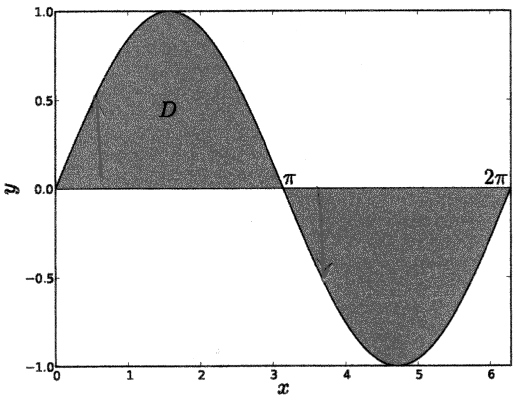
Questão 1 (valor: 2,5 pontos)

Calcule a integral de função $f(x, y) = x$ na região D que fica entre o eixo x, o gráfico de $y = \sin(x)$ e com x variando de 0 a 2π.



Região de integração. O objetivo é calcular o volume sob o gráfico de f, acima do plano xy dentro dessa região.

Para ver a região de integração como do tipo I é melhor partila em duas $0 \leq x \leq \pi$ e depois $\pi \leq x \leq 2\pi$. Temos

$$\iint_D x \, dA = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin(x)} x \, dy\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\sin(x)}^{0} x \, dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} x \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(x)\, x \, dx. \qquad (1)$$

Precisamos da primitiva de $x \sin x$:

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\sin x}_{g'} \, dx = -x\cos x - \int -\cos x \, dx = -x\cos x + \sin x$$

Substituindo em (1), temos

$$\iint_D x \, dA = \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\pi} + \Big[x\cos x - \sin x\Big]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\pi\cos\pi + \sin\pi - \sin 0 + 2\pi\cos 2\pi - \sin 2\pi - \pi\cos\pi + \sin\pi$$

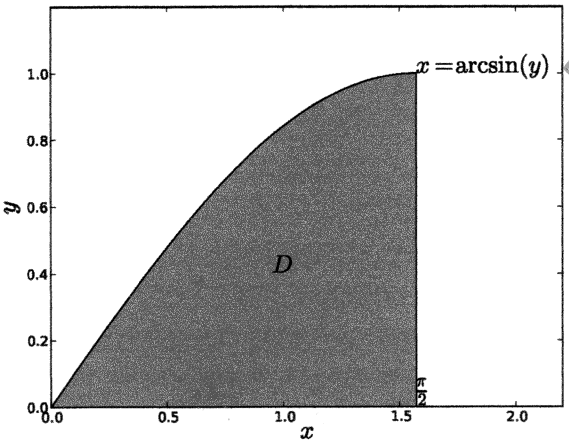
$$= \pi + 0 - 0 + 2\pi - 0 + \pi + 0$$

$$= 4\pi$$

Questão 2 (valor: 2,5 pontos)

Calcule

$$\int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\pi/2} \cos(\cos(x))dxdy.$$



$\Leftrightarrow y = \sin(x)$

Região de integração.

Invertendo a região para vê-la como do tipo 1 e não do tipo 2.

$$\int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\pi/2} \cos(\cos(x))\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(x)} \cos(\cos(x))\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos(\cos(x)) \cdot \sin(x)\,dx$$

uma aplicação da regra da cadeia

$$= -\sin(\cos(x)) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\sin(\cos \pi/2) + \sin(\cos 0)$$

$$= -\sin(0) + \sin(1)$$

$$= \sin(1)$$

Questão 3 (valor: 2,5 pontos)

O centróide de uma região D é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{vol}(D)} \iiint_D x dV \quad \bar{y} = \frac{1}{\text{vol}(D)} \iiint_D y dV \quad \bar{z} = \frac{1}{\text{vol}(D)} \iiint_D z dV.$$

Use coordenadas esféricas para calcular a coordenada $\bar{z}$ da região dada por $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Obs: Lembre que $\cos\alpha \sin\alpha = \sin(2\alpha)/2$.

Precisamos primeiro calcular vol(D), como ele já foi dado em coord esféricas temos

$$\text{vol}(D) = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/2} 2\pi = \frac{1}{3} \cdot (-0 + 1) \, 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

Então

$$\bar{z} = \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \overbrace{\rho \cos\phi}^{z} \, \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho$$

$$= \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta$$

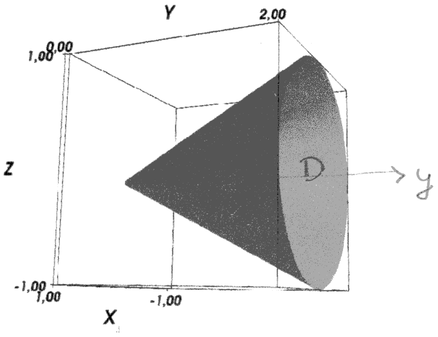
$$= \frac{3}{\cancel{2\pi}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\phi)}{2} \, d\phi \, \cancel{2\pi}$$

$$= \frac{3}{4} \left[-\frac{\cos(2\phi)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{1+1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

Questão 4 (valor: 2,5 pontos)

Seja D o sólido delimitado pelos planos $y = 0$, $y = 2$ e ~~pelo~~ dentro do cone $y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$. Expresse o volume de D como uma integral envolvendo coordenadas cilíndricas e outra em coordenadas esféricas. Não é necessário calcular as integrais.



O volume D.

Obs: pode denotar $\arctan(1/2)$ por $\bar{\alpha}$.

Em coordenadas cilíndricas devemos tomar o eixo y para ser preservado e usar coordenadas polares em xz. Temos então $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e a superfície do cone fica $\sqrt{3}r = y$.

Nesse caso a região D fica $D = \{(r,\theta,y) \mid 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq y/\sqrt{3}\}$.

O volume fica

Dois itens

$$V(D) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{y/2} r\,dr\,dy\,d\theta.$$

Em coordenadas esféricas devemos usar o eixo y como o eixo a partir do qual se calcula o ângulo ϕ e polares em (x,z). Nesse caso temos

$$\rho\sin\phi = \sqrt{x^2+z^2} \quad \text{e} \quad y = \rho\cos\phi$$

e a superfície do cone fica $\cancel{\rho}\cos\phi = 2\cancel{\rho}\sin\phi = \cos\phi = 2\sin\phi$, que ocorre para $\phi = \arctan(1/2)$, que é o ângulo $\bar{\alpha}$. Assim,

$$D = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \bar{\alpha},\ 0 \leq \rho \leq 2/\cos\phi\}$$

e

$$\mathrm{vol}(D) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\bar{\alpha}}\int_0^{2/\cos\phi} r^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$