Cálculo Numérico (MS211 H) PROVA 1 (25/03/2012)

Nome: ______________________ RA: __________ Turma: ______

Trabalhe com 4 *dígitos decimais*!!! Responde a todas perguntas e justifique todas as suas respostas. Boa sorte!

---

1. Considere a equação não-linear seguinte:

$$e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} = -cos(x-1)\,.$$

   (a) Quantas soluções existem? Justifique a sua resposta através de um gráfico. [0.5 pts]

   (b) Considere os pontos 0, 1 e 2 como possíveis escolhas de chutes iniciais. Podemos aplicar o Método de Newton(-Raphson) para encontrar uma aproximação de uma solução escolhendo qualquer um destes pontos como chute inicial? [0.5 pts]

   (c) Aplique o Método de Newton(-Raphson) para encontrar $\tilde{\xi} \approx \xi$, onde ξ é uma raiz da equação não-linear. Utilize um chute inicial permissível em $\{0, 1, 2\}$ e precisões $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$. Apresente os resultados em forma tabelar. Qual é o valor $\tilde{\xi}$ encontrado? [1.5 pts]

k	x_k	$f(x_k)$	$x_k - x_{x-1}$
0			

   (d) Estime o valor de uma outra raiz da equação não-linear utilizando uma propriedade da função $f(x) = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + cos(x-1)$. [0.5 pts]

2. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Escolhe um método iterativo para resolver $Ax = b$ tal que a convergência para uma raiz x^* seja garantida para qualquer chute inicial. Justifique a sua resposta. [1 pt]

   (b) Aplique o método escolhido com um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{Z}^3$ de sua escolha. Preenche a tabela em baixo e pare quando $d_a(x^{(k)}, x^{(k-1)}) < 0.05$, onde

$$d_a(x^{(k)}, x^{(k-1)}) = ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty$$

   Qual é o resultado obtido? [1.5 pts]

k	$x^{(k)}$	$d_a(x^{(k)}, x^{(k-1)})$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1.5 & 2.5 & 2 \\ -0.6 & 1.2 & -0.2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine uma matriz triangular inferior L com $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$, uma matriz triangular superior U e uma matriz de permutação P tal que $PA = LU$. [2 pts]

(b) Seja b um vetor arbitrário em $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Utilize P, L e U para justificar que existe uma única solução para $Ax = b$. [0.5 pts]

4. Considere o seguinte sistema não-linear:

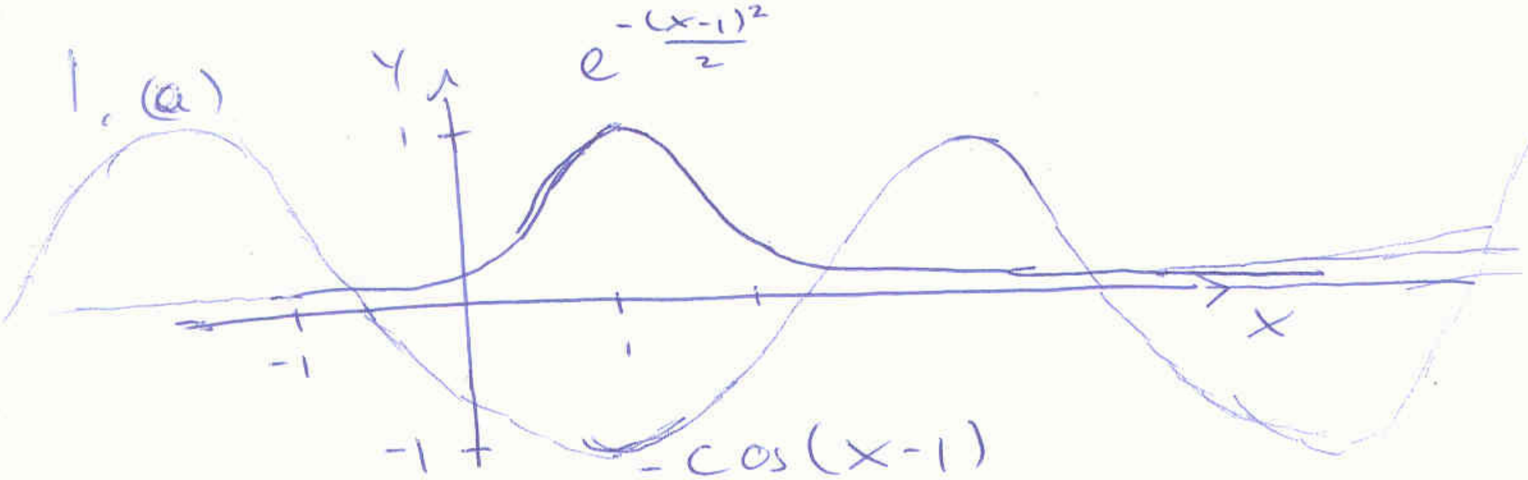
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_1 x_2 &= 1 \\ x_1 x_2 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

(a) Determine uma aproximação de uma solução deste sistema utilizando o Método de Newton com $x^{(0)} = (1.5, -1.5)^T$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01$. Preenche a tabela seguinte. [2 pts]

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\|\|F(x^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|s^{(k-1)}\|\|_\infty$	$s^{(k)}$

(b) Encontre todas as raizes do sistema não-linear analíticamente. Qual destas raizes estamos aproximando no item (a)? [0.5 pts]

1. (a)



$\exists$ infinitas soluções de

$$e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} = -\cos(x-1)$$

($-\cos(x-1)$ oscila periodicamente entre -1 e 1

e $e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \to 0$ para $x \to \infty$

e $e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \to 0$ para $x \to -\infty$

(b) $f(x) = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + \cos(x-1)$

$f'(x) = -(x-1)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} - \text{sen}(x-1)$

para $x=1$ temos $f'(1) = 0 \cdot e^0 - \text{sen}(0) = 0$

então não podemos aplicar o metodo de Newton para

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Para $x_0 = 0$ ou 2 não tem problema:

$f'(0) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}} - \text{sen}(-1) \neq 0$ e $f'(2) = e^{-\frac{1}{2}} - \text{sen}(1) \neq 0$.

(c) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

k	x_k	$f(x_k)$	$x_k - x_{k-1}$
0	0	1,1468	—
1	-0,7920	-0,0187	-0,7920
2	-0,7780	0,0001	$\lvert 0,0001 \rvert < \varepsilon$ PARE!

Resultado:

$\tilde{\xi}_1 = x_2 = -0,7780$

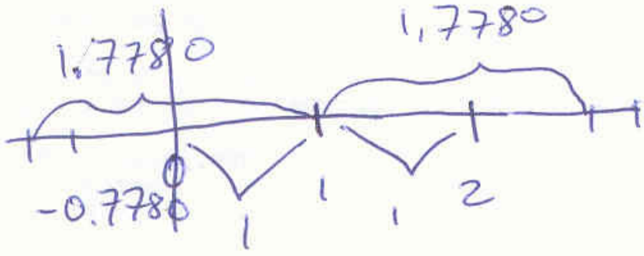
1(d). Observe que $f(x)$ é simétrico em torno de $x=1$.

$\tilde{\xi} = -0,7780$ e $\left|\overset{1-\tilde{\xi}}{\cancel{\tilde{\xi}-1}}\right| = 1,7780$

onde $\hat{\xi}$ é obtido com chute inicial $x_0 = 0$

$1 - 0 = 1$

Então com chute inicial $x_0 = 2$ onde 2 e ~~sta~~ na mesma distância de 1 do que 0 obtemos $\tilde{\tilde{\xi}} = 1 + 1,7780 = 2,7780$



2. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 1,5 & & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,375 & -0.75 & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -0,2 \\ 1 \\ -0.25 \end{pmatrix}$

$|C| = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,375 & 0,75 & 0 \end{pmatrix}$

$\gamma_1 = 0,7 < 1$

$\gamma_2 = 0 < 1$

$\gamma_3 = 0.375 \cdot 0,7 + 0.75 \cdot 0 <$

$\therefore$ o critério de Sassenfeld é satisfeito então GS converge $\forall\, x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

2(b) Seja $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$

(Observe que $A X^{(0)} \approx b$)

$(0 \;\; -0{,}2 \;\; -0{,}5) \cdot X^{(0)} + \beta_1 = -0{,}2 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}1$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(0 \;\; 0 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(-0{,}375 \;\; -0{,}75 \;\; 0) \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_3 = -1{,}0375$

$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \\ -1{,}0375 \end{pmatrix} \Rightarrow \| X^{(1)} - X^{(0)} \|_\infty = 0{,}1 \geq 0{,}05$

$(0 \;\; -0{,}\cancel{8}2 \;\; -0.5) \cdot X^{(1)} - 0{,}2 = 0{,}1188 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0{,}1188 \\ 1 \\ -1{,}0375 \end{pmatrix}$

$(0 \;\; 0 \;\; 0) \begin{pmatrix} 0.1188 \\ 1 \\ -1{,}0375 \end{pmatrix} + 1 = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.1188 \\ 1 \\ -1{,}0375 \end{pmatrix}$

$(-0{,}375 \;\; -0{,}75 \;\; 0) \begin{pmatrix} 0{,}1188 \\ 1 \\ -1{,}0375 \end{pmatrix} - 0{,}25 = -1{,}0445 \rightsquigarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}1188 \\ 1 \\ -1{,}0445 \end{pmatrix}$

$\| X^{(2)} - X^{(1)} \|_\infty = \max \{ |0{,}1 - 0{,}1188|, 0, |-1{,}0375 + 1{,}0445| \}$
$= 0{,}0188 < 0{,}05$ PARE

k	$X^{(k)}$	$d_a(X^{(k)}, X^{(k-1)})$
0	$(0,1,-1)^T$	—
1	$(0.1, 1, -1.0375)^T$	0.1
2	$(0.1188, 1, -1{,}0445)^T$	$0.01188 < 0{,}05$ PARE

Resultado: $X^* \approx X^{(2)}$

3.(a) Vamos resolver esta questão usando decomposição LU com pivoteamento parcial. Inicialmente temos $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -0{,}6 & 1{,}2 & -0{,}2 \\ -1{,}5 & 2{,}5 & 2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & -1 & -4 \\ \hline -0{,}2 & 1 & -1 \\ -0{,}5 & 2 & 0 \end{array}\right), \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(1)'} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & -1 & -4 \\ \hline -0{,}5 & 2 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & -1 \end{array}\right), \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$R^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c|c} 3 & -1 & -4 \\ \hline -0{,}5 & 2 & 0 \\ \hline -0{,}2 & 0{,}5 & -1 \end{array}\right), \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3(b) $Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb$

$\exists!\, x^*$ tal que $Ax^* = b \Leftrightarrow \exists!\, x^*$ tal que $PLUx^* = Pb$

$\iff \det(LU) \neq 0$

$\iff \det(L) \cdot \det(U) \neq 0$

Aqui temos $\det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot (-6) = -6 \neq 0$

então existe uma única solução para $Ax = b$.

4 (a) $F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_1 x_2 - 1 \\ -x_2 + x_1 x_2 + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$

para $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$

$J(x) = \begin{pmatrix} 2 + x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 - 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow J(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,5 & 1,5 \\ -1,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

Já que $\| F(x^{(0)}) \|_\infty = 0,25 \geq 0,01$ vamos resolver

$J(x^{(0)}) \cdot s^{(0)} = -F(x^{(0)})$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0,5 & 1,5 & 0,25 \\ -1,5 & 0,5 & -0,25 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 20 & 2 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \end{array}\right)$. $\left.\begin{array}{l} 2 \cdot s_1^{(0)} + 6 \cdot s_2^{(0)} = 1 \\ s_2^{(0)} = 0.1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} s_1^{(0)} = 0.2 \\ s_2^{(0)} = 0.1 \end{array} \Rightarrow s^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vamos preencher

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\| F(x^{(k)}) \|_\infty$	$\| s^{(k-1)} \|_\infty$	$s^{(k)}$
0	$\begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$	0,25	–	$\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 1,7 \\ -1,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0200 \\ 0,0200 \end{pmatrix}$	$0,02 (\geq 0,01 !)$	$0,2 (\geq 0.01)$	$\begin{pmatrix} 0,0071 \\ -0,0143 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1,7071 \\ -1,4143 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0001 \\ -0,0001 \end{pmatrix}$	$0,0001 < \varepsilon$ PARE		

Resultado: uma aproximação de uma solução é $x^{(2)}$.

Para calcular ~~x~~ $s^{(1)}$, resolvemos

$$J(x^{(1)}) \cdot s^{(1)} = -F(x^{(1)})$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,6 & 1,7 & -0,0200 \\ -1,4 & 0,7 & -0,0200 \end{array}\right)$$

$$\ldots \quad s^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,0071 \\ -0,0143 \end{pmatrix}$$

4(b): Temos $\begin{cases} x_1(2+x_2)=1 \\ x_2(x_1-1)=-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{x_1} - 2 \text{ e } x_1 \neq 0 \\ \left(\frac{1}{x_1}-2\right)(x_1-1) = -1 \end{cases} \quad -u-$$

$$\left(\frac{1}{x_1}-2\right)(x_1-1) = -1, \quad x_1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - 2x_1 - \frac{1}{x_1} + 2\right) = -1, \quad -u-$$

$$\Leftrightarrow -2x_1^2 + 3x_1 - 1 = -x_1$$

$$\Leftrightarrow 2x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Alem disso, $x_2 = \frac{1}{1-x_1} = \frac{1}{1-\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{\mp \frac{\sqrt{2}}{2}} = \mp \frac{2}{\sqrt{2}} = \mp \sqrt{2}$

Obtemos as soluções seguintes

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ +\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

No item (a) estamos aproximando

$$\xi_1 \approx \begin{pmatrix} 1,7071 \\ -1,4142 \end{pmatrix}$$