EE400 - Métodos de Eng. Elétrica
Gabarito _ 2ª prova
22/10/08 _ Prof. Rafael

1) Consideremos a função Log z, que é analítica.

Temos:

$$\mathrm{Log}\, z = \mathrm{Log}\, r + i\,\Theta \qquad \left(\text{sendo } z = r e^{i\Theta}\right)$$

$$= \mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2} + i\, \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

A função $+i\,\mathrm{Log}\, z$ também é analítica, portanto:

$$f(z) = +i\,\mathrm{Log}\, z = -\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + i\,\mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2}$$

é analítica e $v(x,y) = +\mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2}$ é uma função harmônica conjugada à função dada.

Em conclusão:

$$\boxed{\begin{array}{c} v(x,y) = +\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(x^2+y^2\right) \\ f(z) = +i\,\mathrm{Log}\, z \end{array}}$$

Outra solução p/ a 1ª questão:

$$u(x,y) = -\operatorname{arctg}\left(y/x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{(Cond. de C-R)}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dy + \phi(x)$$

Fazendo $t = x^2+y^2 \Rightarrow dt = 2y\,dy$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{t}\,dt + \phi = \frac{1}{2}\log t + \phi = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \phi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{(Cond de C-R)}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \psi(y)$$

Fazendo $t = x^2+y^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{t}\,dt + \psi(y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \cancel{\phi}(y$$

Das duas condições acima: $v(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} + K$

Tem-se portanto que:

$$f(z) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + i\left(\operatorname{Log}\sqrt{x^2+y^2} + K\right)$$

$$= i\left(\operatorname{Log} r + i\,\Theta \overset{+K}{}\right)$$

$$= i\left(\operatorname{Log} z + K\right)$$

2) Tem-se $\quad w = f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

recìprocamente $\quad z = \dfrac{1}{w} = \dfrac{u}{u^2+v^2} - i\dfrac{v}{u^2+v^2}$

ou seja $\quad x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \quad$ e $\quad y = \dfrac{-v}{u^2+v^2}$

Logo $\quad x \geq 1 \Longrightarrow \dfrac{u}{u^2+v^2} \geq 1 \Longrightarrow$

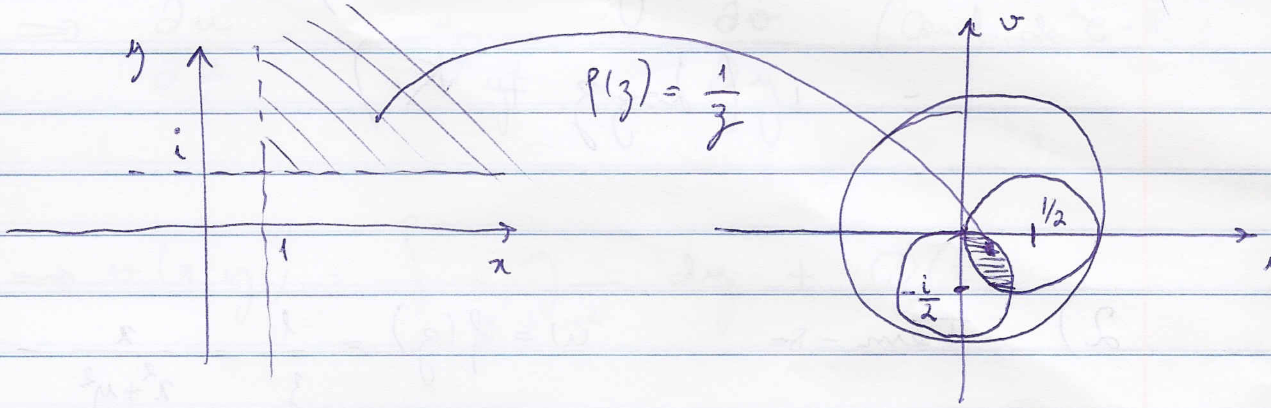
$$\Longrightarrow u^2+v^2-u \leq 0 \Longrightarrow \left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Analogamente:

$$y \geq 1 \Longrightarrow \frac{-v}{u^2+v^2} \geq 1 \Longrightarrow u^2 + \left(v+\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Em conclusão a região formada pela intersseção das regiões $x \geq 1$ e $y \geq 1$ é mapeada sobre a intersseção das regiões

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



3) Temos:

$$e^{f(z)} = 1 \qquad \text{sendo } f(z) = 2\pi \, \frac{1+z}{1-z}$$

Portanto as soluções da eq. acima correspondem às soluções de:

$$f(z) = 2k\pi i \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$2\pi \, \frac{1+z}{1-z} = 2k\pi i$$

$$\frac{1+z}{1-z} = ki$$

Logo $\quad w = \dfrac{1+z}{1-z} = ki$

<u>1ª solução</u>: $\quad \dfrac{1+z}{1-z} = ki \Longrightarrow$

$$ki - zki = 1 + z \Longrightarrow z(-1-ki) = 1 - ki$$

$$\Longrightarrow z = -\frac{1-ki}{1+ki} \Longrightarrow |z| = \frac{|1-ki|}{|1+ki|} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\Longrightarrow |z| = 1 \qquad \text{c.q.d.}$$

<u>2ª solução</u>:

$$w = \frac{1+z}{1-z} \Longrightarrow z = -\frac{1-w}{1+w} = \frac{w-1}{w+1}$$

Este é um mapeamento da forma $\cancel{z = e^{i\theta_0}\dfrac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}}$

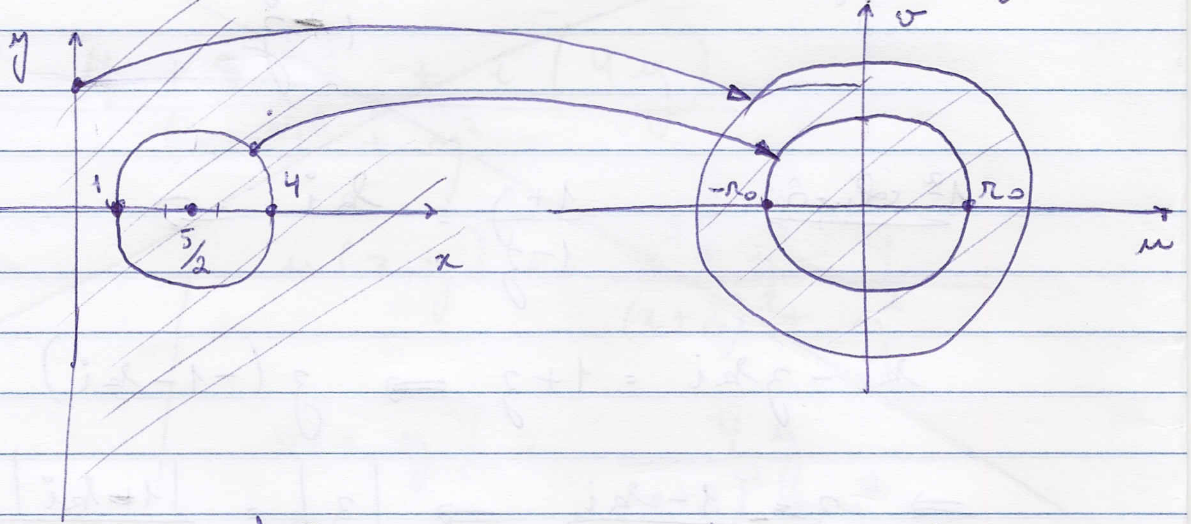
$$z = e^{i\theta_0}\frac{w-w_0}{w+\bar{w}_0} \quad \text{com} \begin{cases} \theta_0 = 0 \\ w_0 = \bar{w}_0 = 1 \end{cases}$$

que mapeia <u>o eixo complexo</u> no <u>círculo unitário</u>

Logo, se $w = ki \Longrightarrow z(w) \in$ círculo unitário

c.q.d.

4) Deve-se obter um único!! mapeamento satisfazendo a:



O mapeamento procurado é da forma:

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z+z_0} \quad \text{satisfazendo a:} \quad \begin{cases} f(1) = -r_0 \\ f(4) = r_0 \end{cases}$$

Logo, temos: (vamos admitir $z_0 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} -r_0 = e^{i\theta_0}\dfrac{1-z_0}{1+z_0} \\ r_0 = e^{i\theta_0}\dfrac{4-z_0}{4+z_0} \end{cases} \qquad \text{fazendo } \alpha = r_0 e^{-i\theta_0}$$

$$\begin{cases} -\alpha = \dfrac{1-z_0}{1+z_0} \\ \alpha = \dfrac{4-z_0}{4+z_0} \end{cases} \Longrightarrow \frac{-(1-z_0)}{1+z_0} = \frac{4-z_0}{4+z_0} \Longrightarrow$$

$$(z_0+4)(z_0-1) = (1+z_0)(4-z_0)$$

$$z_0^2 + 3z_0 - 4 = -z_0^2 + 3z_0 + 4$$

$$2z_0^2 - 8 = 0 \implies \boxed{z_0 = 2}$$

$$\alpha = \frac{4-z_0}{4+z_0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \implies \boxed{\begin{array}{l} r_0 = 1/3 \\ e^{i\theta_0} = 1 \end{array}}$$

Em conclusão:

$$f(z) = \frac{z-2}{z+2} \quad ; \quad r_0 = 1/3$$

5) Conforme o teorema demonstrado (e o ex. anterior) basta substituir: $w = \dfrac{z-2}{z+2}$

$V_0 = 100$
$r_0 = 1/3$

na expressão de $\phi(u,v)$.

Teremos:

$$w = \frac{z-2}{z+2} = u + iv = \frac{x-2+iy}{x+2+iy} =$$

$$w = \frac{z-2}{z+2} \Longrightarrow |w| = \frac{|z-2|}{|z+2|} = \frac{|(x-2)+iy|}{|(x+2)+iy|} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x-2)^2 + y^2}{(x+2)^2 + y^2}}$$

Portanto:

$$\phi(x,y) = \frac{100}{\log(1/3)} \cdot \log\left(\sqrt{\frac{(x-2)^2 + y^2}{(x+2)^2 + y^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x,y) = \frac{50}{\log 3} \log\left(\frac{(x+2)^2 + y^2}{(x-2)^2 + y^2}\right)}$$

$$\boxed{\phi(x,y) = 45{,}51 \cdot \log\left(\frac{(x+2)^2 + y^2}{(x-2)^2 + y^2}\right)}$$