Gabarito da Prova 3 de MA311 - Cálculo III - Noturno - 26/06/09

1.ª Questão. (1,5 pontos) Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função $f(x) = x^3 \arctan(x^3)$. Sugestão: primeiro encontre a representação em série de potência de $\arctan x = \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$.

Resolução: Comparando com a série geométrica:

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \ \ |u| < 1 \Longrightarrow \ \ \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \ \ |x| < 1. \qquad 0,5 pontos$$

Assim,

$$\arctan(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \qquad 0,5 pontos$$

Como $\arctan(0) = 0 \implies C = 0$. Portanto,

$$f(x) = x^3 \arctan(x^3) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{3(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{6n+6}, \ \ |x| < 1. \qquad 0,5 pontos$$

Resposta:

$$f(x) = x^3 \arctan(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{6n+6}, \ \ |x| < 1.$$

2.ª Questão. (2,0 pontos) Determine os três primeiros termos de cada uma das duas soluções linearmente independentes da equação diferencial

$$(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

da solução em série de potências em torno de $x = 0$.

Resolução: Como $P(x) = 2 + x^2$ e $P(0) = 2 \neq 0$, temos que $x = 0$ é um ponto ordinário. 0,2 pontos

Seja $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Derivando e substituindo na equação:

$$\begin{aligned}
(2+x^2)y'' - xy' + 4y &= (2+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n(n-1) - n + 4)a_n\Big)x^n = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n(n-1) - n + 4)a_n = 0$, e obtemos a relação de recorrência:

$$a_{n+2} = -\frac{n^2 - 2n + 4}{2(n+2)(n+1)} a_n, \qquad n \geq 0. \qquad 0,8 pontos$$

Temos:

$$
\begin{aligned}
n=0 &\quad\Rightarrow\quad a_2=-a_0\\
n=1 &\quad\Rightarrow\quad a_3=-\frac{3}{2.3.2}a_1=-\frac{1}{4}a_1\\
n=2 &\quad\Rightarrow\quad a_4=-\frac{4}{2.3.4}a_2=\frac{1}{6}a_0\\
n=3 &\quad\Rightarrow\quad a_5=-\frac{7}{2.5.4}a_3=\frac{7}{2.5.4.4}a_1=\frac{7}{160}a_1
\end{aligned}
$$

A solução geral é:

$$
\begin{aligned}
y &= a_0+a_1x-a_0x^2-\frac{1}{4}a_1x^3+\frac{1}{6}a_0x^4+\frac{7}{160}a_1x^5+...\\
&= a_0\Big(1-x^2+\frac{x^4}{6}+...\Big)+a_1\Big(x-\frac{1}{4}x^3+\frac{7}{160}x^5+...\Big)=a_0y_1+a_1y_2,
\end{aligned}
$$

logo as duas soluções l.i. são

$$
y_1=1-x^2+\frac{x^4}{6}+... \qquad \text{e} \qquad y_2=x-\frac{1}{4}x^3+\frac{7}{160}x^5+... \qquad 1\mathit{ponto}
$$

3.ª Questão. Considere a equação diferencial $xy''+y'-y=0$. Responda as seguintes questões.

(a)(0,5 pontos) Mostre que $x=0$ é ponto singular regular da equação.

(b)(0,5 pontos) Determine a equação indicial e suas raízes e a relação de recorrência.

(c)(1,0 ponto) Determine a solução em série de Frobenius correspondente à MAIOR raíz da equação indicial encontrando o termo geral.

Resolução: (a) Temos que $P(x)=x,\ Q(x)=1$ e $R(x)=-1$. Logo $P(0)=0$, portanto $x=0$ é ponto singular. Agora

$$
\lim_{x\to 0}\frac{Q(x)}{P(x)}x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}x=1=p_0
$$

$$
\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{P(x)}x^2=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x}^2=\lim_{x\to 0}-x=0=q_0.
$$

Portanto $x=0$ é ponto singular regular.

(b) A equação indicial é $r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2=0$ e suas raízes são: $r_1=0$ e $r_2=0$. Uma solução em série terá a forma

$$
y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n
$$

onde r é raíz da equação indicial, neste caso $r=r_1=r_2=0$. Derivando e substituindo na equação:

$$
\begin{aligned}
xy''+y'-y &= x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n(n+1)+(n+1))a_{n+1}-a_n\Big)x^n=0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $(n(n+1)+(n+1))a_{n+1}-a_n=0$, e obtemos a relação de recorrência:

$$
a_{n+1}=\frac{a_n}{n(n+1)+(n+1)}=\frac{a_n}{(n+1)^2}, \qquad n\geq 0.
$$

(c) Temos:

$$\begin{aligned}
n = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_1 = a_0 \\
n = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = \frac{a_1}{2^2} = \frac{a_0}{2^2} \\
n = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_3 = \frac{a_2}{3^2} a_2 = \frac{a_0}{2^2.3^2} \\
n = 3 \quad &\Rightarrow \quad a_4 = \frac{a_3}{4^2} = \frac{a_0}{2^2.3^2.4^2}
\end{aligned}$$

Logo, o termo geral é da forma:

$$a_n = \frac{a_0}{(n!)^2}, \; n \geq 1$$

e a solução correspondente para $a_0 = 1$ é:

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

4.ª Questão. (a)(1,5 pontos) Encontre a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1, \\ 2, & -1 < x < 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \end{cases}$$

estendida periodicamente com período $P = 4$.

(b)(1,0 ponto) Utilize a parte (a) para encontrar a soma de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Justifique via teorema de convergência de Fourier em $x = 0$. (Dica: Considere o coeficiente de Fourier a_n no caso par $n = 2k$ e no caso ímpar $n = 2k+1$).

Resolução: (a) Note que $4 = 2L$, ou seja $L = 2$. Os coeficientes de Fourier da f são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} 2dx = \frac{1}{2} 2x \Big|_{-1}^{0} = 1. \qquad 0,2 pontos$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} 2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \text{sen} \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-1}^{0} = -\frac{2}{n\pi} \text{sen} \frac{-n\pi}{2} = \frac{2}{n\pi} \text{sen} \frac{n\pi}{2}. \; 0,5 pontos$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} 2 \text{sen} \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-1}^{0} = -\frac{2}{n\pi} (1 - \cos \frac{-n\pi}{2}) = \frac{2}{n\pi} (\cos \frac{n\pi}{2} - 1).$$

0,5 pontos

A série de Fourier de f é:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \text{sen} \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{n\pi x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \text{sen} \frac{n\pi x}{2}. \qquad 0,3 pontos$$

(b) Pelo teorema de convergência de Fourier em $x = 0$ a série de Fourier converge para $\dfrac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 1$. Assim

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \text{sen} \frac{n\pi}{2} \qquad 0,5 pontos.$$

Agora,

$$\begin{cases} \text{se } n = 2k, & \text{sen} k\pi = 0, \\ \text{se } n = 2k+1, & \text{sen} \dfrac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k. \end{cases}$$

Portanto, podemos escrever a série como

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \qquad \text{e daí} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \qquad 0,5 pontos.$$

5.ª Questão. (2,0 pontos) Resolva o seguinte problema de condução do calor usando o método de separação de variáveis justificando TODA a análise.

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 3\text{sen}x + 2\text{sen}2x - \text{sen}3x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Resolução: Seja $u(x,t) = X(x)T(t)$. Derivando $u_{xx} = X''T$ e $u_t = XT'$ e substituindo na equação,

$$X''T = XT' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \sigma \text{ constante}$$

já que x e t são variáveis independentes. Assim obtemos duas EDOs

$$X'' = \sigma X \quad \text{e} \quad T' = \sigma T. \qquad 0,3 pontos$$

Utilizando as condições de contorno

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0.$$

Logo X deve satisfazer o seguinte problema

$$(A) \begin{cases} X'' = \sigma X, & 0 < x < \pi, \\ X(0) = 0, & X(\pi) = 0. \end{cases} \qquad 0,3 pontos$$

Caso $\sigma > 0$: Tomando $\sigma = \lambda^2$, a solução geral da equação para X é

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$

Utilizando as condições de contorno:
$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 \Rightarrow X(x) = c_1(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})$.
$X(\pi) = c_1(e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$, o que não interessa.

Caso $\sigma = 0$: A solução geral é $X(x) = c_1 x + c_2$. Utilizando as condições de contorno:
$X(0) = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x \Rightarrow X(\pi) = c_1\pi = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$, o que não interessa.

Caso $\sigma < 0$: Tomando $\sigma = -\lambda^2$, a solução geral da equação é:

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \text{sen}(\lambda x).$$

Utilizando as condições de contorno:
$X(0) = c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = c_2\text{sen}(\lambda x) \Rightarrow X(\pi) = c_2\text{sen}(\lambda\pi) = 0$. Como queremos $c_2 \neq 0 \Rightarrow \text{sen}(\lambda\pi) = 0 \Rightarrow \lambda\pi = n\pi$.
Para cada $n \ge 1$, seja $\lambda_n = n$, assim $X_n(x) = \text{sen}(nx)$ são soluções do problema (A). 0,5 pontos

Equação para T : Temos $T' = \lambda_n^2 T$, cuja solução geral, para cada $n \ge 1$, é $T_n(t) = c_n e^{-n^2 t}$.
Assim para cada $n \ge 1$ a função

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n\text{sen}(nx)e^{-n^2 t} \qquad 0,3 pontos$$

satisfaz a equação do calor junto com as condições de contorno, com c_n constante qualquer.
Procuramos uma solução que satisfaz a condição inicial $u(x,0) = 3\text{sen}x + 2\text{sen}2x - \text{sen}3x$. Seja

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t}\text{sen}nx.$$

Assim,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}nx = 3\text{sen}x + 2\text{sen}2x - \text{sen}3x \implies c_1 = 3, \ c_2 = 2, \ c_3 = -1, \ c_n = 0, \ n \ge 4.$$

0,4 pontos

Resposta: A solução do problema é

$$u(x,t) = 3e^{-t}\text{sen}x + 2e^{-4t}\text{sen}2x - e^{-9t}\text{sen}3x. \qquad 0,2 pontos$$