Mecânica – F315 C
2ª prova - 25 de maio de 2009

Nome: GABARITO RA:______

Questão 1 (2,5): Um oscilador harmônico sub-amortecido de massa m = 1 Kg está inicialmente em repouso em seu ponto de equilíbrio. Este oscilador tem fator de amortecimento γ e freqüência natural de oscilação quando não amortecido igual a ω_0 ~~e~~. Considere que $\omega_0 = \gamma\sqrt{5}$. Uma força F=cos($\omega_1$t) é aplicada, onde ω_1 é a frequência de oscilação do oscilador amortecido.

a) Obtenha a amplitude da oscilação da solução não homogênea em função de γ;(1,0)
b) Obtenha a defasagem da oscilação da solução não homogênea com respeito à força em função de γ; (1,0)
c) Baseado nas condições iniciais, escreva um conjunto de equações que nos permite calcular as constantes da solução da homogênea (0,5)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{5\gamma^2 - \gamma^2} = 2\gamma \;; \quad \omega_0^2 - \omega_1^2 = \gamma^2$$

a) $x = \dfrac{F_0}{mR}\cos(\omega t - \beta)$ $\quad F_0 = 1N \quad m = 1kg$

Amplitude $= x_p = \dfrac{1}{R}$; $R^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2$

Neste caso $\omega = \omega_1 \Rightarrow R^2 = (\gamma^2)^2 + 4\gamma^2 . 4\gamma^2 = 17\gamma^4$

$\Rightarrow R = \sqrt{17}\,\gamma^2 \Rightarrow \boxed{x_p = \dfrac{1}{\sqrt{17}\,\gamma^2}}$

b) $\beta = tg^{-1}\left[\dfrac{2\gamma\omega_1}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)}\right] = tg^{-1}\left[\dfrac{4\gamma^2}{\gamma^2}\right] \Rightarrow \boxed{\beta = tg^{-1}(4)}$

c) $x = e^{-\gamma t}\left[A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\right] + \dfrac{1}{R(\omega_1)}\cos(\omega_1 t - \beta)$

$v = -\gamma e^{-\gamma t}\left[A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\right] - \omega_1 e^{-\gamma t}\left[A\sin\omega_1 t - B\cos\omega_1 t\right] - \dfrac{\omega_1}{R(\omega_1)}\sin(\omega_1 t - \beta)$

$$\boxed{\begin{aligned} x(0) = 0 &\Rightarrow A + \frac{\cos\beta}{R} = 0 \\ v(0) = 0 &\Rightarrow -\gamma A + \omega_1 B + \frac{\omega_1 \sin\beta}{R(\omega_1)} = 0 \end{aligned}}$$

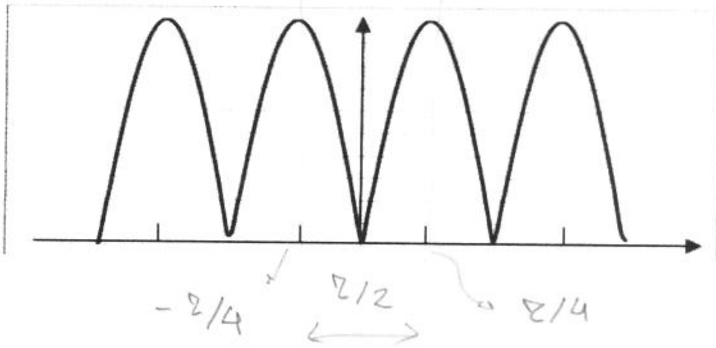
← Só isso já estava bom

$A = -\dfrac{\cos\beta}{R}$; $B = -\dfrac{1}{R}\left(\omega_1\sin\beta + \gamma\cos\beta\right) \Rightarrow \begin{cases} A = -\cos(tg^{-1}4)/(\sqrt{17}\,\gamma^2) \\ B = -\dfrac{1}{\sqrt{17}\,\gamma}\left[2\sin(tg^{-1}4) + \cos(tg^{-1}4)\right] \end{cases}$

Questão 2 (2,5): Considere uma força periódica F(t) = |sen(2πt/τ)|, conforme mostra a figura abaixo.

a) Qual é o período de F(t) e quais devem ser as frequências de uma expansão de série de Fourier? (1,0)
b) Considerando argumentos de simetria, obtenha os coeficientes da série de Fourier da forma mais simples possível em termos de integrais; (0,5)
c) Obtenha os coeficientes de Fourier e escreva F(t) em função dos coeficientes de Fourier na forma mais sintética; (1,0);

$$sen(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[sen(a+b) + sen(a-b)\right]$$



a)

$$T = \frac{\tau}{2} \; ; \; \omega_n = \frac{n2\pi}{T} = \frac{n2\pi\, 2}{\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = n\, 4\pi/\tau}$$

b) Considermos o intervalo $\frac{-\tau}{4} < t < \frac{\tau}{4}$; a função é par $\Rightarrow B_n = 0$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\omega_n t\, |sen(2\pi t/\tau)|\, dt = \frac{2}{\tau/2}\int_{-\tau/4}^{\tau/4} \cos\left(\frac{n4\pi}{\tau}t\right)\left|sen\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right| dt$$

$$= \frac{8}{\tau}\int_0^{\tau/4} \cos\left(\frac{n4\pi}{\tau}t\right) sen\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{F(t) = \frac{4}{\tau}\int_0^{\tau/4} sen\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) dt + \frac{8}{\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{\tau/4} \cos\left(\frac{n4\pi}{\tau}t\right) sen\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) dt\right]}$$

c)
$$A_n = \frac{8}{\tau}\int_0^{\tau/4}\left(\frac{1}{2}\right)\left[sen\Big(\underbrace{\frac{2\pi}{\tau}t + \frac{n4\pi}{\tau}t}_{(1+2n)\frac{2\pi}{\tau}}\Big) + sen\Big(\underbrace{\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{n4\pi}{\tau}t}_{(1-2n)\frac{2\pi}{\tau}}\Big)\right] dt$$

$$A_n = -\frac{4}{\tau}\left\{\frac{\cos\left[(1+2n)\frac{2\pi}{\tau}t\right]}{(1+2n)\,2\pi/\tau} + \frac{\cos\left[(1-2n)\frac{2\pi}{\tau}t\right]}{(1-2n)\,2\pi/\tau}\right\}_0^{\tau/4}$$

$$\cos\left[(1\pm 2n)\frac{2\pi}{\tau}\cdot\frac{\tau}{4}\right] = \cos\left[(1\pm 2n)\frac{\pi}{2}\right] = 0$$

$$A_n = \frac{4}{\cancel{\tau}}\frac{\cancel{\tau}}{2\pi}\left[\frac{1}{(1+2n)} + \frac{1}{(1-2n)}\right] \Rightarrow A_n = \frac{2}{\pi}\frac{[1-2n+1+2n]}{(1-4n^2)}$$

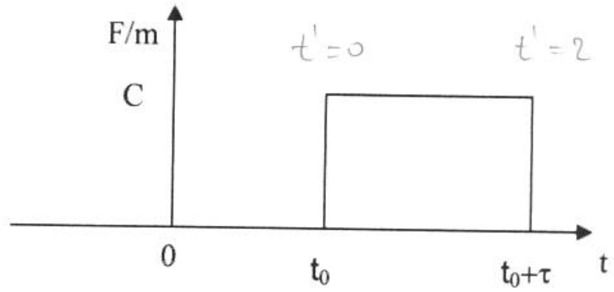
$$\boxed{A_n = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{(1-4n^2)}} \qquad A_0 = \frac{4}{\pi}$$

$$F(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n4}{2}t\right)}{(1-4n^2)}$$

$$\boxed{F(t) = \frac{2}{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n4}{2}t\right)}{(1-4n^2)}\right]}$$

Questão 3 (2,5): Uma partícula de massa m está em repouso em sua posição de equilíbrio ligada a uma mola cuja outra extremidade é fixa. Considere uma força de impulso constante C ocorrendo entre o tempo $t = t_0$ e $t = t_0 + \tau$. Considerando o sistema na condição de sobre amortecimento com constante de amortecimento γ_1 e γ_2 e freqüência angular de ressonância ω_0, obtenha:

(a) x(t) para $t_0 < t < t_0+\tau$; (0,5)
(b) x(t) para $t > t_0+\tau$; (1,0)
(c) x(t) quando τ tende a zero (1,0)



chamemos $t - t_0 \equiv t'$

Hom. $x(t) = Ae^{-\gamma_1 t} + Be^{-\gamma_2 t}$

N. Hom $\frac{C}{\omega_0^2}$

$\Rightarrow x(t) = Ae^{-\gamma_1 t} + Be^{-\gamma_2 t} + \frac{C}{\omega_0^2}$

$v(t) = -\gamma_1 A e^{-\gamma_1 t} - \gamma_2 B e^{-\gamma_2 t}$

(a) $x(t') = Ae^{-\gamma_1 t'} + Be^{-\gamma_2 t'} + C/\omega_0^2$

$v(t') = -\gamma_1 A e^{-\gamma_1 t'} - \gamma_2 B e^{-\gamma_2 t'}$

$t = t_0 \Rightarrow t' = 0$

$x(0) = 0 = A + B + C/\omega_0^2$ (I)

$v(0) = 0 = -\gamma_1 A - \gamma_2 B$ (II)

(I)$\times\gamma_1$ + (II) $(\gamma_1 - \gamma_2) B = -\gamma_1 C/\omega_0^2$

$B = -\frac{\gamma_1}{(\gamma_1-\gamma_2)} \frac{C}{\omega_0^2}$

(I)$\times\gamma_2$ + (II) $(\gamma_2 - \gamma_1) A = -\gamma_2 C/\omega_0^2$

$A = \frac{\gamma_2}{(\gamma_1-\gamma_2)} \frac{C}{\omega_0^2}$

$$\boxed{x(t) = \frac{C}{\omega_0^2}\left[1 - \frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)}\left(\gamma_2 e^{-\gamma_1(t-t_0)} - \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-t_0)}\right)\right]}$$

(b) $x(t) = x_{t_0} - x_{t_0+\tau} = \frac{C}{\omega_0^2}\left[\cancel{1} - \frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)}\left(\gamma_2 e^{-\gamma_1 t'} - \gamma_1 e^{-\gamma_2 t'}\right) - \cancel{1} + \frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)}\left(\gamma_2 e^{-\gamma_1(t'-\tau)} - \gamma_1 e^{-\gamma_2(t'-\tau)}\right)\right]$

$$\boxed{x(t) = \frac{C}{\omega_0^2(\gamma_1-\gamma_2)}\left[\gamma_2 e^{-\gamma_1(t-t_0)}\left(-1+e^{\gamma_1\tau}\right) + \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-t_0)}\left(1-e^{\gamma_2\tau}\right)\right]}$$

(c) $e^{\gamma_1\tau} \to 1+\gamma_1\tau$; $e^{\gamma_2\tau} \to 1+\gamma_2\tau$

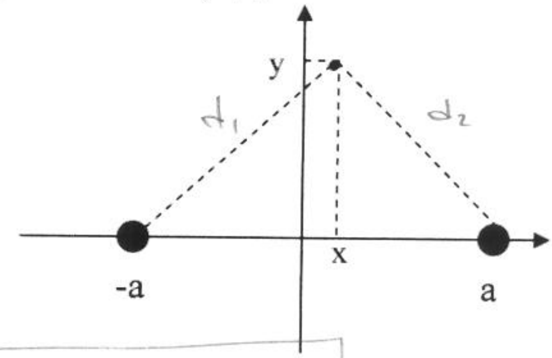
$(-1+e^{\gamma_1\tau}) \to \gamma_1\tau$

$(1-e^{\gamma_2\tau}) \to \gamma_2\tau$

$$\boxed{x(t) = \frac{C\gamma_1\gamma_2\tau}{\omega_0^2(\gamma_1-\gamma_2)}\left[e^{-\gamma_1(t-t_0)} + e^{-\gamma_2(t-t_0)}\right]}$$

Questão 4 (2,5): Considere um corpo de prova de massa m num ponto (x,y) sob a ação gravitacional de dois corpos de massa M colocados em x=- a e x = +a conforme mostra a figura.

a) Obtenha o potencial gravitacional sobre o corpo de prova em função de x e y. (1,0)
b) Em x = 0, obtenha a energia potencial para y<< a e obtenha a frequência natural de oscilação em torno de y=0.(1,0)
c) Obtenha o campo gravitacional ~~em~~ sobre o corpo de prova em x=0.(0,5)



$$d_1 = \left[(x+a)^2 + y^2\right]^{1/2}$$

$$d_2 = \left[(x-a)^2 + y^2\right]^{1/2}$$

a) $$\phi = -GM\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right)$$

$$\boxed{\phi = -GM\left\{\frac{1}{\left[(x+a)^2+y^2\right]^{1/2}} + \frac{1}{\left[(x-a)^2+y^2\right]^{1/2}}\right\}}$$

b) $U = m\phi \qquad \phi(x=0) = -GM\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]$

$$\phi(x=0) = \frac{-2GM}{\sqrt{a^2+y^2}} \quad \Rightarrow U(x=0) = \frac{-2GMm}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

$y << a$

$$\Rightarrow U \simeq \frac{-2GMm}{a\left(1+y^2/a^2\right)^{1/2}} \sim -\frac{2GMm}{a}\left[1 - \frac{y^2}{2a^2}\right]$$

$$U \sim -\frac{2GMm}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{2GMm}{a^3}\right)y^2 \qquad \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$k > 0$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2GM}{a^3}}}$$

c) $$\bar{g}(x=0) = -\frac{\partial\phi(x=0)}{\partial y}\hat{y} = -2GM \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2y\,\hat{y}}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\bar{g}(x=0) = \frac{2GM\vec{y}}{(a^2+y^2)^{3/2}}}$$