UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Física Gleb Wataghin
F 128 - 1^o semestre 2008 - Fernando Sato
Prova 2 (Gabarito) - Noturno - 21/05/2008

Problema 1: Um avião está voando em um círculo horizontal com uma velocidade de 200 m/s. Se as suas asas estão inclinadas de um ângulo $\theta = 60^o$ em relação ao plano horizontal, (a) desenhe o diagrama de forças e (b) qual é o raio do círculo no qual o avião está voando? Suponha que a força necessária provém inteiramente da sustentação aerodinâmica que é perpendicular a superfície das asas.($g = 10m/s^2$ e $\sqrt{3} \approx 1.7$).

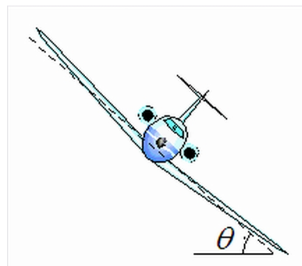

Figura 1: Esquema do avião em uma trajetória circular e inclinado de uma ângulo θ.

Item (a), Diagrama de forças

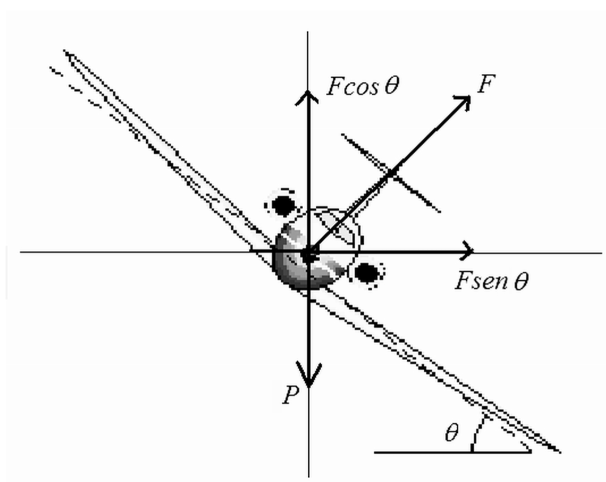

Figura 2: Diagrama de forças para o avião (força peso e força de sustentação).

Item (b), sendo F_s a força de sustentação aerodinâmica, F_c a resultante centrípeta, m a massa do avião, $\theta = 60^o$ e R o raio do círculo que o avião está descrevendo temos que:

Pelo diagrama de foças temos:
Em y temos (avião está descrevendo um círculo na horizontal):

$$F_s \cos\theta - mg = 0$$

e em x temos:

$$F_s \sin\theta = mv^2/R$$

temos que $F_s = mg/\cos\theta$. Substituindo a F_s na equação em x temos que $R = v^2/(g\tan\theta)$.

$$R = \frac{v^2.\cos\theta}{g.\sin\theta} = \frac{200^2.\frac{1}{2}}{10.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4000}{\sqrt{3}} \approx \frac{4000}{1.7} \approx 2352m$$

Problema 2: Uma partícula de massa $m = 2kg$ parte do repouso e move-se em linha reta sob ação de uma força dependente do tempo dada por $F(t) = 3t - t^2$, onde t é dado em segundos e F em newtons.

(a) Calcule a velocidade $v(t)$ da partícula em função do tempo.

(b) Calcule o trabalho realizado pela partícula durante os 2 primeiros segundos do movimento.

(c) A que taxa a partícula realiza trabalho, em função do tempo?

Item (a),

$$F(t) = ma(t) \Rightarrow 3t - t^2 = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^{v'} mdv = \int_0^{t'} \left(3t - t^2\right) dt$$
$$mv(t) = \frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \Rightarrow v(t) = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{6}$$

Item (b),

$$w = \int \vec{F} d\vec{x} = \int F dx = \int_0^2 \left(3t - t^2\right)\left(\frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{6}\right) dt$$
$$w = \int \left(\frac{9t^3}{4} - \frac{t^4}{2} - \frac{3t^4}{4} + \frac{t^5}{6}\right) dt = \int \left(\frac{9t^3}{4} - \frac{5t^4}{4} + \frac{t^5}{6}\right) dt$$
$$w = \left(\frac{9}{4}\frac{t^4}{4} - \frac{5}{4}\frac{t^5}{5} + \frac{1}{6}\frac{t^6}{6}\right)\Big|_0^2 = 9 - 8 + \frac{64}{36}$$
$$w \cong 2,78(J)$$

Item (c),

$$w(t) = \frac{9t^4}{16} - \frac{t^5}{4} + \frac{t^6}{36}$$
$$\frac{dw(t)}{dt} = P = 4\frac{9t^4}{16} - 5\frac{t^5}{4} + 6\frac{t^6}{36}$$
$$P(t) = \frac{9t^4}{4} - \frac{5t^5}{4} + \frac{t^6}{6}$$

Problema 3: Uma partícula está sujeita a um potencial $U(x) = -ax^2 + bx^4$, onde $a = 1(J/m^2)$ e $b = 1J/m^4$.

(a) Determine as posições de equilíbrio da partícula e esboce um gráfico de $U(x)$ para o intervalo $-3/2m < x < 3/2m$.

(b) Descreva o movimento da partícula e o intervalo do espaço onde ele ocorre, para o caso em que sua energia mecânica for: (i) $-0,15J$ e (ii) $0,15J$.

Item (a), o equilíbrio acontece quando a força é nula, $F(x) = 0$.

$$F\left(x\right) = -\frac{dU\left(x\right)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-x^2 + x^4\right) = 2x - 4x^3$$

$$\begin{aligned} &F\left(x\right) = 2x - 4x^3 = 0 \\ &x\left(2 - 4x^2\right) = 0 \\ &x = \begin{cases} 0 \\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio são: $\frac{-\sqrt{2}}{2}$, 0 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

x (m)	U(x) (J)
- 3/2	2,8
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,25
0	0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,25
3/2	2,8

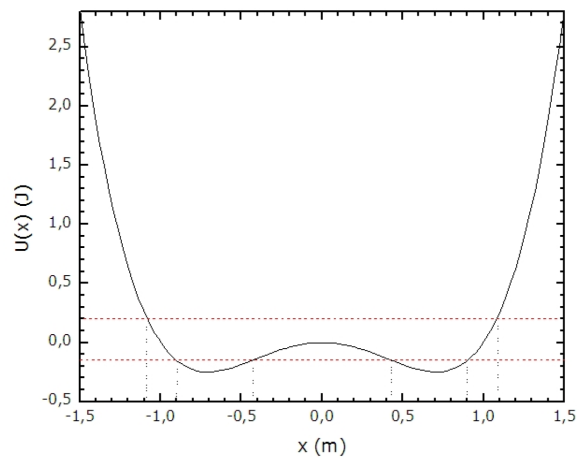

Figura 3: Gráfico de $U(x)$.

Item (b),

$(\boldsymbol{i})$ Com energia negativa a partícula tem movimento oscilatório com duas possibilidades: com pontos de retorno em $-0,9m < x < -0,45m$, ou $0,45m < x < 0,9m$;

$(\boldsymbol{ii})$ neste caso a partícula também tem movimento oscilatório com ponto de retorno em $-1,05m < x1,05m$, aproximadamente.

Problema 4: Um foguete, que está no espaço sideral e inicialmente em repouso em relação a um referencial inercial, tem uma massa total Mconsiderando o módulo de combustível que está cheio. A partir de um dado instante, o motor do foguete é ligado e o combustível passa a ser consumido de acordo com uma vazão constante de γ quilos por segundo. A velocidade dos produtos de exaustão em relação ao foguete é v_e. Considerando que o foguete se move devido à força de propulsão ocasionada por essa vazão, usando o conceito de conservação do momento, obtenha a velocidade $v(t)$ do foguete depois de um tempo t.

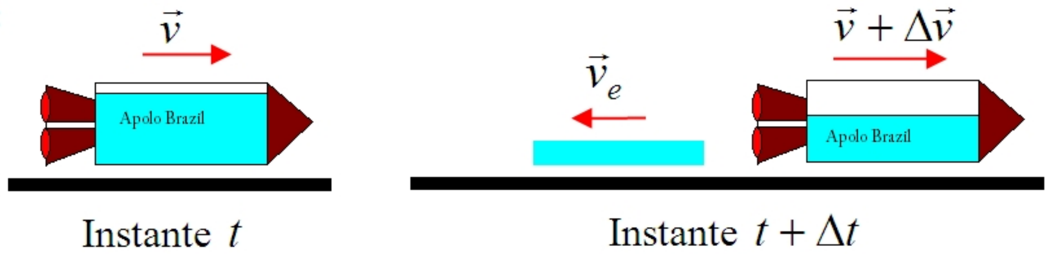

Figura 4: Esquema do objeto perdendo massa com o tempo.

Consideremos que em um dado tempo t o foguete possui massa $M+\delta M$ e velocidade v. Nesse instante, o momento linear será:

$$P_i = (M+\delta M)\ v$$

onde v_1 é a velocidade de saída dos gases. Usando a definição de velocidade relativa ($\vec{v_{12}} = \vec{v_1} - \vec{v_2}$), temos:

$$v_e(-\hat{i}) = v_1(-\hat{i}) - v(+\hat{i}) \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_e - v$$

Que substituindo na equação do momento linear final, nos dá:

$$P_f = M\ (v+\Delta v) - \delta M\,(v_e - v)$$

Como não há forças dissipativas envolvidas, o momento linear é conservado, ou seja:

$$(M+\delta M)\ v = M\ (v+\Delta v) - \delta M\,(v_e - v)$$

$$M\ \Delta v = \delta M\ v_e.$$

A variação de massa no tempo Δt será:

$$M\,(t+\Delta t) - M\,(t) = M - (M+\delta M) = -\delta M$$

Portanto:

$$M\ \Delta v = -\delta M\ v_e \quad \Rightarrow \quad \Delta v = -\frac{\delta M}{M} v_e$$

Tomando uma variação infinitesimal do tempo, $\Delta v \approx dv$ e $\delta M \approx dM$. Dessa forma:

$$dv\,(t) = -\ v_e\ \frac{dM\,(t)}{M}$$

Integrando ambos os lados da equação:

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = -\ v_e\ \int_{M}^{M(t)} \frac{dM}{M}$$

$$v(t) - v_0 = -\ v_e\ [\ln M(t) - \ln M]$$

$$v(t) - v_0 =\ v_e\ [\ln M - \ln M(t)]$$

$$v(t) = v_0 +\ v_e\ \ln\left(\frac{M}{M(t)}\right)\ .$$

Mas,

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\gamma \quad \Rightarrow \quad \int_{M}^{M(t)} dM = -\,\gamma \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad M(t) - M = -\,\gamma\, t \quad \Rightarrow \quad M(t) = M -\ \gamma\, t$$

Por fim, temos que:

$$v(t) = v_0 +\ v_e\ \ln\left(\frac{M}{M -\ \gamma\, t}\right)\ .$$