1. (*0.5 pontos*) Encontre o intervalo de convergência de:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+4)x^k}{(k+1)(k+2)e^k}$$

2. (*2.0 pontos*) Resolva a equação diferencial

$$(3-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$$

através de uma série de potências em torno do ponto $x = 0$. Encontre a relação de recorrência e as duas soluções linearmente independentes indicando o termo geral de cada solução.

3. (*2.5 pontos*) Considere a equação

$$3xy'' + 2y' + 2y = 0 \qquad (*)$$

(a) (0.2) Escreva a forma geral da solução em séries de potências em torno do ponto ordinário $x = 2$ para a equação (*) SEM calcular os coeficientes.

(b) (0.3) Qual é o raio mínimo de convergência da série de potências em (a)?

(c) (0.5) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular-regular para a equação (*)

(d) (1.5) Encontre uma solução por série de Frobenius da equação (*) na forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \qquad x > 0$$

com r sendo a **maior raiz** da equação indicial associada a equação (*).

4. (*3.0 pontos*)

(a) Construa a extensão ímpar e periódica de f a toda a reta $\mathbb{R}$, com período 4, e calcule a série de Fourier desta extensão.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1, \\ x-1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

(b) Prove que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2}.$$

Justifique sua resposta (dica: separe os casos $n = 2k$ par e $n = 2k+1$ ímpar).

5. (*2.0 pontos*) Resolva o seguinte problema de valor de contorno usando o método de separação de variáveis justificando detalhadamente TODA a análise:

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & 0 \le x \le 2, \quad t > 0; \\ u(0,t) = u(2,t) = 0; \\ u(x,0) = 3. \end{cases}$$