ALDÁRIO

EE540U - 1ºS/2009 - Prova 1

1. Na figura 1 o circuito retangular está situado no plano yz e move-se para a direita com velocidade $\mathbf{u}$. A corrente no condutor retilínio e muito longo é uma constante: $i_0 = I_0$. Assuma que a resistência R do circuito é suficientemente alta para que possamos desprezar a influência da corrente i que circula no mesmo. Determine a corrente i, no instante mostrado na figura: o lado esquerdo está a uma distância a do condutor e, nesse intante, a velocidade é $\mathbf{u} = u_0\mathbf{a}_y$.

2. O mesmo que na questão 2, sendo que agora, $i_0 = I_0 \cos\omega t$ e o circuito está estacionário, ou seja, $\mathbf{u} = 0$.

3. A figura 2 mostra esquematicamente um capacitor de placas circulares e paralelas de raio a, em que a placa superior é móvel , de maneira que o espaçamento entre as placas é dado por

$$d = d_0(1 + k\sin\omega t)\ ; \quad d_0 << a\ ; \quad k < 1.$$

As placas são conectadas a uma bateria que mantém uma tensão constante, V_0, entre elas. Calcule a corrente i que circula pelo circuito. Para todos os efeitos, condidere o sistema no vácuo. Assuma que o campo elétrico é uniforme em todo espaço entre as placas do capacitor.

4. Na figura 3, considere o eixo z emergindo perpendicularmente à pagina, no centro do disco sombreado (raio a). Existe um campo magnético, $\mathbf{B}$, que é dado por $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z B_0 \sin\omega t$ para todos pontos do tubo circular que intercepta perpendicalrmente a página no disco e é praticamente nulo em todos os demais pontos. Um campo como esse pode ser realizado aproximadamente por um longo solenóide enrolado uniformemente. Considere o circuito que contém os resistores, R_1 e R_2, e os dois voltímetros, cujas leituras em tensão eficaz serão representadas por V_1 e V_2. Determine as tensões eficazes V_1 e V_2. Ignore as pequenas correntes através dos voltímetros, o campo magnético produzido pelas correntes que circulam nos resistores, e as resistências dos fios de ligação.

EE540U - 1ºS/2009 - Formulário P1

Lei da Força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_t \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_t + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

com

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \qquad \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

$$c \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s} \qquad \varepsilon_0 \cong 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

Equações de Maxwell em termos de

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} + \mathbf{M} \qquad (\text{no vácuo, } \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}\text{ , } \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B})$$

Para meios *isotrópicos* e *lineares* $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Se, além disso o meio é *homogêneo*, ε e μ não variam com a posição.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

onde a densidade de carga *livre*, ρ, e a densidade de corrente devido à carga *livre*, $\mathbf{J}$, relacionam-se às correspondentes densidades totais através de

$$\rho_t = \rho + \rho_p \qquad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}\;; \qquad \mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Lei de conservação da carga (já implícita nas eq. de Maxwell):

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_t + \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = 0\;; \qquad \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\;; \qquad \nabla \cdot \mathbf{J}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0 \quad (\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t})$$

$$\oint_S \mathbf{J}_t \cdot ds + \frac{d}{dt}\int_V \rho_t dv = 0\;; \qquad \oint_S \mathbf{J} \cdot ds + \frac{d}{dt}\int_V \rho dv = 0\;; \qquad \oint_S \mathbf{J}_p \cdot ds + \frac{d}{dt}\int_V \rho_p dv = 0$$

Forma integral das equações de Maxwell

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot ds = \int_V \rho dt = Q \qquad \oint_S \mathbf{B} \cdot ds = 0$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot ds = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot ds = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \cdot ds = I + \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \cdot d$$

Obs: $-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot ds = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot ds$ e $\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot ds = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \cdot ds$, porque as superfícies são considerads fixas (invariantes no tempo)

Condições de contorno ($\mathbf{a}_{n2}$ aponta do meio 2 para o meio 1)

$$(\mathbf{E}_1)_{\|} = (\mathbf{E}_2)_{\|}\ ; \qquad \mathbf{a}_{n2}\times(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \text{ ou } (\mathbf{H}_1)_{\|} - (\mathbf{H}_2)_{\|} = \mathbf{J}_s \times \mathbf{a}_{n2}$$

$$\mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \qquad B_{1n} = B_{2n}$$

Força eletromotriz

$$\text{f.e.m} = \mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Note que neste caso a curva fechada e a superfície podem estar variando. A velocidade $\mathbf{u}$ representa a velocidade com que cada ponto da curva C está se movendo, no instante em que se calcula a integral. Note que, em acordo com a lei de Faraday

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

mas, em geral,

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \neq \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} - \oint_C \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

Some Useful Vector Identities

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\nabla(\psi V) = \psi \nabla V + V \nabla \psi$$

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \psi$$

$$\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \psi \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \nabla V = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \qquad \text{(Divergence theorem)}$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(Stokes's theorem)}$$

Gradient, Divergence, Curl, and Laplacian Operations

Cartesian Coordinates (x, y, z)

$$\nabla V = \mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

The graph on the cover is a section of a chart for transmission-line calculations. (Discussed in Chapter 9.)

Cylindrical Coordinates (r, ϕ, z)

$$\nabla V = \mathbf{a}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \mathbf{a}_\phi \frac{\partial V}{r\partial \phi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial A_\phi}{r\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\phi r & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{a}_r\left(\frac{\partial A_z}{r\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \mathbf{a}_\phi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \mathbf{a}_z \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Spherical Coordinates (R, θ, ϕ)

$$\nabla V = \mathbf{a}_R \frac{\partial V}{\partial R} + \mathbf{a}_\theta \frac{\partial V}{R\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & \mathbf{a}_\theta R & \mathbf{a}_\phi R\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & RA_\theta & (R\sin\theta)A_\phi \end{vmatrix} = \mathbf{a}_R \frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]$$
$$+ \mathbf{a}_\theta \frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi)\right]$$
$$+ \mathbf{a}_\phi \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta}\right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

DERIVATIVES AND INTEGRALS

In what follows, the letters u and v stand for any functions of x, and a and m are constants. To each of the indefinite integrals should be added an arbitrary constant of integration. The *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) gives a more extensive tabulation.

1. $\dfrac{dx}{dx} = 1$
2. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
8. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$
9. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
10. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
11. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
12. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$
13. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$
14. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$
15. $\dfrac{d}{dx}\sin u = \cos u\dfrac{du}{dx}$
16. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\sin u\dfrac{du}{dx}$

1. $\displaystyle\int dx = x$
2. $\displaystyle\int au\,dx = a\int u\,dx$
3. $\displaystyle\int (u + v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
4. $\displaystyle\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
6. $\displaystyle\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$
7. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$
8. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$
9. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$
10. $\displaystyle\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|$
11. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x$
12. $\displaystyle\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13. $\displaystyle\int xe^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^2}(ax + 1)e^{-ax}$
14. $\displaystyle\int x^2e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15. $\displaystyle\int_0^\infty x^ne^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
18. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$