EE521 - 2º S/2005 - T. B - Prova 2 - 26/10/2005 (texto revisado)

Soluções

Questão 1. Uma sperfície cilíndrica de raio a e altura $2a$ está uniformemente carregada com densidade superficial σ_0. Tomando o eixo z coincidente com o eixo da superfície carregada, a origem no centro da mesma, determine

a) a função potencial, V, nos pontos do eixo z;

b) o campo elétrico, $\mathbf{E}$, também nos pontos do eixo z.

Solução

a)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\int_0^{2\pi}\frac{\sigma_0}{\sqrt{(z-u)^2+a^2}}\,a\,d\phi\,du = \frac{a\sigma_0}{2\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{du}{\sqrt{(z-u)^2+a^2}}.$$

$$V = \frac{a\sigma_0}{2\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(z-a)^2+a^2}-(z-a)}{\sqrt{(z+a)^2+a^2}-(z+a)}.$$

Nota explicativa: no formulário temos

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)^2+b^2}} = \ln\left(x+a+\sqrt{(x+a)^2+b^2}\right).$$

Fazendo as substituições

$$x\to u,\quad a\to -z,\quad b\to a,$$

obtemos

$$\int\frac{du}{\sqrt{(u-z)^2+a^2}} = \int\frac{du}{\sqrt{(z-u)^2+a^2}} =$$
$$\ln\left(u-z+\sqrt{(u-z)^2+a^2}\right) = \ln\left(\sqrt{(z-u)^2+a^2}-(z-u)\right).$$

b)

A simetria impõe que *nos pontos do eixo* z o campo seja da forma

$$\mathbf{E} = E_z\hat{\mathbf{z}}.$$

Portanto, *nos pontos do eixo z*,

$$\mathbf{E} = E_z\hat{\mathbf{z}} = \left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{z}},$$

Portanto,

$$\mathbf{E} = \frac{a\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\sqrt{(z-a)^2 + a^2} - (z-a)}{\sqrt{(z+a)^2 + a^2} - (z+a)} \right)\hat{\mathbf{z}},$$

ou seja,

$$\mathbf{E} = \frac{a\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-a)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+a)^2 + a^2}} \right)\hat{\mathbf{z}}$$

Detalhes:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\sqrt{(z-a)^2 + a^2} - (z-a)}{\sqrt{(z+a)^2 + a^2} - (z+a)} = -\frac{\partial}{\partial z} \ln\left(\sqrt{(z-a)^2 + a^2} - (z-a) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \ln\left(\sqrt{(z+a)^2 + a^2} - (z+a) \right)$$

Para o primeiro termo temos

$$-\frac{\partial}{\partial z} \ln\left(\sqrt{(z-a)^2 + a^2} - (z-a) \right) = -\frac{1}{\sqrt{(z-a)^2 + a^2} - (z-a)} \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{(z-a)^2 + a^2} - (z-a) \right)$$

$$= -\frac{\frac{z-a}{\sqrt{(z-a)^2 + a^2}} - 1}{\sqrt{(z-a)^2 + a^2} - (z-a)} = -\frac{\frac{z-a}{\sqrt{(z-a)^2 + a^2}} - 1}{\sqrt{(z-a)^2 + a^2} - (z-a)} \frac{\sqrt{(z-a)^2 + a^2}}{\sqrt{(z-a)^2 + a^2}}$$

$$-\frac{z-a-\sqrt{(z-a)^2 + a^2}}{\left(\sqrt{(z-a)^2 + a^2} - (z-a) \right)\sqrt{(z-a)^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{(z-a)^2 + a^2}}.$$

De maneira similar obtemos para o segundo:

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln\left(\sqrt{(z+a)^2 + a^2} - (z+a) \right) = \frac{-1}{\sqrt{(z+a)^2 + a^2}}.$$

Questão 2.

Um sistema de condutores é constituído por uma esfera condutora envolta por uma *concha* esférica concêntrica, também de material condutor. O raio do condutor interno é a e os raios interno e externo do condutor externo são respectivamente b e c. O condutor externo é neutro (carga total nula). Dado que o potencial do condutor interno é V_0, determine

a) a quantidade de carga total, Q_0, no condutor interno;

b) o potencial, V_1, no condutor externo;

c) a energia eletrostática, W, associada ao sistema;

d) a nova energia eletrostática, W', após transferir-se carga entre os condutores (sem alterar a carga total do sistema, Q_0), de modo a igualar seus potenciais.

Introdução.

Faremos, é claro, a origem do sistema de coordenadas coincidente com o eixo dos condutores. Como a carga nos condutores encontra-se concentrada nas superfícies, a distribuição de carga é obrigatóriamente composta por uma distribuição superficial em $r = a$, outra em $r = b$ e uma terceira em $r = c$. A simetria implica que tais distribuições sejam uniformes. Obviamente a carga total na superfície $r = a$ é igual a Q_0. O fato de no interior do condutor externo o campo elétrico ser nulo implica, através da lei de Gauss, que a carga total acumulada na superfície $r = b$ seja igual a $-Q_0$. Do fato de a carga total no condutor externo ser nula obtemos que a carga total acumulada na superfície $r = c$ é igual a Q_0.

Representando por $V_a(\mathbf{r})$, $V_b(\mathbf{r})$ e $V_c(\mathbf{r})$ as funções potenciais associadas às distribuições nas superfícies esféricas de raios a, b e c, respectivamente, temos que a função potencial associado à distribuição completa será

$$V(\mathbf{r}) = V_a(\mathbf{r}) + V_b(\mathbf{r}) + V_c(\mathbf{r}).$$

Como é bem conhecido,

$$V_a(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a} & r \le a \\ \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} & r \ge a \end{cases}, \quad V_b(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{-Q_0}{4\pi\varepsilon_0 b} & r \le b \\ \dfrac{-Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} & r \ge b \end{cases}, \quad V_c(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 c} & r \le c \\ \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} & r \ge c \end{cases}$$

a)

Das expressões acima conclui-se que

$$V_0 = V(\mathbf{r})|_{r=a} = V_a(\mathbf{r})|_{r=a} + V_b(\mathbf{r})|_{r=a} + V_c(\mathbf{r})|_{r=a} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 c},$$

ou seja,

$$V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Portanto,

$$Q_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

b)

$$\begin{aligned} V_1 &= V(\mathbf{r})|_{r=c} = V_a(\mathbf{r})|_{r=c} + V_b(\mathbf{r})|_{r=c} + V_c(\mathbf{r})|_{r=c} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 c} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 c}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V_1 = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)c} = \frac{V_0}{\frac{c}{a} - \frac{c}{b} + 1}$$

c)

$$W = \frac{1}{2}\int \sigma V da = \frac{1}{2}\left(\int_{r=a}\sigma V da + \int_{r=b}\sigma V da + \int_{r=c}\sigma V da\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(V_0\int_{r=a}\sigma da + V_1\int_{r=b}\sigma da + V_1\int_{r=c}\sigma da\right)$$

$$= \frac{1}{2}(V_0Q_0 + V_1(-Q_0) + V_1Q_0) = \frac{1}{2}V_0Q_0 = \frac{1}{2}V_0\frac{4\pi\varepsilon_0 V_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

Portanto,

$$W = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0^2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

d)

Para que os potenciais se igualem é preciso que o campo elétrico se anule entre os condutores, o que ocorre se e apenas se a carga no condutor interno for nula. Isso significa que é necessário que toda a carga Q_0 se tranfira do condutor interno para o externo. Nessas condições teremos carga apenas na superfície $r = c$, a qual se distribui uniformemente, totalizando Q_0. Nesse caso a nova função potencial será

$$V'(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 c} & r \le c \\ \\ \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} & r \ge c \end{cases}$$

O potencial dos condutores será

$$V'(\mathbf{r})|_{r=c} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 c} = V_1 = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)c}$$

e

$$W' = \frac{1}{2}\int \sigma V da = \frac{1}{2}V_1\int_{r=c}\sigma da = \frac{1}{2}V_1Q_0$$

$$= \frac{1}{2}\frac{V_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)c}\frac{4\pi\varepsilon_0 V_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)},$$

ou seja,

$$W' = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0^2}{c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

Questão 3. Uma reta uniformemente carregada é paralela a um plano condutor *aterrado*. A densidade linear de carga é λ_0, e a distância da reta ao plano é h. Adote um sistema de coordenadas em que o eixo z seja perpendicular ao plano condutor e intercepte a reta carregada (em $z = h > 0$) e com o eixo x paralelo à mesma.

a) Determine o campo elétrico, $\mathbf{E}$, para os pontos imediatamente acima da superfície do plano condutor.

b) Determine a força por unidade de comprimento que a distribuição superficial de carga no plano condutor exerce sobre a linha carregada.

Solução

Introdução

Para a região $z > 0$ o campo elétrico é o mesmo que se obteria imaginando a substituição do plano aterrado por uma reta carregada com densidade linear $-\lambda_0$ e cujos pontos são a imagem refletida (através do plano xy) dos pontos da reta original - método das imagens.

Justificativa (que o aluno não precisaria apresentar): o campo de uma linha carregada com densidadade λ_0 e coincidente com o eixo z é

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 s}\hat{\mathbf{s}}.$$

As funções potenciais, ψ, para esse campo satisfazem

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{d\psi}{ds} = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 s}.$$

Portanto,

$$\psi = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{s}\right) + C$$

onde a constante C é arbitrária. Note que o potencial depende da posição apenas através da distância s do ponto onde ele é avaliado à reta carregada. O potencial associado às duas retas carregadas descritas acima será então da forma

$$\begin{aligned} V' &= \left(\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{s_+}\right) + C_+\right) + \left(\frac{-\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{s_-}\right) + C_-\right) \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{s_-}{s_+}\right) + C \end{aligned}$$

onde s_+ e s_- representam as distâncias do ponto onde se avalia o potencial às retas carregadas com densidades $+\lambda_0$ e $-\lambda_0$, respectivamente, e $C = C_+ + C_-$. Escolhendo

$$C = 0$$

obtemos

$$V' = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{s_-}{s_+}\right).$$

Nesse caso

$$\lim_{s\to\infty} V' = 0 \qquad \left(\text{porque } \ln\left(\frac{s_-}{s_+}\right) \to \ln(1) = 0 \text{ quando } s \to \infty\right),$$

ou seja, para um ponto infinitamente afastado de ambas as linhas o potencial é nulo. Além disso, nos pontos do plano xy

$$s_- = s_+ \Rightarrow V' = 0.$$

Verifica-se assim que a função potencial V' satisfaz as condições de contorno do nosso problema. Se representarmos a função potencial do problema original por V, então, *para os pontos com* $z > 0$, $V' = V$, e o campo **E** do problema original, *para os pontos com* $z > 0$, é o mesmo que o campo produzido pelas duas retas carregadas, $\mathbf{E}'$, nessa mesma região.

a)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z)|_{z>0,\ z\to 0} &= \mathbf{E}'(x,y,0) = \mathbf{E}'_+(x,y,0) + \mathbf{E}'_-(x,y,0)\\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2+h^2}}\,\frac{y\hat{\mathbf{y}} - h\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{y^2+h^2}} + \frac{-\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2+h^2}}\,\frac{y\hat{\mathbf{y}} + h\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{y^2+h^2}}\end{aligned}$$

ou seja

$$\mathbf{E}(x,y,z)|_{z>0,\ z\to 0} = -\frac{\lambda_0 h}{\pi\varepsilon_0(y^2+h^2)}\hat{\mathbf{z}}$$

b)

O campo que as cargas induzidas produzem nos pontos da linha carregada é o mesmo campo, $\mathbf{E}'$, que as cargas na reta imagem produzem. Portanto a força num segmento elementar da reta carregada será

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{E}'_-(x,0,h) = \lambda_0 dl\left(\frac{-\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0(2h)}\hat{\mathbf{z}}\right),$$

ou seja,

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl} = -\frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0 h}\hat{\mathbf{z}}$$

Note que a força é sempre atrativa, independentemente do sinal de λ_0.

Valor das questões:

1a	1b	2a	2b	2c	2d	3a	3b
2,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5

Formulário

Convenções

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, \qquad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$
$$\mathbf{s} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}, \qquad s = |s| = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \hat{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s}}{s}.$$

Coordenadas cilíndricas, (s,ϕ,z) e esféricas, (r,θ,ϕ):

$$x = s\cos\phi \qquad y = s\sin\phi \qquad z = z$$
$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad y = r\sin\theta\sin\phi \qquad z = r\cos\theta \quad .$$

Integrais para cálculo de campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{P}} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dl' \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} da' \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\tau'$$

$d\tau = sdsd\phi dz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$; $da = sdsd\phi$ (sup. paralela ao plano xy);
$da = sd\phi dz$ (sup. cil. raio s eixo coincidente com eixo z) ;
$da = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ (sup esf. raio r centro na origem).

Lei de Gauss

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ representa o vetor unitário normal e orientado para fora, em cada ponto da superfície fechada, $\mathcal{S}$, Q_{int} representa a totalidade da carga elétrica no interior de $\mathcal{S}$ e

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad \text{(coord. ret.);}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} \qquad \text{(coord. esf.).}$$

Potencial Elétrico e Energia Eletrostática

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \ \text{(ref.: } \infty), \qquad V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy + \hat{\mathbf{z}}dz = \hat{\mathbf{s}}ds + \hat{\boldsymbol{\phi}}sd\phi + \hat{\mathbf{z}}dz = \hat{\mathbf{r}}dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}rd\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}r\sin\theta d\phi$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'; \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}da'; \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{P}} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dl'$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V; \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{(eq. de Poisson)}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \rho V d\tau \left(\text{ou } \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}} \sigma V da ; \ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{P}} \lambda V dl ; \ \frac{1}{2}\sum q_i V_i \right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{todo espaço}} |\mathbf{E}|^2 d\tau$$

Integrais

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2}} = \ln\left(x + a + \sqrt{(x+a)^2 + b^2} \right)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)$$