F 602 - prova 2
Unicamp, 11 de novembro de 2009

nome RA

$1^{\underline{a}}$ questão (3 pontos): Um fio circular de raio R carrega a seguinte corrente:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ I_0 \; t/\tau & , \quad 0 < t < \tau \\ I_0 & , \quad t > \tau \end{cases}$$

a) Dado um ponto a uma distância z do plano do fio, sobre seu eixo de simetria, calcule o instante a partir do qual os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ deixam de ser nulos.
b) Escreva as integrais a serem resolvidas para, a partir das equações de Jefimenko, calcular o campo magnético no ponto do ítem anterior, em qualquer instante de tempo.
c) Resolva as integrais acima, e encontre o campo magnético em qualquer instante de tempo.

a) O tempo retardado é calculado da forma:

$$t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c} = t - \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{c}$$

Como só existe corrente para $t > 0$, tal condição se traduz em:

$$t_r > 0 \quad \rightarrow \quad t > \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{c}$$

b)Dividindo o problema em três intervalos de tempo, temos:
i. $t < \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{c}$: nesse caso, como dito no ítem a), $\vec{B} = 0$.
ii. $\frac{\sqrt{z^2+R^2}}{c} < t < \tau + \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{c}$:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,', t_r)}{\mathscr{r}^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,', t_r)}{c\mathscr{r}} \right] \times \hat{\mathscr{r}} \, d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{I}(\vec{r}\,', t_r)}{\mathscr{r}^2} + \frac{\dot{\vec{I}}(\vec{r}\,', t_r)}{c\mathscr{r}} \right] \times \hat{\mathscr{r}} \, dl' \end{aligned}$$

iii. $t > \tau + \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{c}$: nesse caso, $\dot{I}(t_r) = 0$, e temos,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{I}(\vec{r}\,', t_r)}{\mathscr{r}^2} \right] \times \hat{\mathscr{r}} \, dl'$$

c) A integral a ser resolvida é uma integral de linha sobre o fio circular. Como $\mathscr{r}$, $|\vec{I}|$ e $|\dot{\vec{I}}|$ são os mesmos para todos os pontos do fio, podem sair da integral. Substituindo $\vec{I} = I\hat{\phi}$ e $\dot{\vec{I}} = \dot{I}\hat{\phi}$

temos no caso ii.:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{I(t_r)}{\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}+\frac{\dot{I}(t_r)}{c\boldsymbol{\mathscr{r}}}\right]\int \hat{\phi}\times\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\,dl' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{I_0(t-\boldsymbol{\mathscr{r}}/c)}{\tau\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}+\frac{I_0}{\tau c\boldsymbol{\mathscr{r}}}\right]\int \hat{\phi}\times\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\,dl' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0 t}{\tau\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}\int \hat{\phi}\times\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\,dl'
\end{aligned}$$

Por simetria, esperamos o campo na direção $\hat{z}$. Nesta direção, temos:

$$(\hat{\phi}\times\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}})_z = \frac{R}{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0 t}{\tau\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}2\pi R\frac{R}{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\hat{z} \\
\vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0 I_0 t R^2}{2\tau\boldsymbol{\mathscr{r}}^3}\hat{z}
\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ está dado no ítem a).
No caso iii., um cálculo semelhante leva a:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0}{\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}2\pi R\frac{R}{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\hat{z} = \frac{\mu_0 I_0}{2}\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$$

que é o resultado da magnetostática.

$2^{\underline{a}}$ questão (3 pontos): Mostre que o campo elétrico de uma partícula pontual de carga q descrevendo um movimento retilíneo uniforme aponta na direção da partícula no tempo real, e o campo magnético aponta na direção $\hat{\phi}$ (considerando coordenadas esféricas e o movimento da carga na direção $\hat{z}$).

Como $\vec{a} = 0$, temos que $\vec{E}$ aponta na direção de $\vec{u}$, ou seja, na direção de $c\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \vec{v}$.
Partindo da resposta que queremos provar, podemos desenhar um triângulo com os pontos da posição da partícula em um tempo t, a posição da partícula no tempo retardado e o ponto onde calculamos o campo. Vetorialmente temos:

$$\vec{R} = \vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \vec{v}(t - t_r) = \boldsymbol{\mathscr{r}}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \vec{v}(t - t_r)$$

onde $\vec{R}$ é o vetor que liga a posição da partícula em t e o ponto $\vec{r}$.
Por definição do tempo retardado:

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = c(t - t_r)$$

Substituindo acima:

$$\vec{R} = c(t - t_r)\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \vec{v}(t - t_r) = (t - t_r)(c\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \vec{v}) = (t - t_r)\vec{u}$$

ou seja, $\vec{R}$ e $\vec{u}$ apontam na mesma direção.

$3^{\underline{a}}$ questão (4 pontos): A radiação de um dipolo elétrico pode ser calculada diretamente a partir da fórmula de campo elétrico de uma carga pontual descrevendo um movimento oscilatório da forma $\vec{w}(t) = (d/2)cos(wt)\hat{z}$.
a) Para calcular a potência irradiada, quais aproximações você faria nas fórmulas dos campos elétrico e magnético?
b) Mostre que, utilizando as aproximações adequadas, o campo elétrico aponta na direção $\hat{\theta}$ e o campo magnético na direção $\hat{\phi}$.
c) Calcule a potência irradiada por ângulo sólido como função do tempo desta configuração.

a) Inicialmente, como queremos a potência irradiada, podemos desprezar os termos nos campos que caem com r^{-2}, mantendo somente o termo de aceleração:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{(\vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}}.\vec{u})^3}\vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \times (\vec{u} \times \vec{a})$$

Além disso, podemos considerar que $r >> d$, o que leva à:

$$\vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \vec{r}$$

E, finalmente, se $v << c$ podemos escrever:

$$\vec{u} = c\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = c\hat{r}$$

Voltando nas fórmulas, temos:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{r}{(\vec{r}.\hat{r})^3}\vec{r} \times (\hat{r} \times \vec{a}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a}) \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\hat{r} \times \vec{E}\end{aligned}$$

b) Analisando o produto vetorial triplo, temos que $\hat{r} \times \vec{a}$ aponta na direção $\hat{\phi}$, e portanto $\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})$ aponta da direção $\hat{\theta}$. Por consequência, o campo magnético, que é perpendicular à $\vec{E}$ e $\hat{r}$, aponta na direção $\hat{\phi}$.

c) Com as aproximações acima, temos:

$$\begin{aligned}|\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \times (\vec{u} \times \vec{a})| &= |c\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})| = ac\sin\theta \\ \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}.\vec{u} &= c\end{aligned}$$

Substituindo na fórmula:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{|\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2}{(\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}.\vec{u})^5} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{(ac\sin\theta)^2}{c^5} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\sin^2\theta$$

equações de potenciais retardados:

$$\begin{aligned} V(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau' \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau' \end{aligned}$$

equações de Jefiminko:

$$\begin{aligned} E(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}\,',t_r)}{c\mathscr{r}}\hat{\mathscr{r}} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)}{c^2\mathscr{r}}\right] d\tau' \\ B(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)}{c\mathscr{r}}\right] \times \hat{\mathscr{r}}\,d\tau' \end{aligned}$$

equações dos campos de uma carga pontual:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathscr{r}}{(\vec{\mathscr{r}}.\vec{u})^3}[(c^2-v^2)\vec{u} + \vec{\mathscr{r}}\times(\vec{u}\times\vec{a})] \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\hat{\mathscr{r}}\times\vec{E} \\ & \text{onde } \; \vec{u} = c\hat{\mathscr{r}} - \vec{v} \end{aligned}$$

potência irradiada por carga pontual e fórmula de Lienard:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\Omega} &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{|\hat{\mathscr{r}}\times(\vec{u}\times\vec{a})|^2}{(\hat{\mathscr{r}}.\vec{u})^5} \\ P &= \frac{\mu_0 q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(a^2 - \left|\frac{\vec{v}\times\vec{a}}{c}\right|^2\right) \end{aligned}$$