INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP

Prova 2 – F 315 B,D 18/05/2010

RA:________ Nome: Gabarito

1) _____

2) _____

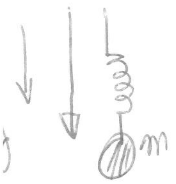
3) _____

Nota:______

Questão 1 (3 pts) Uma partícula de massa *m* encontra-se pendurada em repouso na ponta de uma mola de constante de força *k*, sob a ação da gravidade *g*. No instante *t=0*, uma força constante adicional *F*, vertical e para baixo, é aplicada à massa, atuando durante um intervalo de tempo t_0.

a) (0.5 pts) Encontre a posição de equilíbrio, i.e., o alongamento da mola para $t < 0$ devido à ação da gravidade.

b) (2.5 pts) Encontre a solução *x(t)* para a equação de movimento do sistema para $t > t_0$, em termos das constantes indicadas acima. Justifique cada passagem.



a) $mg = kx_0 \Rightarrow x_0 = \dfrac{mg}{k}$

$m\ddot{x} + k(x-x_0) = 0$ p/ $t<0$

$m\ddot{x} + k(x-x_0) = F$ p/ $0 \le t \le t_0$

$m\ddot{x} + k(x-x_0) = 0$ p/ $t > t_0$

fazendo $x - x_0 = \xi \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{\xi}$

$m\ddot{\xi} + k\xi = 0$ (I)

$m\ddot{\xi} + k\xi = F$ (II)

$m\ddot{\xi} + k\xi = 0$ (III)

em (I) a partícula está em repouso ∴ $\xi_{II} = \dot{\xi}_{II} = 0$
e na origem
de $\xi - x_0 = 0$

$$\xi_{II}(t) = \xi_{part} + \xi_{Hom} = \frac{F}{k} + Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad \text{onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\xi_{III}(t) = Ce^{i\omega_0 t} + De^{-i\omega_0 t}$$

Colocando as condições iniciais p/ (I) e (II)

$\xi(t=0) = 0 = \dfrac{F}{k} + A + B$

$\dot{\xi}(t=0) = 0 = i\omega(A+B)$

$A = B = \dfrac{-F}{2k}$ ∴

$$\xi_{II} = x - x_0 = \frac{F}{m} - \frac{F}{k}\left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\right)$$

$$\boxed{x - x_0 = \frac{F}{k}(1 - \cos\omega_0 t)} \quad \text{p/ } 0 \le t \le t_0$$

Podemos agora encontrar C e D aplicando a condição em t_0

$$\xi(t=t_0) = \frac{F}{k}(1-\cos\omega_0 t_0) = C e^{i\omega_0 t_0} + D e^{-i\omega_0 t_0}$$

$$\dot{\xi}(t=t_0) = \frac{F}{k}\omega_0 \sin\omega_0 t_0 = i\omega_0\left[C e^{i\omega_0 t_0} - D e^{-i\omega_0 t_0}\right]$$

$$\begin{cases} C e^{i\omega_0 t_0} + D e^{-i\omega_0 t_0} = \frac{F}{k}(1-\cos\omega_0 t_0) \\ C e^{i\omega_0 t_0} - D e^{-i\omega_0 t_0} = \frac{-iF}{k}\sin\omega_0 t_0 \end{cases}$$

$$C e^{i\omega_0 t_0} = \frac{F}{2k}\left[1 - \frac{e^{i\omega_0 t_0}}{2} - \cancel{\frac{e^{-i\omega_0 t_0}}{2}} - \frac{e^{+i\omega_0 t_0}}{2} + \cancel{\frac{e^{-i\omega_0 t_0}}{2}}\right]$$

$$C = \frac{F}{2k}e^{-i\omega_0 t_0}\left(1 - e^{i\omega_0 t_0}\right)$$ da mesma forma:

$$D = \frac{F}{2k}e^{i\omega_0 t_0}\left(1 - e^{-i\omega_0 t_0}\right)$$

$$\xi_{III} = \frac{F}{2k}\left[\left(e^{-i\omega_0 t_0} - 1\right)e^{i\omega_0 t} + \left(e^{i\omega_0 t_0} - 1\right)e^{-i\omega_0 t}\right]$$

$$\xi_{III} = \frac{F}{2k}\left[e^{i\omega_0(t-t_0)} - e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0(t-t_0)} - e^{-i\omega_0 t}\right]$$

$$\xi_{III} = \frac{F}{k}\left[\cos\omega_0(t-t_0) - \cos\omega_0 t\right]$$

$$\therefore \boxed{x - x_0 = \frac{F}{k}\left[\cos[\omega_0(t-t_0)] - \cos(\omega_0 t)\right]}$$

//

Questão 2 (3.5 pts) Uma massa *m* cai de uma altura igual a *h* sobre uma plataforma de massa desprezível. Deseja-se projetar um amortecedor sob a plataforma de tal forma que o conjunto plataforma + massa possa atingir a posição de equilíbrio, x_f abaixo da posição original, <u>tão depressa quanto possível</u> (depois de sofrer o impacto), **porem sem ultrapassá-la**.

a) (2.0 pts) Determine qual tipo de oscilador deve ser utilizado. Encontre os valores de k e b. (Dica: o que acontece em t→∞ ?).

b) (1.5 pts) Encontre a solução x(t) para a equação de movimento do sistema massa+oscilador após a colisão (t=0 é o momento do impacto). Justifique cada passagem. Verifique que a massa realmente não ultrapassa o valor limite x_f.

a) p/ $t \to \infty$ $kx_f = mg \Rightarrow \boxed{k = \frac{mg}{x_f}}$ $x \downarrow$ $g \downarrow$

b) P/ não ultrapassar ou oscilar, é óbvio que não pode ser uma solução ~~sub-amortecida~~. Vamos analisar o que acontece p/ os casos criticamente amortecido e super-amortecido.

Criticamente amortecido:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = g \Rightarrow \boxed{x_p = \frac{g}{\omega_0^2}}$$

Solução pelo método de Euler.

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

p/ crítico $\Rightarrow \gamma^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \gamma = \omega_0$ ∴ $\frac{b}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{4km}}$

$$x(t) = \frac{g}{\omega_0^2} + Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$$

condições de contorno:

$$0 = \frac{g}{\omega_0^2} + A \Rightarrow \boxed{A = -\frac{g}{\omega_0^2}}$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = -\gamma A + B \Rightarrow B = v_0 + \gamma A$$

$$B = v_0 - \frac{g}{\omega_0}$$

$$x(t) = \frac{g}{\omega_0^2} - \frac{g}{\omega_0^2}e^{-\gamma t} + \left(v_0 - \frac{g}{\omega_0}\right)te^{-\gamma t}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{g}{\omega_0^2} + \left[\left(v_0 - \frac{g}{\omega_0}\right)t - \frac{g}{\omega_0^2}\right]e^{-\gamma t}}$$

$$x(t) = x_f + \left[\left(v_0 - \frac{g}{\omega_0}\right)t - x_f\right] e^{-\gamma t}$$

p/ $t = 0$ $\quad x(t) = 0$ $\qquad$ p/ $t \to \infty$ $\quad x(t) = x_f$

Note que neste caso a velocidade teria que ser sempre positiva e nunca negativa. Se isto não ocorrer significa que passou do limite

$$\dot{x}(t) = \left(v_0 - \frac{g}{\omega_0}\right) e^{-\gamma t} + \left[\left(v_0 - \frac{g}{\omega_0}\right)t - x_f\right](-\gamma) e^{-\gamma t}$$

$$\dot{x}(t) = \left[v_0 - \cancel{\frac{g}{\omega_0}} - \gamma v_0 t + gt + \cancel{x_f \gamma}\right] e^{-\gamma t}$$

$$\dot{x}(t) = \left[v_0 - \gamma v_0 t + gt\right] e^{-\gamma t} > 0 \therefore t > \frac{v_0}{(\gamma v_0 - g)} \to \infty$$

$$\therefore v_0 = \frac{g}{\gamma} \Rightarrow \sqrt{2gh} = \frac{g}{\left(\frac{b}{2m}\right)} \Rightarrow \sqrt{2gh\frac{k}{m}} = g \Rightarrow \boxed{h = \frac{m}{2k}g = \frac{x_f}{2}}$$

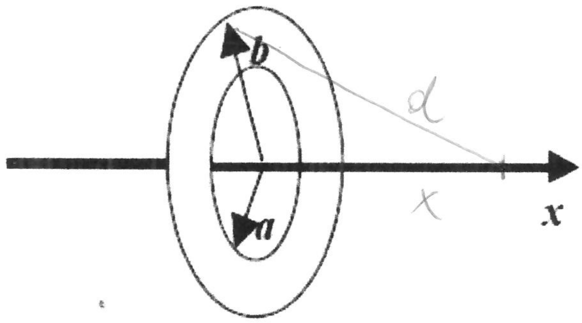
Ou seja só será válido p/ alturas menores que $\frac{x_f}{2}$.

Questão 3 (3.5 pts) Considere uma coroa circular fina de massa M, homogênea, raio interno a e raio externo b:

a) (1.5 pts) Calcule o **potencial gravitacional** devido a coroa ao longo do eixo de simetria x (com origem no centro geométrico da mesma).

b) (1 pt) Calcule, a partir do potencial, a **força devida à coroa**, atuando sobre uma partícula de massa m num ponto x sobre o eixo de simetria. Quanto vale a força se $x >> b$?

c) (1 pt) Determine a **freqüência de pequenas oscilações** da mesma partícula, quando ela estiver com energia muito próxima da mínima possível e vinculada a se movimentar ao longo do eixo x próxima da origem.



a) $d\phi = -\dfrac{G\,dm}{d}$ $\quad dm = 2\pi r\,dr\,\sigma \quad$ onde $\sigma = \dfrac{M}{\pi(b^2-a^2)}$

e $d = (x^2+r^2)^{1/2}$

$$\phi = -G\,2\pi\sigma \int_a^b \frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{1/2}} \qquad \text{fazendo} \quad u = x^2+r^2, \quad du = 2r\,dr$$

$$\phi = -G\pi\sigma \int_{u^-}^{u^+} \frac{du}{u^{1/2}} = -G\pi\sigma\,2\,u^{1/2}\Big| = -G\pi\sigma\,2\,(x^2+r^2)^{1/2}\Big|_{r=}^{r=}$$

$$\phi = -2\pi\sigma G\left\{(x^2+b^2)^{1/2} - (x^2+a^2)^{1/2}\right\}$$

$$\boxed{\phi = -\frac{2GM}{(b^2-a^2)}\left\{(x^2+b^2)^{1/2} - (x^2+a^2)^{1/2}\right\}}$$

b) $\vec{g} = -\nabla\phi \Rightarrow F = mg$

$$F = +\frac{2GMm}{(b^2-a^2)}\left[\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{(x^2+b^2)^{1/2}} - \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right]$$

$$\vec{F} = \frac{2GmM}{(b^2-a^2)}\, x \left[\frac{1}{(x^2+b^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}} \right] \hat{x}$$

p/ $x >> b$

$$F = \frac{2GmM}{(b^2-a^2)} \cancel{x} \left[\frac{1}{\cancel{x}\left(1+\left(\frac{b}{x}\right)^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\cancel{x}\left(1+\left(\frac{a}{x}\right)^2\right)^{1/2}} \right]$$

Vamos expandir $(1+\xi)^{-1/2}$ onde $\xi = \left(\frac{b}{x}\right)^2$ que é pequeno

$$(1+\xi)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{8}\xi^2 - \dots$$

$$(1+\xi')^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\xi' + \frac{3}{8}\xi'^2 - \dots \qquad \xi' = \left(\frac{a}{x}\right)^2$$

se $x >> b \Rightarrow \left(\frac{b}{x}\right)^4 <<< 1$ portanto podemos desprezar.

$$F \cong \frac{2GmM}{(b^2-a^2)} \left[1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{x^2} - 1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2} \right] \cong -\frac{\cancel{2}GmM}{\cancel{(b^2-a^2)}} \frac{\cancel{(b^2-a^2)}}{\cancel{2}x^2}$$

$$\boxed{\vec{F} \cong -\frac{GmM}{x^2}\hat{x}}$$ Como esperado.

c) p/ $x \to 0$

$$F = \frac{2GmM}{(b^2-a^2)}\, x \left[\frac{1}{b\left(\frac{x^2}{b^2}+1\right)^{1/2}} - \frac{1}{a\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)^{1/2}} \right] \simeq -\underbrace{\frac{2GmM}{ab(b+a)}}_{K} x$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2GM}{ab(b+a)}}}$$