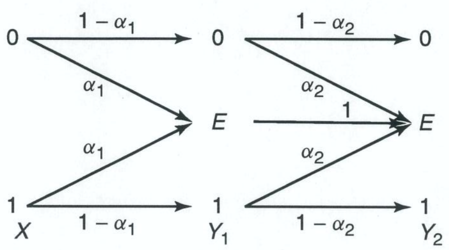
Teoria de Informação – IE660
Prof. Cândido
1° semestre de 2013

GABARITO

PROVA #4

1. (3,0) Canal de acesso múltiplo. Considere um canal de acesso múltiplo cuja saída é dada por $Y = X_1 \times X_2$, em que $X_1 \in \{0,1\}$ e $X_2 \in \{1,2,3\}$. Note que há interferência no canal, mas nenhum ruído. Encontre a região de capacidade, explicitando os pontos de "quina". Esboce-a num gráfico. Dica: analise o canal do ponto de vista de cada usuário, considerando o outro usuário como ruído.

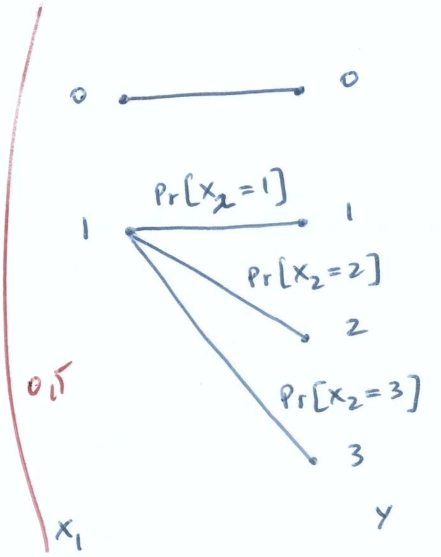
2. Canal de broadcast. Considere o canal de broadcast degradado da figura abaixo.
   a. (1,0) Qual é a capacidade do canal entre X e Y_1?
   b. (1,0) Qual é a capacidade do canal entre X e Y_2?
   c. (2,0) Encontre a região de capacidade. Esboce-a num gráfico, explicitando os pontos de cruzamento com os eixos em termos de α_1 e α_2.



3. (3,0) Codificação Slepian-Wolf. Duas fontes, $X_1 = Z_1$ e $X_2 = Z_1 + Z_2$, devem ser codificadas separadamente, com taxas R_1 e R_2, respectivamente, e enviadas a um único receptor. Os sinais Z_1 e Z_2 são processos independentes do tipo Bernoulli(p). Encontre a região de taxas atingíveis. Esboce-a num gráfico, explicitando os pontos de "quina" em termos do parâmetro p.

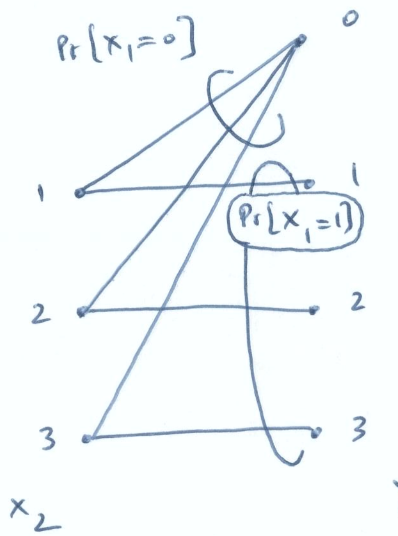
1

CANAL DO PONTO DE VISTA DE X_1



0,5

CANAL DO PONTO DE VISTA DE X_2



A TRANSMISSÃO DE X_2 NÃO DIMINUI A CAPACIDADE PARA X_1

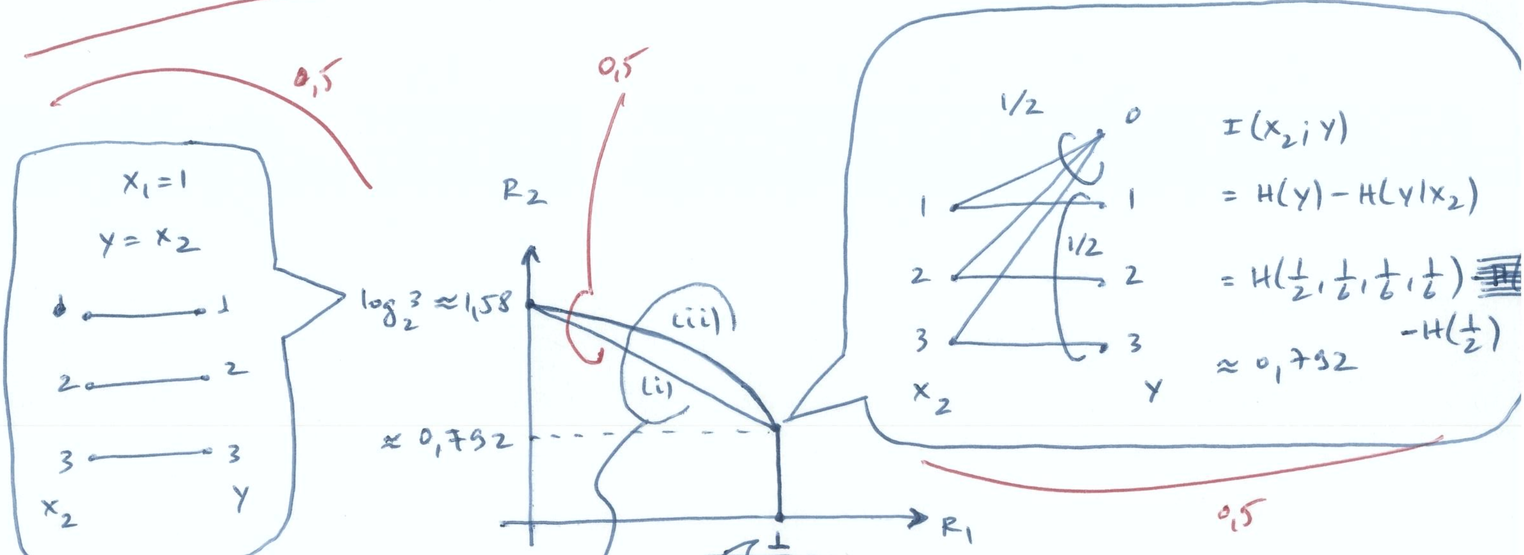
A TRANSMISSÃO DE X_1 DIMINUI A CAPACIDADE PARA X_2

$Pr[X_1=0]\uparrow \Rightarrow C\downarrow$

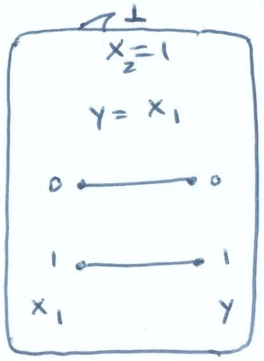
0,5

0,5

0,5



0,5

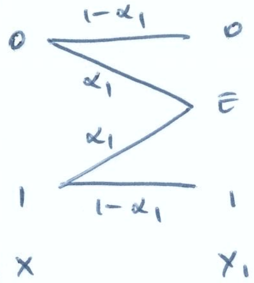


0,5

É POSSÍVEL MOSTRAR QUE (ii) — E NÃO (i) — DEFINE A REGIÃO DE CAPACIDADE. A CURVATURA DE (ii) TEM O FORMATO DA FUNÇÃO BINÁRIA DE ENTROPIA.

2

a) CANAL DE APAGAMENTO

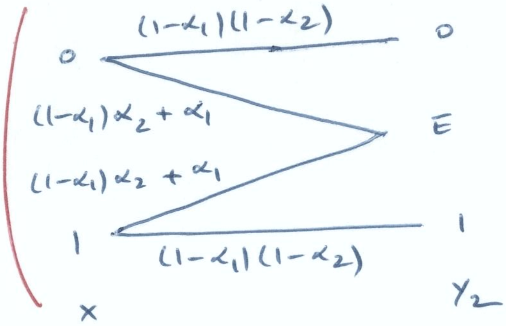


0,5

$\Rightarrow \boxed{C = 1-\alpha_1 \text{ BITS/USO}}$

0,5

b) CANAL DE APAGAMENTO EQUIVALENTE



0,5

0,5

$\Rightarrow \boxed{C = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2) \text{ BITS/USO}}$

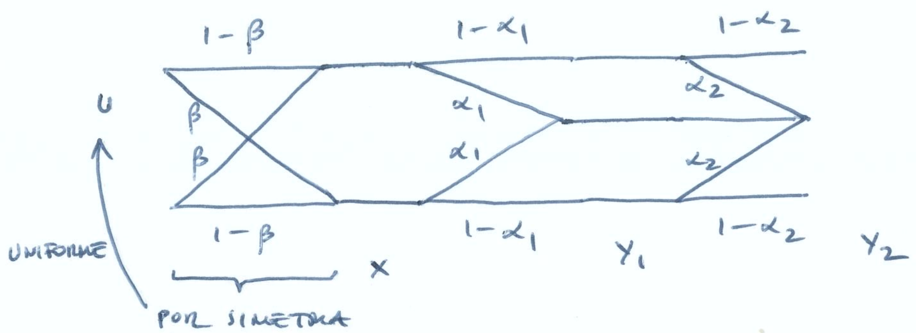
$= \cancel{1-\alpha_1-\alpha_2(1-\alpha_1)}$ BITS/USO

$< 1-\alpha_1$ BITS/USO

c)

0,5

TEOREMA



$$\begin{cases} R_2 \le I(U;Y_2) \\ R_1 \le I(X;Y_1|U) \end{cases}$$

- $I(U;Y_2)$

$= H(Y_2) - H(Y_2|U)$

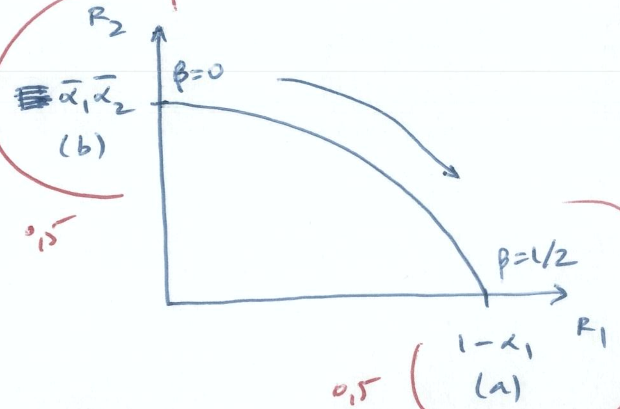
$= H\left(\frac{\bar\alpha_1\bar\alpha_2}{2}, \alpha_1+\bar\alpha_1\alpha_2, \frac{\bar\alpha_1\bar\alpha_2}{2}\right) - H\left(\bar\beta\bar\alpha_1\bar\alpha_2, \alpha_1+\bar\alpha_1\alpha_2, \beta\bar\alpha_1\bar\alpha_2\right)$

- $I(X;Y_1|U)$

$= H(Y_1|U) - H(Y_1|U,X)$

$= H(\bar\beta\bar\alpha_1, \underbrace{\beta\alpha_1+\bar\beta\alpha_1}_{=\alpha_1}, \beta\bar\alpha_1) - H(\alpha_1)$

0,5



0,5

0,5

3

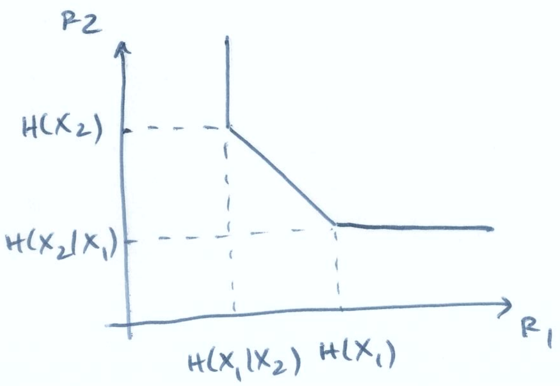
$$\left.\begin{aligned} X_1 &= Z_1 \\ X_2 &= Z_1 + Z_2 \end{aligned}\right\rangle \quad Z_1 \sim \text{Bernoulli}(p),\ Z_2 \sim \text{Bernoulli}(p)$$

(independentes)

z_1	z_2	$p(z_1, z_2)$	x_1	x_2
0	0	$(1-p)^2$	0	0
0	1	$p(1-p)$	0	1
1	0	$p(1-p)$	1	1
1	1	p^2	1	2

0,5

REGIÃO DE TAXAS ATINGÍVEIS



0,5

- $H(X_1) = H(p)$ $\sim$ Bernoulli(p) $\quad \{ H(p) \triangleq -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) \}$ 0,5
- $H(X_2) = H((1-p)^2, 2p(1-p), p^2)$ $\quad \{ H(\underline{p}) = -\sum p_i \log_2 p_i \}$ 0,5

  $\uparrow$ TABELA

- $H(X_1, X_2) = H(Z_1, Z_2) = H(Z_1) + H(Z_2) = 2H(p)$
- $H(X_1|X_2) = H(X_1, X_2) - H(X_2) = 2H(p) - H((1-p)^2, 2p(1-p), p^2)$ 0,5
- $H(X_2|X_1) = H(X_1, X_2) - H(X_1) = 2H(p) - H(p) = H(p)$ 0,5