

### MC458 - 1ª Prova Modelo 3 - 17/6/2013

1. Suponha que uma chapa de aço de comprimento  $L$  e largura constante deva receber  $n$  cortes nos pontos que estão a distâncias  $p_1, p_2, \dots, p_n$  de uma das pontas da chapa. Cada corte é perpendicular ao comprimento da chapa, e tem custo igual ao tamanho do maior pedaço resultante do corte.

Como exemplo, suponha uma chapa com comprimento  $L = 15$  e  $n = 3$  cortes a distâncias 6, 10 e 13 da extremidade esquerda da chapa. Cortes feitos na ordem  $p_1, p_2, p_3$  tem custo total  $9 + 5 + 3 = 17$ , enquanto que cortes feitos na ordem  $p_2, p_3, p_1$  tem custo total  $10 + 3 + 6 = 19$ . O objetivo é minimizar o custo total da sequência de cortes.

Projete um algoritmo usando a técnica de Programação Dinâmica para resolver o problema do corte da chapa, dados o seu comprimento  $L$  e os pontos de corte. Para responder corretamente esta questão você deve dar um pseudo-código do algoritmo assim como provar a sua corretude e analisar a sua complexidade.

*Dica: defina  $g(i, j)$  para todo par  $i, j$ ,  $0 \leq i < j \leq n+1$ , como sendo o custo ótimo de cortar a seção da chapa cujas extremidades são os pontos  $p_i$  e  $p_j$ . Escreva uma fórmula de recorrência para  $g(i, j)$ .*

2. O *Problema do Troco* é definido da seguinte forma. Seja  $M = \{m_0, m_1, \dots, m_n\}$  o conjunto (finito) dos valores de moedas que são usadas em um país. Para todo  $i = 0, \dots, n$ , suponha que  $m_i$  é um valor inteiro positivo. Além disso, sem perda de generalidade, assuma que  $m_0 < m_1 < \dots < m_n$ . **Pergunta:** qual o número mínimo de moedas que devem ser usadas para fornecer um troco exato de  $C$  (inteiro positivo) centavos, supondo um estoque ilimitado de moedas de cada tipo em  $M$ ?

Responda os itens a seguir:

- a. No sistema monetário brasileiro temos que  $M = \{1, 5, 10, 25, 50, 100\}$ . Descreva um algoritmo guloso para resolver o problema do troco no Brasil. Prove que o seu algoritmo sempre dá a solução ótima.
- b. Sejam  $c > 1$  e  $n \geq 1$  dois números inteiros finitos. Considere o problema do troco para um país onde  $M = \{c^0, c^1, \dots, c^n\}$ . Projete um algoritmo guloso para este problema, escreva o pseudo-código do mesmo, dê a sua complexidade e mostre que ele está correto.
- c. Dê um exemplo de uma instância do problema do troco em um sistema monetário para o qual o algoritmo guloso não funciona. É claro que, para garantir a existência de troco para qualquer valor de  $C$ , você deve assumir que a moeda de *um* centavo faz parte do conjunto de moedas.

3. A terceira questão terá a ver com a sua experiência no segundo laboratório.