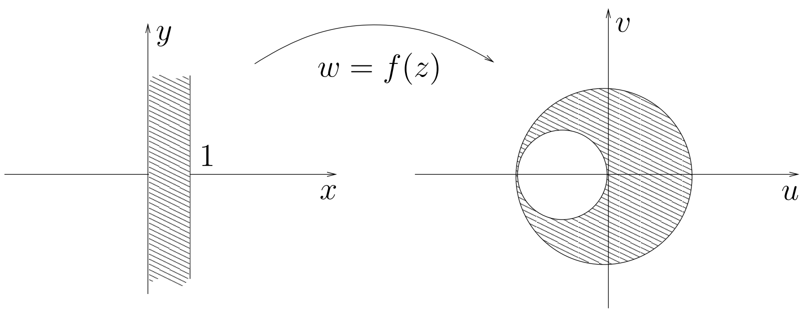
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
EE400 - Métodos da Engenharia Elétrica
Exame - 13/12/2010 - prof. Rafael

1) Seja $\vec{F} = Ke^{-|z|}\vec{a}_r + z\vec{a}_z$ um campo vetorial e S a superfície infinita do cilindro de raio $r = 2$ e eixo coincidente com o eixo z. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S.

2) Considere a função multivalorada $f(z) = z^{i\pi/2}$. Obtenha todos os valores de $f(e)$.

3) Obtenha uma transformação bilinear $w = f(z)$ que mapeie a região $0 < Re(z) < 1$ na região $|w + 1/2| > 1/2$ e $|w| < 1$.



4) Calcule a integral de $f(z) = \frac{z^2-3z+3}{(z-1)(z-2)^2}$ nas trajetórias definidas pelos seguintes círculos (no sentido anti-horário).

- $C_1 : |z - 2| = 1/2$
- $C_2 : |z - 2| = 2$

5) Calcule a seguinte integral pelo método dos resíduos:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta.$$

Fórmulas:

Em coordenadas cilíndricas:

$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dr}{dt}\ \vec{a_r} + r\ \frac{d\phi}{dt}\ \vec{a_\phi} + \frac{dz}{dt}\ \vec{a_z}$

$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{a_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{a_\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{a_z}$

$\text{div}(\vec{v}) = (\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

$\text{rot}(\vec{v}) = (\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z})\vec{a_r} + (\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r})\vec{a_\phi} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi})\vec{a_z}$

Em coordenadas esféricas:

$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{a_r} + r\ \frac{d\theta}{dt}\vec{a_\theta} + r\ sen\theta\ \frac{d\phi}{dt}\ \vec{a_\phi}$

$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{a_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{a_\theta} + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{a_\phi}$

$\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial (sen\theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{r sen\theta}(\frac{\partial (v_\phi sen\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi})\vec{a_r} + \frac{1}{r}(\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r})\vec{a_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta})\vec{a_\phi}$

Teorema de Gauss: $\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\ \ \text{dA} = \int_T\ (\text{div}\vec{F}\ )\ \text{dV}$

Teorema de Stokes: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S\ (\text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}\ )\ \text{dA}$

Séries de Laurent:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^m} &= \qquad \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^m z^n & \qquad |z| < 1 \\ \frac{1}{(1-z)^m} &= (-1)^m \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^m z^{-n-m} & \qquad |z| > 1 \end{aligned}$$

$$\alpha_n^m = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$