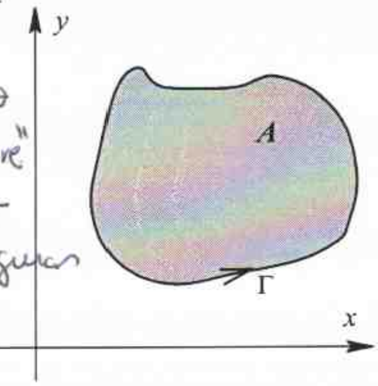
Nome: GABARITO R.A.:

Métodos Matemáticos I **Exame Final** (7/07/2008)

(Justifique todas suas respostas e boas férias!)

1. (2 Pontos) Considere uma figura conexa plana A delimitada por uma curva orientada Γ como a representada abaixo. Mostre como calcular a área de A a partir de uma integral de linha ao longo de sua fronteira Γ.

OBS. Alguns calcularam a área usando o produto vetorial: $da = \frac{1}{2}|\vec{R}\times d\vec{s}|$. Isto supõe, no entanto, que o vetor $\vec{R}$ que "varre" a figura esteja contido nela, o que não ocorre sempre para figuras não-convexas!



Teorema de Stokes

$$\int_A (\text{rot}\,\vec{v})\cdot d\vec{a} = \oint_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}$$

$d\vec{a} = dx\,dy\,\hat{k}$

Basta encontrar um campo $\vec{v}$ tal que $\text{rot}\,\vec{v} = \hat{k}$.

Ex.: $\vec{v} = -y\hat{i}$, $\vec{v} = +x\hat{j}$, ou $\vec{v} = \frac{1}{2}(x\hat{j} - y\hat{i})$

2. Considere a seguinte equação do tipo Euler-Cauchy :

$$\mathcal{L}(y(x)) = x^2y''(x) + 2xy_n'(x) + \left(\frac{1}{4} + \pi^2\right) y(x) = 0.$$

   (a) (1.0 Ponto) Encontre suas duas soluções linearmente independentes e esboce-as.

   (b) (1.0 Ponto) Encontre a função de Green relevante para a equação acima com as condições de contorno $y(1) = y(\sqrt{e}) = 0$.

   (c) (1.0 Ponto) Encontre a solução da equação não homogênea $\mathcal{L}(y(x)) = 1/\sqrt{x}$, com as mesmas condições de contorno $y(1) = y(\sqrt{e}) = 0$.

3. (1.15.10 - 2 Pontos) Prove que

Falta o Módulo!! Ninguém foi prejudicado.

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0),$$

sendo $f(x_0) = 0$. (Admita f suave e com derivada não nula).

$f \to$ suave e $f' \neq 0$,

$f(x_0) = 0$ único zero de f

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\delta(f(x))\,dx = \int_{x_0-\varepsilon_1}^{x_0+\varepsilon_1} g(x)\,\delta(f(x))\,dx$$

fazendo-se $f(x) = y$, $dy = f'\,dx$ a integral fica

$$\int_{-\varepsilon_1 f'(x_0)}^{\varepsilon_1 f'(x_0)} g(y)\,\delta(y)\,\frac{dy}{f'(y)} = \left(\frac{g}{|f'|}\right)_{y=0} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\frac{\delta(x-x_0)}{f'(x_0)}\,dx$$

4. (2 Pontos) Resolva o seguinte problema de Sturm-Liouville:

$$y_n''(x) + y_n'(x) = \lambda_n y_n(x), \quad y_n(0) = y_n(1) = 0,$$

e determine o produto interno do espaço de suas auto-funções.

5. (2 Pontos) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação

$$2x^2y''(x) - xy'(x) + (x + 1)y(x) = 0$$

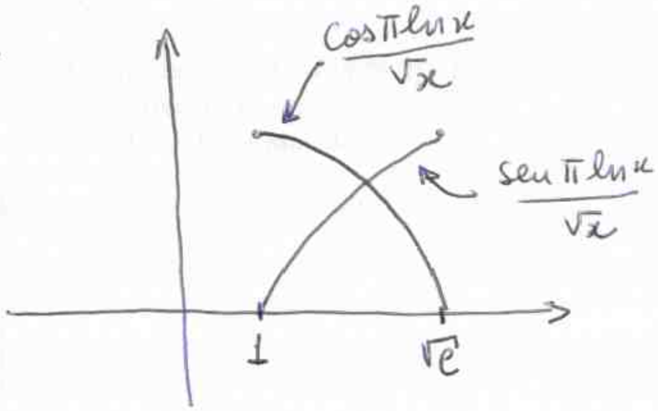
e resolva-a usando o método de Frobenius em torno desse ponto.

Resolvido na página 46 das notas do prof. Jayme.

② $x^2y'' + 2xy' + \left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)y = 0$

$$y = Ax^k \Rightarrow k(k-1) + 2k + \left(\frac{1}{4}+\pi^2\right) = 0 \quad k = \frac{1 \pm 2i\pi}{2}$$

$$y = A_1 \underbrace{\frac{\cos\pi \ln x}{\sqrt{x}}}_{y_2} + B_1 \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\pi \ln x}{\sqrt{x}}}_{y_1}$$



$$y_1(1) = 0, \quad y_2(\sqrt{e}) = 0$$

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = \overset{A}{-\frac{\pi}{x^2}}$$

$$G(x,x') = -\frac{1}{\pi}\begin{cases} \dfrac{\cos\pi\ln x'}{\sqrt{x'}}\,\dfrac{\operatorname{sen}\pi\ln x}{\sqrt{x}} & x < x' \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}\pi\ln x'}{\sqrt{x'}}\,\dfrac{\cos\pi\ln x}{\sqrt{x}} & x \geq x' \end{cases}$$

Soluçaõ da homógenea:

$$y(x) = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{G(x,x')}{\sqrt{x'}}\,dx' = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\pi\ln x}{\sqrt{x}}\int_1^x \operatorname{sen}\pi\ln x'\frac{dx'}{x'} + \frac{\operatorname{sen}\pi\ln x}{\sqrt{x}}\int_x^{\sqrt{e}} \cos\pi\ln x'\frac{dx'}{x'}\right)$$

fazendo-se a substituição $\ln x' = y$

as integrais ficam: $\displaystyle\int_0^{\ln x} \operatorname{sen}\pi y\,dy = \frac{1}{\pi} - \frac{\cos\pi\ln x}{\pi}$

$$\int_{\ln x}^{1/2} \cos\pi y\,dy = \frac{1}{\pi} - \frac{\operatorname{sen}\pi\ln x}{\pi},$$

o que dá, finalmente, $y(x) = -\dfrac{1}{\pi^2}\left[\dfrac{\cos\pi\ln x + \operatorname{sen}\pi\ln x - 1}{\sqrt{x}}\right]$

4) $y_n''(x) + y_n'(x) = \lambda_n y_n(x) \quad y_n(0) = y_n(1) = 0$

forma auto-adjunta: $\frac{d}{dx}\left[e^x \frac{d}{dx} y_n\right] = \lambda_n \underset{\sim}{e^x} y_n(x)$
$\mapsto$ função peso.

Solução da forma:

$y = Ae^{kx}$

produto interno:

$$(y_n, y_m) = \int_0^1 e^x y_n y_m \, dx$$

Eq. característica:

$$k^2 + k + \lambda_n = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}$$

Caso 1 $\quad 1 + 4\lambda > 0$.

Solução geral $y = Ae^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}x} + Be^{-\frac{1}{2}-\sqrt{1+4\lambda}\,x}$

Condição de contorno: $y(0) = y(1) = 0 \Rightarrow A = B = 0$.
Solução trivial

Caso 2 $\quad 1 + 4\lambda = 0$

Solução geral $y = Ae^{-x/2} + Bxe^{-x/2}$
$\hookrightarrow$ obtida por variação de parâmetro, Wronskiano...

Condição de contorno $y(0) = y(1) = 0 \Rightarrow$ solução trivial.

Caso 3 $\quad 1 + 4\lambda = -w^2 < 0$

Solução geral: $y = e^{-\frac{x}{2}}\left[A\cos wx + B\,\mathrm{sen}\,wx\right]$

Condição de contorno: $y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$
$y(1) = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,w = 0$
$w = n\pi$

Solução do problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} \lambda_n = -\frac{1}{4}\left(1 + n^2\pi^2\right) \\ y_n = e^{-x/2}\,\mathrm{sen}\,n\pi x \end{cases}$$