Gabarito - Prova P2 - Data: 29/06/2007

****

Questão 01 (Valor 2,0): Um material que falha segundo o critério de Tresca (máxima tensão de cisalhamento) apresentou falha em um ensaio uniaxial de tração quanto σ_{ult}=50N/mm^2. Uma chapa deste mesmo material está sujeita a um estado homogêneo de tensões tal como mostrado na figura 1. Inicialmente a peça está submetida a uma tensão de compressão σ_{yy}=(-)18N/mm^2. Em um segundo momento a peça é solicitada por uma tensão de tração σ_{xx}, tal como mostrado na figura. Assumindo-se que a peça está sujeita a um estado homogêneo de tensões, deseja-se saber:

a) qual a máxima tensão σ_{xx} que pode ser aplicada na peça antes que haja falha,
b) qual o plano em que ocorrerá a falha. Faça um esboço claro do plano em questão, indicado pelo ângulo β.

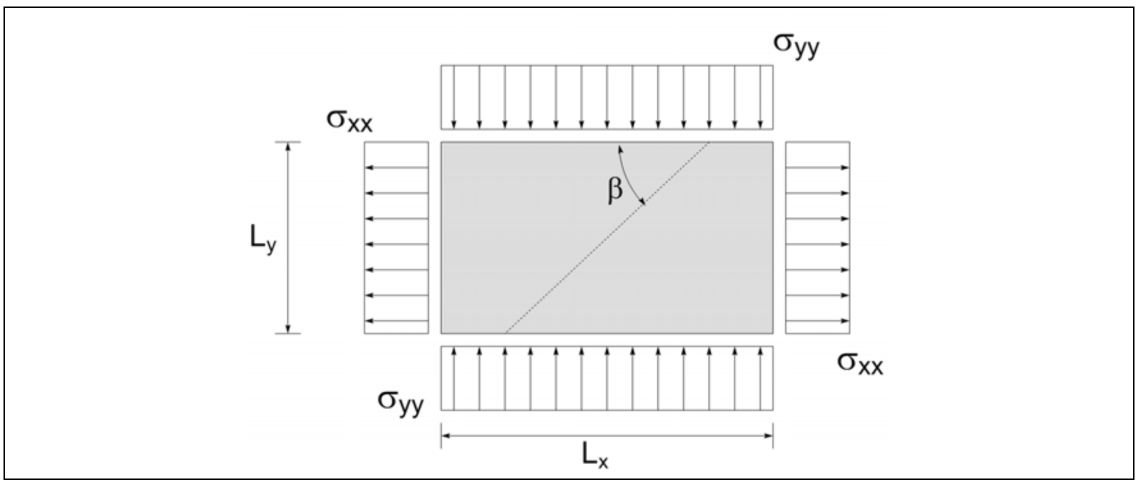


Figura 1: Peça sujeita a estado de tensão homogeneo

Solução:

1) Círculo de Mohr para ensaio de tração uniaxial, ver figura 2. A análise do círculo de Mohr conclui-se que a tensão máxima de cisalhamento que o material pode suportar é $\tau_{\max} = \sigma_{ult}/2 = 25\ \text{N/mm}^2$.

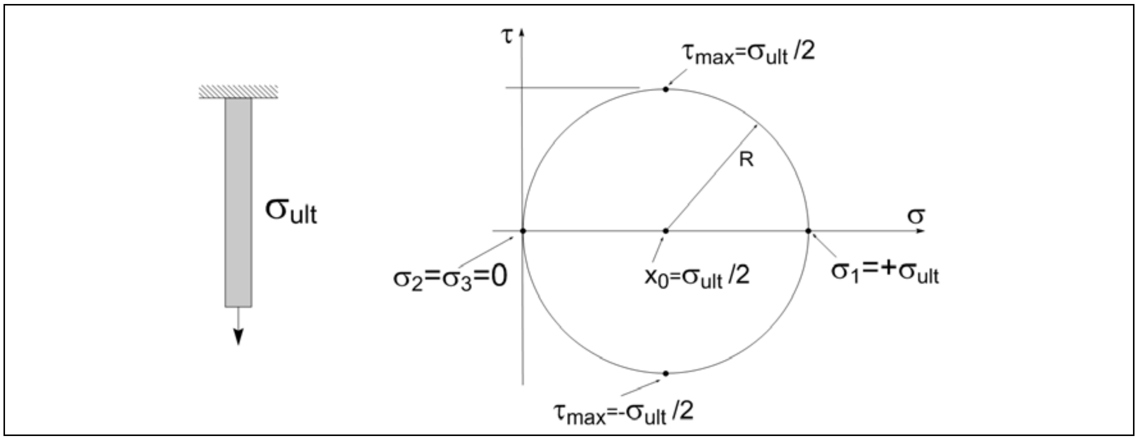


Figura 2: Ensaio de tração uniaxial e seu círculo de Mohr

2) Determinação da tensão máxima σ_{xx} que a peça pode suportar.

Já existe um a tensão $\sigma_{yy} = \sigma_2 = -18\text{N/mm}^2$ aplicada, que é tensão principal, uma vez que não existe tensão de cisalhamento no plano. Também sabemos que $\sigma_3 = 0$. Como também não existe tensão de cisalhamento no plano que que se aplica σ_{xx}, temos que $\sigma_{xx} = \sigma_1$. Desta forma a questão é saber qual tensão σ_1 causa uma tensão de cisalhamento $\tau_{\max} = \sigma_{ult}/2 = 25\ \text{N/mm}^2$.

Aplicando o critério de falha de Tresca, temos:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{ult}}{2} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$$

Colocando valores numéricos obtemos:

$$\tau_{\max} = \frac{50}{2} = 25 = \frac{(\sigma_1 - (-18))}{2}$$

Logo:

$$\sigma_1 = \sigma_{xx} = +32\ \text{N/mm}$$

O círculo de Mohr correspondente encontra-se na figura 3.

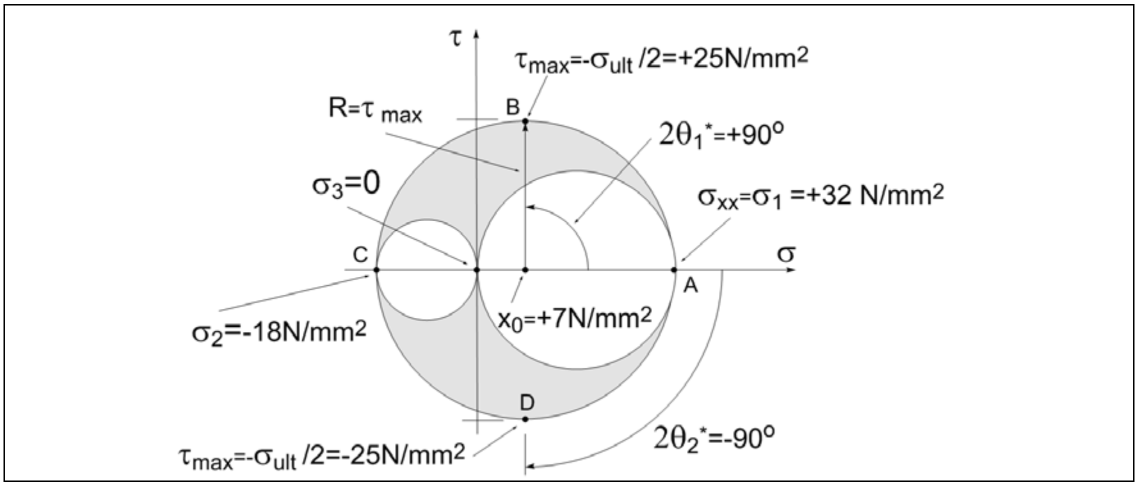


Figura 3: círculo de Mohr na condição de falha do material por Tresca

3) Determinação do plano de falha.

Conforme podemos observar na figura 4, os planos A e C são planos principais. Estes mesmos planos A e C estão indicados no círculo de Mohr da figura 3. Os planos de falha, segundo o critério de Tresca, são aqueles em que exista a maior tensão de cisalhamento. No círculo de Mohr da figura 3, estes planos de cisalhamento máximo estão indicados pelas letras B e D.

Note que partindo do ponto A, correspondente ao plano em que atua a tensão $\sigma_{xx} = \sigma_1$, podemos atingir o plano com tensão de cisalhamento positiva $\tau_{\max} = +25\ \text{N/mm}^2$, que corresponde ao ponto B, girando no círculo de Mohr o ângulo $2\theta_1^* = +90^o$ no sentido anti-horário. Na situação física, vamos girar a metade do ângulo, no sentido horário, ou seja, $\theta_1^* = -45^o$. Esta passagem do plano principal, indicado pela letra A, para o plano de cisalhamento máximo, indicado pela letra B, está mostrada na figura 5, abaixo.

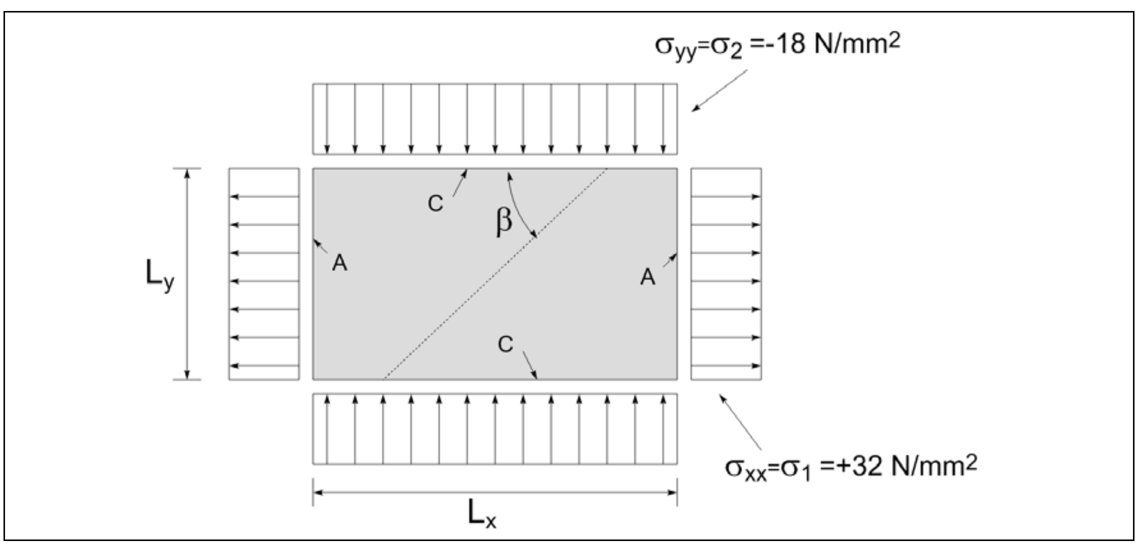


Figura 4: Planos A e C relacionados no círculo do Mohr

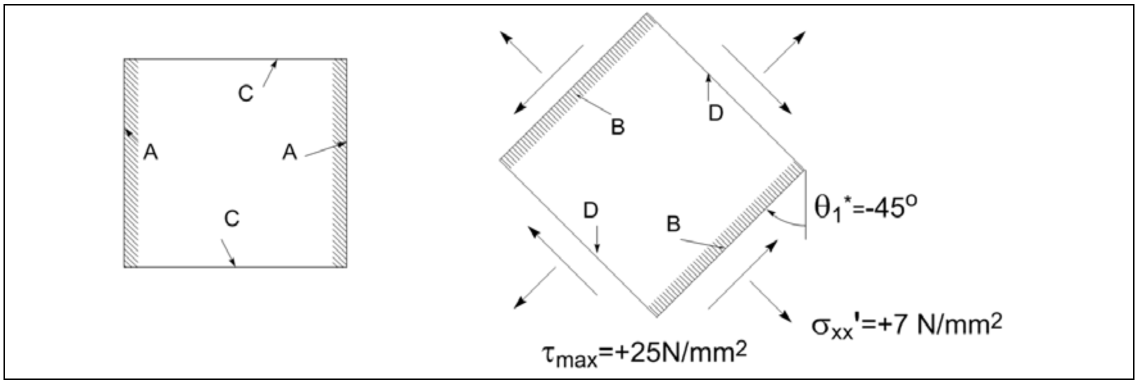


Figura 5: Do plano principal A para o plano de cisalhamento máximo B.

As tensões, normal $\sigma'_{xx} = +7\ \text{N/mm}^2$ e tangencial máxima $\tau_{\max} = +25\ \text{N/mm}^2$, correspondentes ao plano B estão indicadas também na figura 5. A figura 6, por sua vez, indica o plano em que a tensão de cisalhamento máxima atua na peça.

Uma análise do círculo de Mohr da figura 3, indica que existe um outro plano de cisalhamento máximo, indicado pela letra D. Partindo-se do ponto A no círculo de Mohr pode-se chegar ao ponto D através de uma rotação no sentido horário de $2\theta_2^* = -90^o$. Na situação física esta plano é atingido girando-se a face A, no sentido anti-horário de um ângulo $\theta_2^* = +45^o$. O plano resultante está mostrado na figura 7.

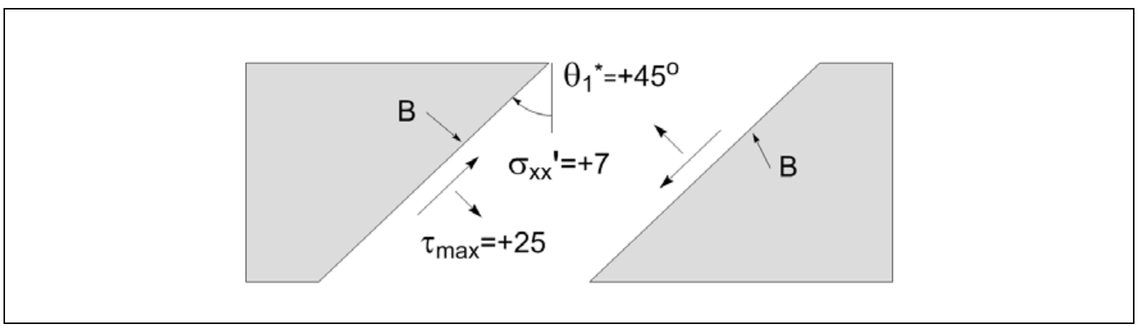


Figura 6: Plano de cisalhamento máximo positivo.

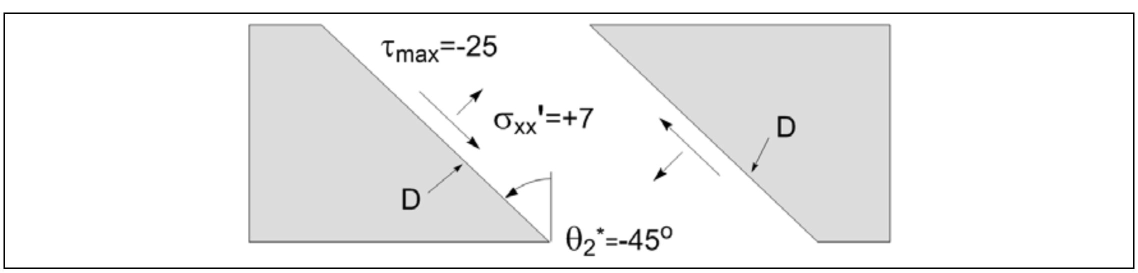


Figura 7: Plano de cisalhamento máximo negativo.

****

****

Questão 02 (Valor 4.0): Um sistema estrutural, mostrado na figura 2a, é compostos por duas vigas (AB) e (CD) bem como por uma barra rígida (BD). Existe um força concentrada aplicada no ponto D, de intensidade F. Para esta sistema pede-se:

a) Uma expressão analítica para a força na barra rígida BD,

b) Sabendo-se que $E_1 I_{ZZ1} = 1{,}134 \times 10^{11} N.mm^2$, $E_2 I_{ZZ2} = 2 E_1 I_{ZZ1}$ L=1200mm, F=5000N, pede-se o valor numérico da força na barra rígida BD.

Observação: Utilize a informação da equação de linha elástica da viga mostrada na figura 2b, abaixo: $v(x) = \frac{F}{6EI}\left(x^3 - 3Lx^2\right)$

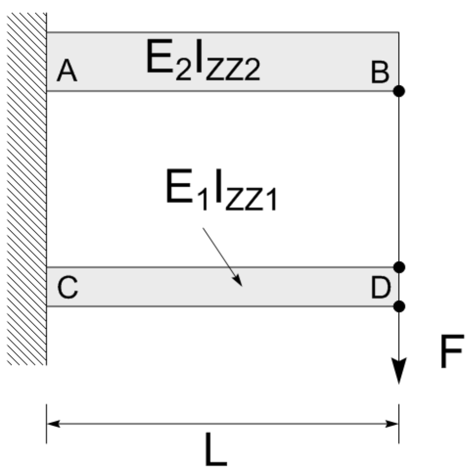
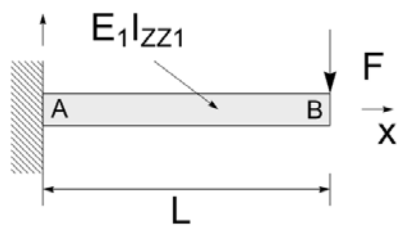


Figura 1a: Sistema hiperestático com duas vigas e uma barra rígida



$$v(x) = \frac{F}{6EI}\left(x^3 - 3Lx^2\right)$$

Figura 1b: solução auxiliar

Solução

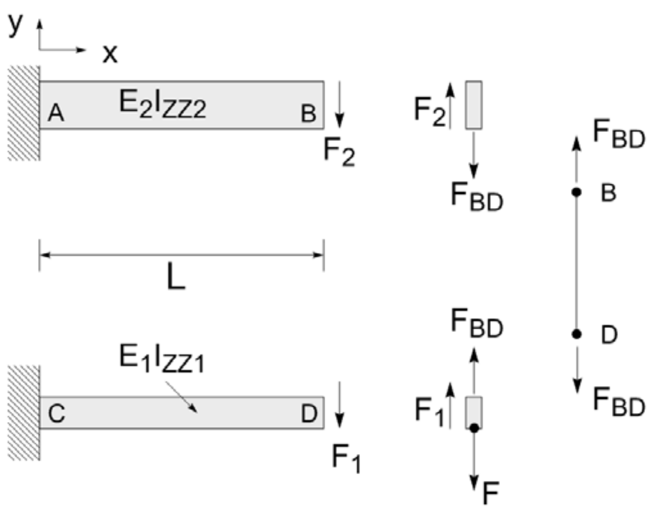
1) Decomposição da estrutura em sub-sistemas.

A decomposição em sub-sistemas está mostrada na figura 2 abaixo. Usa-se somente um sistema de coordenadas para descrever as duas vigas, já que elas são paralelas e possuem o mesmo comprimento. Para a barra rígida, BD, não é necessário um sistema de coordenadas.

O sistema possui duas interfaces. O ponto B e o ponto D. Estas estão mostradas também na figura 2. Nestas interfaces são aplicadas as condições de equilíbrio.

2) Condições de Equilíbrio nas Interfaces.

As condições de Equilíbrio nas interfaces B e D estão escritas ao lado da figura 2.



Condições de Equilíbrio,

interface B:

$$+F_2 - F_{BD} = 0$$

ou

$$F_2 = F_{BD}$$

Interface D:

$$+F_1 + F_{BD} - F = 0$$

ou

$$F_1 = F - F_{BD}$$

3) Compatibilidade Cinemática

Considerando-se que a barra BD é rígida, não existe variação de comprimento da barra BD, consequentemente a flecha do ponto B na viga 2 é igual à flecha do ponto D na viga 1. Matematicamente:

$$v_{1D} = v_{2B}$$

Ou ainda

$$v_{1D} = v_1\left(x = L\right) = v_2\left(x = L\right) = v_{2B}$$

4) Expressões para as flechas ou deslocamentos nas extremidades das vigas.

Utilizando-se a expressão das flechas fornecida na figura auxiliar podemos escrever:

$$v_1(x = L) = \frac{F_1}{6E_1I_{ZZ1}}\left(L^3 - 3LL^2\right) = -\frac{\left(F - F_{BD}\right)L^3}{3E_1I_{ZZ1}}$$

$$v_2(x = L) = \frac{F_2}{6E_2I_{ZZ2}}\left(L^3 - 3LL^2\right) = -\frac{F_{BD}L^3}{3E_2I_{ZZ2}}$$

Aplicando-se a compatibilidade cinemática entre as duas expressões acima temos:

$$v_1(x=L) = -\frac{(F - F_{BD})L^3}{3E_1 I_{ZZ1}} = v_2(x=L) = -\frac{F_{BD}L^3}{3E_2 I_{ZZ2}}$$

Ou ainda

$$-\frac{(F - F_{BD})L^3}{3E_1 I_{ZZ1}} = -\frac{F_{BD}L^3}{3E_2 I_{ZZ2}}$$

Cuja solução é:

$$F_{BD} = F\frac{E_2 I_{ZZ2}}{(E_1 I_{ZZ1} + E_2 I_{ZZ2})}$$

Esta é a solução procurada.

5) Valor numérico da força.

Considerando-se que F=5000 N e que $E_2 I_{ZZ2} = 2E_1 I_{ZZ1}$ podemos escrever:

$$F_{BD} = F\frac{2E_1 I_{ZZ1}}{(E_1 I_{ZZ1} + 2E_1 I_{ZZ1})} = F\frac{2}{3} = 5000N\frac{2}{3} = 3.333,00N$$

****

****

Questão 03 (Valor 4.0): Uma viga não homogênea submetida a um carregamento uniformemente distribuído q_0 está mostrada na figura 3. Aplicando o princípio das forças virtuais determine:

a) uma expressão analítica para a rotação θ_{ZA} do ponto A,

b) considerando-se que $E_2 I_{ZZ2} = 2E_1 I_{ZZ1} = 2,268 \times 10^{11} N.mm^2$, L=600mm, q_o=12kN/m, determine o valor numérico da rotação θ_{ZA}.

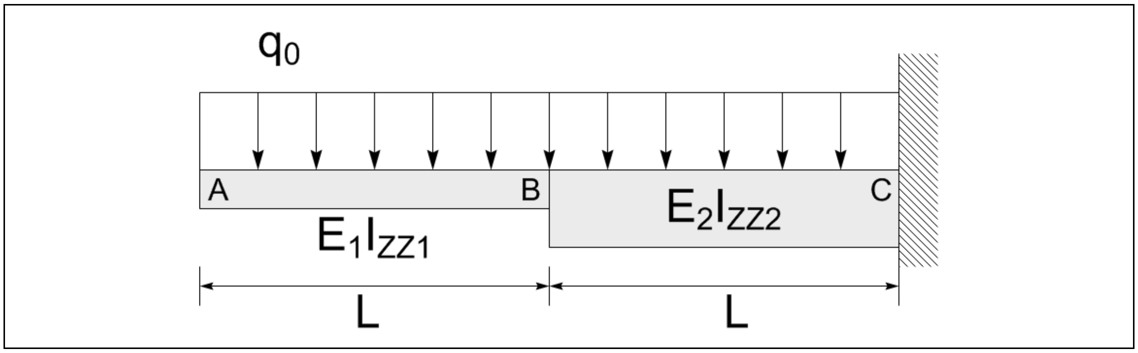


Figura 3: Viga não homogênea

Solução:

1) Determinação do estado auxiliar dos esforços internos

A figura 2 mostra o sistema original bem como o diagrama de momento fletor $M_Z(x)$. Já a figura 3 mostra o estado auxiliar necessário para a determinação da rotação θ_{ZA}, bem como o momento fletor $\overline{M}_Z(x)$ resultante na viga não-homogênea.

Como o sistema é isostático os esforços internos não dependerão da geometria da seção transversal da viga, nem de seu material. Estes esforços internos podem ser obtidos pelo Método das Seções ou integrando-se a Equação Diferencial de Equilíbrio da viga:

$$\frac{d^2 M_Z(x)}{dx^2} = q(x)$$

Os momentos fletores do estado original $M_Z(x)$ e do estado auxiliar $\overline{M}_Z(x)$ ¨são, respectivamente (ver figuras 2 e 3):

$$M_Z(x) = -q_0 \frac{x^2}{2}$$

e

$$\overline{M}_Z(x) = +\overline{M}_Z$$

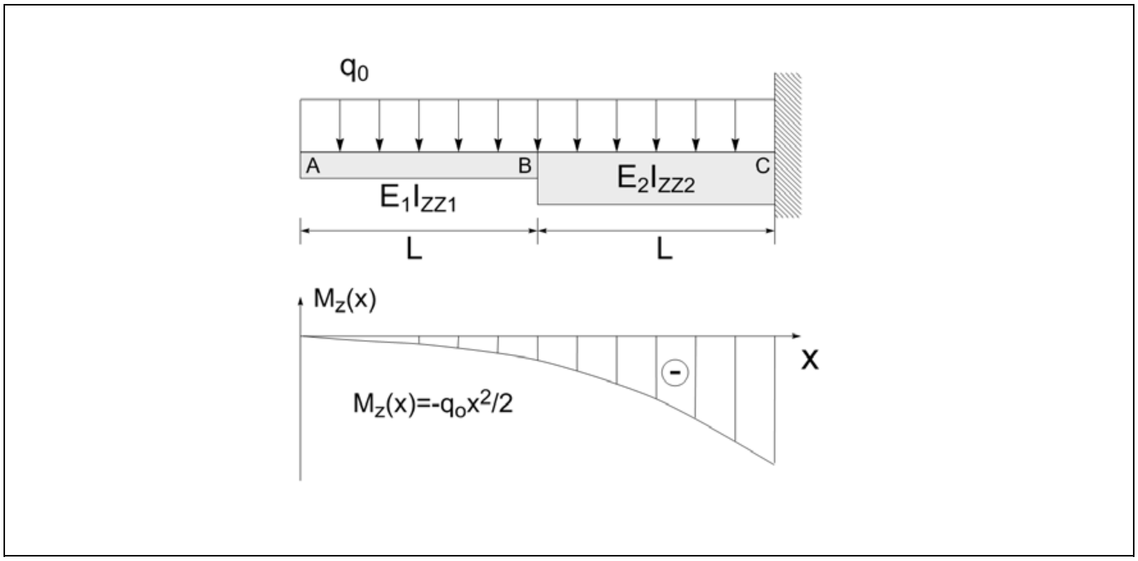


Figura 2: Sistema original e momento fletor $M_Z(x)$

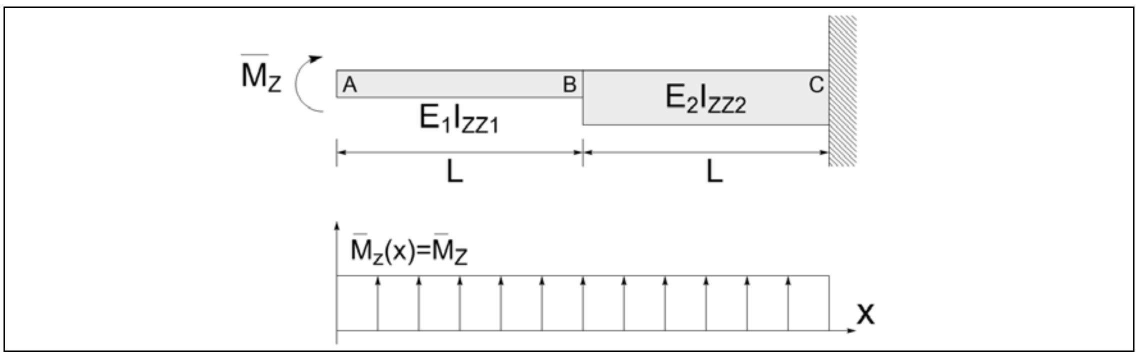


Figura 3: Sistema auxiliar para cálculo de θ_{ZA} e momento fletor resultante $\overline{M}_Z(x)$

2) Trabalho das Forças Virtuais

$$\delta W_E = \overline{M_Z}\,\delta\,\theta_{ZA} = \overline{M_Z}\,\mu\,\theta_{ZA}$$

3) Energia de Deformação

$$\delta U = \mu\left[\int_{x=0}^{x=L} \frac{\overline{M_Z}(x)\,M_Z(x)}{E_1 I_{ZZ1}}dx + \int_{x=L}^{x=2L} \frac{\overline{M_Z}(x)\,M_Z(x)}{E_2 I_{ZZ2}}dx\right]$$

Ou aplicando as expressões para os momentos:

$$\delta U = \mu\left[\int_{x=0}^{x=L} \frac{\overline{M_Z}}{E_1 I_{ZZ1}}\left(-\frac{q_0 x^2}{2}\right)dx + \int_{x=L}^{x=2L} \frac{\overline{M_Z}}{E_2 I_{ZZ2}}\left(-\frac{q_0 x^2}{2}\right)dx\right]$$

$$\delta U = -\mu\left[\frac{\overline{M_Z} q_0}{2E_1 I_{ZZ1}}\int_{x=0}^{x=L} x^2 dx + \frac{\overline{M_Z} q_0}{2E_2 I_{ZZ2}}\int_{x=L}^{x=2L} x^2 dx\right]$$

Ou ainda

$$\delta U = -\mu\left[\frac{\overline{M_Z} q_0}{2E_1 I_{ZZ1}}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=L} + \frac{\overline{M_Z} q_0}{2E_2 I_{ZZ2}}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=L}^{x=2L}\right]$$

$$\delta U = -\mu\frac{\overline{M_Z} q_0 L^3}{6}\left[\frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} + \frac{7}{E_2 I_{ZZ2}}\right]$$

4) Aplicando o Princípio da Forças Virtuais

$$\delta W_E = \delta U$$

$$\overline{M_Z}\,\mu\,\theta_{ZA} = -\mu\frac{\overline{M_Z} q_0 L^3}{6}\left[\frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} + \frac{7}{E_2 I_{ZZ2}}\right]$$

Ou ainda:

$$\theta_{ZA} = -\frac{q_0 L^3}{6}\left[\frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} + \frac{7}{E_2 I_{ZZ2}}\right]$$

O sinal negative indica que a rotação real é contrária ao sentido do momento fletor auxiliar $\overline{M}_Z(x)$ aplicado na extremidade da viga.

5) Valor numérico da rotação

Considerando-se que $E_2 I_{ZZ2} = 2E_1 I_{ZZ1} = 2,268\times 10^{11}\, N.mm^2$ podemos escrever:

$$\theta_{ZA} = -\frac{q_0 L^3}{6}\left[\frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} + \frac{7}{E_2 I_{ZZ2}}\right] = -\frac{q_0 L^3}{6E_1 I_{ZZ1}}\left[\frac{1}{1} + \frac{7}{2}\right] = -\frac{9 q_0 L^3}{12 E_1 I_{ZZ1}} = -\frac{3 q_0 L^3}{4 E_1 I_{ZZ1}}$$

Ou ainda:

$$\theta_{ZA} = -\frac{3 q_0 L^3}{4 E_1 I_{ZZ1}} = -\frac{3(12N/mm)(600mm)^3}{4(1.134\times 10^{11}\, N.mm^2)} = -1.714\times 10^{-3} = 0,001714(rad)$$

****