MA327 Turmas C,D,E - 2S 2011 - Prova 3

Nome: GABARITO RA: D 24/11/2011

Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

1. (a) (05pts) Escreva a definição de adjunta de uma transformação linear dada.

   (b) (05pts) Enuncie o teorema espectral sobre o corpo dos reais.

2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e $T : V \to V$ uma transformação linear. Determine se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) (10pts) Se $T^k = I$ e λ é uma raiz do polinômio característico de T, então $|\lambda| = 1$.

   (b) (10pts) Se T é autoadjunta e α é uma base de V, então $[T]_\alpha^\alpha = ([T]_\alpha^\alpha)^*$.

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$.

   (a) (10pts) Determine se T é unitária.

   (b) (10pts) Verifique que T é normal.

   (c) (20pts) Encontre base ortonormal de $\mathbb{C}^3$ formada por autovetores de T.

4. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2, x_2, -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4, 2x_1 - 2x_2 + 3x_4)$$

   (a) (10pts) Calcule as multiplicidades algébrica e geométrica dos autovalores de T.

   (b) (15pts) Para cada autovalor λ cujas multiplcidades algébrica e geométrica não coincidirem, encontre um *autovetor generalizado* de ordem 2, isto é, um vetor

$$v_2 \in \mathcal{N}\left((T - \lambda I)^2\right) \setminus \mathcal{N}(T - \lambda I).$$

   Para tal, escolha algum autovetor $v_1 \in W_\lambda$ e resolva o sistema:

$$(T - \lambda I)v_2 = v_1.$$

   Explique por que $v_2 \in \mathcal{N}\left((T - \lambda I)^2\right)$ mas $v_2 \notin \mathcal{N}(T - \lambda I)$.

   (c) (5pts) Determine entre os vetores estudados uma base β do $\mathbb{R}^4$ tal que:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

. Obs.: dizemos que $[T]_\beta^\beta$ é a *forma canônica de Jordan* de T.

Questão 1

a) Sejam V e W espaços vetoriais com produtos internos $\langle \cdot , \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot , \cdot \rangle_W$ e $T \in \mathcal{L}(V, W)$; a adjunta de T é a transformação $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$ definida por:

$$\boxed{\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^* w \rangle_V}, \quad \forall v \in V, w \in W.$$

b) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno, $\dim V < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(V,V)$ um operador linear; então T é autoadjunto $\Leftrightarrow$ $\exists \beta \subset V$ base ortonormal tal que $[T]_\beta^\beta$ é diagonal.

Questão 2

a) VERDADEIRO: Seja $v \in W_\lambda$ um autovetor associado a λ; então: $v = I\, v = T^k v = T^{k-1} . Tv = \lambda . T^{k-1} v = \dots = \lambda^k v$

$\Rightarrow \lambda^k = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$ $\square$

b) FALSO: A afirmação só vale em geral para α base ortogonal de V; contra-exemplo: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x, -y)$ é autoadjunta, pois $\left\langle T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

mas se $\alpha = \{(1,0), (1,1)\}$, tem-se:

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq \left([T]_\alpha^\alpha\right)^*.$$ $\blacksquare$

Questão 3 |

a) Para $v=(1,0,0)$, tem-se $\|v\|=1$

porém $Tv=(1,0,1)$, com $\|Tv\|=\sqrt{2}$ $\Big\}$ $\|Tv\| \neq \|v\|$

$\therefore$ T não é unitária.

b) Seja β a base canônica de $\mathbb{C}^3$:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como β é ortonormal, temos:

$$[T^*]_\beta^\beta = \left(\overline{[T]_\beta^\beta}\right)^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim: $$[TT^*]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [T^*T]_\beta^\beta$$

e portanto T é normal.

c) Polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det(T-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+2$$

raíz por inspeção: $\lambda=2$

Assim: $p(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda+1)$ $\qquad \Delta = 1-4 = -3$

Autovalores: $\boxed{\lambda_0 = 2, \quad \lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}}$

Autoespaços de T

$\lambda_0 = 2$: $(T-2I)v = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} L_3 \\ -L_2 \\ L_1+L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ L_2-L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] : \quad v = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$$

$$\boxed{\therefore W_2 = \{\alpha(1,1,1)\} = \{\alpha v_2\}}$$

$\lambda_\pm = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$: $(T - \lambda_\pm I)v = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda_\pm & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_\pm & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda_\pm & 0 \end{array}\right]$$

$$v_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \\ e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ -e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \\ e^{\mp i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\therefore W_{\lambda_+} = \{\alpha(1, -e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{+i\frac{2\pi}{3}})\} \text{ e } W_- = \{\alpha(1, -e^{-i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}})\}}$$

Como T é normal, sabemos de antemão que os autovetores v_2, v_+ e v_- são ortogonais, pois são associados a autovalores distintos.

Normalização

$$w_1 = \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$w_2 = \hat{v}_+ = \frac{1}{\sqrt{3}} v_+ = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$w_3 = \hat{v}_- = \frac{1}{\sqrt{3}} v_- = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$$

Assim $\{w_1, w_2, w_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{C}^3$ formada por autovetores de T. $\square$

Questão 4

Seja $\alpha \subset \mathbb{R}^4$ a base canônica; então

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^2$$: raízes 1, 2 e 3.

A partir de $p(\lambda)$ temos:

$$\boxed{m_a(1) = m_a(2) = 1, \quad m_a(3) = 2.}$$

Como $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$, tem-se de imediato

$$\boxed{m_g(1) = m_g(2) = 1}$$

Resta determinar $m_g(3) = \dim W_3$.

$w \in W_3 \Leftrightarrow (T - 3I)w = 0$, com:

$$T - 3\lambda \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} -L_1 + \frac{1}{2}L_2 \\ -\frac{1}{2}L_2 \\ -\frac{1}{2}L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\sim \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3-2L_1+L_2 \\ L_4-2L_1+2L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow w = t\underbrace{(0,0,2,0)}_{v_1}$$

para facilitar o item b)

$$\boxed{\therefore\ m_g(3) = \dim W_3 = 1}$$

b) Como $m_a(1) = m_g(1)$, $m_a(2) = m_g(2)$ e $m_a(3) = m_g(3) + 1$, basta procurar um autovetor generalizado associado a $\lambda = 3$.

Seja $v_1 = (0,0,2,0)$:

$$(T-3I)v_2 = v_1 : \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow v_2 = (0,0,t,-1)$$

e podemos fixar $t=0$: $v_2 = (0,0,0,-1)$,

claramente $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Por fim, $\left| \begin{array}{l} (T-3I)^2 v_2 = (T-3I)v_1 = 0 \Rightarrow v_2 \in \mathcal{N}(T-3I)^2 \\ (T-3I)v_2 = v_1 \neq 0 \Rightarrow v_2 \notin \mathcal{N}(T-3I) \end{array} \right.$

c) Resta determinar geradores de W_1 e W_2:

- $w \in W_1 \Leftrightarrow (T-I)w = 0$:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1 \\ L_3+4L_1 \\ L_4-2L_1 \\ L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad w = t(1,1,1,0)$$

- $w \in W_2 \Leftrightarrow (T-2I)w = 0$:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} \frac{1}{2}(L_4-2L_1) \\ -L_2 \\ L_3+2L_4 \\ L_2-L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad w = t(1,0,0,-2)$$

Assim, tomando $\beta = \{(1,1,1,0); (1,0,0,-2); (0,0,2,0), (0,0,0,-1)\}$ tem-se a forma canônica de Jordan:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\blacksquare$