Turma:

Nota:

MA 327 Álgebra Linear

Primeiro Semestre de 2006

Segunda Chamada

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
T o t a l	

Boa Prova !

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e a base canônica $\beta = \{1, x, x^2\}$. Dada a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Pede–se:}$$

(a) Determine uma base $\gamma = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ de modo que $P = [I]^\gamma_\beta$.

(b) Dado o polinômio $q(x) = -3 - 2x + 2x^2$, determine $[q(x)]_\gamma$.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e S o subespaço definido por:

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \}.$$

Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = S$ e $Ker(T) = S^\perp$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por: $T(x, y) = (3x - 2y, -2x + 3y)$. Pede–se:

(a) Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços:

$$U_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ T(x, y) = 5(x, y) \}$$

$$U_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ T(x, y) = (x, y) \}$$

(b) Mostre que o conjunto $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$, onde β_1 é uma base para U_1 e β_2 é uma base para U_2, é uma base para $\mathbb{R}^2$ e determine $[T]^\beta_\beta$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual. Dados os elementos $u = (1, 1, 1)$ e $v = (3, 2, 1)$. Pede–se:

(a) Determine os elementos w_1 e w_2 tais que $v = w_1 + w_2$, de modo que w_1 seja ortogonal ao elemento u e que o conjunto $\{w_2, u\}$ seja linearmente dependente.

(b) Decompor o elemento $w = (1, -1, 2)$ como a soma de um elemento no subespaço $S = [u, w_1]$ e outro no subespaço $S^\perp$.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual. Seja U o subespaço gerado pelos elementos $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ e $u_2 = (-1, 1, -1, 1)$. Pede–se:

(a) Determine a melhor aproximação do elemento $v = (2, 1, 3, 1)$ no subespaço U.

(b) Determine um subespaço W de modo que $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Justifique sua resposta.

G A B A R I T O

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

(a) Temos que $P = [p_{ij}]$ é a matriz de mudança da base $\gamma = \{ p_1(x), p_2(x), p_3(x) \}$ para a base $\beta = \{ 1, x, x^2 \}$. Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} p_1(x) &= p_{11} + p_{21}x + p_{31}x^2 = 1 + x \\ p_2(x) &= p_{12} + p_{22}x + p_{32}x^2 = x \\ p_3(x) &= p_{13} + p_{23}x + p_{33}x^2 = 2 + 2x + x^2 \end{aligned}$$

Assim, temos que $\gamma = \{ 1 + x , x , 2 + 2x + x^2 \}$.

(b) Sabemos que $[q(x)]_\beta = [I]^\gamma_\beta [q(x)]_\gamma$. Temos que

$$[q(x)]_\beta = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e vamos denotar} \qquad [q(x)]_\gamma = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a + 2c = -3 \\ a + b + 2c = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

que possui uma única solução $a = -7$, $b = 1$ e $c = 2$. Logo, $[q(x)]_\gamma = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Inicialmente vamos determinar uma base para o subespaço S. Sabemos que todo elemento $(x,y,z) \in S$ satisfaz a equação $x + y + z = 0$. Logo, temos que $z = -x - y$. Desse modo, obtemos que todo elemento $(x,y,z) \in S$ é escrito da seguinte forma:

$$(x,y,z) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \quad \text{para} \quad x\,,\,y \in I\!R\,.$$

Portanto, o conjunto $\beta = \{\,(1,0,-1)\,,\,(0,1,-1)$ é uma base para o subespaço S. De fato, tomando uma combinação linear nula dos elementos do conjunto β

$$\alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(0,1,-1) = (0,0,0)$$

obtemos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Agora vamos determinar uma base para o subespaço $S^\perp$ definido por:

$$S^\perp = \{\, w \in I\!R^3 \;/\; \langle\, w\,,\, v\,\rangle = 0 \quad ; \quad \forall\; v \in S\,\}\,.$$

Sabemos que todo elemento $w = (a,b,c) \in S^\perp$ deve ser ortogonal aos elemento da base β do subespaço S. Assim, temos que

$$\langle\, w\,,\, v_1\,\rangle = a - c = 0$$

$$\langle\, w\,,\, v_2\,\rangle = b - c = 0$$

onde $v_1 = (1,0,-1)$ e $v_2 = (0,1,-1)$.

Desse modo, obtemos $a = c$ e $b = c$ para $c \in I\!R$. Assim, todo elemento $w = (a,b,c) \in S^\perp$ é escrito da seguinte forma:

$$(a,b,c) = c(1,1,1) \quad \text{para} \quad c \in I\!R\,.$$

Logo, $S^\perp = [(1,1,1)]$.

Considerando o espaço vetorial $I\!R^3$ com a base $\gamma = \{\,(1,0,0)\,,\,(0,1,0)\,,\,(1,1,1)\,\}$, vamos definir o operador linear T sobre o $I\!R^3$, satisfazendo $Im(T) = S$ e $Ker(T) = S^\perp$, da seguinte forma:

$$T(1,0,0) = (1,0,-1)$$

$$T(0,1,0) = (0,1,-1)$$

$$T(1,1,1) = (0,0,0)$$

Agora vamos escrever um elemento genérico $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base γ, isto é,

$$(x, y, z) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(1, 1, 1) = (a + c, b + c, c)$$

obtendo $c = z$, $b = y - z$ e $a = x - z$. Assim, temos que

$$(x, y, z) = (x - z)(1, 0, 0) + (y - z)(0, 1, 0) + z(1, 1, 1).$$

Finalmente, obtemos a expressão do operador T que é dada por:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (x - z)T(1, 0, 0) + (y - z)T(0, 1, 0) + zT(1, 1, 1) \\ &= (x - z)(1, 0, -1) + (y - z)(0, 1, -1) + z(0, 0, 0) \\ &= (x - z, y - z, -x - y + 2z). \end{aligned}$$

Portanto, temos que o operador linear

$$T(x, y, z) = (x - z, y - z, -x - y + 2z) \quad \text{para} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

satisfaz as condições exigidas.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

(a) Vamos determinar uma base β_1 para o subespaço U_1. Temos que todo elemento $(x,y) \in U_1$ deve satisfazer a seguinte condição $T(x,y) = 5(x,y)$, isto é,

$$(3x - 2y\,,\, -2x + 3y) = (5x, 5y) \iff (-2x - 2y\,,\, -2x - 2y) = (0,0)\,.$$

Logo, temos uma única equação $x + y = 0$, isto é, $y = -x$.

Assim, todo elemento $(x,y) \in U_1$ é escrito como:

$$(x,y) = x(1,-1) \qquad \text{para} \qquad x \in I\!R.$$

Portanto, temos que $\beta_1 = \{\,(1,-1)\,\}$.

Agora vamos determinar uma base β_2 para o subespaço U_2. Temos que todo elemento $(x,y) \in U_2$ deve satisfazer a seguinte condição $T(x,y) = (x,y)$, isto é,

$$(3x - 2y\,,\, -2x + 3y) = (x, y) \iff (2x - 2y\,,\, -2x + 2y) = (0,0)\,.$$

Logo, temos uma única equação $x - y = 0$, isto é, $y = x$.

Assim, todo elemento $(x,y) \in U_2$ é escrito como:

$$(x,y) = x(1,1) \qquad \text{para} \qquad x \in I\!R.$$

Portanto, temos que $\beta_2 = \{\,(1,1)\,\}$.

(b) Temos que o conjunto $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 = \{\,(1,-1)\,,\,(1,1)\,\}$ é linearmente independente. De fato, podemos observar que β é um conjunto ortogonal. Logo, β é uma base ortogonal para o $I\!R^2$.

Finalmente, vamos determinar a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$. Temos que

$$\begin{aligned} T(1,-1) &= (5,-5) = 5(1,-1) + 0(1,1) \\ T(1,1) &= (1,1) = 0(1,-1) + 1(1,1) \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o que completa a resolução do questão.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

(a) Temos os elementos $u = (1,1,1)$ e $v = (3,2,1)$, e as seguintes condições:

(1) $v = w_1 + w_2$.

(2) O elemento w_1 é ortogonal ao elemento u, isto é $\langle w_1 , u \rangle = 0$.

(3) O conjunto $\{ w_2, u \}$ é linearmente dependente, isto é, existe um escalar $\alpha \in I\!R$ tal que $w_2 = \alpha u$.

Substituindo o elemento $w_2 = \alpha u$, dado pela condição **(3)**, na condição **(1)** e calculando o produto interno $\langle v , u \rangle$ utilizando a condição **(2)**, obtemos

$$\langle v , u \rangle = \langle w_1 + \alpha u , u \rangle = \langle w_1 , u \rangle + \alpha \langle u , u \rangle \implies \alpha = \frac{\langle v , u \rangle}{\langle u , u \rangle} = \frac{6}{3} = 2 .$$

Assim, temos que

$$w_2 = (2,2,2) \qquad \text{e} \qquad w_1 = v - w_2 = (1,0,-1) .$$

(b) Vamos representar o elemento $w = (1,-1,2)$ da seguinte forma:

$$w = \tilde{w} + \bar{w} \qquad \text{onde} \qquad \tilde{w} \in S \quad \text{e} \quad \bar{w} \in S^{\perp} ,$$

isto é, $\tilde{w}$ é a projeção ortogonal de w sobre o subespaço S e $\bar{w}$ é a projeção ortogonal de w sobre o subespaço $S^{\perp}$.

Como o conjunto $\{ w_1, u \}$ é uma base ortogonal para o subespaço $S = [w_1, u]$, temos que o elemento $\tilde{w}$ é calculado da seguinte forma:

$$\tilde{w} = \frac{\langle w , u \rangle}{\langle u , u \rangle} u + \frac{\langle w , w_1 \rangle}{\langle w_1 , w_1 \rangle} w_1 .$$

Assim, temos que

$$\tilde{w} = \frac{2}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{6} , \frac{4}{6} , \frac{7}{6} \right) .$$

Finalmente, temos que o elemento $\bar{w} = w - \tilde{w}$. Logo,

$$\bar{w} = (1,-1,2) - \left(\frac{1}{6} , \frac{4}{6} , \frac{7}{6} \right) = \left(\frac{5}{6} , -\frac{10}{6} , \frac{5}{6} \right) .$$

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

(a) Temos que o subespaço $U = [u_1, u_2]$, onde $u_1 = (1,1,1,1)$ e $u_2 = (-1,1,-1,1)$. Note que os elementos u_1 e u_2 são ortogonais.

Sabemos que a melhor aproximação do elemento $v = (2,1,3,1) \in \mathbb{R}^4$ no subespaço U é dada pela projeção ortogonal do elemento v sobre o subespaço U.

Como o conjunto $\{ u_1, u_2 \}$ é uma base ortogonal para o subespaço U, temos que a projeção ortogonal, $\tilde{v}$, do elemento v no subespaço U é calculada da seguinte forma:

$$\tilde{v} = \frac{\langle v , u_1 \rangle}{\langle u_1 , u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v , u_2 \rangle}{\langle u_2 , u_2 \rangle} u_2 .$$

Assim, temos que

$$\tilde{v} = \frac{7}{4}(1,1,1,1) - \frac{3}{4}(-1,1,-1,1) = \left(\frac{5}{2} , 1 , \frac{5}{2} , 1 \right).$$

(b) Basta considerar W como sendo o complemento ortogonal do subespaço U em $\mathbb{R}^4$ com relação ao produto interno usual. Pelo **Teorema da Decomposição Ortogonal**, temos que $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Como $dim(U) = 2$, temos que $dim(W) = 2$.

Finalmente vamos determinar uma base para o subespaço W. Sabemos que todo elemento $w = (a,b,c,d) \in W = U^{\perp}$ deve ser ortogonal aos elemento da base de U, isto é,

$$\langle w , u_1 \rangle = a + b + c + c = 0$$

$$\langle w , u_2 \rangle = -a + b - c + c = 0$$

Assim, obtemos um sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 2b + 2d = 0 \end{cases}$$

que possui como solução $b = -d$ e $a = -c$.

Desse modo, todo elemento $w = (a,b,c,d) \in W = U^{\perp}$ é escrito da seguinte forma:

$$(a,b,c,d) = c(-1,0,1,0) + d(0,-1,0,1) \quad \text{para} \quad c,\, d \in \mathbb{R} .$$

O conjunto $\beta = \{ (-1,0,1,0) , (0,-1,0,1) \}$ é claramente linearmente independente.

Portanto, o conjunto β é uma base para o subespaço $W = U^{\perp}$.