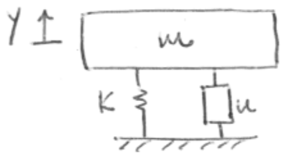
28/11/2007

Controle de Sistemas Mecânicos - Quarta Prova - ~~31/10/2007~~

Nome: RA: Turma:

1. Considere o movimento vertical de uma mesa para isolamento de vibrações de massa $2000kg$ apoiada sobre quatro molas de rigidez $100000N/m$ cada uma. Este sistema conta com um atuador hidráulico entre o solo e a mesa que gera uma força vertical $u(t)$ para assegurar que a velocidade da mesa seja nula.




$m\ddot{y} + ky = u(t)$ ; $y = x_1$ ; $\dot{y} = x_2$ ; $\ddot{y} = x_2$;

$m\dot{x}_2 + kx_1 = u(t) \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u(t)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix}u = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -200 & 0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/2000\end{bmatrix}}_{B}u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \ ; \ D = 0.$$

(a) (valor 1.0) Verifique se o sistema é controlável, e em caso afirmativo determine a matriz de ganhos de realimentação de estados de forma que o sistema em malha fechada possua um sobressinal de 5% e um tempo de estabilização a 2% de $1.5s$ (resposta em velocidade). Considere a posição ($x_1$) e a velocidade ($x_2$) como estados.

$$\xi = \frac{\ln(100/5)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(100/5)}} = 0{,}6901 \ ; \ t_{e_{2\%}} = \frac{4}{\xi\omega_n} = 1{,}5 \Rightarrow \omega_n = 3{,}8641$$

pólos desejados : $pd = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -2{,}6667 \pm j\,2{,}7965$

Controlabilidade : $M = ctrb(A,B) = \begin{bmatrix}0 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0\end{bmatrix}\times 10^{-3}$ ; $\det M = -2{,}5\times 10^{-7} \neq 0$ (controlável)

$K = acker(A,B,pd) = [-3{,}7014 \quad 0{,}1067]\times 10^{5}$ (matriz de ganhos de realimentação)

(b) (valor 1.0) Determine as margens de estabilidade relativa para o sistema controlado e a função de transferência equivalente do controlador.

margin (A,B,K,D) $\Rightarrow$ margem de ganho = 0,674 dB
margem de fase = −6,12 dB

$l = ss(A,B,K,D)$ ; $ls = tf(l) \rightarrow L(s) = \frac{5{,}333s - 185{,}1}{s^2 + 200}$ (função transf. malha aberta)

$p = ss(A,B,C,D)$ ; $ps = tf(p) \rightarrow P(s) = \frac{0{,}005s}{s^2 + 200}$ (função transf. da planta)

$$K(s) = \frac{L(s)}{P(s)} = \frac{1{,}067\times 10^4 s - 3{,}701\times 10^5}{s}$$ (função de transf. do controlador)

$$K(s) = \frac{5{,}333\,s^3 - 185{,}1\,s^2 + 1067\,s - 3{,}701 \times 10^4}{0{,}005\,s^3 + 0{,}1\,s}$$

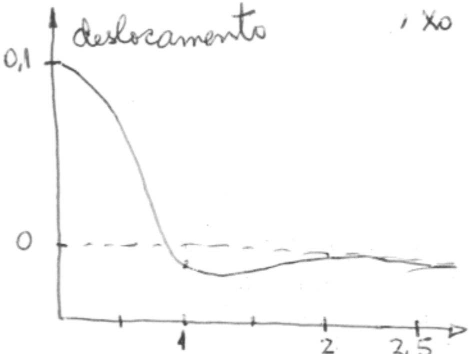
(função controlador sem simplificar)

(c) (valor 1.0) Considere que este sistema é deslocado de $0.1m$ em relação a sua posição de equilíbrio e então solto. Esboce as curvas dos dois estados em função do tempo, e a curva do sinal de controle também em função do tempo.

$X_0 = [0{,}1 \quad 0]'$ ; $A_K = A - BK$ ; $B_K = [0 \quad 0]'$ (regulador) ; $D_K = 0$ ;

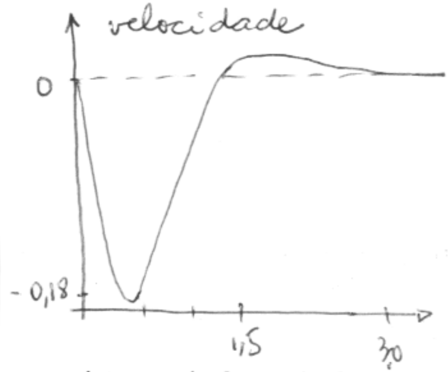
$C_K = [1 \quad 0]$

initial $(A_K, B_K, C_K, D_K, X_0)$



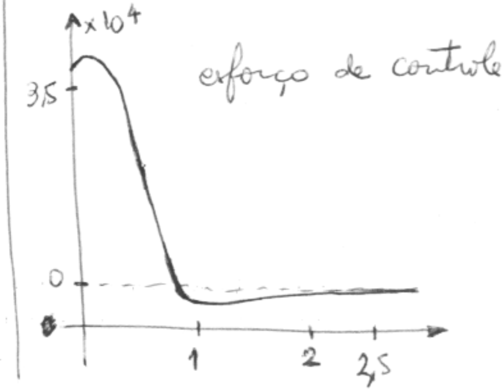

$C_K = [0 \quad 1]$

initial $(A_K, B_K, C_K, D_K, X_0)$




$u = -Kx$

initial $(A_K, B_K, -K, D_K, X_0)$




(d) (valor 1.0) Verifique se o sistema é observável, e em caso afirmativo determine os ganhos da realimentação do observador com pólos 4 vezes os pólos desejados para a malha fechada.

matriz observabilidade : $O = \text{obsv}(A, C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 & 0 \end{bmatrix}$ ; $\det(O) = 200 \neq 0$ (observável)

pólos : $4 * pd$

$L = \text{acker}(A', C', 4 * pd) = \begin{bmatrix} -0{,}1945 \\ 21{,}3333 \end{bmatrix}$

(e) (valor 1.0) Determine as margens de estabilidade relativa para o sistema controlado e a função de transferência equivalente do controlador com observador.

Controlador com observador : co = ss ( A - BK - LC + LDK , L, K, 0 )

( função transf. equiv. ) $co(s) = tf(co) = \dfrac{2{,}996 \times 10^5 s - 7{,}481 \times 10^6}{s^2 + 26{,}67 s + 17{,}84}$

margens $\Longrightarrow$ margins ( ps * co(s) ) $\Longrightarrow$ margem de ganho : 2,7 dB

margem de fase : $-27{,}6°$

planta    controlador equivalente

(f) (valor 1.0) Seja um observador de Luenberger cuja estimativa dos estados é dada por $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$. Deduza o modelo de estados de malha fechada em termos dos estados do sistema e do erro do observador.

Supondo realimentação de estados estimados

(1) $\dot{x} = Ax + B(-K\hat{x})$

(2) $y = Cx$ (supondo D = 0)

(3) $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$

Substit. $u = -K\hat{x}$ em (3) e usando (2) :

(4) $\dot{\hat{x}} = (A - BK + LC)\hat{x} - LCx$

Juntando (1) e (4)

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ -LC & A - BK + LC \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \hat{x} \end{Bmatrix}$$

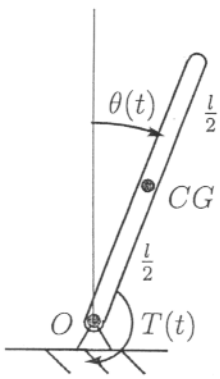
$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \hat{x} \end{Bmatrix}$$

com D = 0

Obs. 1 : Este observador teve o sinal trocado em relação ao que foi visto em aula.

Obs. 2 : Se $D \neq 0$ é usual fazer $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} + Du - y)$ e o resultado é o mesmo do acima demonstrado a menos de $y = \begin{bmatrix} C & -DK \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \hat{x} \end{Bmatrix}$.

2. Seja o sistema composto de uma barra reta homogênea de massa $m$ articulada no ponto $O$, cujo movimento está restrito ao plano da figura. Um torque $T(t)$ é aplicado no ponto $O$ de modo a manter a barra na vertical com $\theta = 0$.




$$\sum M_O = J_O \ddot{\theta} \qquad J_O = J_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

adotando

$+\circlearrowleft \ \downarrow g$

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} = mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta + T$$

Linearizando em torno de $\theta \approx 0$ ($\operatorname{sen}\theta \approx \theta$):

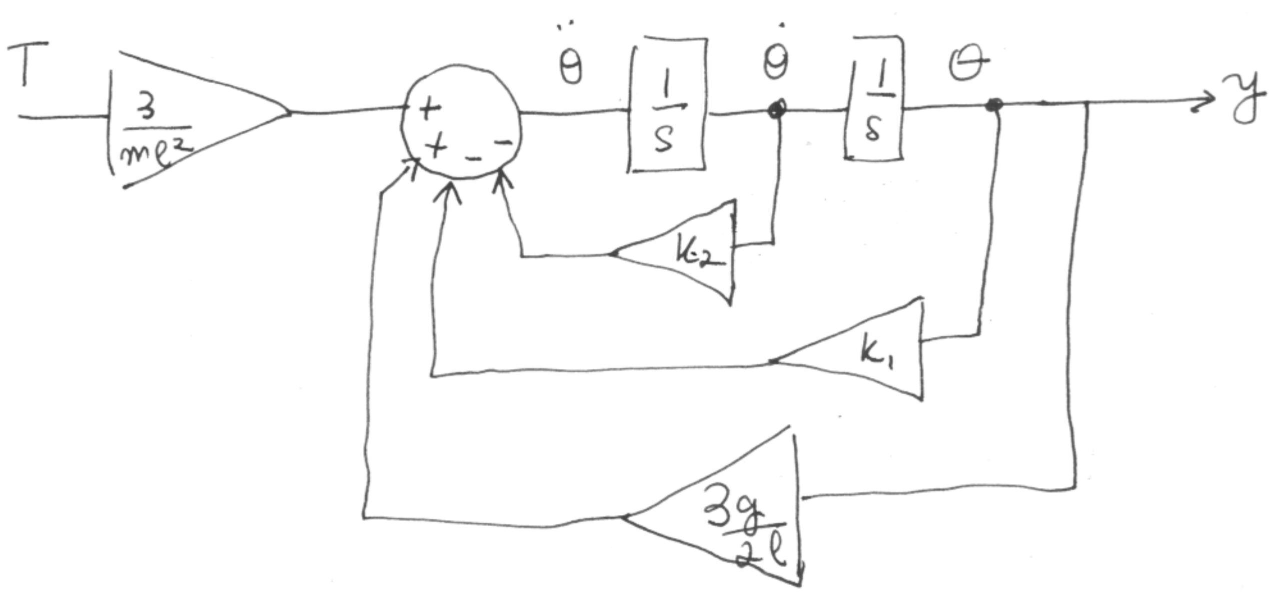
$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{mgl}{2}\theta = T(t)$$

(a) (valor 1.0) Determine a função de transferência entre o torque de entrada $T$ e o ângulo de saída $\theta$.

$$\left(\frac{ml^2}{3}s^2 - mg\frac{l}{2}\right)\Theta(s) = T(s)$$

$$\Rightarrow \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \boxed{\frac{3/ml^2}{s^2 - \frac{3g}{2l}}}$$

(b) (valor 1.0) Considerando que se pode medir o ângulo $\theta$ e a velocidade angular $\dot{\theta}$, desenhe o diagrama de blocos do sistema e inclua ramos de realimentação proporcionais a estas variáveis.



(c) (valor 1.0) Determine os valores dos ganhos proporcionais de modo que $\theta = 0$ seja uma posição de equilíbrio estável e que, se perturbada, a barra oscile com freqüência de $1 rad/s$ e fator de amortecimento de 0.4. Considere $m = 10kg$ e $l = 0.5m$.

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{ml^2}T + \left(\frac{3g}{2l} - k_1\right)\theta - k_2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + k_2\dot{\theta} + \left(k_1 - \frac{3g}{2l}\right)\theta = \frac{3}{ml^2}T$$

$$\omega_d = 1\ rad/s\ ;\ \xi = 0.4 \Rightarrow \omega_n = \omega_d / \sqrt{1-\xi^2} = 1{,}091\ rd/s$$

$$2\xi\omega_n = k_2 \Rightarrow \boxed{k_2 = 0{,}873}.$$

$$\omega_n^2 = k_1 - \frac{3g}{2l} \Rightarrow \boxed{k_1 = 30{,}62}.$$

com $g = 9{,}81 m/s^2$

(d) (valor 1.0) A partir do diagrama de blocos, determine o modelo de estados e a partir deste a respectiva função de tansferência de malha fechada.

usando $x_1 = \theta \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$

$x_2 = \dot{\theta}$

$$\dot{x}_2 = \left(\frac{3g}{2l} - k_1\right)x_1 - k_2 x_2 + \frac{3}{ml^2}T$$

$$\dot{x}_2 = -1{,}19x_1 - 0{,}873x_2 + 9{,}6\,T$$

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1{,}19 & -0{,}873\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1 \\ x_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 9{,}6\end{bmatrix}T$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1 \\ x_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}T$$

MATLAB $\quad FTMF = C(sI-A)^{-1}B + D$

```
>> SO = ss(A, B, C, D)
>> tf(SO)
>> damp(SO)
```

$$\longrightarrow \boxed{\frac{9{,}6}{s^2 + 0{,}873s + 1{,}19}}.$$

damp = 0,4 $\quad \omega_n = 1{,}09$ Ok..

Algumas fórmulas

$$pss = 100\frac{y_p-\gamma}{\gamma} \qquad t_{e5\%} \approx 3.2\tau = \frac{3.2}{\xi w_n}$$

$$\xi = \frac{ln\frac{100}{pss}}{\sqrt{\pi^2+\left(ln\frac{100}{pss}\right)^2}} \qquad t_{e2\%} \approx 4\tau = \frac{4}{\xi w_n}$$

$$J = \int r^2 dm \qquad J = J_{cg} + md^2$$

---

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A} - k_p\mathbf{BK} & k_p\mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{c} k_p\mathbf{B} \\ 0 \end{array} \right] \mathbf{r}$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C} - k_p\mathbf{DK} \quad k_p\mathbf{DK}] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{array} \right\} + k_p\mathbf{Dr}.$$

---

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A} & -k_p\mathbf{BK} \\ \mathbf{LC} & \mathbf{A} - k_p\mathbf{BK} - \mathbf{LC} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{c} k_p\mathbf{B} \\ k_p\mathbf{B} \end{array} \right] \mathbf{r}$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C} \quad - k_p\mathbf{DK}] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{array} \right\} + k_p\mathbf{Dr}.$$

---

$$H_{eq}(s) = \mathbf{K}[sI - (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC} + \mathbf{LDK})]^{-1}\mathbf{L},$$

---

$$H_{eq}(s) = \frac{\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}}{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}}.$$

---