INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP
Prova 3 - F 315 B 10/12/2010

UNICAMP IFGW Instituto de Física Gleb Wataghin

1) ______
2) ______
3) ______
4) ______
Nota:______

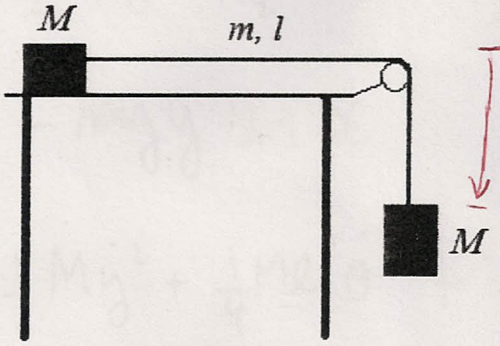
RA:________ Nome:______________________________

Assinatura: GABARITO

Questão 1:

Dois blocos, cada um de massa *M*, são conectados por uma corda uniforme de comprimento *l* e massa *m*. Um bloco é colocado sobre uma mesa horizontal sem atrito, enquanto o outro é pendurado através de uma polia sem fricção (Vide figura).
(a) Usando formalismo de Lagrange, encontre a equação diferencial de movimento para este sistema.
(b) Resolva a equação diferencial e descreva o movimento do sistema.

PS: Não se esqueça de considerar a massa da corda !!



y

(a) $T=\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2$

$\Rightarrow T=\left(M+\frac{m}{2}\right)\dot{y}^2$

$V=-Mgy-\int_0^y \rho g y'\,dy' = -Mgy-\frac{mg}{l}\frac{y^2}{2}$

$\Rightarrow L=\left(M+\frac{m}{2}\right)\dot{y}^2+Mgy+\frac{mg}{2l}y^2$

$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=0 \Rightarrow Mg+\frac{mg}{l}y-(2M+m)\ddot{y}=0$

$\Rightarrow \ddot{y}-\frac{m}{2M+m}\frac{g}{l}y=\frac{M}{2M+m}g$

(b) Sol. Homogênea: $y=Ae^{\eta t}+Be^{-\eta t}$, onde $\eta=\left[\frac{m}{2M+m}\frac{g}{l}\right]^{1/2}$

Sol. Particular: $y=-\frac{M}{m}l$

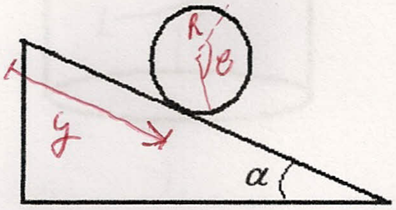
$\Rightarrow y=Ae^{\left(\frac{m}{2M+m}\frac{g}{l}\right)^{1/2}t}+Be^{-\left(\frac{m}{2M+m}\frac{g}{l}\right)^{1/2}t}-\frac{M}{m}l$

Questão 2 (2.5 pts)

Considere um disco rolando sem deslizar por um plano inclinado fixo. Utilizando o método Lagrangeano com multiplicadores de Lagrange, determine:

(a) As acelerações linear e angular do disco. (1.0)

(b) A força e torque de atrito, que evitam o deslizamento do disco sobre o plano. (1.5)



(a) e (b) Coordenadas generalizadas: $\boxed{y}$ e $\boxed{\theta}$, sendo que

$$\underbrace{y - R\theta}_{f} = 0 \quad \text{(Eq. Vínculo)}$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -Mgy\sin\alpha$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + Mgy\sin\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow Mg\sin\alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - R\lambda = 0$$

$$y - R\theta = 0 \Rightarrow \ddot{y} = R\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Mg\sin\alpha + M\ddot{y} + \lambda = 0 \\ \frac{1}{2}RM\ddot{y} + \lambda R = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}M\ddot{y} \end{cases}$$

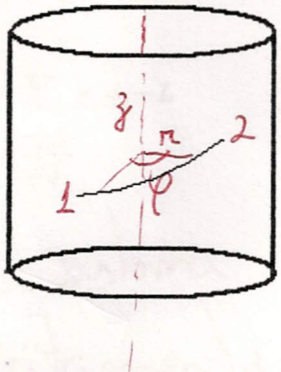
$$\Rightarrow Mg\sin\alpha - \frac{3}{2}M\ddot{y} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{2}{3}g\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{g}{R}\sin\alpha}$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{1}{3}Mg\sin\alpha} \qquad Q_j = \lambda\frac{\partial f}{\partial q_j}$$

$Q_y = \lambda = -\frac{1}{3}Mg\sin\alpha$ (Força Atrito) $Q_\theta = -\lambda R = \frac{1}{3}MgR\sin\alpha$ (Torque de Atrito)

Questão 3 (2.5 pts)

Mostre que a geodésica sobre a superfície de um cilindro reto é o segmento de uma hélice.



Em coordenadas cilíndricas, temos:

$$ds = \sqrt{(dz)^2 + (r\,d\varphi)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$$

$$= \sqrt{r^2 + z'^2}\, d\varphi$$

Queremos minimizar $S = \int_1^2 \underbrace{(r^2 + z'^2)^{1/2}}_{f} d\varphi$

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial f}{\partial z'} = 0$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{z'}{(r^2 + z'^2)^{1/2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{z'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} = cte = a \Rightarrow z'^2 = a(r^2 + z'^2)$$

$$\Rightarrow z'^2(1-a) = ar^2 \Rightarrow z' = \pm\left[\frac{ar^2}{1-a}\right]^{1/2} = cte = c$$

$z' = c \Rightarrow z = c\varphi + d$. (segmento de hélice)

Questão 4 (2.5 pts)

Mostre que, para um sistema fechado (i.e., que não interage com o meio externo), o Hamiltoniano é uma constante do movimento.

PS:

$H \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L$

$p_j \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

Se o sistema é fechado, o Lagrangeano não depende explicitamente do tempo, somente das coordenadas generalizadas e suas derivadas temporais. Portanto:

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$. Assim

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right) *$$

Mas $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j$

e, pela Eq. de Euler: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$

$= \dfrac{d}{dt} p_j = \dot{p}_j$

Assim:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \left[\left(\frac{dp_j}{dt} \right) \dot{q}_j + p_j \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right] = \sum_j \frac{d}{dt} \left(p_j \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_j p_j \dot{q}_j$$

Portanto: $\dfrac{d}{dt} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \right) = 0 \Rightarrow \dfrac{dH}{dt} = 0$

$\Rightarrow H$ é constante de movimento!