F 415 - Mecânica Geral II - Prof. Eduardo Granado
Prova II - 24/09/2012

1) Calcule a seção de choque diferencial $\sigma(\theta)$ [ou, se preferir, $\sigma(\psi)$] e a seção de choque total σ_t para o espalhamento elástico de uma partícula pontual por uma esfera impenetrável de raio a . [3.5]

Dica: você pode resolver para $\sigma(\theta)$ utilizando o formulário, ou resolver para $\sigma(\psi)$ utilizando uma construção geométrica direta, conforme fizemos em aula para um exemplo muito similar.

2) Uma partícula é projetada verticalmente para cima a uma altura h acima de um ponto na superfície da Terra a uma latitude λ no hemisfério sul. Considere gravidade g *e* velocidade angular da Terra = ω)

(a) Encontre a distância do ponto de partida em que a partícula cai de volta, devido à força de Coriolis, em função de g, h, ω e λ. [2.0]

(b) Qual a direção do deslocamento (norte, sul, leste, oeste) ? [1.0]

3) (a) Demonstre que para um corpo rígido, o momento angular $\boldsymbol{L} \equiv \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{v}_\alpha$ pode ser escrito na forma $L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j$. Mostre que os elementos do tensor de inércia podem ser escritos como $I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j})$. [2.0]

(b) Calcule todos os elementos do tensor de inércia de um paralelepípedo de massa M e lados a, b, e c, para um sistema de coordenadas centrado em um dos seus vértices e com eixos paralelos às suas arestas. [1.5]

FORMULÁRIO

$$\sigma(\psi) = \frac{b}{\sin\psi} \left|\frac{db}{d\psi}\right| \quad ; \quad \sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta} \left|\frac{db}{d\theta}\right| \quad ; \quad \Delta\Theta = \int_{rmin}^{rmax} \frac{(l/r^2)\, dr}{\sqrt{2\mu[E - U - (l^2/2\mu r^2)]}}$$

$$l = b\sqrt{2\mu T_0'} \quad ; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{|x|\sqrt{a}}$$

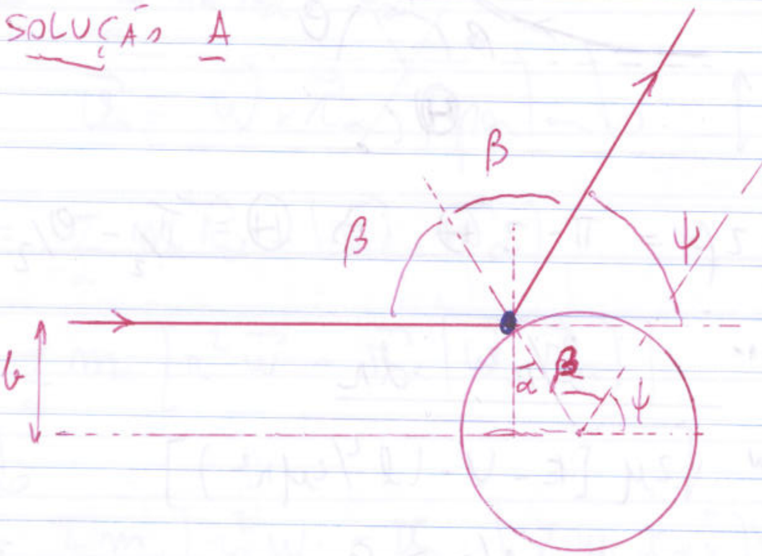
$$\boldsymbol{F}_{Cor} = -2\mathrm{m}\, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$$

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) = A^2 \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$$

DATA

F-415 - PROVA 2 - GABARITO

1 SOLUÇÃO A



Temes que $\beta + \psi - \alpha = \pi/2$ e $2\beta + \psi = \pi$

$\Rightarrow \frac{(\pi-\psi)}{2} + \psi - \alpha = \pi/2 \Rightarrow \alpha = \psi/2$

Mas: $b = a\cos\alpha = a\cos\psi/2$

$\Rightarrow \frac{db}{d\psi} = -\frac{a}{2}\sin\frac{\psi}{2} \Rightarrow \left|\frac{db}{d\psi}\right| = \frac{a}{2}\sin\psi/2$

$\Rightarrow \sigma(\psi) = \frac{b}{\sin\psi}\left|\frac{db}{d\psi}\right| = \frac{a\cos\psi/2}{\sin\psi}\cdot\frac{a}{2}\sin\psi/2 = \frac{a^2}{4}\frac{\sin\psi/2\cos\psi/2}{\sin\psi/2\cos\psi/2}$

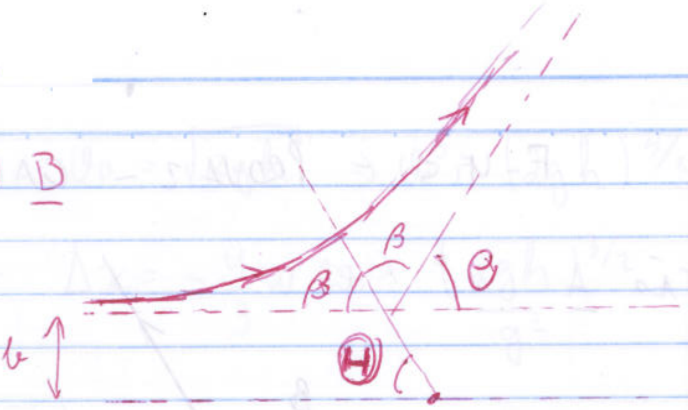
$\Rightarrow \boxed{\sigma(\psi) = a^2/4 = cte}$

$\sigma_t = \int_\Omega \sigma(\psi)d\Omega = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{4}\sin\theta\, d\phi\, d\theta = 2\pi\frac{a^2}{4}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta$

$= \frac{\pi a^2}{2}(-\cos\theta)\Big|_0^\pi = \boxed{\pi a^2}$

ECOLOGICA

SOLUÇÃO B



$$\theta = \pi - 2\beta = \pi - 2\Theta \Rightarrow \Theta = \pi/2 - \theta/2$$

$$\Theta = \int_{r_{MIN}}^{r_{MAX}} \frac{l/r^2 \, dr}{\sqrt{2\mu\left[E - V - (l^2/2\mu r^2)\right]}}$$

onde $U(r) = 0$ p/ $r \geq a$

∞ p/ $r < a$

$r_{MIN} = a$

$r_{MAX} = \infty$

$E = T_0'$

$l = b\sqrt{2\mu T_0'}$

Portanto:

$$\Theta = \int_a^{\infty} \frac{b\sqrt{2\mu T_0'}\,/r^2}{\sqrt{2\mu\left[T_0' - 0 - \frac{b^2 \cdot 2\mu T_0'}{2\mu r^2}\right]}}\,dr = \int_a^{\infty} \frac{b/r^2}{\sqrt{1 - b^2/r^2}}\,dr$$

$$\Rightarrow \Theta = b\int_a^{\infty} \frac{1}{r\sqrt{r^2 - b^2}}\,dr = \int_a^{\infty} \frac{1}{r\sqrt{r^2/b^2 - 1}}\,dr = -\arcsin b/r \Big|_a^{\infty}$$

$$\Rightarrow \Theta = \arcsin b/a \Rightarrow \frac{b}{a} = \sin\Theta = \sin(\pi/2 - \theta/2) = \cos\theta/2$$

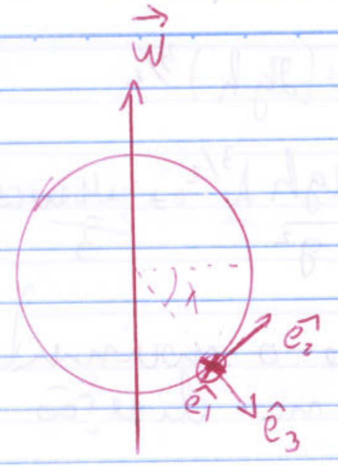
$$\Rightarrow b = a\cos\theta/2 \Rightarrow \frac{db}{d\theta} = -\frac{a}{2}\sin\theta/2$$

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{a\cos\theta/2}{\sin\theta} \cdot \frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{a^2}{4} \quad //$$

$$\sigma_t = \int \sigma(\theta)\,d\Omega = \frac{a^2}{4}\int d\Omega = 4\pi\, a^2/4 = \pi a^2 \quad //$$

DATA

(2)



O sistema de eixos está representado na figura ao lado. Note que $\hat{e}_1$ aponta na direção "LESTE"

$$\vec{w} = +w\cos\lambda\,\hat{e}_2 - w\sin\lambda\,\hat{e}_3$$
$$\vec{v} = (v_0 - gt)\,\hat{e}_3$$

O tempo total do percurso pode ser obtido por:

$$v = v_0 - gT = -v_0 \Rightarrow T = 2v_0/g$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & w\cos\lambda & -w\sin\lambda \\ 0 & 0 & (v_0 - gt) \end{vmatrix} =$$

$$= -2m\left[w\cos\lambda(v_0 - gt)\right]\hat{e}_1 = m\vec{a}_c$$

portanto: $\ddot{x} = -2w\cos\lambda(v_0 - gt)$

$$\Rightarrow \dot{x} = -2w\cos\lambda\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right)$$

$$x = -2w\cos\lambda\left(\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right)$$

O deslocamento total será:

$$\Delta x = x(T) = -2w\cos\lambda\left[\frac{v_0}{2}\cdot\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2 - \frac{g}{6}\left(\frac{2v_0}{g}\right)^3\right]$$

$$= -2w\cos\lambda\cdot\frac{2}{3}\frac{v_0^3}{g^2} = -\frac{4}{3}w\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2}$$

Mas: $h = v_0\left(\frac{T}{2}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g^2} = v_0^2/2g$

~~Portanto $\Delta x = -\frac{4}{3} w\cos\lambda$ ...~~

ECOLÓGICA

DATA

Portanto: $v_0 = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_0^3 = (2gh)^{3/2}$

Assim: $\Delta x = -\frac{4}{3} w \cos\lambda \frac{(2gh)^{3/2}}{g^2} = -\frac{4}{3} w\cos\lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g}}$

Δx negativo implica que o movimento devido à força de Coriolis será na direção OESTE

ECOLOGICA®

③

ⓐ $\vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha$

Mas $\vec{v}_\alpha = \vec{w} \times \vec{r}_\alpha$, portanto

$$\vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{w} \times \vec{r}_\alpha)$$

$$\vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \left[r^2 \vec{w} - \vec{r}_\alpha (\vec{w} \cdot \vec{r}_\alpha) \right]$$

Portanto

$$L_i = \sum_\alpha m_\alpha \left[r^2 w_i - x_{\alpha,i} \left(\sum_j w_j x_{\alpha,j} \right) \right]$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left[\sum_k (x_{\alpha,k}^2) \cdot \left(\sum_j w_j \delta_{ij} \right) - x_{\alpha,i} \left(\sum_j w_j x_{\alpha,j} \right) \right]$$

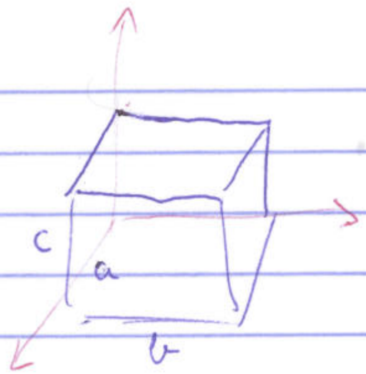
$$\Rightarrow L_i = \sum_j w_j \left\{ \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} \cdot x_{\alpha,j} \right) \right\}$$

$$= \sum_j I_{ij} w_j$$

onde $I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right)$

ⓑ Para sistemas contínuos, $m_\alpha \to \rho\, dV$, e ficamos com:

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{Bmatrix} \iiint \rho [y^2 + z^2] dV & -\iiint \rho x y \, dV & -\iiint \rho x z \, dV \\ -\iiint \rho y x \, dV & \iiint \rho [x^2 + z^2] dV & -\iiint \rho y z \, dV \\ -\iiint \rho z x \, dV & -\iiint \rho y z \, dV & \iiint \rho (x^2 + y^2) dV \end{Bmatrix}$$



Ficamos com:

$$I_{11} = \int_0^c\int_0^b\int_0^a \rho(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^c\int_0^b \rho(y^2+z^2).x\Big|_0^a dy\,dz$$

$$= a\int_0^c \rho\left[\frac{y^3}{3}+z^2y\right]_0^b dz = a\rho\int_0^c\left[\frac{b^3}{3}+z^2b\right]dz$$

$$= a\rho\left[\frac{b^3}{3}z+\frac{z^3}{3}b\right]_0^c = a\rho\left[\frac{b^3}{3}c+\frac{c^3}{3}b\right]$$

$$= \frac{\rho abc}{3}\left[b^2+c^2\right] = \frac{M}{3}\left[b^2+c^2\right]$$

Analogamente: $I_{22} = \frac{M}{3}\left[a^2+c^2\right]$; $I_{33} = \frac{M}{3}\left[a^2+b^2\right]$

Temos também que:

$$I_{12} = -\int_0^c\int_0^b\int_0^a \rho xy\,dx\,dy\,dz = -\rho c\int_0^b\int_0^a xy\,dx\,dy$$

$$= -\rho c\frac{a^2}{2}\int_0^b y\,dy = -\rho c\frac{a^2}{2}\frac{b^2}{2} = -M\frac{ab}{4}$$

Analogamente $I_{13} = -\frac{M}{4}ac$; $I_{23} = -\frac{M}{4}bc$.

Portanto:

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} \frac{M}{3}(b^2+c^2) & -\frac{M}{4}ab & -\frac{M}{4}ac \\ -\frac{M}{4}ab & \frac{M}{3}(a^2+c^2) & -\frac{M}{4}bc \\ -\frac{M}{4}ac & -\frac{M}{4}bc & \frac{M}{3}(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$