NOTAS

**Nome**: ________________________________ **RA**:_______

1ª Prova MA 211 Turmas A,B

01 de abril de 2011

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| | |

É proibido usar calculadora e desgrampear as folhas da prova. Respostas sem justificativas ou que não incluam os cálculos necessários não serão consideradas.

BOA PROVA!

**1.** Suponha que $T(x,y) = 4x^2+9y^2$ representa o valor da temperatura em °C sobre pontos do plano xy. (valores: 0,5+1,0+1,0)

**a)** Desenhe a isotérmica correspondente a 36°.

**b)** Determine o ponto de mais baixa temperatura da reta y + x -1=0.

**c)** Se P é um ponto da curva $\alpha(t) = (e^{8t}, 2e^{18t})$, $t \geq 0$, qual o ângulo entre o vetor tangente a $\alpha$ em t e o vetor gradiente $\vec{\nabla} T(\alpha(t))$?

**2.** Seja $z = x \operatorname{sen}(\frac{x}{y})$. (valores: 1,0+1,5)

**a)** Verifique que $x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = z$

**b)** Se x(t) = cos(t+2s) e y(t) = sen (t-2s), calcule $\frac{\partial z}{\partial t}$ e $\frac{\partial z}{\partial s}$.

**3.** Seja $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$. (valores: 1,0+1,5)

**a)** Verifique que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

**b)** Verifique se o plano tangente ao gráfico de f em x=1 e y=1 passa pela origem.

**4. a)** Sejam $f(x,y) = 3x^4+2y^4$ e $g(x,y) = x^5 - 2y^5$. Mostre que tais funções têm (0,0) como único ponto crítico e classifique-o para cada função.

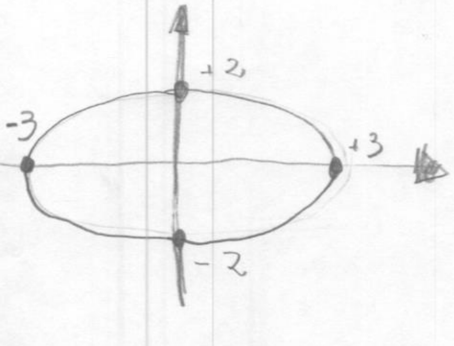
**b)** Determine se a função $f(x,y) = x^3+y^3-3x-3y+4$ admite pontos de máximo e/ou mínimo e, caso sim, identifique-os. (valores:1,0 + 1,5)

## QUESTÃO 1 $T(x,y) = 4x^2 + 9y^2$

a) Isotermica 36° : SÃO OS pontos CUJA temperatura É 36°, OU SEJA $(x,y)$ tais que $T(x,y) = 36$ (CURVA DE NÍVEL!). Então

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$ É A isotermica

$$(\div 36) \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad : \text{elipse}$$




Elipse centrada na origem com semi-eixos $a = 3$ e $b = 2$

b) Qual o ponto $(x,y)$ da reta $y + x - 1 = 0$ no qual sua temperatura $T(x,y)$ é mínima?

Para descobrir o tal ponto, devemos minimizar $T(x,y)$ quando $y = -x + 1$, ou seja, devemos minimizar a função $f(x) := T(x, -x+1) = 4x^2 + 9(-x+1)^2$

Como $f(x) = 4x^2 + 9x^2 - 18x + 9 = 13x^2 - 18x + 9$, seus pontos críticos são:

$f'(x) = 0$

$26x - 18 = 0$

$x = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$

Como $f''(9/13) = 26 > 0$, segue que $x = \frac{9}{13}$ é ponto de mínimo de $f$. Logo $(x,y) = \left(\frac{9}{13}, -\frac{9}{13} + 1\right) = \left(\frac{9}{13}, \right.$
é ponto de mínimo de $T$.

c) Qual o angulo entre o vetor tangente a $\alpha$ em $t$ e o vetor gradiente $\nabla T$ em $\alpha(t)$? $\boxed{\alpha(t) = (e^{8t}, 2e^{18t})}$.

Primeiramente, o vetor tangente à curva $\alpha$ em $t$, é:

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t) = \left(\frac{d}{dt}(e^{8t}), \frac{d}{dt}(2e^{18t})\right) = \left(8e^{8t}, 36e^{18t}\right)$$

Em segundo lugar, o vetor gradiente $\nabla T = \langle 8x, 18y \rangle$ em $\alpha(t)$ é:

$$\nabla T(\alpha(t)) = \nabla T(e^{8t}, 2e^{18t}) = \langle 8 \cdot e^{8t}, 18 \cdot 2e^{18t} \rangle = \langle 8e^{8t}, 36e^{18t} \rangle$$

Por fim, lembrando que o ângulo $\theta$ entre dois vetores $v$ e $w$ é

$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$, temos que no nosso caso o angulo é zero, pois $\nabla T(\alpha(t)) =$

## QUESTÃO 2 $\quad z = x\,\mathrm{SEN}\left(\frac{x}{y}\right)$

MOSTRAR QUE $x z_x + y z_y \stackrel{?}{=} z$

a) CALCULANDO:

- $$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\mathrm{SEN}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = 1 \cdot \mathrm{SEN}\left(\frac{x}{y}\right) + x \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} = \mathrm{SEN}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad (1)$$

- $$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\,\mathrm{SEN}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = x \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{-x}{y^2} = \frac{-x^2}{y^2}\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad (2)$$

AGORA MULTIPLICANDO (1) POR $x$ E (2) POR $y$, E FINALMENTE SOMANDO OBTEMOS

$$x \cdot z_x(x,y) + y\,z_y(x,y) = x\,\mathrm{SEN}\left(\frac{x}{y}\right) + \cancel{\frac{x^2}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)} - \cancel{\frac{x^2}{y}\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)}$$

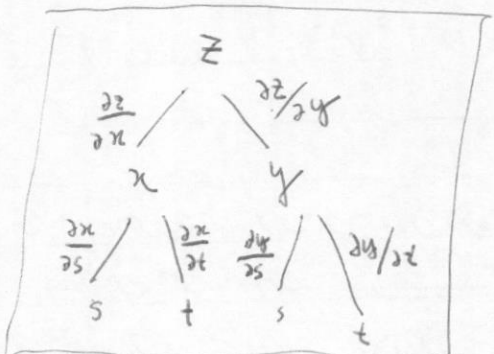
$$= x\,\mathrm{SEN}\left(\frac{x}{y}\right) = z(x,y).$$

2b) $\frac{\partial z}{\partial t} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial s} = ?$

ONDE

$x(s,t) = \cos(t + 2s)$

$y(s,t) = \mathrm{SEN}(t \cdot 2s)$




DO DIAGRAMA, PRECISAMOS CALCULAR $z_x, z_y, x_s, x_t, y_s, y_t$

JÁ SABEMOS QUE

- $z_x(x,y) = \mathrm{SEN}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad (1)$

- $z_y(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad (2)$

Agora

- $\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) = -2\,\text{sen}(t+2s)$

- $\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = -\text{sen}(t+2s)$

- $\frac{\partial y}{\partial s}(s,t) = -2\cos(t-2s)$

- $\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) = \cos(t-2s)$

Com estas equações em mãos (1) — (6), pela regra da cadeia (com a ajuda do diagrama): (Lembrando que $x(s,t)=\cos(t+2s)$ e $y(s,t)=\text{sen}($

- $$\frac{\partial z}{\partial s} = z_x(x(s,t),\, y(s,t)).\, x_s(s,t) + z_y(x(s,t), y(s,t)).\, y_s(s,t)$$

$$= \left[\text{sen}\left(\frac{\cos(t+2s)}{\text{sen}(t-2s)}\right) + \frac{\cos(t+2s)}{\text{sen}(t-2s)}\cdot\cos\left(\frac{\cos(t+2s)}{\text{sen}(t-2s)}\right)\right]\cdot\left[-2\,\text{sen}(t+2s)\right]$$

$$+\left[-\frac{(\cos(t+2s))^2}{(\text{sen}(t-2s))^2}\cdot\cos\left(\frac{\cos(t+2s)}{\text{sen}(t-2s)}\right)\right]\cdot\left[-2\cos(t-2s)\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = z_x(x(s,t), y(s,t))\, x_t(s,t) + z_y(x(s,t), y(s,t)).\, y_t(s,t)$$

$$= \left[\text{sen}\left(\frac{\cos(t+2s)}{\text{sen}(t-2s)}\right) + \frac{\cos(t+2s)}{\text{sen}(t-2s)}\cdot\cos\left(\frac{\cos(t+2s)}{\text{sen}(t-2s)}\right)\right]\cdot\left[-\text{sen}(t+2s)\right]$$

$$+\left[-\left(\frac{\cos(t+2s)}{\text{sen}(t-2s)}\right)^2\cdot\cos\left(\frac{\cos(t+2s)}{\text{sen}(t-2s)}\right)\right]\cdot\left[\cos(t-2s)\right]$$

Questão 3, turmas A, B.

1) a) por comparação: $0 \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = |x| \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq |x|$ 0,5

pois $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$; então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{x\to 0} |x|$

0,5 com assim $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = 0$ logo, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$

b) substituição por coord. polares.

$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad x^2+y^2 = r^2$

0,5 $(x,y) \to (0,0) \iff r \to 0$. ($\theta$ qquer).

$\frac{x^3}{x^2+y^2} = \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = r\cos^3\theta$

0,5 como $-1 \leq \cos^3(\theta) \leq 1$ pq $\cos^3\theta$ é limitada por 1 e $-1$, então $\lim_{r\to 0} -r \leq \lim_{r\to 0} r^{\cancel{3}}\cos^3\theta \leq \lim_{r\to 0} r$

logo $\lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0$.

c) por definição: dado $\varepsilon > 0$, ? $\exists\, \delta$ tq se $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ então $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2} - L\right| < \varepsilon$

0,5 a escolha de $\delta$: $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq |x| \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$\therefore$ se $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, também teremos $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| < \delta$

0,5 $\therefore$ escolha $\delta = \varepsilon$.

3b) Plano tg a $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ em $P=(1,1)$

$$f_x = \frac{3x^2(x^2+y^2) - x^3(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f_x(1,1) = 1$$

$$f_y = \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f_y(1,1) = -\frac{1}{2}$$

Como $P=(1,1)$ $\quad z_0 = f(1,1) = \frac{1}{2}$

Eq. do plano: $z - z_0 = f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$

$\therefore \; z - \frac{1}{2} = (x-1) - \frac{1}{2}(y-1) = x - \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$

ou $\quad z = x - \frac{y}{2}$

Para $x = y = z = 0$, segue $0 = 0 - 0$

$\therefore$ $(0,0,0)$ pertence ao plano