1 _____

INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP

2 _____

Prova 3 - F 315 A   28/11/2013

3 _____

RA:__________ Nome:______________________________________

4 _____

Total _____

1-) Considere a geodésica (menor caminho entre 2 pontos) em um cilindro reto. Encontre a equação da geodésica que liga os pontos $(x_1, y_1, z_1) = (1, 0, 0)$ e $(x_2, y_2, z_2) = (0, 1, 1)$, sabendo que o eixo de simetria do cilindro é o eixo z.

Observação: A reposta pode ser dada no sistema de coordenadas mais conveniente, mas deverá especificar **todas** coordenadas envolvidas.

Solução:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1}$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho cos\theta \quad \rightarrow \quad dx = -\rho sin\theta d\theta \tag{2}$$
$$y = \rho sin\theta \quad \rightarrow \quad dy = \rho cos\theta d\theta \tag{3}$$
$$z = z \quad \rightarrow \quad dz = dz \tag{4}$$

$$S = \int dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sqrt{\rho^2 (sin\theta)^2 + \rho^2 (cos\theta)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sqrt{\rho^2 + z'^2}, \tag{5}$$

com $z' = \frac{dz}{d\theta}$. Assim identificamos $f = \sqrt{\rho^2 + z'^2}$. Calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial f}{\partial z'} = 0 \rightarrow \frac{d}{d\theta}\left[\frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}\right] = 0 \tag{7}$$

$$\frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = C, \text{ constante} \tag{8}$$

Quadrando e rearranjando os termos:

$$z'^2 = \frac{C^2}{1 - C^2}\rho^2, \tag{9}$$

lembrando que ρ é o raio do cilindro (constante). Podemos tirar a raiz e integrar em θ. O resultado é: $z = a\theta + b$, onde a e b são novas constantes. Para determinar a e b precisamos das coordenadas dos pontos em coordenadas cilíndricas:

$$(x_1, y_1, z_1) = (1, 0, 0) \quad \rightarrow \quad (\rho_1 = 1, \theta_1 = 0, z_1 = 0) \tag{10}$$
$$(x_2, y_2, z_2) = (0, 1, 1) \quad \rightarrow \quad (\rho_2 = 1, \theta_2 = \pi/2, z_2 = 1) \tag{11}$$

Logo $z(\theta = 0) = 0$ e $z(\theta = \pi/2) = 1$, o que implica em $a = 2/\pi$ e $b = 0$.

Resposta: As equações que descrevem a geodésica em coordenadas cilíndricas são:

$$\boxed{z = \frac{2}{\pi}\theta} \tag{12}$$

$$\boxed{\rho = 1} \tag{13}$$

2-) Um pêndulo duplo consiste em dois pêndulos simples: um preso em um apoio fixo e o outro preso no pêndulo anterior. Considere que os dois pêndulos se movem no mesmo plano, possuem mesma massa m e comprimento l. Encontre as equações de Lagrange para esse sistema, **sem aproximações**.

Solução:

O movimento se dá em um plano, então temos 2 coordenadas para descrever cada massa, (x_1, y_1) e (x_2, y_2). No entanto o comprimento dos pêndulos é constante, logo um ângulo basta para descrever cada pêndulo.

$$\begin{aligned}
x_1 &= lcos\phi_1 && (14)\\
y_1 &= lsin\phi_1 && (15)\\
x_2 &= x_1 + lcos\phi_2 = lcos\phi_1 + lcos\phi_2 && (16)\\
y_2 &= y_1 + lsin\phi_2 = lsin\phi_1 + lsin\phi_2 && (17)\\
& && (18)
\end{aligned}$$

(Essa é uma possível orientação dos eixos, não é a única!)

Energia cinética: $T = \frac{m}{2}(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2)$

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= -lsin\phi_1\dot{\phi_1} && (19)\\
\dot{y_1} &= lcos\phi_1\dot{\phi_1} && (20)\\
\dot{x_2} &= -lsin\phi_1\dot{\phi_1} - lsin\phi_2\dot{\phi_2} && (21)\\
\dot{y_2} &= lcos\phi_1\dot{\phi_1} + lcos\phi_2\dot{\phi_2} && (22)\\
& && (23)
\end{aligned}$$

$$T = \frac{ml^2}{2}(2\dot{\phi_1}^2 + \dot{\phi_2}^2 + 2\dot{\phi_1}\dot{\phi_2}cos(\phi_1 - \phi_2)) \quad (24)$$

Energia potencial: $U = -mgx_1 - mgx_2 = -mgl(2cos\phi_1 + cos\phi_2)$

$$L = T - U = \frac{ml^2}{2}(2\dot{\phi_1}^2 + \dot{\phi_2}^2 + 2\dot{\phi_1}\dot{\phi_2}cos(\phi_1 - \phi_2)) + mgl(2cos\phi_1 + cos\phi_2) \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \phi_1} &= -ml^2\dot{\phi_1}\dot{\phi_2}sin(\phi_1 - \phi_2) - mgl2sin\phi_1 && (26)\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi_1}} &= 2ml^2\dot{\phi_1} + ml^2\dot{\phi_2}cos(\phi_1 - \phi_2) && (27)\\
\frac{\partial L}{\partial \phi_2} &= ml^2\dot{\phi_1}\dot{\phi_2}sin(\phi_1 - \phi_2) - mglsin\phi_2 && (28)\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi_2}} &= ml^2\dot{\phi_2} + ml^2\dot{\phi_1}cos(\phi_1 - \phi_2) && (29)
\end{aligned}$$

As equações de Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \phi_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi_1}} &= 0 && (30)\\
\frac{\partial L}{\partial \phi_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi_2}} &= 0 && (31)
\end{aligned}$$

A primeira equação:

$$-ml^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 sin(\phi_1-\phi_2) - mgl2sin\phi_1 - 2ml^2\ddot{\phi}_1 - ml^2\frac{d}{dt}\Big(\dot{\phi}_2 cos(\phi_1-\phi_2)\Big) = 0. \tag{32}$$

Devemos tomar cuidado ao calcular a derivada temporal, pois ϕ_1 e ϕ_2 são funções de t:

$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{\phi}_2 cos(\phi_1-\phi_2)\Big) = \ddot{\phi}_2 cos(\phi_1-\phi_2) - \dot{\phi}_2 sin(\phi_1-\phi_2)(\dot{\phi}_1-\dot{\phi}_2) \tag{33}$$

$$-l\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_1-\phi_2) - 2g\sin\phi_1 - 2l\ddot{\phi}_1 - l\ddot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2) + l\dot{\phi}_2\sin(\phi_1-\phi_2)(\dot{\phi}_1-\dot{\phi}_2) = 0$$

Finalmente:

$$\boxed{2\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2) + \dot{\phi}_2^2 sin(\phi_1-\phi_2) + \frac{2g}{l}\sin\phi_1 = 0}$$

Para segunda equação devemos repetir o mesmo procedimento:

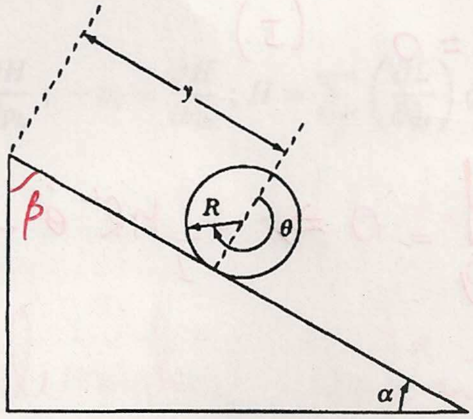
$$ml^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_1-\phi_2) - mgl\sin\phi_2 - ml^2\ddot{\phi}_2 - ml^2\tfrac{d}{dt}\Big[\dot{\phi}_1\cos(\phi_1-\phi_2)\Big] = 0$$
$$ml^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_1-\phi_2) - mgl\sin\phi_2 - ml^2\ddot{\phi}_2 - ml^2[\ddot{\phi}_1\cos(\phi_1-\phi_2) - \dot{\phi}_1\sin(\phi_1-\phi_2)(\dot{\phi}_1-\dot{\phi}_2)] = 0$$

$$g\sin\phi_2 + l\ddot{\phi}_2 + l\ddot{\phi}_1\cos(\phi_1-\phi_2) - l\dot{\phi}_1^2\sin(\phi_1-\phi_2) = 0$$

Logo:

$$\boxed{\ddot{\phi}_2 + \ddot{\phi}_1\cos(\phi_1-\phi_2) - \dot{\phi}_1^2\sin(\phi_1-\phi_2) + \frac{g}{l}\sin\phi_2 = 0}$$

3-) Considere um disco de raio R e massa M descendo um plano de inclinação α **sem deslizar**. Utilize y e θ tais quais definidos na figura.



a-) Escreva a equação de vínculo em termos das coordenadas generalizadas. (0,2)
b-) Escreva o Lagrangeano do sistema. (1,0)
c-) Obtenha a(s) força(s) generalizada(s) de vínculo. (1,0)
d-) Qual é o significado físico da(s) força(s) obtidas no item c? (0,3)
Dado:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k(t)\frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0$$

(a) Descer sem deslizar: $y = R\theta \Rightarrow f = y - R\theta = 0$

(b) $L = T - U$

$$T = T_{rot} + T_{trans} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2$$

Momento de inércia do disco:

$$I = \int r^2\, dm = \int \sigma r^2\, da$$

$$= \sigma \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r\, dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

Portanto: $T = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2$

$$U = -Mgy\cos\beta = -Mgy\sin\alpha$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + Mgy\sin\alpha$$

(c) $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$Mg\sin\alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0$ (I)

$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - \lambda R = 0$ (II)

$y - R\theta = 0$ (III)

Substituindo (III) em (II): $\frac{1}{2}MR\ddot{y} + \lambda R = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}M\ddot{y}$ (IV)

Substituindo (IV) em (I): $Mg\sin\alpha - M\ddot{y} - \frac{1}{2}M\ddot{y} = 0$

$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{2}{3}Mg\sin\alpha$

Portanto: $\lambda = -\frac{1}{2}M\ddot{y} = -\frac{1}{3}Mg\sin\alpha$

$Q_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = -\frac{1}{3}Mg\sin\alpha$

$Q_\theta = \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = -R\lambda = \frac{1}{3}MgR\sin\alpha$

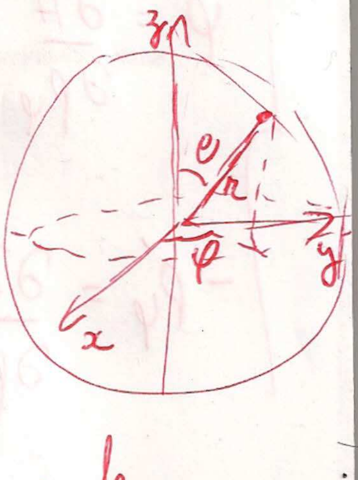
(d) A força que mantém o vínculo ($y - R\theta = 0$) é a força de atrito entre o disco e o plano inclinado. Portanto Q_y é a força de atrito e Q_θ é o torque produzido por esta força.

4-) Uma partícula de massa m, que se movimenta no espaço tridimensional, está sujeita à atração de uma força central de módulo k/r^2, onde k é constante. Encontre as equações de movimento de Hamilton.

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \; ; \; -\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \; ; \; H = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \dot{q}_j - L$$

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \qquad U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = k\int \frac{1}{r^2}\,dr = -k/r$$

Usando coordenadas esféricas:



$$x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi \; , \; y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \; , \; z = r\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\,\text{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\,\text{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + k/r$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \; ; \; p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \; ; \; p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\,\text{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}$$

Transformação escleronômica:

$$H = T + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\,\text{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - k/r$$

$$\Rightarrow H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\,\text{sen}^2\theta} - k/r$$

Eq. Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m} & \text{(I)} \\ -\dot{p}_r = \dfrac{\partial H}{\partial r} = -\dfrac{p_\theta^2}{mr^3} - \dfrac{p_\varphi^2}{mr^3\,\text{sen}^2\theta} + \dfrac{k}{r^2} & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} & (I') \\ -\dot{p}_\theta = \dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -\dfrac{p_\varphi^2}{mr^2}\dfrac{\cos\theta}{\sin^3\theta} & (II') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2\theta} & (I'') \\ -\dot{p}_\varphi = \dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 & (II'') \end{cases}$$