MA 327 A/B PROVA 2 18/10/11

RA: _______________ NOME: ____

1) (2,0) Determine a expressão de um operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenha como imagem o plano $x+y+z=0$ e como núcleo a reta $x=-y=-2z$

SOLUÇÃO. $Im(T)$: $(x,y,z)=(x,y,-x-y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$

$Im(T)=[(1,0,-1),(0,1,-1)]$

$N(T)$: $(x,y,z)=(-2z,2z,z)=z(-2,2,1)$

0,5 $N(T)=[(-2,2,1)]$

$\alpha=\{(-2,2,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$

0,5 $T(-2,2,1)=(0,0,0)$; $T(1,0,0)=(1,0,-1)$; $T(0,1,0)=(0,1,-1)$

$(x,y,z)=a(-2,2,1)+b(1,0,0)+c(0,1,0)=(-2a+b,2a+c,a)$

$\Longrightarrow$ $a=z$; $b=x+2z$, $c=y-2z$

0,5 $(x,y,z)=z(-2,2,1)+(x+2z)(1,0,0)+(y-2z)(0,1,0)$

$$\begin{aligned}T(x,y,z)&=zT(-2,2,1)+(x+2z)T(1,0,0)+(y-2z)T(0,1,0)\\&=z(0,0,0)+(x+2z)(1,0,-1)+(y-2z)(0,1,-1)\\&=(x+2z,\ y-2z,\ -x-2z-y+2z)\\&=(x+2z,\ y-2z,\ -x-y)\end{aligned}$$

0,5

2) Seja $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b) + (c-d)x + 2a\,x^2$$

a) (1,0) Determine uma base e a dimensão do núcleo de T

b) (0,5) T é sobrejetora? Justifique.

c) (1,0) Determine $[T]_\beta^\alpha$ onde $\alpha = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_4} \right\}$ e

$\beta = \{1, 2x, -x^2\}$

SOLUÇÃO. (a) $0 = T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b) + (c-d)x + 2ax^2 \iff \begin{cases} a+b=0 \\ c-d=0 \\ 2a=0 \end{cases}$

$\implies a=b=0$ e $c=d$

0,5

$N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right] =$ subespaço de $M_{2\times 2}$ gerado por $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base de $N(T)$ e $\dim N(T) = 1$.

0,5

(b) $4 = \dim M_{2\times 2} = \dim N(T) + \dim Im(T) = 1 + \dim Im(T)$

$\implies \dim Im(T) = 3 = \dim P_2 \implies T$ é sobrejetora

0,5

(c) $[T]_\beta^\alpha = \Big[\underset{\substack{\uparrow \\ 1^{\underline{a}} \text{ coluna}}}{[T(A_1)]_\beta} \; \underset{\substack{\uparrow \\ 2^{\underline{a}} \text{ coluna}}}{[T(A_2)]_\beta} \; \underset{\substack{\uparrow \\ 3^{\underline{a}} \text{ coluna}}}{[T(A_3)]_\beta} \; \underset{\substack{\uparrow \\ 4^{\underline{a}} \text{ coluna}}}{[T(A_4)]_\beta} \Big]_{3\times 4}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0,5

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 + 2x^2 = \underline{\underline{2}} \cdot 1 + \underline{\underline{0}} \cdot 2x + \underline{\underline{(-2)}} \cdot (-x^2)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1 = \underline{\underline{(-1)}} \cdot 1 + \underline{\underline{0}} \cdot 2x + \underline{\underline{0}} \cdot (-x^2)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2x = \underline{\underline{0}} \cdot 1 + \underline{\underline{1}} \cdot 2x + \underline{\underline{0}} \cdot (-x^2)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -x = \underline{\underline{0}} \cdot 1 + \underline{\underline{(-1/2)}} \cdot 2x + \underline{\underline{0}} \cdot (-x^2)$$

0,5
___

3) Seja V o espaço vetorial das matrizes reais 2×2 triangulares superiores.

Seja $T: P_2(\mathbb{R}) \to V$ linear dada por

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{bmatrix} a-b & b \\ 0 & a+c \end{bmatrix}$$

a) (0,5) Mostre que T é inversível.

b) (1,0) Encontre a expressão de T^{-1}.

<u>SOLUÇÃO</u>. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a-b & b \\ 0 & a+c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \Rightarrow \boxed{a=0} \\ \boxed{b=0} \\ a+c=0 \Rightarrow \boxed{c=0} \end{cases}$

$N(T)=\left\{a+bx+cx^2 ;\ T(a+bx+cx^2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}=\{0\} \Rightarrow T$ é injetora

$\begin{cases} \dim P_2 = 3 = \dim V \\ T \text{ é injetora} \end{cases} \Rightarrow T$ é isomorfismo

0,5

(b) $T(1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $T(x)=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T(x^2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\quad \| = B_1 \qquad\qquad \| = B_2 \qquad\qquad \| = B_3$

$T^{-1}(B_1)=1$, $T^{-1}(B_2)=x$, $T^{-1}(B_3)=x^2$

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & y \\ 0 & x+z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-y=a \Rightarrow \boxed{x=a+b} \\ \boxed{y=b} \\ x+z=c \Rightarrow \boxed{z=-a-b+c} \end{cases}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = (a+b)B_1 + bB_2 + (-a-b+c)B_3$

$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = (a+b) + bx + (-a-b+c)x^2$

1,0

4) Considere o operador linear $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$T(a+bx+cx^2) = -2c + (a+2b+c)x + (a+3c)x^2$$

a) (1,5) Encontre os autovalores e autovetores de T.

b) (0,5) T é diagonalizável? No caso afirmativo, exiba uma base β em relação à qual a matriz de T é diagonal. Exiba também a matriz $[T]_\beta^\beta$

SOLUÇÃO. (a) $\alpha = \{1, x, x^2\}$, $T(1) = x + x^2$, $T(x) = 2x$

$T(x^2) = -2 + x + 3x^2$

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + 2(2-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)(-3\lambda + \lambda^2 + 2)$$

$0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1$, $\lambda = \frac{3 \pm 1}{2}$ $\begin{cases} 2 = \lambda_1 \\ 1 = \lambda_2 \end{cases}$

0,5

$\lambda_1 = 2$: $2(a+bx+cx^2) = T(a+bx+cx^2) = -2c + (a+2b+c)x + (a+3c)x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2c = 2a \\ a+2b+c = 2b \\ a+3c = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ a+c = 0 \\ a+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{c = -a}$$

0,2

$a+bx+cx^2 = a+bx-ax^2 = a(1-x^2)+bx$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ são os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$

$V_2 = [1-x^2, x]$ é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$

0,3

$\lambda_2 = 1$: $a+bx+cx^2 = -2c + (a+2b+c)x + (a+3c)x^2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ a+2b+c = b \\ a+3c = c \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ a+b+c = 0 \\ a = -2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = c \end{cases}$$

0,2

$a+bx+cx^2 = -2c+cx+cx^2 = c(-2+x+x^2)$, $c \neq 0$ são os autovetores de T associados a $\lambda_2 = 1$

$V_1 = [-2+x+x^2]$ é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$.

0,3

(b) $\beta = \{1 - x^2, x, -2 + x + x^2\}$ é uma base de P_2 formada somente por autovalores de T e portanto T é diagonalizável.

0,3

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

0,2

5) (3,0) Utilizando autovalores e autovetores, identificar a cônica dada pela equação $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y - 5 = 0$. Apresentar a equação reduzida equivalente, esboçar o gráfico e exibir as coordenadas da origem do último referencial utilizado em relação aos eixos x e y

SOLUÇÃO. (I) $[x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}}_{=A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-10\ -20]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 5 = 0$

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 54 - 9\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$

$\Delta = 225 - 200 = 25$, $\lambda = \frac{15 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} 5 = \lambda_1 \\ 10 = \lambda_2 \end{cases}$ (autovalores de A)

0,2

$\lambda_1 = 5$: $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff 9x - 2y = 5x \iff 4x - 2y = 0 \iff \boxed{2x = y}$

$(x,y) = (x, 2x) = x(1,2)$, $x \neq 0$, autovetores de A associados a $\lambda_1 = 5$, $u_1 = (1,2)$

$\lambda_2 = 10$: $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff 9x - 2y = 10x \iff \boxed{-2y = x}$

$(x,y) = (-2y, y) = y(-2,1)$, $y \neq 0$, autovetores de A associados a $\lambda_2 = 10$, $u_2 = (-2,1)$

$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \sqrt{5}$, $\boxed{v_1} = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \boxed{(1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})}$, $\boxed{v_2} = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \boxed{(-2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5})}$

$\beta = \{v_1, v_2\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, $P = [v_1\ v_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

0,8

(II) $0 = [x_1\ y_1]\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [-10\ -20]\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 5$

$= 5x_1^2 + 10y_1^2 - \frac{10x_1}{\sqrt{5}} + \cancel{\frac{20y_1}{\sqrt{5}}} - \frac{40x_1}{\sqrt{5}} - \cancel{\frac{20y_1}{\sqrt{5}}} - 5$

$= 5x_1^2 + 10y_1^2 - \frac{50}{\sqrt{5}}x_1 - 5$

$$\boxed{(\mathrm{II}) \quad 0 = x_1^2 + 2y_1^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}x_1 - 1}$$

0,5

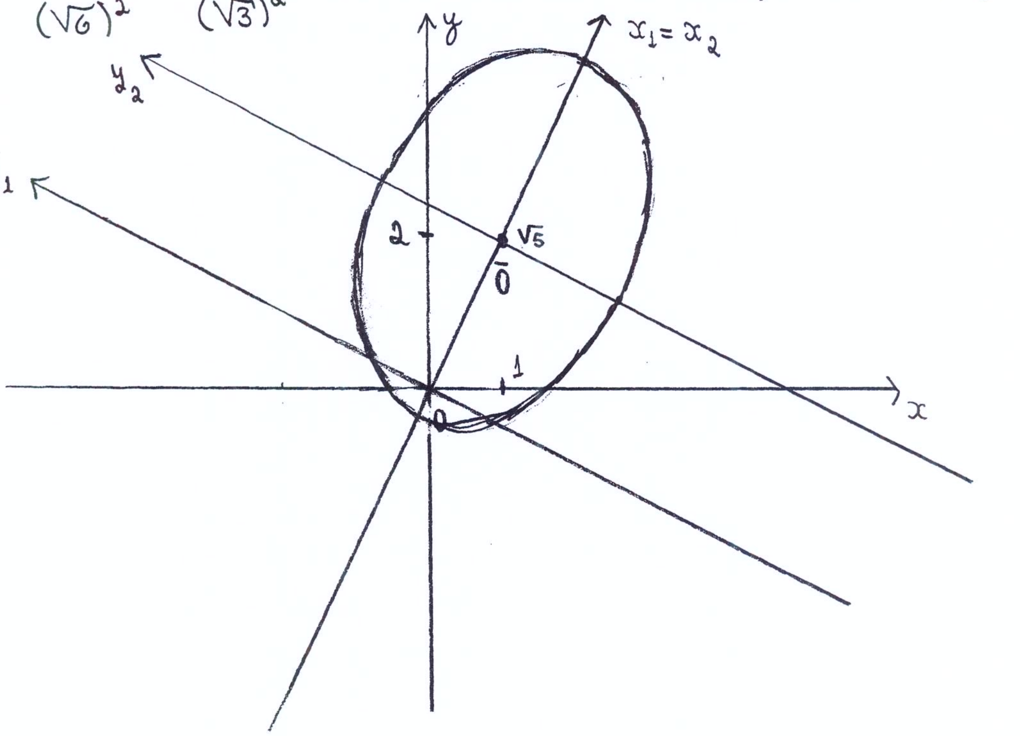
$$0 = \left(x_1^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}x_1\right) + 2y_1^2 - 1 = \left(x_1^2 - 2\sqrt{5}\,x_1 + 5\right) - 5 + 2y_1^2 - 1$$

$$\Longrightarrow \quad (x_1 - \sqrt{5})^2 + 2y_1^2 = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(x_1-\sqrt{5})^2}{6} + \frac{y_1^2}{3} = 1$$

$$\boxed{x_2 = x_1 - \sqrt{5} \quad , \quad y_2 = y_1}$$

0,5

(III) $\quad \dfrac{x_2^2}{(\sqrt{6})^2} + \dfrac{y_2^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \qquad$ ELIPSE – EQUAÇÃO REDUZIDA



0,7

$\beta = \{v_1, v_2\}$, $\quad [A]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\quad [A]_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\quad [\bar{O}]_\beta = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$

$\alpha =$ base canônica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad , \quad [\bar{O}]_\alpha = P\begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

0,3