3 Prova

MA-311 — Cálculo III

1 Semestre de 2008

Nome:	RA:	Prof.:

Esta prova tem um total de 5 questões valendo 10 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

Não destaque as páginas da prova!

1	2.0	
2	2.0	
3	2.0	
4	2.0	
5	2.0	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*2.0 pontos*)

   (a) Encontre o intervalo de convergência da série (teste os extremos): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\ 5^n}$

   (b) Encontre a série de Taylor em torno de $a = 1$ da função $f(x) = \frac{1}{x}$

2. (*2.0 pontos*)

   (a) (0.3) Mostre que $x = 0$ é um ponto ordinário para a equação

   $$(4 + x^2)y'' - 2y = 0 \qquad (*)$$

   (b) (0.7) Determine a fórmula de recorrência da solução em série da equação (*);

   (c) (0.7) Determine a fórmula para o coeficiente geral da solução da equação (*);

   (d) (0.3) Encontre a solução por série de potências da equação (*) dado que $y(0) = 4$ e $y'(0) = 5$.

3. (*2.0 pontos*) Considere a equação diferencial $6x^2y'' + 7xy' - (x^2 + 2)y = 0$. Responda as seguintes questões SEM calcular os coeficientes.

   (a) Escreva a solução geral em séries de potências em torno do ponto $x = 2$.

   (b) Qual o raio mínimo de convergência da série de potências em (a)?

   (c) Escreva a forma geral da solução em série de Frobenius em torno do ponto $x = 0$.

   (d) Qual o raio mínimo de convergência da série de Frobenius em (c)?

4. (*2.0 pontos*)

   (a) (0.3) Apresente a extensão ímpar da função

   $$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

   e esboce o gráfico no intervalo $-2 < x < 2$.

   (b) (1.7) Encontre a série de Fourier em senos da função acima.

5. (*2.0 pontos*) Usando o método de separação de variáveis encontrar a solução da seguinte equação da onda. **Explique detalhadamente como se resolve o problema**

   $$\begin{cases} 4y_{tt} = y_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ y(0,t) = 0, \quad y(\pi,t) = 0, & \\ y(x,0) = 0, \quad y_t(x,0) = \frac{1}{10}\text{sen } x & \end{cases}$$

MA311-2008-1^{O} Semestre – Gabarito – Prova 3/Noturno

Questão 1

(a): Pelo teste da razão, devemos ter,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} \frac{n5^n}{|x-3|^n} = \frac{|x-3|}{5} < 1,$$

ou seja, $|x-3| < 5$. Assim a série converje para $-2 < x < 8$.

+0,6

Para $x = -2$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2-3)^n}{n5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty.$$

+0,2

Para $x = 8$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8-3)^n}{n5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

+0,2

Portanto o intervalo procurado é $[-2, 8)$

(b): Reescrevendo f:

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-1+x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{1-(-(x-1))}$$

+0,5

Comparando com a série geométrica

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-1+x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{1-(-(x-1))} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n.$$

+0,5

Questão 2

(a): Temos que $P(x) = 4 + x^2$, assim $P(0) = 4 \neq 0$, portanto $x = 0$ é um ponto ordinário.

+0,3

(b): Seja $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, temos

$$\begin{aligned}(4+x^2)y'' - 2y &= (4+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [4(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n(n-1)-2)a_n]x^n = 0.\end{aligned}$$

Observando que $n(n-1) - 2 = (n-2)(n+1)$, podemos concluir que

$$a_{n+2} = -\frac{(n-2)}{4(n+2)}a_n \quad \text{(relação de recorrência).}$$

+0,7

(c): Temos:

$$\begin{aligned}
n = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = -\frac{-2}{4\cdot 2}a_0 = \frac{a_0}{4} \\
n = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_3 = -\frac{-1}{4\cdot 3}a_1 = \frac{1}{4\cdot 3}a_1 \\
n = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_4 = -\frac{0}{4\cdot 4}a_0 = 0 \\
n = 3 \quad &\Rightarrow \quad a_5 = -\frac{1}{4\cdot 5}a_3 = -\frac{1}{4\cdot 5}\frac{1}{4\cdot 3}a_1 = -\frac{1}{4^2\cdot 5\cdot 3}a_1 \\
n = 4 \quad &\Rightarrow \quad a_6 = -\frac{4}{4\cdot 6}a_4 = 0 \\
n = 5 \quad &\Rightarrow \quad a_7 = -\frac{3}{4\cdot 7}a_5 = \frac{3}{4\cdot 7}\frac{1}{4^2\cdot 5\cdot 3}a_1 = \frac{1}{4^3\cdot 7\cdot 5}a_1 \\
n = 7 \quad &\Rightarrow \quad a_9 = -\frac{5}{4\cdot 9}a_7 = -\frac{5}{4\cdot 9}\frac{1}{4^3\cdot 7\cdot 5}a_1 = \frac{1}{4^4\cdot 9\cdot 7}a_1
\end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$n = 2k \quad \Rightarrow \quad a_{2k} = 0 \;\; \forall\, k \geq 1,$$

+0,3

$$n = 2k+1 \quad \Rightarrow \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{4^k(2k+1)(2k-1)}a_1 \;\; \forall\, k \geq 1.$$

+0,4

(d): Solução geral:

$$y = a_0\left(1+\frac{x^2}{4}\right) + a_1\left(x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4^k(2k+1)(2k-1)}x^{2k+1}\right).$$

Se $y(0) = 4 = a_0$ e $y'(0) = 5 = a_1$ temos

$$y = 4\left(1+\frac{x^2}{4}\right) + 5\left(x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4^k(2k+1)(2k-1)}x^{2k+1}\right).$$

+0,3

Questão 3

(a): Observe que $x = 2$ é um ponto ordinário, portanto a solução geral tem a forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n.$$

(só a fórmula 0,3) **+0,5**

(b): Temos que $P(x) = 6x^2$ cuja única raíz é $x = 0$, portanto o raio mínimo é a distância de 2 até 0, que é igual a 2.

+0,5

(c): Temos que

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{7x}{6x^2} = \frac{7}{6},$$
$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{-(x^2+2)}{6x^2} = -\frac{1}{3},$$

assim $x = 0$ é um ponto singular regular.

Equação inicial:

$$0 = r(r-1) + \frac{7}{6}r - \frac{1}{3} = r^2 + \frac{1}{6}r - \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2} \quad e \quad r_2 = -\frac{2}{3}.$$

Como $r_1 - r_2 = 7/6$ não é um natural, temos:

$$y_1 = |x|^{\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1/2)x^n\right) \quad e \quad y_2 = |x|^{-\frac{2}{3}}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-2/3)x^n\right).$$

+0,5

(d): Como $x\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{7}{6}$ e $x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{-(x^2+2)}{6}$ são polinômios, e portanto como séries de potência convergem para todo x, temos que y_1 converge para todo x e y_2 converge para todo $x \neq 0$.

+0,5

Questão 4

(a): Todo correto, vale **0,3 pontos**.

(b): Fórmula dos coeficientes de Fourier em senos correta, e.g.

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^2 f(x)\text{sen}(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$$

onde $L = 2$, vale **0,5 pontos**.

$$b_n = \int_0^1 \text{sen}(\frac{n\pi}{2}x)\,dx$$

+ 0,4

$$b_n = -\frac{-2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}x)\Big|_0^1 = -\frac{-2}{n\pi}\left(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1\right)$$

+ 0,4

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 4k \\ \frac{2}{n\pi}, & n = 4k+1 \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 4k+2 \\ \frac{2}{n\pi}, & n = 4k+3 \end{cases}$$

+ 0,2

Conclusão: A série de Fourier é

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(4k+1)\pi}\text{sen}(\frac{(4k+1)\pi}{2}x) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(4k+2)\pi}\text{sen}(\frac{(4k+2)\pi}{2}x) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(4k+3)\pi}\text{sen}(\frac{(4k+3)\pi}{2}x)$$

+ 0,2.

Questão 5

1. Se $y(x,t) = X(x)T(t)$ é tal que $4T''(t)X(x) = T(t)X''(x)$ então

$$4\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (\lambda = constante\,positiva).$$

Assim

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad e \quad T''(t) + \frac{\lambda}{4}T(t) = 0.$$

+0,5

2. Temos que

$$\begin{aligned} &y(0,t) = 0 \quad e \quad y(\pi,t) = 0 \Rightarrow X(0) = X(\pi) = 0, \quad e \\ &y(x,0) = 0 \Rightarrow T(0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, X e T devem satisfazer

$$(1) \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad e \quad (2) \begin{cases} T''(t) + \frac{\lambda}{4}T(t) = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases}$$

+0,5

As soluções de (1) são $\lambda_n = n^2$ e $X_n(x) = a\sin(nx)$ para todo $n \geq 0$.
As soluções de (2) são, para $\lambda = n^2$, $T_n(t) = b\sin(\frac{n}{2}t)$.
Temos que $y_n(x,t) = \sin(nx)\sin(\frac{n}{2}t)$ é solução de

$$\begin{cases} 4y_{tt} = y_{xx} \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0 \\ y(x,0) = 0 \end{cases}$$

+0,5

Seja

$$y(x,t) = \sum_{n=0} c_n y_n(x,t) = \sum_{n=0} c_n \sin(nx)\sin(\frac{n}{2}t),$$

temos que

$$y_t(x,0) = \sum_{n=0} \frac{n}{2}c_n \sin(nx).$$

Por outro lado, queremos que $y_t(x,0) = \frac{1}{10}\sin x$. Basta escolhermos $c_n = 0 \ \ \forall n \neq 1$ e $c_1 = 1/5$.
Então nossa solução é

$$y(x,t) = \frac{1}{5}\sin(x)\sin(\frac{t}{2}).$$

+0,5