EM506 – Resistência dos Materiais II – Gabarito da Segunda Prova

Questão 1 [REVISADA] (3,0 pontos): Um durômetro Vickers possui uma ponta prismática conforme mostrada na Figura 1. Em um teste de deformação da ponta, o prisma foi submetido a uma carga uniformemente distribuída de intensidade p_0 (N/m) ao longo de sua altura H. Determine a redução de comprimento da ponta devido à carga p_0 aplicada. Use o método que achar conveniente.

Dados: módulo de elasticidade longitudinal do material da ponta – E.

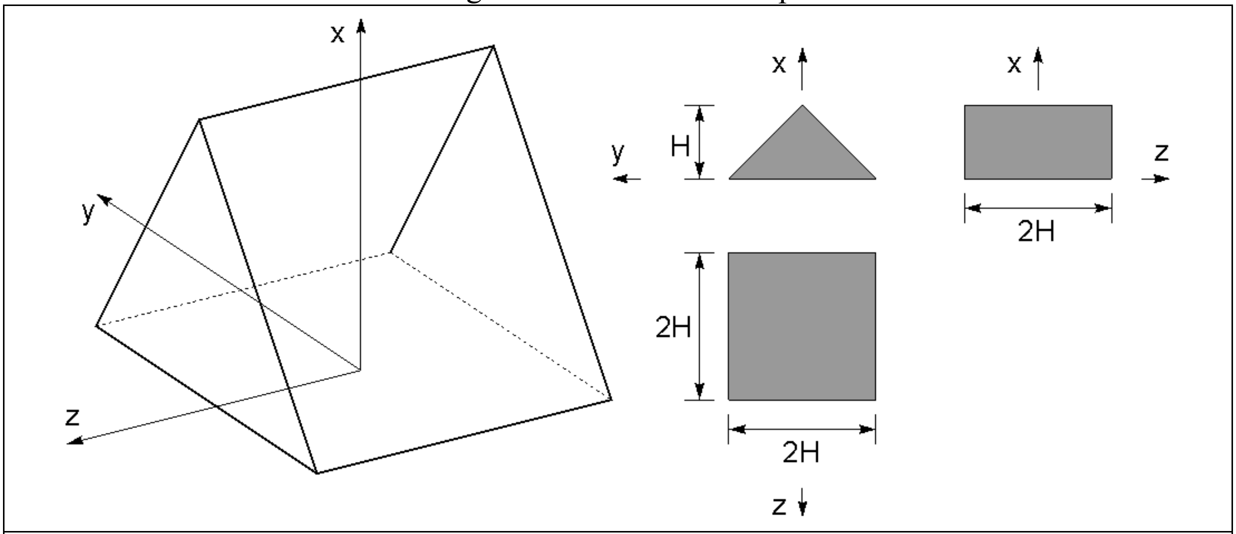


Figura 1: Ponta prismática e suas dimensões.

Solução

Método escolhido: Princípio das Forças Virtuais.

O prisma pode ser modelado como uma barra, submetida a um carregamento uniformemente distribuído, cuja área varia linearmente ao longo do comprimento. Um modelo do carregamento é mostrado na Figura 1b.

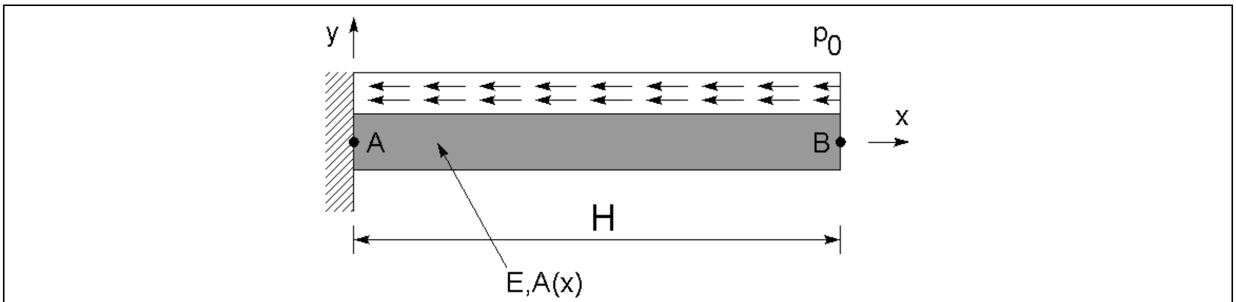


Figura 1b: Modelo da pirâmide como uma barra com seção variável.

A expressão da área A(x) pode ser escrita como:

$$A(x) = \alpha x + \beta \tag{1}$$

Em que:

$$A(x=0)=(2H)\cdot(2H)=4H^2 \tag{2}$$
$$A(x=H)=0 \tag{3}$$

De (2) e (3) em (1), obtém-se $\alpha = -4H$ e $\beta = 4H^2$. Assim,

$$A(x)=4H(H-x) \tag{4}$$

Para aplicar o Princípio das Forças Virtuais (PFV) na determinação do deslocamento do ponto B, é necessário estabelecer um sistema auxiliar, mostrado na Figura 1c.

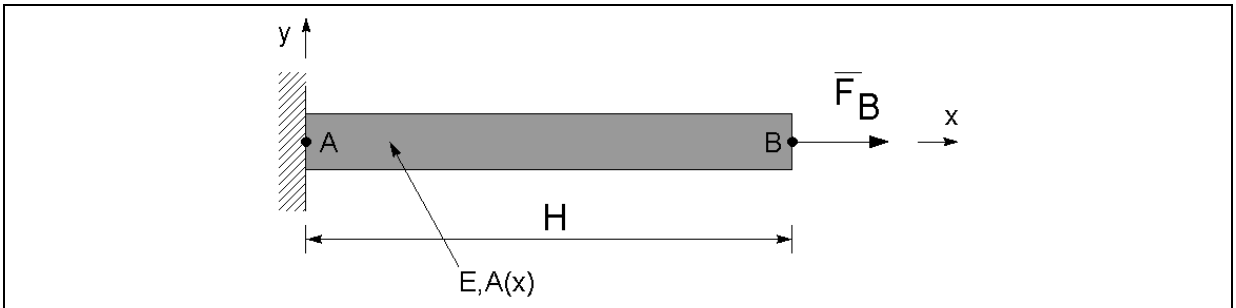


Figura 1c: Sistema auxiliar para determinação de u_B pelo PFV.

O esforço axial virtual interno devido à força virtual aplicada no ponto B é:

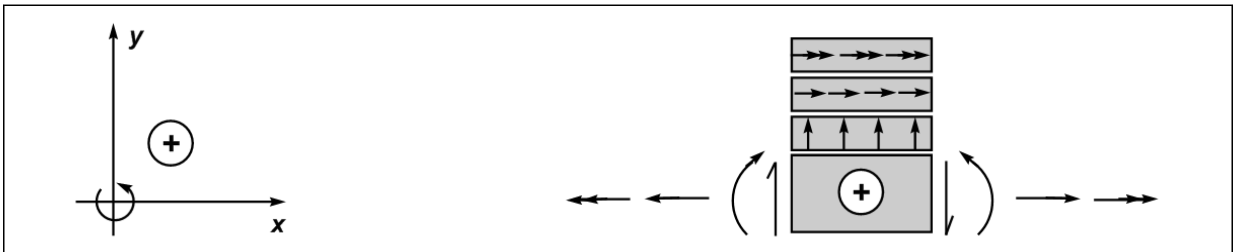
$$\overline{N}_X(x)=+\overline{F}_B \tag{5}$$

Essa força virtual é responsável por produzir um trabalho virtual de:

$$\delta W_a=\overline{F}_B\cdot\delta u_B=\overline{F}_B\cdot\mu\cdot u_B \tag{6}$$

O esforço axial real do problema (Figura 1b) pode ser determinado pela equação diferencial de barras.

a) eixos e convenção de sinais da Resistência dos Materiais



b) equação diferencial

$$\frac{d}{dx}N_X(x)=-p(x) \tag{7}$$

c) equação de carregamento

$$p(x) = -p_0 \tag{8}$$

d) condições de contorno

$$N_X(x = H) = 0 \tag{9}$$

e) integração da equação diferencial

$$\frac{d}{dx} N_X(x) = p_0 \tag{10}$$

$$\downarrow \int$$

$$N_X(x) = p_0 x + C_1 \tag{11}$$

f) determinação das constantes de integração

Substituindo-se (9) em (11), tem-se:

$$N_X(x = H) = p_0 H + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -p_0 H \tag{12}$$

g) equações finais

$$N_X(x) = p_0(x - H) \Rightarrow N_X(x) = -p_0(H - x) \tag{13}$$

Assim, a variação de energia de deformação na pirâmide é:

$$\delta U_{barra} = \mu \int_x \frac{\overline{N}_X(x) N_X(x)}{E(x)A(x)} dx = \frac{\mu}{E} \int_{x=0}^{x=H} \frac{-p_0 \cancel{(H-x)} \overline{F}_B}{4H\cancel{(H-x)}} dx = -\mu \overline{F}_B \frac{p_0}{4EH} x\Big|_0^H = -\mu \overline{F}_B \frac{p_0}{4E} \tag{14}$$

Do princípio de conservação de energia, tem-se que:

$$\delta W_a = \cancel{\overline{F}_B} \cdot \cancel{\mu} \cdot u_B = \delta U_{barra} = -\cancel{\mu}\,\cancel{\overline{F}_B} \frac{p_0}{4E} \Rightarrow \boxed{u_B = -\frac{p_0}{4E}} \tag{15}$$

EM506 – Resistência dos Materiais II – Gabarito da Segunda Prova

<u>Questão 2</u> (4,0 pontos): O eixo engastado-livre mostrado na Figura 2a é submetido a um momento torsor M_{XC} em sua extremidade livre. Uma forma de aumentar a torção máxima do eixo é por meio de um furo, como mostrado na Figura 2b. Se o diâmetro do furo tiver metade do diâmetro do eixo, determine que comprimento deve ter para que a torção máxima seja aumentada em 5% em relação à do eixo maciço. Resolva pela técnica de Associação de Sistemas.

Dados: raio do eixo maciço – r_E; comprimento do furo – h.

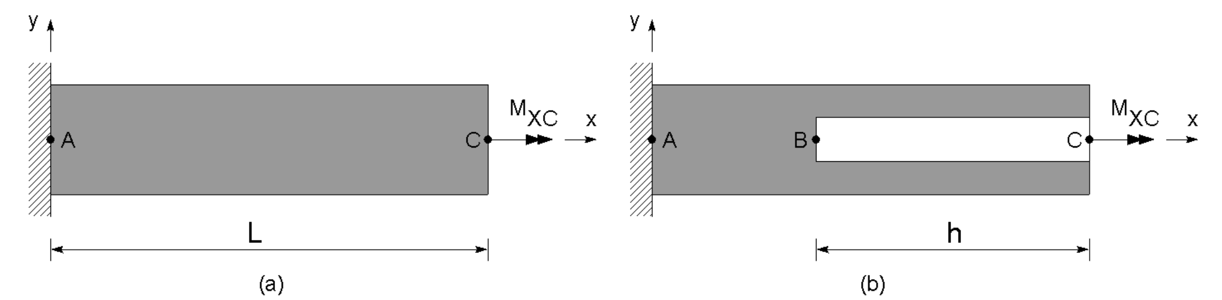


Figura 2: (a) Eixo maciço e (b) o mesmo eixo com furo de comprimento h.

Solução

a) Dissociação dos sistemas

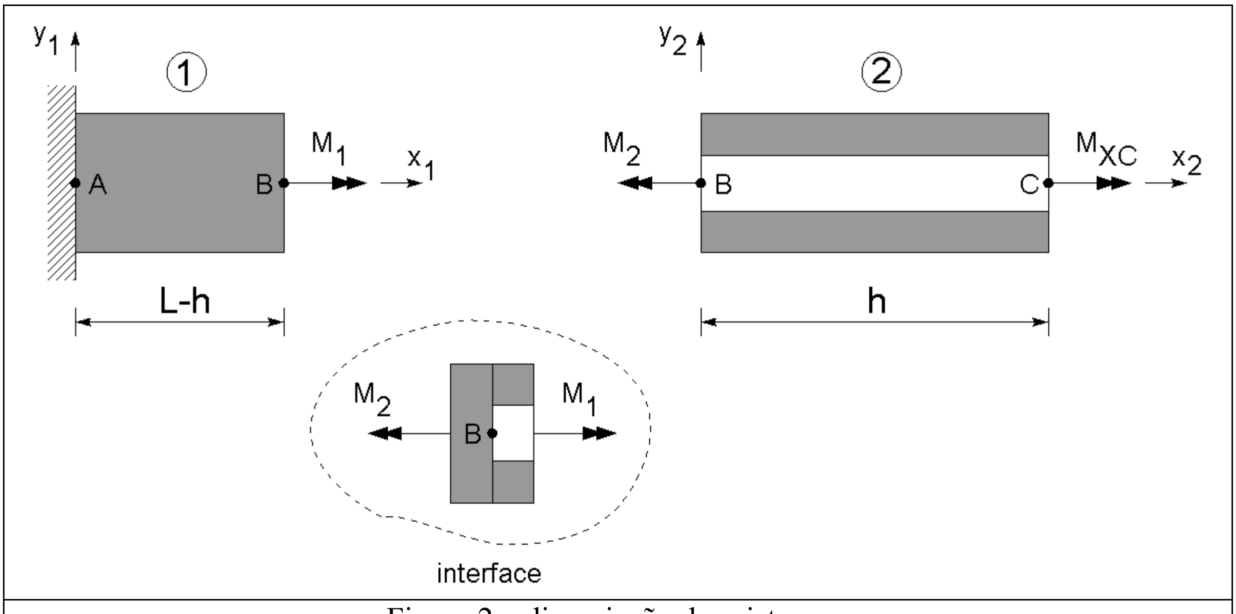


Figura 2c: dissociação dos sistemas.

b) Equilíbrio na interface

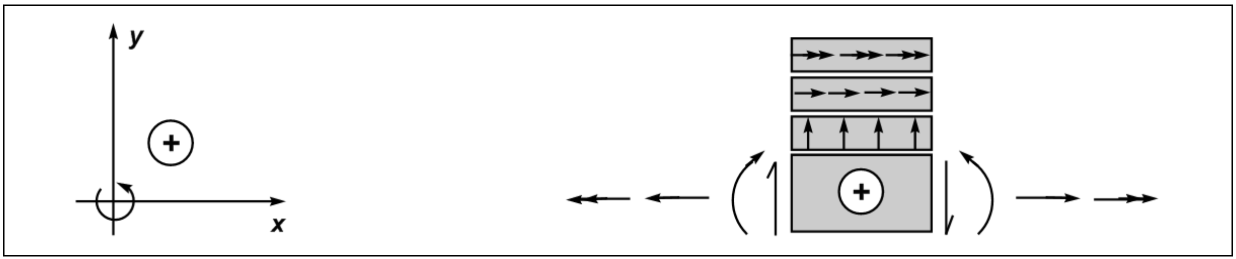
$$\sum M_X = 0 \Rightarrow -M_2 + M_1 = 0 \Rightarrow M_2 = M_1 \quad (1)$$

c) Compatibilidade cinemática

$$\phi_{1B} = \phi_1\left(x_1 = L - h\right) = \phi_2\left(x_2 = 0\right) = \phi_{2B} \tag{2}$$

d) Solução do problema (1)

d1) eixos e convenção de sinais da Resistência dos Materiais



d2) equação diferencial

$$J_{p1}G_1 \frac{d^2}{dx_1^2}\phi_1\left(x_1\right) = -t_1(x_1) \tag{3}$$

d3) equação de carregamento

$$t_1(x_1) = 0 \tag{4}$$

d4) condições de contorno

$$\phi_1\left(x_1 = 0\right) = 0 \tag{5}$$

$$M_{X1}\left(x_1 = L - h\right) = +M_1 \tag{6}$$

d5) integração da equação diferencial

$$J_{p1}G_1 \frac{d^2}{dx_1^2}\phi_1\left(x_1\right) = 0 \tag{7}$$

$$\downarrow \int$$

$$J_{p1}G_1 \frac{d}{dx_1}\phi_1\left(x_1\right) = M_{X1}\left(x_1\right) = C_1 \tag{8}$$

$$\downarrow \int$$

$$J_{p1}G_1\phi_1\left(x_1\right) = C_1x_1 + C_2 \tag{9}$$

d6) determinação das constantes de integração

Substituindo-se (5) em (9), tem-se:

$$J_{p1}G_1\phi_1\left(x_1=0\right)=C_1\cdot 0+C_2=0\Rightarrow C_2=0 \tag{10}$$

Substituindo-se (6) em (8), tem-se:

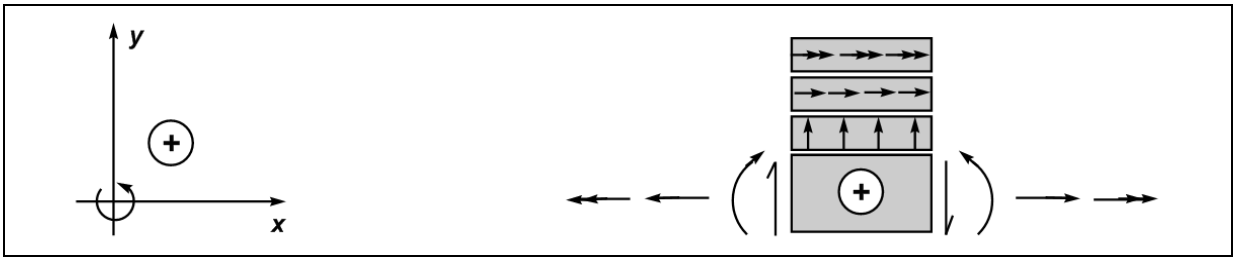
$$M_{X1}\left(x_1=L-h\right)=C_1=+M_1\Rightarrow C_1=M_1 \tag{11}$$

d7) equações finais

$$M_{X1}\left(x_1\right)=M_1 \tag{12}$$
$$J_{p1}G_1\phi_1\left(x_1\right)=M_1x_1 \tag{13}$$

e) Solução do problema (2)

e1) eixos e convenção de sinais da Resistência dos Materiais



e2) equação diferencial

$$J_{p2}G_2\frac{d^2}{dx_2^2}\phi_2\left(x_2\right)=-t_2(x_2) \tag{14}$$

e3) equação de carregamento

$$t_2(x_2)=0 \tag{15}$$

e4) condições de contorno

$$M_{X2}\left(x_2=0\right)=+M_2 \tag{16}$$
$$M_{X2}\left(x_2=h\right)=+M_{XC} \tag{17}$$

e5) integração da equação diferencial

$$J_{p2}G_2\frac{d^2}{dx_2^2}\phi_2\left(x_2\right)=0 \tag{18}$$

$\downarrow\int$

$$J_{p2}G_2 \frac{d}{dx_2}\phi_2(x_2) = M_{X2}(x_2) = D_1 \tag{19}$$

$$\downarrow \int$$

$$J_{p2}G_2\phi_2(x_2) = D_1 x_2 + D_2 \tag{20}$$

e6) determinação das constantes de integração

Substituindo-se (16) em (19), tem-se:

$$M_{X2}(x_2 = 0) = D_1 = +M_1 \tag{21}$$

Substituindo-se (17) e (21) em (19), tem-se:

$$M_{X2}(x_2 = h) = D_1 = +M_{XC} \Rightarrow \boxed{M_1 = M_{XC}} \tag{22}$$

e7) equações finais

$$M_{X2}(x_2) = M_{XC} \tag{23}$$

$$J_{p2}G_2\phi_2(x_2) = M_{XC}x_2 + D_2 \tag{24}$$

f) Resolvendo a associação

Das equações (1) e (13), tem-se que:

$$J_{p1}G_1\phi_1(x_1) = M_{XC}x_1 \tag{25}$$

Substituindo-se (24) e (25) em (2), tem-se:

$$\phi_{1B} = \phi_1(x_1 = L - h) = \frac{1}{J_{p1}G_1} M_{XC}(L - h) \tag{26}$$

$$\phi_{2B} = \phi_2(x_2 = 0) = \frac{1}{J_{p2}G_2} D_2 \tag{27}$$

$$\phi_{1B} = \phi_{2B} \Rightarrow \frac{1}{J_{p1}G_1} M_{XC}(L-h) = \frac{1}{J_{p2}G_2} D_2 \Rightarrow D_2 = \frac{J_{p2}G_2}{J_{p1}G_1} M_{XC}(L-h) \tag{28}$$

$$\therefore \phi_2(x_2) = \frac{1}{J_{p2}G_2}\left\{ M_{XC}x_2 + \frac{J_{p2}G_2}{J_{p1}G_1} M_{XC}(L-h) \right\} \tag{29}$$

g) Solução

A torção máxima do eixo ocorre no ponto C e é dada pela Eq. (29) quanto $x_2 = h$, isto é:

$$\phi_{máx} = \phi_2\left(x_2 = h\right) = \frac{1}{J_{p2}G_2}\left\{M_{XC}h + \frac{J_{p2}G_2}{J_{p1}G_1}M_{XC}\left(L-h\right)\right\} \tag{30}$$

O módulo de elasticidade transversal é o mesmo ao longo do eixo, sendo ele maciço ou vazado: $G = G_1 = G_2$. O momento polar de inércia Jp_1 refere-se ao eixo maciço, e Jp_2 refere-se ao eixo vazado.

$$J_{p1} = \frac{\pi}{2}\left(r_E^4 - \cancel{r_I^4}\right) = \frac{\pi}{2}r_E^4 \tag{31}$$

No eixo vazado, com $R_I = R_E/2$, o momento polar de inércia é dado por:

$$J_{p2} = \frac{\pi}{2}\left(r_E^4 - r_I^4\right) = \frac{\pi}{2}\left[r_E^4 - \left(\frac{r_E}{2}\right)^4\right] = \frac{\pi}{2}\left[r_E^4 - \frac{r_E^4}{16}\right] = \frac{\pi}{2}\frac{15}{16}r_E^4 = \frac{\pi}{2}\frac{15}{16}r_E^4 \tag{32}$$

Neste eixo em particular, tem-se que:

$$\frac{J_{p2}G_2}{J_{p1}G_1} = \frac{J_{p2}}{J_{p1}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\frac{15}{16}r_E^4\right)}{\left(\frac{\pi}{2}r_E^4\right)} = \frac{15}{16} \tag{33}$$

A deflexão máxima do eixo maciço é dada pela Eq. (13) quando $x_1 = L$ (ou também pela Eq. (30) quando se faz o comprimento do furo $h=0$):

$$\phi_{máx\ maciço} = \phi_1\left(x_1 = L\right) = \frac{M_{XC}}{J_{p1}G_1}L \tag{34}$$

Por outro lado, a deflexão máxima do eixo vazado é dada pela Eq. (30) por:

$$\begin{aligned}\phi_{máx\ vazado} &= \frac{1}{J_{p2}G_2}\left\{M_{XC}h + \frac{J_{p2}}{J_{p1}}M_{XC}\left(L-h\right)\right\} = \frac{1}{J_{p2}G_2}\left\{M_{XC}h + \frac{15}{16}M_{XC}\left(L-h\right)\right\} = \\ &= \frac{M_{XC}}{J_{p2}G_2}\left\{\frac{15}{16}L + \frac{1}{16}h\right\}\end{aligned} \tag{35}$$

A relação entre a deflexão máxima para o eixo com e seu furo, segundo o enunciado, deve ser:

$$\frac{\phi_{\text{máx vazado}}}{\phi_{\text{máx maciço}}} = 1,05 = \frac{\dfrac{\cancel{M_{XC}}}{J_{p2}\,\cancel{G_2}}\left\{\dfrac{15}{16}L + \dfrac{1}{16}h\right\}}{\dfrac{\cancel{M_{XC}}}{J_{p1}\,\cancel{G_1}}L} = \frac{J_{p1}}{J_{p2}}\frac{\left\{\dfrac{15}{16}L + \dfrac{1}{16}h\right\}}{L} = \frac{16}{15}\frac{\left\{\dfrac{15}{16}L + \dfrac{1}{16}h\right\}}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{105}{100}\frac{15}{16}L = \frac{15}{16}L + \frac{1}{16}h \Rightarrow \left(\frac{63}{64} - \frac{15}{16}\right)L = \frac{1}{16}h \Rightarrow \boxed{h = \frac{3}{4}L} \tag{36}$$

Assim, um furo de **75%** do comprimento do eixo é capaz de aumentar a torção máxima do eixo em 5%.

EM506 – Resistência dos Materiais II – Gabarito da Segunda Prova

<u>Questão 3</u> (3 pontos): Considere a viga <u>hiperestática</u> mostrada na Figura 3. A viga é apoiada no ponto A e engastada no ponto B. Um momento fletor M_{ZA} concentrado é aplicado no ponto A.

a) Usando o Princípio das Forças Virtuais, determine a reação de apoio no vínculo A;
b) Explique o significado da expressão Wa = U no contexto dos métodos de energia na elastostática. Exemplifique uma situação em que essa expressão não é satisfeita.

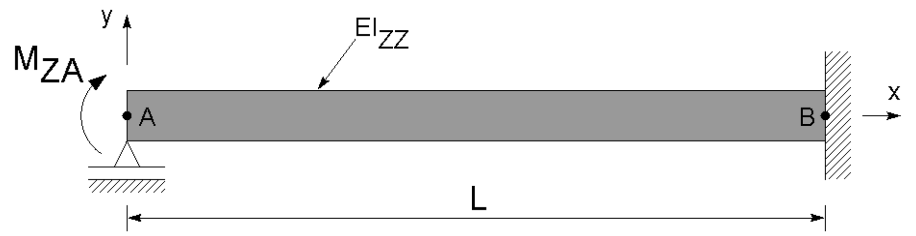


Figura 3: Viga hiperestática apoiada-engastada sujeita a momento concentrado.

Solução

A reação de apoio no vínculo A, V_{YA}, é mostrada na Figura 3b. O valor de V_{YA} é tal que a flecha do ponto A é nula, isto é, $v_A = 0$. Assim, pode-se aplicar o Princípio das Forças Virtuais (PFV) para determinar a deflexão do ponto A, e fazendo essa deflexão igualar-se a zero determinamos a reação V_{YA}.

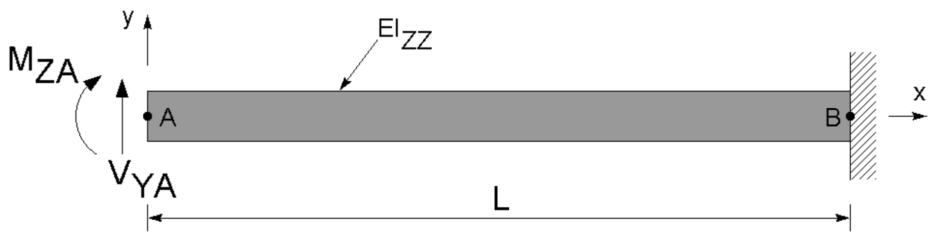
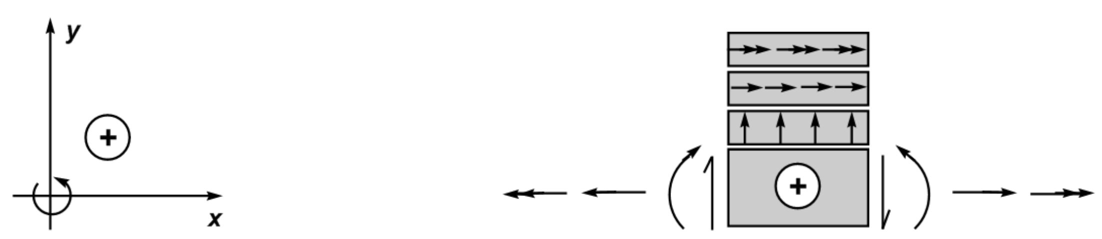


Figura 3b: Viga equivalente à da Figura 3.

Determinando o momento fletor real atuando na viga da Figura 3b:

a) Eixos e convenção da Resistência dos Materiais



b) Equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2} M_Z(x) = +q(x) \tag{1}$$

c) Equação do carregamento

$$q(x) = 0 \tag{2}$$

d) Condições de contorno

$$M_Z(x=0) = +M_{ZA} \tag{3}$$
$$V_Y(x=0) = +V_{YA} \tag{4}$$

e) Integração da equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2} M_Z(x) = 0 \tag{5}$$
$$\downarrow \int$$
$$\frac{d}{dx} M_Z(x) = V_Y(x) = C_1 \tag{6}$$
$$\downarrow \int$$
$$M_Z(x) = C_1 x + C_2 \tag{7}$$

f) Determinando as constantes de integração

Substituindo-se (4) em (6), tem-se:

$$V_Y(x=0) = C_1 = +V_{YA} \Rightarrow C_1 = V_{YA} \tag{8}$$

Substituindo-se (3) em (7), tem-se:

$$M_Z(x=0) = C_2 = +M_{ZA} \Rightarrow C_2 = M_{ZA} \tag{9}$$

g) Equações finais

$$V_Y(x) = V_{YA} \tag{10}$$
$$M_Z(x) = V_{YA} x + M_{ZA} \tag{11}$$

Para determinar a flecha do ponto A, é necessário estabelecer um sistema auxiliar como mostrado na Figura 3c.

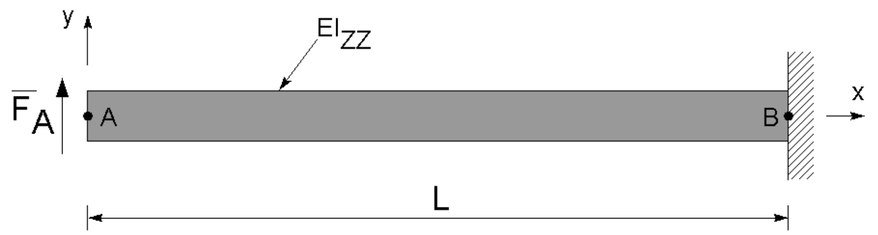
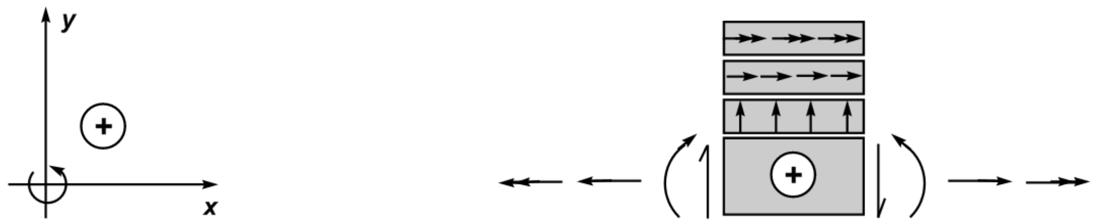


Figura 3c: Sistema auxiliar para determinar a flecha em A, v_A.

Determinando o momento fletor virtual atuando na viga da Figura 3c:

h) Eixos e convenção da Resistência dos Materiais



i) Equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}\overline{M}_Z(x) = +\overline{q}(x) \tag{12}$$

j) Equação do carregamento

$$\overline{q}(x) = 0 \tag{13}$$

k) Condições de contorno

$$\overline{M}_Z(x=0) = 0 \tag{14}$$

$$\overline{V}_Y(x=0) = +\overline{F}_A \tag{15}$$

l) Integração da equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}\overline{M}_Z(x) = 0 \tag{16}$$

$$\downarrow \int$$

$$\frac{d}{dx}\overline{M}_Z(x) = \overline{V}_Y(x) = D_1 \tag{17}$$

$$\downarrow \int$$

$$\overline{M}_Z(x) = D_1 x + D_2 \tag{18}$$

m) Determinando as constantes de integração

Substituindo-se (15) em (17), tem-se:

$$\overline{V}_Y(x=0) = D_1 = +\overline{F}_A \Rightarrow D_1 = \overline{F}_A \tag{19}$$

Substituindo-se (14) em (18), tem-se:

$$\overline{M}_Z(x=0) = D_2 = 0 \Rightarrow D_2 = 0 \tag{20}$$

n) Equações finais

$$\overline{V}_Y(x) = \overline{F}_A \tag{21}$$
$$\overline{M}_Z(x) = \overline{F}_A \cdot x \tag{22}$$

O trabalho virtual da força virtual mostrada na Figura 3c é dado por:

$$\delta Wa = \overline{F}_A \cdot \delta v_A = \overline{F}_A \cdot \mu \cdot v_A \tag{23}$$

Este trabalho, produzido pela força virtual externa, corresponde a uma variação da energia de deformação, dada por:

$$\delta U = \mu \int_x \frac{M_Z(x)\overline{M}_Z(x)}{E(x)I_{ZZ}(x)}dx \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\delta U &= \frac{\mu}{EI_{ZZ}}\int_{x=0}^{x=L}[V_{YA}x + M_{ZA}][\overline{F}_A \cdot x]dx = \frac{\mu\overline{F}_A}{EI_{ZZ}}\int_{x=0}^{x=L} V_{YA}x^2 + M_{ZA}x\,dx = \\ &= \frac{\mu\overline{F}_A}{EI_{ZZ}}\left\{V_{YA}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^L + M_{ZA}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L\right\} = \frac{\mu\overline{F}_A}{EI_{ZZ}}\left\{V_{YA}\frac{L^3}{3} + M_{ZA}\frac{L^2}{2}\right\}\end{aligned} \tag{25}$$

Do princípio de conservação de energia, tem-se que:

$$\delta Wa = \cancel{\overline{F}_A} \cdot \cancel{\mu} \cdot v_A = \delta U = \frac{\cancel{\mu}\,\cancel{\overline{F}_A}}{EI_{ZZ}}\left\{V_{YA}\frac{L^3}{3} + M_{ZA}\frac{L^2}{2}\right\} \tag{26}$$

$$\therefore v_A = \frac{1}{EI_{ZZ}}\left\{V_{YA}\frac{L^3}{3} + M_{ZA}\frac{L^2}{2}\right\} \tag{27}$$

Como foi dito, para que o problema da Figura 3b seja equivalente ao da Figura 3, é necessário que o valor de V_{YA} seja tal que a flecha do ponto A seja nula, $v_A = 0$. Da Equação (27), tem-se finalmente:

$$v_A = \frac{1}{EI_{ZZ}}\left\{V_{YA}\frac{L^3}{3} + M_{ZA}\frac{L^2}{2}\right\} = 0 \Rightarrow V_{YA}\frac{L^3}{3} + M_{ZA}\frac{L^2}{2} = 0 \Rightarrow V_{YA}\frac{L^3}{3} = -M_{ZA}\frac{L^2}{2} \tag{28}$$

$$\boxed{V_{YA} = -\frac{3}{2}\frac{M_{ZA}}{L}} \qquad (29)$$

No contexto dos métodos de energia na elastostática, a equação Wa = U expressa que todo o trabalho exercido pelas forças externas sobre o corpo elástico é convertido em energia de deformação. Essa expressão não é satisfeita, por exemplo, quando parte do trabalho das forças externas é convertido em aceleração do corpo, isto é, depois da aplicação das forças o corpo não permanece em equilíbrio estático.