# Primeira Prova de MÀ311, Turma A

*Prof. Sergio Antonio Tozoni*

09/04/2010

**RA:** **Nome:** GABARITO

**Questão 1** (2,0 pontos). Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$ty' - 3y = t^2 y^{5/2}, \ t > 0, \ y(1) = 1.$$

**Questão 2** (2,0 pontos). Determine a solução geral da equação diferencial

$$(y \ln y + ye^x)dx + (x + y\cos y)dy = 0, \ y > 0.$$

**Questão 3**. Considere a equação diferencial

$$y^{(6)} + 4y^{(4)} = 1 + t^2 + 4t\,\text{sen2t}. \tag{1}$$

Determine:
**(a)**(1,0 ponto). A solução geral da equação homogênea associada à equação (1).
**(b)**(1,0 ponto). Usando o *método de coeficientes indeterminados*, encontre a forma da solução particular da equação (1), **SEM** calcular os coeficientes. Escreva a solução geral da equação (1).

**Questão 4** (2,0 pontos). Determine a solução geral da equação diferencial

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = t^2 (\ln t)^{-3}, \ t > 3.$$

**Questão 5** (2,0 pontos). Determine a solução geral da equação diferencial

$$2y^2 y'' + 2y(y')^2 = 2yy', \ y > 0, \ y' > 0.$$

1) $\quad t y' - 3y = t^2 y^{5/2} \;,\quad t > 0 \;,\quad y(1) = 1$

$(\mathrm{I})\quad y' - \frac{3}{t} y = t\, y^{5/2}$ (equação de Bernoulli) $\quad n = \frac{5}{2}$

$v = y^{1-n} = y^{1-5/2} = y^{-3/2} \;,\quad v' = -\frac{3}{2} y^{-5/2} y'$

$y' = -\frac{2}{3} y^{5/2} v' \;,\quad y = v\, y^{5/2}$

0,5

$(\mathrm{I}) \Longrightarrow -\frac{2}{3} y^{5/2} v' - \frac{3}{t} v\, y^{5/2} = t y^{5/2} \Longrightarrow -\frac{2}{3} v' - \frac{3}{t} v = t$

$(\mathrm{II})\quad \boxed{v' + \underbrace{\frac{9}{2t}}_{p(t)} v = \underbrace{-\frac{3t}{2}}_{g(t)} \text{ (linear)}}$

0,5

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{9}{2t} dt\right) = \exp\left(\frac{9}{2} \ln t\right) = t^{9/2}$$

$$\int \mu(t)\, g(t)\, dt = \int -\frac{3}{2} t^{11/2} dt = -\frac{3}{2} t^{13/2} \frac{2}{13} = -\frac{3}{13} t^{13/2}$$

0,6 $\quad v = t^{-9/2}\left(-\frac{3}{13} t^{13/2} + C\right) = -\frac{3}{13} t^2 + C t^{-9/2}$

0,2 Solução geral: $\boxed{y^{-3/2} = -\frac{3}{13} t^2 + C t^{-9/2}}$

$t = y = 1 \Longrightarrow 1 = -\frac{3}{13} + C \Longrightarrow C = \frac{16}{13}$

<u>Resposta</u>: $\boxed{y^{-3/2} = -\frac{3}{13} t^2 + \frac{16}{13} t^{-9/2}}$

0,2

a) $\underbrace{(y\ln y + ye^x)}_{M}\,dx + \underbrace{(x + y\cos y)}_{N}\,dy = 0$ ⊛

$M_y = \ln y + 1 + e^x \neq 1 = N_x \Rightarrow$ ⊛ não é exata

$(uM)\,dx + (uN)\,dy = 0$ é exata $\Leftrightarrow (uM)_y = (uN)_x \Leftrightarrow u_y M + u M_y = u_x N + u N_x$

$u$ só depende de $y \Rightarrow \dfrac{u_y}{u} = \dfrac{N_x - M_y}{M} = -\dfrac{\ln y + e^x}{y\ln y + y e^x} = -\dfrac{1}{y}$

$\ln u = -\int \dfrac{dy}{y} = -\ln|y| = \ln\left|\dfrac{1}{y}\right| \Rightarrow \boxed{u = \dfrac{1}{y}}$

(⊛⊛) $\underbrace{(\ln y + e^x)}_{M_1}\,dx + \underbrace{\left(\dfrac{x}{y} + \cos y\right)}_{N_1}\,dy = 0 \qquad (M_1)_y = \dfrac{1}{y} = (N_1)_x$

(⊛⊛) é exata

$\psi_x = M_1 = \ln y + e^x, \quad \psi_y = N_1 = \dfrac{x}{y} + \cos y$

$\psi = \int (\ln y + e^x)\,dx = x\ln y + e^x + h(y)$

$\cancel{\dfrac{x}{y}} + \cos y = \psi_y = \cancel{\dfrac{x}{y}} + h'(y) \Rightarrow h'(y) = \cos y$

$h(y) = \int \cos y\,dy = \operatorname{sen} y$

$\psi(x,y) = x\ln y + e^x + \operatorname{sen} y$

Resposta: $\boxed{x\ln y + e^x + \operatorname{sen} y = C}$

---

1,0 se encontrou corretamente o fator integrante

1,0 se resolveu corretamente a equação exata

3a) (I) $y^{(6)} + 4y^{(4)} \doteq 1 + t^2 + 4t \operatorname{sen} 2t$

(II) $y^{(6)} + 4y^{(4)} = 0$

$Q(r) = r^6 + 4r^4 = r^4(r^2+4)$

$r_1 = 0$ raiz com multiplicidade 4

$r_2 = 2i$, $\bar{r}_2 = -2i$ raízes com multiplicidade 1

$$\boxed{y_H(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3 + C_5 \cos 2t + C_6 \operatorname{sen} 2t}$$

(solução geral de (II))

1,0

3b) $y^{(6)} + 4y^{(4)} = 1 + t^2$ (III)

$y_{p_1}(t) = t^s(A_0 t^2 + A_1 t + A_2)$ Para $s = 1, 2$ e $3$, existe termo de $y_{p_1}(t)$ que é solução de (II).

$\boxed{s = 4} \Rightarrow \boxed{y_{p_1}(t) = t^4(A_0 t^2 + A_1 t + A_2)}$ Para $s = 4$, nenhum termo de $y_{p_1}(t)$ é solução de (II).

0,4

$y^{(6)} + 4y^{(4)} = 4t \operatorname{sen} 2t$ (IV)

$y_{p_2}(t) = t^s\left((B_0 t + B_1)\cos 2t + (C_0 t + C_1)\operatorname{sen} 2t\right)$

$\boxed{s = 1} \Rightarrow \boxed{y_{p_2}(t) = t\left((B_0 t + B_1)\cos 2t + (C_0 t + C_1)\operatorname{sen} 2t\right)}$

Para $s = 0$, existe termo de $y_{p_2}(t)$ que é solução de (II), mas para $s = 1$ não existe.

0,4

$y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t)$

$= A_0 t^6 + A_1 t^5 + A_2 t^4 + (B_0 t^2 + B_1 t)\cos 2t + (C_0 t^2 + C_1 t)\operatorname{sen} 2t$

(solução particular)

0,2 $y(t) = y_H(t) + y_p(t)$ (solução geral de (I))

4) (I) $t^2 y'' - 3ty' + 4y = t^2 (\ln t)^{-3}$ , $t > 3$

(equação de Euler) $\alpha = -3$ , $\beta = 4$ , $x = \ln t$

$t = e^x$

(II) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^{-3} e^{2x}$ , $x > 0$

0,4

(III) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

$Q(r) = r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$ (raiz com multiplicidade 2)

$\boxed{y_H(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}}$ (solução geral de (III))

0,4

$$W(e^{2x}, x e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2x e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$$

$y_p(x) = u_1 e^{2x} + u_2 x e^{2x}$ (método de variação de parâmetros)

$$u_1' = e^{-4x} \begin{vmatrix} 0 & x e^{2x} \\ x^{-3} e^{2x} & e^{2x} + 2x e^{2x} \end{vmatrix} = -x^{-2} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{1}{x}}$$

$$u_2' = e^{-4x} \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & x^{-3} e^{2x} \end{vmatrix} = x^{-3} \Rightarrow \boxed{u_2 = -\frac{1}{2x^2}}$$

$$\boxed{y_p(x)} = \frac{1}{x} e^{2x} - \frac{1}{2x^2} x e^{2x} = \boxed{\frac{1}{2x} e^{2x}}$$ (solução particular de (II))

0,8

$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \dfrac{1}{2x} e^{2x}$ (solução geral de (II))

$$\boxed{y(t) = C_1 t^2 + C_2 t^2 (\ln t) + \frac{1}{2} t^2 (\ln t)^{-1}}$$

(solução geral de (I))

0,4

5) (I) $2y^2 y'' + 2y(y')^2 = 2yy'$ , $y>0$, $y'>0$

$v = y'$ , $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}$

(I) $\Rightarrow$ $2y^2 v \frac{dv}{dy} + 2yv^2 = 2yv$

$\Rightarrow$ (II) $\boxed{\frac{dv}{dy} + \frac{1}{y}v = \frac{1}{y}}$ ( e.d.o. linear )

0,8

$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{dy}{y}\right) = y$

$\int \mu(y)\frac{1}{y}\,dy = \int dy = y$

$\frac{dy}{dt} = v = \frac{1}{\mu(y)}\left(\int \mu(y)\frac{1}{y}\,dy + C_1\right) = \frac{y+C_1}{y}$

0,6

(III) $\boxed{\frac{y}{y+C_1}\,dy - dt = 0}$ (e.d.o. separável)

$H_1(y) = \int \frac{y}{y+C_1}\,dy = \int\left(1 - \frac{C_1}{y+C_1}\right)dy = y - C_1\ln|y+C_1|$

$H_2(t) = \int -dt = -t$

<u>Resposta</u>: $\boxed{y - C_1\ln|y+C_1| = t + C_2}$

0,6