F 602 - terceiro teste

Unicamp, 07 de outubro de 2009

nome assinatura RA

Um fio infinito e neutro carrega uma corrente constante I_0. Em $t = 0$ a corrente é abruptamente interrompida. Encontre os campos $\vec{B}$ e $\vec{E}$ (dica: para lidar com infinitos no cálculo de $\vec{A}$, considere um fio muito grande de tamanho z_0, e faça o limite $z_0 \to \infty$ ao final dos cálculos).

Como só temos corrente para $t < 0$, isto implica que a contribuição da corrente para gerar campos requer que o tempo retardado satisfaça:

$$t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c} < 0$$

Substituindo $\mathscr{r} = \sqrt{z^2 + s^2}$, temos:

$$z^2 + s^2 > (ct)^2 \quad \to \quad |z| > \sqrt{(ct)^2 - s^2} = z_{min}$$

Tal desigualdade se reflete nos limites da seguinte integral:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 \hat{z}}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{-z_{min}} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + s^2}} + \int_{+z_{min}}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + s^2}} \right]$$

que leva à:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 \hat{z}}{2\pi} \int_{+z_{min}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{z^2 + s^2}} dz$$

O principal está feito. Daqui pra frente, resta somente fazer as contas. Integrando:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I_0 \hat{z}}{2\pi} \left[ln \left(\sqrt{z_0^2 + s^2} + z_0 \right) - ln \left(ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2} \right) \right]$$

onde ainda deve ser feito o limite $z_0 \to \infty$. Neste limite, a dependência em s desaparece do primeiro termo, e podemos subtraí-lo da definição de $\vec{A}$ (ou deixar para fazer o limite no fim):

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I_0 \hat{z}}{2\pi} ln \left(ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2} \right)$$

Calculando os campos:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{1}{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \left(c + \frac{c^2 t}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z}$$

e

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0 \hat{z}}{2\pi} \frac{1}{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{s}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\phi}$$