Gabarito da Prova 2 de MA311 - Cálculo III - Noturno **15/05/2009**

1.ª Questão. (2,5 pontos) Resolva por transformada de Laplace o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 2\delta(t - 2\pi), \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Resolução: Aplicamos a transformada de Laplace à equação

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{\delta(t - 2\pi)\}.$$

Utilizando as condições iniciais temos

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 2(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)) + 5\mathcal{L}\{y\} = (s^2 + 2s + 5)\mathcal{L}\{y\} - s - 2 = 2e^{-2\pi s}. \qquad 0,5 pontos$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s+2}{s^2+2s+5} + \frac{2e^{-2\pi s}}{s^2+2s+5}. \qquad 0,2 pontos$$

Como $s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + 4 = (s+1)^2 + 2^2$, re-escrevemos

$$\frac{s+2}{(s+1)^2+4} + \frac{2e^{-2\pi s}}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{(s+1)^2+2^2} + e^{-2\pi s}\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \qquad 0,6 pontos$$

$$= G(s) + \frac{1}{2}F(s) + e^{-2\pi s}F(s),$$

onde $G(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+2^2} = \mathcal{L}\{e^{-t}\cos(2t)\}$ e $F(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2+2^2} = \mathcal{L}\{e^{-t}\text{sen}(2t)\}$. 0,4 pontos

Agora, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-t}\text{sen}(2t) = f(t)$, $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{-t}\cos(2t)$ e usando a fórmula $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u_c(t)f(t-c)$, segue que

$$y = e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-t}\text{sen}(2t) + u_{2\pi}(t)e^{-(t-2\pi)}\text{sen}(2(t - 2\pi)). \qquad 0,2 + 02, +0,4 pontos$$

2.ª Questão. (1,5 pontos)(a) Calcule a transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ de

$$F(s) = \frac{(s - \frac{1}{2})(s - \frac{1}{3})}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

Resolução: Por frações parciais:

$$\frac{(s - \frac{1}{2})(s - \frac{1}{3})}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1}{6}\frac{1}{s-1} - \frac{5}{2}\frac{1}{s-2} + \frac{10}{3}\frac{1}{s-3}. \qquad 0,6 pontos$$

Temos

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{6}\frac{1}{s-1}\} = \frac{1}{6}e^t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{5}{2}\frac{1}{s-2}\} = -\frac{5}{2}e^{2t}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\{\frac{10}{3}\frac{1}{s-3}\} = \frac{10}{3}e^{3t} \qquad 0,6 pontos$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{(s - \frac{1}{2})(s - \frac{1}{3})}{(s-1)(s-2)(s-3)}\} = \frac{1}{6}e^t - \frac{5}{2}e^{2t} + \frac{10}{3}e^{3t} \qquad 0,3 pontos$$

(1,0 ponto)(b) Utilizando funções escada $u(t-a) = u_a(t)$ calcule a transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 4 \\ 2, & t \ge 4. \end{cases}$$

Resolução: Escrevemos utilizando funções escada:

$$f(t) = (1 - u_4(t))t + 2u_4(t) = u_4(t)(2 - t) + t = -u_4(t)(t - 4) - 2u_4(t) + t. \qquad 0,6 pontos$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -e^{-4s}\mathcal{L}\{t\} - 2e^{-4s} + \mathcal{L}\{t\} = -\frac{e^{-4s}}{s^2} - \frac{2e^{-4s}}{s} + \frac{1}{s^2}. \qquad 0,4 pontos$$

3.ª Questão. (2,0 pontos) Encontre a solução geral real do seguinte sistema linear homogêneo de e.d.o.'s usando o método de autovalores e autovetores

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Resolução: Autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$:

$$det(A - rI) = \begin{vmatrix} 1-r & -2 \\ 2 & 5-r \end{vmatrix} = (1-r)(5-r) + 4 = r^2 - 6r + 9 = 0.$$

Logo, $r = 3$ é um autovalor de multiplicidade dois. 0,2 pontos

Autovetores associados ao autovalor $r = 3$: temos que resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -y.$$

Assim, tomando $y = 1$ obtemos apenas um autovetor $\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 0,4 pontos

Para encontrar uma outra solução linearmente independente resolvemos o sistema $(A - rI)\eta = \xi$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + 2y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - y.$$

Logo, $\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, onde y é uma constante qualquer. Tomando $y = 0$, $\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. 0,4 pontos

Portanto, uma segunda solução é dada por:

$$\mathbf{x}^2 = \xi t e^t + \eta e^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^t \qquad 0,4 pontos.$$

A solução geral do sistema é:

$$\mathbf{x}_h = c_1 \mathbf{x}^1 + c_2 \mathbf{x}^2 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^t. \qquad 0,6 pontos$$

4.ª Questão.(2,0 pontos) Encontre a solução geral real do sistema linear não-homogêneo utilizando o método de variação dos parâmetros (indicando claramente a matriz fundamental)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -4e^{-t} \end{pmatrix}$$

dado que a solução do homogêneo associado é:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \text{sen}t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \text{sen}t \\ -\cos t + 2\text{sen}t \end{pmatrix}$$

Resolução: A matriz fundamental é:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\text{sen}t \\ e^{-t}(2\cos t + \text{sen}t) & e^{-t}(-\cos t + 2\text{sen}t) \end{pmatrix} \qquad 0,3 pontos$$

A solução geral será $\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}$ onde $\mathbf{u}$ satisfaz o sistema

$$\Psi(t)\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\text{sen}t \\ e^{-t}(2\cos t + \text{sen}t) & e^{-t}(-\cos t + 2\text{sen}t) \end{pmatrix}\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -4e^{-t} \end{pmatrix}. \qquad 0,3 pontos$$

Calculemos o determinante de $\Psi(t)$:

$$\begin{vmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\text{sen}t \\ e^{-t}(2\cos t + \text{sen}t) & e^{-t}(-\cos t + 2\text{sen}t) \end{vmatrix} = e^{-2t}(\cos t(-\cos t + 2\text{sen}t) - \text{sen}t(2\cos t + \text{sen}t)) = -e^{-2t}.$$

Temos

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t}\text{sen}t \\ -4e^{-t} & e^{-t}(-\cos t + 2\text{sen}t) \end{vmatrix}}{-e^{-2t}} = \frac{e^{-2t}(-\cos t + 2\text{sen}t + 4\text{sen}t)}{-e^{-2t}} = \cos t - 6\text{sen}t.$$

Logo,

$$u_1 = \int(\cos t - 6\text{sen}t)dt = \text{sen}t + 6\cos t + c_1. \qquad 0,5 pontos$$

Agora,

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t} \\ e^{-t}(2\cos t + \text{sen}t) & -4e^{-t} \end{vmatrix}}{-e^{-2t}} = \frac{e^{-2t}(-4\cos t - 2\cos t - \text{sen}t)}{-e^{-2t}} = 6\cos t + \text{sen}t.$$

Logo,

$$u_2 = \int(6\cos t + \text{sen}t)dt = 6\text{sen}t - \cos t + c_2. \qquad 0,5 pontos$$

A solução geral é

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\text{sen}t \\ e^{-t}(2\cos t + \text{sen}t) & e^{-t}(-\cos t + 2\text{sen}t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{sen}t + 6\cos t + c_1 \\ 6\text{sen}t - \cos t + c_2 \end{pmatrix}. \qquad 0,4 pontos$$

5.ª Questão.(1,0 ponto) Estude a convergência das sequências quando $n \to \infty$:

$$(a)\ a_n = \frac{\sqrt{3n^2+7}}{8n} \qquad (b)\ b_n = \cos\left(\frac{n-1}{n^2}\right)$$

Resolução: (0,5 pontos)(a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+7}}{8n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{7}{n^2}}}{8} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+0}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Portanto, a seqüencia é convergente e o seu limite é $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

(0,5 pontos)(b) Temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = 0$$

e como a função cosseno é contínua

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{n-1}{n^2}\right) = \cos(0) = 1.$$

Portanto, a seqüencia é convergente e o seu limite é um.