1ª Prova

MA-311 — Cálculo III

1º Semestre de 2009

Nome: GABARITO

RA:

Assinatura: VESPERTINO

Prof.:

Esta prova tem um total de 5 questões valendo 10 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA!

1	2.0	
2	2.0	
3	2.0	
4	2.0	
5	2.0	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*2.0 pontos*) Encontre a solução da seguinte e.d.o:

$$x^2y' - 2xy = 5y^4, \quad x > 0.$$

2. (*2.0 pontos*) Dada a equação

$$(3y + a\cos y)\,dx + (bx - \operatorname{sen}\, y)\,dy = 0$$

- Encontre os valores de a e b para os quais a equação acima seja exata.
- Resolva a equação substituindo os valores a e b obtidos.

3. (*2.0 pontos*) Considere a e.d.o.

$$y^{(5)} - 6y^{(4)} + 13y^{(3)} - 14y^{(2)} + 12y^{(1)} - 8y = \cos x + 3xe^{2x}$$

- Dado que a equação característica é: $(r^2+1)(r-2)^3 = 0$ encontre a solução homogênea.
- Usando o método de coeficientes indeterminados encontrar a forma da solução particular SEM calcular os coeficientes.

4. (*2.0 pontos*) Resolva a equação não homogênea abaixo via variação de parâmetros, $x > 0$.

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^4$$

5. (*2.0 pontos*) Resolva:

$$y'' + (y')^2 = 0$$

Assuma $y > 0$ e $y' > 0$.

1) $$x^2 y' - 2xy = 5y^4, \quad x > 0.$$

$$(\mathrm{I}) \quad y' - \frac{2}{x} y = \frac{5}{x^2} y^4 \quad (\text{BERNOULLI}) \quad m=4, \; v = y^{1-m} = y^{-3}$$

$$\frac{dv}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3} y^4 \frac{dv}{dx}$$

0,4

$$y = y^4 v$$

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow -\frac{1}{3} y^4 \frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} y^4 v = \frac{5}{x^2} y^4$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} v = \frac{5}{x^2}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{II}) \quad \frac{dv}{dx} + \underbrace{\frac{6}{x}}_{p(x)} v = \underbrace{-\frac{15}{x^2}}_{g(x)} \quad (\text{LINEAR})$$

0,6

$$-\int p(x)\,dx = -6\int \frac{dx}{x} = -6\ln x = \ln x^{-6}$$

$$u(x) = \exp\left(-\int p(x)\,dx\right) = \exp\left(\ln x^{-6}\right) = x^{-6}$$

0,3

$$\int \frac{g(x)}{u(x)}\,dx = \int -\frac{15}{x^2} x^6\,dx = -15\int x^4\,dx = -15\frac{x^5}{5} = -3x^5$$

$$v(x) = u(x)\left(\int \frac{g(x)}{u(x)}\,dx + C\right) = x^{-6}\left(-3x^5 + C\right) = -3x^{-1} + Cx^{-6}$$

0,5

RESPOSTA: $\quad y^{-3} = -3x^{-1} + Cx^{-6}$

0,2

2a) $$\underbrace{(3y + a\cos y)}_{M}\,dx + \underbrace{(bx - \operatorname{sen} y)}_{N}\,dy = 0$$

$$M_y = 3 - a\operatorname{sen} y \quad , \quad N_x = b$$

$$M_y = N_x \Longleftrightarrow 3 - a\operatorname{sen} y = b \Longleftrightarrow \boxed{b = 3 \text{ e } a = 0}$$

1,0

2b) $$3y\,dx + (3x - \operatorname{sen} y)\,dy = 0$$

$\psi(x,y)$ = função potencial da equação acima

$$\psi_x = 3y \quad \text{e} \quad \psi_y = 3x - \operatorname{sen} y$$

$$\psi = \int 3y\,dx = 3xy + h(y)$$

0,3

$$\begin{cases} \psi_y = 3x + h'(y) \\ \psi_y = 3x - \operatorname{sen} y \end{cases} \Longrightarrow h'(y) = -\operatorname{sen} y$$

0,3

$$h(y) = -\int \operatorname{sen} y\,dy = \cos y$$

$$\psi(x,y) = 3xy + \cos y$$

RESPOSTA : $\boxed{3xy + \cos y = C}$

0,4

3a) (I) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 13y^{(3)} - 14y^{(2)} + 12y^{(1)} - 8y = 0$

$Q(r) = (r^2+1)(r-2)^3$ polinômio característico

$Q(r) = 0 \Rightarrow r^2 = -1$ ou $r = 2 \Rightarrow r = \pm i$ ou $r = 2$

0,2

Solução da equação homogênea

$$\boxed{y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 e^{2x} + C_4 x e^{2x} + C_5 x^2 e^{2x}}$$

0,5

3b) (II) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 13y^{(3)} - 14y^{(2)} + 12y^{(1)} - 8y = \underbrace{\cos x}_{g_1(x)} + \underbrace{3xe^{2x}}_{g_2(x)}$

$g_1(x) = \cos x$

$y_{p_1}(x) = x^s (C_0 \cos x + C_1 \operatorname{sen} x)$

$s = 1 \Rightarrow \boxed{y_{p_1}(x) = C_0 x \cos x + C_1 x \operatorname{sen} x}$

0,5

$g_2(x) = 3x e^{2x}$

$y_{p_2}(x) = x^s (A_0 x + A_1) e^{2x}$

$s = 3 \Rightarrow \boxed{y_{p_2}(x) = (A_0 x^4 + A_1 x^3) e^{2x}}$

0,5

$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$

$$\boxed{y_p(x) = C_0 x \cos x + C_1 x \operatorname{sen} x + A_0 x^4 e^{2x} + A_1 x^3 e^{2x}}$$

0,3

4) (I) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^4$ (EULER)

$$\Downarrow \quad t = \ln x \quad , \quad x = e^t$$

(II) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = e^{4t}$

0,3

$Q(r) = r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$ polinômio característico de (II)

$Q(r) = 0 \Rightarrow r = 2$

$y_H(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$ (solução da E.D.O. homogênea de (II))

0,3

$y_p(t) = u_1(t) e^{2t} + u_2(t) t e^{2t}$

$$\begin{cases} u_1' e^{2t} + u_2' t e^{2t} = 0 \\ u_1' 2e^{2t} + u_2'(e^{2t} + 2te^{2t}) = e^{4t} \end{cases}$$

0,5

$$W(e^{2t}, te^{2t}) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t}$$

$$u_1' = e^{-4t} \begin{vmatrix} 0 & te^{2t} \\ e^{4t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = -e^{-4t} t e^{6t} = -t e^{2t}$$

$$u_1 = -\int \underbrace{t}_{z} \underbrace{e^{2t}\,dt}_{dw} = -zw + \int w\,dz = -\frac{1}{2} t e^{2t} + \frac{1}{2}\int e^{2t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2} t e^{2t} + \frac{1}{4} e^{2t}$$

$$\begin{cases} z = t \\ dz = dt \end{cases} \qquad \begin{cases} dw = e^{2t}\,dt \\ w = \frac{1}{2} e^{2t} \end{cases}$$

$$u_2' = e^{-4t} \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 2e^{2t} & e^{4t} \end{vmatrix} = e^{2t} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$\begin{cases} t = \ln x \\ e^{2t} = x^2 \\ e^{4t} = x^4 \end{cases}$$

0,5

$$y_p(t) = \left(-\frac{1}{2} t e^{2t} + \frac{1}{4} e^{2t}\right) e^{2t} + \frac{1}{2} e^{2t} t e^{2t} = \frac{1}{4} e^{4t}$$

$y(t) = y_H(t) + y_p(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + \frac{1}{4} e^{4t}$ (solução de (II))

$y(x) = C_1 x^2 + C_2 (\ln x) x^2 + \frac{1}{4} x^4$ (solução de (I))

0,4

5) (I) $y'' + (y')^2 = 0$

$$v = y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dv}{dx} = v'$$

(II) $v' + v^2 = 0$ (equação separável)

$$\iff \frac{dv}{dx} + v^2 = 0 \iff \underbrace{\frac{1}{v^2}}_{N(v)} dv + \underbrace{1}_{M(x)} dx = 0$$

0,7

$$H_1(x) = \int M(x)\,dx = \int dx = x$$

$$H_2(v) = \int N(v)\,dv = \int v^{-2}\,dv = -\frac{1}{v}$$

$$-\frac{1}{v} + x = C_1 \quad \text{(solução de (II))}$$

$$\implies \frac{1}{v} = x - C_1 \implies v = \frac{1}{x - C_1}$$

0,7

$$y' = v = \frac{1}{x - C_1}$$

$$y = \int \frac{dx}{x - C_1} = \ln|x - C_1| + C_2$$

RESPOSTA: $\boxed{y = \ln|x - C_1| + C_2}$

0,6