GABARITO

F 315 C I Prova (12-04-2010)

Nome: **RA:**

1) (3 pontos) Uma partícula de massa **M** se desloca ao longo de uma coordenada **x** positiva de acordo com **$v(x)=v_0\,(1+x/a)^{3/2}$** com **v_0** e **a** constantes positivas.

Determine:

a) A força **F(x)** atuante sobre a partícula.
b) A energia potencial correspondente a força achada no item a).
c) Determine **x(t)** supondo que em t=0 a partícula está em x=0.

a) $F(x) = M \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{3mv_0^2}{2a}\left(1+\frac{x}{a}\right)^2$

b) $F(x) = -\frac{dU}{dx} \rightarrow U(x) = -\int F(x)\,dx = -\frac{mv_0^2}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right)^3$

c) $\int_0^x \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{3/2}} = v_0\int_0^t dt = v_0 t = -2a\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-1/2} - 1\right]$

$1+\frac{x}{a} = \left(1-\frac{v_0 t}{2a}\right)^{-2} \rightarrow x(t) = a\left[\frac{1}{\left(1-\frac{v_0 t}{2a}\right)^2} - 1\right]$

2) **(3,5 pontos)** Uma partícula de massa **M** se move em uma dimensão com uma energia potencial dada por $\mathbf{U(x) = - U_0 (x/a)^2 [1-(x/a)^2]}$ com $\mathbf{U_0}$ e **a** constantes positivas.

a) Esboce um gráfico de **U(x)** indicando os pontos de equilíbrio estáveis e instáveis.

b) Aproxime em série de Taylor a energia potencial nas proximidade dos pontoes de equilíbrio estáveis e determine **(mostrando o procedimento)** a frequêcia de pequenas oscilações da partícula quando sua energia mecânica é ligeiramente superior ao valor mínimo local da energia potencial.

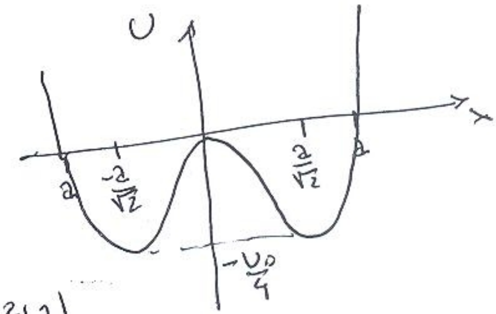
a) $U(x) = 0$ em $x = 0$ e $x = \pm a$

$\frac{dU}{dx} = -\frac{2U_0 x}{a^2}\left(1 - 2\frac{x^2}{a^2}\right)$ vale zero em $x = 0$ e $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$

para $\frac{x^2}{a^2} > 1 \rightarrow U(x) > 0$

$x = 0$ ponto de instabilidade

$x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ pontos estáveis



b) $U(x) = U\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \left(x \mp \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{\pm\frac{a}{\sqrt{2}}}$

$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{2U_0}{a^2}\left(1 - \frac{6x^2}{a^2}\right)$

$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{4U_0}{a^2}$

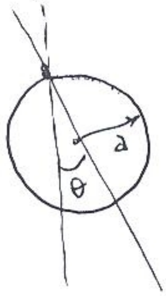
$M\ddot{x} = -\frac{4U_0}{a^2}\left(x \mp \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow y = x \mp \frac{a}{\sqrt{2}}\ ;\ \ddot{y} = \ddot{x}$

$\ddot{y} = -\frac{4U_0}{a^2 M} y \rightarrow \omega^2 = \frac{4U_0}{a^2 M} \rightarrow \omega = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{U_0}{M}}$

3) (3,5 pontos) Um pêndulo físico consiste num disco homogeneo de massa **M** e raio **a**, pendurado num eixo horizontal que passa pela borda e perpendicular ao disco, sob a ação da gravidade.

a) Encontre o **período** de oscilações de pequena amplitude.

b) Em que outro ponto poderia se pendurar o disco ao eixo para obter o mesmo período de oscilação?



a) $I_z \ddot{\theta} \simeq -Mga\theta \rightarrow \omega^2 = \frac{Mga}{I_z}$

$I_z = \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{2g}{3a}$

período $= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3a}{2g}}$

b) $\ell = \frac{3a}{2}$ indica a posição do centro de oscilação em relação ao eixo de oscilação, então se pendurarmos o pendulo a uma distância $\frac{a}{2}$ do centro do disco obteremos o mesmo período de oscilação.

Alternativamente:

$$\omega^2 = \frac{gd}{\frac{a^2}{2}+d^2} = \frac{2g}{3a} \rightarrow$$

$$3ad - a^2 - 2d^2 = 0$$

$$d = \left(\frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-4}\right)a = \left(\frac{3 \pm 1}{4}\right)a = \begin{cases} a \\ \frac{a}{2} \end{cases}$$