$3^{\underline{a}}$ Prova

MA-311 - Vespertino — Cálculo III

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2012

Nome: GABARITO	RA:
Assinatura:	Turma.:

Esta prova tem um total de 5 questões valendo 10 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA!

1	2.0	
2	1.5	
3	2.5	
4	2.0	
5	2.0	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*2.0 pontos*)

   (a) (1.0) Determine a região (intervalo) de convergência da seguinte série de potências:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x+1)^{3n}.$$

   Não esqueça de testar os extremos do intervalo, se for o caso.

   (b) (1.0) Encontre uma representação em série de potências em torno de $x_0 = 0$ da função

   $$f(x) = \text{arctg}\,(x^5).$$

   Sugestão: primeiro encontre a representação em série de potências de

   $$\text{arctg}\; t = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}.$$

2. (*1.5 pontos*)

   (a) (0.3) Mostre que a equação diferencial

   $$(x^2-1)y'' - 6xy' + 12y = 0$$

   tem um ponto ordinário em $x_0 = 0$.

   (b) (1.2) Dada que a fórmula de recorrência é:

   $$a_{n+2} = \frac{(n-4)(n-3)a_n}{(n+2)(n+1)}$$

   para $n \geq 0$, determine a solução satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$.

3. (*2.5 pontos*) Considere a equação diferencial $4xy'' + 2y' + y = 0$

   (a) (0.5) Mostre que a equação tem um ponto singular regular em $x = 0$.

   (b) (1.5) Determine a solução em série de Frobenius em torno de $x = 0$, correspondente à maior raiz da equação indicial. Determine a expressão do termo geral dessa solução.

   (c) (0.5) Determine o raio mínimo de convergência da série da solução em (b).

4. (*2.0 pontos*)

   (a) (0.3) Apresente a extensão par e periódica de período 4π da função

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \pi, \\ 1 & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

   Faça o esboço do gráfico no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

(b) (1.2) Determine a série de Fourier da função em (a).

(c) (0.5) Determine a soma da série de Fourier obtida em (b) e faça um esboço do gráfico desta soma no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

5. (*2.0 pontos*) Usando o método de separação de variáveis, encontrar a solução da seguinte equação da onda, justificando detalhadamente TODA a análise:

$$\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0; & \\ u(x,0) = 0 \qquad u_t(x,0) = \frac{1}{10}\text{sen } x. & \end{cases}$$

1) (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x+1)^{3n}$, $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}(x+1)^{3n}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{n+1}\,|x+1|^{3n+3}}{(n+1)^2}\;\frac{n^2}{2^n\,|x+1|^{3n}} = 2|x+1|^3\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|x+1|^3 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2 = 2|x+1|^3$$

$L < 1 \iff |x+1|^3 < 1/\sqrt[3]{2} \implies r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ é o raio de convergência

0,6

$x = -1 + 1/\sqrt[3]{2}$: $(x+1)^{3n} = \dfrac{1}{2^n}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}(x+1)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge absolutamente pelo critério da integral

$x = -1 - 1/\sqrt[3]{2}$: $(x+1)^{3n} = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}(x+1)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolutamente e portanto converge

$R = \left[-1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, -1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ é a região de convergência da série dada

0,4

1(b) $$\frac{1}{1-r} = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \quad , \quad |r| < 1.$$

$$\boxed{r = -x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} \quad , \quad |x| < 1$$

0,3

$$\operatorname{arc\,tg} t = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \int_0^t x^{2m}\, dx$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{2m+1} \quad , \quad |t| < 1$$

0,4

$$\boxed{t = x^5}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x^5 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^{10m+5} \quad , \quad |x| < 1.$$

0,3

2) (a) (*) $(x^2-1)y'' - 6xy' + 12y = 0$

$P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = -6x$, $R(x) = 12$

$P(0) = -1 \neq 0$, então $x = 0$ é um ponto ordinário da equação (*).

0,3

(b) $a_{n+2} = \dfrac{(n-4)(n-3)\, a_n}{(n+2)(n+1)}$, $n \geq 0$; $\begin{cases} y(0) = 2 = a_0 \\ y'(0) = 3 = a_1 \end{cases}$

$n=0 \implies a_2 = \dfrac{(-4)(-3)}{2 \cdot 1} a_0 = 6a_0 = 12$

$n=1 \implies a_3 = \dfrac{(-3)(-2)}{3 \cdot 2} a_1 = a_1 = 3$

$n=2 \implies a_4 = \dfrac{(-2)(-1)}{4 \cdot 3} a_2 = \dfrac{1}{6} a_2 = 2$

$n=3 \implies a_5 = \dfrac{(-1)(0)}{5 \cdot 4} a_3 = 0$

$n=4 \implies a_6 = \dfrac{0 \cdot 1}{6 \cdot 5} a_4 = 0$

$(a_n = 0 \ \forall\ n \geq 7)$

0,8

$y = 2 + 3x + 12x^2 + 3x^3 + 2x^4$

0,4

OBSERVAÇÃO: $-0,3$ para quem errou os valores de a_0 e a_1.

3(a) (*) $\quad 4xy'' + 2y' + y = 0$

$$P(x) = 4x \quad , \quad Q(x) = 2 \quad , \quad R(x) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Q(x)}{P(x)}\, x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{4x}\, x = \dfrac{1}{2} \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R(x)}{P(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{4x}\, x^2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{4} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$ $x=0$ é um ponto singular regular de (*)

0,5

(b) $\quad 0 = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + \frac{r}{2} = r(r-\frac{1}{2})$ (equação indicial)

$r = 0$ ou $\boxed{r = \frac{1}{2}}$

0,2

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \quad , \quad y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2}$$

$$0 = \sum_{m=0}^{\infty} 4(m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r) a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$$

$$= \quad '' \quad + \quad '' \quad + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^{m+r-1}$$

$$= \left[4r(r-1) + 2r\right] a_0 x^{r-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[4(m+r)(m+r-1) a_m + 2(m+r) a_m + a_{m-1}\right] x^{m+r-1}$$

0,4

$$\Longrightarrow \left[4(m+r)(m+r-1) + 2(m+r)\right] a_m = -a_{m-1}$$

$$a_m = -\frac{a_{m-1}}{2(m+r)(2m+2r-1)} \quad , \quad m \geq 1$$

$$r = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{a_m = -\frac{a_{m-1}}{2(2m+1)m} \quad ; \quad m \geq 1}$$

0,4

$$a_{m+1} = -\frac{a_m}{2(2m+3)(m+1)} \quad , \quad m \geq 0.$$

$$a_m = -\frac{a_{m-1}}{2(2m+1)m}, \quad m \geq 1$$

$m=1 \implies a_1 = -\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 1}$

$m=2 \implies a_2 = -\frac{a_1}{2\cdot 5\cdot 2} = \frac{a_0}{(2\cdot3\cdot1)(2\cdot5\cdot2)} = \frac{a_0}{2^2\cdot(3\cdot5)\cdot(1\cdot2)}$

$m=3 \implies a_3 = -\frac{a_2}{2\cdot7\cdot3} = -\frac{a_0}{2\cdot7\cdot3[2^2\cdot(3\cdot5)\cdot(1\cdot2)]} = -\frac{a_0}{2^3(3\cdot5\cdot7)(1\cdot2\cdot3)}$

$$\boxed{a_m = \frac{(-1)^m a_0}{2^m[1\cdot3\cdot5\cdots(2m+1)](m!)}, \quad m \geq 0}$$

0,4

$a_0 = 1$

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{m+1/2}}{2^m[1\cdot3\cdot5\cdots(2m+1)](m!)}$$

0,1

(c) $y'' + \underbrace{\frac{1}{2x}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{1}{4x}}_{q(x)} y = 0$

$x\,p(x) = \frac{1}{2}$ e $x^2 q(x) = \frac{x}{4}$ são polinômios

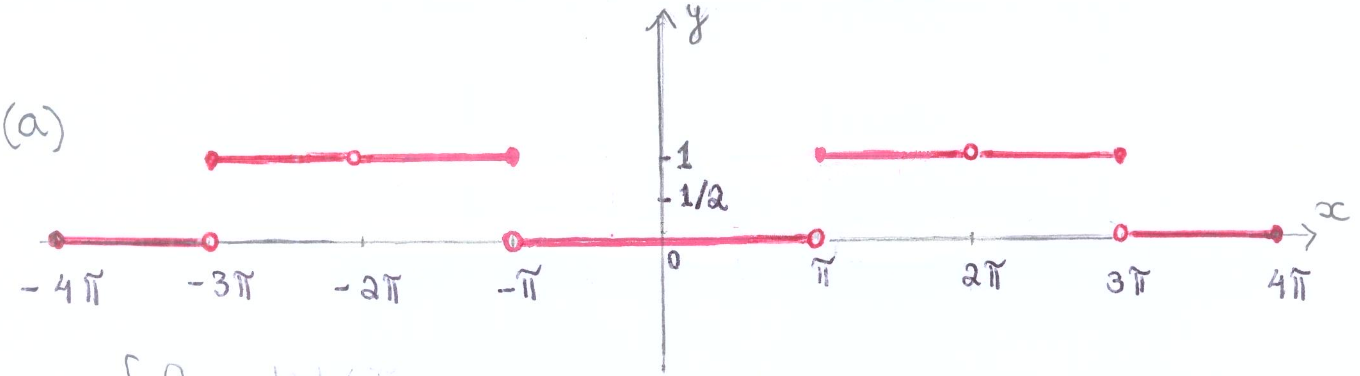
$\Downarrow$

$\rho_1 = ($raio da série de Taylor de $x\,p(x)$ em $x_0 = 0) = +\infty$

$\rho_2 = ($raio da série de Taylor de $x^2 q(x)$ em $x_0 = 0) = +\infty$

0,5 Resposta: Raio mínimo $= \rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} = +\infty$

4) (a)



$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < \pi, \\ 1 & \pi \leqslant |x| < 2\pi \end{cases} \quad ; \quad f(x) = f(-x), \quad f(x+4\pi) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

0,3

(b) $L = 2\pi$; $b_m = 0 \ \forall m \geqslant 1$ pois $f(x)$ é par.

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 1.dx = 1$$

0,2

$m \geqslant 1$

$$a_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos\left(\frac{mx}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{2}{m}\,\mathrm{sen}\left(\frac{mx}{2}\right)\Big|_{x=\pi}^{x=2\pi} = -\frac{2}{m\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)$$

0,5

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{2}{m\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{mx}{2}\right)$$

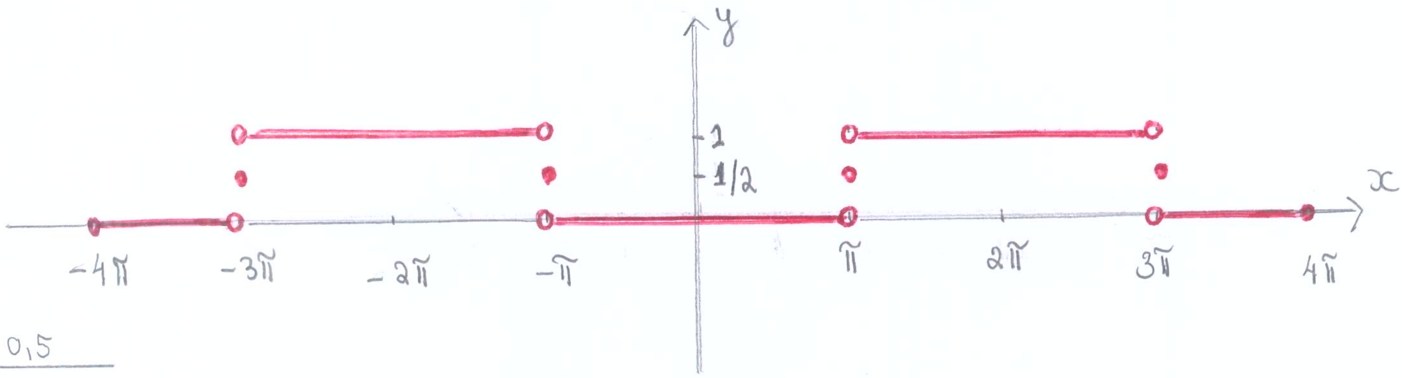
(é a série de Fourier da extensão de $f(x)$)

$$= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(2k-1)}\cos\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right)$$

0,5

(c) $g(x)$ = soma da série de Fourier $= \begin{cases} 0, & |x| < \pi \\ 1, & \pi < |x| < 2\pi \\ \frac{1}{2}, & |x| = \pi \end{cases}$

$g(x+4\pi) = g(x), \forall x$



0,5

5) $a^2 = 1/4$, $L = \pi$, $g(x) = \frac{1}{10} \operatorname{sen} x$

(1) $u(x,t) = X(x)T(t)$, $u_{xx} = X''T$, $u_{tt} = XT''$

(2) $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\sigma$ (constante) $\Rightarrow \begin{cases} (3) & X'' + \sigma X = 0 \\ (4) & T'' + a^2 \sigma T = 0 \end{cases}$

0,2

$\begin{cases} 0 = u(0,t) = X(0)T(t) \ \forall t \\ 0 = u(L,t) = X(L)T(t) \ \forall t \\ 0 = u(x,0) = X(x)T(0) \ \forall x \end{cases}$ $\begin{cases} T(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow u(x,t) = 0 \ \forall x,t \\ \Rightarrow u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \ \forall x \\ (*) \quad \text{(contradição)} \end{cases}$

Também, da mesma forma, não podemos ter $X(x) = 0 \ \forall x$. Assim

0,2 (5) $X(0) = X(L) = T(0) = 0$

$\boxed{\sigma = 0}$ $X(x) = k_1 x + k_2$

$0 = X(0) = X(L) \Rightarrow k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0 \ \forall x,t$ (contradição)

$\boxed{\sigma < 0}$ $\sigma = -\lambda^2, \lambda > 0 \Rightarrow X(x) = k_1 e^{\lambda x} + k e^{-\lambda x}$

0,2 $0 = X(0) = X(L) \Rightarrow k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0 \ \forall x,t$ (contradição)

$\boxed{\sigma > 0}$ $\sigma = \lambda^2$, $\lambda > 0 \Rightarrow X(x) = k_1 \cos \lambda x + k_2 \operatorname{sen} \lambda x$

$0 = X(0) = k_1 \Rightarrow X(x) = k_2 \operatorname{sen} \lambda x$

$0 = X(L) = \underset{\neq 0}{k_2} \operatorname{sen} \lambda L \Rightarrow \lambda L = m\pi$, $m \geq 1 \Rightarrow \lambda = \frac{m\pi}{L}$, $m \geq 1$

0,2 $X_m(x) = \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} = \operatorname{sen} mx$, $m \geq 1$

$\begin{cases} a^2 \sigma = \frac{a^2 m^2 \pi^2}{L^2} \\ \quad = \frac{m^2}{4} \end{cases}$

(4) $T'' + \frac{m^2}{4} T = 0$

$T_m(t) = \alpha_m \cos \frac{mt}{2} + \beta_m \operatorname{sen} \frac{mt}{2}$

$0 = T(0) = \alpha_m \Rightarrow T_m(t) = \beta_m \operatorname{sen} \frac{mt}{2}$, $m \geq 1$

0,2

(b) $u_m(x,t) = X_m(x)\, T_m(t) = \beta_m \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} \frac{mt}{2}$

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} \frac{mt}{2}$$

$\uparrow$

solução da equação da onda satisfazendo as condições de contorno

0,4

$$u_t(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2} \beta_m \operatorname{sen} mx \cos \frac{mt}{2}$$

0,2

$$\frac{1}{10} \operatorname{sen} x = u_t(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2} \beta_m \operatorname{sen} mx$$

$$= \frac{1}{2} \beta_1 \operatorname{sen} x + \frac{2}{2} \beta_2 \operatorname{sen} 2x + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\beta_m = 0 \quad \forall \, m \geq 2, \qquad \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \beta_1, \qquad \beta_1 = \frac{1}{5}$$

0,2

$$u(x,t) = \frac{1}{5} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{t}{2}$$

0,2
