Mecânica – F315 B

3ª prova - 28 de novembro de 2008

Nome: GABARITO RA:______

Questão 1 (2,5)

Uma galáxia tem a densidade de massa dada por $\rho(r) = \frac{A}{r^2}$, onde r é a distância de um ponto na galáxia ao centro da mesma. Obtenha:

a) O campo gravitacional em função da posição, utilizando a origem no centro da galáxia;(1,0)

b) A diferença de potencial gravitacional entre um ponto distante r_1 do centro da galáxia e outro ponto distante r_2 do centro da galáxia($r_2>r_1$); (1,0)

c) O trabalho para mover um corpo de massa m de r_1 a r_2; (0,5)

a) Por simetria $\vec{g}(\vec{r}) = g(r)\,\hat{r}$

Pela lei de Gauss $\int_S \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G M_{envolvida}$

Usando uma superfície esférica de raio r, centrada na origem, temos

$$\int_S \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int g(r)\, dA = g(r)\, 4\pi r^2 = -4\pi G\, M_{env}$$

$$M_{env} = \int_0^r \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr = A\, 4\pi \int_0^r dr = A\, 4\pi r$$

$$\Rightarrow g(r)\, \cancel{4\pi} r^2 = -4\pi G A \cancel{4\pi} r \Rightarrow g(r) = -\frac{4\pi G A}{r}$$

$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{4\pi G A}{r}\,\hat{r}}$$

b) $$V(r_2) - V(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{g} \cdot d\vec{r} = 4\pi G A \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = 4\pi G A \ln\left(r_2/r_1\right)$$

c) $$W = m\,(V(r_2) - V(r_1)) = m\, 4\pi G A \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Questão 2 (2,5)

Um pêndulo plano de massa m, de comprimento l inextensível tem seu ponto pivô (P) movimentado como $X_p = Asen(\omega t)$ Obtenha:

a) O lagrangeano L(θ;t) do problema.(1,0)
b) A equação diferencial de movimento para o ângulo θ. (1,5)

1)

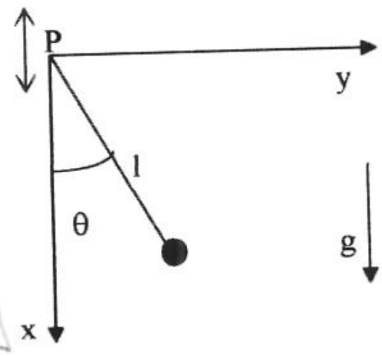
$$x = l\cos\theta + A\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$y = l\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\dot{x} = -l\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta} + A\omega\cos(\omega t)$$

$$\dot{y} = l\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$X_p=Asen(\omega t)$



$$U = -mgx = -\cancel{mgl} = -mg[l\cos\theta + A\,\mathrm{sen}\,\omega t]$$

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2+\dot{y}^2] = \frac{1}{2}m\left[l^2\mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2 + A^2\omega^2\cos^2(\omega t) - 2A\omega l\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\cos(\omega t) + l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\right]$$

$$\boxed{L(\theta,t) = \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\theta}^2 + A^2\omega^2\cos^2(\omega t) - 2A\omega l\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\cos(\omega t)\right] + mg\left[l\cos\theta + A\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]}$$

b)

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -mA\omega l\cos\theta\,\dot{\theta}\cos(\omega t) - mgl\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} - mA\omega l\,\mathrm{sen}\,\theta\cos(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} - mA\omega l\cos\theta\,\dot{\theta}\cos(\omega t) + mA\omega^2 l\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \rightarrow ml^2\ddot{\theta} - \cancel{mA\omega l\cos\theta\,\dot{\theta}\cos(\omega t)} + mA\omega^2 l\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}(\omega t) + \cancel{mA\omega l\cos\theta\,\dot{\theta}\cos(\omega t)} + mgl\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\rightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl\,\mathrm{sen}\,\theta + mA\omega^2 l\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}(\omega t) = 0 \qquad 1/ml^2$$

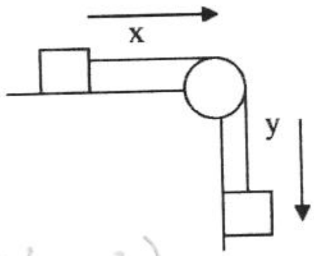
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\mathrm{sen}\,\theta\left(1 + \frac{Al\omega^2}{gl}\mathrm{sen}(\omega t)\right) = 0 \qquad \frac{g}{l} = \omega_0^2$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\mathrm{sen}\,\theta\left(1 + \frac{A\omega^2}{l\omega_0^2}\mathrm{sen}(\omega t)\right)}$$

Questão 3(2,5)

Considere dois blocos iguais de massa m ligados por uma corda de comprimento fixo L, conforme o desenho abaixo. Despreze qualquer atrito, a massa da corda e o momento de inércia da polia:

(a) Obtenha o lagrangeano L(x,y;t) considerando a corda extensível; (1,0)
(b) Considerando o vínculo, obtenha a equação de movimento para y e a aceleração dos blocos ; (1,0)
(c) Usando multiplicadores de Lagrange e a equação de vínculo, encontre a tração na corda; (0,5)



(a) $T = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

(De fato, na forma desenhada, x deveria ser trocado por −x, mas considerei correto)

$U = -mgy$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgy}$$

(b) ~~x+y~~ $x + y - L = 0$ $\quad \dot{x} = -\dot{y} \quad \dot{x}^2 = \dot{y}^2$

$\mathcal{L} = \frac{2}{2}m\dot{y}^2 + mgy$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = mg \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = 2m\dot{y} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = 2m\ddot{y}$

$$2m\ddot{y} - mg = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = g/2}$$

(c) $m\ddot{x} + \lambda = 0$ (I)

$f = x + y - L$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1$

$m\ddot{y} + mg + \lambda = 0$ (II)

$\ddot{x} = -\ddot{y} \qquad$ I + II $\Rightarrow 0 + mg + 2\lambda = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{mg}{2}}$$

Questão 4 (2,5)

Considere o problema de uma mola no plano, podendo girar e expandindo e contraindo na direção radial segundo a energia potencial $U(r)=k(r-r_0)^2$. Obtenha:

(a) O lagrangeano em coordenadas polares;(0,5)
(b) Os momentos generalizados e o hamiltoniano; (1,0)
(c) As equações de movimento; (1,0)

a) $v = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - k(r-r_0)^2}$$

b) $$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\boxed{H = T + U = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + k(r-r_0)^2}$$

(c) $$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\left(-\frac{p_\theta}{mr^3} + 2k(r-r_0)\right)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta}{mr^3} - 2k(r-r_0)$$