Turma:

Nota:

MA 327 Álgebra Linear

Segundo Semestre de 2008

Primeira Prova

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
T o t a l	

ATENÇÃO:
Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativa **não** serão consideradas.
Os sistemas lineares devem ser resolvidos por **escalonamento** de matrizes.

Questão 1. **(2.5 Pontos)**

Considere o subconjunto U do espaço vetorial real $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido da forma:

$$U = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p(-1) + p'(-1) = 0 \quad \text{e} \quad p(1) = 0 \} .$$

onde p' indica a derivada de p. Verifique se o subconjunto U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Em caso afirmativo, determine uma base para o subespaço U.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere o subespaço W do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ gerado pelos elementos do conjunto S definido por:

$$S = \{ (1,0,1,2), (2,1,1,2), (1,-1,2,4) \} .$$

Determine um subespaço U de $\mathbb{R}^4$ de modo que $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$.

Questão 3. **(2.5 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial real e $\gamma = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ uma base ordenada de V.

(a) Mostre que $\beta = \{ v_1 + v_3 , v_2 + v_3 , v_1 + v_2 + v_3 \}$ é uma base de V.

(b) Se o elemento $v \in V$ tem como matriz de coordenadas $[v]_\gamma$ dada por:

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ,$$

determine a matriz de coordenadas do elemento v em relação à base ordenada β.

Questão 4. **(3.0 Pontos)**

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definida por:

$$T(1,0,1) = 2 + x^2 + x^3 \quad , \quad T(0,1,0) = 1 + x^2 \qquad \text{e} \qquad T(0,0,1) = x^2 - x^3 .$$

(a) Calcule $T(a,b,c)$ para a transformação linear T.

(b) Determine uma base para o subespaço $Im(T)$.

(c) A transformação linear T é injetora ?

Boa Prova !

$G\ A\ B\ A\ R\ I\ T\ O$ – $Turmas\ \ D\ \ e\ \ E$

Questão 1.

Podemos verificar facilmente que o subconjunto $U \neq \emptyset$, pois o polinômio identicamente nulo pertence ao subconjunto U, isto é, $0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \in U$.

Vamos verificar se o subconjunto U é um subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Para isso, primeiramente vamos verificar se U é fechado com relação à operação de adição de elementos, isto é, dados os elementos $p(x)$, $q(x) \in U$ temos que

$$\begin{aligned}(p+q)(-1) + (p+q)'(-1) &= p(-1) + q(-1) + p'(-1) + q'(-1) \\ &= (\,p(-1) + p'(-1)\,) + (\,q(-1) + q'(-1)\,) \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(p+q)(1) &= p(1) + q(1) \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Logo, o elemento $(\,p(x) + q(x)\,) \in U$.

Finalmente, vamos verificar se o subconjunto U é fechado com relação à operação de multiplicação por escalar, isto é, dados os elementos $p(x) \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned}(\lambda p)(-1) + (\lambda p')(-1) &= \lambda p(-1) + \lambda p'(-1) \\ &= \lambda(\,p(-1) + p'(-1)\,) = \lambda 0 = 0\end{aligned}$$

e

$$(\lambda p)(1) = \lambda p(1) = 0 = \lambda 0 = 0$$

Logo, o elemento $\lambda p(x) \in S$.

Portanto, mostramos que o subconjunto U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Agora vamos determinar uma base para o subespaço U. Consideramos um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e vamos impor as condições para que esse elemento pertença ao subespaço U, isto é,

$$\begin{aligned}p(-1) + p'(-1) &= a \phantom{{}+b} - c + 2d = 0 \\ p(1) &= a + b + c + d = 0\end{aligned}\ .$$

Escalonando o sistema linear homogêneo, obtemos

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ \quad\; - b - 2c + d = 0 \end{cases} .$$

Assim, obtemos um sistema linear homogêneo com dois graus de liberdade. Desse modo, podemos concluir que o subespaço U tem dimensão dois. Logo, temos uma relação entre os coeficientes dos elementos $p(x) \in U$. Podemos verificar facilmente que

$$b = -2c + d \qquad \text{e} \qquad a = c - 2d$$

para $c, d \in I\!R$.

Substituindo a e b no polinômio $p(x)$, obtemos que todo elemento do subespaço U é escrito como:

$$p(x) = c(1 - 2x + x^2) + d(-2 + x + x^3) \qquad ; \qquad c, d \in I\!R .$$

Portanto, mostramos que o subespaço U é gerado pelos elementos do conjunto

$$\Gamma = \{ 1 - 2x + x^2 , -2 + x + x^3 \} ,$$

que é linearmente independente em $\mathcal{P}_3(I\!R)$, pois tomando a combinação linear nula

$$a(1 - 2x + x^2) + b(-2 + x + x^3) = 0$$

obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ -2a + b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $a = b = 0$. Logo, o conjunto Γ é uma base para o subespaço U.

Note que os elementos da base Γ satisfazem as condições para que um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_3(I\!R)$ pertença ao subespaço U.

Questão 2.

Inicialmente, vamos encontrar uma base para o subespaço W considerando seu sistema de geradores dado pelo conjunto S. Para isso, construímos a matriz A cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos elementos do sistema de geradores em relação à base canônica, que é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Em seguida, efetuamos o escalonamento da matriz A obtendo uma matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, dada por:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Desse modo, temos que $\{ (1,0,1,2) \, , \, (0,1,-1,-2) \}$ é uma base para o subespaço W.

Finalmente, vamos completar a base do subespaço W para obter uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$. Assim, encontramos o subespaço U com as propriedades desejadas. Para isso, construímos uma matriz M de ordem 4×4 a partir das linhas não nulas da matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada, dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Desse modo, temos que

$$\{ (1,0,1,2) \, , \, (0,1,-1,-2) \, , \, (0,0,1,0) \, , \, (0,0,0,1) \}$$

é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, e o conjunto $\{ (0,0,1,0) \, , \, (0,0,0,1) \}$ é uma base para o subespaço U, que é um dos subespaços que estamos procurando, isto é,

$$W \cap U = \{ 0_{\mathbb{R}^4} \} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{R}^4 = W + U \, .$$

Desse modo, temos que $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$.

Questão 3.

(a) Como $dim(V) = 3$, basta mostrar que o conjunto β é linearmente independente. Para isso, vamos considerar uma combinação linear nula dos elementos do conjunto β

$$c_1(v_1 + v_3) + c_2(v_2 + v_3) + c_3(v_1 + v_2 + v_3) = 0_V,$$

que reorganizando os termos, obtemos a seguinte combinação linear nula

$$(c_1 + c_3)v_1 + (c_2 + c_3)v_2 + (c_1 + c_2 + c_3)v_3 = 0_V.$$

Como o conjunto γ é linearmente independente, pois é uma base de V, implica que os coeficientes da combinação linear nula acima devem ser todos iguais a zero. Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

que possui somente a solução trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Desse modo, provamos que o conjunto β é linearmente independente. Portanto, o conjunto β é uma base para V.

(b) Podemos encontrar facilmente a matriz $[I]^{\beta}_{\gamma}$ utilizando as relações entre os elementos da base β e os elementos da base γ. Assim, temos que

$$[I]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que $[v]_{\gamma} = [I]^{\beta}_{\gamma}[v]_{\beta}$, obtendo o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

que possui como solução única $a = 1$, $b = -1$ e $c = 2$. Assim, encontramos

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 4.

Podemos verificar facilmente que o conjunto

$$\gamma \;=\; \{\,(1,0,1)\,,\,(0,1,0)\,,\,(0,0,1)\,\}$$

é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Desse modo, tomando um elemento genérico $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ vamos fazer sua representação em relação à base γ, isto é,

$$(a,b,c) \;=\; c_1(1,0,1) \;+\; c_2(0,1,0) \;+\; c_3(0,0,1)\,,$$

obtendo

$$c_1 \;=\; a \quad , \quad c_2 \;=\; b \qquad \text{e} \qquad c_3 \;=\; c \,-\, a\,.$$

Desse modo, temos que

$$(a,b,c) \;=\; a(1,0,1) \;+\; b(0,1,0) \;+\; (c \,-\, a)(0,0,1)\,,$$

(a) Portanto, podemos escrever a transformação linear T da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(a,b,c) \;&=\; a\,T(1,0,1) \;+\; b\,T(0,1,0) \;+\; (c-a)\,T(0,0,1) \\ &=\; a(\,2 \,+\, x^2 \,+\, x^3\,) \;+\; b(\,1 \,+\, x^2\,) \;+\; (c-a)(\,x^2 \,-\, x^3\,) \\ &=\; a(\,2 \,+\, 2x^3\,) \;+\; b(\,1 \,+\, x^2\,) \;+\; c(\,x^2 \,-\, x^3\,) \end{aligned}$$

Desse modo, determinamos explicitamente a transformação linear T

$$T(a,b,c) \;=\; a(\,2 \,+\, 2x^3\,) \;+\; b(\,1 \,+\, x^2\,) \;+\; c(\,x^2 \,-\, x^3\,)$$

para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Considerando $T(a,b,c)$, sabemos que

$$Im(T) \;=\; [2 \,+\, 2x^3\,,\, 1 \,+\, x^2\,,\, x^2 \,-\, x^3]\,.$$

Assim, a partir do sistema de geradores vamos determinar uma base para o subespaço $Im(T)$. Para isso, construímos a matriz A cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos elementos do sistema de geradores em relação à base canônica, que é dada por:

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Em seguida, efetuamos o escalonamento da matriz A obtendo uma matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, dada por:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Desse modo, $\{ 2 + 2x^3 , 1 + x^2 \}$ é uma base para o subespaço $Im(T)$. Logo, temos que $dim(Im(T)) = 2$.

(c) Vamos verificar se a transformação linear T é injetora. Para isso, vamos determinar o subespaço $Ker(T)$, isto é, vamos determinar os elementos $(a, b, c) \in I\!R^3$ tais que

$$T(a, b, c) = 0_{\mathcal{P}_3(I\!R)} .$$

Note que podemos escrever a transformação linear T da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(a, b, c) &= a(2 + 2x^3) + b(1 + x^2) + c(x^2 - x^3) \\ &= (2a + b) + (b + c)x^2 + (2a - c)x^3 \end{aligned}$$

Assim, temos que determinar os elementos $(a, b, c) \in I\!R^3$ tais que

$$T(a, b, c) = (2a + b) + (b + c)x^2 + (2a - c)x^3 = 0_{\mathcal{P}_3(I\!R)} ,$$

obtendo o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

que possui como solução os elementos $(a, b, c) \in I\!R^3$ tais que

$$(a, b, c) = a(1, -2, 2) \quad \text{para} \quad a \in I\!R .$$

Assim, temos que $Ker(T) = [(1, -2, 2)]$.

Portanto, T não é uma transformação linear injetora.

G A B A R I T O – Turma C

Questão 1. É a *Questão 1.* das Turmas D e E

Questão 2. É a *Questão 2.* das Turmas D e E

Questão 3. É a *Questão 4.* das Turmas D e E

Questão 4.
Calcule $T(x, y, z, t)$ para uma transformação linear $T : I\!R^4 \longrightarrow I\!R^4$ tal que

$$Ker(T) = \{ (x, y, z, t) \in I\!R^4 \ / \ x + y - 2z + 3t = 0 \quad \text{e} \quad y + z + t = 0 \} .$$

A transformação linear T é sobrejetora ?

Inicialmente vamos determinar uma base para o subespaço $Ker(T)$. Sabemos que todo elemento $(x, y, z, t) \in Ker(T)$ é uma solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3t = 0 \\ \quad\;\; y + z + t = 0 \end{cases}$$

que possui como solução geral

$$(x, y, z, t) = z(3, -1, 1, 0) + t(-2, -1, 0, 1) \qquad \text{para} \qquad z, t \in I\!R .$$

Desse modo, temos que o conjunto $S = \{ (3, -1, 1, 0) , (-2, -1, 0, 1) \}$ é uma base para o subespaço $Ker(T)$.

Como $dim(Ker(T)) = 2$, devemos ter $dim(Im(T)) = 2$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem. Logo, a transformação linear T não é sobrejetora.

Agora devemos obter uma base para o espaço vetorial $I\!R^4$ completando a base S do subespaço $Ker(T)$.

Para isso, construímos a matriz A cujas linhas são as coordenadas dos elementos da base S em relação à base canônica, que é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em seguida, efetuamos o escalonamento da matriz A obtendo uma matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, dada por:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

Finalmente, construímos uma matriz M de ordem 4×4 a partir da matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada, dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Desse modo, temos que

$$\Gamma = \{ (6, -2, 2, 0) , (0, -5, 2, 3) , (0, 0, 1, 0) , (0, 0, 0, 1) \}$$

é uma base para o espaço vetorial $I\!R^4$

Portanto, podemos definir **uma** transformação linear T da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(6, -2, 2, 0) &= (0, 0, 0, 0) \\ T(0, -5, 2, 3) &= (0, 0, 0, 0) \\ T(0, 0, 1, 0) &= (1, 0, 0, 0) \\ T(0, 0, 0, 1) &= (0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

onde o subespaço $Im(T) = [(1, 0, 0, 0) , (0, 1, 0, 0)]$.

Finalmente, para obter explicitamente $T(x, y, z, t)$, vamos representar um elemento genérico $(x, y, z, t) \in I\!R^4$ com relação à base ordenada Γ, isto é,

$$(x, y, z, t) = a(6, -2, 2, 0) + b(0, -5, 2, 3) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, 0, 1) .$$

Desse modo, obtemos um sistema linear triangular inferior

$$\begin{cases} 6a & & & & = x \\ -2a & - & 5b & & = y \\ 2a & + & 2b & + \; c & = z \\ & & 3b & + \; d & = t \end{cases}$$

que possui uma única solução, determinada pelo processo de substituição avançada, que é dada por:

$$a = \frac{x}{6} \quad , \quad b = -\frac{x + 3y}{15} \quad , \quad c = \frac{-3x + 6y + 15z}{15} \quad \text{e} \quad d = \frac{x + 3y + 5t}{5}$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= a\,T(6, -2, 2, 0) + b\,T(0, -5, 2, 3) + c\,T(0, 0, 1, 0) + d\,T(0, 0, 0, 1) \\ &= \left(\frac{-3x + 6y + 15z}{15} , \frac{x + 3y + 5t}{5} , 0 , 0 \right) \end{aligned}$$

Note que esse problema possui infinitas soluções, pois sua resolução depende da maneira como completamos a base do subespaço $Ker(T)$ para obter uma base do espaço vetorial $I\!R^4$, e também de como escolhemos o subespaço $Im(T)$, através da escolha de uma base.