2,5 pts. Questão 1:

$f_x = 2x + 2xy = 0 \Rightarrow x(1+y) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = -1$.

$f_y = 2y + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2y. \qquad (1)$

$x = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = 0 \Rightarrow (0,0)$ é um ponto crítico.

$y = -1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow (\pm\sqrt{2}, -1)$ são pontos críticos. | $1,5$ pts.

$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xx}^2 = (2+2y)2 - (2x)^2$. | $0,5$ pts.

$D(0,0) = 4 > 0$ e $f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow (0,0)$ é ponto de mínimo local.

$D(\pm\sqrt{2}, -1) = -8 < 0 \Rightarrow (\pm\sqrt{2}, -1)$ são pontos de sela. | $0,5$ pts.

2,5 pts. Questão 2:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = x^2 + 10y^2 + z^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 2\lambda x & (i) \\ 0 = 20\lambda y & (ii) \\ -4 = 2\lambda z & (iii) \end{cases}$$

$$0 \overset{(ii)}{=} 20\lambda y \Rightarrow y = 0 \overset{(i),(iii)}{\Rightarrow} x = \frac{4}{\lambda} \text{ e } z = -\frac{2}{\lambda} \overset{g(x,y,z)}{\Rightarrow} \frac{16}{\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 5 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

$\Rightarrow (2,0,1)$ e $(-2,0,1)$ são os candidatos a máximo ou mínimo. | $1,5$ pts.

Comparando f(2,0,-1) com f(-2,0,1), temos que f(2,0,-1)=20 é o máximo e f(-2,0,1)=-20 é o mínimo. | $1,0$ pts.

2,5 pts. Questão 3:

Intersecções das parábolas $x = y^2$ e $x = 2 - y^2$: $\quad y^2 = 2 - y^2 \Rightarrow y = \pm 1$.
Disto e do fato que a região está no primeiro quadrante, ela será dada por
$D = \{(x,y) |\ 0 \le y \le 1, y^2 \le x \le 2 - y^2\}$.

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y^2} y\, dxdy \ \Big|_{\text{1,5 pts.}} = 2\int_0^1 y - y^3\, dxdy = 2\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}. \ \Big|_{\text{1,0 pts.}}$$

2,5 pts. Questão 4:

$$(a) \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 sen\ x^3\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{x^2} sen\ x^3\, dydx \ \Big|_{\text{0,5 pts.}} = \int_0^1 x^2 sen\ x^3\, dx = -\frac{cos\ x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1 - cos\ 1). \ \Big|_{\text{0,75 pts.}}$$

$$(b) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 cos\ \theta - r^2 sen\ \theta\, drd\theta \ \Big|_{\text{0,5 pts.}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 cos\ \theta\, drd\theta = \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right)\left(sen\ \theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{3}. \ \Big|_{\text{0,75 pts.}}$$