F 602 - prova 3

Unicamp, 16 de dezembro de 2009

nome RA

$1^{\underline{a}}$ questão (4 pontos): Um fio retilíneo neutro, de área transversal A, carrega uma densidade de corrente J, formada por uma densidade de cargas positiva $+\rho$ se deslocando em uma direção, e uma densidade negativa $-\rho$ se deslocando na direção contrária, com a mesma velocidade. Considerando que $J^\mu = (c\rho, \vec{J})$ forma um quadrivetor contravariante, calcule qual a densidade de carga e corrente em um referencial que se move com uma velocidade v na direção do fio,
a) Utilizando a transformação de Lorentz do quadrivetor J^μ.
b) Utilizando argumentos de dilatação temporal e contração espacial.
Considere agora uma mudança para um referencial que se move com uma velocidade v perpendicular à direção do fio. Calcule a densidade de carga e corrente neste referencial,
c) Utilizando a transformação de Lorentz do quadrivetor J^μ.
d) Utilizando argumentos de dilatação temporal e contração espacial.

a) O fio original é neutro, e portanto temos que o quadrivetor J^μ é dado por:

$$J^\mu = (0, 2\rho u, 0, 0)$$

onde u é a velocidade das cargas, e escolhemos o sistema de coordenadas de forma que a corrente corre paralela ao eixo x. Aplicando as transformações de Lorentz, temos:

$$\bar{\rho} c = -\gamma\beta 2\rho u \quad ; \quad \bar{J}_x = \gamma 2\rho u \quad ; \quad \bar{J}_y = \bar{J}_z = 0$$

b) Considerando que a densidade própria é dada por ρ_0, temos que tanto o espaçamento entre as cargas positivas quanto o das cargas negativas sofreu a mesma contração espacial (mesmas velocidades) no referencial onde o fio é neutro. Agora, se fazemos uma mudança para um referencial na direção do movimento das cargas positivas, a velocidade destas cargas será menor, e a das cargas negativas será maior. Portanto a contração espacial será maior para as cargas negativas, levando a uma densidade ρ^- maior, que é o observado em a). Para fazer o cálculo exato usam-se as fórmulas de transformação de velocidades.
c) Fazendo a transformação de Lorentz em $\hat{x}$ e a corrente em $\hat{y}$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} c\rho' \\ J'_x \\ J'_y \\ J'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

o que leva à:

$$\rho' = 0 \quad ; \quad J'_x = J'_z = 0 \quad ; \quad J'_y = J_y$$

d) A contração de Lorentz acontece em uma das direções da seção reta, aumentando ρ de um fator γ. A dilatação temporal diminui I de um fator γ. Um fator cancela o outro, mantendo a mesma densidade de corrente.

2ª questão (3 pontos):

Considerando que o potencial escalar V e o potencial vetor $\vec{A}$ formam um quadrivetor $A^\mu = (V/c, \vec{A})$, calcule $\vec{A}$ de um capacitor paralelo infinito que carrega uma corrente superficial de carga $+K\hat{x}$ em uma das placas e $-K\hat{x}$ na outra, através do seguinte roteiro:

a) Calcule o campo elétrico de um capacitor paralelo infinito com densidade superficial de carga $\pm\sigma_0$ em cada placa. A partir do seu resultado calcule o potencial V.

b) Calcule V e $\vec{A}$ em um referencial que se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{x}$ em relação ao referencial anterior através de uma transformada de Lorentz.

c) Calcule os campos elétricos e magnéticos neste novo referencial a partir dos resultados do ítem anterior.

d) Verifique que os campos eletromagnéticos obtidos obedecem às leis de transformação de campos.

a) Por Gauss, e escolhendo adequadamente o eixo de coordenadas:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z} \quad \rightarrow \quad V = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}z$$

b) Aplicando Lorentz:

$$\begin{pmatrix} V'/c \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_0}{c\epsilon_0}z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o que leva à:

$$V' = -\gamma\frac{\sigma_0}{c\epsilon_0}z \quad ; \quad A'_x = \gamma\beta\frac{\sigma_0}{c\epsilon_0}z \quad ; \quad A'_y = A'_z = 0$$

c) campo elétrico:

$$\vec{E}' = -\nabla V' = \gamma\frac{\sigma_0}{c\epsilon_0}\hat{z} = \gamma E_z\hat{z}$$

campo magnético:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{y} = \gamma\beta\frac{\sigma_0}{c\epsilon_0}\hat{y} = \gamma\frac{v}{c^2}E_z\hat{y}$$

d) verificação com fórmulas do sumário.

$4^{\underline{a}}$ questão (3 pontos):

a) Escreva a primeira lei de Maxwell, $\nabla.\vec{E} = \rho/\epsilon_0$, em notação tensorial.

b) Mostre esquematicamente como escrever a equação do ítem anterior em um outro referencial que se move a uma velocidade constante em relação ao primeiro. Quais equações de Maxwell você espera obter como resultado desta transformação? Justifique sua resposta.

a) Abrindo as contas e rearranjando:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_x}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_y}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_z}{c}\right) = \mu_0(c\rho)$$

o que pode ser reescrito como:

$$\partial_\nu F^{0\nu} = \mu_0 J^0$$

b) A equação acima pode ser vista como o elemento "0" de um quadrivetor. Portanto, a transformada pode ser feita da forma:

$$\Lambda^\mu_0 \partial_\nu F^{0\nu} = \Lambda^\mu_0 \mu_0 J^0$$

o que cria quatro equações, para $\mu = 0, 1, 2, 3$. Esta equação pode ser escrita nas formas:

$$\nabla'.\vec{E}' = \rho'/\epsilon_0$$

$$\nabla' \times \vec{B}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} = \mu_0 \vec{J}'$$

- contração espacial e dilatação temporal:

$$\Delta x = \gamma \Delta x' \quad ; \quad \Delta t = \Delta t'/\gamma$$

- transformação de Lorentz, em várias formas diferentes:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{array}$$

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{onde} \quad \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- eletromagnetismo em notação tensorial:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu \quad ; \quad \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

onde

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

- leis de transformação de campos:

$$\begin{array}{lll} E'_x = E_x & E'_y = \gamma(E_y - vB_z) & E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_x = B_x & B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) & B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{array}$$

$$F^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu F^{\mu\nu}$$