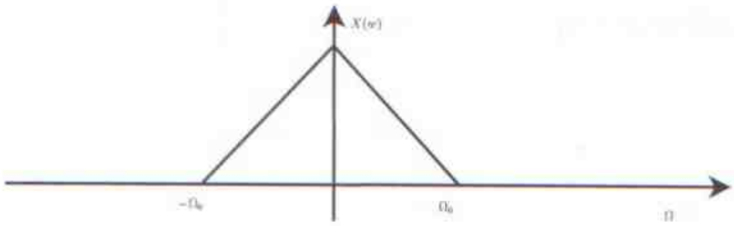
ES879 - Terceira Prova - 05/11/2008

Nome: Gabarito RA:

1. (valor 1.0) Um filtro Butterworth "anti-aliasing" possui os seguintes requisitos: 1) $-0.5dB$ a $20rad/s$ e 2) $-10dB$ a $80rad/s$. Sabendo que o filtro será implementado de forma digital através da transformação bilinear com intervalo de amostragem de $0.01s$, calcule as freqüências do projeto analógico de forma a prevenir o fenômeno de "warping".

2. (valor 1.5) A Figura 2 representa um perídodo do espectro de uma seqüência $x(n)$ amostrada com $\Omega_s = 2\Omega_0$, onde Ω_0 é a maior componente de freqüência do sinal. Esboce o novo espectro $X(w)$ para $\Omega_s = 4\Omega_0$ e comente as diferenças entre o espectro original e o novo para as duas freqüências de amostragem.



3. Uma função de transferência discreta $H(z)$ é dada por:

$$H(z) = \frac{5 - 3z^{-1} - 0.5z^{-2}}{(1 - z^{-2})(1 - 0.25z^{-1})}$$

   (a) (valor 0.5) Discuta a estabilidade de $H(z)$.

   (b) (valor 1.0) Calcule a seqüência $h(n)$ que representa a resposta ao impulso deste sistema.

   (c) (valor 1.0) Dada a entrada $0.5sen(\frac{\pi}{5}n)$, determine a resposta em regime do sistema.

4. (valor 1.0) Qual o interesse pela FFT no processamento de sinais?

5. (valor 1.0) É sabido que ao se aumentar uma seqüência incluindo zeros, o seu espectro via DFT será melhor visualizado. Qual o motivo disso?

Questão a ser respondida com o auxílio do MATLAB:

6. Sejam as seqüências $x_1(n) = \delta(n) + 3\delta(n-2) + 2\delta(n-4) + \delta(n-5)$ e $x_2(n) = \delta(n-1) + 2\delta(n-3)$.

   (a) (valor 1.0) Calcule a convolução circular de $x_1(n)$ e $x_2(n)$ para $N = 6$.

   (b) (valor 1.0) Calcule a convolução (usual) de $x_1(n)$ e $x_2(n)$. O resultado é o mesmo que o do item a)? Justifique.

   (c) (valor 1.0) Calcule $y(n)$ sabendo que $Y(k) = X_1(k)e^{\frac{-j2\pi k}{3}}$. Use o menor período N que torne possível o uso da propriedade de deslocamento circular.

Algumas equações:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$X(w) = \mathcal{F}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi k\frac{n}{N}}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi k\frac{n}{N}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$x_1(n) \odot x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(n-k)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw$$

$$s = j\Omega$$

$$z = e^{sT}$$

$$w = \Omega T$$

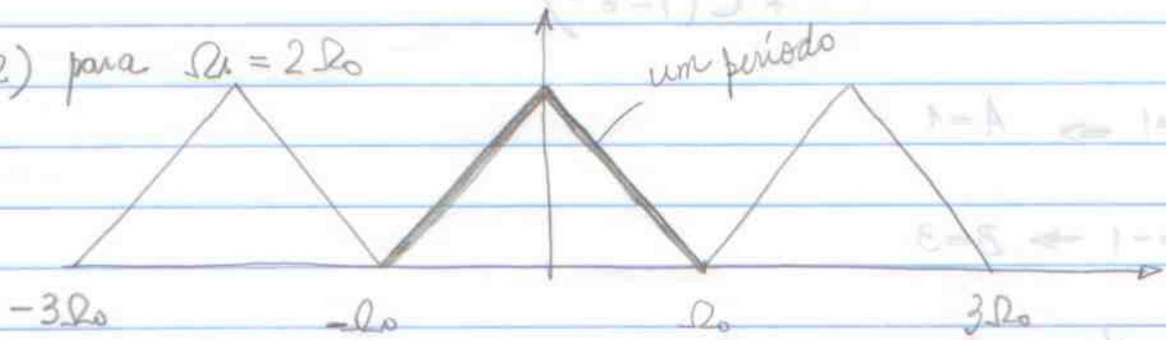
1) $\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$

$$\Omega_1 = \frac{2}{0{,}01} \tan\left(\frac{20 \times 0{,}01}{2}\right) = 20{,}0669 \text{ rad/s}$$

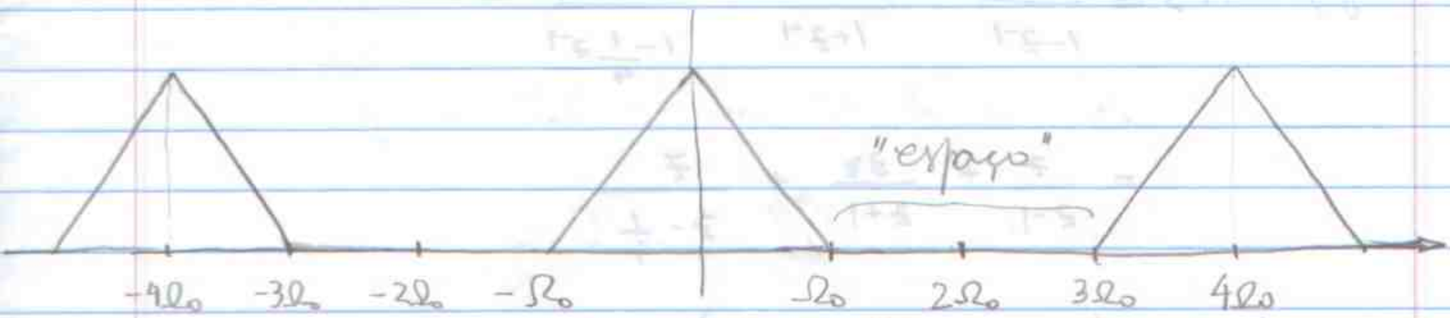
$$\Omega_2 = \frac{2}{0{,}01} \tan\left(\frac{80 \times 0{,}01}{2}\right) = 84{,}5586 \text{ rad/s}$$

∴ O novos requisitos são: (20,0669 rad/s, −0,5 dB)
(84,5586 rad/s, −10 dB)

2) para $\Omega_s = 2\Omega_0$



para $\Omega_s = 4\Omega_0$ (aumento da freqüência de amostragem)



Para $\Omega_s = 2\Omega_0$ não há "espaço" entre os espectros (taxa mínima de amostragem). Se $\Omega_s < 2\Omega_0$ haverá "aliasing". Para $\Omega_s = 4\Omega_0$ haverá um "espaço" extra na representação do espectro, facilitando a visualização. Este espaçamento não interfere na reconstrução do sinal.

3) a) pólos: $1 - z^{-2} = 0 \Rightarrow z = \pm 1$

$1 - \frac{1}{4} z^{-1} = 0 \Longrightarrow z = \frac{1}{4}$

Existem pólos sobre o círculo unitário e no seu interior $\Rightarrow$ marginalmente estável.

b) $$\frac{5 - 3z^{-1} - 0{,}5 z^{-2}}{(1 - z^{-2})(1 - 0{,}25 z^{-1})} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + z^{-1}} + \frac{C}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}$$

$$5 - 3z^{-1} - 0{,}5 z^{-2} = A(1 + z^{-1})(1 - 0{,}25 z^{-1}) + B(1 - z^{-1})(1 - 0{,}25 z^{-1}) + C(1 - z^{-2})$$

$z = 1 \Rightarrow A = 1$

$z = -1 \rightarrow B = 3$

$z = 1/4 \Rightarrow C = 1$

Logo, $$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{3}{1 + z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} =$$

$$= \frac{z}{z - 1} + \frac{3z}{z + 1} + \frac{z}{z - \frac{1}{4}}$$

$$h(z) = \left(1 + 3(-1)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) u(n)$$

$\hookrightarrow$ degrau unitário

c) entrada $x(n) = 0{,}5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5} n\right) \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{5}$

$z = e^{j\omega}$

$$H(\omega) = \frac{5 - 3e^{-j\omega} - 0.5\, e^{-2j\omega}}{(1 - e^{-2j\omega})(1 - 0{,}25\, e^{-j\omega})}$$

$$H\left(\omega_0 = \frac{\pi}{5}\right) = \frac{5 - 3e^{-j\frac{\pi}{5}} - 0{,}5\, e^{-2j\frac{\pi}{5}}}{(1 - e^{-2j\frac{\pi}{5}})(1 - 0{,}25\, e^{-j\frac{\pi}{5}})} = 3{,}2124 - j \times 1{,}2748$$

$$|H(\omega_0)| = 3{,}4561$$

$$\angle H(\omega_0) = -0{,}3778$$

A resposta será: (de regime) $y(n) = |H(\omega_0)| \times 0{,}5 \times \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5} n + \angle H(\omega_0)\right) =$

$$= 1{,}7281 \times \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5} n - 0{,}3778\right)$$

4) A FFT (Fast Fourier Transform) é um algoritmo que faz a implementação rápida da DFT (Discrete Fourier Transform). A importância da FFT está em gerar o espectro de sinais discretos de forma eficiente e permitir a análise deste sinal em termos de suas características em freqüência.

5) A DFT é dada por

$$X(k) = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\,2\pi k n/N} \quad , \; k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N} \qquad (*A).$$

Ao se aumentar com zeros a sequência $x(n)$, o conteúdo espectral não é modificado (ver somatório acima). Contudo, a resolução é melhorada de acordo com a equação $(*A)$.

6) a) $x_1(n) = [1 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 1]$

$x_2(n) = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2]$

$X_1 = fft(x_1, 6) = [7 \;\; -1 \;\; \ldots \;\; -1]$

$X_2 = fft(x_2, 6) = [3 \;\; -1{,}5-0{,}866j \;\; \ldots \;\; -1{,}5+0{,}866j]$

$X_C = X_1 .* X_2 = [21 \;\; 1{,}5+0{,}866j \;\; \ldots \;\; 1{,}5-0{,}866j]$

$x_C = ifft(X_C, 6) = [1 \;\; 5 \;\; 2 \;\; 5 \;\; 0 \;\; 8]$

b) $x_e = conv(x_1, x_2) = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 5 \;\; 0 \;\; 8 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 2]$

O resultado é diferente devido ao número de pontos no cálculo das DFT (x_e com 9 pontos e x_c com 6 pontos). Para $N=9$ pontos, as convoluções circular e convencional serão iguais.

c) <u>No Matlab:</u>

$X_1(k)$ já calculado (vetor X_1)

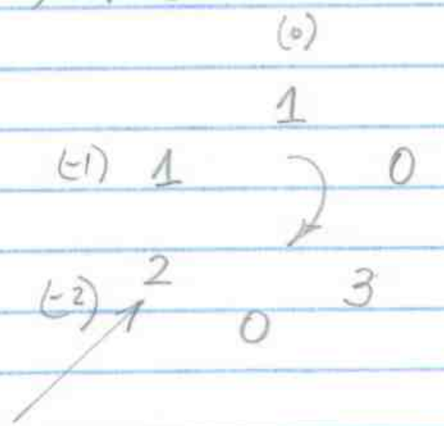
Código:
```
k = 0:1:5;        (N=6)
E = exp(-j*2*pi*k/3);
Y = X1.*E    --> [7   0,5+0,86j ... 0,5-0,86j]
y = ifft(Y)  --> [2 1 1 0 3 0]
```

<u>Através da propriedade:</u>

Se $Y(k) = X(k)\, e^{-j 2\pi k m / N}$, então

$$y(n) = x^N[n-m].$$

$m = 2$, $N = 6$



novo ponto de partida $\Longrightarrow$ $y(n) = [2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 0]$