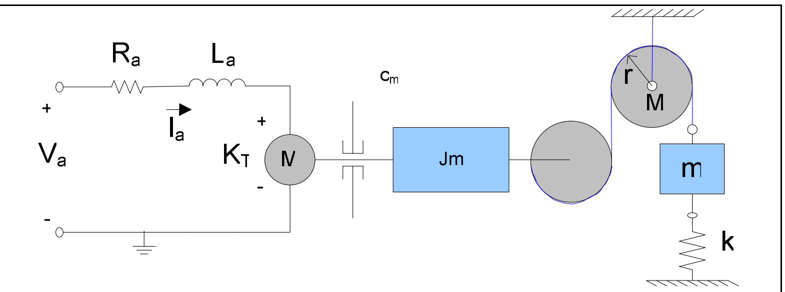
ES723 Dispositivos Eletromecânicos

Prova 1 – 25/09/06 – Parte 1

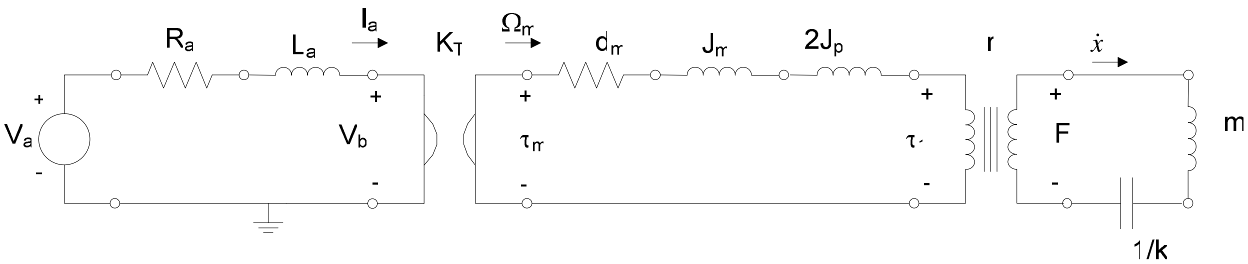
Nome:____RA:______________Nota:_________

1) Na figura ao lado a massa das polias devem ser consideradas e não há deslizamento entre o cabo e as polias, que são iguais. Determine o circuito equivalente e as equações respectivas que descrevem o funcionamento do conjunto. Qual seria a diferença no circuito se as polias fossem diferentes?	

Solução: A solução considerando apenas o motor e sua armadura é bem conhecida, e encontra-se abaixo, não merecendo maiores comentários porque foi bem analisada em sala de aula. Como as duas polias não possuem massa desprezível, devem assim ter sua inércia considerada. Ambas são iguais, e portanto com inércia dada por

$$J_p = \frac{1}{2} M r^2 .$$

Cada polia pode ser vista como uma transformação de torque em torque, porém como são iguais o módulo seria unitário, assim, pode-se colocar ambas no mesmo circuito. A polia final transforma o torque respectivo em força aplicada à massa. Considerando-se a F a força aplicada pelo cabo à massa *m* e *x* o seu deslocamento, pode-se representar o sistema portanto pelo seguinte circuito:



As seguintes equações podem facilmente ser retiradas do circuito, e correspondem também à aplicação das leis da mecânica:

$$I_a = \frac{V_a - V_b}{R_a + L_a s}$$

$$V_b = K_T \Omega_m$$

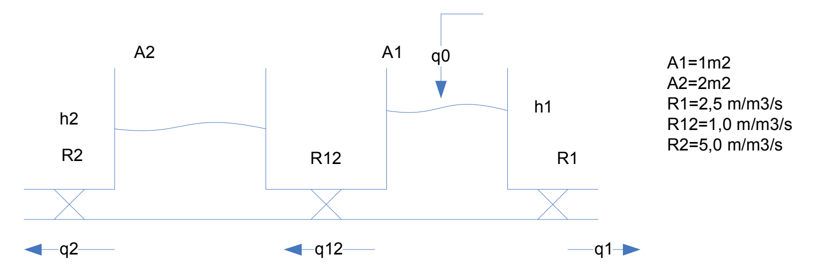
$$\tau_m = K_T I_a = [c_m + s(J_m + 2J_p]\Omega_m + \tau_1$$

$$\tau_1 = rF = r[ms^2 + k]x$$

$$\Omega_m = \frac{1}{r} sx$$

Se as polias fossem diferentes, as inércias poderiam ser representadas separadamente, com um transformador entre elas cujo módulo seria a relação entre os raios.

2) Para o sistema de tanques ao lado, apresente o circuito equivalente e as equações respectivas, considerando que o sistema está inicialmente em regime.



Solução: A equação básica para cada tanque é que a variação de volume é igual à vazão líquida, ou

$$\frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt} = q\,,$$

onde foi considerado que a área é constante. Desse modo, o capacitor equivalente pode ser considerado a própria área A, e a altura pode ser considerada a tensão, uma vez que a diferença de pressão é dada por

$$\Delta p = \rho g h\,,$$

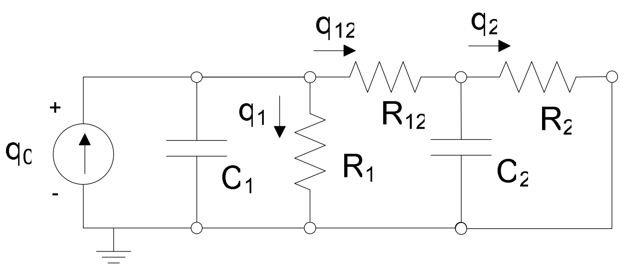
ou seja, a diferença de pressão é a altura da coluna d'água multiplicada por uma constante. Assim, o resistor é a restrição ao fluxo

$$R = \frac{\Delta h}{\Delta q}$$

com unidade m/(m^3/s). Alternativamente, pode-se considerar de fato a pressão como o esforço, com a formulação da variação do volume dada por

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A}{\rho g}\frac{\rho g dh}{dt} = C\frac{d(\Delta p)}{dt} = q\,,$$

porém o resultado final é o mesmo. Para esse caso, é mais simples considerar o capacitor como a própria área. O circuito equivalente está abaixo.



Do circuito acima as equações para os fluxos podem facilmente ser escritas conforme abaixo:

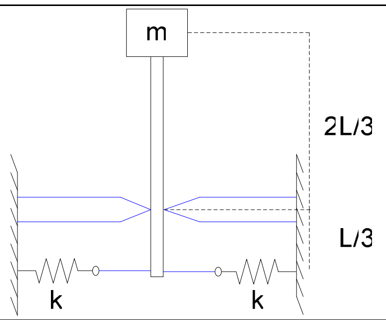
$$A_1\frac{dh_1}{dt} = q_0 - q_1 - q_{12} = q_0 - \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_1 - h_2}{R_{12}}$$

$$A_2\frac{dh_2}{dt} = q_{12} - q_2 = \frac{h_1 - h_2}{R_{12}} - \frac{h_2}{R_2}$$

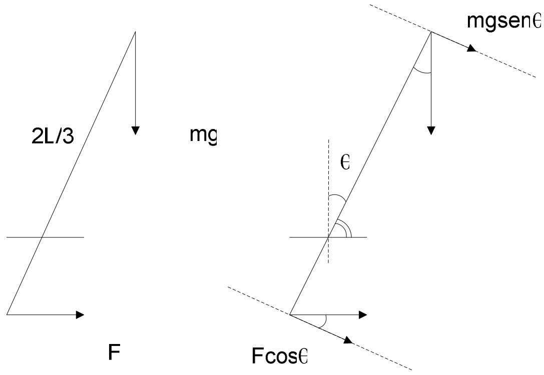
Substituindo os valores apresentados, as equações são:

$$\frac{dh_1}{dt} = q_0 - \frac{h_1}{2,5} - h_1 + h_2 = q_0 - 1,4h_1 + h_2$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1 - h_2}{2} - \frac{h_2}{10} = 0,5h_1 - 0,6h_2$$

3) Para o pêndulo invertido da figura ao lado, considere as oscilações pequenas e a haste sem massa. Determine o seu circuito equivalente e sua freqüência natural em hertz. Considere como saída o ângulo com a vertical.	

Solução: Considere o balanço de torques de acordo com os desenhos abaixo.



Pode-se escrever, aplicando-se a segunda lei de Newton,

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2L}{3}mgsen\theta - \frac{L}{3}F\cos\theta\,.$$

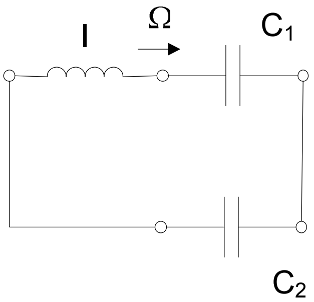
Considerando pequenos deslocamentos, a equação acima fica:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2L}{3}mg\theta - \frac{L}{3}(2k\frac{L}{3}\theta)\,,$$

ou ainda, considerando o momento de inércia $I = m\left(\frac{2L}{3}\right)^2$,

$$\frac{4L^2}{9}\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{2L}{3}mg\theta + \frac{2L^2}{9}k\theta = 0$$
$$\frac{4L^2}{9}\frac{d\Omega}{dt} - \frac{2L}{3}mg\int\Omega dt + \frac{2L^2}{9}k\int\Omega dt = 0\,,$$

com freqüência natural $\omega_n = \sqrt{\frac{kL - 3mg}{2L}}$, e levando ao seguinte circuito equivalente:

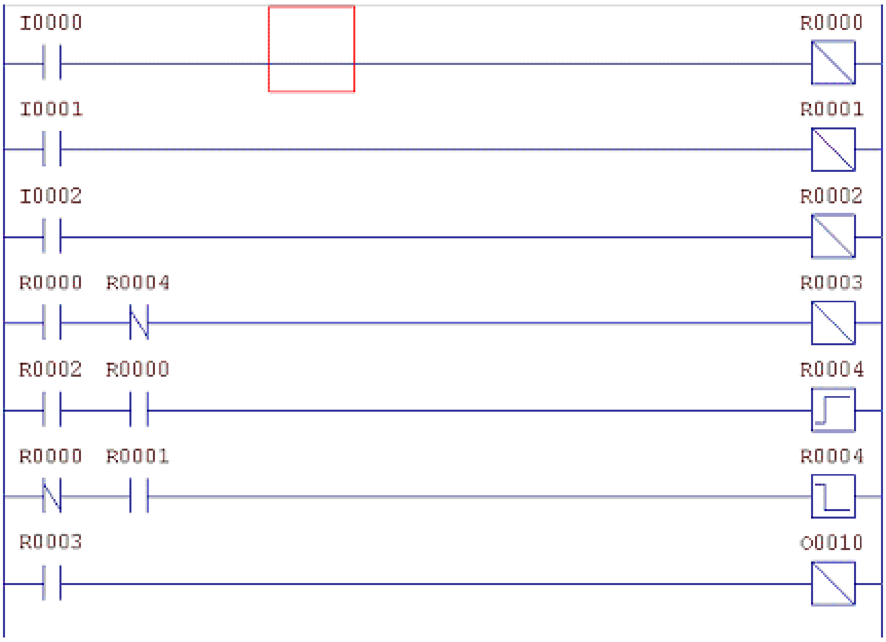


$$I\frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{C_1}\int\Omega dt + \frac{1}{C_2}\int\Omega dt$$

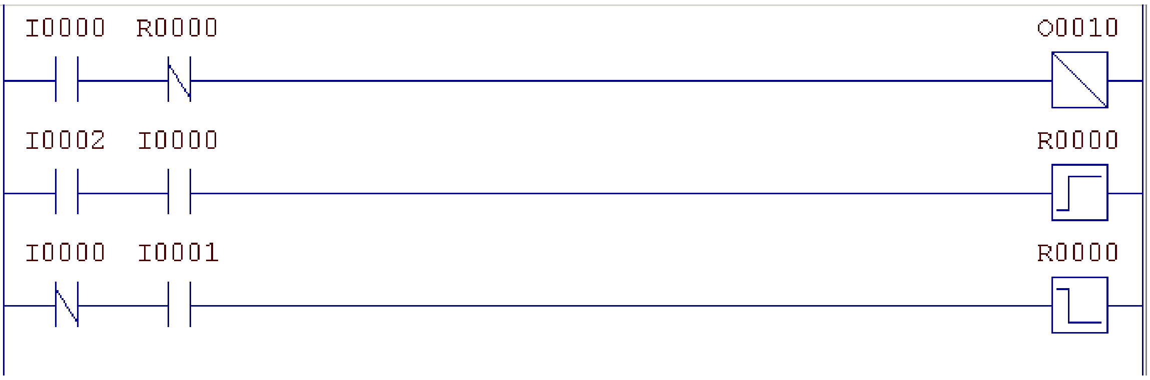
Note que se trata de um sistema sem excitação externa, onde só haverá movimento se houver alguma perturbação inicial, correspondendo à sua resposta natural. Ainda, é importante perceber que há um capacitor negativo, que surge matematicamente devido à força gravitacional, e não corresponde a um capacitor elétrico normal. Se não existissem as molas, tal capacitor deixaria o sistema instável, como no caso do pêndulo invertido tradicional na posição vertical.

Solução Questão 1

Sugestão 1

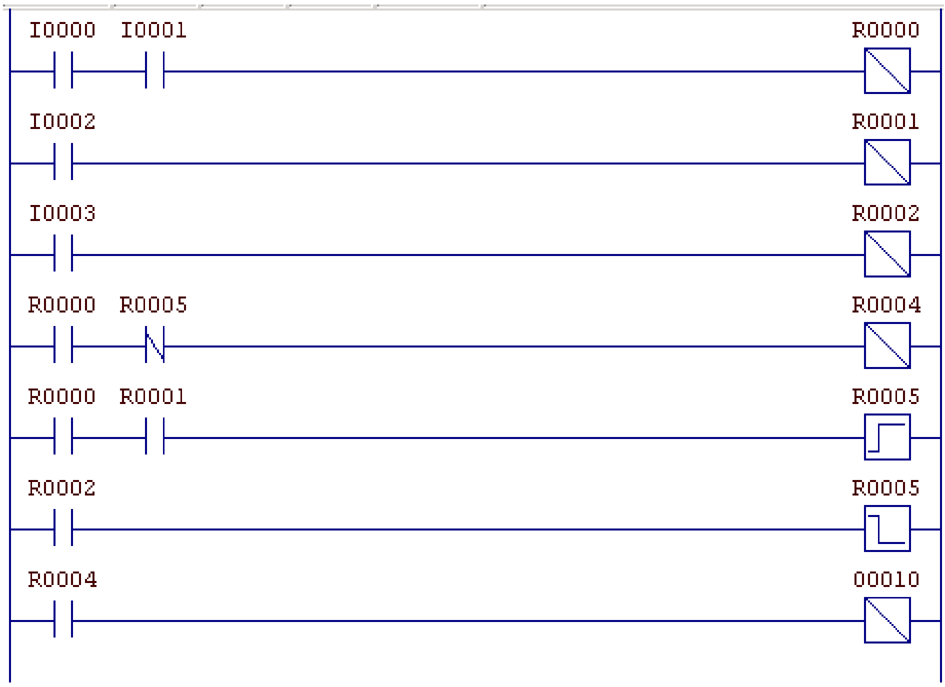


Sugestão2

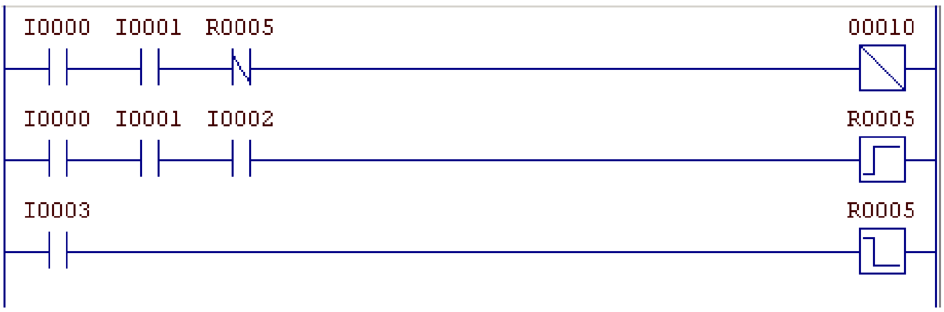


Solução Questão 2

Sugestão 1

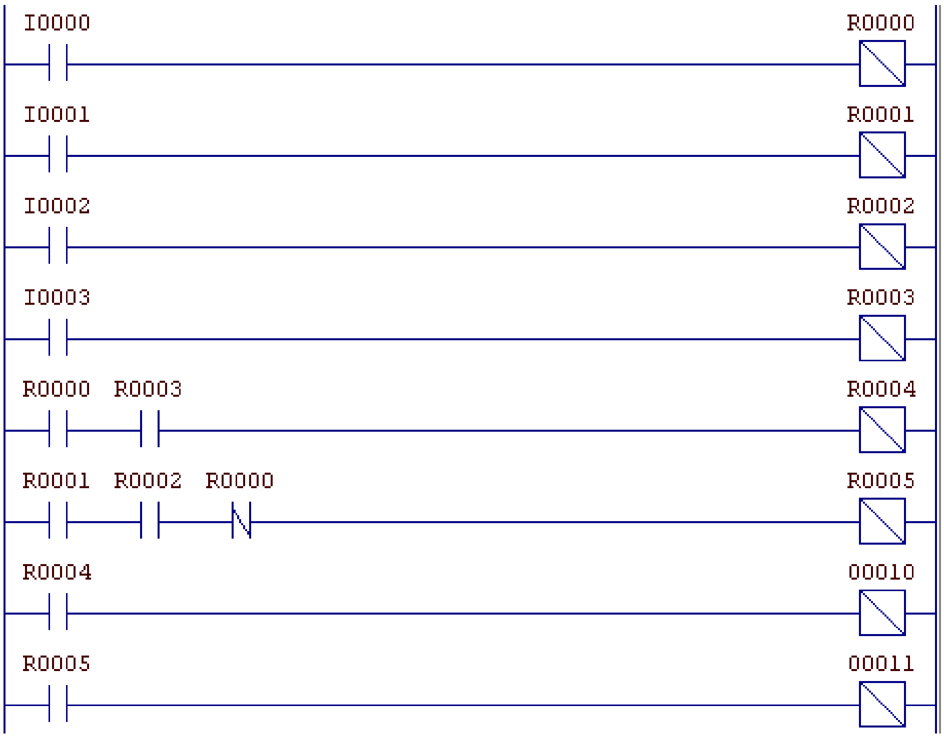


Sugestão 2



Solução Questão 3

Sugestão 1



Sugestão 2