Pedro H S Nordell: 017086

EA044V Planejamento e Análise de Sistemas de Produção
P2 - 2º semestre de 2004

11 de dezembro de 2004

1 Dualidade e sensibilidade

Considere a seguinte versão simplificada do problema da dieta. Há quatro tipos de comida disponíveis: bolo de chocolate, sorvete, soda limonada e torta de abacaxi. Cada porção do bolo de chocolate custa R$1,50, cada bola de sorvete custa R$0,60, cada garrafa de soda limonada custa R$0,90 e cada pedaço de torta de abacaxi custa R$2,40. Os requisitos diários de uma dieta são 500 calorias, 180g de chocolate, 300g de açúcar e 240g de gordura. O conteúdo nutricional dos alimentos é dado pela tabela 1.

	calorias	chocolate	açúcar	gordura
bolo	400	90	60	60
sorvete	200	60	60	120
soda	150	0	120	30
torta	500	0	120	150

Tabela 1: Conteúdo nutricional dos alimentos.

Sejam as variáveis de decisão:

$x_1 \triangleq$ pedaços de bolo de chocolate
$x_2 \triangleq$ bolas de sorvete de chocolate
$x_3 \triangleq$ garrafas de soda limonada
$x_4 \triangleq$ pedaços de torta de abacaxi

$$
\begin{array}{lrl}
Min & 150x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 240x_4 & \quad (1)\\
\text{s.a} & 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 & \geq 500 \ \sqrt{1}\\
 & 90x_1 + 60x_2 & \geq 180 \ \sqrt{2}\\
 & 60x_1 + 60x_2 + 120x_3 + 120x_4 & \geq 300 \ \sqrt{3}\\
 & 60x_1 + 120x_2 + 30x_3 + 150x_4 & \geq 240 \ \sqrt{4}\\
 & x_j \geq 0;\ j = 1, \ldots, 4 &
\end{array}
$$

Observe que o modelo dado por (1) pode ser utilizado para satisfazer as exigências nutricionais a um custo mínimo.

variable	value	reduced cost
x_1	0.0	82.5
x_2	3.0	0.0
x_3	1.0	0.0
x_4	0.0	150.0

row	slack or surplus	dual prices
calorias)	250.0	0.00
chocolate)	0.0	-0.25
açúcar)	0.0	-0.75
gordura)	150.0	0.00

ranges in which the basis is unchanged:

obj coefficient ranges

variable	current coef	allowable increase	allowable decrease
x_1	150.0	180 ∞	82.5
x_2	60.0	55.0	15.0
x_3	90.0	30.0	90.0
x_4	240.0	150 ∞	150.0

Tabela 2: Saída do Lindo para o problema da dieta.

a. (1,5) Formule o dual deste modelo.

b. (0,5) Interpetre o significado das variáveis duais e da função objetivo dual.

c. (0,5) Verifique que o valor ótimo da função objetivo é o mesmo no modelo primal e no dual a partir da saída do *solver* Lindo[1] que se encontra na tabela 2.

[1] Lembre-se que o Lindo mostra as variáveis duais (*dual prices*) com sinal trocado.

d. (0,5) Escreva as condições de folga complementares primais e duais e verifique que as soluções ótimas primal e dual satisfazem estas condições.

e. (1,0) A partir da tabela 2, considere qual seria a mudança na solução do problema se o preço do bolo de chocolate aumentasse para R$1,80 e o preço da torta de abacaxi caísse para R$1,50.

2 Otimização discreta

Considere o seguinte ILP:

$$
\begin{array}{llr}
Min & 1.5x_1 + 3.5x_2 + 2.5x_3 + 3x_4 & \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + x_4 & \geq 3 \\
 & 2x_1 + 2x_3 + x_4 & \geq 4 \\
 & 2x_2 + x_3 + 2x_4 & \geq 3 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & \leq 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}, x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

As soluções relaxadas de todas as possíveis combinações de variáveis livres e fixas do problema encontram-se na tabela 3.

a. (0,5) Formule o problema de PL correspondente à entrada (#,#,#) da tabela.

b. (0,5) O valor 6.3125 correspondente à entrada (#,#,#) é um limitante (*bound*) para o problema original. Limitante inferior ou superior? O que isto significa?

c. (2,0) Utilize o algoritmo *branch-bound* para encontrar o ótimo do problema a partir da tabela 3. Apresentar a árvore correspondente assinalando em cada nó terminal o tipo de finalização (limite, solução, infactível). Assinale para todos os nós o $\tilde{x}$ e $\tilde{v}$ correspondentes bem como a entrada da tabela que corresponde ao nó. Nos ramos assinale a variável que foi restrita em 0 ou 1. Utilize a busca por profundidade adotando os seguintes critérios: ramifique (*branch*) a variável cuja relaxação racional mais se aproxima do inteiro; escolha o nó (fixando a variável em 0 ou 1) que mais se aproxima da relaxação correspondente quando os nós têm a mesma profundidade.

x_1	x_2	x_3	$\tilde{x}$	$\tilde{v}$
#	#	#	(0.875, 0, 0.5, 1.25)	6.3125
#	#	0	(1, 0, 0, 2)	7.5
#	#	1	(0.667, 0.333, 1, 0.667)	6.667
#	0	#	(0.875, 0, 0.5, 1.25)	6.3125
#	0	0	(1, 0, 0, 2)	7.5
#	0	1	(1, 0, 1, 1)	7.0
#	1	#	(1, 1, 0, 2)	11.0
#	1	0	(1, 1, 0, 2)	11.0
#	1	1	(0, 1, 1, 2)	12.0
~~0~~	~~#~~	~~#~~	~~(0, 0.333, 1, 2)~~	9.667
0	#	0	(0, 0, 0, 4)	12.0
0	#	1	(0, 0.333, 1, 2)	9.667
0	0	#	(0, 0, 0.5, 3)	10.25
0	0	0	(0, 0, 0, 4)	12.0
0	0	1	(0, 0, 1, 3)	11.5
0	1	#	(0, 1, 1, 2)	12
0	1	0	(0, 1, 0, 4)	15.5
0	1	1	(0, 1, 1, 2)	12.0
1	#	#	(1, 0, 0.333, 1.333)	6.333
1	#	0	(1, 0, 0, 2)	7.5
1	#	1	(1, 0, 1, 1)	7.0
1	0	#	(1, 0, 0.333, 1.333)	6.333
1	0	0	(1, 0, 0, 2)	7.5
1	0	1	(1, 0, 1, 1)	7.0
1	1	#	(1, 1, 0, 2)	11.0
1	1	0	(1, 1, 0, 2)	11.0
1	1	1	infactível	−

Tabela 3: Soluções do PL relaxado.

3 Programação não linear

Considere a função de Rosenbrock dada por

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \mid x_1, x_2 \in \Re$$

a. (1,0) Mostre que o ponto $\bar{x} = (1,1)$ é um ponto estacionário da função.

b. (1,0) Calcule a Hessiana da função no ponto $\bar{x} = (1,1)$ e se possível conclua a respeito do sinal da matriz, ou seja, se a Hessiana $H(\bar{x})$ é (semi-)definida positiva ou negativa.

c. (1,0) A partir do sinal da Hessiana conclua se o ponto $\bar{x} = (1,1)$ é ponto de mínimo ou de máximo.

$100(x_2^2 - 2x_2x_1^2 + x_1^4) + (1 - 2x_1 + x_1^2$