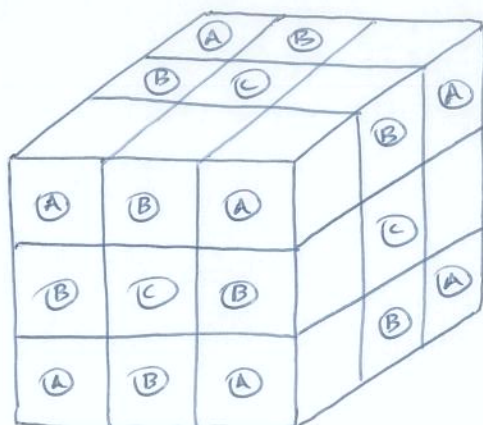


PROVA #2

1. (3,0) Um pássaro está perdido num labirinto cúbico de  $3 \times 3 \times 3 = 27$  salas. O pássaro voa de sala em sala, mudando-se com igual probabilidade para salas com paredes adjacentes. As salas das pontas do cubo, por exemplo, possuem três salas adjacentes.
  - a. Qual a distribuição estacionária desse processo?
  - b. Transcorrido “muito tempo”, qual a entropia desse processo?
  - c. Qual a taxa de entropia desse processo?
2. (3,0) Construa um código de Huffman para a variável aleatória  $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  com probabilidades  $(1/21, 2/21, 3/21, 4/21, 5/21, 6/21)$ , considerando
  - a. um alfabeto de código binário  $\{0, 1\}$ .
  - b. um alfabeto de código ternário  $\{0, 1, 2\}$ .
  - c. Em cada caso, calcule o comprimento médio do código, bem como o limite do comprimento médio de um código ótimo se considerarmos codificação de sequências infinitamente grandes.
3. (4,0) Um canal de comunicação com alfabeto (de entrada e de saída)  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  tem probabilidades de transição iguais a  $p(y|x) = 1/2$ , se  $y = (x \pm 1) \bmod 5$ , e a  $p(y|x) = 0$ , caso contrário.
  - a. Apresente o diagrama de transição do canal e calcule a sua capacidade.
  - b. Considere dois códigos de comprimento 2 para esse canal, com as seguintes palavras-código: (i)  $\{00, 11, 22, 33, 44\}$  e (ii)  $\{00, 21, 42, 13, 34\}$ . Qual desses códigos tem menor probabilidade de erro? Dica: liste as palavras possíveis na saída do canal.

1

(a)



CLASSE A, PONTAS, 8 ESTADOS  
CLASSE B, ARESTAS, 12 ESTADOS  
CLASSE C, CENTRO-FACE, 6 ESTADOS  
CLASSE D, CENTRO-CUBO, 1 ESTADO

$$\begin{aligned} E_A &= 3 \\ E_B &= 4 \\ E_C &= 5 \\ E_D &= 6 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} ZE &= 3 \times 8 + 4 \times 12 + 5 \times 6 + 6 \times 1 \\ &= 108 \end{aligned}$$

$$\mu_A = \frac{3}{108} \quad \mu_B = \frac{4}{108} \quad \mu_C = \frac{5}{108} \quad \mu_D = \frac{6}{108}$$

(b)

$$H(X) = - \sum p_i \log p_i = - \left( 8 \times \frac{3}{108} \log \frac{3}{108} + 12 \times \frac{4}{108} \log \frac{4}{108} + 6 \times \frac{5}{108} \log \frac{5}{108} + 1 \times \frac{6}{108} \log \frac{6}{108} \right)$$

↑  
PMF  
ESTADO/CONDIÇÃO

$$H(X) \approx 4,73 \text{ BITS}$$

(c)

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum \mu_i H(X_2 | X_1 = i) \\ &= 8 \times \mu_A \log 3 + 12 \times \mu_B \log 4 + 6 \times \mu_C \log 5 + 1 \times \mu_D \log 6 \\ &= 8 \times \frac{3}{108} \log 3 + 12 \times \frac{4}{108} \log 4 + 6 \times \frac{5}{108} \log 5 + 1 \times \frac{6}{108} \log 6 \end{aligned}$$

$$H(X) \approx 2,03 \text{ BITS}$$

(2)

(a)

$x$	$p(x)$						$c(x)$
6	6/21	—	6/21	—	8/21	—	00
5	5/21	—	5/21	—	6/21	—	10
4	4/21	—	4/21	—	5/21	—	11
3	3/21	—	3/21	—	4/21	—	010
2	2/21	—	2/21	—	3/21	—	0110
1	1/21	—	1/21	—	1/21	—	0111

(b)

$x$	$p(x)$					$c(x)$
6	6/21	—	6/21	—	10/21	1
5	5/21	—	5/21	—	6/21	2
4	4/21	—	4/21	—	5/21	00
3	3/21	—	3/21	—	3/21	01
2	2/21	—	2/21	—	2/21	020
1	1/21	—	1/21	—	1/21	021
(0)	0	—	0	—	0	(022)

(c)

$$L_{(a)} = \sum p_i l_i = \frac{6}{21} \cdot 2 + \frac{5}{21} \cdot 2 + \frac{4}{21} \cdot 2 + \frac{3}{21} \cdot 3 + \frac{2}{21} \cdot 4 + \frac{1}{21} \cdot 4$$

$$\approx 2,43 \text{ bits/símbolo}$$

$$L_{(b)} = \sum p_i l_i = \frac{6}{21} \cdot 1 + \frac{5}{21} \cdot 1 + \frac{4}{21} \cdot 2 + \frac{3}{21} \cdot 2 + \frac{2}{21} \cdot 3 + \frac{1}{21} \cdot 3$$

$$\approx 1,62 \text{ dígitos decimales/símbolo}$$

$$L_{(a)}^* = H_2(X) = - \sum p_i \log_2 p_i = - \left( \frac{6}{21} \log_2 \frac{6}{21} + \dots + \frac{1}{21} \log_2 \frac{1}{21} \right)$$

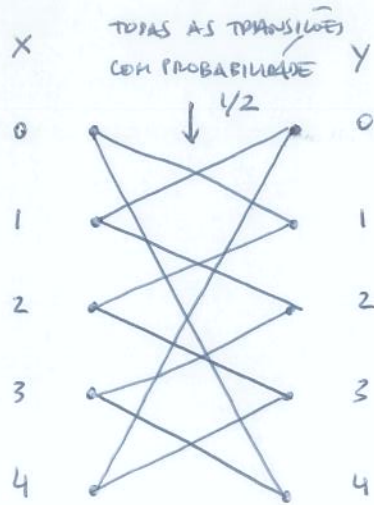
$$\approx 2,40 \text{ bits/símbolo}$$

$$L_{(b)}^* = H_3(X) = - \sum p_i \log_3 p_i = - \left( \frac{6}{21} \log_3 \frac{6}{21} + \dots + \frac{1}{21} \log_3 \frac{1}{21} \right)$$

$$\approx 1,51 \text{ dígitos decimales/símbolo}$$

(3)

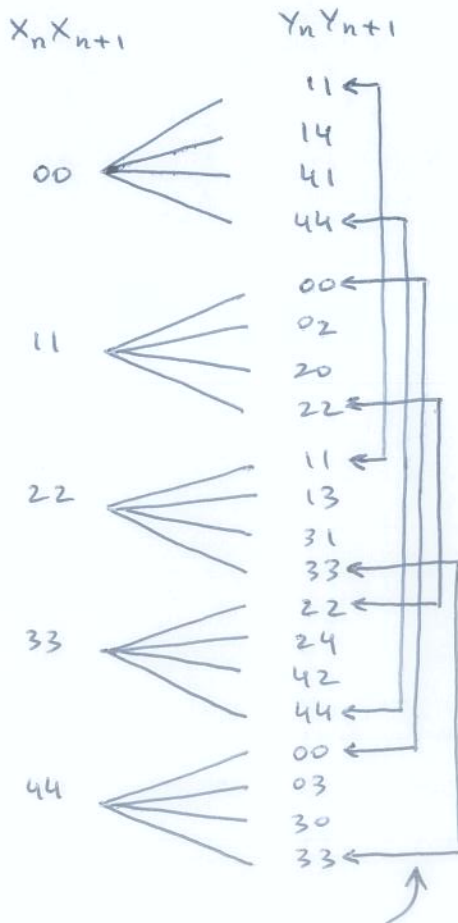
(a)



$$\begin{aligned}
 C &= \max_x I(X;Y) \\
 &= \max_x H(Y) - H(Y|X) \\
 &= \max_x H(Y) - H(1/2) \\
 &= \max_x H(Y) - 1 \\
 &= \log_2 |Y| - 1 \\
 &= \log_2 5 - 1 = \log_2 2,5 \\
 &\approx 1,32 \text{ BITS/TRANSMISSÃO}
 \end{aligned}$$

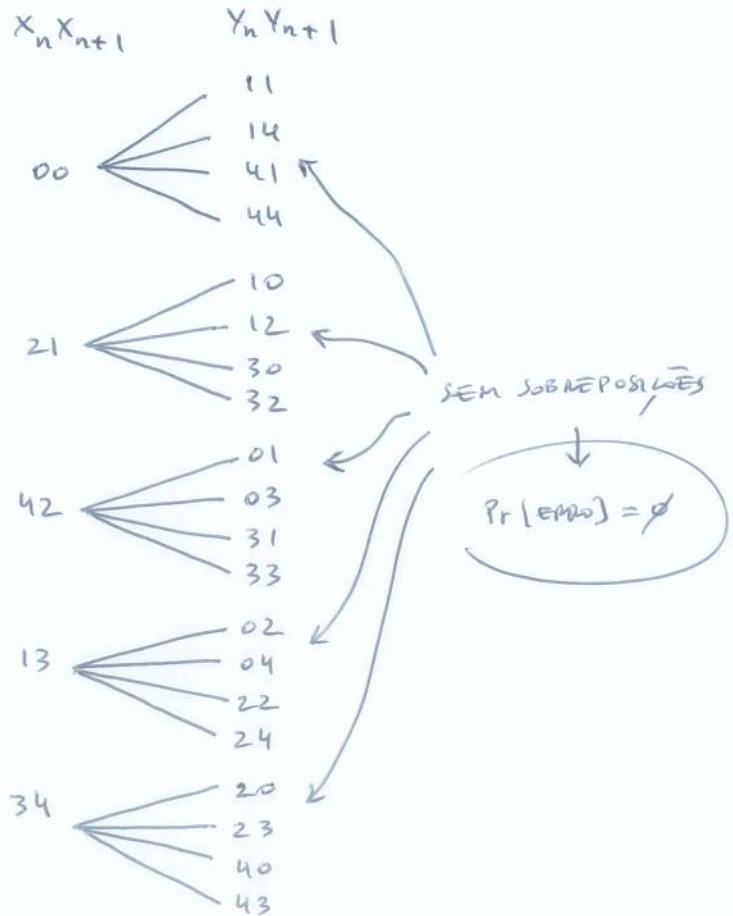
(b)

Código (i)



SUBAPOSICÕES DE PALAVRAS - CÓDIGO NA SÍNTESE DO CANAL  $\rightarrow$  FONTE DE RUÍDO!

Código (ii)



$\therefore$  O código (ii) tem  $Pr[ERRO] = 0$ , portanto melhor.