INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP
Teste 3 - F 315 A 07/11/2013

RA:____________ Nome:____

a-) Partindo da equação de Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

encontre a "segunda forma" da equação de Euler, ou seja:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$$

b-) Considere a superfície gerada pela revolução de uma curva que liga dois pontos fixos: (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Usando a **segunda forma da equação de Euler**, encontre a equação da curva que minimiza a área da superfície gerada. Dados:

$$\int du \frac{1}{u+u^3} = \frac{1}{2} ln\left(\frac{u^2}{u^2+1}\right) \qquad \int dv \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{a^2}-1}} = a\ cosh^{-1}\left(\frac{v}{a}\right)$$

Solução
a-)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) &= \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} - \left[y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \\
&= y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x} - y''\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} + y'\underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]}_{=0 \text{ pela Equação de Euler}} = \frac{\partial f}{\partial x}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}} \qquad \textbf{(4 pontos)}$$

b-) Exitem várias soluções possíveis. A única condição é usar a **segunda forma da equação de Euler**. Uma possível solução:
Elemento de área:

$$dA = 2\pi x dS = 2\pi x\sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{1}$$

Queremos minimizar a área total:

$$A = 2\pi \int x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int \underbrace{x\sqrt{1 + y'^2}}_{f}\, dx \tag{2}$$

Assim identificamos $f = x\sqrt{1 + y'^2}$. Usamos a segunda forma da equação de Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2 x}{\sqrt{1 + y'^2}}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2 x}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \frac{\sqrt{1+y'^2} - x(1+y'^2)^{-1/2}y'y''}{1+y'^2}$$

Logo:

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{1+y'^2} - x(1+y'^2)^{-1/2}y'y''}{1+y'^2}$$

Multiplicando por $\sqrt{1+y'^2}$ e rearranjando:

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dy'}{y'(1+y'^2)} \tag{3}$$

Usando a integral do enunciado:

$$-lnx + \underbrace{lna}_{\text{constante}} = \frac{1}{2}ln\left[\frac{y'^2}{(1+y'^2)}\right] \tag{4}$$

Tomando a exponencial da equação:

$$\frac{a}{x} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \tag{5}$$

Quadrando e reescrevendo a expressão:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} \tag{6}$$

Usando a outra integral do enunciado:

$$\boxed{y = acosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + b} \quad \textbf{(6 pontos)} \tag{7}$$