EA616 – 2º semestre de 2004 – Prova I
Sem consulta - Duração: 100 minutos

Aluno: Pedro K Suliano Madelli RA: 017086

(3,0) Questão 1) Considere o seguinte sistema dinâmico linear de 2a. ordem, tendo $\zeta > 0$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 z(t).$$

Tomando $y(0)=0$, $\frac{dy(0)}{dt}=0$ e $z(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ c & t\geq 0\end{cases}$, então sua solução no tempo apresenta (*i*) amortecimento subcrítico quando $0<\zeta<1$; (*ii*) amortecimento crítico quando $\zeta=1$; e (*iii*) amortecimento supercrítico quando $\zeta>1$.

(a) Considerando que $0<\zeta<1$, encontre o instante de tempo em que o sistema dinâmico atinge pela primeira vez o valor de regime. Para resolver este item, parta da solução no tempo $y(t) = Kc\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\text{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \text{arcsen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right)\right]$, válida apenas quando $0<\zeta<1$ e sabendo que $0<\text{arcsen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)<\pi/2$.

2 → (b) Para os 3 casos a seguir, obtenha o valor de ζ em função de $\{a_2, a_1, a_0, b_0\}$ e, em seguida, esboce em um mesmo gráfico as evoluções no tempo de $y(t)$ para $a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_0 z(t)$.

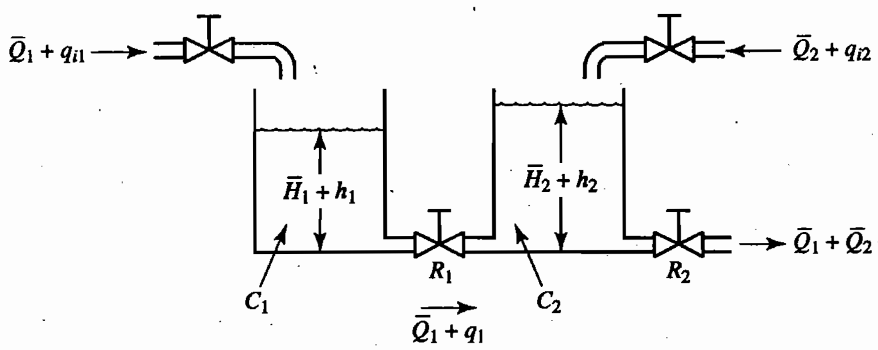
(1) $a_2 = 1$; $a_1 = 8$; $a_0 = 1$; $b_0 = 1$.
(2) $a_2 = 9$; $a_1 = 6$; $a_0 = 1$; $b_0 = 1$;
(3) $a_2 = 6$; $a_1 = 1$; $a_0 = 1$; $b_0 = 1$;

Indique claramente qual é cada uma das 3 curvas. Os gráficos devem respeitar entre si posições relativas. Resolver as equações diferenciais é a alternativa mais custosa para a solução, não sendo recomendada mas sendo admitida.

(c) compare a resposta ao degrau de sistemas dinâmicos lineares de 1ª ordem e de 2ª ordem.

(2,0) Questão 2) A figura a seguir apresenta um sistema hidráulico composto por duas fontes de fluido, dois tanques com comunicação e duas válvulas que regulam a vazão das respectivas tubulações em que estão instaladas. Os valores $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$, $\overline{H}_1$ e $\overline{H}_2$ indicam uma situação de regime, enquanto que os valores $q_{i1}, q_{i2}, q_0, q_1, h_1$ e h_2 indicam perturbações em relação à situação de regime.

SAÍDA solicitada ñ é o fluxo e sim a altura.



Aplicando o equacionamento associado ao estudo de fluxo de fluidos incompressíveis, resultam as seguintes equações diferenciais (versão linear) para descrever a dinâmica de perturbação do sistema hidráulico acima:

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{C_1}(q_{i1} - q_1) \qquad \dot{h}_2 = \frac{1}{C_2}(q_{i2} + q_1 - q_0) \qquad q_0 = \frac{h_2}{R_2} \qquad q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

Definindo como variáveis de estado $x_1(t) = h_1(t)$ e $x_2(t) = h_2(t)$, como variáveis de entrada $u_1(t) = q_{i1}(t)$ e $u_2(t) = q_{i2}(t)$ e como variáveis de saída $y_1(t) = x_1(t)$ e $y_2(t) = x_2(t)$, apresente todos os passos necessários para obter a representação por espaço de estados na forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

com $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Neste caso, as matrizes A, B e C são todas de dimensão 2 × 2.

(3,0) Questão 3) Em uma comunidade fechada, ou seja, em que não há imigração ou emigração, a população só pode aumentar com nascimentos e diminuir com mortes. Considere a seguir o modelo de uma endemia de gripe, na forma de um sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\underbrace{c_3 * c_4 * S(t) * I(t)}_{\text{enc.}} + \overbrace{c_1 N(t)}^{\text{nasc.}} - \overbrace{c_5 S(t)}^{\text{mortos}} \\ \dfrac{dI}{dt} = \underbrace{c_3 * c_4 * S(t) * I(t)}_{\text{enc.}} - c_2 I(t) - \overbrace{c_5 I(t)}^{\text{mortos}} \\ \dfrac{dR}{dt} = c_2 I(t) - c_5 R(t) \end{cases}$$

Total S.c. Inf Inf

$\boxed{C_3 \text{ e } C_4}$?

Inf. Sad.

onde em cada instante t tem-se:

- $S(t)$: pessoas sadias, mas suscetíveis à gripe;
- $I(t)$: pessoas infectadas e que podem transmitir a gripe pelo encontro com pessoas sadias de $S(t)$;
- $R(t)$: pessoas sadias e não mais suscetíveis à gripe;
- $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$: tamanho da população.

São válidas as seguintes hipóteses:

- ninguém morre de gripe;
- o número de encontros entre pessoas sadias e infectadas é diretamente proporcional ao produto entre $S(t)$ e $I(t)$;
- a porcentagem de nascimentos junto à população é constante ao longo do tempo;
- todas as crianças nascidas são sadias, mas suscetíveis à gripe;
- a porcentagem de mortes junto à população é constante ao longo do tempo;

(a) Apresente uma interpretação para o papel exercido por cada uma das constantes $c_i > 0$, i=1,...,5, no modelo matemático.

(b) Linearize o sistema em torno de um ponto de equilíbrio $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{R})$.

(c) Obtenha o ponto de equilíbrio deste sistema em função de c_i, i=1,...,5. Algebricamente Trabalhoso

(2,0) Questão 4) Apresente todos os passos até obter o modelo matemático para descrever o movimento translacional dos dois corpos rígidos fisicamente acoplados a seguir, sendo que não existe nenhum outro tipo de força de atrito envolvida, além daquela associada ao amortecedor presente. Iniciar pela especificação da hipótese de movimento. Tanto as molas como o amortecedor apresentam comportamento linear, de modo que deve resultar um sistema de equações diferenciais lineares acopladas (não há a necessidade de obter a representação por espaço de estados).