Cálculo Numérico - Segunda Prova - 25/09/07

Nome: **RA**:

1. Suponha que queremos resolver um PVI.
   Responda às seguintes questões abaixo, justificando detalhadamente cada escolha. Uma escolha apresentada sem justificativa será desconsiderada.
   (a) Se quero ter erros locais de ordem 2 e evitar o cálculo de derivadas, qual o método? Descreva-o gráficamente. [1 pt]
   (b) Se quero ter erros locais de ordem 3 e evitar o cálculo de derivadas, qual o método? Descreva-o gráficamente. [1 pt]

2. Considere a aplicação do método das diferenças finitas para o PVC $\begin{cases} y'' - xy' + y = \sin x \\ y(0) = 1,\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$
   (a) Escreva a forma geral das equações que compõem o sistema linear, considerando passo h. [1 pt]
   (b) Faça $h = \frac{\pi}{8}$ e escreva o sistema linear resultante na forma $Ay = b$. Mostre claramente qual é a matriz, o vetor das variáveis e o vetor dos termos independentes deste sistema. Não é necessário resolver o sistema. [1 pt]

3. Considere os pares de pontos $(x, f(x))$ abaixo:
   $$(-0.7, 17.264),\ (0.2, 1.82),\ (0.8, 0.406).$$
   (a) Suponha que $y(x) = \alpha_1 e^{-\alpha_2 x}$ seja uma aproximação para $f(x)$. Encontre α_1 e α_2 pelo método de quadrados mínimos. [2 pts]
   (b) Estime o valor de $f(0)$ utilizando o resultado do item (a). [0,5 pt]
   (c) Encontre o polinômio de grau ≤ 2 que interpola $f(x)$. Este polinômio é único? [1 pt]
   (d) Estime o valor de $f(0)$ utilizando o polinômio encontrado. [0,5 pt]

4. Considere a função $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por
   $$F(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx\,.$$
   (a) Calcule $F(1)$ utilizando a regra dos trapézios. [0,5 pt]
   (b) Calcule $F(1)$ utilizando a regra 1/3 de Simpson repetida. Tome $h = 0.25$. [1 pt]

Justifique as suas respostas explicitando todos os passos. Trabalhe com 5 **dígitos significativos**!
Boa sorte!

ALGUMAS FÓRMULAS

$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$, onde, d_k = diferença dividida de ordem k em $x_0, x_1, \cdots, x_{k+1}$

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$$|E(x)| = |f(x) - p_n(x)| < \frac{h^{n+1}M_{n+1}}{4(n+1)}$$

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{m-1})) + f(x_m)\} - \frac{mh^3}{12}f''(\xi)$$

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{m-2}) + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)\} - \frac{mh^5}{180}f^{iv}(\xi)$$

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} \qquad y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$$