1 _____

2 _____

3 _____

4 _____

Total _____

INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP
Prova 1 - F 315 A   05/09/2013

RA:__________ Nome:____

1-) Um projétil é disparado com velocidade inicial v_0 e um ângulo de elevação α em um plano inclinado com ângulo de elevação β. Os dois ângulos são medidos com relação à horizontal. Despreze a resistência do ar e considere a aceleração da gravidade g .

a-) Determine a distância, em relação à origem, onde o projétil atinge o plano inclinado. **(1,0)**

b-) Para qual ângulo α o alcance é máximo? **(1,0)**

c-) Qual é o alcance máximo? **(0,5)**

Solução:

a-)

$$x(t) = v_0 t cos\alpha \tag{1}$$

$$y(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t sen\alpha \tag{2}$$

Isolando t(x) e substituindo em y(t):

$$t = \frac{x}{v_0 cos\alpha} \tag{3}$$

$$y(x) = xtan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\alpha} \tag{4}$$

A colisão ocorre em: $x = dcos\beta$ e $y = dsin\beta$, portanto:

$$dsen\beta = dcos\beta tan\alpha - \frac{gd^2cos^2\beta}{2v_0^2cos^2\alpha} \tag{5}$$

$$d\left[sen\beta - cos\beta tan\alpha + \frac{gdcos^2\beta}{2v_0^2cos^2\alpha}\right] = 0 \tag{6}$$

Logo $d = 0$ (não nos interessa) ou:

$$\boxed{d = \frac{2v_0^2 cos\alpha sen(\alpha - \beta)}{gcos^2\beta}} \tag{7}$$

b-) Devemos achar o máximo da função encontrada no item a:

$$\left.\frac{d}{d\alpha}d\right|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \tag{8}$$

$$\left.\frac{2v_0^2}{gcos^2\beta}\frac{d}{d\alpha}(cos\alpha sen(\alpha-\beta))\right|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \tag{9}$$

$$-sen\alpha_0 sen(\alpha_0 - \beta) + cos\alpha_0 cos(\alpha_0 - \beta) = 0 \tag{10}$$

$$cos(2\alpha_0 - \beta) = 0 \Rightarrow 2\alpha_0 - \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}} \tag{11}$$

c-) Substituímos o valor encontrado no item b na expressão encontrada no item a:

$$d_{max} = d\left(\alpha = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{12}$$

Simplificando:

$$\boxed{d_{max} = \frac{v_0^2}{g(1 + sen\beta)}} \tag{13}$$

4-) Uma placa quadrada de lado a, localizada no plano xy, tem seu centro na origem. A parte da placa acima do eixo x tem uma densidade σ por unidade de área, e a metade abaixo do eixo x tem uma densidade 2σ.

a-) Determine a posição do centro de massa. **(0,8)**

b-) Demonstre os momentos de inércia em relação aos eixos x e y, primeiramente para uma placa quadrada homogênea de lado a e densidade σ, e então para a placa não-homogênea do enunciado. **(1,0)**

c-) Determine o momento de inércia em relação ao eixo z e também o momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao z, mas passando pelo centro de massa. **(0,7)**

Solução:

a-) **i) Primeira maneira**

$\boxed{x_{CM} = 0}$ por simetria

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\rho dA = \frac{1}{M}\int_{-a/2}^{a/2} dx \left[\int_0^{a/2} dy\sigma y + \int_{-a/2}^{0} dy(2\sigma)y\right] = -\frac{a^3\sigma}{8M} \tag{14}$$

Mas $M = (2\sigma)a\frac{a}{2} + \sigma a\frac{a}{2} = \frac{3\sigma a^2}{2}$. Portanto:

$$\boxed{y_{CM} = -\frac{a}{12}} \tag{15}$$

ii)Segunda maneira - Teorema de Pappus:

$$\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \left(a\frac{a}{2}2\pi y_c\right) \Rightarrow y_c = \frac{a}{4} \tag{16}$$

A placa superior tem o centroide em $a/4$ e a inferior em $-a/4$. Logo:

$$y_{CM} = \frac{\sigma}{3\sigma}\frac{a}{4} + \frac{2\sigma}{3\sigma}\left(-\frac{a}{4}\right) = \boxed{-\frac{a}{12}} \tag{17}$$

b-)

$$I_{x;hom} = \int r^2 dm = \sigma\int r^2 dA = \sigma\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy y^2 = \boxed{\frac{\sigma a^4}{12}} \tag{18}$$

$$I_{y;hom} = \int r^2 dm = \sigma\int r^2 dA = \sigma\int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dx x^2 = \boxed{\frac{\sigma a^4}{12}} \tag{19}$$

$$I_{x;enunciado} = I_{y;enunciado} = \frac{\sigma a^4}{24} + \frac{(2\sigma)a^4}{24} = \frac{3\sigma a^4}{24} = \boxed{\frac{\sigma a^4}{8}} \tag{20}$$

c-)

Teorema dos eixos perpendiculares:

$$I_z = I_x + I_y = \boxed{\frac{\sigma a^4}{4}} \tag{21}$$

Teorema dos eixos paralelos:

$$I_z = I_{z;CM} + Md^2 \tag{22}$$

Substituindo o valor de I_z, $M = \frac{3\sigma a^2}{2}$ e $d = \frac{a}{12}$:

$$\boxed{I_{z;CM} = \frac{23\sigma a^4}{96}} \tag{23}$$

2-) Uma partícula é projetada verticalmente para cima com velocidade inicial v_0, e sofre ação da força peso, sendo a aceleração da gravidade g, e de uma força de retardo $F_r = -mkv^2$. Considere que ela parte da origem e analise apenas o trecho de movimento da subida.

a-) Escreva a Segunda Lei de Newton para este problema. (0.5)

b-) Encontre a relação entre a velocidade e a posição da partícula. (1.5)

c-) Encontre a altura máxima que o projétil atinge. (0.5)

a) $F_t = m\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow -mg - mkv^2 = m\dfrac{dv}{dt}$

$\Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = -(g + kv^2)$

b) $\dfrac{1}{g+kv^2}\dfrac{dv}{dt} = -1$ Mas $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$

$\Rightarrow \dfrac{v}{g+kv^2}\dfrac{dv}{dx} = -1 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{v}{g+kv^2}\frac{dv}{dx}\,dx = \int -dx + C$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{v}{g+kv^2}\,dv = -x + C \Rightarrow$

$u = g + kv^2 \Rightarrow du = \dfrac{du}{dv}dv = 2kv\,dv$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2k}\displaystyle\int \frac{du}{u} = -x + C \Rightarrow \frac{1}{2k}\ln u = -x + C$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2k}\ln(g+kv^2) = -x + C \Rightarrow \ln(g+kv^2) = -2kx + C'$

$\Rightarrow g + kv^2 = C''e^{-2kx}$

Mas: $v(x=0) = v_0 \Rightarrow g + kv_0^2 = C''$. Portanto

$g + kv^2 = (g + kv_0^2)e^{-2kx}$ $\Rightarrow v = \left[-\dfrac{g}{k} + \left(\dfrac{g}{k} + v_0^2\right)e^{-2kx}\right]^{1/2}$

ou:

$$\frac{g+kv^2}{g+kv_0^2} = e^{-2kx} \Rightarrow x = -\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g+kv^2}{g+kv_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g+kv_0^2}{g+kv^2}\right)$$

c) A altura máxima corresponde ao valor de x quando $v=0$, ou seja:

$$h = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g+kv_0^2}{g}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(1+\frac{kv_0^2}{g}\right)$$ //

Pontuação desta questão
- U(x) correto: 0.5
- gráfico correto: 0.5
- pontos de equilíbrio: 0.5
- estabilidade dos pts equil.: 0.5
- Discussão do movimento: 0.5

3-) Uma partícula está sujeita a uma força:

$$F = -kx + \frac{kx^3}{\alpha^2},$$

onde k e α são constantes, $k > 0$ e $-\infty < x < \infty$.

a-) Determine a energia potencial U(x) e faça um esboço dessa função.

b-) Encontre os pontos de equilíbrio de U(x) e determine a estabilidade de cada um deles.

c-) Discuta o movimento para todos os valores possíveis da energia total.

a) $U = -\int F\,dx = \int kx\,dx - \int k\frac{x^3}{\alpha^2}\,dx$

$\Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\frac{kx^4}{\alpha^2}$

Considerando que:

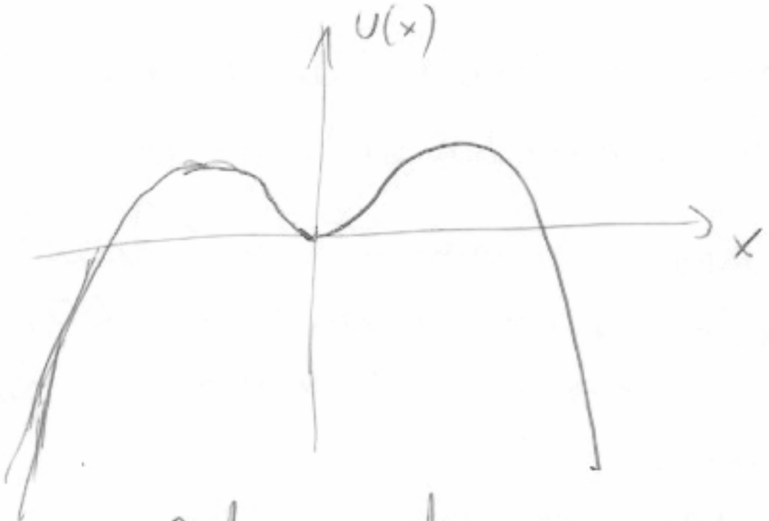
(i) $U(x) = U(-x)$ (função par)

(ii) $U(\pm\infty) = -\infty$

(iii) $U(0) = 0$

(iv) $U(x) \simeq \frac{1}{2}kx^2$ p/ $x \to 0$,

podemos esboçar a função abaixo



b) Ptos de equilíbrio: $\frac{dU}{dx} = 0$, ou $F = 0$

$\frac{dU}{dx} = kx - \frac{kx^3}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow kx\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ x = \pm\alpha \end{cases}$ //

Além disso, $\frac{d^2U}{dx^2} = k - \frac{3kx^2}{\alpha^2} = k\left(1 - \frac{3x^2}{\alpha^2}\right)$. Portanto:

$$\frac{d^2U}{dx^2}(x=0) = k > 0 \quad (\text{Equilíbrio estável})$$

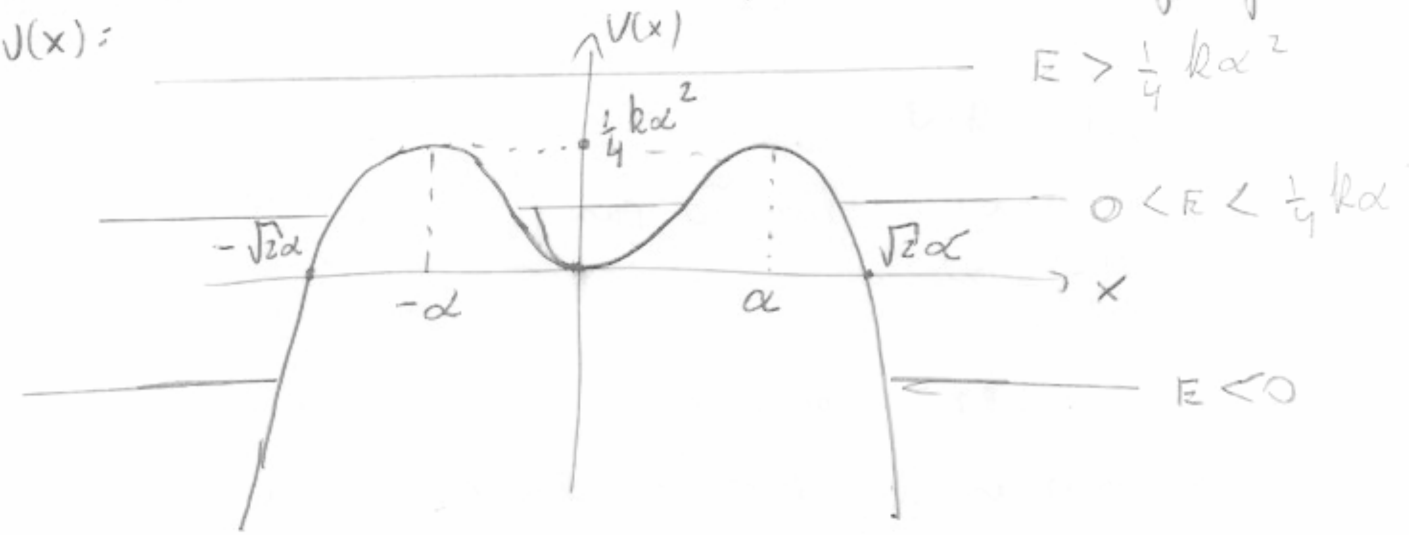
$$\frac{d^2U}{dx^2}(x=\pm\alpha) = -2k < 0 \quad (\text{Equilíbrio instável})$$

Além disso: $U(x=\pm\alpha) = \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{4}k\alpha^2 = \frac{1}{4}k\alpha^2$

Também, os pontos em que $U(x)=0$ são:

$$\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}k\frac{x^4}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}\,\alpha \end{cases}$$

Podemos então elaborar um pouco mais o gráfico de $U(x)$:



ⓒ Podemos separar o movimento em três regiões de energia (Vide linhas horizontais no gráfico acima

(i) $E<0$. Neste caso, o movimento será limitado apenas em uma direção. Se inicialmente $x(0)<0$, então a partícula escapará para $x\to-\infty$, e se $x(0)>0$, a partícula se encaminhará p/ $x\to\infty$.

(ii) $0 < E < \frac{1}{4}kx^2$. Além das situações descritas em (i), a partícula poderá oscilar em torno da origem, se ela se encontrar inicialmente nesta região

(iii) $E > \frac{1}{4}kx^2$. O movimento será ilimitado em ambos os sentidos.