1ª Prova de MA141-X — 12/04/2012 (NOITE)

Q 1	Q 2	Q 3	Q 4	Total

*A*TENÇÃO: Será corrigida a redação da resposta. Cada resposta deve ser redigida com todos os detalhes. Caso duas ou mais provas apresentem alguma resposta cujas redações coincidam em mais de 50%, essa questão será **zerada** em todas elas. Não é permitido **destacar** as folhas da prova.

RA:____________ **Nome**:____

1. Seja o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 & = & 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 & = & 9 \end{cases}$

   (a) (0,5 pontos) Escreva o sistema acima na forma matricial $AX = B$ e determine a matriz A.

   (b) (2,0 pontos) Usando o **método de Gauss-Jordan de linha equivalência** encontre a forma escalonada reduzida (ou forma escada) da matriz aumentada do sistema.

   (c) (0,5 pontos) Determine as variáveis livres da solução geral do sistema.

   (d) (0,5 pontos) Escreva a solução geral desse sistema.

2. (2,5 pontos) Encontre a inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (2,5 pontos) Calcule o determinante de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. (0,25 pontos cada item) Responda às perguntas abaixo com "**CERTA**" ou "**ERRADA**"; demonstrando ou dando contra-exemplo. Respostas **SEM** justificativa **NÃO** serão consideradas. As letras maiúsculas A, B, C, I, etc, representam matrizes.

   (a) Se AB é invertível, então A também é.

   (b) Se a equação matricial $AX = 0$, com A $n \times n$, possui uma solução não nula X, $n \times 1$, então $\det A = 0$.

   (c) Se A é invertível e $AB = AC$ então $B = C$.

   (d) Duas matrizes linha equivalentes têm o mesmo determinante.

   (e) Se $\det(AA^t) = 0$, então $A = 0$.

   (f) Um sistema com 4 equações e 5 variáveis sempre possui solução.

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

GABARITO

1^a Questão. a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} l2 - l1 \to l_2 \\ l3 - l1 \to l3 \\ l4 - 3l1 \to l4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} l1 - l3 \to l_1 \\ l4 - l3 \to l4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad l4 - l2 \to l4 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Portanto, a matriz escalonada reduzida é

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

c) O sistema equivalente é

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

temos 5 incognitas e 3 equações portanto temos duas variáveis libres

d)

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ 1 \\ x_4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

2)

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad l6 - l7 \to l6$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad l5 - l6 \to l5$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \quad l4-l5\to l4$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&-1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \quad l3-l4\to l3$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&-1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&-1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \quad l2-l3\to l2$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&-1&1&-1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&-1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&-1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \quad l1-l2\to l1$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&-1&1&-1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&-1&1&-1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&-1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1&-1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \quad l1-l2\to l1$$

Portanto

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1&-1&1&-1&1&-1&1\\ 0&1&-1&1&-1&1&-1\\ 0&0&1&-1&1&-1&1\\ 0&0&0&1&-1&1&-1\\ 0&0&0&0&1&-1&1\\ 0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

3)

$$B=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&x_1&1\\ 1&1&1&x_2&1&1\\ 1&1&x_3&1&1&1\\ 1&x_4&1&1&1&1\\ x_5&1&1&1&1&1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} l2-l1\to l2\\ l3-l1\to l3\\ l4-l1\to l4\\ l5-l1\to l5\\ l6-l1\to l6 \end{array} \quad B_1=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&x_1-1&0\\ 0&0&0&x_2-1&0&0\\ 0&0&x_3-1&0&0&0\\ 0&x_4-1&0&0&0&0\\ x_5-1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$l2 \leftrightarrow l6 \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_4-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l3 \leftrightarrow l5 \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_4-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Então

$$det(B) = det(B_1) = -det(B_2) = det(B_3) = (-1)^7(x_5-1)(x_4-1)(x_3-1)(x_2-1)(x_1-1)$$

donde

$$det(B) = -(x_5-1)(x_4-1)(x_3-1)(x_2-1)(x_1-1)$$

4)

a) Certa. Se AB invertível então $det(AB) \neq 0$ donde $\det(A) \neq 0$ e portanto A invertível.

b) Certa. Se $AX = 0$ possui solução não nula então A não é invertível, donde $det(A) = 0$.

c) Certa. Se A invertível então existe A^{-1}, então

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C$$

d) Errada. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

B é obtida de A trocando a linha 1 e linha 2 e portanto linha equivalentes mas,

$$det(A) = 1 = -det(B)$$

d) Errada. Considere $A \neq 0$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad AA^t = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

e $det(A) = 0$

f) Errada. Considere

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$