Cálculo Numérico (MS211) PROVA 2 (27/06/2012)

Nome: ______________________________ RA: __________ Turma: ______

Trabalhe com *radianos* e 4 *dígitos decimais*! Justifique as suas respostas! Boa sorte!

---

1. Cobre é um material muito valorizado na indústria devido a seus excelentes propriedades de condutividade térmica e elétrica. Um modelo de condutividade térmica é dado pela seguinte expressão, onde T denota a temperatura em K (kelvin):
$$k(T) = \frac{1}{\frac{c_1}{T} + c_2 T^2}$$
Para uma pressão de 101325 pascal, temos os valores seguintes de condutividade térmica em milhares de W/m-K (Watts por metro kelvin):

Temperatura em K	5	10	20	30	40	50	60
Condutividade térmica em milhares de W/m-K	19.5	24.3	10.8	4.45	2.17	1.25	0.829

   (a) Utilize o método dos Quadrados Mínimos para ajustar a função $k(T)$ aos dados da tabela. [2.5 pts]
   (b) Utilize $k(T)$ para estimar a condutividade térmica de cobre em W/m-K numa temperatura de 27 K (com a mesma pressão). [0.5 pts]

2. Considere a seguinte tabela de dados:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

   (a) Mostre que $P(x) = 3-2(x+1)+(x+1)x(x-1)$ e $Q(x) = -1+4(x+2)-3(x+2)(x+1)+(x+2)(x+1)x$ interpolam os dados acima. [1 pt]
   (b) Providencie um argumento porque $P(x) = Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ sem fazer contas ou manipular equações . [0.5 pts]
   (c) Podemos afirmar que $P(x)$ é um spline cúbico que interpola os dados? [0.5 pts]

3. Considere a seguinte integral:
$$\int_1^2 \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$
   (a) Aproxime o valor desta integral numéricamente utilizando a regra de Simpson Repetida com 2 subintervalos. [1 pt]
   (b) Estime o valor desta integral usando Quadratura Gaussiana (com dois pontos). [1 pt]
   (c) Considerando o fato que erro feito na aproximação da integral usando Quadratura Gaussiana é $E_{QG} = \frac{(b-a)^3 2^4}{3(4!)^3} f^{iv}(\xi)$, para algum $\xi \in (a,b)$,
   qual das 2 aproximações (obtidas em (a) e (b)) garante o menor erro em módulo? [0.5 pts]

4. Considere o problema
$$\begin{cases} y'' &= y' + xy \\ y(1) &= 0 \\ y'(1) &= 2 \end{cases}$$
   (a) Transforme este problema em um PVI vetorial. [0.5 pts]
   (b) Aplique o método de Euler Aperfeiçoado em forma tabelar com $h = 0.1$ para estimar o valor de $y(1.2)$. Qual é o valor encontrado? [2 pts]

ALGUMAS FÓRMULAS E TABELAS

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$, $x = \phi(t) = \frac{1}{2}[a + b + t(b-a)]$

$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2$, onde $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

$|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4$, onde $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{iv}(x)|$

x	y	$y' = f(x,y)$	$\Delta y \approx y'h$

x	y	$y' = f(x,y)$	y''	$\Delta y \approx y'h + y''\frac{h^2}{2}$

x_k	y_k	$y'_k = f(x_k, y_k)$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$	$\Delta y_k \approx (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$

T	5	10	20	30	40	50	60
1. $Y =$	19,5	24,3	10,8	4,45	2,17	1,25	0,82

Cond. term. $* 10^3$

$$Y \approx k(T) = \frac{1}{\frac{c_1}{T} + c_2 T^2}$$

~~1~~ 1/2

$$z = \frac{1}{Y} \approx \frac{1}{T} \cdot c_1 + c_2 T^2$$

T	5	10	20	30	40	50	60
$z = \frac{1}{Y}$	0,0513	0.0412	0,0926	0,2247	0,4608	0,8000	1,206

$$A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \approx z \Rightarrow A^T A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A^T z$$

1/2

$$A = \begin{array}{cc} \frac{1}{T} & T^2 \\ \left(\begin{array}{cc} 0,2 & 25 \\ 0,1 & 100 \\ 0,05 & 400 \\ 0,0333 & 900 \\ 0,025 & 1600 \\ 0,02 & 2500 \\ 0,01667 & 3600 \end{array}\right) \end{array}$$

1/2

$c_1 = 0,0926$

$c_2 = 0,003$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,0549 & 215 & 0,0741 \\ 215 & 22750625 & 7324,5901 \end{array}\right)$$

1/2

~~k(t)~~ y Então $Y \approx k(T) \doteq \dfrac{1}{\frac{0,0926}{T} + 0,0003 \cdot T}$

1/2

(b) A condutividade térmica de cobre numa temp. de 27K nesta pressão é

$$\approx k(27) = \frac{1}{\frac{0{,}0926}{27} + 0{,}0003 \cdot 27^2}$$

$$\approx 4{,}5019 * 10^3 \ W/m\text{-}K$$

1/2

2. (a)

$P(-2) = 3 - 2(-1) + (-1)(-2)(-3) = 3 + 2 - 6 = -1$

$P(-1) = 3 - 0 + 0 = 3$

$P(0) = 3 - 2 = 1$

$P(1) = 3 - 2 \cdot 2 + 0 = -1$

$P(2) = 3 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 3$

$\therefore$ P interpola os dados

1/2

$Q(-2) = -1$

$Q(-1) = -1 + 4 = 3$

$Q(0) = -1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -1 + 2 = 1$

$Q(1) = -1 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 =$

$= -1 + 12 - 18 + 6 = -1$

$Q(2) = -1 + 4 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2$

$= -1 + 4(4 - 9 + 6) = -1 + 4 = 3$

$\therefore$ Q interpola os dados

1/2

(b) Temos 5 nós de interpolação

$\Rightarrow \exists!$ poli de grau ≤ 4 que interpola os dados

Então tanto P quanto Q são iguais a este polinômi

$P = Q$

~~(5)~~(c) P é um polinômio de grau 3 que interpola os dados,

Por def., um spline cúbico interpolante S ~~consiste~~ é igual a um poli de grau ≤ 3 $\forall x \in [a, a+1]$ onde $a \in \{-2, -1, \ldots 1\}$

e além disso ~~é~~ $S \in C^2([-2, 2])$

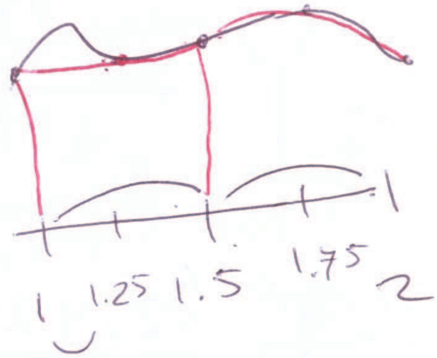
Já que todo poli é em $C^2(\mathbb{R})$

P satisfaz todas estas condições

portanto P é spline cúbico

$\frac{1}{2}$

3. $$\int_1^2 \underbrace{\frac{x^2}{e^x - 1}}_{f(x)} \, dx$$



(a)

$$\int_1^2 f(x)\,dx \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{12}\left[f(1) + 4 f(1.25) + 2 f(1.5) + 4 f(1.75) + f(2\right.$$

$$= \frac{1}{12}\left[0.5820 + 4 \cdot 0.6274 + 2 \cdot 0,6462 + 4 \cdot 0.6441 + \right.$$

$$= \frac{1}{12}\left[0.5820 + 2.5096 + 1,2924 + 2,5764 + 0.6261\right.$$

$$= \frac{1}{12}[7,5865] \simeq 0,6322$$

(b) $x = \phi(t) = \frac{1}{2}[3 + t] = \frac{3}{2} + \frac{t}{2}$

$$\phi'(t) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\phi(-1)=1}^{\phi(1)=2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(\phi(t))\,d\phi(t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}[3+t]^2}{e^{\frac{1}{2}(3+t)}-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} \frac{(3+t)^2}{e^{\frac{3+t}{2}}-1}\,dt$$

$$\approx \frac{1}{8}\left[\frac{\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{e^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}-1} + \frac{\left(3+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{e^{\frac{1}{2}\left(3+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}-1}\right.$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{(2,4226)^2}{e^{\frac{1}{2}\cdot 2.4226}-1} + \frac{3.5774^2}{e^{\frac{1}{2}\cdot 3.5774}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{5.8690}{e^{1,2113}-1} + \frac{12.7978}{e^{1.7887}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[2.4891 + 2,5690\right] = \frac{5,0581}{8}$$

$$\approx 0,6323$$

(C) $|E_{QG}| \le \underbrace{\max_{1 \le x \le 2} |f^{(iv)}(x)|}_{M_4} \cdot \frac{1 \cdot 2^4}{3 \cdot (4!)}$

(Obs. $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \in C^4(\mathbb{R})$)

e $|E_{SR}| \le \frac{1 \cdot h^4}{180} \cdot M_4$, aqui $h = 0.25 =$

$\therefore |E_{QG}| \le \frac{16}{3 \cdot 24^3} M_4 = \frac{\cancel{4^2}}{3(3!)^2 \cancel{4^2} \cdot (4!)} \cdot M_4$

$= \frac{1}{3 \cdot 6^2 \cdot 24} \cdot M_4$

$M_4 \frac{1}{3 \cdot 36 \cdot 24} = \frac{1}{108 \cdot 24} M_4$

$\cong 3.8580\ldots$

$> \frac{1}{16^2 \cdot 180} \cdot M_4$ o limite superior para

$\cong 2.1701 \cdot 10^{-5} M_4$ $|E_{SR}|$

$\therefore$ A escolha deve ser a ~~QG~~ Simpson com 2 subdivisões para quadratura gaussiana porque ela providencia uma ~~estimada~~ limite ~~de~~ superior do módulo do erro menor.

4. (a) Seja $\bar{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' = y' + xy \end{pmatrix}$

PVI: $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y' + xy \end{pmatrix} = f(x, Y)$

$$Y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

x_k	$Y_k = \begin{pmatrix} y_k \\ y_k' \end{pmatrix}$	$Y_k' = \begin{pmatrix} y_k' \\ y_k' + x_k y_k \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = Y_k + Y_k' h$	$\bar{Y}_{k+1}' = \begin{pmatrix} \bar{y}_k' \\ \bar{y}_k' + (x_{k+1} \bar{y}_k) \end{pmatrix}$

Gabarito

k	$Y_k = \begin{pmatrix} y_k \\ y_k' \end{pmatrix}$	$Y_k' = \begin{pmatrix} y_k' \\ y_k' + x_k y_k \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = \begin{pmatrix} \bar{y}_{k+1} \\ \bar{y}_{k+1}' \end{pmatrix} = Y_k + Y_k' \cdot h$	$\bar{Y}_{k+1}' = \begin{pmatrix} \bar{y}_{k+1}' \\ \bar{y}_{k+1}' + x_{k+1} \bar{y}_{k+1} \end{pmatrix}$	ΔY_k $\frac{Y_k' + \bar{Y}_{k+1}'}{2} \cdot h$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,2 \\ 2,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,2 \\ 2,42 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \cdot 0,1 \\ 2,21 \cdot 0,1 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 0,21 \\ 2,221 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,221 \\ 2,4520 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,4321 \\ 2,4662 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,4662 \\ 2,9847 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,2344 \\ 0,2718 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} \underline{0,4444} \\ 2,4928 \end{pmatrix}$				

$\therefore$ ~~y~~ $y(1,2) \approx 0,4444$