

1. (1,0 ponto) Sejam S um vetor de n números e $k = \log n$. Qual a complexidade de pior caso do mais eficiente algoritmo visto em classe para determinação do k -ésimo menor elemento de S (no modelo de árvores de decisões)? (As opções de resposta são: $O(\log k)$, $O(\log n)$, $O(n^{2/3})$, $O(n)$, $O(n^{3/2})$, $O(kn)$, $O(n^2)$.) Não precisa justificar.

2. (1,5 pontos) Sejam S um vetor de n números reais arbitrários e $1 \leq k \leq n$. Descreva o algoritmo mais eficiente que você puder para determinação da sequência (ordenada) crescente dos k menores elementos de S . Justifique a corretude do seu algoritmo e prove cuidadosamente a complexidade. Sua nota será proporcional à eficiência de seu algoritmo: $\Omega(n^2) \rightarrow 0$, $\theta(n \log n) \rightarrow 0.5$, $\theta(n + k \log n) \rightarrow 1.0$, $\theta(n + k \log k) \rightarrow 1.5$.

3. (1,5 pontos) Seja A um vetor de n^2 pontos no plano cartesiano ordenados lexicograficamente, i.é., $(x_p, y_p) < (x_q, y_q)$ se $(x_p < x_q)$ ou $(x_p = x_q \text{ e } y_p < y_q)$. Prove que o problema de se determinar se um novo ponto (x_s, y_s) pertence a A tem quota **inferior** $\Omega(\log n)$.

4. (3,0 pontos) Considere o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$. Os elementos de Σ obedecem a tabela de multiplicação dada abaixo (que não é associativa nem comutativa!). Por exemplo: $a a = b$, $a b = b$, $b a = c$.

		fator da direita		
		a	b	c
fator da esquerda	a	b	b	a
	b	c	b	a
	c	a	c	c

Tabela de multiplicação abstrata

(a) Projete um algoritmo eficiente que examina uma cadeia $x = x_1 x_2 \dots x_n$ de caracteres de Σ e decide se é ou não possível parentizar x de tal modo que o valor da expressão resultante é a . Por exemplo, se $x = b b b b a$, seu algoritmo deve retornar “Sim”, pois $(b (b b))(b a) = a$.

(Essa expressão não é única, pois $(b (b (b (b a)))) = a$ também.) **Enuncie claramente todos os resultados que fundamentem a corretude de seu algoritmo (na forma de lemas ou teoremas) e prove-os! Se, em lugar disso, você apenas apresentar o pseudo-código de um procedimento, sua nota será zero nesta questão.**

(b) Em termos de n , o comprimento de x , indique a complexidade de seu algoritmo, justificando essa análise.

5. (3,0 pontos) Sejam A e B dois conjuntos de n inteiros positivos. Você pode re-ordenar cada conjunto como você quiser. Depois de re-ordenados, denote por a_i o i -ésimo elemento de A e por b_i o i -ésimo elemento de B . Digamos que

$$R = \prod_{i=1}^n a_i^{b_i}$$

(a) Projete um algoritmo eficiente para maximizar o valor de R . **Enuncie claramente todos os resultados que fundamentem a corretude de seu algoritmo (na forma de lemas ou teoremas) e prove-os! Se, em lugar disso, você apenas apresentar o pseudo-código de um procedimento, sua nota será zero nesta questão.** (Sugestão: observe que se $x \geq w$ e $y \geq z$, então $x^{y-z} \geq w^{y-z}$.)

(b) Analise a complexidade de seu algoritmo.