ME - 210 B, Probabilidade I
Prof. Caio Azevedo
Primeiro semestre de 2010, Data: 24/06/2010
Prova II

**Leia atentamente as instruções abaixo:**

- **Coloque seu nome completo e RA em todas as folhas que você recebeu, inclusive nesta.**
- **Tenha em mãos somente: lápis, borracha, calculadora e caneta.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique, adequadamente, seus desenvolvimentos, sem, no entanto, escrever excessivamente.**
- **Em caso de dúvida, levante-se e dirija-se ao professor. Pergunte somente o que for imprescindível.**
- **Entregue todas as folhas que você recebeu, inclusive os rascunhos e a prova propriamente, informando o que deve ser corrigido.**
- **Faça a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **Não proceda de maneira indevida como: conversar durante a prova, utilizar-se de material que não permitido, emprestar material à colegas sem autorização do professor e atender o telefone celular (a não ser em casos de EXTREMA URGÊNCIA). Isso acarretará em nota 0 na prova.**
- **Seu aparelho celular deverá permanecer desligado ou no modo silencioso durante toda a prova.**
- **Se precisar de algum material, inclusive calculadora, levante-se e dirija-se ao professor.**
- **A prova terá duração de 2 horas, improrrogáveis, das 8h às 10h.**

Faça uma excelente prova!!

Nome:

R.A.:

**Questões**

1. Considere que a v.a.c. X, que representa a nota (de 0 a 100) de um aluno em uma determinada classe, é tal que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Responda os itens:

   a) Usando a metodologia vista em sala, obtenha a distribuição de $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ e a identifique, em que $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (0,8 pontos).

   b) Se $\mu = 80$ e $\sigma = 10$, calcule a probabilidade desse aluno obter uma nota maior ou igual a 90 (0,5 pontos).

c) Para os parâmetros do item b), calcule a probabilidade desse aluno obter uma nota menor ou igual a 75 (0,4 pontos).

d) Para os parâmetros do item b), calcule a probabilidade desse aluno obter uma nota entre 75 e 90, inclusive os extremos (0,5 pontos).

e) Suponha que $P(X \leq 95) = 0,9641$ e $P(X \geq 70) = 0,1562$. Determine $\mu$ e $\sigma$ (0,8 pontos).

2. Considere o vetor aleatório discreto $\boldsymbol{Z} = (X, Y)$, cuja f.d.p conjunta é dada pela tabela abaixo. Responda os itens.

| | | X | |
|---|---|---|---|
| | | -1 | 1 |
| Y | 0 | 1/8 | 3/8 |
| | 1 | 3/8 | 1/8 |

a) Calcule as distribuições marginais de X e Y (escreva-as na folha de resposta e não na prova) (0,5 pontos).

b) Calcule as esperanças e variâncias de X e Y (0,5 pontos).

c) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y. Os resultados que você obteve permitem-lhe concluir algo sobre a dependência entre X e Y? Justifique, adequadamente, sua resposta (0,5 pontos).

d) X e Y são probabilisticamente independentes? Sua conclusão é contraditória com aquela obtida no item c)? Justifique suas respostas adequadamente (0,5 pontos).

e) Calcule as distribuições condicionais de $Y|X = -1$ e $Y|X = 1$ (1,0 ponto).

f) Calcule a esperança de Y utilizando as distribuições obtidas no item e). O resultado obtido coincide com aquele obtido no item b)? Sua conclusão era esperada? Justifique suas respostas adequadamente (1,0 ponto).

3. Seja $X \sim N(0, 1)$. Responda os itens (sugestão: para os itens b) e c) utilize a função gama):

a) Encontre a distribuição de $V = X^2$ utilizando a metodologia vista em sala e calcule sua respectiva f.g.m. (1,0 ponto).

b) Calcule a esperança e a variância de $V$ utilizando a distribuição de X. (1,0 ponto)

c) Calcule a esperança e a variância de $V$ utilizando a distribuição obtida no item a). Compare tais valores com aqueles obtidos no item b). Eles coincidem? Sua conclusão era esperada? Justifique, adequadamente, sua resposta (1,0 ponto).

Formulário

- Se $X \sim Bernoulli(p)$, então: $f_X(x) = P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x)$, $\mathcal{E}(X) = p$, $\mathcal{V}(X) = p(1-p)$.
- Se $r > 0$, então, a função gama no ponto r é dada por $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$. Além disso, $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$. Se r for inteiro, então $\Gamma(r) = (r-1)!$