Felipe Antonio de Almeida Fleming RA 097463

1 | 4,8
2 | 5
9,8

MA 211 Turmas A,B - Teste 2

07/05/2010

Aluno:
RA:

Questão 1: Determine a área da superfície do parabolóide

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

que está acima do plano xy

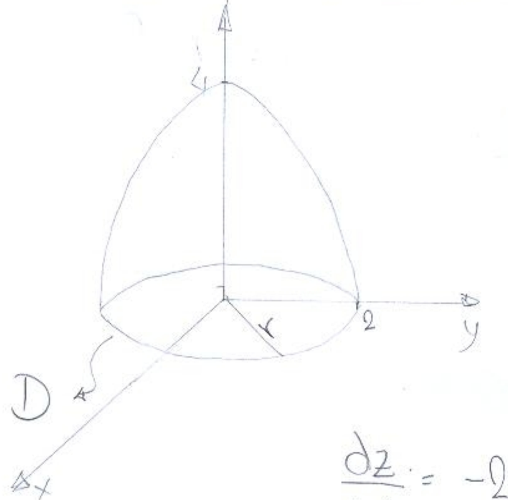
Questão 2: Calcule

$$\iiint_E z\, dV$$

onde E é a região entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ contida no primeiro octante.

① em $z=0$, ou seja, na região do plano xy temos que $x^2+y^2=4$, que é a equação de uma circunferência

Passemos as coordenadas retângulares para coordenadas polares:



Analisando o gráfico ao lado notamos que para encontrarmos a área do parabolóide dado temos os seguintes limites de integração:

$0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Encontremos $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$:

$\frac{dz}{dx} = -2x \qquad \frac{dz}{dy} = -2y$

Em relação as coordenadas cartesianas teremos a seguinte integral:

$$\iint_D \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1} \, dA$$

Sabendo que $x = r\cos\theta$ e $y = r\,sen\,\theta$ temos:

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \sqrt{(-2r\cos\theta)^2 + (-2r\,sen\theta)^2 + 1} \; r\,dr \right] d\theta$$

encontremos $\int_0^2 \sqrt{(-2r\cos\theta)^2 + (-2r\,sen\theta) + 1} \; r\,dr = \int_0^2 \sqrt{4r^2\cos^2\theta + 4r^2 sen^2\theta + 1}$

$= \int_0^2 \sqrt{4r^2+1} \; r\,dr$. Fazendo $u = 4r^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dr} = 8r \Rightarrow \frac{du}{8} = r\,dr$

Substituindo temos:

$\int \sqrt{u} \, \frac{du}{8} = \frac{1}{8} \cdot u^{3/2} \cdot \frac{2}{3}$ Assim: $\int_0^2 \sqrt{4r^2+1} \, r\,dr = \frac{1}{12} \cdot (4r^2+1)^{3/2} \Big]_0^2$

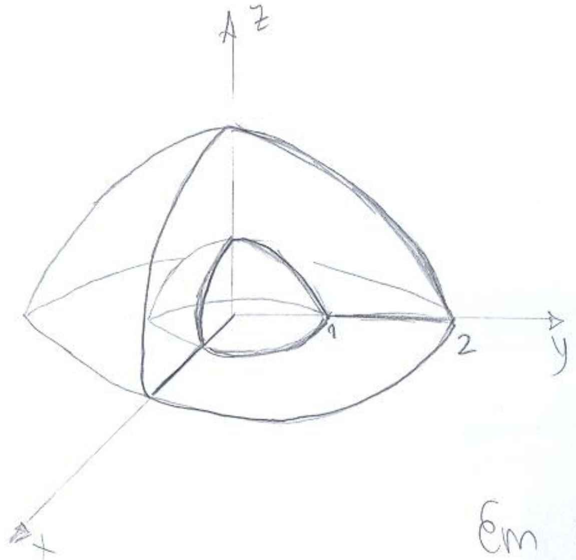
$= \frac{1}{12} \cdot (4 \cdot 2^2 + 1)^{3/2} - \frac{1}{12} \cdot (4 \cdot 0 + 1)^{3/2} = \frac{1}{12} \cdot (17)^{3/2} - \frac{1}{12}$

$= \frac{1}{12} \cdot (17\sqrt{17} - 1)$

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+4r^2} \; r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1)\,d\theta = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$$

$\boxed{4,8}$

(2) $\iiint_E z\,dV$ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$



Queremos encontrar a área em que

$$1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$$

$$\iiint_E \sqrt{4-x^2-y^2} - \sqrt{1-x^2-y^2}\; dV$$

Em coordenadas esféricas:

Limites de integração:

$0 \leq \phi \leq \pi/2$

$0 \leq \theta \leq \pi/2$

$1 \leq r \leq 2$

$x = r \cdot \operatorname{sen}\phi \cos\theta$

$y = r \cdot \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$

$z = r \cdot \cos\phi$

$$\int_1^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (r\cos\phi)\, r^2 \operatorname{sen}\phi \; d\phi\, d\theta\, dr$$

$$\int_0^{\pi/2} r\cos\phi\, r^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi = r^3 \cos\phi \operatorname{sen}\phi\, d\phi \quad \Big| \quad 2\cos\phi \operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen} 2\phi$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^3 \operatorname{sen}2\phi\, d\phi = \frac{1}{2}r^3 \cdot \left[\frac{-\cos 2\phi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}r^3 \cdot \Big[\underbrace{\frac{-(-1)}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right)}_{1}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}r^3$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}r^3\, d\theta = \frac{1}{2}r^3 \cdot \Big[\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}r^3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^3}{4}$$

$$\int_1^2 \frac{\pi r^3}{4}\, dr = \frac{\pi}{4}\frac{r^4}{4}\Big]_1^2 = \frac{\pi \cdot 2^4}{16} - \frac{\pi \cdot 1^4}{16}$$

$$= \frac{16\pi}{16} - \frac{\pi}{16} = \frac{15\pi}{16}$$

$$\therefore \boxed{\iiint_E z\, dV = \frac{15\pi}{16}}$$