1	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	4a	4b	4c	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

2ª Prova de MA-141 — 17/05/2011

NOME:____ **Turma:**______ **RA:**________________.

1. (1 pt) Encontre a equação paramétrica da reta r que contém o ponto $P(1,3,2)$ e é paralela à reta determinada pelos pontos $A(-1,2,1)$ e $B(2,3,4)$.

2. (2 pt) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
(Respostas sem justificativa não serão consideradas.)

   (a) Os vetores $\vec{u}=(1,-2,1)$, $\vec{v}=(2,1,3)$ e $\vec{w}=(3,1,4)$ são coplanares.

   (b) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ são vetores quaisquer então $|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2-(\vec{u}.\vec{v})^2=|\vec{u}\times\vec{v}|^2$.

   (c) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores no espaço com $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ então $\vec{v}=\vec{w}$.

   (d) Os planos $\pi: 2x-y+3z=0$ e $\rho: x-y+z-2=0$ são perpendiculares.

3. Considere as retas r_1 e r_2, tais que r_1 contém o ponto $P_1(0,1,0)$ e é paralela ao vetor $v_1=(0,1,1)$ e $r_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=3 \\ z=-1+t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$.

   (a) (1 pt) Mostre que r_1 e r_2 são retas reversas.

   (b) (1 pt) Encontre a distância d entre r_1 e r_2.

   (c) (2 pt) Encontre a equação da reta q simultaneamente perpendicular a r_1 e r_2 e determine os pontos de interseção de q com r_1 e com r_2.

4. (3 pt) Seja ℓ o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem

$$\ell: x^2-16y^2+8x+128y-256=0.$$

   (a) Qual o tipo da cônica ℓ?

   (b) Escreva a equação canônica de ℓ.

   (c) Se ℓ for elipse ou hipérbole, determine os focos e a excentricidade de ℓ. No caso de hipérbole, encontre também equações das assíntotas no sistema Oxy.

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

1) Se r é paralela a $\vec{AB}$, portanto $\vec{AB}$ é o vetor diretor da reta

$\vec{AB} = OB - OA = (3, 1, 3) = V$

como r contém $P = (1;3,2)$, suas equações paramétricas são

$$r: \begin{cases} x = x_0 + t\,v_1 \\ y = y_0 + t.v_2 \\ z = z_0 + t\,v_3 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

2) a) Para que 3 vetores, sejam coplanares, por exemplo $\vec{A}, \vec{B}$ e $\vec{C}$, basta que o produto misto entre eles seja zero:

$A.(B \times C) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \leftarrow A \rightarrow \\ \leftarrow B \rightarrow \\ \leftarrow C \rightarrow \end{bmatrix} = 0$

MB

dados vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (3, 1, 4)$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det = 4 - 18 + 2 - 3 + 16 - 3 = -2$$

Portanto concluímos que os vetores não são coplanares, a afirmativa é falsa

c) $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

Se $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{u} \circ \vec{w}$, então $\vec{v} = \vec{w}$. A afirmativa é falsa.

Se o vetor $\vec{u} = (0;0;0)$, $\forall \vec{v}$ e $\vec{w}$ a equação será satisfeita:

$(0;0;0).\vec{v} = (0;0;0).\vec{w} \Rightarrow 0 = 0$.

MB

d) Se dois planos são perpendiculares, seus vetores normais também são, sabendo que o produto escalar entre vetores perpendiculares é igual a zero, temos:

$\pi: 2x - y + 3z = 0$, $N_\pi = (2; -1, 3)$

$\rho: x - y + z - 2 = 0$ $N_\rho = (1, -1, 1)$

O produto escalar entre N_π e N_ρ é:

$(2,-1,3)\cdot(1,-1,1) = 2+1+3 = 6$.

Portanto concluímos que os planos não são perpendiculares e a afirmativa é falsa

b) A afirmação de que $\forall \vec{u}, \vec{v}$, é verdadeira

$\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}\times\vec{v}\|^2$

$\vec{u}=(a,b,c)$

$\vec{v}=(m,t,l)$

$(a^2+b^2+c^2)\cdot(m^2+t^2+l^2)-(am+bt+cl)^2$

$(a^2+b^2+c^2)\cdot(m^2+t^2+l^2)-(a^2m^2+ambt+amcl+btam+b^2t^2+btcl+clam+clbt+c^2l^2)$

$\boxed{a^2t^2+a^2l^2+b^2m^2+b^2l^2+c^2m^2+c^2t^2-2ambt-2amcl-2btcl}$

$\vec{u}\times\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ t & l\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ m & l\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ m & t\end{vmatrix}\right)$

$= bl-ct, -al+cm, +at-bm$

$\|u\times\vec{v}\|^2 = \boxed{b^2l^2-2.blct+c^2t^2+a^2l^2-2alcm+c^2m^2+a^2t^2-2atbm+b^2m^2}$

Como demonstrado $\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}\times\vec{v}\|^2$.

OK, ou então:

$|u|^2.|v|^2 - (u.v)^2 = |u|^2|v|^2 \underbrace{(1-\cos^2\theta)}_{\text{sen}^2\theta}$, $\theta=(\widehat{u,v})$

$= |u\times v|^2$ ∎

3. Reta r_1 contém o ponto $P_1(0,1,0)$ e é paralela a $\vec{v_1}=(0,1,1)$ vetor diretor de r_1

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 + 0s \\ y = 1 + 1s \\ z = 0 + 1s \end{cases} \rightarrow r_1 \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + s \\ z = s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Reta r_2 → $r_2 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3 \\ z = -1+t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$ $P_2 = (2,3,-1)$ contido em r_2

$\vec{v_2} = (1,0,1)$: vetor diretor de r_2

(a) As retas r_1 e r_2 são reversas $\iff$ os vetores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{P_1P_2}$ não são coplanares, ou seja, $\vec{P_1P_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) \neq 0$

Verificando:

$\vec{P_1P_2} = (2-0,\ 3-1,\ (-1)-0) \rightarrow \vec{P_1P_2} = (2,2,-1)$

$$\vec{P_1P_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) = \det \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2+2+1 = 5 \neq 0.$$

MB

Logo, os vetores $\vec{P_1P_2}$, $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ não são coplanares e, r_1 e r_2 são retas reversas.

(b) Como as retas são reversas, a distância entre elas será dada por:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\vec{P_1P_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2})|}{\|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|} = \frac{|(2)(1)+(2)(1)+(-1)(-1)|}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases} \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \left(\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = (1,1,-1) \\ \|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3} \\ \vec{P_1P_2} = (2,2,-1) \end{cases}$$

MB

3.
(c)

Reta q perpendicular a r_1 e r_2

$r_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1+s \\ z = s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$ $\quad r_2 = \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3 \\ z = -1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{v_1} = (0,1,1)$, $\vec{v_2} = (1,0,1)$

Um ponto genérico da reta r_1 é dado por $P_{r_1} = (0, 1+s, s)$.
Um ponto genérico da reta r_2 é dado por $P_{r_2} = (2+t, 3, -1+t)$

Devemos encontrar $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ seja perpendicular a $\vec{v_1}$ e perpendicular a $\vec{v_2}$.

$\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (2+t, 2-s, -1+t-s)$

$\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \perp \vec{v_1} \Rightarrow \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot \vec{v_1} = 0$

$\cancel{(2+t)\cdot 0} + (2-s)\cdot 1 + (-1+t-s)(1) = 0$

$2 - s - 1 + t - s = 0$

$t - 2s = -1$

$\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \perp \vec{v_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot \vec{v_2} = 0$

$(2+t)(1) + (2-s)\cdot 0 + (-1+t-s)(1) = 0$

$2 + t - 1 + t - s = 0$

$2t - s = -1$

$\begin{cases} t - 2s = -1 \text{ (I)} \rightarrow t = -1+2s \\ 2t - s = -1 \text{ (II)} \end{cases}$

Substituindo t na equação II, temos:

$2(-1+2s) - s = -1 \rightarrow -2 + 4s - s = -1 \rightarrow 3s = 1 \rightarrow s = 1/3$

Logo, $t = -1 + 2(1/3) = -1 + \frac{2}{3} \rightarrow t = -1/3$

Assim, teremos que os pontos $P_{r_1} = (0, 4/3, 1/3)$ e $P_{r_2} = (5/3, 3, -4/3)$ pertencem a reta q e o vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (5/3, 5/3, -5/3)$ é um vetor diretor de q.

$q: \begin{cases} x = 0 + 5/3\,k \\ y = 4/3 + 5/3\,k \\ z = 1/3 - 5/3\,k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \rightarrow q: \begin{cases} x = 5/3\,k \\ y = 4/3 + 5/3\,k \\ z = 1/3 - 5/3\,k \end{cases}$

O ponto de interseção de q com $r_1 = P_{r_1} = (0, 4/3, 1/3)$

O ponto de interseção de q com $r_2 = P_{r_2} = (5/3, 3, -4/3)$

MB

Q 3 | a, b, c) Sendo V_2 o vetor diretor de r_2, as retas r_1 e r_2 não são paralelas se $\alpha V_1 \neq \beta V_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Não são concorrentes, também, se $d(P_{r1}, P_{r2}) \neq 0$, onde P_{r1} e P_{r2} são pontos de r_1 e r_2, respectivamente. Bem observado.

$V_1 = (0, 1, 1)$ $\quad \alpha V_1 \neq \beta V_2 \Rightarrow$ não são paralelas.

$V_2 = (1, 0, 1)$

Seja P_{r1} e P_{r2} pontos quaisquer de r_1 e r_2, respectivamente, $\overrightarrow{P_{r1}P_{r2}}$ "liga" um ponto de r_1 em r_2.

Eq paramétrica de r_1: $\begin{cases} x = 0 \\ y = s+1, s \in \mathbb{R} \\ z = s \end{cases}$

$P_{r1} = (0, s+1, s)$, $P_{r2} = (2+t, 3, -1+t)$.

$\overrightarrow{P_{r1}P_{r2}} = (2+t, 2-s, t-1-s)$. $P_{r1}P_{r2}$ será perpendicular a r_1 e r_2 se:

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_{r1}P_{r2}} \cdot \vec{V_1} = 0 = 0 + (2-s).1 + (t-1-s).1 = 1 + t - 2s = 0 \\ \overrightarrow{P_{r1}P_{r2}} \cdot \vec{V_2} = 0 = (2+t).1 + 0 + (t-1-s).1 = 1 + 2t - s = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - 2s = -1 \\ 2t - s = -1 \end{cases}$$. A solução para o sistema é: $s = 1/3$ $t = -1/3$.

Fazendo $\overrightarrow{P_{r1}P_{r2}} = (5/3, 5/3, -5/3)$. Como $\|\overrightarrow{P_{r1}P_{r2}}\| \neq 0$, elas são reversas.

Guilherme Maesaka 117126 ~~[illegible]~~ 2/4

Cont Q3

$d(\pi_1, \pi_2) = \|\overrightarrow{P_{\pi_1}P_{\pi_2}}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{27}} = \frac{5\sqrt{3}}{3\cancel{\sqrt{3}}}$ ~~$\sqrt{\frac{5}{3}}$~~

$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{5}{3}\sqrt{3}$

Ok

$P_{\pi_1} = (0, 4/3, 1/3)$
$P_{\pi_2} = (5/3, 3, -4/3)$
, P_{π_1}, P_{π_2} são os pontos de intersecção da reta q, cuja equação paramétrica é:

$\overrightarrow{P_{\pi_1}Q} = m\overrightarrow{P_{\pi_1}P_{\pi_2}}$, $q: \begin{cases} x = \frac{5m}{3} \\ y = \frac{5m}{3} + \frac{4}{3} \\ z = -\frac{5m}{3} + \frac{1}{3} \end{cases}$

3b. $dist(r_1, r_2)$

$P_1 = (0,1,0) \quad P_2 = (2,3,-1)$

$\vec{v}_1 = (0,1,1)$

$\vec{v}_2 = (1,0,1)$

$\vec{P_1P_2} = (2,2,-1)$

$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \left| det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & v_2 & \rightarrow \end{bmatrix} \right|$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + j - k = (1, 1, -1) \quad (* ex\ c)$$

$|(1,1,-1)| = \sqrt{3} = |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|$

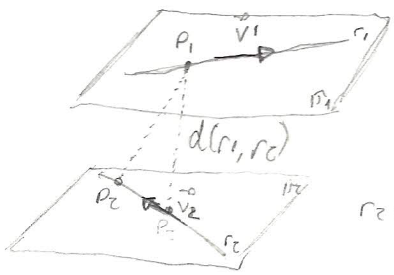
$|\vec{P_1P_2} . (v_1 \times v_2)| = \left| det \begin{bmatrix} \vec{P_1P_2} \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix} \right|$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - 2(-1) + (-1)(-1) =$$

$= 2 + 2 + 1 = 5$

$dist(r_1, r_2) = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

$dist(r_1, r_2) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$



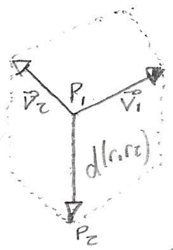
$r_1 \in \pi_1$

$r_2 \in \pi_2$

$\pi_1 // \pi_2$

V_1 e V_2 = vetores diretores

deslocando $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$



Volume do sólido é $|\vec{P_1P_2} . (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|$

onde $|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|$ é a área da base

$|\vec{P_1P_2}| . \cos\theta$ é a altura.

(Área da base).(altura) = volume

altura = $\frac{\text{volume}}{\text{área da base}}$.

Logo $dist(r_1, r_2) = \frac{|\vec{P_1P_2} . (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$.

Ok MB.

4. $P(x,y) \in \ell$

$\ell: x^2 - 16y^2 + 8x + 128y - 256 = 0$

a) $x^2 + 8x - 16y^2 + 128y = 256$

$x^2 + 8x + 16 - 16(y^2 - 8y + 16) = 256 + 16 - 16^2$

$(x+4)^2 - 16(y-4)^2 = 16 \quad (\div 16)$

$\dfrac{(x+4)^2}{16} - \dfrac{(y-4)^2}{1} = 1$

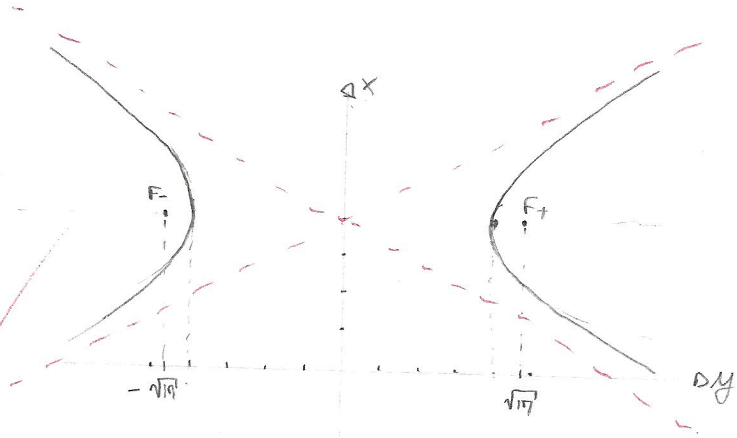
ℓ é uma hipérbole

b) $\ell: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ hipérbole

$x+4 = x'$

$y-4 = y'$

$\dfrac{x'^2}{4^2} - \dfrac{y'^2}{1^2} = 1$



c) $b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow 1 = \sqrt{c^2 - 16}$

$1 = c^2 - 16$

$c = \sqrt{17}$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$ $\quad F_+ = (\sqrt{17}, 0) \quad F_- = (-\sqrt{17}, 0)$

Assíntotas:

$Y = \pm \frac{1}{4} X$

$\Leftrightarrow$ e $\begin{cases} Y = \frac{1}{4}x + 5 \\ Y = -\frac{1}{4}x + 3 \end{cases}$

MB

4) $\ell: x^2 - 16y^2 + 8x + 128y - 256 = 0$

a) $x^2 + 8x - 16y^2 + 128y = 256$

$x^2 + 8x - 16(y^2 + 8y) = 256$

$[(x+4)^2 - 16] - 16[(y+4)^2 - 16] = 256$

$(x+4)^2 - 16 - 16(y+4)^2 + 256 = 256$

$(x+4)^2 - 16(y+4)^2 = \cancel{256} + 16 - \cancel{256}$

$(x+4)^2 - 16(y+4)^2 = 16$

$\begin{cases} X = x+4 \\ Y = y+4 \end{cases}$

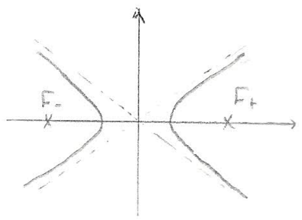
$X^2 - 16Y^2 = 16$

A cônica ℓ é uma hipérbole.

b) $X^2 - 16Y^2 = 16$

$$\frac{X^2}{16} - \frac{16Y^2}{16} = \frac{16}{16}$$

$$\boxed{\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{1} = 1}$$



c) Focos, excentricidade, assíntotas

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{1} = 1$ $F = (\pm c, 0)$

$e = \frac{c}{a}$

$b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow 1 = \sqrt{c^2 - 16} \Rightarrow 1 = c^2 - 16 \Rightarrow c = \sqrt{17}$

Focos: $F_1 = (\sqrt{17}, 0)$

$F_2 = (-\sqrt{17}, 0)$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{17}}{4}$

Assíntotas: $y = \pm \frac{b}{a} x$ $y = \pm \frac{1}{4} x$

$\Leftrightarrow$ $y = \frac{1}{4} x + 5$

e $y = -\frac{1}{4} x + 3$