Gabarito Prova 2 de MA311 - Cálculo III - Turma Z - Professora: Gabriela Planas 11/10/2012

1.ª Questão.(2,5 pontos) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = \delta(t-\pi), \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Resolução: Aplicamos a transformada de Laplace à equação

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 13\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}.$$

Utilizando as condições iniciais temos

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)) + 13\mathcal{L}\{y\} = (s^2+4s+13)\mathcal{L}\{y\} - s - 4 = e^{-\pi s}. \qquad (0,5)$$

Daí, como $s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 9 = (s+2)^2 + 3^2$,

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s+4}{(s+2)^2+3^2} + \frac{e^{-\pi s}}{(s+2)^2+3^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{2}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{3}e^{-\pi s}F(s)$$

$$= G(s)\frac{2}{3}F(s) + \frac{1}{3}e^{-\pi s}F(s), \qquad (0,5)$$

onde $G(s) = \dfrac{s+2}{(s+2)^2+3^2} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(3t)\}$ e $F(s) = \dfrac{3}{(s+2)^2+3^2} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\text{sen}(3t)\}$. (1,0)

Usando a fórmula $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u_c(t)f(t-c)$, segue que

$$y = e^{-2t}\cos(3t) + \frac{2}{3}e^{-2t}\text{sen}(3t) + \frac{1}{3}u_\pi(t)e^{-2(t-\pi)}\text{sen}(3(t-\pi)). \qquad (0,5)$$

2.ª Questão.(2,5 pontos) (1,0) (a) Calcule a transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ de

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2-3s+2}.$$

Resolução: (a) Fatoramos $s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2)$ e usamos frações parciais:

$$\frac{s+2}{(s-1)(s-2)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s-2}.$$

Assim, $a(s-2) + b(s-1) = s+2$. Para $s = 1 \Rightarrow -a = 3 \Rightarrow\ a = -3$, e para $s = 2 \Rightarrow b = 4$. Logo,

$$\frac{s+2}{(s-1)(s-2)} = -\frac{3}{s-1} + \frac{4}{s-2} \qquad (0,4).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+2}{s^2-3s+2}\} = -3e^t + 4e^{2t}. \qquad (0,6)$$

(1,5)(b) Utilizando a função degrau $u(t-a) = u_a(t)$ calcule a transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2. \end{cases}$$

Resolução: Escrevemos utilizando a função degrau:

$$f(t) = (1-u_2(t))t^2 = t^2 - u_2(t)t^2. \ (0,5)$$

Para usar a fórmula $\mathcal{L}\{u_c(t)g(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t)\}$, devemos encontrar a função g tal que $g(t-2) = t^2$. Fazendo $u = t-2,\ t = u+2$ logo

$$g(u) = (u+2)^2 = u^2 + 4u + 4. \quad (0,5)$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t^2\} - e^{-2s}\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{2}{s^3} + e^{-2s}(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}). \qquad (0,5)$$

3.ª Questão.(1,5 pontos) Encontre a solução geral real do seguinte sistema linear homogêneo utilizando o método de autovalores e autovetores

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Resolução: (a) Autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$:

$$det(A - rI) = \begin{vmatrix} 3-r & 2 \\ -2 & -1-r \end{vmatrix} = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0.$$

Logo, $r = 1$ é um autovalor de multiplicidade dois. (0,2)

Autovetores associados ao autovalor $r = 1$: temos que resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

Assim, tomando $x = 1$ obtemos apenas um autovetor $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e uma solução $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$. (0,5)

Para encontrar uma outra solução linearmente independente resolvemos o sistema $(A - rI)\eta = \xi$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + 2y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - y.$$

Logo, $\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, onde y é uma constante qualquer. Tomando $y = 0$, $\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Portanto, uma segunda solução é dada por:

$$\mathbf{x}^2 = \xi te^t + \eta e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}e^t. \qquad (0,6)$$

A solução geral do sistema é:

$$\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}e^t\right]. \qquad (0,2)$$

4.ª Questão.(1,5 pontos) Encontre a solução geral do sistema linear não-homogêneo utilizando o método de variação dos parâmetros (indicando claramente a matriz fundamental)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

dado que a solução do sistema homogêneo associado é

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Resolução: A matriz fundamental é:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \qquad (0,2)$$

Uma solução particular será $\mathbf{x}_p = \Psi(t)\mathbf{u}$ onde $\mathbf{u}$ satisfaz o sistema

$$\Psi(t)\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \mathbf{u}' = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}. \qquad (0,3)$$

Calculemos o determinante de $\Psi(t)$:

$$\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{vmatrix} = 2.$$

Temos

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & 3e^{-t} \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \ \Rightarrow \ u_1 = 2t. \qquad (0,3)$$

Agora,

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^t \\ e^t & -e^t \end{vmatrix}}{2} = -2\frac{e^{2t}}{2} = -e^{2t} \ \Rightarrow \ u_2 = -\frac{e^{2t}}{2}. \qquad (0,3)$$

Uma solução particular é $\mathbf{x}_p = \Psi(t)\mathbf{u}$ e a solução geral é

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ -\frac{e^{2t}}{2} \end{pmatrix}. \qquad (0,4).$$

5.ª Questão.(2 pontos) (1,0) (a) Determine se as seqüencias abaixo convergem ou divergem. Se convergem, determine o limite.

$$i)\ a_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \qquad\qquad ii)\ b_n = \frac{3+n^4}{n+n^2+3n^4}$$

(1,0)(b) Calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} + 7(2^{n+1})}{6^n}$$

Resolução: (a) i) Como $|\cos(n)| \leq 1$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ temos que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \cos n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

ii)

$$b_n = \frac{3+n^4}{n+n^2+3n^4} = \frac{n^4(\frac{3}{n^4}+1)}{n^4(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}+3)} = \frac{\frac{3}{n^4}+1}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}+3}.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n^4}+1}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}+3} = \frac{1}{3}.$$

(b) Re-escrevendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+7(2^{n+1})}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3(6^n)} + \frac{14(2^n)}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 14\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + 14\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} + 14\frac{1}{2},$$

onde usamos a série geométrica já que $\frac{1}{2} < 1$ e $\frac{1}{3} < 1$.