EE521 - T. U - 2º S/2005 - Prova 3 - Soluções

RA: ____________ Nome: ________________________________

Observações: Escreva as respostas nos espaços reservados logo abaixo de cada questão. Entregue também as soluções completas em folha(s) separada(s). Não esqueça de identificar cada folha. Cada questão vale 2 pontos.

1. Considere um capacitor de placas paralelas em que a distância d entre as placas é muito menor que suas dimensões laterais. O espaço entre as placas é composto de três camadas de material dielétrico. Cada camada em contato com uma das placas tem espessura δ e é composta de material com permissividade (absoluta) ε_1. O material da camada central, de espessura $d - 2\delta$, tem permissividade ε_2. Uma das placas é *aterrada* e a outra mantida num potencial V_0. Tomando o eixo z perpendicular às placas e apontando da placa com potencial V_0 para a placa *aterrada*, determine o campo elétrico, **E**, na camada central.

$$\mathbf{E} = \frac{\varepsilon_1}{2\delta\varepsilon_2 + (d-2\delta)\varepsilon_1} V_0 \hat{\mathbf{z}} \quad \text{(na camada central)}$$

2. Um disco de raio a tem sua superfície, não condutora, uniformemente carregada com densidade superficial σ_0. O disco gira com velocidade angular constante, ω, em torno de seu eixo. Tomando a origem no centro do disco, o eixo z coincidente com o eixo de rotação e orientado de maneira que o disco gire no sentido de $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, determine o valor da integral

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l},$$

onde C é a curva fechada formada pelos lados do retângulo com vértices A, B, C e D e orientada no sentido $A \to B \to C \to D \to A$.

As coordenadas dos vértices são: $A\ (0,0,-a)$, $B\ (0,a,-a)$, $C\ (0,a,a)$, $D\ (0,0,a)$.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{2}\mu_0\sigma_0\omega a^2$$

RA: ___________

3. Considere o circuito fechado formado por: o segmento de reta no eixo x entre a origem e o ponto de coordenadas $(a,0,0)$; o arco de circunferência no plano xy entre este ponto e o ponto de coordenadas $(0,a,0)$; o segmento de reta entre este último ponto e a origem. O circuito é percorrido por uma corrente constante I, circulando em sentido anti-horário quando visto de um ponto do semi-eixo z positivo. Determine *a componente* B_z do campo magnético $\mathbf{B}$ *nos pontos do eixo* z.

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{8}\frac{a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

4. Para o vetor potencial magnético $\mathbf{A}$ dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} k(a^2 - s^2)\hat{\mathbf{z}} & s \leq a \\ 2ka^2(\ln a - \ln s)\hat{\mathbf{z}} & s \geq a \end{cases},$$

determine a distribuição de corrente ou, mais precisamente, a densidade de corrente, $\mathbf{J}$.

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \frac{4k}{\mu_0}\hat{\mathbf{z}} & s < a \\ 0 & s > a \end{cases}$$

5. Considere o circuito fechado formado pelos lados de um quadrado de lado a e percorrido por uma corrente constante de valor I. Adote um sistema de coordenadas com a origem no centro do quadrado e com o eixo z perpendicular ao plano do mesmo e orientado de forma que a corrente circule no sentido anti-horário quando vista de um ponto no semi-eixo z positivo. Determine uma boa aproximação para o campo magnético $\mathbf{B}$ *nos pontos do plano xy para os quais* $s = \sqrt{x^2+y^2} \gg a$. Use coordenadas retangulares para expressar sua resposta.

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I a^2}{4\pi(x^2+y^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}$$

Soluções

1.

Entre as placas

$$\mathbf{D} = D_z\hat{\mathbf{z}} = \text{const.}$$

Nas camadas com $\varepsilon = \varepsilon_1$

$$\mathbf{E} = \frac{D_z}{\varepsilon_1}\hat{\mathbf{z}}.$$

Na camada central

$$\mathbf{E} = \frac{D_z}{\varepsilon_2}\hat{\mathbf{z}}.$$

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{D_z}{\varepsilon_1}2\delta + \frac{D_z}{\varepsilon_2}(d-2\delta) = \frac{D_z}{\varepsilon_2}\left(\frac{2\delta\varepsilon_2 + (d-2\delta)\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right)$$

ou seja

$$\frac{D_z}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{2\delta\varepsilon_2 + (d-2\delta)\varepsilon_1}V_0 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\varepsilon_1}{2\delta\varepsilon_2 + (d-2\delta)\varepsilon_1}V_0\hat{\mathbf{z}} \quad \text{(na camada central)}$$

2.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I(C)$$

onde $I(C)$ é a corrente que passa, por exemplo, pela superfície retangular limitada por C.

$$I(C) = \int dI = \int \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{x}}dy = \int \sigma_0 v(-\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\mathbf{x}}dy$$

$$= -\int_0^a \sigma_0\omega y dy = -\frac{1}{2}\sigma_0\omega a^2 \Rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{2}\mu_0\sigma_0\omega a^2$$

3.

$$\mathbf{B}(z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

No segmento no eixo x,

$$d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}') = dx'\hat{\mathbf{x}} \times (z\hat{\mathbf{z}} - x'\hat{\mathbf{x}}) = z dx'\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = -z dx'\hat{\mathbf{y}}.$$

No segmento no eixo y,

$$d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -|dy'|\hat{\mathbf{y}} \times (z\hat{\mathbf{z}} - y'\hat{\mathbf{y}}) = -z|dy'|\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = -z|dy'|\hat{\mathbf{x}}.$$

Portanto os segmentos retilíneos não contribuem com a componente B_z. Para a parte curva, temos a contribuição para o campo

$$\mathbf{B}(z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{ad\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \times (z\hat{\mathbf{z}} - a\hat{\mathbf{s}})}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{(az\hat{\mathbf{s}} + a^2\hat{\mathbf{z}})}{(z^2+a^2)^{3/2}}d\phi$$

de onde se lê

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}d\phi = \frac{\mu_0 I}{8}\frac{a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

4.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial s}k(a^2 - s^2)\hat{\boldsymbol{\phi}} & s < a \\ -\dfrac{\partial}{\partial s}2ka^2(\ln a - \ln s)\hat{\boldsymbol{\phi}} & s > a \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 2ks\hat{\boldsymbol{\phi}} & s < a \\ \dfrac{2ka^2}{s}\hat{\boldsymbol{\phi}} & s > a \end{cases}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sB_\phi)\hat{\mathbf{z}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{1}{s}\dfrac{\partial}{\partial s}(2ks^2)\hat{\mathbf{z}} & s < a \\ \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{1}{s}\dfrac{\partial}{\partial s}(2ka^2)\hat{\mathbf{z}} & s > a \end{cases}$$

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \dfrac{4k}{\mu_0}\hat{\mathbf{z}} & s < a \\ 0 & s > a \end{cases}$$

5.

Para as condições do problema o campo pode ser representado pelo campo de dipolo

$$\mathbf{B}_p(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left(2\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \quad \text{(eq. 5.86)}$$

onde

$$m = IA = Ia^2$$

Para **r** no plano *xy*,

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0 \quad \text{e} \quad \sin\theta = 1, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{z}}, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I a^2}{4\pi(x^2 + y^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}$$