GABARITO

Nome: GABARITO R.A.:

Métodos Matemáticos I **2º Teste** (26/03/2008)

(**Atenção:** *Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.*)

1. (2.4.13 *plus*) Considere o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado em coordenadas euclidianas por

$$\vec{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath}.$$

Para os ítens (b) e (c) abaixo, utilize as coordenadas que você preferir.

(a) (2.5 Pontos) Expresse $\vec{F}$ em coordenadas cilíndricas *e em esféricas.*

(b) (1.5 Pontos) Calcule o rotacional de $\vec{F}$.

(c) (3.0 Pontos) Calcule os trabalhos realizados ao longo do círculo unitário *e ao longo do caminho da figura abaixo*, ambos percorridos no sentido anti-horário.

a) Cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

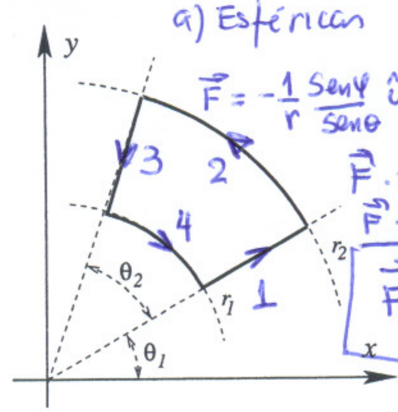
$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}$

$\hat{\theta} = -\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$

$\vec{F} = -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\hat{\imath} + \frac{\cos\theta}{r}\hat{\jmath}$

$\vec{F}\cdot\hat{r} = 0$

$\vec{F}\cdot\hat{\theta} = \frac{1}{r}$ $\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{1}{r}\hat{\theta}}$



a) Esféricas $x = r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = r\cos\theta$

$\vec{F} = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\mathrm{sen}\,\theta}\hat{\imath} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\mathrm{sen}\,\theta}\hat{\jmath}$

$\hat{r} = \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$

$\hat{\theta} = \cos\varphi\cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta\,\hat{\jmath} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{k}$

$\hat{\varphi} = -\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{\imath} + \cos\varphi\,\hat{\jmath}$

$\vec{F}\cdot\hat{r} = 0$

$\vec{F}\cdot\hat{\theta} = 0$

$\vec{F}\cdot\hat{\varphi} = \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}$

$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\hat{\varphi}}$

(d) (3.0 Pontos) Comente os resultados de (b) e (c).

b) $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} + \partial\frac{y}{x^2+y^2}\right)\hat{k} = \left(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\hat{k} = 0$

p/ todo x e $y \neq 0$.

c) Círculo unitário: $\begin{cases} y = \mathrm{sen}\,t \\ x = \cos t \\ z = 0 \end{cases}$

$d\vec{l} = (-\mathrm{sen}\,t\,\hat{\imath} + \cos t\,\hat{\jmath})\,dt$ $\quad \vec{F}\cdot d\vec{l} = 1\cdot dt$ ao longo do círculo unitário

$\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} dt = \boxed{2\pi}$

Caminho da figura: ao longo de 1 e 3, $\vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$

ao longo de 2, $\vec{F}\cdot d\vec{l} = 1\cdot dt$

ao longo de 4 $\vec{F}\cdot d\vec{l} = -1\,dt$

$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0}$

caso semelhante ao problema do divergente do teste 1.

d) O campo é C^∞ em $R^3 - (0,0,z)$. Assim, o teorema de Stokes vale para qualquer área/~~que~~ caminho não englobe o eixo z:

$\oint_{\partial\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_\Gamma (\mathrm{rot}\,\vec{F})\cdot d\vec{a}$, explicando o trabalho nulo do segundo caminho.

Para o círculo, como o eixo z está englobado, o teorema de Stokes não vale.