Instituto de Física Gleb Wataghin

UNICAMP

2a. Prova de F315 Mecânica Geral - turmas A e D

1o. Semestre de 2011

Nome: GABARITO RA: Turma:

1. (3,5 pontos) O Método de Green afirma que a posição $x(t)$ de um sistema físico pode ser escrita como
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,t')F(t')dt' \quad (1)$$
onde $F(t)$ é uma força qualquer que atua sobre o sistema e $G(t,t')$ é a função de Green. Supondo que o sistema físico seja um Oscilador Harmônico **Sub-Amortecido** (de massa m, constante elástica k e constante de amortecimento b) e que a aplicação de uma força impulsiva f num intervalo $\delta t \to 0$ não altera a posição do sistema mas imprime-lhe velocidade $v_0 = \frac{f}{m}\delta t$, deduza a função de Green $G(t,t')$.

Osc. Harm. Amortecido: $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta)$ $\begin{cases} \gamma = b/2m \\ \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{cases}$

$x(t_0) = 0 \implies \omega_1 t + \theta = \frac{\pi}{2} \implies$

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{f}{m}\delta t \implies A = \frac{f\delta t\, e^{\gamma t_0}}{m\omega_1}$

$$\implies x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq t_0 \\ \frac{f\delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin\left[\omega_1(t-t_0)\right] & \text{se } t > t_0 \end{cases}$$

Se tomarmos $F(t) = \sum_n f_n(t)$ tal que $F_n(t) = F(t_n)$ se $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ e $F(t) = 0$ nos outros casos, pelo Princípio Superposição:

$$x(t) = \sum_n \frac{F(t_n)\delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_n)} \sin\left[\omega_1(t-t')\right].$$

fazendo $\delta t \to 0$ e $t_n = t'$ $\implies x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{F(t')}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin\left[\omega_1(t-t')\right] dt$ (2)

Comparando (1) e (2):

$$\boxed{G(t,t') = \begin{cases} 0 & \text{se } t' > t \\ \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{m\omega_1} \sin\left[\omega_1(t-t')\right] & \end{cases}}$$

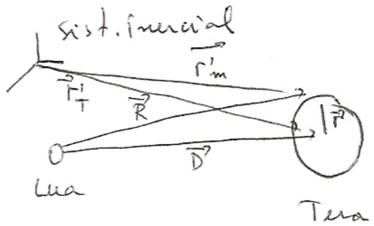
Nome: RA: Turma:

2. (3,5 pontos) O movimento das marés pode ser explicado pela atuação da força gravitacional do sistema Terra-Lua sobre um corpo de massa m situado sobre a superfície da Terra. Duas marés altas e duas marés baixas acontecem a cada 24 horas. Lembrando que se chama "Força de Maré" ao conjunto de forças devido à atração gravitacional do sistema Terra-Lua sobre o corpo na superfície da Terra, descontada a ação gravitacional da Terra sobre este corpo:

   (a) calcule a "Força de Maré" que atua sobre o corpo de massa m em função da distância D da Lua ao centro de massa da Terra e da distância R da Lua ao corpo de massa m.

   (b) calcule a intensidade (o módulo) da "Força de Maré" que provoca a maré baixa. Considere que $r << D$, onde r é o raio da Terra e D é a distância da Lua ao centro de massa da Terra.

a) ~~(1.5)~~ (2.0)



Forças sobre m:

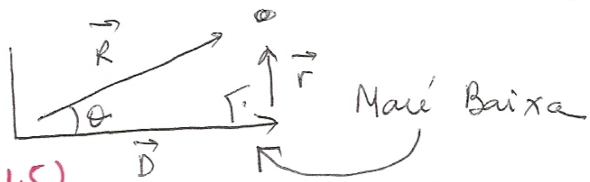
$$m\ddot{\vec r}'_m = -\frac{G_N m M_T}{r^2}\hat r - \frac{G_N m M_L}{R^2}\hat R \quad (1)$$

Força da Lua sobre o CM da Terra:

$$M_T\ddot{\vec r}'_T = -\frac{G_N M_T M_L}{D^2}\hat D \quad (2)$$

Tem-se: $\vec r = \vec r'_m - \vec r'_T \Rightarrow \ddot{\vec r} = \ddot{\vec r}'_m - \ddot{\vec r}'_T \underset{(1)+(2)}{=} -\frac{G_N M_T}{r^2}\hat r \boxed{\underbrace{-G_N M_L\left(\frac{\hat R}{R^2} - \frac{\hat D}{D^2}\right)}_{\vec F_{Maré}/m}}$

b) ~~(2.0)~~ (1.5)



$$\hat R = \hat D\cos\theta + \hat r\sin\theta = \hat D\frac{D}{R} + \hat r\frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat R}{R^2} - \frac{\hat D}{D^2} = \frac{1}{R^2}\left[\hat D\frac{D}{R} + \hat r\frac{r}{R}\right] - \frac{\hat D}{D^2}$$; sendo $R^2 = r^2 + D^2$:

$$= \frac{1}{(r^2+D^2)^{3/2}}\left[\hat D D + \hat r r\right] - \frac{\hat D}{D^2}$$;

$$r << D \Rightarrow \frac{1}{(r^2+D^2)^{3/2}} = \frac{1}{D^3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{r^2}{D^2}\right) \Rightarrow$$

$$|\vec F_{Maré}| = \left[\cancel{\frac{\hat D}{D^2}} + \hat r\frac{r}{D^3} - \frac{3}{2}\frac{r^2}{D^4} - \frac{3}{2}\frac{r^3}{D^5}\hat r - \cancel{\frac{\hat D}{D}}\right] G_N m M_L \simeq \boxed{\frac{G_N m M_L r}{D^3}}$$

Nome: RA: Turma:

(3.5 pontos)

3. Um cilindro com distribuição uniforme de matéria apresenta massa M e raio a.

   (a) calcule o momento de inércia do cilindro em relação ao seu eixo de simetria z.

   (b) o cilindro está sujeito à força peso e pode girar em torno de um eixo z' que é paralelo ao eixo z, está contido na superfície do cilindro e se encontra na posição horizontal. Calcule a frequência para pequenas oscilações deste movimento em torno da posição de equilíbrio.

Dado: Teorema dos Eixos Paralelos: $I_{z'} = I_z + Ma^2$

a) 

$$I_z = \frac{M}{\pi a^2} \int_0^a r^2 (2\pi r)\, dr = \frac{Ma^2}{2}$$ 1.0

b) $$I_{z'} = \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 \quad (\text{Teor.}) \Rightarrow I_{z'} = \frac{3}{2} Ma^2$$ 0.5

$\Rightarrow$ 

$$N_{z'} = I_{z'} \ddot{\theta}$$ 0.5

$$N_{z'} = -Mg\, a \sin\theta$$ 0.5

$$-\cancel{M} g \cancel{a} \sin\theta = \frac{3}{2} \cancel{M} a^{\cancel{2}} \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{2}{3} \frac{g}{a} \sin\theta$$

Pequenas oscilações: $\sin\theta \sim \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{2g}{3a}\theta$ 0.5

$$\Rightarrow \boxed{w = \sqrt{\frac{2g}{3a}}}$$ 0.5