1. (*2.0 pontos*) Encontre a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$x^2y' + xy = x\cos x, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

2. (*2.0 pontos*) Dado o problema de valor inicial

$$(x^2 + 3xy + y^2)\ dx - x^2\ dy = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 0.$$

   (a) (0.5) Mostre que a equação é homogênea e diga qual a substituição (i.e. mudança de variável) utilizada que torna a equação separável.

   (b) (1.5) Resolva o problema de valor inicial

3. (*2.0 pontos*) Considere a equação diferencial

$$x^2y'' - 6y = 0, \quad x > 0.$$

   Dado que $y_1(x) = x^3$ é uma solução da equação, use o método de **redução de ordem** para determinar uma segunda solução da forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$.

4. (*2.0 pontos*) Usando o método dos coeficientes indeterminados encontrar a solução geral da equação

$$4y'' - 4y' + y = 16e^{\frac{x}{2}}.$$

5. (*2.0 pontos*) Dado que $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ e $y_3 = x^{-1}$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada a:

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \quad x > 0.$$

   determine uma solução particular usando o método de **variação dos parâmetros**.

Questão 1.
$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}\cos x$$

Fator integrante:
$$\mu = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}dx} = \mathrm{e}^{\ln|x| dx} = |x| = \pm x\,.$$

0,7 pontos até aqui.

Tomando $\mu = x$, temos:
$$\begin{aligned} (xy)' &= \cos x \\ xy &= \int \cos x dx = \mathrm{sen} x + c \\ y &= \tfrac{1}{x}\left(\mathrm{sen} x + c\right) \end{aligned}$$

$+\,\mathbf{0,7}$

Condição inicial:
$$\begin{aligned} y(\tfrac{\pi}{2}) = 0: \quad 0 &= \tfrac{2}{\pi}(1+c) \\ c &= -1 \end{aligned}$$

Solução:
$$y = \frac{1}{x}\left(\mathrm{sen} x - 1\right)$$

$+\,\mathbf{0,6}$

Questão 2. (a) Dividindo a equação por x^2, obtemos
$$\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2. \tag{1}$$

Como o lado direito da equação acima depende somente do quociente y/x, isso mostra que a equação é homogênea (0,3). Neste caso, a mudança de variável é dada por $v = y/x$ (0,2).

(b) Defina $f(v) = 1 + 3v + v^2$. Então a equação em (1) se tranforma na EDO separável
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{v - f(v)}\frac{dv}{dx} = 0.$$

Mas $v - f(v) = -(1 + 2v + v^2) = -(1+v)^2$. Assim, devemos resolver
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{(v+1)^2}\frac{dv}{dx} = 0. \qquad (0,6) \tag{2}$$

Sejam
$$H_1(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

e
$$H_2(v) = -\int \frac{1}{(v+1)^2}dv = \frac{1}{v+1}.$$

Logo, $\ln|x| + \frac{1}{v+1} = c$ é a solução geral de (2). Como $v = y/x$, obtemos

$$\ln|x| + \frac{x}{x+y} = c \quad \Rightarrow \quad y = x(c - \ln|x|)^{-1} - x. \qquad (0,6)$$

Agora, $y(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$. Portanto,

$$y = x(1 - \ln|x|)^{-1} - x \qquad (0,3)$$

é a solução do PVI dado.

Questão 3.

$$\begin{aligned} y_2 &= \; vy_1 \\ y_2' &= \; v'y_1 + vy_1' \\ y_2'' &= \; v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' \end{aligned}$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') - 6vy_1 &= \; 0 \\ v(x^2y_1'' - 6y_1) + (x^2y_1)v'' + (2x^2y_1')v' &= \; 0 \end{aligned}$$

Daí, como $y_1 = x^3$ é solução da equação, temos

$$\begin{aligned} x^5v'' + 6x^4v' &= \; 0 \\ xv'' + 6v' &= \; 0 \\ v'' + \tfrac{6}{x}v' &= \; 0 \end{aligned}$$

uma EDO linear de 1a. ordem para v'.

1,0

Fator integrante ($x > 0$):

$$\mu = \mathrm{e}^{\int \frac{6}{x}dx} = \mathrm{e}^{6\ln x dx}\mathrm{e}^{\ln x^6 dx} = x^6, .$$

Multiplicando a equação para v' por $\mu = x$, temos:

$$\begin{aligned} (x^6v')' &= 0 \\ v' &= \tfrac{c}{x^6} \end{aligned}$$

$+ \mathbf{0,5}$

$$\begin{aligned} v &= \int \tfrac{c}{x^6}dx \\ v &= -\tfrac{1}{5}cx^{-5} + c_1 \end{aligned}$$

Tomando $c = -5$ e $c_1 = 0$, obtemos:

$$v = x^{-5}$$

$$y_2 = \frac{1}{x^5}y_1 = \frac{1}{x^5}x^3$$

$$y_2 = \frac{1}{x^2}$$

+ 0,5

Questão 4.

Solução geral (CFS) da equação homogênea (equação linear hoomogênea com coeficientes constantes):

Equação característica:

$$\begin{aligned} 4r^2 - 4r + 1 = & \; 0 \\ r^2 - r + \tfrac{1}{4} = & \; 0 \\ (r - \tfrac{1}{2})^2 = 0; \end{aligned}$$

raiz: $r = \frac{1}{2}$, **com multiplicidade 2**.

CFS:

$$y_1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}, \quad y_2 = x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$$

Solução geral (CFS) da equação homogênea:

$$y_H = c_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + c_2 x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$$

0,5

Solução particular ($s = 2$):

$$y_P = x^s(A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}) = Ax^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$$

+ 0,5

$$\begin{aligned} y_P' &= 2Ax\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + \tfrac{1}{2}Ax^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \\ &= A(2x + \tfrac{x^2}{2})\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \\ y_P'' &= A(2 + x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + \tfrac{A}{2}(2x + \tfrac{x^2}{2})\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 4A(2 + x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + 2A(2x + \tfrac{x^2}{2})\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 4A(2x + \tfrac{x^2}{2})\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + Ax^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = & \; 16\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \\ 8A = & \; 16 \\ A = & \; 2 \end{aligned}$$

+ 0,5

Solução geral:

$$\begin{aligned} y &= y_H + y_P \\ y &= c_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + c_2 x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + 2x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

+ 0,5

Questão 5. Primeiro observe que a equação pode ser reescrita na forma

$$y''' + \frac{1}{x}y'' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = 2x =: g(x).$$

Usando o método de varaiação dos parâmetros, suponhamos que a equação possui uma solução particular do tipo

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3,$$

onde u_m são tais que $u_m' = g(x)W_m(x)/W(x)$ (0,5). Notemos que

$$y_1' = 1, \quad y_2' = 2x, \quad y_3' = -x^{-2}, \qquad y_1'' = 0, \quad y_2'' = 2, \quad y_3'' = 2x^{-3}.$$

Portanto,

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 4x^{-1} + 2x^{-1} + 2x^{-1} - 2x^{-1} = 6x^{-1}. \qquad (0,1)$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^{-1} \\ 0 & 2x & -x^{-2} \\ 1 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3. \qquad (0,1)$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x^{-1} \\ 1 & 0 & -x^{-2} \\ 0 & 1 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = x^{-1} + x^{-1} = 2x^{-1}. \qquad (0,1)$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2. \qquad (0,1)$$

Logo,

$$u_1' = -2x.3.\frac{x}{6} = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\frac{1}{3}x^3. \qquad (0,2)$$

$$u_2' = 2x.2x^{-1}.\frac{x}{6} = \frac{2}{3}x \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{3}x^2. \qquad (0,2)$$

$$u_3' = 2x.x^2.\frac{x}{6} = \frac{1}{3}x^4 \quad \Rightarrow \quad u_3 = \frac{1}{15}x^5. \qquad (0,2)$$

Finalmente,

$$y_p = -\frac{1}{3}x^3.x + \frac{1}{3}x^2.x^2 + \frac{1}{15}x^5.x^{-1} = \frac{1}{15}x^4, \qquad (0,5)$$

ou seja, $y_p = \frac{1}{15}x^4$ é solução particular da equação.