ME - 310 Probabilidade II
Prof. Caio Azevedo
Segundo semestre de 2009, Data: 09/11/2009
Prova II

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **Tenha em mãos somente: lápis, borracha e caneta.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Em caso de dúvida, levante-se e dirija-se ao professor. Pergunte somente o que for imprescindível.**
- **Entregue todas as folhas que você recebeu, inclusive os rascunhos e a prova propriamente, informando o que deve ser corrigido.**
- **Faça a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado. Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **Não proceda de maneira indevida como: conversar durante a prova, utilizar-se de material que não permitido, emprestar material à colegas, sem autorização do professor e atender o telefone celular (a não ser em casos de EXTREMA URGÊNCIA). Isso acarretará em nota 0 na prova.**
- **Se precisar de algum material, levante-se e dirija-se ao professor.**
- **A prova terá duração de 2 horas, improrrogáveis, das 14h às 16h.**

Faça uma excelente prova!!

Questões

1. Sejam $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ um vetor aleatório **discreto** cuja f.d.p. conjunta é dada na seguinte tabela:

	X_2	
X_1	0	1
0	1/3	1/6
1	1/6	1/3

Responda os itens:

a) Obtenha as distribuições marginais de X_1 e de X_2. Identifique suas distribuições. Calcule $\mathcal{E}(X_i)$ e $\mathcal{V}(X_i), i = 1, 2$. Sugestão: use a simetria da distribuição conjunta na obtenção das marginais (1,0 ponto).

b) Prove que $\mathcal{E}(X_1X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1)$. Calcule $Corre(X_1, X_2)$ (0,5 pontos).

c) As variáveis X_1 e X_2 são independentes? Justifique adequadamente sua resposta (0,5 pontos).

d) Obtenha a distribuição de $X_1|X_2 = x_2$, para cada um dos valores que X_2 pode assumir (0,5 pontos).

e) Calcule $\mathcal{E}(X_1)$ a partir da distribuição que você encontrou no item d). O resultado que você obteve é igual àquele obtido no item a)? Sua conclusão era esperada? Justifique adequadamente sua resposta (1,0 pontos).

2. Sejam X_1 e X_2 duas v.a.'s aleatórias independentes, $X_i \sim \text{Gamma}(r_i, \lambda), i = 1, 2;\ r_i, \lambda > 0$, (de acordo com a parametrização adotada no curso), e defina $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ e $Y_2 = X_1 + X_2$. Responda os itens:

   a) Obtenha a distribuição conjunta de $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)'$, através do método do Jacobiano. Explicite cada uma das 4 etapas: obtenção da transformação inversa, gráficos dos suportes dos vetores $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, cálculo do Jacobiano e finalmente, obtenção da distribuição do vetor $\boldsymbol{Y}$ (2,0 pontos).

   b) As variáveis Y_1 e Y_2 são independentes? Justifique adequadamente sua resposta (0,5 pontos).

   c) Identifique as distribuições marginais de Y_1 e Y_2. Calcule $\mathcal{E}(Y_i)$ e $\mathcal{V}(Y_i), i = 1, 2$ (1,0 ponto).

3. Sejam $X_1, X_2, ...$ uma seqüência de variáveis aleatórias, tais que $\mathcal{E}(X_i) = \mu$, $\mathcal{V}(X_i) = \sigma^2$, $\forall i$ e

$$Cov(X_i, X_j) = \begin{cases} \psi, & \text{se }, j = i + 1 \\ 0, & \text{se } j \geq i + 2 \end{cases}$$

   ψ é uma constante. Lembre-se de que $Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i)$. Defina $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Responda os itens:

   a) Calcule a $\mathcal{V}(\overline{X}_n)$ justificando, adequadamente, seu desenvolvimento (2,0 pontos).

   b) Prove que:

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| > \xi\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \forall \xi > 0$$

   utilizando a desigualdade de Tchebychev (1,0 ponto).

Legenda

- v.a: variável aleatória contínua.
- f.d.p: função densidade de probabilidade ou função de probabilidade.

Formulário

- $\forall r > 0$, $\Gamma(r) = \begin{cases} (r-1)!, & \text{se r for inteiro.} \\ \displaystyle\int_0^{\infty} x^{r-1}e^{-x}dx, & \text{se r não for inteiro.} \end{cases}$

- $\forall r > 0$ $\Gamma(r) = r\Gamma(r-1)$.

- Se $X \sim$ Berbnoulli$(p), 0 < p < 1$, então $f_x(x) = p^x(1-p)^{1-x}\mathbb{1}_{\{0,1\}}$, $\mathcal{E}(X) = p$ e $\mathcal{V}(X) = p(1-p)$.

- Se $X \sim$ Gamma(r, λ), então $f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(r)\lambda^r}e^{-\frac{x}{\lambda}}x^{r-1}\mathbb{1}(x)_{(0,\infty)}$, $\mathcal{E}(X) = r\lambda$, $\mathcal{V}(X) = r\lambda^2$.

- Se $X \sim Beta(a, b), a, b > 0$, então $f_X(x) = \frac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Nesse caso $\mathcal{E}(X) = \frac{a}{a+b}$ e $\mathcal{V}(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

- Desigualdade de Tchebychev: Se X é uma v.a. tal que $\mathcal{E}(X) = \mu$ e $\mathcal{V}(X) = \sigma^2$, etnão, $\forall \xi > 0$

$$P(|X - \mu| > \xi) \leq \frac{\sigma^2}{\xi^2}$$