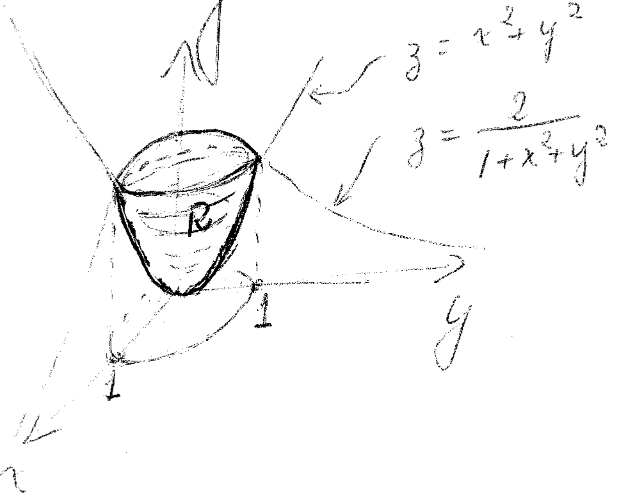
Gabarito 3ª prova

1



volume do "sorvete"

a) calculo de $x^2+y^2 = \frac{2}{x^2+y^2+1}$ para descobrir o raio do círculo no plano xy.

$z = \frac{2}{1+z} \iff z^2+z-2=0 \iff z' = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow z' = \begin{cases}1\\-2\end{cases}$

como $z>0$ escolhemos $z'=1$. 0,5 se encontrou o raio do círculo

b) O círculo no plano xy é definido por $x^2+y^2=1$.

c) Calculo da integral tripla em coordenadas cilíndricas. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$ com $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $r^2 \le z \le \frac{1}{1+r^2}$

até aqui 1,0 se viu coord. cilíndricas

$$\iiint_R dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{\frac{2}{1+r^2}} r\,dz\,d\theta\,dr =$$

até aqui 2,00 montou a integral corretamente

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r\,z\Big|_{r^2}^{\frac{2}{1+r^2}}\right) d\theta\,dr = 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{1+r^2} - r^3\right) d\theta\,dr =$$

$$= 2\times 2\pi\left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}dr - \int_0^1 r^3 dr\right) = 2\times 2\pi\left[\left(\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1\right) - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right] =$$

$$= 2\times 2\pi\left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi\ln 2 - \frac{2\pi}{4\cdot 2}$$ 2,5

1,0

2) $x = u^2 - v^2$ e $y = u^2 + v^2$

a) $$\text{jacobiano} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 4uv + 4uv = 8uv$$

1,0

2,0

b) Massa do arame $= \int_C \rho(x,y,z)\,ds$ formula da massa

onde $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = t^2 + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t.$ 0,5

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\,dt = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,dt$$

+ 0,5 pelo ds

logo

$$m = \int_0^{2\pi} (t^2+1)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} + t\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

+ 0,5 montou a $\int$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{8\pi^3}{3} + 2\pi\right) = \frac{8\sqrt{2}\pi^3}{3} - 2\sqrt{2}\pi$$

2,0 resultado correto.

(3) Seja D a região delimitada por C.
Então pelo Teorema de Green:

$$A(D) = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

0,5 por uma das formulas.

Calculemos: $\oint_C x\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x(t)\,y'(t)\,dt$.

+0,5 pela integral correta

Temos que $x(t) = t^2$ e $y(t) = \frac{t^3}{3} - t$,
assim $y'(t) = \cancel{t}\,t^2 - 1$.

logo $$\oint_C x\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2(t^2-1)\,dt$$

até essa integral 1,5

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^4 - t^2)\,dt$$

$$= \left.\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^5}{5} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3} - \left(\frac{(-\sqrt{3})^5}{5} - \frac{(-\sqrt{3})^3}{3}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^5}{5} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3} - \left(-\frac{(\sqrt{3})^5}{5} + \frac{(\sqrt{3})^3}{3}\right)$$

$$= 2\frac{(\sqrt{3})^5}{5} - 2\frac{(\sqrt{3})^3}{3} = \frac{18}{5}\sqrt{3} - \frac{6}{3}\sqrt{3}$$

$$= \left(\frac{18}{5} - 2\right)\sqrt{3} = \frac{8}{5}\sqrt{3}.$$

Portanto $A(D) = \frac{8}{5}\sqrt{3}$. 2,00 se fez as contas corretas.

1

(4) a) Temos que $F=(P,Q)$ onde $P(x,y)= e^{-y}-2x$

e $Q(x,y)=-x e^{-y}+ \operatorname{sen} y$

Sabemos que F é gradiente $\Leftrightarrow$ $P_y = Q_x$

Calculemos P_y e Q_x: $P_y = -e^{-y}$ e $Q_x = -e^{-y}$.

0,5 com a verificação

logo $\exists$ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F = (P,Q)$,

ou seja $f_x = e^{-y}-2x$ e $f_y=-x e^{-y}-\operatorname{sen} y$.

Integrando $f_x \Rightarrow f(x,y)= x e^{-y}-x^2+g(y)$

até aqui 1,0

Assim $f_y = -x e^{-y}+g'(y) = -x e^{-y}-\operatorname{sen} y$

Então $g'(y)=-\operatorname{sen} y \Rightarrow g(y) = \cos y + c$

Portanto $f(x,y)= x e^{-y}-x^2+\cos y + c$ +0,3

1 1 b) Podemos escrever $\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C F \cdot d\vec{r}$

onde $F = (P, Q) = (y, x)$. logo $P_y = 1 = Q_x$.

Portanto F é gradiente, ou seja, $\exists\, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

tal que $F = \nabla f$. + 0,6

Seja $r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma parametrização p/ C.

como C é fechada temos que $r(b) = r(a)$.

Agora $\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(r(b)) - f(r(a))$

$= 0$. + 0,6