1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	$\sum$

P R O V A 1, MA 327, 17/09/2009

NOME:__________ ___________________ __________ Turma:___ RA:________________

1. a) Definir *subespaço* de um espaço vetorial.

b) Seja $V = M_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas reais e sejam

$$U = \{A \in V \mid A^t = -A\}, \quad W = \{B = (b_{ij}) \in V \mid b_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$$

os conjuntos das matrizes antissimétricas e triangulares superiores, respectivamente. Mostrar que U e W são subespaços de V.

c) Mostrar que $V = U \oplus W$.

2. a) (0,5 pt) Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ vetores no espaço vetorial V. O que significa que esses vetores são *linearmente independentes* ?

b) (0,5 pt) Definir *base* de um espaço vetorial.

c) Seja $V = \mathbb{R}^4$ e $U = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \mid x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$. Mostrar que U é um subespaço de V.

d) Encontrar uma base de U e a dimensão de U. Completar essa base até uma base de V.

3. Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das afirmações abaixo. **Justifique** as suas respostas! Respostas sem a devida justificativa não serão consideradas.

a) O conjunto solução de um sistema linear homogêneo com 5 variáveis é sempre um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{R}^5$.

b) Seja $V = \{f(x) \in P \mid f(0) = 1\}$ onde P é o espaço vetorial dos polinômios (com coeficientes reais). Então V é um subespaço de P.

c) Considere os vetores $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, -1, -1)$, $v_3 = (1, -1, -1, 1)$, $v_4 = (0, 2, 2, 0)$ em $\mathbb{R}^4$ e seja $U = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ o subespaço gerado por esses vetores. Então o vetor $(1, 1, -1, -1) \in U$.

d) No espaço vetorial $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes $m \times n$ existem conjuntos linearmente independentes que consistem de $2mn$ matrizes.

1- a) 1ª maneira: Um subespaço F de um espaço E é um espaço vetorial contido em E com as operações de E restritas a F, ou seja

$$\oplus\big|_{F\times F} \to F \quad \text{e} \quad \odot\big|_{\mathbb{R}\times F} \to F.$$

2ª maneira: $F \subset E$ é um subespaço se $F \neq \emptyset$, $x, y \in F \Rightarrow x+y \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}, x \in F \Rightarrow \alpha x \in F$

b) Vamos primeiramente fazer para matrizes 3×3 para fixar as ideias.

$$A, \bar{A} \in U \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} ; \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A + \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & (a+d) & (b+e) \\ -(a+d) & 0 & (c+f) \\ -(b+e) & -(c+f) & 0 \end{pmatrix} \in U$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a & \alpha b \\ -\alpha a & 0 & \alpha c \\ -\alpha b & -\alpha c & 0 \end{pmatrix} \in U$$

$$B, \bar{B} \in W \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} ; \bar{B} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & j & k \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B + \bar{B} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ 0 & d+j & e+k \\ 0 & 0 & f+l \end{pmatrix} \in W$$

$$\alpha B = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ 0 & \alpha d & \alpha e \\ 0 & 0 & \alpha f \end{pmatrix} \in W$$

Faremos agora o caso geral:

- U e W não são vazios pois a matriz nula $n \times n$ está em cada um deles.

- $A, \bar{A} \in U \Rightarrow (A+\bar{A})^T \overset{\text{prop de matrizes}}{=} A^T + \bar{A}^T \overset{A, \bar{A} \in U}{=} -A - \bar{A} \overset{\text{prop distributiva de matrizes}}{=} -(A+\bar{A})$

  - Logo $A + \bar{A} \in U$

$\alpha \in \mathbb{R}, A \in U \Rightarrow (\alpha A)^T \underset{\text{prop de matrizes}}{=} \alpha \cdot A^T \overset{A \in U}{=} \alpha \cdot (-A) \overset{\text{associativa}}{=} -(\alpha A)$

  - Logo $\alpha A \in U$ e portanto U é subespaço

- $B, \bar{B} \in W \Rightarrow (B+\bar{B})_{ij} \overset{\text{def + de matrizes}}{=} B_{ij} + \bar{B}_{ij} \overset{B, \bar{B} \in W}{=} 0 + 0 = 0$ se $i > j$

Logo $B + \bar{B} \in W$.

- $\alpha \in \mathbb{R}, B \in W \Rightarrow (\alpha B)_{ij} \overset{\text{def} \cdot}{=} \alpha \cdot B_{ij} \overset{B \in W}{=} \alpha \cdot 0 = 0$ se $i > j$

Logo $\alpha B \in W$

Portanto W é um subespaço.

c) Primeiramente para matrizes 3x3 para fixar as idéias:

1ª maneira:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -d & -g \\ d & 0 & -h \\ g & h & 0 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} a & b+d & c+g \\ 0 & e & f+h \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}}_{\in W}$$

Logo $M_3(\mathbb{R}) = U + W$

Se $A \in U \cap W$ então $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f & g \\ 0 & h & i \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a = b = c = 0$; $e = h = j = 0$; $f = -a = 0$; $g = -b = 0$; $i = -c = 0$.

Logo $A = \vec{0}$, portanto $U \cap W = \{\vec{0}\}$ e consequentemente $M_3(\mathbb{R}) = U \oplus W$

2ª maneira:

- Pela demonstração anterior $U \cap W = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(U \cap W) = 0$
- Se $A \in U \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

  Logo $\dim(U) = 3$ (É fácil ver que as matrizes que geram são LI)

- Se $B \in W \Rightarrow B = \begin{pmatrix} e & f & g \\ 0 & h & i \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + j\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Logo $\dim(W) = 6$ (É fácil ver que as matrizes que geram são LI)

Sendo assim $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

$$= 3 + 6 - 0 = 9 = \dim(M_3(\mathbb{R}))$$

Logo $U + W = M_3(\mathbb{R})$ e como $U \cap W = \{\vec{0}\}$ temos $M_3(\mathbb{R}) = U \oplus W$

· Caso geral:

1ª maneira: Seja $M = (M_{ij}) \in V$ qualquer. Considere $A = (A_{ij}) \in U$

tal que $A_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{se } i > j \\ -M_{ji} & \text{se } i < j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$ e $B = (B_{ij}) \in W$ tal que

$B_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{se } i = j \\ M_{ij} + M_{ji} & \text{se } i < j \\ 0 & \text{se } i > j \end{cases}$ então $M = A + B$ e portanto $V = U + W$.

Se $A \in U \cap W$ então $A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j & (\text{pois } A \in W) \\ 0 & \text{se } i = j & (\text{pois } A \in U) \\ -A_{ji} = 0 & \text{se } i < j & (\text{pois } A \in U \text{ e } A_{ji} = 0 \text{ pois } A \in W) \end{cases}$

Logo $A = \{\vec{0}\} \Rightarrow U \cap W = \{\vec{0}\} \Rightarrow W = U \oplus W$

2ª maneira:

Pela maneira anterior $U \cap W = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(U \cap W) = 0$

$\dim(U) = \dfrac{n^2 - n}{2}$ (termos livres são os que estão acima da diagonal)

$\dim(W) = \dfrac{n^2 - n}{2} + n = \dfrac{n^2 + n}{2}$ (termos livres estão acima da diagonal e na diagonal)

Logo $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U\cap W) = \left(\frac{n^2-n}{2}\right) + \left(\frac{n^2+n}{2}\right) + 0 =$

$= n^2 = \dim(V)$

Portanto $U+W = V$ e como $U\cap W = \{\vec{0}\}$ temos $V = U\oplus W$.

2-a) 1ª maneira: Significa que qualquer combinação linear nula deles terá necessariamente coeficientes todos nulos.

Ou seja $\alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_n V_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$

2ª maneira: Se $n=1$ significa que $V_1 \neq \vec{0}$. Se $n \geq 2$ significa que existe um deles que é combinação linear dos outros, ou seja $\exists\, i$ tal que

$V_i = \sum_{j\neq i} \alpha_j V_j = \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_{i-1}V_{i-1} + \alpha_{i+1}V_{i+1} + \cdots + \alpha_n V_n$

1ª maneira:

b) Dado um espaço vetorial E um conjunto $B \subset E$ é uma base se B gera E e B é LI.

2ª maneira:

$B \subset E$ é uma base se todo elemento de E puder ser escrito como combinação linear de elementos de B de modo único. Ou seja se $V \in E$ então

$V = \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_K V_K$, com $V_1, \ldots, V_K \in B$ e se $V = \beta_1 V_1 + \cdots + \beta_K V_K$

então $\alpha_1 = \beta_1 \ldots \alpha_K = \beta_K$

c) • $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in U$ pois $0-0+0-2 0=0$, logo $U \neq \emptyset$

• Se X e $Y \in U$ então $X+Y \in U$ pois $X+Y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\\x_4+y_4\end{pmatrix}$ e

$$(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3)-2(x_4+y_4)=(x_1-x_2+x_3-2x_4)+(y_1-y_2+y_3-2y_4)=$$

$$\underbrace{=}_{\text{pois } X\in U \text{ e } Y\in U} 0+0=0$$

• Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in U$ então $\alpha X \in U$ pois $\alpha X=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\alpha x_3\\\alpha x_4\end{pmatrix}$ e

$$(\alpha x_1)-(\alpha x_2)+(\alpha x_3)-2(\alpha x_4)=\alpha(x_1-x_2+x_3-2x_4)\underbrace{=}_{X\in U}\alpha\cdot 0=0$$

Portanto U é um subespaço

d) $X \in V \Leftrightarrow x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \Leftrightarrow x_1=x_2-x_3+2x_4$

Logo $X=\begin{pmatrix}x_2-x_3+2x_4\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Logo $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ gera V e como B é claramente LI temos que B é uma base de V, e portanto $\dim(V)=3$.

Para completar B para uma base de $\mathbb{R}^4$ precisamos de mais um vetor que não está no espaço gerado por B ($[B]$), pois $\dim(\mathbb{R}^4)=4$.

Uma opção seria tomar o vetor normal ao hiperplano V, ou seja, uma base de $\mathbb{R}^4$ seria $\bar{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix} \right\}$,

outra opção seria tomar $\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ e $\bar{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Obs: Se tivéssemos isolado x_2 ou x_3 ou x_4 na equação obteríamos outra base B.

3- a) Verdadeiro (1ª maneira) pois vimos em aula que uma equação linear homogênea descreve um subespaço e um sistema é a intersecção de subespaços deste tipo e vimos que a intersecção de subespaços é um subespaço.

2ª maneira:

O conjunto pode ser escrito como $V = \{X \in \mathbb{R}^5 ; AX = \vec{0}_m\}$ onde $A \in \mathbb{R}^{m \times 5}$ e $\vec{0}_m \in \mathbb{R}^m$.

- Como $\vec{0}_5 \in \mathbb{R}^5$ está em V temos que $V \neq \emptyset$
- $X, Y \in V \Rightarrow A(X+Y) = AX + AY = \vec{0}_m + \vec{0}_m = \vec{0}_m \Rightarrow X+Y \in V$
- $\alpha \in \mathbb{R}$, $X \in V \Rightarrow A(\alpha X) = \alpha \cdot (AX) = \alpha \cdot \vec{0}_m = \vec{0}_m \Rightarrow \alpha X \in V$

Portanto V é um subespaço.

b) Falso:

1ª maneira: O elemento neutro do espaço dos polinômios ($P(X) = 0 \quad \forall X$) não pertence a V, logo V não é um subespaço

2ª maneira: $P(X) = 1 \quad \forall X$ e $Q(X) = X + 1$ estão em V

mas $(P+Q)(X) = X + 2$ não está pois $(P+Q)(0) = 2$, logo V não é um subespaço

3ª maneira: $P(X) = 1 \quad \forall X$ está em V, mas $(10 \cdot P)(X) = 10 \quad \forall X$ não está, logo V não é um subespaço

e) Falso;

1ª maneira: Como a 2ª e a 3ª coordenadas de V_1, de V_2, de V_3 e de V_4 são iguais os vetores em $[V_1, V_2, V_3, V_4]$ também terão 2ª e 3ª coordenadas iguais, o que não acontece com $(1,1,-1,-1)$ pois $1 \neq -1$, logo $(1,1,-1,-1) \notin U$.

2ª maneira: Se $(1,1,-1,-1)$ pertencesse a U então o sistema abaixo teria solução

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

+ Como a 2ª e a 3ª equações são iguais, a não ser pelo lado direito que é diferente, temos que o sistema é impossível e portanto $(1,1,-1,-1) \notin V$

→ Ainda na 2ª maneira para quem não percebeu que as equações são iguais

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\text{escalonando}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) (*)$$

(*) $0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = -2 \Rightarrow$ sistema impossível

Logo $(1,1,-1,-1) \notin U$

d) Falso.

Sabemos que se um conjunto C for LI então o número de elementos de C é menor ou igual a dimensão do espaço.

Como a dimensão das matrizes $m \times n$ é mn e $2mn > mn$ então estes conjuntos não podem ser LI.