MA 327 Álgebra Linear

Segundo Semestre de 2008

Segundo Teste

Nome:	**RA:**

Na prova temos quatro questões enumeradas, 0, 1, 2 e 3. O aluno deve fazer uma questão cujo número é o resto da divisão por 4 do último algarismo de seu RA. Exemplo: RA 0314468, que tem 8 como último algarismo. Como o resto da divisão de 8 por 4 é 0, o aluno com esse RA deve fazer a Questão 0.

Questão 0. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{ (0,1), (1,1) \}$ é a base ordenada para $\mathbb{R}^2$ e $\gamma = \{ 1+t, t-1 \}$ é a base ordenada para $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

(a) Determine o elemento $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de modo que $T(a,b) = 1+t$.

(b) Determine explicitamente a expressão de $T(a,b)$.

(c) Verifique se T é um isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ em $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso $T^{-1} : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Questão 1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{ (1,1), (0,1) \}$ é a base ordenada para $\mathbb{R}^2$ e $\gamma = \{ 1, t-1 \}$ é a base ordenada para $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

(a) Determine o elemento $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de modo que $T(a,b) = t-1$.

(b) Determine explicitamente a expressão de $T(a,b)$.

(c) Verifique se T é um isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ em $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso $T^{-1} : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Questão 2. Considere a transformação linear $T : I\!R^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(I\!R)$ tal que

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{ (1,-1), (1,1) \}$ é a base ordenada para $I\!R^2$ e $\gamma = \{ 2t-1, 1+t \}$ é a base ordenada para $\mathcal{P}_1(I\!R)$.

(a) Determine o elemento $(a,b) \in I\!R^2$ de modo que $T(a,b) = 1+t$.

(b) Determine explicitamente a expressão de $T(a,b)$.

(c) Verifique se T é um isomorfismo de $I\!R^2$ em $\mathcal{P}_1(I\!R)$. Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso $T^{-1} : \mathcal{P}_1(I\!R) \longrightarrow I\!R^2$.

Questão 3. Considere a transformação linear $T : I\!R^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(I\!R)$ tal que

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{ (-1,-1), (0,1) \}$ é a base ordenada para $I\!R^2$ e $\gamma = \{ t, 2t-1 \}$ é a base ordenada para $\mathcal{P}_1(I\!R)$.

(a) Determine o elemento $(a,b) \in I\!R^2$ de modo que $T(a,b) = t$.

(b) Determine explicitamente a expressão de $T(a,b)$.

(c) Verifique se T é um isomorfismo de $I\!R^2$ em $\mathcal{P}_1(I\!R)$. Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso $T^{-1} : \mathcal{P}_1(I\!R) \longrightarrow I\!R^2$.

ATENÇÃO:
Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativa **não** serão consideradas.
Sistemas lineares devem ser resolvidos por **escalonamento** de matrizes.

Boa Prova!

G A B A R I T O

Questão 0.

A primeira coluna da matriz corresponde as coordenadas de $T(0,1)$ na base γ e a segunda coluna as coordenadas de $T(1,1)$ base γ:

$$\begin{aligned} T(0,1) &= 1(1+t)+0(t-1) \\ T(1,1) &= 1(1+t)+1(t-1) \end{aligned}$$

Logo a resposta para o item (a) é $(a,b)=(0,1)$.

Para calcularmos o valor de $T(a,b)$ precisamos expressar (a,b) em coordenadas da base β:

$$(a,b)=x(0,1)+y(1,1)=(y,x+y)\,.$$

Portanto

$$\begin{cases} a &= \quad y \\ b &= x+y \end{cases}$$

Portanto $y=a$ e $x=b-a$, e vamos obter

$$(a,b)=(b-a)(0,1)+a(1,1)\,.$$

Calculamos agora

$$\begin{aligned} T(a,b) &= T((b-a)(0,1)+a(1,1)) \\ &= (b-a)T(0,1)+aT(1,1) \\ &= (b-a)(1+t)+a((1+t)+(t-1)) \\ &= (b-a)(1+t)+a2t\,, \end{aligned}$$

que é a resposta do item (b).

No item (c) vejamos primeiro se T é um isomorfismo. Como os dois espaços tem a mesma dimensão, basta verificar se T é injetora (ou sobrejetora), aplicando em seguida o Teorema do Núcleo e da Imagem. Mas se $T(a,b)=0$, então $(b-a)+(b+a)t=0$. Resolvendo o sistema linear obtemos $a=0$ e $b=0$. Logo T é injetora e portanto um isomorfismo.

Uma outra maneira mais direta é verificar se a matriz de T é inversível. Como a matriz de T (em relação as base β e γ) tem determinante $\neq 0$ ela é invertível e portanto T é um isomorfismo.

Vamos agora determinar T^{-1}. Para isso determinamos primeiro a inversa da matriz de T usando linha equivalência

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{e assim obtemos} \quad [T^{-1}]_{\beta}^{\gamma} = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Vamos agora construir $T^{-1}(a_o + a_1 t)$ como fizemos no início do exercício:

$$T^{-1}(1+t) = 1(0,1) + 0(1,1) = (0,1) \quad \text{e} \quad T^{-1}(t-1) = -1(0,1) + 1(1,1) = (1,0)\,.$$

Vamos em seguida encontrar x, $y \in I\!R$ tais que

$$a_o + a_1 t = x(1+t) + y(t-1) = (x-y) + (x+y)t\,.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x - y &= a_o \\ x + y &= a_1 \end{cases}$$

obtemos $x = \dfrac{a_o + a_1}{2}$ e $y = \dfrac{a_1 - a_o}{2}$.

Portanto

$$\begin{aligned} T^{-1}(a_o + a_1 t) &= \frac{a_o + a_1}{2} T^{-1}(1+t) + \frac{a_1 - a_o}{2} T^{-1}(t-1) \\ &= \frac{a_o + a_1}{2}(0,1) + \frac{a_1 - a_o}{2}(1,0) \\ &= \left(\frac{a_1 - a_o}{2}, \frac{a_o + a_1}{2} \right). \end{aligned}$$

Observação. É possível resolver o item (a) usando diretamente a matriz $[T]_{\gamma}^{\beta}$.

De fato, temos que

$$1 + t = 1(1+t) + 0(t-1)\,.$$

Logo, sua matriz de coordenadas na base γ é dada por $[1+t]_{\gamma} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right]$. Para obter

$$(a,b) = x(0,1) + y(1,1)\,.$$

tal que $T(a,b) = 1 + t$ temos que procurar $[(a,b)]_{\beta} = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]$ tal que

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right].$$

Resolvendo-se esse sistema encontramos os valores de x e y e fabricamos (a,b).

Questão 1.

A primeira coluna da matriz corresponde as coordenadas de $T(1,1)$ na base γ e a segunda coluna as coordenadas de $T(0,1)$ base γ:

$$\begin{aligned} T(1,1) &= 1 + 0(t-1) \\ T(0,1) &= 1 + (-1)(t-1) \end{aligned}$$

Observando-se as duas equações acima vemos que $T(1,1) - T(0,1) = t-1$. Como T é linear

$$T(1,1) - T(0,1) = T((1,1) - (0,1)) = T(1,0)\,.$$

Logo a resposta para o item (a) é $(a,b) = (1,0)$.

Para calcularmos o valor de $T(a,b)$ precisamos expressar (a,b) em coordenadas da base β:

$$(a,b) = x(1,1) + y(0,1) = (x, x+y)\,.$$

Portanto

$$\begin{cases} a &= \quad x \\ b &= x + y \end{cases}$$

Portanto $x = a$ e $y = b - a$, e vamos obter

$$(a,b) = a(1,1) + (b-a)(0,1)\,.$$

Calculamos agora

$$\begin{aligned} T(a,b) &= T(a(1,1) + (b-a)(0,1)) \\ &= aT(1,1) + (b-a)T(0,1) \\ &= a + (b-a)(1-(t-1)) \\ &= a + (b-a)(2-t) \\ &= (2b-a) + (a-b)t\,, \end{aligned}$$

que é a resposta do item (b).

No item (c) vejamos primeiro se T é um isomorfismo. Como os dois espaços tem a mesma dimensão basta verificar se T é injetora (ou sobrejetora), aplicando em seguida o Teorema do Núcleo e da Imagem. Mas se $T(a,b) = 0$, então $(2b-a) + (a-b)t = 0$. Resolvendo o sistema linear obtemos $a = 0$ e $b = 0$. Logo T é injetora e portanto um isomorfismo.

Uma outra maneira mais direta é verificar se a matriz de T é inversível. Como a matriz de T (em relação as base β e γ) tem determinante $\neq 0$ ela é invertível e portanto T é um isomorfismo.

Vamos agora determinar T^{-1}. Para isso determinamos primeiro a inversa da matriz de T usando linha equivalência

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad \text{e assim obtemos} \quad [T^{-1}]^{\gamma}_{\beta} = \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}\right].$$

Vamos agora construir $T^{-1}(a_o + a_1t)$ como fizemos no início do exercício:

$$T^{-1}(1) = 1(1,1) + 0(0,1) = (1,1) \quad \text{e} \quad T^{-1}(t-1) = 1(1,1) + (-1)(0,1) = (1,0)\,.$$

Vamos em seguida encontrar x, $y \in I\!R$ tais que

$$a_o + a_1t = x1 + y(t-1) = (x-y) + yt\,.$$

Resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y & = & a_o \\ y & = & a_1 \end{array}\right.$$

obtemos $y = a_1$ e $x = a_o + a_1$.

Portanto

$$\begin{array}{rcl} T^{-1}(a_o + a_1t) & = & (a_o + a_1)T^{-1}(1) + a_1T^{-1}(t-1) \\ & = & (a_o + a_1)(1,1) + a_1(1,0) \\ & = & (a_o + 2a_1\,,\, a_o + a_1) \end{array}$$

Observação. É possível resolver o item (a) usando diretamente a matriz $[T]^{\beta}_{\gamma}$.

De fato, temos que

$$t - 1 = 01 + 1(t-1)\,.$$

Logo, sua matriz de coordenadas na base γ é dada por $[t-1]_{\gamma} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]$. Para obter

$$(a,b) = x(1,1) + y(0,1)\,.$$

tal que $T(a,b) = t-1$ temos que procurar $[(a,b)]_{\beta} = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]$ de modo que

$$\left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right].$$

Resolvendo–se esse sistema encontramos os valores de x e y e fabricamos (a,b).

Questão 2.

A primeira coluna da matriz corresponde as coordenadas de $T(1,-1)$ na base γ e a segunda coluna as coordenadas de $T(1,1)$ base γ:

$$\begin{array}{rcl} T(1,-1) & = & 1(2t-1)+(-1)(1+t) \\ T(1,1) & = & 0(2t-1)+1(1+t) \end{array}$$

Logo a resposta para o item (a) é $(a,b)=(1,1)$.

Para calcularmos o valor de $T(a,b)$ precisamos expressar (a,b) em coordenadas da base β:

$$(a,b)=x(1,-1)+y(1,1)=(x+y,-x+y)\,.$$

Portanto

$$\begin{cases} a & = & x+y \\ b & = & -x+y \end{cases}$$

Portanto $y=\dfrac{a+b}{2}$ e $x=\dfrac{a-b}{2}$, e vamos obter

$$(a,b)=\frac{a-b}{2}(1,-1)+\frac{a+b}{2}(1,1)\,.$$

Calculamos agora

$$\begin{array}{rcl} T(a,b) & = & T\left(\dfrac{a-b}{2}(1,-1)+\dfrac{a+b}{2}(1,1)\right) \\ & = & \dfrac{a-b}{2}T(1,-1)+\dfrac{a+b}{2}T(1,1) \\ & = & \dfrac{a-b}{2}(t-2)+\dfrac{a+b}{2}(1+t) \\ & = & at+\dfrac{3b-a}{2} \end{array}$$

que é a resposta do item (b).

No item (c) vejamos primeiro se T é um isomorfismo. Como os dois espaços tem a mesma dimensão basta verificar se T é injetora (ou sobrejetora), aplicando em seguida o Teorema do Núcleo e da Imagem. Mas se $T(a,b)=0$, então $at+\dfrac{3b-a}{2}=0$. Resolvendo o sistema linear obtemos $a=0$ e $b=0$. Logo T é injetora e portanto um isomorfismo.

Uma outra maneira mais direta é verificar se a matriz de T é inversível. Como a matriz de T (em relação as base β e γ) tem determinante $\neq 0$ ela é invertível e portanto T é um isomorfismo.

Vamos agora determinar T^{-1}. Para isso determinamos primeiro a inversa da matriz de T usando linha equivalência

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{e assim obtemos} \quad [T^{-1}]^{\gamma}_{\beta} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right].$$

Vamos agora construir $T^{-1}(a_o + a_1 t)$ como fizemos no início do exercício:

$$T^{-1}(2t-1) = 1(1,-1) + 1(1,1) = (2,0) \quad \text{e} \quad T^{-1}(1+t) = 0(1,-1) + 1(1,1) = (1,1)\,.$$

Vamos em seguida encontrar $x,\, y \in I\!\!R$ tais que

$$a_o + a_1 t = x(2t-1) + y(1+t) = (-x+y) + (2x+y)t\,.$$

Resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & a_o \\ 2x+y & = & a_1 \end{array}\right.$$

obtemos $x = \dfrac{-a_o + a_1}{3}$ e $y = \dfrac{2a_o + a_1}{3}$.

Portanto

$$\begin{aligned} T^{-1}(a_o + a_1 t) &= \frac{-a_o + a_1}{3} T^{-1}(2t-1) + \frac{2a_o + a_1}{3} T^{-1}(1+t) \\ &= \frac{-a_o + a_1}{3}(2,0) + \frac{2a_o + a_1}{3}(1,1) \\ &= \left(a_1\,,\ \frac{2a_o + a_1}{3}\right). \end{aligned}$$

Observação. É possível resolver o item (a) usando diretamente a matriz $[T]^{\beta}_{\gamma}$.

De fato, temos que

$$1 + t = 0(2t-1) + 1(1+t)\,.$$

Logo, sua matriz de coordenadas na base γ é dada por $[1+t]_{\gamma} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]$.

Para obter

$$(a,b) = x(0,1) + y(1,1)$$

tal que $T(a,b) = 1 + t$ temos que procurar

$$[(a,b)]_{\beta} = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]$$

tal que

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right].$$

Resolvendo-se esse sistema encontramos os valores de x e y e fabricamos (a,b).

Questão 3.

A primeira coluna da matriz corresponde as coordenadas de $T(-1,-1)$ na base γ e a segunda coluna as coordenadas de $T(0,1)$ base γ:

$$\begin{aligned} T(-1,-1) &= 1t + 0(2t-1) \\ T(0,1) &= 1t + (-1)(2t-1) \end{aligned}$$

Logo a resposta para o item (a) é $(a,b) = (-1,-1)$.

Para calcularmos o valor de $T(a,b)$ precisamos expressar (a,b) em coordenadas da base β:

$$(a,b) = x(-1,-1) + y(0,1) = (-x, -x+y)\,.$$

Portanto

$$\begin{cases} a = -x \\ b = -x + y \end{cases}$$

Portanto $x = -a$ e $y = -a + b$, e vamos obter

$$(a,b) = -a(-1,-1) + (-a+b)(0,1)\,.$$

Calculamos agora

$$\begin{aligned} T(a,b) &= T(-a(-1,-1) + (-a+b)(0,1)) \\ &= -aT(-1,-1) + (-a+b)T(0,1) \\ &= -at + (-a+b)(-t+1) \\ &= -bt + (-a+b) \end{aligned}$$

que é a resposta do item (b).

No item (c) vejamos primeiro se T é um isomorfismo. Como os dois espaços tem a mesma dimensão basta verificar se T é injetora (ou sobrejetora), aplicando em seguida o Teorema do Núcleo e da Imagem. Mas se $T(a,b) = 0$, então $-bt + (-a+b) = 0$. Resolvendo o sistema linear obtemos $a = 0$ e $b = 0$. Logo T é injetora e portanto um isomorfismo.

Uma outra maneira mais direta é verificar se a matriz de T é inversível. Como a matriz de T (em relação as base β e γ) tem determinante $\neq 0$ ela é invertível e portanto T é um isomorfismo.

Vamos agora determinar T^{-1}. Para isso determinamos primeiro a inversa da matriz de T usando linha equivalência

$$\left[\begin{array}{rrcrr} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & -1 & | & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrcrr} 1 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 & -1 \end{array}\right] \quad \text{e assim obtemos} \quad [T^{-1}]_{\beta}^{\gamma} = \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}\right].$$

Vamos agora construir $T^{-1}(a_o + a_1 t)$ como fizemos no início do exercício:

$$T^{-1}(t) = 1(-1,-1) + 0(0,1) = (-1,-1)$$

$$T^{-1}(2t-1) = 1(-1,-1) + (-1)(0,1) = (-1,-2)\,.$$

Vamos em seguida encontrar x, $y \in I\!R$ tais que

$$a_o + a_1 t = xt + y(2t-1) = -y + (x+2y)t\,.$$

Resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y & = & a_o \\ x + 2y & = & a_1 \end{array}\right.$$

obtemos $x = 2a_o + a_1$ e $y = -a_o$.

Portanto

$$\begin{aligned} T^{-1}(a_o + a_1 t) &= (2a_o + a_1)T^{-1}(t) + (-a_o)T^{-1}(2t-1) \\ &= (2a_o + a_1)(-1,-1) + (-a_o)(-1,-2) \\ &= (-a_o - a_1\,,\, -a_1)\,. \end{aligned}$$

Observação. É possível resolver o item (a) usando diretamente a matriz $[T]_{\gamma}^{\beta}$.

De fato, temos que

$$t = 1t + 0(2t-1)\,.$$

Logo, sua matriz de coordenadas na base γ é dada por $[1+t]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obter

$$(a,b) = x(-1,-1) + y(0,1)$$

tal que $T(a,b) = t$ temos que procurar $[(a,b)]_{\beta} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tal que

$$\left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo-se esse sistema encontramos os valores de x e y e fabricamos (a,b).