EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismos

1o. Semestre de 2008 - Prova Substitutiva - Prof. Paulo Valente

RA: **Nome:** **Ass.:**

Antes de começar a resolver a prova, atente para o seguinte:

- *Uso da Calculadora*. Na resolução das questões é absolutamente imprescindível que os procedimentos utilizados sejam descritos de forma clara. Use a calculadora apenas para executar operações numéricas finais mais complicadas. Não *resolva* questões na calculadora;
- *Esboço do Lugar das Raízes*. O esboço do LR deve incluir os pólos e zeros de malha aberta, os pontos e direções associadas a $k = 0$ e $k \to \infty$, assíntotas (valores dos ângulos e ponto de intersecção), localização e sentidos dos ramos e a indicação – não se exigem cálculos – de ângulos de partida e chegada, pontos de cruzamento com o eixo imaginário e de entrada e/ou saída no eixo real. Forneça os cálculos dessas quantidades apenas quando solicitado.

Q1. [2.0 pts] O ganho direto entre a entrada de referência e a saída controlada de um sistema de controle com realimentação unitária é dado por

$$G(s) = \frac{k(s+3)}{s(s-1)}, \quad k > 0.$$

a) [1.0 pto] Esboce o Lugar das Raízes da equação característica $1 + G(s) = 0$ em função de $0 \leq k < \infty$. Através do Critério de Routh-Hurwitz, determine o ganho crítico k_c para o qual o sistema de controle em malha fechada é marginalmente estável. Determine a freqüência de oscilação ω_0 correspondente;

b) [1.0 pto] Esboce o Diagrama de Nyquist de $G(s)$, curva $\mathcal{C}_G$. Lembrando que $G(j\omega)$ cruza -180^o na freqüência ω_0, use o Critério de Nyquist para determinar $Z = N+P$, isto é, N, pois $P = 1$, supondo $k < k_c$ e $k > k_c$. *Sugestão*: $|G(j\omega_0)| = 1$ para $k = k_c$. Analise $|G(j\omega_0)|$ nos demais casos.

Q2. [2 pts] Um sistema de controle com realimentação unitária tem como ganho direto entre a entrada de referência e a saída controlada a função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + (1+\alpha)s + (1+\alpha)}.$$

a) [1.0 pto] Construa o Lugar das Raízes da equação característica $1 + G(s) = 0$ em função de $0 \leq \alpha < \infty$. Além do esboço do LR, calcule possíveis pontos de entrada e/ou saída no eixo real;

b) [1.0 pto] Existem valores de $\alpha > 0$ para os quais os pólos do sistema em malha fechada têm partes reais menores ou iguais a -2?

Q3. [2 pts] Considere o sistema de controle em malha fechada cuja equação característica é dada por

$$1 + k\frac{[(s+1)^2+1]}{s^2(s+2)(s+3)} = 0.$$

a) [1.5 pto] Construa o Lugar das Raízes do sistema em função de $0 \leq k < \infty$. Além do esboço do LR, calcule os ângulos de partida (de pólos) e chegada (em zeros) e possíveis pontos de cruzamento com o eixo imaginário;

b) [0.5 pto] Determine a faixa de variação de k na qual o sistema de controle em malha fechada é estável.

Q4. [2 pts] Um sistema de controle com realimentação unitária tem

$$P(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+100)}$$

como função de malha aberta entre a entrada de referência e a saída controlada.

a) [1.0 pto] Através do Lugar das Raízes, projete um compensador proporcional-derivativo (avanço) $C(s) = k_P + k_D s$ (isto é, determine k_P e k_D) de forma que o sistema em malha fechada apresente um pólo real dominante em $s = -10$;

b) [1.0 pto] Projete um compensador por atraso de fase que ao ser associado em série com $C(s)P(s)$ forneça uma constante de velocidade (k_v) dez vezes maior do que a exibida por $C(s)P(s)$, onde $C(s)$ é o compensador obtido no item a). Fixe o zero do compensador atraso em -0.01.

A questão **Q5** a seguir diz respeito a um sistema de controle com realimentação unitária. A resposta em freqüência de malha aberta entre a entrada de referência e a saída controlada é apresentada na Tabela 1. A curva de fase não cruza -180^o. Ao recorrer à Tabela, utilize sempre os valores mais próximos aos valores teóricos procurados. (Observe que os dados estão no formato $\pm a.bcde \times 10^{\pm f}$, com a, b, c, d, e e f positivos.)

Q5. [2 pts] Determine, deixando perfeitamente claros os procedimentos adotados,

a) [1.0 pto] As margens de ganho e de fase do sistema não compensado. O sistema em malha fechada é estável? Justifique;

b) [1.0 pto] Projete um compensador por avanço de fase de forma que o sistema compensado apresente margem de fase de 60^o com margem adicional de 5^o.

Tabela 1. Resposta em freqüência de $P(s)$ (Questão **Q5**).

ω	$\lvert P(j\omega)\rvert$	$\lvert P(j\omega)\rvert_{\text{dB}}$	$\angle P(j\omega)_{\text{graus}}$
$1.0000e-001$	$2.4876e+004$	$8.7916e+001$	$-9.5711e+001$
$2.0000e-001$	$1.2257e+004$	$8.1768e+001$	$-1.0131e+002$
$3.0000e-001$	$7.9819e+003$	$7.8042e+001$	$-1.0670e+002$
$4.0000e-001$	$5.8030e+003$	$7.5273e+001$	$-1.1180e+002$
$5.0000e-001$	$4.4721e+003$	$7.3010e+001$	$-1.1657e+002$
$6.0000e-001$	$3.5729e+003$	$7.1060e+001$	$-1.2096e+002$
$7.0000e-001$	$2.9258e+003$	$6.9325e+001$	$-1.2499e+002$
$8.0000e-001$	$2.4402e+003$	$6.7749e+001$	$-1.2866e+002$
$9.0000e-001$	$2.0647e+003$	$6.6297e+001$	$-1.3199e+002$
$1.0000e+000$	$1.7678e+003$	$6.4949e+001$	$-1.3500e+002$
$2.0000e+000$	$5.5902e+002$	$5.4949e+001$	$-1.5343e+002$
$3.0000e+000$	$2.6352e+002$	$4.8416e+001$	$-1.6157e+002$
$4.0000e+000$	$1.5158e+002$	$4.3613e+001$	$-1.6596e+002$
$5.0000e+000$	$9.8058e+001$	$3.9830e+001$	$-1.6869e+002$
$6.0000e+000$	$6.8500e+001$	$3.6714e+001$	$-1.7054e+002$
$7.0000e+000$	$5.0508e+001$	$3.4067e+001$	$-1.7187e+002$
$8.0000e+000$	$3.8761e+001$	$3.1768e+001$	$-1.7287e+002$
$9.0000e+000$	$3.0675e+001$	$2.9736e+001$	$-1.7366e+002$
$1.0000e+001$	$2.4876e+001$	$2.7916e+001$	$-1.7429e+002$
$2.0000e+001$	$6.2422e+000$	$1.5907e+001$	$-1.7714e+002$
$3.0000e+001$	$2.7762e+000$	$8.8691e+000$	$-1.7809e+002$
$4.0000e+001$	$1.5620e+000$	$3.8737e+000$	$-1.7857e+002$
$5.0000e+001$	$9.9980e-001$	$-1.7368e-003$	$-1.7885e+002$
$6.0000e+001$	$6.9435e-001$	$-3.1685e+000$	$-1.7905e+002$
$7.0000e+001$	$5.1015e-001$	$-5.8460e+000$	$-1.7918e+002$
$8.0000e+001$	$3.9059e-001$	$-8.1655e+000$	$-1.7928e+002$
$9.0000e+001$	$3.0862e-001$	$-1.0211e+001$	$-1.7936e+002$
$1.0000e+002$	$2.4999e-001$	$-1.2042e+001$	$-1.7943e+002$
$2.0000e+002$	$6.2499e-002$	$-2.4083e+001$	$-1.7971e+002$
$3.0000e+002$	$2.7778e-002$	$-3.1126e+001$	$-1.7981e+002$
$4.0000e+002$	$1.5625e-002$	$-3.6124e+001$	$-1.7986e+002$
$5.0000e+002$	$1.0000e-002$	$-4.0000e+001$	$-1.7989e+002$
$6.0000e+002$	$6.9444e-003$	$-4.3167e+001$	$-1.7990e+002$
$7.0000e+002$	$5.1020e-003$	$-4.5845e+001$	$-1.7992e+002$
$8.0000e+002$	$3.9062e-003$	$-4.8165e+001$	$-1.7993e+002$
$9.0000e+002$	$3.0864e-003$	$-5.0211e+001$	$-1.7994e+002$
$1.0000e+003$	$2.5000e-003$	$-5.2041e+001$	$-1.7994e+002$

Informações Gerais

Constante de Velocidade, k_v. Se $G(s)$ é a função de transferência de malha aberta entre a entrada de referência e a saída controlada em um sistema de controle com realimentação unitária, então

$$k_v = \lim_{s\to 0} sG(s).$$

Critério de Nyquist. $N = Z - P$, onde P e Z são os números de pólos e zeros envolvidos pela curva $\mathcal{C}_s$ (Plano s), respectivamente; N é o número de envolvimentos do ponto $-1 + j0$ pela curva $\mathcal{C}_G$ (Plano $G(s)$). Assume-se positivo (respectivamente, negativo) cada envolvimento no sentido horário (respectivamente, anti-horário).

Lugar das Raízes. Considere

$$1 + kG(s) = 1 + k\frac{N(s)}{D(s)} = 1 + k\frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = 0, \quad k > 0.$$

1. Magnitude e fase: $|kG(s)| = 1, \quad \angle G(s) = 180^o \times r,\ r = \pm 1, \pm 3, \ldots$.
2. Assíntotas:
$$\theta = \frac{180^o \times r}{n - m},\ r = \pm 1, \pm 3, \ldots; \qquad \text{(ângulos)}$$
$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m}. \qquad \text{(intersecção)}$$
3. Ângulos de partida e chegada: satisfazem
$$\sum_{j=1}^{m} \phi_{z_j} - \sum_{i=1}^{n} \phi_{p_i} = 180^o \times r,\ r = \pm 1, \pm 3, \ldots$$
ϕ_{z_j} (ϕ_{p_i}) são os ângulos entre os zeros (pólos) de $G(s)$ e o ponto de interesse.
4. Pontos de entrada e saída: entre as raízes de
$$D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = 0.$$
5. Pontos de cruzamento com o eixo imaginário devem ser determinados por meio do Critério de Routh-Hurwitz.

Compensação Avanço:

$$C(s) = k_c\frac{s + 1/T}{s + 1/(\alpha T)} = k_c\alpha\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad T > 0,\ 0 < \alpha < 1.$$

No projeto por resposta em freqüência,

$$\operatorname{sen}\phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}, \quad 20\log\left|\frac{jT\omega + 1}{j\alpha T\omega + 1}\right|_{\omega=\omega_m} = 20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Compensação Atraso:

$$C(s) = k_c\frac{s + 1/T}{s + 1/(\beta T)} = k_c\beta\frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}, \quad T > 0,\ \beta > 1.$$

Respostas

Q1. a) $k_c = 1$, $\omega_0 = \sqrt{3}$ rad/s; b) Se $k < k_c$, $N = 1$ e $Z = 2$; se $k > k_c$, $N = -1$ e $Z = 0$;

Q2. a) Assíntota: 180^o; ponto de entrada no eixo real: -2.41; b) Existem valores de $\alpha > 0$ tais que os pólos de malha fechada têm partes reais menores ou iguais a -2 (o valor associado ao lugar -2.41, por exemplo);

Q3. a) Assíntotas: ± 90; intersecção: -1.5; ângulos de partida (pólo duplo em 0): $+90^o$,-90^o; ângulos de chegada: 71.56^o em $z_1 = -1 + j$, -71.56^o em $z_2 = -1 - j$; não há intersecção com Im s; b) O sistema em malha fechada é estável para $k > 0$ (critério de Routh-Hurwitz);

Q4. a) $C(s) = 9(s + 1)$ (a solução não é única); b) $C_{\text{atraso}}(s) = (s + 0.01)/(s + 0.001)$;

Q5. a) MG $= +\infty$, MF $= 1.15^o$; O sistema em malha fechada é estável (margens positivas); b) $C(s) = 18.53(s + 23.22)/(s + 430.5)$.