UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Física Gleb Wataghin
F 128 - 1^o semestre 2008 - Fernando Sato
Prova 3 (Gabarito) - Diurno - 23/06/2008

Problema 1: No esquema da figura abaixo, uma bala (com massa m=0,1 kg) é disparada em direção a um bloco de madeira (com massa M=100 kg) que está preso a uma mola (constante elástica k=1 N/m). Após a colisão da bala com o bloco de madeira a mola tem uma compressão máxima de d=1,0 m. (a) Calcule a energia potencial elástica da mola em função da sua compressão. (b) Quais as leis de conservação envolvidas no processo ? (c) Calcule a velocidade inicial da bala antes dela se chocar com o bloco de madeira. (Obsevações: desprezar o atrito entre o ar e a bala e entre o bloco de madeira e a mesa).

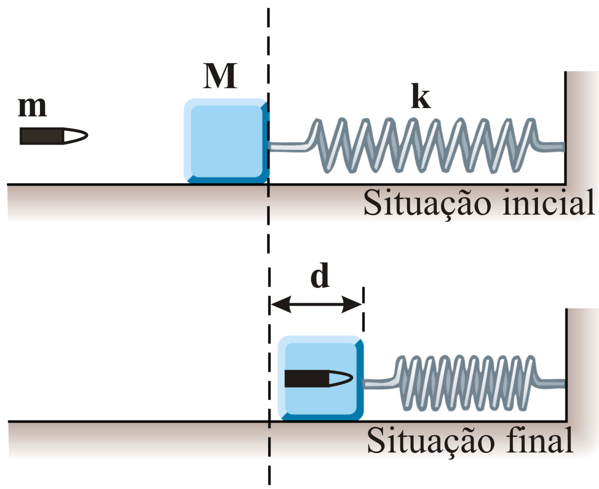

Figura 1: Projétil (bala) disparada em direção de um bloco de madeira, o bloco está preso a uma mola.

Item (a), Cálculo do potencial da mola

$$U(x) = -\int_0^d (-kx)\, dx = \frac{kd^2}{2}$$

Item (b), Leis de conservação envolvidas no processo?

Conservação do momento linear no instante da colisão e conservação da energia mecânica após a colisão.

Item (c), velocidade inicial da bala antes de se chocar com o bloco:
Pela conservação do momento linear no instante da colisão temos:

$$mv = (m + M)\, V \Rightarrow v = \frac{m + M}{m} V$$

v é a velocidade da bala antes de colidir e V é a velocidade da bala+bloco quando a bala colide com o bloco, e pela conservação da energia mecânica temos:

$$\frac{1}{2}(m + M)\, V^2 = \frac{kd^2}{2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{kd^2}{m + M}}$$

substituindo V para se obter v temos:

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{\frac{kd^2}{m+M}} = \frac{1}{m}\sqrt{kd^2\left(m+M\right)}$$

a velocidade final será:

$$v = \frac{1}{0,1}\sqrt{100,0+0,1} \cong 100 {}^{m}\!/_{s}$$

Problema 2: Uma barra uniforme de aço, medindo 1,0 m de comprimento e com massa M=6,0 kg, tem fixada em cada extremidade uma pequena esfera de massa m=1,0 kg. A barra gira em um plano horizontal, em torno de um eixo vertical que passa por seu ponto médio (figura abaixo). Em um dado instante, observa-se que ela está girando com velocidade angular de 40 rev/s. Em virtude do atrito do eixo, a barra chega ao repouso em 20 s mais tarde. Supondo constante o torque do atrito no eixo, calcule: (a) a aceleração; (b) o torque retardador devido ao atrito; (c) o trabalho total realizado pelo atrito no eixo; (d) o número de rotações efetuadas durante os 20 s. Use que o momento de inércia da barra em relação ao seu centro de massa é I=(ML^2)/12.

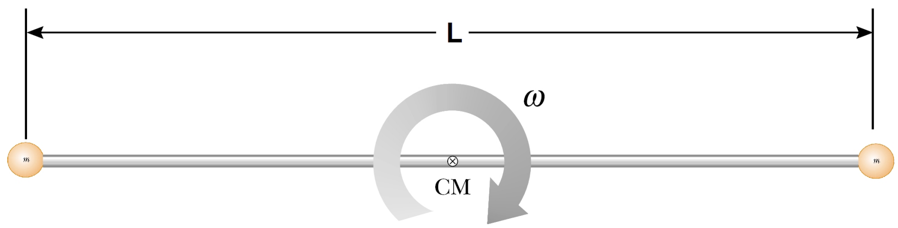

Figura 2: Barra com massa de 6,0 kg, com duas pequeníssimas esferas com massa m=1,0 kg gira em torno do seu centro de massa.

Item (a), como o torque é constante, a aceleração angular também é constante. Isso vale:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 40}{20} = 4\pi \left({}^{rad}\!/_{s}\right)$$

ou 2 rev/s.
Item (b), o torque é dado por:

$$\tau = I\alpha$$

Como o eixo de rotação está sobre o CM, é dado I_{barra}=ML^2/12. Como as esferas são pequenas, são consideradas massas pontuais.

$$I = I_{barra} + 2I_{esfera} = \tfrac{ML^2}{12} + 2m\left(\tfrac{L}{2}\right)^2 = \tfrac{L^2}{2}\left(\tfrac{M}{6} + m\right)$$
$$I = 1,0\left(kg.m^2\right)$$

o resultado do torque será:

$$\tau = 1,0.4\pi = 4\pi\,(N.m)$$

Item (c), o trabalho total realizado pelo atrito no eixo será:

$$W = \Delta K = \frac{I\omega_f}{2} - \frac{I\omega_i}{2} = -\frac{1,0.(4\pi)^2}{2} = -8\pi^2(J)$$

Item (d), o número de rotações efetuadas durante os 20 s, assumindo $\theta_0 = 0$ e α constante, será:

$$\theta\,(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \alpha\tfrac{t^2}{2}$$
$$\theta\,(t) = 80\pi t - 2\pi t^2$$
$$\theta\,(20) = 800\pi(rad)$$
$$N = \tfrac{\theta(20)}{2\pi} = 400$$

portanto N=400 voltas.

Problema 3: Um disco uniforme gira numa taxa de 120 revoluções por minuto em torno de um eixo sem atrito passando pelo seu centro. Uma barra fina de mesma massa que o disco, cujo comprimento é igual ao diâmetro do disco, cai sobre o disco em rotação de modo que uma de suas pontas fica sobre o centro do disco. Os dois passam então a girar juntos em torno do eixo de rotação do disco. a) Calcule a velocidade angular final do sistema em unidades de rad/seg. b) Calcule o porcentagem de energia cinética que é transformada em outras formas de energia neste processo.

Momento de inércia de um cilindro de massa M e raio R para um eixo perpendicular a sua superfície esférica passando pelo seu centro de massa é $MR^2/2$ e o momento de inércia de uma barra fina de massa M e comprimento L para um eixo perpendicular a direção de seu comprimento passando pelo seu centro de massa é igual a $ML^2/12$.

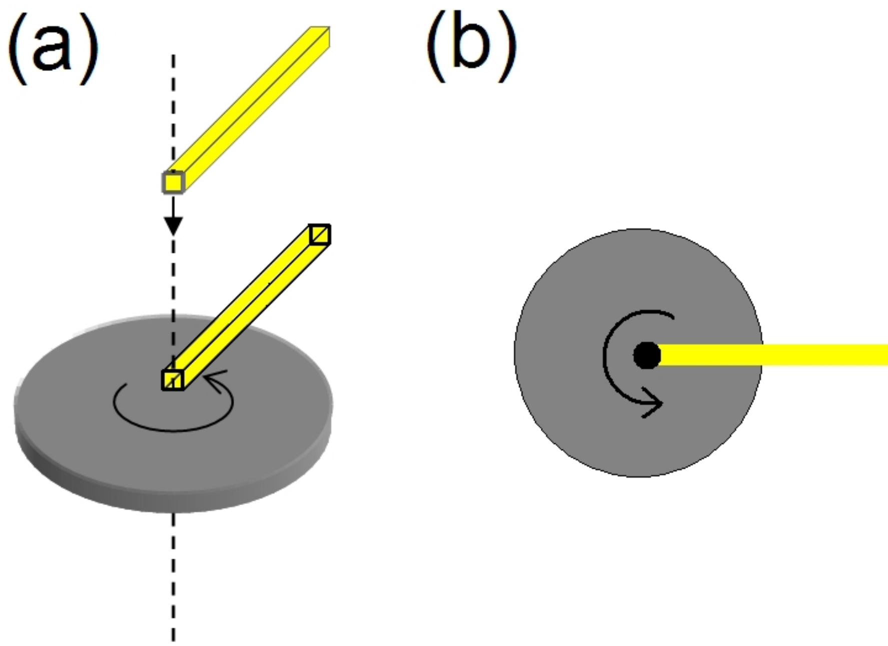

Figura 3: (a) Barra com comprimento igual ao diâmetro do disco cai sobre o disco e uma das suas pontas fica sobre o eixo de rotação do disco. (b) metade da barra fica no disco e metade da barra fica fora do disco.

Item (a),

Transformando as unidades da velocidade angular e utilizando o teorema dos eixos paralelos temos:

$$\begin{aligned}
&\omega_0 = 120\,[{}^{rev}\!/\!_{\min}] = 2\,[{}^{rev}\!/\!_{\min}] = 4\pi\left({}^{rad}\!/\!_{s}\right)\\
&I_{DCM} = {}^{1}\!/\!_{2}MR^2\\
&\cancel{I}_{BCM} = {}^{1}\!/\!_{12}ML^2 = {}^{1}\!/\!_{12}M\,(2R)^2 = {}^{1}\!/\!_{3}MR^2\\
&I_{Bponta} = \cancel{I}_{BCM} + MR^2 = {}^{1}\!/\!_{3}MR^2 + MR^2 = {}^{4}\!/\!_{3}MR^2
\end{aligned}$$

Pela conservação do momento angular:

$$\begin{aligned}
L_i = I_{DCM}\omega_0 &= (I_{Bponta} + I_{DCM})\,\omega_f = L_f\\
\omega_f &= \frac{{}^{1}\!/\!_{2}MR^2\omega_0}{{}^{4}\!/\!_{3}MR^2 + {}^{1}\!/\!_{2}MR^2} = \tfrac{3}{11}\omega_0 = \tfrac{12}{11}\pi\left({}^{rad}\!/\!_{s}\right)
\end{aligned}$$

Item (b)

$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{K_f - K_i}{K_i} = \frac{{}^{1}\!/_{2}\left({}^{4}\!/_{3}MR^2 + {}^{1}\!/_{2}MR^2\right)\left({}^{3}\!/_{11}\omega_0\right)^2 - {}^{1}\!/_{2}\left({}^{1}\!/_{2}MR^2\right)\omega_0^2}{{}^{1}\!/_{2}\left({}^{1}\!/_{2}MR^2\right)\omega_0^2}$$

$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{{}^{11}\!/_{6}\left({}^{3}\!/_{11}\right)^2 - {}^{1}\!/_{2}}{{}^{1}\!/_{2}} = 2\,\frac{11}{6}\,\frac{9}{11^2} - 1 = -\frac{8}{11}$$

$$\frac{\Delta K}{K_i} = -0,727 = -72,7\%$$

$72,7\%$ da energia cinética inicial é transformada em outras formas de energia.

Problema 4: Uma esfera sólida de massa M=1,5 kg e raio R=5 cm desce rolando (sem deslizar) um plano inclinado, tal como ilustrado na figura. A esfera é solta do topo da rampa, de uma altura h=0,49 m e percorre todo o plano. Considere g=10,0 m/s e I_{esf}=(2/5)MR^2.Encontre, na base do plano: a) A velocidade linear da esfera; b) Sua energia cinética de rotação;c) A fração de energia inicial que se transforma em energia cinética de translação.

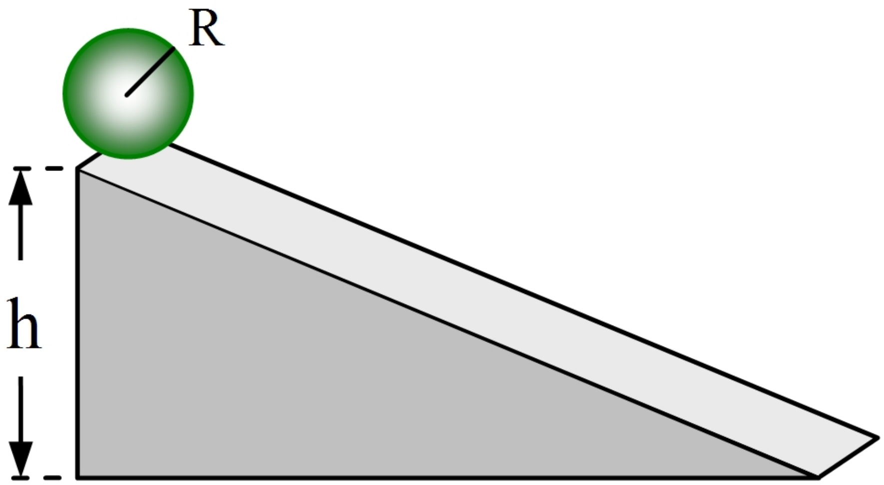

Figura 4: Esfera sobre um plano inclinado.

Item (a)
Por conservação de energia mecânica, temos que:

$$M\,g\,h \;=\; \tfrac{1}{2}M\,v^2 \;+\; \tfrac{1}{2}I_{CM}\,w^2$$
$$M\,g\,h \;=\; \tfrac{1}{2}M\,v^2 \;+\; \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{5}\;M\,R^2\right)\left(\tfrac{v}{R}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}\right)\;M\,v^2$$
$$v^2 = \tfrac{10}{7}g\,h \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\tfrac{10}{7}g\,h} = \sqrt{7,0}\;m/s$$

Item (b)
A energia cinética rotacional na base do plano será:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I_{CM}\,w^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\;M\,R^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{5}M\,v^2 = \frac{1}{5}\;\;(1,5)\;(7,0) = 2,10\;J$$

Item (c)
Toda a energia potencial gravitacional acumulada no topo do plano se transforma em energia cinética de rotação e translação. Assim, a fração de energia que se transforma em energia cinética de translação, na base do plano, será:

$$1 - \frac{K_{rot}}{K_{tot}} = 1 - \frac{(1/5)\;M\,v^2}{M\,g\,h}\; = 1 - \frac{2,10}{(1,5).(10).(0,49)} \approx 0,71 = 71\%$$