EE 400 - 3ª prova

26/11/08 - 2º sem. 2008 - Prof. Rafael

1) No 3º quadrante: $f(z) = |x| + i|y| = -x - iy = -z$

(função analítica)

No 1º quadrante: $f(z) = |x| + i|y| = x + iy = z$

(também analítica)

Portanto: $I = \int_C f(z)\,dz = \int_{-5-5i}^{0} (-z)\,dz + \int_{0}^{5+5i} z\,dz$

pois nos dois trechos a integral não depende do caminho.

Tem-se então:

$$I = -\frac{z^2}{2}\Big|_{-5-5i}^{0} + \frac{z^2}{2}\Big|_{0}^{5+5i} = \frac{z^2}{2}\Big|_{z=-(5+5i)} + \frac{z^2}{2}\Big|_{z=5+5i}$$

$$= z^2\Big|_{z=5+5i = 5\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = (5\sqrt{2})^2\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{50i}$$

2) $$I = \oint_{|z|=10} \frac{1}{\operatorname{senh} z}\, dz$$

Os pontos singulares de $\frac{1}{\operatorname{senh} z}$ são os zeros da função $\operatorname{senh} z$, dados por $z = n i \pi$

$n = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Todos estes pontos singulares são polos simples pois:

$\frac{1}{\operatorname{senh} z} = \frac{p(z)}{q(z)}$ com $p(z) = 1$ e $q(z) = \operatorname{senh} z$ (ambas funções inteiras)

$q'(z) = \cosh z$, sendo

i.e. $q'(n\pi i) = \cosh(n\pi i) = (-1)^n$

$$\left\{\begin{array}{l} q'(0) = 1 \\ q'(\pi i) = q'(-\pi i) = -1 \\ q'(2\pi i) = q'(-2\pi i) = 1 \\ q'(3\pi i) = q'(-3\pi i) = -1 \\ \vdots \end{array}\right.$$

Em cada polo, o resíduo é dado por:

$$\boxed{K_n = \frac{1}{q'(n\pi i)}} = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$$

Finalmente deve-se levar em conta que, dentro do círculo $|z| = 10$, somente estão presentes os polos correspondentes a $n \in [-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3]$, logo

$$I = 2\pi i \cdot \sum_{n=-3}^{3} K_n = \boxed{-2\pi i}$$

3) $f(z) = \dfrac{1}{z-2} \cdot \dfrac{1}{z-3}$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{-1}{1-(z-2)} = \begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^{n} & |z-2| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^{-n-1} & |z-2| > 1 \end{cases}$$

Portanto:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^{n-1} & 0 < |z-2| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^{-n-2} & |z-2| > 1 \end{cases}$$

4) $f(z) = \dfrac{z + \pi i}{\cosh z} = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ (ambas funções inteiras)

Além disso, $q'(z)\Big|_{z = i\frac{\pi}{2}} = \operatorname{senh} z \Big|_{z = i\frac{\pi}{2}} = i \neq 0$

Portanto $z_0 = i\frac{\pi}{2}$ é um polo simples e o resíduo de $f(z)$ neste ponto é:

$$K = \frac{p(i\pi/2)}{q'(i\frac{\pi}{2})} = \frac{i\frac{\pi}{2} + \pi i}{2} = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

5) $$I = \int_0^{2\pi} \frac{1+4\cos\theta}{17-8\cos\theta}\, d\theta$$

Fazendo $z = e^{i\theta}$ ~~tem~~ - se:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad ; \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

Logo: $$I = \oint_{|z|=1} \frac{1+4\frac{z^2+1}{2z}}{17-8\frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} = i\oint \frac{2z^2+z+2}{z(4z^2-17z+4)}\, dz$$

$$= \frac{i}{4}\oint_{|z|=1} \frac{2z^2+z+2}{z(z-1/4)(z-4)}\, dz = \frac{i}{4}\cdot 2\pi i \cdot (K_1+K_2)$$

Sendo K_1 e K_2 respectivamente os resíduos de $\frac{2z^2+z+2}{z(z-1/4)(z-4)}$ em $z=0$ e $z=1/4$

$$K_1 = \left.\frac{2z^2+z+2}{(z-1/4)(z-4)}\right|_{z=0} = 2$$

$$K_2 = \left.\frac{2z+z+2}{z(z-4)}\right|_{z=1/4} = -\frac{38}{15}$$

Finalmente: $$I = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{8}{15}\right) = \boxed{\frac{4\pi}{15}}$$