Notas

1	
2	
3	
4	

Nome: ______________________________ RA: ____________

3ª Prova - MA 211 - Turma ________

03 de dezembro de 2010.

Faça figuras grandes e claras em todas as questões.

1. [2,5 pontos] Determine a área delimitada no plano (Oxy) pela elipse

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. [2,5 pontos] Determine a área da lâmina do cilindro circular $\Sigma : x^2 + y^2 = 4$ em $\mathbb{R}^3$ contida entre o plano (Oxy) e o cilindro parabólico $P : z = y^2$, no primeiro octante.

3. [2,5 pontos] Sejam $A = (3,0), B = (1,1)$ e $C = (0,3)$ pontos de $\mathbb{R}^2$ e γ a trajetória que vai em linha reta de A até B e em seguida de B até C. Determine o trabalho ao longo de γ do campo de forças

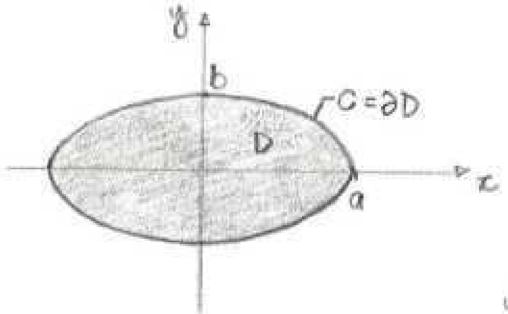
$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right). \end{aligned}$$

4. [2,5 pontos] Sejam $E \subset \mathbb{R}^3$ uma região sólida simples com fronteira $S = \partial E$ e um campo vetorial $F : \mathrm{Dom}(F) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal que $\mathrm{Dom}(F)$ é uma região aberta contendo E. Mostre que

$$\iint_S (\nabla \times F) \bullet dS = 0,$$

isto é, o fluxo do rotacional de F através de S é zero.

QUESTÃO 1



$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Note que a área da elipse é dada por:

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1\, dA.$$

Sabemos, pelo teorema de Green que:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_C P\,dx + Q\,dy\ .$$

Então, escolhendo $F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, temos que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Portanto:

$$\iint_D 1\,dA = \oint_{C=\partial D} Q\,dy = \oint_C x\,dy.$$

Parametrizando a curva C, temos:

$$C:\ \gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \gamma(t) = (a\cos t,\ b\,\text{sen}\,t)$$

Assim, temos: $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y'(t) = b\cos t \Rightarrow dy = b\cos t\, dt \end{cases}$

Portanto:

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1\,dA = \int_0^{2\pi} a\cos t . b\cos t\ dt = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\ dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{ab}{2}\left[t + \frac{\text{sen}\,2t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{ab}{2}(2\pi) = \pi ab$$

Resposta: A área delimitada pela elipse $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ no plano Oxy é $\mathcal{A}(D) = \pi ab$.

MB

Determinar a área delimitada pela curva C.

① C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Pela forma inversa do teorema de Green, sabemos que a área delimitada por C pode ser obtida através da fórmula:

$$\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Parametrizando:

$x = a\cos t \quad y = b\,\text{sen}\,t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$A = \frac{1}{2}\int a\cos t.(b\cos t) - b\,\text{sen}\,t\,(-a\,\text{sen}\,t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int ab\cos^2 t + ab\,\text{sen}^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \frac{1}{2}\Big[abt\Big]_0^{2\pi} = \frac{2\pi ab}{2} = \pi ab$$

Logo, a área delimitada pela curva C é πab

2,5

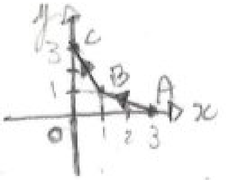
MB

3) $A=(3,0)$, $B=(1,1)$, $C=(0,3)$; γ vai em linha reta de A a B e depois de B a C. Trabalho de $\vec{F}$ ao longo de γ = ?

$$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

γ_1: $\vec{r}_1(t) = (1-t)(3,0) + t(1,1) = (3-2t, t)$ $0 \leq t \leq 1$

γ_2: $\vec{r}_2(t) = (1-t)(1,1) + t(0,3) = (1-t, 1+2t)$



$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\vec{F}(\vec{r}_1(t)) = \left(-\frac{t}{(3-2t)^2+t^2}, \frac{3-2t}{(3-2t)^2+t^2}\right) ; \quad \vec{F}(\vec{r}_2(t)) = \left(-\frac{1+2t}{(1-t)^2+(1+2t)^2}, \frac{1-t}{(1-t)^2+(1+2t)^2}\right)$$

$$= \left(-\frac{t}{9-12t+5t^2}, \frac{3-2t}{9-12t+5t^2}\right); \quad = \left(-\frac{1+2t}{2+2t+5t^2}, \frac{1-t}{2+2t+5t^2}\right)$$

$\vec{r}_1{}'(t) = (-2, 1)$; $\vec{r}_2{}'(t) = (-1, 2)$

Seja uma região aberta D (de $\mathbb{R}^2$) que contenha γ e não contenha a origem. Assim, $\vec{F}$ está definida nela e é de classe C^1 em D. Como $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (em D), então $\vec{F}$ é conservativo.

$\nabla f = \vec{F}$; $f_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $f_y = \frac{x}{x^2+y^2}$.

$$f = \int f_x dx = \int -\frac{y}{x^2+y^2} dx = -\int \frac{\frac{1}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1} dx = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + g(x,y) = \int f_y dy =$$

$$= \int \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} dy = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \tilde{g}(x,y).$$

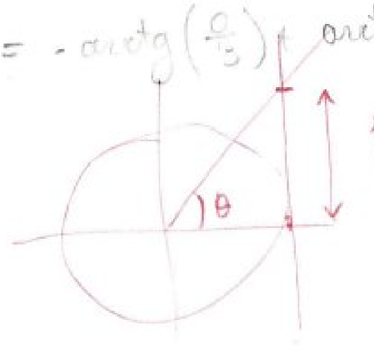
2,5

MB!

Assim, seja $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ se } x \neq 0 \\ -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \text{ se } y \neq 0 \end{cases}$

Assim, $W = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(C) - f(A) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{0}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$ é o trabalho.

$\operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$



QUESTÃO 4

Sejam $E \subset \mathbb{R}^3$ uma região sólida simples com fronteira $S = \partial E$ e $G : Dom(G) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal que $Dom(G)$ é uma região aberta contendo E. Sabemos, pelo Teorema de Gauss, que:

$$\iint_S G \cdot dS = \iiint_E \operatorname{div} G \, dV$$

Dada então $F : Dom(F) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 cujo domínio é uma região aberta contendo E, tal que $\nabla \times F = G$. Então:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = \iint_S G \cdot dS = \iiint_E \operatorname{div} G \, dV = \iiint_E \operatorname{div}(\nabla \times F) \, dV$$

Note porém que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$, pois:

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}$$

e
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}$$

$= 0$ (Teorema de Clairaut)

Portanto,

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = \iiint_E \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) \, dV = \iiint_E 0 \, dV = 0 \quad \blacksquare$$