$3^{\underline{a}}$ PROVA MA211 — 23/10/08

GABARITO PROVA 3 - QUINTA.

(1) Resolucao: $2x - x^2 - y^2 = 1 - (x-1)^2 - y^2$. A mudanca de variavel é $x - 1 = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$ (coordenadas polares com polo no ponto (1,0)). De forma que subtituindo esses valores em $x^2 + y^2 - x = 0$ tem-se que $r = -cos\theta$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$. Desta forma, por mudanca de variavel temos que

$$\int\int_B \sqrt{2x - x^2 - y^2}dxdy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{-\cos\theta} r\sqrt{1 - r^2}dsd\theta,$$

onde $\int \sqrt{1-r^2}dr = -\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}$. Entao

$$\int\int_B \sqrt{2x - x^2 - y^2}dxdy = -\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [|sen\theta|^3 - 1]d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |sen\theta|^3 d\theta.$$

Notando que $sen^3\theta = sen\theta(1 - cos^2\theta)$ entao $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen^3\theta d\theta = 4/3$ e $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} sen^3\theta = -4/3$. Assim

$$\int\int_B \sqrt{2x - x^2 - y^2}dxdy = \pi/3 - 8/9.$$

(2) Resolucao: Facamos a mudanca de variavel $u = x + y - z, v = x + 2y + z$ e $w = z$. Entao $x = 2u - v + 3w, y = -u + v - 2w$ e $z = w$. Alem disso o determinante jacobiano é dado por $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = 1$. A regiao B é mapeada pela transformacao acima na regiao

$$B_{uvw} = \{(u,v,w) \in R^3; 0 \leq u \leq \pi/4, 1 \leq v \leq 2, 0 \leq w \leq 1.\}$$

Por mudanca de variavel, tem-se que

$$\int\int\int_B \frac{sen^2(x+y-z)}{x+2y+z}dxdydz = \int\int\int_{B_{uvw}} \frac{senu}{v}dudvdw$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\pi/4} \frac{sen^2u}{v}dudv = \int_1^2 1/vdv \int_0^{\pi/4} sen^2udu = ln2(\pi/8 - 1/4).$$

(3) Resolucao: $f_x = 2xy \Rightarrow f(x,y,z) = x^2y + K_1(y,z)$; $f_y = x^2 + 2yz \Rightarrow \frac{\partial K_1}{\partial y}(y,z) + x^2 = x^2 + 2yz \Rightarrow K_1(y,z) = y^2z + K_2(z)$. Assim,

$$f(x,y,z) = x^2y + y^2z + K_2(z).$$

Por outro lado, $f_z = y^2 \Rightarrow y^2 = y^2 + K_2'(z) \Rightarrow K_2(z) = C$ onde C é constante. Logo, $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + C$. Desta forma, o campo é conservativo e pelo teorema fundamental

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\gamma = f(1,0,1) - f(0,0,0) = 0.$$

(4) Resolucao: $x^2 - 1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1$. Seja $C = C_1 \cup C_2$ onde $C_1 : x = cos\ t, y = sen\ t$, $0 \leq t \leq \pi$; $C_2 : x = x, y = x^2 - 1, -1 \leq x \leq 1$. Pelo Teorema de Green,

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} 2dxdy = 2\int_C xdy = 2\left(\int_{C_1} xdy + \int_{C_2} xdy\right) = 2\left(\int_0^\pi \cos^2 tdt + \int_{-1}^{1} 2x^2dx\right) = \pi + 8/3.$$