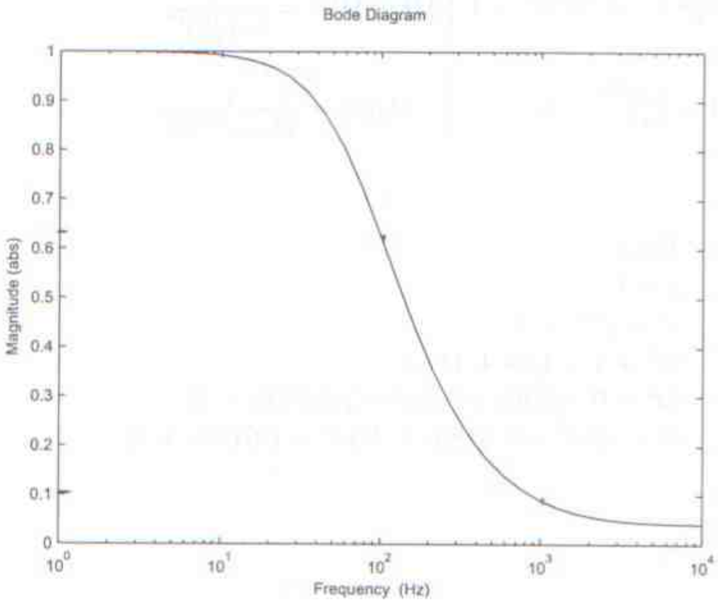
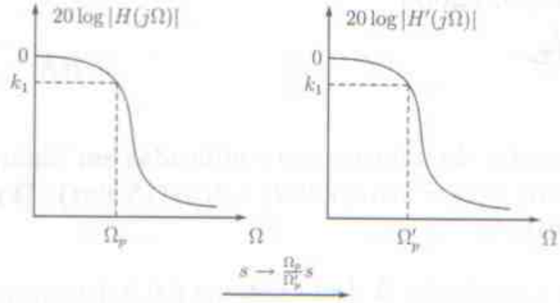
ES879 - Primeira Prova - 03/09/2008

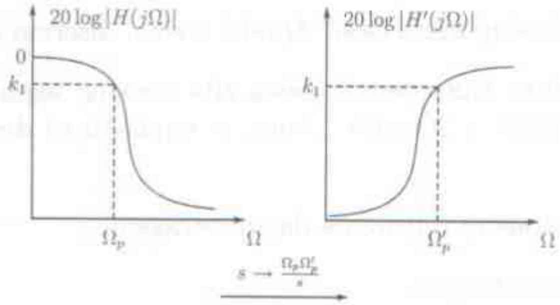
Nome: Gabarito RA:

1. Um modem transporta pacotes de informações codificadas em binário que representam amostras do sinal de entrada $x(t) = 5cos(500\pi t) + 4cos(1500\pi t)$. O modem possui taxa de transferência de $33600 bits/s$.
   (a) (valor 1.0) Dado que a resolução Δ deste sistema é 0.3 determine o número de bits.
   (b) (valor 1.0) Qual é a taxa de amostragem do sistema?
   (c) (valor 1.0) Haverá *aliasing* neste caso? Qual é o sinal discreto correspondente?
2. (valor 3.0) Projete um filtro Butterworth passa-alta com os seguintes requisitos: a) $-2dB$ a $80rad/s$ e b) $-20dB$ a $20rad/s$. Nota: o requisito a) deve ser satisfeito de forma exata.
3. (valor 1.5) Explique e demonstre o teorema da amostragem.
4. Sobre o experimento de amostragem:
   (a) (valor 0.5) Dado o sinal contínuo $x(t) = 3cos(20\pi t) + 2cos(200\pi t) + cos(2000\pi t)$. Como seria o espectro deste sinal visualizado em um analisador dinâmico de sinais, como por exemplo, no NI Elvis, com uma freqüência de amostragem de $5000Hz$?
   (b) (valor 0.75) Esboce o espectro se a freqüência de amostragem for de $1200Hz$.
   (c) (valor 0.5) O sinal $x(t)$ será filtrado pelo filtro dado na figura abaixo. Esboce o espectro sinal filtrado. com 5000Hz de freqüência de amostragem.



   (d) (valor 0.75) Você possui o valor diário das ações da Petrobrás dos últimos 5 anos. Este sinal possui grande oscilação de um dia para o outro. Você deseja visualizar este sinal reduzindo as oscilações. Você dispõe destes dados na forma de um vetor. Proponha uma equação a diferenças e as respectivas condições iniciais para filtrar este sinal.





$$n = \frac{\log\left[\frac{\left(10^{\frac{-k_1}{10}}-1\right)}{\left(10^{\frac{-k_2}{10}}-1\right)}\right]}{2\log\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right)} \qquad \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{\frac{-k_1}{10}} - 1$$

$$\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{\frac{-k_2}{10}} - 1 \qquad |H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}$$

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = 0 \qquad H_n(s) = \frac{1}{\prod_{SPE}(s-s_k)}$$

n	$B(s)$
1	$s+1$
2	$s^2+\sqrt{2}s+1$
3	$(s^2+s+1)(s+1)$
4	$(s^2+0.76536s+1)(s^2+1.84776s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0.6180s+1)(s^2+1.6180s+1)$

1) a) como 1500π é múltiplo de 500π haverá coincidência de pontos para a soma das amplitudes. Logo,

$$x_{max} - x_{min} = 9 - (-9) = 18$$

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L-1} \Rightarrow 0{,}3 = \frac{18}{L-1} \Rightarrow L = 61$$

$$2^5 < L < 2^6 \Rightarrow 6 \text{ bits}$$

b) $$\frac{33600}{6} = \underbrace{5600 \text{ amostras/s}}_{\text{taxa de amostragem}} \Rightarrow F_s = 5600\ Hz$$

c) $F_{max} = 750\ Hz$

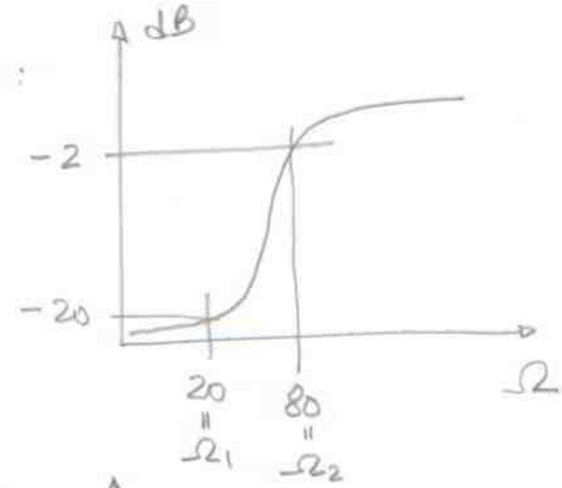
$F_s > 2 \times 750 \Rightarrow$ não haverá aliasing.

$$X(n) = 5\cos\left(500\pi \frac{n}{5600}\right) + 4\cos\left(1500\pi \frac{n}{5600}\right) =$$

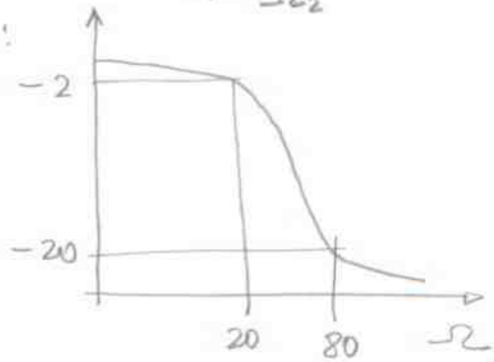
$$= 5\cos\left(\frac{5}{56}\pi n\right) + 4\cos\left(\frac{15}{56}\pi n\right)$$

$\omega_1 = \frac{5}{56}\pi$ e $\omega_2 = \frac{15}{56}\pi$ ambos na faixa fundamental $([-\pi, \pi]) \Rightarrow$ sem aliasing como esperado.

2) Requisitos:



Passa baixa:



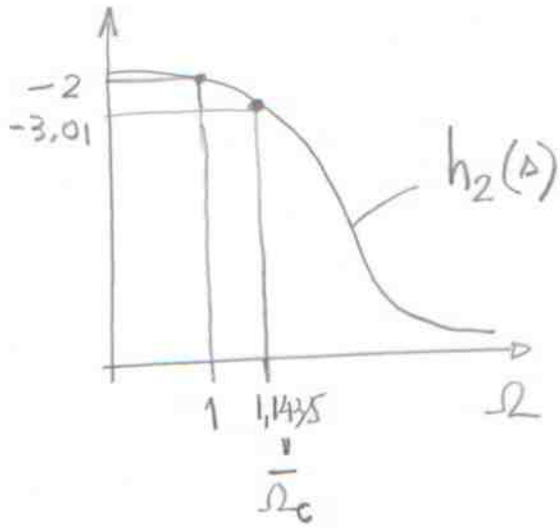
$$n = \frac{\log\left[\dfrac{10^{-(-2)/10} - 1}{10^{-(-20)/10} - 1}\right]}{2\log\left(\dfrac{20}{80}\right)} = 1{,}85 \Longrightarrow n = 2$$

$$\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{-K_1/10} - 1 \Rightarrow \left(\frac{20}{\Omega_c}\right)^4 = 10^{-(-2)/10} - 1 \Rightarrow \Omega_c = 22{,}8697$$

Normalizando: $\bar{\Omega}_c = \dfrac{\Omega_c}{\Omega_1} = \dfrac{22{,}8697}{20} = 1{,}1435$

ButterWorth normalizado $(n=2)$:

$$\bar{h}_2(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\,s + 1}$$



$h_2(s)$ - passa baixa com $\bar{\Omega}_c = 1,1435$

$$h_2(s) = \bar{h}_2(s)\Big|_{s \to \frac{1}{\bar{\Omega}_c} s}$$

Transformação passa-baixa para passa alta:

$$H(s) = h_2(s)\Big|_{s \to \Omega_2 \cdot \frac{1}{s}} = \bar{h}_2(s)\Big|_{s \to \frac{1}{\bar{\Omega}_c} \cdot \Omega_2 \cdot \frac{1}{s}}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1}\Bigg|_{s \to \frac{1}{1,1435} \times 80 \times \frac{1}{s}} =$$

$$= \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1}\Bigg|_{s \to \frac{69,9606}{s}} = \frac{s^2}{s^2 + 98,94 s + 4894}$$

3) $x(t) = A\cos(2\pi F t + \theta)$

Amostragem: $t = nT = \frac{n}{F_s}$

$\hookrightarrow$ freq. de amostragem

$$x(n) = A\cos\left(2\pi F \frac{n}{F_s} + \theta\right) = A\cos(2\pi f n + \theta)$$

$f = \frac{F}{F_s}$; $\omega = 2\pi f$

Note que $\cos\left[(\omega_0 + 2\pi)n + \theta\right] = \cos(\omega_0 n + \theta)$

Assim, quando $-\pi < \omega_0 < +\pi$ tem-se um sinal único, e se ω_0 está fora da faixa anterior tem-se um alias (existe um sinal idêntico dentro da faixa $[-\pi, \pi]$. Para não haver aliasing:

$$-\pi < \omega_0 < +\pi \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{\omega_0}{2\pi} < +\frac{1}{2} \Rightarrow$$

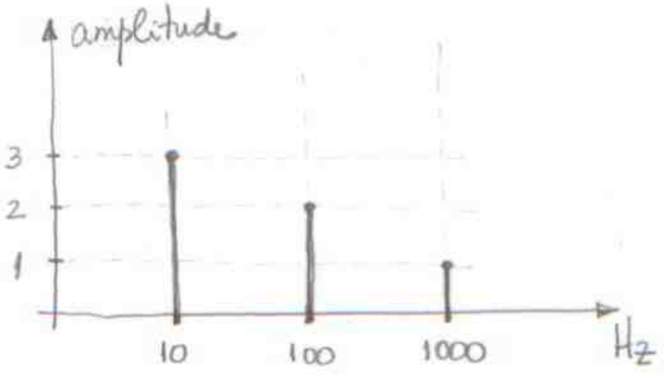
$$-\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{F}{F_s} < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$F < 2F_s \Rightarrow$ o sinal deve ser amostrado com pelo menos o dobro da sua maior frequência para não haver aliasing.

Teorema da amostragem: quando $F_{max} < 2F_s$ não haverá aliasing.

4) a) $x(t) = 3\cos(20\pi t) + 2\cos(200\pi t) + \cos(2000\pi t)$

$\downarrow$ 10 Hz $\quad \downarrow$ 100 Hz $\quad \downarrow$ 1000 Hz



$F_s = 5000\ Hz$

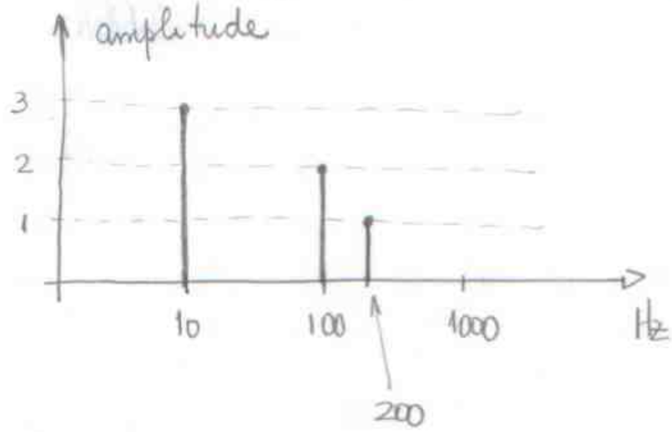
$\Downarrow$

não haverá aliasing

b) $F_s = 1200\ Hz \Rightarrow$ haverá aliasing relacionado à componente de 1000 Hz.

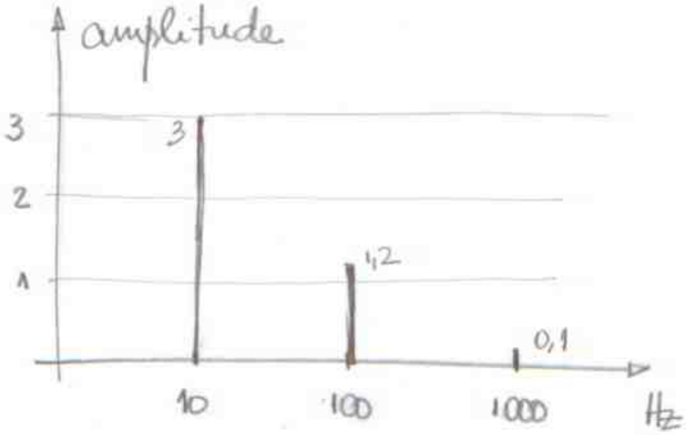
$$\cos\left(2000\pi \frac{n}{1200}\right) = \cos\left(\frac{5}{3}\pi n\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}n - 2\pi n\right) =$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}n\right) \Rightarrow f = \frac{1}{6} = \frac{F}{F_s} \Rightarrow F = \frac{1200}{6} = 200\,Hz$$



c) Lendo o fator de redução da curva do filtro e como $F_s = 5000\ Hz$ (sem aliasing) tem-se:

- para 10 Hz $\longrightarrow$ $\simeq 1$
- para 100 Hz $\longrightarrow$ $\simeq 0{,}6$
- para 1000 Hz $\longrightarrow$ $\simeq 0{,}1$



d) Uma alternativa para eliminar o ruído é o uso de médias. Considerando 3 pontos como referência tem-se:

$$y(n) = \frac{y(n) + y(n-1) + y(n-2)}{3}$$

com $y(-1) = y(0)$

$y(-2) = y(0)$