Cálculo Numérico - Primeira Prova - 25/09/07

Nome: **RA**:

1. Suponha que tenhamos o seguinte problema: sabemos a expressão analítica de uma função $f(x)$, diferenciável, e que nos pontos x_0, x_1, com $x_0 < x_1$, $f(x_0) < 0$ e $f(x_1) > 0$. Responda às seguintes questões abaixo, justificando detalhadamente cada escolha. Uma escolha apresentada sem justificativa será desconsiderada.

   (a) Se quero ter certeza que haverá convergência, independentemente do tempo, qual o melhor método? Descreva-o brevemente. [1 pt]

   (b) Supondo que haja garantias de que a convergência ocorrerá, qual o método que possui a convergência mais rápida? Descreva-o brevemente [1 pt]

   (c) Se quero uma convergência rápida e há garantias de sua ocorrência, mas quero evitar o cálculo de $f'(x)$, qual o método mais adequado? Descreva-o brevemente. [1 pt]

2. Utilizando Matlab, o processo de fatoração LU com pivoteamento parcial de uma matriz A resultou nas matrizes seguintes:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -.2 & 1 & 0 \\ .8 & -.8 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 1 \\ 0 & -6 & -3.8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Qual é a matriz A? Justifique a sua resposta. [0.5 pts]

   (b) Utilize L, U e P para resolver $Ax = b$ onde $b = (41, 8.6, 10)^t$. [1.5 pts]

3. Considere o sistema linear $Ax = b$ com a matriz $A = [1, 4; 4, -2]$ o vetor b $= [-2; -3]$.

   (a) Escreva um sistema linear equivalente $\tilde{A}x = \tilde{b}$ tal que o método de Gauss-Seidel converge. Justifique a sua resposta. [0.5 pts]

   (b) Aplique o método de Gauss-Seidel para resolver $\tilde{A}x = \tilde{b}$ utilizando $x^{(0)} = [0; 0]$ e $\epsilon = 0.1$. [1.5 pts]

   (c) Considere um sistema linear $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $|a_{11}| > |a_{12}|$, $|a_{21}| > |a_{22}|$ e $|\frac{a_{11}}{a_{12}}| > |\frac{a_{21}}{a_{22}}|$. O que podemos afirmar sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel? [1pt]

4. Considere o sistema não-linear abaixo.

$$\begin{cases} y - x^2 & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 2 \end{cases}$$

   (a) Escreva a matriz jacobiana $J(x, y)$ do sistema e determine os pontos que a tornam singular (isto é, os pontos tais que $\det J = 0$). [0.5 pts]

   (b) Execute o método de Newton utilizando as precisões $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-1}$. Escolha como aproximação inicial $x^{(0)} = (1, .5)^t$. [1.5 pts]

Boa sorte! Justifique as suas respostas explicitando todos os passos. Trabalhe com 5 dígitos na mantissa!