

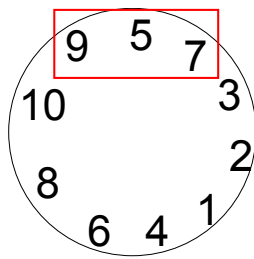
Lista 3

MC358— Fundamentos Matemáticos para Computação

Prof. Pedro J. de Rezende

2º Semestre de 2013

1. Prove que pelo menos um dos números reais a_1, a_2, \dots, a_n é maior que ou igual à média desses números. Que tipo de prova você usou?
2. Mostre que, se os primeiros 10 inteiros positivos forem colocados em forma de um círculo, em ordem arbitrária, existem três inteiros consecutivos cuja soma é maior que ou igual a 17. (Dica: use o resultado do exercício anterior.) **Exemplo:**



3. Prove que existem infinitos números primos. Dica: prove que, dado qualquer conjunto finito de números primos, é possível achar um novo número primo fora desse conjunto.
4. Prove que se A é um subconjunto de B , então o conjunto potência de A é subconjunto do conjunto potência de B . (Obs.: não assuma que A ou B são conjuntos finitos.)
5. Descreva os conjuntos domínio e imagem das seguintes funções:
 - (a) a função que associa a cada par de inteiros positivos o primeiro inteiro do par.
 - (b) a função que associa a cada inteiro positivo seu maior dígito decimal.
 - (c) a função que associa a cada sequência de bits a diferença entre a quantidade de 1s e a quantidade de 0s na sequência.
 - (d) a função que associa a cada sequência de bits x a mais longa sequência de 1s em x .

6. Diga se as seguintes funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são injetoras ou sobrejetoras (ou ambos). Justifique sua resposta.

Exemplo 1: $f(x) = 2x$.

f é injetora pois, dados $a, b \in \mathbb{R}$ (domínio!), suponha que $f(a) = f(b)$. Então,

$$\begin{aligned} 2a &= 2b \\ a &= b \end{aligned}$$

f é sobrejetora pois, dado $y \in \mathbb{R}$ (contra-domínio!), temos $y = 2(y/2) = f(y/2)$. Assim, a todo $y \in \mathbb{R}$ corresponde uma pré-imagem, $x = \frac{y}{2} \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = y$.

Exemplo 2: $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

f não é injetora pois, dados $a = 2, b = 2.1 \in \mathbb{R}$ (domínio!), temos que $f(a) = 2 = f(b)$.

f não é sobrejetora pois a imagem de \mathbb{R} pela f é \mathbb{Z} . Por exemplo, $y = 2.5$ não é imagem de nenhum $x \in \mathbb{R}$ (domínio!).

(a) $f(x) = x^3 + 1$

(b) $f(x) = |x|$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \text{ é inteiro} \\ x & \text{caso contrário} \end{cases}$