EA044 – Planejamento e Análise de Sistemas de Produção

2o. Semestre de 2006 - 3a. Prova - Prof. Paulo Valente

RA: 037391 Nome: Guilherme M. Chade Ass.: Guilherme Melo Chade

1. Uma certa região metropolitana do estado é formada por seis cidades. O governo estadual planeja construir novas estações do corpo de bombeiros e precisa determinar em quais cidades construí-las, de tal forma que qualquer uma das cidades seja atendida por uma estação em no máximo quinze minutos. Os tempos de trajeto entre as cidades encontram-se descritos na tabela abaixo. Formule o problema de programação inteira cuja solução fornece o menor número e as localizações das novas estações do corpo de bombeiros.

De / Para	C1	C2	C3	C4	C5	C6
C1	0	10	20	30	30	20
C2	10	0	25	35	20	10
C3	20	25	0	15	30	20
C4	30	35	15	0	15	25
C5	30	20	30	15	0	14
C6	20	10	20	25	14	0

2. A tabela apresentada a seguir é referente ao emprego do algoritmo *branch–and–bound* ao problema de programação inteira

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & z = 5x_1 + 4x_2 & \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 & \leq 5, \\ & 10x_1 + 6x_2 & \leq 45, \end{array}$$

onde x_1 e x_2 são variáveis inteiras não-negativas. O problema 1 (original) se ramifica nos problemas 2 e 3, o problema 3 nos problemas 4 e 5, e o problema 4 nos problemas 6 e 7. A tabela apresenta uma solução ótima para o problema acima ? Justifique.

Problema	(x_1, x_2, z)	Restrição
1	$(3.75, 1.25, 23.75)$	—
2	$(3, 2, 23)$	$x_1 \leq 3$
3	$(4, 0.83, 23.33)$	$x_1 \geq 4$
4	$(4.5, 0, 22.5)$	$x_2 \leq 0$
5	Infactível	$x_2 \geq 1$
6	$(4, 0, 20)$	$x_1 \leq 4$
7	Infactível	$x_1 \geq 5$

3. Resolva o problema da mochila a seguir através de programação dinâmica:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \text{sujeito a} & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8, \end{array}$$

onde x_1, x_2 e x_3 são variáveis inteiras não-negativas.

4. Uma empresa deseja determinar a localização de um novo depósito. As coordenadas no plano (em km) de quatro consumidores e o número de remessas feitas anualmente para cada consumidor são indicadas na tabela abaixo. A empresa deseja localizar o depósito de forma a minimizar a distância total percorrida durante o ano do depósito aos quatro consumidores. Formule o problema de programação não-linear associado. Assuma que a distância entre dois pontos do plano quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ é medida pela norma Euclideana $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

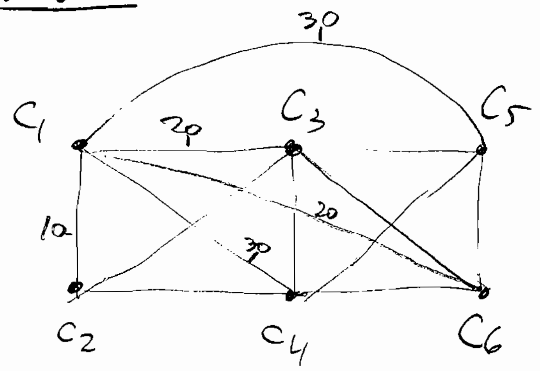
Consumidor	Coordenadas	No. de Remessas
1	$(8, 16)$	200
2	$(16, 8)$	150
3	$(0, 18)$	200
4	$(18, 0)$	300

Guilherme Milaré Almeida RA 037391

5,0

1) 0.5
2) 2.5
3) 0.0
4) 2.0
5,0

Questão 1:



$x_i = \begin{cases} 0, \text{ se não há corpo bombeiro} \\ 1, \text{ se há} \end{cases}$

Seja x_i, $i = 1,2,3,4,5,6$ as cidades do estado

MINIMIZAR $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

Sujeito a:

$x_i \in \{0,1\}$

$10x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 30x_5 + 20x_6 \leq 15$

$10x_1 + 25x_3 + 35x_4 + 20x_5 + 10x_6 \leq 15$

$20x_1 + 25x_2 + 15x_4 + 30x_5 + 20x_6 \leq 15$

$30x_1 + 35x_2 + 15x_3 + 15x_5 + 25x_6 \leq 15$

$30x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 15x_4 + 14x_6 \leq 15$

$20x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 14x_5 \leq 15$

Questão 3:

(P1) MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3$
sujeito a: $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8$

Rebrado:

z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
-1	-5	-4	-2	0	0
0	4	3	2	1	8

z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
-1	-1	-1	0	1	8
0	2	3/2	1	1/2	4

z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
-1	0	-1/4	1/2	3/4	0
0	1	3/4	1/2	1/4	2

Programação Dinâmica!

z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
-1	1/3	0	2/3	4/3	32/3
0	4/3	1	2/3	1/3	8/3

$z = \frac{32}{8} = 10{,}66$; $x_2 = 8/3 = 2{,}66$

$\downarrow$

$2 \leq x_2 \leq 3$

(P2) MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3$
s.a: $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8$
$x_2 \geq 3$

INFACTÍVEL!

(P3) MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3$
$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8$
$x_2 \leq 2$

$\bar{Z}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
-1	-5	-4	-3	0	0	0
0	4	3	2	1	0	8
0	0	1	0	0	1	2

$\bar{Z}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
-1	-5	0	-3	0	4	8
0	4	0	2	1	-3	2
0	0	1	0	0	1	2

$\bar{Z}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
-1	-1	0	0	1	1	10
0	2	0	1	1/2	-3/2	1
0	0	1	0	0	1	2

$\bar{Z}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
-1	0	0	1/2	5/4	1/4	21/2
0	1	0	1/2	1/4	-1/4	1/2
0	0	1	0	0	1	2

$\therefore\ X_1 = 0{,}5 \quad X_2 = 2 \quad Z^* = 21/2 = 10{,}5$

(P4)

$$\begin{aligned} \text{MAX } & Z = 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \\ \text{S.a } & 4X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 8 \\ & X_2 \leq 2 \\ & X_1 \geq 1 \end{aligned}$$

(P5)

$$\begin{aligned} \text{MAX } & Z = 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \\ & 4X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 8 \\ & X_2 \leq 2 \\ & X_1 \leq 0 \end{aligned}$$

$X_1 = 0$

$X_2 = 2 \rightarrow X_3 = 1 \rightarrow Z^* = 11$

$X_2 = 1 \rightarrow X_3 = 2{,}5 \rightarrow Z^* = 11{,}5$

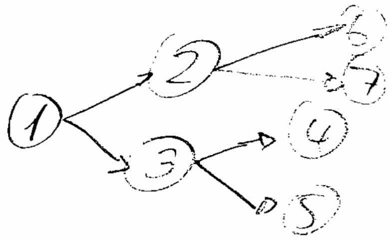
$X_2 = 0 \rightarrow X_3 = 4 \rightarrow Z^* = 12$

Za	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Y	LD
-1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	4	3	2	1	0	0	0	8
0	0	1	0	0	1	0	0	2
0	1	0	0	0	0	1	1	1

Za	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Y	LD
-1	-1	0	0	0	0	-1	0	-1
0	4	3	2	1	0	0	0	8
0	0	1	0	0	1	0	0	2
0	1	0	0	0	0	1	1	1

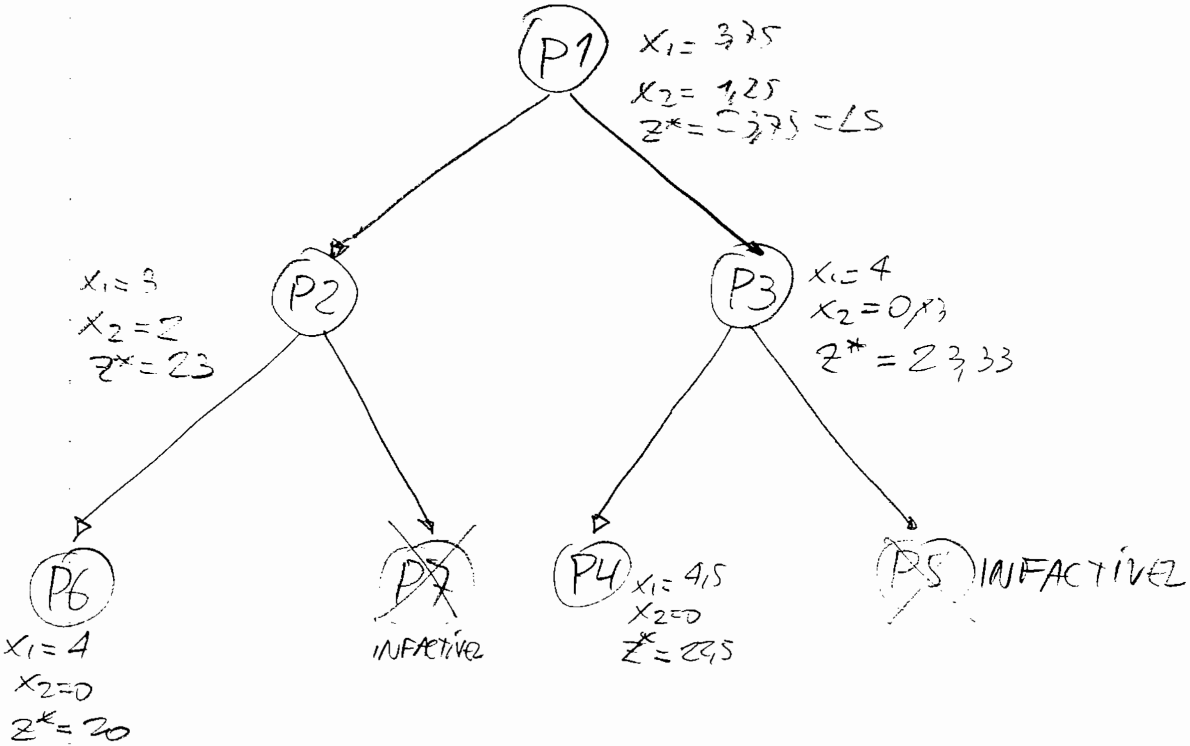
Za	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Y	LD

Questão 12:



(P1)

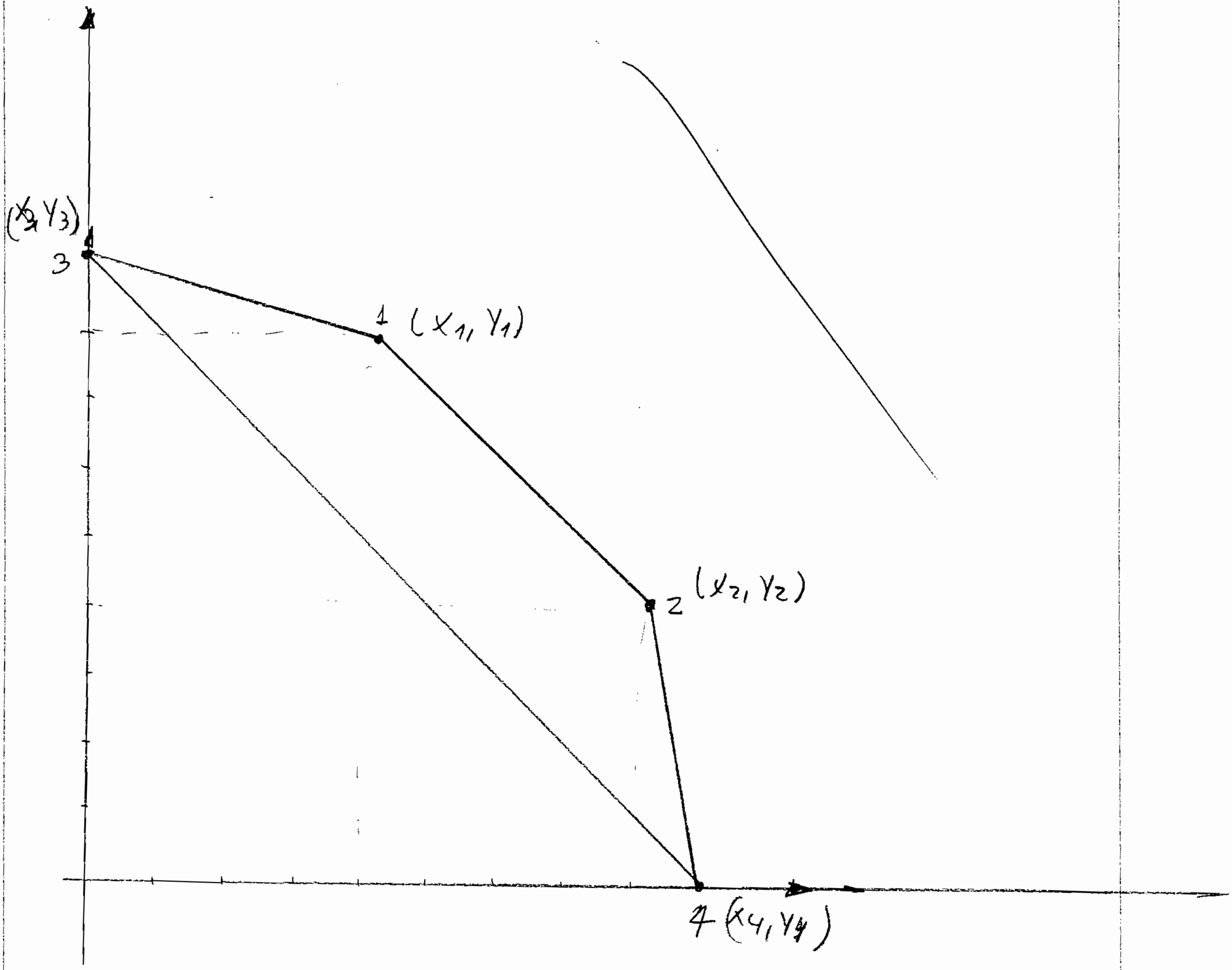
$$\begin{cases} \text{MAXIMIZAR } Z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{S.a.} \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \qquad 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \end{cases}$$



Pela árvore acima, percebe-se que a tabela dada tem o problema (P2) como solução ótima, apesar de (P6) também ser solução. No entanto, z^* de P2 é maior que z^* de P6 ($z^*_{P2} = 23$, $z^*_{P6} = 20$). Além disso, z^*_{P2} está mais próximo de LS.

$$\therefore \begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 2 \\ Z^* = 23 \end{cases}$$

Questão 4:



MINIMIZAR: $200 \cdot \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} + 150 \cdot \sqrt{(X_2 - X_3)^2 + (Y_2 - Y_3)^2}$
$+ 200 \cdot \sqrt{(X_3 - X_4)^2 + (Y_3 - Y_4)^2} + 300 \cdot \sqrt{(X_4 - X_1)^2 + (Y_4 - Y_1)^2}$

S.a: $\cancel{X_i \geq 0, \; i = 1,2,3,4}$
$\cancel{Y_i \geq 0, \; i = 1,2,3,4}$