ME-210 Probabilidade I

Lista 6

1. Seja X a v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor de k.
(b) Calcule $\mathbf{P}(1/4 < X < 1/2)$.
(c) Calcule $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{Var}(X)$, $\mathbf{E}(e^X)$.
(d) Determine a f.d.a. de X.

2. Se Y tem distribuição Uniforme no intervalo $(0, 5)$, qual é a probabilidade da equação $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ ter ambas as raizes reais?

3. Suponha que ônibus partam de Barão Geraldo para Guará a cada 15 minutos começanco às 5:00 e indo até 24:00. Ônibus para o Centro partem a cada 15 minutos começando ás 5:05 e indo até 00:05. André tem duas namoradas, uma em Guará e outra no Centro. Ele chega sempre no terminal em um horário distribuído uniformemente entre 18:00 e 19:00 e pega o primeiro ônibus que sai para o centro ou para Guará.
(a) Em um dado dia, qual a probabilidade dele visitar a namorada em Guará?
(b) Em um mês (30 dias) quantas vezes espera-se que ele veja a namorada do Centro?

4. Seja X uma v.a. Exponencial com parâmetro λ. Ache o valor de a que minimiza $\mathbf{E}|X - a|$.

5. O tempo que um aparelho de TV funciona (até quebrar) tem distribuição Exponencial com média 8 anos. Se José comprou um aparelho de TV usado, calcule a probabilidade de que este aparelho vai durar pelo menos mais 4 anos.

6. Na fabricação de parafusos, os parafusos tem que ter diâmetro entre d_1 e d_2, senão eles são considerados defeituosos. Para controle de qualidade é feito um teste "passa - não passa", o parafuso é aceito, se ele não passa numa abertura de diâmetro d_1, mas passa numa abertura de diâmetro d_2. Suponha que o diâmetro D de um parafuso é uma v.a. Normal com média $(d_1 + d_2)/2$ e variância $(d_2 - d_1)^2/16$.
(a) Ache a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

(b) Se, em vez de saber a variância, você sabe que $d_1 = 40$ mm, $d_2 = 50$ mm e que 10% dos parafusos são rejeitados, qual é $\mathbf{Var}D$?

7. Suponha que o tempo de viagem entre sua casa e UNICAMP tem distribuição Normal com média 40 minutos e desvio padrão 5 minutos. Se você tem uma prova as 10:00 e quer que probabilidade de chegar atrasado seja no máximo 1%, a que horas você deve sair de casa?

8. Um engenheiro de segurança de trânsito estima que 20% de todos os acidentes no trânsito poderiam ser evitadas se os motoristas fizessem a revisão periódica nos carros. Se estes dados estão corretos, calcule, **aproximadamente**, a probabilidade de que entre 86 acidentes ocorridos no último final de semana no estado de São Paulo, entre 10 e 20 (inclusive) acidentes poderiam ter sido evitados pela revisão periódica.

9. Determine um número k tal que a probabilidade de que o número de caras obtido em 1000 lançamentos de uma moeda honesta esteja entre k e 510, seja aproximadamente 0.5.

10. Seja X uma v.a. contínua com densidade f. Ache a densidade de $Y = aX + b$, se $a < 0$.

9. Seja X uma v.a. Normal $(0, 1)$. Mostre que $Y = \sigma X + \mu$ é Normal (μ, σ^2).

ME-210A: Resolução da Lista 06

Resolução extra-oficial feita por um dos monitores.

Questão 1:

a Já que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade, ela deve satisfazer a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(x)\,dx} = 1$$

Logo

$$\int_{0}^{1} \mathrm{f(x)\,dx} = 1 \Rightarrow \frac{k}{3}(1-0) = 1 \Rightarrow k = 3$$

b

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 3\mathrm{x}^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3}$$

Logo

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) \cong 0,1094$$

c

- **Esperança:**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{xf(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 3\mathrm{x}^3\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}(1^4 - 0^4) \Rightarrow E[X] = \frac{3}{4}$$

- **Variância:** Como

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

precisamos apenas calcular $E[X^2]$.

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x^2f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 3\mathrm{x}^4\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}(1^5 - 0^5) \Rightarrow E[X^2] = \frac{3}{5}$$

Logo

$$Var[X] = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow Var[X] = \frac{3}{80}$$

- **Esperança de e^X:**

$$E[e^X] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e^xf(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \mathrm{e^x3x^2}\,\mathrm{d}x = 3\int_{0}^{1} \mathrm{e^xx^2}\,\mathrm{d}x$$

Integrando por partes, temos

$$E[e^X] = 3\left[(1^2e^1 - 0^2e^0) - 2\int_{0}^{1} \mathrm{xe^x}\,\mathrm{d}x\right]$$

Integrando novamente por partes

$$E[e^X] = 3\left[e - 2\left(1e^1 - 0e^0 - \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\,\mathrm{d}x\right)\right] = 3[e - 2(e - e + 1)] \Rightarrow E[e^X] = 3(e-2)$$

d.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{f(y)}\,\mathrm{d}y = \int_0^x 3\mathrm{y}^2\,\mathrm{d}y = x^3 - 0^3 \Rightarrow F_X(x) = x^3, \text{ se } 0 \geq x < 1,$$

e $F_X(x) = 0$ para $x \leq 0$, $F_X(x) = 1$ para $x \geq 1$.

Questão 2:

A equação de 2º grau de x terá duas raízes reais se, e somente se, $\Delta \geq 0$, onde $\Delta = (4Y)^2 - 4 \times 4 \times (Y+2)$. Logo, Y deve satisfazer

$$16Y^2 - 16Y^2 - 32 \geq 0 \Rightarrow Y^2 - Y - 2 \geq 0$$

Esta desigualdade é satisfeita para os valores $Y \leq -1$ e $Y \geq 2$. Logo, a probabilidade desejada é

$$P(\text{equação ter ambas as raízes reais}) = P(Y \leq -1) + P(Y \geq 2)$$

Como $Y \sim U(0,5)$, $Y \in [0,5]$. Então

$$P(\text{equação ter ambas as raízes reais}) = 0 + 1 - \int_0^2 \frac{1}{5}\,\mathrm{d}x = 0 + 1 - \frac{2}{5}$$

Portanto

$$P(\text{equação ter ambas as raízes reais}) = \frac{3}{5}$$

Questão 3:

Seja $X \sim U(0,60)$ a variável aleatória correspondente ao tempo (em minutos) que André chega no terminal após as 18:00h.

a André visita sua namorada em Guará se ele chegar ao terminal nos horários: entre 18:05h e 18:15h, entre 18:20h e 18:30h, entre 18:35h e 18:45h ou entre 18:50h e 19:00h. Isso pode ser traduzido em

$$P(\text{visitar a namorada em Guará}) = P(5 < X \leq 15) + P(20 < X \leq 30) + P(35 < X \leq 45)$$
$$+ P(50 < X \leq 60)$$

Como

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{60}\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{60}$$

Temos

$$P(\text{visitar a namorada em Guará}) = \frac{10+10+10+10}{60}$$

$$P(\text{visitar a namorada em Guará}) = \frac{2}{3}$$

b A probabilidade de, em um dado dia do mês, André visitar a namorada do Centro é

$$p = 1 - P(\text{visitar a namorada em Guará}) = \frac{1}{3}$$

Seja Y o número de vezes que André visita a namorada do Centro em um mês. Assim, $Y \sim bin(30, \frac{1}{3})$. O número esperado de vezes que ele a visita é a esperança de Y. Logo

$$E[Y] = np = 30 \times \frac{1}{3} \Rightarrow E[Y] = 10$$

Questão 4:

$$\begin{aligned} E|X - a| &= \int_0^a (a-x)\lambda e^{-\lambda x} dx + \int_a^\infty (x-a)\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= a(1 - e^{\lambda a}) - \int_0^a x\lambda e^{-\lambda x} dx + \int_a^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx - a e^{-\lambda a}. \end{aligned}$$

Derivando em a, temos

$$1 - e^{-\lambda a}(1 - \lambda a) - \lambda a e^{-\lambda a} - \lambda a e^{-\lambda a} - e^{-\lambda a}(1 - \lambda a) = 1 - 2e^{-\lambda a}.$$

Portanto, $E|X - a|$ é minima no ponto $a = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Questão 5:

Seja X o tempo que o aparelho funciona (até quebrar). Uma vez que a média da distribuição exponencial é de 8 anos, sua taxa é de $\lambda = \frac{1}{8}$ anos^{-1}. Então, $X \sim exp(\frac{1}{8})$. Lembrando que a variável aleatória exponencial não tem memória, temos que

$$P(X > t + 4 | X > t) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F_X(4)$$

onde t é o tempo de uso da TV antes de José tê-la comprado. Como

$$F_X(4) = \int_0^4 \frac{1}{8} \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\mathrm{x}} \, \mathrm{d}x = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

obtemos

$$P(X > t + 4 | X > t) = e^{-\frac{1}{2}}$$

Questão 6:

a

$$P(\text{ser defeituoso}) = 1 - P(d_1 < D < d_2) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{d_1 - (d_1 + d_2)/2}{(d_2 - d_1)/4} < \frac{D - (d_1 + d_2)/2}{(d_2 - d_1)/4} < \frac{d_2 - (d_1 + d_2)/2}{(d_2 - d_1)/4}\right) = 1 - P(-2 < X < 2)$$

Logo

$$P(\text{ser defeituoso}) = 1 - (\Phi(2) - \Phi(-2)) = 1 - \Phi(2) + (1 - \Phi(2)) = 2(1 - \Phi(2))$$

Substituindo os valores

$$P(\text{ser defeituoso}) \cong 0,0456$$

b

$$P(\text{ser defeituoso}) = 0,1 = 1 - P(d_1 < D < d_2) \Rightarrow 0,9 = P(40 < D < 50)$$

Mas

$$P(40 < D < 50) = P\left(\frac{40-45}{\sigma} < \frac{D-45}{\sigma} < \frac{50-45}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-5}{\sigma}\right)$$

Então

$$P(40 < D < 50) = 2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1$$

Voltando à igualdade inicial

$$0,9 = 2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1 \Rightarrow \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0,95$$

Olhando na tabela da distribuição acumulada da variável aleatória normal padrão, temos

$$\frac{5}{\sigma} \cong 1,65 \Rightarrow \sigma \cong 3,03 \text{ mm}$$

Já que $Var[D] = \sigma^2$, concluímos que

$$Var[D] \cong 9,18 \text{ mm}^2$$

Questão 7:

Seja X o tempo de viagem entre a casa e a Unicamp e t o momento em que sai de casa (em minutos antes das 10:00h). Sabemos que $X \sim N(40, 25)$ e queremos determinar t tal que

$$P(X > t) \leq 0,01$$

. Ou seja

$$1 - P\left(\frac{X-40}{5} \leq \frac{t-40}{5}\right) \leq 0,01 \Rightarrow 0,99 \leq P\left(\frac{X-40}{5} \leq \frac{t-40}{5}\right) = \Phi\left(\frac{t-40}{5}\right)$$

Olhando na tabela da distribuição acumulada da variável aleatória normal padrão, temos

$$\frac{t-40}{5} \geq 2,33 \Rightarrow t \geq 51,65 \text{ min}$$

Assim, deve-se sair de casa cerca de $51,65$ minutos ou mais antes das 10:00h, ou seja, aproximadamente antes das 09h08min.

Questão 8:

Seja $X \sim bin(86,\ 0,2)$ o número de acidentes causados por falta de revisão periódica dos carros. Queremos calcular a probabilidade $P(10 \leq X \leq 20)$. Já que $np(1-p) = 0,2 \times 86(1-0,2) =$

$17,2\times0,8 = 13,76 > 10$, podemos utilizar a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal. Assim

$$P(10 \leq X \leq 20) = P(9,5 < X < 20,5) \cong P\left(\frac{9,5-17,2}{\sqrt{13,76}} < \frac{X-17,2}{\sqrt{13,76}} < \frac{20,5-17,2}{\sqrt{13,76}}\right)$$

$$P(10 \leq X \leq 20) \cong P\left(-2,0758 < \frac{X-17,2}{\sqrt{13,76}} < 0,8896\right) \cong \Phi(0,8896) - (1-\Phi(2,0758))$$

Substituindo os valores

$$P(10 \leq X \leq 20) \cong 0,8133 - 1 + 0,9812 \Rightarrow P(10 \leq X \leq 20) \cong 0,7945$$

Questão 9:

Seja $X \sim bin\left(1000, \frac{1}{2}\right)$ o número de caras obtidas em 1000 lançamentos de uma moeda honesta. Queremos calcular a probabilidade $P(k < X < 510) = 0,5$. Já que $np(1-p) = 1000\times0,5(1-0,5) = 500\times0,5 = 250 > 10$, podemos utilizar a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal. Assim

$$0,5 = P(k < X < 510) = P\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}} < \frac{X-500}{\sqrt{250}} < \frac{510-500}{\sqrt{250}}\right) \cong \Phi(0,6325) - \Phi\left(\frac{k-500}{15,8114}\right)$$

Logo

$$0,5 \cong 0,7357 - \Phi\left(\frac{k-500}{15,8114}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{k-500}{15,8114}\right) \cong 0,2357$$

Uma vez que este valor não existe na tabela da distribuição acumulada da variável aleatória normal padrão, devemos fazer

$$1-\Phi\left(\frac{500-k}{15,8114}\right) \cong 0,2357 \Rightarrow \Phi\left(\frac{500-k}{15,8114}\right) \cong 0,7643$$

Então

$$\frac{500-k}{15,8114} \cong 0,72 \Rightarrow k \cong 488,62$$

Já que o número de lançamentos deve ser um número inteiro, temos que

$$k \cong 489$$

Questão 10:

$Y = aX + b$, $a < 0$. Então,

$$F_Y(y) = P(aX+b \leq y) = P(X \geq (y-b)/a) = 1 - F_X((y-b)/a),$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{a} f_X((y-b)/a) = \frac{1}{|a|} f_X((y-b)/a).$$