MA 327 A/B PROVA 1 06/09/11

RA: ________ NOME: GABARITO

1) Considere o espaço vetorial real $V = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ com as operações definidas por: $(x,x^2)\oplus(y,y^2)=(x+y,(x+y)^2)$ e $\alpha\odot(x,x^2)=(\alpha x,\alpha^2x^2)$

a) (0,5) Exiba o vetor nulo de V

b) (0,5) Exiba o simétrico de cada $v \in V$

c) (0,5) Prove que $\alpha\odot(u\oplus v)=(\alpha\odot u)\oplus(\alpha\odot v)$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}, \forall u,v\in V$

d) (0,5) Exiba uma base para V . Justifique.

RESOLUÇÃO. (a) $0_V = (y, y^2)$

$(x, x^2) = (x, x^2) \oplus (y,y^2) = (x+y, (x+y)^2) \Rightarrow x = x+y \Rightarrow y = 0$

Assim $0_V = (0,0)$. (só a resposta vale 0,2)

(b) Seja $u = (x, x^2) \in V$, $x \in \mathbb{R}$. Então

$(0,0) = (x, x^2) \oplus (y,y^2) = (x+y, (x+y)^2) \Rightarrow x+y = 0 \Rightarrow y = -x$

Logo $-u = (y,y^2) = (-x, (-x)^2)$ (só a resposta vale 0,2)

(c) Sejam $u = (x,x^2)$, $v = (y,y^2) \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$\alpha\odot(u\oplus v) = \alpha\odot[(x,x^2)\oplus(y,y^2)] = \alpha\odot(x+y,(x+y)^2)$

$= (\alpha(x+y), \alpha^2(x+y)^2) = (\alpha x+\alpha y, (\alpha x+\alpha y)^2)$

$= (\alpha x, (\alpha x)^2)\oplus(\alpha y,(\alpha y)^2) = [\alpha\odot(x,x^2)]\oplus[\alpha\odot(y,y^2)]$

$= (\alpha\odot u)\oplus(\alpha\odot v)$ (só uma parcela correta vale 0,2)

(d) Seja $u = (1,1) \in V$ e seja $v \doteq (x, x^2) \in V$. Então

$$x \odot u = x \odot (1, 1^2) = (x \cdot 1, x^2 1^2) = v$$

e assim

$$V = \{ x \odot u : x \in \mathbb{R} \} = [u].$$

Como $u = (1,1) \neq (0,0) = 0_V$, segue que $\{u\}$ é LI. Mas $V = [u]$ e logo $\{u\}$ é base de V.

(deu uma base correta mas não justificou $= 0{,}2$)

2) a) (1,0) Mostre que $W = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A \text{ é simétrica e } trA = 0\}$ é um subespaço vetorial de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

b) (1,0) Exiba uma base para W

RESOLUÇÃO (a) Sejam $A, B \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$A^t = A, \quad B^t = B, \quad trA = trB = 0.$$

Usando propriedades de matriz transposta e do traço de uma matriz, obtemos

$$(\lambda A + B)^t = (\lambda A)^t + B^t = \lambda A^t + B^t = \lambda A + B,$$

$$tr(\lambda A + B) = tr(\lambda A) + tr(B) = \lambda trA + trB = \lambda \cdot 0 + 0 = 0.$$

Portanto $\lambda A + B \in W$ e assim W é um subespaço vetorial.

1,0

(b) $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in W \iff \begin{cases} a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31} \\ a_{23} = a_{32}, \\ a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{11}-a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=A_1} + a_{12} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=A_2} +$$

$$+ a_{13} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=A_3} + a_{22} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=A_4} + a_{23} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=A_5}$$

0,6 $$= a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 + a_{22}A_4 + a_{23}A_5$$

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz 5x9 ao lado está na forma escada, segue que $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ é uma base de W.

0,4

3) Seja $W = [v_1, v_2, v_3, v_4] \subset \mathbb{R}^4$ o subespaço gerado por $v_1 = (1,1,0,0)$,

$v_2 = (0,1,1,1)$; $v_3 = (1,0,0,1)$ e $v_4 = (-1,3,2,0)$

a) (1,0) Determine uma base para W e calcule sua dimensão. Justifique.

b) (1,0) Considere o subespaço vetorial

$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}$. Encontre uma base para

$U \cap W$

c) (0,5) Qual é a dimensão de $U + W$? Justifique.

RESOLUÇÃO. (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + L_1]{L_3 \to L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 4L_2]{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \to L_4 + 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{matriz na forma escada}$$

Então $\alpha = \{ v_1 = (1,1,0,0),\ v_2 = (0,1,1,1),\ v_3 = (0,0,1,2) \}$ é uma base de W.

0,7 se obtém 3 vetores não nulos mas errou no escalonamento

(b) $W = \left\{ t_1(1,1,0,0) + t_2(0,1,1,1) + t_3(0,0,1,2) : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ (t_1, t_1+t_2, t_2+t_3, t_2+2t_3) ; t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$U = \left\{ (x,y,z,w) : x - y + z - w = 0 \right\}$

$$(x,y,z,w) \in W \cap U \iff \begin{cases} x = t_1, \ y = t_1+t_2, \ z = t_2+t_3, \ w = t_2+2t_3, \\ x - y + z - w = 0 \quad e \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

0,4

$$\Longrightarrow \ 0 = t_1 - (t_1+t_2) + (t_2+t_3) - (t_2+2t_3) = 0$$

$$= -t_2 - t_3 \iff t_3 = -t_2$$

$$\Longrightarrow (x,y,z,w) = (t_1, t_1+t_2, t_2-t_2, t_2-2t_2) = (t_1, t_1+t_2, 0, -t_2)$$

$$= t_1(1,1,0,0) + t_2(0,1,0,-1)$$

$$U \cap W = [(1,1,0,0), (0,1,0,-1)]$$

$\beta = \left\{ (1,1,0,0), (0,1,0,-1) \right\}$ é uma base de $U \cap W$.

(erro na base $\beta \Rightarrow -0,5$)

(c) $(x,y,z,w) \in U \iff x - y + z - w = 0 \iff w = x - y + z$

$$\iff (x,y,z,w) = (x,y,z,x-y+z) = x\underbrace{(1,0,0,1)}_{u_1} + y\underbrace{(0,1,0,-1)}_{u_2} + z\underbrace{(0,0,1,1)}_{u_3}$$

Logo $U = [u_1, u_2, u_3]$.

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ $\leftarrow$ matriz na forma escada $\Rightarrow$ $\{u_1, u_2, u_3\}$ é LI e assim uma base de U

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 3 + 3 - 2 = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim(U+W) = 4 \\ \dim \mathbb{R}^4 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^4$$

(só 0,2 se não mostrou que $\dim U = 3$)

4) Considere o subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$,

$G = \{ p \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) + p'(-1) = 0 \ e \ p(1) = 0\}$

a) (1,5) Determine uma base para G

b) (1,0) Encontre um subespaço vetorial H de $P_3(\mathbb{R})$ tal que

$P_3(\mathbb{R}) = G \oplus H$

RESOLUÇÃO (a) Seja $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$. Então $p'(t) = b + 2ct + 3dt^2$ e assim

$$0 = p(-1) + p'(-1) = (a - b + c - d) + (b - 2c + 3d)$$
$$= a - c + 2d,$$
$$0 = p(1) = a + b + c + d,$$

0,8

$$G = \{ a + bt + ct^2 + dt^3 : a - c + 2d = 0 \ e \ a + b + c + d = 0 \}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = c - 2d \\ b = -2c + d \end{cases}$$

$$a + bt + ct^2 + dt^3 = (c - 2d) + (-2c + d)t + ct^2 + dt^3$$
$$= c\underbrace{(1 - 2t + t^2)}_{p_1(t)} + d\underbrace{(-2 + t + t^3)}_{p_2(t)}$$

$G = [p_1(t), p_2(t)]$ é o subespaço vetorial gerado por $p_1(t)$ e $p_2(t)$

$\alpha = \{ p_1(t), p_2(t) \}$ é base de G

0,7

b) $\alpha = \{ p_1(t) = 1 - 2t + t^2 \; ; \; p_2(t) = -2 + t + t^3 \}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$G = [\, 1 - 2t + t^2 \, , \, -3t + 2t^2 + t^3 \,]$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{matriz escalonada}$$

Logo $\beta = \{ 1 - 2t + t^2 , -3t + 2t^2 + t^3 , t^2 , t^3 \}$ é base de $P_3(\mathbb{R})$.

Tomamos $H = [\, t^2 , t^3 \,]$ e temos que

0,7

$$G + H = [\, 1 - 2t + t^2 , -3t + 2t^2 + t^3 , t^2 , t^3 \,] = P_3(\mathbb{R})$$

pois β é base de $P_3(\mathbb{R})$. Como

$$4 = \dim P_3(\mathbb{R}) = \dim(G + H) = \dim G + \dim H - \dim G \cap H$$
$$= 2 + 2 - \dim(G \cap H)$$
$$\Longrightarrow \dim G \cap H = 0 ,$$

temos que $G \cap H = \{0\}$ e $P_3(\mathbb{R}) = G \oplus H$

0,3

0,3 para H correta mas sem justificativa

5) Sejam $V = P_1(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\alpha = \{1+t,\ 1-t\}$

a) (1,0) Seja $\beta = \{p(t), q(t)\}$ uma base de $P_1(\mathbb{R})$. Se $A = [I]_\beta^\alpha$

determine $p(t)$ e $q(t)$.

b) (1,0) Se $[p_1]_\alpha = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ calcule $p_1(-1)$ e $[p_1]_\beta$

RESOLUÇÃO. (a)

$[1+t]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 1+t = p(t) - q(t)$

$[1-t]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 1-t = p(t) + 2q(t)$

0,5 $\quad (*)\begin{cases} p(t) - q(t) = 1+t \\ p(t) + 2q(t) = 1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(t) = 1+t+q(t) \\ \cancel{1}-t = \cancel{1}+t+3q(t) \Rightarrow 3q(t) = -2t \end{cases}$

0,5 $\quad \boxed{q(t) = -\frac{2}{3}t}$ e $\boxed{p(t)} = 1+t-\frac{2}{3}t = \boxed{1+\frac{t}{3}}$

(b) $[p_1]_\alpha = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1(t) = -3(1+t)+7(1-t) = 4-10t$

$\boxed{p_1(-1) = 4+10 = 14}$

0,5

$[p_1]_\beta = [I]_\beta^\alpha [p_1]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+7 \\ 3+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix}$

0,5

a montagem (*) vale 0,5