1. *(2.0 pontos)*

   (a) (1.0) Encontre uma representação em série de potências para a função
   $$g(x) = \ln(x^2 + 3).$$
   (Sugestão: Derive a função g).

   (b) (1.0) Suponha que $y_1(x) = 3x^3$ e $y_2 = 5x^5$ são soluções da EDO $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$. Você pode dizer se o ponto $x = 0$ é um ponto ordinário ou singular? Justifique!

2. *(2.5 pontos)* Considere a equação diferencial $x^2y'' + xy' + 5x^2y = 0$.

   (a) (0.5) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação.

   (b) (0.5) Determine a equação indicial e suas raízes (os expoentes de singularidade).

   (c) (1.5) Determine a solução em série de Frobenius (em torno de $x = 0$) correspondente à maior raiz da equação indicial, expressando a relação de recorrência e o termo geral da série.

3. *(2.0 pontos)* Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$.

   (a) (1.0) Construa a extensão par e periódica de f a toda a reta $\mathbb{R}$, com período 4, e calcule a série de Fourier desta extensão.

   (b) (0.5) Quanto vale esta série nos pontos $x = 1$ e $x = 0$? *Não esqueça a justificativa.*

   (c) (0.5) Tomando $x = 1$, calcule o valor da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

4. *(3.5 pontos)*

   (a) (1.0) Mostre que o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir a equação $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$ por um par de equações diferencias ordinárias. Vale o princípio da superposição para essa equação (uma combinação linear qualquer de soluções também é uma solução)?

   (b) (1.5) Dado que $u_n(x,t) = \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t/1600}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}$, $n = 1, 2, \cdots$, é solução da equação do calor $u_t - u_{xx} = 0$, determine a solução do problema de valor inicial e de contorno
   $$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \ 0 < x < 40, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(40,t) = 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \ 0 < x < 40 \end{cases} \quad \text{onde} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 10 \\ 50, & 10 \le x \le 30 \\ 0, & 30 < x \le 40. \end{cases}$$

   (c) (1.0) Determine uma sequência de soluções $u_n(x,t)$, $n = 1, 2, \cdots$, linearmente independentes, da equação da onda $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$ satisfazendo a condição de contorno $u(0,t) = u_x(0,t) = 0$, $t > 0$, e a condição inicial $u(x,0) = 0$, $0 < x < L$ $(L > 0)$.

Questão 1.

(a)

<u>Usando a sugestão</u>:

$g'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad |x^2| < 1 \ (\Leftrightarrow |x| < 1)$ (série geométrica, 'com $-(x^2)$ no lugar de x')

0, 2 pontos até aqui

$\therefore \ \frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+(x/\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{\sqrt{3}})^{2n}, \quad |x/\sqrt{3}| < 1 \ (\Leftrightarrow |x| < \sqrt{3})$

$\therefore \ g'(x) = \frac{2x}{x^2+3} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}x^{2n+1}, \quad |x| < \sqrt{3};$ **+0, 3**

integrando de 0 a x, obtemos:

$g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)dt = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \frac{(-1)^n}{3^n}t^{2n+1}dt$

$= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+2)}x^{2n+2}$

+ 0, 3

$\ln(x^2+3) = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)}x^{2n+2}, \quad |x| < \sqrt{3}$

+ 0, 2

<u>Outra maneira</u>:

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+x/3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}x^n, \quad |\tfrac{x}{3}| < 1 \quad (\Leftrightarrow |x| < 3)$$

(série geométrica, 'com $-x/3$ no lugar de x') **0,2**

Integrando de 0 a x, obtemos:

$\int_0^x \frac{1}{t+3}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}t^n dt$ **+0, 2**

$\ln(t+3)\big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x$

$\ln(x+3) - \ln 3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)}x^{n+1}, \quad |x| < 3;$

+0, 4

substituindo x por x^2,

$\ln(x^2+3) - \ln 3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)}x^{2n+2}, \quad |x^2| < 3 \ (\Leftrightarrow |x| < \sqrt{3})$

+0, 2

(b)

<u>Uma maneira</u>: Suponhamos que $x = 0$ seja um ponto ordinário. Então a equação se escreve como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

sendo p e q funções analíticas em $x = 0$. **0,4** até aqui

Em particular, são funções contínuas num intervalo aberto I contendo $x = 0$. Por outro lado, as funções y_1 e y_2 dadas são L.I. (em qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$, diferente de $\{0\}$). Com efeito, o wronskiano de y_1 e y_2 vale

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} 3x^3 & 5x^5 \\ 9x^2 & 25x^4 \end{vmatrix} = 75x^7 - 45x^7 \neq 0, \quad \forall x \neq 0.$$

+0, 3

Então $\{y_1, y_2\}$ é um CFS em I. Mas $W[y_1, y_2] = 0$ em $x = 0$: contradição, pois sabemos que, nas condições acima, se o wronskiano se anular num ponto de um intervalo então anula-se em todos os pontos. Logo, $x = 0$ não pode ser um ponto ordinário. Então, é singular (pela definição de ponto singular). $+\mathbf{0,3}$

<u>Outra maneira</u>: Substituindo as soluções dadas y_1 e y_2 na equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad p = Q/P, \; q = R/P,$$

temos:

$$\begin{aligned} & 18x + p9x^2 + q3x^3 = 0 \\ \div 3x: \quad & 6 + p3x + qx^2 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & 100x^3 + p25x^4 + q5x^5 = 0 \\ \div 5x^3: \quad & 20 + p5x + qx^2 = 0. \end{aligned}$$

Então,

$$p(x) = \frac{\begin{vmatrix} -6 & x^2 \\ -20 & x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3x & x^2 \\ 5x & x^2 \end{vmatrix}} = \frac{-6x^2 + 20x^2}{3x^3 - 5x^3} = \frac{14x^2}{-2x^3} = -\frac{7}{x}$$

0,2 até aqui

$\therefore \nexists \lim_{x\to 0} p(x) \;\; (= \infty)$ $+\mathbf{0,4}$

Logo, $p(x)$ não pode ser analítica em $x = 0$. Logo, $x = 0$ não é um ponto ordinário, i.e. é singular. $+\mathbf{0,4}$

Questão 2.

(a) $p(x) = \frac{1}{x}$ não é analítica em $x = 0$, pois e.g. $\nexists \lim_{x\to 0} p(x) \; (= \infty)$. Logo $x = 0$ é singular. $\mathbf{0,2}$

$xp(x) = 1$ polinômio, função analítica;

$x^2 q(x) = x^2(\frac{5x^2}{x^2}) = 5x^2$: idem $+\mathbf{0,2}$

$\therefore x = 0$ é um ponto singular regular. $+\mathbf{0,1}$

(b)

$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} 5x^2 = 0$ $\mathbf{0,2}$

$\therefore \;\; F(r) \equiv r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) - r = r^2$ $+\mathbf{0,1}$

Equação indicial: $\;r^2 = 0$

Raízes: $\;r_1 = r_2 = 0.$ $+\mathbf{0,2}$

(c)

$$y = |x|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad r = r_1 = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$\mathbf{0,5}$

Derivando e substituindo na equação, temos:

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 5x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$+\mathbf{0,1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 5\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$+\mathbf{0,1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 5\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n} = 0$$

$$+\mathbf{0,1}$$

$$a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(n(n-1)+n\right) a_n + 5a_{n-2}\right] x^n = 0$$

$$+\mathbf{0,1}$$

$$a_1 = 0, \quad n^2 a_n + 5a_{n-2} = 0,\ n = 2,3,\cdots$$

$$+\mathbf{0,1}$$

$$\boxed{a_n = -\tfrac{5a_{n-2}}{n^2}},\ n = 2,3,\cdots,\quad a_1 = 0$$

relação de recorrência

$$+\mathbf{0,1}$$

$a_1 = 0 \ \Rightarrow\ a_n = 0$ para n ímpar $+\mathbf{0,1}$

n par:

$a_2 = -\frac{5a_0}{2^2}$

$a_4 = \frac{5a_2}{4^2} = \frac{5^2 a_0}{4^2 2^2}$

$a_6 = \frac{5a_4}{6^2} = -\frac{5^3 a_0}{6^2 4^2 2^2}$ $+\mathbf{0,1}$

$\vdots$

$a_{2n} = \frac{(-1)^n 5^n a_0}{(2n)^2 (2(n-1))^2 \cdots 4^2 2^2}$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n 5^n a_0}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$+\mathbf{0,1}$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

$$+\mathbf{0,1}$$

(tomamos $a_0 = 1$).

Questão 3.

(a) Para x no intervalo $[-2,0)$ defina

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -2 \le x < -1 \\ -x, & \text{se } -1 \le x < 0 \end{cases}.$$

Estenda f a toda a reta $\mathbb{R}$ definindo f de tal forma que $f(x+4) = f(x)$. $+\ \mathbf{0,3}$

Observe que sendo a extensão de f uma função par, sua série de Fourier é uma série de cossenos, ou seja, $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Vamos então calcular os a_n: Como o período é 4 temos $L = 2$. Assim,

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

$+\ \mathbf{0,2}$

Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \int_0^1 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(x\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^1\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right)\right).
\end{aligned}$$

$+\ \mathbf{0,4}$

Logo, a série de Fourier da extensão de f é dada por

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$+\ \mathbf{0,3}$

(b) Primeiro observe que tanto f quanto f' são funções seccionalmente contínuas. Agora, como a função f estendida é contínua em $x = 0$, pelo Teorema da convergência de Fourier temos que a série, em $x = 0$, converge para $f(0) = 0$ ($+\ \mathbf{0,2}$). Por outro, como a função f é descontínua em $x = 1$, novamente pelo Teorema da convergência de Fourier, a série, em $x = 1$, converge para

$$\frac{f(1+) + f(1-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

$+\ \mathbf{0,3}$

(c) Por (b), temos

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Observe que se $n = 2k-1$ então $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$. Portanto, podemos reescrever

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k\pi}\left(\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{2}\right) + \frac{2}{2k\pi}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right) - 1\right)\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\left(\mathrm{sen}\,(k\pi) + \frac{1}{k\pi}\left(\cos\,(k\pi) - 1\right)\right)\cos\,(k\pi) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k\pi}\right)^2 (\cos(k\pi) - 1)\cos(k\pi) = \frac{1}{4}$$

$+ \mathbf{0,3}$

Como $\cos(k\pi) = 1$ se k é par e $\cos(k\pi) = -1$ se k é impar, obtemos (escrevendo $k = 2n-1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{(2n-1)\pi}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$+ \mathbf{0,2}$

Questão 4. (a) Suponha que a equação possua uma solução de variáveis separadas da forma $u(x,y) = F(x)G(y)$. Derivando u duas vezes em relação a x, duas vezes em relação a y e substituindo na equação obtemos

$$F''(x)G(y) + xyG''(y) = 0.$$

$+ \mathbf{0,2}$

Dividindo por $xF(x)G(x)$, chegamos à relação

$$\frac{F''(x)}{xF(x)} = -\frac{yG''(y)}{G(y)} = \lambda$$

$+ \mathbf{0,2}$

onde λ é uma constante. As relações acima imediatamente implicam nas equações

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda x F(x) = 0 \\ yG''(y) + \lambda G(y) = 0. \end{cases}$$

$+ \mathbf{0,2}$

Afirmamos que vale o princípio da superposição para esta equação. De fato, sejam v e w soluções da equação. Então para $u = c_1 v + c_2 w$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, temos

$$\begin{aligned} u_{xx} + xyu_{yy} &= (c_1 v_{xx} + c_2 w_{xx}) + xy(c_1 v_{yy} + c_2 w_{yy}) \\ &= c_1(v_{xx} + xyv_{yy}) + c_2(w_{xx} + xyw_{yy}) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

$+ \mathbf{0,4}$

(b) Como cada u_n é solução da equação do calor, tendo em vista o princípio da superposição, vamos supor uma solução da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-n^2\pi t/1600} \mathrm{sen}\frac{n\pi x}{40}.$$

$+ \mathbf{0,3}$

onde os coeficientes c_n precisam ser determinados. Assim, u é uma solução da equação do calor que, obviamente, satisfaz as condições de fronteira. Para que u satisfaça a condição inicial, devemos ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{sen}\frac{n\pi x}{40},$$

ou seja, f deve ser representada por uma série de Fourier de senos. Estendendo f de forma impar no intervalo $[-40, 40]$ e periódica à toda reta de período 80, vemos que c_n devem ser os coeficientes de Euler-Fourier de f, i.e.,

$$c_n = \frac{2}{40}\int_0^{40} f(x)\text{sen}\frac{n\pi x}{40}dx.$$

+ 0,4

Vamos então calcular tais coeficientes:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_{10}^{30} 50\text{sen}\frac{n\pi x}{40}dx = \frac{5}{2}\int_{10}^{30} 50\text{sen}\frac{n\pi x}{40}dx \\ &= \frac{5}{2}\frac{40}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi x}{40}\Big|_{10}^{30}\right) \\ &= \frac{100}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

+ 0,4

Portanto, obtemos a solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right) \mathrm{e}^{-n^2\pi t/1600}\text{sen}\frac{n\pi x}{40}.$$

+ 0,4

(c) Suponha que

$$u(x,t) = F(x)G(t). \tag{1}$$

Substituindo u na equação e depois dividindo por a^2FG, obtemos

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{a^2G}. \tag{2}$$

Como o lado esquerdo de (2) depende somente de x e o lado direito somente de t, essas duas quantidades devem ser iguais a uma mesma constante, digamos $-\lambda$, ou seja,

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{a^2G} = -\lambda. \tag{3}$$

+ 0,2

Assim, F e G devem satisfazer as EDO's

$$\begin{cases} F'' + \lambda F = 0, \\ G'' + a^2\lambda G = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Substituindo agora u nas condições de contorno, vemos que

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow F(0)G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$$

e

$$u_x(L,t) = 0 \Rightarrow F'(L)G(t) = 0 \Rightarrow F'(L) = 0.$$

Além disso,

$$u(x,0)=0 \Rightarrow F(x)G(0)=0 \Rightarrow G(0)=0.$$

Logo, F e G devem satisfazer

$$\begin{cases} F''+\lambda F=0,\\ F(0)=F'(L)=0. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} G''+a^2\lambda G=0,\\ G(0)=0. \end{cases} \tag{6}$$

$+\,\mathbf{0,2}$

Para resolver (5) devemos considerar separadamente os casos $\lambda<0$, $\lambda=0$ e $\lambda>0$.

CASO 1. $\lambda<0$.

A equação característica associada à EDO em (5) é $r^2+\lambda=0$ e portanto

$$F(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Mas,

$$\begin{cases} F(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0\\ F'(L)=0 \Rightarrow c_1e^{L\sqrt{-\lambda}}-c_2e^{-L\sqrt{-\lambda}}=0. \end{cases}$$

As equações acima nos fornece um sistema linear homogêneo, cuja única solução é $c_1=c_2=0$. Logo, (5) não possui autovalores negativos.

CASO 2. $\lambda=0$.

Nesse caso, a EDO se reduz para $F''=0$ e portanto, $F(x)=c_1x+c_2$. As condições $F(0)=F'(L)=0$ trivialmente implicam que $c_1=c_2=0$ e assim $\lambda=0$ não é autovalor. $+\,\mathbf{0,2}$

CASO 3. $\lambda>0$.

Neste caso, a solução geral de (5) é dada por $F(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x)$. Agora, $F(0)=0$ implica $c_1=0$, e assim $F'(L)=0$ implica que $c_2\sqrt{\lambda}\cos(L\sqrt{\lambda})=0$. Como queremos soluções não-triviais devemos ter $\cos(L\sqrt{\lambda})=0$. Logo,

$$\lambda=\lambda_n=\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{7}$$

são autovalores de (5) com autofunções associadas

$$F(x)=F_n(x)=\mathrm{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right), \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

Para os valores de λ em (7), voltamos em (6) e vemos que

$$G(t)=G_n(t)=\mathrm{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2L}t\right), \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

$+\,\mathbf{0,2}$

Portanto, as funções

$$u_n(x,t)=\mathrm{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2L}t\right), \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

são as soluções procuradas. $+\,\mathbf{0,2}$