

IFGW – Universidade Estadual de Campinas

Prova III – F 315

27/06/2013

Nome: \_\_\_\_\_ RA: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Obs.: O Teste 3 corresponde ao problema 1.

**Problema 1:** [4.0 pt] Considere uma partícula de massa  $m$  que se movimenta no plano  $x - y$  sob a ação do campo gravitacional  $\mathbf{g} = -g\hat{y}$  e da força  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ , onde  $k$  é uma constante positiva e o vetor  $\mathbf{r}$  corresponde à posição da partícula em relação à origem.

- Determine a Lagrangiana do sistema e as equações de movimento.
- Determine a Hamiltoniana do sistema e as equações canônicas (Hamilton) de movimento.
- Qual a relação entre os momentos canonicamente conjugados e os momentos linear e angular? Sob qual condição há conservação do momento angular?

**Problema 2:** [4.0 pt] Determine a geodésica  $\theta = \theta(r)$  sob a superfície de um cone  $z = ar$  (coordenadas cilíndricas  $r, \theta, z$ ) onde  $a$  é uma constante positiva.  
Dica:  $r = b \sec t$ .

- Determine a Lagrangiana do sistema e a equação de movimento.
- Verifique se a partícula pode apresentar uma órbita circular. Em caso afirmativo, determine a frequência angular do movimento em função do momento angular e do raio da órbita.
- Verifique se a possível órbita circular é estável. Em caso afirmativo, determine a frequência de pequenas oscilações radiais.
- Calcule a Hamiltoniana do sistema.

**Problema 3:** [4.0 pt] Considere uma partícula de massa  $m$  que se movimenta na superfície de um cone vertical  $z = r$  (coordenadas cilíndricas,  $z > 0$ ) sob a ação do campo gravitacional  $\mathbf{g} = -g\hat{z}$ .

- a) Determine a Lagrangiana do sistema e as equações de movimento.
- b) Verifique se a partícula pode apresentar uma órbita circular. Em caso afirmativo, determine a frequência angular do movimento em função do momento angular e do raio da órbita.
- c) Verifique se a possível órbita circular é estável. Em caso afirmativo, determine a frequência de pequenas oscilações radiais.
- d) Escreva a Hamiltoniana do sistema.



Dados:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}, \quad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}.$$

Nome:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots, \quad (1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \dots$$

Obs: O Valor Ponderado

Problema 1: (10 p) Considere uma partícula de massa  $m$  que se move no plano  $x-y$  sob a ação de um campo gravitacional  $\mathbf{g} = -g\hat{y}$  e de uma força  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ , onde  $k$  é uma constante positiva, e  $\mathbf{r}$  corresponde à posição da partícula em relação à origem.

a) Derive as Equações de Movimento para a partícula.

b) Determine a frequência de oscilação da partícula em torno da origem para pequenas oscilações.

c) Qual o trabalho feito por essas forças quando a partícula se move de um ponto  $\mathbf{r}_1$  para um ponto  $\mathbf{r}_2$ ? Para qual movimento é esse trabalho máximo e mínimo?