ME-210 Probabilidade I

Lista 7

1. Suponha que o raio R de uma esfera seja uma v.a. contínua com densidade

$$f_R(r) = \begin{cases} 6r(1-r), & 0 < r < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ache a densidade do volume V e da área superficial S da esfera.

2. A velocidade de uma molécula em um gás uniforme em equilibrio é uma v.a. com densidade

$$f_V(v) = \begin{cases} av^2 e^{-bv}, & v > 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $b = m/(2kT)$ e k, T e m denotam respetivamente a constante de Boltzman, a temperatura absoluta e a massa da molécula.
(a) Calcule a constante a em termos de b.
(b) Calcule a densidade de v.a. $W = mV^2/2$ (energia cinética da molécula).

3. Seja X uma v.a. com f.d.a. F_X.
(a) Seja $Y = 1 + bX$, $b < 0$. Ache a f.d.a. de Y.
(b) Suponha que F_X é estritamente monótona e defina $Z = F_X(X)$. Mostre que $Z \sim U(0,1)$.
(c) Tome $U \sim U(0,1)$ e mostre que $W = F_X^{-1}(U)$ tem f.d.a. F_X.

4. Ache a distribuição de $R = A \operatorname{sen} \theta$, onde A é uma constante e θ é uma v.a. Uniforme $(-\pi/2, \pi/2)$. (Tal v.a. R aparece na teoria de ballistica. Se um projetil é lançado a partir de um ângulo α com uma velocidade ν, então o ponto R do retorno ao solo pode ser expresso como $R = (\nu^2/g)\operatorname{sen}(2\alpha)$.)

5. Seja X uma v.a. com f.d.a $F(x) = \exp(-e^{-(x-a)})$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Calcule função geratriz de momentos $M_X(t)$.

6. Seja U v.a. Uniforme $(0,1)$ e $X = \ln U$. Usando a função geratriz de momentos, calcule $\mathbf{E}X$ e $\mathbf{Var}X$.

ME-210A: Resolução da Lista 07

Resolução extra-oficial feita por um dos monitores.

Questão 01:

- **Área superficial S:** Para $0 < S < 4\pi$ (pois $S = 4\pi R^2$ e $R \in [0,1]$), temos

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P(4\pi R^2 \leq s)$$

Como $R \geq 0$

$$F_S(s) = P\left(R \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right) = F_R\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right)$$

Derivando

$$\frac{\mathrm{d}F_S(s)}{\mathrm{d}s} = f_S(s) = \frac{\mathrm{d}F_R\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right)}{\mathrm{d}s} = f_R\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{s}}$$

Logo

$$f_S(s) = 6\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right)\frac{1}{4\sqrt{\pi s}} \Rightarrow f_S(s) = \frac{3}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right)$$

Para os valores de $S < 0$ e $S > 4\pi$, temos $f_S(s) = 0$. Resumindo

$$F_S(s) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right), \text{ se } 0 < s < 4\pi \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- **Volume V:** Para $0 < V < \frac{4}{3}\pi$ (pois $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $R \in [0,1]$), temos

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \leq v\right)$$

Como $R \geq 0$

$$F_V(v) = P\left(R \leq \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = F_R\left(\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Derivando

$$\frac{\mathrm{d}F_V(v)}{\mathrm{d}v} = f_V(v) = \frac{\mathrm{d}F_R\left(\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}{\mathrm{d}v} = f_R\left(\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{3}{4\pi}$$

Logo

$$f_V(v) = \frac{6}{4\pi}\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1 - \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f_V(v) = \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1\right]$$

Para os valores de $V < 0$ e $V > \frac{4}{3}\pi$, temos $f_V(v) = 0$. Resumindo

$$F_V(v) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1\right], \text{ se } 0 < v < \frac{4}{3}\pi \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Observação: podemos verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f_S(s)}\,\mathrm{d}s = 1 \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f_V(v)}\,\mathrm{d}v = 1$$

como deveria ser.

Questão 02:

$$b = (2a)^{1/3}; \quad f_W(w) = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2w}{m}}e^{-b\sqrt{\frac{2w}{m}}}, w > 0.$$

Questão 03:
(a) Supondo F_X contínua, temos $F_Y(y) = 1 - F_X((y-1)/b)$.
(b) Sabemos, por definição, que $F_X(x)$ é crescente. Já que ela é estritamente monótona, temos que ela é estritamente crescente. Além disso, também por definição, temos que $0 \leq F_X(x) \leq 1$.

Para mostrar que $Z \sim U(0,1)$, vamos encontrar a função distribuição acumulada de Z.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(F_X(X) \leq z)$$

Já que $F_X(X)$ é estritamente crescente, sua função inversa também é. Podemos, então, escrever que

$$F_Z(z) = P(X \leq F_X^{-1}(z)) = F_X(F_X^{-1}(z)) \Rightarrow F_Z(z) = z$$

Esta é exatamente a função distribuição acumulada de uma variável aleatória $U(0,1)$. Assim, concluímos que $Z \sim U(0,1)$.
(c) Para mostrar que $W = F_X^{-1}(U)$ tem função distribuição acumulada F_X, vamos encontrar $F_W(w)$:

$$F_W(w) = P(W \leq w) = P(F_X^{-1}(U) \leq w)$$

Usando mais uma vez o fato de que $F_X(x)$ é estritamente crescente, podemos escrever que

$$F_W(w) = P(U \leq F_X(w)) = F_U(F_X(w))$$

Mas como

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq 0 \\ x, \text{ se } 0 < x < 1 \\ 1, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

e

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

temos

$$F_U(F_X(w)) = F_X(w)$$

Então, concluímos que

$$F_W(w) = F_X(w)$$

Questão 04:

$$f_R(r) = \frac{1}{\pi A \cos(\text{arcsen}(\frac{r}{A}))}, \text{ se } |r| \leq A.$$

Questão 05:

Vamos primeiramente calcular $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = e^{-e^{-(x-a)}}(-e^{-(x-a)})(-1) \Rightarrow f(x) = e^{-(e^{-(x-a)}+x-a)}$$

Com este resultado, podemos calcular $M_X(t)$:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e^{xt}f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e^{xt}e^{-(e^{-(x-a)}+x-a)}\,dx}$$

Logo

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e^{x(t-1)-e^{-(x-a)}+a}\,dx}$$

Questão 06:

$$M_X(t) = E[e^{Xt}] = E[e^{t\ln(U)}] = E[e^{\ln(U)^t}] = E[U^t]$$

Como

$$f_U(u) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 < u < 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

temos

$$M_X(t) = \int_0^1 \mathrm{u^t\,du} = \left[\frac{u^{t+1}}{t+1}\right]_0^1 \Rightarrow M_X(t) = \frac{1}{t+1}$$

Para encontrar $E[X]$, fazemos

$$E[X] = \frac{\mathrm{d}M_X(0)}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{-1}{(t+1)^2}\right]_{t=0} = -1 \Rightarrow E[X] = -1$$

Para calcular $Var[X]$, precisamos de $E[X^2]$, que pode ser obtido a partir de

$$E[X^2] = \frac{\mathrm{d}^2M_X(0)}{\mathrm{d}t^2} = \left[\frac{\mathrm{d}(\frac{-1}{(t+1)^2})}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0} = \left[\frac{2(t+1)}{(t+1)^3}\right]_{t=0} = \left[\frac{2}{(t+1)^2}\right]_{t=0} = 2$$

Então

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 2 - 1^2 \Rightarrow Var[X] = 1$$