ME-323 — Prova 1

1. Estando os numeros $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ dispostos em ordem aleatória, determine a probabilidade que os digitos $4, 5, 6$ apareçam como vizinhos nessa ordem.

Obs.: somente será aceita a resposta numérica.

2. Uma urna contém 4 bolas brancas e 3 vermelhas. Lançamos um dado, e se o resultado for i, retiramos i bolas da urna. Aconteceu que todas as bolas retiradas eram brancas. Qual é a probabilidade que o resultado do dado tenha sido 3?

3. A f.d. de v.a. X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2/4, & 0 \le x < 1, \\ x/3, & 1 \le x < 2, \\ 3/4, & 2 \le x < 4, \\ 3(3 + e^{4-x})^{-1}, & x \ge 4. \end{cases}$$

Calcule: a) $\mathbf{P}[1 < X \le 5]$; b) $\mathbf{P}[X \ge 2]$; c) $\mathbf{P}[X = 0]$; d) $\mathbf{P}[X = 2]$; e) $\mathbf{P}[1 \le X < 2]$.

4. Seja X v.a. com distribuição de Poisson com parâmetro λ. Calcule

a) $\mathbf{E}a^X$ e $\mathbf{E}(Xa^X)$, sendo a qualquer número positivo;

b) $\mathbf{E}X!$, sendo $0 < \lambda < 1$.

5. Uma moeda honesta é jogada 100 vezes e seja X o número de caras obtido. Calcule (usando a aproximação apropriada) $\mathbf{P}[43 \le X \le 53]$.

Obs.: pode-se deixar a resposta em termos de Φ (f.d. de Normal Padrão) de argumento **não-negativo**.

Gabarito - Primeira Prova ME323

Popov

1°semestre de 2011

1 $\frac{1}{42}$

$\frac{5!}{7!} = \boxed{\frac{1}{42}}$

2 $\frac{4}{35}$

$\left|\begin{array}{c} 4B \\ 3V \end{array}\right|$

Seja $A = \{$ todas brancas $\}$,
$B_i = \{$ resultado e i $\}$
$i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\mathbb{P}[A|B_1] = \frac{4}{7}$
$\mathbb{P}[A|B_2] = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$
$\mathbb{P}[A|B_3] = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$
$\mathbb{P}[A|B_4] = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{35}$
$\mathbb{P}[B_3|A] = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{35}}{\frac{1}{6}\left(\frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{35} + \frac{1}{35}\right)} = \boxed{\frac{4}{35}}$

3

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/4 & 0 \le x \le 1 \\ x/3 & 1 \le x \le 2 \\ 3/4 & 2 \le x \le 4 \\ 3/(3+e^{4-x})^{-1} & x \ge 4 \end{cases}$$

3.1 $\frac{3}{3+e^{-1}} - \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}[1 \le X \le 5] = F(5) - F(1) = \boxed{\frac{3}{3+e^{-1}} - \frac{1}{3}}$

3.2 $\frac{1}{3}$

$\mathbb{P}[X \ge 2] = 1 - F(2^-) = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

3.3 0

$\mathbb{P}[X = 0] = \boxed{0}$

3.4 $\frac{1}{12}$

$\mathbb{P}[X = 2] = F(2) - F(2^-) = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}$

3.5 $\frac{5}{12}$

$\mathbb{P}[1 \le X \le 2] = F(2^-) - F(1^-) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{12}}$

4

$X \approx P(\lambda)$, $\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \geq 0$
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

4.1

4.1.1 $e^{\lambda(a-1)}$

$$E[a^X] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot a^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{a\lambda} = \boxed{e^{\lambda(a-1)}}$$

4.1.2 $a\lambda e^{\lambda(a-1)}$

$$E[Xa^X] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} ka^k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} ka^k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} a\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} a\lambda e^{a\lambda} = \boxed{a\lambda e^{\lambda(a-1)}}$$

4.2 $\frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}$

$$E[X!] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k! \frac{\lambda^k}{k!} = \boxed{\frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}} \qquad \Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \,; 0 < x < 1 \Big)$$

5 $\Phi(0.7) + \Phi(1.5) - 1$

$X \approx B(100, \frac{1}{2})$
$\mu = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$
$\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})} = 5 \mathbb{P}[42 \leq X \leq 53] = \mathbb{P}[42.5 \leq X \leq 53.5]$ $\big($correção de continuidade$\big)$
$\approx \mathbb{P}[42 < X < 54] \approx \mathbb{P}[\frac{42.5-50}{5} \leq Z \leq \frac{53.5-50}{5}] = \mathbb{P}[1.5 \leq Z \leq 0.7] =$
$= \Phi(0.7) - \Phi(-1.5) = \boxed{\Phi(0.7) + \Phi(1.5) - 1}$