

## ME-323 — Prova substitutiva

1. Numa urna há 4 bolinhas brancas, 3 verdes e 5 azuis. Escolhemos 4 bolinhas sem reposição. Qual é a probabilidade de que foram escolhidas 2 bolinhas de uma cor e 2 bolinhas de outra cor? Qual é a probabilidade de que todas as bolinhas escolhidas são da mesma cor?
2. Escolhemos ao acaso e sem reposição 3 números inteiros entre 1 e 142857. Calcule a probabilidade de terceiro número estar entre primeiro e segundo, dado que o primeiro é menor do que o segundo. (Dica: não é preciso fazer muita conta; use a simetria!)
3. Calcule a densidade de v.a.  $Y = e^{-3X}$ , onde  $X \sim \text{Exp}(2)$ .
4. Calcule a probabilidade que as duas raízes da equação  $x^2 - 2Yx + 9 = 0$  sejam reais, onde  $Y \sim U[0, 5]$ .
5. Considere uma bola verde e uma bola amarela distribuídas em duas urnas. Em cada passo, uma bola é selecionada ao acaso; depois, caso essa bola for verde, ela muda de urna com probabilidade  $1/4$  (e fica no lugar com probabilidade  $3/4$ ), e caso a bola for amarela, ela vai para a urna que contem a bola verde com probabilidade  $2/3$ , e vai para a outra urna com probabilidade  $1/3$ . Mostre que este processo é uma cadeia de Markov e escreva a sua matriz de transição. Calcule a probabilidade aproximada que depois de 142857 passos cada urna contém exatamente uma bola.

1)

4B  
3V  
5A

$$P[2 \text{ de cada}] = P[2B 2V] + P[2B 2A] + P[2V 2A] = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} + \binom{3}{2}\binom{5}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{6 \cdot 3 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 10}{11 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{108}{11 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{12}{55}$$

$$P[\text{mesma cor}] = \frac{1 + \binom{5}{4}}{11 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{6}{11 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{2}{165}$$

$$2) P[X_3 \in (X_1, X_2) | X_1 < X_2] = \frac{P[X_1 < X_3 < X_2]}{P[X_1 < X_2]} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

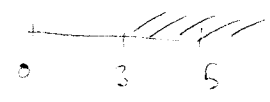
$y \in (0, 1)$

$$3) P[Y \leq y] = P[e^{-3X} \leq y] = P[X \geq -\frac{1}{3} \ln y] = e^{+2 \cdot \frac{1}{3} \ln y} = y^{2/3}$$

$X \in [0, +\infty) \Rightarrow Y \in (0, 1)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{2}{3} y^{-1/3} \mathbb{1}_{\{y \in (0, 1)\}}$$

$$4) x^2 - 2\sqrt{x} + 3 = 0 \quad \left( \frac{y}{9} = y^2 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq -3 \text{ ou } y \geq 3 \right) \Rightarrow P[\text{rears}] = \frac{2}{5}$$



$$5) \begin{matrix} 1 - \text{mesma cor} \\ 2 - \text{cores diferentes} \end{matrix} \quad P_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{17}{24}$$

$$P_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{24}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & \frac{7}{24} \\ \frac{11}{24} & \frac{13}{24} \end{pmatrix}$$

$$\pi P = \pi$$

$$\pi_1 = \frac{17}{24} \pi_1 + \frac{11}{24} \pi_2$$

$$7 \pi_1 = 11 \pi_2$$

$$\pi_1 + \frac{7}{11} \pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{11}{18}$$

$$\pi_2 = \frac{7}{18}$$

$$\Rightarrow \text{prob} \approx \frac{7}{18}$$