Turma:

Nota:

MA 327 Álgebra Linear

Primeiro Semestre de 2006

Primeira Prova

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
T o t a l	

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}([-1,1])$. Dê exemplo de um subconjunto S de $\mathcal{C}([-1,1])$ que é fechado com relação à operação de adição de elementos, mas que não é fechado com relação à operação de multiplicação por escalar. Justifique sua resposta.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Sejam $S = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ um conjunto linearmente independente em V e um elemento $u \in V$, não nulo. Mostre que o conjunto $\{ v_1, v_2, v_3, v_4, u \}$ é linearmente dependente se, e somente se, o elemento u pertence ao subespaço gerado pelos elementos do conjunto S, isto é, $u \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} U &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - 4y + 6z = 0 \} \\ W &= [(1,0,1), (1,1,3)] \end{aligned}$$

Determine um sistema de geradores para cada um dos subespaços $U + W$ e $U \cap W$. O subespaço $U + W$ é uma soma direta dos subespaços U e W? Justifique sua resposta.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Determine uma base para o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p(-1) + p'(-1) = 0 \quad \text{e} \quad p(1) = 0 \}.$$

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos elementos do conjunto $S = \{ (1,0,1,2), (2,-1,1,3), (-1,1,0,-1) \}$. Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo uma base do subespaço W.

Boa Prova !

G A B A R I T O

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o seguinte subconjunto S de $\mathcal{C}([-1,1])$

$$S = \{ f \in \mathcal{C}([-1,1]) \ / \ f(x) > f(y) \quad \text{para} \quad x > y \},$$

isto é, o conjunto das funções monótonas crescentes.

Considerando $f, g \in S$, isto é, $f(x) > f(y)$ e $g(x) > g(y)$ para $x > y$, temos que $f(x) + g(x) > f(y) + g(y)$. Assim, $f + g \in S$. Logo, S é fechado com relação à operação de adição.

Considerando $f \in S$, isto é, $f(x) > f(y)$ para $x > y$, e $\lambda \in I\!R$ negativo. Desse modo, temos que $\lambda f(x) < \lambda g(x)$ para $x > y$. Logo, temos que $(\lambda f) \notin S$. Portanto, S não é fechado com relação à operação de multiplicação por escalar.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

($\Longrightarrow$) Considerando que o conjunto $\{ v_1, v_2, v_3, v_4, u \}$ é linearmente dependente em V, temos que existem escalares $c_1, c_2, c_3, c_4, \alpha$, não todos nulos, tais que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + \alpha u = 0_V .$$

Agora temos duas possibilidades. Primeira, se o escalar $\alpha \neq 0$, obtemos

$$u = -\frac{c_1}{\alpha} v_1 - \frac{c_2}{\alpha} v_2 - \frac{c_3}{\alpha} v_3 - \frac{c_4}{\alpha} v_4 \qquad \Longrightarrow \qquad u \in [v_1, v_2, v_3, v_4] .$$

Segunda, se $\alpha = 0$, temos que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = 0_V .$$

Como o conjunto $\{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ é linearmente independente em V, isto implicaria que os escalares c_1, c_2, c_3, c_4 devem ser todos nulos. Entretanto, isso contraria a hipótese do conjunto $\{ v_1, v_2, v_3, v_4, u \}$ ser linearmente dependente em V. Logo, mostramos que $u \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$.

($\Longleftarrow$) Considerando que $u \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$, existem escalares c_1, c_2, c_3, c_4, não todos nulos, tais que

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 - u = 0_V .$$

Portanto, mostramos que o conjunto $\{ v_1, v_2, v_3, v_4, u \}$ é linearmente dependente em V.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Todo elemento $(x, y, z) \in U$ satisfaz a equação $2x - 4y + 6z = 0$. Desse modo, temos que $x = 2y - 3z$ para $y, z \in I\!R$. Portanto, todo elemento $(x, y, z) \in U$ é escrito da seguinte forma:

$$(x, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) \quad ; \quad y, z \in I\!R .$$

Assim, o conjunto $\{ (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço U.

Sabemos que o subespaço $U + W = \{ v \in I\!R^3 \ / \ v = u + w \ ; \ u \in U \text{ e } w \in W \}$. Assim, temos que

$$v = a(2, 1, 0) + b(-3, 0, 1) + c(1, 0, 1) + d(1, 1, 3) \quad ; \quad a, b, c, d \in I\!R .$$

Assim, o conjunto $\{ (2, 1, 0), (-3, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 3) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço $U + W$.

Vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$. Sabemos que, se $v \in U \cap W$, então $v \in U$ e $v \in W$. Assim, temos que

$$a(2, 1, 0) + b(-3, 0, 1) = c(1, 0, 1) + d(1, 1, 3) \quad \text{para} \quad a, b, c, d \in I\!R .$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2a - 3b = c + d \\ a = d \\ b = c + 3d \end{cases}$$

cuja solução é dada por $a = d$, $b = d$ e $c = -2d$ para $d \in I\!R$.

Portanto, se $v \in U \cap W$, então ele pode ser escrito como $v = d(-1, 1, 1)$ para $d \in I\!R$. Logo, $\{ (-1, 1, 1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$. Como o subespaço $U \cap W \neq \{ 0_{I\!R^3} \}$, o subespaço $U + W$ não é uma soma direta dos subespaços U e W.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Consideramos um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_3(I\!R)$ e vamos impor as condições para que esse elemento pertença ao subespaço S, isto é,

$$\begin{array}{rcccccccccc} p(-1) + p'(-1) & = & a & & & - & c & + & 2d & = & 0 \\ p(1) & = & a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \end{array} .$$

Escalonando o sistema linear homogêneo, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & - & b & - & 2c & + & d & = & 0 \end{array} \right. .$$

Assim, obtemos um sistema linear homogêneo com dois graus de liberdade. Desse modo, podemos concluir que o subespaço S tem dimensão dois. Logo, temos uma relação entre os coeficientes dos elementos $p(x) \in S$. Podemos verificar facilmente que

$$b = -2c + d \qquad \text{e} \qquad a = c - 2d$$

para $c, d \in I\!R$. Substituindo a e b no polinômio $p(x)$, obtemos que todo elemento do subespaço S é escrito como:

$$p(x) = c(1 - 2x + x^2) + d(-2 + x + x^3) \qquad ; \qquad c, d \in I\!R .$$

Portanto, mostramos que o subespaço S é gerado pelos elementos do conjunto

$$\Gamma = \{ 1 - 2x + x^2 , -2 + x + x^3 \} ,$$

que é linearmente independente em $\mathcal{P}_3(I\!R)$, pois tomando a combinação linear nula

$$a(1 - 2x + x^2) + b(-2 + x + x^3) = 0$$

obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a & - & 2b & = & 0 \\ -2a & + & b & = & 0 \\ a & & & = & 0 \\ & & b & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução é $a = b = 0$. Logo, o conjunto Γ é uma base para o subespaço S.

Note que os elementos da base Γ satisfazem as condições para que um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_3(I\!R)$ pertença ao subespaço S.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Inicialmente, vamos encontrar uma base para o subespaço W. Para isso, construímos uma matriz cujas linhas são os elementos do sistema de geradores do subespaço W e procedemos com o escalonamento

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos escolher

$$\Gamma = \{ (1,0,1,2), (2,-1,1,3) \} \quad \text{ou} \quad \Gamma' = \{ (1,0,1,2), (0,1,1,1) \}$$

para uma base do subespaço W.

Finalmente, vamos completar uma base de W para obter uma base de $I\!R^4$.

Desse modo, podemos escolher

$$\beta = \{ (1,0,1,2), (2,-1,1,3), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \} \quad \text{ou}$$

$$\beta' = \{ (1,0,1,2), (0,1,1,1), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \}$$

para uma base do espaço vetorial $I\!R^4$, pois construindo a matriz M de ordem 4 associada ao conjunto β'

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vemos que está forma escalonada e $posto(M) = 4$.