ME-310 Probabilidade II - Prof. Serguei Popov

Prova 1 - 1º Sem. 2012

1. Mostre que $a = \mathbb{E}X$ minimiza $\mathbb{E}(X-a)^2$.

2. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x,y) = 3e^{-3x}/x$, se $0 < x < \infty$, $0 < y < x$.
As v.a. X e Y são independentes? Justifique a resposta.
Calcule:
(a) $\mathrm{Cov}(X,Y)$;
(b) densidade marginal de X;
(c) densidade condicional de Y dado $X = x$, $0 < x < \infty$.

3. Sejam X e Y v.a. independentes Exponenciais com o mesmo parâmetro λ. Calcule a densidade conjunta de $U = X + Y$ e $V = e^X$.

4. Para p fixo, a distribuição de v.a. X é dada por

$$X = \begin{cases} -4, & \text{com probabilidade } p, \\ 0, & \text{com probabilidade } 1-2p, \\ 1, & \text{com probabilidade } p. \end{cases}$$

Se p também é uma v.a. e tem distribuição Uniforme $(0, 1/4)$, calcule $\mathbb{E}X$.

5. As variáveis aleatórias X e Y são independentes, e as f.g.m. delas são

$$M_X(t) = \exp(5e^t - 5), \qquad M_Y(t) = \frac{1}{27}(e^t + 2)^3. = \left(\frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}\right)^3$$

$\exp(5(e^t - 1))$ $\quad$ $\hookrightarrow$ poi(5) $\qquad$ $\hookrightarrow$ bin$(3, 1/3)$

Calcule
a) $P[X + Y = 2;]$
b) $P[XY = 0]$;
c) $P[XY = 1]$;
d) $E(XY)$.

Observações:
Cada questão vale 2 pontos.
Não esqueça de escrever seu nome e RA em todas as folhas!

$M_X(t) = \sum_x e^{tx} \cdot p(x)$

$X = 2 - Y$

$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)\,dx$