

Prof. Mario Gneri

ME 319 A

PRIMEIRA PROVA

19/04/2012

TEMA 2

Escreva nome, tema e RA na primeira folha em branco.

Destaque esta folha e fique com ela após a prova. Faça a prova a caneta.

Não são permitidas consultas, nem uso de computadores ou celulares.

A interpretação de enunciados e o uso de tabelas fazem parte da prova.

Justifique suas afirmações. Deve citar os resultados utilizados.

Exercício 1 [2 pontos: 0,5 ponto item a) e 1,5 ponto item b)].

Seja  $X_1, X_2, X_3, X_4$  a. a. s. de tamanho 4 de uma variável aleatória  $X$  de média

17 e variância  $4^2$ . Seja  $U = \frac{\sum_{j=1}^4 (X_j - \bar{X})^2}{4}$ .  $9 E(XY) - 9 \cdot E(X) \cdot E(Y)$

a) Calcule esperança de  $(-2) U - 1676$ ;

b) Acrescente a hipótese de normalidade (isto é, assumo que  $X \sim N(17, 4^2)$ ) e calcule Variância  $((-2) U - 1676)$ .

Exercício 2 [3 pontos: 2 pontos item a) e 1 ponto item b)]

a)  $X$  é uma v.a., com  $E(X) = 195$  e  $Var(X) = 5^2$ . Ache cotas apropriadas de:

i) probabilidade  $\{170 < X < 215\}$ ;

ii) probabilidade  $\{X \leq 185\}$  se  $X$  for simétrica.

b) Seja  $Y$  uma variável aleatória com média  $m$  e desvio padrão  $d > 0$ . Calcule uma cota apropriada para probabilidade  $\{m - 7d < Y < m + 6d\}$ .

Exercício 3 [3 pontos: 1,5 item a); 0,5 item b) e 1,0 item c)].

Sejam  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  v. a. i. i. d.  $\sim Normal(3, 5^2)$ . Seja  $Y = 2X_3 + X_5$ .

a) Seja  $V = \frac{\sqrt{(X_1 - 3)^2 + (X_2 - 3)^2 + (X_4 - 3)^2}}{Y - 9}$ ; qual é a distribuição de  $V^2$ ?

b) Ache a distribuição de  $3V^{-2}$ ?

c) São  $X_4 - (11 + 3X_1 + X_2)^2$  e  $\log[(3X_1 - X_2 + 22)]^3$  independentes?

Exercício 4 (2 pontos)

Seja  $\Omega$  o espaço de resultados de um experimento. Seja  $B$  um evento ( $B \subset \Omega$ ) e  $Pr(B)$  sua probabilidade. São feitas repetições independentes e sempre nas mesmas condições do experimento. Seja  $f(n)$  = número de ocorrências de  $B$  em  $n$  repetições do experimento. Ache algum natural  $K$  tal que se  $n \geq K$  então:

$$\text{probabilidade} \left( \left\{ \left| \frac{f(n)}{n} - Pr(B) \right| \geq 0,1 \right\} \right) \leq 0,04.$$

Dicas: i)  $f(n)$  tem distribuição binomial; ii) use Tchebycheff.

$$\text{Seja } X = \frac{f(n)}{n}$$

$$X - E(X) = \frac{f(n)}{n} - Pr(B) = \left( \frac{f(n)}{n} - n \cdot Pr(B) \right) / n \leq 0,09$$

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \epsilon^{-2} \cdot Var(X)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{f(n)}{n} - Pr(B) \right) \geq 0,1 \Rightarrow \frac{f(n) - n \cdot Pr(B)}{n} \geq 0,1 \\ & \Rightarrow \frac{1}{n} \cdot Var(X) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p \cdot q = p \cdot q = 0,09 \cdot 0,9 = 0,081 \\ & \leq 0,09 \cdot p \cdot q = 0,081 \end{aligned}$$