F 502 C – Eletromagnetismo I – 1º semestre de 2011 – Prova 3 – 08/06/2011

Nome:____ **RA:**______________

Questão 1 – **[2,5 pontos]** Dois solenóides longos e coaxiais transportam, cada um, uma corrente I, mas em sentidos opostos, como mostra a Figura 1. O solenóide interno (de raio a) tem n_1 voltas por unidade de comprimento, enquanto o externo (de raio b) tem n_2. Encontre $\mathbf{B}$ em cada uma das três regiões: (i) dentro do solenóide interno, (ii) entre eles e (iii) fora dos dois.

Questão 2 – **(a) [1,0 pontos]** <u>**Usando a Lei de Biot e Savart**</u>, calcule o campo magnético gerado por um longo fio reto por onde passa uma corrente I. **(b) [0,5 ponto]** Mostre que $\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$. Faça uma figura mostrando S e C. **(c) [1,0 ponto]** A partir dos resultados dos itens anteriores, calcule o potencial vetorial gerado pelo fio.

Questão 3 – Um longo cilindro circular de raio R tem magnetização $\mathbf{M} = ks^2\hat{\phi}$, onde k é uma constante, s é a distância a partir do eixo e $\hat{\phi}$ é o vetor unitário equatorial usual (Figura 2). **(a) [1,0 ponto]** Encontre as correntes de magnetização. **(b) [1,5 ponto]** Encontre o campo magnético para pontos internos e externos ao cilindro.

Questão 4 – Uma esfera de meio linear e raio R é colocada em um campo magnético constante $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$. **(a) [1,0 pontos]** Calcule o campo magnético no interior da esfera. **(b) [0,5 ponto]** Calcule a magnetização da esfera. **(c) [1,0 ponto]** Calcule o campo magnético em pontos exteriores à esfera.

Obs.: O campo gerado pela magnetização constante em uma esfera está dado no formulário no verso da prova.

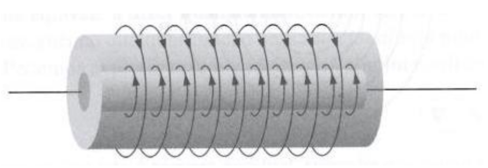


Figura 1. Questão 1.

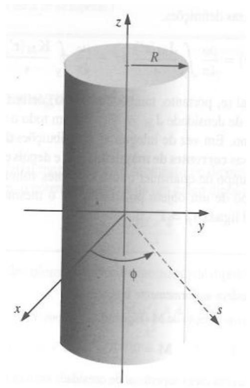


Figura 2. Questão 3.

Dados:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s}\,\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial \phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}}. \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

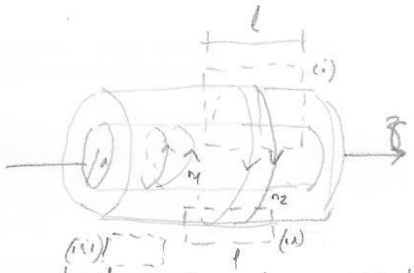
$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} \;&=\; \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+\; \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}.$$

Campo gerado pela magnetização constante de uma esfera: $\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}, \text{ se } r < R \\ \frac{\mu_0 R^3}{3r^3}\left[3(\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{M}\right], \text{ se } r > R \end{cases}$

$$\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m)$$

Questão 1



Lei de Ampère:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

(i) Dentro do solenóide interno, haverá contribuição das correntes passando pelos dois solenóides. Como $B=0$ fora (não há correntes circulando)

$$B \cdot l = \mu_0 (N_1 - N_2) I$$

Onde N_1 e N_2 são os números de vezes que a corrente atravessa a superfície limitada pela espira amperiana. Desta forma:

$$B = \mu_0 \frac{(N_1 - N_2)}{l} I = \mu_0 (n_1 - n_2) I$$

Orientando o eixo z como na figura acima:

$$\boxed{\vec{B} = -\mu_0 (n_1 - n_2) I \hat{z}}$$

(ii) Entre os solenóides, somentes a corrente carregada pelo solenóide maior contribui para o fluxo pela superfície limitada pela espira amperiana:

$$B \cdot l = \mu_0 N_2 I \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N_2}{l} I$$

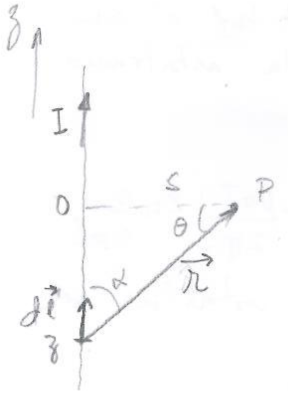
$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 n_2 I \hat{z}}$$

(iii) Como não há corrente circulando fora, o fluxo por qualquer espira amperiana será zero, logo

$$\boxed{\vec{B} = 0}$$

Questão 2

(a)



Lei de Biot e Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\vec{l}' \times \hat{r}}{r^2}$$

$$dl' = dz$$

$$d\vec{l}' \times \hat{r} = dz\,\text{sen}\,\alpha\;\hat{\phi} = dz\cos\theta\;\hat{\phi}$$

$$z = s\,\text{tg}\,\theta \Rightarrow dz = s\sec^2\theta\,d\theta$$

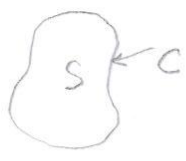
$$r = s\sec\theta$$

Para o fio infinito:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\hat{\phi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{s\sec^2\theta\cos\theta\,d\theta}{s^2\sec^2\theta} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\phi}}$$

(b) $\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$

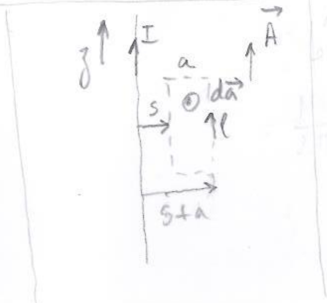
Integrando a equação acima sobre uma superfície aberta S, limitada pelo contorno C.



$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{a}$$

Usando o teorema de Stokes: $\boxed{\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}}$

(c) Para aplicar o resultado do item b, é preciso definir uma superfície limitada por um caminho fechado. Por simetria:



Pelo item anterior, se a for suficientemente pequeno

$$-B(s)\cdot a\,\cancel{l} = [A(s+a) - A(s)]\cdot\cancel{l}$$

$$\Rightarrow B(s) = -\frac{[A(s+a) - A(s)]}{a}$$

Se $a \to 0$ $\quad B(s) = -\frac{dA(s)}{ds}$

Logo

$$A(s) = -\int_{s_{ref}}^{s} B(s)\,ds$$, onde s_{ref} é uma posição escolhida arbitrariamente.

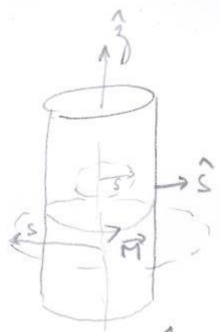
Usando o resultado do item (a):

$$A(s) = \int_{s_{ref}}^{s} -\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,ds = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{s}{s_{ref}}$$

Como o potencial vetor deve estar no sentido da corrente:

$$\boxed{\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{s}{s_{ref}}\,\hat{z}}$$

Questão 3



$\vec{M} = k s^2 \hat{\phi}$

(a) Correntes de magnetização:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = k \nabla \times (s^2 \hat{\phi})$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{J}_M = k \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \cdot s^2) \right] \hat{z}$$

$$\boxed{\vec{J}_M = 3k s \hat{z}}$$

$$\boxed{\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} = -kR^2 \hat{z}}$$

(b) Aplicando a lei de Ampère dentro do cilindro:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B.(2\pi s) = \mu_0 \int \vec{J}_M \cdot d\vec{a}$$

$$\Rightarrow B.(2\pi s) = \mu_0 \int_0^s 3ks \cdot (2\pi s) ds$$

$$\Rightarrow B(2\pi s) = 3\mu_0 k \, 2\pi \frac{s^3}{3}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 k s^2 \hat{\phi} = \mu_0 \vec{M}}$$

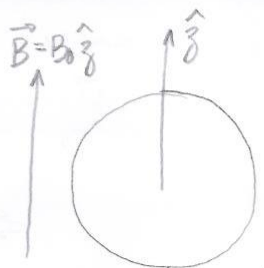
Fora do cilindro:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J}_M \cdot d\vec{a} + \mu_0 \int K_M \cdot dl$$

$$B.(2\pi s) = \mu_0 \int_0^R 3ks(2\pi s) ds + \mu_0 \int_0^{2\pi} -kR^2 . R d\phi$$

$$B(2\pi s) = \mu_0 \left[kR^3 . 2\pi - kR^3 . 2\pi \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = 0}$$



Questão 4

(a) Em meio linear, $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ e $\vec{B} = \mu \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}$$

Quando a esfera é colocada no campo magnético, surge uma magnetização:

$$\vec{M}_0 = \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}$$

O campo gerado por esta magnetização é: $\vec{B}_{0,m} = \frac{2}{3} \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}$

e o campo resultante será:

$$\vec{B}_1 = \vec{B} + \frac{2}{3} \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B} = \left(1 + \frac{2}{3} \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu}\right) \vec{B}$$

Este novo campo causa uma mudança na magnetização:

$$\vec{M}_1 = \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}_1$$

que gera um novo campo de magnetização $\vec{B}_{1,m} = \frac{2}{3} \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}_1$

e um novo campo resultante:

$$\vec{B}_2 = \vec{B} + \vec{B}_{1,m} = \left(1 + \frac{2}{3} \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu} + \left(\frac{2}{3} \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu}\right)^2\right) \vec{B}$$

Depois de n iterações:

$$\vec{B}_n = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{3} \frac{\mu_0 \chi_m}{\mu}\right)^i \right] \vec{B}$$

O campo resultante final será

$$\vec{B}_R = \left[\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} \frac{\mu_0 \chi_m}{\mu}\right)^i \right] \vec{B}$$

A série nos colchetes converge pois χ_m é geralmente um número pequeno e, portanto $\frac{2}{3} \frac{\mu_0 \chi_m}{\mu} = \frac{2}{3} \frac{\chi_m}{1+\chi_m}$ também é um número menor que 1.

$$\Rightarrow \vec{B}_R = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \frac{\chi_m}{1+\chi_m}} \vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_R = \frac{1+\chi_m}{1+\chi_m/3} \vec{B}} \quad (r < R)$$

(b) A magnetização resultante será dada por

$$\vec{M}_R = \frac{\chi_m}{\mu}\vec{B}_R = \frac{1+\chi_m}{1+\chi_m/3}\cdot\frac{\chi_m}{\mu_0(1+\chi_m)}\vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_R = \frac{\chi_m}{\mu_0(1+\chi_m/3)}\vec{B}}$$

(c) O campo no exterior da esfera será dado por

$$\vec{B}_{R,f} = \vec{B} + \frac{\mu_0 R^3}{3r^2}\left[3(\vec{M}_R\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{M}\right]$$

$$\vec{B}_{R,f} = \vec{B} + \frac{\mu_0 R^3}{3r^2}\cdot\frac{\chi_m}{\mu_0(1+\chi_m/3)}\left[3(\vec{B}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{B}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{R,f} = \left[1 - \frac{R^3}{3r^2}\frac{\chi_m}{(1+\chi_m/3)}\right]\vec{B} + \frac{R^3}{r^2}\frac{\chi_m}{(1+\chi_m/3)}(\vec{B}\cdot\hat{r})\hat{r}}$$

$(r > R)$