MC348-Fundamentos Matemáticos da Computação
Prof. Ricardo Dahab - Turma B

Primeira Prova - 19/3/2009

1. (*2,0*) Defina (i) o que é a contrapositiva de uma proposição; (ii) o que são proposições equivalentes. Finalmente, prove que uma proposição e sua contrapositiva são proposições equivalentes.

2. (*4,0*) Conjeture, e demonstre por indução, uma fórmula fechada para o valor da soma

$$S(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

3. (*4,0*) Demonstre, por indução, a seguinte proposição: "Dado um conjunto A de $n+1$ inteiros positivos, $n \geq 1$, todos menores ou iguais a $2n$, existem em A dois inteiros distintos x, y tais que x divide y."

1. **Esboço da solução:**

   (i) Contrapositivas só dizem respeito a proposições do tipo implicação, isto é, $[P \to Q]$. Neste caso, a contrapositiva é a proposição $[\neg Q \to \neg P]$.

   (ii) Dizemos que proposições P e Q quaisquer são equivalentes quando P é verdadeira se e somente se Q é verdadeira.

   (iii) Veja o conjunto de slides `provas-b.pdf`.

2. **Esboço da solução:** Observando os valores $S(0) = 1, S(1) = \frac{3}{2}, S(2) = \frac{7}{4}, S(3) = \frac{15}{8}$, conjeturamos que $S(n) = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$.

   A demonstração é por indução, com base $n = 0$, para a qual $S(0) = 1 = \frac{2^1-1}{2^0}$, o que confere com o esperado.

   No passo da indução, fixamos um valor $k \geq 0$ e supomos que a hipótese vale para k. Daí, usando essa hipótese de indução, mostramos que o resultado vale para $k+1$. Isso é uma tarefa fácil já que $S(k+1) = S(k) + \frac{1}{2^{k+1}}$ e, como $S(k) = \frac{2^{k+1}-1}{2^k}$ por hipótese de indução, resta somente verificar que $S(k+1) = S(k) + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+2}-1}{2^{k+1}}$.

3. **Esboço da solução:**