P3 - 1s2013

TIAGO MEDICCI SERRANO RA: 094519

1. 3,0
2. 4,0
3. 3,0
10,0

1) a) A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA DO SISTEMA EM MALHA FECHADA É DADA POR: $1 + CG = 0$

$\Rightarrow 1 + \frac{K(s+1)}{s^2+4} = 0 \Rightarrow s^2 + 4 + Ks + K = 0$

$\Rightarrow s^2 + Ks + 4 + K = 0$, ONDE AS SOLUÇÕES (DUAS) SÃO DADAS POR $s_1 = \frac{-K}{2} + \frac{\sqrt{K^2 - 4(4+K)}}{2}$ E $s_2 = \frac{-K}{2} - \frac{\sqrt{K^2-4(4+K)}}{2}$

QUEREMOS QUE $s_1 = s_2$ E $\sqrt{K^2 - 4(4+K)} > 0$

$\frac{-K}{2} + \frac{\sqrt{K^2-4(4+K)}}{2} = \frac{-K}{2} - \frac{\sqrt{K^2-4(4+K)}}{2}$

$\frac{2\sqrt{K^2-4(4+K)}}{2} = 0$ OU $K^2 = 4(4+K)$

$\Rightarrow K^2 - 4K - 16 = 0$

$\frac{2 \pm \sqrt{16+4 \cdot 16}}{2}$; $\frac{2 + \sqrt{80}}{2} = 2 + 2\sqrt{5}$; $K > 0$; $\frac{2 - \sqrt{80}}{2} = 2 - 2\sqrt{5}$

$\boxed{K = 2 + 2\sqrt{5}}$

OU SEJA SE $K = 2 + 2\sqrt{5}$, O POLO É DUPLO E REAL

SE $K = 2 + 2\sqrt{5}$

$s_1 = -1 - \sqrt{5} = s_2$

b) PARA $\zeta = \sqrt{2}/2 = 0{,}707$, TEMOS QUE $\theta = \arcsin \zeta = 45°$ E A PARTE REAL E IMAGINÁRIA DOS POLOS DEVEM CONTER O MESMO VALOR EM MÓDULO, ENTÃO:

$s = \frac{-K}{2} - \frac{\sqrt{K^2 - 4(4+K)}}{2} = \frac{-K}{2} - j\frac{\sqrt{4(4+K) - K^2}}{2}$ E $\frac{K}{2} = \frac{\sqrt{4(4+K) - K^2}}{2}$

$\Rightarrow K^2 = 4(4+K) - K^2 \Rightarrow 2K^2 - 4K - 16 = 0 \Rightarrow K^2 - 2K - 8 = 0$

E COMO $K > 0$, $K = 4$ (LUGAR DAS RAÍZES DESENHADO NA PRÓXIMA PÁGINA)

c) PODEMOS CALCULAR $K_p = K_0 = \lim_{s \to 0} s^0 \, C.G = \frac{K \cdot 1}{4}$

O ERRO PARA A ENTRADA DEGRAU É DADO POR

$E_{perm} = \frac{1}{1 + K_0} = \frac{1}{1 + \frac{K}{4}} = \frac{1}{\frac{4+K}{4}} = \frac{4}{4+K}$ (CONTINUA)

1) c) (CONTINUAÇÃO)

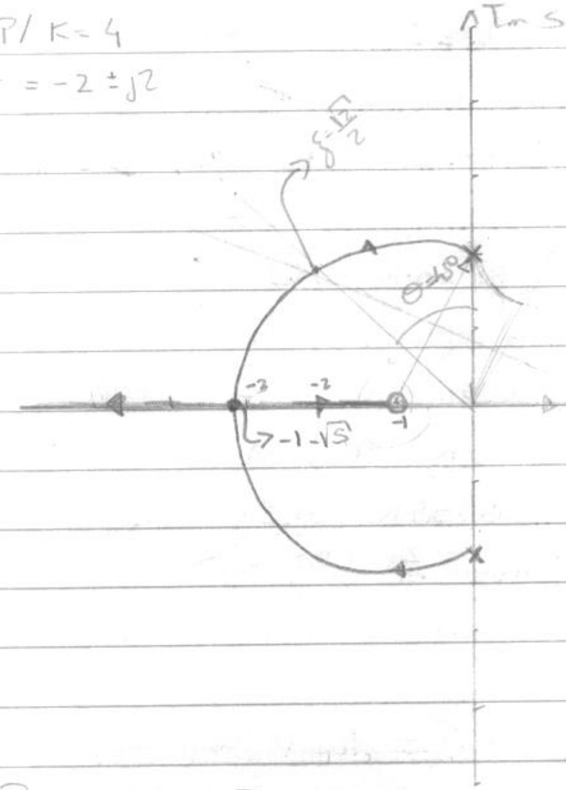
PARA UM ERRO DE 2% $\varepsilon_{perm} = 0,02$

$$\Rightarrow \varepsilon_{perm} = 0,02 = \frac{4}{4+K} \Rightarrow \frac{1}{50}(4+K) = 4 \Rightarrow 4 + K = 200$$

$$\boxed{K = 196}$$

P/ K = 4

$s = -2 \pm j2$



$$1 + \frac{K(s+1)}{(s+j2)(s-j2)}$$

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{1}{1}$$

$$-90 - \theta_{p_1} + 65 = -180$$

$$90 + 65 = \theta_{p_1} = 155°$$

PARA K=2+2√5 E K = 4, PERCEBE-SE QUE O ERRO É MAIOR DO QUE 2%, SENDO QUE O K MÍNIMO É DE 196, PARA TERMOS ERRO MENOR QUE 2%. PARA K MUITO GRANDE, POR EXEMPLO, PERCEBE-SE QUE UM DOS POLOS SE APROXIMA DE -1 (POSIÇÃO DO ZERO), ELEVANDO O TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO (QUE SERIA MENOR CASO OS POLOS ESTIVESSEM NO CRUZAMENTO DOS RAMOS, POR EXEMPLO

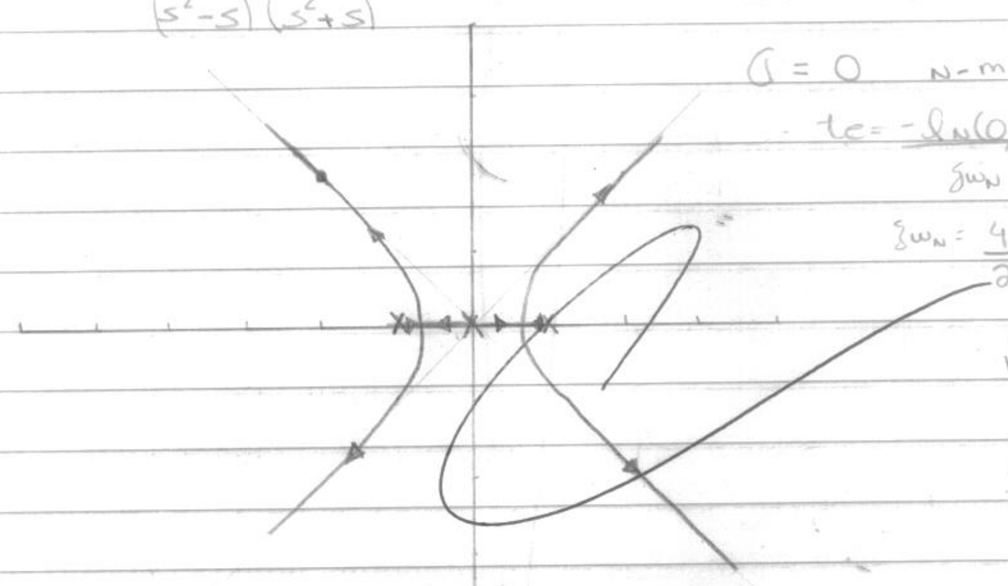
Tiago Medicci Serrano

2) $\min \int_0^\infty (y^2(t) + \rho u^2(t))dt = \int_0^\infty x'V'Vx + \rho u^2(t)dt$, onde $V = [1\ 0]$

$$\varphi(s) = V(sI - A)^{-1}.B = \frac{1}{s^2 - s} = \frac{1}{s(s-1)}$$

Lugar das raízes simétrico: $1 + \rho^{-1}\varphi(-s)\varphi(s) = 0$

$$1 + \rho^{-1}\frac{1}{(s^2-s)(s^2+s)} = 0 = 1 + \underbrace{\rho^{-1}}_{K}\frac{1}{s^2(s-1)(s+1)} = 0$$



$\sigma = 0 \quad n - m = 4$

$$t_e = \frac{-\ln(0{,}02)}{\xi\omega_n}$$

$$\xi\omega_n = \frac{4}{2} = 2$$

6
12,8
2,8
224
56+
7,84

7,84
22
1568
1568+
17248
3,5
86240
51744+
603680

Pela condição de módulo temos

$$\frac{1}{K} = \frac{\prod|s-z_i|}{\prod|s-p_i|} \Rightarrow K = \prod|s-p_i| = 2{,}2 \cdot 2{,}8^2 \cdot 3{,}5 \cong 60$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{1}{K} = \frac{1}{60}$$

b) Sendo os polos para $\rho = \frac{1}{60}$ iguais a $-2 \pm j2$,

$$P(s) = (s+2-j2)(s+2+j2) = s^2 + s(2+j2) + s(2-j2) + (2+j2)(2-j2)$$
$$= s^2 + 4s + 4 + 4 = s^2 + 4s + 8$$

Para alocar as raízes de $\det(sI - (A-BK))$ = função de transf. em malha fechada, tomamos:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[K_1\ K_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & 1-K_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - (A-BK)) = s^2 + (K_2 - 1)s + K_1 = P(s) = s^2 + 4s + 8 \Rightarrow \begin{matrix} K_1 = 8 \\ K_2 = 5 \end{matrix}$$

$K = [8\ \ 5]$

2)

c) PARA A ENTRADA $u = K(M r - x)$, TEMOS A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA FECHADA COMO

$$F(s) = (C - \cancel{DK}^{0})(sI - (A-BK))^{-1} BKM + \cancel{DKM}^{0}$$

$$= \underbrace{C(sI - (A-BK))^{-1} B}_{S(s)} KM$$

ONDE $S(s) = \frac{1}{s^2+4s+8}$, QUEREMOS QUE, PARA ERRO NULO AO DEGRAU, $F(0) = 1$.

$$F(0) = 1 = S(0) . K\, m$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{8}[8\ 5]\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \Rightarrow 8 = 8m_1 + 5m_2, \quad \text{FAZENDO } m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = 1$$

$$m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2)

d) ALOCANDO OS POLOS DE $\det(sI - (A-LC)) = 0$ EM $-3 \pm j$, ATENDEREMOS A ESPECIFICAÇÃO, UMA VEZ QUE $\det(sI - (A-LC)) = 0$ REPRESENTA A EQ CARACTERÍSTICA REFERENTE AO OBSERVADOR.

$$A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 & 1 \\ -L_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$sI - (A-LC) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -L_1 & 1 \\ -L_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+L_1 & -1 \\ L_2 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - (A-LC)) = \det\left(\begin{bmatrix} s+L_1 & -1 \\ L_2 & s-1 \end{bmatrix}\right) = s^2 + (L_1 - 1)s - L_1 + L_2 = P(s)$$

ONDE $P(s) = (s+3+j)(s+3-j) = s^2 + s(3-j) + s(3+j) + (3+j)(3-j)$

$$= s^2 + 6s + 9 + 1 = s^2 + 6s + 10 = s^2 + \underline{(L_1 - 1)}s + \underline{L_2 - L_1}$$

$L_1 = 7$, $L_2 - L_1 = 10 \Rightarrow L_2 = 17$

$$L = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix}$$

2)

a) $C = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$, $K_{N-1} = \lim_{s\to 0} s^{N-1} C.G$

$$K_0 = K_p = \lim_{s\to 0} s^0 K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)\left(\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}\right) = \infty$$

$$K_1 = K_v = \lim_{s\to 0} s K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)\frac{(s+4)}{(s+1)(s+3)}$$

$$= \lim_{s\to 0} K_p\left(s + \frac{1}{T_i}\frac{s}{s} + T_d s^2\right)\frac{(s+4)}{(s+1)(s+3)} = K_p\left(\frac{1}{T_i}\right)\cdot\frac{4}{3} = \frac{K_p}{T_i}\cdot\frac{4}{3}$$

$$K_2 = K_a = \lim_{s\to 0} s^2 K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)\left(\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}\right) = \lim_{s\to 0} K_p\left(s^2 + \frac{1}{T_i}s + T_d s^3\right)\left(\frac{s+4}{(s+1)(s+4)}\right)$$

$$= 0$$

=> PARA A ENTRADA DEGRAU, O ERRO É DADO POR

$$\varepsilon_{perm} = \frac{1}{1+K_0} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (\text{ERRO NULO})$$

=> PARA A ENTRADA RAMPA, TEMOS.

$$\varepsilon_{perm} = \frac{1}{K_1} = \frac{T_i}{K_p}\cdot\frac{3}{4} \quad (\text{ERRO FINITO})$$

=> PARA A PARÁBOLA:

$$\varepsilon_{perm} = \frac{1}{K_2} = \infty \quad (\text{NÃO SEGUE})$$

b) Eq CARACT É DADA POR $1 + CG = 0$

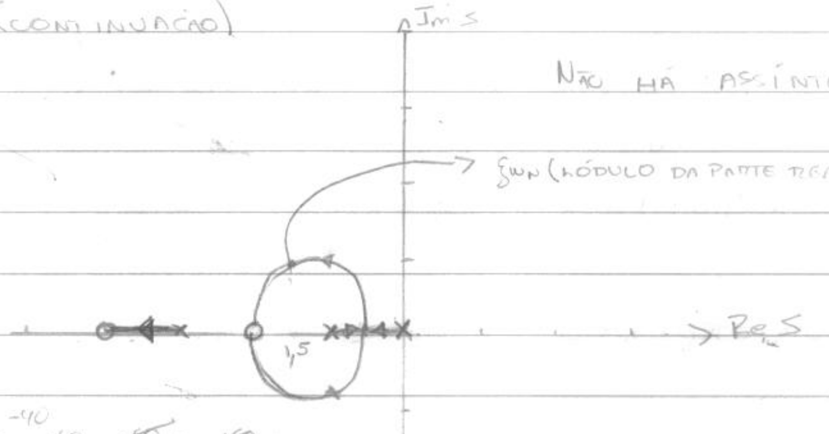
$$\Rightarrow 1 + K_p\left(1 + \frac{1}{s} + 0{,}25s\right)\frac{(s+4)}{(s+1)(s+3)} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + K_p\left(0{,}25s^2 + s + 1\right)\frac{(s+4)}{s(s+1)(s+3)} = 0$$

$s = -4$, $p = 4$, $\begin{smallmatrix}-2\\-2\end{smallmatrix}$

$$1 + \underbrace{\frac{K_p}{4}}_{K}\frac{(s^2+4s+4)(s+4)}{s(s+1)(s+3)} = 1 + \frac{K_p}{4}\cdot\frac{(s+2)^2(s+4)}{s(s+1)(s+3)} = 0$$

3) b) (CONTINUAÇÃO)



$\theta_{z1} + 90 - 180 - 180 = -180$

$\theta_{z1} = 90°$

$t_e = \frac{-\ln(\varepsilon)}{\xi w_N} \Rightarrow t_e = \frac{-\ln(0{,}05)}{\xi w_N} \Rightarrow \xi w_N = \frac{3}{2} = 1{,}5$

PODEMOS ESTIMAR O VALOR DE K_p PELA CONDIÇÃO DE MÓDULO:

$\frac{1}{K} = \frac{\prod|s-z_i|}{\prod|s-p_i|} \Rightarrow K = \frac{\prod|s-p_i|}{\prod|s-z_i|} = \frac{1{,}8 \cdot 1 \cdot 1{,}8}{1^2 \cdot 2{,}5}$

→ POLO EM 0; → POLO EM -1; → POLO EM -3; → ZERO EM -4; → DOIS ZEROS EM -2

$K = \frac{1{,}8 \cdot 1{,}8}{2{,}5} \cong 1{,}3 \Rightarrow K_p = \frac{K}{4} \Rightarrow \boxed{K_p = 4 \cdot 1{,}3 = 5{,}2}$

c) UTILIZANDO-SE A APROXIMAÇÃO PARA OS POLOS $-1{,}5 \pm j$ (PARTE IMAGINÁRIA ESTIMADA GEOMETRICAMENTE), TEMOS

$MG = \frac{K_{osc}}{K}, \ K_{osc} = \infty \Rightarrow \boxed{MG = \infty}$, $MF \cong 100\xi$, $\xi = \frac{1{,}5}{w_N} = \frac{1{,}5}{1{,}7} \cong 0{,}9$

→ ESTIMADO GEOMETRICAMENTE

$\boxed{MF \cong 90°}$

$W = w_N \cong 1{,}7$ RAD/s

O ERRO PARA A ENTRADA TIPO RAMPA É DADO POR (ITEM a)

$\boxed{\varepsilon_{perm} = \frac{1}{K_p} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{5{,}2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20{,}8} \cong 0{,}15 \text{ ou } 15\%}$