ME-210 Probabilidade I

Lista 8

1. Suponha que a taxa de risco de desenvolver um câncer de pulmão para um fumante de idade t é

$$\lambda(t) = 0.027 + 0.00025(t-40)^2, \quad t \geq 40.$$

Supondo que um fumante de 40 anos sobreviva a todos os outros riscos, qual é a probabilidade de que ele viva até 50 anos sem desenvolver um câncer de pulmão?

2. A distribuição conjunta de X e Y é dada por $p(x,y)$, onde

$$\begin{array}{lll} p(1,1) = 1/9, & p(2,1) = 1/3, & p(3,1) = 1/9 \\ p(1,2) = 1/9, & p(2,2) = 0, & p(3,2) = 1/18 \\ p(1,3) = 0, & p(2,3) = 1/6, & p(3,3) = 1/9. \end{array}$$

Calcule as distribuições marginais de X e Y. As v. a. X e Y são independentes? Calcule a distribuição condicional de X dado que $Y = 1$.

3. Suponha que A e B escolham independentemente 3 objetos entre 10. Calcule
(a) o número esperado de objetos escolhidos por A e B (quer dizer, os que foram escolhidos pelos dois);
(b) o número esperado de objetos escolhidos por pelo menos um.

4. Suponha que 3 bolas sejam sorteadas sem reposição de uma urna com 5 bolas brancas e 8 vermelhas. Seja $X_i = 1$, se i-ésima bola sorteada á branca e $X_i = 0$ caso contrário. Ache a distribuição conjunta de
(a) X_1, X_2;
(b) X_1, X_2, X_3.

5. N bolas (númeradas de 1 até N) são distribuídas em N urnas (também numeradas de 1 até N) da maneira que para cada i a bola i vai para uma das urnas $1, \ldots, i$ com probabilidade $1/i$ (independentemente das outras bolas). Calcule
(a) o número esperado das urnas vazias;
(b) a probabilidade de que nenhuma urna está vázia.

ME-210A: Resolução da Lista 08

Resolução extra-oficial feita por um dos monitores.

Questão 01:

$$P(X \geq 50 \mid X \geq 40) = e^{-\int_{40}^{50} \lambda(t)dt} = e^{-(0.027+0.00025\cdot 10^3/3)} = 0.7.$$

Questão 02:

a

- **Distribuição marginal de X:**

$$p_X(1) = \sum_y p(1,y) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9} = \frac{4}{18}$$

$$p_X(2) = \sum_y p(2,y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = \frac{9}{18}$$

$$p_X(3) = \sum_y p(3,y) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$$

Conferindo:

$$\sum_x p_X(x) = \frac{5+9+4}{18} = 1$$

- **Distribuição marginal de Y:**

$$p_Y(1) = \sum_x p(x,1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9} = \frac{10}{18}$$

$$p_Y(2) = \sum_x p(x,2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6} = \frac{3}{18}$$

$$p_Y(3) = \sum_x p(x,3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$

Conferindo:

$$\sum_y p_Y(y) = \frac{10+3+5}{18} = 1$$

b Não. Para que duas variáveis aleatórias discretas sejam independentes, elas devem satisfazer a relação

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

para todo i e j. Neste caso, para $i = j = 1$, temos

$$p_X(1)p_Y(1) = \frac{2}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{10}{81} \neq p(1,1)$$

Logo, X e Y não são independentes.

c A distribuição condicional de X dado que $Y = 1$ é obtida a partir da expressão

$$P(X = x|Y = 1) = \frac{P(X = x, Y = 1)}{P(y = 1)} = \frac{p(x,1)}{P_y(1)}$$

Assim,

$$P(X = 1|Y = 1) = \frac{1/9}{5/9} = \frac{1}{5}$$

$$P(X = 2|Y = 1) = \frac{1/3}{5/9} = \frac{3}{5}$$

$$P(X = 3|Y = 1) = \frac{1/9}{5/9} = \frac{1}{5}$$

Questão 3:

Seja $X_i = 1$, se o objeto i foi escolhido por A, e $X_i = 0$ caso contrário. Seja $Y_i = 1$, se o objeto i foi escolhido por A, e $Y_i = 0$ caso contrário.

(a) Note que $X_iY_i = 1$ se e somente se o objeto i foi escolhido por A e B.

$$P(\text{objeto } i \text{ foi escolhido por A}) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}$$

$$E(\text{escolhidos por dois}) = \sum_{i=1}^{10} E(X_iY_i) = 10\left(\frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}\right)^2$$

(b) Analogamente,

$$E(\text{escolhidos por pelo menos um dos dois}) = \sum_{i=1}^{10} P(\text{objeto } i \text{ foi escolhido por A ou por B}).$$

Já que

$$
\begin{aligned}
& P(\text{objeto } i \text{ foi escolhido por A ou por B}) \\
= \; & 1 - P(\text{objeto } i \text{ não foi escolhido nem por A e nem por B}) \\
= \; & 1 - \left(1 - \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}\right)^2,
\end{aligned}
$$

$$
E(\text{escolhidos por pelo menos um dos dois}) = 10 - 10\left(1 - \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}\right)^2.
$$

Questão 04:

(a)

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 1, X_2 = 1) &= \frac{5}{13}\frac{4}{12}, \quad P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{5}{13}\frac{8}{12}, \\
P(X_1 = 0, X_2 = 1) &= \frac{8}{13}\frac{5}{12}, \quad P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{8}{13}\frac{7}{12}.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) &= \frac{5}{13}\frac{4}{12}\frac{3}{11}, \quad P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) = \frac{5}{13}\frac{4}{12}\frac{8}{11} \\
P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) &= \frac{5}{13}\frac{8}{12}\frac{4}{11}, \quad P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) = \frac{5}{13}\frac{8}{12}\frac{7}{11} \\
P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) &= \frac{8}{13}\frac{5}{12}\frac{4}{11}, \quad P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) = \frac{8}{13}\frac{5}{12}\frac{7}{11} \\
P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) &= \frac{8}{13}\frac{7}{12}\frac{5}{11}, \quad P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = \frac{8}{13}\frac{7}{12}\frac{6}{11}
\end{aligned}
$$

Questão 05:

a. Seja X o número de urnas vazias, $X \in \{0, 1, ..., N\}$, e

$$
X_i = \begin{cases} 1 \text{ , se a i-ésima urna fica vazia , } i = 1, ..., N \\ 0 \text{ , caso contrário} \end{cases}
$$

Então,

$$
X = \sum_{i=1}^{N} X_i
$$

e, devido à linearidade da esperança,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i)$$

Seja A_k o evento tal que a k-ésima urna fica vazia. Como X_i são variáveis indicadoras dos eventos A_k, temos que

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$$

Basta, portanto, que determinemos $P(A_k)$:

$$P(A_k) = \prod_{t=1}^{N} P(\text{bola t não vai para a urna k}) = \prod_{t=k}^{N} P(\text{bola t não vai para a urna k}) = \prod_{t=k}^{N} \left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

No primeiro sinal de igualdade, usamos o fato de que a distribuição de cada bola entre as urnas é independente de todas as outras bolas. No segundo sinal, usamos o fato de que a k-ésima bola não vai para as urnas $1, 2, ..., k-1$ com probabilidade 1. No terceiro sinal, calculamos a probabilidade de a bola não ir para a urna t como sendo 1 menos a probabilidade de ela ir. Podemos, ainda, escrever $P(A_k)$ de uma maneira mais sucinta:

$$P(A_k) = \prod_{t=k}^{N} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \prod_{t=k}^{N} \left(\frac{t-1}{t}\right) = \frac{k-1}{k} \times \frac{k}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} \times ... \times \frac{N-1}{N} = \frac{k-1}{N}$$

Logo,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} \frac{i-1}{N} = N\frac{0 + \frac{N-1}{N}}{2} \Longrightarrow E(X) = \frac{N-1}{2}$$

b. Como temos o mesmo número de bolas e urnas, para que nenhuma urna fique vazia, cada uma delas deverá conter apenas uma bola. Para que isso ocorra, a i-ésima bola deve estar na urna i, pois a única bola que a última urna pode receber é a N-ésima, o que implica que a penúltima urna deverá receber a (N-1)-ésima bola, e assim por diante. Vamos definir:

$$Y_i = \begin{cases} 1 \text{ , se a i-ésima bola vai para a i-ésima urna} \\ 0 \text{ , caso contrário} \end{cases}$$

Assim.

$$P(\text{nenhuma urna vazia}) = P(Y_N = 1, Y_{N-1} = 1, ..., Y_1 = 1) =$$
$$= P(Y_N = 1)P(Y_{N-1} = 1|Y_N = 1)...P(Y_1 - 1|Y_N = 1, ..., Y_2 = 1)$$

pela Regra da Multiplicação. Porém, como a ida da k-ésima bola para a k-ésima urna não é afetada pela distribuição das bolas anteriores entre as urnas, temos que

$$P(\text{nenhuma urna vazia}) = P(Y_N = 1)P(Y_{N-1} = 1)...P(Y_1 = 1)$$

Já que $P(Y_i = 1) = \frac{1}{i}$, obtemos

$$P(\text{nenhuma urna vazia}) = \frac{1}{N!}$$