\left(\left(\frac{R}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{R}{a}\right)\right) = 0
\end{aligned}
$$

porque

$$
\lim_{u\to\infty}(u^2 \exp(-u)) = 0.
$$

Outra maneira de obter esse resultado é

$$Q_T = Q_a + \int_a^\infty \rho 4\pi r^2 dr$$
$$= \frac{4\pi a^2 \varepsilon_0 E_0}{e} + \int_a^\infty \varepsilon_0 E_0 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) 4\pi r^2 dr.$$

$$Q_T = \frac{4\pi a^2 \varepsilon_0 E_0}{e} + 4\pi\varepsilon_0 E_0 \left(2\int_a^\infty r\exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr - \frac{1}{a}\int_a^\infty r^2 \exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr\right).$$

$$\int r\exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr = (-ar - a^2)\exp\left(\frac{-r}{a}\right) \Rightarrow 2\int_a^\infty r\exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr = 4a^2 e^{-1}.$$

$$\int r^2 \exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr = (-ar^2 - 2a^2 r - 2a^3)\exp\left(-\frac{r}{a}\right) \Rightarrow \frac{1}{a}\int_a^\infty r^2 \exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr = 5a^2 e^{-1}.$$

$$Q_T = 4\pi a^2 \varepsilon_0 E_0 e^{-1} + 4\pi\varepsilon_0 E_0 (4a^2 e^{-1} - 5a^2 e^{-1}) = 0$$

Questão 3.

Entre os condutores de um cabo coaxial infinito, existe um campo eletrostático dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{E_0 a}{s}\hat{\mathbf{s}},$$

onde E_0 é uma constante e a é o raio externo do condutor interno. A descrição acima pressupõe o eixo z coincidente com o eixo do cabo. Sendo b o raio interno do condutor externo, calcule a diferença de potencial $V_2 - V_1$, onde V_1 é o potencial do ponto $(b, 0, 0)$ e V_2 é o potencial do ponto $(0, a, h)$.

Solução

Com

$$\mathbf{r}_1 = b\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{r}_2 = a\hat{\mathbf{y}} + h\hat{\mathbf{z}}$$

$$V_2 - V_1 = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} E_s ds$$
$$= -\int_b^a \frac{E_0 a}{s} ds = \int_a^b \frac{E_0 a}{s} ds = E_0 a \ln\frac{b}{a}.$$

valor das questões:

1a	1b	2a	2b	2c	3
2	1	1	2	2	2

Formulário

Convenções

$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, $\quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$,

$\mathbf{s} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$, $\quad s = |s| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad \hat{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s}}{s}$.

Coordenadas cilíndricas, (s,ϕ,z): $x = s\cos\phi \quad y = s\sin\phi \quad z = z$.

Coordenadas esféricas, (r,θ,ϕ): $x = r\sin\theta\cos\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\theta$.

Integrais para cálculo de campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{P}} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dl' \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} da' \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\tau'$$

Elementos de volume e área em coordenadas cilíndricas e esféricas

volume, cilíndricas: $d\tau = s ds d\phi dz$;
volume, esféricas: $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$;
área, cilíndricas, superfície paralela ao plano xy: $da = s ds d\phi$;
área, esféricas, superfície esférica centrada na origem, raio r: $da = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$.

Lei de Gauss

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ representa o vetor unitário normal e orientado para fora, em cada ponto da superfície fechada, $\mathcal{S}$, Q_{int} representa a totalidade da carga elétrica no interior de $\mathcal{S}$ e

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \text{(coord. ret.);}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \quad \text{(coord. esf.).}$$

Potencial Elétrico

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \ \text{(ref.: } \infty\text{)}, \quad V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}} dx + \hat{\mathbf{y}} dy + \hat{\mathbf{z}} dz$ (coord. cart.) $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{s}} ds + \hat{\boldsymbol{\phi}} s d\phi + \hat{\mathbf{z}} dz$ (coord. cil.),
$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{r}} dr + \hat{\boldsymbol{\theta}} r d\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}} r \sin\theta d\phi$ (coord. esf.).

Integrais

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \qquad \int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax}$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) e^{ax} \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \qquad \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x^2+2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \int \frac{x^4 dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x^3+3a^2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{3}{2} a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$$

Limites

$\lim_{x\to 0}(x \ln x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty}(x^n e^{-ax}) = 0$ $\quad$ ($a > 0$, n inteiro)