Instituto de Física Gleb Wataghin
UNICAMP
F315 Mecânica Geral - 3o. Teste - turmas A e D
1o. Semestre de 2011

Nome: GABARITO **RA:** **Turma:**

Considerando a ação S de um sistema físico unidimensional definida como:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\{x(t), \dot{x}(t); t\} dt,$$

onde $L\{x(t), \dot{x}(t); t\}$ é a Lagrangiana do sistema e $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$,

1. **(4 pontos) enuncie o Princípio de Hamilton e**
2. **(6 pontos) deduza detalhadamente as condições sobre $L\{x(t), \dot{x}(t); t\}$ para que o Princípio de Hamilton seja satisfeito (Equação de Euler-Lagrange).**

1) "De todos os caminhos possíveis que um sistema dinâmico pode percorrer entre dois pontos num específico intervalo de tempo, o caminho real é aquele que minimiza a Ação S"

2) Define-se $x(\alpha,t) = x(0,t) + \alpha\eta(t)$ tal que $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ e $x(0,t) = x(t)$ | 2.0

$$\Longrightarrow \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial t} \right\} dt$$ = condição de minimização | +2.0

$$\rightarrow \left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \eta(t) \; ; \; \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\dot{x}(0,t) + \alpha\dot{\eta}(t)\right] = \dot{\eta}(t) \right]$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}\eta(t) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d\eta(t)}{\partial t}}_{=} \right\}$$

integrando por partes

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\eta(t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\eta(x)\, dx$$

este termo é nulo pois $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$

$$\Longrightarrow \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \right] \eta(x)\, dx \quad \forall\, \eta(x) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0}$$ Equação de Euler-Lagrange. |

+2.0