IFGW – Universidade Estadual de Campinas

Prova III – F 315 27/06/2013

Nome:______________________________ RA:__________ Turma: __

Obs.: O Teste 3 corresponde ao problema 1.

Problema 1: [4.0 pt] Considere uma partícula de massa m que se movimenta no plano $x-y$ sob a ação do campo gravitacional $\mathbf{g} = -g\hat{y}$ e da força $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, onde k é uma constante positiva e o vetor $\mathbf{r}$ corresponde à posição da partícula em relação à origem.

a) Determine a Lagrangiana do sistema e as equações de movimento.

b) Determine a Hamiltoniana do sistema e as equações canônicas (Hamilton) de movimento.

c) Qual a relação entre os momentos canonicamente conjugados e os momentos linear e angular? Sob qual condição há conservação do momento angular?

Problema 2: [4.0 pt] Determine a geodésica $\theta = \theta(r)$ sob a superfície de um cone $z = ar$ (coordenadas cilíndricas r, θ, z) onde a é uma constante positiva.
Dica: $r = b \sec t$.

Problema 3: [4.0 pt] Considere uma partícula de massa m que se movimenta na superfície de um cone vertical $z = r$ (coordenadas cilíndricas, $z > 0$) sob a ação do campo gravitacional $\mathbf{g} = -g\hat{z}$.

a) Determine a Lagrangiana do sistema e as equações de movimento.

b) Verifique se a partícula pode apresentar uma órbita circular. Em caso afirmativo, determine a frequência angular do movimento em função do momento angular e do raio da órbita.

c) Verifique se a possível órbita circular é estável. Em caso afirmativo, determine a frequência de pequenas oscilações radiais.

d) Escreva a Hamiltoniana do sistema.

Dados:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2, \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}, \qquad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}.$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots, \qquad (1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \ldots$$