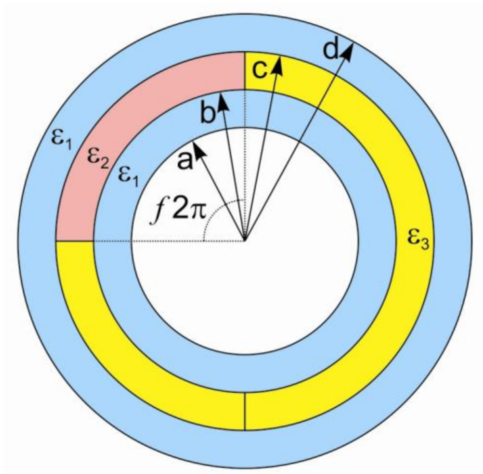
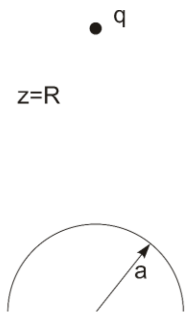
Prova de Eletromagnetismo EE 521 (Preparação para a prova 2) – 14 de maio de 2009.

Prof. Cesar Pagan. FEEC – UNICAMP

1. **Cilindro com vários dielétricos.** O cilindro representado ao lado é composto por duas cascas condutoras de raios *a* e *d,* concêntricas. Ele está preenchido por três camadas dielétricas. A primeira e a terceira camadas ocupam as regiões a<r<b e c<r<d, onde a permissividade elétrica é ε_1. Na camadas intermediária, para a qual b<r<c, temos ε_2. para $0<\phi<f.2\pi$ e ε_3. para $f.2\pi<\phi<2\pi$, onde f está no intervalo entre 0 e 1. Seu comprimento é L. Calcule a capacitância deste cilindro.
2. **Método das Imagens:** Considere uma carga pontual *q,* situada sobre o eixo z, em z=R. Um condutor está localizado no plano z=0, no centro do qual há uma protuberância em forma de semi-esfera de raio a (R>a). Calcule a densidade superficial de cargas no ponto mais próximo à carga.

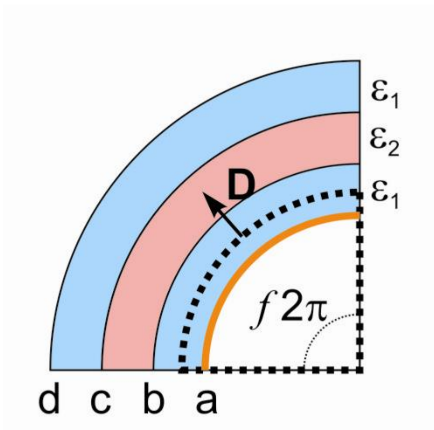




Solução

Problema 1:

Para resolver este problema, devemos supor que o campo elétrico é radial. Esta hipótese é importante para simplificar os cálculos e é válida quanto menor for a diferença entre os raios das cascas condutoras, *a* e *d*. Nestas condições, podemos ainda supor que o valor do vetor deslocamento D depende apenas da distância ao centro. Partindo deste princípio, vamos separar o problema em duas regiões e aplicar a Lei de Gauss para uma "fatia" correspondente a um dos pedaços de nosso dielétrico. Na figura ao lado escolhemos o pedaço menor, correspondente a um ângulo $f\,2\pi$.



Vamos supor que a densidade superficial nas placas seja σ. Neste caso, a Lei de Gauss para este segmento resulta em:

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q = \oint_{\substack{\text{Superfície}\\ \text{do condutor}\\ \text{dentro}\\ \text{da Superfície}\\ \text{Gaussiana(S)}}} \sigma\, dS \qquad (1)$$

de onde, considerando nulas as contribuições das superfícies radiais, temos

$$D(f2\pi)rL = \sigma(f2\pi)aL$$
$$D = \frac{a}{r}\sigma \qquad (2)$$

Escolhemos aplicar a Lei de Gauss utilizando a densidade de fluxo D, porque esta grandeza é contínua dentro do dielétrico. O campo elétrico será dado pela relação **D** = ε**E**, logo,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{a}{r}. \qquad (3)$$

Note que ós não aplicamos a Lei de Gauss na superfície inteira, mas só no pedaço $f2\pi$. Para entender porque escolhemos esta estratégia, precisamos ir um pouco além e calcular a diferença de potencial entre as placas do capacitor em cada uma das regiões em que separamos o arranjo. Considere que a placa interna contém a carga positiva e, portanto, está em um potencial maior do que a placa externa. No pedaço menor, temos a fatia correspondente a ε_2 e a diferença de potencial resulta em:

$$V_2 = -\int_d^c \frac{1}{\varepsilon_1}\sigma\frac{a}{r}dr - \int_c^b \frac{1}{\varepsilon_2}\sigma\frac{a}{r}dr - \int_b^a \frac{1}{\varepsilon_1}\sigma\frac{a}{r}dr \qquad (4)$$

e assim,

$$V_2 = \sigma a\frac{1}{\varepsilon_1}\ln(bd/ac) + \sigma a\frac{1}{\varepsilon_2}\ln(c/b) \qquad (5)$$

onde identificamos V_2 como a diferença de potencial na fatia que contém o dielétrico com ε_2. Analogamente, obtemos a diferença de potencial para a região que contém o dielétrico ε_3,

$$V_3 = \sigma a\frac{1}{\varepsilon_1}\ln(bd/ac) + \sigma a\frac{1}{\varepsilon_3}\ln(c/b). \qquad (6)$$

Como V_2 é igual a V_3, pois ambas medem a diferença de potencial entre o mesmo par de superfícies condutoras (que são superfícies equipotenciais), concluímos que as densidades superficiais de carga em cada trecho deve ser diferente. Se não fosse, teríamos que ter ε_2 igual a ε_3 para que V_2 fosse igual a V_3. Assim, reescrevemos (5) e (6) na forma

$$V = \sigma_2 a\frac{1}{\varepsilon_1}\ln(bd/ac) + \sigma_2 a\frac{1}{\varepsilon_2}\ln(c/b) \text{ e } V = \sigma_3 a\frac{1}{\varepsilon_1}\ln(bd/ac) + \sigma_3 a\frac{1}{\varepsilon_3}\ln(c/b) \qquad (7)$$

Neste ponto, isolamos as densidades

$$\sigma_2 = \frac{V}{a\frac{1}{\varepsilon_1}\ln(bd/ac) + a\frac{1}{\varepsilon_2}\ln(c/b)} \text{ e } \sigma_3 = \frac{V}{a\frac{1}{\varepsilon_1}\ln(bd/ac) + a\frac{1}{\varepsilon_3}\ln(c/b)} \qquad (8)$$

o que nos permite calcular a carga total nas placas do capacitor, através da integração da densidade sobre a placa interna (positiva):

$$Q = \int_0^{f2\pi}\sigma_2 a dz d\phi + \int_{f2\pi}^{2\pi}\sigma_3 a dz d\phi$$
$$Q = V\int_0^{f2\pi}\frac{1}{\frac{\ln(bd/ac)}{\varepsilon_1} + \frac{\ln(c/b)}{\varepsilon_2}}dz d\phi + V\int_{f2\pi}^{2\pi}\frac{1}{\frac{\ln(bd/ac)}{\varepsilon_1} + \frac{\ln(c/b)}{\varepsilon_3}}dz d\phi \qquad (9)$$

e portanto

$$Q = L2\pi\left(\frac{f}{\frac{\ln(bd/ac)}{\varepsilon_1} + \frac{\ln(c/b)}{\varepsilon_2}} + \frac{1-f}{\frac{\ln(bd/ac)}{\varepsilon_1} + \frac{\ln(c/b)}{\varepsilon_3}}\right)V. \qquad (10)$$

Comparando (10) com Q= CV, concluímos que o valor da capacitância é:

$$C = L2\pi\left(\frac{f}{\frac{\ln(bd/ac)}{\varepsilon_1}+\frac{\ln(c/b)}{\varepsilon_2}}+\frac{1-f}{\frac{\ln(bd/ac)}{\varepsilon_1}+\frac{\ln(c/b)}{\varepsilon_3}}\right) \qquad (11)$$

É interessante manipular a equação (11) para obter algumas configurações específicas. A mais simples é a do capacitor cilíndrico com um único dielétrico, que corresponde a fazer *f=1* e *a=b=c*, o que resulta em

$$C = \frac{L2\pi}{\ln(d/a)}\varepsilon_1. \qquad (12)$$

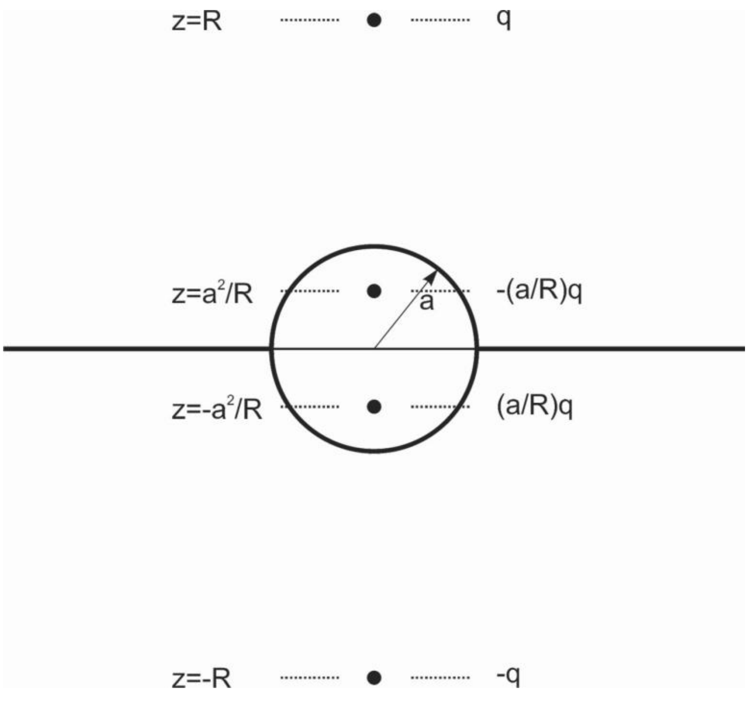
Fazendo *f=1* e a=b, temos um capacitor com dois dielétricos cilíndricos

$$C = \frac{L2\pi}{\frac{\ln(d/c)}{\varepsilon_1}+\frac{\ln(c/b)}{\varepsilon_2}}, \qquad (13)$$

o que corresponde a uma associação de capacitores em série:

$$\frac{1}{C} = \frac{\frac{\ln(d/c)}{\varepsilon_1}+\frac{\ln(c/b)}{\varepsilon_2}}{L2\pi} = \frac{\ln(d/c)}{L2\pi\varepsilon_1}+\frac{\ln(c/b)}{L2\pi\varepsilon_2} = \frac{1}{\frac{L2\pi}{\ln(d/c)}\varepsilon_1}+\frac{1}{\frac{L2\pi}{\ln(c/b)}\varepsilon_2} = \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}. \qquad (14).$$

Muitos outros exemplos podem ser obtidos da expressão (11).



Problema 2:

Inicialmente fazemos o potencial sobre a esfera igual à zero posicionando uma carga pontual com valor *q´ = –(a/R)q* na posição $z=a^2/R$, sobre o eixo z, conforme a solução já conhecida que resolvemos em classe. Em seguida, consideramos um plano infinito em z=0, e escolhemos a posição de **duas** novas cargas imagem para garantir que neste plano o potencial seja zero. Isto acontecerá se colocarmos uma carga *–q* na posição *z=–R* e outra carga *+q´=+(a/R)q* na posição $z=-a^2/R$, ambas, mais uma vez, posicionadas sobre o eixo z. O conjunto destas novas cargas não altera o resultado da primeira parte do problema, já que V sobre a esfera segue sendo nulo. Temos assim um total de três cargas imagem. Calculamos o campo elétrico devido a carga q e às três cargas imagem no ponto de interesse, e levando em conta que a densidade de cargas é dada por $\sigma=\hat{\mathbf{e}}_z\cdot\mathbf{D}=\varepsilon_0 E_z$, temos em z=a:

$$\sigma = +\frac{q}{4\pi}\frac{1}{(R-a)^2}-\frac{a}{R}\frac{q}{4\pi}\frac{1}{(a-\frac{a^2}{R})^2}+\frac{a}{R}\frac{q}{4\pi}\frac{1}{(a+\frac{a^2}{R})^2}-\frac{q}{4\pi}\frac{1}{(a+R)^2}.$$

Atenção: Para calcular a densidade de cargas, é preciso considerar o campo produzido por **todas** as cargas presentes e não apenas as cargas imagem. Isto é decorrência da condição de contorno do campo elétrico na superfície do condutor. Se esta condição não fosse satisfeita, o campo do lado de dentro da superfície não seria zero.