Yashmin de Queiroz Costa   RA: 086065

1. 1,0 + 1,0 + 0,5 + 1,0
2. 1,0 + 1,0
3. 1,0 + 0,5
4. 0,0

7,0

1) $\ddot{y} + 2\xi w_n \dot{y} + w_n^2 y = r(t)$

$\ddot{y} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}\, \dot{y} + 2y = 0$

$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0$ $y(0) = 0$
$\dot{y}(0) = -2$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$

$\lambda = \frac{-2 \pm 2j}{2} \rightarrow \lambda_1 = -1 + j$
$\lambda_2 = -1 - j$

∴ A equação será da forma $y(t) = a_1 e^{(-1+j)t} + a_2 e^{(-1-j)t}$

Simplificando, temos que esta mesma equação pode ser escrita como:

$y(t) = A e^{-t} \cos t + B e^{-t} \operatorname{sen} t$

Usando as condições iniciais para encontrar as constantes:

$y(0) = \boxed{A = 0}$

$\dot{y}(t) = -A e^{-t} \cos t - A e^{-t} \operatorname{sen} t - B e^{-t} \operatorname{sen} t + B e^{-t} \cos t$

$\dot{y}(0) = -A + B = -2$ ∴ $\boxed{B = -2}$

∴ $\boxed{y(t) = -2e^{-t} \operatorname{sen} t}$ $\forall\, t \geq 0$

b) $I = \int_0^\infty y(t)\, dt$

Sabemos da teoria que $\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$ é a definição de transformada de Laplace.

Do item a temos que $y(t) = 2e^{-t} \operatorname{sen} t$. Assim $I = \int_0^\infty -2 e^{-t} \operatorname{sen} t\, dt$

Para descobrirmos I, iremos considerar $s = 1$ ∴ $\hat{f}(1) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-t}\, dt$

com isso ficamos que $f(t) = -2\,\text{sen}\,t$

Aplicando a transformada de Laplace em f(t) temos que

$\hat{f}(s) = -2 \cdot \dfrac{1}{s^2+1}$ p/ $s = 1$ $\hat{f}(1) = \dfrac{-2}{1^2+1} = -1$

Dessa forma temos que $I = \int_0^{\infty} 2\,\text{sen}\,t \cdot e^{-t}\,dt = -1$

$\boxed{I = -1}$ ✓

c) Do item a temos que:

$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = g(t)$

Aplicando a transformada de Laplace:

$[s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + 2[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = G(s)$

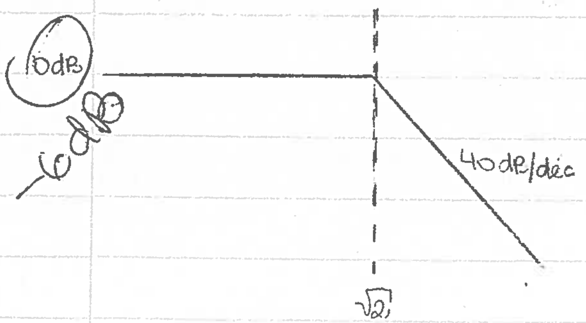
$s^2Y(s) - (-2) + 2sY(s) + 2Y(s) = G(s)$

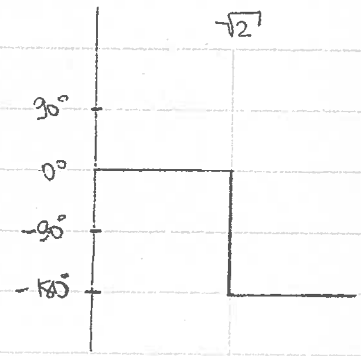
$Y(s)[s^2 + 2s + 2] + 2 = G(s)$

$\dfrac{Y(s)}{G(s)} = \dfrac{-2}{s^2+2s+2} = -1 \cdot \dfrac{2}{s^2+2s+2}$ padrão $\dfrac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$

$H(s) = \dfrac{-2}{s^2+2s+2}$ ganho $= -1$

$20\log(-1) = -20\log 1 = 0$ dB





RA: 086065

③

Resposta em regime p/ $u(t) = 10 sen(2\sqrt{2}t)$

$$|H(j2\sqrt{2})| = \frac{2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{2}{4.2} = \frac{1}{4}$$

Pelo bode de fase temos que: $\theta = -180°$

$$\boxed{y_p(t) = \frac{10}{4} sen(2\sqrt{2}t - \pi)}$$

X

d) CI nulas

$u(t) = k_1(r(t) - y(t)) - k_2\dot{y}(t)$ onde $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = u(t)$

$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = k_1 r(t) - k_1 y(t) - k_2\dot{y}(t)$

$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t)[k_2 + 2] + y(t)[k_1 + 2] = k_1 r(t)$

$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + (k_2+2).[sY(s) - y(0)] + (k_1+2)Y(s) = k_1.V(s)$

$s^2Y(s) + (k_2+2)sY(s) + (k_1+2)Y(s) = k_1.V(s)$

$Y(s)[s^2 + (k_2+2)s + (k_1+2)] = k_1.V(s)$

$$H(s) = \frac{k_1}{s^2 + (k_2+2)s + k_1 + 2}$$

s^2	1	k_1+2
s	k_2+2	
1	k_1+2	

$$\boxed{\begin{array}{l} k_1 > -2 \\ k_2 > -2 \end{array}}$$

✓

$\omega_n^2 = k_1 + 2$ ∴ $\omega_n^2 = \sqrt{k_1+2}$

$2\xi\omega_n = k_2 + 2 \rightarrow \xi = \dfrac{k_2+2}{2\sqrt{k_1+2}}$

✓

2) A função $f_2(t)$ corresponde ao pólo v_c, pois ela entra em regime mais rapidamente pois seu pólo está dentro da região de convergência.

A função $f_1(t)$ corresponde ao pólo s_b. A função $f_1(t)$ possui uma maior ω_n. Isso é comprovado pela localização do pólo e pelo transitório de $f_1(t)$

A função $f_3(t)$ corresponde a $s_a(t)$. Isso pode ser provado pela própria figura, dado que $\xi\omega_n$ se encontra em $-0,3$, comprovando que o sistema demora mais tempo para estabilizar.

b) $\epsilon < 2\%$

$f_1(t)$: $t_e = \dfrac{-\ln\epsilon}{\xi\omega_n} = \dfrac{-(-4)}{-(-1)} = 4 \quad \therefore \boxed{t_{e1} = 4 \text{ seg}}$

$f_2(t)$: $t_e = \dfrac{-\ln\epsilon}{\xi\omega_n} = \dfrac{4}{1} = 4 \quad \therefore \boxed{t_{e2} = 4 \text{ seg}}$

$f_3 =$ $t_e = \dfrac{-\ln\epsilon}{\xi\omega_n} = \dfrac{-(-4)}{-(-0,3)} = \dfrac{4}{0,3} \quad \therefore \boxed{t_{e3} = \dfrac{40}{3} \text{ seg}} \approx 13,3 \text{ seg}$

Apenas as funções f_1 e f_2 satisfazem $t_e < 10$ s

3) a) sistema em malha fechada com ganho = 1.

$$1 + C(s).G(s) = 0 \quad \rightarrow \text{ equação de malha fechada}$$

$$1 + \frac{k(s+0,5)}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{(s-1)} = 0$$

$$s(s+2).(s-1) + k(s+0,5) = 0$$

$$(s^2+2s)(s-1) + k(s+0,5) = 0$$

$$s^3 + 2s^2 - s^2 - 2s + ks + 0,5k = 0$$

$$s^3 + s^2 + s(k-2) + 0,5k = 0$$

Fazendo a Tabela de Routh para descobrir k

s^3	1	$k-2$
s^2	1	$0,5k$
s^1	$0,5k-2$	
s^0	$0,5k$ >0	

$k>0$ ok!

$$\frac{k-2-0,5k}{1} = 0,5k-2$$

Assim: $\frac{1}{2}k - 2 > 0$

$$\boxed{k>4}$$

Portanto: o sistema é assintoticamente estável para $k>4$

b) $k = 8$

$CD(z) = ?$ $\quad CD(z) = (1-z^{-1}).Z\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C(s)}{s}\right)\Big|_{t=kT}\right\}$

$$\frac{C(s)}{s} = \frac{8(s+0,5)}{s^2(s+2)} = \frac{8s+4}{s^2(s+2)}$$

Por frações parciais: $\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2}$ $\therefore$ $\frac{C(s)}{s} = \cancel{\frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}} - \frac{5}{s+2}$

$\boxed{B = 2}$

$C = \frac{-16+4}{4} = \frac{-20}{4} = \boxed{-5}$

Por substituição $2A + 2 = 8$

$\boxed{A = 3}$ $\rightarrow$

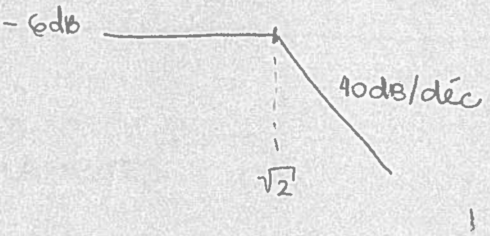
CORREÇÃO DA P1

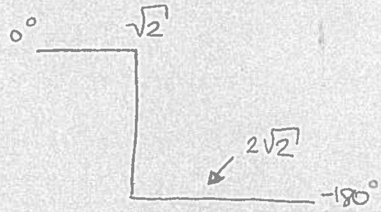
Q1) c) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = u(t)$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y\} = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

$$(s^2 + 2s + 2)\, Y(s) = U(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} \quad \boxed{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{ganho}$$





$$20 \log \frac{1}{2} = -6\,dB$$

$$u(t) = 10\,sen(2\sqrt{2}\,t)$$

$$y_{perm}(t) = \frac{5}{4}\, sen(2\sqrt{2}\,t - \pi)$$

Q3) b) $k = 8$ Tinha que fazer por SOZ

$C_D(z) = ?$

$$C(s) = \frac{8(s+0,5)}{s(s+2)}$$

$$C_D(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{C(s)}{s} \right\} \Big|_{t=kT} \right\}$$

$$\frac{C(s)}{s} = \frac{8(s+0,5)}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = 3 \quad B = 2 \quad C = -3$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{C(s)}{s} \right\} = 3 + 2t - 3e^{-2t} \quad t \geq 0$$

$$C(kT) = 3 + 2kT - 3(e^{-2T})^{k}$$

$$Z(C(kT)) = 3\frac{z}{z-1} + 2T\frac{z}{(z-1)^2} - 3\frac{z}{z-e^{-2T}}$$

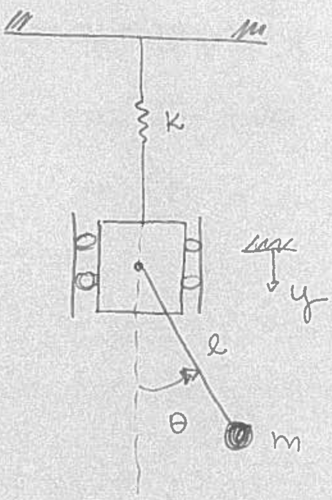
$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a} = \sum_{k=0} a^k z^{-k}$$

$$\frac{d}{dz}\frac{z}{z-a} = -\sum_{k=0}^{\infty} k a^k z^{-k}$$

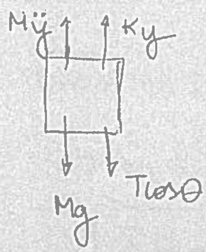
$$\therefore C_D(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left[3\frac{z}{z-1} + 2T\frac{z}{(z-1)^2} - 3\frac{z}{z-e^{-2T}}\right]$$

$$\boxed{C_D(z) = 3 + \frac{2T}{z-1} - 3\frac{z-1}{z-e^{-2T}}}$$

Q4) MODELAMENTO

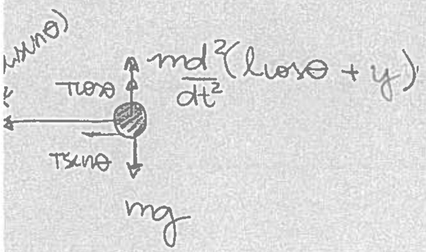


Carro



$$\boxed{M\ddot{y} + Ky = Mg + T\cos\theta}$$

Pêndulo



$$\boxed{\begin{aligned} &m\frac{d^2}{dt^2}(y + l\cos\theta) + T\cos\theta = mg \\ &m\frac{d^2}{dt^2}(l\,\text{sen}\,\theta) + T\,\text{sen}\,\theta = 0 \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} M\ddot{y} + Ky = T\cos\theta + Mg \\ m\ddot{y} - ml\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - ml\,\text{sen}\,\theta\,\ddot{\theta} + T\cos\theta = mg \\ ml\cos\theta\,\ddot{\theta} - ml\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}^2 + T\,\text{sen}\,\theta = 0 \end{cases}$$

$$(m+M)\ddot{y} + Ky - ml\,\text{sen}\,\theta\cdot\ddot{\theta} - ml\,\text{sen}\,\theta\cdot\ddot{\theta} - ml\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 = (M+m)\cdot g$$

$$m\ddot{y}\,\text{sen}\,\theta - ml\cdot\ddot{\theta} = mg\,\text{sen}\,\theta$$

b) No equilíbrio

$$\theta(t) = \theta_{eq}, \quad y(t) = y_{eq} \quad \forall\, t \geq 0$$

$$K.y_{eq} = (M+m)g$$

$$\boxed{y_{eq} = \frac{(M+m).g}{K}}$$

$$mg\,\text{sen}\,\theta_{eq} = 0 \rightarrow \boxed{\theta_{eq} = n.\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.}$$

Linearizar em torno de $y_{eq} = \frac{(M+m)g}{K}$

$$\theta_{eq} = 0$$

$\theta \approx 0 + \delta\theta$

$y = y_{eq} + \delta y$

$\sin \delta\theta = \delta\theta$

$\cos \delta\theta = 1$

$$(m+M).\,\delta\ddot{y} + K y_{eq} + K.\,\delta y - ml\,\cancel{\delta\theta}^{0}\,\delta\ddot{\theta} - ml(\delta\dot{\theta})^2 = (M+m)g$$

$$(m+M)\,\delta\ddot{y} + K\,\delta y = 0$$

$$m\,\delta\ddot{y}\,\theta - ml\,\delta\ddot{\theta} = mg\,\delta\theta$$

$$\boxed{\delta\ddot{\theta} + \frac{g}{l}.\,\delta\theta = 0}$$