INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP
Prova 1 - F 315 B 14/09/2010

UNICAMP IFGW Instituto de Física Gleb Wataghin

1) _____
2) _____
3) _____
4) _____
Nota: _____

RA:________ Nome: CABARITO

Questão 1 (2.5 pts)

A velocidade de uma partícula de massa m varia com a distância x de acordo com a relação $v(x)=\alpha x^{-n}$. Assuma que *v(x=0) = 0* em *t=0*.

(a) Encontre *F(x)*. (1.0)
(b) Encontre *x(t)*. (1.0)
(c) Encontre *F(t)*. (0.5)

(a) $F = m\dfrac{dv}{dt} = m v \dfrac{dv}{dx}$

$v(x) = \alpha x^{-n} \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -n\alpha x^{-n-1}$

$\Rightarrow F(x) = m\cdot(\alpha x^{-n})(-n\alpha x^{-n-1}) = -\alpha^2 n m x^{-2n-1}$ //

(b) $v = \dfrac{dx}{dt} = \alpha x^{-n} \Rightarrow x^n dx = \alpha dt \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} = \alpha t + C$

$x(t=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow x^{n+1} = \alpha(n+1)t \Rightarrow x = [\alpha(n+1)t]^{1/n+1}$ //

(c) $F = -\alpha^2 n m \left[\alpha(n+1)t\right]^{-(2n+1)/n+1}$ //

(Substituindo resultado de (b) em (a))

Questão 2 (2.5 pts)

(a) Considere um sistema de N partículas em três dimensões sobre o qual atuam forças externas e de interação entre as partículas. Demonstre a lei de variação do momento linear total ($\vec{P} \equiv \sum_j \vec{p}_j$) para o sistema de partículas, usando como pressuposto que a 2a. Lei de Newton valha individualmente para cada partícula. (1.0)

(b) Despeja-se água em um barril a uma taxa de 120 kg por minuto de uma altura de 10 m. O barril pesa 5 kg e está em repouso sobre a balança. Determine a leitura da balança depois que a água foi despejada no barril durante um minuto. Deixe claro qual a relação deste problema com o teorema demonstrado em (a). (1.5)

(a) Para cada partícula, consideramos que

$$\vec{F}_j = \frac{d\vec{p}_j}{dt}$$

A ~~soma~~ força que atua na partícula j é a soma da força externa e das forças internas (geradas por interações com as outras partículas do sistema)

$$\vec{F}_j = \vec{F}_j^{ext} + \vec{F}_j^{INT} = \vec{F}_j^{ext} + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{i\to j}^{INT}$$

Somando em j:

$$\sum_j \vec{F}_j = \sum_j \vec{F}_j^{ext} + \sum_{j,\, i\neq j} \vec{F}_{i\to j}^{INT} = \sum_j \vec{F}_j^{ext} + \sum_{j,\, i<j} \left(\vec{F}_{i\to j}^{INT} + \vec{F}_{j\to i}^{INT}\right)$$

Como $\vec{F}_{i\to j} = -\vec{F}_{j\to i}$ (lei da ação e reação), temos

$$\sum_j \vec{F}_j = \sum_j \vec{F}_j^{EXT}$$

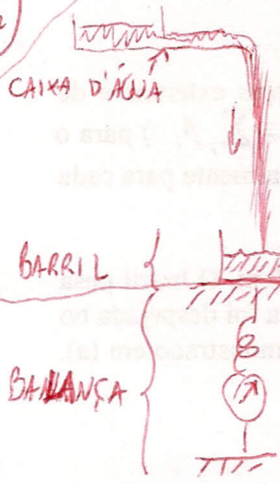
Mas $\vec{F}_j = \frac{d\vec{p}_j}{dt}$ (Hipótese inicial) $\Rightarrow$ 2ª LEI DE NEWTON

Portanto:

$$\sum_j \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \sum_j \vec{F}_j^{EXT} = \vec{F}^{ext} \Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_j \vec{p}_j = \vec{F}_{ext} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

onde $\vec{F}_{ext} = \sum_j \vec{F}_j^{EXT}$, e $\vec{P} = \sum_j \vec{p}_j$

6



CONSIDERE O SISTEMA BARRIL + ÁGUA. NESTE SISTEMA, AS FORÇAS EXTERNAS SÃO O PESO DA ÁGUA, E A FORÇA NORMAL DA BALANÇA. TAMBÉM HÁ UMA FORÇA DO SUPORTE DA CAIXA D'ÁGUA, QUE CONTRABALANÇA O PESO DA ÁGUA DENTRO DA CAIXA D'ÁGUA

MAS, PARA ESTE SISTEMA, CLARAMENTE $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$.

Portanto $\vec{F}_{ext} = 0$. Assim

$N_b - P_1 - P_2 - P_3 = 0$, onde P_1 é o peso da água no barril e P_2 é o peso da água que está caindo, e P_3 é o peso do barril

$$P_1 = 120 \ kg/min \cdot 1 \ min \cdot 10 \ m/s^2 = 1200 \ N$$

$$P_2 = 2 \ kg/s \times t_{QUEDA}(s) \times 10 \ m/s^2 =$$

Mas $t_{QUEDA} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2} \ s$

$$P_2 = 20\sqrt{2} \simeq 28 \ N$$

$$P_3 = 50 N$$

Portanto

$$N_b = 1200 \ N + 28 \ N + 50 \ N = 1278 \ N$$

Portanto, a balança irá ler 1278 N, ou 127,8 kg

Questão 3 (2.5 pts)

Uma partícula se movo sob a influência de uma força $F = -kx + kx^3/\alpha^2$, onde k e α são constantes positivas.

(a) Encontre a energia potencial associada a esta força. (1.0)
(b) Encontre os pontos de equilíbrio. Determine se são máximos ou mínimos. (0.75)
(c) Grafique o potencial, indicando quantitativamente os pontos relevantes. (0.75)

(a) $F = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U(x) = -\int F\,dx = -\int \left(-kx + \frac{kx^3}{\alpha^2}\right) dx$

$\Rightarrow U(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx^4}{4\alpha^2}$ //

(b) Ptos de equilíbrio: $\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow kx - \frac{kx^3}{\alpha^2} = kx\left(1 - x^2/\alpha^2\right) = 0$

SOLUÇÕES:

(I) $x = 0$

(II) $x = \pm\alpha$

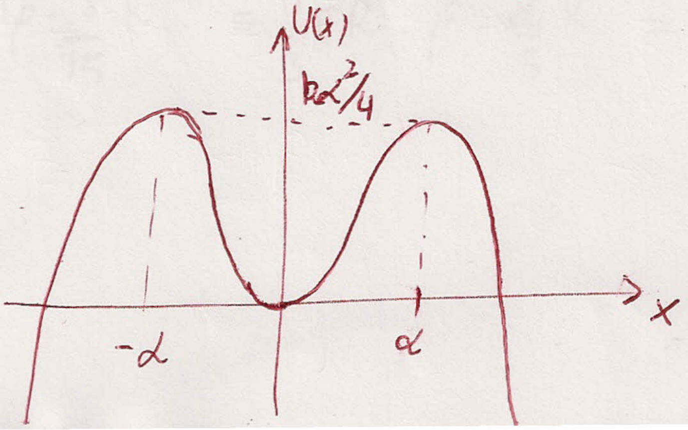
$\frac{d^2U}{dx^2} = k - \frac{3kx^2}{\alpha^2} = k\left(1 - \frac{3x^2}{\alpha^2}\right)$

p/ $x = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} = k > 0$ (mínimo)

p/ $x = \pm\alpha \Rightarrow \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=\pm\alpha} = -2k < 0$ (máximo)

(c) $U(x=0) = 0$

$U(x=\pm\alpha) = \frac{k\alpha^2}{2} - \frac{k\alpha^4}{4\alpha^2} = \frac{k\alpha^2}{4}$

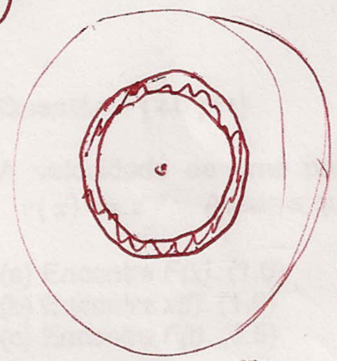


Questão 4 (2.5 pts)

Calcule o momento de inércia para:

(a) Um disco plano de densidade uniforme e massa *m* e raio *r*, em relação aos eixos *x*, *y*, e *z*. (1.0)
(b) Uma esfera de densidade uniforme e massa *M* e raio *R*. (1.5)

(a) Dividindo o disco em anéis, temos:



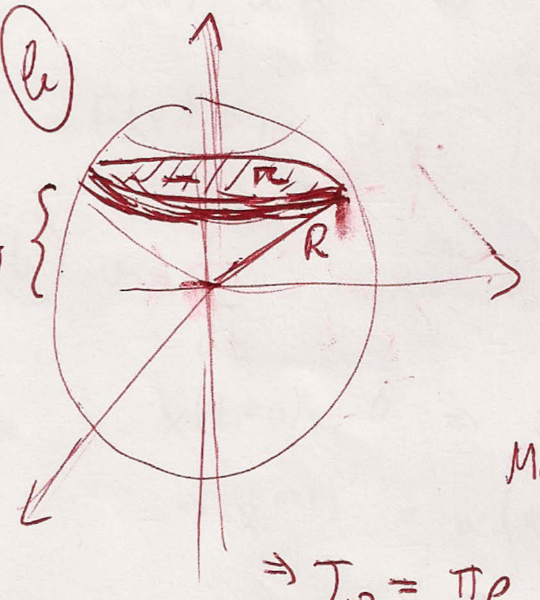
$$I_z = \int_0^r \sigma\, 2\pi r' r'^2\, dr' = 2\pi\sigma \frac{r^4}{4} = \frac{Mr^2}{2}$$

Pelo teorema dos eixos perpendiculares:

$I_z = I_x + I_y$. Por simetria: $I_x = I_y$

Portanto: $I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{Mr^2}{4}$ //

(b)



Dividindo a esfera em discos de área πr^2 e espessura dz, temos:

$$I_z = \int_{-R}^{R} \rho \frac{\pi r^2}{2} r^2\, dz \rightarrow$$ (, onde o integrando é o mom. de inércia de cada disco)

Mas $r^2 = R^2 - z^2$

$$\Rightarrow I_z = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2\, dz = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4)\, dz$$

$$\pi\rho\int_0^R (R^4 - 2R^2z^2 + z^4)\, dz = \pi\rho\left[R^5 - \frac{2R^5}{3} + \frac{R^5}{5}\right] = \pi\rho\frac{15-10+3}{15}R^5$$

$$\Rightarrow I_z = \pi\rho\cdot\frac{8}{15}R^5 = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho\cdot\frac{2}{5}R^2 = \frac{2}{5}MR^2 \ //$$