Turma:

MA 141 P Geometria analítica

Segundo Semestre de 2008

Primeira Prova - 04/09/2008

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Q 1	
Q 2	
Q 3	
Q 4	
Q 5	
T o t a l	

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

Questão 1 (0,7 ponto cada item)
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a.X + a.Y + 4Z & = & 1 \\ a.X + Z & = & 1/4 \\ a.Y + 2Z & = & b \end{array} \right.$$

Para que valores de a e b o sistema:

(i) admite solução única;

(ii) admite infinitas soluções;

(iii) não admite soluções.

Solução: Basta ver quando o determinante da matriz associada ao sistema se anula:

$$\det \begin{pmatrix} a & a & 4 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} = a^2.$$

Podemos concluir portanto:

(i) o sistema tem solução única para qualquer valor de b se e somente se $a \neq 0$;

Se $a = 0$, o sistema reduz para:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4Z & = & 1 \\ Z & = & 1/4 \\ 2Z & = & b \end{array} \right.$$

Portanto, podemos concluir:

(ii) o sistema tem infinitas soluções, dadas por $(x = t, y = s, z = 1/4)$, se e somente se $a = 0$ e $b = 1/2$;

(iii) o sistema não admite soluções se e somente se $a = 0$ e $b \neq 1/2$.

Questão 2 (0,5 ponto cada item)
Verdadeiro ou Falso? Demonstre ou dê contra-exemplo.

(i) Se AB é uma matriz $n \times n$ inversível, então A e B também são matrizes $n \times n$ inversíveis;

(ii) Se A e B são matrizes $n \times n$ equivalentes por linhas, então $\det(A) = \det(B)$;

(iii) Se $A^{\mathrm{t}} = A^2$ então $\det(A) = 1$;

(iv) Se A e B são matrizes $n \times n$ inversíveis, então $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

Solução:
(i) FALSO. Por exemplo, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estas matrizes não são quadradas, mas o produto é a matriz I_2, que é inversível.
(ii) FALSO. Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

são equivalentes por linhas, mas $\det(A) = 1$ enquanto $\det(A) = -1$.
(iii) FALSO. Por exemplo, se A é a matriz nula, vale que $A^{\mathrm{t}} = A^2$, mas $\det(A) = 0$.
(iv) FALSO. Por exemplo, considere as matrizes A e B do item anterior. Elas são inversíveis, mas a matriz $A + B$ não é, pois $\det(A + B) = 0$. Portanto a igualdade $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ não pode ser válida.

Questão 3 (2 pontos)

Encontre a solução geral do seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + w &= 8 \\ x + 3y + w &= 7 \\ x + 2z + w &= 3 \end{cases}$$

Solução: A matriz aumentada do sistema é

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Aplicando o método de Gauss-Jordan chegamos à matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Portanto a solução geral é $(x = 1 - \alpha, y = 2, z = 1, w = \alpha)$.

Questão 4 (2 pontos)
Usando o método de Gauss-Jordan, encontre a inversa da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solução: Devemos encontrar a forma escalonada reduzida da matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Encontramos:

$$\left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

A matriz inversa é a da direita.

Questão 5 (1 ponto cada item)

(i) Mostre que se A é uma matriz $n \times n$ tal que $A^3 = \overline{0}$, então $(I_n + A)(I_n - A + A^2) = I_n$

(ii) Usando o item anterior, calcule a inversa da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução:
(i)

$$(I_n + A)(I_n - A + A^2) = I_n + A - A - A^2 + A^2 + A^3 = I_n + A^3 = I_n.$$

(ii) Tomando

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

então $B = I_n + A$. Como $A^2 = A^3 = \overline{0}$ temos, pelo item anterior, que $(I_n + A)^{-1} = (I_n - A + A^2)$. Assim

$$B^{-1} = I_n - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$