F 602 - prova 2, gabarito
Unicamp, 18 de maio de 2011

1ª questão:
Em um fio circular de raio R uma corrente uniforme e constante é ligada e desligada periodicamente, de forma que:

$$I(t) = \begin{cases} I_0 & , \quad 2n\tau < t < (2n+1)\tau \\ 0 & , \quad (2n+1)\tau < t < (2n+2)\tau \end{cases} \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

a) Dado um ponto a uma distância z do plano do fio, sobre seu eixo de simetria, encontre quando os campos elétricos e magnéticos são não nulos. Determine as condições geométricas para que o campo magnético esteja em fase com a corrente.
b) A partir das equações de Jefimenko, calcule o campo magnético.

a) Para um campo magnético não nulo, a condição para $I = I_0$ deve ser respeitada pelo tempo retardado:

$$2m\tau < t_r < (2m+1)\tau$$

Calculando o tempo retardado:

$$t_r = t - \mathscr{r}/c = t - \sqrt{z^2 + R^2}/c$$

e substituindo na condição para t_r:

$$2m\tau + \sqrt{z^2+R^2}/c < t < (2m+1)\tau + \sqrt{z^2+R^2}/c \quad ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Quanto ao campo elétrico, este terá um pico nas variações de corrente, portanto nos limites dos intervalos acima, sendo nulo em todos os demais instantes:

$$t = m\tau + \sqrt{z^2+R^2}/c \quad ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Para que o campo magnético esteja em fase com a corrente, a condição encontrada deve ser a mesma do enunciado, o que é obtido se:

$$\sqrt{z^2+R^2}/c = 2n\tau \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2...$$

b) Calculando o campo magnético (exluindo os instantes quando $\dot{J} \to \infty$), temos:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{\mathscr{r}^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c\mathscr{r}} \right] \times \hat{\mathscr{r}}\, d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0}{z^2+R^2} \int (\hat{\phi} \times \hat{\mathscr{r}}) dl$$

Como por simetria sabemos que o campo magnético aponta na direção $\hat{z}$, calculamos somente esta componente, utilizando (por trigonometria):

$$(\hat{\phi} \times \hat{\mathscr{r}})|_z = \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

obtendo

$$\vec{B}(z, t) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_0 R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{z}$$

onde t obedece a condição do ítem a).

2ª: Um fio retilíneo de comprimento L carrega uma densidade de carga uniforme λ. Este fio se movimenta sobre o eixo x com velocidade constante, de modo que uma ponta do fio está na posição $\vec{r}' = vt\hat{x}$, e a outra ponta está na posição $\vec{r}' = (vt + L)\hat{x}$.
a) Calcule o tempo retardado e o vetor $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ dos pontos inicial e final do fio em relação à origem ($|\vec{r}| = 0$) para um tempo $t > 0$.
b) Escreva e resolva a integral que calcula o campo V (dica: utilize os resultados do ítem anterior como limites de integração).
c) Analise o seu resultado no limite onde o fio tende a uma carga pontual.

a) Para a ponta esquerda do fio temos para o tempo retardado:

$$t_r^{(1)} = t - vt_r/c \quad \rightarrow \quad t_r^{(1)} = \frac{t}{1 + v/c}$$

e para a ponta direita:

$$t_r^{(2)} = t - (vt_r + L)/c \quad \rightarrow \quad t_r^{(2)} = \frac{t - L/c}{1 + v/c}$$

e para os pontos $\boldsymbol{\mathscr{r}}$, como $\boldsymbol{\mathscr{r}} = r'$:

$$\boldsymbol{\mathscr{r}}^{(1)} = vt_r^{(1)} = \frac{vt}{1 + v/c} \quad ; \quad \boldsymbol{\mathscr{r}}^{(2)} = vt_r^{(2)} + L = ... = \frac{vt + L}{1 + v/c}$$

b) Utilizando a expressão para potencial retardado:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\boldsymbol{\mathscr{r}}^{(1)}}^{\boldsymbol{\mathscr{r}}^{(2)}} \frac{\lambda}{x'} dx' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} ln(x')|_{\boldsymbol{\mathscr{r}}^{(1)}}^{\boldsymbol{\mathscr{r}}^{(2)}} = ... = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} ln\left(1 + \frac{L}{vt}\right)$$

c) no limite $L \rightarrow 0$ expandimos a função ln, obtendo:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{vt} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{vt}$$

3$^{\underline{a}}$ questão: A radiação de um dipolo elétrico pode ser calculada diretamente a partir da fórmula de campo elétrico de uma carga pontual descrevendo um movimento da forma $\vec{\omega}(t) = (d/2cos(\omega t)\hat{z}$. Assuma que a velocidade da partícula é baixa.
a) Para calcular a potência irradiada, indique quais aproximações você faria nas fórmulas de campos elétrico e magnético.
b) Mantendo somente os termos de mais baixa ordem nas aproximações, mostre que o campo elétrico aponta na direção $\hat{\theta}$ e o campo magnético aponta na direção $\hat{\phi}$.
c) Calcule a potência irradiada por ângulo sólido.

a) Como primeira aproximação podemos desprezar os termos no campo que caem com r^{-2}, mantendo somente o termo de aceleração:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{(\vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}}.\vec{u})^3}\left[\vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \times (\vec{u} \times \vec{a})\right]$$

Além disso, considerando que $r \gg d$ temos:

$$\vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \vec{r}$$

e finalmente, como $v \ll c$ podemos escrever:

$$\vec{u} = c\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = c\hat{r}$$

Voltando nas fórmulas:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{(\vec{r}.c\hat{r})^3}\left[\vec{r} \times (c\hat{r} \times \vec{a})\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a}) \\
\vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{1}{c}\hat{r} \times \vec{E}
\end{aligned}$$

b) Analisando o produto vetorial triplo, temos que $\hat{r} \times \vec{a}$ aponta na direção $\hat{\phi}$, e portanto $\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})$ aponta na direção $\hat{\theta}$. Por consequência, o campo magnético, que é perpendicular a $\vec{E}$ e $\hat{r}$, aponta na direção $\hat{\phi}$.

c) Com as aproximações acima temos:

$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \times (\vec{u} \times \vec{a}) = ac\sin\theta$$

Substituindo em $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B}).\hat{r}r^2 = ... = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\sin^2\theta$$

sumário de fórmulas úteis:

potenciais retardados:

$$\begin{array}{l} V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{\boldsymbol{\mathscr{r}}} d\tau' \\ \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}',t_r)}{\boldsymbol{\mathscr{r}}} d\tau' \end{array} \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \vec{r} - \vec{r}' \quad ; \quad t_r = t - \boldsymbol{\mathscr{r}}/c$$

equações de Jefimenko:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}',t_r)}{c\boldsymbol{\mathscr{r}}}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}',t_r)}{c^2\boldsymbol{\mathscr{r}}}\right] d\tau'$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t_r)}{\boldsymbol{\mathscr{r}}^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}',t_r)}{c\boldsymbol{\mathscr{r}}}\right] \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\, d\tau'$$

equações dos campos de uma carga pontual:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{(\vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}}.\vec{u})^3}\left[(c^2-v^2)\vec{u} + \vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\times\vec{E}(\vec{r},t)$$

onde $\vec{u} = c\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \vec{v}$.

identidades matemáticas úteis:

$$ln(1+x) \sim x \quad \text{para} \quad x \ll 1$$