INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP
EXAME - F 315 B 17/12/2010

RA:________ Nome:______________________________________

Assinatura:____

1)_____
2)_____
3)_____
4)_____
Nota:______

Questão 1:

Uma partícula de massa m é projetada verticalmente para cima com velocidade inicial v_0, e sofre ação da aceleração da gravidade e de uma força de retardo dada por $F_r = - mkv^2$. Considere apenas o trecho do movimento em que a partícula está subindo.

(a) Encontre a equação diferencial relacionando velocidade e posição para este problema.
(b) Resolva equação diferencial para encontrar a relação entre velocidade e posição, já considerando as condições iniciais.
(c) Encontre a altura máxima a que chega o projétil.

a) $F_y = (-) mkv^2 - mg$ (subida)

$\Rightarrow -mkv^2 - mg = m\frac{dv}{dt}$. Mas $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}$

$\Rightarrow mv\frac{dv}{dy} = mkv^2 + mg \Rightarrow v\frac{dv}{dy} = kv^2 + g$

b) $\frac{v\,dv}{kv^2+g} = dy \Rightarrow \int \frac{v\,dv}{kv^2+g} = \int dy + C = y + C$

Substituindo $u = kv^2 + g$, $du = 2kv\,dv$

$\Rightarrow \frac{1}{2k}\int \frac{du}{u} = y + C \Rightarrow \frac{1}{2k}\ln u = y + C \Rightarrow \frac{1}{2k}\ln(kv^2+g) = y + C$

Condições iniciais: $v(y=0) = v_0 \Rightarrow C = \frac{1}{2k}\ln(kv_0^2+g)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2k}\left[\ln(kv^2+g) - \ln(kv_0^2+g)\right] = \frac{1}{2k}\ln\left[\frac{kv^2+g}{kv_0^2+g}\right]$

(c) A altura máxima é aquela em que $v = 0$

ou seja:

$$y = \frac{1}{2k} \ln \left[-\frac{g}{kv_0^2 + g} \right] = \frac{1}{2k} \ln \left[\frac{kv_0^2}{g} + 1 \right]$$

Questão 2 (2.5 pts)

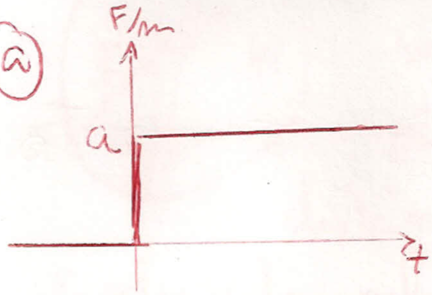
Considere um oscilador harmônico não amortecido de massa m com frequência angular natural ω_0, inicialmente em repouso na posição de equilíbrio.

(a) Considere que sobre o sistema atua uma força externa constante para t > 0, i.e., $F(t)/m = \begin{matrix} 0 (t<0) \\ a (t>0) \end{matrix}$, onde a é uma constante positiva. Encontre $x(t)$. (1.0)

(b) Considere que sobre o sistema atua uma força externa constante para $0 < t < \tau$, i.e., $F(t)/m = \begin{matrix} 0 \ (t<0) \\ a \ (0<t<\tau) \\ 0 \ (t>\tau) \end{matrix}$. Encontre $x(t)$ para $0 < t < \tau$ e para $t > \tau$. Dica: use o resultado de (a) e o princípio da superposição (1.0).

(c) Para o problema em (b), considere em particular que $\tau = 2\pi n/\omega_0$, onde n é um número inteiro positivo. Como será o movimento para $t > \tau$? (0.5)

(a)



Para $t < 0$, $x(t) = 0$

Para $t > 0$, temos $m\ddot{x} = -kx + F$

$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = F/m = a$

Sol. Homogênea: $x_H(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$

Sol. Particular não-Homogênea: $x_p = F/m\omega_0^2$

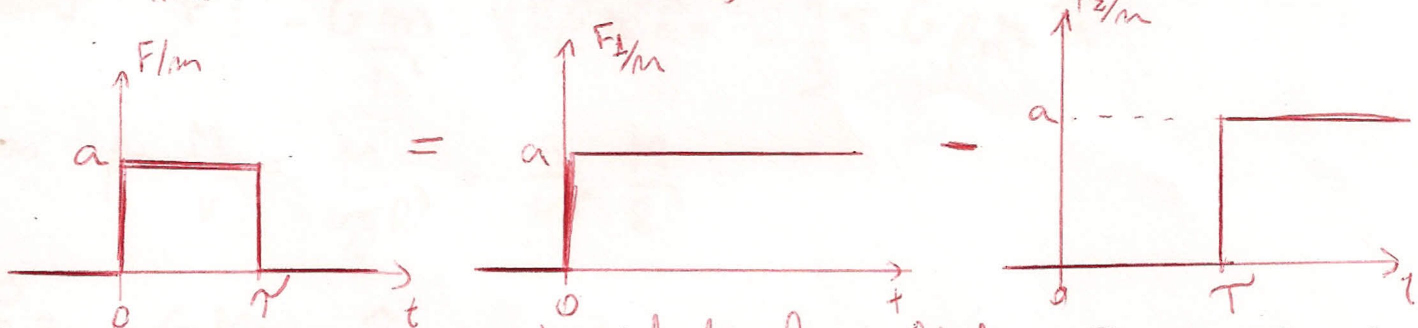
$\therefore x(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t + F/m\omega_0^2$

Cond. Iniciais: $x(t=0) = 0 \Rightarrow B + F/m\omega_0^2 = 0 \Rightarrow B = -F/m\omega_0^2$

$\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow A\omega_0 = 0 \Rightarrow A = 0$

$\therefore x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[1 - \cos\omega_0 t\right] = \frac{a}{\omega_0^2}\left[1 - \cos\omega_0 t\right]$

(b)



Para $0 < t < \tau$, o movimento é dado pelo resultado de (a). Para $t > \tau$: Considere as Forças $F(t)$, $F_1(t)$ e $F_2(t)$ no desenho acima.

Do ítem (a), temos:

P/ $F_1(t)$: $x_1(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[1 - \cos\omega_0 t\right] = \frac{a}{\omega_0^2}\left[1 - \cos\omega_0 t\right]$

P/ $F_2(t)$: $x_2(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[1 - \cos\omega_0(t-\tau)\right] = \frac{a}{\omega_0^2}\left[1 - \cos\omega_0(t-\tau)\right]$

Como $F(t) = F_1(t) - F_2(t)$, então, pelo princípio da superposição, $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Assim

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[1 - \cos\omega_0 t\right] - \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[1 - \cos\omega_0(t-\tau)\right]$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_0^2}^{a}\left[\cos[\omega_0(t-\tau)] - \cos\omega_0 t\right] \qquad (t > \tau)$$

(c) Se $\tau = 2\pi m/\omega_0$, então

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}^{a}\left[\cos(\omega_0 t - 2\pi m) - \cos\omega_0 t\right]$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_0^2}^{a}\left[\cos\omega_0 t - \cos\omega_0 t\right] = 0$$

A partícula ficará em repouso para $t > \tau$

Questão 3 (2.5 pts)

(a) Considere uma esfera com densidade não-uniforme, onde o campo gravitacional dentro da mesma seja constante. Encontre a dependência radial da densidade ρ(r).

(b) Uma massa pontual *m* está localizada a uma distância *D* do **centro** de uma barra fina de massa *M* e comprimento *L*, ao longo do eixo da barra. Encontre o potencial gravitacional e a força gravitacional exercida na massa pontual pela barra.

PS: $\Phi=-G\int_L \frac{\rho(r')}{r}dl'$; $\nabla^2\Phi=4\pi G\rho$; $\mathbf{F}=-m\nabla\Phi=-Gm\int_L \frac{\rho(r')}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r dl'$;

$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r})$ **(onde ψ é uma função esfericamente simétrica)**

ⓐ Campo Gravitacional Constante: $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi = g = cte$

Mas: $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ (Eq. Poisson)

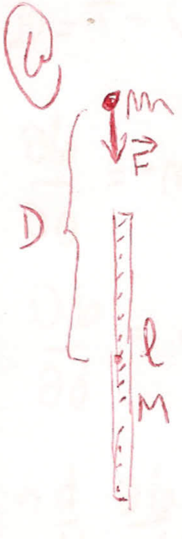
$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = 4\pi G\rho$ (simetria esférica)

$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} = cte \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial r} = g = cte$ (enunciado)

$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 g) = 4\pi G\rho \Rightarrow \frac{g}{r^2}\cdot 2r = 4\pi G\rho \Rightarrow$

$$\boxed{\rho = \frac{g}{2\pi G}\cdot\frac{1}{r}}$$

ⓑ



$$\Phi = -G\int_{D-l/2}^{D+l/2}\frac{\rho\,\cancel{dl}}{r}\,dr = -\frac{GM}{l}\ln\left[\frac{D+l/2}{D-l/2}\right]$$

onde D representa a posição da massa m

$\vec{F} = -m\vec{\nabla}\Phi$. Explorando a simetria do problema, concluímos que $\vec{F}$ aponta na direção do eixo da barra. Portanto:

$$F_z = -m\frac{d\Phi}{dD} = +\frac{GMm}{l}\,\frac{D-l/2}{D+l/2}\cdot\left[\frac{1}{D-l/2} - \frac{D+l/2}{(D-l/2)^2}\right]$$

$$= +\frac{GMm}{l}\,\cancel{\frac{D-l/2}{D+l/2}}\cdot\frac{-lm}{(D-l/2)^2} = -\frac{GMm}{D^2-l^2/4} \quad //$$

Resolução Alternativa:

Como a direção da força é conhecida, podemos facilmente computá-la por integração direta:

$$F_z = -Gm\int_{D-l/2}^{D+l/2}\frac{\rho}{r^2}\,dr = -Gm\frac{M}{l}\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)_{D-l/2}^{D+l/2}$$

$$= +\frac{GMm}{l}\cdot\left[\frac{1}{D+l/2} - \frac{1}{D-l/2}\right] = \frac{GMm}{l}\,\frac{D-l/2-D-l/2}{(D+l/2)(D-l/2)}$$

$$\Rightarrow F_z = -\frac{GMm}{D^2-l^2/4} \quad //$$

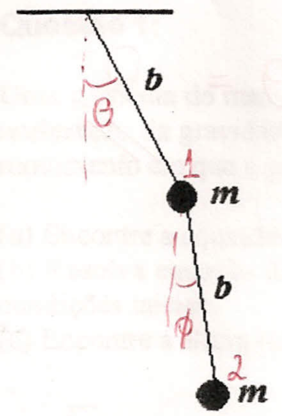
Questão 4 (2.5 pts)

Considere sistema de dois pêndulos simples, sendo que a base do segundo pêndulo está fixa à massa do primeiro (Figura). Não assuma pequenos ângulos.

(a) Encontre o Lagrangeano do sistema
(b) Usando as equações de Lagrange, encontre as equações do movimento.

PS: Note que as duas massas (m) e comprimentos das cordas (b) são idênticos, e o movimento está confinado ao plano da figura. Não assuma pequenas oscilações. As equações do movimento poderão estar acopladas.

(a)



$$\begin{cases} x_1 = b\sin\theta \\ y_1 = -b\cos\theta \end{cases} \quad ; \quad x_2 = b\sin\theta + b\sin\phi \quad ; \quad y_2 = -b\cos\theta - b\cos\phi$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_1 = b\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \quad ; \quad \dot{x}_2 = b\dot{\theta}\cos\theta + b\dot{\phi}\cos\phi \quad ; \quad \dot{y}_2 = b\dot{\theta}\sin\theta + b\dot{\phi}\sin\phi$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$= \frac{1}{2}mb^2\left[\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\cos^2\theta + (\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\phi}\cos\phi)^2 + (\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}mb^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)\right]$$

$$T = \frac{1}{2}mb^2\left[2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)\right]$$

$$U = mg\,y_1 + mg\,y_2 = -mgb(2\cos\theta + \cos\phi)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}mb^2\left[2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)\right] + mgb(2\cos\theta + \cos\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mb^2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta - \phi) - 2mgb\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mb^2\dot{\theta} + mb^2\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mb^2\ddot{\theta} + mb^2\ddot{\phi}\cos(\theta - \phi) - mb^2\dot{\phi}(\dot{\theta} - \dot{\phi})\sin(\theta - \phi)$$

Eq. Lagrange: $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 0$

$$\Rightarrow \cancel{-ml^2\dot\theta\dot\phi\sin(\theta-\phi)} - 2mgl\sin\theta - 2ml^2\ddot\theta - ml^2\ddot\phi\cos(\theta-\phi)$$
$$+ ml^2\dot\phi(\cancel{\dot\theta}-\dot\phi)\sin(\theta-\phi) = 0$$

$$\therefore \ddot\theta + \frac{1}{2}\ddot\phi\cos(\theta-\phi) + \frac{1}{2}\dot\phi^2\sin(\theta-\phi) + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = ml^2\dot\theta\dot\phi\sin(\theta-\phi) - mgl\sin\phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = ml^2\dot\phi + ml^2\dot\theta\cos(\theta-\phi)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = ml^2\ddot\phi + ml^2\ddot\theta\cos(\theta-\phi) - ml^2\dot\theta(\dot\theta-\dot\phi)\sin(\theta-\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{ml^2\dot\theta\dot\phi\sin(\theta-\phi)} - mgl\sin\phi - ml^2\ddot\phi - ml^2\ddot\theta\cos(\theta-\phi)$$
$$+ ml^2\dot\theta(\dot\theta-\cancel{\dot\phi})\sin(\theta-\phi) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot\phi + \ddot\theta\cos(\theta-\phi) - \dot\theta^2\sin(\theta-\phi) + \frac{g}{l}\sin\phi = 0$$