EE400 - 3ª prova - 24/06/2013
Gabarito Prof. Rafael

1) $I = \int_C f(z)\, dz$

$f(z) = |x| + i|y|$

$C : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \quad -1 \leq t \leq 1 \end{cases}$

No segundo quadrante $(-1 \leq t < 0)$
a função $f(z)$ é dada por:
$f(z) = -x + iy = -\bar{z}$ (não é analítica)

Neste trecho $(C_1 \subset C)$ deve-se calcular a int de linha:

$$I_1 = \int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_1} (-x + iy)(dx + i dy) =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[-x(t) + i\, y(t)\right] \frac{dx}{dt}\, dt + \int_{-1}^{0} \left[-y(t) - i\, x(t)\right] \frac{dy}{dt}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{0} (-t + i t^2)\, dt + \int_{-1}^{0} (-t^2 - i t)\, 2t\, dt = 1 - i/3$$

No trecho C_2 $(0 \leq t \leq 1)$, $f(z) = z$ (analítica) e podemos calcular $I_2 = \int_{C_2} f(z)\, dz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{1+i} = i$

Portanto: $\boxed{I = I_1 + I_2 = 1 + \frac{2i}{3}}$

2) Consideremos a função $f_1(z) = \dfrac{2}{(z-1)^2}$

Temos:

$$f_1(z) = \frac{2}{(1-z)^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \, z^{-n-2} \qquad \underline{|z| > 1}$$

$$\alpha_n^2 = \frac{(n+2-1)!}{n!\,(2-1)!} = n+1$$

Portanto:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)\, z^{-n-2} = \sum_{n'=-\infty}^{-2} -2(n'+1)\, z^{n'}$$

$\boxed{\text{fazendo } n' = -n-2}$

Consideremos agora a função $f_2(z) = \dfrac{3}{z-3}$

$$f_2(z) = \frac{1}{\left(\frac{z}{3}\right) - 1} = \frac{-1}{1-\left(\frac{z}{3}\right)} = (-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$\left|\frac{z}{3}\right| < 1 \Rightarrow \underline{|z| < 3}$$

Portanto $f_2(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3^n}\right) z^n$

Portanto:

$$\frac{2}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-3} = \sum_{n=-\infty}^{-2} -2(n+1)\, z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-3^{-n}\right) z^n$$

$\boxed{1 < |z| < 3}$

Em conclusão

$$A_n = \begin{cases} -2(n+1) & n \le -2 \\ 0 & n = -1 \\ -3^{-n} & n \ge 0 \end{cases}$$

3) Temos: $\quad \operatorname{sen} z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dots$

$\Rightarrow$: $\qquad (\forall z)$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \frac{1}{7!\,z^7} + \dots \qquad |z| > 0$$

$$z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!\,z} - \frac{1}{7!\,z^3} + \dots \qquad |z| > 0$$

a) O único ponto singular é $\underline{\underline{z=0}}$ pois z^4 e sen z são definidas para todo z, sendo também analíticas. A função $\frac{1}{z}$ não é analítica em $z=0$.

b) Dado que existem infinitos termos da série acima com coef. não nulos e expoente negativo, conclui-se que, por definição, $z=0$ é um ponto singular isolado essencial

c) A série de Laurent desenvolvida acima contém o termo $\dots + \dfrac{1}{5!\,z} - \dots$ que, por definição permite concluir $K = \dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120}$

d) Só há um ponto singular e o percurso o envolve. Portanto:

$$\boxed{I = \oint_{|z|=10\pi} f(z)\,dz = 2\pi i K = \frac{\pi i}{60}}$$

4) $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta$$

Substituição: $z = e^{i\theta} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \\ d\theta = \frac{dz}{iz} \end{cases}$

Portanto:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}{\frac{5}{4} - \frac{4}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} =$$

$$= \frac{-1}{4i} \oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z\underbrace{(z-2)}(z-1/2)}\, dz \qquad \boxed{f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-2)(z-1/2)}}$$

$\hookrightarrow$ pólo fora do círculo unitário

resíduo em $z = 0$ de $f(z)$: $K_0 = \left.\frac{z^2+1}{(z-2)(z-1/2)}\right|_{z=0} = 1$

resíduo em $z = 1/2$ de $f(z)$: $K_{1/2} = \left.\frac{z^2+1}{z(z-2)}\right|_{z=1/2} = -\frac{5}{3}$

Pelo teorema do resíduo:

$$I = 2\pi i \left(\frac{-1}{4i}\right) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{5}{3}\right)}_{K_0 + K_{1/2}} = \frac{\pi}{3}$$

5) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\, dx$$

Observe que o integrando satisfaz às cond.:
grau denominador = grau numerador + 2
denom. não apresenta raízes no eixo real.

Portanto podemos calcular I a partir de:

$$I = 2\pi i \sum \left(\text{resíduos de } f(z) \text{ no semi-plano sup.} \right)$$

com $$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2}$$

Pólos de $f(z)$: $$f(z) = \frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

Portanto, no semi-plano superior há um pólo duplo em $z = 2i$

$$K = \left.\frac{d\phi}{dz}\right|_{z=2i}, \quad \text{sendo } \phi(z) = (z-2i)^2 f(z)$$

$$K = \left.\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+2i)^2}\right)\right|_{z=2i} = \frac{1}{8i}$$

Portanto $$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{8i} = \frac{\pi}{4}$$