Cálculo Numérico (MS211) - Turmas A e B PROVA 2 (21/06/2011)

Nome: ______________________________ RA: __________

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Total

1. (3.0 pontos) Com base nos dados da tabela

x	0.25	0.30	0.32	0.33	0.40	0.42
$f(x)$	0.80	0.84	0.79	0.92	0.95	0.93

e usando um polinômio interpolador de grau dois, $p(x)$, deseja-se encontrar x tal que $f(x) = 0.90$.

   (a) Quais pontos serão usados na interpolação? Por que?
   (b) Qual é a aproximação obtida para x?
   (c) O que se pode dizer sobre a aplicação da interpolação inversa neste caso? Explique.

2. (2.0 pontos) A fórmula de Simpson repetida para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ é dada por

$$\frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i})\right),$$

com erro $\frac{-nh^5}{180}f^{(4)}(\xi)$, em que $\xi \in (a,b)$, $[x_0, x_n] \equiv [a,b]$ e $h = (b-a)/n = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$. Para que tipo de funções f esta fórmula é exata? Explique.

3. (3.0 pontos) Considere o Problema de Valor Inicial $y' = f(x,y)$, para $x > x_0$, com $y(x_0) = y_0$. O Método de Euler Modificado (um método de Runge–Kutta de segunda ordem) é dado por:

$$\begin{cases} \widehat{y} &= y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, \widehat{y}\right). \end{cases}$$

   (a) Aplique este método com $h = 0.5$ para aproximar o valor solução do PVI: $y' = \frac{2y}{x}$, para $x > 1$, com $y(1) = 1$, em $x = 2$.
   (b) Cite vantagens e/ou desvantagens deste método comparado ao método de Taylor de segunda ordem.

4. (2.0 pontos) Exiba o sistema linear tridiagonal $Ay = b$, a ser resolvido para aproximar a solução do Problema de Valor de Contorno abaixo por diferenças finitas, com $h = 0.2$:

$$(\text{PVC}) \begin{cases} y'' - xy = x^2, \quad 1 < x < 2, \\ y(1) = 2, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Obs: Não é preciso resolver o sistema!

Algumas fórmulas:

$$p_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \cdots + f_n L_n(x), \text{ onde } L_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1)\cdots f(x_{m-1})) + f(x_m)] - \frac{mh^3}{12} f^2(\xi)$$

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{m-2}) + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)] - \frac{mh^5}{180} f^4(\xi)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n), K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1),$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n), K_2 = hf(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{K_1}{2}), K_3 = hf(x_n + \tfrac{3h}{4}, y_n + \tfrac{3K_2}{4})$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{2}{9}K_1 + \tfrac{1}{3}K_2 + \tfrac{4}{9}K_3$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n), K_2 = hf(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{K_1}{2}), K_3 = hf(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{K_2}{2}), K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} \qquad y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$$

$$A\alpha = d, \text{ sendo } a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)g_j(x_k) \text{ e } d_i = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)f(x_k)$$

$$J(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$$