Turma:

Nota:

MA 327 Álgebra Linear

Segundo Semestre de 2006

Segunda Chamada

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
T o t a l	

Questão 1. **(2.5 Pontos)**

Diga se é Falsa ou Verdadeira cada uma das afirmações abaixo, justificando sua resposta.

(a) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que é injetora.

(b) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que é sobrejetora.

(c) Subconjuntos de um conjunto linearmente dependente são linearmente dependentes.

(d) Os espaços vetoriais $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ e $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ são isomorfos.

(e) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com $dim(V) = n$, U e W subespaços de V com $dim(U) > \dfrac{n}{2}$ e $dim(W) > \dfrac{n}{2}$. Então, $U \cap W = \{ 0_V \}$.

Questão 2. **(2.5 Pontos)**

Considere o subconjunto U do espaço vetorial real $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ definido por:

$$U = \{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t = A \quad \text{e} \quad tr(A) = 0 \}$$

(a) Mostre que U é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Considerando o espaço vetorial $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, exiba uma base para o subespaço U.

Questão 3. **(2.5 Pontos)**

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

onde β é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\gamma = \{ (1,0,1), (-1,0,1), (0,1,0) \}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Pede–se

(a) Determine $T(1,0)$ e $T(0,1)$.

(b) Determine uma base para $Im(T)$.

(c) A transformação T é injetora? Justifique sua resposta.

Questão 4. **(2.5 Pontos)**

Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$T(a + bx + cx^2) = (3a + 2b + c) + (b - c)x + 2cx^2 .$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador linear T, exibindo uma base para cada um dos autoespaços de T. O operador T é diagonalizável? Justifique sua resposta.

G A B A R I T O

Questão 1. **(2.5 Pontos)**

(a) A afirmação é **Falsa**.
Considere que exista uma transformação linear injetora T de $I\!R^4$ em $I\!R^3$. Pelo **Teorema do núcleo e da imagem**, temos $dim(\,Im(T)\,) = 4$, pois $Ker(T) = \{\, 0_V \,\}$. O que não é possível, pois $Im(T)$ é um subespaço de $I\!R^3$ e $dim(\,I\!R^3\,) = 3$. Logo, não existe uma transformação linear injetora T de $I\!R^4$ em $I\!R^3$.

(b) A afirmação é **Verdadeira**.
Considere uma transformação linear T de $I\!R^4$ em $\mathcal{P}_2(I\!R)$ tal que $dim(\,Ker(T)\,) = 1$. Pelo **Teorema do núcleo e da imagem**, temos que $dim(\,Im(T)\,) = 3$. Como $Im(T)$ é um subespaço de $\mathcal{P}_2(I\!R)$, tem–se que $Im(T) = \mathcal{P}_2(I\!R)$, pois $dim(\,\mathcal{P}_2(I\!R)\,) = 3$. Logo, existe uma transformação linear T sobrejetora de $I\!R^4$ em $\mathcal{P}_2(I\!R)$.

(c) A afirmação é **Falsa**.
Considere o conjunto linearmente dependente S em $I\!R^3$ dado por:

$$S = \{\, (1,1,0)\,,\, (-1,1,0)\,,\, (1,3,0)\,\}\,.$$

Entretanto, o subconjunto $\{\, (1,1,0)\,,\, (-1,1,0)\,\}$ é linearmente independente em $I\!R^3$.

(d) A afirmação é **Falsa**.
De fato, $dim(\mathcal{P}_4(I\!R)) = 5$ e $dim(I\!M_2(I\!R)) = 4$. Logo, são espaços vetoriais de dimensões diferentes. Assim, não são isomorfos.

(e) A afirmação é **Falsa**.
Considerando que $U \cap W = \{\, 0_V \,\}$, pelo Teorema da dimensão da soma de subespaços, temos que

$$dim(\,U + W\,) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n\,,$$

que é uma contradição, pois $U + W$ é um subespaço de V. Logo, podemos concluir que

$$U \cap W \neq \{\, 0_V \,\}\,.$$

Questão 2. **(2.5 Pontos)**

(a) Podemos verificar que a matriz nula 0_n pertence ao subconjunto U, pois 0_n é uma matriz simétrica e tem traço nulo.

Considerando as matrizes $A\,,\,B \in U$, temos

$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B \qquad \text{e} \qquad tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0\,.$$

Portanto, a matriz $A + B \in U$.

Finalmente, considerando $A \in U$ e $\lambda \in I\!R$, temos

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A \qquad \text{e} \qquad tr(\lambda A) = \lambda tr(A) = 0\,.$$

Portanto, a matriz $\lambda A \in U$.

Assim, mostramos que o subconjunto U é um subespaço de $I\!M_n(I\!R)$.

(b) Como $A^t = A$ e $tr(A) = 0$, uma matriz genérica $A \in I\!M_3(I\!R)$ com essas propriedades, pode ser escrita da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & (-a-b) \end{bmatrix},$$

para $a,\, b,\, x,\, y,\, z \in I\!R$.

Por sua vez, podemos escrever

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & (-a-b) \end{bmatrix} \\ &= a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Desse modo, escrevemos $A = aA_1 + xA_2 + yA_3 + bA_4 + zA_5$, onde o conjunto

$$\{\, A_1\,,\, A_2\,,\, A_3\,,\, A_4\,,\, A_5 \,\}$$

é linearmente independente e gera o subespaço U de $I\!M_3(I\!R)$. Assim, encontramos uma base para U.

Questão 3. **(2.5 Pontos)**

(a) Interpretando a matriz $[T]_{\gamma}^{\beta}$, obtemos

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1,0,1) - 2(0,1,0)) &&= (1,-2,1) \\ T(0,1) &= -(1,0,1) + (-1,0,1) + 3(0,1,0)) &&= (-2,3,0) \end{aligned}$$

(b) Utilizando o resultado do item **(a)**, obtemos

$$T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1)) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(1,-2,1) + y(-2,3,0) .$$

Desse modo, podemos verificar facilmente que $\{ (1,-2,1), (-2,3,0) \}$ é uma base para o subespaço $Im(T)$, pois é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^3$.

Assim, temos que

$$T(x,y) = (x-2y\,,\ -2x+3y\,,\ x) \qquad \text{para} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(c) Para verificar se T é uma transformação injetora, vamos determinar o núcleo da transformação T. Desse modo, vamos encontrar os elementos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$T(x,y) = (0,0,0) \quad \Longrightarrow \quad (x-2y\,,\ -2x+3y\,,\ x) = (0,0,0) .$$

Assim, temos que determinar a solução do sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 0 \\ -2x & + & 3y & = & 0 \\ x & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Obtemos, $x = y = z = 0$.

Portanto, $Ker(T) = \{ 0_V \}$. Logo, a transformação linear T é injetora.

Questão 4. **(2.5 Pontos)**

Seja T o operador linear sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$T(a + bx + cx^2) = (3a + 2b + c) + (b - c)x + 2cx^2 .$$

Inicialmente, vamos determinar a matriz $A = [T]_\beta^\beta$, onde $\beta = \{ 1 , x , x^2 \}$ é a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Temos que

$$T(1) = 3 \quad , \quad T(x) = 2 + x \qquad \text{e} \qquad T(x^2) = 1 - x + 2x^2 .$$

Portanto, obtemos

$$A = [T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Desse modo, o polinômio característico do operador linear T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) .$$

Logo, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$ são os autovalores do operador T. Como os autovalores são distintos, sabemos que T é um operador linear diagonalizável.

Os autovetores da matriz $A = [T]_\beta^\beta$ são

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$, respectivamente.

Sabemos que

$$[p_1(x)]_\beta = X_1 \quad , \quad [p_2(x)]_\beta = X_2 \qquad \text{e} \qquad [p_3(x)]_\beta = X_3 ,$$

onde $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são os autovetores do operador T associados aos autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$, respectivamente. Logo, obtemos

$$p_1(x) = 1 \quad , \quad p_2(x) = 1 - x + x^2 \qquad \text{e} \qquad p_3(x) = -1 + x .$$

Finalmente, temos que

$$V_{\lambda_1} = [1] \quad , \quad V_{\lambda_2} = [1 - x + x^2] \qquad \text{e} \qquad V_{\lambda_3} = [-1 + x]$$

são os autoespaços do operador T.