Instituto de Física Gleb Wataghin
UNICAMP
F315 Mecânica Geral - Prova 2 - turmas A e B
1o. Semestre de 2012

Nome: Gabarito **RA:** **Turma:**

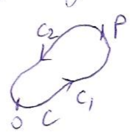
Esta prova contém 5 folhas. Pode-se usar o verso destas folhas para a resolução dos exercícios e para rascunho.

1. (a) **Mostre que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ é condição necessária para se escrever univocamente uma função energia potencial associada à força $\vec{F}$.** (2 pontos)

   (b) **Encontre, quando possível, a função energia potencial $V(x, y, z)$ associada às seguintes forças:**
   i. $\vec{F}(x, y, z) = Ay\hat{\mathbf{x}} + Bx\hat{\mathbf{y}}$ (1 pontos)
   ii. $\vec{F}(x, y, z) = Ax\hat{\mathbf{x}} + By\hat{\mathbf{y}} + Cz\hat{\mathbf{z}}$ (2 pontos)
   (A, B e C são constantes e $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ são os versores em coordenadas cartesianas associados às coordenadas x, y e z, respectivamente).

   Dado:
   Teorema de Stokes:
   $\int_C \vec{A}.d\vec{r} = \int\int_S \hat{\mathbf{n}}.(\vec{\nabla} \times \vec{A})ds$
   onde S é a superfície no espaço limitada pela curva fechada C e $\vec{A}$ é um vetor qualquer.

a) Segundo o Teorema de Stokes, se $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0 \Rightarrow \int_C \vec{F}.d\vec{r} = 0 \Rightarrow$



$\Rightarrow \int_{C_1} + \int_{C_2} = 0 \Rightarrow \int_{O\,C_1}^{P} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{O\,C_2}^{P} \vec{F}.d\vec{r} \Rightarrow$ a integral não depende do caminho de integração e esta é a condição para definir a energia potencial como $V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_S}^{\vec{r}} \vec{F}.d\vec{r}$.

b) i) $\vec{\nabla}\times\left[Ay\hat{x} + Bx\hat{y}\right] = (A-B)\hat{z} \neq 0$ (pois $A \neq B$) $\Rightarrow \nexists\, V(\vec{r})$

ii) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \Rightarrow V(\vec{r}) = -\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} Ax\,dx - \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} By\,dy - \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} Cz\,dz =$

$V(\vec{r}) = -\frac{Ax^2}{2} - \frac{By^2}{2} - \frac{Cz^2}{2}$

Nome: Gabarito RA: Turma:

2. (a) Demonstre que um corpo sujeito a uma força central atrativa cujo módulo varia com o inverso do quadrado da distância tem suas trajetórias descritas como elipses, parábolas ou hipérboles. (Indique explicitamente se houver alguma restrição sobre o Momento Angular $\vec{L}$ na sua demonstração). (2,5 pontos)

(b) Encontre o raio da única trajetória circular possível. (2,5 pontos)

Dados:

Equação das cônicas com foco em $r = 0$:

$\frac{1}{r} = B + A\cos\theta$,

Componentes da aceleração em coordenadas polares:

$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2$

$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$,

Se $r = \frac{1}{u}$ então $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$.

a) $\vec{F}(r) = -\frac{K}{r^2}\hat{r}$ $(K>0)$ $\Longrightarrow$ Eqs do Movimento:

$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{K}{r^2}$ (1) e $mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt} = 0 \Longrightarrow L = mr^2\dot{\theta} = \text{const.}$ (2)

(1) $\Longrightarrow m\ddot{r} = -\frac{K}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}$, Usando $r = \frac{1}{u}$ e o dado acima:

$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{mK}{L^2}$ que é a equação de um osc. harmônico forçado cuja solução é:

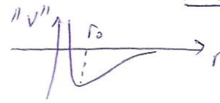
$$\boxed{u = \frac{1}{r} = \frac{mK}{L^2} + A\cos(\theta - \theta_0)}$$

que é a equação de uma cônica com foco em $r=0$, orientada em θ_0, no plano (r,θ)

b) O potencial efetivo:

$"V(r)" = -\int_{r_s}^{r}\left(-\frac{K}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}\right)dr = -\frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$ $(r_s \to \infty)$

para $K<0$ e $\boxed{L \neq 0}$ $\Longrightarrow$ restrição sobre L



$\Longrightarrow \frac{d"V"}{dr}\Big|_{r=r_0} = 0 \Longrightarrow \boxed{r_0 = \frac{L^2}{mK}}$