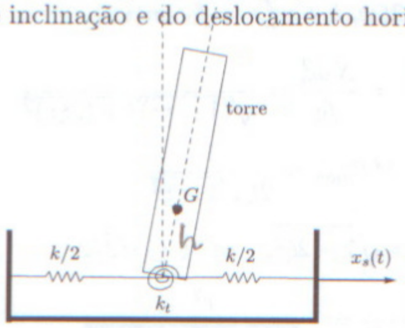
EM607 - Segunda Prova - 4/Julho/2009

Nome: Gabarito / Roteiro de Solução RA:

1. (valor 2.5) Uma torre de telefonia de massa m e momento de inércia com relação ao centro de gravidade J_G, rígida, está fixada ao solo através de um modelo de fundação com duas molas de rigidez $k/2$ e uma rigidez à torção k_t. Esta torre está instalada em uma região em que o solo apresenta um movimento dado por $x_s(t) = X_s cos(wt)$. Determine as equações do movimento da torre em termos do ângulo de inclinação e do deslocamento horizontal do centro de gravidade G.

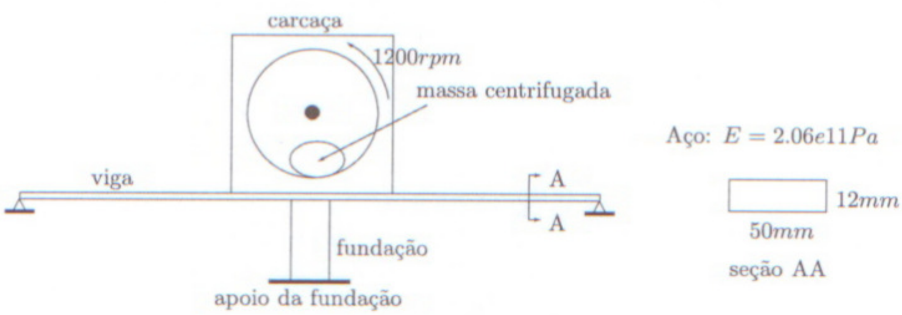


2. (valor 2.5) Um sistema mecânico é governado pela seguinte equação do movimento:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.55 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 15500 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000\delta(t) \\ 0 \end{Bmatrix},$$

onde $\delta(t)$ é um impulso unitário. É possível desacoplar estas equações do movimento usando conceitos da análise modal? Justifique sua resposta. Se for possível, desacople as equações do movimento. Apresente os modos e frequências naturais.

3. Uma centrífuga deverá operar a uma rotação de 1200rpm. A massa da centrífuga vazia é de $80kg$ e a massa do material a ser centrifugado é de $30kg$. Este equipamento será suportado por uma viga de aço cuja seção transversal é de $50mm$ por $12mm$ e por uma fundação elástica cuja rigidez e constante de amortecimento são $1000N/m$ e $60Ns/m$ respectivamente (ver esquema da figura). O centro de gravidade do material centrifugado encontra-se deslocado de $60mm$ em relação ao centro do rotor. Considere apenas o movimento vertical do sistema.

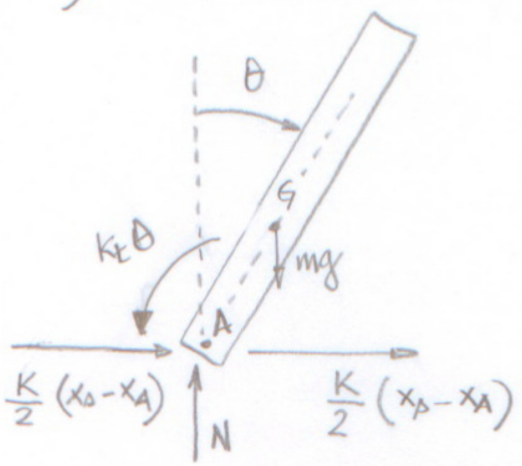


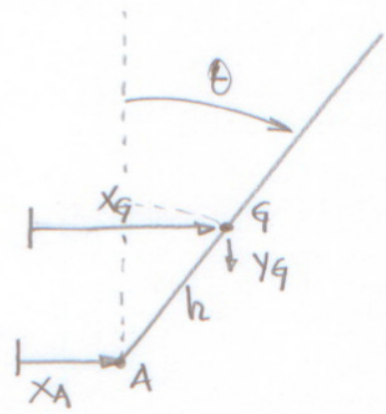
(a) (valor 2.0) Determine o comprimento da viga de modo que a frequência de ressonância seja 1.2 vezes a frequência de operação da centrífuga;

(b) (valor 1.5) Determine a respectiva equação do movimento da carcaça da centrífuga;

(c) (valor 1.5) Determine a força máxima transmitida pela fundação elástica ao seu apoio quando a centrífuga está em operação.

1) $x_\Delta > x_A$





$$\mathrm{sen}\,\theta = (x_G - x_A)/h \Rightarrow x_G = x_A + h\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$y_G = h - h\cos\theta \Rightarrow y_G = h(1-\cos\theta)$$

$$\Sigma M = J_G\ddot{\theta} \Rightarrow J_G\ddot{\theta} = -k_t\theta + N\,h\,\mathrm{sen}\,\theta - K(x_\Delta - x_A)\,h\cos\theta \qquad (1)$$

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}_G \rightarrow m\ddot{x}_G = k(x_\Delta - x_A) \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y = m\ddot{y}_G \Rightarrow m\ddot{y}_G = mg - N \rightarrow N = mg - m\ddot{y}_G \qquad (3)$$

$$\dot{y}_G = h(\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta})\ ; \quad \ddot{y}_G = h(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta}) \qquad (4)$$

(4) em (3) e em (1):

$$J_G\ddot{\theta} = -k_t\theta + \left[mg - mh(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta})\right]^{h\,\mathrm{sen}\theta} - K x_\Delta h\cos\theta + K x_A h\cos\theta$$

$$J_G\ddot{\theta} + k_t\theta - k(x_G - h\,\mathrm{sen}\,\theta)h\cos\theta + mh(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta})^{h\,\mathrm{sen}\theta} =$$

$$= mg^{h\,\mathrm{sen}\theta} - K x_\Delta h\cos\theta \qquad (5)$$

De (2) : $m\ddot{x}_G + K(x_G - h\,\text{sen}\theta) = K x_s$

$$m\ddot{x}_G + K x_G - K h\,\text{sen}\theta = K x_s \quad (6)$$

As equações do movimento em θ e x_G são dadas por (5) e (6) com $x_s = X_s \cos(\omega t)$.

Caso θ seja pequeno $\rightarrow$ $\text{sen}\theta \simeq \theta$ e $\cos\theta \simeq 1$. Logo,

$$J_G\ddot{\theta} + k_t\theta - K h x_G + K h^2\theta + m h^2(\dot{\theta}^2 + \theta\ddot{\theta})\theta =$$

$$= mgh\theta - K x_s h$$

$$m\ddot{x}_G + K x_G - K h\theta = K x_s$$

Ainda $\theta^2 \simeq 0$, pois θ é pequeno:

$$J_G\ddot{\theta} + k_t\theta - K h x_G + K h^2\theta + m h^2\dot{\theta}^2 - mgh\theta = -K x_s h$$

$$m\ddot{x}_G + K x_G - K h\theta = K x_s$$

Se $\dot{\theta}^2$ for pequeno:

$$J_G\ddot{\theta} + (k_t - mgh + K h^2)\theta - K h x_G = -K x_s h$$

$$m\ddot{x}_G + K x_G - K h\theta = K x_s$$

$$\begin{bmatrix} J_G & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_G \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t - mgh + K h^2 & -K h \\ -K h & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x_G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -K x_s h \\ K x_s \end{Bmatrix}$$

Lagrange

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_g^2 + \frac{1}{2} J_g \dot{\theta}^2 \quad \text{(energia cinética)}$$

$$V = \frac{1}{2} k_t \theta^2 + \frac{1}{2} k (x_s - x_1)^2 + mgh(1-\cos\theta) \quad \text{(energia potencial)}$$

$$V = \frac{1}{2} k_t \theta^2 + \frac{1}{2} k \left[x_s - (x_g - h\,\text{sen}\,\theta) \right]^2 + mgh(1-\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q \; ; \qquad q \rightarrow x_g, \theta \qquad Q \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_g} = m \dot{x}_g \; ; \quad \frac{\partial T}{\partial x_g} = 0 \; ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_g} = k\left[x_s - (x_g - h\,\text{sen}\,\theta)\right](-1)$$

$$m\ddot{x}_g - 0 - k\left[x_s - x_g + h\,\text{sen}\,\theta\right] = 0$$

$$m\ddot{x}_g + kx_g - kh\,\text{sen}\,\theta = kx_s \rightarrow \boxed{m\ddot{x}_g + kx_g - kh\theta = kx_s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_g \dot{\theta} \; ; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \; ;$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k_t \theta + k\left[x_s - (x_g - h\,\text{sen}\,\theta)\right] h\cos\theta + mgh(-\text{sen}\,\theta)$$

$$J_g \ddot{\theta} + k_t\theta + kx_s h\cos\theta - kx_g h\cos\theta + kh^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - mgh\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$J_g\ddot{\theta} + k_t\theta - khx_g + kh^2\theta - mgh\theta = -kx_s h$$

$$\boxed{J_g\ddot{\theta} + (k_t - mgh + kh^2)\theta - khx_g = -kx_s h}$$

2) Sim, é possível desacoplar. Trata-se de um caso de amortecimento proporcional.

$$[C] = \begin{bmatrix} 1{,}55 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 15500 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} = \alpha [K]$$

com $\alpha = 10^{-4}$.

Como é um caso de amortecimento proporcional, os modos do sistema amortecido e do sistema não amortecido são os mesmos $\Rightarrow$ usar apenas $[M]$ e $[K]$ no cálculo dos modos.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad ; \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t}$$

$$-[M] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \omega^2 e^{st} + [K] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left([K] - \omega^2 [M]\right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

solução não trivial: $\det\left([K] - \omega^2 [M]\right) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 15500 - \omega^2 10 & -1000 \\ -1000 & 1000 - \omega^2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 10\omega^2 - 25500 s^2 + 14500000 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_1 = 29{,}2562 \\ \omega_2 = 41.1592 \end{cases}$$

(frequências naturais)

Primeiro modo:

$$(15500 - \omega_1^2 \times 10)\, X_1 - 1000\, X_2 = 0$$

$$\left[15500 - (29{,}2562)^2 \times 10\right] X_1 - 1000\, X_2 = 0 \Rightarrow \frac{X_1}{X_2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6{,}941 \end{Bmatrix} = \varphi_1$$

Segundo modo:

$$(15500 - \omega_2^2 \times 10)\, X_1 - 1000\, X_2 = 0$$

$$\left[15500 - (41.1592)^2 \times 10\right] X_1 - 1000\, X_2 = 0 \Rightarrow \frac{X_1}{X_2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.441 \end{Bmatrix} = \varphi_2$$

$$\therefore \; [\varphi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6{,}941 & -1.441 \end{bmatrix}$$

Desacoplamento: $\{q\} = [\varphi]\{x\}$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\}$$

$$[\varphi]^t[M][\varphi]\{\ddot{q}\} + [\varphi]^t[C][\varphi]\{\dot{q}\} + [\varphi]^t[K][\varphi]\{x\} = [\varphi]^t\{f(t)\}$$

$$[\varphi]^t[M][\varphi] = \begin{bmatrix} 58{,}1775 & 0 \\ 0 & 12{,}0765 \end{bmatrix}$$

$$[\varphi]^t[C][\varphi] = \begin{bmatrix} 4{,}9795 & 0 \\ 0 & 2{,}0458 \end{bmatrix}$$

$$[\psi]^t[K][\psi] = \begin{bmatrix} 49795 & 0 \\ 0 & 20458 \end{bmatrix}$$

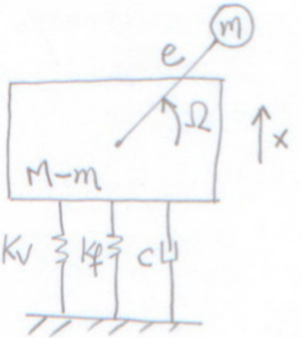
$$[\psi]^t\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} 1000\,\delta(t) \\ 1000\,\delta(t \end{Bmatrix}$$

$\therefore$ As equações desacopladas são:

$$\begin{bmatrix} 58{,}1775 & 0 \\ 0 & 12{,}0765 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4{,}9795 & 0 \\ 0 & 2{,}0458 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 49795 & 0 \\ 0 & 20458 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000\,\delta(t) \\ 1000\,\delta(t) \end{Bmatrix}.$$

3) a)



$$K_V = \frac{48EI}{\ell^3} \; ; \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

$M-m = 80\,kg$; $m = 30\,kg$; $e = 0{,}06\,m$

$K = K_V + K_f$

$K_f = 1000\,N/m$; $C = 60\,Ns/m$; $\Omega = 1200\,rpm$
$\Omega = 125{,}6637\,\frac{rad}{s}$

$$I = \frac{0{,}050 \cdot 0{,}012^3}{12} = 7{,}2 \times 10^{-9}$$

$$K_V = \left(48 \times 2{,}06 \times 10^{11} \times 7{,}2 \times 10^{-9}\right)/\ell^3 = 71.193{,}6/\ell^3$$

Problema de desbalanceamento rotativo → o pico de ressonância ocorre para $r > 1$. Logo,

$$r_{pico} = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}} = \frac{\omega_{rpico}}{\omega_n} \; ; \quad \omega_{rpico} = 1{,}2 \times \Omega = 150{,}7964$$

Equação do movimento:

$$(M-m)\ddot{x} + m\frac{d^2}{dt^2}\left(x + e\,sen\,\Omega t\right) = -Kx - c\dot{x}$$

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = me\Omega^2 sen\,\Omega t$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{M}\dot{x}}_{2\xi\omega_n\dot{x}} + \underbrace{\frac{K}{M}x}_{\omega_n^2 x} = \frac{me\Omega^2 sen\,\Omega t}{M}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M} \; ; \quad 2\xi\omega_n = \frac{c}{M} = \frac{60}{110}$$

$$r_{pico} = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}} = \frac{150{,}7964}{\omega_n} \; ; \quad \xi = \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{2\omega_n}$$

Resolvendo para ω_n e ξ tem-se:

$\omega_{n1} = 150,7959$ $\quad\quad \xi_1 = 0.1808 \times 10^{-2}$

$\omega_{n2} = 0,3856$ $\quad\quad \xi_2 = 0,707104$ $\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707106 \right)$

$$\omega_{n1}^2 = 150,7959^2 = \frac{K_V + 1000}{110} \Rightarrow K_V = 2500334,4$$
$$(k = 2501334,4)$$

$$\omega_{n2}^2 = 0,3856^2 = \frac{K_V + 1000}{110} \Rightarrow K_V = -938,6 \quad \text{(inadequado)}$$

$$K_V = 2500334,4 = 71193,6 / \ell^3 \Rightarrow \boxed{\ell = 0,3053 \text{ m}}$$

b) $$\ddot{x} + \frac{60}{110}\dot{x} + \frac{2501334,4}{110}x = \frac{30 \times 0,06}{110} \times 125,6637^2 \operatorname{sen}(125,6637t)$$

$$\ddot{x} + 0,5454\dot{x} + 22739,4x = 258,4 \operatorname{sen}(125,6637t)$$

c)

Amplitude da vibração no caso de desbalanceamento:

$$X = \frac{me}{M} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

ângulo de fase: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{2\xi r}{1-r^2}$

condição de operação: $r = \dfrac{\Omega}{\omega_n} = \dfrac{125,6637}{150,7959} = 0,8333$

$$X = \frac{30 \times 0{,}06}{110} \times \frac{0{,}8333^2}{\sqrt{\left(1-0{,}8333^2\right)^2+\left(2\times 0{,}1808\times 10^{-2}\times 0{,}8333\right)^2}} = 0{,}0372$$

$\theta = 0.0099 \cong 0$ (sistema bem pouco amortecido)

Solução de regime: $x_p(t) = X \,\mathrm{sen}\left(\Omega t + \theta\right)$

$$\dot{x}_p(t) = \Omega X \cos\left(\Omega t + \theta\right)$$

A força no suporte da fundação elástica será:

$$F = K_f\, x_p + c\,\dot{x}_p = K_f\, X \,\mathrm{sen}\,\Omega t + c\,\Omega X \cos \Omega t =$$

$$= \underbrace{X\sqrt{K_f^2+(c\Omega)^2}}_{F_{max}}\ \mathrm{sen}\left(\Omega t + \phi\right)$$

$$F_{max} = 0{,}0372\sqrt{1000^2+\left(60\times 125{,}6637\right)^2}$$

$$\boxed{F_{max} = 282{,}9\ \mathrm{N}}$$