ME 210 – PROBABILIDADE I | PROVA SUBSTITUTIVA – 28/06/2012

PROF. ÉLCIO LEBENSZTAYN

Nome completo: ______________________________ **RA:** ____________

Instruções:

1. Preencha o seu nome completo e RA em todas as folhas da prova.
2. Desligue ou desative os seus equipamentos eletrônicos.
3. A prova é individual, sem consulta, com duração de 2 horas.
4. A prova pode ser feita a lápis, e é permitido o uso de calculadora.
5. Justifique adequadamente as questões, deixando claras as respostas.
6. Todas as questões têm o mesmo valor.

Distribuição de X	$p_X(x)$ ou $f_X(x)$	$E(X)$	Var(X)
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$	λ	λ
Geométrica(p)	$p(1-p)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Bin. Negativa(r, p)	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$, $x = r, r+1, \ldots$	r/p	$r(1-p)/p^2$
Hipergeom.(n, R, N), $p = R/N$	$\binom{R}{x}\binom{N-R}{n-x}\binom{N}{n}^{-1}$	np	$\left(\frac{N-n}{N-1}\right) np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$(b-a)^{-1}$, $a < x < b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Normal(μ, σ^2)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

z	0,00	0,05	0,11	0,16	0,22	0,27	0,33	0,38
$\Phi(z)$	0,5	0,5199	0,5438	0,5636	0,5871	0,6064	0,6293	0,648
z	0,44	0,50	0,56	0,63	0,69	0,76	0,84	0,91
$\Phi(z)$	0,67	0,6915	0,7123	0,7357	0,7549	0,7764	0,7995	0,8186
z	1,00	1,09	1,19	1,31	1,42	1,62	1,86	2,33
$\Phi(z)$	0,8413	0,8621	0,883	0,9049	0,9222	0,9474	0,9686	0,9901

Valores de $\Phi(z) = P(Z \le z)$, onde $Z \sim N(0, 1)$.

Nome completo: ______________________________ **RA:** __________

1. Um cliente que visita o departamento de roupas masculinas de uma loja compra um terno com probabilidade 2/5, uma gravata com probabilidade 5/12 e uma camisa com probabilidade 1/2. O cliente compra um terno e uma gravata com probabilidade 2/15, um terno e uma camisa com probabilidade 17/60 e uma gravata e uma camisa com probabilidade 1/4; compra os três itens com probabilidade 1/12.

(a) Qual a probabilidade de que o cliente não compre nenhum dos itens?

(b) Dado que o cliente não vai comprar uma gravata, qual a probabilidade condicional de que compre um terno?

a) $P(T) = 2/5$, $P(G) = 5/12$, $P(C) = 1/2$

$P(T \cap G) = 2/15$, $P(T \cap C) = 17/60$, $P(G \cap C) = 1/4$

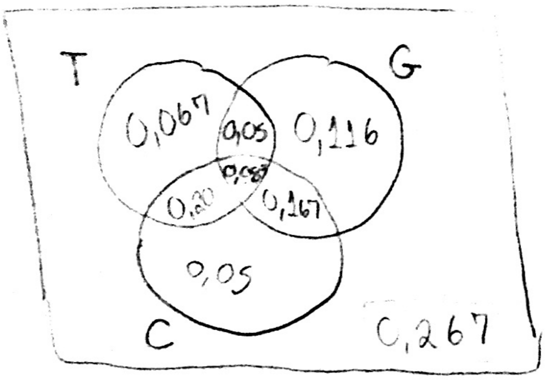
$P(T \cap C \cap G) = 1/12$

$P(T^c \cap C^c \cap G^c) = 1 - P(T \cup C \cup G) = 1 - 0{,}733 = 0{,}267$

independentes $P(T \cup C \cup G) = P(T) + P(G) + P(C) - P(T \cap G) - P(T \cap C) - P(G \cap C) + P(T \cap G \cap C)$

$= \frac{2}{5} + \frac{5}{12} + \frac{1}{2} - \frac{2}{15} - \frac{17}{60} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$

$= 0{,}733$



b) $P(T \mid G^c) = \frac{P(T \cap G^c)}{P(G^c)} = \frac{0{,}067 + 0{,}2}{0{,}583} = 0{,}457$

$P(G^c) = 1 - P(G) = 1 - 5/12 = 0{,}583$

$P(T \cap G^c) = P(T) - P(T \cap G)$ $\quad P(T) = P(T \cap G) + P(T \cap G^c)$

$= 2/5 - 2/15 = 0{,}266$

$P(T^c \cap C^c \cap G^c) = 1 - P(T \cup C \cup G)$

$P(T \cup C \cup G) = P(T) + P(C) + P(G) - P(T \cap C) - P(T \cap G) - P(G \cap C) + P(T \cap C \cap G)$

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $\quad P(A) + P(A^c) = 1$ $\quad P(T \cap G^c) = P(T) - P(T \cap G)$

Inferior

Nome completo: ____________________ **RA:** __________

2. A nota de um estudante em um exame vestibular é uma variável aleatória com distribuição normal com média 72 e desvio padrão 7,5. Desejamos obter as notas de corte c_1 e c_2 (com $c_1 < c_2$) que dividem os vestibulandos em três categorias:

Categoria	Nota
A	Superior a c_2
B	Entre c_1 e c_2
C	Inferior a c_1

0,2
0,6
0,2

Os valores de c_1 e c_2 são obtidos de forma que as categorias A, B e C correspondam respectivamente a 20%, 60% e 20% da população de estudantes que fazem o vestibular.

(a) Determine os valores de c_1 e c_2.

(b) Uma amostra aleatória de 9 provas é selecionada. Calcule a probabilidade de que a amostra seja formada por exatamente 3 estudantes de cada categoria.

a) $N(\mu, \sigma)$ $E(X) = \mu$ $Var(X) = \sigma^2$ X: a nota $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$E(X) = \mu = 72$ $Var(X) = \sigma^2 = (7,5)^2$

$P(X > c_2) = 0,2$ $P(X < c_1) = 0,2$

$$P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{c_2-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{c_2-72}{(7,5)}\right) = 0,2$$

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$, onde $Z \sim N(0,1)$

$\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$

$P(Z > z) = P(Z < -z)$

$\Phi(-z)$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{c_2-72}{7,5}\right) = 0,2$$

$$P\left(Z < \frac{c_2-72}{7,5}\right) = 0,8$$

$$\frac{c_2-72}{7,5} = 0,84$$

$c_2 = 78,3$

$P(X < c_1) = 0,2$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{c_1-\mu}{\sigma}\right) = 0,2$$

$$P\left(Z < \frac{c_1-\mu}{\sigma}\right) = 0,2$$

$$\frac{c_1-\mu}{\sigma} = -0,84$$

$\Phi(Z) = 0,2$

$\Phi(-Z) = 0,8$

$c_1 = 65,7$

$-z = 0,84$

Nome completo: ______________________ RA: ____________

3. Seja X uma variável aleatória contínua com densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule a média e a variância da variável aleatória $W = 10X - 8$.

(b) Encontre a densidade da variável aleatória $Y = -\log X$.

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$

a) $W = 10X - 8$

$E(W) = 10E(X) - 8 = 10\frac{4}{5} - 8 = 0$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 4x^3 dx = 4 \cdot \int_0^1 x^4 dx = 4 \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^1$

$= \frac{4}{5}$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$Var(W) = V(10X - 8) = 10^2\, Var(X) \cdot 10^2\, 0{,}026 = 2{,}67$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{3} - [\frac{4}{5}]^2 = 0{,}0266$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot 4x^3 dx = 4\int_0^1 x^5 dx = \frac{4x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}x^6\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

b) $Y = -\log X$

$-Y = \log X$

$e = e$

$e^{-y} = x$

$\frac{dx}{dy} = -e^{-y}$

$f(x) = 4x^3$

$f(x(y)) = 4\, e^{-3y}$

$g(y) = f(x(y)) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$

$g(y) = 4\, e^{-3y} \cdot e^{-y}$

$g(y) = 4e^{-4y}$ para $y > 0$

Exponencial (4)

$Y \sim Exp(4)$ $\lambda = 4$

$g(y) = f(x(y)) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$

Conferir

Nome completo: ______________________________ **RA:** ______________

4. Uma fábrica utiliza dois métodos para a produção de lâmpadas: 70% delas são produzidas pelo método A e o resto pelo método B. A duração em horas de uma lâmpada tem distribuição exponencial com ***média*** igual a 800 ou 1000, conforme se utilize o método A ou o B.

(a) Escolhe-se ao acaso uma lâmpada da produção. Dado que essa lâmpada durou mais de 900 horas, qual a probabilidade condicional de que tenha sido produzida pelo método A?

(b) Seleciona-se uma amostra aleatória de 10 lâmpadas. Calcule a probabilidade de que pelo menos duas delas funcionem mais de 900 horas.

método A - 0,7 → $\lambda = 1/800$

método B - 0,3 → $\lambda = 1/1000$ $\quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0$

duração em horas distribuição exponencial com média igual a 800 (A) e 1000 (B)

$E(X) = 1/\lambda$

a) $P(A \mid X>900) = \dfrac{P(A \cap X>900)}{P(X>900)} = \dfrac{0{,}7 e^{-9/8}}{0{,}7 . e^{-9/8} + 0{,}3 . e^{-9/8}} = 0{,}7$

$P(X>900) = 0{,}7 . P(X>900 \mid A) + 0{,}3 P(X>900 \mid B) = 0{,}7 . e^{-9/8} + 0{,}3 e^{-9/8}$

$P(X>900 \mid A) = \int_{900}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{900}^{\infty} \frac{1}{800} e^{-x/800}\,dx = e^{-9/8}$

b) $n = 10$ lâmpadas $\quad p = 0{,}7 \ (X>900)$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - (0{,}3)^{10} - (7(0{,}3)^9)$

Binomial $(n, p) = (10, 0{,}7)$ $\quad = 1 - (0{,}3)^{10}(8)$

$= 0{,}999$

$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$P(X=0) = \binom{10}{0} (0{,}7)^0 . (1-0{,}7)^{10-0} = 0{,}3^{10}$

$P(X=1) = \binom{10}{1} . (0{,}7)^1 . (1-0{,}7)^{10-1} = 10 . 0{,}7 (0{,}3)^9$

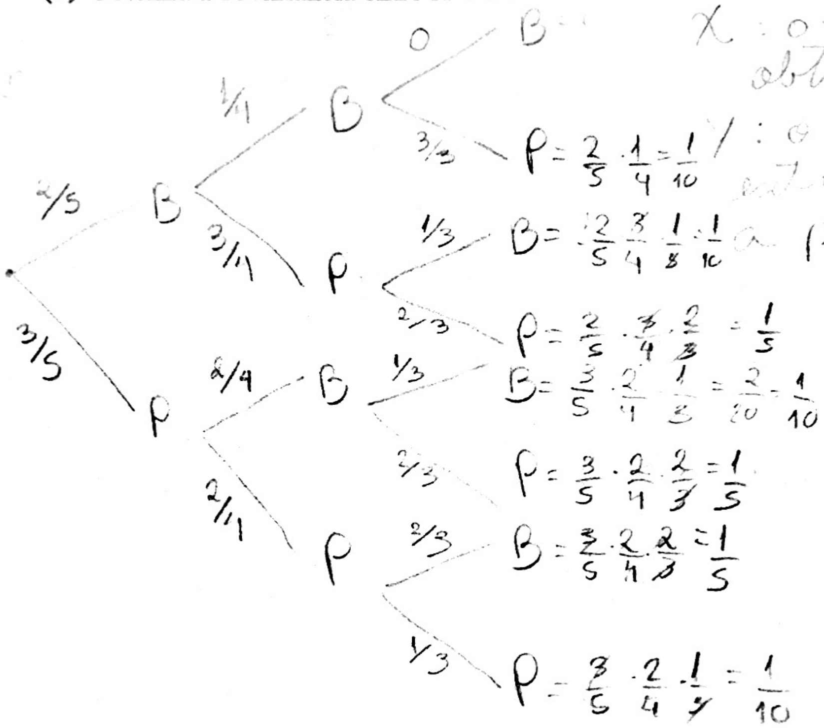
Nome completo: ______________________________ **RA:** ______________

5. Uma urna contém três bolas pretas e duas bolas brancas. Realizam-se três extrações, sem reposição. Sejam X o número de bolas pretas obtidas e Y o número de bolas brancas extraídas antes de obter a primeira bola preta.

3P 2B

(a) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y, bem como as marginais. São X e Y independentes?

(b) Obtenha a covariância entre X e Y.



X: o nº de bolas pretas obtidas

Y: o nº de bolas brancas extraídas antes de obter a primeira bola preta.

$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 2\frac{1}{5}$

a)

X \ Y	0	1	2	P(X)
1	1/10	1/10	1/10	3/10
2	2/5	1/5	0	3/5 = 6/10
3	1/10	0	0	1/10
$P_Y(Y)$	6/10	3/10	1/10	1

Funções de prob marginais

$P_X(x) = \sum_y p(x,y),\ x \in \mathbb{R}$

$P_Y(Y) = \sum_x p(x,y)$

$P[X=1, Y=0] =$

Independência

$\boxed{P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)}$

$P(X=1, Y=1) \overset{?}{=} P(X=1) \cdot P(Y=1)$

$\frac{1}{10} \neq \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10}$

Não são independentes

b) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= \frac{7}{10} - \frac{18}{10} \cdot \frac{5}{10} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$

$E(XY) = \sum_x \sum_y xy \cdot P(X=x, Y=y)$

$= 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$

$E(X) = \sum_x x\, P(X=x, Y) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{6}{10} + 3 \frac{1}{10} = \frac{18}{10}$

$E(Y) = \sum_y y\, P(X, Y=y) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$