Soluções para MS550, Métodos de Matemática Aplicada I, e F520, Métodos Matemáticos da Física I

Lista 2 - Solução de EDO

O Teorema de Frobenius será útil na resolução das questões e por isso vamos enunciá-lo:

Seja $x_0 = 0$ um ponto singular regular da equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Seja ρ o menor dos raios de convergência das séries

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Seja ainda a equação indicial

$$F(r) = r\,(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

com raízes r_1 e r_2 com $r_1 \geq r_2$ no caso de raízes reais. Então em cada um dos intervalos $-\rho < x < 0$ e $0 < x < \rho$ a equação tem uma solução $y_1(x)$ da forma

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right).$$

Além disso, temos também uma segunda solução LI $y_2(x)$ de acordo com os casos:

1. Se $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$ temos

$$y_x(x) = |x|^{r_2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right).$$

2. Se $r_1 - r_2 = 0$ temos

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_2)x^n.$$

3. Se $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$ temos

$$y_2(x) = k y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_2)x^n.$$

onde a constante k pode ser nula. Os coeficientes $a_n(r_1)$, $a_n(r_2)$, $b_n(r_2)$, $c_n(r_2)$ e a constante k são determinados substituindo as séries em questão na equação. Além disso, as séries são convergentes em $-\rho < x < \rho$, de modo que as eventuais singularidades das soluções devem-se ao termo $|x|^r$ e $\ln|x|$, ou seja, podemos ter pólos ou pontos de ramificação.

Resolva as equações diferenciais abaixo utilizando séries (use $x_0 = 0$ exceto quando indicado).

1. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - 1/4\right)y = 0.$

Reportar erros para
r.gaia.cs@gmail.com

Solução: *Manipulando a equação temos*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)x^2 = 0.$$

Verificamos que $p(x) = \frac{1}{x}$ *e* $q(x) = \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)$ *não são analíticas em* $x_0 = 0$ *mas* $xp(x)$ *e* $x^2q(x)$ *são. Logo,* x_0 *é ponto singular regular.*

Então a solução por série é do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Consequentemente

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo a solução na equação temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) + (n+r)) - \frac{1}{4}\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0$$
$$\left[r(r-1) + r - \frac{1}{4}\right] a_0 x^r + \left[r(r+1) + r + 1 - \frac{1}{4}\right] a_1 x^{r+1}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+r)^2 - \frac{1}{4}\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0.$$

Como $x \neq 0$*, temos*

$$\begin{cases} \left[r(r-1) + r - \frac{1}{4}\right] a_0 = 0 \\ \left[(r+1)^2 - \frac{1}{4}\right] a_1 = 0 \\ \left[(n+r)^2 - \frac{1}{4}\right] a_n + a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Para $a_0 \neq 0$ *temos que* $r(r-1) + r - \frac{1}{4} = 0$ *e portanto* $r_1 = \frac{1}{2}$ *e* $r_2 = -\frac{1}{2}$.

Para $r = r_1 = \frac{1}{2}$*, temos*

$$\left[\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 - \frac{1}{4}\right] a_1 = 0$$
$$a_1 = 0$$

e

$$\left[\left(\frac{1}{2} + n\right)^2 - \frac{1}{4}\right] a_n + a_{n-2} = 0$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n\,(n+1)},\ n = 2, 3, \ldots$$

Logo, a relação de recorrência é expressa por

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k\,a_0}{(2k-1)!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

e a solução y_1 assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_1\,(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,a_0 x^{2n+1/2}}{(2n+1)!} \\ &= x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)\,a_0 x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x^{-1/2} \sin x. \end{aligned}$$

Para $r = r_2 = -1/2$, temos

$$\begin{aligned} \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] a_1 &= 0 \\ 0a_1 &= 0 \qquad\qquad a_1 \text{ é livre} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left[\left(n-\frac{1}{2}^2-\frac{1}{4}\right)\right] a_n + a_{n-2} &= 0 \\ \left(n^2-n\right) a_n + a_{n-2} &= 0 \\ a_n &= \frac{-a_{n-2}}{n(n-1)}, n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Logo, a relação de recorrência é expressa por

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!}, k = 0, 1, 2, \ldots \\ a_{2k+1} &= \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!}, k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

e a solução assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n-1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1-1/2} \\ &= x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0 x^{2n}}{(2n)!} + x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_1 x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x^{-1/2} \sin x + x^{-1/2} \cos x. \end{aligned}$$

E por último a solução geral é

$$y(x) = x^{-1/2}\,(\sin x + \cos x)\,.$$

2. $x\,(1-x)\,y''-3y'+2y=0.$

Solução: *Manipulando a equação temos*

$$y''-\frac{3}{x\,(1-x)}y'+\frac{2}{x\,(1-x)}y=0.$$

Verificamos que $p(x)=\frac{-3}{x(1-x)}$ *e* $q(x)=\frac{2}{1(1-x)}$ *não são anaíliticas em* $x_0=0$ *mas* $xp(x)$ *e* $x^2q(x)$ *são. Logo,* x_0 *é ponto singular regular.*

Então a solução é do tipo

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}y'(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,a_nx^{n+r-1}\\ y''(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,(n+r-1)\,a_nx^{n+r-2}.\end{aligned}$$

Substituindo a solução na equação temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,(n+r-1)\,a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,(n+r-1)\,a_nx^{n+r}$$
$$-3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,a_nx^{n+r-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,(n+r-1)\,a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)\,(n+r-2)\,a_{n+1}x^{n+r-1}$$
$$-3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,a_nx^{n+r-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+r-1}=0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,(n+r-4)\,a_nx^{n+r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}[2-(n+r-1)\,(n+r-2)]\,a_{n-1}x^{n+r-1}=0$$
$$r\,(r-4)\,a_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)\,(n+r-4)\,a_nx^{n+r-1}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}[2-(n+r-1)\,(n+r-2)]\,a_{n-1}x^{n+r-1}=0.$$

Como $x\neq 0$*, como equação indicial*

$$r\,(r-4)\,a_0=0,\ \ a_0\neq 0$$

e como relação de recorrência

$$a_n=\frac{(n+r-1)\,(n+r-2)-2}{(n+r)\,(n+r-4)}a_{n-1},\ \ n=1,2,3,\ldots.$$

Pela equação indicial obtemos $r_1 = 0$ e $r_2 = 4$.

Para $r = r_1 = 0$, temos

$$a_n = \frac{(n-1)(n-2) - 2}{n(n-4)} a_{n-1}$$

que não está definida para $n \geq 4$. Logo, para $1 \leq n \leq 3$ temos

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-2}{-3} a_0 = \frac{2}{3} a_0, \\ a_2 &= \frac{-2}{2(-2)} a_1 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{3} a_0, \\ a_3 &= \frac{(2)(1) - 2}{3(-1)} a_2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ &= a_0 + \frac{2}{3} a_0 x + \frac{1}{3} a_0 x^3 + 0 \\ &= x^2 + 2x + 3. \end{aligned}$$

Para $r = r_2 = 4$, temos

$$a + n = \frac{(n+3)(n+2) - 2}{(n+4)n} a_{n-1} = \frac{(n+4)(n+1)}{n(n+4)} a_{n-1} = \frac{n+1}{n} a_{n-1}.$$

Logo, a relação de recorrência é expressa por

$$a_n = (n+1) a_0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_0 x^{n+4} \\ &= x^4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_0 x^n \\ &= \frac{x^4}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

3. $xy'' + y' = 0$.

Solução: *Manipulando a equação temos*

$$y11 + \frac{1}{x} y' = 0.$$

Verificamos que $q(x) = \frac{1}{x}$ *não é analítica em* $x_0 = 0$ *mas* $xp(x) = x$ *e* $x^2 q(x)$ *são. Logo,* x_0 *é ponto singular regular.*

Então a solução por série é da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Consequentemente

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1)\, a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo a solução na equação temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1)\, a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1} = 0.$$

Como $x \neq 0$*, temos como equação indicial*

$$r^2 a_0 = 0,\ a_0 \neq 0$$

e como relação de recorrência

$$(n+r)^2\, a_n = 0.$$

Pela equação indicial obtemos $r_1 = r_2 = 0$*.*

Para $r = r_1 = r_2 = 0$*, temos*

$$y_1(x) = a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 x^0 = a_0.$$

Pelo Método de Frobenius,

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Portanto, temos

$$y_2 = \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$
$$y_2' = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1},$$
$$y_2'' = -\frac{1}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\, b_n x^{n-2}.$$

Substituindo a segunda solução na equação inicial, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n\left(n-1\right)b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} &= 0\\ \sum_{n=0}^{\infty} n\left(n-1+1\right)b_n x^{n-1} &= 0\\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n x^{n-1} &= 0.\end{aligned}$$

Como $x \neq 0$, temos que $b_n = 0$ e $y_2(x) = \ln x$.

4. $x^4 y'' + 2x^3 y' - w^2 y = 0$, $x_0 = +\infty$.

$\mathrm{y}_{\overline{\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{x^4}\mathrm{d}}}{}^{2}\ \mathrm{y}_{\overline{\mathrm{d}z^2.}}$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\left(\frac{-1}{x^2}\right), \mathrm{d}^2$

$\overline{\mathrm{d}x^2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{-1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right]=\frac{2}{x^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+\mathrm{d}}{}^{2}\ \mathrm{y}_{\overline{\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\mathrm{d}}}{}^{2}\ \mathrm{y}_{\overline{\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{x^4}\mathrm{d}}}{}^{2}\ \mathrm{y}_{\overline{\mathrm{d}z^2.}}$

Efetuando a mudança de variável temos

$$\overline{\mathrm{d}z^2 + \tfrac{2}{z^3}\left(-z^2\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right) - w^2 z = 0}$$

$\mathrm{d}^2\ \mathrm{y}_{\overline{\mathrm{d}z^2-w^2y=0.}}$

$\mathrm{y}\frac{1}{z^4}\left(2z^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} + z^4\mathrm{d}^2\right.$

$\overline{\mathrm{d}z^2+\frac{2}{z^3}\left(-z^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)-w^2z=0\mathrm{d}}{}^{2}\ \mathrm{y}_{\overline{\mathrm{d}z^2-w^2y=0.}}$

Então a solução é da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},\\ y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n z^{n-2}.\end{aligned}$$

Substituindo a solução na equação temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}z^n - \sum_{n=0}^{\infty} w^2 a_n z^n = 0.$$

Como $z \neq 0$, temos
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - w^2 a_n = 0.$$
Logo, a relação de recorrência é
$$a_{n+2} = \frac{w^2 a_n}{(n+2)(n+1)},\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$
Concluimos que
$$a_{2k} = \frac{w^{2k} a_0}{(2k)!},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$a_{2k+1} = \frac{w^{2k-1} a_1}{(2k+1)!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$
e a solução é
$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}.$$
Como $z = \frac{1}{x}$, temos
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{-2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{-(2n+1)},$$
$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n} a_0 x^{-2n}}{(2n)!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_0 w^{4n}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(wx)^{-2n}}{(2n)!},$$
$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n-1} a_1 x^{-(2n+1)}}{(2n+1)!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_1 w^{4n}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(wx)^{-(2n-1)}}{(2n+1)!}.$$

$y'' + xy' + y = 0.$

Solução: *Inicialmente verificamos que $p(x) = 1$ e $q(x) = x$ são funções analíticas em torno de $x_0 = 0$. Então a solução é do tipo*
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
Logo, temos
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$
Substituindo a solução na equação obtemos
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} x a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

 Reportar erros para
r.gaia.cs@gmail.com

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$
$$2a_2+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_nx^n=0.$$

Deste modo, temos que

$$2a_2+a_0=0\to a_2=-\frac{a_0}{2}$$

e

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0\leftarrow a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2}.$$

Portanto, a relação de recorrência é expressa por

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{(2k)!!},$$
$$a_{2k+1}=\frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!!}.$$

e as soluções independentes são

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_0x^{2n}}{(2n)!!},$$
$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_1x^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

$y''+5x^3y=0.$

Solução: *Inicialmente verificamos que $p(x)=1$ e $q(x)=0$ são funções analíticas em torno de x_0. Logo, a solução é do tipo*

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

Logo, temos

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$
$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2}.$$

Substituindo a solução na equação obtemos

$$\sum_{n=2}n(n-1)a_nx^{n-2}+5\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3}=0$$
$$\sum_{n=-3}^{\infty}(n+5)(n+4)a_{n+5}x^{n+3}+5\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3}=0$$

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+5)(n+4)\, a_{n+5} x^{n+3} + 5\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = 0.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} 2a_2 = 0 &\to a_2 = 0, \\ 6a_3 = 0 &\to a_3 = 0, \\ 12a_4 = 0 &\to a_4 = 0, \\ (n+5)(n+4)\, a_{n+5} + 5a_n = 0 &\to a_{n+5} = \frac{-5a_n}{(n+5)(n+4)}. \end{aligned}$$

Portanto, a relação de recorrência é expressa por

$$\begin{aligned} a_{5k} &= \frac{(-1)^k 5^k a_0}{5k(5k-1)(5k-5)(5k-6)\dots 5\cdot 4}, \\ a_{5k+1} &= \frac{(-1)^k 5^k a_1}{(5k+1)(5k)(5k-4)\dots 6\cdot 5}, \end{aligned}$$

e as soluções independentes são

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{5n} x^{5n}, \\ y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{5n+1} x^{5n+1}. \end{aligned}$$

$4xy'' + 2(1-x)\, y' - y = 0.$

Solução: *Inicialmente manipulamos a equação tal que*

$$y'' + \frac{1-x}{2x} y' - \frac{1}{4x} y = 0.$$

Verificamos que $p(x) = \frac{1-x}{2x}$ *e* $q(x) = \frac{-1}{4x}$ *não são analíticas em torno de* $x_0 = 0$ *mas* $xp(x)$ *e* $x^2 q(x)$ *são. Logo,* x_0 *é ponto singular regular.*

Então a solução por série é do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo a solulção na equação original, temos

$$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[4(n+r)(n+r-1)+2(n+r)\right]a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r-1}\right]=0$$
$$\left[4r(r-1)+2r\right]a_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+r)(2n+2r-1)a_nx^{n+r-1}$$
$$-\sum n=1^{\infty}(2n+2r-1)a_{n-1}x^{n+r-1}=0.$$

Para $n\neq 0$ *temos que*

$$\left[4r(r-1)+2r\right]a_0=0,$$
$$2(n+r)(2n+2r-1)a_n-(2n+2r-1)a_{n-1}=0.$$

E para $a_0\neq 0$

$$4r(r-1)+2r=4r^2-2r=2r(2r-1)=0$$

de onde concluimos que $r_1=0$ *e* $r_2=\frac{1}{2}$.

Para $r=r_1=0$, *temos*

$$2n(2n-1)a_n-(2n-1)a_{n-1}=0$$
$$a_n=\frac{a_{n=1}}{2n}.$$

Consequentemente,

$$a_n=\frac{a_0}{2^n n!}$$

e

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0x^n}{2^n n!}=e^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{2^n}.$$

Para $r=r_2=\frac{1}{2}$, *temos*

$$(2n+1)(2n+1-1)a_n-(2n+1-1)a_{n-1}=0$$
$$a_n=\frac{a_{n-1}}{2n+1}.$$

Consequentemente,

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{(n+1)!!}$$

e

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0x^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)!!}.$$

$x^2y'' + xy' + (x^3 - 2)\,y = 0.$

Solução: *Manipulando a equação temos*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^3-2}{x^2}y = 0.$$

Verificamos que $p(x) = \frac{1}{x}$ *e* $q(x) = \frac{x^3-2}{x^2}$ *não são analíticas em torno de* $x_0 = 0$ *mas* $xp(x)$ *e* $x^2q(x)$ *são. Lofo,* x_0 *é ponto singular regular.*

Então a solução por série é do tipo

$$y\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,a_n x^{n+r-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1)\,a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo a solução na equação inicial temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1)\,a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,a_n x^{n+r} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r-3} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)^2 - 2\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n+r} = 0 \\ \left(r^2-2\right) a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - 2\right] a_1 x^{r+1} + \left[(r+2)^2 - 2\right] a_2 x^{r+2} \\ + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+r)^2 - 2\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n - 3x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

Como $x \neq 0$*, temos*

$$\begin{aligned} \left(r^2-2\right) a_0 &= 0, \\ \left[(r+1)^2 - 2\right] a_1 &= 0, \\ \left[(r+2)^2 - 2\right] a_2 &= 0, \\ \left[(n+r)^2 - 2\right] a_n + a_{n-3} &= 0. \end{aligned}$$

E como $a_0 \neq 0$*,*

$$\left(r^2-2\right) = 0 \to r_1 = \sqrt{2}, r_2 = -\sqrt{2}.$$

Para $r = r_1 = -\sqrt{2}$*, temos*

$$\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 2\right] a_1 = 0 \to a_1 = 0,$$

$$\left[\left(\sqrt{2}+2\right)^2-2\right]a_2=0\to a_2=0,$$

$$\left[n^2+2\sqrt{2}n+2-2\right]a_n+a_{n-3}=0\to a_n=\frac{-a_{n-3}}{n\left(n+2\sqrt{2}\right)}.$$

Logo,

$$a_{3n}=\frac{(-1)^k a_0}{3^n n!\left(3n+2\sqrt{2}\right)\left(3\left(n-1\right)+2\sqrt{2}\right)\ldots\left(3+2\sqrt{2}\right)}$$

e

$$y_1(x)=x^{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n}x^{3n}.$$

Para $r=r_2=-\sqrt{2}$, *temos*

$$\left[\left(-\sqrt{2}+1\right)^2-2\right]a_1=0\to a_1=0,$$

$$\left[\left(-\sqrt{2}+2\right)^2-2\right]a_2=0\to a_2=0,$$

$$\left[\left(-\sqrt{2}+n\right)^2-2\right]a_n+a_{n-3}=0\to a_n=\frac{-a_{n-3}}{n\left(n-2\sqrt{2}\right)}.$$

Logo,

$$a_{3n}=\frac{(-1)^n a_0}{3^n n!\left(3n-2\sqrt{2}\right)\left(3\left(n-1\right)-2\sqrt{2}\right)\ldots\left(3-2\sqrt{2}\right)}$$

e

$$y_2(x)=x^{-\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n}x^{3n}.$$

$3\left(x^2+x\right)y''+\left(x+2\right)y'-y=0.$

Solução: *Manipulando a equação temos*

$$y''+\frac{x+2}{3x\left(x+1\right)}y'-\frac{1}{3x\left(x+1\right)}y=0.$$

Verificamos que $P(x)=\frac{x+2}{3x(x+1)}$ *e* $q(x)=\frac{1}{3x(x+1)}$ *não são analíticas em* $x_0=0$ *mas* $xp(x)$ *e* $x^2q(x)$ *são. Logo,* x_0 *é ponto singular regular.*

Então a solução por série é do tipo

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}.$$

Consequentemente

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+r\right)a_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo a solução na equação inicial, temos

$$\begin{aligned} 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r-1} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)(n+r-2)\, a_{n-1} x^{n+r-1} + 3\sum_{n+r}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r-1} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)\, a_{n-1} x^{n+r-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3r(r-1)\, a_o x^{r-1} + 2r a_0 x^{r-1} + 3\sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)(n+r-2)\, a_{n-1} x^{n+r-1} \\ + 3\sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)\, a_{n-1} x^{n+r-1} \\ + 2\sum_{n=1}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0. \end{aligned}$$

Como $x \neq 0$,

$$[3r(r-1) + 2r]\, a_0 = 0$$

e

$$\begin{aligned} [3(n+r-1)(n+r-2) + (n+r-1) - 1]\, a_{n-1} \\ + [3(n+r)(n+r-1) + 2(n+r)]\, a_n = 0 \\ a_n = \frac{-\left[3(n+r-1)^2 - 1\right]}{3(n+r)(n+r-1)} a_{n-1}. \end{aligned}$$

E como $a_0 \neq 0$, *temos*

$$3r^2 - 3r + 2r = 0 \to r(3r-1) = 0 \to r_1 = 0, r_2 = \frac{1}{3}.$$

Para $r = r_1 = 0$, *temos*

$$a_{n+1} = \frac{-3(n^2-1)}{3(n+1)(n+2)} a_n = \frac{-(n-1)}{n+2} a_n$$

e consequentemente

$$y_1(x) = a_0 + a_1 x = 1 + \frac{x}{2}.$$

Para $r = r_2 = \frac{1}{3}$, *temos*

$$a_{n+1} = \frac{-3\left[\left(n+\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right]}{3\left(n+\frac{4}{3}\right)\left(n+\frac{7}{3}\right)} a_n = \frac{9n^2+6n-8}{9n^2+33n+28} a_n.$$

Consequentemente,

$$a_n = \frac{(-1)^n (3n-2)(3n-5)\dots(3n-1)\dots 2}{(3n+4)(4n+1)\dots 4(3n+3)(3n)3} a_0$$

e

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

$2xy'' + y' - y = 0.$

Solução: *Manipulando a equação temos*

$$y'' + \frac{1}{2x} y' - \frac{1}{2x} y = 0.$$

Verificamos que $p(x) = \frac{1}{2x}$ *e* $q(x) = \frac{1}{2x}$ *não são analíticas em torno de* $x_0 = 0$ *mas* $xp(x)$ *e* $x^2 q(x)$ *são. Logo,* x_0 *é ponto singular regular.*

Então a solução por série é do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Consequentemente

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo a solução na equação temos

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} + \sum)n = 0^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$
$$2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$
$$2r(r-1) a_0 x^{r-1} + r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(2n+2r-1)] a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0.$$

Como $x \neq 0$*, temos*

$$(2r(r-1) + r) a_0 = 0,$$
$$(n+r)(2n+2r-1) a_n - a_{n-1} = 0.$$

Como $a_0 \neq 0$,

$$\left(2r^2 - r\right) = r(2r-1) = 0 \to r_1 = 0, r_2 = \frac{1}{2}.$$

Para $r = r_1 = 0$, temos

$$n(2n-1)a_n - a_{n-1} = 0 \to a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}.$$

Logo, $a_n = \frac{a_0}{n!(2n-1)!!}$ *e*

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n-1)!!} x^n = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

Para $r = r_2 = \frac{1}{2}$, temos

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)(2n)a_n - a_{n-1} = 0 \to a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n+1)}.$$

Logo, $a_n = \frac{a_0}{n!(2n+1)!!}$ *e*

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(2n+1)!!} = x^2 e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!!}.$$

$8x^2y'' + 2xy' + (1-x)y = 0.$

Solução: *Manipulando a equação temos*

$$y'' + \frac{1}{4x}y' + \frac{(1-x)}{8x^2}y = 0.$$

Verificamos que $p(x) = \frac{1}{4x}$ e $q(x) = \frac{1-x}{8x^2}$ não são funções analíticas em $x_0 = 0$ mas $xp(x)$ e $x^2q(x)$ são. Logo, x_0 é ponto singular regular.

Então a solução por série é do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Consequentemente

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo a solução na equação temos

$$8\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+1} = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(n+r-1)(n+r) + 2(n+r) + 1\right]a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r} = 0$$

$$[2r(r-1))\,2r+1]\,a_0x^r + \sum_{n=0}^{\infty}[8(n+r-1)(n+r)+2(n+r)+1]\,a_nx^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r} = 0.$$

Como $x \neq 0$, temos

$$\left[8r^2-6r+1\right]a_0 = 0, [8(n+r-1)(n+r)+2(n+r)+1]\,a_n - a_{n-1} \qquad = 0.$$

Para $a_0 \neq 0$

$$8r^2-6r+1 = 0 \rightarrow r_1 = \frac{1}{2}.r_2 = \frac{1}{4}$$

e

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{8(n+r)(n+r-1)+2(n+r)+1}.$$

Para $r = r_1 = \frac{1}{2}$, temos

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{8\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)+2n+2} = \frac{a_{n-1}}{2\left(4n^2+n\right)} = \frac{a_{n-1}}{2n(4n+1)}.$$

Logo, $a_n = \frac{a_0}{n(4n+1)(2n)!!}$ e

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n(4n+1)(2n)!!}.$$

Para $r = r_2 = \frac{1}{4}$, temos

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(4n+1)\left(2n-\frac{3}{2}\right)+2n+\frac{1}{2}+1} = \frac{a_{n-1}}{2n(4n-1)}.$$

Logo, $a_n = \frac{a_0}{(3n+1)n!}$ e

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{4}}e^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)}.$$

$(x-1)\,y'' - xy' + y = 0$, $x_0 = 1$.

Solução: *Manipulando a equação temos*

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0.$$

Verificamos que $p(x) = \frac{x}{x-1}$ e $q(x) = \frac{1}{x-1}$ não são analíticas em $x_0 = 1$ mas $(x-1)\,p(x)$ e $(x-1)^2\,q(x)$ são. Logo, x_0 é ponto singular regular.

Então a solução por série é do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+r}.$$

Consequentemente

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,a_n(x-1)^{n+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n (x-1)^{n+r-2}.$$

Substituindo a solução na equação temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r01)(n+r) a_n (x-1)^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n (x-1)^{n+r}$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n (x-1)^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+r} = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-2) a_n (x-1)^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-2) a_{n-1} (x-1)^{n+r-1} = 0$$
$$r(r-2) a_0 (x-1)^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-2) a_n (x-1)^{n+r-1}$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-2) a_{n-1} (x-1)^{n+r-1} = 0.$$

Como $x-1 \neq 0$, *temos*

$$r(r-2) a_0 = 0,$$
$$(n+r)(n+r-2) a_n - (n+r-2) a_{n-1} = 0.$$

Para $a_0 \neq 0$,

$$r(r-2) = 0 \to r_1 = 2, r_2 = 0.$$

Para $r = r_1 = 2$, *temos*

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n+2}.$$

Consequentemente, $a_n = \frac{2a_0}{(n+2)!}$ *e*

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^{n+2} \frac{2}{(n+2)!}.$$

Para $r = r_2 = 0$, *temos*

$$y_2 = k y_1 \ln(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n$$

e consequentemente

$$y_2' = k y_1' \ln(x-1) + \frac{k y_1}{x-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n (x-1)^{n-1},$$
$$y_2'' = k y_1'' \ln(x-1) + \frac{2k y_1'}{x-1} - \frac{k y_1}{(x-1)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) n b_n (x-1)^{n-2}.$$

Substituindo na equação temos

$$k\left(x-1\right)\ln\left(x-1\right)y_1''+2ky_1'-\frac{ky_1}{x-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n-1\right)nb_n\left(n-1\right)^{n-1}$$
$$-k\left(n-1\right)y_1'\ln\left(x-1\right)+ky_1+\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\left(x-1\right)^n-ky_1'\ln\left(x-1\right)$$
$$-\frac{ky_1}{x-1}-\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\left(x-1\right)^{n-1}+ky_1\ln\left(x-1\right)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(x-1\right)^n=0$$
$$2ky_2'-\frac{2ky_2}{x-1}+ky_1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n-1\right)nb_n\left(x-1^{n-1}\right)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(x-\right)^n=0$$

Como $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x-1\right)^{n+2}\frac{2}{(n+2)!}$ *e* $y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x-1\right)^{n+1}\frac{2(n+2)}{(n+2)!}$ *temos*

$$4k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(n-1\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!}-4k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x-1\right)^{n+1}}{\left(n+2\right)!}+2k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x-1\right)^{n+2}}{\left(n+2\right)!}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n-1\right)nb_n\left(x-1\right)^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(x-1\right)^n=0$$
$$4k\left(x-1\right)+2k\left(x-1\right)^2-2k\left(x-1\right)$$
$$-\frac{2k\left(x-1\right)^2}{3}+k\left(x-1\right)^2+\frac{k\left(x-1\right)^3}{3}+b_n+b_n\left(x-1\right)$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{4k\left(x+1\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{2k\left(x-1\right)^{n+2}}{\left(n+2\right)!}+\left[\left(n-1\right)n+1\right]b_n\left(x-1\right)^n\right]=0$$
$$y_2=x.$$

$x^2\left(1+x\right)y''+x\left(1+x\right)y'-y=0.$

Solução: *Manipulando a equação temos*

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{y}{x\left(1+x\right)}=0.$$

Verificamos que $p(x)=\frac{1}{x}$ *e* $q(x)=\frac{1}{x(1+x)}$ *não são analíticas em torno de* $x_0=0$ *mas* $xp(x)$ *e* $x^2q(x)$ *são. Logo,* x_0 *é ponto singular regular.*

Então a solução por série é do tipo

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}.$$

Consequentemente

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+r\right)a_nx^{n+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo a solução na equação temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)\, a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)\, a_n x^{n+r+1} \\
+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)^2 - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2\, a_n x^{n+r+1} = 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)^2 - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)^2\, a_{n-1} x^{n+r} = 0 \\
\left(r^2 - 1\right) a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)^2 - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)^2\, a_{n-1} x^{n+r} = 0.
\end{aligned}$$

Como $x \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
\left(r^2 - 1\right) a_0 = 0, \\
\left[(n+r)^2 - 1\right] a_n + (n+r-1)^2\, a_{n-1} = 0.
\end{aligned}$$

Para $a_0 \neq 0$ temos

$$r^2 - 1 = 0 \rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1.$$

Para $r = r_1 = 1$:

$$\left[(n+1)^2 - 1\right] a_n + n^2 a_{n-1} = 0 \rightarrow a_n = \frac{-n a_{n-1}}{n+2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(-1)^n\, a_0}{(n+2)(n+1)}, \\
y_1(x) &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

Para $r = r_2 = -1$:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= k y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b)n x^{n-1}, \\
y_2'(x) &= k y_1' \ln(x) + \frac{k y_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)\, b_n x^{n-2}, \\
y_2''(x) &= k y_1'' \ln(x) + \frac{2k y_1'}{x} - \frac{k y_1}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2)\, b_n x^{n-3}.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação inicial,

$$kx^2y_1''\ln x+2kxy_1'-ky_1+\sum n=0^{\infty}(n-1)(n-2)b_nx^{n-1}$$
$$+kx^3y_1''\ln x+2kx^2y_1'-kxy_1+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)b_nx^n$$
$$+kx''y_1'\ln x+ky_1+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)b_nx^{n-1}+kx^2y_1'\ln x$$
$$+kxy_1'+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)b_nx^n-ky_1\ln x-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-1}=0$$
$$\left[x^2(1+x)y_1''+x(1+x)y_1'-y_1\right]k\ln x$$
$$+\left[2kx+2kx^2\right]y_1'+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n-1)^2-1\right]b_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)^2b_nx^n=0.$$

Como $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ *e* $y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{(n+2)}$ *temos*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2kx^{n+1}}{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2kx^{n+2}}{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}n(n+2)b_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)^2b_nx^n=0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2kx^n}{n+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n2kx^n}{n}+\sum_{n=-1}^{\infty}(n-1)(n+1)b_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)^2b_nx^n=0$$
$$b_1+b_0+\frac{2kx}{2}+4\cdot2b_2x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2kx^n}{(n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2kx^n}{n}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n-3)b_{n+1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^2b_nx^n=0.$$

Como $x\neq0$,

$$b_1-b_0=0\to b_1=b_0,$$
$$k=0,$$
$$8b_2=0\to b_2=0,$$
$$(n+1)(n-1)b_{n+1}+(n-1)^2b_n=0\to b_{n+1}=\frac{-(n-1)b_n}{n+1}.$$

Logo,

$$y_2(x)=x^{-1}(b_0b_1x)=1+x^{-1}.$$

$xy''+(x-1)y'-y=0.$

Solução: *Manipulando a equação temos*

$$y''+\frac{x-1}{x}y'-\frac{y}{x}=0.$$

Verificamos que $p(x) = \frac{x-1}{x}$ e $q(x) = \frac{1}{x}$ não são analíticas em $x_0 = 0$ mas $xp(x)$ e $x^2q(x)$ são. Logo, x_0 é ponto singular regular.

Então a solução por série é do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Consequentemente

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo a solução na equação temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)\, a_n x^{n+r-1} + \sum n = 0^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r}$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-2)\, a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)\, a_n x^{n+r} = 0$$
$$r(r-2)\, a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-2)\, a_n + (n+r-2)\, a_{n-1}\right] x^{n+r-1} = 0.$$

Como $x \neq 0$ temos

$$r(r-2)\, a_0 = 0,$$
$$(n+r)\, a_n = -a_{n-1}.$$

Para $a_0 \neq 0$ temos $r_1 = 2$ e $r_2 = 0$.

Para $r = r_1 = 2$:

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{n+2}.$$

Logo,

$$a_n = \frac{(-1)^n\, 2a_0}{(n+2)!}, zz y_1(x) \qquad = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^n}{(n+2)!}.$$

Para $r = r_2 = 0$:

$$y_2(x) = k y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b)n x^{n-1},$$

$$y_2'(x) = ky_1' \ln(x) + \frac{ky_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)\, b_n x^{n-2},$$

$$y_2''(x) = ky_1'' \ln(x) + \frac{2ky_1'}{x} - \frac{ky_1}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2)\, b_n x^{n-3}.$$

Substituindo na equação original,

$$kxy_1'' \ln x + 2ky_1' - \frac{ky_1}{x} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, b_n x^{n-1} + kxy_1' \ln x$$
$$+ ky_1 + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^n - ky_1' \ln x - \frac{ky_1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1}$$
$$- ky_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

$$2ky_1' + \left(k - \frac{2k}{x}\right) y_2 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^n$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

$$2ky_1' - \left(k - \frac{2k}{x}\right) y_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, b_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\, b_{n-1} x^{n-1}$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} = 0$$

$$2ky_1' - \left(k - \frac{2k}{x}\right) y_1 - b_1 + b_0$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-2)\, b_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} nb_{n-1} x^{n-1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4kx^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2kx^{n+2}}{(n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4kx^{n+1}}{(n+2)!}$$
$$+ b_0 + b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-2)\, b_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} nb_{n-1} x^{n-1} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4kx^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2kx^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4kx^{n-1}}{(n)!}$$
$$+ b_0 + b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-2)\, b_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} nb_{n-1} x^{n-1} = 0$$

$$b_0 + b_1 + 4kx + \frac{4k}{2} + 2b_2 x$$
$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n 4kx^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2kx^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$+ \sum n = 3^{\infty} \frac{(-1)^n 4kx^{n-1}}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-2)\, b_n x^{n-1} + \sum_{n=3}^{\infty} nb_{n-1} x^{n-1} = 0.$$

Como $x \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 = 0 \to b_0 = b_1, \\ 2k = 0 \to k = 0, \\ 4k + 2b_2 = 0 \to b_2 = 0 = b_3 = b_4 = \dots, \\ y_2(x) = b_0 + b_1 x = 1 - x. \end{aligned}$$

[T2 de 2011]

Solução:

[T2 de 2012] Seja a equação diferencial $x(1-x)y'' + (1-5x)y' - 4y = 0$. Ao utilizar o método de Frobenius para resolver essa equação encontramos que a equação indicial correspondete apresenta raízes reais iguais a $r_1 = r_2 = 0$, e com isso obtemos que uma das soluções em forma de série dessa equação é

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n.$$

Utilize o método de Frobenius para encontrar uma segunda solução $y_2(x)$ linearmente independente.

Solução: *Pelo método de Frobenius a segunda solução linearmente é dada pela forma*

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad\qquad r_1 = r_2 = 0. \end{aligned}$$

Derivando a segunda solução temos

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= y_1' \ln x + y_1(1/x) + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y_2''(x) &= y_1'' \ln x + 2y_1'(1/x) - y_1(1/x^2) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

e substituindo na equação diferencial

$$\begin{aligned} [x(1-x)y_1'' + (1-5x)y_1' - 4y_1] \ln x + 2y_1' - y_1(1/x) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - 2xy_1' + y_1 - \sum_{n-1}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + y_1(1/n) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 5y_1 - 5\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0. \\ 2y_1' + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - 2xy_1' + y_1 - \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n a^n \\ + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 5y_1 - 5\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0. \end{aligned}$$

Usando a expressão de $y_1(x)$ *temos*

$$2\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)^2x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)^2x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_nx^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} - 4\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2x^n - 5\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n = 0.$$

Então,o

$$a_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left[(\frac{n+2}{n+1}a_n - 2\right],$$
$$a_n = -2(n+1).$$

Portanto, $y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$, *onde* $y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2x^n$.

[P1 de 2011] Seja a equação diferencial $x(1+x)y'' + y' = 0$. Ao utilizar o método de Frobenius para resolver essa equação diferencial encontramos que a equação indicial correspondente apresenta raízes iguais $r_1 = r_2 = 0$. Podemos também notar que uma solução dessa equação diferencial é $y_1(x) = 1$. Utilize o método de Frobenius para encontrar uma segunda solução $y_2(x)$ linearmente indenpendente.

Solução: *Como as raízes da equação indicial são iguais temos que*

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$$
$$= \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n \qquad y_1(x) = 1, r_1 = r_2 = 0$$
$$y_2'(x) = (1/x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_nnx^{n-1},$$
$$y_2''(x) = (-1/x^2) + \sum_{n=2}^{\infty} a_nn(n-1)x^{n-2}.$$

Substituindo na equação diferencial obtemos

$$(-1/x) + \sum_{n=2}^{\infty} a_nn(n-1)x^{n-1} + (-1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_nn(n-1)x^n$$
$$+ (1/x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_nnx^{n-1} = 0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_nn(n-1)x^{n-1} + (-1) + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}(n-1)(n-2)x^{n-1}$$
$$+ a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_nnx^{n-1} = 0$$
$$(a_1 - 1) + a_22^2x + \sum_{n=3}^{\infty}\left[a_nn^2 + a_{n-1}(n-1)(n-2)\right]x^{n-1} = 0.$$

Como $a_1 - 1 = 0$, $4a_2 = 0$ *e* $a_n n^2 + a_{n-1}(n-1)(n-2) = 0$ *temos que* $a_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *Então,* $y_2 = \ln x + x$.

[P1 de 2011] Seja a equação diferencial $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$. Ao utilizar o método de Frobenius para resolver essa equação diferencial encontramos que as raízes da equação indicial são $r_1 = 2$ e $r_2 = 0$. Mostre que nesse caso a menor das raízes não representa um problema para determinar a relação de recorrência das séries, e utilize essa menor raíz para encontrar as duas soluções linearmente independentes dessa equação.

Solução: *Seja* $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ *a solução da equação diferencial. Então*

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} \end{aligned}$$

e ao substituir na equação diferencial temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+r+3} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-2) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+r+3} &= 0 \\ a_0 r(r-2) x^{r-1} + a_1 (r+1)(r-1) x^r + a_2 (r+2) r x^{r+1} + a_r (r+3)(r-1) x^{r+2} & \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n + 4(n+r+4)(n+r+2) + 4a_n \right] x^{n+r+3} &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} a_0 r(r-2) = 0, \\ a_1 (r+1)(r-1) = 0, \\ a_2 (r+2) r = 0, a_3 (r+3)(r-1) = 0, \\ a_{n+4} (n+r+4)(n+r+2) + 4a_n = 0, n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Para $a_0 \neq 0$ *temos que* $r_1 = 2$ *e* $r_2 = 0$. *Tomando* $r = r_2 = 0$ *temos que* $a_1 = 0$, a_2 *é indeterminado e* $a_3 = 0$. *Como ocorre duas constantes arbitrárias* (a_6 e a_2) *temos que existem duas soluções.*

Pela relação de recorrência, temos que

$$a_{n+4} = (-4a_n) / \left[(n+4)(n+2) \right]$$

e consequentemente $a_{4k} = (-1)^k a_0 / (2k)!$, $a_{1+4k} = 0$, $a_{2+4k} = (-1)^k a_2 / (2k+1)!$ e $a_{3+4k} = 0$ *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *Logo,*

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{4k} x^{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{1+4k} x^{1+4k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2+4k} x^{2+4k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3+4k} x^{4+4k} \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!} + a_2 x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^4 k}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Concluimos então que $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{4k} / (2k)!$ e $y_2(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{4k} / (2k+1)!$.

[E de 2011] Seja a equação diferencial

$$x^2y'' + x(x-1)y' + y = 0$$

Ao utilizar o método de Frobenius para resolver essa equação diferencial encontramos que a equação indicial correspondente apresenta raízes iguais $r_1 = r_2 = 1$. Podemos também notar que uma solução dessa equação diferencial é

$$y_1(x) = x\exp(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}/n!.$$

Utilize o método de Frobenius para encontrar uma segunda solução $y_2(x)$ linearmente independente.

Solução: *Como as raízes da equação indicial são iguais temos que*

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n \\
&= y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n+1} && r_1 = r_2 = 1, \\
y_2'(x) &= y_1'\ln x + y_1(1/x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_n x^n, \\
y_2''(x) &= y_1''\ln x + 2y_1'(1/x) - y_1(1/x^2) + \sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_n x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial obtemos

$$\begin{aligned}
2xy_1' - y_1 + \sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_n x^{n+1} + xy_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+2} \\
- y_1 - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n+1} = 0
\end{aligned}$$

e usando a expressão para $y_1(x)$ temos

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=1}\infty\frac{(-1)^n n x^{n+1}}{n(n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n(n^2-1+1)x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+2} = 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!} + a_1x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n+1}(n+1)^2 + a_n(n+1)\right]x^{n+2} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $a_{n+1}(n+1)^2 + a_n(n+1) - (-1)^2/n! = 0$ e portanto

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = -a_n(n+1)^{-1} + (-1)^n\left[(n+1)(n+1)!\right]^{-1}, n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Concluimos então que $a_n = ((-1)^{n+1}/n!)\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$.

Portanto, $y_2(x) = y_1(x)\ln x + x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}H_n x^n/n!$ onde $y_1(x) = x\exp(-x)$ e $H_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k)$.