1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c	4d	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

$1^{\underline{a}}$ Prova de MA327 — 18/04/2023, **16:00–18:00 hs**

NOME:____ **Turma:**______ **RA:**____________________

1. (4 pt) a) Definir *subespaço* de um espaço vetorial. Definir *soma* e *soma direta* de dois subespaços de um espaço vetorial.

b) Se $V = M_4(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial das matrizes de ordem 4 sobre os reais, mostrar que os conjuntos

$$U = \{A \in V \mid A^t = A\}, \qquad W = \{B = (b_{ij}) \in V \mid b_{ij} = 0 \text{ se } i \geq j\}$$

das matrizes simétricas e das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal, respectivamente, são subespaços de V.

c) Mostrar que $V = U \oplus W$.

d) Encontrar as dimensões de U e de W. Encontrar uma base de U.

2. (2 pt) Verificar se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. (Respostas sem justificativa não serão consideradas.)

a) Se $v_1, \ldots, v_k$ são vetores linearmente independentes no espaço vetorial V de dimensão 2023 sobre $\mathbb{R}$ então $k = 2023$.

b) Se $T\colon V \to W$ é uma transformação linear entre os dois espaços vetoriais V e W então $\overline{0}_W$ está na imagem de T.

c) Se $T\colon V \to V$ é uma transformação linear de V, $\dim V = 10$, então V é soma direta do núcleo e da imagem de T.

d) Se T e $S\colon V \to V$ são duas transformações lineares no espaço vetorial V de dimensão finita e $TS = 0$ então $ST = 0$.

3. (4 pt) Seja $V = P_2$ o espaço vetorial dos polinômios na variável x com coeficientes reais e de grau ≤ 2, e seja $T\colon V \to V$ a função definida por $T(f) = xf'(x) + f''(x)$ para todo $f \in V$.

a) Mostrar que T é uma transformação linear em V e encontrar a matriz $A = (T)_B^B$ de T na base $B = \{1, x, x^2\}$ de V.

b) Mostrar que os elementos $C = \{1, x, 1 + x^2\}$ formam uma base de V.

c) Encontrar a matriz P da mudança de base de B para C.

d) Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2(1 + x^2) \in V$, onde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, encontrar o polinômio $T^5(f)$. Aqui $T^5(f) = T(T(T(T(T(f)))))$.

4. (1 pt) Definir (aqui mesmo!):

a) Sistema de vetores linearmente dependentes num espaço vetorial V.

b) Dimensão de um espaço vetorial.

c) Núcleo de uma transformação linear $T\colon V \to W$.

d) Base de um espaço vetorial.

Boa prova!