Cálculo Numérico (MS211) EXAME (11/12/2012)

Nome: ______________________________ RA: __________ Turma: Y

Trabalhe com 4 *dígitos decimais*! Justifique as suas respostas! Boa sorte!

---

1. Considere os seguintes valores bem conhecidos de $\cos(x)$:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y = \cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

   (a) Utilize a forma de Newton ou a forma de Lagrange para interpolar *a função* arccos *nos pontos* $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $\frac{\sqrt{3}}{2}$. [1 pt]

   (b) Utilize o polinômio interpolante do item anterior para determinar o valor x, onde $\cos(x) = \frac{\pi}{5}$. [0.5 pts]

2. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Utilize o método de fatoração LU com pivoteamento parcial para encontrar uma solução de $Ax = b$. [1.5 pts]

3. Sabemos que o método de Newton-Raphson não tem convergência garantida. Apresente gráficos de funções diferenciaveis f, g, h e de chutes iniciais x_0, y_0, z_0 tal que as seguintes situações acontecem na aplicação do método de Newton-Raphson:

   (a) Não é possível de aplicar Newton-Rhaphson a f com chute inicial x_0. [0.5 pts]

   (b) Aplicando Newton-Rhaphson a g com chute inicial y_0 obtemos uma sequência (y_k) com $\lim_{k\to\infty} y_k = -\infty$. [0.5 pts]

   (c) Aplicando Newton-Rhaphson a h com chute inicial z_0 obtemos uma sequência (z_k) tal que $z_0 = z_{2j}$ e $z_1 = z_{2j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}$. [0.5 pts]

   Nos casos (b) e (c), inclue *2 passos do método de Newton-Raphson* em cada um dos seus gráficos.

4. Um certo problema de valor de contorno, que descreve a transferência de calor e de massa em um catalisador esférico e poroso, depende de quatro parámetros a, γ, β e ϕ. Para $a = 0$, $\gamma = 20$, $\beta = 0.05$ e $\phi = 1$ obtemos:

$$\begin{cases} y'' = ye^{\frac{(1-y)}{1+0.05(1-y)}} \\ y'(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

   Seja $h = 0.5$. Note que neste caso as incognitas são $y_0 \approx y(0)$ e $y_1 \approx y(0.5)$. Utilizando aproximações das derivadas que garantem erro de truncamento de ordem quadrática em h (escolhe as fórmulas adequadas no verso), mostre detalhadamente que o sistema não-linear resultante é da forma seguinte [2 pts]:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{y}) = [8 + e^{\frac{20(1-y_0)}{21-y_0}}]y_0 - 8y_1 = 0 \\ f_2(\mathbf{y}) = 4[1 + y_0] - [8 + e^{\frac{20(1-y_1)}{21-y_1}}]y_1 = 0 \end{cases}$$

5. Considere o sistema não-linear da questão anterior:

   (a) Calcule a matriz jacobiana $J(\mathbf{y})$ utilizada para encontrar uma solução deste sistema não-linear através do método de Newton. [1 pt]

   (b) Execute um passo do método de Newton com chute inicial $\mathbf{y}^{(0)} = (0.55, 0.65)^T$, quer dizer determine $\mathbf{y}^{(1)}$. [1.5 pts]

   (c) Verifique uma boa aproximação da solução do sistema não-linear já esta dada por $\mathbf{y}^{(1)}$ porque $||F(\mathbf{y}^{(1)})||_\infty < 10^{-3}$, onde $F(\mathbf{y}) = (f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}))^T$ para todos $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Qual é a relação ente $\mathbf{y}^1$ e o PVC da questão anterior? [1 pt]

ALGUMAS FÓRMULAS

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \ ; \quad y'(x_k) \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{h} \ ; \quad y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} \ ; \quad y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}.$$