Cálculo Numérico (MS211) PROVA 1 (01/10/2013)

Nome: ______________________ RA: __________ Turma: Y

**Trabalhe com *radianos* e 4 *dígitos decimais exceto na Questão 1*! Justifique as suas respostas! Boa sorte!**

---

1. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0.100 \cdot 10^{-4} & 0.200 \cdot 10^{0} \\ 0.100 \cdot 10^{0} & 0.300 \cdot 10^{0} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0.000 \cdot 10^{-9} \\ 0.100 \cdot 10^{5} \end{pmatrix}.$$

   (a) Considere uma maquina que opera no sistema de ponto flutuante utilizando arredondamento com $\beta = 10$, $t = 3$ dígitos na mantissa e um expoente em $[-9, 9]$. Calcule as fatorações LU de A *sem e com pivoteamento parcial* e as use para resolver $Ax = b$ fazendo todas as contas na maquina. Explicite as operações binárias que produzem erros numéricos. [2 pts]

   (b) Sejam $\hat{x}$ e $\check{x}$ as duas respostas obtidas no item (a). Verifique se $A\hat{x} = b$ ou se $A\check{x} = b$. Como podemos avaliar a qualidade da resposta obtida sem utilizar a solução exata de $Ax = b$? [1 pts]

   (c) Em qual dos métodos númericos que você conhece geralmente se usa a fatoração LU (com ou sem pivoteamento) e por que? [0.5 pts]

2. Lembre-se que a norma infinita de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é dada por $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

   (a) Seja $(x^{(k)}) = x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ uma sequencia convergente de vetores em $\mathbb{R}^n$. Quando podemos afirmar que a ordem de convergência da sequencia $(x^{(k)})$ é linear? (Dica: utilize a noção da norma infinita.) [0.5 pts]

   (b) Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Quando aplicado ao chute inicial $x^{(0)} = (1, -1)^t$, um certo método iterativo gera uma sequencia de vetores que converge para a solução de $Ax = b$. A seguinte tabela mostra $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(7)}$:

| $k$ | $x^{(k)}$ |
|---|---|
| 0 | $(1.0000, -1.0000)^t$ |
| 1 | $(1.0000, -0.7500)^t$ |
| 2 | $(1.1250, -0.8125)^t$ |
| 3 | $(1.0938, -0.7969)^t$ |
| 4 | $(1.1016, -0.8008)^t$ |
| 5 | $(1.0996, -0.7998)^t$ |
| 6 | $(1.1001, -0.8000)^t$ |
| 7 | $(1.1000, -0.8000)^t$ |

   Explique por que esta tabela indica que a ordem de convergência da sequencia $(x^{(k)})$ é linear. [1 pt]

*Veja as Questões 3 e 4 no verso!*

3. Seja $f(x) = e^x - \ln(x^2+1)$

(a) Quantas raizes de $f$ existem? Justifique a sua resposta graficamente. [0.5 pts]

(b) Utilize o método de Newton-Raphson em forma tabelar com chute inicial $x_0 = -1$ para encontrar um zero da função $f$ com precisão $10^{-2}$. Observe que pelo menos um dos critérios de parada é atingido em somente 1 iteração . [1 pt]

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

4. Os donos Justin T. Lake e Dustin Z. Fake da empresa DOLDYS investiram \$20000 no desenho e no desenvolvimento do seu novo produto "Go-RNiX (by Justin & Dustin)" que pode ser produzido a um custo de \$2 por unidade.

Antes de lançar Go-RNiX no mercado, eles contratam a empresa de consultoria CoolCon. A CoolCon chega as seguintes conclusões: se gastar \$$c$ em comerciais e consultoria e vender o Go-RNiX por um preço de \$$p$ por unidade, eles conseguem vender $2000 + 4\sqrt{c} - 20p$ unidades.

(a) Usando estas informações, expresse o lucro da DOLDYS com a venda do Go-RNiX como uma função $f(c,p)$ de $c$ e $p$. [0.5 pts]

(b) Determine uma boa aproximação do vetor $x^* = (c^*, p^*)^t$ que maximize o lucro da DOLDYS e que - segundo as estimativas da CoolCon - é aproximadamente igual a $(15000, 65)$. Para tanto, aplique o método de Newton com precisão $\varepsilon = 0.1$ e $x^{(0)} = (15000, 65)$ considerando que $x^*$ é tal que $\nabla f(x^*) = (0,0)^t$. Seja $F = \nabla f$. Verifique se um dos 2 critérios de parada é satisfeito preenchendo a tabela seguinte. Qual é o lucro maximal que a DOLDYS pode realizar? [3 pts]

| $k$ | $x^{(k)}$ | $F(x^{(k)})$ | $\lvert\lvert F(x^{(k)})\rvert\rvert_\infty$ | $\lvert\lvert s^{(k-1)}\rvert\rvert_\infty$ | $s^{(k)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

1. (a) $t=3$, $\beta=10$, $e\in[-9,9]$

sem pivoteamento:

$$R=\left(\begin{array}{c|c} 0{,}100\cdot10^{-4} & 0{,}200\cdot10^{0} \\ \hline 0{,}100\cdot10^{5} & \begin{array}{c}0{,}300\cdot10^{0}\\-0{,}200\cdot10^{4}\end{array}\end{array}\right)$$

$$\underbrace{0{,}300\cdot10^{0}}_{x=\bar{x}}-\underbrace{0{,}200\cdot10^{4}}_{y=\bar{y}}=0{,}00003\cdot10^{4}-0{,}200\cdot10^{4}$$
$$=-0{,}19997\cdot10^{4}=\bar{x}-\bar{y}$$

resultado da maquina: $\overline{\bar{x}-\bar{y}}=-0{,}200\cdot10^{4}$

Daí, a maquina produz:

$$L=\begin{pmatrix}0{,}100\cdot10^{1} & 0=0{,}000\cdot10^{-9}\\ 0{,}100\cdot10^{5} & 0{,}100\cdot10^{1}\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}0{,}100\cdot10^{-4} & 0{,}200\cdot10^{0}\\ \overset{\displaystyle 0{,}000\cdot10^{-9}}{\underset{\displaystyle 0}{\shortparallel}} & -0{,}200\cdot10^{4}\end{pmatrix}$$

$$Ax=b \iff L(\underbrace{Ux}_{y})=b$$

1. $Ly=b$:

$$\left(\begin{array}{cc|c}0{,}100\cdot10^{1} & 0=0{,}000\cdot10^{-9} & 0=0{,}000\cdot10^{-9}\\ 0{,}100\cdot10^{5} & 0{,}100\cdot10^{1} & 0{,}100\cdot10^{5}\end{array}\right) \quad \begin{array}{l}y_1=0{,}000\cdot10\\ y_2=0{,}100\cdot10\end{array}$$

2. $Ux=y$

$$\left(\begin{array}{cc|c}0{,}100\cdot10^{-4} & 0{,}200\cdot10^{0} & 0{,}000\cdot10^{-9}\\ 0=0{,}000\cdot10^{-9} & -0{,}200\cdot10^{4} & 0{,}100\cdot10^{5}\end{array}\right) \quad x_2=\frac{0{,}100\cdot10^{5}}{-0{,}200\cdot10}=-0{,}500\cdot10^{1}$$

$$x_1=\frac{0{,}200\cdot10^{0}\cdot0{,}500\cdot10^{1}}{0{,}100\cdot10^{-4}}$$

$$=\frac{0{,}100\cdot10^{1}}{0{,}100\cdot10^{-4}}=1{,}000\cdot10^{5}=0{,}100\cdot10^{6}$$

Resultado obtido: $\hat{x}=\begin{pmatrix}0{,}100\cdot10^{6}\\-0{,}500\cdot10^{1}\end{pmatrix}$

Com pivoteamento:

$$R = \left(\begin{array}{c|c} 0,100\cdot 10^{0} & 0,300\cdot 10^{0} \\ \hline 0,100\cdot 10^{-3} & \begin{array}{c} 0,200\cdot 10^{0} \\ -0,300\cdot 10^{-4}\end{array} \end{array}\right), \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = 0,200\cdot 10^{0} = \bar{x}, \quad y = 0,300\cdot 10^{-4} = \bar{y}$$

$$x - y = \bar{x} - \bar{y} = 0,200\cdot 10^{0} - 0,00003\cdot 10^{0}$$

$$= 0,19997\cdot 10^{0} \longrightarrow \overline{\bar{x}-\bar{y}} = 0,200\cdot 10^{0}$$

1. $Ly = Pb$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0,100\cdot 10^{1} & 0 = 0,000\cdot 10^{-9} \\ 0,100\cdot 10^{-3} & 0,100\cdot 10^{1} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{matrix} 0,100\cdot 10^{5} \\ 0,000\cdot 10^{-9} \end{matrix}}_{Pb}$$

$$y_1 = \frac{0,100\cdot 10^{5}}{0,100\cdot 10^{1}} = 1,000\cdot 10^{4} = \underline{\underline{0,100}}\cdot 10^{5}$$

$$y_2 = -\cancel{0,1}00\cdot 10^{-3}\cdot 0,100\cdot 10^{5} = -0,010\cdot 10^{2} = \underline{\underline{-0,100\cdot 1}}$$

2. $Ux = y$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,100\cdot 10^{0} & 0,300\cdot 10^{0} & 0,100\cdot 10^{5} \\ 0 = 0,000\cdot 10^{-9} & 0,200\cdot 10^{0} & -0,100\cdot 10^{1} \end{array}\right)$$

$$x_2 = -\frac{0,100\cdot 10^{1}}{0,200\cdot 10^{0}} = -0,500\cdot 10^{1}$$

$$\check{X} = \begin{vmatrix} 0,100\cdot 1 \\ -0,500\cdot \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{0,100\cdot 10^{5} + 0,300\cdot 10^{0}\cdot 0,500\cdot 10^{1}}{0,100\cdot 10^{0}}$$

$$= \frac{0,100\cdot 10^{5} + 0,150\cdot 10^{1}}{0,100\cdot 10^{0}}$$

$$= \frac{0,100\cdot 10^{5} + 0,000015\cdot 10^{5}}{0,100\cdot 10^{0}} \underset{\text{máq.}}{\overset{\text{na}}{=}} \frac{0,100015\cdot 10^{5}}{0,100\cdot 10^{0}}$$

$$\xrightarrow[\text{máquina}]{\text{na}} (0,100\cdot 10^{5})/(0,100\cdot 10^{0}) = 0,\underline{100}\cdot 10^{6}.$$

1(b) $\hat{x} = \check{x} = \begin{pmatrix} 10^5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$A\hat{x} = A\check{x} = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10^5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 10^4 - 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 10^4 - 1{,}5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 10^4 \end{pmatrix} = b$$

Podemos avaliar a qualidade da resposta obtida $\hat{x} = \check{x}$ em termos do resíduo

$$\| A\hat{x} - b \|_\infty = \| A\check{x} - b \|_\infty$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10^4 - 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10^4 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1{,}5$$

(c) A fatoração LU é geralmente usada no método de Newton modificado:
Na k-ésima iteração para $k = 0, 1, \ldots$ se resolve

$$J(x^{(0)}) \cdot s^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

Então precisa-se resolver vários sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes $J(x^{(0)})$
A decomposição LU de $J(x^{(0)})$ custa $O(n^3)$ operações
Dado L e U somente precisa-se resolver sistemas triangulares, cada um a um custo computacional de $O(n^2)$.
Se utilizar Eliminação Gaussiana, seria necessário um custo computacional de $O(n^3)$ em cada iteração.

2.(a) Seja $e^{(k)} = x^{(k)} - L$

onde $L = \lim_{k \to \infty} x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

A ordem de convergência de $x^{(k)}$

é linear se

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\| e^{(k+1)} \|_\infty}{\| e^{(k)} \|_\infty} = C$$

para algum $C$ tal que $0 < C < 1$

(Observe que temos $\| e^{(k+1)} \|_\infty \approx C \cdot \| e^{(k)} \|_\infty$
para $k$ grande)

(b) $x^* = \begin{pmatrix} 1,1 \\ -0,8 \end{pmatrix}$ satisfaz $A x^* = b$

A tabela mostra $x^{(k)}$ com 4 dígitos decimais

$\| e^{(6)} \|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1,1001 \\ -0,8000 \end{pmatrix} - x^* \right\| = 10^{-4}$, $\| e^{(5)} \|_\infty = 4 \cdot 10^{-4}$

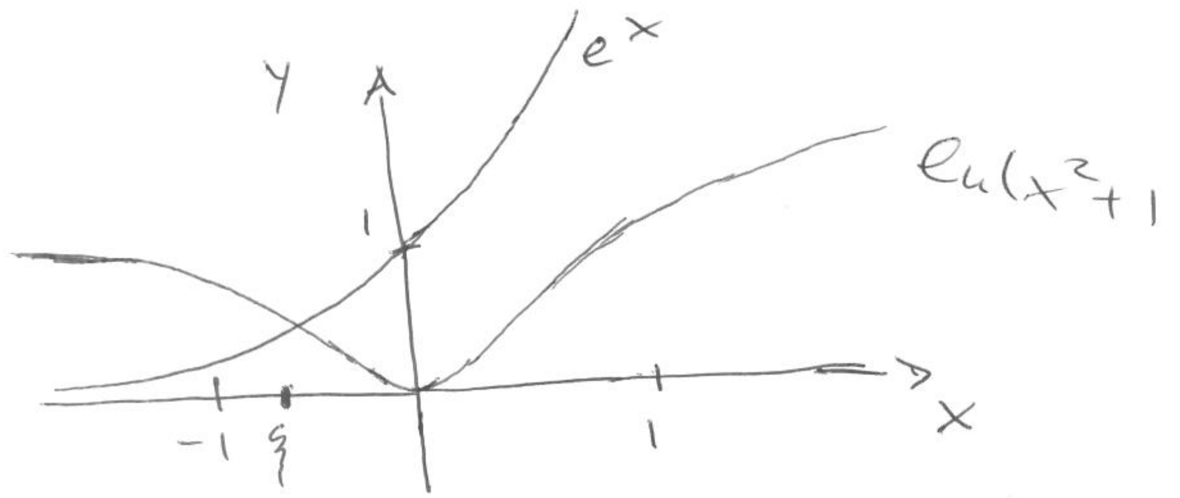
$\Rightarrow \| e^{(6)} \|_\infty = \frac{1}{4} \cdot \| e^{(5)} \|_\infty$

$\| e^{(4)} \|_\infty = 16 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \| e^{(5)} \|_\infty = \frac{1}{4} \cdot \| e^{(4)} \|_\infty$

$\| e^{(3)} \|_\infty = 62 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \| e^{(4)} \|_\infty \approx \frac{1}{4} \cdot \| e^{(3)} \|_\infty$

Estas observações indicam que $\lim_{k \to \infty} \frac{\| e^{(k+1)} \|_\infty}{\| e^{(k)} \|_\infty} = C$
onde $C = \frac{1}{4}$, então elas indicam a ordem de convergência linear de $(x^{(k)}$

3.




(a) $\exists!$ raiz

(b) $f(x) = e^x - \ln(x^2+1)$

$$f'(x) = e^x - \frac{2x}{x^2+1}$$

$\varepsilon = 10^{-2}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $-1$ | $-0,3253$ <br> $(0,3253 \not< \varepsilon)$ | |
| 1 | $-0,7622$ | $0,0086$ | |

$|f(x_1)| = |0,0086| < 10^{-2} = \varepsilon$ PARE

$\therefore \xi \approx x_1 = -0,7622$.

4(a) $f(c,p) = (2000 + 4c^{\frac{1}{2}} - 20p)(p-2) - 20000 - c$

(b) $\frac{\partial f}{\partial c}(c,p) = 2c^{-\frac{1}{2}}(p-2) - 1 =: f_1(c,p)$

$\frac{\partial f}{\partial p}(c,p) = -20(p-2) + 2000 + 4c^{\frac{1}{2}} - 20p$

$= 2040 + 4c^{\frac{1}{2}} - 40p =: f_2(c,p)$

$$F(c,p) = \begin{pmatrix} f_1(c,p) \\ f_2(c,p) \end{pmatrix}$$

$$J(c,p) = \begin{pmatrix} -c^{-\frac{3}{2}}(p-2) & 2c^{-\frac{1}{2}} \\ 2c^{-\frac{1}{2}} & -40 \end{pmatrix}$$

contas com 4 dígitos decimais:

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 15000 \\ 65 \end{pmatrix}, \quad F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0{,}0288 \\ -70{,}1021 \end{pmatrix}$

Note que $\|F(x^{(0)})\|_\infty = 70{,}1021 \neq 0$

$$J(x^{(0)}) \cdot s^{(0)} = -F(x^{(0)})$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0{,}0163 & -0{,}0288 \\ 0{,}0163 & -40 & 70{,}1021 \end{array}\right) \quad s_2^{(0)} = -\frac{0{,}0288}{0{,}0163} = -1{,}7660$$

$$s_1^{(0)} = \frac{70{,}1021 - 40{,}0 \cdot 1{,}7660}{0{,}0163} = \cancel{0{,}0035}\ -32{,}9867$$

$$s^{(0)} = \cancel{\begin{pmatrix} -0{,}0035 \\ \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -32{,}9867 \\ -1{,}7660 \end{pmatrix}$$

Continuação 4(b)

$\varepsilon = 10^{-2}$

| $k$ | $x^{(k)}$ | $F(x^{(k)})$ | $\|F(x^{(k)})\|_\infty$ | $\|s^{(k-1)}\|_\infty$ | $s^{(k)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\begin{pmatrix} 15000 \\ 65 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,0288 \\ -70,1021 \end{pmatrix}$ | $70,1021$ | – | $\begin{pmatrix} -32,986 \\ -1,766 \end{pmatrix}$ |
| 1 | $\begin{pmatrix} 14967,0133 \\ 63,2340 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,0010 \\ -0,0010 \end{pmatrix}$ | $0,001 < \varepsilon$ PARE! | | |

$\therefore x^* \approx x^{(1)}$

Então o lucro maximal que a DOLDYS pode realizar é dado por $f(x^{(2)})$

$\approx 40025,00$, quer dizer $\underline{\underline{\$40025}}$