P2 - 1s2013

1. 3.0
2. 3.0
3. 2.0
4. 1.0
5. 1.0

10.0

Parabéns, excelente!

TIAGO MEDICCI SERRANO - RA: 094519

1) $G(s) = \dfrac{1}{s(s+10)}$ $\quad C(s) = K\left(1 + \frac{\alpha}{s}\right)$

Eq caract: $1 + CG = 0 \Rightarrow 1 + K\dfrac{(s+\alpha)}{s} \cdot \dfrac{1}{s(s+10)} = 0$

a) Para $\alpha = 6 \Rightarrow 1 + K\dfrac{(s+6)}{s^2(s+10)} = 0$

P/ $t_e = 4s \Rightarrow t_e = -\dfrac{\ln(0{,}02)}{\sigma} \Rightarrow t_e = \dfrac{4}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \dfrac{4}{4} = 1$

OU SEJA, QUEREMOS QUE A PARTE REAL DAS RAÍZES DA EQ CARACTERÍSTICA ESTEJAM EM $Re\{s\} < -1$, OU $Re\{\gamma\} < 0$

CHAMANDO $\gamma = s+1$, E FAZENDO A MUDANÇA DE VARIÁVEL $s = \gamma - 1$, ANALISA-SE A EQ CARACTERÍSTICA (EM γ) PARA $Re\{\gamma\} < 0$

$\Rightarrow$ Eq CARACT $\Rightarrow s^3 + 10s^2 + Ks + 6K = 0$, APLICANDO A MUDANÇA DE VARIÁVEL $(s = \gamma - 1) \Rightarrow$

$(\gamma-1)^3 + 10(\gamma-1)^2 + K(\gamma-1) + 6K = 0$

$\gamma^3 \cancel{-3\gamma^2} + 3\gamma - 1 + \cancel{10\gamma^2} - 20\gamma + 10 + \cancel{K\gamma} - 1K + 6K = 0$

$\Rightarrow \gamma^3 + 7\gamma^2 + (-17 + K)\gamma + 9 + 5K = 0$ (APLICANDO ROUTH:)

s^3	1	K-17
s^2	7	9+5K
s^1	(1) (MULTIPLICADO POR 7)	
s^0	$9 + 5K > 0 \rightarrow K > 0$ (PELA CONDIÇÃO DO EXERCÍCIO)	

(1) $\rightarrow 7(K-17) - 9 - 5K > 0$ (P/ $Re\{\gamma\} < 0$)

$7K - 119 - 9 - 5K > 0$

$2K - 128 > 0 \Rightarrow 2K > 128$

$\boxed{K > 64}$

PARA $Re\{\gamma\} < 0$, OS TERMOS DA PRIMEIRA COLUNA DEVEM SER POSITIVOS, O QUE IMPLICA EM $\boxed{K > 64}$. COMO ANALISAMOS AS RAÍZES DA EQ EM γ COM $Re\{\gamma\} < 0$, O RESULTADO VALE PARA AS RAÍZES DA EQ. EM s COM $Re\{s\} < -1$, O QUE EQUIVALE A ESPECIFICAÇÃO DESEJADA DO TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO.

1) b) PARA $K = 16$, TEMOS A EQ. CARACTERÍSTICA:

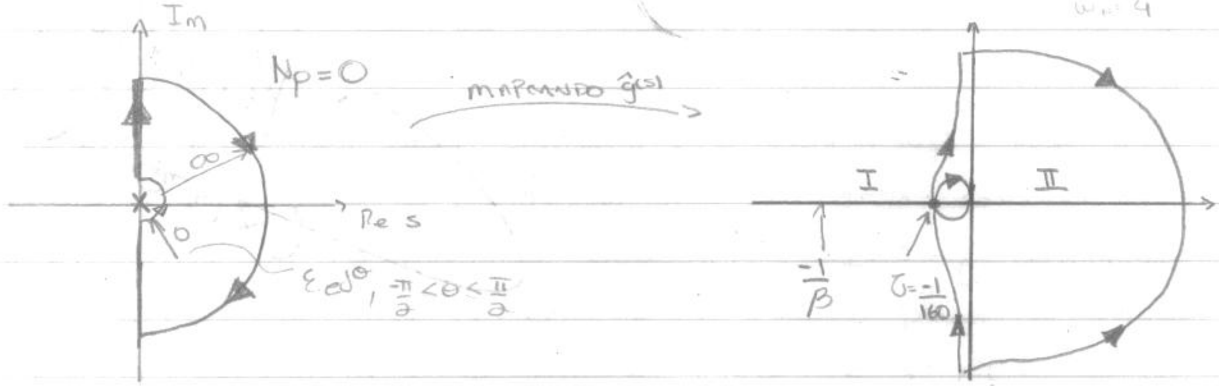
$$1 + \frac{16(s+\alpha)}{s^2(s+10)} = 0 \Rightarrow s^3 + 10s^2 + 16s + 16\alpha = 0$$

OU, ESCREVENDO EM TERMOS DE α:

$$1 + \alpha \frac{16 \cdot 1}{s^3+10s^2+16s} = 0$$ E CHAMANDO $\beta = 16 \cdot \alpha$

$$\Rightarrow 1 + \beta \frac{1}{s^3+10s^2+16s} = 0 \Rightarrow 1 + \beta \underbrace{\frac{1}{s(s^2+10s+16)}}_{\hat{g}(s)} = 0$$

$\omega_n = 4$



DESCOBRINDO O PONTO σ.

$$\mathrm{Im}\, \hat{g}(j\omega) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{j\omega(-\omega^2 + j10\omega + 16)}\right\} = 0 \Rightarrow \underbrace{\mathrm{Re}\{-\omega^2 + 16 + j10\omega\}}_{=0}$$

$\Rightarrow$ OU SEJA, $-\omega^2 + 16 = 0 \Rightarrow \omega = \pm 4$

P/ $\omega = 4$ $$\hat{g}(j4) = \frac{1}{j4(\cancel{-16} \cancel{+16} + j10 \cdot 4)} = \frac{-1}{160}$$

OU SEJA, $-\frac{1}{\beta} < -\frac{1}{160}$ PARA $N_{CRIT} = 0 = N_Z - N_P$, OU SEJA, PARA GARANTIR A ESTABILIDADE DO SISTEMA

$$\Rightarrow -160 < -\beta \Rightarrow \beta < 160 \text{ OU } \alpha \cdot 16 < 160 \Rightarrow \alpha < \frac{160}{16}$$

$$\Rightarrow \alpha < 10 \quad (0 < \alpha < 10)$$

TIAGO MEDICCI SERRANO   RA: 094519

1) c) PELA TABELA DE ROUTH:

$1 + \frac{K(s+\alpha)}{s^2(s+10)} = 0 \Rightarrow s^3 + 10s^2 + Ks + K\alpha = 0$

s^3	1	K
s^2	10	$K\alpha$
s^1	$10K - K\alpha$	
s^0	$K\alpha > 0$	

$10K - K\alpha > 0$ (P/ ESTABILIDADE)

$K(10-\alpha) > 0$

$\Rightarrow$ SE $0<\alpha<10$, $(10-\alpha)>0$ E

$K(10-\alpha) > 0$ P/ QUALQUER $K>0$

2) $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$

a)

EQ CARACTERÍSTICA (EM MALHA FECHADA): $1 + CG = 0$

$1 + \frac{K(s+\alpha)}{s} \cdot \frac{1}{(s^2+2s+2)} = 0 \Rightarrow s^3 + 2s^2 + 2s + Ks + K\alpha = 0$

$(s^3 + 2s^2 + (2+K)s + K\alpha = 0)$

POR ROUTH, PODE-SE ANALISAR:

s^3	1	$2+K$
s^2	2	$K\alpha$
s^1	(1)	
s^0	$K\alpha > 0$	

$(1) \rightarrow \frac{4+2K-K\alpha}{2} > 0 \Rightarrow 4+2K-K\alpha > 0$

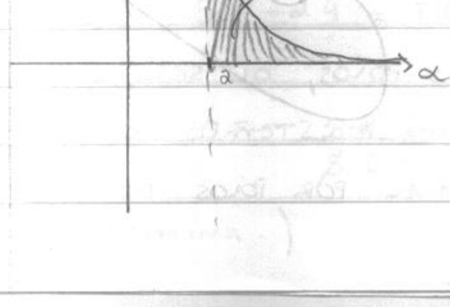
$\Rightarrow K(2-\alpha) > -4 \Rightarrow$

1→ SE $0<\alpha<2$, $2-\alpha>0$ E $K > \frac{-4}{2-\alpha}$

2→ SE $\alpha>2$, $2-\alpha<0$

E $K < \frac{-4}{2-\alpha}$

NO ENTANTO, A CONDIÇÃO 1, P/ $0<\alpha<2$ É SOBREPOSTA PELA CONDIÇÃO $K>0$. ANALISEMOS ENTÃO A CONDIÇÃO P/ $\alpha>2$:



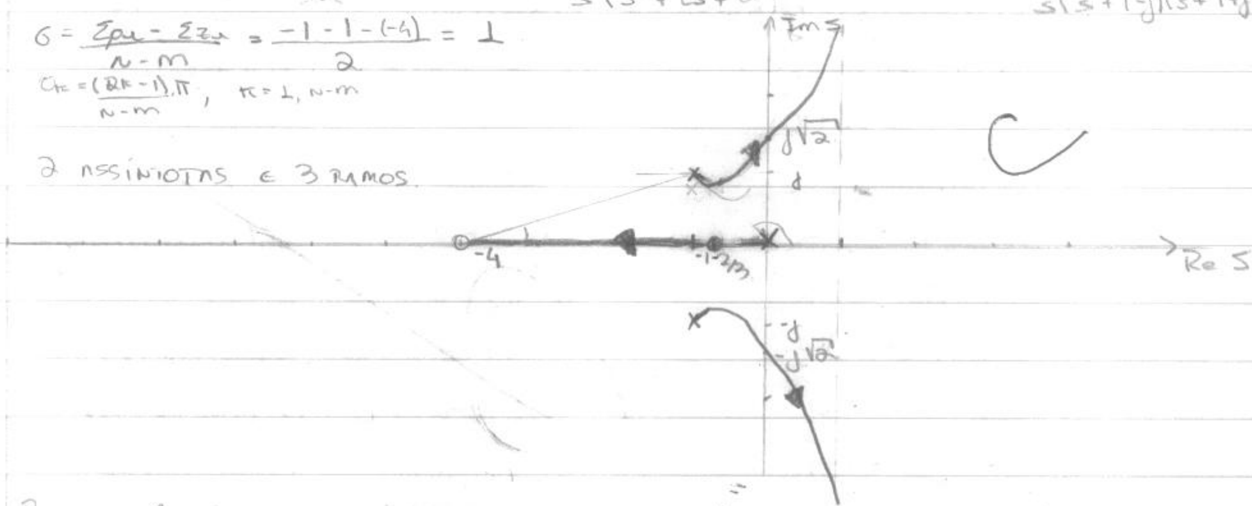
$-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-8} = -1 \pm j$

2) b) Eq caract: $1 + K\dfrac{(s+4)}{s(s^2+2s+2)} = 0 \Rightarrow 1 + K\dfrac{(s+4)}{s(s+1-j)(s+1+j)}$

$\sigma = \dfrac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \dfrac{-1-1-(-4)}{2} = 1$

$\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{n-m}, \quad k = 1, n-m$

2 assíntotas e 3 ramos.



Para os ângulos de saída dos polos: (da condição de ângulo

$20° - \phi_{pi} - 90° - 145° = -180° \Rightarrow \phi_{pi} = 180 + 20 - 90° - 145°$

do zero — do polo em zero — do conjugado

$= -35°$

Para calcular o cruzamento com o eixo imaginário:

$s^3 + 2s^2 + 2s + Ks + K4 = 0$

s^3	1	$2+K$
s^2	2	$4K$
s^1	(1)	
s^0	$4K$	

(1) $\rightarrow \dfrac{4+2K-4K}{2} = 0 \Rightarrow -2K = -4 \Rightarrow K = 2$

$\Delta(s) = 2s^2 + 8 = 0 \Rightarrow s^2 = -4 \Rightarrow \boxed{s = \pm j2}$

c) Para que a parte real das raízes seja igual a $\frac{2}{3}$ temos, pela condição de módulo:

$\dfrac{1}{K} = \dfrac{\prod^{m} |s - z_i|}{\prod^{n} |s - p_i|}$, estimando (medindo-se pelo lugar das raízes para $s = -\frac{2}{3}$), temos

$K = \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 0{,}7}{3{,}4} = \dfrac{7}{34} \cong \dfrac{7}{35} = \dfrac{1}{5}$

Para este valor da parte real dos pólos, ou seja, $-\frac{2}{3}$, temos que todos os polos apresentariam o mesmo tempo de estabilização, não sendo necessária a aproximação por pólos dominantes. E,

2) c) (CONTINUAÇÃO)

PARA ESTE CASO, $t_e = \frac{-\ln(0{,}02)}{6} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6s$

3) PARA $\alpha = 5$ E $K = 6$

a) $F(s) = \frac{CG}{1 + CG} = \frac{6 \cdot \left(\frac{s+5}{s}\right)\frac{1}{s^2+10s+23}}{1 + 6\left(\frac{s+5}{s}\right)\frac{1}{(s^2+10s+23)}} = \frac{6 \cdot (s+5)}{s^3+10s^2+23s+6s+30}$

$= \frac{6 \cdot (s+5)}{s^3+10s^2+29s+30} = \frac{6(s+5)}{(s+6)(s^2+4s+5)} = \frac{6(s+5)}{}$

$\Rightarrow s^3+10s^2+29s+30$ (APLICANDO BRIOT-RUFFINI)

	1	10	29	30
-6		-6	-24	-30
	1	4	5	0

, OU SEJA: $s^3+10s^2+29s+30 = (s+6)(s^2+4s+5)$

$-2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16-20}$

$-2 \pm j$

$\Rightarrow F(s) = \frac{6(s+5)}{(s+6)(s^2+4s+5)}$ POSSUI COMO POLOS $-6, -2+j, -2-j$

E, PARA UMA MELHOR APROXIMAÇÃO DO TRANSITÓRIO, OS POLOS DOMINANTES SÃO $-2+j$ E $-2-j$

b) $F_{ap} = \frac{\beta s + \alpha}{(s^2+4s+5)}$, $F_{ap}(0) = F(0)$ E $F_{ap}'(0) = F'(0)$

$\Rightarrow F(0) = \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 5} = 1 = F_{ap}(0) = \frac{\alpha}{5} \Rightarrow 1 = \frac{\alpha}{5} \Rightarrow \alpha = 5$

$F'(s) = \frac{(s+6)(s^2+4s+5) \cdot 6 - 6(s+5) \cdot (3s^2+20s+29)}{(s+6)^2 \cdot (s^2+4s+5)^2}$

$F'(0) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 6 - 6 \cdot 5 \cdot 29}{6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{\cancel{6 \cdot 5}(6-29)}{\cancel{6 \cdot 5} \cdot 6 \cdot 5} = \frac{-23}{30}$

$F_{ap}'(0) = \frac{5 \cdot \beta - \alpha \cdot 4}{5 \cdot 5} = F'(0) = \frac{-23}{30} \Rightarrow \frac{5\beta - 20}{25} = \frac{-23}{30}$

$\Rightarrow \frac{5\beta - 20}{5} = \frac{-23 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 6} \Rightarrow \beta - 4 = \frac{-23}{6} \Rightarrow \beta = \frac{24}{6} - \frac{23}{6} = \frac{1}{6}$

(CONTINUA...)

3) b) (continuação

Portanto, a aproximação de segunda ordem para o degrau e a rampa é:

$$F_{ap} = \frac{\frac{1}{6}s + 5}{s^2+4s+5}$$

5) a) $G(s) = \frac{1}{s(s+10)^2}$ => Eq. caract.: $1 + CG = 0$

$\alpha = 10 \Rightarrow 1 + K\frac{(s+10)}{s}\cdot\frac{1}{s(s+10)^2} = 0 \Rightarrow 1 + K\frac{(s+10)}{s^2(s+10)^{\cancel{2}}} = 0$

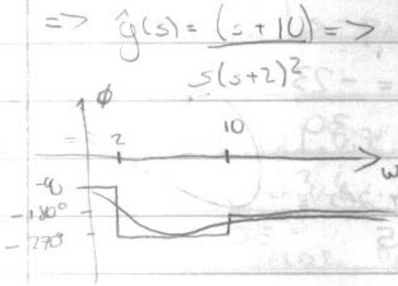
Está relacionada ao diagrama II) pelas condições de fase e, p/ $K>0$ $N_{crit} = 2 = N_z - \cancel{N_p}^{\,0}$ ou seja, $N_z = 2$ p/ $Re\{s\}>0$ e o sistema é instável.

b) $G(s)=\frac{1}{s(s+100)}$ => Eq. caract. $1+CG=0 \Rightarrow 1 + \frac{K(s+10)}{s^2(s+100)} = 0$

=> está relacionado ao diagrama IV) pois a fase inicia em -180° e, para $s=j\omega \to \infty$ a fase é -180° também. Para $K>0$, $N_{crit}=0 = N_z - \cancel{N_p}^{\,0} \Rightarrow N_z=0$ e o sistema é estável.

c) $G(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$, Eq. caract = $1+CG=0 \Rightarrow 1 + K\overbrace{\frac{(s+10)}{s(s+2)^2}}^{\hat{g}(s)} = 0$

=> $\hat{g}(s) = \frac{(s+10)}{s(s+2)^2}$ => p/ cruzar o eixo real: $Im\{\hat{g}(j\omega)\}=0$



Corresponde ao diagrama I), pois os polos de $\hat{g}(s)$ em $s=-2$ fazem o mapeamento cruzar o eixo real pela "distância" com o zero em $s=-10$

5) c) CONTINUAÇÃO

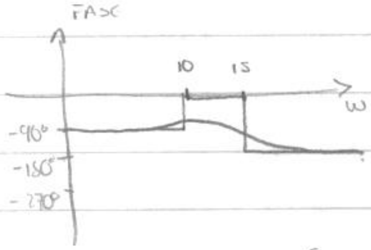
PARA NCRIT = 0 = NZ (OU SEJA, PARA O SISTEMA SER ESTÁVEL),

$-\frac{1}{K} < -0{,}37 \Rightarrow -1 < -0{,}37 \cdot K \Rightarrow \boxed{0 < K < \frac{1}{0{,}37}}$ P/ O SISTEMA

SER ESTÁVEL. $K > \frac{1}{0{,}37}$, NCRIT = 2 = NZ E O SISTEMA EM MALHA FECHADA POSSUI DOIS PÓLOS COM $Re\{s\} > 0$

d) FINALMENTE, PARA $G(s) = \frac{1}{(s+15)^2}$

EQ CARACT $1 + CG = 0 \Rightarrow 1 + K\frac{(s+10)}{s(s+15)^2} = 0$



(CORRESPONDE AO DIAGRAMA iii)

E, PARA $K > 0$, NCRIT = 0 = NZ

E O SISTEMA EM MALHA FECHADA É ESTÁVEL

4) $G(s) = \frac{1}{s + \sigma}$, EQ CARACT $1 + CG = 0$

$\Rightarrow 1 + K\underbrace{\frac{(s+\alpha)}{s(s+\sigma)}}_{\hat{g}(s)} = 0$, $s^2 + s\sigma + Ks + K\alpha = 0$

$\Rightarrow s^2 + (\sigma + K) + K\alpha = 0$

=> PERCEBE-SE QUE, DA EQ CARACTERÍSTICA DE SEGUNDA ORDEM, PODE-SE OBTER DUAS RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS DE QUAISQUER VALORES SE $\Delta < 0 \Rightarrow ((\sigma + K)^2 - 4K\alpha < 0)$

E TAMBÉM RAÍZES REAIS EM AMBAS AS REGIÕES ($Re\{s\} > 0$ E $Re\{s\} < 0$), COM $((a+K)^2 - 4K\alpha \geq 0)$

-> PARA $G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} \Rightarrow 1 + CG = 0 \Rightarrow 1 + K\frac{(s+\alpha)}{s^3 + as^2 + bs} = 0$

$\Rightarrow s^3 + as^2 + (K + b)s + K\alpha = 0$

↑ Constante!

$$\frac{37.5 + 30 + x}{10} = 7 \Rightarrow 70 - 30 - 27.5 = x$$

4) CONTINUAÇÃO:

$$s^3 + as^2 + (k+b)s + k\alpha = 0$$

s^3	1	$k+b$
s^2	a	$k\alpha$
s^1	$\frac{a(k+b) + k\alpha}{a}$	
s^0	$k\alpha$	

-> NÃO VALE A PROPRIEDADE POIS NÃO HÁ VALORES DE K, a, b, α QUE COBREM TODAS AS POSSIBILIDADES.