Nome: GABARITO R.A.:

Métodos Matemáticos I — 3º Teste — (9/04/2008)

(**Atenção:** *Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.*)

1. (9.3.2 - 5 pontos) Mostre que a equação de Helmholtz $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$ continua sendo separável em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) se a constante k^2 for generalizada para uma função $k^2(\rho,\theta,z) = k_1^2 + f(\rho) + g(\theta)/\rho^2 + h(z)$, sendo k_1 uma constante e $f(\rho)$, $g(\theta)$ e $h(z)$ funções arbitrárias.

2. (9.3.11 *plus* - 5 pontos) Mostre que se $\phi(\rho,\theta,z)$ for uma solução da equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ *em coordenadas cilíndricas*, $\frac{\partial\phi}{\partial z}(\rho,\theta,z)$ também será. O que se pode afirmar sobre $\frac{\partial\phi}{\partial\rho}(\rho,\theta,z)$? Será também uma solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas? Por que?

1) $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\phi + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi + \left(k_1^2 + f(\rho) + \frac{g(\theta)}{\rho^2} + h(z)\right)\phi = 0$

$\phi = P(\rho)\Theta(\theta)Z(z) \Rightarrow \Theta Z\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{d}{d\rho}P + PZ\frac{1}{\rho^2}\Theta'' + P\Theta Z'' + (\dots)P\Theta Z = 0$

Dividindo-se por $P\Theta Z$ e rearranjando-se:

$\frac{1}{\rho P}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dP}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\Theta''}{\Theta} + g(\theta)\right) + \frac{Z''}{Z} + h(z) = -k_1^2 \Rightarrow \begin{cases} Z'' + (h(z) + k_z^2)Z = 0 \\ \Theta'' + (g(\theta) + k_\theta^2)\Theta = 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{d}{d\rho}P + k_1^2 - k_z^2 - \frac{k_\theta^2}{\rho^2} = 0 \end{cases}$

2) $\nabla^2\frac{\partial}{\partial z}\phi = \frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\phi$, em outras palavras, $\left[\nabla^2, \frac{\partial}{\partial z}\right] = 0.$

Portanto, se $\nabla^2\phi = 0$, $\nabla^2\frac{\partial}{\partial z}\phi = 0.$

$\nabla^2\frac{\partial}{\partial\rho}\phi \neq \frac{\partial}{\partial\rho}\nabla^2\phi$ $\left(\left[\nabla^2, \frac{\partial}{\partial\rho}\right] \neq 0\right)$, portanto $\nabla^2\phi = 0$ <u>não</u> implica em $\nabla^2\frac{\partial}{\partial\rho}\phi = 0.$

<u>Curiosidade:</u> $\left[\nabla^2, \frac{\partial}{\partial\rho}\right] = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}, \frac{\partial}{\partial\rho}\right] + \left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \frac{\partial}{\partial\rho}\right]$

$= -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$