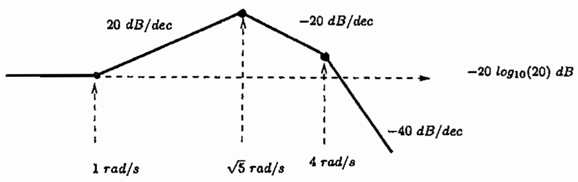
EA-721 : Princípios de Controle e Servomecanismo

TURMA "A"

Primeira Prova - Dia 04 / 04 / 07

1. A figura abaixo mostra o diagrama de Bode de módulo de um sistema contínuo de fase mínima sendo que dois de seus pólos são complexos conjugados com fator de amortecimento $\xi = 2/\sqrt{5}$. Determine:



   a) a sua função de transferência $H(s)$.
   b) o ganho $K > 0$ de tal forma que a função de transferência $G(s) = KH(s)$ siga, com erro nulo, um degrau unitário.
   c) o tempo de estabilização de $G(s)$ com erro de 2% e a sua resposta em regime permanente para a entrada rampa unitária.
   d) a amplitude da resposta de $G(s)$ em regime permanente para a entrada senoidal $3sen(3t)$, $\forall t \geq 0$.

2. Considere a equação característica

$$1 + C(s)\left(\frac{s+2}{s^2}\right) = 0$$

   Com o Princípio da Variação do Argumento, determine o número de raízes situadas na região $Re(s) > 0$, considerando :

   a) Um controlador proporcional $C(s) = 1$.
   b) Um controlador proporcional - integral $C(s) = -(s+1)/s$.

3. Considere um controlador com função de transferência de primeira ordem

$$C(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

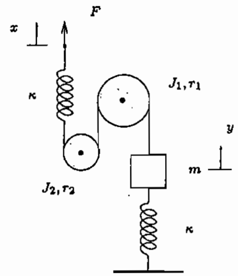
   deseja-se determinar a aproximação a tempo discreto $C_D(z)$ com período de amostragem T e um segurador de ordem zero na saída.

   a) Determine a função de transferência $C_D(z)$.
   b) Com a aproximação de primeira ordem $e^x \approx 1 + x$, verifique se a relação

$$C_D(z) = C\left(\frac{z-1}{T}\right)$$

   é verdadeira.

4. Na figura abaixo cada polia é definida pelo seu momento de inércia e seu raio. O fio é inextensível e é perfeitamente aderente. Os referenciais inerciais "x" e "y" foram determinados sem que as molas estivessem comprimidas ou tracionadas.



   a) Determine o modelo matemático que permite calcular o deslocamento $x(t)$ dada a força externa $F(t)$.
   b) Em um sistema de unidades coerentes adote $m = 1$, $k = 1$, $g = 10$, $J_1 = 2$, $r_1 = 1$, $J_2 = 4$ e $r_2 = 2$. Determine $x(t)$ considerando $F(t) = 2mg$ para todo $t \geq 0$ e que a massa m encontra-se em repouso na origem ($y = 0$) em $t = 0$.

NOTAS :

- A prova será realizada de 08:00 horas até 10:00 horas.
- Sem consulta aos apontamentos.
- Não é necessário usar qualquer tipo de calculadora. Adote a aproximação $\ln(0.02) \approx -4$.
- **Cada item vale 1 (um) ponto.**

Daniel da Costa Picchi

1) 3,5
2) 2,0
3) 0,5
4) 1,0
7,0

(1)

a) Ganho DC: $1/20$

Zeros: em $\omega = 1$

Pólos: Complexos conjugados em $\omega = \sqrt{5}$ e pólo simples em $w = 4$ rad/s.

$$H(s) = K \frac{\omega_n^2 (s+1)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)\cdot(s+4)} = 5K \frac{(s+1)}{(s^2+4s+5)(s+4)}$$

$\omega_n^2 = \sqrt{5}^2 = 5$ $\quad H(0) = 1/20 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$

$2\zeta\omega_n = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 4$

$$\boxed{H(s) = \frac{s+1}{(s^2+4s+5)(s+4)}}$$

b)

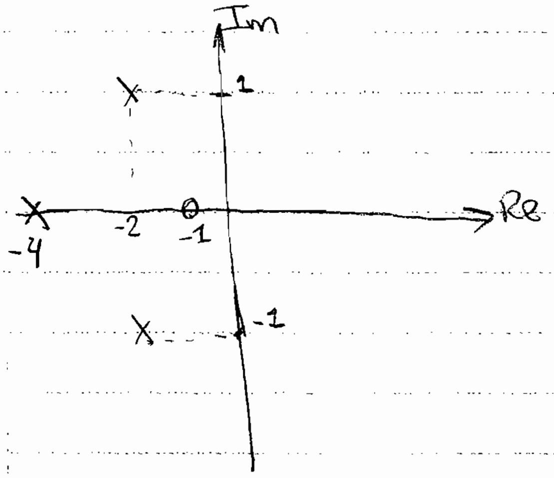
$$G(s) = K \frac{(s+1)}{(s^2+4s+5)(s+4)}$$

Queremos que $y(t) = 1$ quando $t \to \infty$, ou seja, $\lim_{s\to 0} Y(s)s = 1$

$$Y(s) = \frac{K}{s} \frac{(s+1)}{(s^2+4s+5)(s+4)}$$

$$\lim_{s\to 0} Y(s)s = \lim_{s\to 0} K \frac{(s+1)}{(s^2+4s+5)(s+4)} = \frac{K}{20} = 1 \Leftrightarrow \boxed{K=20}$$

c-) $G(s) = \dfrac{20\,(s+1)}{(s^2+4s+5)(s+4)}$



Aproximação por pólos dominantes:

$$G(s) \cong \frac{5}{s^2+4s+5}$$

$$t_\epsilon = \frac{-\ln \epsilon}{\xi w_n} = \frac{-\ln(0{,}02)}{2} \cong \boxed{2s}$$

Resposta em regime:

$$y(t)\Big|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} \frac{G(s)}{s^2}\cdot s = \lim_{s\to 0} \frac{20\,(s+1)}{\underbrace{s(s^2+4s+5)(s+4)}_{s=0\ \notin\ \text{domínio}}} \to +\infty$$

$y_{perm}(t) = At + B \quad , \forall\ t \geq 0 \qquad A = ? \qquad B = ?$

d-) Amplitude resposta = (Amplitude entrada) $|H(jw)|$

$$|H(j3)| = 20\left|\frac{1+j3}{(-9+j12+5)(4+j3)}\right| = 20\left|\frac{1+j3}{(-4+j12)(4+j3)}\right| =$$

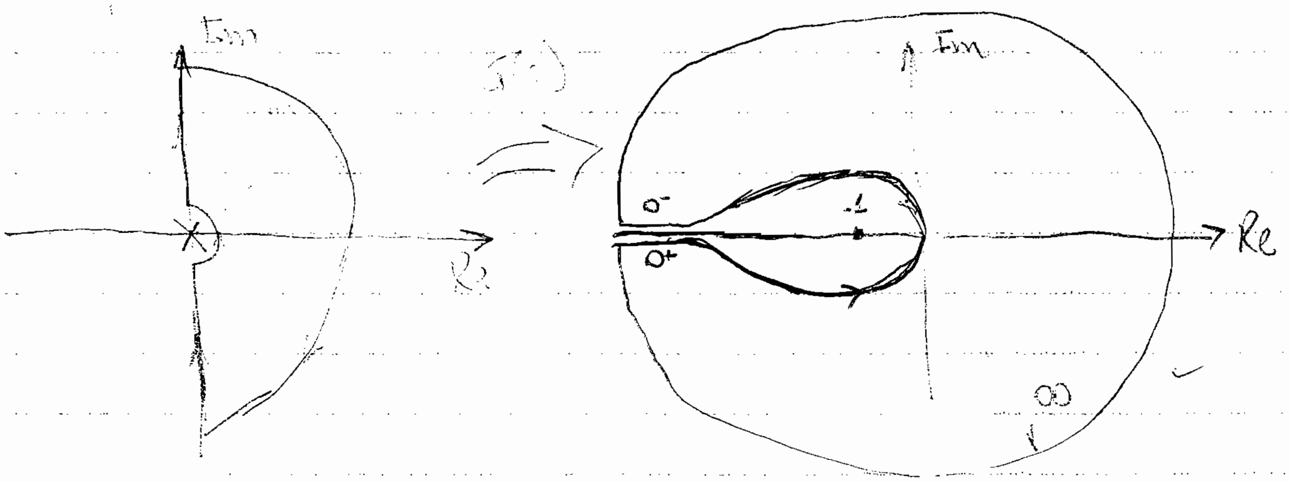
$$= 20\left|\frac{1+j3}{-52+j36}\right| = 5\left|\frac{1+j3}{-13+j9}\right| = \frac{5\sqrt{10}}{5\sqrt{10}} = 1$$

$\boxed{\text{Amplitude da resposta} = 3}$

② a) $1 + \left(\frac{s+2}{s^2}\right)$

$\Uparrow$ $G(s)$

Deve-se fazer a [illegible] de Nyquist [illegible] $G(s)$ e [illegible] o [illegible] [illegible] no ponto -1.



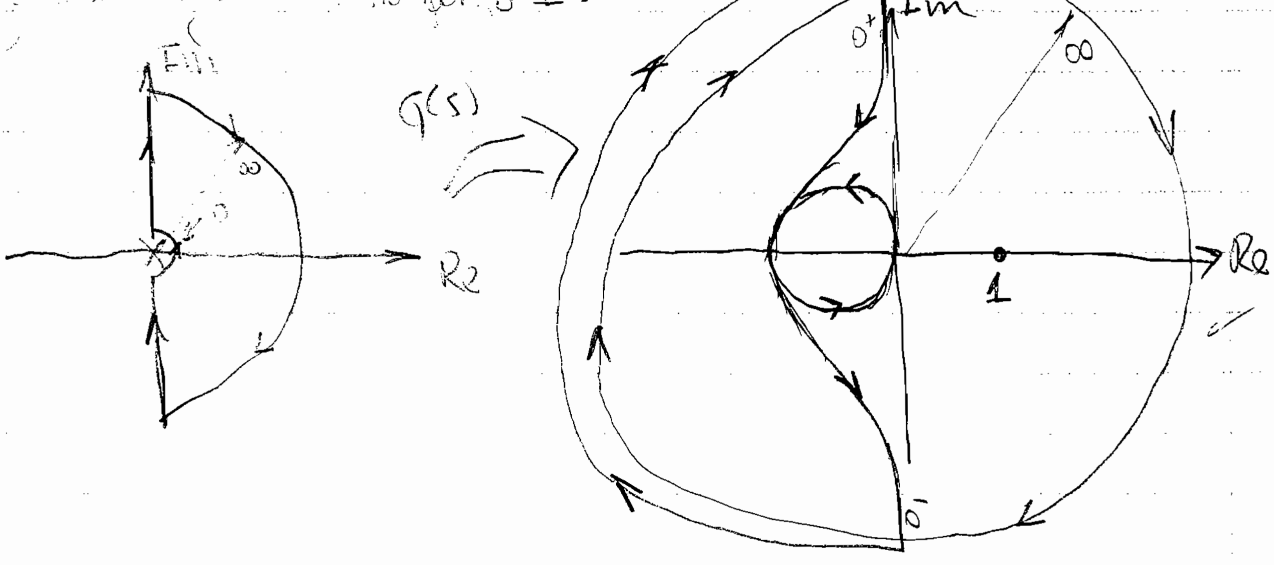
$N_p = 0$

$\frac{1}{2\pi}\Delta\arg G(s) = N_z - N_p \Rightarrow N_z = 0$

b) $1 - \frac{(s-1)(s-2)}{s^3}$

$G(s)$

De[illegible] fazer [illegible] Nyquist para $G(s)$ e observar a varia-[illegible] no ponto 1.



$N_p = 0$

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg_{\circlearrowleft}^{2\pi} G(s) = N_Z - N_p \Rightarrow \boxed{N_Z = 1}$$

Daniel da Costa Picchi RA: 031962

③ a) $C(s) = \dfrac{1}{s(s+2)} = \dfrac{1/2}{s} - \dfrac{1/2}{s+2}$

$C_D(s) = \dfrac{1-e^{-Ts}}{s}\left(\dfrac{1/2}{s} - \dfrac{1/2}{s+2}\right)$

$= 1-e^{-Ts}\left(\dfrac{1/2}{s^2} - \dfrac{1/2}{(s+2)s}\right)$

$= 1-e^{-Ts}\left(\dfrac{1/2}{s^2} - \dfrac{1/4}{s} + \dfrac{1/4}{s+2}\right)$

$c_D(t) = \frac{1}{2}\left(t\,u(t) - (t-T)u(t-T)\right) - \frac{1}{4}u(t) + \frac{1}{4}u(t-T) + \frac{1}{4}\left(e^{-2t} - e^{-2(t-T)}\right)$

$c_D(kT) = \frac{1}{2}\left(kT\,u(kT) - ((k-1)T)u((k-1)T)\right) - \frac{1}{4}u(kT) + \frac{1}{4}u((k-1)T) +$

$+ \frac{1}{4}\left(e^{-2kT} - e^{-2(k-1)T}\right)$

$C_D(z) = \frac{1}{2}\dfrac{z}{(z-1)^2}(1-z^{-1}) - \frac{1}{4}\dfrac{z}{z-1}(1-z^{-1}) + \frac{1}{4}\dfrac{z}{z-e^{-2}}(1-z^{-1})$

$= (1-z^{-1})\left[\frac{1}{2}\dfrac{z}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\dfrac{z}{z-1} + \frac{1}{4}\dfrac{z}{z-e^{-2}}\right]$

$= (1-z^{-1})\left[\dfrac{-1/4 z^2 + 3/4 z}{(z-1)^2} + \frac{1}{4}\dfrac{z}{z-e^{-2}}\right]$ $\times$ ...

b) $C_D(s) = \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)\left(\frac{1}{s(s+2)}\right) \approx T\left(\frac{1}{s(s+2)}\right) = \frac{T/2}{s} - \frac{T/2}{s+2}$

$C_D(t) = T/2 \;-\; T/2\, e^{-2t}\, u(t)$

$C_D(kT) = T/2\, u(kT) - T/2\, e^{-2kT}\, u(kT)$

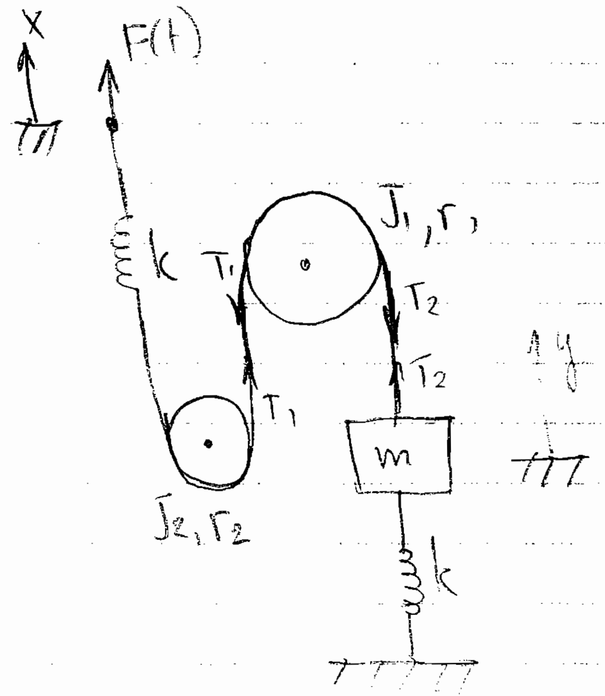
$C_D(z) = T/2 \cdot \frac{z}{z-1} - T/2 \cdot \frac{z}{z-e^{-2}} \approx T/2 \cdot z\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) \approx$

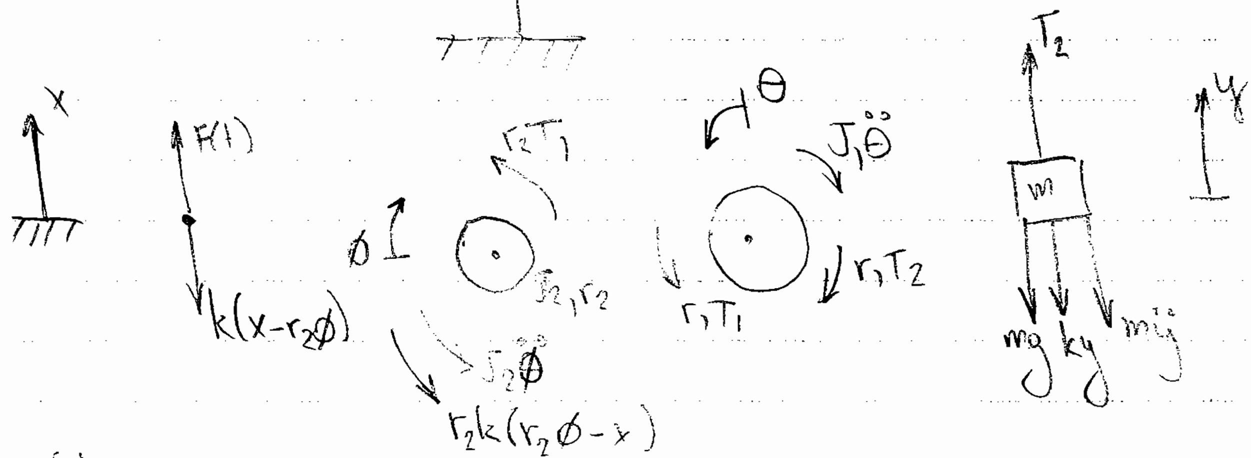
$\approx \frac{T}{2} z\left(\frac{2}{z^2-1}\right) = \boxed{T\,\frac{z}{z^2-1}}$

$C(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T}\right)\left(\frac{z-1+2T}{T}\right)} = T^2 \frac{1}{(z-1)(z-1+2T)}$

concluscão ?

(4) a)





$$\Longrightarrow \begin{cases} k(x-r_2\phi) = F(t) \\ J_1\ddot{\theta} + r_1T_2 = r_1T_1 \\ J_2\ddot{\phi} + r_2T_1 = r_2k(x-r_2\phi) \\ m\ddot{y} + ky + mg = T_2 \end{cases}$$

$$r_1\theta = r_2\phi = y$$