EM506 – Resistência dos Materiais II – Gabarito do Exame

Questão única: Uma passarela de madeira para pedestres pode ser modelada como mostrado na Figura 1. Um carregamento uniformemente distribuído q_0 é aplicado. As peças A e B são feitas de madeiras diferentes, mas têm a mesma seção transversal. A peça B é feita de duas partes coladas da mesma madeira, com uma cola aplicada a 45º. Para este problema, determine:

a) A reação de apoio no vínculo A (1,0 ponto);
b) As tensões normais e de cisalhamento atuando no ponto P(x=3L/4, y=H/4) (1,5 pontos);
c) As tensões normais e de cisalhamento mínimas que a cola deve suportar no ponto P, segundo a orientação do plano de cola. Desenhe o Círculo de Mohr deste ponto (1,5 pontos);
d) Considerando que a peça B é inteiriça (não colada), determine a rotação da passarela no vínculo A. Use a técnica de Associação de Sistemas (3,0 pontos);
e) Resolva o item anterior usando o método de energia que achar conveniente (3,0 pontos).

Substitua valores numéricos somente no item (c). Resolva os demais itens analiticamente.

Dados: Módulo de elasticidade e momento de inércia das peças A e B: E_1 e E_2 e I_{ZZ1} e I_{ZZ2}, respectivamente; $q_0 = 10$ kN/m; L = 10 m; B = 0,5 m; H = 0,4 m.

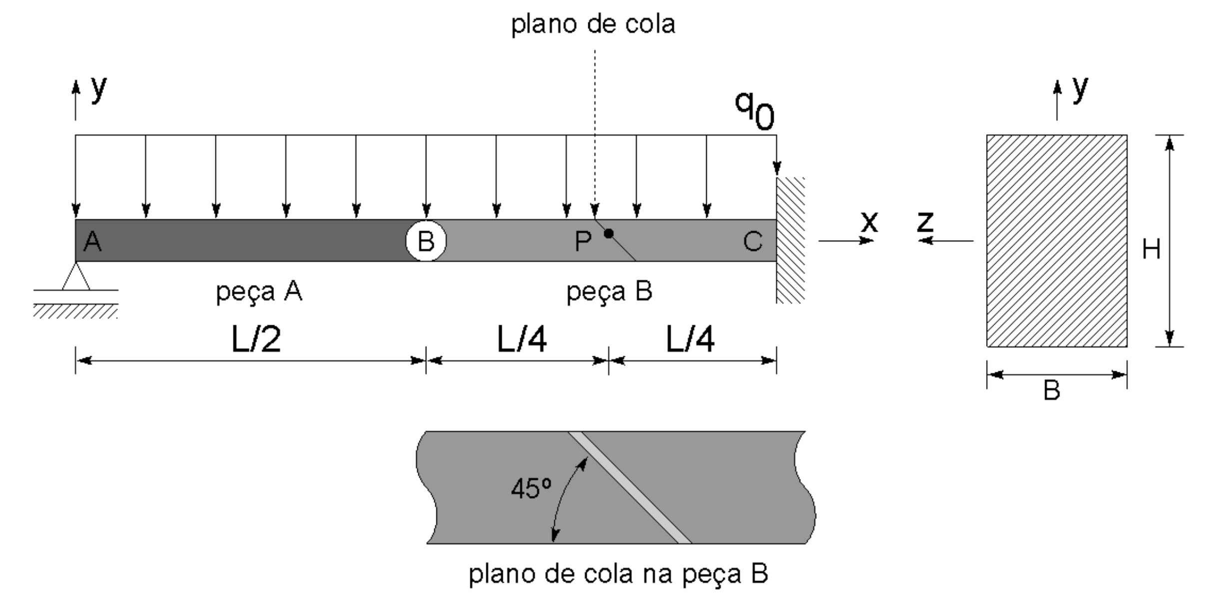


Figura 1: Modelo de passarela como viga, seção transversal e plano inclinado de cola.

Solução

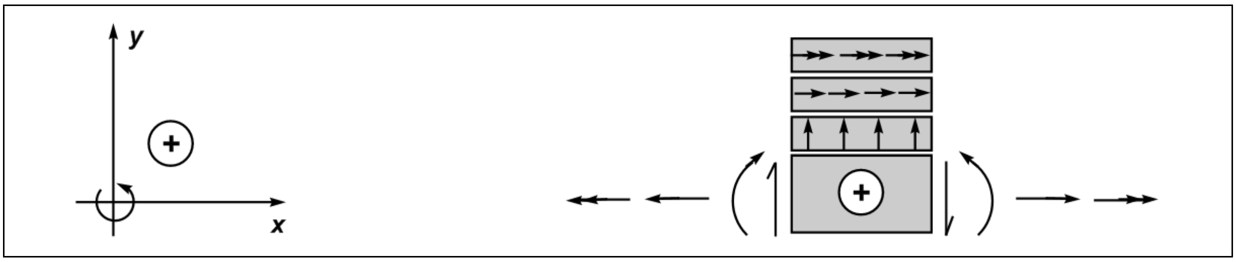
As tensões atuantes na viga, na orientação dos eixos coordenados, são dadas por:

$$\sigma_{XX}(x,y) = -\frac{M_Z(x)}{I_{ZZ}(x)} \cdot y \qquad (1)$$

$$\sigma_{XY}(x,y) = -\frac{V_Y(x)}{I_{ZZ}(x)} \cdot \frac{Q_{Zp}(y)}{B(y)} \tag{2}$$

É necessário, portanto, determinar as expressões de esforço cortante e momento fletor atuando nesta viga.

a) Eixos e convenções



b) Equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2} M_Z(x) = q(x) \tag{3}$$

c) Equação de carregamento

$$q(x) = -q_0 \tag{4}$$

d) Condições de contorno e restrição

$$M_Z(x=0) = 0 \tag{5}$$
$$M_Z(x = L/2) = 0 \tag{6}$$

e) Integração da equação diferencial

Substitui-se (5) em (4) para se obter:

$$\frac{d^2}{dx^2} M_Z(x) = -q_0$$
$$\downarrow \int$$
$$\frac{d^2}{dx^2} M_Z(x) = Vy(x) = -q_0 x + C_1 \tag{7}$$
$$\downarrow \int$$
$$M_Z(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2 \tag{8}$$

f) Determinação das constantes de integração

Substituindo (5) em (8), tem-se:

$$M_Z(x=0) = -\frac{1}{2}q_0 0^2 + C_1 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \qquad (9)$$

Substituindo (6) em (8), tem-se:

$$M_Z(x={}^L\!/_2) = -\frac{1}{2}q_0\left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1\frac{L}{2} + \cancel{C_2} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}q_0 L \qquad (10)$$

g) Equações finais

Substituindo (9) e (10) em (7) e (8), tem-se:

$$V_Y(x) = -q_0 x + \frac{1}{4}q_0 L \qquad (11)$$

$$M_Z(x) = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + \frac{1}{4}q_0 L\cdot x \qquad (12)$$

A reação de apoio no vínculo A é dada pela Equação (11).

$$V_Y(x=0) = -q_0\cdot 0 + \frac{1}{4}q_0 L \Rightarrow \boxed{V_{YA} = \frac{1}{4}q_0 L} \qquad (11b)$$

h) Valores no ponto

No ponto de cola, de coordenadas x=3L/4, y=H/4, tem-se:

$$V_Y(x={}^{3L}\!/_4) = -q_0\left(\frac{3}{4}L\right) + \frac{1}{4}q_0 L = -\frac{1}{2}q_0 L \qquad (13)$$

$$M_Z(x={}^{3L}\!/_4) = -\frac{1}{2}q_0\left(\frac{3}{4}L\right)^2 + \frac{1}{4}q_0 L\left(\frac{3}{4}L\right) = -\frac{3}{32}q_0 L^2 \qquad (14)$$

g) Propriedades geométricas

O momento estático parcial de área no ponto y=H/4 é calculado com ajuda da Figura 1b.

$$\mathrm{Q}_{Zp}\left(\mathrm{y}={}^{\mathrm{H}}\!/_4\right) = \mathrm{A_p y_p} = \left(\frac{\mathrm{H}}{4}\mathrm{B}\right)\left(\frac{3}{8}\mathrm{H}\right) = \frac{3}{32}\mathrm{BH}^2 \qquad (15)$$

O momento de inércia da seção transversal retangular é dado por:

$$I_{ZZ}(x) = \frac{1}{12}BH^3 \tag{16}$$

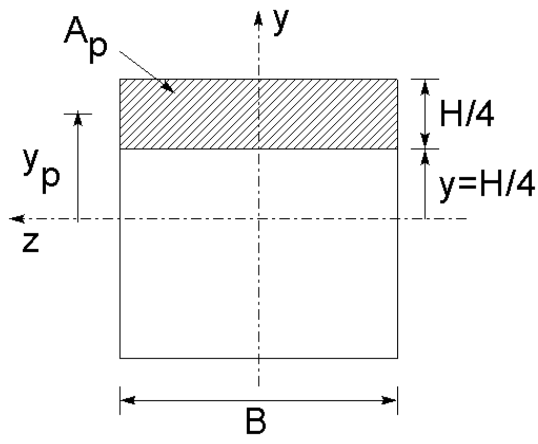


Figura 1b: Dados para calcular Q_{Zp}.

h) Tensões nos planos coordenados

Das Equações (1) e (2), as tensões no ponto x=3L/4, y=H/4 com a orientação dos planos coordenados são:

$$\sigma_{XX}(P) = -\frac{M_Z\left(x = {}^{3L}\!/_{4}\right)}{I_{ZZ}\left(x = {}^{3L}\!/_{4}\right)}\cdot\left(\frac{H}{4}\right) = -\frac{\left(-\frac{3}{32}q_0L^2\right)}{\left(\frac{1}{12}BH^3\right)}\cdot\left(\frac{H}{4}\right) \Rightarrow \boxed{\sigma_{XXP} = \frac{9}{32}\frac{q_0L^2}{BH^2}} \tag{17}$$

$$\sigma_{XY}(P) = -\frac{V_Y\left(x = {}^{3L}\!/_{4}\right)}{I_{ZZ}\left(x = {}^{3L}\!/_{4}\right)}\cdot\frac{Q_{Zp}\left(y = {}^{H}\!/_{4}\right)}{B\left(y = {}^{H}\!/_{4}\right)} = -\frac{\left(-\frac{1}{2}q_0L\right)}{\left(\frac{1}{12}BH^3\right)}\frac{\left(\frac{3}{32}BH^2\right)}{B} \Rightarrow \boxed{\sigma_{XYP} = \frac{18}{32}\frac{q_0L}{BH}} \tag{18}$$

i) Círculo de Mohr

A viga não está sujeita a tensões normais em *y*, isto é, $\sigma_{YY} = 0$. Em valores numéricos, as tensões atuando no ponto x=3L/4, y=H/4 são:

$$\sigma_{XX}(x = 7{,}5\,\text{m}, y = 0{,}1\,\text{m}) = 3{,}516\cdot 10^6\ \text{Pa} \tag{19}$$

$$\sigma_{XY}(x = 7{,}5\,\text{m}, y = 0{,}1\,\text{m}) = 0{,}281\cdot 10^6\ \text{Pa} \tag{20}$$

$$\sigma_{YY}(x = 7{,}5\,\text{m}, y = 0{,}1\,\text{m}) = 0 \tag{21}$$

Parâmetros do Círculo:

$$x_0 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} = 1{,}758\cdot 10^6\ \text{Pa} \tag{22}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2}\right)^2 + \sigma_{XY}^2} = 1,78 \cdot 10^6 \text{ Pa} \tag{23}$$

Tensões principais:

$$\sigma_1 = x_0 + R = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} = 3,538 \cdot 10^6 \text{ Pa} \tag{24}$$

$$\sigma_2 = x_0 + R = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} = -0,0224 \cdot 10^6 \text{ Pa} \tag{25}$$

O Círculo de Mohr com esses parâmetros é mostrado na Figura 1c. O ponto A representa o plano orientado de acordo com os eixos coordenados, enquanto o ponto C representa o plano de cola, a 45º do plano A (ver Figura 1d).

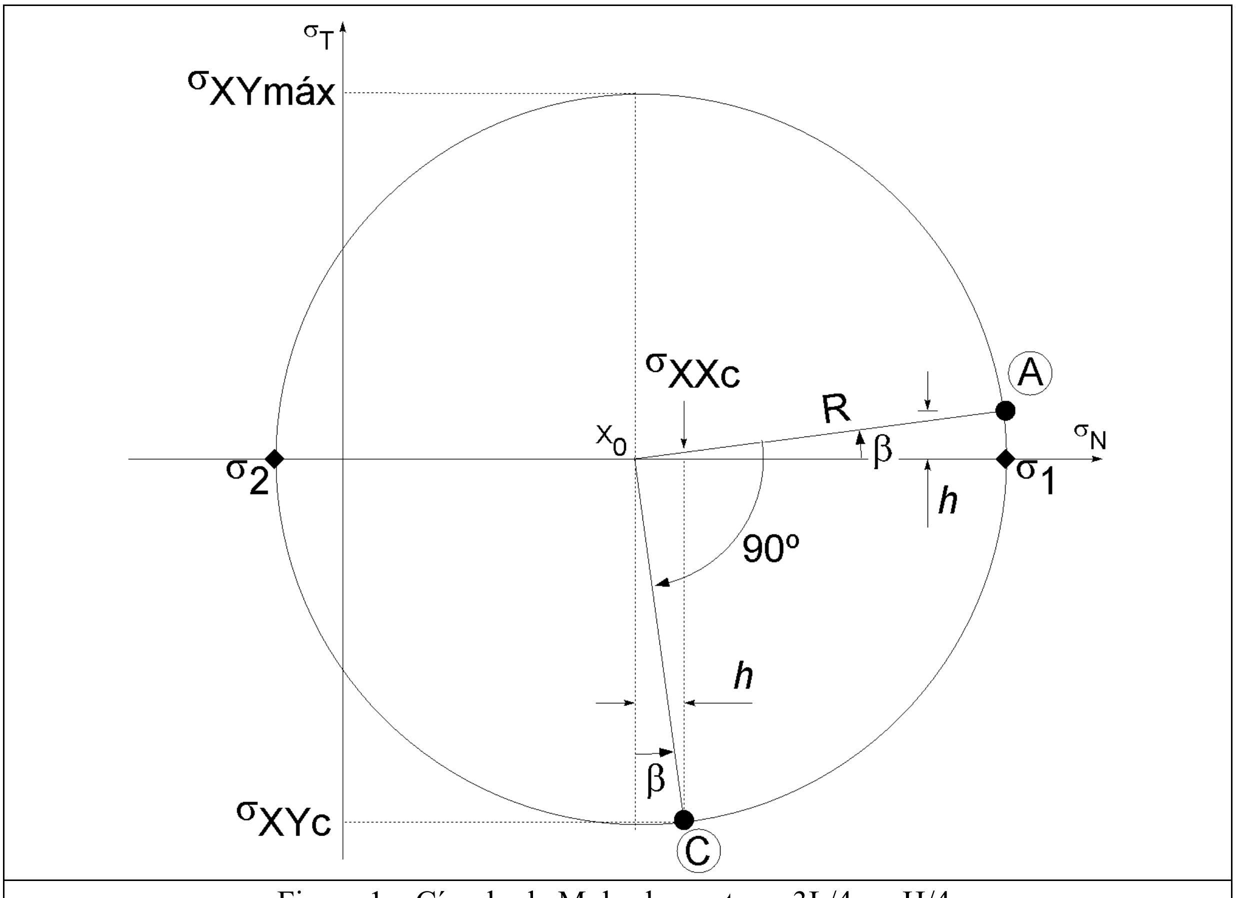


Figura 1c: Círculo de Mohr do ponto x=3L/4, y=H/4.

Com ajuda da Figura 1c, tem-se:

$$h = \sigma_{XY\,A} = \sigma_{XY}\left(x = 7,5\,\text{m}, y = 0,1\,\text{m}\right) = 0,281 \cdot 10^6 \text{ Pa} \tag{26}$$

$$\sigma_{XX\,\text{Cola}} = x_0 + h = 1,758 \cdot 10^6 \text{ Pa} + 0,281 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 2,04 \cdot 10^6 \text{ Pa} \tag{27}$$

$$\sigma_{XY\,Cola}^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow \sigma_{XY\,Cola} = 1{,}758 \cdot 10^6\ \text{Pa}\left(= x_0\right) \qquad (28)$$

Assim, é necessário que a cola no ponto P (x=3L/4, y=H/4) resista no mínimo à tensão normal de 2,04 MPa e à tensão de cisalhamento de 1,758 MPa.

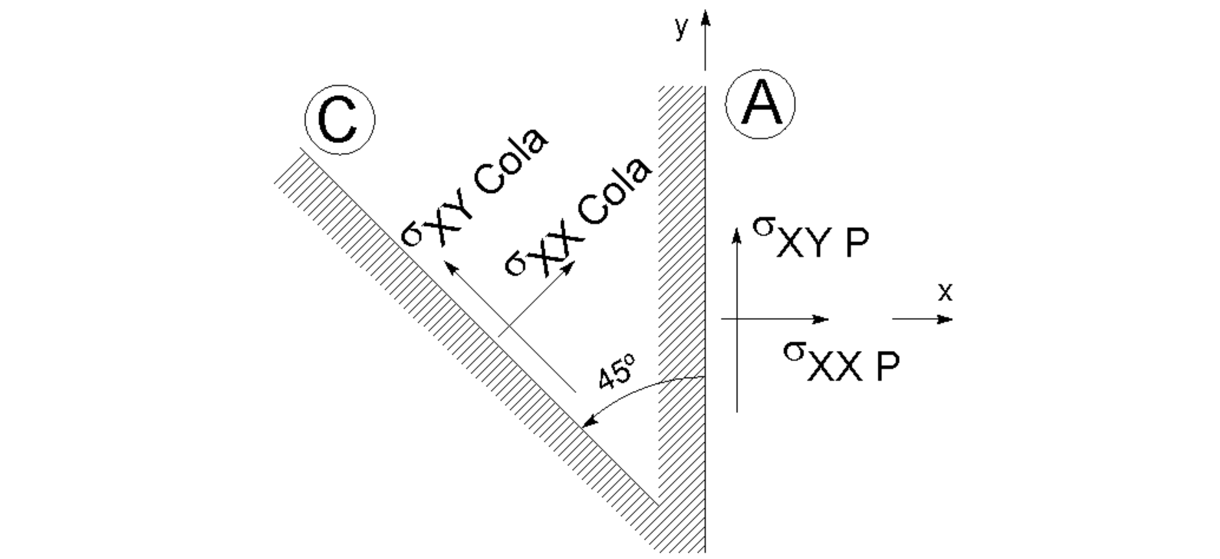


Figura 1d: Orientação do plano de cola em relação aos eixos coordenados.

j) Determinando a rotação do ponto A por Associação de Sistemas

j1) Dissociação dos sistemas

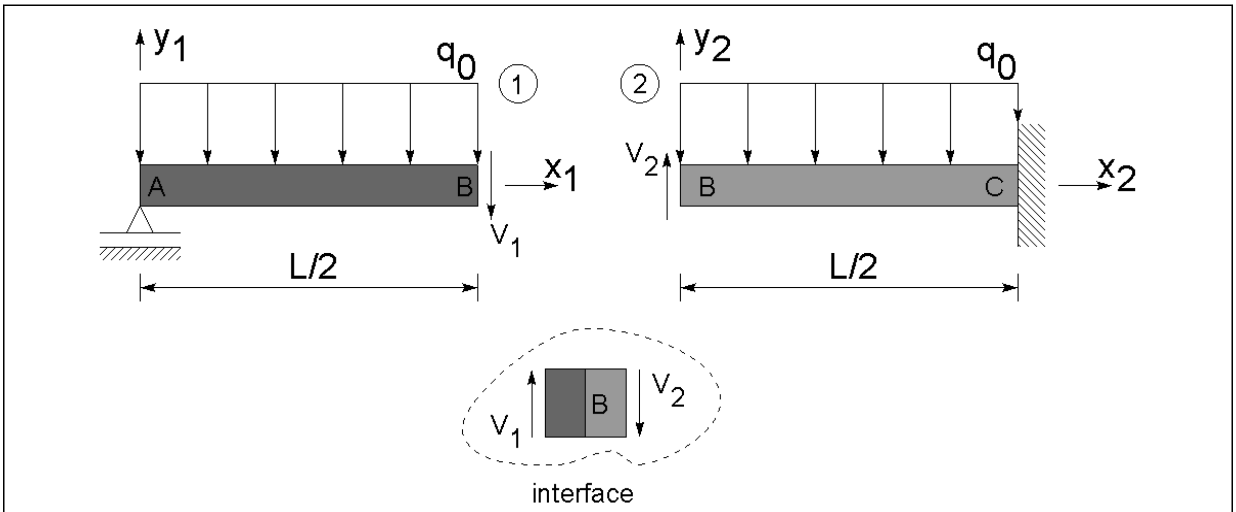


Figura 1e: Dissociação dos sistemas.

j2) Equilíbrio na interface

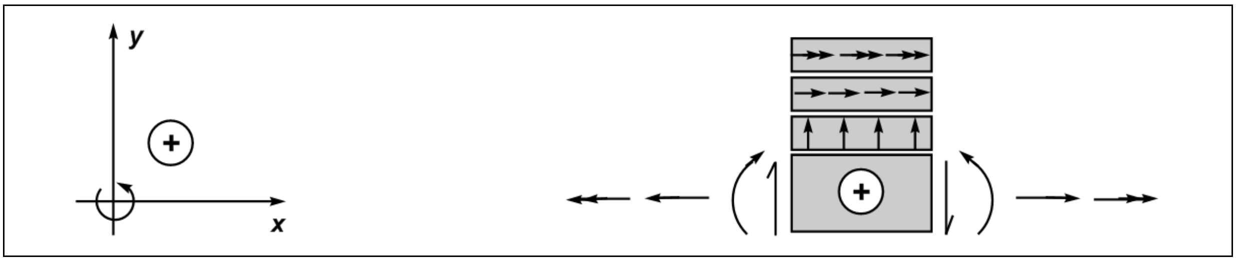
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow +V_1 - V_2 = 0 \qquad (29)$$

j3) Compatibilidade cinemática

$$v_{1B} = v_1\left(x_1 = \tfrac{L}{2}\right) = v_2\left(x_2 = 0\right) = v_{2B} \tag{30}$$

k) Resolvendo o problema (1) – peça A).

k1) eixos e convenção de sinais da Resistência dos Materiais



k2) equação diferencial

$$E_1 I_{ZZ1} \frac{d^4}{dx_1^4} v_1\left(x_1\right) = +q_1(x_1) \tag{31}$$

k3) equação de carregamento

$$q_1(x_1) = -q_0 \tag{32}$$

k4) condições de contorno

$$v_1\left(x_1 = 0\right) = 0 \tag{33}$$
$$M_{Z1}\left(x_1 = 0\right) = 0 \tag{34}$$
$$V_{Y1}\left(x_1 = \tfrac{L}{2}\right) = +V_1 \tag{35}$$
$$M_{Z1}\left(x_1 = \tfrac{L}{2}\right) = 0 \tag{36}$$

k5) integração da equação diferencial

$$E_1 I_{ZZ1} \frac{d^4}{dx_1^4} v_1\left(x_1\right) = -q_0 \tag{37}$$

$\downarrow \int$

$$E_1 I_{ZZ1} \frac{d^3}{dx_1^3} v_1\left(x_1\right) = V_{Y1}\left(x_1\right) = -q_0 x_1 + C_1 \tag{38}$$

$\downarrow \int$

$$E_1 I_{ZZ1} \frac{d^2}{dx_1^2} v_1\left(x_1\right) = M_{Z1}\left(x_1\right) = -\frac{1}{2} q_0 x_1^2 + C_1 x_1 + C_2 \tag{39}$$

$\downarrow \int$

$$E_1 I_{ZZ1} \frac{d}{dx_1} v_1(x_1) = E_1 I_{ZZ1} \theta_{Z1}(x_1) = -\frac{1}{6} q_0 x_1^3 + \frac{1}{2} C_1 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3 \tag{40}$$

$\downarrow \int$

$$E_1 I_{ZZ1} v_1(x_1) = -\frac{1}{24} q_0 x_1^4 + \frac{1}{6} C_1 x_1^3 + \frac{1}{2} C_2 x_1^2 + C_3 x_1 + C_4 \tag{41}$$

k6) determinação das constantes de integração

Substituindo-se (33) em (41), tem-se:

$$v_1(x_1 = 0) = C_4 = 0 \tag{42}$$

Substituindo-se (34) em (39), tem-se:

$$M_{Z1}(x_1 = 0) = C_2 = 0 \tag{43}$$

Substituindo-se (35) em (38), tem-se:

$$V_{Y1}\left(x_1 = \tfrac{L}{2}\right) = -q_0 \tfrac{L}{2} + C_1 = +V_1$$

$$C_1 = +V_1 + \frac{1}{2} q_0 L \tag{44}$$

Substituindo-se (36) em (39), tem-se:

$$M_{Z1}\left(x_1 = \tfrac{L}{2}\right) = -\frac{1}{2} q_0 \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(V_1 + \frac{1}{2} q_0 L\right)\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$V_1 = -\frac{1}{4} q_0 L \tag{45}$$

$$\therefore C_1 = +\frac{1}{4} q_0 L \tag{46}$$

<u>Observação:</u> como a constante de integração C_1 representa o valor do esforço cortante quando x=0, C_1 é a reação de apoio no vínculo A. Assim, o resultado da Eq. (46) é confirmado pelo que já tinha sido determinado na Eq. (11b).

k7) equações finais

$$V_{Y1}(x_1) = -q_0 x_1 + \frac{1}{4} q_0 L \tag{46}$$

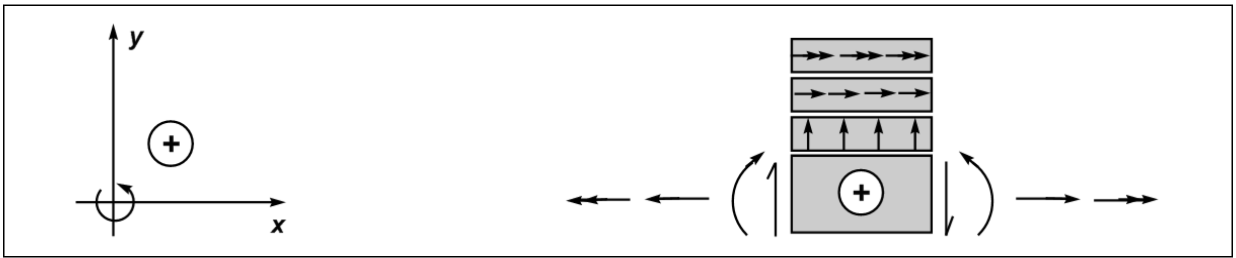
$$M_{Z1}(x_1) = -\frac{1}{2} q_0 x_1^2 + \frac{1}{4} q_0 L x_1 \tag{47}$$

$$E_1 I_{ZZ1} \theta_{Z1}(x_1) = -\frac{1}{6} q_0 x_1^3 + \frac{1}{8} q_0 L x_1^2 + C_3 \quad (48)$$

$$E_1 I_{ZZ1} v_1(x_1) = -\frac{1}{24} q_0 x_1^4 + \frac{1}{24} q_0 L x_1^3 + C_3 x_1 \quad (49)$$

l) Resolvendo o problema (2) (peça B)

m1) eixos e convenção de sinais da Resistência dos Materiais



m2) equação diferencial

$$E_2 I_{ZZ2} \frac{d^4}{dx_2^4} v_2(x_2) = +q_2(x_2) \quad (50)$$

m3) equação de carregamento

$$q_2(x_2) = -q_0 \quad (51)$$

m4) condições de contorno

$$V_{Y2}(x_2 = 0) = +V_2 \quad (52)$$

$$M_{Z2}(x_2 = 0) = 0 \quad (53)$$

$$v_2\left(x_2 = \tfrac{L}{2}\right) = 0 \quad (54)$$

$$\theta_{Z2}\left(x_2 = \tfrac{L}{2}\right) = 0 \quad (55)$$

m5) integração da equação diferencial

$$E_2 I_{ZZ2} \frac{d^4}{dx_2^4} v_2(x_2) = -q_0 \quad (56)$$

$\downarrow \int$

$$E_2 I_{ZZ2} \frac{d^3}{dx_2^3} v_2(x_2) = V_{Y2}(x_2) = -q_0 x_2 + D_1 \quad (57)$$

$\downarrow \int$

$$E_2I_{ZZ2}\frac{d^2}{dx_2^2}v_2\left(x_2\right)=M_{Z2}\left(x_2\right)=-\frac{1}{2}q_0x_2^2+D_1x_2+D_2 \tag{58}$$

$\downarrow\int$

$$E_2I_{ZZ2}\frac{d}{dx_2}v_2\left(x_2\right)=E_2I_{ZZ2}\theta_{Z2}\left(x_2\right)=-\frac{1}{6}q_0x_2^3+\frac{1}{2}D_1x_2^2+D_2x_2+D_3 \tag{59}$$

$\downarrow\int$

$$E_2I_{ZZ2}v_2\left(x_2\right)=-\frac{1}{24}q_0x_2^4+\frac{1}{6}D_1x_2^3+\frac{1}{2}D_2x_2^2+D_3x_2+D_4 \tag{60}$$

m6) determinação das constantes de integração

Substituindo-se (53) em (58), tem-se:

$$M_{Z2}\left(x_2=0\right)=D_2=0 \tag{61}$$

Substituindo-se (52) em (57), tem-se:

$$V_{Y2}\left(x_2=0\right)=D_1=+V_2 \tag{62}$$

Substituindo-se (54) em (60), tem-se:

$$v_2\left(x_2=\tfrac{L}{2}\right)=0\Rightarrow-\frac{1}{24}q_0\left(\frac{L}{2}\right)^4+\frac{1}{6}V_2\left(\frac{L}{2}\right)^3+D_3\left(\frac{L}{2}\right)+D_4=0$$

$$-\frac{1}{384}q_0L^4+\frac{1}{48}V_2L^3+\frac{1}{2}D_3L+D_4=0 \tag{63}$$

Substituindo-se (55) em (59), tem-se:

$$E_2I_{ZZ2}\theta_{Z2}\left(x_2=\tfrac{L}{2}\right)=-\frac{1}{6}q_0\left(\frac{L}{2}\right)^3+\frac{1}{2}V_2\left(\frac{L}{2}\right)^2+D_3=0$$

$$D_3=\frac{1}{48}q_0L^3-\frac{1}{8}V_2L^2 \tag{64}$$

Assim, de (64) em (63), tem-se:

$$D_4=-\frac{1}{128}q_0L^4+\frac{1}{24}V_2L^3 \tag{65}$$

m7) equações finais

$$V_{Y2}\left(x_2\right)=-q_0x_2+V_2 \tag{66}$$

$$M_{Z2}\left(x_2\right)=-\frac{1}{2}q_0x_2^2+V_2x_2 \tag{67}$$

$$E_2I_{ZZ2}\theta_{Z2}\left(x_2\right)=-\frac{1}{6}q_0x_2^3+\frac{1}{2}V_2x_2^2+\frac{1}{48}q_0L^3-\frac{1}{8}V_2L^2 \tag{68}$$

$$E_2I_{ZZ2}v_2\left(x_2\right)=-\frac{1}{24}q_0x_2^4+\frac{1}{6}V_2x_2^3+\left(\frac{1}{48}q_0L^3-\frac{1}{8}V_2L^2\right)x_2-\frac{1}{128}q_0L^4+\frac{1}{24}V_2L^3 \tag{69}$$

n) Resolvendo a associação

Do equilíbrio na interface, Eq. (29), e da Eq. (45), tem-se que:

$$V_2=V_1=-\frac{1}{4}q_0L \tag{70}$$

Aplicando a compatibilidade cinemática deste problema, Eq. (30), às Eqs. (49) e (69), tem-se ainda:

$$v_{1B}=v_1\left(x_1=\tfrac{L}{2}\right)=\frac{1}{E_1I_{ZZ1}}\left\{-\frac{1}{24}q_0\left(\frac{L}{2}\right)^4+\frac{1}{24}q_0L\left(\frac{L}{2}\right)^3+C_3\left(\frac{L}{2}\right)\right\}$$

$$v_{1B}=\frac{1}{E_1I_{ZZ1}}\left\{\frac{1}{384}q_0L^4+\frac{1}{2}C_3L\right\} \tag{71}$$

$$v_{2B}=v_2\left(x_2=0\right)=\frac{1}{E_2I_{ZZ2}}\left\{-\frac{1}{128}q_0L^4+\frac{1}{24}V_2L^3\right\} \tag{72}$$

Substituindo (70) em (72), tem-se:

$$v_{2B}=\frac{1}{E_2I_{ZZ2}}\left\{-\frac{7}{384}q_0L^4\right\} \tag{73}$$

Aplicando (30) a (71) e (73), tem-se:

$$v_{1B}=v_{2B}\Rightarrow\frac{1}{E_2I_{ZZ2}}\left\{-\frac{7}{384}q_0L^4\right\}=\frac{1}{E_1I_{ZZ1}}\left\{\frac{1}{384}q_0L^4+\frac{1}{2}C_3L\right\}$$

$$\frac{1}{2}C_3L=-\frac{1}{384}q_0L^4-\frac{7}{384}\frac{E_1I_{ZZ1}}{E_2I_{ZZ2}}q_0L^4\Rightarrow C_3=-\frac{1}{192}q_0L^3-\frac{7}{192}\frac{E_1I_{ZZ1}}{E_2I_{ZZ2}}q_0L^3 \tag{74}$$

Não restam mais incógnitas no problema.

o) Rotação no vínculo A

Substituindo o valor de C_3 da Eq. (74) na expressão da rotação da peça A (Eq. 48), tem-se:

$$E_1 I_{ZZ1}\theta_{Z1}\left(x_1\right) = -\frac{1}{6}q_0 x_1^3 + \frac{1}{8}q_0 L x_1^2 - \frac{1}{192}q_0 L^3 - \frac{7}{192}\frac{E_1 I_{ZZ1}}{E_2 I_{ZZ2}}q_0 L^3 \tag{75}$$

A rotação no vínculo A é, finalmente,

$$\theta_{ZA} = \theta_{Z1}\left(x_1 = 0\right) = \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}}\left\{ \cancel{-\frac{1}{6}q_0 x_1^3} + \cancel{\frac{1}{8}q_0 L x_1^2} - \frac{1}{192}q_0 L^3 - \frac{7}{192}\frac{E_1 I_{ZZ1}}{E_2 I_{ZZ2}}q_0 L^3 \right\}$$

$$\boxed{\theta_{ZA} = -\frac{1}{192}\frac{q_0 L^3}{E_1 I_{ZZ1}} - \frac{7}{192}\frac{q_0 L^3}{E_2 I_{ZZ2}}} \tag{76}$$

p) Determinando a rotação do ponto A por métodos de energia

Devido ao carregamento distribuído na viga, não é possível resolver este problema pelo Princípio de Conservação de Energia. Um método adequado para resolver este problema é o Princípio das Forças Virtuais.

A expressão do momento fletor no sistema real já foi determinada neste problema, e é dada pela Eq. (12).

$$M_Z(x) = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + \frac{1}{4}q_0 L \cdot x \tag{12}$$

Para determinar a rotação da viga no vínculo A, é necessário estabelecer um sistema auxiliar como mostrado na Figura 1f. A expressão do momento fletor virtual ao longo desta a viga é determinada a seguir.

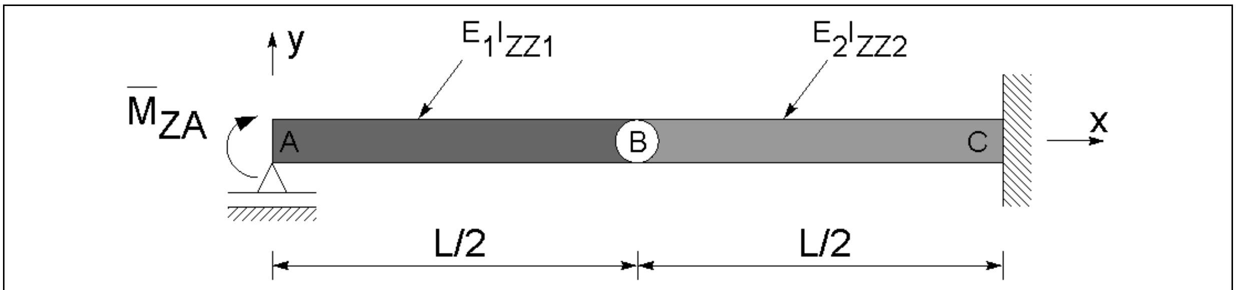
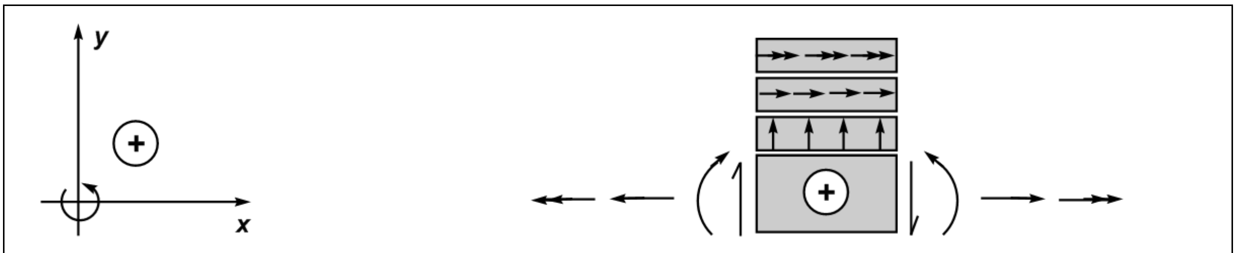


Figura 1f: Sistema auxiliar para determinação da rotação do ponto A.

q1) Eixos e convenções de sinais da Resistência dos Materiais



q2) Equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}\overline{M}_Z(x) = +\overline{q}(x) \tag{77}$$

q3) Equação do carregamento

$$\overline{q}(x) = 0 \tag{78}$$

q4) Condições de contorno

$$\overline{M}_Z(x=0) = +\overline{M}_{ZA} \tag{79}$$

$$\overline{M}_Z\left(x=\tfrac{L}{2}\right) = 0 \tag{80}$$

q5) Integração da equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}\overline{M}_Z(x) = +\overline{q}(x) = 0 \tag{81}$$

$$\downarrow \int$$

$$\frac{d}{dx}\overline{M}_Z(x) = \overline{V}_Y(x) = S_1 \tag{82}$$

$$\downarrow \int$$

$$\overline{M}_Z(x) = S_1 x + S_2 \tag{83}$$

q6) Determinação das constantes de integração

Substituindo-se (79) em (83) tem-se:

$$\overline{M}_Z(x=0) = S_1 \cdot 0 + S_2 = \overline{M}_{ZA} \Rightarrow S_2 = \overline{M}_{ZA} \tag{84}$$

Substituindo-se (80) e (84) em (83) tem-se:

$$\overline{M}_Z\left(x=\tfrac{L}{2}\right) = S_1\frac{L}{2} + \overline{M}_{ZA} = 0 \Rightarrow S_1 = -2\frac{\overline{M}_{ZA}}{L} \tag{85}$$

q7) Equações finais

Substituindo-se (84) e (85) em (83), tem-se:

$$\overline{M}_Z(x) = -2\frac{\overline{M}_{ZA}}{L}x + \overline{M}_{ZA} \tag{86}$$

r) Trabalho virtual na viga associada

O único carregamento presente no sistema auxiliar da Figura 1f é o momento virtual M'_{ZA}. O trabalho virtual desse carregamento é dado por:

$$\delta W_a = \overline{M}_{ZA} \cdot \delta\theta_{ZA} = \overline{M}_{ZA} \cdot \mu \cdot \theta_{ZA} \tag{87}$$

s) Variação de energia de deformação na viga

A variação da energia de deformação na viga devido à aplicação do momento virtual M'_{ZA} é:

$$\delta U_V = \mu \int_x \frac{\overline{M}_Z(x) M_Z(x)}{E(x) I_{ZZ}(x)} dx + \mu \int_x \xi(x) \frac{\overline{V}_Y(x) V_Y(x)}{G(x) A(x)} dx \tag{88}$$

da qual se pode desprezar o efeito do esforço cortante. É necessário separar o domínio de integração em duas partes, devido à mudança de materiais no ponto x=L/2.

$$\delta U_V = \mu \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} \int_{x=0}^{x=\frac{L}{2}} \left[-\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{1}{4} q_0 L x \right] \left[-2 \frac{\overline{M}_{ZA}}{L} x + \overline{M}_{ZA} \right] dx +$$

$$+ \mu \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} \int_{x=\frac{L}{2}}^{x=L} \left[-\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{1}{4} q_0 L x \right] \left[-2 \frac{\overline{M}_{ZA}}{L} x + \overline{M}_{ZA} \right] dx$$

$$\delta U_V = \mu \overline{M}_{ZC} \left\{ \frac{1}{192} \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} q_0 L^3 + \frac{7}{192} \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} q_0 L^3 \right\} \tag{89}$$

t) Aplicação do Princípio de Conservação de Energia

Aplicando o Princípio de Conservação de Energia à associação de vigas deste problema, tem-se, de (87) e (89):

$$\delta W_a = \delta U_V \tag{90}$$

$$\delta W_a = \cancel{\overline{M}_{ZA}} \cdot \cancel{\mu} \cdot \theta_{ZA} = \cancel{\mu}\, \cancel{\overline{M}_{ZC}} \left\{ \frac{1}{192} \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} q_0 L^3 + \frac{7}{192} \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} q_0 L^3 \right\}$$

$$\boxed{\theta_{ZA} = \frac{1}{192} \frac{q_0 L^3}{E_1 I_{ZZ1}} + \frac{7}{192} \frac{q_0 L^3}{E_2 I_{ZZ2}}} \tag{91}$$

Esta rotação é positiva no sentido em que o momento virtual foi aplicado (Figura 1f). Este resultado concorda com o que foi obtido pela técnica de Associação de Sistemas (Eq. 76).