F 502 A – Eletromagnetismo I – 2º semestre de 2011 – Prova 1 – 08/09/2011

Nome:____ **RA:**______________

Questão 1 – **(a) [1,0 ponto]** Escreva a lei de Coulomb para o campo elétrico gerado por uma distribuição arbitrária de cargas, explicando o significado de cada variável. **(b) [0,5 ponto]** Calcule, a partir da lei de Coulomb, o divergente do campo elétrico. **(c) [0,5 ponto]** <u>**Usando o cálculo tensorial e a notação de Einstein**</u>, calcule, a partir da lei de Coulomb, o rotacional do campo elétrico. **(d) [0,5 ponto]** O rotacional e o divergente são suficientes para caracterizar o vetor campo elétrico dado pela lei de Coulomb? Justifique.

Questão 2 – **(a) [1,0 ponto]** Encontre o campo elétrico a uma distância z acima do centro de uma espira circular de raio r, que tem uma densidade linear de carga uniforme λ. **(b) [1,0 ponto]** Calcule, independentemente, o potencial desta distribuição e mostre que ele fornece o campo correto. **(c) [0,5 ponto]** O que as suas fórmulas revelam no limite $z >> r$?

Questão 3 – **(a) [1,0 ponto]** Calcule, em todo o espaço, o campo elétrico gerado por uma distribuição esférica uniforme de cargas, centrada na origem. **(b) [1,0 ponto]** Calcule o potencial elétrico em todo o espaço, definindo explicitamente o referencial utilizado. **(c) [0,5 ponto]** Calcule a energia eletrostática desta distribuição.

Questão 4 – O potencial elétrico de uma determinada distribuição é dado pela expressão:

$$V(\mathbf{r}) = A\frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

onde A e λ são constantes. **(a) [1,0 ponto]** Calcule $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. **(b) [1,0 ponto]** Calcule a densidade de carga $\rho(\mathbf{r})$. **(c) [0,5 ponto]** Calcule a carga total Q.

Dados:

$$d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}. \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

$$d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} \;&=\; \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+\; \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}.$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})$$

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{v})\,d\tau = \iint_{\substack{\text{superfície}\\ \text{limitando } V}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\substack{\text{Ao redor de}\\ S}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Questão 01

(a) Lei de Coulomb:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}^2}\,\hat{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

Na equação acima $\vec{r}\,'$ representa as coordenadas da fonte, $\vec{r}$ as coordenadas do campo, $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ é o vetor de separação, $\rho(\vec{r}\,')$ é a densidade volumétrica de cargas e $d\tau'$ é o elemento de volume nas coordenadas da fonte.

(b) O divergente deve ser calculado nas coordenadas de campo:

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\,\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)d\tau'$$

Como $\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) = 4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\,4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d\tau'$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

(c) O rotacional também deve ser calculado nas coordenadas de campo

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\,\nabla\times\left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)d\tau'$$

$$\nabla\times\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} = \nabla\times\frac{\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3} = \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_i\,\partial_j\left[(x_l-x_l')(x_l-x_l')\right]^{-3/2}(x_k-x_k')$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_i\,(x_k-x_k')\,\partial_j\left[(x_l-x_l')(x_l-x_l')\right]^{-3/2} +$$

$$+\ \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_i\left[(x_l-x_l')(x_l-x_l')\right]^{-3/2}\partial_j(x_k-x_k')$$

$$\nabla \times \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_i (x_k - x_k') \left(\frac{-3}{\cancel{2}}\right) \cancel{2} (x_l - x_l') \overbrace{\partial_j (x_l - x_l')}^{\delta_{jl}} \left[(x_l - x_l')(x_l - x_l')\right]^{-5/2} +$$

$$+ \ \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_i \left[(x_l - x_l')(x_l - x_l')\right]^{-3/2} \delta_{jk}$$

Como $\varepsilon_{ijk}\, \delta_{jk} = 0$,

$$\nabla \times \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = -3\, \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{r^5} = 0$$

$$\therefore \ \boxed{\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0}$$

(d) Como o campo elétrico vai a zero no infinito, o teorema de Helmholtz garante que o rotacional e o divergente são suficientes para caracterizar o campo elétrico.

Questão 02

(a)

$dq = \lambda dl'$

$dq = R d\phi$

O campo elétrico de uma distribuição linear de cargas é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{\imath^2} \hat{\imath}\, dl'$$

Neste problema:

$$\imath^2 = R^2 + z^2$$

$$\lambda(\vec{r}\,') = \lambda$$

Pela simetria do problema, somente a componente z do campo resultante, será diferente de zero:

$$\vec{E}_z = (\vec{E} \cdot \hat{z})\,\hat{z} = E\cos\theta\,\hat{z} \quad ; \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\vec{E}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lambda \hat{z} \int_0^{2\pi} \frac{Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}} d\phi$$

$$\boxed{\vec{E}_z = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{z}}$$

(b) O potencial para uma distribuição linear de cargas é

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{\imath} dl'$$

Neste problema

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R}{(R^2+z^2)^{1/2}} d\phi$$

$$\boxed{V(z) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_z = -\nabla V(z) = -\frac{\partial}{\partial z}\left\{ \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}} \right\} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_z = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{z}}$$, como no item anterior.

(c) As fórmulas para campo e potencial podem ser escritas como:

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{R z}{z^3} \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-3/2} \hat{z}$$

$$V(z) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{R}{z} \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2}$$

Fazendo $z \gg R$ e escrevendo a carga total no anel como $Q = \lambda \cdot (2\pi R)$:

$$\vec{E}(z) \simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \hat{z}$$

$$V(z) \simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z}$$

Respectivamente, o campo e o potencial de uma carga puntiforme.

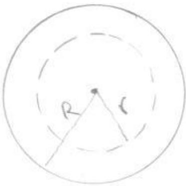
Questão 3

(a) Como a distribuição é uniforme, para distâncias maiores que o raio da esfera, o campo é o mesmo que seria obtido se toda a carga estivesse na origem.

Para $r > R$: $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}} = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$

Para $r < R$, podemos usar a lei de Gauss:



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{int} = \rho \cdot \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\rho\, 4\pi r^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\hat{r}}$$

ou

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\,\hat{r}}$$

(b) Colocando o referencial no infinito, o potencial fora da esfera é o mesmo da carga puntiforme.

Para $r > R$: $V(r) = \dfrac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \boxed{\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}} = \boxed{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

Para $r < R$, podemos calcular o potencial a partir do campo elétrico:

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r\,dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C$$

Como o potencial é contínuo em R

$$V(R) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} \Rightarrow C = \frac{R^2}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left[3R^2 - r^2\right]} = \boxed{\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[3 - \frac{r^2}{R^2}\right]}$$

(c) $$W = \frac{1}{2} \int_{\substack{\text{todo o}\\ \text{espaço}}} \rho V \, d\tau$$

Como a distribuição de cargas está toda na esfera:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^R \rho \left[\frac{\rho}{6\varepsilon_0} (3R^2 - r^2) \right] (4\pi r^2 dr)$$

$$W = \frac{\rho^2 \pi}{3\varepsilon_0} \cdot \left\{ 3R^2 \int_0^R r^2 dr - \int_0^R r^4 dr \right\}$$

$$W = \frac{\pi \rho^2}{3\varepsilon_0} \left[\frac{3R^5}{3} - \frac{R^5}{5} \right] \Rightarrow \boxed{W = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}}$$

Em termos de carga total, $Q = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$,

$$W = \frac{3}{5} \left[\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \right]$$

Questão 04

(a) O campo elétrico é dado, a partir do potencial, por

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial r}\left[A\frac{e^{-\lambda r}}{r}\right]\hat{r} = -A\hat{r}\left[-\frac{\lambda e^{-\lambda r}}{r} - \frac{e^{-\lambda r}}{r^2}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \boxed{A e^{-\lambda r}(1+\lambda r)\frac{\hat{r}}{r^2}}$$

(b) A densidade de cargas é encontrada a partir da lei de Gauss

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E} \Rightarrow \rho = \varepsilon_0 A\ \nabla\cdot\left[e^{-\lambda r}(1+\lambda r)\frac{\hat{r}}{r^2}\right]$$

Aplicando a regra do produto:

$$\rho = A\varepsilon_0\left\{\nabla\left[e^{-\lambda r}(1+\lambda r)\right]\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} + e^{-\lambda r}(1+\lambda r)\,\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}\right.$$

É dado que $\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = 4\pi\delta^3(\vec{r})$

$$\nabla\left[e^{-\lambda r}(1+\lambda r)\right] = \hat{r}\left[-\lambda e^{-\lambda r}(1+\lambda r) + \lambda e^{-\lambda r}\right] = -\lambda^2 r e^{-\lambda r}\hat{r}$$

logo $$\rho = A\varepsilon_0\left\{-\frac{\lambda^2}{r}e^{-\lambda r} + e^{-\lambda r}(1+\lambda r)4\pi\delta^3(\vec{r})\right\}$$

Usando ainda que $f(\vec{r})\delta^3(\vec{r}) = f(0)\delta^3(\vec{r})$

$$\rho = A\varepsilon_0\left\{4\pi\delta^3(\vec{r}) - \frac{\lambda^2}{r}e^{-\lambda r}\right\}$$

(c) A carga total é dada por

$$Q = \int_{\substack{\text{todo o}\\\text{espaço}}}\rho\, d\tau = A\varepsilon_0\left\{4\pi\overbrace{\int_{\substack{\text{todo o}\\\text{espaço}}}\delta^3(\vec{r})\,d\tau}^{1} - \lambda^2\overbrace{\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda r}}{\cancel{r}}4\pi r^{\cancel{2}}dr}^{1/\lambda^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = 0}$$