Cálculo Numérico (MS211) PROVA 2 (26/11/2013)

Nome: ______________________ RA: __________ Turma: Y

Trabalhe com *radianos* e com pelo menos 4 *dígitos decimais*! Justifique as suas respostas!

---

1. As populações de uma espécie de presas, denotada por r, e de uma espécie de predatores, denotada por f, podem ser modeladas pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} r' &= ar - brf \\ f' &= crf - df \end{cases}$$

Sejam $a = 2$, $b = 1.2$, $c = 0.9$ e $d = 1$. Considere as condições iniciais $r(0) = 0.8$ e $f(0) = 0.4$, onde as populações foram normalizadas tais que r e f possam ser tratados como funções do tempo t com valores reais.

   (a) Transforme este problema em um PVI vetorial. [0.5 pts]

   (b) Aplique o Método de Euler Aperfeiçoado em forma tabelar com $h = 0.1$ para estimar as populações normalizadas no tempo $t = 0.2$. Insere as expressões específicas desta questão na sua tabela! Quais são os valores encontrados das populações das espécies de presas e predadores no tempo $t = 0.2$? [2 pts]

2. Considere o seguinte problema de valor de contorno (PVC):

$$\begin{cases} y'' &= y' + \cos x \\ y(1) &= -1 \\ y'(2) &= y(2) \end{cases}$$

   (a) Porque se trata de um PVC linear? [0.5 pts]

   (b) Seja $h = 0.25$. Escreve o sistema de equações que compõem o sistema linear a ser resolvido. Utilize aproximações das derivadas que garantem um *erro de truncamento de ordem quadrática em h*. [2 pts]

3. Considere os dados seguintes de um sinal sinusoidal ruidoso dado por $A\sin(\omega t + \Phi)$. Aqui, a amplitude do sinal é dada por $A = 2$, porém a frequência angular ω e a fase Φ são desconhecidas.

t	1	1.5	2	2.5	3
$y = A\sin(\omega t + \Phi)$	1.9804	1.4830	0.2106	−0.9892	−1.7492

   (a) Utilize o Método dos Quadrados Minimos para estimar ω e Φ. [2 pts]

   (b) Calcule o resíduo do ajuste encontrado. [0.5 pts]

4. Considere as taxas de CO_2 em partes por milhão (ppm) medidas no observatório Mauna Loa, Havaí, no mês de junho nos seguintes anos:

ano	1973	1993	2013
taxa de CO_2	332.07	357.09	396.28

Utilize interpolação *quadratica inversa* (interpolação inversa por um polinômio de grau ≤ 2 para estimar o ano quando a taxa de CO_2 ultrapassou 350 ppm e o ano no qual a taxa de CO_2 ultrapassará 420 ppm (sugestão: define $t =$ ano -1973). [1.5 pts]

5. Considere a seguinte integral:

$$\int_{2.5}^{3} \cos(e^x)dx$$

Estime o valor desta integral usando Quadratura Gaussiana (de dois pontos). [1 pt]

Veja as fórmulas no verso.

ALGUMAS FÓRMULAS E TABELAS

$p_n(x) = f_0 + f_1(x-x_0) + f_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$,
onde $f_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ para $k = 0, 1, \ldots, n$

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$, $x = \phi(t) = \frac{1}{2}[a + b + t(b-a)]$

$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2$, onde $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

$|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4$, onde $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$

x	y	$y' = f(x,y)$	$\Delta y \approx y'h$

x	y	$y' = f(x,y)$	y''	$\Delta y \approx y'h + y''\frac{h^2}{2}$

x_k	y_k	$y'_k = f(x_k, y_k)$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$	$\Delta y_k \approx (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\|\|F(x^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|s^{(k-1)}\|\|_\infty$	$s^{(k)}$

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \; ; \;\; y'(x_k) \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{h} \; ; \;\; y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} \; ; \;\; y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}.$$

Cálculo Numérico (MS211) Prova 2 (26/11/2013)

GABARITO

1.

(a)

$$Y=\begin{pmatrix} r \\ f \end{pmatrix} \quad , \quad Y'=\begin{pmatrix} r' \\ f' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ar-brf \\ crf-df \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2r-1.2rf \\ 0.9rf-f \end{pmatrix} \quad , \quad Y(0)=\begin{pmatrix} r(0) \\ f(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad .$$

(b)

Seja $Y=\begin{pmatrix} r \\ f \end{pmatrix}$, $h=0.1$, $Y'=\begin{pmatrix} r' \\ f' \end{pmatrix}$, $Y(0)=\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

x_k	$Y_k=\begin{pmatrix} r_k \\ f_k \end{pmatrix}$	$Y'_k=\begin{pmatrix} r'_k \\ f'_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2r_k-1.2r_k f_k \\ 0.9r_k f_k-f_k \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1}=\begin{pmatrix} \bar{r}_{k+1} \\ \bar{f}_{k+1} \end{pmatrix}=Y_k+Y'_k\cdot h$	$\bar{Y}'_{k+1}=\begin{pmatrix} 2\bar{r}_{k+1}-1.2\bar{r}_{k+1}\bar{f}_{k+1} \\ 0.9\bar{r}_{k+1}\bar{f}_{k+1}-\bar{f}_{k+1} \end{pmatrix}$	$\Delta Y_k\approx\frac{Y'_k+\bar{Y}_{k+1}}{2}\cdot h$
0	$\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.2160 \\ -0.1120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9216 \\ 0.3888 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.4132 \\ -0.0663 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1315 \\ -0.0089 \end{pmatrix}$
0.1	$\begin{pmatrix} 0.9315 \\ 0.3911 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.4258 \\ -0.0632 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0740 \\ 0.3848 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.6522 \\ -0.0128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1539 \\ -0.0038 \end{pmatrix}$
0.2	$\begin{pmatrix} 1.0854 \\ 0.3873 \end{pmatrix}$				

$Y(0.2)=\begin{pmatrix} r(0.2) \\ f(0.2) \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 1.0854 \\ 0.3873 \end{pmatrix}$, então população das prezas é aproximadamente 1.0854 e dos predadores 0.3873.

2.

(a)

As variáveis Y_{k-1} , Y_k , Y_{k+1} ocorrem de forma linear em Y' e Y'' . $\cos x_k$ é constante.

(b)

$$h=0.25=\frac{1}{4}\rightarrow\frac{1}{h^2}=16$$

$$16\left(y_{k+1}-2\,y_k+y_{k-1}\right)=2\left(y_{k+1}-y_{k-1}\right)+\cos x_k$$

$$y_4=y'(2)\approx\frac{y_5-y_3}{0.5}=2\left(y_5-y_3\right)\quad\rightarrow\quad 2\,y_5-2\mathrm{y}_3=y_4\rightarrow y_5=\frac{y_4}{2}-y_3$$

Para k = 1, 2, 3, 4, temos:

$$16\,y_{k+1}-32\mathrm{y}_k+16\mathrm{y}_{k-1}=2\mathrm{y}_{k+1}-2\mathrm{y}_{k-1}+\cos x_k$$
$$14\mathrm{y}_{k+1}-32\mathrm{y}_k+18\mathrm{y}_{k-1}=\cos x_k$$

k = 2 : $14\mathrm{y}_3-32\mathrm{y}_2+18\mathrm{y}_1=\cos(1.5)=0.0707$

k = 3 : $14\mathrm{y}_4-32\mathrm{y}_3+18\mathrm{y}_2=\cos(1.75)=-0.1782$

Para k = 1, $y_{k-1}=y_0=-1$:

$$14\mathrm{y}_2-32\mathrm{y}_1=\cos(1.25)+18=18.3153$$

Para k = 4, temos, $y_5=\frac{y_4}{2}-y_3$:

$$14\mathrm{y}_5-32\mathrm{y}_4+18\,y_3=\cos(2)$$
$$-25\mathrm{y}_4+4\mathrm{y}_3=-0.4161$$

Se $A\cdot y=b$, onde

$$\begin{pmatrix} -32 & 14 & 0 & -0 \\ 18 & -32 & 14 & 0 \\ 0 & 18 & -32 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18.3153 \\ 0.0707 \\ -0.1782 \\ -0.4161 \end{pmatrix}$$

3.

$$y\approx 2\sin(\omega t+\Phi)$$

(a)

$$\frac{y}{2}\approx\sin(\omega t+\Phi)$$

$$z=\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\approx\omega t+\Phi \quad , \quad \begin{matrix} g_1=t \\ g_2=1 \end{matrix}$$

t	1	1.5	2	2.5	3
z	1.4307	0.8353	0.1055	-0.5174	-1.0646

$$A\begin{pmatrix}\omega \\ \Phi\end{pmatrix}\approx z\Leftrightarrow A^T A\begin{pmatrix}\omega \\ \Phi\end{pmatrix}=A^T z$$

$$A=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ g_1 & g_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.5 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2.5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T A=\begin{pmatrix} 22.5 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^T z=\begin{pmatrix} -1.5926 \\ 0.7895 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 22.5 & 10 & -1.5926 \\ 10 & 5 & 0.7895 \end{array}\right)\rightarrow\begin{matrix}\omega\approx -1.2687 \\ \Phi\approx 2.6952\end{matrix} \qquad y\approx 2\sin(-1.2687t+2.6952)$$

(b)

O resíduo do ajuste é

$$\|y-2\sin(-1.2687t+2.6952)\|_2 \rightarrow$$

$$\left\|\begin{pmatrix}1.9804\\1.483\\0.2106\\-0.9892\\-1.7492\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1.9792\\1.4237\\0.3143\\-0.9174\\-1.7922\end{pmatrix}\right\|_2=\left\|\begin{pmatrix}0.0012\\0.0593\\-0.1037\\-0.0718\\0.0430\end{pmatrix}\right\|_2=0.1458$$

4.

Seja $C=y$ taxa de CO_2 e $t=ano-1973$:

C=y	332.07	357.09	369.28
t	0	20	40

		Ordem	
C	0	1	2
332.07	0		
		0.7994	
357.09	20		-0.0045
		0.5103	
396.28	40		

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 0.7994$$
$$f_3 = -0.0045$$

$$p_2(y) = 0.7994\,(y - 332.07) - 0.0045\,(y - 332.07)(y - 357.09)$$

$$p_2(350) \approx 14.9053 \approx 15$$
$$ano = 1973 + 15 = 1988$$

Portanto a estimativa para o ano qual a taxa de CO_2 superou 350 ppm é 1988.

$$p_2(420) \approx 45.3987 \approx 45$$
$$ano = 1973 + 45 = 2018$$

Assim a estimativa para o ano qual a taxa de CO_2 ultrapassará 420 ppm é 2018.

5.

$$\int_{\varphi(-1)=2.5}^{\varphi(1)=3} \cos(e^x)\,dx$$
$$\varphi(t) = \frac{1}{2}[5.5 + t \cdot 0.5] = \frac{1}{4}[11 + t]$$
$$\varphi'(t) = \frac{1}{4} \qquad d\varphi(t) = \frac{1}{4}dt$$

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(e^{\frac{11+t}{4}}\right)\frac{1}{4}dt \;=\; \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \;\approx f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$\frac{1}{4}[0.5621 + 0.7123] = \frac{1}{4} \cdot 1.2744 = 0.3186$$