Soluções para MS550, Métodos de Matemática Aplicada I, e F520, Métodos Matemáticos da Física I

Lista 8 - Problema de Sturm-Liouville

1. Encontre os autovalores e autofunções dos seguintes problemas de Sturm-Liouville:

   (a) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

   Solução: *Para $\lambda = 0$ temos que $y'' = 0$ que implica em $y' = c$ que por sua vez implica em $y = cx + d$. Quando $x = 1$ temos*

$$0 = y(1) = c + d \Rightarrow d = -c.$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) + y'(0) = -c + c = 0.$$

Portanto,

$$y(x) = cx + d$$

é solução.

Para $\lambda > 0$, fazemos $\lambda = k^2$ com $k > 0$, e assim temos $y'' + k^2 y = 0$. Logo $y = \exp(rx)$ é solução e temos

$$r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r = \pm ik.$$

Então

$$\begin{aligned} y(x) &= A\sin(kx) + B\cos(kx), \\ y'(x) &= Ak\cos(kx) - Bk\sin(kx), \\ y(x) + y'(x) &= (A - Bk)\sin(kx) + (Ak + B)\cos(kx). \end{aligned}$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) + y'(0) = Ak + B \Rightarrow A = -Bk^{-1}, k \neq 0.$$

Quando $x = 1$ temos

$$\begin{aligned} 0 = y(1) = A\sin(k) + B\cos(k) &= -Bk^{-1}\sin(k) + B\cos(k) \\ &= Bk^{-1}\left(-\sin(k) + k\cos(k)\right) \Rightarrow k = \tan(k) \ \textit{ou}\ B = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y(x) = -(\tan(k))^{-1}\sin(\tan(k)x) + \cos(\tan(k)x), k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Para $\lambda < 0$, fazemos $\lambda = -k^2$ com $k > 0$ e assim temos $y'' - k^2 y = 0$. Logo, $y = \exp(rx)$ é solução e temos

$$r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow r = \pm k.$$

Então

$$y(x) = C\cosh(kx) + D\sinh(kx).$$

Quando $x = 1$ temos

$$0 = y(1) = C\cosh(k) + D\sinh(k) \Rightarrow C = .$$

Quando $x = 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) + y'(0) = Ck\sinh(0) + Dk\cosh(0) + C\cosh(0) + D\sinh(0) \\ &= Dk + C \Rightarrow C = -D. \end{aligned}$$

Portanto, existe apenas a solução trivial.

(b) $\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(1) = 0, \\ y(e) = 0. \end{cases}$

Solução: *Para $\lambda = 0$, temos que*

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = x^2y'' + xy' = 0.$$

Logo, $y = x^r$ é solução,

$$0 = r(r-1) + r = r^2 - r + r = r^2 \Rightarrow r = 0$$

e portanto

$$y(x) = Ax^0 + B\ln(x)x^0 = A + B\ln(x).$$

Quando $x = 1$ temos

$$0 = y(1) = A + B\ln(1) \Rightarrow A = 0.$$

Quando $x = \exp(1)$ temos

$$0y(\exp(1)) = B\ln(\exp(1)) \Rightarrow B = 0.$$

Portanto, para $\lambda = 0$ temos apenas a solução trivial.
Para $\lambda > 0$, fazendo $\lambda = k^2$ com $k > 0$, temos que

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = x^2y'' + xy' + k^2y = 0.$$

Logo, $y = x^r$ é solução,

$$0 = r(r-1) + r + k^2 = r^2 + k^2 \Rightarrow r = \pm ki$$

e portanto

$$y(x) = Ax^{-ki} + Bx^{ki}.$$

Quando $x = 1$ temos

$$0 = y(1) = A + B \Rightarrow A = -B.$$

Quando $x = \exp(1)$ *temos*

$$\begin{aligned} 0 &= y(\exp(1)) = A(\exp(-ki) - \exp(ki)) = -A(\exp(ki) - \exp(-ki)) \\ &= -2A\sin(k) \Rightarrow k = n\pi, n = 1, 2, \dots \text{ ou } A = 0. \end{aligned}$$

Portanto, para $\lambda > 0$ *temos além da solução trivial*

$$\begin{aligned} y_n(x) &= x^{-n\pi i} - x^{n\pi i} \\ &= \exp(\ln(x^{-n\pi i})) - \exp(\ln(x^{n\pi i})) \\ &= \cos(n\pi\ln(x)) + \sin(n\pi\ln(x)) \\ &= \sin(n\pi\ln(x)). \end{aligned}$$

Para $\lambda < 0$*, fazendo* $\lambda = -k^2$ *com* $k > 0$*, temos que*

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = x^2y'' + xy' - k^2y = 0.$$

Logo, $y = x^r$ *é solução,*

$$0 = r(r-1) + r - k^2 = r^2 - k^2 \Rightarrow r = \pm k$$

e portanto

$$y(x) = Ax^k + Bx^{-k}.$$

Quando $x = 1$ *temos*

$$0 = y(1) = A + B \Rightarrow A = -B.$$

Quando $x = \exp(1)$ *temos*

$$0 = y(\exp(1)) = A\exp(k) + B\exp(-k) \Rightarrow \text{não tem solução.}$$

Portanto, para $\lambda < 0$ *não temos solução.*
Assim sendo, temos, além da solução tivial, $y_n = \sin(n\pi\ln(x))$ *quando* $\lambda > 0$.

(c) (P3 de 2006) $\begin{cases} y'' + y' + (1+\lambda)y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Solução: *Para* $y = \exp(rx)$ *temos que*

$$r^2 - r + (1+\lambda) = 0$$

e portanto $r = (-1/2) \pm \sqrt{-3/4 - \lambda}$*. Logo as soluções não triviais ocorrem quando* $-3/4 - \lambda < 0$.
Para $-3/4 - \lambda = -k^2$*,* $k > 0$*, temos*

$$\begin{aligned} r &= -1/2 \pm \sqrt{-k^2} \\ &= -1/2 \pm ik. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y(x) &= A_1 \exp\left((-1/2 + ik)x\right) + A_2 \exp\left((-1/2 - ik)x\right) \\ &= \exp(-x/2)\left(A_1 \exp(ikx) + A_2 \exp(-ikx)\right) \\ &= \exp(-x/2)\left(B_1 \cos(kx) + B_2 \sin(kx)\right). \end{aligned}$$

Para $x = 0$,

$$0 = y(0) = \exp(0)B_1 \Rightarrow B_1 = 0,$$

e para $x = 1$,

$$0 = y(1) = \exp(1)B_2 \sin(k) \Rightarrow \sin(k) = 0 \Rightarrow k = n\pi, n = 1, 2, \ldots.$$

Portanto,

$$-3/4 - \lambda = -(n\pi)^2 \Rightarrow \lambda_n = n^2\pi^2 - 3/4, n = 1, 2, \ldots.$$

Se $B_1 = 0$, então $k = n\pi$ e portanto

$$y_n(x) = \exp(-x/2)\sin(n\pi x), n = 1, 2, \ldots.$$

(d) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & -1 < x < 1, \\ y(-1) = y(1), \\ y'(-1) = y'(1). \end{cases}$

Solução: *Para $\lambda = 0$ temos que*

$$y'' + \lambda y = y'' = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y(x) &= Ax + B, \\ y'(x) &= A. \end{aligned}$$

Quando $x = -1$ temos

$$\begin{aligned} y(-1) &= -A + B, \\ y'(-1) &= A. \end{aligned}$$

Quando $x = 1$ temos

$$\begin{aligned} y(1) &= A + B, \\ y'(1) &= A. \end{aligned}$$

Portanto, para $\lambda = 0$ temos apenas a solução tivial.
Para $\lambda > 0$, fazendo $\lambda = k^2$ com $k > 0$, temos que

$$y'' + \lambda y = y'' + k^2 y = 0.$$

Logo,

$$y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx),$$
$$y'(x) = -Ak\sin(kx) + Bk\cos(kx).$$

Quando $x = -1$ *temos*

$$y(-1) = A\cos(-k) + B\sin(-k) = A\cos(k) - B\sin(k),$$
$$y'(-1) = -Ak\sin(-k) + Bk\cos(-k) = Ak\sin(k) + Bk\cos(k).$$

Quando $x = 1$ *temos*

$$y(1) = A\cos(k) + B\sin(k),$$
$$y'(1) = -Ak\sin(k) + Bk\cos(k).$$

Portanto, para $\lambda > 0$ *temos, além da solução trivial,* $y_n(x) = \cos(n\pi x)$ *e* $y_n(x) = \sin(n\pi x)$ *onde* $\lambda n = n^2\pi^2$ *e* $n = 1, 2, \ldots$.
Para $\lambda < 0$*, fazendo* $\lambda = -k^2$ *com* $k > 0$*, temos que*

$$y'' + \lambda y = y'' - k^2 y = 0.$$

Logo,

$$y(x) = A\cosh(kx) + B\sinh(kx),$$
$$y'(x) = -Ak\sinh(kx) + Bk\cosh(kx).$$

Quando $x = -1$ *temos*

$$y(-1) = A\cosh(-k) + B\sinh(-k),$$
$$y'(-1) = -Ak\sinh(-k) + Bk\cosh(-k).$$

Quando $x = 1$ *temos*

$$y(1) = A\cosh(k) + B\sinh(k),$$
$$y'(1) = -Ak\sinh(k) + Bk\cosh(k).$$

Portanto, para $\lambda < 0$ *não temos solução.*
Assim sendo, temos, além da solução tivial, $y_n(x) = \cos(n\pi x)$ *e* $y_n(x) = \sin(n\pi x)$ *onde* $\lambda n = n^2\pi^2$ *e* $n = 1, 2, \ldots$ *quando* $\lambda > 0$.

(e) $\begin{cases} y'' - 3y' + 3(1+\lambda)y = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$

Solução: *Sabendo que* $y = \exp(rx)$ *é solução temos que*

$$0 = r^2 - 3r + 3(1+\lambda) \Rightarrow r = \left(3 \pm \sqrt{-3 - 12\lambda}\right) 2^{-1}.$$

Para $-3-12\lambda = 0$, temos que

$$y(x) = A\exp(3x2^{-1}) + Bx\exp(3x2^{-1}).$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = A.$$

Quando $x = \pi$ temos

$$0 = y(\pi) = B\pi\exp(3\pi2^{-1}) \Rightarrow B = 0.$$

Portanto, para $-3-12\lambda = 0$ temos apenas a solução trivial.
Para $-3-12\lambda > 0$, temos que

$$y(x) = C\exp\left((3+k)x2^{-1}\right) + D\exp\left((3-k)x2^{-1}\right).$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = C + D \Rightarrow C = -D.$$

Quando $x = \pi$ temos

$$\begin{aligned}0 = y(\pi) &= C\left[\exp\left((3+k)\pi2^{-1}\right) - \exp\left((3-k)\pi2^{-1}\right)\right] \\ &= C\exp(3/2)\left[\exp(k\pi2^{-1}) - \exp(-k\pi2^{-1})\right] \Rightarrow C = 0.\end{aligned}$$

Portanto, para $-3-12\lambda > 0$ temos apenas a solução trivial.
Para $-3-12\lambda < 0$ temos

$$y(x) = E\exp\left((3+ki)x2^{-1}\right) + F\exp\left((3-ki)x2^{-1}\right).$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = E + F \Rightarrow E = -F.$$

Quando $x = \pi$) temos

$$\begin{aligned}0 = y(\pi) &= E\exp(3\pi2^{-1})\left[\exp(ki\pi2^{-1}) - \exp(-ki\pi2^{-1})\right] \\ &= E\exp(3\pi2^{-1})\left[\cos(k\pi2^{-1}) + i\sin(k\pi2^{-1}) - \cos(k\pi2^{-1}) + i\sin(k\pi2^{-1})\right] \\ &= \sin(k\pi2^{-1}) \Rightarrow k = 2n.\end{aligned}$$

Portanto, para $-3-12\lambda < 0$ temos, além da solução trivial, $y(x) = \exp(3x2^{-1})\sin(nx)$ onde $k = 2n = \sqrt{-3-12\lambda}$.
Assim sendo, temos, além da solução trivial, $y(x) = \exp(3x2^{-1})\sin(nx)$, onde $k = 2n = \sqrt{-3-12\lambda}$, quando $-3-12\lambda < 0$.

(f) (P3 de 2006) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(2+x)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = -\lambda y, & -1 < x < 1, \\ y(-1) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Solução: *Temos que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(2+x)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = (2+x)^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2(2+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\lambda y$$

é uma equação de Guler. Logo, $y = (2+x)^r$ e portanto

$$r(r-1) + 2r + \lambda = 0$$

que implica em $r = \left(-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}\right)2^{-1}$.
Para $1-4\lambda > 0$ temos que $r_1 = \left(-1 + \sqrt{1-4\lambda}\right)2^{-1}$ e $r_2 = \left(-1 - \sqrt{1-4\lambda}\right)2^{-1}$ e portanto

$$y(x) = A_1(2+x)^{r_1} + A_2(2+x)^{r_2}.$$

Quando $x = -1$,

$$0 = y(-1) = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 = -A_2.$$

Quando $x = 1$,

$$0 = y(1) = A_1 3^{r_1} + A_2 3^{r_2} = A_1(3^{r_1} - 3^{r_2}) \Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow= 0.$$

Assim concluimos que para $1-4\lambda > 0$ temos apenas a solução trivial.
Para $1-4\lambda = 0$ temos que $r_1 = r_2 = -1/2$ e portanto

$$y(x) = A_3(2+x)^{-1/2} + A_4(2+x)^{-1/2}\ln(2+x).$$

Quando $x = -1$,

$$0 = y(-1) = A_3 \Rightarrow A_3 = 0.$$

Quando $x = 1$,

$$0 = y(1) = A_4 3^{-1/2}\ln(3) \Rightarrow A_4 = 0.$$

Assim concluimos que para $1-4\lambda = 0$ temos apenas a solução trivial.
Para $1-4\lambda < 0$ fazemos $1-4\lambda = -k^2$, $k > 0$. Temos então que $r = (-1 \pm ik)\,2^{-1}$ e portanto

$$\begin{aligned} y(x) &= B_1(x+2)^{-1/2+ik2^{-1}} + B_2(x+2)^{-1/2-ik2^{-1}} \\ &= (x+2)^{-1/2}\left[B_1\exp(ik2^{-1}\ln(x+2)) + B_2\exp(-ik2^{-1}\ln(x+2))\right] \\ &= (x+2)^{-1/2}\left[C_1\cos(k2^{-1}\ln(x+2)) + C_2\sin(k2^{-1}\ln(x+2))\right]. \end{aligned}$$

Quando $x = -1$,

$$0 = y(-1) = C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Quando $x = 1$,

$$0 = y(1) = 3^{-1/2} C_2 \sin(k2^{-1}\ln(3)) \Rightarrow k2^{-1}\ln(3) = n\pi, n = 1, 2, \ldots.$$

Logo,

$$1 - 4\lambda = -\left(2n\pi/\ln(3)\right)^2$$

que implica em

$$\lambda_n = 1/4 + \left(n\pi/\ln(3)\right)^2, n = 1, 2, \ldots.$$

Assim concluimos que para $1 - 4\lambda < 0$ *temos como solução*

$$y_n(x) = (2 + x)^{-1/2} \sin\left(n\pi(\ln(3))^{-1}\ln(2 + x)\right).$$

(g) $\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(1) = 0, \\ \lim_{x\to 0^+} |y(x)| < \infty. \end{cases}$

Solução: *Para* $y(x) = x^r$ *temos que*

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Para $\lambda = 0$, *temos que*

$$y = Ax^0 + Bx^0\ln(x) = A + B\ln(x).$$

Quando $x = 1$ *temos*

$$0 = y(1) = A + B\ln(1) \Rightarrow A = 0.$$

Quando $x \to 0^+$ *temos*

$$\lim_{x\to 0^+} |y(x)| < \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} |B\ln(x)| < \infty.$$

Portanto, para $\lambda = 0$ *não existe solução.*
Para $\lambda > 0$, *fazendo* $\lambda = k^2$ *com* $k > 0$, *temos que*

$$\begin{aligned} y(x) &= \bar{A}x^{ik} + \bar{B}x^{-ik} \\ &= \bar{A}\exp(ik\ln(x)) + \bar{B}\exp(-ik\ln(x)) \\ &= A\cos(k\ln(x)) + B\sin(k\ln(x)). \end{aligned}$$

Quando $x = 1$ *temos*

$$0 = y(1) = A\cos(k\ln(x)) + B\sin(k\ln(x)) \Rightarrow A = 0.$$

Quando $x \to 0^+$ *temos*

$$\lim_{x\to 0^+} |y(x)| < \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} |B\sin(k\ln(x))| < \infty.$$

Portanto, para $\lambda > 0$ *temos que* $-1 \leq |B\sin(k\ln(x)) \leq 1$ *que implica em* $y(x) = \sin(k\ln(x))$, $k \geq 1$.
Para $\lambda = -k^2$, *fazendo* $\lambda = -k^2$ *com* $k > 0$, *temos que*

$$y(x) = Ax^k + Bx^{-k}.$$

Quando $x = 1$ *temos*

$$0 = y(1) = A + B \Rightarrow A = -B.$$

Quando $x \to 0^+$ *temos*

$$\lim_{x\to 0^+} |y(x)| = \lim_{x\to 0^+} |x^k - x^{-k}| = -\infty.$$

Portanto, para $\lambda < 0$ *não existe solução.*
Assim sendo, temos como solução apenas $y(x) = \sin(k\ln(x))$ *com* $k \geq 1$ *quando* $\lambda > 0$.

(h) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \infty, \\ y(0) = 0, \\ \lim_{x\to\infty} |y(x)| < \infty. \end{cases}$

Solução: *Para* $\lambda = 0$, *temos que*

$$y'' = 0 \Rightarrow y = A + Bx.$$

Quando $x = 0$ *temos*

$$0 = y(0) = A.$$

Quando $x \to \infty$ *temos*

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |Bx| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda = 0$ *não existe solução.*
Para $\lambda > 0$, *fazendo* $\lambda = k^2$ *com* $k > 0$, *temos que*

$$y'' + k^2 y = 0 \Rightarrow y = C\cos(kx) + D\sin(kx).$$

Quando $x = 0$ *temos*

$$0 = y(0) = C.$$

Quando $x \to \infty$ *temos*

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |D\sin(kx)| < \infty.$$

Portanto, para $\lambda > 0$ *temos* $y(x) = \sin(kx)$ *com* $k > 0$.
Para $\lambda < 0$ *temos*

$$y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow y = E\cosh(kx) + F\sinh(kx).$$

Quando $x = 0$ *temos*

$$0 = y(0) = E.$$

Quando $x \to \infty$ *temos*

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |F \sinh(kx)| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda < 0$ *não existe solução.*
Assim sendo, temos como solução apenas $y(x) = \sin(kx)$ *com* $k > 0$ *quando* $\lambda > 0$.

(i) $\begin{cases} xy'' + y' + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(1) = 0, \\ \lim_{x\to 0^-} |y(x)| < \infty. \end{cases}$

Solução: *Verifica-se que* $xy11 + y' + \lambda xy = 0$ *é ua equação de Bessel de ordem zero. Fazendo a substituição de* $\sqrt{\lambda}x \to t$ *temos*

$$ty'' + y' + ty = 0$$

e para $\lambda = \alpha^2$ *com* $\alpha > 0$ *temos*

$$y(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}x) + BY_0(\sqrt{\lambda}x).$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} |y(x)| < \infty \Rightarrow B = 0 \text{ e } y(x) = AJ_0(\sqrt{\lambda}x)$$

e quando $x = 0$ *temos*

$$0 = AJ_0(\sqrt{\lambda}) \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k_0 n.$$

Portanto, $y_n(x) = J_0(k_0 nx)$ *com* $\lambda = k_0 n^2$.
Para $\lambda = 0$ *temos*

$$xy'' + y' = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 \ln(x) + c_2.$$

Quando $x \to 0^+$ *temos*

$$\lim_{x\to 0^+} |y(x)| = \infty.$$

Portanto, quando $\lambda = 0$ *não existe solução.*
Para $\lambda < 0$, *fazendo* $\lambda = -\alpha^2$ *com* $\alpha > 0$ *temos*

$$ty'' + y' - ty = 0 \Rightarrow y(x) = AI_0(\alpha x) + BK_0(\alpha x).$$

Quando $x \to 0^+$ *temos*

$$\lim_{x\to 0^+} |y(x)| < 0 \Rightarrow B = 0.$$

Quando $x = 1$ *temos*

$$0 = y(1) = AI_0(\alpha) \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } A = 0.$$

Portanto, quando $\lambda < 0$ *existe apenas a solução trivial.*
Assim sendo, além da solução trivial temos $y_n(x) = J_0(k_0 nx)$ *com* $\lambda = k_0 n^2$ *quando* $\lambda > 0$.

(j) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-a)(b-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda y = 0, \quad a < x < b, \\ \lim_{x\to a} |y(x)| < \infty, \\ \lim_{x\to b} |y(x)| < \infty. \end{cases}$

Solução:

Fazendo $x = a + t\,(b-a)$ *temos que*

$$\begin{aligned} t &= (x-a)\,/\,(b-a)\,, \\ x &= a \to t = 0, \\ x &= b \to t = 1, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b-a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\left(-x^2 + (a+b)\,x - ab\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-2x + (a+b)\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{1}{(b-a)^2}\left[-\left(a+t\,(b-a)\right)^2 + (a+b)\left(a+t\,(b-a)\right) - ab\right] \\ &\quad + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y\frac{1}{b-a}\left[-2a + 2t\,(b-a) + (a+b))\right] + \lambda y \\ &= \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\frac{1}{(b-a)^2}\left[-at\,(b-a) + bt\,(b-a) - t^2\,(b-a)^2\right] \\ &\quad + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{(b-a)}\left[-2t\,(b-a) + b - a\right] + \lambda y \\ &= t\,(1-t)\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + (1-2t)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \lambda y. \end{aligned}$$

Para $t = (1-\bar{x})\,/2$ *temos*

$$\left(1-\bar{x}^2\right)y'' - 2\bar{x}y' + \lambda y = 0.$$

Para $\lambda = v\,(v+1)$ *temos*

$$\begin{aligned} y &= AP_v(\bar{x}) + BQ_v(\bar{x}) \\ &= AP_v(1-2t) + BQ_v(1-2t) \\ &= A\,{}_2F_1(-v, v+1, 1; t) + BQ_v(1-2t). \end{aligned}$$

Então, quando $x \to \pm 1$ *temos que* $\lim_{x\to\pm 1} |y| < \infty$ *e portanto* $B = 0.o$
Como

$${}_2F_1(-v, v+1, 1; t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-v)_n(v+1)_n}{(1)_n}\frac{t^n}{n!}$$

e deseja-se que seja infinito para $t = 0$ *e* $t = 1$ *temos que se* $v \in \mathbb{N}$ *obtemos os polinômios de Legendre de modo que satisfaz a condição desejada. Já para o caso geral corresponde temos*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-v)_n(v+1)_n}{n!}\frac{1}{n!}$$

e assim

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-v)_{n+1}(v+1)_{n+1}}{((n+1)!)^2} \to \frac{(n!)^2}{(-v)_n(v+1)_n} = \frac{(n-v)(n+1-v+1)}{(n+1)^2} \to 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} {}_2F_1(-v, v+1, 1; 1) &= \frac{1}{B(v+1, v)} \int_0^1 t^v \, (1-t)^{-v-1} \, (1-t)^v \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{B(v+1, -v)} \int_0^1 t^v (1-t)^- 1 \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{B(v+1, 0)}{B(v+1, -v)}. \end{aligned}$$

Por fim, $y(t) = P_n(1-2t)$ *para* $\lambda_n = n(n+1)$ *e* $y_n(x) = P_n(1 - 2(x-a)/(b-a))$.

(k) $\begin{cases} y'' - y = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

Solução:

Temos que a solução é da forma

$$y(x) = A \exp(x) + B \exp(-x).$$

Quando $x = 0$ *temos*

$$0 = y(0) = A + B \to B = -A.$$

Quando $x \to 1$ *temos*

$$1 = y(1) = A \exp(1) + B \exp(-1) = 2A \sinh(1) \to A = \frac{1}{2\sinh(1)}.$$

Portanto, a solução é $y = \sinh(x)/\sinh(1)$.

(l) $\begin{cases} y'' + 4y' + 7y = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(1) = 1. \end{cases}$

Solução:

Temos que a solução é da forma $y(x) = \exp(rx)$. *Portanto,*

$$r^2 + 4r + 7 = 0 \to r = \left(-4 \pm \sqrt{16 - 28}\right)/2 = -2 \pm i\sqrt{3}$$

e consequentemente

$$y(x) = \exp(-2x)\left(A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)\right).$$

Quando $x = 0$ *temos*

$$0 = y(0) = A \to y = \exp(-2x) B \sin(\sqrt{3}x).$$

Quando $x = 1$ *temos que*

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2\exp(-2x)B\sin(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}\exp(-2x)B\cos(\sqrt{3}x), \\ 1 = y'(1) &= B\left[-2\exp(-2)\sin(\sqrt{3}) + \sqrt{3}\exp(-2)\cos(\sqrt{3})\right] \\ \Longrightarrow B &= \exp(2)/\left(-2\sin(\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos(\sqrt{3})\right). \end{aligned}$$

Portanto, a solução é $y = \exp(2)\left(-2\sin(\sqrt{3}) + \sqrt{3}\cos(\sqrt{3})\right)^{-1}\exp(-2x)\sin(\sqrt{3}x)$.

(m) $\begin{cases} y'' - 6y' + 25y = 0, \quad 0 < x < \pi/4, \\ y'(0) = 1, \\ y(\pi/4) = 0. \end{cases}$

Solução:

Temos que a solução é da forma $y(x) = \exp(rx)$. *Portanto,*

$$r^2 - 6r + 25 = 0 \to r = \left(6 \pm \sqrt{36 - 100}\right)/2 = (6 \pm 8i)/2 = 3 \pm 4i$$

e consequentemente

$$y(x) = \exp(3x)\left(A\cos(4x) + B\sin(4x)\right).$$

Quando $x = \pi/4$ *temos*

$$0 = y(\pi/4) = \exp(3\pi/4)\left(A\cos(\pi) + B\sin(\pi)\right) \to A = 0.$$

Quando $x = 0$ *temos*

$$\begin{aligned} y'(x) &= B\left(\exp(3x)3\sin(4x) + \exp(3x)4\cos(4x)\right), \\ 1 = y'(0) &= B(4) \to B = 1/4. \end{aligned}$$

Portanto, a solução é $y(x) = (1/4)\exp(3x)\sin(4x)$.

(n) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = x, \quad 0 < x < 2, \\ y(0) = 0, \\ y(2) = 3. \end{cases}$

Solução:

Temos que a solução é da forma $y(x) = \exp(rx)$. *Portanto,*

$$r^2 - 6r + 25 = 0 \to r = \left(6 \pm \sqrt{36 - 100}\right)/2 = (6 \pm 8i)/2 = 3 \pm 4i$$

e consequentemente

$$y(x) = \exp(3x)\left(A\cos(4x) + B\sin(4x)\right).$$

Uma solução particular é da forma $\bar{A}x + \bar{B}$ *e portanto*

$$2(\bar{A}) + \bar{A} + \bar{B} = x \to \bar{A} = 1, \bar{B} = -2.$$

Logo, a solução é da forma

$$y(x) = x - 2 + \exp(3x)\left(A\cos(4x) + B\sin(4x)\right).$$

Quando $x = 0$ *temos*

$$0 = y(0) = -2 + A \to A = 2.$$

Quando $x = 2$ *temos*

$$3 = y(2) = \exp(6)\left(2\cos(8) + B\sin(8)\right) \to B = -2\cot(8).$$

Portanto, a solução é $y = x - 2 + \exp(3x)\left(2\cos(4x) - 2\cot(8)\sin(4x)\right)$.

(o) $\begin{cases} (x^2y')' + \lambda x^{-2}y = 0, & 1 < x < 2, \\ y(1) = 0, \\ y(2) = 0. \end{cases}$

Solução: *TODO*

Para $\lambda = 0$, *temos que*

$$y'' = 0 \Rightarrow y = A + Bx.$$

Quando $x = 0$ *temos*

$$0 = y(0) = A.$$

Quando $x \to \infty$ *temos*

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |Bx| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda = 0$ *não existe solução.*

Para $\lambda > 0$, *fazendo* $\lambda = k^2$ *com* $k > 0$, *temos que*

$$y'' + k^2y = 0 \Rightarrow y = C\cos(kx) + D\sin(kx).$$

Quando $x = 0$ *temos*

$$0 = y(0) = C.$$

Quando $x \to \infty$ *temos*

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |D\sin(kx)| < \infty.$$

Portanto, para $\lambda > 0$ *temos* $y(x) = \sin(kx)$ *com* $k > 0$.

Para $\lambda < 0$ *temos*

$$y'' - k^2y = 0 \Rightarrow y = E\cosh(kx) + F\sinh(kx).$$

Quando $x = 0$ *temos*

$$0 = y(0) = E.$$

Quando $x \to \infty$ *temos*

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |F\sinh(kx)| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda < 0$ *não existe solução.*

Assim sendo, temos como solução apenas $y(x) = \sin(kx)$ *com* $k > 0$ *quando* $\lambda > 0$.

(p) $\begin{cases} x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 1/4)\, y = 0, & \pi/2 < x < 3\pi 2^{-1}, \\ y(\pi/2) = 0, \\ y(3\pi 2^{-1}) = 0. \end{cases}$

Solução: *TODO*

Para $\lambda = 0$, temos que

$$y'' = 0 \Rightarrow y = A + Bx.$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = A.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |Bx| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda = 0$ não existe solução.

Para $\lambda > 0$, fazendo $\lambda = k^2$ com $k > 0$, temos que

$$y'' + k^2 y = 0 \Rightarrow y = C\cos(kx) + D\sin(kx).$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = C.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |D\sin(kx)| < \infty.$$

Portanto, para $\lambda > 0$ temos $y(x) = \sin(kx)$ com $k > 0$.

Para $\lambda < 0$ temos

$$y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow y = E\cosh(kx) + F\sinh(kx).$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = E.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |F\sinh(kx)| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda < 0$ não existe solução.

Assim sendo, temos como solução apenas $y(x) = \sin(kx)$ com $k > 0$ quando $\lambda > 0$.

(q) $\begin{cases} y^{(4)} - \lambda y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0. \end{cases}$

Solução: *TODO*
Para $\lambda = 0$, temos que

$$y'' = 0 \Rightarrow y = A + Bx.$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = A.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |Bx| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda = 0$ não existe solução.
Para $\lambda > 0$, fazendo $\lambda = k^2$ com $k > 0$, temos que

$$y'' + k^2 y = 0 \Rightarrow y = C\cos(kx) + D\sin(kx).$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = C.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |D\sin(kx)| < \infty.$$

Portanto, para $\lambda > 0$ temos $y(x) = \sin(kx)$ com $k > 0$.
Para $\lambda < 0$ temos

$$y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow y = E\cosh(kx) + F\sinh(kx).$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = E.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |F\sinh(kx)| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda < 0$ não existe solução.
Assim sendo, temos como solução apenas $y(x) = \sin(kx)$ com $k > 0$ quando $\lambda > 0$.

(r) $\begin{cases} y^{(4)} - \lambda y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0. \end{cases}$

Solução: *TODO*
Para $\lambda = 0$, temos que

$$y'' = 0 \Rightarrow y = A + Bx.$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = A.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |Bx| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda = 0$ não existe solução.
Para $\lambda > 0$, fazendo $\lambda = k^2$ com $k > 0$, temos que

$$y'' + k^2 y = 0 \Rightarrow y = C\cos(kx) + D\sin(kx).$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = C.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |D\sin(kx)| < \infty.$$

Portanto, para $\lambda > 0$ temos $y(x) = \sin(kx)$ com $k > 0$.
Para $\lambda < 0$ temos

$$y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow y = E\cosh(kx) + F\sinh(kx).$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = E.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |F\sinh(kx)| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda < 0$ não existe solução.
Assim sendo, temos como solução apenas $y(x) = \sin(kx)$ com $k > 0$ quando $\lambda > 0$.

(s) $\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) - 0, \\ \lim_{x\to 1} |y(x)| < \infty. \end{cases}$

Solução: *TODO*
Para $\lambda = 0$, temos que

$$y'' = 0 \Rightarrow y = A + Bx.$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = A.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |Bx| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda = 0$ não existe solução.
Para $\lambda > 0$, fazendo $\lambda = k^2$ com $k > 0$, temos que

$$y'' + k^2 y = 0 \Rightarrow y = C\cos(kx) + D\sin(kx).$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = C.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |D\sin(kx)| < \infty.$$

Portanto, para $\lambda > 0$ temos $y(x) = \sin(kx)$ com $k > 0$.
Para $\lambda < 0$ temos

$$y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow y = E\cosh(kx) + F\sinh(kx).$$

Quando $x = 0$ temos

$$0 = y(0) = E.$$

Quando $x \to \infty$ temos

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \lim_{x\to\infty} |F\sinh(kx)| = \infty.$$

Portanto, para $\lambda < 0$ não existe solução.
Assim sendo, temos como solução apenas $y(x) = \sin(kx)$ com $k > 0$ quando $\lambda > 0$.

2. Encontre os autovalores e autofunções do problema

$$\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' - y = -\lambda y, \quad 1 < x < 2, \\ y(1) = 0, \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Solução: *Temos que*

$$x^2 y'' + 3xy' + (\lambda - 1)y = 0$$

é uma equação de Euler de modo que $y = x^r$ e portanto

$$r(r-1) + 3r + (\lambda - 1) = 0.$$

Logo, $r = -1 \pm \sqrt{2-\lambda}$.
Para $2-\lambda > 0$ *temos que* $r_1 = -1 + \sqrt{2-\lambda}$ *e* $r_2 = -1 - \sqrt{2-\lambda}$ *e portanto*

$$y(x) = A_1 x^{r_1} + A_2 x^{r_2}.$$

Quando $x = 1$,

$$0 = y(1) = A_1 + A_2.$$

Quando $x = 2$,

$$0 = y(2) = A_1 2^{r_1} + A_2 2^{r_2}.$$

Pelas duas equaçãos anteriores temos que $A_1 = A_2 = 0$ *e assim concluimos que para* $2-\lambda > 0$ *temos apenas a solução trivial.*
Para $2-\lambda = 0$ *temos que* $r_1 = r_2 = -1$ *e portanto*

$$y(x) = B_1 x^{-1} + B_2 x^{-1} \ln(x).$$

Quando $x = 1$,

$$0 = y(1) = B_1.$$

Quando $x = 2$,

$$0 = y(2) = B_1 2^{-1} + B_2 2^{-1} \ln(2).$$

Pelas duas equações anteriores temos que $B_1 = B_2 = 0$ *e assim concluimos que para* $2-\lambda = 0$ *temos apenas a solução tivial.*
Para $2-\lambda < 0$ *fazemos* $2-\lambda = -k^2$, $k > 0$. *Temos então que* $r_1 = -1 + ik$ *e* $r_2 = -1 - ik$ *e portanto*

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 x^{-1+ik} + C_2 x^{-1-ik} \\ &= x^{-1}\left(C_1 x^{ik} + C_2 x^{-ik}\right) \\ &= x^{-1}\left(C_1 \exp(ik\ln(x)) + C_2 \exp(-ik\ln(x))\right) \\ &= x^{-1}\left(C_1' \cos(k\ln(x)) + C_2' \sin(k\ln(X))\right). \end{aligned}$$

Quando $x = 1$,

$$0 = y(1) = 1\,(C_1' + 0) \Rightarrow C_1' = 0.$$

Quando $x = 2$,

$$0 = y(2) = 2^{-1} C_2' \sin(k\ln(2)) \Rightarrow k\ln(2) = n\pi, n = 1, 2, \ldots.$$

Assim, os autovalores são $\lambda_n = 2 + k_n^2 = 2 + (n\pi/\ln(2))^2$, $n = 1, 2, \ldots$, *e as autofunções são*

$$y_n(x) = x^{-1} \sin\left(n\pi(\ln(2))^{-1}\ln(x)\right), n = 1, 2, \ldots.$$

3. (T4 de 2010) Determine quais das equações abaixo possuem solução oscilatória (isto é, com um número infinito de zeros) no intervalo $(0, \infty)$. Justifique detalhadamente suas respostas.

   (a) $y'' + (\cos x + 2)y = 0$,

   Solução:

   (b) $y'' - \exp(-x)y = 0$,

   Solução:

   (c) $y'' + x^{-1}y = 0$.

   Solução:

4. (T4 de 2010) Considere a equação diferencial $x^2u'' + \lambda u = 0$ no intervalo $[1, \exp(1)]$.

   (a) Determine os autovalores e autofunções correspondentes para o problema de Sturm-Liouville associados à EDO acima sujeita às condições de controno $u(1) = u(\exp(1)) = 0$.

   Solução:

   (b) Escreva a condição de ortogonalidade entre essas autofunções e a verifique explicitamente (fazendo um cálculo independente da teoria de Sturm-Liouville).

   Solução:

5. Considere a equação diferencial $y'' - y' + \lambda y = 0$ no intervalo $[0, 1]$.

   (a) Determine os autovalores e autofunções correspondentes para o problema de Sturm-Liouville associados à EDO acima sujeita às condições de controno $y(0) = y(1) = 0$.

   Solução:

   (b) Escreva a condição de ortogonalidade entre essas autofunções.

   Solução:

6. (P2 de 2011, E de 2011) Encontre os autovalores e autofunções do seguinte problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} x(xy')' + \lambda y = 0, & 1 < x < \exp(2\pi) \\ y'(1) = y'(\exp(2\pi)) = 0. \end{cases}$$

Escreva a relação de orotogonalidade satisfeita por essas autofunções.

Solução: *Temos que $y = x^r$ de modo que*

$$r(r-1) + r + \lambda = 0$$

e portanto $r = \pm\sqrt{-\lambda}$.

Para $\lambda < 0$ fazemos $\lambda = -k^2$, $k > 0$. Temos então que $r = \pm k$ e portanto

$$y(x) = Ax^k + Bx^{-k},$$

$$y'(x) = Akx^{k-1} - Bkx^{k-1}.$$

Quando $x = 1$,

$$y'(1) = 0 \Rightarrow A + B = 0.$$

Quando $x = \exp(2\pi)$,

$$y'(\exp(2\pi)) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Pelas equações acima temos que $A = B = 0$ *e assim concluimos que para* $\lambda < 0$ *temos apenas a solução trivial.*

Para $\lambda = 0$ *temos*

$$\begin{aligned} y(x) &= A_1 + B_1 \ln(x), \\ y'(x) &= B_1 x^{-1}. \end{aligned}$$

Quando $x = 1$,

$$y'(1) = 0 \Rightarrow B_1 = 0.$$

Quando $x = \exp(2\pi)$,

$$y'(\exp(2\pi)) = 0.$$

Pelas equações acima temos que $y = A_1$ *para* $\lambda = 0$.

Para $\lambda > 0$ *fazemos* $\lambda = k^2$, $k > 0$. *Temos então que* $r = \pm ik$ *e portanto*

$$\begin{aligned} y(x) &= A_2 x^{ik} + B_2 x^{-ik} \\ &= A_2 \exp(ik \ln(x)) + B_2 \exp(-ik \ln(x)) \\ &= C_1 \cos(k \ln(x)) + C_2 \sin(k \ln(x)), \\ y'(x) &= -kx^{-1} C_1 \sin(k \ln(x)) + kx^{-1} C_2 \cos(k \ln(x)). \end{aligned}$$

Quando $x = 1$,

$$y'(1) = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Quando $x = \exp(2\pi)$,

$$y'(\exp(2\pi)) = 0 \Rightarrow \sin(k \ln(\exp(2\pi))) = \sin(k2\pi) = 0 \Rightarrow 2k\pi = n\pi, n = 1, 2, \ldots.$$

Pelas equações acima temos que $y_n = \cos(n2^{-1} \ln(x))$, $n = 1, 2, \ldots$, *e* $\lambda_n = n^2/4$.

Associando os casos em que $\lambda = 0$ *e* $\lambda > 0$ *temos que*

$$\begin{cases} y_n = \cos\left(n2^{-1} \ln(x)\right), \\ \lambda_n = n^2/4, n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Quanto a relação de ortogonalidade temos

$$\int_1^{\exp(2\pi)} \cos(n2^{-1} \ln(x)) \cos(m2^{-1} \ln(x)) x^{-1} \, \mathrm{d}x = N_n \delta_{mn}, m, n = 0, 1, 2, \ldots.$$