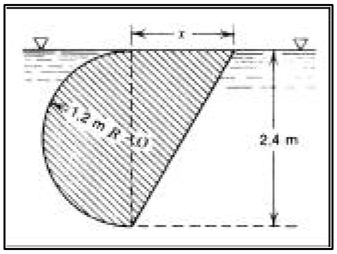
Gabarito

**EM 561 1ª Prova (02 de Maio de 2006)**

**Turmas A e B - duração 02h00 - consulta ao livro texto SOMENTE**

1) O corpo cuja seção é mostrada na figura encontra-se pivotado no ponto O. Desprezando-se o peso do corpo, determine o valor da distancia x para que o mesmo não gire.




Circuferência: A força vertical é igual ao peso do volume de líquido. O momento que este exerce sobre o ponto O está distribuido ao longo do semi cilindro. Para calcular o torque vamos calcular o peso das colunas de água de altura h definida pela integral $F^y{}_{R:}$

$$h(x) = 2R\cos q$$

$$x = R\sin q$$

$$dx = R\cos q\, dq$$

$$F_R^y = \int_0^{p/2} r\, g h(x) x dx$$

$$F_R^y = \int_0^{p/2} r\, g\left(2R\cos q\right)\left(R\sin q\right)\left(R\cos q\right) dq$$

$$F_R^y = \int_0^{p/2} r\, g\left(2R^3\cos^2 q\right)\left(\sin q\right) dq$$

$$F_R^y = r\, g\, 2R^3 \int_0^{p/2} \left(\cos^2 q\right)\left(\sin q\right) dq$$

$$F_R^y = r\, g\, 2R^3 \left(-\frac{\cos^3 q}{3}\right)\Bigg|_0^{p/2}$$

$$F_R^y = r\, g\, 2R^3 \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$F_R^y = \frac{2}{3} r\, g R^3$$

Triângulo: A força vertical é igual ao peso do volume de líquido. O momento que este exerce sobre o ponto O está distribuido ao longo do prisma. Para calcular o torque vamos calcular o peso das colunas de água de altura h definida pela integral $F^y_R$:

$$\frac{h(x)}{L} = \left( \frac{x - x_0}{x_0} \right)$$

$$h(x) = \left( \frac{x - x_0}{x_0} \right) L$$

$$L = 2R$$

$$F_R^y = \int_{x_0}^{0} r\, g h(x) x dx$$

$$F_R^y = \int_{x_0}^{0} r\, g \left( \frac{x - x_0}{x_0} \right) L x dx$$

$$F_R^y = \int_{x_0}^{0} r\, g L \left( \frac{x}{x_0} - 1 \right) x dx$$

$$F_R^y = r\, g L \int_{x_0}^{0} \left( \frac{x^2}{x_0} - x \right) dx$$

$$F_R^y = r\, g L \left( \frac{x^3}{3x_0} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x_0}^{0}$$

$$F_R^y = r\, g L \left[ -\left( \frac{x_0^{\,3}}{3x_0} - \frac{x_0^{\,2}}{2} \right) \right]$$

$$F_R^y = r\, g L \left[ \frac{x_0^{\,2}}{2} - \frac{x_0^{\,2}}{3} \right]$$

$$F_R^y = r\, g L \left[ \frac{x_0^{\,2}}{6} \right]$$

$$F_R^y = \frac{r\, g L x_0^{\,2}}{6}$$

$$F_R^y = \frac{r\, g 2 R x_0^{\,2}}{6}$$

$$F_R^y = \frac{1}{3} r\, g R x_0^{\,2}$$

Como $F_R^y = F_R^y$ a distância $x_0$ necessária para não haver torque no ponto O:

$$\frac{1}{3} r\, g R x_0^{\,2} = \frac{2}{3} r\, g R^3$$

$$\frac{1}{\cancel{3}} \cancel{r}\, \cancel{g} \cancel{R} x_0^{\,2} = \frac{2}{\cancel{3}} \cancel{r}\, \cancel{g} R^{\cancel{3}2}$$

$$x_0^{\,2} = 2R^2$$

$$x_0 = \sqrt{2} R$$

2) Em um escoamento plano e incompressível a componente θ da velocidade é dada por:

$$V_q = 20\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\sin q - \frac{40}{r}$$

Equação da Continuidade: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV_r\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial V_q}{\partial q}=0$

a. Encontre a componente radial da velocidade $V_r\,(r,q)$ se $V_r\,(1,q)=0$.

$$\frac{\partial V_q}{\partial q} = 20\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\cos q + 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rV_r\right) = -20\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\cos q$$

$$rV_r = -20\cos q\left(r-\frac{1}{r}\right)+f(q)$$

$$V_r = -20\cos q\left(1-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{f(q)}{r}$$

como $V_r\,(1,q)=0 \rightarrow f(q)=0$, logo a componente radial é:

$$V_r = -20\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\cos q$$

b. Encontre a vorticidade do escoamento.

$$w_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV_q\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial q}$$

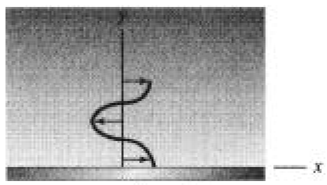
$$w_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[20\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin q - 40\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial q}\left[-20\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\cos q\right]$$

$$w_z = \frac{1}{r}\left[-20\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\sin q\right]-\frac{1}{r}\left[+20\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\sin q\right]$$

$$w_z = 0$$

Note que as equações de velocidades corresponde àquele num cilindro com um vórtice livre, portanto irrotacional.

3) Uma placa com dimensões infinitas e plana oscila sob um líquido, como mostrado na figura. Escreva os termos não nulos da equação diferencial de quantidade de movimento na direção x, supondo o escoamento como laminar e plano, ocorrendo paralelamente à placa, e o fluido com viscosidade constante. Indique também as condições de contorno que devem ser satisfeitas.(Obs.: não é necessário resolver a equação diferencial.)




$u_{parede} = U \text{ sen } \omega t$

$$r \frac{\partial u}{\partial t} = m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u_w = U_0 \sin v\, t$$

$$u(0,t) = U_0 \sin v\, t$$

$$u(\infty,t) = 0$$

$$u(y,0) = 0$$

4) Verifique se o escoamento descrito pelo campo de velocidades abaixo é incomprensível.

$$u = \frac{10x}{x^2 + y^2} \qquad v = \frac{10y}{x^2 + y^2} \qquad w = 0$$

Obtenha uma expressão para o gradiente de pressão, supondo um escoamento sem atrito e sem influência de forças de campo e fluido com densidade ρ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{10}{x^2 + y^2} - 10.\frac{2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{10}{x^2 + y^2} - 10.\frac{2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{10}{x^2 + y^2} - 10.\frac{2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{10}{x^2 + y^2} - 10.\frac{2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2.\frac{10}{x^2 + y^2} - 2.10.\frac{\cancel{\left(x^2 + y^2\right)}}{\left(x^2 + y^2\right)^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{20}{\left(x^2 + y^2\right)} - \frac{20}{\left(x^2 + y^2\right)} = 0$$

Portanto é incompressível.

Aplicando Bernoulli:

$$P + \frac{1}{2} rV^2 = P_0$$

$$V^2 = \left(\frac{10x}{x^2 + y^2} + \frac{10y}{x^2 + y^2}\right)^2 = \frac{100}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\left(x + y\right)^2$$

$$P + \frac{1}{2} r \frac{100}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\left(x + y\right)^2 = P_0$$

$$P = P_0 - r\frac{50}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\left(x + y\right)^2$$

$\nabla P = -50\, r \nabla \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2}$ ou $\nabla P = -\frac{1}{2} r \nabla (V^2)$ as componentes do gradiente de pressão são obtidas da expressão acima. Uma segunda maneira de se obter as componentes do gradiente de pressão é diretamente da Eq. De Euler, porém este caminho é mais trabalhoso...

$$\nabla P = -\rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

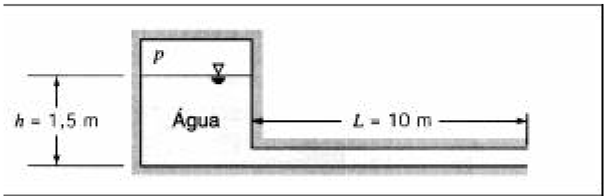
$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

ou

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{10\rho x}{(x^2+y^2)^2}\left[-10 + \frac{20x^2}{(x^2+y^2)} + \frac{10y^2}{(x^2+y^2)}\right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{10\rho y}{(x^2+y^2)^2}\left[-10 + \frac{20y^2}{(x^2+y^2)} + \frac{10x^2}{(x^2+y^2)}\right]$$

5) Ar comprimido é usado para acelerar a passagem da água em um tubo. Despreze a velocidade no reservatório e admita que o escoamento no tubo é sem atrito e uniforme em qualquer seção. Num instante particular, sabe-se que V = 1 m/s e dV/dt = 1,50 m/s2. A área da seção reta do tubo é A = 0,02 m2. Determine a pressão manométrica no tanque nesse instante.




Utilizando a Eq 6.21 do Livro texto

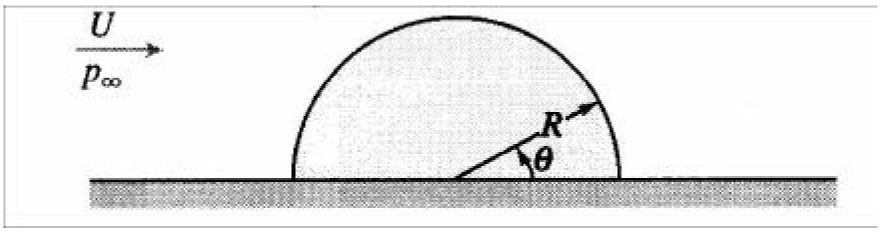
$$rL\frac{dV}{dt}+\left(P+\frac{1}{2}rV^{2}+rgz\right)_{2}-\left(P+\frac{1}{2}rV^{2}+rgz\right)_{1}=0$$

$$P_G=10^3\times10\times1,5+\frac{1}{2}10^3\times1-10^3\times g\times1,5$$

$$P_G=10^3\left[15\times0,5-g\times1,5\right]=0,78kPa$$

A pressão manométrica no tanque é de 0,78 kPa.

6) O escoamento sobre uma cabana semicilíndrica pode ser aproximado pela por um escoamento potencial com distribuição de velocidade da expressão abaixo , com **0** £ q £ p. Durante uma tempestade, a velocidade do vento atinge 120 km/h; a temperatura externa é de 10°C. Um barômetro dentro da cabana indica 96KPa; a pressão poo é também de 96KPa. A cabana tem um diâmetro de 5 m e um comprimento de 20 m. Determine a força que tende a levantar a cabana das suas fundações. Considere o ar gás perfeito, $R_{gás}$ = 287 J/K.




$$\vec{V} = U\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos q\,\hat{e}_r - U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin q\,\hat{e}_q$$

$$\int \sin^3 q\, dq = \frac{\cos^3 q}{3} - \cos q$$

$U_0$=120km/h = 33,33m/s
ρ=P/RT = 1,182 kg/$m^3$

Escoamento potencial no semi-cilindro

$$V^2 = 4U^2 \sin^2 q$$

$$P - P_\infty = \frac{1}{2} r \left(U_0\right)^2 \left(1 - 4\sin^2 q\right)$$

A força de sustentação:

$$F_L = \int_0^p \frac{1}{2} r \left(U_0\right)^2 \left(1 - 4\sin^2 q\right).\left(R \sin q\right) b\, dq$$

$$F_L = \frac{1}{2} r \left(U_0\right)^2 Rb\left[\int_0^p \left(\sin q\right) dq - \int_0^p 4\left(\sin^3 q\right) dq\right]$$

$$F_L = \frac{1}{2} r \left(U_0\right)^2 Rb\left[-\cos q\Big|_0^p - 4\times\left(\frac{\cos^3 q}{3} - \cos q\right)\Big|_0^p\right]$$

$$F_L = \frac{1}{2} r \left(U_0\right)^2 Rb\left[-(-2) - 4\left(\frac{4}{3}\right)\right]$$

$$F_L = \frac{1}{2} r \left(U_0\right)^2 Rb \times \frac{10}{3}$$

$$F_L = \frac{1}{2}\times 1{,}182\times\left(33{,}33\right)^2\times\frac{5}{2}\times 20\times\frac{10}{3}$$

$$F_L = 109{,}5kPa$$

Cálculo da Força de sustentação com o formulário dado na prova

$$F_L = \frac{1}{2}\,r\,\left(U_0\right)^2\,Rb\left[-\cos q\big|_0^p - 4\times\left(\frac{4}{3}\cos^3 q - 3\cos q\right)\bigg|_0^p\right]$$

$$F_L = \frac{1}{2}\,r\,\left(U_0\right)^2\,Rb\left[-\left(-2\right)-4\left(\frac{-10}{3}\right)\right]$$

$$F_L = \frac{1}{2}\,r\,\left(U_0\right)^2\,Rb\times\frac{46}{3}$$

$$F_L = \frac{1}{2}\times 1{,}182\times\left(33{,}33\right)^2\times\frac{5}{2}\times 20\times\frac{46}{3}$$

$$F_L = 503{,}7kPa$$