ME-210 Probabilidade I

Lista 4

1. Seja X uma variável aleatória discreta com $\mathbf{P}(X = 0) = 0.25$, $\mathbf{P}(X = 1) = 0.125$, $\mathbf{P}(X = 2) = 0.125$, $\mathbf{P}(X = 3) = 0.5$. Faça um gráfico da função de probabilidade e da função de distribuição acumulada. Calcule o valor esperado e a variância de X. Determine as seguintes probabilidades:

$$\mathbf{P}(0 < X < 1),\ \mathbf{P}(X \leq 2),\ \mathbf{P}(X > 3),\ \mathbf{P}(X > 2.5).$$

2. Um alvo é feito com uma tábua quadrada pintada de branco, com excepção de um círculo no seu centro que é pintado de preto. As regras de uma prova são definidas da seguinte forma: o atirador que acertar no centro preto ganha 18 pontos, se acertar na parte branca da tábua ganha 8 pontos e se não acertar na tábua perde 2 pontos.
(a) Um atirador atira no alvo: defina formalmente o espaço dos resultados deste experimento e a variável aleatória X =número de pontos.
(b) O desempenho do atirador pode ser assim resumido:
$\mathbf{P}$(acertar no centro) $= 0.2$ e $\mathbf{P}$(acertar na parte branca) $= 0.7$. Calcule média e variância do número de pontos para o atirador.

3. Dada a função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ 0.1 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.3 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.7 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0.8 & \text{se} \quad 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{se} \quad 5 \leq x \end{cases}$$

Calcule a função de probabilidade da variável cuja f.d.a. é $F(\cdot)$. Calcule ainda o valor esperado e a variância de X. Determine as seguintes probabilidades:

$$\mathbf{P}(1 \leq X < 2),\ \mathbf{P}(X = 4),\ \mathbf{P}(X > 3),\ \mathbf{P}(X \leq 4).$$

4. Seja X uma variável aleatória tal que $\mathbf{P}(X = -1) = 0.2$, $\mathbf{P}(X = 0) = 0.1$ e $\mathbf{P}(X = 6) = 0.7$.
(a) Ache as funções de probabilidade das variáveis aleatórias

$$Y = 3X + 2,\ Z = -2X + 1,\ U = X^2,\ V = X^3.$$

(b) Calcule $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(Z)$, $\mathbf{Var}(Y)$, $\mathbf{Var}(Z)$.

5. Um bit (0 ou 1) de informação é transmitido por um canal com ruído. Seja p a probabilidade de que seja recebido erradamente. Para melhorar a transmissão uma alternativa é utilizar um decodificador de maioria de dois en três, ou seja, enviar de forma independente 3 vezes a mesma informação registrando como resultado aquela que foi recebida pelo menos duas vezes. Para quais valores de p o decodificador de maioria de dois em três é melhor que a transmissão simples?

6. Uma urna contém 3 bolas numeradas (1,2 e 3). Primeiro uma bola é retirada da urna. Se sair a bola i, seleciona-se i peças com reposição de um lote contendo 60% de peças defeituosas. Seja X o número de peças defeituosas na amostra.
(a) Ache o conjunto de valores possíveis de X e a sua distribuição de probabilidade.
(b) Porque não temos distribuição binomial em (a)?
(c) Calcule $\mathbf{E}X$.

7. Sabe-se que dos CDs produzidas por uma certa empresa 5% são defeituosos. Os CDs vendidas em embalagens de 10. Para atrair clientes, se numa embalagem houver 2 ou mais CDs defeituosos, a empresa paga para o cliente o dobro do preço da embalagem. Se um cliente honesto comprou 3 embalagens, qual é a probabilidade de que ele vai receber da empresa mais do que gastou com a compra?

ME-210A: Resolução da Lista 04

Resolução extra-oficial feita. Pode conter erros.

Questão 1:

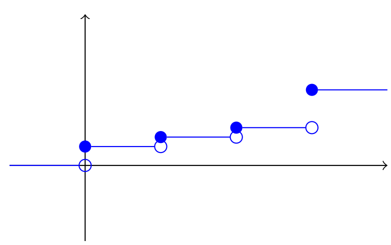
- **Gráfico de $F_X(x)$:** Sabemos que a função distribuição acumulada da variável aleatória X é dada pela expressão

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Analisando os valores discretos que a variável aleatória X pode assumir, chegamos à conclusão de que $F_X(x)$ é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 0,25, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ 0,375, \text{ se } 1 \leq x < 2 \\ 0,5, \text{ se } 2 \leq x < 3 \\ 1, \text{ se } x \geq 3 \end{cases}$$

O gráfico da função $F_X(x)$ é



- **Esperança de X:** A esperança de X é dada por

$$E[X] = \sum_{x_i} x_i P(X = x_i)$$

Substituindo os valores, temos

$$E[X] = 0 \times 0,25 + 1 \times 0,125 + 2 \times 0,125 + 3 \times 0,5 \Rightarrow E[X] = 1,875 = \frac{15}{8}$$

- **Variância de X:** Para calcular a variância de X, vamos encontrar o valor de $E[X^2]$ e usar a expressão

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

O valor de $E[X^2]$ é dado por

$$E[X^2] = \sum_{x_i} x_i^2 P(X = x_i)$$

Substituindo os valores

$$E[X^2] = 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,125 + 2^2 \times 0,125 + 3^2 \times 0,5 \Rightarrow E[X^2] = \frac{41}{8}$$

Logo

$$Var[X] = \frac{41}{8} - \frac{15}{8}^2 \Rightarrow Var[X] = \frac{103}{64}$$

- **Probabilidades:**

  $P(0 < X < 1) = P(0 < X \leq 1) - P(X = 1) = F_X(1) - F_X(0) - P(X = 1) = 0,375 - 0,25 - 0,125$

  Então $P(0 < X < 1) = 0$.

$$P(X \leq 2) = F_X(2) \Rightarrow P(X \leq 2) = 0,5$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3) = 1 - 1 \Rightarrow P(X > 3) = 0$$

$$P(X > 2,5) = 1 - P(X \leq 2,5) = 1 - F_X(2,5) = 1 - 0,5 \Rightarrow P(X > 2,5) = 0,5$$

Questão 2:

a. O espaço dos resultados deste experimento é

$$\Omega = \{(\text{acertar no centro}), (\text{acertar na parte branca}), (\text{errar a tábua})\}$$

A variável aleatória X, que quantifica o número de pontos obtidos, pode assumir os seguintes valores

  - X(acertar no centro) = 18
  - X(acertar na parte branca) = 8
  - X(errar a tábua) = −2

  b. Sabemos que $P(X = 18) = 0,2$ e $P(X = 8) = 0,7$. Como os eventos listados do espaço dos resultados são disjuntos, temos que

$$P(X = -2) = 1 - P(X = 18) - P(X = 8) = 1 - 0,2 - 0,7 \Rightarrow P(X = -2) = 0,1$$

  O n-ésimo momento da variável aleatória X é dado por

$$E[X^n] = \sum_{x_i} x_i^n P(X = x_i)$$

Substituindo os valores, temos

$$E[X^n] = 18^n \times 0,2 + 8^n \times 0,7 + (-2)^n \times 0,1$$

Fazendo $n = 1$, temos a esperança de X

$$E[X] = 18 \times 0,2 + 8 \times 0,7 + (-2) \times 0,1 \Rightarrow E[X] = 9$$

Fazendo $n = 2$, temos

$$E[X^2] = 18^2 \times 0,2 + 8^2 \times 0,7 + (-2)^2 \times 0,1 \Rightarrow E[X^2] = 110$$

Podemos, então, calcular a variância de X usando a fórmula

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 110 - 9^2 \Rightarrow Var[X] = 29$$

Questão 3:

- **Função de probabilidade da variável aleatória X:** Os "saltos"de $F(x)$ entre seus intervalos de definição correspondem aos valores de $p(x)$ para os valores de x em que ocorrem os "saltos". Logo

$$p(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \notin \{1,2,3,4,5\} \\ 0,1, \text{ se } x = 1 \\ 0,2, \text{ se } x = 2 \\ 0,4, \text{ se } x = 3 \\ 0,1, \text{ se } x = 4 \\ 0,2, \text{ se } x = 5 \end{cases}$$

  Podemos verificar que a soma de todos os valores possíveis de $p(x)$ é 1, como deveria ser.

- **Esperança e variância:** O n-ésimo momento da variável aleatória X é dado por

$$E[X^n] = \sum_{x_i} x_i^n P(X = x_i)$$

  Substituindo os valores, temos

$$E[X^n] = 1^n \times 0,1 + 2^n \times 0,2 + 3^n \times 0,4 + 4^n \times 0,1 + 5^n \times 0,2$$

  Fazendo $n = 1$, temos a esperança de X

$$E[X] = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,4 + 4 \times 0,1 + 5 \times 0,2 \Rightarrow E[X] = 3,1$$

  Fazendo $n = 2$, temos

$$E[X^2] = 1^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,4 + 4^2 \times 0,1 + 5^2 \times 0,2 \Rightarrow E[X^2] = 11,1$$

  Podemos, então, calcular a variância de X usando a fórmula

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 11,1 - 3,1^2 \Rightarrow Var[X] = 1,49$$

- **Probabilidades:**

$$P(1 \leq X < 2) = F(2^-) - F(1^-) = 0,1 - 0 \Rightarrow P(1 \leq X < 2) = 0,1$$

$$P(X = 4) = F(4) - F(4^-) = 0,8 - 0,7 \Rightarrow P(X = 4) = 0,1$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 0,7 \Rightarrow P(X > 3) = 0,3$$

$$P(X \leq 4) = F(4) \Rightarrow P(X \leq 4) = 0,8$$

Questão 4:

- **Função probabilidade de Y:** Como $Y = 3X + 2$, Y pode assumir os valores $-3 + 2 = -1$, $0 + 2 = 2$ e $18 + 2 = 20$. Assim, temos

$$P(Y = -1) = P(X = -1) = 0,2$$

$$P(Y = 2) = P(X = 0) = 0,1$$

$$P(Y = 20) = P(X = 6) = 0,7$$

- **Função probabilidade de Z:** Como $Z = -2X + 1$, Z pode assumir os valores $2 + 2 = 4$, $0 + 1 = 1$ e $-12 + 2 = -10$. Assim, temos

$$P(Z = 4) = P(X = -1) = 0,2$$

$$P(Z = 1) = P(X = 0) = 0,1$$

$$P(Z = -10) = P(X = 6) = 0,7$$

- **Função probabilidade de U:** Como $U = X^2$, U pode assumir os valores $(-1)^2 = 1$, $0^2 = 0$ e $6^2 = 36$. Assim, temos

$$P(U = 1) = P(X = -1) = 0,2$$

$$P(U = 0) = P(X = 0) = 0,1$$

$$P(U = 36) = P(X = 6) = 0,7$$

- **Função probabilidade de V:** Como $V = X^3$, V pode assumir os valores $(-1)^3 = -1$, $0^3 = 0$ e $6^3 = 216$. Assim, temos

$$P(V = -1) = P(X = -1) = 0,2$$

$$P(V = 0) = P(X = 0) = 0,1$$

$$P(V = 216) = P(X = 6) = 0,7$$

- **Esperança de Y:**

$$E[Y] = \sum_{x_i}(3x+2)P(X=x_i) = (-3+2)\times 0,2 + (0+2)\times 0,1 + (18+2)\times 0,7 \Rightarrow E[Y] = 14$$

Podemos, também, resolver este item de outra maneira, pois sabemos que

$$E[Y] = E[3X+2] = 3E[X] + 2$$

Como

$$E[X] = \sum_{x_i} x_i P(X=x_i) = (-1)\times 0,2 + 0\times 0,1 + 6\times 0,7 \Rightarrow E[X] = 4$$

temos que

$$E[Y] = 3\times 4 + 2 \Rightarrow E[Y] = 14$$

em concordância com o resultado anterior.

- **Esperança de Z:**

$$E[Z] = \sum_{x_i}(-2x)P(X=x_i) = 3\times 0,2 + 1\times 0,1 + (-11)\times 0,7 \Rightarrow E[Z] = -7$$

Podemos, também, resolver este item de outra maneira, pois sabemos que

$$E[Z] = E[-2X+1] = -2E[X] + 1$$

Usando o resultado do item anterior para $E[X]$, temos

$$E[Z] = (-2)\times 4 + 1 \Rightarrow E[Z] = -7$$

em concordância com o resultado anterior.

- **Esperança de U:**

$$E[U] = \sum_{x_i}(x^2)P(X=x_i) = 1\times 0,2 + 0\times 0,1 + 36\times 0,7 \Rightarrow E[U] = 25,4$$

- **Variância de Y:** Sabemos que

$$Var[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$$

Precisamos calcular $E[Y^2]$:

$$E[Y^2] = \sum_{x_i}(3x+2)^2 P(X=x_i) = (-3+2)^2\times 0,2 + (0+2)^2\times 0,1 + (18+2)^2\times 0,7 \Rightarrow E[Y^2] = 280,6$$

Logo

$$Var[Y] = 280,6 - 14^2 \Rightarrow Var[Y] = 84,6$$

- **Variância de Z:** Sabemos que

$$Var[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$$

Precisamos calcular $E[Z^2]$:

$$E[Z^2] = \sum_{x_i} (-2x)^2 P(X = x_i) = 3^2 \times 0,2 + 1^2 \times 0,1 + (-11)^2 \times 0,7 \Rightarrow E[Z^2] = 86,6$$

Logo

$$Var[Z] = 86,6 - (-7)^2 \Rightarrow Var[Z] = 37,6$$

Questão 5: Para "maioria de 3" a probabiliade de erro é $p^3 + 3p^2(1-p)$. Então, esse metodo é melhor que transissão simples, se a probabilidade de erro for menor:

$$p^3 + 3p^2(1-p) < p.$$

Resolvendo, temos

$$\begin{aligned} -2p^3 + 3p^2 - p &< 0 \\ -2p^2 + 3p - 1 &< 0 \\ 2(p - \frac{1}{2})(p-1) &> 0 \\ p &< 1/2. \end{aligned}$$

Questão 6:

Uma vez que o número de peças retiradas do lote depende do valor i da bola retirada da urna e i pode assumir apenas os valores 1, 2 e 3, concluímos que X pode assumir apenas os valores 0, 1, 2 e 3, ou seja, $X \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Para determinarmos as probabilidades de X assumir cada um dos valores possíveis, devemos usar a Fórmula da Probabilidade Total, já que o número de peças retiradas depende do valor de i. Para o caso $X = 0$, temos

$$P(X = 0) = P(X = 0|i = 1)P(i = 1) + P(X = 0|i = 2)P(i = 2) + P(X = 0|i = 3)P(i = 3)$$

Os valores de $P(X = \alpha | i = \beta)$, para quaisquer α e β possíveis na situação dada, são os mesmo de $P(Y = \alpha)$, onde $Y \sim bin(\beta,\ 0,6)$, já que há reposição das peças. Além disso, como a probabilidade de cada bola numerada ser sorteada é a mesma, temos $P(i = 1) = P(i = 2) = P(i = 3) = \frac{1}{3}$. Feitas estas observações, podemos calcular $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = 0,4 \times \frac{1}{3} + 0,4^2 \times \frac{1}{3} + 0,4^3 \times \frac{1}{3} \Rightarrow P(X = 0) \cong 0,208$$

Analogamente, calculamos as probabilidades restantes

$$P(X = 1) = \binom{1}{1} \times 0,6^1 0,4^0 \times \frac{1}{3} + \binom{2}{1} \times 0,6^1 0,4^1 \times \frac{1}{3} + \binom{3}{1} \times 0,6^1 0,4^2 \times \frac{1}{3} \Rightarrow P(X = 1) \cong 0,456$$

$$P(X=2) = 0 + \binom{2}{2} \times 0,6^2 0,4^0 \times \frac{1}{3} + \binom{3}{2} \times 0,6^2 0,4^1 \times \frac{1}{3} \Rightarrow P(X=2) \cong 0,264$$

$$P(X=3) = 0 + 0 + \binom{3}{3} \times 0,6^3 0,4^0 \times \frac{1}{3} \Rightarrow P(X=3) \cong 0,072$$

A esperança de X é dada por

$$E[X] = \sum_{x_i} x_i P(X=x_i) = 0 \times 0,208 + 1 \times 0,456 + 2 \times 0,264 + 3 \times 0,072 \Rightarrow E[X] = 1,2$$

Questão 7:

Seja Z a variável aleatória que representa o número de embalagens trocadas e p o preço de cada embalagem. Sabemos que $Z \in \{0,1,2,3\}$, pois foram compradas três embalagens. Se L é a variável aleatória que representa o lucro do comprador, temos a seguinte relação entre L e Z

$$L = 2pZ - 3p = p(2Z-3)$$

Assim, concluímos que L pode assumir os valores $-3p$ (quando $Z=0$), $-p$ (quando $Z=1$), p (quando $Z=2$) e $3p$ (quando $Z=3$). Queremos saber a probabilidade de L ser positivo, ou seja, queremos calcular

$$P(L>0) = P(L=p) + P(L=3p) = P(Z=2) + P(Z=3)$$

Z é uma variável aleatória binomial com parâmetros $(3,q)$, onde q é a probabilidade de uma embalagem conter dois ou mais CDs defeituosos. Assim

$$P(Z=2) = \binom{3}{2} q^2(1-q)^1 \qquad \text{e} \qquad P(Z=3) = \binom{3}{3} q^3(1-q)^0$$

Para calcular q, vamos definir $Y \sim bin(10,\ 0,05)$ como sendo o número de CDs defeituosos em uma embalagem específica. Desta maneira, temos que

$$q = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$$

Logo

$$q = 1 - \binom{10}{0} 0,05^0(1-0,05)^{10} - \binom{10}{1} 0,05^1(1-0,05)^9 \Rightarrow q \cong 0,0861$$

Agora, podemos calcular a probabilidade desejada:

$$P(L>0) = \binom{3}{2} 0,0861^2(1-0,0861)^1 + \binom{3}{3} 0,0861^3(1-0,0861)^0$$

Feitos os cálculos, obtemos

$$P(\text{comprador receber mais do que pagou}) = P(L>0) \cong 0,0209$$