3^a prova de EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Nome: ____RA: __________

Questão 1 (3.0): Dado o modelo abaixo de um satélite com duas entradas, onde x é a variação da translação na direção radial, θ é a variação do ângulo do satélite na direção radial, u_t é a entrada na direção tangencial e u_r é a entrada na direção radial:

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta} + 2\omega\dot{x} = u_t \\ &\ddot{x} - 2\omega\dot{\theta} - 3\omega^2 x = u_r \end{aligned} \qquad \text{onde} \quad \omega = 0.0011 rad/s$$

a) (0,75) Considerando os estados (físicos) definidos como $x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \dot{\theta} \;\; e \;\; y = x$, o vetor de entrada como $u = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_t \end{Bmatrix}$ e a saída como $y = x$ obtenha o modelo de estado.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 3\omega^2 x_1 + 2\omega x_4 + u_r \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -2\omega x_2 + u_t \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_t \end{Bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

b) (0,5) Obtenha as funções de transferência $P_1 = \dfrac{X(s)}{U_r(s)}$ e $P_2 = \dfrac{X(s)}{U_t(s)}$ da planta.

```
w = 0.0011
A = [0  1  0   0
  3*w^2  0  0  2*w
   0      0  0  1
   0  -2*w  0  0];
B1 = [0;1;0;0];
B2 = [0;0;0;1];
C = [0 0 1 0];
D = 0;

[np dp] = ss2tf(A,B1,C,D)
P1 = tf(np,dp)
[np dp] = ss2tf(A,B2,C,D)
P2 = tf(np,dp)
```

$$P_1 = \frac{0.0022s}{s^4 + 1.21e\text{-}6\, s^2}$$

$$P_2 = \frac{s^2 - 3.63e\text{-}6}{s^4 + 1.21e\text{-}6\, s^2}$$

c) (0,5) Qual entrada deverá ser utilizada no controle por realimentação de estados: a entrada devido a um propulsor radial, u_r, ou a entrada devido a um propulsor tangencial, u_t. Justifique sua resposta.

$$\det(\mathrm{ctrb}(A, B1)) = 0$$
$$\det(\mathrm{ctrb}(A, B2)) < 0$$

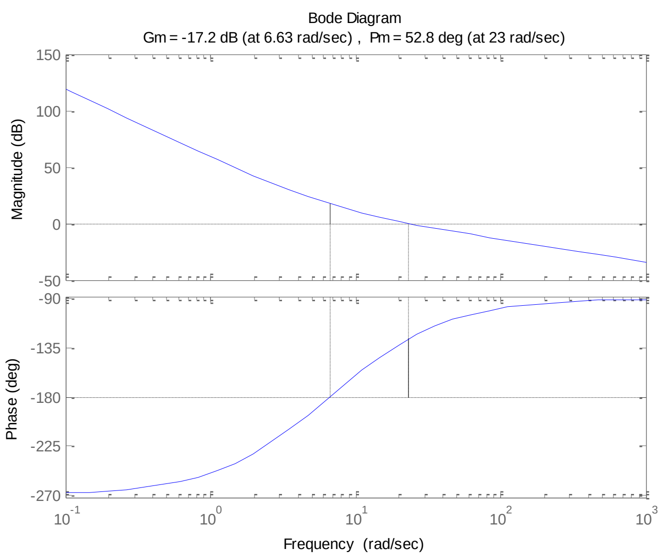
Portanto devemos escolher u_t

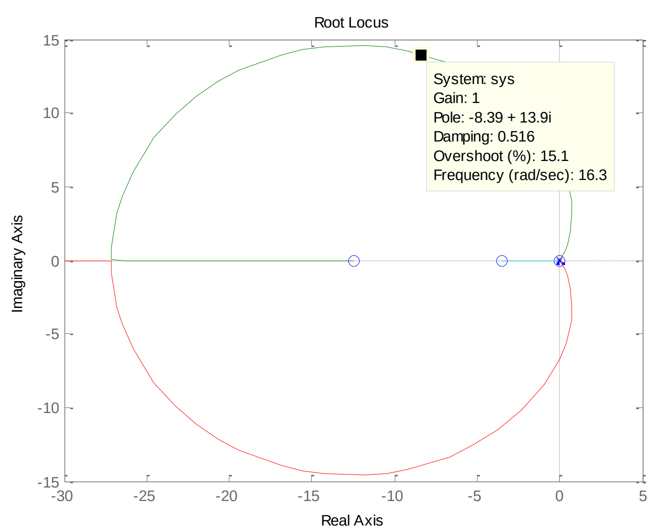
d) (0,5) Para uma matriz de ganhos de realimentação K=[400000 600000 –1000 20], determine a margem de ganho e a margem de fase do sistema controlado. Justifique sua resposta.

K = [400000 600000 -1000 20];
margin(A, B2, K, D)
rlocus(A, B2, K, D)

Margem de redução de ganho $= 17.2$ dB

Margem de Fase $= 52.8$ graus



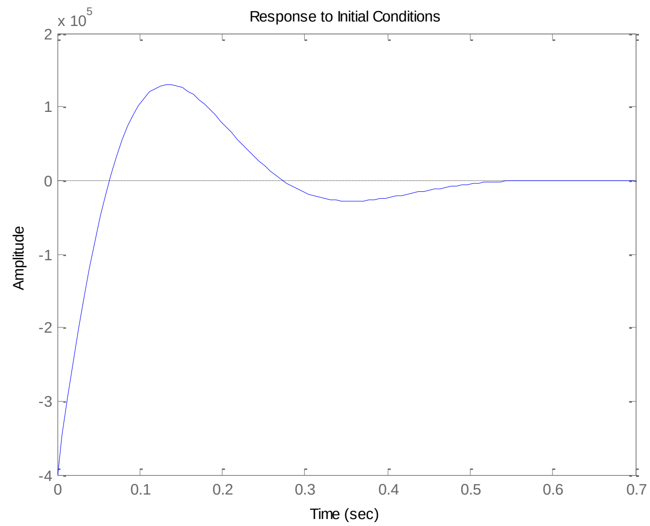


e) (0,75) Considere a referência nula, uma condição inicial unitária para a variação da posição radial do sistema e as demais condições iniciais nulas, esboce o gráfico do esforço de controle nesta condição e determine o valor máximo (em módulo).

```
At = A - B*K;
Bt = B;
Ct = -K;
Dt = 0;
T = ss(At,Bt,Ct,Dt)
t = 0:.01:1
u = t*0;
[y t] = lsim(T,u,t,[1 0 0 0])
plot(t,y)
ymax - max(abs(y))
```

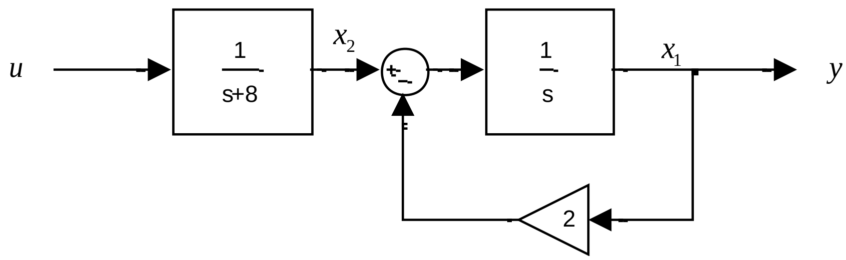
ou

```
Initial(T,[1 0 0 0]);
y = initial(T,[1 0 0 0])
ymax = max(abs(y))
```



$$u_{\max} = 400.000$$

Questão 2 (4,0): Dado o diagrama de blocos abaixo



b) (0,5) Definidas as variáveis de estado, obtenha o modelo de estado de acordo com o diagrama de blocos.

$$\dot{x}_1 = x_2 - 2x_1$$
$$\dot{x}_2 = u - 8x_2$$
$$y = x_1$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

c) (2,0) Deseja-se projetar um controlador por realimentação de estados estimados, de modo que o erro estacionário a uma entrada ao degrau seja nulo, que o sobressinal ao degrau unitário não ultrapasse 10% e que o tempo de estabilização a 2% seja menor que 3 segundos. Determine a constante de ganho proporcional (colocada dentro da malha e antes da planta), verifique a controlabilidade, determine a matriz dos ganhos de realimentação de estados estimados, verifique a observabilidade, e determine a matriz de ganhos do observador para atender a todos os requisitos de projeto. Adotar os pólos do observador em –20rad/s.

```
kp = 1;
A = [-2 1;0 -8]; B = kp*[0;1];
C = [1 0]; D = 0;
[np dp] = ss2tf(A,B,C,D);
P = tf(np,dp);
PSS = 10;
TE = 4;
zeta = log(100/PSS)/sqrt(pi^2 +
+ (log(100/PSS))^2);
wn = 4/(TE*zeta);
sigmad = -zeta*wn;
wd = wn*sqrt(1-zeta^2)
```

```
pcon = [sigmad + j*wd, sigmad - j*wd]
M = ctrb(A,B)
det(M)
K = acker(A,B,pcon); O = obsv(A,C)
det(O)
pobs = [-20 -20]
L = acker(A',C',pobs)'
At = [A - B*K; L*C A - B*K - L*C];
Bt = [B; B];
Ct = [C  C*0];
Dt = 0
T = ss(At,Bt,Ct,Dt)
kp = 1/dcgain(T)
step(T)
```

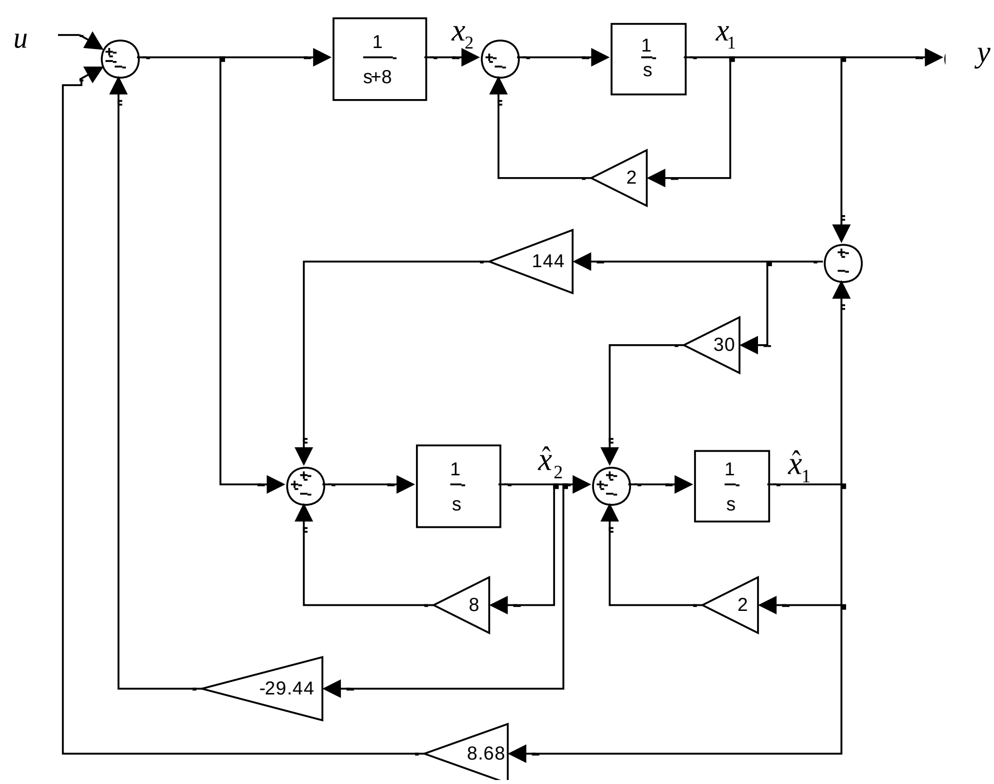
kp = 0.31241
det(M) < 0   (*controlável*)
K = [8.6822   -29.448]
det(O) > 0   (*observável*)
L = [30
      144]

d) (0,5) Determine a equação matricial do modelo de estados da malha fechada em termos dos estados estimados. Apresente os pólos do controlador por realimentação de estados estimados e os pólos da malha fechada.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -10 & -1 \\ 15 & 0 & -17 & 1 \\ 20 & 0 & -30 & -9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta$$

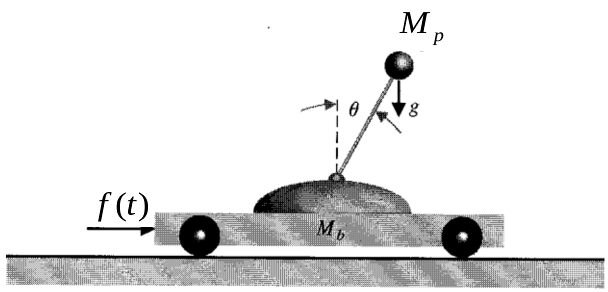
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{Bmatrix}$$

f) (1,0) Construa o diagrama de blocos do sistema controlado mostrando cada ganho K do vetor de realimentação de estados estimados e cada ganho L do observador .



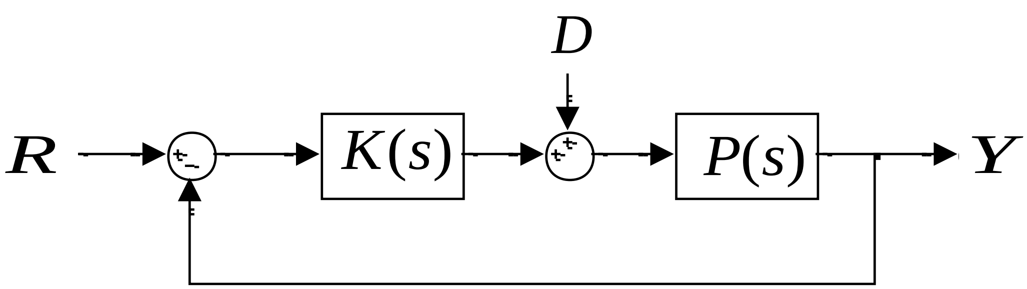
$$\begin{Bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} u + \begin{Bmatrix} 30 \\ 144 \end{Bmatrix} \left(y - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \right)$$

Questão 3 (3,0): Considere um pêndulo invertido numa base móvel como mostrado na figura. A massa do pêndulo é M_p=10kg, a massa da base M_b=100kg, o comprimento da haste L=0.1m e g=9.81m/s^2. O objetivo é equilibrar o pêndulo (isto é, $\theta(t)=0$) na presença de um distúrbio d(t) adicionados à força de entrada f(t). A função de transferência entre a força e o ângulo é dada por P(s).



$$P(s)=\frac{\theta}{F}=\frac{-\dfrac{1}{M_bL}}{s^2-\dfrac{(M_b+M_p)g}{M_bL}}$$

a) (0,5) Admitindo uma realimentação negativa e um controlador *K(s)*, desenhe o diagrama de blocos de malha fechada deste sistema mostrando o sinal de referência, o distúrbio, a saída, as funções de transferência do controlador e da planta e o ramo de realimentação.

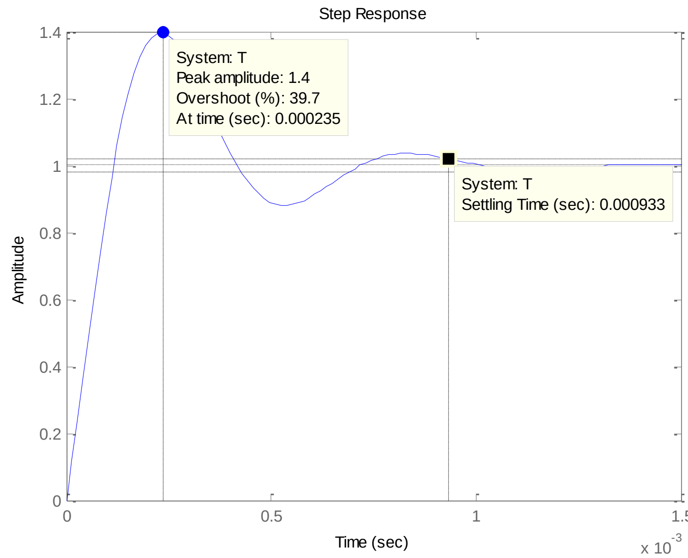


b) (1,5) Projete um controlador por proporcional derivativo (PD) pelo método analítico baseado no lugar das raízes para controlar o pêndulo sujeito a uma entrada do tipo de degrau unitário no ângulo $\theta(t)$, de forma a atingir o tempo de estabilização (2%) inferior a 1 milisegundo, percentual de sobressinal inferior a 40%.

```
PSS = 40;Te = 1;
Mp = 10;Mb = 100;L = .1;g = 9.81;
np = [-1/(Mb*L)];
dp = [1   0   -(Mb + Mp)*g/(Mb*L)];
P = tf(np,dp)
zeta = log(100/PSS)/sqrt(pi^2 + (log(100/PSS))^2);
wn = 4/(zeta*Te);
sigmad = -zeta*wn; wd = wn*sqrt(1-zeta^2);sd = sigmad + j*wd
```

$$kp = -1.2494e+010$$
$$kd = -800000$$

```
zeta = log(100/PSS)/sqrt(pi^2 + (log(100/PSS))^2)
wn = 4/(zeta*Te)
sigmad = -zeta*wn; omegad = wn*sqrt(1-zeta^2); sd = sigmad + i*omegad
rp = freqresp(P,sd)
mp = abs(rp); tetap = angle(rp);
mk = 1/mp
thetak = -pi - tetap
a = sigmad^2 - omegad^2;
b = sigmad;
c = 2*sigmad*omegad;
d = omegad;
alpha = sigmad*mk*cos(thetak) - omegad*mk*sin(thetak);
beta = omegad*mk*cos(thetak) + sigmad*mk*sin(thetak);
kd = -(d*ki - d*alpha + beta*b)/(-c*b + a*d);
kp = (a*beta + c*ki - c*alpha)/(-c*b + a*d);
nk = [kd kp]
dk = [1]
K = tf(nk,dk)
T = feedback(K*P,1)
figure(1)
step(T)
```

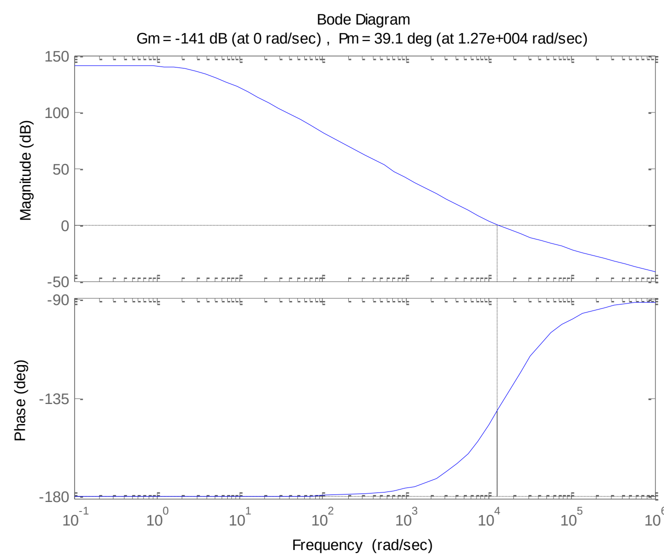


c) (0,5) Determine a **margem de ganho e margem de fase**

```
L = P*K;
margin(L)
```

Margem de redução de ganho = 141dB

Margem de Fase = 39.1graus



d) (0,5) Determine a **função de transferência do distúrbio** $T = \dfrac{\theta}{D}$.

```
TT = P/(1+P*K);
TT = minreal(TT)
```

$$T = \frac{-0.01}{s^2 + 8000s + 1.249e8}$$

Principais equações úteis:

$$\boxed{\zeta = \frac{\ln(\frac{100}{PSS})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\frac{100}{PSS})}}}$$

$$\boxed{T_e = \frac{4}{\zeta\omega_n}}$$

Critério de Nyquist

$$\boxed{z = p + n}$$

PID analítico resposta em freqüência

PID analítico lugar das raízes

$$\boxed{\begin{aligned} & m_k m_p = 1 \\ & \theta_k + \theta_p = -\pi + \phi_{mf} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & K_p = m_k \cos\theta_k \\ & \omega_{cg} K_d - \frac{K_i}{\omega_{cg}} = m_k \sin\theta_k \end{aligned}}$$

Realimentação de Estado

$$\boxed{A_{heq} = A - BK - LC}$$

$$\boxed{B_{heq} = L}$$

$$\boxed{C_{heq} = K}$$

$$\boxed{D_{heq} = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & A_T = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \\ & B_T = \begin{Bmatrix} B \\ B \end{Bmatrix} \\ & C_T = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \\ & D_T = 0 \end{aligned}}$$