INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP
Prova 2 - F 315 A 26/10/2010

RA:________ Nome: GABARITO

1) ____
2) ____
3) ____
4) ____
Nota: ____

Questão 1 (2.5 pts)

Considere um oscilador harmônico não amortecido de massa m com frequência angular natural ω_0, inicialmente em repouso na posição de equilíbrio.

(a) Considere que sobre o sistema atua uma força externa constante para t > 0, i.e., $F(t)/m = \begin{matrix} 0 (t<0) \\ a(t>0) \end{matrix}$, onde a é uma constante positiva. Encontre $x(t)$. (1.0)

(b) Considere que sobre o sistema atua uma força externa constante para $0 < t < \tau$, i.e., $F(t)/m = \begin{matrix} 0 \ (t<0) \\ a \ (0<t<\tau) \\ 0 \ (t>\tau) \end{matrix}$. Encontre $x(t)$ para $0 < t < \tau$ e para $t > \tau$. Dica: use o resultado de (a) e o princípio da superposição (1.0).

(c) Para o problema em (b), considere em particular que $\tau = 2\pi n/\omega_0$, onde n é um número inteiro positivo. Como será o movimento para $t > \tau$? (0.5)

(a) p/ $t < 0$, $x(t) = 0$

p/ $t > 0$, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = a$

Solução geral Homogênea: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow x = A \operatorname{sen} \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$

Sol. Particular ñ-homogênea: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = a \Rightarrow x = a/\omega_0^2 = cte$

Sol. Geral: $x(t) = A \operatorname{sen} \omega_0 t + B \cos \omega_0 t + a/\omega_0^2$

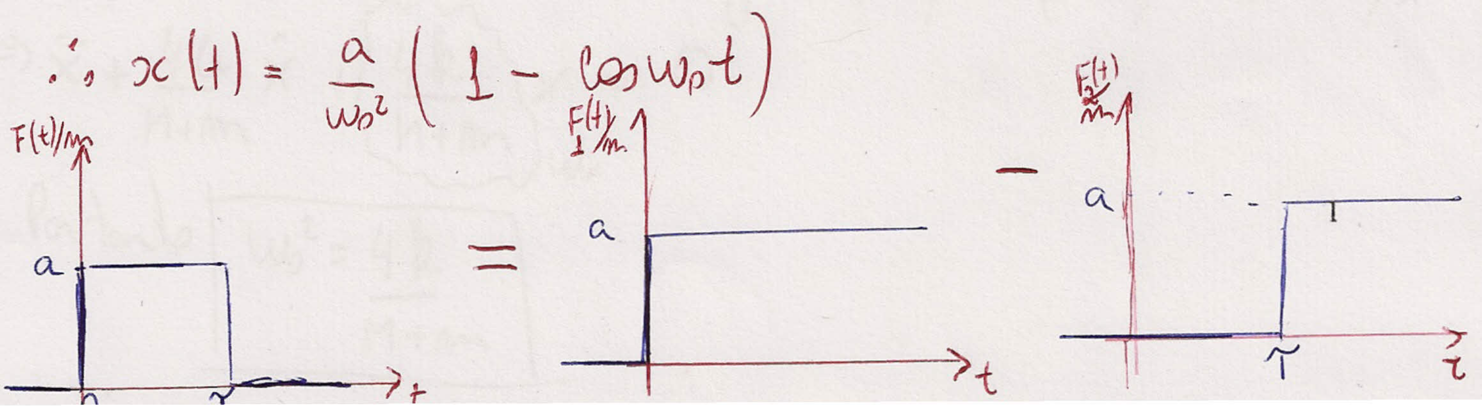
Aplicando condições de contorno: (i) $x(t=0) = 0$, (ii) $\dot{x}(t=0) = 0$

(i) $B + a/\omega_0^2 = 0 \Rightarrow B = -a/\omega_0^2$

(ii) $A\omega_0 = 0 \Rightarrow A = 0$

$\therefore x(t) = \dfrac{a}{\omega_0^2}\left(1 - \cos \omega_0 t\right)$

(b)



Usando a figura esboçada na ~~figura~~ pag. anterior:

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{F_1(t)}{m} - \frac{F_2(t)}{m}$$

Usando o resultado de (a):

$$x_1(t) = \frac{a}{w_0^2}(1 - \cos w_0 t)$$

$$x_2(t) = \frac{a}{w_0^2}(1 - \cos w_0 (t - \tau))$$

Pelo princípio da superposição, para $\boxed{t > \tau}$

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) = \frac{a}{w_0^2}(1 - \cos w_0 t) - \frac{a}{w_0^2}[1 - \cos w_0(t - \tau)]$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{a}{w_0^2}[\cos w_0(t - \tau) - \cos w_0 t] \;//$$

p/ $\boxed{0 < t < \tau}$ $\Rightarrow$ $x(t) = x_1(t) = \frac{a}{w_0^2}(1 - \cos w_0 t) \;//$

(c) Para $\tau = 2\pi n / w_0$; e $t > \tau$

$$x(t) = \frac{a}{w_0^2}\left[\cos w_0\left(t - \frac{2\pi n}{w_0}\right) - \cos w_0 t\right]$$

$$= \frac{a}{w_0}[\cos[w_0 t - 2\pi n] - \cos w_0 t] = \frac{a}{w_0}[\cos w_0 t - \cos w_0 t]$$

$$\therefore x(t) = 0 \quad (t > \tau)$$

Questão 2 (2.5 pts)

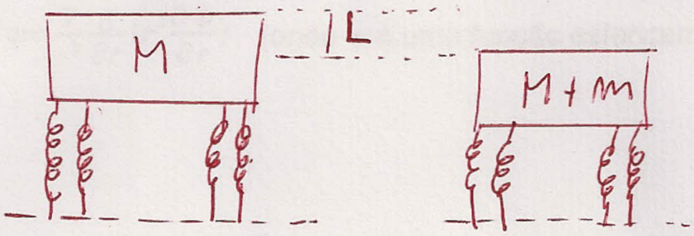
Considere um carro cuja carroceria de massa *M* está presa às rodas por quatro amortecedores idênticos sob ação da gravidade *g*. Ao subirem os passageiros com massa total *m*, a carroceria sofre um deslocamento *L* em direção ao chão. Os amortecedores são fabricados de modo a restaurar o equilíbrio vertical do carro com os passageiros no menor tempo possível.

(a) Encontre a constante de mola *k* de cada amortecedor, em função das quantidades enunciadas. (0.75)

(b) Encontre a frequência natural ω_0 do sistema (carroceria+passageiros com amortecedores). (0.75)

(c) Encontre a constante de amortecimento β de cada amortecedor. (1.0)

(a) SEM PASSAGEIROS COM PASSAGEIROS



(Equilíbrio)

Lei de Hooke: $\Delta F_{MOLAS} = k\Delta x + k\Delta x + k\Delta x + k\Delta x = 4k\Delta x = 4kL$

Mas ΔF_{MOLAS} deve ser tal que contrabalance o peso adicional devido aos passageiros $= mg$. Portanto: $4kL = mg \Rightarrow \boxed{k = \frac{mg}{4L}}$

(b) $F_{TOTAL} = F_g + F_{MOLAS} = (M+m)g - 4kx - 4b\dot{x} = (M+m)\ddot{x}$

Portanto: $\ddot{x} + \underbrace{\left(\frac{4b}{M+m}\right)}_{2\beta_{TOTAL}}\dot{x} + \underbrace{\left(\frac{4k}{M+m}\right)}_{\omega_0^2} x = \frac{(M+m)}{M+m} g = g$

OU SEJA: $\ddot{x} + 2\beta_{TOTAL} + \omega_0^2 x = g$

Portanto, a frequência natural do sistema é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{M+m}} \quad \text{ou} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}\frac{m}{(M+m)}}$$

(c) Do enunciado, concluímos que o movimento é criticamente amortecido. Portanto $\beta_{TOTAL} = \omega_0 = \sqrt{4k/(M+m)}$

Portanto, para cada Amortecedor: $\beta_{AMORT} = \frac{1}{4}\beta_{TOTAL} = \sqrt{k/4(M+m)}$

ou :

$$\beta_{AMORT} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{L}\,\frac{m}{M+m}}$$

Questão 3 (2.5 pts)

(a) Considere uma esfera com densidade não-uniforme, onde o campo gravitacional dentro da mesma seja inversamente proporcional à distância radial. Encontre a dependência radial da densidade ρ(r). (1.5)

(b) Uma massa pontual *m* está localizada a uma distância *D* do **centro** de uma barra fina de massa *M* e comprimento *L*, ao longo do eixo da barra. Encontre o potencial gravitacional e a força gravitacional exercida na massa pontual pela barra. (1.0)

PS: $\Phi=-G\int_L \frac{\rho(r')}{r}dl'$; $\nabla^2\Phi=4\pi G\rho$; $F=-m\nabla\Phi=-Gm\int_L \frac{\rho(r')}{r^2}\hat{e}_r dl'$;

$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r})$ (onde ψ é uma função esfericamente simétrica)

(a) Eq. Poisson: $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$. Mas, como o potencial é esfericamente simétrico:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = 4\pi G\rho(r)$$

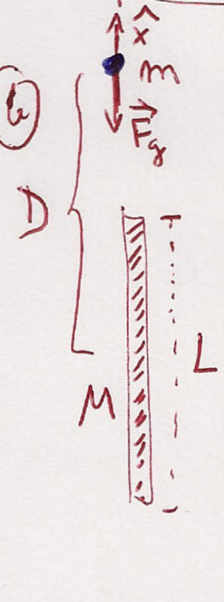
Mas: $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi \Rightarrow g_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{a}{r}$ (enunciado) onde a é cte positiva

Portanto:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{a}{r}\right) = 4\pi G\rho(r) \Rightarrow \frac{1}{r^2}\cdot a = 4\pi G\rho(r) \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho(r) = \frac{a}{4\pi G}\frac{1}{r^2}}$$

(b)



$$\Phi = -G\int_L \frac{(M/L)\,dl'}{r} = -G\int_{D-L/2}^{D+L/2} \frac{(M/L)\,dx}{x}$$

$$\Phi = -\frac{GM}{L}\ln x\Big|_{D-L/2}^{D+L/2} = -\frac{GM}{L}\ln\left(\frac{D+L/2}{D-L/2}\right)$$

$$\vec{F}_g = -Gm\int \frac{(M/L)}{r^2}\hat{x}\,dl' = -\frac{GMm}{L}\int_{D+L/2}^{D+L/2}\frac{dx}{x^2}\hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_g = -\frac{GMm}{L}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{D-L/2}^{D+L/2}\hat{x} = -\frac{GMm}{L}\left[\frac{1}{D-L/2} - \frac{1}{D+L/2}\right]\hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_g = -\frac{GMm}{L}\cdot\frac{D+L/2-D+L/2}{(D-L/2)(D+L/2)}\hat{x} = -\frac{GMm}{D^2-(L/2)^2}\hat{x} \quad //$$

PS: O mesmo resultado poderia ser obtido pela derivação do potencial em relação a D

$$\vec{F}_g = -m\vec{\nabla}\Phi = -m\frac{d\Phi}{dD}\hat{x} = +\frac{GMm}{L}\frac{d}{dD}\ln\left(\frac{D+L/2}{D-L/2}\right)\hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_g = \frac{GMm}{L}\cdot\frac{D-L/2}{D+L/2}\cdot\left[\frac{1}{D-L/2} - \frac{D+L/2}{(D-L/2)^2}\right]\hat{x}$$

$$= \frac{GMm}{L}\cdot\frac{\cancel{D-L/2}}{D+L/2}\cdot\frac{\cancel{D}-L/2-\cancel{D}-L/2}{(D-L/2)^{\cancel{2}}}\hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_g = -\frac{GMm}{D^2-(L/2)^2}\hat{x}$$

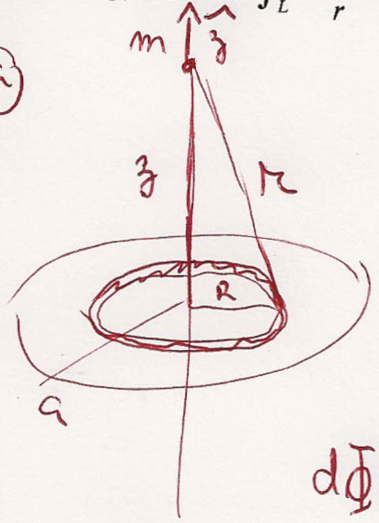
Questão 4 (2.5 pts)

Considere um disco fino uniforme de massa *M* e raio *a*.

(a) Encontre o potencial gravitacional ao longo do eixo do disco. (1.5)
(b) Encontre a força gravitacional ao longo do eixo do disco. (1.0)

PS: $\Phi=-G\int_L \frac{\rho(r')}{r}dl'$; $F=-m\nabla\Phi=-Gm\int_L \frac{\rho(r')}{r^2}\hat{e}_r dl'$;

(a)



Dividindo o disco em anéis de raio R $(0 < R < a)$ de espessura dR, temos que cada anel contribui ao potencial por uma quantidade:

$$d\Phi = -G\frac{dM}{r} = -G.(M/\pi a^2).\frac{2\pi R\, dR}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

Portanto $\Phi = -\frac{2GM}{a^2}\int_0^a \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}dR$

$u = z^2+R^2 \Rightarrow du = 2R\,dR$

$$\Rightarrow \Phi(z) = -\frac{GM}{a^2}\int_{z^2}^{z^2+a^2}\frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{GM}{a^2}.\,2\sqrt{u}\,\Big|_{z^2}^{z^2+a^2} =$$

$$\Rightarrow \Phi(z) = -\frac{2GM}{a^2}\left[\sqrt{z^2+a^2} - z\right]$$

(b) $$\vec{F} = -m\frac{d\Phi}{dz}\hat{z} = \frac{2GMm}{a^2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - 1\right]\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{2GMm}{a^2}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]\hat{z}$$