

**MA 502 - Análise I - Turma Z**

**Prova No 3**

28/11/2011

RA.....Nome.....

Ao resolver cada questão justifique suas afirmações, explicando os resultados utilizados.

1. (a) Dada uma função contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , prove que o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = b\}$$

é fechado em  $\mathbb{R}$  para cada  $b \in \mathbb{R}$ .

- (b) Dê exemplo de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que o conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$$

não é aberto nem fechado em  $\mathbb{R}$ .

2. (a) Enuncie o teorema do valor médio.

(b) Seja  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $[0, 2]$  e derivável em  $(0, 2)$  tal que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 0$  e  $f(2) = 1$ .

(i) Prove que existe  $c \in (0, 1)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

(ii) Prove que existe  $d \in (1, 2)$  tal que  $f'(d) = 1$ .

3. (a) Enuncie a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

(b) Dado um polinômio  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , prove que, para todo  $a, x \in \mathbb{R}$  tem-se que

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

4. Determine os raios de convergência das seguintes séries de potências:

$$(a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 1)x^k, \quad (b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} x^{2k}.$$

5. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right), \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^{(x^n)}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}.$$

Sugestão: Em (b) tome logaritmos.