1ª Prova - Vespertino

MA-311 — Cálculo III

1º Semestre de 2012

Nome: GABARITO

RA:

Assinatura:

Prof.:

Esta prova tem um total de 5 questões valendo 10 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA!

1	1.5	
2	2.0	
3	2.5	
4	2.0	
5	2.0	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*1.5 pontos*) Dada a equação
$$x^2y' + 2xy = 5y^3, \qquad x > 0.$$
   (a) (1.2) Encontre a solução geral dessa equação.
   (b) (0.3) Encontre a solução do problema de valor inicial dada pela equação acima e $y(1) = 0$.

2. (*2.0 pontos*) Encontre um fator integrante que torne a equação exata e encontre a solução geral:
$$y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0.$$

3. (*2.5 pontos*) Dada a seguinte equação diferencial:
$$x^2y'' - xy' + y = \frac{2}{x}, \qquad x > 0.$$
   (a) (1.0) Encontre a solução geral da equação homogênea associada.
   (b) (1.5) Usando o método de **variação dos parâmetros** encontre uma solução particular da equação dada.

4. (*2.0 pontos*) Considere a e.d.o.
$$y^{(4)} + 4y^{(2)} = \operatorname{sen} 2x + xe^x + 4.$$
   (a) Resolva a equação homogênea associada.
   (b) Usando o método de coeficientes indeterminados apresente e justifique a forma da solução particular. **Não** calcule os coeficientes!

5. (*2.0 pontos*) Considere a e.d.o.
$$xy'' - (x+1)y' + y = 0, \qquad x > 0.$$
Dado que $y_1(x) = e^x$ é uma solução particular da equação dada, encontre uma segunda solução dessa equação da forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ que seja linearmente independente com a primeira, usando o método de **redução de ordem**.

1a) (I) $y' + \frac{2}{x} y = \frac{5}{x^2} y^3 \quad , \quad x > 0$ (equação de Bernoulli)

$$n = 3 \ , \ v = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2} \ , \ v' = -2 y^{-3} y'$$

$$y' = -\frac{1}{2} v' y^3 \quad , \quad y = v y^n = v y^3$$

$$-\frac{1}{2} v' y^3 + \frac{2}{x} v y^3 = \frac{5}{x^2} y^3$$

0,5

$$\Downarrow$$

(II) $v' - \frac{4}{x} v = -\frac{10}{x^2}$ (equação linear)

$$\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{4}{x} dx\right) = \exp(-4 \ln x) = x^{-4}$$ (fator integrante)

$$v = \frac{1}{x^{-4}} \left(\int x^{-4} \cdot \frac{-10}{x^2} dx + C \right) = x^4 (2x^{-5} + C)$$

0,5

$\boxed{y^{-2} = 2x^{-1} + C x^4}$ (solução geral de (I))

0,2

1b) $y(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + C \Rightarrow \boxed{C = -1}$

$$y^{-2} = 2x^{-1} - x^4$$

$$2x^{-1} - x^4 > 0 \Rightarrow 0 < x^5 < 2 \Rightarrow 0 < x < \sqrt[5]{2}$$

$$\boxed{y = (2x^{-1} - x^4)^{-1/2} \ , \ 0 < x < \sqrt[5]{2}}$$

0,3

2) (I) $\underbrace{y}_{M}\,dx + \underbrace{(2x - ye^{y})}_{N}\,dy = 0$, $y > 0$.

$M_y = 1$, $N_x = 2 \Rightarrow$ (I) não é exata

$$Q(y) = \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{1}{y}$$

$\int Q(y)\,dy = \int \frac{dy}{y} = \ln y$, $\mu(y) = \exp\left(\int Q(y)\,dy\right) = y$

(fator integrante para (I))

0,7

(II) $\underbrace{y^2}_{M_1}\,dx + \underbrace{(2xy - y^2e^{y})}_{N_1}\,dy = 0$

$(M_1)_y = 2y$, $(N_1)_x = 2y \Rightarrow$ (II) é exata

$\psi(x,y)$ = função potencial para a equação (II)

$\psi_x = y^2$, $\psi_y = 2xy - y^2e^{y}$

$\psi = \int y^2\,dx = xy^2 + C(y)$

$$\begin{cases} \psi_y = 2xy + C'(y) \\ \psi_y = 2xy - y^2e^{y} \end{cases} \Rightarrow C'(y) = -y^2e^{y}$$

0,6

$$\begin{cases} u = y^2 \\ du = 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} dv = e^{y}dy \\ v = e^{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} w = y \\ dw = dy \end{cases}$$

$C(y) = -\int \underbrace{y^2}_{u}\underbrace{e^{y}dy}_{dv} = -y^2e^{y} + 2\int \underbrace{y}_{w}\underbrace{e^{y}dy}_{dv} =$

$= -y^2e^{y} + 2\left(ye^{y} - \int e^{y}dy\right) = (-y^2 + 2y - 2)e^{y}$

$\psi(x,y) = xy^2 + e^{y}(-y^2 + 2y - 2)$

$\boxed{xy^2 + e^{y}(-y^2 + 2y - 2) = C}$ (solução geral)

0,7

3a) (I) $x^2y'' - xy' + y = 2/x \ , \ x > 0$

$$\Big\Downarrow \ z = \ln x \ , \ x = e^z \ , \ \alpha = -1, \ \beta = 1$$

(II) $$\frac{d^2y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} + y = 2e^{-z}$$

(III) $$\frac{d^2y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} + y = 0$$

0,5

$\varphi(r) = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$ (equação característica de (III))

$\Rightarrow r = 1$ é raiz com multiplicidade 2

0,3 $y_H(z) = c_1 e^z + c_2 z e^z$ (equação geral de (III))

$y_H(x) = c_1 x + c_2 x \ln x$ (resposta de (a))

0,2

3b) $y_p(z) = u_1 e^z + u_2 z e^z$ (solução particular de (II))

$$\begin{cases} e^z u_1' + z e^z u_2' = 0 \\ e^z u_1' + (e^z + z e^z) u_2' = 2e^{-z} \end{cases}$$

$$W = W(e^z, ze^z) = \begin{vmatrix} e^z & ze^z \\ e^z & e^z + ze^z \end{vmatrix} = e^{2z}$$

0,3

$$u_1' = \begin{vmatrix} 0 & ze^z \\ 2e^{-z} & e^z + ze^z \end{vmatrix} \Big/ W = -2z e^{-2z}$$

$$\boxed{u_1} = -2\int \underbrace{z}_{v} \underbrace{e^{-2z}\, dz}_{dw} = -2\left(vw - \int w\, dv\right)$$

$$= -2\left(-\frac{ze^{-2z}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2z} dz\right) = \boxed{ze^{-2z} + \frac{1}{2}e^{-2z}}$$

0,4

$$= e^{-2z}\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

$$u_2' = \begin{vmatrix} e^z & 0 \\ e^z & 2e^{-z} \end{vmatrix} / W = 2e^{-2z}$$

$$\boxed{u_2} = 2\int e^{-2z}\,dz = 2\,\frac{e^{-2z}}{-2} = \boxed{-e^{-2z}}$$

0,3

$$\boxed{y_p(z)} = \left(ze^{-2z} + \tfrac{1}{2}e^{-2z}\right)e^z + \left(-e^{-2z}\right)ze^z$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}e^{-z}} \quad \text{(solução particular de (II))}$$

0,2

$$\boxed{y_p(x)} = \frac{1}{2}e^{-\ln x} = \boxed{\frac{1}{2x}} \quad \text{(solução particular de (I))}$$

0,3

OUTRA FORMA DE 3b): $y_p(x) = x\,u_1 + (x\ln x)\,u_2$

$$\begin{cases} x\,u_1' + (x\ln x)\,u_2' = 0 \\ u_1' + (\ln x + 1)\,u_2' = 2/x^3 \end{cases} \qquad W = W(x, x\ln x) = x$$

0,4

$$\begin{cases} z = \ln x \\ dz = dx/x \end{cases}$$

$$u_1' = \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ 2/x^3 & \ln x + 1 \end{vmatrix} / W = -2\ln x / x^3$$

$$u_1 = -2\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = -2\int z e^{-2z}\,dz = ze^{-2z} + \frac{1}{2}e^{-2z}$$

$$= x^{-2}\ln x + \frac{1}{2}x^{-2} = x^{-2}(\ln x + 1/2)$$

0,5

$$u_2' = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2/x^3 \end{vmatrix} / W = 2/x^3, \quad u_2 = 2\int x^{-3}\,dx = -x^{-2}$$

0,3

$$y_p(x) = x\left(x^{-2}\ln x + \tfrac{1}{2}x^{-2}\right) - (x\ln x)\,x^{-2} = \frac{1}{2x}$$

(solução particular da equação (I))

0,3

4a) (I) $y^{(4)} + 4y^{(2)} = \operatorname{sen} 2x + xe^{x} + 4$

(II) $y^{(4)} + 4y^{(2)} = 0$, $\quad Q(r) = r^4 + 4r^2 = r^2(r^2+4) = 0$ (equação característica)

$r_1 = 0$ (raiz com multiplicidade 2)

0,3 $r_2 = 2i$ e $r_3 = -2i$ (raízes com multiplicidade 1)

$$\boxed{y_H(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x}$$ (solução geral de (II))

0,4

4b) (III) $y^{(4)} + 4y^{(2)} = \operatorname{sen} 2x$

$y_{P_1}(x) = x^s (A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x)$

$s=0 \Rightarrow y_{P_1}(x) = A\cos 2x + B \operatorname{sen} 2x \leftarrow$ é solução de (II)

$s=1 \Rightarrow \boxed{y_{P_1}(x) = Ax\cos 2x + Bx \operatorname{sen} 2x} \leftarrow$ nenhum termo é solução de (II)

0,4

(IV) $y^{(4)} + 4y^{(2)} = xe^{x}$

$y_{P_2}(x) = x^s e^{x}(C_0 x + C_1)$

$s=0 \Rightarrow \boxed{y_{P_2}(x) = C_0 x e^{x} + C_1 e^{x}} \leftarrow$ nenhum termo é solu

0,2

(V) $y^{(4)} + 4y^{(2)} = 4$

$y_{P_3}(x) = x^s D$, $\quad s=0 \Rightarrow y_{P_3}(x) = D \leftarrow$ é solução de (II)

$s=1 \Rightarrow y_{P_3}(x) = Dx \leftarrow$ é solução de (II),

$s=2 \Rightarrow \boxed{y_{P_3}(x) = Dx^2} \leftarrow$ não é solução de (II)

0,4

$\boxed{y_P(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x) + y_{P_3}(x)} \leftarrow$ solução particular de (I)

$\boxed{y = y_H(x) + y_P(x)} \leftarrow$ solução geral de (I)

0,3

5) (I) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$, $x > 0$

$y_1(x) = e^x$ é solução de (I)

$y_2(x) = y_1(x)v(x) = e^x v(x)$

0,3 $y_2' = v'e^x + ve^x$, $y_2'' = v''e^x + 2v'e^x + ve^x$

$0 = xy_2'' - (x+1)y_2' + y_2 = v''xe^x + v'(x-1)e^x$

$\Rightarrow \boxed{(II) \quad v'' + v'\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0}$

0,5

$z = v' \Rightarrow$ (III) $z' + z\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$ (linear homogênea)

0,5 $\frac{z'}{z} = -1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \ln z = -x + \ln x \Rightarrow \boxed{z = xe^{-x}}$

$v' = z = xe^{-x}$

0,5 $v = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-x}\,dx}_{dw} = uw - \int w\,du = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}$

$\boxed{y_2(x)} = e^x(-x-1)e^{-x} = \boxed{-x-1}$

Solução geral de (I): $\boxed{y = C_1e^x + C_2(-x-1)}$

0,2