Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
EE400 - Métodos da Engenharia Elétrica
$1^{\underline{a}}$ prova - 10/09/2008 - prof. Rafael

1) Parametrize e calcule o comprimento de um ciclo da curva ciclóide de raio R. (A ciclóide de raio R é definida como a curva descrita por um ponto fixo sobre a borda de um disco de raio R quando este roda, sem deslizar, sobre uma superfície plana.)

2) Considere a curva dada por $\vec{r}(u) = cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{u}{a}\right)\vec{i} + u\vec{k}$, $-a \leq u \leq a$. Dê uma expressão parametrizada para a superfície gerada pela rotação desta curva em torno do eixo z e calcule o fluxo do vetor $\vec{F} = (2x - e^y)\vec{i} + (cosh(x) - 3y + z^2)\vec{j} + 2z\vec{k}$ através desta superfície.
Sugestão: reescreva a equação da curva no sistema:
$\vec{i'} = cos(v)\vec{i} + sen(v)\vec{j}$
$\vec{j'} = -sen(v)\vec{i} + cos(v)\vec{j}$.

3) Calcule a integral de linha $\oint_C \vec{F} d\vec{r}$, sendo $\vec{F} = x^2y(\vec{i} - \vec{j})$ e C o quadrado contido no plano xy, delimitado por: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$

4) Dado $\vec{v}(r, \phi, z) = \frac{K}{r}\vec{a_\phi}$, calcule $\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$, onde γ é uma curva fechada no plano $z = 0$ delimitada por $r = 1$, $r = 2$, $\phi = 0$, $\phi = \pi/4$.

5) Calcule $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$ sendo $\vec{v} = r\vec{a_\phi}$ (em coordenadas esféricas) e C o círculo de raio unitário, paralelo ao plano xy com centro em $(0, 0, 2)$ (em coordenadas cartesianas.)

Fórmulas:

Em coordenadas cilíndricas:

$$d\vec{l} = dr\ \vec{a_r} + r\ d\phi\ \vec{a_\phi} + dz\ \vec{a_z}$$
$$grad(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{a_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{a_\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{a_z}$$
$$div(\vec{v}) = (\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$rot(\vec{v}) = (\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z})\vec{a_r} + (\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r})\vec{a_\phi} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi})\vec{a_z}$$

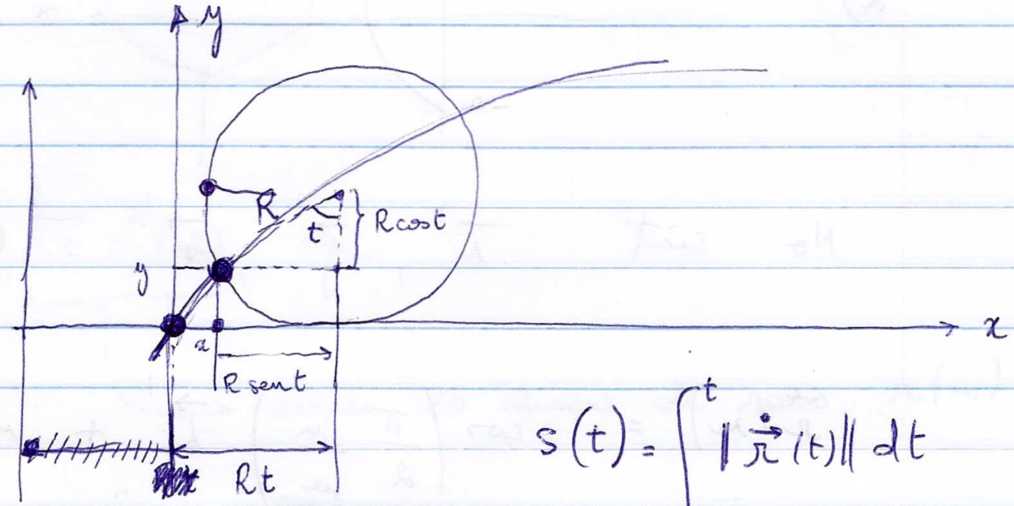
Em coordenadas esféricas:

$$d\vec{l} = dr\vec{a_r} + r\ sen\theta\ d\phi\ \vec{a_\phi} + r\ d\theta\vec{a_\theta}$$
$$grad(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{a_r} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{a_\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{a_\theta}$$
$$div(\vec{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial (sen\theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$
$$rot(\vec{v}) = \frac{1}{rsen\phi}(\frac{\partial (v_\phi sen\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi})\vec{a_r} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta})\vec{a_\phi} + \frac{1}{r}(\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r})\vec{a_\theta}$$

Teorema de Gauss: $\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\ dA = \int_T div\vec{F}\ dV$
Teorema de Stokes: $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\ dA$

EE-400 . 1ª prova . 10/9/08 - Prof. Rafael

1)



$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt$$

$$\begin{cases} x(t) = Rt - R\,\text{sen}\,t \\ y(t) = R - R\cos t \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = R\left[(t - \text{sen}\,t)\,\vec{i} + (1-\cos t)\,\vec{j} \right]$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = R\left[(1-\cos t)\,\vec{i} + \text{sen}\,t\,\vec{j} \right]$$

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = R\sqrt{(2 - 2\cos t)} = \sqrt{2}\,R\sqrt{(1-\cos t)}$$

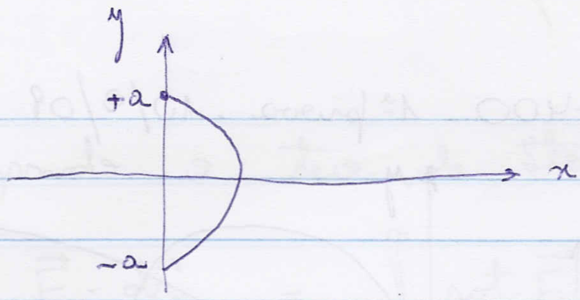
Obs.: $\left[1 - \cos t = 2\,\text{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) \right]$

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 2R\,\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$s = \int_0^{2\pi} \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt = 2R\int_0^{2\pi} \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4R\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 4R\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = 8R \Longrightarrow \boxed{s = 8R}$$

2)



No sist, $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$, $\vec{k}\,'$: (sist rotacionado de v rad. em relação ao sist $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

$$\vec{r}(u) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{u}{a}\right)\vec{i}\,' + u\,\vec{k}\,'$$

substituindo: $\vec{i}\,' = \cos v\,\vec{i} + \operatorname{sen} v\,\vec{j}$

$\vec{k}\,' = \vec{k}$

$$\vec{r}(u,v) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{u}{a}\right)\left(\cos v\,\vec{i} + \operatorname{sen} v\,\vec{j}\right) + u\,\vec{k}$$

Portanto:

$$S: \boxed{\vec{r}(u,v) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{u}{a}\right)\cos v\,\vec{i} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{u}{a}\right)\operatorname{sen} v\,\vec{j} + u\,\vec{k}}$$

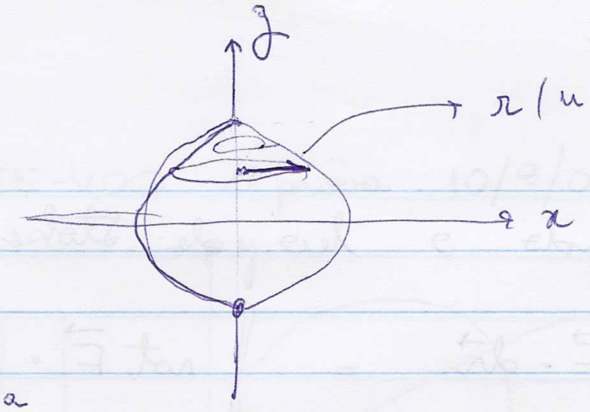
$$-a \leq u \leq a \,, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$I = \oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dA$$

Do teorema de Gauss: $I = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\, dV$

Mas $\operatorname{div}\vec{F} = 2 - 3 + 2 = 1$

Portanto $I = \iiint dV$ = volume do sólido dado



$$r(u) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{u}{a}\right)$$

$$V = \int_{-a}^{a} \underbrace{\pi r^2(u)}_{\text{área do disco de raio } r(u)}\, du$$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{u}{a}\right) du$$

$$w = \frac{\pi}{2}\frac{u}{a} \Longrightarrow dw = \frac{\pi}{2a} du$$

$$\Longrightarrow \quad V = \frac{2a}{\cancel{\pi}} \cdot \cancel{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 w \, dw =$$

$$= \cancel{2}a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2w}{\cancel{2}} dw = a\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dw + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2w \, dw\right]$$

$$= a\left[\pi + \left.\frac{\operatorname{sen} 2w}{2}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right] = a\pi$$

Portanto $\boxed{I = a\pi}$

3) Utilizando o teo. de Stokes:

$$I = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\ dA$$

sendo S a superfície, no plano xy, delimitada por $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$.

Dado que S está contida no plano xy tem-se que: $\begin{cases} \vec{n} = \vec{k} \\ dA = dx\,dy \end{cases}$

Além disso: $\text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{k} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} =$

$= -2xy - x^2$

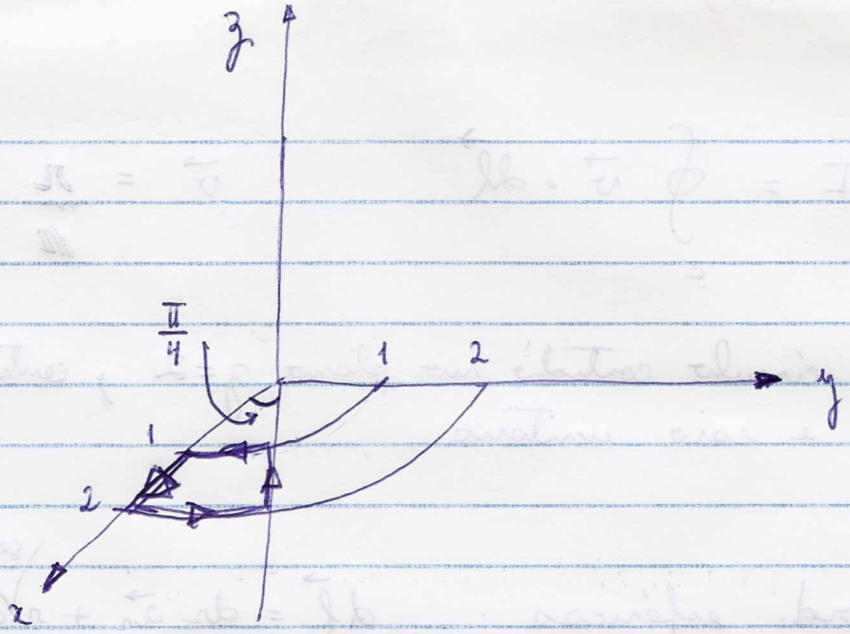
Portanto: $I = -\int_0^1\int_0^1 (2xy + x^2)\,dx\,dy$

$= -\int_0^1 \left(2y\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy = -\int_0^1 \left(y + \dfrac{1}{3}\right) dy =$

$= -\left(\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{3}y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = -\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{5}{6}$

$$\boxed{I = -\frac{5}{6}}$$

4)



$$I = \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Pelo teorema de Stokes:

$$I = \iint_S \text{rot}\, \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\text{rot}\, \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \vec{a}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{a}_\phi + \left(\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \vec{a}_z$$

sendo $v_r = 0$, $v_\phi = \frac{K}{r}$, $v_z = 0$

Portanto $\text{rot}\, \vec{v} = 0$

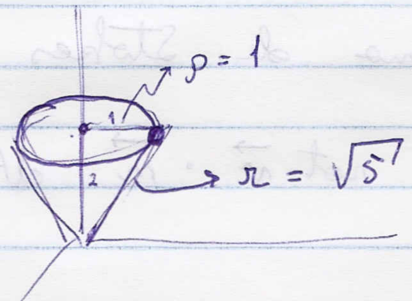
Portanto. $\boxed{I = 0}$

5) $$I = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \qquad \vec{v} = r\,\vec{a}_\phi$$

C = círculo contido no plano $z = 2$, centro em $(0,0,2)$ e raio unitário

Em coord. esféricas: $d\vec{l} = dr\,\vec{a}_r + r\,\text{sen}\,\theta\,d\phi\,\vec{a}_\phi + r\,d\theta\,\vec{a}_\theta$

Portanto $\vec{v} \cdot d\vec{l} = r^2\,\text{sen}\,\theta\,d\phi$



Para todos os pontos do trajeto tem-se

r = constante $= \sqrt{5}$

θ = constante $= \text{arcsen}\left(1/\sqrt{5}\right)$

Logo $$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} r^2\,\text{sen}\,\theta\,d\phi = \frac{5}{\sqrt{5}}\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\sqrt{5}$$

$$\boxed{I = 2\pi\sqrt{5}}$$

(obs.: o cálculo através do teo. de Stokes é mais longo)