F 502 A – Eletromagnetismo I – Primeira prova – 14/04/09

Nome: ____ RA: ________

(3 pts) **Questão 1**: Duas cargas puntiformes, $-q/2$ e $+q$, situam-se ao longo do eixo x, em $x = x_0$ e $x = 4\,x_0$, respectivamente.

a) Encontre o lugar dos pontos (curva), no plano x-y, para os quais o potencial eletrostático $\varphi\,(x,y) = 0$.
b) Que superfície condutora aterrada deve ser usada para substituir a carga $-q/2$ de forma que o potencial $\varphi\,(x,y)$ continue o mesmo fora do condutor?

(3 pts) **Questão 2**: Considere uma distribuição de carga com simetria esférica em que $\rho(r) = \rho_0(a/r)$ para $r < a$, e $\rho(r) = 0$ para $r > a$. Na região fora da distribuição de carga ($r > a$) o potencial eletrostático é dado por: $\varphi(r) = (\rho_0\, a^3)/(2\, \varepsilon_0\, r)$.

a) Encontre a expressão geral do potencial eletrostático no interior da distribuição de carga ($r < a$) fazendo a integração da equação de Poisson.
b) Aplique as condições de contorno de continuidade do potencial e do campo elétrico em $r = a$ para encontrar as constantes do item (a).

(4 pts) **Questão 3**: Uma esfera dielétrica, sem carga, de raio a e constante dielétrica K, é colocada numa região de campo elétrico uniforme $\boldsymbol{E_0} = E_0\,\boldsymbol{k}$. Nesse caso, a solução da equação de Laplace pode ser escrita em termos dos primeiros harmônicos zonais:

$\varphi_1 (r,\theta) = A_{11}\, r \cos(\theta)$, dentro da esfera, e

$\varphi_2 (r,\theta) = A_{21}\, r \cos(\theta) + C_{21}\, r^{-2} \cos(\theta)$, fora da esfera.

Aplique as condições de contorno apropriadas e encontre o potencial eletrostático dentro e fora da esfera.

Formulário

Coordenadas esféricas:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{a}_\phi$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2F_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(F_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(F_\phi\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right]\vec{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(rF_\phi\right)}{\partial r}\right]\vec{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rF_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\vec{a}_\phi$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{a}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rF_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right]\vec{a}_r + \left[\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right]\vec{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rF_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\vec{k}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Rascunho