ME-323 — Prova 2

1. A densidade conjunta de v.a. X, Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} D(x^2 + xy + y), & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,2] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule o valor da constante D e as densidades marginais.

2. Um rato está preso num labirinto. Inicialmente ele tem que escolher uma entre duas direções. Caso ele vá para a direita, ele vai caminhar 5 minutos e retornar para a sua posição inicial. Caso ele vá para a esquerda, então com probabilidade $1/3$ ele sai do labirinto depois de 3 minutos de caminhada, e com probabilidade $2/3$ ele vai retornar para a sua posição inicial depois de 7 minutos de caminhada. Assumindo que em cada tentativa, é igualmente provavel que o rato tome qualquer uma das duas direções, qual é o tempo esperado de permanência dele no labirinto?

3. Um dado é jogado continuamente até que a soma total dos pontos ultrapasse 130. Calcule a probabilidade (aproximada) que pelo menos 41 jogadas sejam necessárias.
Obs.: pode-se deixar a resposta em termos de Φ (f.d. de Normal Padrão) de argumento **não-negativo**.

4. Considere uma cadeia de Markov com a matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule a matriz de probabilidades de transição em 2 passos.

(b) Calcule as probabilidades estacionárias.

(c) Esta cadeia de Markov é reversível?

(d) Partindo do estado 3, qual é o número médio de passos que a processo precisa fazer para voltar ao mesmo estado?

5. Considere o processo de ramificação (de Galton-Watson), começando de uma partícula, com os seguintes parâmetros:

(a) $p_0 = 4/5, p_3 = 1/10, p_7 = 1/10$;

(b) $p_0 = 1/5, p_1 = 2/5, p_2 = 2/5$;

(c) $p_0 = 1/7, p_2 = 5/7, p_3 = 1/7$.

Em cada caso, calcule a probabilidade da extinção do processo. No caso (b), calcule ainda a probabilidade da extinção supondo que na geração inicial há duas partículas.

$\int_0^1 dx \int_0^2 dy\,(x^2+xy+y) = \int_0^1 dx \cdot (2x^2+2x+2) = \frac{2}{3} + 1 + 2 = \frac{11}{3} \Rightarrow D = \frac{3}{11}$

3ª 14/06, 9^{00} – revisão da prova

ME-323 — Prova 2

1. A densidade conjunta de v.a. X, Y é dada por

$f_X(x) = \frac{3}{11}(2x^2+2x+2)\mathbb{1}_{[0,1]}$

$$f(x,y) = \begin{cases} D(x^2+xy+y), & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,2] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$f_Y(y) = \frac{3}{11}\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}y\right)\mathbb{1}_{[0,2]}$

Calcule o valor da constante D $\left(= \frac{3}{11}\right)$ e as densidades marginais.

2. Um rato está preso num labirinto. Inicialmente ele tem que escolher uma entre duas direções. Caso ele vá para a direita, ele vai caminhar 5 minutos e retornar para a sua posição inicial. Caso ele vá para a esquerda, então com probabilidade 1/3 ele sai do labirinto depois de 3 minutos de caminhada, e com probabilidade 2/3 ele vai retornar para a sua posição inicial depois de 7 minutos de caminhada. Assumindo que em cada tentativa, é igualmente provavel que o rato tome qualquer uma das duas direções, qual é o tempo esperado de permanência dele no labirinto?

$a = \frac{1}{2}(a+5) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{2}{3}(a+7)\right)$

$a = \frac{1}{2}a + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a + \frac{7}{3}$

$\frac{a}{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{7}{3}$

$a = 18 + 14 = \underline{32}$

3. Um dado é jogado continuamente até que a soma total dos pontos ultrapasse 130. Calcule a probabilidade (aproximada) que pelo menos 41 jogadas sejam necessárias.
Obs.: pode-se deixar a resposta em termos de Φ (f.d. de Normal Padrão) de argumento **não-negativo**.

$1 - \Phi(0{,}88)$

4. Considere uma cadeia de Markov com a matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}28 & 0{,}24 \\ 0{,}30 & 0{,}54 & 0{,}16 \\ 0{,}46 & 0{,}20 & 0{,}34 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule a matriz de probabilidades de transição em 2 passos.

(b) Calcule as probabilidades estacionárias. $\pi = \left(\frac{7}{17}, \frac{6}{17}, \frac{4}{17}\right)$

(c) Esta cadeia de Markov é reversível? $\pi_1 P_{12} \neq \pi_2 P_{21} \Rightarrow$ não é reversível

(d) Partindo do estado 3, qual é o número médio de passos que a processo precisa fazer para voltar ao mesmo estado? $\frac{17}{4}$

5. Considere o processo de ramificação (de Galton-Watson), começando de uma partícula, com os seguintes parâmetros:

(a) $p_0 = 4/5, p_3 = 1/10, p_7 = 1/10$; $\mu = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} = 1 \Rightarrow \pi_0 = 1$

(b) $p_0 = 1/5, p_1 = 2/5, p_2 = 2/5$; $\mu = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5} > 1$ $x = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x^2 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$ $\pi_0 = \frac{1}{2}$; $\pi_0^{(2)} = \frac{1}{4}$

(c) $p_0 = 1/7, p_2 = 5/7, p_3 = 1/7$.

Em cada caso, calcule a probabilidade da extinção do processo. No caso (b), calcule ainda a probabilidade da extinção supondo que na geração inicial há duas partículas.

$x = \frac{1}{7} + \frac{5}{7}x^2 + \frac{1}{7}x^3$ $\quad x^3 + 5x^2 - 7x + 1 = 0$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 5x^2 - 7x + 1 & x - 1 \\ -(x^3 - x^2) & x^2 + 6x - 1 \\ \quad 6x^2 - 7x + 1 & \\ \quad -(6x^2 - 6x) & \\ \qquad -x + 1 & \\ \qquad -(-x + 1) & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$x^2 + 6x - 1 = 0$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9+1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\pi_0 = -3 + \sqrt{10}}$

③ $\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$; $Ex^2 = \frac{\overset{1}{1^2}+\overset{4}{2^2}+\overset{9}{3^2}+\overset{16}{4^2}+\overset{25}{5^2}+\overset{36}{6^2}}{6} = \frac{91}{6}$

$Var\, X = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}$

0,88

$$\mathbb{P}[\geq 41 \text{ jogadas}] = \mathbb{P}[S_{40} \leq 130{,}5] = \mathbb{P}\left[\frac{S_{40} - 40\cdot\frac{7}{2}}{\sqrt{40\cdot\frac{35}{12}}} \leq \frac{130{,}5-140}{\sqrt{40\cdot\frac{35}{12}}}\right] \simeq 1 - \Phi\left(\frac{9{,}5}{\sqrt{\frac{350}{3}}}\right)$$

$\sqrt{116{,}7}$

---

④

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}28 & 0{,}24 \\ 0{,}30 & 0{,}54 & 0{,}16 \\ 0{,}46 & 0{,}20 & 0{,}34 \end{pmatrix}$$

$\pi \mathbb{P} = \pi$

$\pi_1 = 0{,}6\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}4\pi_3$ $\qquad \pi_1 = 0{,}5\pi_2 + \pi_3$

$\pi_2 = 0{,}2\pi_1 + 0{,}7\pi_2 + 0{,}1\pi_3$

$\pi_2 = 0{,}1\pi_2 + 0{,}2\pi_3 + 0{,}7\pi_2 + 0{,}1\pi_3 =$

$= 0{,}8\pi_2 + 0{,}3\pi_3$

$\pi_2 = \frac{3}{2}\pi_3$

$\pi_1 = \frac{3}{4}\pi_3 + \pi_3 = \frac{7}{4}\pi_3$

$\frac{7}{4}\pi_3 + \frac{6}{4}\pi_3 + \pi_3 = 1$

$\frac{17}{4}\pi_3 = 1 \Rightarrow \pi_3 = \frac{4}{17}, \pi_2 = \frac{6}{17}, \pi_1 = \frac{7}{17}$

$\pi = \left(\frac{7}{17}, \frac{6}{17}, \frac{4}{17}\right)$