Gabarito

1.- a) Temos que

$$\left| x \cos\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x|$$

Assim $-|x| \leq x \cos\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) \leq |x|$.

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} -|x| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$. Pelo teorema do confronto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cos\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) = 0$ $\longrightarrow$ 1,5 pt

b) f é contínua em $(0,0)$ pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) = 0 = f(0,0)$$ $\longrightarrow$ 1,0 pt

2.- Seja $f(x,y,z) = \log(xy) + \log(yz) + \log(xz)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{y}{xy} + \frac{z}{xz}, \frac{x}{xy} + \frac{z}{yz}, \frac{y}{yz} + \frac{x}{xz}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}, \frac{1}{y} + \frac{1}{y}, \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{2}{x}, \frac{2}{y}, \frac{2}{z}\right)$$

$\longrightarrow$ 1,0 pt.

$\nabla f(1,1,1) = (2,2,2)$ $\longrightarrow$ 0,5 pt.

$(2,2,2)\cdot(x-1, y-1, z-1) = 0$

$2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0$

$$\boxed{x+y+z-3=0}$$

$\longrightarrow$ 1,0 pt.

3.a)

$\nabla f(x,y) = (1 - 2\pi xy\cos(\pi(x^2+y^2)), -sen(\pi(x^2+y^2)) - 2\pi y^2\cos(\pi(x^2+y^2)))$ 0,75 pt

$\nabla f(0,0) = (1,0)$

$D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1,0) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 0,75 pt

b) A taxa de variação de f no ponto (0,0) é máxima na direção do vetor $\nabla f(0,0) = (1,0)$. O valor da taxa máxima no ponto (0,0) é 1 pt

$|\nabla f(0,0)| = 1$.

4.a)

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x\, f'(x^2+y^2)$ 0,4, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y\, f'(x^2+y^2)$ 0,4

Portanto $y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ 0,4

b) $g(x,y) = k$

$\nabla g(x,y) = (2x\, f'(x^2+y^2), 2y\, f'(x^2+y^2))$ 0,5

$\nabla g(1,1) = (2f'(2), 2f'(2)) = (2,2)$

$\nabla g(1,1) \cdot (x-1, y-1) = 0$

$(2,2) \cdot (x-1, y-1) = 0$

$\boxed{x + y - 2 = 0}$ 0,8