MC348-Fundamentos Matemáticos da Computação
Prof. Ricardo Dahab - Turma B

Segunda Prova - 14/4/2009

1. (*2,5*) Quais dos seguintes conjuntos são contáveis (enumeráveis)? Justifique sua resposta.
   (a) números inteiros múltiplos de 3 mas não de 6.
   (b) números reais cuja representação decimal consista de sequências de 5s somente.

2. (*2,5*) Sejam R_1 e R_2 relações de equivalência num conjunto S. Prove ou disprove cada uma das questões abaixo:
   (a) $R_1 \cup R_2$ é relação de equivalência em S.
   (b) $R_1 \cap R_2$ é relação de equivalência em S.

3. (*2,5*) Seja uma relação R simétrica e transitiva em um conjunto A. Então, se aRb temos bRa por simetria; e daí temos também, por transitividade, que aRa . Logo R é também reflexiva.

   Logo, provamos que se R é simétrica e transitiva então R é também reflexiva. Você concorda? Justifique sua resposta.

4. (*2,5*) Sejam A e B conjuntos, com $|A| = n$ e $|B| = m$. Quantas funções sobrejetoras distintas de A em B podem existir? Quantas bijeções? Justifique suas respostas.

1. **Esboço da solução.**

   (a) O conjunto X dos números inteiros múltiplos de 3 mas não de 6 é um subconjunto dos inteiros, que é contável. Portanto, X também é contável.

   (b) Os números reais cuja representação decimal consiste de sequências de 5s somente são números da forma

   $$\pm 55\ldots 5, 55\ldots 5.$$

   Isto é, são números com x 5s antes da vírgula e y 5s após a vírgula, para todo $x \geq 0, y \geq 0$. Desta forma, esses números podem ser representados pelos pares $(\pm x, y)$ que são elementos de $Z \times N$. Esse conjunto é contável, já que é o produto cartesiano de dois conjuntos contáveis (veja transparências do curso). Portanto, o conjunto dos números cuja representação decimal consista de sequências de 5s somente é também contável.

2. **Esboço da solução.**

   (a) A relação $R = R_1 \cup R_2$ <u>não</u> é relação de equivalência em S. Veja o seguinte contra-exemplo:

   $$\begin{aligned} S &= \{a, b, c\}; \\ R_1 &= \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}; \\ R_2 &= \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}; \\ R_1 \cup R_2 &= \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}. \end{aligned}$$

   Por que $R_1 \cup R_2$ não é de equivalência?

   (b) A relação $R = R_1 \cap R_2$ <u>é</u> relação de equivalência em S. Temos que mostrar que R é reflexiva, simétrica e transitiva.

   - Reflexividade. Seja $a \in S$. Como R_1, R_2 são de equivalência, $(a,a) \in R_i$, para $i = 1, 2$. Portanto $(a,a) \in R$.
   - Simetria. Seja $(a,b) \in R$; então $(a,b) \in R_1$ e $(a,b) \in R_2$. Como R_1, R_2 são de equivalência, $(b,a) \in R_i$, para $i = 1, 2$. Portanto $(b,a) \in R$.
   - Transitividade. Sejam $\{(a,b),(b,c)\} \subseteq R$; então $\{(a,b),(b,c)\} \subseteq R_1$ e $\{(a,b),(b,c)\} \subseteq R_2$. Como R_1, R_2 são de equivalência, $(a,c) \in R_i$, para $i = 1, 2$. Portanto $(a,c) \in R$.

3. **Esboço da solução.**

   A conclusão é falsa. Veja o seguinte contra-exemplo:

   $$\begin{aligned} A &= \{x, y, z\}; \\ R &= \{(x,x),(y,y),(x,y),(y,x)\}. \end{aligned}$$

   Você consegue ver que R é simétrica e transitiva mas não é reflexiva?

4. **Esboço da solução.** Parte dessa questão é fácil: o número de funções bijetoras de A em B quando $n \neq m$ é zero. Quando $n = m$ é $n!$. A parte sobre o número de funções bijetoras é bem mais difícil e sua solução está fora do contexto deste curso. Por isso, a correção desta questão levou em conta este fato.