1

MA327 Turmas C,D,E - 2S 2011 - Prova 1

Nome: GABARITO RA: ________ 08/09/2011

Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

1. (10pts) Escreva as definições de subespaço de um espaço vetorial e de soma de dois subespaços.

2. Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor ou igual a 3.

   (a) (10pts) Verifique que $\beta = \{t-1, t^2-1, t-t^3, 2t^2\}$ é uma base de V.

   (b) (10pts) Encontre as coordenadas de $p(t) = 2t^3 + 3t^2 + t$ na base β.

3. Considere o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$, onde $v_1 = (1,2,0,1), v_2 = (1,0,4,3), v_3 = (0,-1,2,1), v_4 = (3,4,4,5)$.

   (a) (10pts) Encontre uma base para o subespaço W gerado por S e calcule sua dimensão.

   (b) (10pts) Complete a base encontrada no ítem (a) a uma base para $\mathbb{R}^4$.

   (c) (10pts) Encontre uma base para $U \cap W$ onde U é o subespaço gerado por $\{v_1 + v_3, e_1\}$ e $e_1 = (1,0,0,0)$.

4. (10pts) Seja $V = M_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas reais e sejam

$$U = \{A \in V \mid A^t = -A\}, \quad W = \{B = (b_{ij}) \in V \mid b_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$$

   os conjuntos das matrizes antissimétricas e triangulares superiores, respectivamente. Verifique que U e W são subespaços de V e que $V = U \oplus W$.

5. Determine se as seguinte afirmações são verdadeiras ou falsas

   (a) (10pts) A interseção de dois subespaços de dimensão n de um espaço de dimensão $2n-1$ é sempre diferente do subespaço que contém apenas 0.

   (b) (10pts) As funções $\cos(2t), \cos(t)$ e $\operatorname{sen}(t)$ formam um subconjunto linearmente dependente do espaço vetorial das funções contínuas de $[0, 2\pi]$ em $\mathbb{R}$.

   (c) (10pts) Se A é uma matriz real 19 x 831, a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^{19}$ gerado pelas colunas de A é igual à dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^{831}$ gerado pelas linhas de A.

Questão 1

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

- $W \subset V$ é um <u>subespaço</u> se $W \neq \emptyset$ e é fechado com relação às operações (combinações lineares) de V, ou seja:

$$\alpha u + \beta v \in W, \quad \forall \begin{cases} u, v \in W \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{cases}$$

- Sejam $W_1, W_2 \subset V$ subespaços; a <u>soma</u> $W_1 + W_2$ é o conjunto (subespaço):

$$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_i \in W_i \, , \, i = 1, 2 \}$$

Questão 2

Uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$ é da forma:

$$\alpha(t-t^3)+\beta(2t^2)+\gamma(t^2-1)+\delta(t-1) = (-\alpha)t^3+(2\beta+\gamma)t^2+(\alpha+\delta)t+(-\gamma-\delta) \quad (*)$$

(a) O espaço $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{at^3+bt^2+ct+d \mid a,\dots,d\in\mathbb{R}\}$ tem dimensão 4, logo $\#\mathcal{B} = \dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$; assim $\mathcal{B}$ será uma base se e somente se for l.i.

Usando $(*)$, vemos que uma combinação linear nula implica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\det A = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0^- & 0^+ & 1^- \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

logo a única solução é a trivial $\alpha = \dots = \delta = 0$.

Assim $\mathcal{B}$ é l.i. e portanto é uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(b) $\alpha = -2$, $\delta = 3$, $\gamma = -3$, $\beta = 3$.

$\blacksquare$

Questão 3

(a) $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando A, obtemos:

$$A \sim \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 \\ L_4 - L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1 \\ -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 + 2L_2 \\ L_4 + L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{2}\gamma + 2\delta \\ \beta &= -\tfrac{1}{2}\gamma - \delta \\ &\left.\begin{aligned}\gamma \\ \delta\end{aligned}\right\} \text{ livres} \end{aligned}$$

Substituindo $\left| \begin{aligned} \gamma = -1,\ \delta = 0 \\ \gamma = 0,\ \delta = -1 \end{aligned} \right.$ temos $\left| \begin{aligned} v_3 &= -\tfrac{1}{2}v_1 + \tfrac{1}{2}v_2 \\ v_4 &= 2v_1 + v_2 \end{aligned} \right.$,

ou seja, $\{v_1, v_2\}$ gera $W = \langle S \rangle$.

Como $\{v_1, v_2\}$ é l.i. (pois v_1 não é múltiplo escalar de v_2) concluímos tratar-se de uma base. $\square$

(b) Afirmo que $\{v_1, v_2, e_2, e_3\}$ é l.i. e portanto base de $\mathbb{R}^4$, pois contém 4 elementos:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\square$

(c) Como $v_1 + v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o conjunto $\{v_1 + v_3, e_1\}$ é l.i. e $\dim U = 2$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \dim U \cap W &= \dim U + \dim W - \dim U + W \\ &= 2 + 2 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

usando os fatos de que $v_1 + v_3 \in W$ (pelo item (a)), mas

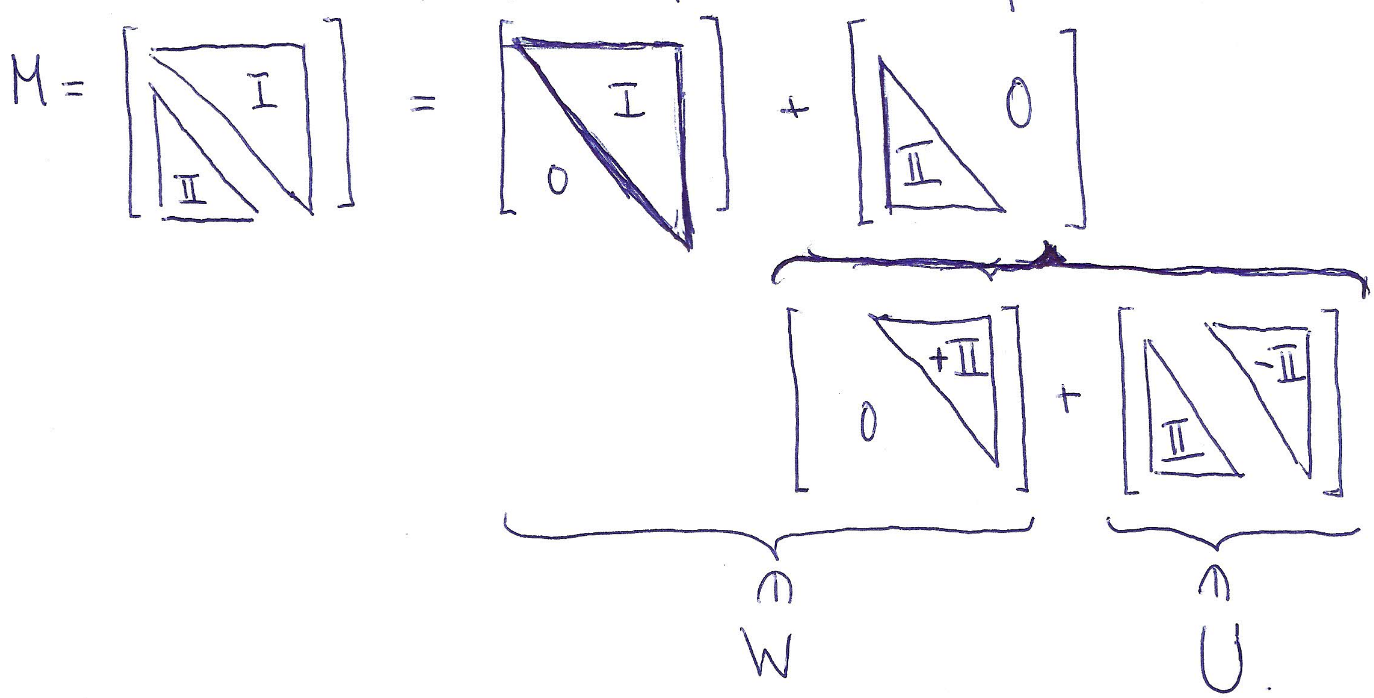
$e_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = \beta = 0 \end{cases}$ ⚠, portanto $e_1 \notin W$.

Assim $v_1 + v_3$ gera a interseção:

$$\boxed{U \cap W = \mathcal{X}(\{v_1 + v_3\})}$$

Questão 4

- $A_1, A_2 \in U \Rightarrow (\alpha A_1 + \beta A_2)^t = \alpha A_1^t + \beta A_2^t = -(\alpha A_1 + \beta A_2)$
  $\Rightarrow \alpha A_1 + \beta A_2 \in U$;
- $B_1, B_2 \in W \Rightarrow (\alpha B_1 + \beta B_2)_{ij} = \alpha (B_1)_{ij} + \beta (B_2)_{ij} = 0$ se $i > j$
  $\Rightarrow \alpha B_1 + \beta B_2 \in W$;
- Claramente $W \cap U = \{0\}$, pois $B^t = -B \Rightarrow B = 0$.
- Para $M \in V$ qualquer, podemos decompor:



Questão 5

(a) VERDADEIRO : $\dim W_1 \cap W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2)$
$\geq 2n - (2n-1) = 1 > 0$.

(b) FALSO : $\cos 2t = \alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 & (t=0) \\ \beta = 0 & (t = \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

(c) VERDADEIRO : pois a forma escalonada reduzida da transposta possui o mesmo número de pivôs.