MA 502 - Análise I - Turma Z

Prova No 3

28/06/2010

RA..............................Nome..

1. Seja $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau n, que tem n raizes reais distintas. Prove que a derivada P' tem $n-1$ raizes reais distintas.

2. Seja $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau n. Prove que, para todo $a, x \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

3. Determine os raios de convergência das seguintes séries de potências:

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^k, \qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k^k}.$$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{se} \quad x \neq 0, \qquad f(0) = 1.$$

(a) Prove que f é estritamente decrescente no intervalo $[0, \pi]$.
(b) Prove que $[a, b]$

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{se} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

5. Calcule os seguintes limites

$$(a) \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right), \qquad (b) \quad \lim_{x \to 0+} x^{(x^2)}.$$

(a) $f(a) \leq f(x) \Rightarrow f'(a) = 0$

$f'(x) = \frac{\cos x}{1} \Rightarrow f'(a) = \cos 0 = 1$

$f(a) = 1 \leq 1 = f(x)$

$f'(\pi) = \cos \pi = -1$

$f(a) = -1 \leq 1 = f(x)$

Logo f é est. decresc.

(b)