RA	Nome	Assinatura

Observações: (a) Resolva as questões nas folhas de papel almaço e **copie o resultado**, quando possível, no **espaço apropriado**. (b) A avaliação é **sem consulta** a qualquer material didático. (c) O tempo de duração da prova é de **100 minutos**. O oferecimento de um possível tempo adicional é prerrogativa do professor. (d) Todas as folhas de almaço deverão ser identificadas com **RA e nome**. (e) O processo de solução de todas as questões deverá **constar no almaço**, caso contrário as questões serão anuladas.

1	
2	
3	
4	
5	
6	

1ª Questão: Considere o sistema de controle apresentado na Figura 1 com $V(s) = W(s) = 0$. Determine o erro de regime, se existir, para as seguintes configurações:

(a) $F(s) = 1$, $C(s) = -s$, $P(s) = 10/(s(s+5))$, $R(s) = 1/s^2$

(b) $F(z) = 2$, $C(z) = 0.5$, $P(z) = 1/((z+0.5)(z-0.1))$, $R(z) = z/(z-1)$

2ª Questão: Seja o sistema linear

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Se possível, projete um controlador por realimentação de estados que produza erro em regime nulo para entrada degrau e atenda os seguintes índices de desempenho: Máxima sobre-elevação: 10%, tempo de acomodação $t_s = 2s$. Caso seja necessário implementar controle integral, o pólo adicional deve ser alocado em $(s + 10\tau)$ sendo τ a constante de tempo dos pólos dominantes obtidos a partir dos índices de desempenho.

3ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

e o ganho de realimentação de estados $u = [k \;\; 1 \;\; 3]x$. Determine os valores de k tais que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável.

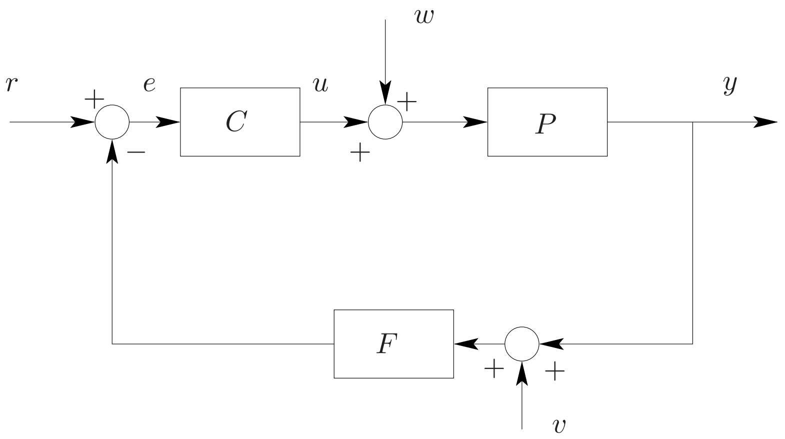

Figura 1: Sistema um-grau-de-liberdade.

$4^{\underline{a}}$ Questão: Considere o sistema de controle apresentado na Figura 1 com realimentação unitária ($F = 1$, $w = v = 0$) e

$$C = C(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

(a) Determine $C(z)$ usando o método de Tustin com $T = 2$.

(b) Determine $C(z)$ usando o projeto via emulação com $T = 2$.

(c) Considerando $P = P(z) = (z + 0.5)/((z + 0.25)^2(z - 1))$ e que o sistema em malha fechada é estável e usando $C(z)$ determinado por Tustin, determine o erro em regime (usando o mesmo T) para entrada rampa, isto é, $R(z) = Tz/(z - 1)^2$.

$5^{\underline{a}}$ Questão: Um motor síncrono ligado a um barramento infinito pode ser descrito pela equação

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \sqrt{2}\mathrm{sen}(y) = u$$

sendo y o ângulo elétrico do motor e u a potência mecânica no eixo. Para o modelo não-linear na forma de variáveis de estado, com $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, determine

(a) O ponto de equilíbrio para $0 \leq y \leq \pi/2$ e $u = 1$.

(b) O modelo linearizado $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ no ponto de equilíbrio.

(c) Para quais valores de α o sistema é controlável, observável e assintoticamente estável.

6ª Questão: Seja o sistema de controle digital mostrado na Figura 2 com $P(s) = 10/(s+1)$. Determine $P(z)$ e encontre a faixa de $T > 0$ tal que o sistema em malha fechada seja estável.

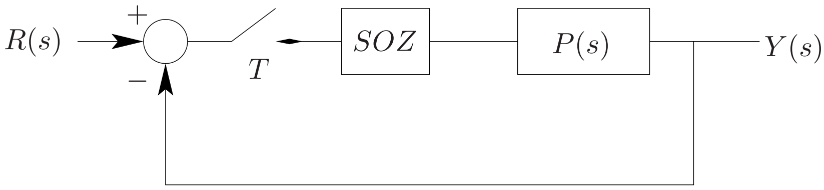

Figura 2: Sistema de controle digital.

Formulário

- A tabela abaixo resume os valores dos erros de regime (para uma configuração em realimentação unitária) e das constantes de posição, velocidade e aceleração para as entradas degrau, rampa e parábola em função do tipo N do sistema.

Caso contínuo:

N	$1/s$	$1/s^2$	$1/s^3$	Constantes
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞	$k_p = \lim_{s\to 0} C(s)P(s)$
1	0	$\frac{1}{k_v}$	∞	$k_v = \lim_{s\to 0} sC(s)P(s)$
2	0	0	$\frac{1}{k_a}$	$k_a = \lim_{s\to 0} s^2C(s)P(s)$

Caso discreto:

N	$z/(z-1)$	$Tz/(z-1)^2$	$T^2z(z+1)/(z-1)^3$	Constantes
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞	$k_p = \lim_{z\to 1} C(z)P(z)$
1	0	$\frac{1}{k_v}$	∞	$k_v = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)C(z)P(z)}{T}$
2	0	0	$\frac{1}{k_a}$	$k_a = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)^2C(z)P(z)}{T^2(z+1)}$

- Transformadas de Laplace: $\mathcal{L}(\dot{x}) = sX(s) - x(0)$; $\mathcal{L}(\ddot{x}) = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$; $\mathcal{L}(u(t)) = 1/s$; $\mathcal{L}(tu(t)) = 1/s^2$; $\mathcal{L}(t^2u(t)) = 2/s^3$; $\mathcal{L}(\exp(-at)u(t)) = 1/(s+a)$; $\mathcal{L}(t\exp(-at)u(t)) = 1/(s+a)^2$; $\mathcal{L}(\text{sen}(\omega t)u(t)) = \omega/(s^2+\omega^2)$; $\mathcal{L}(\cos(\omega t)u(t)) = s/(s^2+\omega^2)$;

- Transformadas $\mathcal{Z}$: $\mathcal{Z}(x(k+1)u(k))) = z(\mathcal{Z}(x(k)u(k)) - x(0))$; $\mathcal{Z}(x(k+2)u(k))) = z^2(\mathcal{Z}(x(k)u(k)) - x(0) - z^{-1}x(1))$; $\mathcal{Z}(u(k)) = z/(z-1)$; $\mathcal{Z}(ku(k)) = z/(z-1)^2$; $\mathcal{Z}(k^2u(k)) = z(z+1)/(z-1)^3$; $\mathcal{Z}(a^ku(k)) = z/(z-a)$;

- Discretização:

  - Tustin: $C(z) = C(s)$ para $s = 2(z-1)/(T(z+1))$;
  - Emulação: pólos e zeros finitos: $z = \exp(sT)$; zeros no infinito: $z = -1$; ganho: $C(z)$ para $z = 1$ é igual a $C(s)$ para $s = 0$.

- Constantes de tempo de sistemas de segunda ordem $G(s) = \omega_n^2/(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) \rightarrow \tau = 1/(\xi\omega_n)$
- Índices de desempenho: Máxima sobre-elevação $M_p = 100 \times \exp(-(\xi/\sqrt{1-\xi^2})\pi)$, tempo de acomodação $t_s = 4/(\xi\omega_n)$
- Controle Proporcional: Se $y = x_1$, $u = -\bar{K}x + k_1(r - x_1)$, $r(t) = r_0 u(t)$, Condições de existência: controlabilidade. $x(\infty) = -(A - BK)^{-1}Bk_1 r_0$
- Controle Integral: $u = -Kx + K_I\zeta$; $r(t) = r_0 u(t)$. Condição de existência: controlabilidade e

$$rank\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}\right) = n + 1$$

  Sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \qquad \begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -r_0 \end{bmatrix}, \quad y(\infty) = Cx(\infty)$$

- Amostragem de sistemas contínuos: $P(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}(\frac{P(s)}{s})$
- Teorema do Valor Final (caso contínuo) $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$
- Teorema do Valor Final (caso discreto) $\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$

Gabarito

1. (a) Sistema Instável; (b) Estável, Tipo 0, $k_p = 0.27$, $e_d = 0.787$.

2. É necessário projeto integral; É controlável; Permite alocação arbitrária; $\xi \approx 0.6$, $\omega_n = 10/3$, pólo adicional $s = -5$; $p_c(s) = s^3 + 9s^2 + (280/9)s + 500/9$; Ganhos: $K = [k_1 \quad k_2] = [-200/54 \quad 848/54]$, $k_I = -100/9$.

3. Sistema em malha fechada: $\dot{x} = (A + BK)x$, $K = [k \;\; 1 \;\; 3]$. $det(sI - A - BK) = s^3 - 3s^2 + (6 - 2k)s + (12 - 6k)$. Sempre instável.

4. (a)

$$(a) \quad C(z) = \frac{2z}{(3z+1)}, \qquad (b) \quad C(z) = \frac{0.5(1-e^{-4})(z-e^{-2})}{(1-e^{-2})(z-e^{-4})}, \qquad (c) \quad e_r = 4.166$$

5. Controlável $\forall\alpha$; Observável $\forall\alpha$; Assintoticamente estável para $\alpha > 0$.

$$\text{P.E} : (\pi/4, 0), \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

6.

$$P(z) = \frac{10(1-e^{-T})}{(z-e^{-T})}, \quad T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{P(z)}{1+P(z)} = \frac{10(1-e^{-T})}{z-(11e^{-T}-10)}$$

Estável se $|11e^{-T} - 10)| < 1 \Rightarrow 0 < T < 0.2$