Questões	Valores	Notas
1.^{a}	3.0	
2.^{a}	3.0	
3.^{a}	4.0	
Total	10.0	

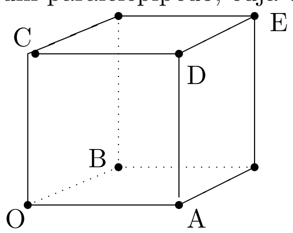
2^a Prova de MA141 — 17/05/2012 (NOITE)

Nome:____

RA:______________________Turma:______________________

*A*TENÇÃO: Será corrigida a redação da resposta. Cada resposta deve ser redigida com todos os detalhes. Caso duas ou mais provas apresentem alguma resposta cujas redações coincidam em mais de 50%, essa questão será **ZERADA** em todas elas. Não é permitido **DESTACAR** as folhas da prova.

(1) (3 pontos) São dados quatro vértices, $O = (0,0,0)$, $A = (-2,-1,1)$, $B = (1,1,1)$, e $C = (5,1,-1)$ de um paralelepípedo, cuja distribuição está esquematizada no desenho abaixo.



Essa figura **NÃO** um **CUBO**! Cada face um paralelogramo (no necessariamente reto, isto , no necessariamente um retngulo) e duas faces opostas so paralelas.

(a) Encontrar a equação do plano que contém os vértices 0, A, e B.

(b) Encontrar a equação do plano que contém os vértices C, D, e E.

(c) Encontrar a equação da reta que passa pelos vértices C e D.

(d) Encontrar a coordenadas dos pontos D e E.

(2) (0,5 pontos cada item) Sejam u, v e w são vetores no espaço então: Responda às perguntas abaixo com "CERTA" ou "ERRADA". Respostas **sem** justificativa **não** serão conderadas.

(a) Se $u \times v \neq \vec{0}$ e u é ortogonal a v então $u \times (u \times v)$ é paralelo a v.

(b) O conjunto $\{\,(m,2,-3) \mid m \in \mathbb{R}\,\}$ representa uma reta.

(c) Existe um vetor u que é ortogonal a $(2,3,-1)$ e a $(2,-4,6)$ e tem norma $3\sqrt{3}$.

(d) Se u e v so vetores tais que $u \cdot v = 0$, então $u = 0$ ou $v = 0$.

(3) (3 pontos) Dados o plano $\pi : 2x + 2y - z = 6$ e o ponto $P : (2,2,-4)$,

(a) Encontre a distância de P a π.

(b) Encontre a equação da reta que passa por P e é ortogonal a π.

(c) Encontre o ponto Q em π de forma que a distância de P a Q seja igual a distândica de$P$ a π

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

GABARITO

1) Primeiramente observamos que por ser um paralelepípedo temos

$$\vec{CD} = \vec{OA} = (-2,-1,1) \qquad \vec{DE} = \vec{OB} = (1,1,1)$$

a) (1,0) O plano π que contém O, A, B está caracterizado por

$$\begin{cases} N_\pi = \vec{OA} \times \vec{OB} \\ P_\pi = O = (0,0,0) \end{cases} \implies N_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,3,-1)$$

Donde $\pi: \ -2x+3y-z=0$.

b) (0,5) O plano α que contém C, D, E é paralelo a π e portanto, está caracterizado por

$$\begin{cases} N_\alpha = N_\pi = (-2,3,-1) \\ P_\alpha = C = (5,1,-1) \end{cases}$$

Donde $\alpha: \ -2x+3y-z = -2(5)+3(1)-(-1) = -6$, então

$$\alpha: \ -2x+3y-z=-6.$$

c) (0,5) A reta r que passa por C e D é paralela a reta que passa por O e A donde segue que

$$\begin{cases} V_r = \vec{OA} = (-2,-1,1) \\ P_r = C = (5,1,-1) \end{cases}$$

Portanto $r = \ (5,1,-1)+t(-2,-1,1) \ t \in \mathbb{R}$

d) (1,0)Sabemos que $\vec{CD} = \vec{OA} = (-2,-1,1)$ e que $C = (5,1,-1)$ donde

$$D = (-2,-1,1)+(5,1,-1) = (3,0,0)$$

Por outro lado $\vec{DE} = \vec{OB} = (1,1,1)$ donde

$$E = (1,1,1)+(3,0,0) = (4,1,1)$$

2) a) (0,75) Certa. Utilizando $u \times (w \times v) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$ e que $u \cdot v = 0$ temos

$$u \times (u \times v) = ||u||^2 v - (u \cdot v)u = ||u||^2 v$$

Donde segue que $u \times (u \times v)$ é paralelo a v.

b) (0,75) Certa. $r = (0,2,-3)+m(1,0,0) \ m \in \mathbb{R}$

c) (0,75) Certa. Seja

$$V = (2,3,-1)\times(2,-4,6) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = (14,-14,-14) \neq 0$$

Agora escolhemos $W = \frac{3\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} V = 3(1,-1,-1) = (3,-3,-3)$ e temos o vetor procurado.

d) (0,75) Errada. $u = (1,0,0) \neq 0$ e $v = (0,1,0) \neq 0$ mas $u \cdot v = 0$

3) Sabemos que $\pi = 2x+2y-z=6$ donde $N_\pi = (2,2,-1)$ e $P_\pi = (3,0,0)$.

a) (1,0) Da fórmula de distancia.

$$d(P,\pi) = \frac{|\vec{PP_\pi} \cdot N|}{||N||} = \frac{|(1,-2,4)\cdot(2,2,-1))|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{3} = 2$$

b) (1,5) A reta está caracterizada por

$$\begin{cases} V_r = N_\pi = (2,2,-1) \\ P_r = P = (2,2,-4) \end{cases} \implies r = (2,2,-4)+t(2,2,-1) \qquad t \in \mathbb{R}$$

c) (1,5) Procuramos $r \cap \pi$. Neste caso existe um t_0 tal que $(2+2t_0, 2+2t_0, -4-t_0) \in \pi$, isto é

$$2(2+2t_0)+2(2+2t_0)-(-4-t_0) = 6 \implies 9t_0 = 6-12 = -6 \Rightarrow t_0 = -2/3$$

Então

$$Q = \left(2-\frac{4}{3}, 2-\frac{4}{3}, -4+\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-10}{3}\right)$$