5.5

Teste 3, MA327: CDE

NOME: Carlos Polachini Zanovelli J. Turma: C RA: 090683

2.5

1. Seja $U \subset \mathbb{M}_{3\times 3}$, subespaço das matrizes diagonais. $T : \mathbb{P}_2 \to U$, transformação linear tal que:

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a-b+2c & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & -a-2b+2c \end{pmatrix}$$

Determine o Núcleo e a Imagem de T, com suas respectivas dimensões.

$$N(T) = \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ -a - 2b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \boxed{N(T) = \left(-\frac{2}{3}\alpha, \frac{4}{3}\alpha, \alpha\right), \forall \alpha \in U. \quad \dim N(T) = 1} \checkmark$$

$N(T) \not\subset \mathbb{R}^3$

$N(T) = \left[-\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x + x^2\right]$

$$T(a+bx+cx^2) = a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear dada por:

$$T(x, y) = (x - y, x, x + y)$$

1.0 a) Encontre uma base para a imagem de T;

2.0 b) Mostre que T é injetora, mas não é sobrejetora.

a) $T(x, y) = (x - y, x, x + y)$

$= x(1, 1, 1) + y(-1, 0, 1)$

E a base?

$$[x, y]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $N(t) = \begin{cases} x - y = 0 \\ x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$X = 0$
$Y = 0$, logo T é injetora. ✓

É definida como sobrejetora a função em que todos os valores de $\mathbb{R}^3$ ~~$T(x, y)$~~ possuem um valor correspondente no domínio. No caso dessa função, no entanto, para alguns valores da imagem? isso não ocorre, como por exemplo, o vetor $(1, -1, 1)$, pois:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \to \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right|$$

Como $0 \neq 4$, essa função não possui domínio correspondente
logo não é sobrejetora