Gabarito da Prova 1 de MA311 - Cálculo III - Noturno

1.ª Questão. (2 pontos) Encontre a solução da seguinte e.d.o.:

$$xy' - 3y = xy^5, \quad x > 0.$$

Resolução: Dividindo por x, obtemos uma equação de Bernoulli

$$y' - \frac{3}{x}y = y^5$$

com $p(x) = -\frac{3}{x}$, $q(x) = 1$ e $n = 5$. Fazendo a mudança de variável $v = y^{1-n} = y^{-4}$ reduzimos a equação à seguinte equação linear para v

$$v' + (1-n)p(x)v = (1-n)q(x) \text{ ou seja } v' + \frac{12}{x}v = -4. \qquad 0,5\,pontos$$

Calculamos o fator integrante

$$\mu(x) = \exp\Big(12\int \frac{1}{x}dx\Big) = \exp(12\ln x) = \exp(\ln x^{12}) = x^{12}. \qquad 0,5\,pontos$$

Multiplicamos a equação para v por x^{12} e reescrevemos como

$$\frac{d}{dx}(x^{12}v) = -4x^{12}.$$

Integramos

$$x^{12}v = \int -4x^{12}dx + c = -\frac{4}{13}x^{13} + c$$

e obtemos a solução geral

$$v = -\frac{4}{13}x + \frac{c}{x^{12}}. \qquad 0,7\,pontos$$

Também poderia ser utilizada a fórmula da solução geral $v = \frac{1}{\mu(x)}\Big[-4\int \mu(x)dx + c\Big]$.

Re-escrevendo a solução em termos de y obtemos a solução geral dada na forma implícita:

$$y^{-4} = -\frac{4}{13}x + \frac{c}{x^{12}}. \qquad 0,3\,pontos$$

2.ª Questão. (2 pontos) Encontre um fator integrante e resolva a equação:

$$(\frac{4x^3}{y^2} + \frac{3}{y}) + (\frac{3x}{y^2} + 4y)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad y > 0.$$

Resolução: Sendo $M(x,y) = \frac{4x^3}{y^2} + \frac{3}{y}$ e $N(x,y) = \frac{3x}{y^2} + 4y$, temos

$$M_y = -\frac{8x^3}{y^3} - \frac{3}{y^2} \text{ e } N_x = \frac{3}{y^2}.$$

Portanto, a equação não é exata. 0,5 pontos

Procuramos um fator integrante:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-\frac{8x^3}{y^3} - \frac{6}{y^2}}{\frac{3x}{y^2} + 4y} = \frac{\frac{-8x^3-6y}{y^3}}{\frac{3x+4y^3}{y^2}} = -\frac{2}{y}\frac{4x^3+3y}{3x+4y^3}$$

como depende de x e de y, não tem fator integrante dependendo de x. Agora,

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{\frac{8x^3}{y^3} + \frac{6}{y^2}}{\frac{4x^3}{y^2} + \frac{3}{y}} = \frac{\frac{8x^3+6y}{y^3}}{\frac{4x^3+3y}{y^2}} = \frac{2}{y}\frac{4x^3+3y^2}{4x^3+3y^2} = \frac{2}{y}$$

portanto tem um fator integrante dependendo de y dado pela solução da equação

$$\mu' = \frac{2}{y}\mu.$$

Notemos que a equação é separável:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2dy}{y}, \text{ integrando obtemos } \ln(\mu) = 2\ln y = \ln(y^2), \text{ assim } \mu(y) = y^2. \qquad 0,8\,pontos$$

Multiplicando a equação pelo fator integrante obtemos uma equação exata:

$$(4x^3 + 3y) + (3x + 4y^3)\frac{dy}{dx} = 0$$

Logo sabemos que existe $\psi(x, y)$ tal que $\psi_x = 4x^3 + 3y$ e $\psi_y = 3x + 4y^3$. Integrando $M(x, y)$ em relação a x e mantendo y constante, obtemos

$$\psi(x, y) = \int 4x^3 + 3ydx = x^4 + 3yx + h(y).$$

Assim,

$$\psi_y = 3x + h'(y) = 3x + 4y^3.$$

Então

$$h'(y) = 4y^3 \quad \text{e integrando} \quad h(y) = y^4.$$

Deste modo, a solução geral é dada implicitamente por

$$\psi(x, y) = x^4 + 3yx + y^4 = c. \qquad 0,7\,pontos$$

3.ª Questão (2 pontos) Considere a e.d.o.

$$y^{(4)} - y' = 2te^t + \cos t + 3t$$

- Encontre a solução da equação homogênea. Dica: $r^3 - 1 = (r - 1)(r^2 + r + 1)$.
- Usando o método de coeficientes indeterminados encontrar a forma da solução particular SEM calcular os coeficientes.

Resolução: A equação homogênea associada é $y^{(4)} - y' = 0$.

A equação característica é: $r^4 - r = r(r^3 - 1) = r(r - 1)(r^2 + r + 1)$.

Raízes: $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ para $(r^2 + r + 1) = 0$ temos as raízes complexas conjugadas: $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

O conjunto fundamental de soluções é: $y_1 = e^{0t} = 1$, $y_2 = e^t$, $y_3 = e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$ e $y_4 = e^{-\frac{t}{2}}\text{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$.

A solução geral da homogênea é:

$$y_h = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + c_4e^{-\frac{t}{2}}\text{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t). \qquad 1\,ponto$$

Como $g(t) = 2te^t + \cos t + 3t$ consideramos três problemas separadamente.

Consideremos primeiro a equação: $y^{(4)} - y' = 2te^t$. Como e^t é solução da homogênea, uma solução particular será da a forma $Y_1 = t(At + B)e^t$.

Consideremos agora a equação $y^{(4)} - y' = \cos t$. Uma solução particular terá a forma $Y_2 = C\cos t + D\text{sen}t$.

Consideremos a equação: $y^{(4)} - y' = 3t$. Como as constantes são soluções da homogênea, uma solução particular será da a forma $Y_3 = t(Et + F)$.

Uma solução particular para o problema todo terá a forma:

$$y_p = Y_1 + Y_2 + Y_3 = t(At + B)e^t + C\cos t + D\text{sen}t + t(Et + F). \qquad 1\,ponto$$

4.ª Questão.(2,0 pontos) Resolva a equação não homogênea abaixo via variação de parâmetros.

$$y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$$

Resolução: A equação homogênea associada é $y'' + 4y' + 4y = 0$.
A equação característica é: $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2$. Temos uma raiz $r = -2$ repetida.
O conjunto fundamental de soluções é: $y_1 = e^{-2x}$ e $y_2 = xe^{-2x}$. 0,8 pontos
Pelo método de variação dos parâmetros procuramos a solução geral na forma

$$y = u(x)y_1 + v(x)y_2 = u(x)e^{-2x} + v(x)xe^{-2x},$$

onde u' e v' satisfazem o sistema

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 &= 0, \\ u'y_1' + v'y_2' &= x^{-2}e^{-2x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'e^{-2x} + v'xe^{-2x} &= 0, \\ -2u'e^{-2x} + v'(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) &= x^{-2}e^{-2x}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u' + v'x &= 0, \\ -2u' + v'(1-2x) &= x^{-2}. \end{cases}$$

Calculamos o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{vmatrix} = 1 - 2x + 2x = 1.$$

Assim,

$$u' = \begin{vmatrix} 0 & x \\ x^{-2} & 1-2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} \Rightarrow u = -\ln|x| + c_1 \quad \text{e} \quad v' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & x^{-2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x} + c_2$$

Portanto a solução geral é:

$$y = u(x)e^{-2x} + v(x)xe^{-2x} = (-\ln|x| + c_1)e^{-2x} + (-\frac{1}{x} + c_2)xe^{-2x}. \qquad 1,2\,pontos$$

5.ª Questão.(2,0 pontos) Encontre a solução explícita da equação diferencial:

$$(1+x)y'' = y'$$

Resolução: Note que é uma equação de primeira ordem em y'. Fazemos $v = y'$ e re-escrevemos a equação em termos de v:

$$(1+x)v' = v, \qquad 0,5\,pontos$$

que é uma equação separável

$$\frac{1}{v}dv = \frac{1}{1+x}dx.$$

Integramos ambos os lados

$$\int \frac{1}{v}dv = \int \frac{1}{1+x}dx \;\Rightarrow\; \ln(|v|) = \ln(|1+x|) + c_1$$

$$\Rightarrow |v| = |1+x|c_2,\ (c_2 = e^{c_1}) \Rightarrow v = c_3(1+x),\ (c_3 = \pm c_2). \qquad 1\,ponto$$

Lembrando que $v = y'$, temos

$$y = \int c_3(1+x)dx = c_3(x + \frac{x^2}{2}) + c_4. \qquad 0,5\,pontos$$