F 502 A – Eletromagnetismo I – 2º semestre de 2011 – Exame – 15/12/2011

Nome:____ **RA:**_____________

Questão 1- Suponha que o campo elétrico em uma determinada região é dado por $\mathbf{E} = kr^3\hat{\mathbf{r}}$, em coordenadas esféricas (k é uma constante). **(a) [1,5 pontos]** Encontre a densidade de carga, ρ. **(b) [1,0 ponto]** Encontre a carga total contida em uma esfera de raio R, centrada na origem.

Questão 2- Uma caixa cúbica (com lados de comprimento a) consiste de cinco placas de metal que estão soldadas juntas e aterradas (Figura 1). O topo é feito de uma folha metal separada, isolada das outras e mantidas a um potencial constante V_0. **(a) [1,0 ponto]** Escreva as condições de contorno para o potencial em cada uma das placas. **(b) [1,5 ponto]** Encontre o potencial no interior da caixa.

Questão 3- [2,5 pontos] Um cilindro circular infinitamente longo, longe de qualquer corrente, tem magnetização uniforme $\mathbf{M}$ paralela ao seu eixo. Encontre o vetor $\mathbf{H}$ e o campo magnético $\mathbf{B}$ (devido a $\mathbf{M}$) dentro e fora do cilindro.

Questão 4 - (a) [1,5 pontos] Escreva e explique cada uma das equações de Maxwell no vácuo na sua forma local. **(b) [1,0 ponto]** Aplique os teoremas de Stokes e do Divergente e transforme as equações de Maxwell para a forma integral.

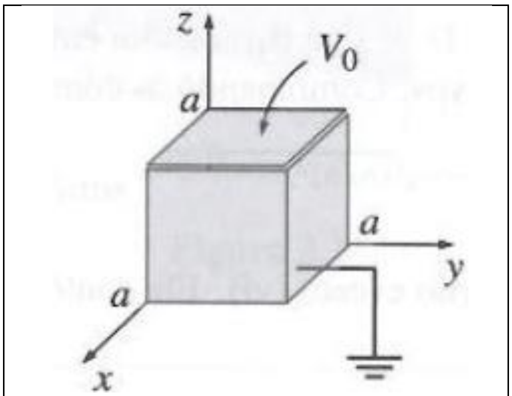


Figura 1. Questão 2.

Dados:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}. \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}.$$

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mu \equiv \mu_0(1+\chi_m)$$

$$\mathbf{J}_M(\mathbf{r}') = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$$

$$\mathbf{K}_M(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}$$

$$\int_0^a \operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}y\,\operatorname{sen}\frac{n'\pi}{a}y\,dy = \frac{a}{2}\delta_{n,n'}$$

Questão 1

(a) Pela lei de Gauss: $\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \nabla \cdot (k r^3 \hat{r})$.

Em coordenadas esféricas:

$$\boxed{\rho = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (k r^5) = 5k\varepsilon_0 r^2}$$

(b) A carga total contida em uma esfera de raio R

é:

$$Q = \int_{esfera} \rho \, d\tau = 5k\varepsilon_0 \int_0^R r^2 (4\pi r^2) dr$$

$$\boxed{Q = 4\pi k \varepsilon_0 R^5}$$

Questão 2

(a) Condições de contorno:

(i) $V = 0$, para $x = 0$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$
(ii) $V = 0$, para $x = a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$
(iii) $V = 0$, para $0 \leq x \leq a$, $y = 0$, $0 \leq z \leq a$
(iv) $V = 0$, para $0 \leq x \leq a$, $y = a$, $0 \leq z \leq a$
(v) $V = 0$, para $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $z = 0$
(iv) $V = V_0$, para $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $z = a$

(b) Em coordenadas cartesianas as equações a serem resolvida $V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$ são

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = C_1 X(x) \;;\; \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = C_2 Y(y) \;;\; \frac{d^2Z(z)}{dz^2} = C_3 Z(z)$$

com $C_1 + C_2 + C_3 = 0$

Como os valores de contorno não periódicos em x e y, as constantes C_1 e C_2 são escolhidas para serem negativas: $C_1 = -k^2$ e $C_2 = -\ell^2$, de forma que $C_3 = k^2 + \ell^2$, resultando nas soluções:

$$X(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$$
$$Y(y) = C \operatorname{sen} \ell y + D \cos \ell y$$
$$Z(z) = E\, e^{\sqrt{k^2+\ell^2}\, z} + F\, e^{-\sqrt{k^2+\ell^2}\, z}$$

Aplicando as condições de contorno:

(i) $\Rightarrow B = 0$

(ii) $\Rightarrow ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

(iii) $\Rightarrow D = 0$

(iv) $\Rightarrow \ell = \frac{m\pi}{a}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

(v) $\Rightarrow E = -F \Rightarrow Z(z) = E\left(e^{+\sqrt{k^2+\ell^2}} - e^{-\sqrt{k^2+\ell^2}}\right)$

$\Rightarrow Z(z) = 2E \operatorname{senh} \sqrt{k^2+\ell^2}$

A solução para o potencial pode ser escrita como:

$$V(x,y,z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} C_{n,m}\,\text{senh}\left[\frac{\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}\,z\right] \text{sen}\,\frac{n\pi}{a}x\ \text{sen}\,\frac{m\pi}{a}y$$

Aplicando a condição de contorno (vi)

$$V(x,y,a) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} C_{n,m}\,\text{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right] \text{sen}\,\frac{n\pi}{a}x\ \text{sen}\,\frac{m\pi}{a}y = V_0$$

Usando o truque de Fourrier:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} C_{n,m}\,\text{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right]\int_0^a\int_0^a \text{sen}\,\frac{n\pi x}{a}\,\text{sen}\,\frac{n'\pi x}{a}\,\text{sen}\,\frac{m\pi y}{a}\,\text{sen}\,\frac{m'\pi y}{a}\,dx\,dy$$

$$= V_0\int_0^a\int_0^a \text{sen}\,\frac{n'\pi x}{a}\,\text{sen}\,\frac{m'\pi y}{a}\,dx\,dy$$

Usando a ortogonalidade das funções seno:

$$\int_0^a \text{sen}\,\frac{n\pi x}{a}\,\text{sen}\,\frac{n'\pi x}{a}\,dx = \frac{a}{2}\delta_{n,n'}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} C_{n,m}\,\text{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right]\cdot\frac{a^2}{4}\delta_{n,n'}\delta_{m,m'} = \frac{V_0\,a^2}{nm\pi^2}(1-\cos n\pi)(1-\cos m\pi)$$

$$\Rightarrow C_{n,m} = \frac{4V_0}{nm\pi^2}\cdot\frac{1}{\text{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right]}(1-\cos n\pi)(1-\cos m\pi)$$

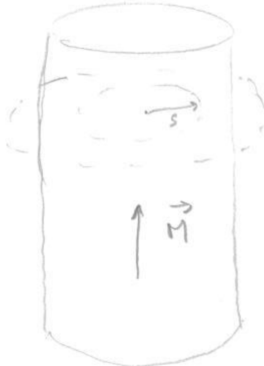
$$\Rightarrow C_{n,m} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ ou } m \text{ forem pares} \\ \dfrac{16V_0}{nm\pi^2}\dfrac{1}{\text{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right]} & \text{se } n \text{ e } m \text{ forem ímpares}\end{cases}$$

Desta forma, a solução para o potencial é:

$$\boxed{V(x,y,z) = \frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1\\(\text{ímpar})}}^{+\infty}\sum_{\substack{m=1\\(\text{ímpar})}}^{+\infty}\frac{1}{nm}\,\frac{\text{senh}\left[\frac{\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}\,z\right]}{\text{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right]}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{a}x\ \text{sen}\,\frac{m\pi y}{a}}$$

Questão 3

Pode-se encontrar o vetor $\vec{H}$ de $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_e$.



A simetria cilíndrica permite que se encontre uma espira ampeliana conveniente. Como não há correntes livres a integral de linha fica

$$H \cdot 2\pi s = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{H} = 0} \text{ (dentro e fora do fio)}$$

Como $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, chegamos a

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{M}}, \text{ dentro do fio.}$$

Fora do fio $\vec{M} = 0$ e $\boxed{\vec{B} = 0}$

Outro modo de calcular $\vec{B}$ é através das correntes de magnetização:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = 0$$

$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} = \vec{M} \times \hat{r} = M\hat{\phi}$, porque $\vec{M}$ está orientado ao longo de z.

O problema agora é o do campo magnético gerado pelo solenóide. Fora, $\boxed{\vec{B} = 0}$.

e Dentro, o campo está ao longo do eixo z e pode ser calculado pela lei de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B \cdot \ell = \mu_0 K_M \ell$$

Como $|\vec{K}_M| = M \Rightarrow B = \mu_0 M$ e como o campo está direcionado ao longo de z, como $\vec{M}$:

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{M}}$$

Em ambos os casos $\vec{H} = 0$ porque não há correntes livres.

(a) Questão 4

Equações de Maxwell:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ (Lei de Gauss): O fluxo de campo elétrico saindo (ou entrando) em um volume, por unidade de volume, é proporcional à densidade de cargas. Esta equação estabelece uma relação entre o campo elétrico e a carga elétrica, fonte de campo.

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$ (Lei de Faraday): A densidade de circulação do campo elétrico, por unidade de área, é proporcional à variação do campo magnético. Esta equação mostra como o campo elétrico surge a partir do campo magnético.

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$: Esta equação reflete a ausência de uma carga magnética, fonte do campo magnético. Assim, o fluxo de campo entrando (ou saindo) de qualquer volume é zero.

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$ (Lei de Ampère-Maxwell):

A densidade de circulação, por unidade de área, é proporcional à densidade volumétrica de corrente e à variação do campo elétrico. Esta equação mostra como o campo magnético é gerado por correntes e pela variação do campo elétrico.

(b) Lei de Gauss

Integrando a lei de Gauss no volume:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E})\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, d\tau \xRightarrow[\text{do divergente}]{\text{teorema}} \boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

Para $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B})\, d\tau = 0 \xRightarrow[\text{da divergência}]{\text{teorema}} \boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0}$$

Lei de Faraday

Integrando em uma superfície:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \xRightarrow[\text{Stokes}]{} \boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\, d\vec{a}}$$

Lei de Ampère-Maxwell:

Integrando em uma superfície:

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

$$\Big\Downarrow \text{ Stokes}$$

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}}$$