EM506 – Resistência dos Materiais II – Gabarito da Primeira Prova

<u>Questão 1</u> (3,0 pontos): Para construir uma passarela de pedestres, um pedreiro usou a fôrma de madeira cuja seção transversal é mostrada na Figura 1, dentro da qual foi despejada a massa de concreto. Depois de seco o concreto, a fôrma seria destruída. Depois de refletir um pouco, o pedreiro achou que valeria a pena não destruir a fôrma, se ela ajudasse a reduzir a deflexão máxima da passarela em pelo menos 20% (em relação à passarela de concreto puro). Determine se vale ou não a pena manter a fôrma de madeira.

Se a passarela fosse construída de aço, a deflexão máxima seria dada por:

$\mathbf{v_{máx\ aço} = q_0L^4/(6 \cdot E_{aço}I_{ZZaço})}$, em que:

$E_{aço}$ = módulo de elasticidade longitudinal do aço; $I_{ZZaço}$ = momento de inércia da seção transversal de aço; q_0 = carregamento uniformemente distribuído sobre a passarela; L = comprimento da passarela.

Dados: $E_{madeira}$ = 70 MPa; $E_{concreto}$ = 100 MPa; t = 2 cm; h = 50 cm; b = 1 m; L = 10 m; q_0 = 10 kN/m.

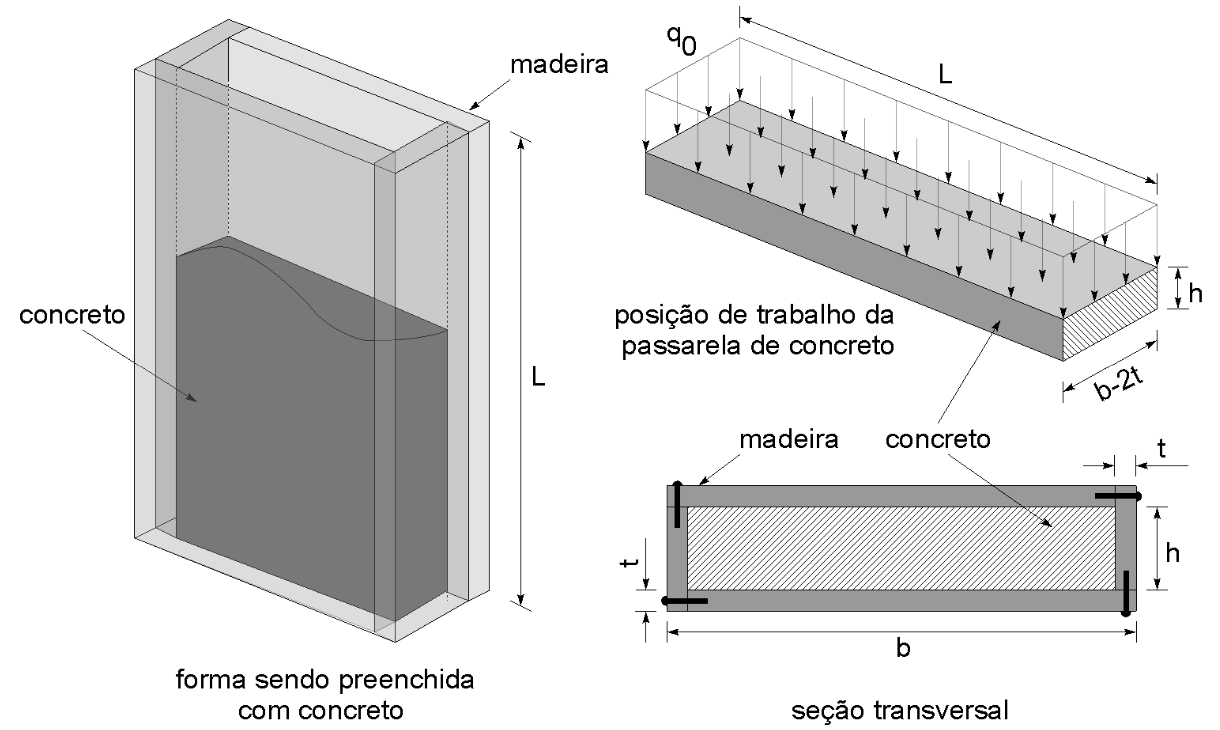


Figura 1: seção transversal da fôrma de madeira com concreto.

Solução

O problema consiste em comparar a deflexão máxima da viga de concreto puro com a viga "reforçada" pela fôrma de madeira. Como a expressão da deflexão máxima é dada pelo enunciado, a deflexão da viga de concreto é dada pela Eq. (1) e a da viga reforçada é dada pela Eq. (2).

$$v_{máx\,concreto} = \frac{q_0 L^4}{6E_{concreto}I_{ZZconcreto}} \tag{1}$$

$$v_{\text{máx reforçada}} = \frac{q_0 L^4}{6EI_{ZZeq}} \qquad (2)$$

A fôrma de madeira deve ser mantida se a flecha máxima se reduzir em pelo menos 20% em relação à viga de concreto, ou seja:

$$v_{\text{máx reforçada}} \le 0,8 \cdot v_{\text{máx concreto}} \Rightarrow \frac{v_{\text{máx reforçada}}}{v_{\text{máx concreto}}} = \frac{\left(\dfrac{q_0 L^4}{6EI_{ZZeq}}\right)}{\left(\dfrac{q_0 L^4}{6E_{concreto} I_{ZZconcreto}}\right)} = \frac{E_{concreto} I_{ZZconcreto}}{EI_{ZZeq}} \le 0,8 \qquad (3)$$

a) Propriedades geométricas

$$I_{ZZconcreto} = \frac{1}{12}(b-2t)h^3 = \frac{1}{12}(1-2\cdot 0,02)(0,5)^3 = 10\cdot 10^{-3}\,m^4 \qquad (4)$$

$$I_{ZZmadeira} = \frac{1}{12}b(h+2t)^3 - \underbrace{\frac{1}{12}(b-2t)h^3}_{I_{ZZconcreto}} = \frac{1}{12}1(0,5-2\cdot 0,02)^3 - 10\cdot 10^{-3}\,m^4 = 3,1\cdot 10^{-3}\,m^4 \qquad (5)$$

$$EI_{ZZeq} = E_{madeira} I_{ZZmadeira} + E_{concreto} I_{ZZconcreto} - y_0\left(E_{madeira} Q_{Zmadeira} + E_{concreto} Q_{Zconcreto}\right) \qquad (6)$$

Devido à distribuição de materiais, a posição da linha neutra coincide com o centro geométrico, isto é, $y_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \therefore EI_{ZZeq} &= E_{madeira} I_{ZZmadeira} + E_{concreto} I_{ZZconcreto} = \\ &= \left(70\cdot 10^6\,Pa \times 10\cdot 10^{-3}\,m^4\right) + \left(100\cdot 10^6\,Pa \times 3,1\cdot 10^{-3}\,m^4\right) = 1,2185\cdot 10^6\,m^2 \end{aligned} \qquad (7)$$

b) Decisão de projeto

Da Eq. (3), tem-se então:

$$\frac{E_{concreto} I_{ZZconcreto}}{EI_{ZZeq}} = 0,8207 > 0,8 \qquad (8)$$

Ou seja, a fôrma de madeira reduz a deflexão máxima da passarela em apenas 17,93% em relação à passarela de concreto puro. Assim, segundo o critério do pedreiro, a fôrma deve ser removida.

EM506 – Resistência dos Materiais II – Gabarito da Primeira Prova

<u>Questão 2</u> (4,0 pontos): Uma viga bi-apoiada é sujeita a um carregamento concentrado P em sua extremidade. A viga é construída a partir de três peças ligadas por três pinos, conforme a seção transversal mostrada na Figura 2. Todos os pinos utilizados têm área A_p, resistem a uma tensão de cisalhamento τ_p, e estão espaçados entre si por uma distância L_p ao longo do eixo *x*. Identifique, entre os pinos (A) ou o pino (B), qual está sujeito ao maior esforço cisalhante, e determine o espaçamento L_p máximo em função dos demais parâmetros do problema. Admita que o espaçamento entre os pinos deva ser o mesmo ao longo de toda a viga.

Dados: As dimensões da viga e de sua seção transversal estão mostradas na figura.

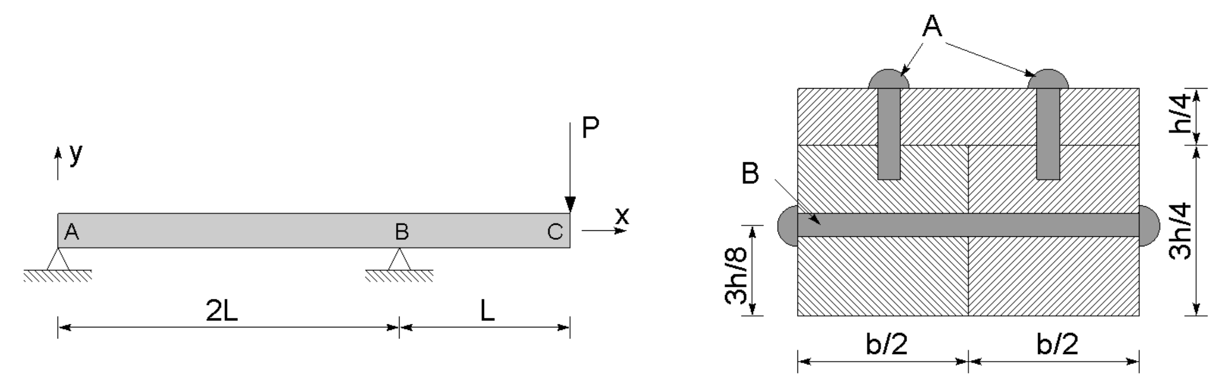


Figura 2: viga bi-apoiada com carregamento concentrado, e sua seção transversal.

Solução

Claramente, o pino (B) não está sujeito a cisalhamento. Assim, o máximo cisalhamento ocorre nos pinos (A). O fluxo de cisalhamento neles é dado por:

$$q_C(x,y) = -\frac{V_Y(x)}{I_{ZZ}(x)} Q_{Zp}(y) \tag{1}$$

Para que a construção esteja em equilíbrio (as peças não se desmontem), é necessário que a força tangencial atuando no pino, dada por $q_C(x,y) \cdot L_p$ seja menor ou igual à força tangencial que os pinos suportam juntos, $F_T = \tau_p \cdot 2A_p$, em que A_p é a área de um pino:

$$q_C(x,y) \cdot L_p = \left[-\frac{V_Y(x)}{I_{ZZ}(x)} Q_{Zp}(y) \right] \cdot L_p \leq \tau_p 2A_p \tag{2}$$

$$L_p \leq \frac{2I_{ZZ}(x)\tau_p A_p}{Q_{Zp}(y) \cdot V_{Ymáx}} \tag{3}$$

Com ajuda da Figura 2b, pode-se determinar o momento de inércia da seção, $I_{ZZ}(x)$, e o momento estático parcial $Q_{Zp}(y)$ a que a Eq. (1) se refere.

$$Q_{Zp}(y) = A_p \cdot \bar{y}_p = \underbrace{\left[b\tfrac{h}{4}\right]}_{A_p} \underbrace{\tfrac{3}{8}h}_{\bar{y}_p} = \tfrac{3}{32}bh^2 \tag{4}$$

$$I_{ZZ}(x) = \frac{1}{12} b \cdot h^3 \qquad (5)$$

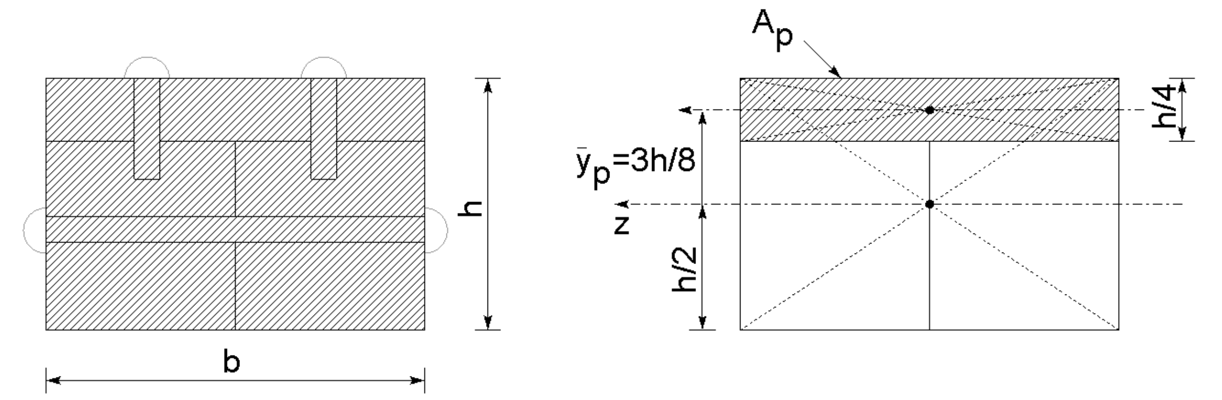
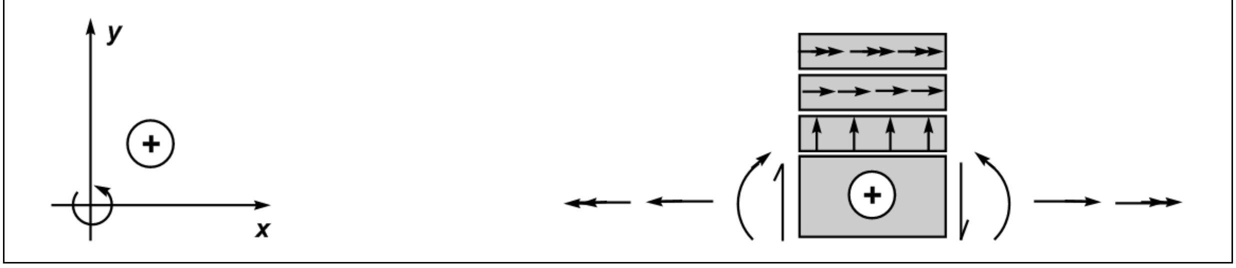


Figura 2c: dimensões da seção transversal para cálculo de I_{ZZ} e Q_{Zp}.

b) Solução do problema da viga

Determinando o máximo esforço cortante atuando na viga:

b1) Eixos e convenções



b2) Equação Diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2} M_Z(x) = q(x) \qquad (b1)$$

b3) Equação de carregamento

$$q(x) = +R_{YB} \langle x - 2L \rangle^{-1} \qquad (b2)$$

b4) Condições de Contorno

$$M_Z(x = 0) = 0 \qquad (b3)$$
$$M_Z(x = 3L) = 0 \qquad (b4)$$
$$V_Y(x = 3L) = +P \qquad (b5)$$

b5) Integração da equação diferencial

Substitui-se (b2) em (b1) para se obter

$$\frac{d^2}{dx^2} M_Z(x) = +R_{YB} \langle x - 2L \rangle^{-1}$$

$$\downarrow \int$$

$$\frac{d}{dx} M_Z(x) = V_Y(x) = +R_{YB} \langle x - 2L \rangle^{0} + C_1 \qquad \text{(b6)}$$

$$\downarrow \int$$

$$M_Z(x) = +R_{YB} \langle x - 2L \rangle^{1} + C_1 x + C_2 \qquad \text{(b7)}$$

b6) Determinação das incógnitas e constantes de integração

Aplicando (b3) em (b7), tem-se:

$$M_Z(x=0) = +\underbrace{R_{YB} \langle x - 2L \rangle^{1}}_{=0} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = 0 \qquad \text{(b8)}$$

Aplicando (b5) em (b6), tem-se:

$$V_Y(x=3L) = +R_{YB} \underbrace{\langle 3L - 2L \rangle^{0}}_{=1} + C_1 = +P$$

$$\Rightarrow C_1 = +P - R_{YB} \qquad \text{(b9)}$$

Aplicando (b4) e (b8) em (b7), tem-se:

$$M_Z(x=3L) = +R_{YB}(3L - 2L) + C_1 \cdot 3L = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = -\tfrac{1}{3} R_{YB} \qquad \text{(b10)}$$

De (b9) em (b10), tem-se que:

$$R_{YB} = +\tfrac{3}{2} P \qquad \text{(b11)}$$

7) Equações finais

Substitui-se (b8) a (b11) em (b6) e (b7) para se obter a equação final do esforço cortante e momento fletor:

$$V_Y(x) = +\frac{3}{2} P \langle x - 2L \rangle^{0} - \frac{1}{2} P \qquad \text{(b12)}$$

$$M_Z(x) = +\frac{3}{2}P\left\langle x-2L\right\rangle^1 - \frac{1}{2}Px \tag{b13}$$

8) Diagramas de esforços internos

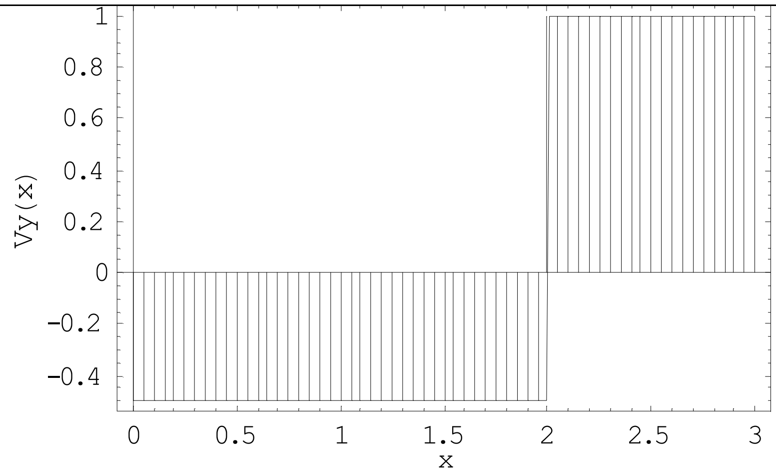


Figura 2c: diagrama de esforço cortante (exemplo para L=1m e P=1N).

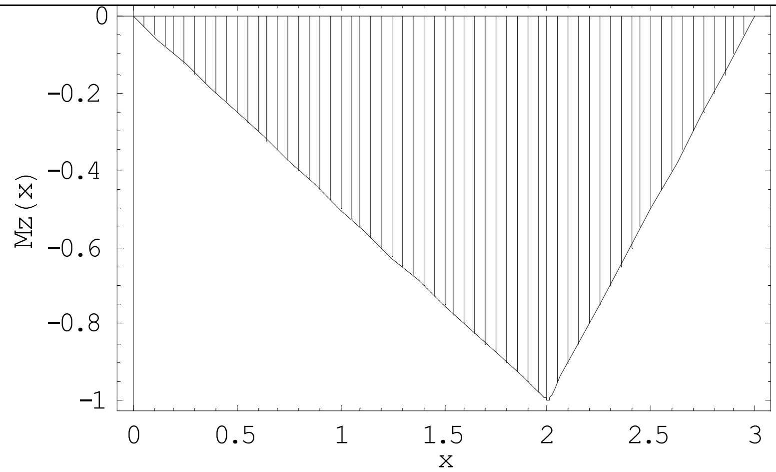


Figura 2d: diagrama de momento fletor (exemplo para L=1m e P=1N).

O trecho sujeito ao maior esforço cortante é o trecho $2L < x < 3L$, no qual $V_Y(x) = P$. Assim, substituindo (4) e (5) em (3), tem-se:

$$L_p \le \frac{2I_{ZZ}(x)\tau_p A_p}{Q_{Zp}(y)\cdot V_{Ymáx}} = \frac{2\tau_p A_p}{V_{Ymáx}}\underbrace{\frac{\cancel{b}h^{\cancel{3}}}{12}}_{I_{ZZ}}\underbrace{\frac{32}{3\cancel{b}h^{\cancel{2}}}}_{1/Q_{Zp}} = \frac{16}{9}\frac{\tau_p A_p h}{P} \tag{6}$$

$$\boxed{L_p \le \frac{16}{9}\frac{\tau_p A_p h}{P}} \tag{7}$$

EM506 – Resistência dos Materiais II – Gabarito da Primeira Prova

<u>Questão 3</u> (3,0 pontos): Uma placa fina é construída por meio de duas peças coladas de mesmo material (Figura 3a). A placa é submetida a um estado plano e homogêneo de tensões ($\sigma_3 = 0$) no qual forças uniformemente distribuídas F_1 e F_2 de tração são aplicadas às suas faces (Figura 3b). Desenhe o Círculo de Mohr deste problema.

a) Determine qual deve ser sua resistência mínima a cisalhamento e tração que a cola deve apresentar para garantir que o material falhe antes da cola;
b) Descreva as observações experimentais em que von Mises se baseou para formular seu critério de falha. Ilustre sua descrição com exemplos e desenhos.

Dados: O material falha segundo o critério de Tresca.

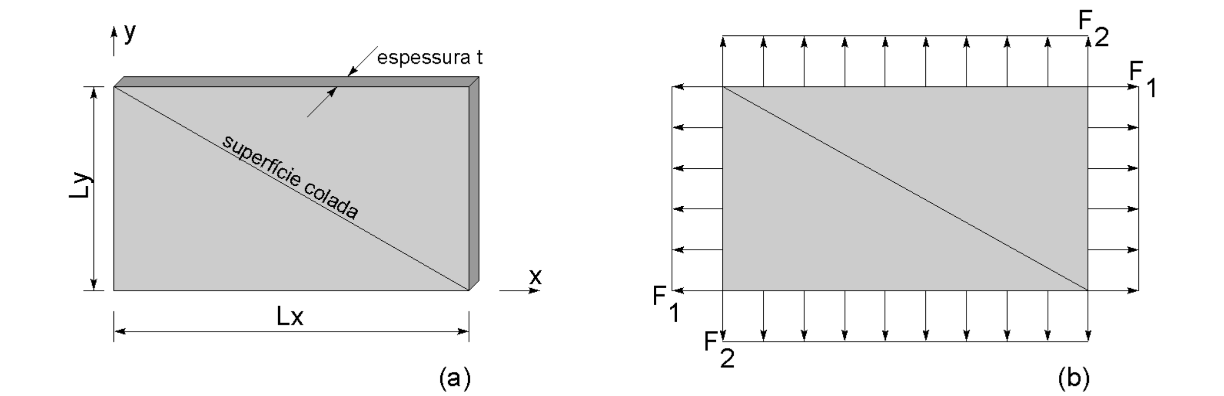


Figura 3: placa fina sujeita a um estado plano, homogêneo de tensões.

Solução

O estado de tensões original, mostrado pela Figura 3, corresponde ao plano principal. Podemos concluir isso porque não há tensões de cisalhamento atuando neste estado de tensões. Assim, tem-se que:

$$\sigma_1 = \sigma_{XX} = \frac{F_1}{A_X} = \frac{F_1}{L_Y \cdot t} \tag{1}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{YY} = \frac{F_2}{A_Y} = \frac{F_2}{L_X \cdot t} \tag{2}$$

Além disso, o plano de cola está situado em um ângulo α do plano principal, no sentido anti-horário (Figura 3c).

Este ângulo pode ser calculado por:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{L_X}{L_Y}\right) \tag{3}$$

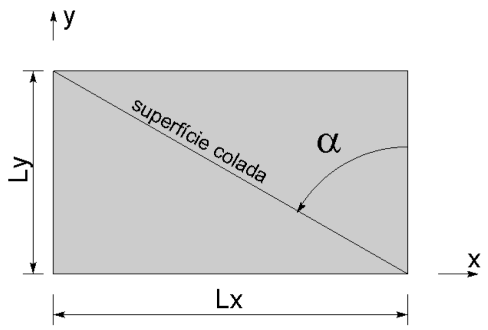


Figura 3c: ângulo α que separa o plano de cola do plano principal.

O enunciado afirma que se trata de um estado plano de tensões ($\sigma_3 = 0$). Com isso, o Círculo de Mohr para este problema se torna:

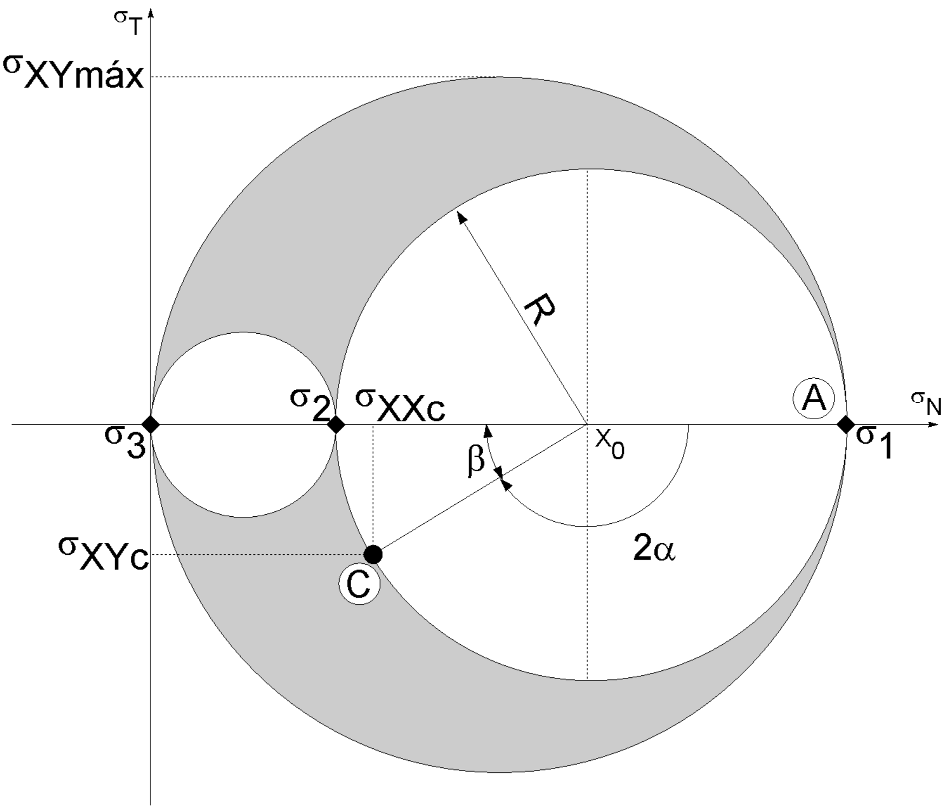


Figura 3d: Círculo de Mohr para o estado tridimensional de tensões na placa colada.

O ponto (A) marca o estado original de tensões. Se a partir desse estado encontra-se o plano de cola em um ângulo α em sentido anti-horário (Figura 3c), a partir desse estado encontra-se o plano de cola (C) no Círculo de Mohr em um ângulo 2α no sentido horário (Figura 3d). O ângulo β é dado por:

$$\beta = 180^{\circ} - 2\alpha = 180^{\circ} - 2\arctan\left(\frac{L_X}{L_Y}\right) \tag{4}$$

As tensões normais σ_{XXc} e de cisalhamento σ_{XYc} atuando na cola são dadas por simples trigonometria a partir da Figura 3d:

$$\sigma_{XXc} = x_0 - R\cos(\beta) \tag{5}$$

$$\sigma_{XYc} = -R\sin(\beta) \tag{6}$$

Nas quais (observe a Figura 3d):

$$x_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tag{7}$$

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{8}$$

Assim, tem-se:

$$\sigma_{XXc} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\cos\left(180^o - 2\arctan\left(\frac{L_X}{L_Y}\right)\right) \tag{9}$$

$$\sigma_{XYc} = -\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\sin\left(180^o - 2\arctan\left(\frac{L_X}{L_Y}\right)\right) \tag{10}$$

$$\boxed{\sigma_{XXc} = \frac{1}{2}\left\{\frac{F_1}{L_Y \cdot t} + \frac{F_2}{L_X \cdot t}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{F_1}{L_Y \cdot t} - \frac{F_2}{L_X \cdot t}\right\}\cos\left(180^o - 2\arctan\left(\frac{L_X}{L_Y}\right)\right)} \tag{11}$$

$$\boxed{\sigma_{XYc} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{F_1}{L_Y \cdot t} - \frac{F_2}{L_X \cdot t}\right\}\sin\left(180^o - 2\arctan\left(\frac{L_X}{L_Y}\right)\right)} \tag{12}$$

O Círculo de Mohr referente ao estado de tensão que causa falha no material é semelhante ao da Figura 3d. Nesta situação, o material falha porque a tensão $\sigma_{XYm\acute{a}x}$ foi atingida. Mesmo nessa situação, as tensões na cola continuam sendo expressas pelas Eq. (11) e (12). Se a resistência da cola foi igual ou superior a esses valores, o material falhará antes da cola.

b) Critério de von Mises

Quando submetido a um estado de tensão, um material se dilata e se distorce até que ocorra a falha. A energia de deformação armazenada pode ser definida como a soma de uma parcela de energia de dilatação e outra de energia de distorção. O material suporta tensões muito maiores que as de falha se devido ao estado de tensão o material somente se dilatar, sem se distorcer.

Von Mises se baseou nessa evidência experimental para concluir que a falha dos materiais não ocorre por causa da energia de dilatação, e sim por causa da energia de distorção.

Um exemplo típico é a comparação entre os ensaios de compressão pura, em que há distorção – o corpo de prova de contrai e se distorce – e o ensaio de pressão hidrostática, em que há somente dilatação – o material somente muda de volume, e não de forma. No ensaio de pressão hidrostática, o material suporta uma tensão de compressão muito maior do que aquela com que falhou no ensaio de compressão.

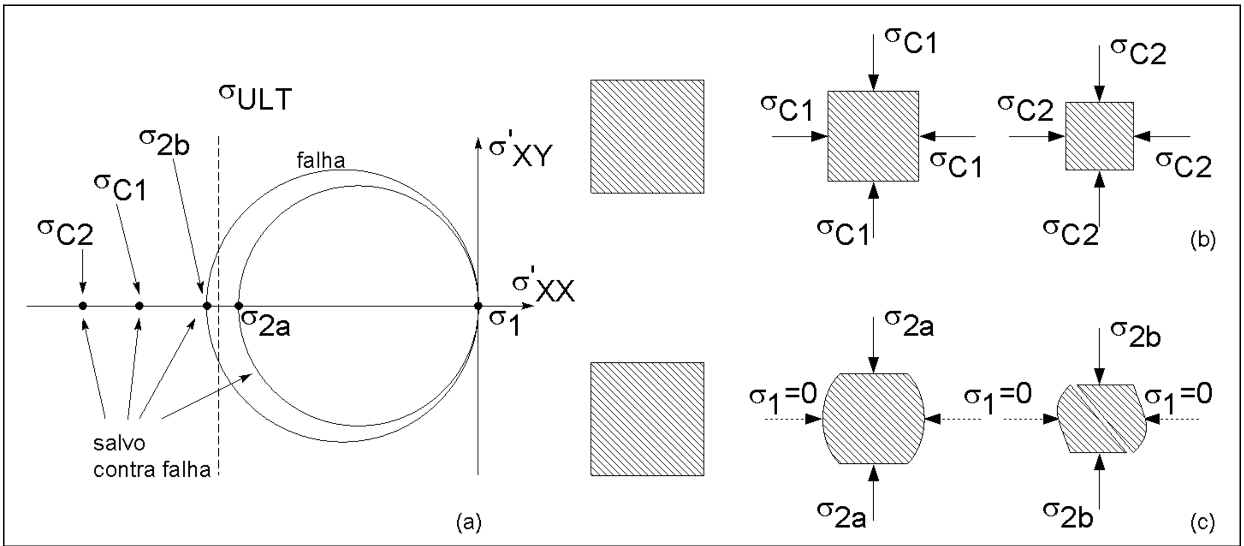


Figura 3e: (a) Círculo de Mohr mostrando os ensaios de compressão pura e de pressão hidrostática. (b) Ensaio de pressão hidrostática, em que o corpo de prova somente muda de volume (se dilata) e não de forma. (c) Ensaio de compressão pura, no qual o corpo de prova muda de volume e de forma (se distorce).