F 602 - prova 1

Unicamp, 30 de setembro de 2009

nome assinatura RA

1ª questão (3 pontos): 1. Um solenóide longo, com n voltas por unidade de comprimento, carrega uma corrente I, gerando um campo magnético $|\vec{B}| = \mu_0 n I$. Esta corrente cresce linearmente com o tempo, $dI/dt = cte$, criando um campo elétrico induzido constante.

a) Calcule o campo elétrico dentro do solenóide, induzido pela variação do campo magnético.

b) Calcule o vetor de Poynting em qualquer ponto do espaço.

c) Calcule a densidade de energia eletro-magnética dentro do solenóide.

d) Confira a validade do teorema de Poynting, interpretando cada termo.

a) Por simetria, $\vec{E}$ está na direção $\hat{\phi}$. Temos então:

$$\int (\nabla \times \vec{E}).\vec{da} = \int \vec{E}.\vec{dl} = E_\phi \, 2\pi s$$

Aplicando na terceira equação de Maxwell:

$$E_\phi \, 2\pi s = -\frac{d}{dt}(\mu_0 n I)\pi s^2 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\mu_0 n s}{2}\frac{dI}{dt}\hat{\phi}$$

b) Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, são perpendiculares. Portanto:

$$\vec{S} = -\frac{1}{\mu_0}\,\frac{\mu_0 n s}{2}\frac{dI}{dt}\,\mu_0 n I\ (\hat{\phi} \times \hat{z}) = -\frac{\mu_0 n^2 s}{4}\frac{d(I^2)}{dt}\hat{s}$$

c) Aplicando a fórmula:

$$u = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} + \frac{\epsilon_0 \mu_0^2 n^2 s^2}{8}\left(\frac{dI}{dt}\right)^2$$

d) Como dI/dt é constante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu_0 n^2}{2}\frac{d(I^2)}{dt}$$

Comparando com o segundo termo do teorema:

$$\nabla.\vec{S} = -\frac{1}{s}\frac{\mu_0 n^2}{4}\frac{d(I^2)}{dt}\frac{d(s^2)}{dt} = -\frac{\mu_0 n^2}{2}\frac{d(I^2)}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

A energia eletromagnética cresce no interior do solenóide, e este aumento se dá pela energia transportada pelo vetor de Poynting, que aponta no sentido correto, da borda do solenóide para dentro.

$2^{\underline{a}}$ questão (3 pontos): Uma onda eletromagnética plana incide obliquamente em um plano que divide dois dielétricos. Considerando uma polarização tal que o campo elétrico esteja no plano de incidência:
a) Obtenha os limites assintóticos para a razão E_{0R}/E_{0I} quando $\theta_I \to 0$ e $\theta_I \to 90^o$. Qual o significado físico de uma razão negativa?
b) Calcule a densidade de momento na direção perpendicular à superfície das ondas incidente, refletida e transmitida.
c) Calcule a pressão exercida na superfície pela onda eletromagnética. Verifique se o seu resultado faz sentido no limite onde os dois meios são idênticos.

a) Para $\theta = 0$, temos que $\sin\theta = 0$ e $\cos\theta = 1$. Portanto $\alpha = 1$ e:

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{1-\beta}{1+\beta} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Para $\theta \to 90^o$, $\cos\theta \to 0$, e α diverge. Portanto desprezamos o termo de β, obtendo:

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \to \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

Uma razão negativa (obtida por exemplo se $n_1 < n_2$ quando $\theta = 0$), indica que o campo elétrico sofreu uma inversão de fase na reflexão de 180^o.

b) Tomando a componente em $\hat{z}$ do momento das ondas, temos:

$$p_z^{(I)} = \frac{\epsilon_1}{2} E_I B_I \cos\theta_I = \frac{\epsilon_1 E_I^2}{2v_1} \cos\theta_I$$

onde o fator 1/2 reflete a média temporal do termo oscilante. Obtem-se expressões similares para as ondas refletidas e transmitidas:

$$\begin{aligned} p_z^{(R)} &= -\frac{\epsilon_1 E_R^2}{2v_1} \cos\theta_I \\ p_z^{(T)} &= -\frac{\epsilon_2 E_T^2}{2v_2} \cos\theta_T \end{aligned}$$

Utilizando as fórmulas que relacionam E_R e E_T com E_I e $\cos\theta_T$ com $\cos\theta_I$, podemos chegar em relações que dependem somente da onda incidente.

c) Calculando a pressão exercida a partir do momento transmitido, temos que a pressão da onda incidente e refletida é direcionada para z positivo, enquanto a pressão da onda transmitida é direcionada para z negativo. Utilizando a fórmula que relaciona pressão ao momento:

$$P = pv$$

temos:

$$P = (|p_z^{(I)}| + |p_z^{(R)}|)v_1 - |p_z^{(T)}|v_2$$

No limite onde os meios são idênticos, $\alpha = \beta = 1$, não temos onda refletida, e a expressão acima se reduz a:

$$P = 0$$

que é o esperado.

3ª questão (3 pontos): Em uma incidência normal de uma onda plana monocromática em um meio condutor:
a) Indique como calcular a diferença de fase entre a onda incidente e a onda refletida.
b) Calcule esta diferença de fase no limite de um excelente condutor ($\sigma >> \epsilon w$).

a) Essa diferença de fase será a fase complexa da razão E_{0R}/E_{0I}. Utilizando a fórmula fornecida:

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{1-\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}}$$

onde $\tilde{\beta} = k_2 + i\eta$, com k_2 e η dados no sumário de fórmulas.
Como esse é um número complexo, ele pode ser escrito como

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = A \exp i\phi$$

Portanto, ϕ é a diferença de fase entre as ondas incidente e refletida.

b) Quando $\sigma >> \epsilon w$, o termo $\sigma/(\epsilon w)$ será preponderante em k e η, e obtemos:

$$k = \eta = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2 w \sigma}{2\epsilon_2}}$$

e portanto

$$\beta = \mu_1 v_1 \sqrt{\frac{\epsilon_2 \sigma}{2\epsilon_2 \mu_2 w}}(1+i)$$

Pode-se rearranjar este termo substituindo $v = 1/\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$, obtendo

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_2 w}}(1+i)$$

A primeira raiz não deve ser muito grande, pois as grandezas ϵ e μ não variam muito de um meio para outro. E a segunda raiz é $>> 1$. Portanto tanto a parte real quanto a imaginária deste termo são muito grandes, e podemos aproximar:

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{-\tilde{\beta}}{+\tilde{\beta}} = -1$$

Portanto o campo elétrico refletido está defasado em 180^o em relação ao incidente.

4$^{\underline{a}}$ questão (1 pontos): Maxwell disse: "Dificilmente podemos evitar a inferência de que a luz consiste em ondulações transversais do mesmo meio que é a causa de fenômenos eletromagnéticos". Comente tal afirmação tomando como base as equações de Maxwell, mostrando analiticamente a conexão entre os fenômenos eletromagnéticos e a propagação transversal da luz.

Aplicando o ratacional à 3$^{\underline{a}}$ eq. de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla(\nabla . \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} \end{aligned}$$

Supondo que estamos no vácuo ($\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$), utilizamos a primeira e quarta equações de Maxweel, e podemos reescrever a equação acima como:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Uma equação similar para $\vec{B}$ se obtém aplicando o rotacional à 4^{a}. eq. de Maxwell. Esta é uma equação de onda, com velocidade de propagação $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$. Numericamente se observa que o valor desta velocidade é o mesmo da velocidade de propagação da luz no vácuo, coincidência que levou Maxwell a fazer tal afirmação. Em particular, se o campo elétrico depende somente de uma dimensão espacial, $\vec{E} = \vec{E}(z, t)$, pode-se mostrar que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são transversais entre si e à direção de propagação da onda.

sumário de fórmulas úteis:

equações de Maxwell:

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla.\vec{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

vetor de Poynting e densidade de energia e momento de onda eletromagnética:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \quad ; \quad u = \frac{1}{2}\left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) \quad ; \quad \vec{p} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S}$$

teorema de Poynting na forma diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{mech} + u_{em}) = -\nabla \vec{S}$$

incidência oblíqua em material dielétrico linear, com polarização do campo elétrico no plano de incidência (assumindo $\mu_1 = \mu_2$):

$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \quad ; \quad \alpha = \frac{\sqrt{1 - [(n_1/n_2)\sin\theta_I]^2}}{\cos\theta_I} \quad , \quad \beta = \frac{n_2}{n_1}$$

incidência normal em material condutor

$$E_{0R} = \frac{1-\beta}{1+\beta} E_{0I} \quad ; \quad E_{0T} = \frac{2}{1+\beta} E_{0I}$$

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 w}(k_2 + i\eta) \quad \text{onde} \quad \begin{cases} k_2 = w\sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_2 w}\right)^2} + 1\right)^{1/2} \\ \eta = w\sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_2 w}\right)^2} - 1\right)^{1/2} \end{cases}$$

identidades matemáticas:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla.\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla.\vec{A} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sA_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$