EA721A - Princípios de Controle e Servomecanismos
Primeiro Semestre de 2010 - Prova 2 - Prof. Paulo Valente

RA: **Assinatura** (como no RG):
Nome Legível:

Antes de começar a resolver a prova, atente para o seguinte:

- **Resoluções**. Na resolução das questões a seguir é **absolutamente imprescindível** que todas as suas afirmações estejam devidamente justificadas.
- **Esboço do Lugar das Raízes**. O esboço deve incluir os pólos e zeros de malha aberta, as raízes sobre o eixo real e os pontos e direções associadas a $k = 0$ e $k \to \infty$. Determine ou mostre que não existem: assíntotas (ângulos e interseção), pontos de cruzamento com o eixo imaginário, pontos de entrada ou saída no eixo real, ângulos de partida de pólos (ou de chegada em zeros) complexos conjugados.

Questão 1 (*Lugar das Raízes*) Considere um sistema de controle com controlador $C(s) = (16s + \alpha)/(s + \alpha)$ em série com a planta $P(s) = 9/s^2$ e realimentação unitária. Esboce o Lugar das Raízes do sistema em malha fechada em função de $\alpha \in [0, \infty)$.

Dado: o Lugar das Raízes possui um ponto de entrada e um ponto de saída no eixo real localizados em $-10{,}2$ e $-3{,}5$, respectivamente.

Questão 2 (*Compensação via Resposta em Frequência*)

a) Os compensadores por avanço e atraso de fase podem ser utilizados para modificar a faixa de passagem do sistema compensado. Se uma menor faixa de passagem for requerida (para bloquear ruídos de alta frequência, por exemplo), qual tipo de compensador deverá ser utilizado? Justifique.

b) Num projeto de compensador atraso que vise aumentar a margem de fase do sistema, por que a frequência de corte do zero do compensador deve ser escolhida bastante menor do que a nova frequência de cruzamento com 0 dB? Justifique.

Questão 3 (*Controle por Realimentação de Estados*) Considere o sistema representado por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

a) Projete um compensador por realimentação de estados $u = -Kx$ de forma que os pólos dominantes do sistema em malha fechada apresentem $\xi = 0{,}5$ e $\omega_n = 10$ [rad/s];

b) Quanto deve valer ρ para que o erro de regime da saída à entrada $u = -Kx + \rho r$, onde K é o vetor de ganhos obtido no item a) e r é uma entrada constante, seja igual a zero?

Questão 4 (*Controle por Realimentação de Saída*) Considere a representação de um sistema linear invariante no tempo na forma de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx.$$

Uma alternativa ao controle por realimentação de estados $u = -Kx$ é a chamada *realimentação de saída*, quando o controle é definido por $u = ly$, onde l é um escalar a ser determinado. Considere a representação de estados da **Questão 3** e verifique se existe algum valor de l tal que

a) o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável;

b) os pólos de malha fechada sejam os mesmos alocados pela realimentação de estados.

Questão 5 (*Controle Digital*) Considere o sistema de controle amostrado representado na Figura 1. A planta a ser controlada é $P(s) = 1/s^2$. O período de amostragem do sistema é $T = 1[s]$. A referência é um degrau amostrado de amplitude r_0, isto é, $r(kT) = r_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Determine, se existir, o erro de regime do sistema amostrado nos seguintes casos:

a) $C(z) = 2$.

b) $C(z) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{z-1}{z}\right)$.

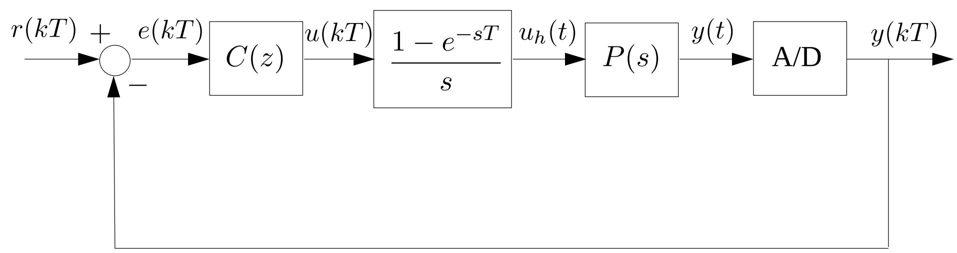

Figura 1: Sistema de controle amostrado.

Dados

1. **Teorema do Valor Final**. Quando o valor final existe

   - Sinais Contínuos: $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{s\to 0} sY(s)$;
   - Sinais Discretos: $\lim\limits_{k\to\infty} y(kT) = \lim\limits_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z)$.

2. **Lugar das Raízes**. Considere

$$1 + kG(s) = 1 + k\frac{N(s)}{D(s)} = 1 + k\frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = 0, \quad k > 0.$$

   (a) Magnitude e fase: $|kG(s)| = 1, \quad \angle G(s) = 180^o \times r, r = \pm 1, \pm 3, \ldots$.

   (b) Ângulos e Interseção de Assíntotas:

$$\theta = \frac{180^o r}{n - m}, r = \pm 1, \pm 3, \ldots, \quad \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m}.$$

   (c) Ângulos de partida e chegada: satisfazem

$$\sum_{j=1}^{m} \phi_{z_j} - \sum_{i=1}^{n} \phi_{p_i} = 180^o r, r = \pm 1, \pm 3, \ldots,$$

   onde ϕ_{z_j} (ϕ_{p_i}) são os ângulos entre os zeros (pólos) de $G(s)$ e o ponto de interesse.

   (d) Pontos de entrada e saída no eixo real: entre as raízes de $D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = 0$.

   (e) Pontos de cruzamento com o eixo imaginário devem ser determinados por meio do Critério de Routh-Hurwitz.

3. **Compensação Avanço**: $C(s) = k_c \alpha \dfrac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$, $T > 0$, $0 < \alpha < 1$

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}, \quad 20 \log \left| \frac{jT\omega + 1}{j\alpha T\omega + 1} \right|_{\omega = \omega_m} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

4. **Compensação Atraso**: $C(s) = k_c \beta \dfrac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$, $T > 0$, $\beta > 1$

$$20 \log \left| \frac{jT\omega + 1}{j\beta T\omega + 1} \right| = -20 \log \beta \qquad (\omega >> 1/T).$$

5. **Matrizes de Controlabilidade e Observabilidade**.

$$\mathcal{C} = \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right], \quad \mathcal{O} = \left[\begin{array}{c} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{array}\right]$$

6. **Controle por Realimentação de Estados com Ação Proporcional**

$$u = -Kx + k_1 r = -\widetilde{K}x + k_1(r - x_1), \quad y = x_1.$$

7. **Controle por Realimentação de Estados com Ação Integral**

$$u = -Kx + K_I\xi, \quad \left[\begin{array}{c} \dot{x} \\ \\ \dot{\xi} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} A - BK & BK_I \\ \\ -C & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \\ \xi \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \\ 1 \end{array}\right] r.$$

8. **Pares de Transformadas**

$F(s)$	$f(t)$	$F(z)$
1	Impulso Unitário, $\delta(t)$	1
$\frac{1}{s}$	Degrau Unitário, $1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$