MECÂNICA 1

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS/2010

1. Uma partícula, em movimento unidimensional, de massa m, em repouso na origem no instante t=0, está submetida à força $F(t) = F_0 \operatorname{sen}^2 \omega t$.

a) Esboce a forma que se deve esperar para v(t) e para x(t), para vários períodos de oscilação da força.

b) Determine v(t) e x(t) e compare com o seu esboço anterior.

2. Um barco de massa m cuja velocidade inicial é v_0 é freado por uma força de atrito $F = -\mathrm{b}\exp(\alpha\,\mathrm{v})$.

a) Determine a velocidade do barco v(t).

b) Determine o tempo e a distância percorrida até o barco parar.

3. Um corpo é abandonado do repouso em y=0 caindo sob influência da gravidade e da resistência do ar. Obtenha uma relação entre a velocidade $v_y(t)$ e a distância percorrida y(t) considerando a resistência do ar igual a (a) bv_y e a (b)bv_y^2.

4. A velocidade v de uma partícula de massa m varia com a distância percorrida x como $\mathrm{v}(x) = a\,x^{-n}$. Assumindo v(x=0) = 0 em t = 0,

(a) Determine F(t) e x(t).

(b) Obtenha uma expressão para v(t).

5. Um corpo é projetado verticalmente para cima em um campo gravitacional constante com uma velocidade inicial v_0. Mostre que se existir uma força retardadora proporcional ao quadrado da velocidade instantânea, a velocidade do corpo ao retornar à posição inicial será: $\dfrac{\mathrm{v}_0 \mathrm{v}_f}{\sqrt{\mathrm{v}_0^2 + \mathrm{v}_f^2}}$ onde v_f é a velocidade final quando o movimento se torna uniforme.

6. Uma partícula de massa m se movimenta para baixo em um campo gravitacional constante partindo do repouso. Se existir uma força retardadora proporcional ao quadrado da velocidade, $F=kmv^2$, mostre que a distância percorrida pela partícula na queda quando acelerada de v_0 a v_1 será:

$$s(\mathrm{v}_0 \to \mathrm{v}_1) = \frac{1}{2k}\ln\left[\frac{g - k\,\mathrm{v}_0^2}{g - k\mathrm{v}_1^2}\right].$$

7. Uma partícula de massa m desce um plano inclinado sob ação da gravidade. Se o movimento for retardado por uma força $F= kmv^2$, mostre que o tempo que ela levará para percorrer uma distância d a partir do repouso será: $t = \dfrac{\cosh^{-1}[\exp(kd)]}{\sqrt{kg\operatorname{sen}\theta}}$ onde θ é o ângulo de inclinação do plano.

8. Uma partícula de massa m, inicialmente em repouso, é submetida a uma força $F(t) = F_0 \exp(-\gamma\, t)\cos(\omega t + \theta)$. Suponha que a força comece a atuar no instante t=0.

a)Determine a equação horária que descreve o movimento da partícula. O que acontece para $t \to \infty$?

b)Como a velocidade final da partícula depende de θ e de ω ?
Sugestão: A álgebra pode ser simplificada escrevendo-se cos $(\omega t+\theta)$ como uma soma de funções exponenciais complexas.

9. Uma partícula de massa m acha-se sob a ação de uma força cuja energia potencial é $U(x)=ax^2 - bx^3$, onde a e b são constantes positivas.
a)Determine a força que atua sobre a partícula e esboce o gráfico de F(x) e de U(x).
b)A partícula parte da origem x=0 com velocidade v_0. Mostre que se $|v_0|<v_c$, onde v_c é uma certa velocidade crítica, a partícula permanecerá confinada à uma região próxima da origem. Determine v_c.
c)Delimite 2 valores x_i e x_s entre os quais podemos considerar o movimento como harmônico simples. Qual é a freqüência da oscilações nesta região?

10. Uma partícula de massa m está sujeita a um potencial $U(x)= C[2(\frac{x}{x_0})^2 - (\frac{x}{x_0})^4]$, onde C e x_0 são constantes positivas. Obtenha os limites dos intervalos de energia em que:
a)O movimento é periódico.
b)O movimento não é periódico e não é limitado em nenhum dos dois sentidos de x.
Calcule o período para pequenas oscilações no caso do movimento periódico.

11. A energia potencial para uma força entre dois átomos em uma molécula diatômica, tem a seguinte forma aproximada: $U(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$, onde a e b são constantes positivas.
a) Determine a força que atua entre os átomos.
b) Supondo que um dos átomos seja muito pesado e praticamente permaneça em repouso enquanto o outro se move ao longo de uma linha reta, descreva os movimentos possíveis.
c) Determine a distância de equilíbrio e o período para pequenas oscilações, em torno da posição de equilíbrio, se a massa do átomo mais leve for m.

12. Uma partícula de massa m move-se num poço de potencial dado por $U(x) = \frac{-U_0 a^2 (a^2 + x^2)}{8a^4 + x^4}$, onde U_0 e a são constantes positivas.
a) Esboce U(x) e F(x).
b) Discuta os movimentos que podem ocorrer. Localize todos os pontos de equilíbrio e determine a freqüência para pequenas oscilações em torno de qualquer um dos pontos de equilíbrio estável.

13. Uma partícula está sujeita à ação da força $F = -kx + \frac{a}{x^3}$, onde k e a são constantes positivas.
a) Determine o potencial U(x), descreva a natureza das soluções e determine a solução x(t).
b) Você pode dar uma interpretação simples do movimento quando $E^2 >> ka$, onde E é a energia total da partícula?

14. Um próton com velocidade v_0 aproxima-se pela direita de uma região descrita pelo potencial $U(x)= -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$. No ponto x_0 ocorre a emissão de um fóton de tal forma que há perda de energia cinética ficando o próton então confinado ao poço.

a) Qual a mínima energia que o fóton deve ter para que isso ocorra?
b) Qual deve ser a energia do fóton para que a velocidade do próton se anule nesse ponto?
c) O próton continua em repouso no ponto? Discuta.

15. Uma partícula de massa m está submetida à força restauradora de uma mola de constante de elasticidade k e à força de atrito de escorregamento $\pm$ μmg, onde μ é o coeficiente de atrito. A partícula se move linearmente e parte do repouso, de uma distância $x_0 >> \frac{\mu mg}{k}$ da posição de equilíbrio.
a) Qual será o período de oscilações?
b) Qual será o decréscimo na amplitude após um ciclo? E dois ciclos?
Quanto tempo gastará a partícula para deixar de oscilar?

16. Uma força $F = F_0\, e^{-a\,t}$ atua sobre um oscilador harmônico de massa m, constante de mola k e constante de amortecimento b. Determine uma solução particular da equação do movimento, partindo da suposição de que existe uma solução possível com a mesma dependência do tempo que a força aplicada.

17. Uma força externa $F=e^{-10\,t}$ N atua sobre um oscilador harmônico amortecido de massa 1kg, constante da mola k= 16 N/m e constante de amortecimento b=10 kg/seg. A partícula parte do ponto x=0. Qual deve ser a velocidade inicial para que a partícula atinja novamente a posição inicial o mais rapidamente possível.

18. Dada a equação $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k\,x = 0$ para oscilações amortecidas do oscilador harmônico.Mostre que se $E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$ então $\frac{dE}{dt} = -b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$. Isto mostra que se existe amortecimento, a energia total E decresce com o tempo. O que acontece com a energia perdida?

19. Um oscilador harmônico sem amortecimento(b=0), inicialmente em repouso, é submetido a uma força $F= F_0$ sen ωt em t=0. Determine o deslocamento x(t).

20. Um oscilador harmônico amortecido de massa m e constante de mola k é submetido à ação de uma força $F= F_0 \cos \omega t$. Considere $x=x_0$ e $v=v_0$ em t=o e determine x(t).

21. Uma partícula de massa m está sujeita a uma força de restauração linear F= - kx, cuja constante k é proporcional ao tempo, isto é, k=at, onde a é uma constante positiva. Obtenha uma solução da equação do movimento para a partícula sob a forma de uma série de potências em t. Indique qual a lei geral de recorrência dos termos da série bem como o seu valor em termos das condições iniciais $x(t=0)=x_0$ e $v(t=0)=v_0$.

22. Uma partícula de massa m encontra-se em repouso na extremidade de uma mola de constante de força k, pendurada em um suporte fixo. Em t=0, aplica-se uma força constante F na massa m que atua por um intervalo de tempo t_0. Mostre que após a remoção dessa força F, o deslocamento massa em relação à sua posição de equilíbrio $x=x_0$, para x para baixo, é: $x - x_0 = \frac{F}{k}\left[\cos\omega_0(t - t_0) - \cos\omega_0 t\right]$ *onde* $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

23. Um pêndulo simples consiste de uma massa m pendurada de um ponto fixo por uma barra estreita de massa desprezível, inextensível, de comprimento l. Obtenha a equação de movimento e, utilizando a aproximação senθ ~ θ, mostre que a freqüência natural do pêndulo é $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Discuta o movimento do pêndulo na presença de um meio viscoso representado pela força retardadora $F_R = 2m\sqrt{gl}\,\frac{d\theta}{dt}$.

24. Utilize o método de Green para determinar a resposta do oscilador amortecido submetido á uma força externa da forma: $F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_0 e^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}\,\omega t & t > 0 \end{cases}$

25. Determine, usando o princípio da superposição, o movimento de um oscilador subamortecido com $\gamma = \frac{1}{3\omega_0}$, inicialmente em repouso e submetido, após t=0, à ação da força F= A sen ω_0t + B sen $3\omega_0$t , onde ω_0 é a freqüência natural do oscilador.
Qual deve ser a razão entre B e A para que as oscilações forçadas com freqüência $3\omega_0$ tenham a mesma amplitude que as oscilações cuja freqüência é ω_0.

26. Um oscilador harmônico com amortecimento crítico, de massa m e constante k, sofre a ação de uma força externa aplicada F_0 cos wt.
a) Determine uma solução particular para esse oscilador.
b) Determine a solução geral do problema.
c) Considere que $x(0) = x_0$ e que $v(0) = v_0$. Obtenha x(t).
27. Considere um corpo de massa m, lançado verticalmente para cima, a partir de um ponto da superfície da Terra. Sabe-se que o corpo está sujeito a duas forças, a força gravitacional terrestre e a uma força de atrito proporcional à velocidade do corpo.

$$F(x) = -\frac{GM_T m}{x^2} \quad \text{e} \quad F(v) = -k\,v$$

onde M_T é a massa da Terra, G a constante gravitacional e x a distância do corpo ao centro da Terra. Sabe-se que R_T é o raio da Terra. Admita a origem do potencial gravitacional terrestre no infinito.
a) Determine a energia mecânica total E do corpo.
b) Utilizando a segunda lei de Newton, determine a taxa de variação da energia total do corpo $\frac{dE}{dt}$ em função da velocidade.