3ª PROVA DE MA311 — 26/06/09 — MATUTINO

1. (*1.5 pontos*) Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ e determine o intervalo de convergência.

   Sugestão: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{(1+x^2)}$.

2. (*2.0 pontos*) Resolva a equação diferencial

$$(x^2-1)y'' + 8xy' + 12y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3$$

   através de uma série de potências em torno do ponto $x = 0$. Encontre a relação de recorrência e as duas soluções linearmente independentes indicando o termo geral de cada solução.

3. (*2.0 pontos*) Considere a equação diferencial $2xy'' - y' - y = 0$. Responda as seguintes questões:

   (a) (1.0) Encontre a relação de recorrência, a equação indicial e as suas raízes.

   (b) (1.0) Escreva os quatro primeiros termos não nulos da solução em série de Frobenius em torno do ponto $x = 0$ correspondente à MAIOR raiz.

4. (*2.5 pontos*)

   (a) (1.5) Encontre a série de Fourier de senos da extensão ímpar da função

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1, \\ 0 & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

   (b) (1.0) Utilize a parte (a) para encontrar a soma de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(2k+1)^2}$. Justifique via o teorema de convergência de Fourier em $x = 1$. (Dica: Considere o coeficiente de Fourier a_n no caso par $n = 2k$ e no caso ímpar $n = 2k+1$)

5. (*2.0 pontos*) Resolva o seguinte problema de valor de contorno usando o método de separação de variáveis justificando detalhadamente TODA a análise:

$$\begin{cases} y_{tt} = 25y_{xx} & 0 < x < 3, \quad t > 0; \\ y(0,t) = y(3,t) = 0; & \\ y(x,0) = 5 \text{ sen } \pi x + 8 \text{ sen } 2\pi x \quad y_t(x,0) = 0. & \end{cases}$$

Disciplina: MA 311 /Cálculo III/ Primeiro semestre de 2009

Prova P_3: 26 de junho de 2009, Campinas

Exercício 1. (1,5 pontos) Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ e determine o intervalo de convergência.

A série geométrica

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \tag{1}$$

é convergente para $|r| < 1$. (+0,2)

Fazendo $r = -x^2$ em (1) temos

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1. \qquad (+0,2) \tag{2}$$

Diferenciando (2) obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 2 \, n \, x^{2n-1}, \quad |x| < 1. \qquad (+0,3) \tag{3}$$

Por outro lado:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = (-1)\frac{2x}{(1+x^2)^2}. \qquad (+0,2) \tag{4}$$

Então de (3) e (4):

$$(-1)\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 2 \, n \, x^{2n-1}, \qquad (+0,2)$$

isto é,

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \, n \, x^{2n-1}. \qquad (+0,2)$$

O intervalo de convergência é $(-1, 1)$ no qual todos cálculos realizados são permetidos. (+0,2).

Observação. Este é o método sugerido pela dica. Outras possibilidades matematicamente coretas são admissíveis.

$(x^2-1)y'' + 8xy' + 12y = 0 \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$

$$\sum_{\substack{\cancel{n=2} \\ n=0}}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{\substack{\cancel{n=1} \\ n=0}}^{\infty} 8n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 12 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n[n(n-1) + 8n + 12] - a_{n+2}(n+2)(n+1)\} x^n = 0$$

1,0 $\boxed{a_{n+2} = \frac{n^2+7n+12}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{(n+4)(n+3)}{(n+2)(n+1)} a_n} \quad n \geq 0$

$n=0 \quad a_2 = \frac{4.3}{21} a_0$

$n=1 \quad a_3 = \frac{5.4}{32} a_1$

$n=2 \quad a_4 = \frac{6.5}{4.3} a_2 = \frac{6543}{4321} a_0$

$n=3 \quad a_5 = \frac{76}{54} a_3 = \frac{7654\, a_1}{5432}$

$n=4 \quad a_6 = \frac{87}{65} a_4 = \frac{876543}{65432} a_0$

04 $\boxed{a_{2k} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{2} a_0}$

$\boxed{a_{2k+1} = \frac{(2k+3)(2k+2)}{6} a_1}$

04 para $k \geq 1$

$$y(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k+1)(2k+1)x^{2k} + 3x + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+3)(k+1) x^{2k+1}$$

$\boxed{a_0 = 2 \quad a_1 = 3} \leftarrow$ 02

3a) (*) $2xy'' - y' - y = 0$, $\quad P(x) = 2x$, $Q(x) = -1$, $R(x) = -1$

$$\left.\begin{aligned} &P(0)=0 \\ &p_0 = \lim_{x\to 0} \frac{Q(x)}{P(x)}x = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2x}x = -\frac{1}{2} \\ &q_0 = \lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{P(x)}x^2 = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2x}x^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x=0 \text{ é um ponto singular regular de (*)}$$

0,2

Equação indicial: $0 = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-3/2)$

0,2

$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$, $y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1}$, $y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2}$

$$0 = \sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$$

$$= \quad '' \quad - \quad '' \quad - \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^{m+r-1}$$

$$= \underset{0}{\underset{\#}{a_0}} x^{r-1}[2r(r-1) - r] + \sum_{m=1}^{\infty}\left[(m+r)(2m+2r-3)a_m - a_{m-1}\right]x^{m+r-1}$$

0,4

$$a_m = \frac{a_{m-1}}{(m+r)(2m+2r-3)}, \quad m \geq 1 \quad \text{(Relação de Recorrência)}$$

0,2

3b) $r = 3/2 \Longrightarrow a_m = \dfrac{a_{m-1}}{m(2m+3)}$, $m \geq 1$

0,2

$$a_1 = \frac{a_0}{1\cdot 5} = \frac{a_0}{5}, \quad a_2 = \frac{a_1}{2\cdot 7} = \frac{a_0}{(1\cdot 2)\cdot(5\cdot 7)} = \frac{a_0}{70}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3\cdot 9} = \frac{a_0}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(5\cdot 7\cdot 9)} = \frac{a_0}{70\cdot 27} = \frac{a_0}{1.890}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4\cdot 11} = \frac{a_0}{4!\,(5\cdot 7\cdot 9\cdot 11)} = \frac{a_0}{1.890\times 44} = \frac{a_0}{83.160}$$

0,4

$\boxed{a_0 = 1}$

$$y = x^{3/2}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!\,[5\cdot 7\cdot 9\cdots(2m+3)]}\right), \quad x > 0$$

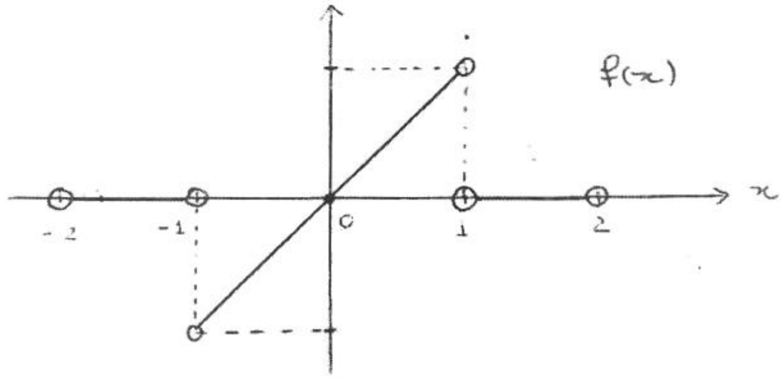
$$= x^{3/2}\left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{70} + \frac{x^3}{1.890} + \frac{x^4}{83.160} + \cdots\right)$$

0,4

0,6 é o valor máximo que pode ser obtido na parte (b) com raiz $r \neq 3/2$ ou relação de recorrência errada.

$-0,2$ cada erro de conta

4) a)



$L = 2$

A série de Fourier da função f é dada por

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right] \quad 0{,}2$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \qquad p/\ n \geq 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \qquad p/\ n \geq 1. \quad +0{,}2$$

Como $f(x)$ é uma função ímpar, tem-se que

$$a_n = 0 \qquad p/\ n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \qquad p/\ n \geq 1. \quad +0{,}2$$

Como $f(x)$ tem período $2\ell = 4$, logo $\ell = 2$, segue que

$$\boxed{b_n = \int_0^2 f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)} \qquad +0{,}2$$

Finalmente, como $f(x) = x$ em $(0,1)$ e $f(x) = 0$ em $(1,2)$ temos que

integração por partes

$$\underbrace{b_n = \int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx}_{+0{,}2} \overset{\downarrow}{=} -\frac{2x}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad p/\ n \geq 1 \quad 0{,}3$$

Portanto, a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

$+0,2$

b) Avaliando a série de Fourier de $f(x)$ no ponto $x = 1$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Para $n = 2k$ par tem-se que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(k\pi) = 0, \quad p/\ k = 1, 2, \ldots$$

e para $n = 2k+1$ ímpar tem-se que

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0 \quad p/\ k \geq 0.$$

Logo, a série acima se reduz a

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots} \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \overbrace{\operatorname{sen}^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)}^{1 \,=}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$0,4$

Por outro lado, como $f(x)$ possui uma descontinuidade de salto em $x = 1$, temos que sua série de Fourier converge a

$$\frac{f^+(1) + f^-(1)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$+0,4$

De onde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$+\underline{0,2}$

Gabarito questão 5:

Consideremos soluções da forma $y(x,t) = X(x)T(t)$. Temos $y_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$, $y_{tt}(x,t) = X(x)T''(t)$, e então a equação de onda fica traduzida nas equações

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{25}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\mu$$

onde μ deve ser constante, já que por um lado sómente depende de x e por outro lado sómente depende de t. Podemos separar então em duas equações

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad T''(t) + 25\mu T(t) = 0\,.$$

0,3 pontos

As condições iniciáis e de contorno ficam traduzidas nas condições

$$X(0) = X(3) = 0, \quad T'(0) = 0,$$

já que estamos desestimando soluções triviáis.

0,3 pontos

Consideremos cada caso para μ:

$\mu = 0$

Neste caso fica $X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$. A condição de contorno $X(0) = 0$ significa que $c_2 = 0$, e a condição $X(3) = 0$ então diz que $c_1 = 0$, e fica a solução trivial na qual não estamos interesados.

$\mu < 0$

Neste caso as soluções são da forma $X(x) = c_1 \operatorname{senh}(\alpha x) + c_2 \cosh(\alpha x)$, onde $\alpha = \sqrt{|\mu|}$. De novo, a condição de contorno $X(0) = 0$ significa que $c_2 = 0$, e a condição $X(3) = 0$ então diz que $c_1 = 0$, e fica a solução trivial na qual não estamos interesados.

$\mu > 0$

Neste caso as soluções são da forma $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x)$, onde $\alpha = \sqrt{\mu}$. De novo, a condição de contorno $X(0) = 0$ significa que $c_2 = 0$, mas agora a condição $X(3) = 0$ fixa que $3\alpha = k\pi$, k inteiro (que podemos tomar positivo já que $\operatorname{sen}(\theta) = -\operatorname{sen}(-\theta)$), e temos que $\mu = \alpha^2 = k^2\pi^2/9$, e isto corresponde a soluções da forma $X_k(x) = c_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{3})$.

0,5 pontos

Agora para cada inteiro $\mu = k^2\pi^2/9$ temos a equação para $T(t)$, $T''(t) + \frac{25k^2\pi^2}{9}T(t) = 0$, cujas soluções são da forma $T(t) = d_1 \operatorname{sen}(\frac{5k\pi t}{3}) + d_2 \cos(\frac{5k\pi t}{3})$. Agora a condição inicial $T'(0) = 0$ implica que $d_1 = 0$, e temos a solução $T_k(t) = d_2 \cos(\frac{5k\pi t}{3})$.

0,4 pontos

Temos as funções $y_k(x,t) = X_k(x,t)T_k(x,t) = b_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{3})\cos(\frac{5k\pi t}{3})$ que cada uma resolve a equação diferencial, as conduções de contorno e a condição inicial $y_t(x,0) = 0$. Sómente falta a condição inicial $y(x,0) = 5\operatorname{sen}(\pi x) + 8\operatorname{sen}(2\pi x)$, que conseguimos usando o principio de superposição e procuramos uma solução da forma

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{3})\cos(\frac{5k\pi t}{3})\,.$$

Uma solução desta forma satisfaz a condição inicial se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{3}) = 5\operatorname{sen}(\pi x) + 8\operatorname{sen}(2\pi x)$. Agora é somente comparar coeficentes: temos $b_3 = 5, b_6 = 8$ e todos os outros coeficentes são zero, e temos:

$$y(x,t) = 5\operatorname{sen}(\pi x)\cos(5\pi t) + 8\operatorname{sen}(2\pi x)\cos(10\pi t)\,.$$

0,5 pontos