Nome: GABARITO R.A.:

MS550/F520 **1ª Prova** (23/04/2008)

3ª Questão: se $\{f_i\}_{i=1..N}$ é L.I. então

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_N \\ f_1' & f_2' & f_3' & \cdots & f_N' \\ \vdots & & & & \vdots \\ f_1^{(N-1)} & f_2^{(N-1)} & \cdots & & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

para o caso em questão

$$\begin{vmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots \\ 0 & 1 & x & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} = 1$$

1. (1.13.1 *plus*) Considere o campo vetorial

$$\vec{F} = (x^2+y^2+z^2)^n(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}).$$

   (a) (0.5 Ponto) Escreva $\vec{F}$ em coordenadas cilíndricas.

   (b) (0.5 Ponto) Calcule $\nabla \cdot \vec{F}$.

   (c) (0.5 Ponto) Calcule $\nabla \times \vec{F}$.

   (d) (0.5 Ponto) Determine uma função escalar ϕ tal que $\vec{F} = -\nabla\phi$.

   (e) (0.5 Ponto) Para que valores de n a função escalar ϕ diverge **na origem**?

2. (3.0 Pontos) Encontre a solução geral da equação diferencial

$$4x^2y'' + xy' + (x-1)y = 0$$

utilizando o método de Frobenius em torno do ponto $x = 0$.

3. (9.6.3 - 2.0 Pontos) Mostre que o conjuto de funções

$$\left\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots, \frac{x^N}{N!}\right\},$$

com $N > 0$, é linearmente independente.

4. (9.6.26 - 2.5 Pontos) Encontre as **duas** soluções linearmente independentes da equação

$$4x^2y'' + (1-\alpha^2)y = 0,$$

para **todos** os valores de α.

4) Eq. de Euler, solução do tipo $y = Ax^\lambda$. Substituindo-se na eq. tem-se $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - \alpha^2 = 0$, $\lambda = \frac{1\pm\alpha}{2}$

se $\alpha \neq 0$, as soluções são: $y = C_1 x^{(1+\alpha)/2} + C_2 x^{(1-\alpha)/2}$,

se $\alpha = 0$, uma solução é $y_1 = C_1\sqrt{x}$. Pela variação de parâmetros, a outra será $y_2 = C\sqrt{x}\ln x$

1.a) Coordenadas cilíndricas (r,θ,z): $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad \hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$, $\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$, $\hat{e}_z = \hat{k}$

$$\vec{F} = (r^2+z^2)^n(r\hat{r} + z\hat{z})$$

b) $$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}x(x^2+y^2+z^2)^n + \frac{\partial}{\partial y}y(x^2+y^2+z^2)^n + \frac{\partial}{\partial z}z(x^2+y^2+z^2)^n =$$

$$3(x^2+y^2+z^2)^n + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2+y^2+z^2)^n = (2n+3)(x^2+y^2+z^2)^n$$

c) $\nabla\times\vec{F}$ = Somente a componente $\hat{i}$: (as outras seguem de maneira análoga) $\left(\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y\right)\hat{i} = z\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^n - y\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^n$

$$= n(x^2+y^2+z^2)^{n-1}\left(z\frac{\partial}{\partial y}y^2 - y\frac{\partial}{\partial z}z^2\right) = 0$$

$$\nabla\times\vec{F} = 0$$

d) $\vec{F} = r^{2n+1}\hat{r}$ (Coordenadas esféricas)

$\phi = -\dfrac{r^{2n+2}}{2n+2}$, $n \neq -1$

$\phi = -\ln r$, $n = -1$

e) ϕ diverge na origem para $n < 0$.

2) $4x^2y'' + xy' + (x-1)y = 0$ (Equação da família das eq. de Bessel)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[4(n+k)(n+k-1) + (n+k) - 1\right] a_n x^{n+k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+k} = 0$$

Equação indicial:

$$4k(k-1) + k - 1 = 4k^2 - 3k - 1 = 0 \rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8}$$

$$k = 1 \text{ ou } k = -\frac{1}{4}$$

Relação de recorrência:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{4(n+k)^2 - 3(n+k) + 1}$$

1ª Solução: $k = 1$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{4n^2 + 5n} = \dfrac{a_{n-1}}{n(4(n+1)+1)}$

Solução geral da relação de recorrência:

$$a_n = \frac{5\,a_0}{n!\,[4(n+1)+1]!!!!} \qquad N!!!! = N(N-4)(N-8)\cdots 1$$

2ª Solução $k = -\frac{1}{4}$ $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{4n^2 - 5n} = \dfrac{a_{n-1}}{n(4n-5)}$

$$a_n = \frac{a_0}{n! \prod_{i=1}^{n} (4i - 5)}$$