ES879 - Segunda Prova - 26/09/2008

Nome: Gabarito RA:

que

1. (valor 1.0) Seja a frase "O espectro de um sinal periódico é contínuo enquanto o espectro de um sinal não-periódico é discreto". Diga se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

2. Determine o espectro (coeficientes da série ou a equação quando couber) para cada seqüência a seguir. Indique explicitamente a ferramenta matemática usada em cada caso.

   (a) (valor 1.0) $x(n) = (-0.3)^n u(n)$;

   (b) (valor 1.0) $x(n) = cos(\sqrt{2}\pi n)$;

   (c) (valor 1.0) $x(n) = cos(\pi n/4)$;

   (d) (valor 1.0) $x(n) = \{...\ 1\ 0\ 1\ 0\ ...\}$ (periódico).

   (e) (valor 1.0) $x(n) = \{\ 2\ 2\ 0\ 0\ \}$ (finito).

$\pi k/3$

3. (valor 1.5) Para o espectro dado pelos coeficientes $c_k = \frac{1}{3}cos\frac{3\pi k}{4} + \frac{1}{4}sen\frac{k\pi}{3}$, $N = 24$, determine a seqüência $x(n)$.

   Dica: para $N = 24$, sabe-se que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{jk\pi}{N}(6a+4n)} = \begin{cases} 0, & se\ n \neq -\frac{3}{2}a \\ N, & se\ n = -\frac{3}{2}a \end{cases}$$

K

4. Sobre os filtros analógicos:

   (a) (valor 0.5) Qual a finalidade de se usar um filtro analógico no processo de aquisição de dados?

   (b) (valor 1.0) Compare a ordem dos filtros Butterworth e Chebyshev tipo 1, ambos passa-baixa, com os seguintes requisitos: a) $-2dB$ a $15rad/s$, b) $-20dB$ a $25rad/s$. Notas: o requisito b) deve ser satisfeito de forma exata, e a ondulação máxima, quando presente, deve ser de $2dB$. Comente este resultado em termos dos aspectos práticos da implementação destes filtros.

   (c) (valor 1.0) Discuta as características dos filtros Butterworth e Chebyshev. Apresente as vantagens e desvantagens de cada um.

Algumas equações:

$$n = \frac{\log\left[\frac{\left(10^{\frac{-k_1}{10}}-1\right)}{\left(10^{\frac{-k_2}{10}}-1\right)}\right]}{2\log\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right)}$$

$$\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{\frac{-k_1}{10}} - 1$$

$$\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{\frac{-k_2}{10}} - 1$$

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}$$

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = 0$$

$$H_n(s) = \frac{1}{\prod_{SPE}(s-s_k)}$$

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_n^2(\Omega)}$$

$$n = \frac{\log[g+(g^2-1)^{\frac{1}{2}}]}{\log[\Omega_r+(\Omega_r^2-1)^{\frac{1}{2}}]}$$

$$A = \frac{1}{|H_n(j\Omega_r)|}$$

$$g = \left[\frac{(A^2-1)}{\epsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|H(1j)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2}$$

$$c_l = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2\pi lF_0t}dt$$

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

$$X(w) = \mathcal{F}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw$$

1) A afirmação é falsa.
Sinal periódico é tratado com série de Fourier, que gera espectro discreto.
Sinal não periódico é tratado com transformada de Fourier, que gera espectro contínuo.

2) a) $x(n) = (-0{,}3)^n u(n)$ é não periódico $\Rightarrow$ transformada de Fourier.

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-0{,}3)^n e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-0{,}3 e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 + 0{,}3 e^{-j\omega}}$$

b) $x(n) = \cos(\sqrt{2}\pi n) \Rightarrow \omega = \sqrt{2}\pi \Rightarrow f = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ não racional $\Rightarrow$ não periódico

O espectro é composto apenas da componente $f = \sqrt{2}/2$.

c) $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f = \frac{1}{8}$ é racional

$\Rightarrow$ periódico $\Rightarrow$ série de Fourier.

$$x(n) = \frac{e^{j\pi n/4} + e^{-j\pi n/4}}{2} = \frac{1}{2} e^{j2\pi\frac{1}{8}n} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi\frac{1}{8}n}$$

$$N = \frac{1}{f} = 8$$

$$c_k = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{7} x(n)\, e^{-j2\pi kn/8} \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots, 7$$

$$K = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

$K = -1$, que corresponde à $K = 7 \Rightarrow c_7 = \frac{1}{2}$

Os demais $c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$.

d) $x(n) = \{ \ldots \underline{1}\ 0\ 1\ 0 \ldots \}$ periódico $\Rightarrow$ série Fourier

$$N = 4 \quad ; \quad c_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x(n)\, e^{-j2\pi kn/4} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$c_k = \frac{1}{4}\left[1 + 0 + 1\, e^{-j\pi k} + 0\right] = \frac{1}{4}\left[1 + e^{-j\pi k}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + \cos(\pi k) - j\,\mathrm{sen}(\pi k)\right] = \frac{1}{4}\left[1 + \cos(\pi k)\right]$$

e) $x(n) = \{\underline{2}, 2, 0, 0\}$ finito $\Rightarrow$ não periódico $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ transformada de Fourier.

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = 2 \times e^{0} + 2e^{-j\omega} =$$

$$= 2 + 2e^{-j\omega}$$

3) $c_K = \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi K}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi K}{3}$; $N = 24$ (periódicos)

$$x(n) = \sum_{K=0}^{23} c_K\, e^{j2\pi K n/24} =$$

1º termo

2º termo

$$= \sum_{K=0}^{23}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{e^{j\frac{3\pi}{4}K} + e^{-j\frac{3\pi}{4}K}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{3}K} - e^{-j\frac{\pi}{3}K}}{2j}\right)\right] e^{j2\pi K n/24}$$

3º termo

4º termo

$$\frac{1}{6}\sum_{K=0}^{23} e^{j\frac{3\pi}{4}K}\, e^{j2\pi K\frac{n}{24}} = \frac{1}{6}\sum_{K=0}^{23} e^{j\frac{\pi K}{24}(18+2n)} \quad \text{(1º termo)}$$

$$\frac{1}{8j}\sum_{K=0}^{23} e^{j\frac{\pi K}{3}}\, e^{j2\pi K\frac{n}{24}} = \frac{1}{8j}\sum_{K=0}^{23} e^{j\frac{\pi K}{24}(8+2n)} \quad \text{(3º termo)}$$

se $n = -\frac{3}{2}a \Rightarrow 2n + 3a = 0$ ou $6a + 4n = 0$

então o somatório resulta em N. Caso contrário o somatório será nulo.

Para $n = -9 \Rightarrow 18 + 2(-9) = 0 \Rightarrow$ o primeiro termo é não nulo para $n = -9$.
Note que o segundo termo será não nulo apenas para $n = 9$.

Para $n = -4 \Rightarrow 8 + 2(-4) = 0 \Rightarrow$ o terceiro termo é não nulo (para $n = -4$).
Note que o quarto termo será não nulo apenas para $n = 4$.

Logo,

$$x(n) = \frac{1}{6} N \delta(18 + 2n) + \frac{1}{6} N \delta(18 - 2n) +$$

$$+ \frac{1}{8j} N \delta(8 + 2n) - \frac{1}{8j} N \delta(8 - 2n)$$

onde $\delta(\cdot)$ é o impulso unitário.

4) a) Eliminar as componentes de alta freqüência do sinal, componentes estas associadas a ruídos. Com isso, é possível usar uma freqüência de amostragem menor sem correr o risco de aliasing indesejado.

b) Butterworth

$K_1 = -2dB$, $\Omega_1 = 15 rad/s$

$K_2 = -20dB$, $\Omega_2 = 25 rad/s$

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{10^{-K_1/10} - 1}{10^{-K_2/10} - 1}\right]}{2\log\left(\dfrac{\Omega_1}{\Omega_2}\right)} = \frac{\log\left[\dfrac{10^{2/10} - 1}{10^{20/10} - 1}\right]}{2\log\left(\dfrac{15}{25}\right)} = 5{,}023$$

$n = 6.$

Chebyshev

Ripple : 2dB

$$10\log\left(\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right) = -2 \Rightarrow \varepsilon = 0{,}76478$$

$$\Omega r = \frac{25}{15} = 1{,}667$$

$$20\log\left(\frac{1}{A}\right) = -20 \Rightarrow A = 10$$

$$g = \left[\frac{(A^2 - 1)}{\varepsilon^2} \right]^{1/2} = 13{,}0101$$

$$n = \frac{\log\left[g + (g^2-1)^{1/2}\right]}{\log\left[\Omega_r + (\Omega_r^2 - 1)^{1/2}\right]} =$$

$$= \frac{\log\left[13{,}0101 + (13{,}0101^2 - 1)^{1/2}\right]}{\log\left[1{,}667 + (1{,}667^2 - 1)^{1/2}\right]} = \frac{1{,}4147}{0{,}4772} = 2{,}964$$

$n = 3.$

É mais "custoso" implementar um filtro de ordem 6 do que de ordem 3 (mais componentes, mais complexidade, etc).

c) ButterWorth : monotônico (sem ondulação) (vantagem)
Chebyshev : apresenta ripple (desvantagem)

ButterWorth : taxa de decaimento não elevada
Chebyshev : taxa de decaimento elevada

} para uma mesma ordem.