

**Questão 1 (3 pontos):** Com o intuito de verificar a Lei de Ohm, montou-se o circuito mostrado na figura 1, com o qual foram obtidos os resultados mostrados na figura 2, a seguir:

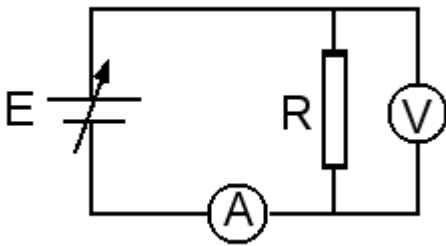


Figura 1: Esquema do circuito utilizado no experimento. Os elementos E, R, A e V, mostrados no esquema são, respectivamente, fonte de tensão, resistor, amperímetro e voltímetro.

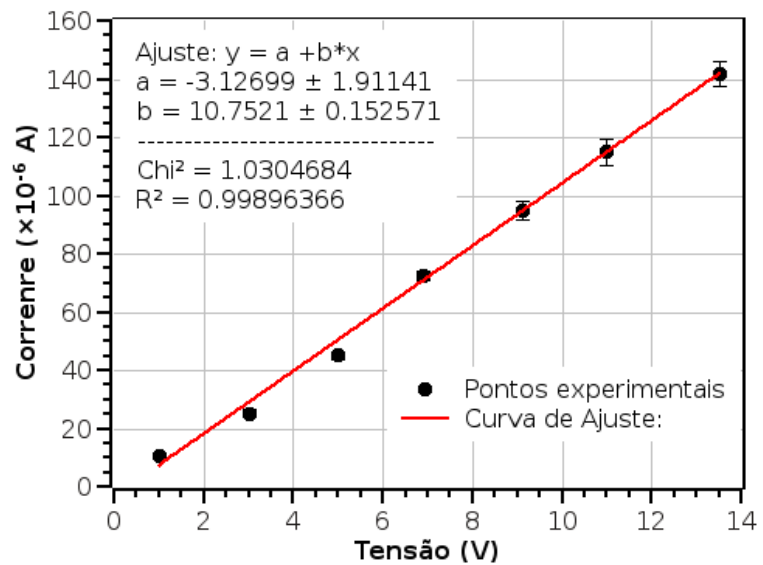


Figura 2: Gráfico da corrente no circuito em função da tensão no resistor.

- Com base nas informações mostradas no gráfico da figura 2, obtenha o valor da resistência utilizada no experimento e seu respectivo erro, ou seja,  $R \pm \Delta R$ . (1,5 ponto)
- Considere que o valor de  $R$  obtido no item anterior é 2,5 vezes menor que o valor aferido com um ohmímetro, ou seja,  $R_{\text{ohmímetro}} = 2,5R$ . Explique o motivo de tal discrepância e mostre como se poderia chegar a um valor de  $R$  mais próximo do real, utilizando os dados já obtidos. (1,5 ponto)

### Solução:

a) Pela Lei de Ohm temos  $V= Ri$ . No gráfico da figura 2 temos a corrente em função da tensão, ou seja,  $i=V/R$ , ajustada por uma expressão do tipo  $y = a + b \cdot x$ . Neste caso temos:  $y = i$ ,  $V = x$ , e  $b = R^{-1}$ , o que nos fornece:  $R = b^{-1}$ ;

O coeficiente angular da reta ( $b$ ) deve ser escrito como:

$$b = (10,75 \pm 0,15) \cdot 10^{-6} \text{ A/V} = (10,75 \pm 0,15) \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}$$

$$\text{Logo, } R = \frac{1}{10,75 \cdot 10^{-6}} \Omega = 0,093023 \cdot 10^6 \Omega = 93,023 \cdot 10^3 \Omega$$

Uma outra maneira de obter um valor aproximado de  $R$  é através da interpolação de valores da curva no gráfico e aplicação da Lei de Ohm. Ex.: Para uma corrente de  $100 \mu\text{A}$ , a tensão aplicada era de, aproximadamente, 9,5 V. Logo:

$$R \approx \frac{9,5}{100 \cdot 10^{-6}} = 95 \cdot 10^3 \Omega$$

O erro associado a  $R$  é obtido através de:

$$\Delta R = \left( \left( \frac{dR}{db} \right)^2 (\Delta b)^2 \right)^{1/2}$$

$$\frac{dR}{db} = -\frac{1}{b^2} \Rightarrow \Delta R = \frac{1}{b^2} \Delta b = R \frac{\Delta b}{b} = R^2 \Delta b$$

O que nos fornece:

$$\Delta R = R \frac{\Delta b}{b} = 93,023 \cdot 10^3 \left( \frac{0,15}{10,75} \right) \Rightarrow \Delta R = 1,3 \cdot 10^3 \Omega$$

Logo  $R = (93,0 \pm 1,3) \text{ k}\Omega$ .

b) Pelo circuito mostrado na figura 1, vemos que o voltímetro está associado em paralelo com o resistor. O voltímetro possui uma resistência  $R_V$ , então o valor da resistência equivalente pode ser escrito como:

$$R_{eq} = \frac{R R_V}{R + R_V} = \frac{R}{1 + \frac{R}{R_V}} \quad (1.b-1)$$

Por esta última expressão, vemos que se  $R_V$  tiver um valor finito e da mesma ordem de grandeza de  $R$ , então haverá uma influência direta na tensão lida pelo voltímetro. Neste caso, o valor de  $R$  que for calculado pela aplicação da Lei de Ohm será menor que seu valor real.

Considerando que a leitura do ohmímetro forneceu um valor confiável, o erro no valor obtido experimentalmente pode ser atribuído à montagem utilizada.

Para corrigir os resultados já obtidos, bastaria conhecer o valor de  $R_V$ , e, a partir de (1.b-1), obter:

$$R = \frac{R_{eq} R_V}{R_V - R_{eq}} = \frac{R_{eq}}{1 - \frac{R_{eq}}{R_V}} \quad (1.b-2)$$

**Questão 2 (4 pontos):** Um estudante, querendo aplicar o teorema de Thévenin para caracterizar uma fonte e analisar a potência que esta pode fornecer a um usuário, montou um circuito de modo a obter um divisor de tensão, para se comportar como uma fonte de tensão, na qual seria ligado o equipamento de um usuário. Para o experimento, ele tinha à sua disposição os seguintes materiais/equipamentos:

- fonte de tensão ajustável; - um resistor de  $600\Omega$  ( $R_a$ ) e outro de  $400\Omega$  ( $R_b$ ); - um resistor de resistência variável; - um voltímetro; - um amperímetro; - além de um protoboard e fios para conexões.

Os resultados obtidos por ele são mostrados nas figuras 3 e 4 (ver página seguinte), e esperava-se que a relação entre a tensão  $V$  e a corrente  $i$  (Fig. 3) obedecesse à relação:

$$V = E_i - R_i i \quad (1)$$

onde  $R_i$  e  $E_i$  são a resistência e tensão equivalentes de Thévenin.

- a) Desenhe o esquema do circuito que pode ter sido utilizado para a obtenção dos dados experimentais. (0,8 pontos)

- b) A partir do gráfico da figura 4, obtenha uma estimativa do valor de  $R$  para o qual a potência fornecida é máxima e compare com o valor de  $R_i$  obtido no gráfico da figura 3 (0,8 pontos)
- c) Obtenha uma expressão que relacione a voltagem fornecida pela fonte de tensão com a voltagem na saída do divisor de tensão. (1,5 pontos)
- d) Considere que a tensão fornecida pela fonte era de 6V. Utilize a expressão obtida no item anterior, os valores de  $R_a$  e  $R_b$  fornecidos e as informações da figura 3 para comparar a voltagem teórica na saída do divisor de tensão com o valor obtido experimentalmente. (0,9 pontos)

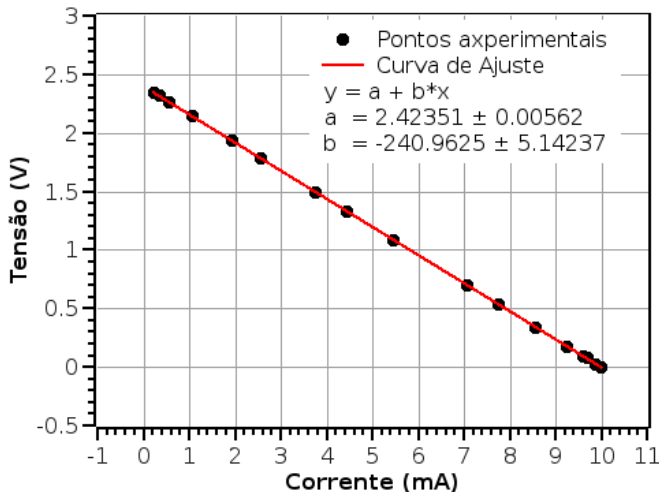


Figura 3: Gráfico da tensão fornecida ao usuário em função da corrente utilizada pelo equipamento.

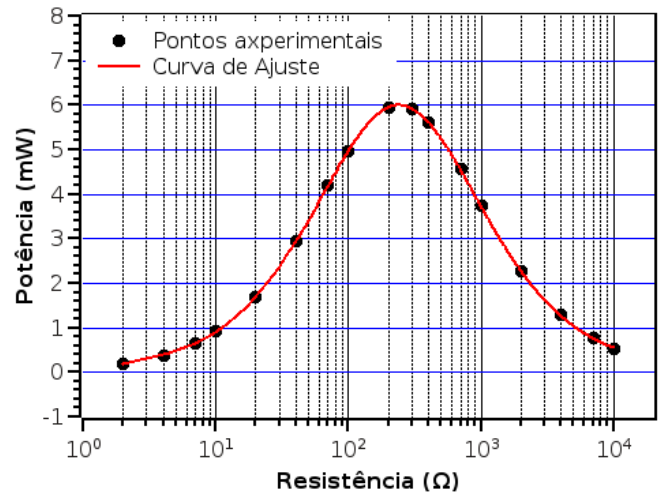
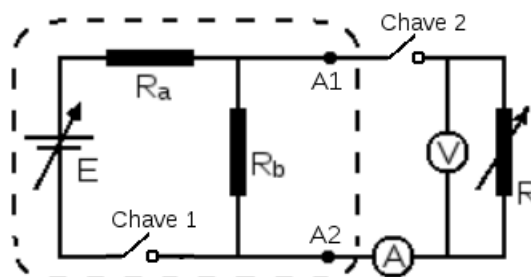


Figura 4: Gráfico da potência fornecida ao usuário em função da resistência do equipamento.

Obs.: As barras de erro não aparecem nos gráficos das figuras 3 e 4 por serem muito pequenas.

**Solução: ERRATA: O coeficiente angular da reta na figura 3 foi previamente ajustado para fornecer o valor de  $R_i$  em Ohms. Da maneira como está no gráfico, ao efetuar os cálculos o valor obtido seria de  $\sim 240\text{k}\Omega$ .**

a) O circuito utilizado para obtenção dos dados experimentais, com o divisor de tensão, dever ter sido montado da seguinte maneira:



A região em destaque na figura representa o divisor de tensão, que é constituído pela fonte  $E$ , e pelos resistores  $R_a$  e  $R_b$ . A tensão na saída do divisor, com a chave 1 fechada e a chave 2 aberta, é a diferença de potencial entre os terminais A1 e A2 ( $V_{A1A2} = E_i$ ). V, A e R representam o voltímetro, amperímetro e resistência do usuário, respectivamente.

Notando que a única variação possível para o circuito seria a troca de posições dos resistores  $R_a$  e

$R_b$  no divisor de tensão.

b) No gráfico da figura 4, vemos que o valor da resistência  $R$  para o qual a potência é máxima está entre  $200\Omega$  e  $300\Omega$ . Uma estimativa melhor seria dizer que está em torno de  $230\Omega$ . No gráfico da figura 3, o valor de  $R_i$  é de  $(241 \pm 5)\Omega$ , bem próximo do valor de  $R$  para o qual a potência é máxima. Isto mostra que a potência fornecida é melhor aproveitada quando a resistência do usuário tem um valor próximo ao da resistência da fonte de tensão.

c) Com a chave 1 fechada e a chave 2 aberta, a voltagem na saída do divisor de tensão ( $V_{A1A2} = E_i$ ) será igual a:

$$V_{A1A2} = E_i = R_b i \Rightarrow i = \frac{E_i}{R_b} \quad (2.c-1)$$

sendo  $i$  a corrente que circulará pelo divisor de tensão.

Pela Lei das Malhas de Kirchoff,

$$E - R_a i - R_b i = 0 \Rightarrow E = (R_a + R_b) i \quad (2.c-2)$$

Substituindo a corrente obtida em (2.c-1) na equação (2.c-2) temos:

$$E = \frac{(R_a + R_b)}{R_b} E_i \quad (2.c-3)$$

Logo,

$$E_i = \frac{R_b}{(R_a + R_b)} E \quad (2.c-4)$$

Vale notar que, se os resistores  $R_a$  e  $R_b$  estiverem com suas posições trocadas, a expressão para  $E_i$  fica:

$$E_i = \frac{R_a}{(R_a + R_b)} E \quad (2.c-5)$$

d) Considerando que os resistores  $R_a$  e  $R_b$  estão posicionados como está mostrado no circuito, teremos:

$$E_i = \frac{400}{(600 + 400)} 6 \Rightarrow E_i = 2,4V$$

A expressão que relaciona a tensão  $V$  com a corrente  $i$  no gráfico é

$$V = E_i - R_i i \quad (2.d-1)$$

A curva de ajuste mostrada no gráfico tem a forma:

$$y = a + bx \quad (2.d-2)$$

Comparando as expressões (2.d-1) e (2.d-2) temos que  $E_i = a$ . Logo, pelo gráfico,  $E_i = (2,424 \pm 0,006)V$ . Deste modo, o valor de  $E_i$  obtido experimentalmente está de acordo com o que é previsto pelo cálculo teórico, apresentando uma diferença de apenas 1%.

**Questão 3 (3 pontos):** Em um experimento para verificar a variação da resistência de um dispositivo termistor (tipo NTC) em função da temperatura, foi utilizado o esquema experimental mostrado na figura 5, com  $R_1 = R_2$ .

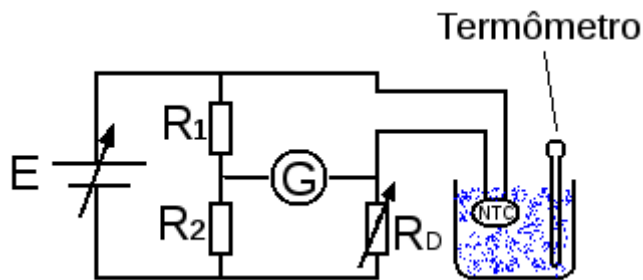


Figura 5: Esquema experimental utilizado. Os elementos E e G são a fonte de tensão e o galvanômetro, respectivamente.  $R_{\{1,2,D\}}$  representa o resistor indicado.

Segundo o fabricante, a relação entre a resistência  $R$  (em Ohms) do termistor e a temperatura  $T$  (em Kelvin) pode ser modelada pela expressão:

$$R(T) = A e^{-BT} \quad (2)$$

Com  $A$  e  $B$  sendo constantes características de cada dispositivo NTC.

Faça uma descrição breve de como obter experimentalmente os parâmetros  $A$  e  $B$  contendo:

- Método experimental (montagem do circuito, cuidados, procedimentos, etc...); (0,7 pontos)
- Método de análise dos dados. (0,8 pontos)

Considere os dados a seguir:

Tabela 1: valores esperados e valores obtidos experimentalmente para os parâmetros  $A$  e  $B$ .

Parâmetro	Valor esperado	Valor experimental
$A(\Omega)$	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$(3,66 \pm 0,18) \cdot 10^{-4}$
$B(K^{-1})$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$(2,995 \pm 0,023) \cdot 10^{-4}$

- Compare os valores esperados de  $A$  e  $B$  com seus respectivos valores experimentais e comente os resultados. (0,5 pontos)
- Obtenha a precisão de cada medida e comente os resultados. (0,5 pontos)
- O que se pode concluir com base nos resultados dos cálculos feitos nos itens c e d? (0,5 pontos)

### Solução:

a) Para obter experimentalmente os parâmetros  $A$  e  $B$  temos que medir valores da resistência do termistor para várias temperaturas. Para isto podemos utilizar o circuito mostrado no esquema da figura 5. Tal esquema é constituído de uma fonte de tensão que alimenta uma ponte de Wheatstone. A ponte, por sua vez, é formada com quatro resistores, sendo dois de resistência fixa, um de resistência variável e o último o próprio termistor. O galvanômetro é utilizado para medir a intensidade da corrente entre dois nós da

ponte.

Após montar um circuito conforme a figura 5, a relação entre os resistores na condição de equilíbrio da ponte será dada por:

$$R_1 R_D = R_2 R_{\text{termistor}} \quad (4.a-1)$$

Uma vez que  $R_1$  e  $R_2$  são iguais, o valor da resistência do resistor variável  $R_D$  será igual ao valor de  $R_{\text{termistor}}$ . Deste modo, o que resta fazer agora é submeter o termistor a várias temperaturas diferentes e coletar valores de resistência que equilibram a ponte para suas respectivas temperaturas, que devem ser medidas com o termômetro.

b) Com os pontos experimentais em mãos, a análise dos dados pode ser feita de, basicamente, duas formas:

1- Criar um gráfico da resistência  $R_{\text{termistor}}$  em função da temperatura  $T$  e aplicar um ajuste não linear do tipo  $y = Ae^{-Bx}$  e obter diretamente os valores dos parâmetros  $A$  e  $B$ , com seus respectivos erros associados.

2- Linearizar a relação (2) da seguinte forma:

$$\ln(R) = \ln(A) - BT \quad (4.b-1)$$

e construir um gráfico de  $\ln(R)$  em função da temperatura  $T$ . Desta forma, deveremos obter uma reta para qual pode ser aplicado um ajuste linear  $y = a + bx$ . De onde teremos  $a = \ln(A)$  e o valor do coeficiente angular  $b$  será o próprio valor do parâmetro  $B$ .

c) Para o parâmetro  $A$  o valor obtido experimentalmente é uma ordem de grandeza menor que seu valor esperado; e a margem de erro na medida de  $A$  não abrange o valor esperado.

No caso do parâmetro  $B$ , o valor experimental está bem próximo do valor esperado com uma diferença de aproximadamente 3%. Mesmo a margem de erro na medida de  $B$  não abrangendo seu valor esperado há boa concordância entre os valores.

d) A precisão na medida de  $A$  é:  $\frac{\Delta A}{A} = \frac{0,18}{3,66} \approx 4,9\%$ , ou seja,  $\approx 5\%$ .

Já a precisão na medida de  $B$  é:  $\frac{\Delta B}{B} = \frac{0,023}{2,995} \approx 0,0077$ , ou seja,  $\approx 0,8\%$ .

Os valores experimentais dos parâmetros  $A$  e  $B$  são bastante precisos.

e) Supondo que o experimento tenha sido realizado corretamente e que a análise de dados tenha sido feita de maneira adequada, os valores de  $A$  e  $B$  obtidos devem ser os que melhor caracterizam o comportamento da resistência do termistor em função da temperatura. O fato de existirem discrepâncias entre os valores esperados de  $A$  e  $B$  e os obtidos experimentalmente é apenas um indicativo de que as propriedades do termistor podem ter sido alteradas anteriormente, por qualquer motivo que seja.