Cálculo Numérico - Primeira Prova - 13/10/09

Nome: RA:

1

Considere que queremos encontrar os zeros de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Deduza a fórmula iterativa do método de Newton a partir de zeros de aproximações locais lineares para f. [0.5 pts]

(b) Interprete o método de Newton geometricamente. Use o desenho de uma função que você achar adequada (não precisa explicitar qual a função). [0.5 pts]

(c) Podemos sempre garantir a convergência do método de Newton? Explique. Argumentações geométricas serão consideradas. [0.5 pts]

(d) Seja $f(x) = e^{2x} + 5x$. Aplique o método de Newton partindo do ponto inicial $x_0 = 0$ (de preferência em forma tabelar). Verifique para $k = 0, 1, \ldots$ se pelo menos um dos critérios de parada $|f(x_k)| < 10^{-4}$ ou $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-4}$ está satisfeito. Qual é a aproximação obtida de um zero de f? [1.0 pt]

2

Considere uma maquina que utiliza o sistema de *ponto flutuante* com arredondamento, base 10 e 5 dígitos na mantissa. Além disso, considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 \cdot 10^{-1} & 0.1 \cdot 10^{5} \\ 0.1 \cdot 10^{7} & 0.1 \cdot 10^{7} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.1 \cdot 10^{5} \\ 0.2 \cdot 10^{7} \end{pmatrix}.$$

(a) Resolva $Ax = b$ utilizando Fatoração LU *sem* pivoteamento nesta maquina. [1 pt]

(b) *Com pivoteamento parcial*, a Fatoração LU calculada na maquina da

$$L = \begin{pmatrix} 0.1 \cdot 10^{1} & 0 \\ 0.1 \cdot 10^{-7} & 0.1 \cdot 10^{1} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0.1 \cdot 10^{7} & 0.1 \cdot 10^{7} \\ 0 & 0.1 \cdot 10^{5} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilize estes resultados para resolver $Ax = b$ nesta maquina.

[0.5 pts]

(c) Interprete os resultados encontrados em **(a)** e **(b)** e explique o que aconteceu. [1 pt]

Vire a página!

3

Considere o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) É possível assegurar a convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel para a solução deste sistema linear? Justifique. [1 pt]

(b) Uma vez assegurada a convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel para a solução de um sistema linear, qual dos dois você espera que convirja mais rapidamente? [0.5 pts]

(c) Aplique uma iteração do método de Gauss-Seidel partindo do ponto $x^{(0)} = (0,0,0)^T$. [1 pt]

4

Considere o sistema não-linear:

$$\begin{cases} 4x^2 - 20x + \frac{1}{4}y^2 & = & -8 \\ \frac{1}{2}xy^2 - 2x - 5y & = & -8. \end{cases}$$

(a) Encontre a matriz Jacobiana do sistema. [0.5 pts]

(b) Partindo do chute inicial $x^{(0)} = (0.5, 1.5)^T$, execute o método de Newton até $||F(x^{(k)})||_\infty < 0.1$ ou $||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty < 0.1$. Verifique estes critérios de parada para $k = 0, 1, \ldots$ [2 pts]

Boa sorte! Justifique as suas respostas explicitando todos os passos. Utilize 4 dígitos decimais *exceto na Questão 2!*