GABARITO

1. (2.0 pontos) Resolva o seguinte P.V.I:

$$x^2y' + xy = x\cos x, \quad x > 0 \;\text{ e }\; y(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Solução.

Dividindo por x^2 obtemos a equação:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos(x)}{x} \ .$$

Sua solução geral é portanto dada pela fórmula:

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int (dx/x)}}\left(\int e^{\int (dx/x)}\frac{\cos(x)}{x}dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(\int \cos(x)dx + C\right) =$$

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(\text{sen }(x) + C\right) \ .$$

(Encontrar a solução geral acima vale 1,0 ponto)

Usando a condição inicial dada para determinar a constante C:

$$y(\pi/2) = \frac{2}{\pi}\left(1 + C\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -1 \ .$$

Portanto a solução do PVI é a função

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(\text{sen }(x) - 1\right) \ .$$

(Encontrar o valor correto para a constante de integração vale 1,0 ponto)

2. (2.0 pontos) Encontrar a solução, na forma implícita, da seguinte e.d.o usando a substituição $v = x + y + 1$:

$$y' = \frac{-x - y + (x + y + 1)^2}{(x + y + 1)}$$

Solução.

Derivando $v = x + y + 1$ obtemos

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

(Esta igualdade vale 0,3 ponto)

e substituindo na equação obtemos uma equação separável:

$$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{(1 - v) + v^2}{v} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{v} \ .$$

(Fazer a substituição corretamente vale mais 0,5 ponto)

Em seguida, inegramos a equação, obtendo

$$\int \frac{v}{1 + v^2} dv = \int x dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \log(v^2 + 1) = x + C \ ,$$

(Encontrar a solução da equação auxiliar vale mais 0,7 ponto)

onde a inegral do lado esquerdo é feita usando-se a substituição $w = v^2 + 1$, $dw = 2vdv$. Exponenciamos a última expressão para obter $v^2 + 1 = Ke^{2x}$, onde K é uma constante. Retornando para as variáveis originais, a solução na forma implícita fica dada por:

$$(x + y + 1)^2 + 1 = Ke^{2x}$$

(Encontrar a solução da equação original vale mais 0,5 ponto)

3. (2.0 pontos) Dada a e.d.o:

$$y^{(5)} + y^{(2)} = e^{-x} + 5$$

   (a) Resolva a equação homogênea associada sabendo que $r^3 + 1 = (r+1)(r^2 - r + 1)$.
   (b) Usando o método de coeficientes indeterminados apresente e justifique a forma da solução particular. Não calcule os coeficientes!

Solução.

A equação homogênea associada é

$$y^{(5)} + y^{(2)} = 0 \ .$$

Para encontrar a solução geral, precisamos das raízes do polinômio característico; usando a dica, obtemos:

$$r^5 + r^2 = 0 \implies r^2(r+1)(r^2 - r + 1) = 0 \ .$$

As raízes de $r^2 - r + 1 = 0$ são complexas: $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$. Desta forma, a solução geral da equação homogênea é

$$c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 e^{-x/2} \cos(\sqrt{3}x/2) + c_5 e^{-x/2} \text{sen } (\sqrt{3}x/2) \ .$$

(Cada termo correto da solução geral vale 0,2 ponto)

Pelo método dos coeficientes indeterminados, a solução particular da equação não homogênea $y^{(5)} + y^{(2)} = 5$ será da forma $Y(x) = Ax^s$; neste caso temos que $s = 2$, posto que x^0 e x^1 já são soluções da equação homogênea.

Pelo método dos coeficientes indeterminados, a solução particular da equação não homogênea $y^{(5)} + y^{(2)} = e^{-x}$ será da forma $Y(x) = Bx^s e^{-x}$; neste caso temos que $s = 1$, posto que e^{-x} já é soluções da equação homogênea.

Portanto a solução particular da equação não homogênea terá a seguinte forma:

$$Ax^2 + Bxe^{-x} \ .$$

(Cada termo correto da solução particular vale 0,5 ponto)

4. (2.0 pontos) Encontre a solução do seguinte P.V.I. (dica:$\int \sec^2 x \; dx = \tan x$)

$$(e^x \text{sen } y + \tan y) \; + (e^x \cos y + x \sec^2 y) \, \frac{dy}{dx} = 0, \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Solução.

Primeiramente, verificamos que a equação dada é exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos(y) + \sec^2(y) \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos(y) + \sec^2(y) \; .$$

(Verificar que a equação é exata vale 0,5 ponto)

Portanto, a solução geral da equação será da forma $\Psi(x, y) = C$, onde C é uma constante e $\Psi(x, y)$ é uma função tal que $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = e^x \text{sen } y + \tan y$ e $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = e^x \cos y + x \sec^2 y$.

Realizando as integrações parciais, obtemos:

$$\Psi(x, y) = e^x \text{sen } y + x \tan y = C \; .$$

(Encontrar corretamente a função $\Psi(x, y)$ vale mais 1,0 ponto)

Agora aplicando condições iniciais:

$$e^0 \text{sen } (\frac{\pi}{4}) + 0 \tan(\frac{\pi}{4}) = c \quad \Rightarrow \quad C = \text{sen } (\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}/2$$

portanto a solução do P.V.I. é

$$e^x \text{sen } y + x \tan y = \sqrt{2}/2 \; .$$

(Encontrar o valor correto para a constante de integração C vale mais 0,5 ponto)

5. (2.0 pontos) Considerar a e.d.o.

$$\frac{x^2}{x+2}y'' - xy' + y = x^3$$

(a) Encontrar a solução geral da equação homogênea associada sabendo que $y = x$ é uma solução da equação homogênea.

(b) Usando variação de parâmetros determine a solução particular da equação não homogênea.

Solução.

Primeiramente, dividimos a equação pelo inverso do coeficiente da segunda derivada, obtendo:

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = x(x+2)\ .$$

Pelo Teorema de Abel, sabemos que existe uma segunda solução $y_2(x)$ tal que:

$$W(y_1(x), y_2(x)) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{\int (x+2)/x\ dx} = x^2 e^x\ .$$

Obtemos portanto a seguinte equação de primeira ordem para $y_2(x)$

$$xy_2' - y_2 = x^2 e^x\ .$$

(Encontrar a equação de primeira ordem correta vale 0,6 ponto)

Uma solução desta equação é dada pela função $y_2(x) = xe^x$. Segue que a solução geral da equação homogênea é dada por

$$c_1 x + c_2 x e^x \quad .$$

(Encontrar a solução geral da equação homogênea vale 1,0 ponto)

Para encontrar uma solução particular da equação não homogênea, aplicamos a fórmula de variação de parâmetros:

$$Y(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}dx\ .$$

(Escrever a fórmula da solução particular correta vale 0,3 ponto)

Note que $g(x) = x(x+2)$ e que $W(y_1(x), y_2(x)) = x^2e^x$.

(Usar o $g(x)$ certo vale 0,1 ponto; calcular o Wronskiano corretamente vale 0,1 ponto.)

Substituindo na expressão acima, obtemos:

$$Y(x) = -x\int \frac{x^2e^x(x+2)}{x^2e^x}dx + xe^x\int \frac{x^2(x+2)}{x^2e^x}dx =$$

$$= -x\int (x+2)dx + xe^x\int (x+2)e^{-x}dx = -\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 3x - x^2$$

Note que o penúltimo termo também é solução da equação homogênea, portanto a solução geral da equação não homogênea fica dada por:

$$c_1x + c_2xe^x - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2\ .$$

(Encontrar a solução particular da equação não-homogênea vale mais 0,4 ponto)