EM607 - Primeira Prova - 4/5/2009

Nome: Gabarito RA:

1. Para verificar o desempenho da suspensão de uma carreta, realizou-se o seguinte teste: mantendo-se a velocidade horizontal do veículo constante a $60km/h$, percorreu-se uma pista ondulada, registrando-se o movimento vertical da carreta ao longo do percurso. Um modelo simplificado é mostrado na Figura 1. A amplitude (pico-a-pico) da pista é de $20cm$, seu período corresponde a $2m$ e a pista pode ser considerada senoidal de frequência Ω. A amplitude (pico-a-pico) do movimento vertical da carreta durante o ensaio foi de $12.2cm$. O ensaio foi realizado com a carreta carregada ($1000kg$), situação em que o fator de amortecimento é de 0.50.

   (a) (valor 2.5) Mostre que a relação entre a amplitude da ondulação da pista X e a amplitude do movimento da carreta y_0 é dada por

   $$\frac{X}{y_0} = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}, \quad r = \frac{\Omega}{w_n}.$$

   Lembre que para $\ddot{x} + 2\xi w_n \dot{x} + w_n^2 x = f_0 sen(wt)$, a amplitude da resposta de regime é dada por $X = \frac{f_0/w_n^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$, onde w_n é a frequência natural do sistema e ξ é o fator de amortecimento. Sabe-se ainda que $x(t) = A_1 cos(\Omega t) + A_2 sen(\Omega t)$ pode ser escrita como $x(t) = A sen(\Omega t + \phi)$ com $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ e $tan\phi = A_1/A_2$.

   (b) (valor 2.5) Determine a amplitude do deslocamento da carreta quando esta estiver vazia ($250kg$) e passar pelo mesmo teste.

2. Considere o sistema da Figura 2. Os discos possuem momento de inércia de massa J_1 e J_2 respectivamente, seus raios são r_1 e r_2 e não ocorre deslizamento no contato entre eles. As molas do sistema possuem rigidez k_1 e k_2. A constante de amortecimento é c. A massa do bloco é m. Considere a situação de pequenos deslocamentos para este sistema.

   (a) (valor 2.5) Determine a equação matricial do movimento em torno da posição de equilíbrio estático em termos das variáveis y e θ e em função dos parâmetros da Figura 2.

   (b) (valor 2.5) Considerando agora $c = 0$, $r_1 = r_2 = 1$, $m = 1$, $J_1 = J_2 = 5$, $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$, determine as frequências naturais.

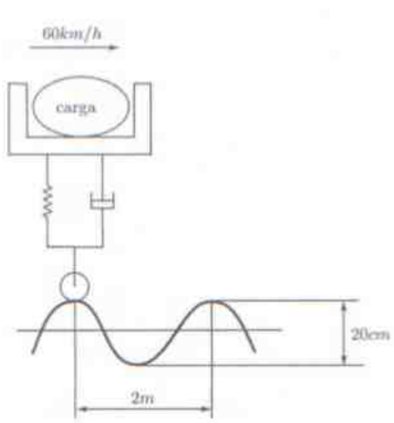


Figura 1: Sistema da questão 1

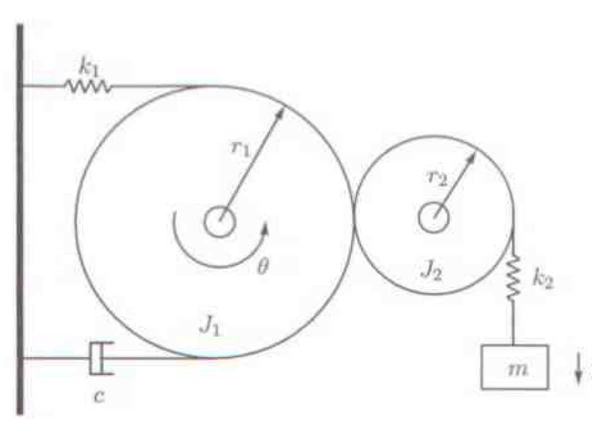
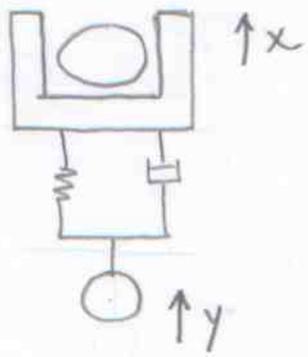
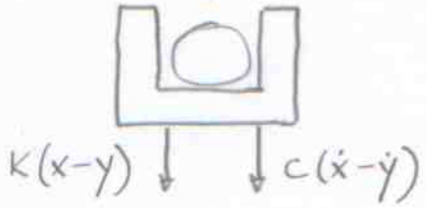


Figura 2: Sistema da questão 2

1a)





$x > y$

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y})$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$$

$$y(t) = y_0 \operatorname{sen}(\Omega t) \; ; \; m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = k y_0 \operatorname{sen}(\Omega t) + c y_0 \Omega \cos(\Omega t)$$

$$= y_0 \sqrt{k^2 + (c\Omega)^2}\, \operatorname{sen}(\Omega t + \phi)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x =$$

$$= \underbrace{\frac{y_0}{m}\sqrt{k^2 + (c\Omega)^2}}_{f_0}\, \operatorname{sen}(\Omega t + \phi)$$

$$\therefore \; X = \frac{\dfrac{y_0}{\omega_n^2 m} \cdot \sqrt{k^2 + (c\Omega)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{y_0 \sqrt{\dfrac{k^2}{\omega_n^4 m^2} + \dfrac{(2\xi\omega_n m \Omega)^2}{\omega_n^4 m^2}}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} =$$

$$= \frac{y_0 \sqrt{1 + (2\xi\Omega)^2/\omega_n^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{y_0 \sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\frac{X}{y_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} .$$

1b) Carreta cheia: $m_1 = 1000$ kg ; $\xi_1 = 0{,}5$.

$$\frac{12{,}2}{20} = \frac{\sqrt{1 + (2 \times 0{,}5 \times r_1)^2}}{\sqrt{(1-r_1^2)^2 + (2 \times 0{,}5 \times r_1)^2}} = \left[\frac{1 + r_1^2}{(1-r_1^2)^2 + r_1^2}\right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\frac{1 + r_1^2}{1 - 2r_1^2 + r_1^4 + r_1^2} = \left(\frac{12{,}2}{20}\right)^2 = 0{,}3721 \Rightarrow$$

$$0{,}3721\left(r_1^4 - r_1^2 + 1\right) - 1 - r_1^2 = 0 \Rightarrow$$

$$0{,}3721\, r_1^4 - 1{,}3721\, r_1^2 - 0{,}6279 = 0 \Rightarrow \quad r_1 = 2{,}02$$

(real e positivo - significado físico)

Carreta vazia: $m_2 = 250$ kg $= m_1/4$

$$2\xi\omega_n = \frac{c}{m} \Rightarrow \xi_2 = \frac{c}{2\,\omega_{n2}\, m_2} = \frac{c}{2\sqrt{\frac{K}{m_2}} \cdot m_2} \Rightarrow$$

$$\xi_2 = \frac{c}{2\sqrt{K\, m_2}} = \frac{c}{2\sqrt{K\,\frac{m_1}{4}}} = \frac{c}{\sqrt{K m_1}} = 2\,\xi_1$$

pois $\xi_1 = \dfrac{c}{2\sqrt{K m_1}}$. Logo $\xi_2 = 2 \times 0{,}5 = 1{,}0$.

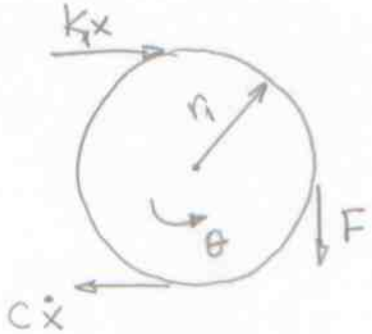
$$r_2 = \frac{\Omega}{\omega_{n2}} = \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{K}{m_2}}} = \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{K}{m_1/4}}} = \frac{\Omega}{2\sqrt{\frac{K}{m_1}}} = \frac{r_1}{2} = 1{,}01$$

pois $r_1 = \dfrac{\Omega}{\omega_{n1}}$.

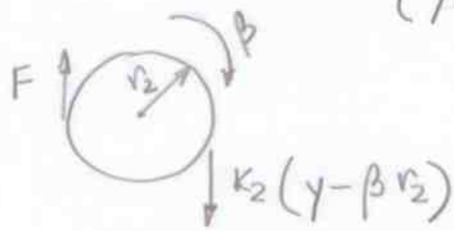
Logo, $$\frac{X_2}{20} = \left[\frac{1+(2\xi_2 r_2)^2}{(1-r_2^2)^2+(2\xi_2 r_2)^2}\right]^{1/2} \Rightarrow$$

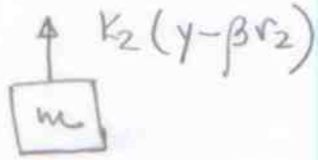
$$X_2 = 20\left[\frac{1+(2\times1\times1{,}01)^2}{(1-1{,}01^2)^2+(2\times1\times1{,}01)^2}\right]^{1/2} = 22{,}32 \text{ cm}$$

amplitude com a carreta vazia (pico-a-pico).

2a) 

$(y > \beta r_2)$





$r_1\theta = r_2\beta \; ; \quad x = r_1\theta .$

$$m\ddot{y} = -k_2(y-\beta r_2) \Rightarrow m\ddot{y} + k_2 y - k_2 r_1 \theta = 0$$

$$J_2\ddot{\beta} = F r_2 + k_2(y-\beta r_2) r_2 \Rightarrow J_2 \frac{r_1}{r_2}\ddot{\theta} = F r_2 + k_2(y - r_1\theta) r_2$$

$$F r_2 = J_2 \frac{r_1}{r_2}\ddot{\theta} - k_2(y - r_1\theta) r_2$$

$$J_1\ddot{\theta} = -c\dot{x}r_1 - K_1 x r_1 - F r_1 = -c r_1^2\dot{\theta} - K_1 r_1^2\theta - F r_1$$

$$J_1\ddot{\theta} + c r_1^2\dot{\theta} + K_1 r_1^2\theta + r_1\left[J_2 \frac{r_1}{r_2^2}\ddot{\theta} - k_2(y - r_1\theta)\right] = 0$$

$$\left[J_1 + J_2\frac{r_1^2}{r_2^2}\right]\ddot{\theta} + c r_1^2\dot{\theta} + \left(K_1 r_1^2 + K_2 r_1^2\right)\theta - k_2 r_1 y = 0$$

matricialmente:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_1 + J_2 \frac{r_1^2}{r_2^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c r_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 r_1 \\ -k_2 r_1 & k_1 r_1^2 + k_2 r_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2b) $c = 0$; $r_1 = r_2 = 1$; $m = 1$; $J_1 = J_2 = 5$; $k_1 = 1$; $k_2 = 2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y \\ \Theta \end{Bmatrix} e^{st} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y \\ \Theta \end{Bmatrix} s^2 e^{st}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} Y \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} s^2 + 2 & -2 \\ -2 & 10s^2 + 3 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow (s^2+2)(10s^2+3) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10s^4 + 20s^2 + 3s^2 + 6 - 4 = 0 \Rightarrow 10s^4 + 23s^2 + 2 = 0$$

$\omega_{n1} = 0{,}3009$; $\omega_{n2} = 1{,}4864$ (frequências naturais)