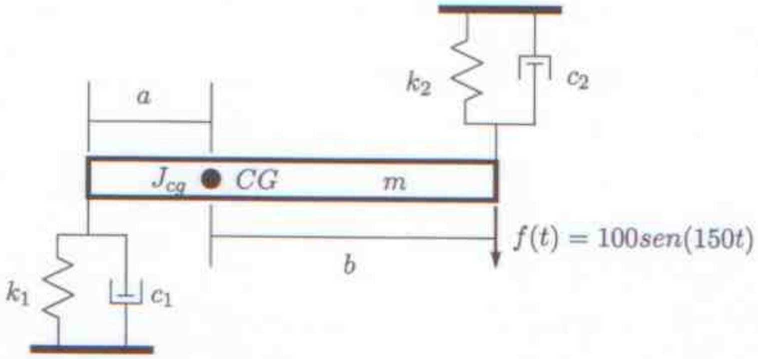
**EM607 - Primeira Prova - 13/Maio/2010**

Nome: Gabarito RA:

1. (valor 2.0) Seja o sistema da figura.

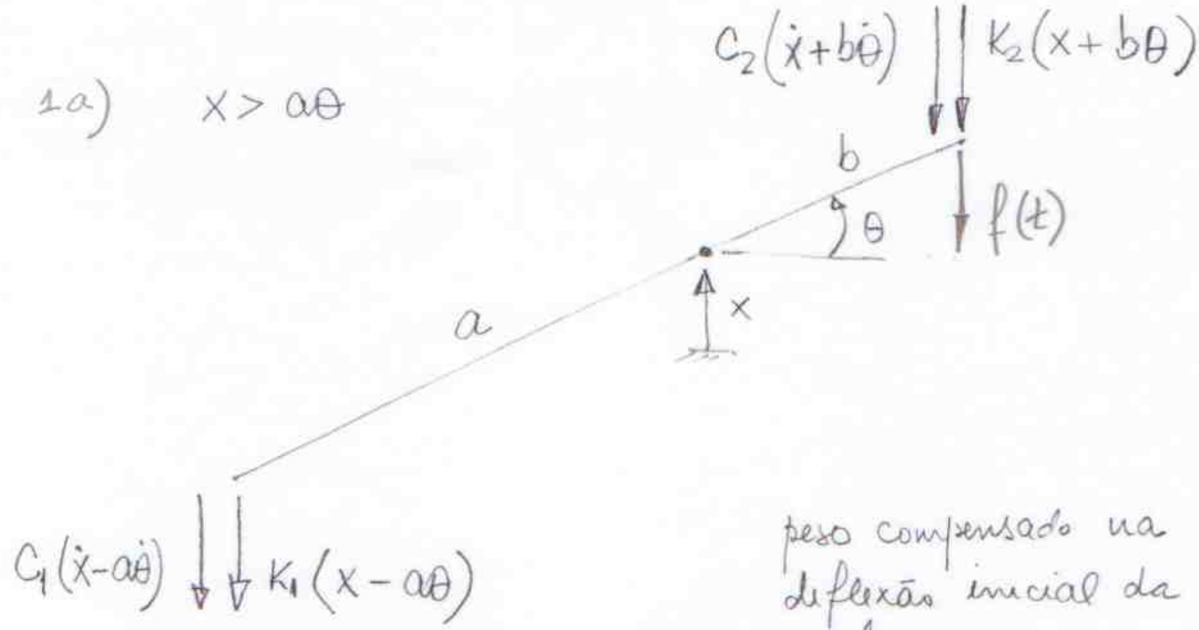



(a) (valor 2.0) Determine a equação matricial do movimento considerando como coordenadas o deslocamento vertical do CG da barra e o ângulo de rotação desta. Considerar pequenos deslocamentos.

(b) (valor 2.0) Para $m = 1000kg$, $a = b = 2m$, $J_{CG} = 1300kgm^2$, $k1 = 50000N/m$, $k_2 = 70000N/m$, $c_1 = c_2 = 0$, determine as matrizes do modelo modal normalizado pela massa (matriz das frequências naturais e dos modos de vibrar normalizados).

(c) (valor 2.0) Considere que o amortecimento é proporcional à matriz de massa através do fator multiplicativo de 0.2. Determine as equações desacopladas do movimento.

1a) $x > a\theta$




peso compensado na deflexão inicial da mola.

$$m\ddot{x} = -k_1(x-a\theta) - c_1(\dot{x}-a\dot{\theta}) - k_2(x+b\theta) - c_2(\dot{x}+b\dot{\theta})$$

$$m\ddot{x} + (c_1+c_2)\dot{x} + (c_2 b - c_1 a)\dot{\theta} + (k_1+k_2)x + (k_2 b - k_1 a)\theta = -f(t)$$

$$J_{cg}\ddot{\theta} = -k_2(x+b\theta)b - c_2(\dot{x}+b\dot{\theta})b + c_1(\dot{x}-a\dot{\theta})a +$$

$$+ k_1(x-a\theta)a - f(t).b$$

$$J_{cg}\ddot{\theta} + (c_2 b^2 + c_1 a^2)\dot{\theta} + (c_2 b - c_1 a)\dot{x} +$$

$$+ (k_2 b - k_1 a)x + (k_2 b^2 + k_1 a^2)\theta = 0$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_{cg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & c_2 b - c_1 a \\ c_2 b - c_1 a & c_2 b^2 + c_1 a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2 b - k_1 a \\ k_2 b - k_1 a & k_2 b^2 + k_1 a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f(t) \\ -f(t)b \end{Bmatrix}$$

1b) $\begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} +$

$+ \begin{bmatrix} 120\times10^3 & 40\times10^3 \\ 40\times10^3 & 480\times10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Cálculo dos modos (não amortecidos):

$$\det\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1300 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 120 & 40 \\ 40 & 480 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \right) = 0$$

$$\det\left( \begin{bmatrix} 120000 - 1000\omega^2 & 40\times10^3 \\ 40\times10^3 & 480000 - 1300\omega^2 \end{bmatrix} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$(120000 - 1000\omega^2)(480000 - \omega^2) - (40\times10^3)^2 = 0$$

$\omega_{n1} = 10{,}7311$; $\omega_{n2} = 19{,}3410$; $\begin{bmatrix} \ddots \omega_n^2 & \\ & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115{,}2 & 0 \\ 0 & 374{,}1 \end{bmatrix}$

$(120000 - 1000\,\omega_{n1}^2) X_1 + 40\times10^3 X_2 = 0$

$(120000 - 1000 \cdot 10{,}73^2) X_1 + 40\times10^3 X_2 = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}1211 \end{Bmatrix}$

(primeiro modo)

$(120000 - 1000 \cdot 19{,}34^2) X_1 + 40\times10^3 X_2 = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6{,}3519 \end{Bmatrix}$

(segundo modo)

$$[\psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0{,}1211 & 6{,}3519 \end{bmatrix}$$

$$[\psi]^t [M] [\psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0{,}1211 & 6{,}3519 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1211 \\ 1 & 6{,}3519 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1019{,}1 & \\ & 53450{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \diagdown m_r \diagdown \end{bmatrix}$$

$$[\phi] = [\psi] \begin{bmatrix} \diagdown m_r \diagdown \end{bmatrix}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 0{,}0313 & 0{,}0043 \\ -0{,}0038 & 0{,}0275 \end{bmatrix}$$

1c) $[\phi]^t [M] [\phi] = [I]$

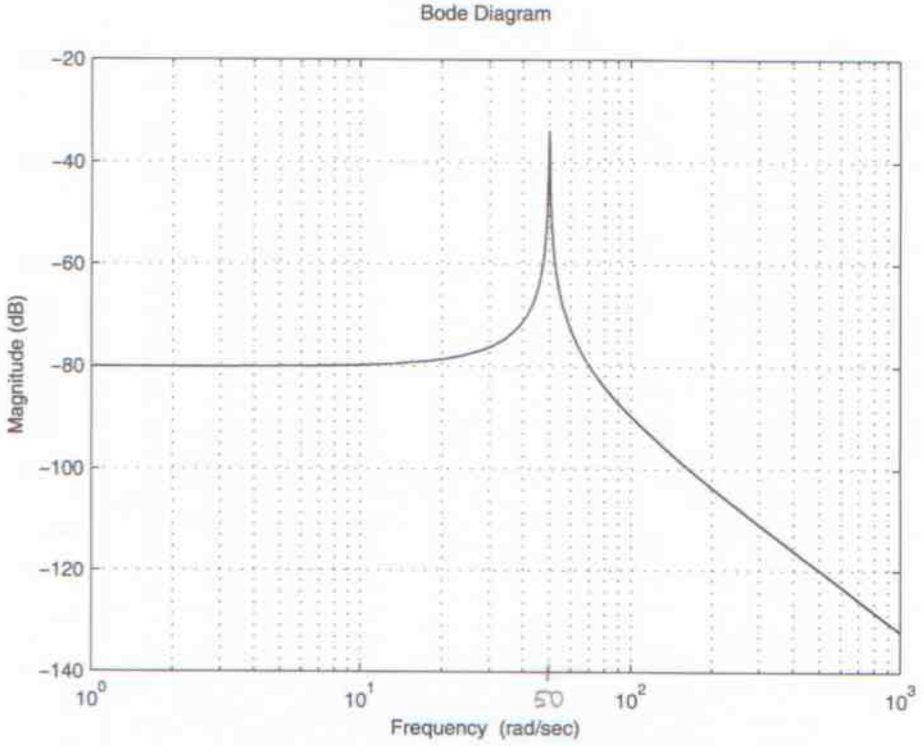
$$[\phi]^t [K] [\phi] = \begin{bmatrix} 115{,}2 & 0 \\ 0 & 374{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \diagdown \omega_n^2 \diagdown \end{bmatrix}$$

$$[\phi]^t [C] [\phi] = [\phi]^t [0{,}2\, M] [\phi] = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 115{,}2 & 0 \\ 0 & 374{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} =$$

$$= [\phi]^t \begin{Bmatrix} -f(t) \\ -f(t)b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}37 \\ -5{,}93 \end{bmatrix} \operatorname{sen}(150t)$$

2. Um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade apresenta o seguinte gráfico de resposta em frequência (~~mobilidade~~).
receptância




Nota: $X_{em\ dB} = 20 log X$

(a) (valor 2.0) Considerando um sistema com amortecimento muito pequeno (desprezível), determine os valores da massa e da rigidez do sistema.

$$\xi \simeq 0 \longrightarrow \omega_n = 50 \ rad/s = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{K - \omega^2 m}$$

$$\text{se } \omega = 0 \Rightarrow \alpha(\omega) = \frac{1}{K} = -80 \text{ dB} = 20 \log A$$

$$A = 10^{-4} = \frac{1}{K} \rightarrow \boxed{K = 10000.}$$

$$\sqrt{\frac{10000}{m}} = 50 \longrightarrow \boxed{m = 4}$$

(b) (valor 2.0) Considerando agora um fator de amortecimento de 0.0025 e os valores já determinados no item anterior, determine o modelo de estados tendo como saída a posição e a aceleração, e tendo como entrada uma força periódica $f(t) = 1sen(wt)$.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) = sen(wt)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{1}{m}f(t) \; ; \quad 2\xi\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$c = 2\xi m\omega_n = 2 \times 0{,}0025 \times 4 \times 50 = 1$$

$$\underset{\dot{x}_2}{\underset{\downarrow}{\dot{x}}} + \frac{1}{4}\underset{x_2}{\underset{\downarrow}{\dot{x}}} + 50^2 \underset{x_1}{\underset{\downarrow}{x}} = \frac{1}{4}f(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2500 & -0{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} sen(wt)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2500 & -0{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} sen(wt)$$

$z_1$: posição

$z_2$: aceleração

Algumas equações:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$$

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t+nT)}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 sen(wt)$$

$$\ddot{x} + 2\xi w_n \dot{x} + w_n^2 x = f_0 sen(wt)$$

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mew^2 sen(wt)$$

$$\frac{X}{(me/M)} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

$$r_{pico} = 1/\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$r_{pico} = \sqrt{1-2\xi^2}$$

$$r_{pico} = \frac{\sqrt{-1+\sqrt{1+8\xi^2}}}{2\xi}$$

$$\frac{F_T}{mew_n^2} = \frac{r^2\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\alpha(w) = \frac{X}{F}$$

$$\psi^t \mathbf{M} \psi = diag(m_r)$$

$$\psi^t \mathbf{K} \psi = diag(k_r)$$

$$\phi^t \mathbf{M} \phi = \mathbf{I}$$

$$\phi^t \mathbf{K} \phi = diag(\bar{w}_r)$$

$$\phi = \psi.[\overline{diag(m_r)]}^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{f}$$