# Métodos I - 1S11 - Lista 4

**(1)** Mostre que

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt.$$

**(2)** Use a função gama para mostrar os seguintes resultados:

$$\text{(i)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^4}\, dx = \Gamma(5/4),$$

$$\text{(ii)} \int_0^\infty x^{2s+1}\mathrm{e}^{-ax^2}\, dx = \frac{\Gamma(s+1)}{2a^{s+1}},$$

$$\text{(iii)} \int_0^1 x^k \ln x\, dx = \frac{-1}{(k+1)^2}.$$

**(3)** Mostre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Gamma(ax)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{a}.$$

**(4)** Mostre que

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

**(5)** Mostre que

$$|(ix)!|^2 = \frac{\pi x}{\sinh \pi x},$$

onde $x! = \Gamma(x+1)$.

**(6)** Mostre que

$$|x!| \geq |(x+iy)!|,$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq -1, -2, \ldots$.

**(7)** Seja $f(z) = (1+z)^\alpha$. (i) Mostre que

$$\left.\frac{d^n f}{dz^n}\right|_{z=0} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)},$$

e use esse resultado para mostrar que

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} z^n,$$

onde

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha-n+1)}.$$

(ii) Generalize esse resultado para $a, b \in \mathbb{C}$ mostrando que

$$(a+b)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} a^n b^{\alpha-n}.$$

(iii) Mostre que se $\alpha = m =$ inteiro então essa série é truncada no termo $n = m$.

**(8)** Mostre que

$$\int_{-1}^1 (1+x)^a(1-x)^b\, dx = 2^{a+b+1}B(a+1, b+1),$$

onde $B(a,b)$ é a função beta.

**(9)** Mostre que

$$\text{(i) } B(a,b) = B(a+1,b) + B(a,b+1),$$

$$\text{(ii) } B(a,b) = \frac{b-1}{a}B(a+1,b-1).$$

**(10)** Mostre que

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2}x^{2n}\, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & n = 0 \\ \pi\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

**(11)** Mostre que

$$\int_t^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

**(12)** Mostre que

$$\frac{d}{dz}(z)_n = (z)_n[\psi_0(z+n) - \psi_0(z)],$$

onde $(z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1)$ é o símbolo de Pochhammer e $\psi_0(z)$ é a função digama.

**(13)** Mostre que

$$\ln \sin \pi z = \ln \pi z - \sum_{n=1}^\infty \zeta(2n)\frac{z^{2n}}{n},$$

onde $\zeta(n)$ é a função zeta de Riemann.

**(14)** Mostre que

$$\psi_n(1) = (-1)^{n+1}n!\zeta(n+1),$$

onde $\psi_n(z)$ é a função poligama (de ordem $n$).

**(15)** Mostre que

$$\psi_0(z) = -\gamma + \int_0^\infty \frac{dt}{\mathrm{e}^t - 1} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{(1-z)t}}{\mathrm{e}^t - 1}dt.$$

**(16)** Mostre que

$$n!\zeta(n+1) = \int_0^\infty \frac{t^n}{\mathrm{e}^t - 1}\, dt.$$