

## ME-310 Probabilidade II

### Lista 0

1. Sejam  $A$  e  $B$  eventos disjuntos tais que  $\mathbf{P}(A) = 0.1$  e  $\mathbf{P}(B) = 0.4$ . Qual é a probabilidade que

- (a)  $A$  ou  $B$  ocorra;
- (b)  $A$  ocorra, mas  $B$  não ocorra;
- (c) repita (a) e (b) se os eventos forem independentes.

2. Considere duas urnas, a urna  $A$  e a urna  $B$ . Urna  $A$  contém 4 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 2 bolas verdes. Urna  $B$  contém 2 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 4 bolas verdes. Uma bola é retirada da urna  $A$  e colocada na urna  $B$ . Depois, uma bola é retirada da urna  $B$ .

- (a) Qual é a probabilidade de que uma bola retirada da urna  $B$  seja vermelha?
- (b) Se uma bola vermelha é retirada da urna  $B$ , qual é a probabilidade de que uma bola vermelha tenha sido retirada da urna  $A$ ?

3. Demonstre as seguintes afirmações:

- (a) Se  $P(A) = 0$  e  $B$  é um evento qualquer, então  $A$  e  $B$  são independentes;
- (b) Se  $P(A) = 1$  e  $B$  é um evento qualquer, então  $A$  e  $B$  são independentes;
- (c) Os eventos  $D$  e  $D^c$  são independentes se e somente se  $P(D) = 0$  ou  $P(D) = 1$ ;
- (d) Ache uma condição para que o evento  $E$  seja independente dele mesmo.

4. Suponha que o número de vezes que uma pessoa fica resfriada durante um ano tem distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda = 4$ . Um novo remédio para prevenir resfriados reduz este parâmetro para  $\lambda' = 2$  para 75% das pessoas e não faz efeito em 25% restantes. Se uma pessoa tomou este remédio durante um ano e pegou resfriado 2 vezes, qual é a probabilidade de que o remédio funciona para esta pessoa?

5. Seja  $X$  a v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é

$$f(x) = \begin{cases} kx^3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor de  $k$ .
- (b) Calcule  $\mathbf{P}(1/4 < X < 1/2)$ .
- (c) Calcule  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\text{Var}(X)$ .
- (d) Determine a f.d.a. de  $X$ .

6. O tempo que um eletrodoméstico funciona (até quebrar) tem distribuição Exponencial com média 3 anos. Se uma pessoa comprou um eletrodoméstico usado, calcule a probabilidade de que este vai durar pelo menos mais 2 anos.

7. Na fabricação de parafusos, os parafusos tem que ter diâmetro entre  $d_1$  e  $d_2$ , senão eles são considerados defeituosos. Para controle de qualidade é feito um

teste “passa - não passa”, o parafuso é aceito, se ele não passa numa abertura de diâmetro  $d_1$ , mas passa numa abertura de diâmetro  $d_2$ . Suponha que o diâmetro  $D$  de um parafuso é uma v.a. Normal com média  $(d_1 + d_2)/2$  e variância  $(d_2 - d_1)^2/16$ .

- (a) Ache a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.
- (b) Se, em vez de saber a variância, você sabe que  $d_1 = 40$  mm,  $d_2 = 50$  mm e que 10% dos parafusos são rejeitados, quanto valeria  $\text{Var } D$ ?

8. Suponha que o raio  $R$  de uma esfera seja uma v.a. contínua com densidade

$$f_R(r) = \begin{cases} 6r(1-r), & 0 < r < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ache a densidade do volume  $V$  da esfera.

9. Seja  $X$  uma v.a. com f.d.a.  $F_X$ .

- (a) Seja  $Y = 1 + bX$ . Ache a f.d.a. de  $Y$  (considere dois casos:  $b > 0$  e  $b < 0$ ).
- (b) Suponha que  $F_X$  é estritamente monótona e defina  $Z = F_X(X)$ . Mostre que  $Z \sim U(0, 1)$ .
- (c) Tome  $U \sim U(0, 1)$  e mostre que  $W = F_X^{-1}(U)$  tem f.d.a.  $F_X$ .

10. Seja  $U$  v.a. Uniforme  $(0, 1)$  e  $X = \ln U$ . Ache a densidade e a função geratriz de momentos de  $X$ . Usando a função geratriz de momentos, calcule  $\mathbb{E}X$  e  $\text{Var } X$ .

11. Para quaisquer eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$  mostre que

- (a) se  $A \subset B$ , então  $B^c \subset A^c$ ;
- (b)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ;
- (c)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

12. Numa urna há 5 bolinhas brancas, 4 verdes e 6 azuis. Escolhemos 4 bolinhas. Qual é a probabilidade de que foram escolhidas 2 bolinhas de uma cor e 2 bolinhas de outra cor? Qual é a probabilidade de que todas as bolinhas escolhidas são da mesma cor? Considere dois casos: escolha sem reposição e com reposição.

13. Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com  $\mathbf{P}(X = 0) = 0.25$ ,  $\mathbf{P}(X = 1) = 0.125$ ,  $\mathbf{P}(X = 2) = 0.125$ ,  $\mathbf{P}(X = 3) = 0.5$ . Calcule a função de distribuição acumulada, o valor esperado e a variância de  $X$ . Determine as seguintes probabilidades:

$$\mathbf{P}(0 < X < 1), \mathbf{P}(X \leq 1), \mathbf{P}(X > 2), \mathbf{P}(X > 2.5).$$

14. Suponha que o tempo de viagem entre sua casa e UNICAMP tem distribuição Normal com média 50 minutos e desvio padrão 4 minutos. Se você tem uma prova às 10:00 e quer que probabilidade de chegar atrasado seja no máximo 0.5%, a que horas você deve sair de casa?

## Probabilidade 2 - ME310 - Lista 0

August 30, 2012

**Lembrando:**

**1) Conjuntos disjuntos:**  $A \cap B = \emptyset \implies P(A \cap B) = 0$

**2) Conjuntos independentes:**  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**3) Podemos dividir qualquer conjunto em dois conjuntos disjuntos:**  
 $A = (A \cap B) \dot{\cup} (A \cap B^c)$

**4) Notação para união disjunta:**  $A \dot{\cup} B$  é só uma forma de deixar explícito que  $A \cap B = \emptyset$  e que estamos fazendo uma união  $A \cup B$

**5) Probabilidade de união de conjuntos**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**6) Probabilidade condicional:**  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

**7) Fórmula de Bayes:**  $P(K) = P(K \cap W) + P(K \cap W^c) = P(K/W) \cdot P(W) + P(K/W^c) \cdot P(W^c) \implies P(K/W) = \frac{P(W/K) \cdot P(K)}{P(W/K) \cdot P(K) + P(W/K^c) \cdot P(K^c)}$

**8)**  $P(\Omega) = 1$  e  $P(\emptyset) = 0$

**9)**  $X \sim Poisson(\lambda) \implies f(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$  e  $\mathbf{E}(X) = \lambda$

**10)**  $X \sim Exp(\lambda) \implies f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$  e  $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

**11)**  $X \sim Uniforme(a, b) \implies f(x) = \frac{1}{b-a}$  e  $F_X(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$

e  $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$

1) Sejam A e B eventos disjuntos tais que  $P(A) = 0,1$  e  $P(B)=0,4$  . Qual é a probabilidade que:

a) A ou B ocorra e são disjuntos

$$\text{Resp. a) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \stackrel{1}{=} P(A) + P(B) - 0 = 0,1 + 0,4$$

b) A ocorra mas não B e são disjuntos

$$\text{Resp. b) } P(A \cap B^c) \stackrel{3}{=} P(A) - P(A \cap B) \stackrel{1}{=} P(A) - 0$$

c) A ou B ocorra e são independentes

$$\text{Resp. c) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \stackrel{2}{=} P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0,1 + 0,4 - (0,1 \cdot 0,4)$$

d) A ocorra mas não B e são independentes

$$\text{Resp. d) } P(A \cap B^c) \stackrel{1,3,5}{=} P(A) - P(A \cap B) \stackrel{2}{=} P(A) - P(A) \cdot P(B) = 0,1 - (0,1 \cdot 0,4)$$

2) Considere duas urnas, a urna A e a urna B. Urna A contém 4 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 2 bolas verdes. A urna B contém 2 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 4 bolas verdes. Uma bola é retirada da urna A e colocada na urna B. Depois, uma bola é retirada da urna B.

Para simplificar, vamos considerar que V = verde; Z = azul; D = vermelho

A notação que eu vou usar é  $X_y$  em que X representa a cor que nos interessa e Y a urna de interesse

Pelo enunciado temos  $P(V_A) = 4/9$ ;  $P(Z_A) = 3/9$ ;  $P(D_A) = 2/9$ .

a) Qual a probabilidade de que uma bola retirada da urna B seja vermelha ?

$$\text{Resp. a) } P(V_B) \stackrel{7}{=} P(V_B/V_A) \cdot P(V_A) + P(V_B/V_A^c) \cdot P(V_A^c) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{22}{90}$$

b) Se uma bola vermelha é retirada da urna B, qual é a probabilidade de que uma bola vermelha tenha sido retirada da urna A ?

$$\text{Resp. b) } P(V_A/V_B) \stackrel{6}{=} \frac{P(V_A \cap V_B)}{P(V_B)} = \frac{P(V_B \cap V_A)}{P(V_B)} \stackrel{6}{=} P(V_B/V_A) \cdot \frac{P(V_A)}{P(V_B)} = \frac{3}{10} \cdot \frac{4/9}{22/90} = \frac{12}{22}$$

3) Demonstre as seguintes afirmações:

a) Se  $P(A) = 0$  e B é um evento qualquer, então A e B são independentes:

Resp. a)  $A \cap B \subset A \implies 0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$  Logo  $P(A \cap B) = 0 = 0 \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$

b) Se  $P(A) = 1$  e B é um evento qualquer, então A e B são independentes:

Resp. b)  $P(A^c) = 0$  e  $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = P(B \cap A)$  Logo  $P(B \cap A) = P(B) = 1 \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$

c) Os eventos D e  $D^c$  são independentes se e somente se  $P(D) = 0$  ou  $P(D) = 1$

Resp. c) Se  $P(D \cap D^c) = P(\emptyset) = 0 = P(D) \cdot P(D^c)$  Então  $P(D^c) = 0$  ou  $P(D) = 0$

d) Ache uma condição para que o evento E seja independente dele mesmo

Resp. d)  $P(E) = P(E \cap E) = P(E) \cdot P(E) \implies P(E) = P(E)^2 \implies P(E) = 0$  ou  $P(E) = 1$

4) Suponha que o número de vezes que uma pessoa fica resfriada durante o um ano tem distribuição de poisson com parâmetro  $\lambda = 4$ . Um novo remédio pra prevenir resfriados reduz este parâmetro para  $\lambda' = 2$  em 75% das pessoas e não tem efeito nos 25% restantes. Se uma pessoa tomou este remédio durante um ano e pegou resfriado 2 vezes, qual é a probabilidade de que o remédio funcione para esta pessoa ?

Minha notação: F = Funcionar ; N = Não funcionar; X = número de resfriados durante o ano

Do enunciado:  $P(F) = 0,75$ ;  $P(N) = 0,25$ ;  $P(X = n/F) \sim Poisson(2)$ ;  $P(X = n/N) \sim Poisson(4)$

$$\text{Resp.) } P(F/X=2) = \frac{P(F \cap X=2)}{P(X=2)} = \frac{P(X=2/F)}{P(X=2)} = \frac{7}{P(X=2/F) \cdot P(F) + P(X=2/N) \cdot P(N)} = \frac{\frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} \cdot 0,75}{\frac{e^{-2} \cdot 2^2 \cdot 0,75}{2!} + \frac{e^{-2} \cdot 4^2 \cdot 0,25}{2!}} =$$

5) Seja  $X$  a v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é  $f(x) =$

$$\begin{cases} k \cdot x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

a) Determine o valor de  $k$

Resp. a)  $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 k \cdot x^3 dx \implies k = 4$

b) Calcule  $P(1/4 < X < 1/2)$

Resp. b)  $\int_{1/4}^{1/2} 4 \cdot x^3 dx = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{4^4}$

c) Calcule  $\mathbf{E}(X)$ ,  $\text{Var}(X)$

Resp. c)  $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot 4 \cdot x^3 dx = \int_0^1 4 \cdot x^4 dx = \frac{4}{5}$

$\mathbf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 4 \cdot x^3 dx = \int_0^1 4 \cdot x^5 dx = \frac{4}{6}$

$\text{Var}(x) = \mathbf{E}((X - \mu)^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{4}{6} - (\frac{4}{5})^2$

d) Determine a f.d.a. de  $X$

Resp. d)  $F(n) = \int_{-\infty}^n f(x)dx = \int_0^n 4 \cdot x^3 dx = \begin{cases} n^4 & 0 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$

6) O tempo que um eletrodoméstico funciona (até quebrar) tem distribuição exponencial com média 3 anos. Se uma pessoa comprou um eletrodoméstico usado, calcule a probabilidade de que este vai durar pelo menos mais 2 anos.

Resp. )  $P(X \geq s + t/x \geq s) = \frac{P(X \geq s+t \cap X \geq s)}{P(X \geq s)} = \frac{P(X \geq s+t)}{P(x \geq s)} \stackrel{10}{=} \frac{\int_{s+t}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx}{\int_s^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx} =$

$\frac{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (s+t)}}{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot s}} = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \int_t^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = P(X \geq t)$

$\implies P(X \geq s + t/x \geq s) = P(X \geq t) \stackrel{10}{=} \int_2^{\infty} \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot x} dx = e^{-\frac{2}{3}}$

7) Na fabricação de parafusos, os parafusos tem que ter diâmetro entre  $d_1$  e  $d_2$ , senão eles são considerados defeituosos. Para controle de qualidade é feito um teste “passa - não passa”, o parafuso é aceito, se ele não passa numa abertura de diâmetro  $d_1$ , mas passa numa abertura de diâmetro  $d_2$ . Suponha que o diâmetro  $D$  de um parafuso é uma v.a. Normal com média  $\frac{(d_1+d_2)}{2}$  e variância  $\frac{(d_2-d_1)^2}{16}$ .

Do enunciado:  $d \in (d_1, d_2)$  para passar no teste, e o seu tamanho é uma variável aleatória  $D \sim Normal(\frac{(d_1+d_2)}{2}, \frac{(d_2-d_1)^2}{16})$ , estou usando  $\epsilon \rightarrow 0$

a) Ache a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso

Resp. a)  $P(D < d_1 \cup D > d_2) = 1 - P(D \geq d_1 \cup D \leq d_2) = 1 - (F(d_2) - F(d_1 - \epsilon)) = 1 + F(d_1 - \epsilon) - F(d_2) = 1 + \phi(\frac{d_1 - \epsilon - \mu}{\sigma}) - \phi(\frac{d_2 - \mu}{\sigma})$

b) Se em vez de saber a variância, você soubesse que  $d_1 = 40mm$ ,  $d_2 = 50mm$  e que 10% dos parafusos são rejeitados, quanto valeria  $Var(D)$  ?

Resp. b)  $P(D < d_1 \cup D > d_2) = 1 - P(D \geq d_1 \cup D \leq d_2) = 1 - (F(d_2) - F(d_1 - \epsilon)) = 1 + \phi(\frac{d_1 - \epsilon - \mu}{\sigma}) - \phi(\frac{d_2 - \mu}{\sigma}) = 0,1$  e  $\mu = 45mm$ , já que

$$F(a) = P(X \leq a) = P(\frac{x - \mu}{\sigma} \leq \frac{a - \mu}{\sigma}) = \phi(\frac{a - \mu}{\sigma})$$

disso temos que

$$1 + \phi(\frac{d_1 - \epsilon - \mu}{\sigma}) - \phi(\frac{d_2 - \mu}{\sigma}) = 0,1 \implies \phi(\frac{-5 - \epsilon}{\sigma}) - \phi(\frac{5}{\sigma}) = -0,9 \implies 1 - \phi(\frac{5 + \epsilon}{\sigma}) - \phi(\frac{5}{\sigma}) = -0,9 \implies 2 \cdot \phi(\frac{5 + \epsilon_1}{\sigma}) = 1,9 \implies \phi(\frac{5 + \epsilon_1}{\sigma}) = 0,95$$

Olhando na tabela de distribuição normal temos  $\phi(x) = 0,95 \implies x = 1,64 + \epsilon_2 = \frac{5 + \epsilon_1}{\sigma} \implies \sigma \simeq \frac{5}{1,64}$

8) Suponha que o raio  $R$  de uma esfera seja uma v.a. contínua com densidade  $f_r(r) = \begin{cases} 6 \cdot r \cdot (1 - r) & 0 < r < 1 \\ 0 & cc \end{cases}$ , ache a densidade do volume  $V$  da esfera.

Do nosso conhecimento sobre volume de sólidos temos que  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = k \cdot R^3$

Resp. )  $F_V(v) = P(V \leq v) = P(k \cdot R^3 \leq v) = P(R \leq (\frac{v}{k})^{\frac{1}{3}}) = \int_0^{(\frac{v}{k})^{\frac{1}{3}}} 6 \cdot r \cdot (1 - r) dr$  e temos a restrição  $0 \leq (\frac{v}{k})^{\frac{1}{3}} \leq 1 \implies v \in (0, \frac{4 \cdot \pi}{3})$

com isso temos

$F_V(v) = 3 \cdot (\frac{v}{k})^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot \frac{v}{k}$ , como queremos a densidade, temos que derivar em relação a  $v$

$$f_V(v) = \frac{dF_V(v)}{dv} = 2 \cdot (\frac{v}{k})^{\frac{-1}{3}} - \frac{2}{k} \text{ com } 0 < v < \frac{4 \cdot \pi}{3}$$

9) Seja  $X$  uma v.a. com f.d.a.  $F_X$

a) Seja  $Y = 1 + b \cdot X$ . Ache a f.d.a. de  $Y$  (considere dois casos:  $b > 0$  e  $b < 0$ ).

Resp. a) Caso  $b > 0$ :  $P(Y \leq y) = P(1 + b \cdot X \leq y) = P(X \leq \frac{y-1}{b}) = F_x(\frac{y-1}{b})$

Resp. a) Caso  $b < 0$ :  $P(Y \leq y) = P(1 + b \cdot X \leq y) = P(X \geq \frac{y-1}{|b|}) = 1 - F_x(\frac{y-1}{|b|})$

b) Suponha que  $F_X$  é estritamente monótona e defina  $Z = F_X(X)$ . Mostre que  $Z \sim U(0, 1)$

Resp. b) Para resolver esse problema, basta mostrarmos que  $f_Z(z) = 1$ . A informação relevante aqui é que  $F_X$  é estritamente monótona, o que implica que é contínua e que possui inversa denotada por  $F_X^{-1}$  que também é contínua. Disso temos que  $P(Z \leq z) = P(F_X(X) \leq z) = P(F_X^{-1}(F_X(X)) \leq F_X^{-1}(z)) = P(X \leq F_X^{-1}(z)) = P(X \leq F_X^{-1}(z)) = F_X(F_X^{-1}(z)) = z$ . Como  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = z$  temos que  $f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = 1$ .

c) Tome  $U \sim U(0, 1)$  e mostre que  $W = F_X^{-1}(U)$  tem f.d.a.  $F_X$ .

Resp. c) Análogo a b)  $F_W(w) = P(W \leq w) = P(F_X^{-1}(U) \leq w) = P(F_X(F_X^{-1}(U)) \leq F_X(w)) = P(U \leq F_X(w)) = \int_0^{F_X(w)} 1 du = F_X(w)$ . Observe que a última integral é válida pois  $0 \leq F_X(w) \leq 1$ , senão teríamos que avaliar intervalos de restrição.

10) Seja  $U \sim Uniforme(0, 1)$  e  $X = \ln(U)$ . Ache a densidade e a função geratriz de momentos de  $X$ . Usando a função geratriz de momentos, calcule  $\mathbf{E}(X)$  e  $Var(X)$ .

Resp.)  $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\ln(U) \leq x) = P(U \leq e^x) = F_U(e^x) \stackrel{11}{=} \begin{cases} e^x & 0 \leq e^x \leq 1 \\ 1 & e^x > 1 \end{cases} \implies f_x(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

- Observe que  $0 \leq e^x \leq 1 \iff -\infty < x \leq 0$



Com isso, podemos calcular  $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot x} \cdot f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^{t \cdot x} \cdot e^x dx = \int_{-\infty}^0 e^{(t+1) \cdot x} dx = \frac{1}{t+1}$

E com isso  $\mathbf{E}(X) = \frac{dM_X(t)}{dt} = -\frac{1}{(t+1)^2} \Big|_{t=0} = -1$

E  $Var(X) = \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} = \frac{2}{(t+1)^3} \Big|_{t=0} = 1$

11) Para quaisquer eventos A, B e C mostre que:

a) se  $A \subset B$ , então  $B^c \subset A^c$

Resp. a) Vou usar o conhecimento prévio que  $A \subset B \iff A \cup C \subset B \cup C$  para qualquer conjunto C. E que  $A \subset B$  pelo enunciado

$$\Omega = B^c \cup B = A \cup A^c \subset B \cup A^c \implies B^c \cup B \subset A^c \cup B \implies B^c \subset A^c$$

b)  $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$

Resp. b) Vou usar algum conhecimento anterior também:

$$0) A \cap B \subset A \cup B$$

$$i) A \subset B \implies B^c \subset A^c$$

$$ii) A \subset C \text{ e } B \subset C \implies A \cup B \subset C$$

$$iii) A \subset B \text{ e } A \subset C \implies A \subset C \cap B$$

Dessas relações conseguimos:

$$iv) B^c \cap A^c \subset B^c \xrightarrow{i} B \subset (A^c \cap B^c)^c$$

$$v) B^c \cap A^c \subset A^c \xrightarrow{i} A \subset (A^c \cap B^c)^c$$

$$vi) B \subset A \cup B \xrightarrow{ii} (A \cup B)^c \subset B^c$$

$$vii) A \subset A \cup B \xrightarrow{ii} (A \cup B)^c \subset A^c$$

$$viii) \text{ usando 0, ii, iv, v temos: } A \cap B \subset A \cup B \subset (A^c \cap B^c)^c \xrightarrow{i} A^c \cap B^c \subset (A \cap B)^c$$

$$ix) \text{ Análogo, usando iii, vi, vii temos: } (A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$$

Finalmente, como de viii e ix temos que  $A^c \cap B^c \subset (A \cap B)^c$  e  $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$  então chegamos à conclusão que  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

c)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Resp. c) Como não podemos usar para a prova essa relação que é uma das mais úteis em teoria dos conjuntos, vamos ter que usar uma carga pesada de conhecimento anterior (para economizar espaço utilizarei a notação  $AB \equiv A \cap B$ ):

$$a) A \subset B \iff AC \subset BC$$

$$b) A = AB^c \dot{\cup} AB$$

$$c) AA = A$$

$$d) A \subset \Omega$$

$$e) \Omega A = A$$

$$f) A \subset B \iff B^c \subset A^c$$

$$g) A \subset B \iff C \cup A \subset C \cup B$$

- h)  $AA^c = \emptyset$
- i)  $A \subset B$  e  $C \subset D \implies AC \subset BD$  e  $A \cup C \subset B \cup D$
- j)  $AB \subset A$
- k)  $(A \cup B)^c = A^c B^c$
- l)  $A \subset A \cup B$

Com isso podemos atacar o problema. Vamos começar tentando encontrar uma relação tal que  $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ :

1) Considere o conjunto  $(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c)$

1.i) Vamos quebrar o problema em partes menores, aqui vamos mostrar que  $(A^c \cup B^c) \cap A \subset B^c A$ :

$$(A^c \cup B^c) \cap A \stackrel{b,h}{=} ([A^c B] \dot{\cup} [A^c B^c] \dot{\cup} [AB^c]) \cap A \iff \begin{cases} x \in A^c B \implies A^c B A \stackrel{h}{=} \emptyset \\ x \in A^c B^c \implies A^c B^c A \stackrel{h}{=} \emptyset \\ x \in AB^c \implies AB^c A \stackrel{c}{=} B^c A \end{cases}$$

Disso concluímos que  $(A^c \cup B^c) \cap A \subset B^c A$

1.ii) Na mesma linha, vamos mostrar que  $(A^c \cup C^c) \cap A \subset C^c A$ :

Vamos reescrever  $(A^c \cup C^c) \cap A$  como uma união disjunta interseccionada com  $A$

$$(A^c \cup C^c) \cap A \stackrel{b,h}{=} ([A^c C] \dot{\cup} [A^c C^c] \dot{\cup} [AC^c]) \cap A \iff \begin{cases} x \in A^c C \implies A^c C A \stackrel{h}{=} \emptyset \\ x \in A^c C^c \implies A^c C^c A \stackrel{h}{=} \emptyset \\ x \in AC^c \implies AC^c A \stackrel{c}{=} C^c A \end{cases}$$

Disso concluímos que  $(A^c \cup C^c) \cap A \subset C^c A$

1.1) A partir de 1.i e 1.ii e usando a, c, i temos que  $(A^c \cup C^c) \cap A \subset C^c A$  e  $(A^c \cup B^c) \cap A \subset B^c A \implies (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \cap A \subset B^c C^c A \xrightarrow{a} (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \subset B^c C^c$

1.2) Agora vamos provar a relação com o complementar de  $A$ :

$$(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \cap A^c \stackrel{c}{\subset} [(A^c \cup B^c) \cap A^c] \cap [(A^c \cup C^c) \cap A^c] \stackrel{j}{\subset} A^c$$

1.final) De 1.1, 1.2, g, l temos que  $(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \subset [(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \cap A^c] \dot{\cup} [(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c)] \subset A^c \cup B^c C^c$  logo

$$(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \subset A^c \cup B^c C^c \xrightarrow{k,f} A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2) Agora basta provar a volta  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$  esta etapa é relativamente menos custosa que a primeira:

$$2.1) B \subset B \cup C \xrightarrow{a} AB \subset A \cap (B \cup C)$$

$$2.2) C \subset B \cup C \xrightarrow{a} AC \subset A \cap (B \cup C)$$

2.final) De 2.1 e 2.2 e utilizando i temos que  $AB \cup AC \subset A \cap (B \cup C)$

Resp. c final) de 1.final e 2.final temos que  $AB \cup AC = A \cap (B \cup C)$

12) Numa urna há 5 bolinhas brancas, 4 verdes e 6 azuis. Escolhemos 4 bolinhas. Qual é a probabilidade de que foram escolhidas 2 bolinhas de uma cor e 2 bolinhas de outra cor? Qual é a probabilidade de que todas as bolinhas escolhidas são da mesma cor? Considere dois casos: escolha sem reposição e com reposição.

Resp. Sem reposição)

Temos que o conjunto de todas as combinações possíveis dado por  $\Omega$  tem  $\#\Omega = \binom{15}{4}$  possibilidades

Seja o conjunto  $A$ : "retirar duas bolas de uma cor e duas de outra cor", com isso  $\#A = \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} + \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2}$

$$\text{Logo, } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} + \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{15}{4}}$$

Considere o conjunto  $B$ : "retirar quatro vezes a mesma cor"

$$\#B = \binom{5}{4} + \binom{4}{4} + \binom{6}{4}$$

$$\text{Logo, } P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\binom{5}{4} + \binom{4}{4} + \binom{6}{4}}{\binom{15}{4}}$$

Resp. Com reposição)

Temos que o conjunto de todas as combinações possíveis dado por  $\Omega$  tem  $\#\Omega = 15^4$  possibilidades

Seja o conjunto  $A$ : "retirar duas bolas de uma cor e duas de outra cor", com isso  $\#A = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6$

$$\text{Logo, } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}{15^4} = \frac{5^2 \cdot 4^2 + 5^2 \cdot 6^2 + 4^2 \cdot 6^2}{15^4}$$

Considere o conjunto  $B$ : "retirar quatro vezes a mesma cor"

$$\#B = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$\text{Logo, } P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{15^4} = \frac{5^4 + 6^4 + 4^4}{15^4}$$

13) Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com  $P(X = 0) = 0.25$ ,  $P(X = 1) = 0.125$ ,  $P(X = 2) = 0.125$ ,  $P(X = 3) = 0.5$ . Calcule a função de distribuição acumulada, o valor esperado e a variância de  $X$ . Determine as seguintes probabilidades:  $P(0 < X < 1)$ ,  $P(X \leq 1)$ ,  $P(X > 2)$ ,  $P(X > 2.5)$ .

Resp. )

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=-\infty}^{i=x} P(X = i) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0,25 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0,375 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0,5 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Com essa definição temos:

$$P(0 < X < 1) = 0,25 - 0,25 = 0$$

$$P(X \leq 1) = 0,375$$

$$P(X > 2) = 1 - F_X(2) = 0,5$$

$$P(X > 2.5) = 1 - F_X(2,5) = 0,5$$

Para calcular a Esperança, utilizamos a definição

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X} [P(X = x) \cdot x] = 0,125 + 2 \cdot 0,125 + 3 \cdot 0,5 = 2,125$$

Para calcular a Variância, usamos a esperança de  $X^2$

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{x \in X} [P(X = x) \cdot x^2] = 0,125 + 4 \cdot 0,125 + 9 \cdot 0,5 = 5,625$$

$$\text{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 5,625 - (2,125)^2$$

14) Suponha que o tempo de viagem entre sua casa e UNICAMP tem distribuição Normal com média 50 minutos e desvio padrão 4 minutos. Se você tem uma prova às 10:00 e quer que probabilidade de chegar atrasado seja no máximo 0.5%, a que horas você deve sair de casa?

Resp. )

O tempo que demoramos é uma v.a. normal  $T \sim N(50, 16)$ , já que  $\sigma = 4 \implies \sigma^2 = 16$ .

Seja  $H$  a hora que temos que acordar:

$$P(H + T > 10 \cdot 60) \leq 0,005 \implies P(H > 600 - T) \leq 0,005 \implies P\left(\frac{H - 50}{4} > \frac{600 - T - 50}{4}\right) \leq 0,005 \implies 1 - \phi\left(\frac{550 - H}{4}\right) \leq 0,005 \implies \phi\left(\frac{550 - H}{4}\right) \geq 0,995$$

Olhando na tabela de distribuição normal, vemos que o valor para que isso ocorra é 2,58 daí:

$$\frac{550 - H}{4} = 2,58 \implies H = 539,68, \text{ assim temos que acordar no máximo às } 8:59:41$$

Este solucionário foi feito para a disciplina ME310 - 2Sem 2012.  
Caso encontre algum erro, por favor peça alteração informando o  
erro em nosso grupo de discussão:  
<https://groups.google.com/forum/?fromgroups#!forum/me310-2s-2012>  
Bons estudos,  
Eric.