MA327. ÁLGEBRA LINEAR

Segunda Prova, 24/06/2008

Professor: Alexandre Ananin (Sasha), sala 243 IMECC

Para obter 10 pontos é suficiente resolver os primeiros quatro problemas sem erros.

1. Determine a assinatura da forma cuja matriz de Gram é $G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Calcule o polonômio característico da matriz $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Procure a matriz T^{17}.

3. Procure uma 3×3-matriz inversível M tal que MTM^{-1} é diagonal, onde $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, ache uma matriz inversível M tal que M^tGM é diagonal, onde $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Os problemas seguintes são para mais pontos:

5. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial munido de produto interno. Prove que todas as aplicações autoadjuntas $A : V \to V$ formam um espaço vetorial.

6. Seja M uma matriz real inversível. Prove que existem uma matriz ortogonal E e uma matriz diagonal D tais que $DEM^t = EM^{-1}$.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

RAFAEL : 92483272

Gabriel Romeiro 043685

PROVA 2 - MA 327

1. $G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ $G_1 = [1]$ $G_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\det G_1 = 1$

$\det G_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 1$

$\det G = \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 6+1+1-2-1-3 = 2$

$\det G_1 \,,\; \dfrac{\det G_2}{\det G_1} \,,\; \dfrac{\det G}{\det G_2}$

" " "

1 1 2

O número de positivos é 3 e negativos é zero! Então:

$p = 3$

$q = 0$

Assinatura $\rightsquigarrow \langle p, q\rangle \Rightarrow \langle 3, 0\rangle$ $\langle P, Q\rangle = \langle 3, 0\rangle$

2. $p(x) = \det(T - xI) = \left|\begin{matrix} 1-x & 1 & -2 \\ 0 & 2-x & -2 \\ 2 & 1 & -3-x \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1-x & 1 \\ 0 & 2-x \\ 2 & 1 \end{matrix} =$

$= (1-x)(2-x)(-3-x) - 4 + 4(2-x) + 2(1-x) =$

$= -x^3 + 7x - 6 - 4 + 8 - 4x + 2 - 2x =$

$= -x^3 + x = x - x^3$ $\rightsquigarrow p(x) = x - x^3$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton:

$p(T) = 0 \rightarrow T - T^3 = 0 \rightarrow T^3 = T$

$T^{17} = T^3 \cdot T^3 \cdot T^3 \cdot T^3 \cdot T^3 \cdot T^2 = T \cdot T \cdot T \cdot T \cdot T \cdot T^2 = T^3 \cdot T^2 \cdot T^2 = T^3 \cdot T^3 \cdot T =$
$T \cdot T \cdot T = T^3 = T$

$T^{17} = T$

$T^{17} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

+ 3. $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad M^{-1}TM$ é diagonal

$$p(x) = \det(T - xI) = \left|\begin{matrix} 1-x & 1 & -1 \\ -2 & -2-x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1-x & 1 \\ -2 & -2-x \\ 0 & 0 \end{matrix} = (1-x)(-2-x)(1-x) + 2(1-x) =$$

$$= (-2+x+x^2)(1-x) + 2 - 2x = \cancel{-2} + \cancel{2x} + x - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - x^3 + \cancel{2} - \cancel{2x} =$$

$$= x - x^3$$

$$p(x) = x - x^3$$

Os autovalores são as raízes do $p(x)$:

$$x - x^3 = 0 \rightarrow x(1-x^2) = 0 \leadsto \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = -1 \quad \alpha_3 = 1$$

Para os autovetores, temos:

$$T \cdot v = \alpha \cdot v \leadsto (T - \alpha I) \cdot v = 0$$

$\alpha_1 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_2 = -1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_3 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{matrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz M que transforma T para uma T' diagonal é formada pelos autovetores de T, agrupando-os como colunas da matriz M.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ essa é } M^{-1}$$

4. $G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad M^t G M$ é diagonal

Suponhamos que G tenha uma base qualquer β, $G^{\beta\beta}$. Então a matriz $(M_\alpha^\beta)^t G^{\beta\beta} M_\alpha^\beta = G^{\alpha\alpha}$, onde $G^{\alpha\alpha}$ é uma matriz diagonal, a base α é ortogonal.

β: $b_1, b_2, b_3 \rightarrow$ base qualquer

α: $e_1, e_2, e_3 \rightarrow$ base ortogonal

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

$e_1 = b_1 \quad \rightarrow \quad e_1 = b_1$

$e_2 = b_2 - \dfrac{\langle b_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 \quad \rightarrow \quad e_2 = b_2 - b_1$

$e_3 = b_3 - \dfrac{\langle b_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 - \dfrac{\langle b_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 \quad \rightarrow \quad e_3 = b_3$

A partir das expressões de α através de β, montamos a matriz M.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G^{\alpha\alpha} = [M_\alpha^\beta]^t \cdot G^{\beta\beta} \cdot M_\alpha^\beta$$

5. Auto adjuntas $\rightarrow$ $\langle A v_1, v_2 \rangle \overset{DEF}{=} \langle v_1, A v_2 \rangle$

$(A_1 + A_2) v \overset{DEF}{=} A_1 v + A_2 v$

$(c \cdot A) \cdot v \overset{DEF}{=} c \cdot A v$