3 Prova

MA-311 — Cálculo III

1 Semestre de 2008

Nome:	RA:	Prof.:

Esta prova tem um total de 5 questões valendo 10 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

Não destaque as páginas da prova!

1	2.0	
2	2.0	
3	2.0	
4	2.0	
5	2.0	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*2.0 pontos*)

   (a) Encontre o intervalo de convergência da série (teste os extremos): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\ (x+1)^n}{n^2}$

   (b) Encontre uma representação em série de potências em torno de $a = 0$ da função

   $$f(x) = \frac{1}{3 - x^2}$$

2. (*2.0 pontos*)

   (a) (0.5) Mostre que $x = 0$ é um ponto ordinário para a equação

   $$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0 \qquad (*)$$

   (b) (1.5) Dado que a fórmula de recorrência da solução em série da equação (*) é

   $$a_{n+2} = \frac{(n-1)a_n}{(n+2)}$$

   para $n \geq 0$; encontre os cinco primeiros termos não nulos da solução com dados iniciais $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$.

3. (*2.0 pontos*) Considere a equação diferencial $2xy'' + y' + xy = 0$. Encontre uma solução em séries de potências em torno do ponto $x = 0$ correspondente a MENOR raiz. Determine a forma geral dos coeficientes dessa solução em série.

4. (*2.0 pontos*)

   (a) (0.3) Apresente a extensão ímpar da função $f(x) = 1$ onde $0 < x < 1$ e esboce o gráfico no intervalo $-1 < x < 1$.

   (b) (1.7) Encontre a série de Fourier da função acima e esboce o gráfico da série de Fourier no intervalo $-3 < x < 3$. (Sugestão: Use o Teorema de Convergência de Fourier)

5. (*2.0 pontos*) Usando o método de separação de variáveis encontrar a solução da seguinte equação da onda. **Explique detalhadamente como se resolve o problema**

   $$\begin{cases} y_{tt} = 4y_{xx}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ y(0,t) = 0, \quad y(\pi,t) = 0, \\ y(x,0) = 7\text{sen } 2x, \quad y_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Questão 1) Item a) Seja $a_n = \frac{2^n(x+1)^n}{n^2}$. Aplicando o teste da razão:

$$\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \Big|\frac{2^{n+1}(x+1)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n(x+1)^n}\Big| = \Big|\frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(x+1)^{n+1}}{(x+1)^n} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2}\Big| =$$

$$= 2|x+1|\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2 = 2|x+1|\big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\big)^2 \longrightarrow 2|x+1| < 1 \Leftrightarrow |x+1| < \frac{1}{2}.$$

$$|x+1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1-\frac{1}{2} < x < -1+\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}.(\mathbf{0{,}4})$$

Extremos do intervalo são: $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

(**0,2**) Analisar $x = -\frac{3}{2}$: $\sum \frac{2^n(-3/2+1)^n}{n^2} = \sum \frac{2^n}{n^2}(-1/2)^n = \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ que é convergente pelo Teste da Série Alternada, já que a sequência $(b_n) = (\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ é positiva, decrescente e tende a zero quando $n \to \infty$.

(**0,2**) Analisar $x = -\frac{1}{2}$: $\sum \frac{2^n(-1/2+1)^n}{n^2} = \sum \frac{2^n}{n^2}(1/2)^n = \sum \frac{1}{n^2}$ que é convergente.

Intervalo de convergência: $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$. (**0,2**)

Questão 1) Item b) Série Geométrica: $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$, $-1 < x < 1$ (**0,2**). Agora:

$$(\mathbf{0{,}8})\ \ f(x) = \frac{1}{3-x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x^2/3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(x/\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\Big(\frac{x}{\sqrt{3}}\Big)^2\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^{n+1}},$$

que é a Série de Potências em torno de $a = 0$ de $f(x)$.

Questão 2) Item a) (**0,5**) Sendo $P(x) = 1 - x^2$ temos que $P(0) = 1 - 0 = 1 \neq 0$, logo $x = 0$ é um ponto ordinário.

Questão 2) Item b) Como $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$ segue que $a_0 = 2$ e $a_1 = 3$.

$a_2 = \frac{(-1)a_0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$. (**0,3**)

$a_3 = \frac{(1-1)a_1}{3} = 0$. (**0,3**)

$a_4 = \frac{(2-1)a_2}{4} = \frac{a_2}{4} = -\frac{1}{4}$. (**0,3**)

$a_5 = \frac{(3-1)a_3}{5} = \frac{2\cdot 0}{5} = 0$. (**0,3**)

$a_6 = \frac{(4-1)a_4}{6} = \frac{3(-1)}{4}\frac{1}{6} = -\frac{1}{8}$. (**0,3**)

Portanto $y = \sum a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \cdots = 2 + 3x + (-1)x^2 + 0x^3 + (-1/4)x^4 + 0x^5 + (-1/8)x^6 + \cdots = 2 + 3x - x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{8} + \cdots$.

Questão 3) Temos que $P(x) = 2x$, $Q(x) = 1$ e $R(x) = x$. Como $P(0) = 0$, temos que $x = 0$ é ponto singular da equação.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = p_0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2} = 0 = q_0.$$

Portanto $x = 0$ é ponto singular regular.(**0,3**)

Equação Indicial: $r^2 + (1/2 - 1)r + 0 = 0 \Leftrightarrow r^2 - \frac{r}{2} = 0 \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{2}$ e $r_2 = 0$ (**0,2**). Como $r_1 - r_2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, temos que existem duas soluções linearmente independentes da equação:

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)x^n \quad \text{e} \quad y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n.(\mathbf{0{,}3})$$

Como o exercício pede a solução com relação à MENOR raiz, que é $r_2 = 0$, temos que encontrar y_2. Neste caso, temos que

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ \ y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ \ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.(\mathbf{0{,}2})$$

Substituindo na equação, temos:

$\sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1)na_nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1)na_nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{(2(n-1)na_n + na_n + a_{n-2}\right\}x^{n-1} = 0.$

Logo $a_1 = 0$ e $(2n-2)na_n + na_n + a_{n-2} = 0$, para todo $n \geq 0$.

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2n-1)} \quad \text{(Relação de Recorrência)}(\mathbf{0{,}6})$$

Então temos:

$a_0 = 1,\ \ a_1 = 0,\ \ a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 3} = -\frac{1}{2\cdot 3}.$

$a_3 = -\frac{a_1}{3\cdot 5} = 0,\ \ a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 7} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7},\ \ a_5 = 0.$

$a_6 = -\frac{a_4}{6\cdot 11} = -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 6\cdot 11}$ (Calculou alguns a_n's (**0,2**))

Portanto

$$a_0 = 1 \ \text{ e } \ a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é impar} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{2\cdot 3\cdots n(2n-1)} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \ , \text{ para todo } n \geq 1.(\mathbf{0{,}2})$$

Questão 4) Item a) Extensão ímpar de $f(x)$:

$$h(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 0 & x = 0, -1, 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \quad (\mathbf{0{,}3} \text{ - com gráfico})$$

Questão 4) Item b) Como $h(x)$ é uma função ímpar, sua série de Fourier é uma Série em Senos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi x)$ (**0,2**).

Agora $b_n = 2\int_0^1 f(x)\text{sen}(n\pi x)dx = 2\int_0^1 \text{sen}(n\pi x)dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{n\pi} \text{sen}u du = \frac{2}{n\pi}(-\text{cos}u)\Big]_0^{n\pi} = \frac{2}{n\pi}(-\cos(n\pi)+1) = \frac{2}{n\pi}((-1)^{n+1}+1) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$.(**0,5**)

Portanto a série de Fourier de $h(x)$ é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}((-1)^{n+1}+1)\text{sen}(n\pi x) = \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{4}{n\pi}\text{sen}(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi}\text{sen}((2n-1)\pi x).(\mathbf{0{,}3})$$

O Teorema de Convergência de Fourier afirma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi}\text{sen}((2n-1)\pi x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } h \text{ é contínua em } x \\ \frac{h(x+)+h(x-)}{2} & \text{se } h \text{ não é contínua em } x \end{cases}.$$

Os pontos de descontinuidade de h são $\{\pm n : n \in \mathbb{Z}\}$. Nestes pontos, vale que $\frac{h(x+)+h(x-)}{2} = 0$.(**0,3**)
Gráfico vale (**0,4**.)

Questão 5) Método de separação de variáveis: vamos supor que a função y é da forma $y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, onde X é uma função que depende só da variável x, e T é uma função que depende só da variável t. Derivando e substituindo na equação dada, temos:

$$4X''(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T''(t) \text{ e assim } \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

uma vez que as variávies x e t são independentes.(**0,4**)

Assim temos duas e.d.o's $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + 4\lambda T(t) = 0 \end{cases}$.

Das condições de contorno $\begin{cases} y(0,t) = X(0)\cdot T(t) = 0 \\ y(\pi,t) = X(\pi)\cdot T(t) = 0 \end{cases}$ segue que $X(0) = X(\pi) = 0$, pois $T \neq 0$. Neste caso sabemos que $\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\pi^2} = n^2$ e que as soluções são $X_n(x) = c_n\text{sen}(nx)$.(**0,4**)

Para cada $\lambda = \lambda_n = n^2$, temos $T'' + (2n)^2T = 0$. A solução geral desta equação é $T(t) = c_1\cos(2nt) + c_2\text{sen}(2nt)$. Da condição inicial $y_t(x,0) = X(x)\cdot T'(t)\big|_{t=0} = X(x)\cdot T'(0) = 0$, segue que $T'(0) = 0$, pois $X \neq 0$.

$T'(t) = -c_1 2n\text{sen}(2nt) + c_2 2n\cos(2nt) \Rightarrow T'(0) = c_2 = 0$. Logo $T(t) = T_n(t) = \cos(2nt)$.(**0,4**)

Portanto $y_n(x,t) = X_n(t)\cdot T_n(t) = c_n\text{sen}(nx)\cos(2nt)$ e assim $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t)\cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\text{sen}(nx)\cos(2nt)$.(**0,2**)

Agora $y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\text{sen}(nx) = 7\text{sen}(2x)$, o que nos dá $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 7\text{sen}(2x)\text{sen}(nx)dx =$
$= \frac{14}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}(2x)\text{sen}(nx)dx = 7 = c_2$. Os outros c_n's são zero.(**0,3**)

Resposta $y(x,t) = 7\text{sen}(2x)\cos(4t)$.(**0,3**)