MA327 Turmas C,D,E - 2S 2011 - Segunda Chamada

Nome: GABARITO RA: D 01/12/2011

Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

1. (a) (05pts) Escreva a definição de produto interno de um espaço vetorial real.

   (b) (05pts) Enuncie o teorema de Cayley-Hamilton.

2. Nas afirmações abaixo $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno definido em um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Determine se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) (10pts) Em um espaço vetorial V com dimensão $2n$ temos que $U \cap W \neq \{0\}$ implica que $\dim U \geq n$ e $\dim W \geq n$.

   (b) (10pts) Uma matriz real simétrica tem todos os seus autovalores iguais se e somente se A for múltiplo escalar da matriz identidade.

   (c) (10pts) Se $T : V \to V$ é um operador auto-adjunto satisfazendo $\langle T(v), v\rangle = 0$ para todo $v \in V$, então $T = 0$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_4, 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4, -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4).$$

   Considere também as bases $\beta = \{(1,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,0,0,1)\}$ do $\mathbb{R}^4$ e $\alpha = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$ do $\mathbb{R}^3$.

   (a) (10pts) Encontre bases para o núcleo e para a imagem de T.

   (b) (10pts) Encontre a matriz de T em relação as bases β e α.

   (c) (10pts) Supondo que $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ estão equipados com seus produtos internos usuais, encontre $T^*(x, y, z)$.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) (10pts) Encontre matriz P tal que $D := P^{-1}AP$ seja diagonal.

   (b) (10pts) Encontre um polinômio $p(t)$ tal que $p(T) = T^{-1}$.
   (Dica: Questão 1.)

   (c) (10pts) Calcule A^m para todo $m > 0$.
   (Dica: verfique que $A^m = PD^mP^{-1}$ e calcule D^m.)

Questão 1

a) Um produto interno em um espaço vetorial V é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- bilinearidade: $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in V$.
- simetria: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$; $\forall u, v \in V$.
- positividade: $\langle u, u \rangle > 0$, $\forall u \neq 0$.

b) Teorema de Cayley-Hamilton: Sejam $T \in \mathcal{L}(V,V)$ operador linear de V, com $\dim V < \infty$, e $p_T(\lambda)$ seu polinômio característico; então:

$$p_T(T) = 0$$

Questão 2

$$\begin{array}{ccccc} U & & W & & V \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{R}^1 & \subset & \mathbb{R}^2 & \subset & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

a) FALSO: considere as inclusões: $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4$.
Tem-se $1 = \dim U = \dim U \cap W < 2 = n$.

b) VERDADEIRO: pelo teorema espectral, A admite uma base ortonormal de autovetores, cuja matriz de passagem P satisfaz: $A = P^{-1} D P$. Por outro lado, se λ é o único autovalor de A, tem-se $D = \lambda I$, assim:

$$A = P^{-1} (\lambda I) P = \lambda (P^{-1} P) = \lambda I \quad \blacksquare$$

c) VERDADEIRO: pelo teorema espectral, temos uma base de autovetores, mas todo autovalor é zero: $0 = \langle Tv, v \rangle = \lambda \|v\| \Rightarrow \lambda = 0$ $\blacksquare$

Questão 3

a) Nas bases canônicas $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$, temos:

$$[T]^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ \frac{1}{2}(L_3 + L_1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1 - L_3 \\ L_3 \\ L_2 + L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

logo $T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\therefore \mathcal{N}(T) = [(1,-1,1,0)_{\tilde{\beta}}, (2,-1,0,1)_{\tilde{\beta}}]}$$

Como $\dim \mathcal{N}(T) = 2$, o teorema do núcleo e da imagem fornece: $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathcal{N}(T) = 2$.

Claramente $e_3, e_4 \notin \mathcal{N}(T)$, logo $\{Te_3, Te_4\} \subset \mathcal{I}(T)$ é uma base (pois e_3 e e_4 são l.i.); assim:

$$\boxed{\therefore \mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3 = [(0,-1,2), (-1,-3,3)]}$$

b) Sejam $\beta = \{ \underbrace{(1,1,0,0)}_{u_1}, \underbrace{(0,0,1,0)}_{u_2}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{u_3}, \underbrace{(1,0,0,1)}_{u_4} \}$

e $\alpha = \{ \underbrace{(1,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{v_2}, \underbrace{(1,1,0)}_{v_3} \}$

Tem-se:

- $Tu_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + cv_3 = \begin{pmatrix} a+c \\ b+c \\ a+b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} = T_{11} \\ b = \frac{1}{2} = T_{21} \\ c = \frac{5}{2} = T_{31} \end{cases}$

- $Tu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + cv_3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} = T_{21} \\ b = \frac{1}{2} = T_{22} \\ c = -\frac{3}{2} = T_{32} \end{cases}$

- $Tu_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + cv_3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} = T_{13} \\ b = \frac{1}{2} = T_{23} \\ c = -\frac{7}{2} = T_{33} \end{cases}$

- $Tu_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + cv_3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} = T_{41} \\ b = \frac{1}{2} = T_{42} \\ c = -\frac{3}{2} = T_{43} \end{cases}$

$$\therefore [T]^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

c) Como a base canônica é ortonormal, temos:

$$[T^*]^{\tilde{\beta}}_{\tilde{\alpha}} = \overline{\left([T]^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}} \right)^t} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Questão 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Polinômio característico:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda^{+} & 2^{-} & 0^{+} \\ 2 & 1-\lambda & 0^{-} \\ 0 & 1 & 2-\lambda^{+} \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

Autovalores: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

Autoespaços associados:

$\underline{\lambda_1 = -1}$: $(A+I)v = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$

$$\sim \begin{array}{c} \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \\ L_2-L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\therefore\ W_{-1} = [(3,-3,1)] = [v_1]}$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $(A-2I)v = 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\begin{array}{r} -L_1+2L_3 \\ \sim \quad L_3 \\ L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\boxed{W_2 = [(0,0,1)] \doteq [v_2]}$$

$\underline{\lambda_3 = 3}$: $(A-3I)v = 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}L_2 \\ \sim \quad L_3 \\ L_1+L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\boxed{W_3 = [(1,1,1)] \doteq [v_3]}$$

Assim, nas bases $\tilde{\beta} = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(3,-3,1);(0,0,1);(1,1,1)\}$ e $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$, tem-se:

$$P = [I]^{\beta}_{\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e $\boxed{P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}}$

b) Do polinômio característico obtemos:

$$p_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3) = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)$$
$$= -(\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6).$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton tem-se:

$$p_A(A) = 0 \iff A^3 - 4A^2 + A + 6I = 0$$
$$\iff \underbrace{-\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I)}_{p(A) = A^{-1}} A = I$$

$$\boxed{\therefore\ p(t) = -\frac{1}{6}(t^2 - 4t + 1)}$$

c) Como $A^m = (PDP^{-1})^m = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}\cdots}_{I}\underbrace{\cdots P}_{I}DP^{-1}$

$$= PD^m P^{-1},$$

basta determinar a inversa:

$$\left[\begin{array}{c|c} P & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} L_3 \\ L_1-3L_3 \\ L_2+3L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1 \\ \frac{1}{3}L_3 \\ \frac{1}{2}L_2+L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&0&0&1\\ 0&1&4/3&0&1/3&1\\ 0&0&1&1/2&1/2&0\end{array}\right] \sim \begin{array}{r} L_1-L_3\\ L_2-\frac{4}{3}L_3\\ L_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-1/2&-1/2&1\\0&1&0&-2/3&-1/3&1\\0&0&1&1/2&1/2&0\end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1-L_2\\ L_2\\ L_3\end{array}\left[\underbrace{\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}}_{I}\;\middle|\;\underbrace{\begin{array}{ccc}1/6&-1/6&0\\-2/3&-1/3&1\\1/2&1/2&0\end{array}}_{P^{-1}}\right]$$

Assim $$D^m P^{-1} = \begin{bmatrix}(-1)^m&&\\&2^m&\\&&3^m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/6&-1/6&0\\-2/3&-1/3&1\\1/2&1/2&0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(-1)^m/6&(-1)^{m+1}/6&0\\-2^{m+1}/3&-2^m/3&2^m\\3^m/2&3^m/2&0\end{bmatrix}$$

e $$\begin{bmatrix}3&0&1\\-3&0&1\\1&1&1\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left[(-1)^m+3^m\right]&\frac{1}{2}\left[(-1)^{m+1}+3^m\right]&0\\ \frac{1}{2}\left[(-1)^{m+1}+3^m\right]&\frac{1}{2}\left[(-1)^m+3^m\right]&0\\ \frac{(-1)^m}{6}-\frac{2^{m+1}}{3}+\frac{3^m}{2}&\frac{(-1)^{m+1}}{6}-\frac{2^m}{3}+\frac{3^m}{2}&2^m\end{bmatrix}}_{A^m = PD^mP^{-1}}$$

$\blacksquare$