5.5

T E S T E 2, MA 327: C, D, E

NOME: Carlos Polachini Zanovelli J. Turma: C RA: 090683

3.0 **1.** Encontrar uma base ortonormal do subespaço U de $\mathbb{R}^4$ que é o conjunto solução do sistema

$$\left| \begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

1) Ortonormal → ortogonal e unitário. ✓

Seja $B = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ uma base do subespaço U em $\mathbb{R}^4$. Para que B seja ortonormal, deve-se cumprir duas exigências:

I - Para $U = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ (B ortogonal a U);

II - $|B| = \sqrt{B \cdot B} = 1$ (vetor unitário) $\rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} =$

Logo, temos que resolver o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} (-2) \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$x_1 + 3x_3 = 0 \longrightarrow \underline{x_1 = -3x_3}$ (1) ✓

$x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \longrightarrow \underline{x_2 = 4x_3 - 2x_4}$ (2) ✓

Substituindo (1) em (2) em II:

$$(-3x_3)^2 + (4x_3 - 2x_4)^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

$$9x_3^2 + 16x_3^2 - 16x_3x_4 + 4x_4^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

$$26x_3^2 - 16x_3x_4 + 5x_4^2 = 1$$

Isola x_3 e substituo em I, obtendo x_4 e, posteriormente as outras variáveis.

2. Seja V o espaço vetorial dos polinômios reais e defina o produto escalar em V como sendo

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \quad f,g \in V.$$

2.0 a) Mostrar que $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ são ortogonais.
0.5 b) Encontrar a projeção ortogonal de $h(x) = x^5$ sobre f e calcular o ângulo entre h e f.

2) a) $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \quad , \quad f,g \in V$

Se $f(x)$ e $g(x)$ são ortogonais, suas retas formam um ângulo de $90°$ entre si, logo $(f,g) = 0$.

$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$

É o que você quer demonstrar?

$0 = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2 \, dx$

$0 = \left.\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}$

$0 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}$

$\boxed{0 = 0}$ // logo, $f(x)$ e $g(x)$ são ortogonais

b) $\text{proj}_{f(x)} h(x) = \left(\frac{|h(x) \cdot f(x)|}{\|f(x)\|\|f(x)\|}\right) \cdot f(x)$

$= \cancel{\left(\frac{x^6}{x^2}\right)} x \quad \therefore \quad \boxed{\text{proj}_{f(x)} h(x) = x^5}$

$\cos\theta = \cancel{\frac{|h(x) \cdot f(x)|}{\|h(x)\|\|f(x)\|}} = \frac{x^6}{x^5 \cdot x} = 1$

$\cancel{\boxed{\theta = 0 \text{ rad}}}$

(o que significa que $f(x)$ e $h(x)$ são paralelos e, portanto, $h(x)$ e $g(x)$ são ortogonais)