Gabarito da Prova 3 de MA311 - Cálculo III - Turma Z - Professora: Gabriela Planas 22/11/2012

1.ª Questão. (3,0 pontos)

(a) Determine a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$ e explicite o teste utilizado.

(b) Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n n}$.

(c) Encontre uma representação em série de potências para $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

Resolução: (a) O termo dominante do numerador é n e o termo dominante no denominador é $\sqrt[3]{n^7}$. Isto sugere tomar:

$$a_n = \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^7+n^2}} \qquad b_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{1}{n^{4/3}} \qquad (0,3)$$

para aplicar o Teste do Limite. Notemos que $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}}{\frac{1}{n^{4/3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{4/3}(n+2)}{\sqrt[3]{n^7+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^5}}} = 1 > 0. \qquad (0,3)$$

Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ é convergente (pois $\frac{4}{3} > 1$), pelo Teste do Limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$ também é convergente. (0,4)

(b) Seja $a_n = \dfrac{(x-4)^n}{3^n n}$. Pelo teste da razão, devemos ter:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-4|}{3} \frac{n}{n+1} = \frac{|x-4|}{3} < 1,$$

ou seja $|x-4| < 3 \Leftrightarrow 1 < x < 7$. Assim o raio de convergência é $R = 3$. (0,6)

Para $x = 1$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-4)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que é a série harmônica alternada e converge. (0,2)

Para $x = 7$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-4)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que é a série harmônica e diverge. (0,2)

Logo o intervalo de convergência é: $[1,7)$.

(c) Comparando com a série geométrica:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \qquad (0,5)$$

para $|-x^2| < 1$, ou seja $|x| < 1$. (0,2) Assim

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+3} \qquad \text{para } |x| < 1. \qquad (0,3)$$

2.ª Questão. (2,0 pontos) Determine os três primeiros termos de cada uma das duas soluções linearmente independentes da equação diferencial

$$(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

da solução em série de potências em torno de $x = 0$.

Resolução: Como $P(x) = 2 + x^2$ e $P(0) = 2 \neq 0$, temos que $x = 0$ é um ponto ordinário. (0,2)

Seja $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Derivando e substituindo na equação:

$$\begin{aligned}
(2+x^2)y'' - xy' + 4y &= (2+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n(n-1) - n + 4)a_n\Big)x^n = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n(n-1) - n + 4)a_n = 0$, e obtemos a relação de recorrência:

$$a_{n+2} = -\frac{n^2 - 2n + 4}{2(n+2)(n+1)}a_n, \qquad n \geq 0. \qquad (0,8)$$

Temos:

$$\begin{aligned}
n = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = -a_0 \\
n = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_3 = -\frac{3}{2.3.2}a_1 = -\frac{1}{4}a_1 \\
n = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_4 = -\frac{4}{2.3.4}a_2 = \frac{1}{6}a_0 \\
n = 3 \quad &\Rightarrow \quad a_5 = -\frac{7}{2.5.4}a_3 = \frac{7}{2.5.4.4}a_1 = \frac{7}{160}a_1
\end{aligned}$$

A solução geral é:

$$y = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{1}{4}a_1 x^3 + \frac{1}{6}a_0 x^4 + \frac{7}{160}a_1 x^5 + ...$$

$$= a_0\Big(1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + ...\Big) + a_1\Big(x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{160}x^5 + ...\Big) = a_0 y_1 + a_1 y_2,$$

logo as duas soluções l.i. são

$$y_1 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + ... \qquad \text{e} \qquad y_2 = x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{160}x^5 + ... \qquad (1,0)$$

3.ª Questão. (1,0 ponto) Considere a equação diferencial

$$(x-2)^2(x+2)y'' + 2xy' + 3(x-2)y = 0.$$

(a) Encontre todos os pontos singulares regulares da equação dada.
(b) Determine a equação indicial e suas raízes para cada ponto singular regular.

Resolução: (a) Temos que $P(x) = (x-2)^2(x+2)$. Logo $P(x) = 0$ para $x = \pm 2$ e portanto $x = 2$ e $x = -2$ são pontos singulares. Agora

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 2}(x-2)\frac{2x}{(x-2)^2(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x}{(x-2)(x+2)}$$

não existe, logo $x = 2$ é ponto singular irregular.

$$\lim_{x\to -2}(x+2)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -2}(x+2)\frac{2x}{(x-2)^2(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{2x}{(x-2)^2} = \frac{-1}{4} = p_0,$$

$$\lim_{x\to -2}(x+2)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -2}(x+2)^2\frac{3(x-2)}{(x-2)^2(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{3(x+2)}{(x-2)} = 0 = q_0.$$

Portanto $x=-2$ é o único ponto singular regular.

(b) A equação indicial é

$$r^2 + (p_0-1)r + q_0 = r^2 - \frac{5}{4}r = 0.$$

As raízes são: $r_1 = 0$ e $r_2 = \frac{5}{4}$.

4.ª Questão. (a)(1,5 pontos) Encontre a série de Fourier de senos da extensão ímpar da função $f(x) = 1$ para $0 < x < 1$.

(b)(0,5 ponto) Utilize a parte (a) em $x = \frac{1}{2}$ para encontrar a soma de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Resolução: (a) A extensão ímpar da função é

$$g(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, 1, -1, \\ 1, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

O período é $2 = 2L$, ou seja $L = 1$. (0,5)

Como a g é uma função ímpar, os coeficientes $a_n = 0,\ n \geq 0$ e

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\text{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = 2\int_0^1 \text{sen}(n\pi x)dx = -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi}(1-\cos(-n\pi)).$$

Agora,

$$\begin{cases} \text{se } n = 2k, & \cos k\pi = 0, \\ \text{se } n = 2k+1, & \cos((2k+1)\pi) = (-1)^k. \end{cases} \Rightarrow b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k, \\ \frac{4}{n\pi} & \text{se } n = 2k+1. \end{cases}$$

Logo, a série de Fourier de f é:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\Big(1-\cos(n\pi)\Big)\text{sen}(n\pi x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\text{sen}((2k+1)\pi x). \qquad (1,0)$$

(b) Pelo teorema de convergência de Fourier em $x = \frac{1}{2}$ a série de Fourier converge para $f(1/2) = 1$, pois f é contínua nesse ponto. Assim

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\text{sen}((2k+1)\pi x). \qquad (0,2)$$

Como

$$\text{sen}((2k+1)\pi x) = (-1)^k$$

podemos escrever a série como

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi} \qquad \text{e daí} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}. \qquad (0,3)$$

5.ª Questão. (2,0 pontos) Resolva o seguinte problema usando o método de separação de variáveis justificando TODA a análise.

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 7\text{sen}(2x), \quad u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Resolução: Seja $u(x,t) = X(x)T(t)$. Derivando $u_{xx} = X''T$ e $u_{tt} = XT''$ e substituindo na equação,

$$X''T = XT'' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \sigma \text{ constante}$$

já que x e t são variáveis independentes. Assim obtemos duas EDOs

$$X'' = \sigma X \quad \text{e} \quad T'' = \sigma T. \qquad (0,3)$$

Utilizando as condições de contorno

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0.$$

Logo X deve satisfazer o seguinte problema

$$(A)\left\{\begin{array}{l} X'' = \sigma X, \quad 0 < x < \pi, \\ X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0. \end{array}\right. \qquad (0,3)$$

Caso $\sigma > 0$: Tomando $\sigma = \lambda^2$, a solução geral da equação para X é $X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$. Utilizando as condições de contorno:
$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 \Rightarrow X(x) = c_1(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})$.
$X(\pi) = c_1(e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$, o que não interessa.

Caso $\sigma = 0$: A solução geral é $X(x) = c_1 x + c_2$. Utilizando as condições de contorno:
$X(0) = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x \Rightarrow X(\pi) = c_1\pi = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$, o que não interessa.

Caso $\sigma < 0$: Tomando $\sigma = -\lambda^2$, a solução geral da equação é:

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \text{sen}(\lambda x).$$

Utilizando as condições de contorno:
$X(0) = c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = c_2 \text{sen}(\lambda x) \Rightarrow X(\pi) = c_2 \text{sen}(\lambda\pi) = 0$. Como queremos $c_2 \neq 0 \Rightarrow \text{sen}(\lambda\pi) = 0 \Rightarrow \lambda\pi = n\pi$.
Para cada $n \geq 1$, seja $\lambda_n = n$, assim $X_n(x) = \text{sen}(nx)$ são soluções do problema (A). (0,5)

Equação para T : Temos $T'' = \lambda_n^2 T$, cuja solução geral, para cada $n \geq 1$, é $T_n(t) = c_n \cos(nt) + d_n \text{sen}(nt)$. Utilizando a condição inicial homogênea para $u_t(x,0) = X(x)T'(0) = 0 \Rightarrow T'(0) = 0 \Rightarrow T_n'(0) = d_n n \cos(n) = 0 \Rightarrow d_n = 0 \Rightarrow T_n(t) = c_n \cos(nt)$. (0,5)
Assim para cada $n \geq 1$ a função

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n \text{sen}(nx)\cos(nt) \qquad (0,3)$$

satisfaz a equação do calor junto com as condições de contorno, com c_n constante qualquer.
Procuramos uma solução que satisfaz a condição inicial $u(x,0) = 7\text{sen}(2x)$. Seja

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}(nx)\cos(nt)$$

Assim,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}(nx) = 7\text{sen}(2x) \Longrightarrow \quad c_2 = 7,\ c_n = 0,\ \ n \neq 2. \qquad (0,4)$$

Resposta: A solução do problema é

$$u(x,t) = 7\text{sen}(2x)\cos(2t). \qquad (0,2)$$