Turma:

MA 141 Geometria analítica

Segundo Semestre de 2008

Turma Especial - Primeira Prova - 29/08/2008

Nome:	**RA:**

Questões	*Pontos*
Q 1	
Q 2	
Q 3	
Q 4	
Q 5	
T o t a l	

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

Questão 1 (1 ponto cada item)

Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o seguinte sistema linear homogêneo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a.X + a.Y + 4Z & = & 0 \\ a.X + Z & = & 0 \\ a.Y + 2Z & = & 0 \end{array} \right.$$

Para que valores de a o sistema admite:

(i) solução única;

(ii) infinitas soluções.

Solução: Basta ver quando o determinante da matriz associada ao sistema se anula:

$$\det \begin{pmatrix} a & a & 4 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} = a^2.$$

Podemos concluir portanto:

(i) o sistema tem solução única se e somente se $a \neq 0$;

(ii) o sistema tem infinitas soluções se e somente se $a = 0$.

Questão 2 (1 ponto cada item)
Dados os seguintes pontos de $\mathbb{R}^2$:

$$A = (1, 0),\ B = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \text{ e } C = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

(i) Mostre que o triângulo ABC é equilátero;

(ii) Encontre a equação da circunferência que contém os três pontos.

Solução: Para o item (i), basta verificar que:

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(1 - (-1/2))^2 + (0 - \sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{3}\ ;$$

$$\text{dist}(A, C) = \sqrt{(1 - (-1/2))^2 + (0 + \sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{3}\ ;$$

$$\text{dist}(B, C) = \sqrt{((-1/2) - (-1/2))^2 + ((\sqrt{3}/2) - (-\sqrt{3}/2))^2} = \sqrt{3}\ .$$

Portanto os três lados do triângulo ABC são iguais.
Para o item (ii), lembre que a equação geral de um círculo no plano xy é:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Substituindo os três pontos dados, obtemos três equações nas três incógnitas a, b e c:

$$\begin{cases} a + c &= -1 \\ -a/2 + \sqrt{3}b/2 + c &= -1 \\ -a/2 - \sqrt{3}b/2 + c &= -1 \end{cases}$$

cuja solução é $a = b = 0$ e $c = -1$. Portanto a equação desejada é $x^2 + y^2 = 1$ (círculo de raio 1 centrado na origem).

Questão 3 (2 pontos)

Encontre a equação cartesiana do plano τ que passa pelo ponto $P = (1, 2, 1)$ e que contém a reta r dada pela interseção dos planos $\pi : 2x-3y+4z-1 = 0$ e $\alpha : x-3y-2z+2 = 0$.

Solução: A equação de um plano τ passando pelo ponto $P = (1, 2, 1)$ é da forma:

$$a \cdot (x-1) + b \cdot (y-2) + c \cdot (z-1) = 0 \ ,$$

onde $\vec{n}_\tau = (a, b, c)$ é o vetor normal a τ.

Note que o ponto $Q = (-3, -1, 1)$ pertence à reta $r = \pi \cap \alpha$, portanto a reta s definida pelos pontos P e Q também pertence ao plano τ. O vetor $\vec{n}_\tau$ é perpendicular tanto à r quanto à s, portanto $\vec{n}_\tau = \vec{v}_s \times \vec{v}_r$, onde $\vec{v}_s$ e $\vec{v}_r$ são os vetores diretores das retas s e r, respectivamente.

Veja que $\vec{v}_s = \overline{PQ} = (4, 3, 0)$ e que $\vec{v}_r = (2, -3, 4) \times (1, -3, -2) = (18, 8, -3)$, pois $\vec{v}_r$ é perpendicular tanto a $\vec{n}_\pi$ como a $\vec{n}_\alpha$. Segue que $\vec{n}_\tau = (4, 3, 0) \times (18, 8, -3) = (9, -12, 22)$.

Portanto a equação do plano τ é

$$9 \cdot (x-1) - 12 \cdot (y-2) + 22 \cdot (z-1) = 0 \ .$$

Questão 4 (2 pontos)

Encontre a equação cartesiana da elipse ε que tem excentricidade igual a $\sqrt{2}/2$ e focos $F_1 = (0,0)$ e $F_2 = (1,1)$. Faça um esboço de seu gráfico.

Dica: Lembre que a excentricidade de uma elipse é a razão da distância entre os focos pela metade da soma das distâncias dos pontos da elipse aos focos.

Solução: Lembre que se $P = (x, y)$ é um ponto da elipse ε, então

$$\mathrm{dist}(P, F_1) + \mathrm{dist}(P, F_2) = 2a \ , \tag{1}$$

e que a excentricidade de ε é a razão c/a, onde $c = \mathrm{dist}(F_1, F_2) = \sqrt{2}$. Segue que $a = 2$. Portanto (**??**) pode ser reescrita como:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 4 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Quadrando os dois lados da igualdade acima obtemos:

$$X^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 16 - 8\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 \quad \Rightarrow$$

$$-2x - 2y = 14 - 8\sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow$$

$$4\sqrt{x^2 + y^2} = x + y + 7.$$

Quadrando os dois lados da igualdade mais uma vez obtemos:

$$16x^2 + 16y^2 = 49 + 14x + 14y + x^2 + 2xy + y^2$$

e a equação da elipse ε fica sendo:

$$15x^2 + 15y^2 - 2xy - 14x - 14y = 49 \ .$$

Questão 5 (1 ponto cada item)
Dada a esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, encontre:

(i) o seu centro e o seu raio;

(ii) a equação do plano π tangente à esfera e que passa pelo ponto $P = (1, 1, 2) \in S$.

Dica: Lembre que o plano tangente a uma esfera S em um ponto P é ortogonal à reta definida por P e o centro de S.

Solução: A equação da esfera S pode ser reescrita como:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4 \ .$$

Portanto S é a esfera de raio 2 centrada no ponto $O = (1, 1, 0)$.
De acordo com a dica, o vetor $\overline{OP} = (0, 0, 2)$ ligando o ponto P ao centro O é normal ao plano tangente π. Como π passa pelo ponto $(1, 1, 2)$, concluímos que a equação de π é $z = 2$.