Nome: ______________________________ **RA**:_______

NOTAS

1	
2	
3	
4	

1ª Prova MA 211 Turmas W,X
01 de abril de 2011

É proibido usar calculadora e desgrampear as folhas da prova. Respostas sem justificativas ou que não incluam os cálculos necessários não serão consideradas.

BOA PROVA!

1. Suponha que $T(x,y) = 20 + y - x^2$ representa a distribuição da temperatura em °C numa região plana retangular tal que $-5 \leq x \leq 5$ e $-20 \leq y \leq 20$. Um indivíduo encontra-se na posição P=(3,2) e pretende dar um passeio.

a) Descreva qual caminho ele deverá percorrer a partir de P se desejar manter a temperatura sempre constante. E qual será o valor da temperatura?

b) Qual a direção e sentido que deverá tomar a partir de P se desejar caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?

c) Determine a taxa de variação de T na direção de P para Q = (5,20)

2. Sejam $h: R \rightarrow R$ uma função de uma variável real tal que $h'(1) = 4$ e $g(x,y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$.

a) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)$ **b)** Verifique que $x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$

3. **a)** Decida se a função $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$ pode ser definida de modo a ser função contínua em todo o plano R^2. Caso não, qual o maior conjunto de continuidade de f? Justifique sua resposta.

b) Ache a equação da reta normal a $z = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$ em P=(1,0).

4. Estude os máximos, mínimos e pontos de sela de $f(x,y) = (x^2+y)\,e^{y/2}$

Questão 1 - T. W e X

1) a) $T(x,y) = 20 + y - x^2$

$P = (3,2) \Rightarrow T(3,2) = 20 + 2 - 9 = 13°C$

para $T = 13°$, constante, temos $20 + y - x^2 = 13$

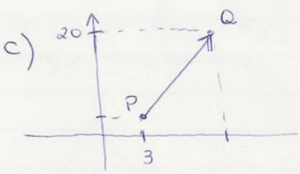
ou $y = x^2 - 7$

$\therefore$ sobre a parábola $y = x^2 - 7$, $T = 13$.

b) na direção do $\vec{\nabla} T(P)$.

$\vec{\nabla} T(x,y) = \langle -2x, 1 \rangle \Rightarrow \vec{\nabla} T(3,2) = \langle -6, 1 \rangle$

c)



a taxa de variação é dada por $D_{\vec{u}}(T)(P)$, para $\vec{u} = \dfrac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|}$

$\vec{PQ} = \langle 5-3, 20-2 \rangle = \langle 2, 18 \rangle$

$\vec{u} = \dfrac{\langle 2, 18 \rangle}{\sqrt{4+324}} = \dfrac{\langle 2, 18 \rangle}{2\sqrt{82}} = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{82}}, \dfrac{9}{\sqrt{82}} \right\rangle$

$$D_{\vec{u}}(T)\Big|_P = \vec{\nabla} T(P) \cdot \vec{u} = \langle -6, 1 \rangle \cdot \langle 1, 9 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{82}}$$

$$\therefore D_{\vec{u}}(T)\Big|_P = \frac{3}{\sqrt{82}} \text{ °C/unidade de medida}$$

② $h'(1) = 4$ $\quad g(x,y) = h(x/y) = h(u)$, onde $u = x/y$.

a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \left(\dfrac{\partial h}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} \right)^{(x,y)} = h'(u) \cdot 1/y = h'(x/y) \cdot \dfrac{1}{y}$ $\underline{\underline{0,5}}$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1) = h'(1) \cdot 1 = 4 \cdot 1 = 4$ $\underline{\underline{0,5}}$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \left(\dfrac{\partial h}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} \right)^{(x,y)} = -h'(u) \cdot \dfrac{x}{y^2} = -h'(x/y) \cdot \dfrac{x}{y^2}$. logo: $\underline{\underline{0,5}}$

$x \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y \cdot \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = h'(x/y) \cdot \dfrac{x}{y} - h'(x/y) \dfrac{x}{y} = 0.$ $\underline{\underline{1,0}}$

3) a) $f(x,y)$ é uma função contínua em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pois é uma função racional de funções contínuas (polinômios). 0,2 Para que $f(x,y)$ seja uma função contínua em todo o $\mathbb{R}^2$, falta garantir que $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$, para isso é preciso que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} = f(0,0)$$, ou seja, é preciso que o limite exista e seja $f(0,0)$. 0,2

Tomando C_1 o caminho dado pelo eixo x $(y=0)$, temos o seguinte limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$

Tomando C_2 o caminho dado por $x = y^2$ temos o seguinte limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{2y^2y^2}{(y^2)^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{2y^4}{2y^4} = 1.$$

Como encontramos dois caminhos distintos tais que o limite assume valores diferentes, o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^4+y^2}$ não existe. Logo a função $f(x,y)$ não pode ser definida em $(0,0)$ de modo que seja contínua em todo $\mathbb{R}^2$.

0,5

O maior conjunto no qual f é contínua é $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 0,1

b) $\boxed{F(x,y,z) = z - \frac{2xy^2}{x^2+y^4} = 0}$ 0,3 é uma superfície de nível. Logo a equação da reta normal à $F(x,y,z)$ em $(2,1)$ é dada por:

0,3

$$\boxed{\frac{x-2}{F_x(2,1,4/5)} = \frac{y-1}{F_y(2,1,4/5)} = \frac{z-4/5}{F_z(2,1,4/5)}}$$, pois $z = \frac{4}{5}$, quando $x = 2$ e $y = 1$.

0,3

$$F_x(x,y,z) = -\frac{2y^2(x^2+y^4) - (-2xy^2 \cdot 2x)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{4x^2y^2 - 2x^2y^2 - 2y^6}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2x^2y^2 - 2y^6}{(x^2+y^4)^2}$$

0,3

$$F_y(x,y,z) = -\left[\frac{4xy(x^2+y^4) - 4y^3(2xy^2)}{(x^2+y^4)^2}\right] = +\frac{4xy^5 - 4x^3y}{(x^2+y^4)^2}$$

$F_z(x,y,z) = 1$.

$F_x(2,1,4/5) = 6/25$, $F_y(2,1,4/5) = -\frac{24}{25}$. logo

0,3

$$\boxed{\frac{25(x-2)}{6 \cdot 5} = \frac{-25(y-1)}{24 \cdot 5} = \frac{(z-4/5)}{1 \cdot 5}}$$

Reta paramétrica normal em $P(1,1)$

$f_x = 0$ 0,3, $f_y = 0$ 0,3.

0,3

$z - 1 = f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) = 0 \Rightarrow z = 1$ equação do plano tangente. Vetor ortogonal $(0,0,1)$ 0,3 ao plano $\Rightarrow$ Equação da reta:

$r(t): (1,1,1) + t(0,0,1) = (1,1,1+t)$ 0,3

Reta paramétrica normal em $P(2,1)$

$f_x = 6/25$ 0,3, $f_y = \frac{24}{25}$ 0,3

0,3

$z - 4/5 = \frac{6}{25}(x-2) + \frac{24}{25}(y-1) \Rightarrow -\frac{6}{25}x - \frac{24}{25}y + z = \frac{4}{5} - \frac{12}{25} - \frac{24}{25}$

$\Rightarrow$ vetor ortogonal ao plano $\left(-\frac{6}{25}, -\frac{24}{25}, 1\right)$ 0,3 $\Rightarrow$

$r(t) = (2, 1, 4/5) + t\left(-6/25, -\frac{24}{25}, 1\right)$ 0,3

$= \left(2 - \frac{6}{25}t, 1 - \frac{24}{25}t, \frac{4}{5} + t\right)$.

Questão 4 – T. W e X

4a) $f(x,y) = (x^2+y)\,e^{y/2}$ admite extremos?

$f_x = 2x\,e^{y/2}$ $\qquad f_y = 1.e^{y/2} + (x^2+y).\frac{1}{2}e^{y/2}$

0,5 pontos críticos $\quad f_x = 2x\,e^{y/2} = 0 \Rightarrow x=0$

$f_y = e^{y/2}\left(1 + \frac{x^2+y}{2}\right) = 0 \Rightarrow y = -x^2-2 = 0$

como $x=0$, $y=-2$ (único pto crítico)

$f_{xx} = 2\,e^{y/2}$ $\qquad f_{yy} = \frac{1}{2}e^{y/2} + \left(1+\frac{x^2+y}{2}\right).\frac{1}{2}e^{y/2}$

0,5 $\quad f_{xx}(0,-2) = 2e^{-1}$ $\qquad f_{yy}(0,-2) = \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1}$

$f_{xy} = x\,e^{y/2} \Rightarrow f_{xy}(0,-2) = 0$

Teste da derivada segunda

0,5 $\quad D(0,-2) = \begin{vmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{vmatrix} = 2e^{-2} > 0$ e $f_{xx}(0,-2) = 2e^{-1} > 0$

$\therefore P = (0,-2)$ é pto de mín local

4b) $f(x,y) = x\,\text{sen}(y)$ $\quad \begin{cases} f_x = \text{sen}(y) = 0 \iff y = k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ f_y = x\cos(y) = 0 \iff x=0 \text{ ou } y = \frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$

como x e y devem satisfazer o sistema, os

0,5 pontos críticos são $(0, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$f_{xx} = 0$ $\qquad f_{yy} = -x\,\text{sen}(y)$ $\qquad f_{xy} = \cos(y)$

$\therefore D(0,k\pi) = \begin{vmatrix} 0 & \cos(k\pi) \\ \cos(k\pi) & 0 \end{vmatrix} = -\cos^2(k\pi) = -1 < 0,$

0,5 $\qquad \forall\ (0, k\pi)$

$\therefore$ todos os pontos críticos são pontos de sela.

Há infinitos pontos críticos pois $k \in \mathbb{Z}$, e $\mathbb{Z}$ é infinito