Questão 1

Sabe-se da teoria de probabilidade que se X e Y são variáveis aleatórias independentes, tais que $X \sim$ Gama (a, β) e $Y \sim$ Gama (b, β), então $\frac{X}{X+Y}$ tem distribuição Beta (a, b).

A) Qual é o valor de $\mathbb{P}(Y=0, X=0)$ e porque esta pergunta é de relevância a este problema?

$X \sim$ Gama (a, β) $\quad Y \sim$ Gama (b, β) $\Rightarrow \frac{X}{X+Y} \sim$ Beta (a, b)

- $\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 0$, pois variáveis contínuas não têm massa pontual.
- Essa questão é muito importante pois é um resultado que nos garante que não estaremos dividindo por zero, o que por sua vez nos dá confiança para escrevermos um algorítmo.

B) Assuma que você possa obter somente variáveis aleatórias uniformes em (0,1). Construa um algorítmo para gerar 100 pontos de uma Beta (a, b).

Como só sabemos gerar Uniforme (0,1), usaremos o método de inversão para resolver esse problema

1. Inicialize a e b
2. Gere $U_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$
3. Gere $U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$
4. Faça $Y_1 = U_1^{1/a}$
5. Faça $Y_2 = U_2^{1/b}$
6. Se $Y_1 + Y_2 \leq 1$ então Faça $X = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2}$
7. Senão Volte para passo 2
8. Repita 100 vezes

Questão 2

Use o método de Monte Carlo para Integrais e obtenha um algorítmo para calcular

$$\int_0^\infty 2x e^{-2x}\,dx.$$

1º) defina $g(x)$.

2º) Sabemos que, $y = \frac{1}{x+1}$ e $dy = \frac{-dx}{(x+1)^2}$

3º) Ache $g\left(\frac{1}{y}-1\right)$

4º) $\int_0^1 \frac{1}{y^2}\, g\left(\frac{1}{y}-1\right) dy$

5º) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\left[\frac{1}{y^2}\, g\left(\frac{1}{y}-1\right)\right]$

- $\int_0^\infty 2x e^{-2x}\,dx$

$g(x) = 2x e^{-2x}$

$g\left(\frac{1}{y}-1\right) = 2\left(\frac{1}{y}-1\right)e^{-2\left(\frac{1}{y}-1\right)}$

$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\left[\frac{1}{y^2}\cdot 2\left(\frac{1}{y}-1\right)e^{-2\left(\frac{1}{y}-1\right)}\right].$

- Algorítmo

① Faça $Y = \frac{1}{X+1}$

② Faça $dY = \frac{-dx}{(x+1)^2}$

③ Gere $Y_i \sim U(0,1)$

④ Faça $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{y^2}\cdot 2\left(\frac{1}{y}-1\right)e^{-2\left(\frac{1}{y}-1\right)}\right]$

Questão 3

Desenvolva um algoritmo que simule variáveis aleatórias com densidade:

$$f(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|}, \quad \text{com} \quad -\infty < x < \infty$$

- Para $x < 0$

$$f(x) = \frac{\theta}{2} e^{+\theta x}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{\theta}{2} e^{\theta x} dx$$

$$\frac{\theta}{2} \int_{-\infty}^{x} e^{\theta x} dx$$

$$u = \theta x \qquad du = \theta dx$$

$$\frac{\theta}{\theta 2} \int_{-\infty}^{x} e^{u} du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[e^{-\theta x} \right]_{-\infty}^{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[e^{-\theta x} - e^{+\theta \infty} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[e^{-\theta x} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow F_x = \frac{e^{-\theta x}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow U = F_x$$

$$U = \frac{e^{-\theta x}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$2U = e^{-\theta x} - 1$$

$$e^{-\theta x} = 2U + 1$$

$$-\theta x = \ln(2U+1)$$

$$x = -\frac{\ln(2U+1)}{\theta}$$

$$X = -\frac{\ln(2U+1)}{\theta} \text{ se } X < 0$$

- Para $x \geq 0$

$$f(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta x}$$

$$F_x = \int_{0}^{x} \frac{\theta}{2} e^{-\theta x} dx$$

$$= \frac{\theta}{2} \int_{0}^{x} e^{-\theta x} dx$$

$$u = -\theta x \qquad du = -\theta dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\theta}\frac{\theta}{2} \int_{0}^{x} e^{u} du$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \left[e^{-\theta x} \right]_{0}^{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \left[e^{-\theta x} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow F_x = \frac{-e^{-\theta x}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow U = F_x$$

$$U = \frac{-e^{-\theta x} + 1}{2}$$

$$2U = -e^{-\theta x} + 1$$

$$-e^{-\theta x} = 2U - 1$$

$$e^{-\theta x} = 1 - 2U$$

$$-\theta x = \ln(1-2U)$$

$$x = -\frac{\ln(1-2U)}{\theta}$$

$$X = -\frac{\ln(1-2U)}{\theta} \text{ se } X \geq 0$$

Algoritmo:

(1) gere $U_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$
(2) gere $U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$
(3) gere $U_3 \sim \mathcal{U}(0,1)$
(4) se $U_3 < 1/2$ Faça $X = -\dfrac{\ln(2U_1+1)}{\theta}$
(5) senão Faça $X = -\dfrac{\ln(1-2U_2)}{\theta}$
(6) Faça n vezes

Questão 4

Sejam $U_1, \ldots, U_n$ iid $\mathcal{U}(0,1)$. Defina $Y_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$ e $Y_1 = \min(U_1, \ldots, U_n)$.

Gere m pontos de Y_n e Y_1 pelo algoritmo de inversão.

Sabemos da probabilidade que:

• mínimo ⟶ $F_{Y_{(1)}} = 1 - [1 - F_{U_i}(u_i)]^n$
$= 1 - [1 - x]^n$

• máximo ⟶ $F_{Y_{(n)}} = [F_{U_i}(u_i)]^n$
$= x^n$

Achando as inversas, temos:

$U_1 = 1 - [1 - x]^n$
$-[1 - x]^n = U_1 - 1$
$[1 - x]^n = 1 - U_1$
$1 - x = (1 - U_1)^{1/n}$
$-x = (1 - U_1)^{1/n} - 1$
$x = 1 - (1 - U_1)^{1/n}$

$U_2 = x^n$
$x = (U_2)^{1/n}$

Algoritmo:

① Gere $U_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$ e $U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$
② $X_1 = 1 - (1 - U_1)^{1/n}$
③ $X_2 = (U_2)^{1/n}$
④ Faça m vezes

1) Gere $U_1 \sim U(-1,1)$
2) Gere $U_2 \sim U(0,1)$
3) se $U_2 \leq (1-X^2)^{1/2}$ então X max Y.
4) senão volte para o passo (1)
5) Repita n vezes.