F 502 A – Eletromagnetismo I – 2º semestre de 2011 – Prova 3 – 01/12/2011

Nome:____ **RA:**_____________

Questão 1 – Um cabo coaxial consiste de dois tubos cilíndricos muito longos, de raios a e b, separados por material isolante de suscetibilidade χ_m. Uma corrente I passa pelo condutor interno e retorna ao longo do externo; em cada caso, a corrente se distribui uniformemente pela superfície (Figura 1). **a) [1,5 pontos]** Encontre o vetor $\mathbf{H}$ e o campo magnético para $s < a$, $a < s < b$ e $s > b$. **b) [1,0 ponto]** Calcule a magnetização e as correntes de magnetização na região entre os cilindros.

Questão 2 – **(a) [1,5 pontos]** Calcule o torque exercido sobre a espira quadrada mostrada na Figura 2, devido à espira circular (assuma que r é muito maior do que a ou b). **(b) [1,0 ponto]** Se a espira quadrada estiver livre para girar, qual será a sua orientação de equilíbrio? Justifique.

Questão 3 – Uma espira quadrada (de lado a) é montada em uma haste vertical e gira à velocidade angular ω (Figura 3). Um campo uniforme $\mathbf{B}$ aponta para a direita. **(a) [2,0 pontos]** Encontre $\varepsilon\,(t)$ para esse gerador de corrente alternada. **(b) [0,5 ponto]**. Se a resistência da espira é R, que corrente passa por ela?

Questão 4 – (a) [1,5 pontos] Escreva e explique cada uma das equações de Maxwell no vácuo na sua forma local. **(b) [1,0 ponto]** Aplique os teoremas de Stokes e do Divergente e transforme as equações de Maxwell para a forma integral.

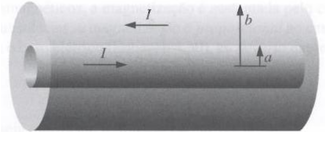


Figura 1. Questão 1.

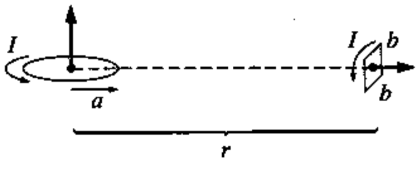


Figura 2. Questão 2.

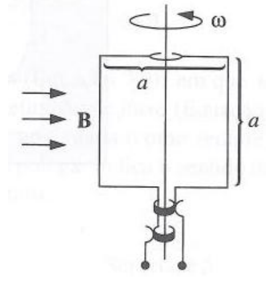


Figura 3. Questão 3.

Dados:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}. \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} \;=\;& \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}.$$

$$\varepsilon = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \qquad \mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$$

$$M_{21} = M_{12} = M = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\oint\frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{\mathscr{r}} \qquad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\boxed{U = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}} \qquad \mu \equiv \mu_0(1+\chi_m)$$

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{m}\times\mathbf{B}} \qquad \mathbf{J}_M(\mathbf{r}') = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B})} \qquad \mathbf{K}_M(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}$$

Questão 1

a) Para o vetor $\vec{H}$ vale a relação

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_e$$

Para $s < a$, $I_e = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{H} = 0}$ e como não há magnetização: $\boxed{\vec{B} = 0}$

Para $a < s < b$, $I_e = I \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi s = I$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi s} \hat{\phi}}$$

(Considerando que a corrente no cilindro interno flui na direção de $\hat{z}$)

A magnetização nesta região é $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, logo

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 (1+\chi_m) I}{2\pi s} \hat{\phi}}$$

Para $s > b$, $I_e = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{H} = 0}$ e $\boxed{\vec{B} = 0}$

b) A magnetização na região entre os cilindros é

$$\boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m I}{2\pi s} \hat{\phi}}$$

A densidade volumétrica de corrente é dada por

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \frac{\chi_m I}{2\pi} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \cdot \frac{1}{s} \right) \hat{z} \Rightarrow \boxed{\vec{J}_M = 0}$$

As densidades superficiais são:

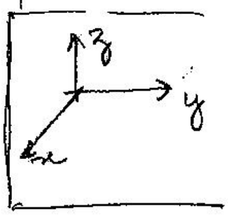
Em a: $\hat{n} = -\hat{s} \Rightarrow \vec{K}_M = \frac{\chi_m I}{2\pi a} \left[\hat{\phi} \times (-\hat{s}) \right] = \boxed{\frac{\chi_m I}{2\pi a} \hat{z}}$

Em b: $\hat{n} = \hat{s} \Rightarrow \vec{K}_M = \frac{\chi_m I}{2\pi b} \left[\hat{\phi} \times \hat{s} \right] = \boxed{-\frac{\chi_m I}{2\pi b} \hat{z}}$

Questão 2

(a) O momento de dipolo magnético da espira circular é $\vec{m}_c = I(\pi a^2)\hat{z}$.

O momento de dipolo magnético da espira quadrada é $\vec{m}_Q = I b^2 \hat{y}$



O campo magnético gerado pelo dipolo é

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\right]$$

Se o campo é gerado pela espira circular na posição da espira quadrada.

$$(\vec{m}_c\cdot\hat{r})\hat{r} = \left[(I\pi a^2)\hat{z}\cdot\hat{y}\right]\hat{y} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}_c = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\pi a^2\hat{z} = -\frac{\mu_0 I a^2}{4r^3}\hat{z}$$

O torque sobre a espira quadrada será

$$\vec{N} = \vec{m}_Q \times \vec{B}_c = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3}\cdot I b^2\cdot\left[\hat{y}\times(-\hat{z})\right]$$

$$\boxed{\vec{N} = -\frac{\mu_0 I^2 a^2 b^2}{4r^3}\hat{x}}$$

(b) A energia do dipolo no campo magnético é $U = -\vec{m}_Q\cdot\vec{B}_c$. A configuração de menor energia ocorrerá quando $\vec{m}_Q$ for paralelo a $\vec{B}_c$. Logo a orientação de equilíbrio será $(-\hat{z})$, paralela a $\vec{B}_c$.

Questão 3

(a) Pela regra de fluxo:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{a}$$

O ângulo entre o campo e o vetor normal é ωt.

Supondo o campo e o vetor normal estavam alinhados em $t=0$, $\vec{B}\cdot d\vec{a} = B\,da\cos\omega t$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(t) = -\frac{d}{dt}\left(B.a^2\cos\omega t\right) \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(t) = B\omega a^2 \operatorname{sen}(\omega t)}$$

(b) A corrente que passa pela espira é $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{B\omega a^2 \operatorname{sen}(\omega t)}{R}}$$

(a)

Questão 4

Equações de Maxwell:

$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (Lei de Gauss): O fluxo de campo elétrico saindo (ou entrando) em um volume, por unidade de volume, é proporcional à densidade de cargas. Esta equação estabelece uma relação entre o campo elétrico e a carga elétrica, fonte de campo.

$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ (Lei de Faraday): A densidade de circulação do campo elétrico, por unidade de área, é proporcional à variação do campo magnético. Esta equação mostra como o campo elétrico surge a partir do campo magnético.

$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$: Esta equação reflete a ausência de uma carga magnética, fonte do campo magnético. Assim, o fluxo de campo entrando (ou saindo) de qualquer volume é zero.

$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ (Lei de Ampère-Maxwell):

A densidade de circulação, por unidade de área, é proporcional à densidade volumétrica de corrente e à variação do campo elétrico. Esta equação mostra como o campo magnético é gerado por correntes e pela variação do campo elétrico.

(b) Lei de Gauss

Integrando a lei de Gauss no volume:

$$\int_V (\nabla\cdot\vec{E})\,d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, d\tau \xRightarrow[\text{teorema do divergente}]{} \boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

Para $\nabla\cdot\vec{B}=0$

$$\int_V (\nabla\cdot\vec{B})\,d\tau = 0 \xRightarrow[\text{teorema da divergência}]{} \boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0}$$

Lei de Faraday

Integrando em uma superfície:

$$\int_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{a} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a} \xRightarrow[\text{Stokes}]{} \boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\,d\vec{a}}$$

Lei de Ampère - Maxwell

Integrando em uma superfície:

$$\int_S (\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{a} = \mu_0\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a} + \mu_0\varepsilon_0\int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$$

$$\Big\Downarrow \text{ Stokes}$$

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a}}$$