F 415 - Mecânica Geral II - Prof. Eduardo Granado
Prova I - 27/08/2012

1) (a) Escreva o Lagrangeano *L* e a energia *E* em coordenadas polares para um problema de força central para uma partícula de massa *m*, e mostre que $E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+U(r)+\frac{l^2}{2mr^2}$, onde $l\equiv\partial L/\partial\dot{\theta}$ é o momento angular. (1.5)

(b) Demonstre que o momento angular é uma constante do movimento para a situação do ítem (a). (1.0)

2) (a) Um par de partículas de massa reduzida $\mu\equiv\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ interagem através de uma força central *F(r)* em uma equação de órbita dada por $\frac{\alpha}{r}=1+\epsilon\cos\theta$, onde *r* é a distância entre as partículas. Mostre que $F(r)=-\frac{k}{r^2}$. Encontre *k* em função da massa reduzida μ e momento angular *l*. (1.0)

(b) Encontre a energia potencial e a energia potencial efetiva $V(r)\equiv U(r)+\frac{l^2}{2\mu r^2}$ para o problema do ítem (a). (0.5)

(c) Esboce um gráfico da energia potencial efetiva do ítem (b) em função de *r*. Para qual valor de *r* (em função de *l* e μ) a trajetória será circular ? Justifique. (1.0)

3) Uma partícula sob ação de uma força central se move em uma órbita elíptica $\frac{\alpha}{r}=1+\epsilon\cos\theta$ ($\epsilon<1$). Se a razão entre a velocidade angular máxima e velocidade angular mínima da partícula é *n*, encontre a excentricidade da órbita ϵ em função de *n*. (2.5)

4) Uma corda flexível de comprimento *D* desliza sem atrito por uma mesa, com uma ponta de comprimento *x* pendurada em uma extremidade da mesa. As condições iniciais são $x(t=0) = x_0$ e $v(t=0) = 0$.

(a) Encontre x(t). (1.5)

(b) Encontre o tempo necessário para a corda se desprender totalmente da mesa. (1.0)

Formulário:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\frac{1}{r}\right]+\frac{1}{r}=-\frac{\mu r^2}{l^2}F(r) \qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=0$$

F-415 - PROVA 1
- GABARITO -

1) a) $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - V(r)$$

$$l \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

b) Da eq. de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad , \text{ como } \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

então

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(l) = 0 \Rightarrow l = \text{cte} \quad //$$

② a) Sabemos que:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\frac{1}{r}\right] + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2} F(r)$$

Mas: $\dfrac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos\theta \Rightarrow \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\varepsilon}{\alpha}\cos\theta$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{r}\right] = -\frac{\varepsilon}{\alpha}\sin\theta \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\left[\frac{1}{r}\right] = -\frac{\varepsilon}{\alpha}\cos\theta$$

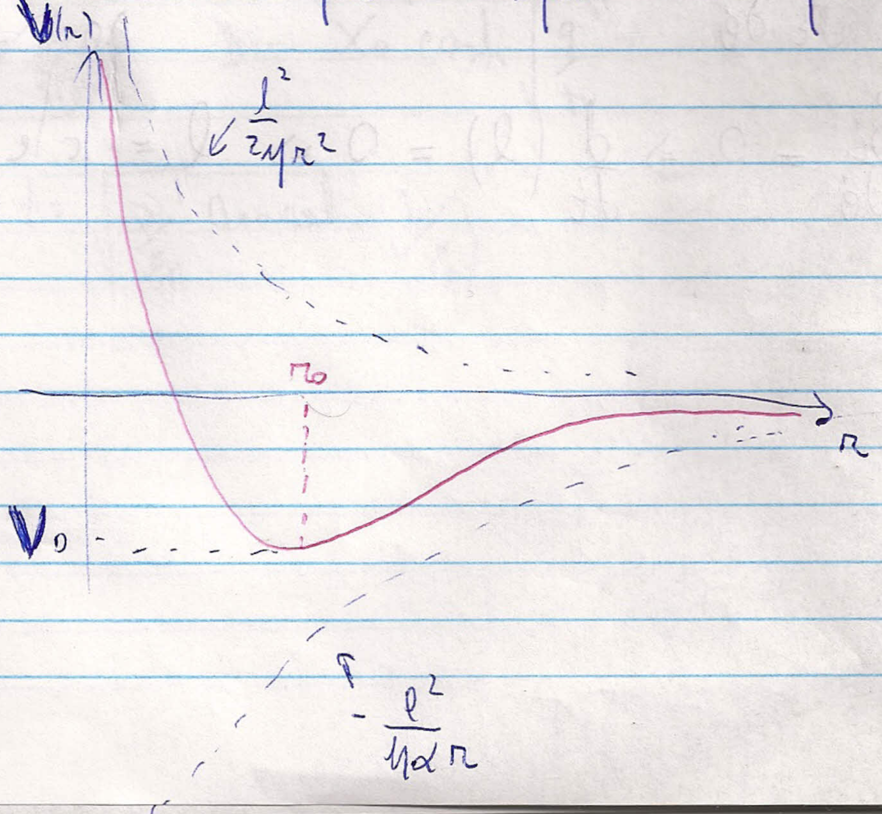
Portanto $\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{1}{r}\right) + \dfrac{1}{r} = \cancel{-\dfrac{\varepsilon}{\alpha}\cos\theta} + \dfrac{1}{\alpha} + \cancel{\dfrac{\varepsilon}{\alpha}\cos\theta} = \dfrac{1}{\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = -\frac{\mu r^2}{l^2}F(r) \Rightarrow F(r) = -\frac{l^2}{\mu\alpha}\frac{1}{r^2} \Rightarrow \boxed{k = \frac{l^2}{\mu\alpha}}$$

b) $U(r) = -\int F(r)\,dr = -\dfrac{l^2}{\mu\alpha}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{k}{r}$

$$V(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = -\frac{l^2}{\mu\alpha}\frac{1}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{l^2}{\mu}\left[-\frac{1}{\alpha r} + \frac{1}{2r^2}\right]$$

c)



A órbita será circular para $V = V_0$ e $r = r_0$

$$\frac{dV}{dr}\Big|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\frac{l^2}{\mu}\left[-\frac{1}{\alpha r}+\frac{1}{2r^2}\right]_{r=r_0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha r_0^2} - \frac{1}{r_0^3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_0^2}\left[\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r_0}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{r_0 = \alpha} = \frac{l^2}{\mu k}$$

(3) $\frac{\alpha}{r} = 1+\varepsilon\cos\theta \Rightarrow \frac{\alpha}{r_{MIN}} = 1+\varepsilon$; $\frac{\alpha}{r_{MAX}} = 1-\varepsilon$

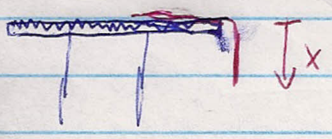
$$l = \mu r^2\dot\theta = \mu r^2 \omega \Rightarrow \omega = l/\mu r^2$$

$$\omega_{MAX} = \frac{l}{\mu r_{MIN}^2} \; ; \; \omega_{MIN} = \frac{l}{\mu r_{MAX}^2} \Rightarrow \frac{\omega_{MAX}}{\omega_{MIN}} = \frac{r_{MAX}^2}{r_{MIN}^2} = n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 = n \Rightarrow \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \sqrt{n} \Rightarrow 1+\varepsilon = \sqrt{n} - \sqrt{n}\,\varepsilon \Rightarrow (1+\sqrt{n})\,\varepsilon = \sqrt{n}-1$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}}$$

(4) $U(x) = -(\rho x) g \frac{x}{2} = -\rho g \frac{x^2}{2}$ $(m = \rho D)$



$T = \frac{1}{2}(\rho D)\dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$T + U = E = cte$

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{m g x^2}{2D} = -\frac{m g x_0^2}{2D} \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{g}{D}\left(x^2 - x_0^2\right)$$

4 a

A força resultante na corda é o peso da parte pendurada.

$$F_{res} = (\rho x)g = \frac{m}{D}g\,x = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} - \frac{g}{D}x = 0$$

$$x = Ae^{\sqrt{g/D}\,t} + Be^{-\sqrt{g/D}\,t}$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow A\sqrt{\frac{g}{D}} - B\sqrt{\frac{g}{D}} = 0 \Rightarrow A = B$$

$$\cancel{x(t=0) = x_0 \Rightarrow Ae^{\sqrt{g/D}\,x_0} + Ae^{-\sqrt{g/D}\,x_0} = x}$$

$$x(t=0) = x_0 \Rightarrow A + A = x_0 \Rightarrow A = x_0/2$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{2}\left[e^{\sqrt{g/D}\,t} + e^{-\sqrt{g/D}\,t}\right] = x_0\cosh\sqrt{\frac{g}{D}}\,t \quad //$$

b $x(t=T) = D$

$$D = x_0\cosh\sqrt{\frac{g}{D}}\,t \Rightarrow \operatorname{arccosh}\left(\frac{D}{x_0}\right) = \sqrt{\frac{g}{D}}\,t$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{D}{g}}\operatorname{arccosh}\left(\frac{D}{x_0}\right)$$