ME 420 - Inferência Estatística II / ME 419 - Inferência
Primeiro semestre de 2011
Prova 2
Data: 23/05/2011

Turma: ____________

Nome: ________________________________ RA: ______________

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **Coloque seu nome completo e RA em todas as folhas que você recebeu, inclusive nesta.**
- **Utilize somente um lado de cada folha para resolver as questões, numerando cada uma das páginas.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique, adequadamente, seus desenvolvimentos, sem, no entanto, escrever excessivamente.**
- **Resolva a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **Contestações a respeito da nota, só serão consideradas se estiverem por escrito.**
- **A prova terá duração de 120 minutos, improrrogáveis.**

Faça uma excelente Prova!!

Questões

1. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta^r \Gamma(r)} e^{-\frac{x}{\theta}} x^{r-1} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$$

Considere $r > 0$, **conhecido**. Responda os itens.

a) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança (emv) de θ (20 pontos).

b) Obtenha a distribuição assintótica do emv de θ. (10 pontos)

c) Obtenha um IC exato para θ com coeficiente de confiança de γ, baseado na distribuição exata do emv de θ (40 pontos). Sugestão, se $X \sim gama(r, \theta), Y = \alpha X \sim gama(r, \theta\alpha), \alpha > 0,$ uma constante

d) Obtenha um IC assintótico para θ com coeficiente de confiança de aproximadamente γ, baseado na distribuição assintótica do emv de θ (30 pontos).

e) Suponha $r = 2$ e que para uma amostra de tamanho $n = 30$, $\overline{x} = 4,99$. Calcule os IC´s, considerando $\gamma = 0,90$, obtidos nos itens c) e d). Qual dos intervalos numéricos tem o menor comprimento? Qual deles você utilizaria para fazer inferências sobre θ? Lembre-se de que um deles é exato e outro é assintótico. Justifique adequadamente suas respostas (30 pontos).

f) Encontre o ENVUM de θ. Sugestão: se você conhecer uma estatística suficiente e completa você pode utilizá-la, sem provar que a mesma é suficiente e completa. (20 pontos)

2. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, tal que:

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x), \theta > 0$$

Responda os itens.

a) Encontre o estimador pelo método dos momentos de θ. (10 pontos)

b) Encontro o emv de θ. (20 pontos)

c) Encontro o ENVUM de θ. Sugestão: se você conhecer uma estatística suficiente e completa você pode utilizá-la, sem provar que a mesma é suficiente e completa. (30 pontos)

d) Compare os estimadores obtidos nos itens a) e b), utilizando suas esperanças, vícios e erros-quadráticos médios. Qual dos dois estimadores é melhor? Justifique, adequadamente, sua resposta. (50 pontos).

e) Independentemente da conclusão a que você chegou no item d), qual é o maior problema em se utilizar o estimador do método dos momentos de θ? (20 pontos)

3. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{lognormal}(\mu, \sigma^2), \mu \in (-\infty, \infty), \sigma^2 > 0$, ou seja:

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2) \quad (1)$$

a) Prove que $Y_i = \ln X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ e daí conclua (não precisa provar) que $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. (10 pontos)

b) Encontre a distribuição assintótica do emv de $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$. Sugestão: utilize o item a). (40 pontos)

c) Como você poderia utilizar o resultado do item b) para construir uma região de confiança (assintótica) para $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$ (20 pontos).

Formulário

1. Se $X \sim exp(\theta), \theta > 0$, então $f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \mathcal{E}(X) = \theta, \mathcal{V}(X) = \theta^2$.

2. Se $X \sim$ gama$(r,\theta), r > 0, \theta > 0$, então $f_X(x;r,\theta) = \frac{1}{\theta^r \Gamma(r)} e^{-\frac{x}{\theta}} x^{r-1} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \mathcal{E}(X) = r\theta, \mathcal{V}(X) = r\theta^2$.

3. $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$, $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$, se for r for inteiro $\Gamma(r) = (r-1)!$.

4. Se $X \sim N(\mu,\sigma^2), \mu \in (-\infty,\infty), \sigma^2 \in (0,\infty), \boldsymbol{\theta} = (\mu,\sigma^2)$ então
$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x), \mathcal{E}(X) = \mu, \mathcal{V}(X) = \sigma^2$.

5. Seja $X \sim U[a,b], a < b$, então $f_X(x;a,b) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$, $\mathcal{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \mathcal{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

6. Seja $g(\theta) = \int_0^\theta h(x)dx$, então $\frac{\partial}{\partial\theta} g(\theta) = h(\theta)$.

7. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que X é uma variável aleatória contínua, e $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$, então
$f_{Y_n}(y) = n\left[F_X(y)\right]^{n-1} f_X(y) \mathbb{1}_A(y)$,
em que F_X e f_X são a f.d.a e a f.d.p de X, respectivamente e A é o suporte de X.