GABARITO - P1 - MA311 - TURMAS P e Q

Questão 1) Fazendo a seguinte substituição $v = \ln y$ transforme a e.d.o. não-linear em uma linear. Em seguida resolva a equação.

$$xy' - 4x^2y + 2y\ln y = 0$$

Solução:

$v = \ln y \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot y' \Rightarrow y\, v' = y'$. **(0,6)** Substituindo na equação:

$xyv' - 4x^2y + 2yv = 0$. Como $y > 0$, dividimos por y: $xv' - 4x^2 + 2v = 0$. Ou seja $xv' + 2v = 4x^2$. Supondo $x \neq 0$, dividimos por x: $v' + \frac{2}{x}v = 4x$.**(0,3)**(Equação Linear de Ordem 1)

Fator Integrante: $\mu(x) = \exp(\int p(x)dx) = \exp(\int \frac{2}{x}dx) = \exp(2\ln|x|) = |x|^2 = x^2$.**(0,4)** Portanto $\frac{d}{dx}(\mu\, v) = x^2 \cdot 4x = 4x^3 \Rightarrow x^2\, v = \int 4x^3\, dx = x^4 + c$. Logo $v = \frac{x^4+c}{x^2}$ e assim $v = x^2 + c \cdot x^{-2}$. **(0,4)** Como $v = \ln y$ aplicando "exp"temos que $y = \mathrm{e}^{x^2 + c\cdot x^{-2}}$.**(0,3)**

$$\text{Resposta: } y = \exp(x^2 + c \cdot x^{-2})$$

Questão 2) Encontre um fator integrante e resolva a equação dada

$$e^x \; + (e^x coty + 2y\csc y)\,\frac{dy}{dx} = 0, \qquad y(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Solução:

$M(x,y) = \mathrm{e}^x$ e $N(x,y) = \mathrm{e}^x \cot y + 2y\csc y$. $M_y = 0$ e $N_x = \mathrm{e}^x \cot y$. Portanto a equação não é exata. **(0,2)** Para encontrar um fator integrante, observe que $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{\mathrm{e}^x \cot y}{\mathrm{e}^x} = \cot y$ (só depende de y)**(0,3)**. Portanto existe um fator integrante $\mu(y)$ que satisfaz a e.d.o. $\mu' - \cot y \cdot \mu = 0$. Para resolver esta e.d.o:

$\exp(-\int \cot y dy) = \exp(-\ln|\sin y|) = \frac{1}{|\sin y|} = \frac{1}{\sin y}$, pois se $y(0) = \frac{\pi}{2}$, então $\sin(y) > 0$ em uma vizinhança do valor inicial. Portanto $\frac{d}{dy}(\frac{1}{\sin y}\mu) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sin y}\mu = 1 \Rightarrow \mu = \sin y$. **(0,5)** Logo a equação $\mathrm{e}^x \sin y + \sin y(\mathrm{e}^x \cot y + 2y\csc y)\frac{dy}{dx} = 0$ é exata. Sejam $\overline{M} = \mathrm{e}^x \sin y$ e $\overline{N} = \sin y(\mathrm{e}^x \cot y + 2y\csc y)$.

Queremos encontrar uma função de duas variávies Ψ tal que $\Psi_x = \overline{M}$ e $\Psi_y = \overline{N}$.**(0,2)** Integrando $\overline{M}$ com relação a x:

$\Psi(x,y) = \int \mathrm{e}^x \sin y dx = \mathrm{e}^x \sin y + g(y)$. Derivando Ψ com relação a y igualando a $\overline{N}$:

$\mathrm{e}^x \cos y + g'(y) = \mathrm{e}^x \cos y + 2y \Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2$. Portanto $\Psi(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y + y^2$.**(0,4)**

Solução geral da equação: $\mathrm{e}^x \sin y + y^2 = c$ (implícita).**(0,2)**

Calculando no valor inicial $y(0) = \frac{\pi}{2}$: $\mathrm{e}^0 \sin(y(0)) + y(0)^2 = c \Leftrightarrow c = 1 + \frac{\pi^2}{4}$.**(0,2)**

$$\text{Resposta: } \mathrm{e}^x \sin y + y^2 = 1 + \frac{\pi^2}{4} \text{ (solução implícita)}$$

Questão 3) Item a) Mostre que a substituição $v = \ln x$ transforma a e.d.o $x^2y'' - 3xy' + 4y = x$ na equação

$$\frac{d^2y}{dv^2} - 4\frac{dy}{dv} + 4y = e^v.$$

Solução:

Seja $v = \ln x$. Então $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{1}{x}$.**(0,3)**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dv} \cdot \frac{1}{x}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dv}\Big) \cdot \frac{1}{x} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dv}\Big(\frac{dy}{dv}\Big) \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dv}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \textbf{(0,5)}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2y}{dv^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dv}.$$

Substituindo na equação dada:

$$x^2\Big(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2y}{dv^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dv}\Big) - 3x\Big(\frac{dy}{dv} \cdot \frac{1}{x}\Big) + 4y = x$$

Ficamos com a sequinte equação em v:

$$\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv} - 3\frac{dy}{dv} + 4y = e^v, \text{ ou seja, } \frac{d^2y}{dv^2} - 4\frac{dy}{dv} + 4y = e^v, \textbf{(0,2)} \text{ como pedia o exercício.}$$

Questão 3) Item b) Resolva a equação não homogênea

$$\frac{d^2y}{dv^2} - 4\frac{dy}{dv} + 4y = e^v$$

via o método de coeficientes indeterminados.

Solução:

Temos que resolver a equação $y'' - 4y' + 4y = e^v$, sendo v a variável independente. Homogênea: $y'' - 4y' + 4y = 0$. Equação característica $r^2 - 4r + 4 = 0 = (r-2)^2$. Portanto $r = 2$ é raiz dupla.**(0,2)**

Solução Complementar (em v): $y_c = c_1 e^{2v} + c_2\, v\, e^{2v}$.**(0,1)**

Como e^{2v} não aparece no termo não homogêneo $g(v) = e^v$, a solução particular tem a forma $Y = Ae^v$. Derivando obtemos $Y' = Y'' = Ae^v$. Substituindo na equação: $Ae^v - 4Ae^v + 4Ae^v = e^v$. Ficamos com $Ae^v = e^v \;\Rightarrow\; A = 1$.**(0,2)**

Solução Geral da Equação (em v): $y = y_c + Y = c_1 e^{2v} + c_2\, v\, e^{2v} + e^v$.**(0,2)**

Como $v = \ln x$ temos que a Solução Geral da Equação em x fica: $y = c_1 e^{2\ln x} + c_2 \ln x\, e^{2\ln x} + e^{\ln x}$.**(0,3)**

$$\text{Resposta: } y = c_1\, x^2 + c_2 x^2 \ln x + x.$$

Questão 4) Resolva a seguinte e.d.o via variação de parâmetros:

$$x^2 y'' - xy' + \frac{3}{4} y = 2x^{\frac{5}{2}} \qquad x > 0$$

Solução:

A equação homogênea correspondente é $x^2 y'' - xy' + \frac{3}{4} y = 0$, que é uma Euler com $\alpha = -1$ e $\beta = 3/4$. Equação característica: $r^2 - 2r + 3/4 = 0$. Raízes: $r_1 = 3/2$ e $r_2 = 1/2$. Soluções l.i. da homogênea: $y_1 = x^{3/2}$ e $y_2 = x^{1/2}$.**(0,5)**

Método de Variação dos Parâmetros. Encontrar $u(x)$ e $v(x)$ que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} u' y_1 + v' y_2 = 0 \\ u' y_1' + v' y_2' = 2x^{5/2} \end{cases}$$

Então temos

$$\begin{cases} u' x^{3/2} + v' x^{1/2} = 0 \\ \frac{3}{2} u' x^{1/2} + \frac{1}{2} v' x^{-1/2} = 2x^{5/2} \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda linha por $-2x$:

$$\begin{cases} u'x^{3/2} + v'x^{1/2} = 0 \\ -3u'x^{3/2} - v'x^{1/2} = -4x^{7/2} \end{cases}$$

Somando as duas linha obtemos $-2u'x^{3/2} = -4x^{7/2} \Rightarrow u'(x) = 2x^{7/2-3/2} = -2x^2$. Então $u(x) = -\frac{2}{3}x^3 + c_1$**(0,6)**(achou u). Da primeira linha temos $v'x^{1/2} = -u'x^{3/2} = 2x^2x^{3/2} = 2x^{7/2}$. Assim $v' = 2x^{7/2-1/2} = 2x^3$. Então $v(x) = \frac{x^4}{2} + c_2$.**(0,6)**(achou v)

Solução geral da equação $y = u(x)y_1 + v(x)y_2 = (-\frac{2}{3}x^3 + c_1)x^{3/2} + (\frac{x^4}{2} + c_2)x^{1/2}$.**(0,3)**

$$\text{Resposta: } y = c_1x^{3/2} + c_2x^{1/2} - \frac{1}{6}x^{9/2}.$$

Questão 5) Resolva a e.d.o

$$2y^2y'' + 2y(y')^2 = 0 \qquad y > 0; \;\; y' > 0$$

Solução:

Como nesta equação não aparece a variável indepentente, fazemos a mudança de variável $v = y' = \frac{dy}{dt}$.**(0,2)** Derivando

$$y'' = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}v.\mathbf{(0{,}5)}$$

Substituindo na equação, temos: $2y^2\frac{dv}{dy}v = -2y\,v^2$. Como $y > 0$, dividimos por y: $2v\,y\frac{dv}{dy} = -2\,v^2$. Como $v = y' > 0$ dividimos por v: $2y\frac{dv}{dy} = -2v$. Ou seja temos uma equação separável da forma $\frac{1}{v}dv = -\frac{1}{y}dy$ **(0,3)**. Resolvendo por integração obtemos $\ln v = -\ln y$+c $(y, v > 0)$. Ou seja $\ln v + \ln y = c \Leftrightarrow \ln(vy) = c \Leftrightarrow vy = e^c = c_1$ **(0,5)**. Assim ficamos com a equação diferencial $\frac{dy}{dt}y = c_1$ **(0,2)**, também separável. Ou seja $ydy = c_1dt$. Resolvendo por integração obtemos $\frac{1}{2}y^2 = c_1t + c_2$. **(0,3)** (Solução implícita da equação).

$$\text{Resposta: } y^2 = C_1t + C_2.$$