Solução - Teste 1

Uma partícula carregada entra em uma região com um campo magnético uniforme **B** e um campo elétrico uniforme **E**, dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B_0\hat{j} \\ \mathbf{E} &= E_0\hat{j} \end{aligned}$$

A força na partícula de massa m é dada por:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Considere as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \qquad & \dot{x}(t=0) &= \dot{x}_0 \\ y(t=0) &= y_0 \qquad & \dot{y}(t=0) &= \dot{y}_0 \\ z(t=0) &= z_0 \qquad & \dot{z}(t=0) &= \dot{z}_0 \end{aligned}$$

a-) Escreva a Segunda Lei de Newton para cada componente do movimento.

Como $\mathbf{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$, temos que $\mathbf{F} = -qB_0\dot{z}\hat{i} + qE_0\hat{j} + qB_0\dot{x}\hat{k}$. Escrevendo a Segunda Lei de Newton para cada componente:

$$\boxed{m\ddot{y} = qE_0} \tag{1}$$

$$\boxed{m\ddot{x} = -qB_0\dot{z}} \tag{2}$$

$$\boxed{m\ddot{z} = qB_0\dot{x}} \tag{3}$$

b-) Resolva as equações encontradas no item anterior e encontre $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.
Para a componente y:

$$\ddot{y} = \frac{qE_0}{m} \tag{4}$$

Integrando em t:

$$\dot{y} = \frac{qE_0 t}{m} + \mathbb{C} \tag{5}$$

Usando a condição inicial $\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$ temos que $\mathbb{C} = \dot{y}_0$. Integrando novamente em t:

$$\dot{y} = \frac{qE_0 t^2}{2m} + \dot{y}_0 t + \mathbb{C}'. \tag{6}$$

Usando a condição inicial $y(t=0) = y_0$ temos que $\mathbb{C}' = y_0$. Portanto:

$$\boxed{\dot{y} = \frac{qE_0 t^2}{2m} + \dot{y}_0 t + y_0.} \tag{7}$$

Para as componentes x e z:

$$\ddot{x} = -\frac{qB_0}{m}\dot{z} \tag{8}$$

$$\ddot{z} = \frac{qB_0}{m}\dot{x} \tag{9}$$

Definindo $\alpha = qB_0/m$ e derivando (8) e (9) com respeito a t:

$$\dddot{x} = -\alpha^2 \ddot{z} \tag{10}$$
$$\dddot{z} = \alpha^2 \ddot{x} \tag{11}$$

Substituindo (9) em (12) e (8) em (13):

$$\dddot{x} = -\alpha^2 \dot{x} \tag{12}$$
$$\dddot{z} = -\alpha^2 \dot{z} \tag{13}$$

As soluções são:

$$x(t) = Asen(\alpha t) + Bcos(\alpha t) + C \tag{14}$$
$$z(t) = A'sen(\alpha t) + B'cos(\alpha t) + C' \tag{15}$$

Logo:

$$\dot{x} = A\alpha cos(\alpha t) - B\alpha sen(\alpha t) \tag{16}$$
$$\dot{z} = A'\alpha cos(\alpha t) - B'\alpha sen(\alpha t) \tag{17}$$
$$\ddot{x} = -A\alpha^2 sen(\alpha t) - B\alpha^2 cos(\alpha t) \tag{18}$$
$$\ddot{z} = -A'\alpha^2 sen(\alpha t) - B'\alpha^2 cos(\alpha t) \tag{19}$$

Substituindo (17) e (18) em (8):

$$-A\alpha^2 sen(\alpha t) - B\alpha^2 cos(\alpha t) = -A'\alpha^2 sen(\alpha t) + B'\alpha^2 cos(\alpha t) \tag{20}$$

Para essa relação ser válida para qualquer valor de t, devemos ter: $\boxed{A' = B}$ e $\boxed{B' = -A}$.

Os valores de A, B, C e C' podem ser obtidos das condições iniciais juntamente com as equações (14) a (17):

$$\dot{x}(t=0) = A\alpha = \dot{x}_0 \rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{x}_0}{\alpha}} \tag{21}$$

$$\dot{z}(t=0) = A'\alpha = B\alpha = \dot{z}_0 \rightarrow \boxed{B = \frac{\dot{z}_0}{\alpha}} \tag{22}$$

$$x(t=0) = \frac{\dot{z}_0}{\alpha} + C = x_0 \rightarrow \boxed{C = x_0 - \frac{\dot{z}_0}{\alpha}} \tag{23}$$

$$z(t=0) = -\frac{\dot{x}_0}{\alpha} + C' = z_0 \rightarrow \boxed{C' = z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\alpha}} \tag{24}$$

Resposta (lembrando que $\alpha = qB_0/m$):

$$\boxed{x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\alpha} sen(\alpha t) + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} cos(\alpha t) + \left(x_0 - \frac{\dot{z}_0}{\alpha}\right)} \tag{25}$$

$$\boxed{z(t) = \frac{\dot{z}_0}{\alpha} sen(\alpha t) - \frac{\dot{x}_0}{\alpha} cos(\alpha t) + \left(z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\alpha}\right)} \tag{26}$$

c-) Como é a trajetória da partícula? Justifique.

No plano xz, das equações (25) e (26), temos:

$$\left[x - x_0 + \frac{\dot{z}_0}{\alpha}\right]^2 + \left[z - z_0 - \frac{\dot{x}_0}{\alpha}\right]^2 = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{z}_0^2}{\alpha^2}, \tag{27}$$

a qual é a equação de uma circunferência centrada em $(x_0 - \frac{\dot{z}_0}{\alpha}; z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\alpha})$ e de raio $\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{z}_0^2}/\alpha$. Em y a aceleração é constante. Portanto, a trajetória será helicoidal com um "passo" (distância entre as circunferências) que aumenta com o tempo.