1. (*1.5 pontos*) Dada a equação

$$x^2y' - 3y = 2e^{\frac{1}{x}}, \qquad (x > 0),$$

   (a) (1.0) Encontre a solução geral dessa equação.

   (b) (0.2) Encontre a solução do problema de valor inicial dada pela equação acima e $y(1) = 0$.

   (c) (0.3) Qual é o domínio de validade da solução encontrada em (a)?

2. (*2.0 pontos*) Encontre um fator integrante que transforme

$$(2y^3 + xy^2)\,dx + (2xy^2 + y^3)\,dy = 0,$$

   numa equação exata e encontre a solução geral.

3. (*2.5 pontos*) Dada a seguinte equação diferencial:

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \operatorname{sen} x \qquad (x > 0)$$

   (a) (1.0) Encontre a solução complementar da equação acima, isto é, a solução geral da equação homogênea associada.

   (b) (1.5) Usando o método de **variação dos parâmetros**, encontre uma solução particular da equação dada.

4. (*2.0 pontos*) Observe que a equação

$$y^{(6)} - 2y^{(4)} - 7y^{(2)} - 4y = 5x\cos x + 7e^{2x},$$

   pode ser escrita como

$$(D^2 + 1)^2(D^2 - 4)y = 5x\cos x + 7e^{2x}.$$

   (a) Resolva a equação homogênea associada sabendo que a equação característica é

$$(r^2 + 1)^2(r^2 - 4) = 0.$$

   (b) Usando o método de coeficientes indeterminados apresente e justifique a forma da solução particular. **Não** calcule os coeficientes!

5. (*2.0 pontos*) Resolva a e.d.o

$$yy'' + (y')^2 = 0, \qquad (y > 0 \text{ e } y' > 0).$$

①

a) $x^2 y' - 3y = 2e^{1/x},\ x > 0 \Rightarrow y' - \frac{3}{x^2}y = \frac{2e^{1/x}}{x^2}$

Fator integrante: $\mu(x) = e^{\int -\frac{3}{x^2}dx} = e^{3/x}$ 0.2

multiplicando por $\mu(x)$ e integrando

$$(e^{3/x}y)' = \frac{2e^{1/x} \cdot e^{3/x}}{x^2} = \frac{2e^{4/x}}{x^2} \quad 0.2$$

$$\Rightarrow e^{3/x}y = 2\int \frac{e^{4/x}}{x^2}dx \qquad u = \frac{4}{x} \Rightarrow du = -\frac{4}{x^2}dx.$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{4/x}\left(-\frac{4}{x^2}\right)dx \qquad 0.3$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{4/x} + C.$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}e^{\frac{4}{x}-\frac{3}{x}} + ce^{-3/x} = -\frac{1}{2}e^{1/x} + ce^{-3/x} \quad 0.3$$

Logo, a solução geral é:

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}e^{1/x} + ce^{-3/x}}$$

b) $y(1)=0 \iff 0 = -\frac{1}{2}e + ce^{-3}$

$\iff ce^{-3} = \frac{1}{2}e$.

$\iff c = \frac{e^4}{2}$. 0.2

Assim,

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{1/x} + \frac{1}{2}e^{4-\frac{3}{x}}$$

é a solução do PVI.

c) Como temos explicitamente a solução e foi dado inicialmente que $x > 0$, o domínio da solução deve ser

$$D = \{ x \in \mathbb{R};\ x > 0 \}.$$ 0.3

<u>OBS</u>: O intervalo $(-\infty, 0)$ não deve ser incluído porque inicialmente foi dado que $x > 0$.

Uma outra forma de argumentar é [illegible] pelo fato de que as funções

$$p(x) = -\frac{3}{x^2} \quad e \quad g(x) = \frac{2e^{1/x}}{x^2}$$

são contínuas para $x > 0$. Sendo a eq. linear, a solução deve existir em todo o intervalo $I = (0, \infty)$.

② solução:

. Note que $N = 2xy^2 + y^3$ e $M = 2y^3 + xy^2$, e

$N_x = 2y^2$ e $M_y = 6y^2 + 2xy$.

Logo $N_x \neq M_y \Rightarrow$ a equação não é exata (0,2)

Mas

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-4y^2 - 2xy}{2y^3 + xy^2} = \frac{-2}{y}$$ → depende somente de y, (0,2)

de onde segue que existe um fator integrante que depende somente de y tal que

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{2}{y}\mu(y)$$

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{-2\cdot \ln y} = y^{-2}$$ (0,3)

. Multiplicando a equação por $\mu(y)$ obtemos

$$\underbrace{(2y + x)}_{M} dx + \underbrace{(2x + y)}_{N} dy = 0$$

que é exata pois neste caso (0,3)

$$N_x = 2 = M_y.$$

Assim, existe uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{d\psi}{dx} = 0 \Rightarrow \psi(x,y) = C$$ e

$M = \psi_x$, $N = \psi_y$.

Logo, $$\psi(x,y) = \int M\,dx + g(y)$$ (0,4)
$$= 2xy + \frac{x^2}{2} + g(y)$$

e $\psi_y = N \Rightarrow 2x + g'(y) = 2x + y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + C_1$

Assim, $\psi(x,y) = 2xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C_1$ (0,4)

→

de onde segue que a solução y da eq satisfaz

$$2xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \qquad (0,2).$$

Questão 3 item 1

$x^2y'' + 4xy' + 2y = \operatorname{sen} x$,

1º) $y = x^r \Rightarrow y' = r x^{r-1}$; $y'' = r(r-1)x^{r-2}$

$x^2y'' + 4xy' + 2y = x^r\left(r(r-1) + 4r + 2\right) = 0$; $x \neq 0$

$\Rightarrow r^2 + 3r + 2 = 0$, Polinômio característico para equação homogênea.

- ou (outra maneira)

$h = \ln x \Rightarrow y_h = y(h(x))$, onde $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ é equivalente a $ay_h'' + (a-b)y_h' + cy_h = 0$

$y_h'' + (4-1)y_h' + 2y_h = 0$, logo

$y_h'' + 3y_h' + 2y_h = 0 \Rightarrow s^2 + 3s + 2 = 0$

até aqui 0,5 ponto no item 1

$r = \dfrac{-3 \pm (9-8)^{\frac{1}{2}}}{2} \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = c_1 x^{-1} \\ y_2 = c_2 x^{-2} \end{matrix} \Rightarrow y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$

- ou (outra maneira)

$s = \dfrac{-3 \pm (9-8)^{\frac{1}{2}}}{2} \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y_h^{(1)} = c_1 e^{-h} \\ y_h^{(2)} = c_2 e^{-2h} \end{matrix}$; $h = \ln x \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = c_1 x^{-1} \\ y_1 = c_2 x^{-2} \end{matrix}$

$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$

aqui ganharia os 0,5 restante da questão 1

2º) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = \text{Sen}\, x$

$$y_1 = x^{-1}$$
$$y_2 = x^{-2}$$

$x \neq 0$

$$y'' + \frac{4}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = \frac{\text{Sen}\, x}{x^2} = g(x)$$

$$y_p = y_1 u_1 + y_2 u_1$$

e

$$\begin{bmatrix} x^{-1} & x^{-2} \\ -x^{-2} & -2x^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\text{Sen}\, x}{x^2} \end{bmatrix}$$

até aqui ganhou 0,2 pontos na item (2)

$$W = -2x^{-4} + x^{-4} = -x^{-4}$$

CRAMER

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ g(x) & -2x^{-3} \end{vmatrix}}{W} = \frac{-\frac{\text{Sen}\, x}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^4}} = \text{Sen}\, x \Rightarrow u_1' = \text{Sen}\, x$$

$\Rightarrow u_1 = -\text{Cos}\, x$, achou u_1 ganhou 0,5 pontos

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^{-1} & 0 \\ -x^{-2} & g(x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{\frac{\text{Sen}\, x}{x^2} \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^4}} = -x\,\text{Sen}\, x \Rightarrow u_2' = -x\,\text{Sen}\, x$$

$\Rightarrow u_2 = x\,\text{Cos}\, x - \text{Sen}\, x$, achou u_2 ganhou 0,5 ponto

Logo,

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -\text{Cos}\, x \cdot \frac{1}{x} + (x\,\text{Cos}\, x - \text{Sen}\, x)\frac{1}{x^2} = \frac{-\text{Sen}\, x}{x^2}$$

Escreveu isso ganhou 0,3 pontos.

Questão 4.

Eq. caract. $(r^2+1)^2(r^2-4)=0$

tem raízes

$r = \pm i$ mult 2 $\leftarrow$ (0.1)

$r = \pm 2$ $\leftarrow$ (0.1)

$$y_c = \underbrace{(c_1+c_2x)\cos x}_{(0.2)} + \underbrace{(c_3+c_4x)\operatorname{sen} x}_{(0.2)}$$

$$+ \underbrace{c_5 e^{2x}}_{0.2} + \underbrace{c_6 e^{-2x}}_{0.2}$$

$$y_p = x^s\left((A+Bx)\cos x + (C+Dx)\operatorname{sen} x\right] \leftarrow (0.2)$$

$$+ x^{\bar{s}}\left[E e^{2x}\right] \leftarrow (0.2)$$

$s = 2$ (0.3) p/ evitar duplicação

$\bar{s} = 1$ (0.3) c/ termos em y_c

Questão 5

$yy'' + (y')^2 = 0$

$v(y(x)) = y'(x) \Rightarrow y''(x) = v'(y(x))\,y'(x) = v'v$] 0.5

$y v' v + v^2 = 0$

$y v' + v = 0$] 0.5

$v' + \frac{1}{y} v = 0$

direto ou

$e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$

$\frac{d}{dy}(yv) = 0 \Rightarrow yv = C$ 05

$\Rightarrow y \frac{dy}{dx} = C \Rightarrow \frac{y^2}{2} = Cx + D.$ 05

OU reconhecer que a eq. é:

$(yy')' = 0.$