ra e nome:
e-mail:

Primeira Prova de Análise no $\mathbb{R}^n$, ps2012

(1) (2 pontos) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t^2 \operatorname{sen}(1/t)$ para $t \neq 0$ e por $f(0) = 0$. Mostre que:

(a) f é diferenciável mas não é C^1 em $t = 0$,

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $g(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ é diferenciável mas não é C^1 em $(x, y) = (0, 0)$.

(2) (2 pontos) Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, C^1, tal que seu posto é constante e igual a 3 em U. Mostre que $|(f(x))|^2$ não assume máximo em U.

(3) (3 pontos) Seja uma função $g : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, C^1 no aberto U e $a \in U$ tal que $\nabla g(a) \neq 0$. Considere o subconjunto S de $U \subset \mathbb{R}^3$ dado por $g(x, y, z) = g(a)$. Mostre que existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, outro aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ com $a \in W$ e uma função C^1 injetiva $f : V \subset \mathbb{R}^2 \to W \cap S$, dada por $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Verifique este resultado para $g(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$ encontrando a tal f para $a = (1, 0, 1)$. Note que neste caso o gradiente de g anula-se na origem do $\mathbb{R}^3$ $\ldots$ mesmo para este ponto você acha que seria possível encontrar a tal f?

(4) (3 pontos) Enuncie e demonstre a forma local das imersões para $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ onde U é um aberto e g tem posto máximo em $a \in U$. Em seguida considere tal função dada por $g(t,\theta) = (x(t,\theta), y(t,\theta), z(t,\theta))$, $x(t,\theta) = t\cos\theta$, $y(t,\theta) = t\text{sen}\theta$, $z(t,\theta) = t^2$, encontre um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$ com $(1,0,1) = g(1,0) \in V$ e um difeomorfismo $h : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, com $h(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ tal que $h(g(t,\theta)) = (t,\theta,0)$. Faça belos desenhos mostrando superfícies coordenadas do sistema naturalmente associado a h.