(ALDÁRIO)

FERNANDO TINEL
RA 073203

05/06/09
EE540/U

5,3

Prova 2

① $\hat{n} = \vec{a}_y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \vec{a}_z \cdot \frac{1}{2}$

0,0

$E \Rightarrow E_0 > 0$ e sem componente em x.
$t = 0 \Rightarrow E = E_{0_{MAX}} \vec{a}_y$

a) O campo $E(R,t)$ está no mesmo plano que $\hat{n}$ (zy).
Então:

$$\vec{a}_E = -\vec{a}_x \times \hat{n} = -\vec{a}_x \times \left(\vec{a}_y \frac{\sqrt{3}}{2} + \vec{a}_z \frac{1}{2}\right) = -\vec{a}_z \frac{\sqrt{3}}{2} + \vec{a}_y \frac{1}{2}$$

Na forma fasorial, temos:

$$\vec{E}_s(y,z) = E_{y_0} \cdot e^{-jK_y \cdot y} \vec{a}_z + E_{z_0} e^{-jK_z \cdot z} \vec{a}_y \text{, Como:}$$

$$K_y^2 + K_z^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = K_0^2 \Rightarrow \begin{cases} K_y = K_0 \cdot \vec{a}_n \cdot \vec{a}_y = K_0 \sqrt{3}/2 \\ K_z = K_0 \cdot \vec{a}_n \cdot \vec{a}_z = K_0 \cdot 1/2 \end{cases}$$

$$\therefore \vec{E}_s(y,z) = E_{y_0} \cdot e^{-j\frac{K_0\sqrt{3}}{2}y} \vec{a}_z + E_{z_0} \cdot e^{-j\frac{K_0}{2}z} \vec{a}_y$$

Assim: $\vec{E}(y,z,t) = \mathrm{Re}\{E_s(y,z) \cdot e^{j\omega t}\}$

$$= E_{y_0} \cos\left(\omega t - K_0 \frac{\sqrt{3}}{2} y\right) \vec{a}_z + E_{z_0} \cos\left(\omega t - \frac{K_0}{2} z\right) \vec{a}_y$$

No ponto $E(0,0,0) = E_s \vec{a}_E = E_{y_0} \vec{a}_z + E_{z_0} \vec{a}_y$

$$E_0 \cdot \left(-\vec{a}_z \frac{\sqrt{3}}{2} + \vec{a}_y \frac{1}{2}\right) = E_{y_0} \vec{a}_z + E_{z_0} \vec{a}_y \Rightarrow \begin{cases} E_{z_0} = E_0/2 \\ E_{y_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \end{cases}$$

No vácuo, temos que $K_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0} = \omega/c$, então:

$$\boxed{\vec{E}(y,z,t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \cos\left(\omega t - K_0 \frac{\sqrt{3}}{2} y\right) \vec{a}_z + \frac{E_0}{2} \cos\left(\omega t - \frac{K_0}{2} z\right) \vec{a}_y}$$

b) A partir do item (a), temos:

$$H_s(x) = \frac{1}{\eta_0} \cdot E_0 \cdot \vec{a}_x \cdot \exp\{-jK_0[\vec{a}_n(y\vec{a}_y + z\vec{a}_z)]\}$$

$$= \frac{1}{\eta_0} \cdot E_0 \cdot \vec{a}_x \cdot \exp\left[-jK_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{z}{2}\right)\right]$$

Aplicando isto no tempo, temos:

$$\vec{H}(x,t) = Re\{H_s(x) \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\therefore \vec{H}(x,t) = \frac{E_0}{\eta_0}\vec{a}_x \cdot \cos\left[\omega t - \frac{K_0}{2}\left(\sqrt{3}y + z\right)\right]$$

onde $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$

c) $S_{médio} = \frac{1}{2} Re\{E_s \times H_s^*\}$

$$E_s \times H_s^* = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 0 & E_0 \cdot e^{j\frac{K_0}{2}z} & -\frac{\sqrt{3}}{2}E_0 e^{\frac{\sqrt{3}}{2}jK_0 y} \\ \frac{E_0}{\eta_0}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}jK_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{z}{2}\right)} & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{E_0^2}{\eta_0}e^{jK_0 z/2}\vec{a}_y - \frac{E_0^2}{2\eta_0}e^{jK_0\frac{\sqrt{3}}{2}y}\vec{a}_z$$

$$\therefore S_{médio} = \frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{E_0^2}{\eta_0}\cos(K_0 z/2)\vec{a}_y - \frac{E_0^2}{2\eta_0}\cos(K_0\sqrt{3}/2\, y)\vec{a}_z\right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{E_0^2}{\eta_0}\cos(K_0 z/2)\vec{a}_y - \frac{E_0^2}{4\eta_0}\cos(K_0\sqrt{3}/2\, y)\vec{a}_z$$

③ $E = a_x . E_0 + a_y . 2E_0 . e^{j\phi}$ p/ $E_0 > 0$

a) $\phi = \pi/2$, temos:

$E = a_x . E_0 + a_y\ 2E_0 . e^{j\pi/2}$, então a expressão instantânea será:

$$E(\pi/2, t) = Re\{E(\phi)\} = a_x\ E_1(\pi/2, t) + a_y\ E_2(\pi/2, t)$$
$$= a_x . E_0 \cos\omega t + a_y\ 2E_0 \operatorname{sen}\omega t$$

Logo, analiticamente:

$$\cos\omega t = \frac{E_1(\pi/2, t)}{E_0} \quad e \quad \operatorname{sen}\omega t = \frac{E_2(\pi/2, t)}{2E_0}$$

Então, $\left(\frac{E_1(\pi/2, t)}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_2(\pi/2, t)}{2E_0}\right)^2 = 1$ (relação fundamental)

Tal equação é uma equação p/ uma elipse, logo a polarização é elíptica.

b) Para $\phi = \pi/2$ e $z > 0$, temos que:

$E(\pi/2, t) = \vec{a}_x . E_0 \cos\omega t + \vec{a}_y . 2E_0 . \operatorname{sen}\omega t$, equação que demonstra um movimento no sentido horário e seu período será: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

c) Para $\phi = -\pi/2$ e $z > 0$, temos que:

$E(\pi/2, t) = \vec{a}_x E_0 \cos\omega t - a_y . 2E_0 \operatorname{sen}\omega t$, tal equação mostra um movimento no sentido anti-horário com o mesmo período do item b.

5/6

② $u_p = \frac{\omega}{\beta}$ e $u_g = (d\beta/d\omega)^{-1}$

a) $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ p/ frequências baixas $\left(\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} << 1\right)$

Temos que: $\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$, então

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

b) Para frequências muito altas, temos:

$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1 \Rightarrow \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, então $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$

c) U_p p/ frequências baixas será $u_p = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}}$

U_g p/ frequências baixas será $u_g = \frac{\sqrt{8\omega\mu\sigma}}{\mu\sigma}$, onde $u_g = \frac{1}{d\beta/d\omega}$

Então: $\frac{u_g}{u_p} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} \cdot \frac{\mu.\sigma}{\sqrt{8\omega\mu\sigma}} = 2$

d) Para frequências altas, temos:

$u_p = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$; $u_g = \frac{1}{d\beta/d\omega} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ $\therefore$ $\frac{u_p}{u_g} = 1$

e) Para frequências baixas $\Rightarrow \frac{du_p}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\omega\mu\sigma}}$

f) Para frequências altas $\Rightarrow \frac{du_p}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] = 0$