Nome: ______________________________ R.A.: ____________

Métodos Matemáticos I **6º Teste** (11/06/2008)

(**Atenção:** *Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)*

1. (10.3.9 *There is no free lunch.*) Considere o conjunto linearmente independente de funções $u_n(x) = e^{-nx}$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, no intervalo $0 \le x < \infty$.

   (a) Forme, a partir das funções u_n, um conjunto de funções $\{v_n(x)\}$ ortogonais sobre o intervalo $0 \le x < \infty$ e com peso $w(x) = 1$. *Solução: basta usar Gram Schmidt, não é necessário calcular-se o termo geral explicitamente, apenas os três primeiros vetores v_i. Temos $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 - \alpha_1^{(2)} v_1$, $\dots v_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(n)} v_i$, sendo*

   $$\alpha_i^{(m)} = \frac{(v_i, u_m)}{(v_i, v_i)}.$$

   Os primeiros valores correspondem a $\alpha_1^{(2)} = 2/3$, $\alpha_1^{(3)} = 1/2$, $\alpha_2^{(3)} = 6/5$, $\alpha_1^{(4)} = 2/5$, $\alpha_2^{(4)} = 6/5$, $\alpha_3^{(4)} = 12/7, \dots$.

   (b) As funções u_n são soluções da equação auto-adjunta $u_n'' = n^2 u_n$. Por que a teoria de Sturm-Liouville não é suficiente neste caso para garantir a ortogonalidade das funções u_n? *Solução: Porque as condições de contorno do problema ($u_n(0) = 1$ e $u_n(\infty) = 0$) não são suficientes para caracterizar o operador como auto-adjunto.*

   (c) Você esperaria que as funções v_n também satisfizessem a equação auto-adjunta $v_n'' = n^2 v_n$? Por quê? *Solução: Não, pois a combinação linear de autofunções com autovalores diferentes não é autofunção.*

Questão extra: Mostrar que o conjunto de funções u_n, com n arbitrário, é linearmente independente no intervalo $[0, \infty)$. *Solução: O Wronskiano para u_n será:*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & u_3' & \cdots & u_n' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & \cdots & u_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & w_3^{(n)} & \cdots & w_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} & e^{-3x} & \cdots & e^{-nx} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} & -3e^{-3x} & \cdots & -ne^{-nx} \\ e^{-x} & 4e^{-2x} & 9e^{-3x} & \cdots & n^2 e^{-nx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(-1)^{n-1}e^{-x} & -(-2)^{n-1}e^{-2x} & -(-3)^{n-1}e^{-3x} & \cdots & -(-n)^{n-1}e^{-nx} \end{vmatrix} =$$

$$-\left(-e^{-x}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 4 & 9 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

O determinante em questão é um determinante de Vandermonde, que é diferente de zero, o que garante que o Wronskiano para u_n é diferente de zero. Prova simples da invertibilidade de uma matriz de Vandermonde: considere a matriz $n \times n$ de Vandermonde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

com $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$. É simples mostrar que a função $p(x) = \det M$ é um polinômio de grau $n-1$ (basta usar Laplace na primeira coluna). Porém, é simples também adivinhar todas *as raízes de $p(x)$: correspondem a $x = a_i$ (colunas iguais), de onde tem-se que, necessariamente, $p(x) = c \prod_{i=1}^{n-1}(x - a_i)$, sendo c uma constante. Basta agora mostrar que $c \neq 0$. Isto pode ser feito por indução, tomando-se $x = 0$ e considerando-se o determinante de uma matrix $(n-1) \times (n-1)$ de Vandermonde, mas o espaço nesta margem é muito reduzido... Boas férias!*