

26/06/2013

- 1) _____
-
- 2) _____
-
- 3) _____
-
- 4) _____

Nota: _____

Nome: GABARITO. RA: _____ Turma: _____

Esta prova contém 4 questões e 5 folhas.
Caso seja necessário, utilize $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Questão 01

Um projétil de 100 g está viajando para leste com módulo de velocidade igual a 5 m/s quando de repente explode em 3 pedaços. Um fragmento da explosão, com massa 30 g, vai para oeste a 6,8 m/s; outro fragmento, também de 30 g, viaja 30° a norte da velocidade inicial, com 16 m/s. Dados: $\sin(30^\circ) = 0,5$ e $\cos(30^\circ) = 0,8$.

- a) (1,0 ponto) Qual a velocidade (módulo, direção e sentido) do terceiro fragmento?
b) (1,0 ponto) Qual a velocidade (módulo, direção e sentido) do centro de massa imediatamente após a explosão? Justifique sua resposta.
c) (0,5 ponto) Calcule a energia liberada pela explosão.

$$a) \vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow \begin{cases} m \vec{v}_0 = -m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 \cos 30^\circ + m_3 \vec{v}_{3x} \\ 0 = m_1 v_2 \sin 30^\circ + m_3 v_{3y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{3x} = \frac{m v_0 + m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos 30^\circ}{m_3} = \frac{100g \cdot 5 + 30 \cdot 6,8 - 30 \cdot 16 \cdot 0,8}{40g} = 8 \text{ m/s} \\ v_{3y} = -\frac{m_1 v_2 \sin 30^\circ}{m_3} = -\frac{30 \cdot 16 \cdot 0,5}{40} = -6 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = (8 \text{ m/s})\hat{i} - (6 \text{ m/s})\hat{j} ; |\vec{v}_3| = 10 \text{ m/s} , \theta = \arctg\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$b) \vec{v}_{cm}^{\text{após}} = \vec{v}_{cm}^{\text{antes}} = \vec{v}_p = 5 \text{ m/s } \hat{i}$$

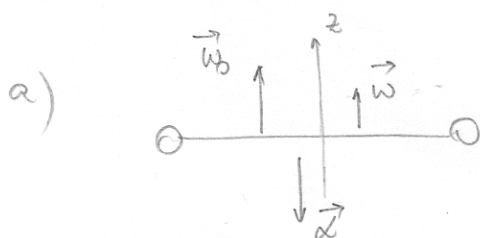
$$\text{Alternativamente, } \vec{v}_{cm}^{\text{após}} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3}{M} = \frac{1}{100} \left(30 \cdot (-6,8) + 30 \cdot 16 \cdot 0,8 + 40 \cdot 8 \right) \hat{i} = 5 \text{ m/s } \hat{i}$$

$$c) \Delta K = K_i - K_f = \frac{1}{2} m v^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 \right) \\ = \frac{1}{2} \left\{ 0,1 \cdot 25 - \left[0,03 \cdot (6,8)^2 + 0,03 \cdot (16)^2 + 0,04 \cdot 10^2 \right] \right\} = -5,35$$

Questão 02

Um halter é formado por uma barra de massa desprezível e comprimento $L = 2\text{ m}$ que sustenta nas suas extremidades duas esferas, cada uma de massa $M = 3\text{ kg}$ e raio desprezível. Ele está girando em torno do seu centro de massa. Em 3 revoluções, o halter diminui o módulo da sua velocidade angular de $4\pi\text{ rad/s}$ para $2\pi\text{ rad/s}$, com aceleração angular cujo módulo é constante.

- (0,5 ponto) Faça um desenho esboçando qualitativamente os vetores velocidade angular inicial, velocidade angular final e aceleração angular.
- (0,5 ponto) Calcule o módulo da aceleração angular do halter.
- (0,5 ponto) Calcule o intervalo de tempo Δt em que ocorre o decréscimo de velocidade descrito.
- (0,5 ponto) Calcule o momento de inércia do halter.
- (0,5 ponto) Qual deve ser o torque aplicado sobre o halter para provocar o decréscimo de velocidade descrito?



$$b) \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \Delta\theta \Rightarrow \alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\theta} = \frac{(4 - 16)\pi^2}{2 \cdot (3 \cdot 2\pi)} = -\pi \text{ rad/s}^2$$

$$c) \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{-2\pi}{-\pi} = 2\text{ s}$$

$$d) \quad I = \sum_i m_i \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2 \cdot m \cdot \frac{L^2}{4} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$e) \quad \vec{\tau} = I\vec{\alpha} = 6 \cdot (-\pi) \hat{z} \Rightarrow \vec{\tau} = -6\pi \hat{z}$$

Questão 03

Dois discos montados em rolamentos do mesmo eixo podem ser acoplados e girar como se fossem um só. O primeiro disco, com um momento de inércia de $3,0 \text{ kg.m}^2$ em relação ao eixo, é posto para girar no sentido anti-horário a 50 rad/s . O segundo disco, com um momento de inércia de $6,0 \text{ kg.m}^2$ em relação ao eixo, é posto para girar no sentido anti-horário a 100 rad/s . Em seguida, os discos são acoplados.

- a) (1,0 ponto) Qual é a velocidade angular dos discos após o acoplamento?
b) (0,5 ponto) Qual é a razão entre as energias cinéticas depois e antes do acoplamento, K_f/K_i ?
c) (1,0 ponto) Se o segundo disco fosse posto para girar a 100 rad/s no sentido horário, qual seria a velocidade angular do conjunto após o acoplamento? Qual seria o sentido de rotação dos discos?

$$a) \quad L_i = L_f \Rightarrow I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 = (I_1 + I_2) \omega_f \quad (+0,5)$$

$$\omega_f = \frac{I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2}{I_1 + I_2} = \frac{3 \cdot 50 + 6 \cdot 100}{9} = \frac{150 + 600}{9} = 83,3 \text{ rad/s} \quad (+0,5)$$

$$b) \quad K_f = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (\omega_f^2) = 31.225 \text{ J} \quad (+0,3)$$

$$K_i = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2) = \frac{1}{2} (3 \cdot 50^2 + 6 \cdot 100^2) = 33750 \text{ J} \quad (+0,2)$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{31225}{33750} \approx 0,925 \approx 0,93$$

$$c) \quad \omega_f' = \frac{I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2'}{I_1 + I_2} = \frac{150 - 600}{9} = -50 \text{ rad/s} \quad (+0,3)$$

↑
sentido horário (+0,3)

Questão 4

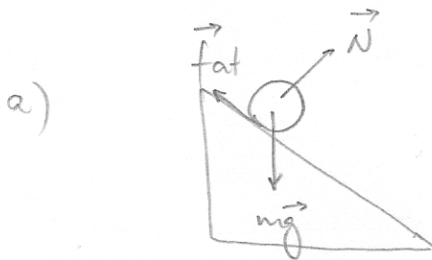
Uma pedra esférica, uniforme e maciça parte do repouso e rola para baixo de uma colina de 50 m de altura. A metade superior da colina é áspera o suficiente para fazer a pedra rolar sem deslizar, mas a metade inferior está coberta de gelo e não há atrito. Dado: momento de inércia de uma esfera girando

ao redor do eixo que passa pelo seu centro de massa: $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$.

a) (0,5 ponto) Desenhe as forças que agem sobre a pedra quando ela desce a parte superior da colina, justificando o sentido da força de atrito.

b) (1,0 ponto) Qual é o módulo da velocidade de translação da pedra quando ela atinge a base da colina?

c) (1,0 ponto) Qual é o módulo da velocidade angular da pedra na base da colina?



A força de atrito deve apontar como na figura ao lado pois a tendência de deslizar do ponto de contato é para baixo do plano.

b)

$$mg \frac{H}{2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2; \quad \omega = \frac{v}{r}$$

$$\frac{1}{2} \frac{v^2}{r^2} + \frac{mv^2}{2} = mg \frac{H}{2} \Rightarrow \frac{7}{10}mv^2 = mg \frac{H}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{5gH}{7}}$$

Para o segundo trecho, $\Delta K_{transl} = -\Delta U_g$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mg \frac{H}{2} \Rightarrow v_f^2 = gH + \frac{5gH}{7} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{12gH}{7}}$$

c) Como a energia cinética de rotação não varia,

$$\omega_f = \omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{5}{7} \frac{gH}{r^2}}$$