Cálculo Numérico (MS211) PROVA 2 (10/12/2009)

Nome: ______________________________ RA: __________ Turma: ______

**Trabalhe com 4 *dígitos decimais***
**(4 dígitos na mantissa). Justifique as suas respostas e explicite todas as contas. Trabalhe com *radianos*! Boa sorte e bom divertimento!**

---

1. A WHO (World Health Organization) publicou os dados seguintes referente os casos de gripe suína nas Américas:

| Data | 10/10 | 18/10 | 25/10 | 01/11 | 08/11 |
|---|---|---|---|---|---|
| Casos de H1N1 | 153697 | 160129 | 174565 | 185067 | 190765 |

   Estime o número de casos de gripe suina que teve no dia 5 de novembro utilizando *interpolação quadratica* (escolhe nós de interpolação apropriados). [2.5 pts]

2. Ajuste os dados abaixo pelo método dos Quadrados Mínimos utilizando uma função do tipo $a\sqrt{x} + be^x$. [2.5pts]

| x | 0 | 0.5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 1.2 | 3.0 | 4.7 | 10.1 |

3. Considere a integral $\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(x)dx$ onde $f(x) = \ln(\sin(x))$. Aproxime o valor desta integral numéricamente utilizando a regra de Simpson Repetida tal que o valor absoluto do erro desta aproximação seja menor do que $10^{-3}$. Justifique a sua resposta utilizando uma das fórmulas de erro dadas no verso. Dica: Utilize o fato que $f^{iv}$, a quarta derivada de $f$, é dada por

$$f^{iv}(x) = -2 - 8\cot^2(x) - 6\cot^4(x) = -2 - 8\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2 - 6\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^4$$

   e confira que $\max_{x\in[\pi/6,\pi/3]} |f^{iv}(x)| = 80$. [2.5 pts]

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

   (a) O método de Euler para resolver este problema pode ser interpretado como um método de Série de Taylor de ordem 1. Dados $x_k$ e uma aproximação $y_k$ para $y(x_k)$ deduza, utilizando a série de Taylor, como encontrar uma aproximação para $y(x_{k+1})$ para o método de Euler. [0.5pt]

   (b) Com o objetivo de obtermos melhores aproximações, podemos utilizar ume método da Série de Taylor de ordem superior. Explique porque esta abordagem pode ser computacionalmente inviável. [0.5 pt]

   (c) Qual método podemos utilizar para superarmos as deficiências apresentadas pelo método da Série de Taylor? Justifique a sua resposta. [0.5pt]

   (d) Considere o problema de valor inicial $y' = x\tan(y)$ com a condição inicial $y(1) = 1$. Aplique o método de Euler Aperfeiçoado (de preferência em forma tabelar) com $h = 0.1$ para encontrar uma aproximação para $y(1.1)$. Qual é a aproximação obtida? [1.0 pts]

*Veja as fórmulas e tabelas no verso*

# ALGUMAS FÓRMULAS

---

$p_n(x) = f_0 + f_1(x-x_0) + f_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$,
onde $f_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ para $k = 0, 1, \ldots, n$

$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L(x)$ , onde, $L_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \text{ para algum } \xi_x \in (x_0, x_n).$$

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|\frac{M_{n+1}}{(n+1)!},$$

onde $M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$.

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| < \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}.$$

---

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$

$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2$, onde $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

$|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4$, onde $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{iv}(x)|$

---

| $x$ | $y$ | $y' = f(x,y)$ | $\Delta y \approx y'h$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

| $x$ | $y$ | $y' = f(x,y)$ | $y''$ | $\Delta y \approx y'h + y''\frac{h^2}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| $x_k$ | $y_k$ | $y'_k = f(x_k, y_k)$ | $\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$ | $\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$ | $\Delta y_k \approx \frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2} h$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |