Mecânica – F315 B

3ª prova - 01 de julho de 2009

Nome: GABARITO RA:______

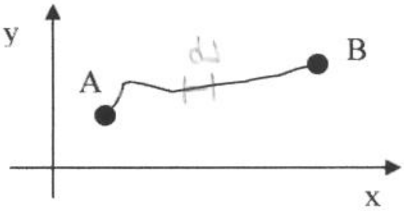
Questão 1 (2,5)

Considere um meio plano. Deseja-se andar neste meio de um ponto *A* (x_1,y_1) a um ponto *B* (x_2,y_2) num extremo de tempo (máximo ou mínimo), sendo que o módulo da velocidade depende de x como $v(x) = \dfrac{w}{\sqrt{x}}$ para $x>x_1$, onde *w* é uma constante. Obtenha:

a) A integral que nos fornece o tempo de percurso usando x como a variável independente. (1,0)

b) Usando a equação de Euler na primeira forma, obtenha a equação diferencial a ser satisfeita por *y(x)*. (1,0)

c) Obtenha *y(x)* (não necessita determinar as constantes de integração; (0,5) $\left(\int (A+Bx)^{-1/2} = \ldots \right.$



a) $dT = \dfrac{ds}{v} = \dfrac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{v} = \dfrac{dx\,(1+y'^2)^{1/2}}{v(x)}$

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{dx\,(1+y'^2)^{1/2}\sqrt{x}}{w}}_{f}$$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y'} = \text{Cont} \equiv C$

$\dfrac{\partial f}{\partial y'} = \dfrac{y'\sqrt{x}}{w(1+y'^2)^{1/2}} = C \Rightarrow \sqrt{x}\,y' = Cw\,(1+y'^2)^{1/2}$

$\Rightarrow \dfrac{y'^2}{Cw}x = 1 + y'^2 \Rightarrow y'^2\left(\dfrac{x}{Cw} - 1\right) = 1$

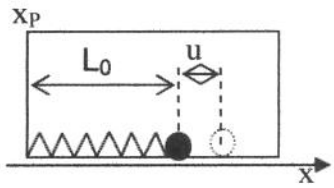
$y' = \pm\left(\dfrac{x}{Cw} - 1\right)^{-1/2} \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \pm\left(\dfrac{x}{Cw} - 1\right)^{-1/2}$

c) $y = \displaystyle\int \left(\frac{x}{Cw} - 1\right)^{-1/2} dx = 2Cw\left(\frac{x}{Cw} - 1\right)^{1/2} + A$

Questão 2 (2,5)

Um sistema de massa (massa = m) mola (constante elástica k e comprimento de equilíbrio L_0) está colocado horizontalmente numa plataforma acelerada conforme mostra a figura. Se x_P indica a posição do ponto da plataforma onde a mola está presa e $x_P = at^2/2$, obtenha :

a) O lagrangeano do problema usando u como variável;.(1,0)
b) A equação diferencial de movimento para a variável u; (1,0)
c) O novo comprimento de equilíbrio $\bar{L}$ do sistema massa mola. (0,5)



a)

$$x = x_P + L_0 + u \qquad x_P = at^2/2$$

$$\dot{x} = \dot{x}_P + \dot{u} = at + \dot{u}$$

$$U(u) = \frac{1}{2} k u^2$$

$$L = \frac{1}{2} m (at + \dot{u})^2 - \frac{1}{2} k u^2 \qquad \text{ou}$$

$$L = \frac{1}{2} m (a^2 t^2 + \dot{u}^2 + 2at\dot{u}) - \frac{1}{2} k u^2$$

b) $\dfrac{\partial L}{\partial u} = -ku$

$$\Rightarrow -ku - m\ddot{u} - ma = 0$$

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m\dot{u} + mat$

$$\boxed{\ddot{u} = -\frac{k}{m} u - a}$$

c) $\ddot{u} = 0 \Rightarrow \dfrac{K}{m} u_{eq} = -a \Rightarrow u_{eq} = -\dfrac{ma}{K}$

$$\bar{L} = L_0 - \frac{ma}{K}$$

Questão 3(2,5)

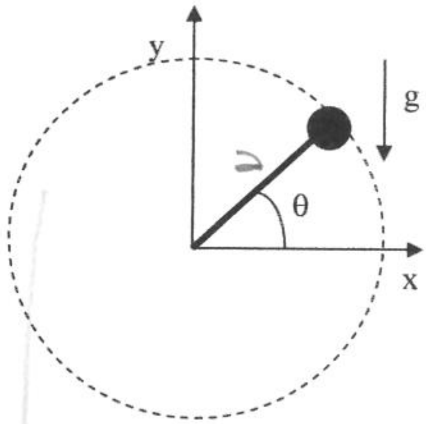
Uma haste de massa desprezível e comprimento fixo *a* com uma corpo de massa m em sua ponta gira conforme mostra a figura ao lado.

(a) Obtenha o lagrangeano usando as coordenadas r e θ e as forças de vínculo nas direções $\boldsymbol{r}$ e θ em termos do multiplicador de lagrange λ; (1,0)

(b) Obtenha as equações de movimento em r e θ considerando as forças de vínculo e aplicando o vínculo; (1,0)

(c) Lembrando que $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$, e, considerando o ângulo inicial $\theta = 0$, determine λ e obtenha a força de vínculo nas direções $\boldsymbol{r}$ e θ em função de θ indicando quando a haste é comprimida ou estendida. (0,5)

(a) $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$



$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\sin\theta}$$

$U = mgr\sin\theta$

vínculo $\quad f(r,\theta) = r - a = 0$

$F_{vínculo} \quad \hat{r}: \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = \lambda$

$\hat{\theta}: \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$

(b)
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \end{cases} \qquad \frac{\partial L}{\partial r} + \lambda - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad mr\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta + \lambda - m\ddot{r} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\cos\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \end{cases} \rightarrow \quad -mgr\cos\theta - 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mr^2\ddot{\theta} = 0$$

$$r = a \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ma\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta + \lambda = 0 & (\mathrm{I}) \\ -mga\cos\theta - ma^2\ddot{\theta} = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

(c) $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{a}\cos\theta \Rightarrow \left.\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right|_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} = -\frac{g}{a}\sin\theta'\Big|_0^{\theta} = -\frac{g}{a}\sin\theta + \frac{\omega_0^2}{2}$

velocidade angular inicial $\rightarrow \dot{\theta}_0$

$\dot{\theta}_0 \equiv \omega_0$

Subst. em (I):

$$\lambda = mg \sin\theta \quad - m a \dot{\theta}^2$$

$$\lambda = mg \sin\theta \ - m a \left(\frac{-2g}{a} \sin\theta + \omega_0^2 \right)$$

$$\lambda = 3 mg \sin\theta \quad - m\omega_0^2$$

Se $\omega_0 = 0 \Rightarrow \lambda = 3mg \sin\theta$

$+\pi < \theta < 0 \qquad \lambda < 0$

Portanto a massa deve ser puxada para o centro ($F_r \propto -\hat{r}$) ou seja a haste é esticada.

Questão 4 (2,5)

Considere o problema planar de uma massa m sujeita um potencial gravitacional *U(r)=k/r*. Obtenha:

(a) O lagrangeano em coordenadas polares;(0,5)
(b) Os momentos generalizados e o hamiltoniano; (1,0)
(c) As equações de movimento; (1,0)

(a) $L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{k}{r}$

(b) $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ $\Rightarrow$ $\dot{r} = p_r/m$

$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$ $\qquad \dot{\theta} = p_\theta / mr^2$

$$H = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{k}{r}$$

$$= \frac{1}{2} \cancel{m} \left(\frac{p_r^2}{m^{\cancel{2}}} + \frac{\cancel{r^2} p_\theta^2}{m^{\cancel{2}} r^{\cancel{4}\,2}} \right) + \frac{k}{r}$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} \right) + \frac{k}{r}$$

(c) $\frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{p}_r \Rightarrow -\frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} = -\dot{p}_r$ $\qquad \Rightarrow \boxed{\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} = m\ddot{r}}$

$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{r} \Rightarrow \frac{p_r}{m} = \dot{r}$

$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{p}_\theta \Rightarrow \dot{p}_\theta = 0$ $\qquad p_\theta = \text{conste}$

$\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} \Rightarrow \frac{p_\theta}{mr^2} = \dot{\theta}$ $\qquad \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}}$