# MA311-2008-1$^{\text{O}}$ Semestre – Gabarito – Prova 2/Noturno

---

**Questão 1 (2,0 pontos).** Resolva por transformada de Laplace o seguinte PVI:

$$y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

onde $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 2t + 1, & t \geq 1 \end{cases}$ .

*Resolução:* Aplicando a transformada de Laplace na equação e denotando $\mathcal{L}\{f\}$ por $F$, obtemos

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}\{y\} = F\,; \quad \textbf{(0,2 pontos)}$$

notando que $f(t) = u_1(t)(t-1)^2$, **(+ 0,2)** obtemos que

$$F = \mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}\{t\} = \mathrm{e}^{-s}\frac{2}{s^3}\,, \quad \textbf{(+ 0,2)}$$

logo escrevendo $Y = \mathcal{L}\{y\}$ e usando as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, vem que

$$(s^2 + 4)Y - 1 = \mathrm{e}^{-s}\frac{2}{s^3}$$

$$Y = \frac{1}{s^2+4} + \mathrm{e}^{-s}\frac{2}{s^3(s^2+4)} \quad \textbf{(+0,2)}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{e}^{-s}\frac{2}{s^3(s^2+4)}\}\,.$$

Pela tabela, $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\} = \frac{1}{2}\mathrm{sen}2t$. Quanto a $\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{e}^{-s}\frac{2}{s^3(s^2+4)}\}$, calculando as frações parciais da função $\frac{2}{s^3(s^2+4)}$, obtemos (*o aluno deve apresentar as contas*)

$$\frac{2}{s^3(s^2+4)} = -\frac{1}{8s} + \frac{1}{2s^3} + \frac{s}{8(s^2+4)}\,, \quad \textbf{(+0,2)}$$

donde

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^3(s^2+4)} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}\cos 2t\,, \quad \textbf{(+0,2)}$$

logo, usando a fórmula $\mathcal{L}^{-1}\{(\mathrm{e}^{-cs}F(s)\} = u_c(t)\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t-a)$, obtemos

$$y = \frac{1}{2}\mathrm{sen}2t + u_1(t)\left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}(t-1)^2 + \frac{1}{8}\cos(2(t-1))\right]\,.$$

**(+0,2 para cada termo certo aqui, inclusive $u_1(t)$)**

**Questão 2 (2,0 pontos).** Expresse a solução do P.V.I. abaixo em termos de uma convolução:

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(\alpha t), \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0\,.$$

*Resolução:* Aplicando a transformada de Laplace à equação e usando as condições iniciais e a tabela, obtemos

$$(s^2 + 3s + 2)Y = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

onde $Y = \mathcal{L}\{y\}$. **(0,6 pontos até aqui)**

$$Y = \frac{s}{(s^2 + \alpha^2)(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s}{(s^2 + \alpha^2)} \cdot \frac{1}{(s + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$

ou

$$Y = \frac{s}{s^2 + \alpha^2} \cdot \frac{1}{s + 1} \cdot \frac{1}{s + 2}$$

ou

$$Y = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}\,(\frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2})\,.$$

**(+ 0,2)**

$$y = 2\cos \alpha t * \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\mathrm{senh}(\frac{1}{2}t)$$

ou

$$y = \cos \alpha t * \mathrm{e}^{-t} * \mathrm{e}^{-2t}$$

ou

$$y = \cos \alpha t * (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})\,.$$

**(+ 1,2)**

**Questão 3 (3,0 pontos).**

**a)** Encontre a solução do sistema linear homogêneo de e.d.o.'s usando o método de autovalores e autovetores:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

**b)** Encontre a solução geral do sistema linear não-homogêneo (cujo sistema homogêneo associado está na parte **a)**) utilizando o método de variação de parâmetros:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \ + \ \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 4e^{-t} \end{pmatrix}$$

*Resolução:* **a)**

Autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = -1 \pm i\,.$$

Autovetores (com $\lambda = -1 + i$):

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2-i)a - b = 0, \quad b = (2-i)a$$

$V = (a, b) = a(1, 2-i)$ é autovetor **complexo** associado a $\lambda = -1 + i$.

**(0,5 pontos até aqui.)**

Solução complexa:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{(-1+i)t} V = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + i\mathrm{sen}t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \\ y &= \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}t \end{pmatrix} + i\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} \mathrm{sen}t \\ 2\mathrm{sen}t - \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**(+ 0,5)**

Solução geral:

$$x_H = c_1 x^1 + c_2 x^2\,,$$

$$x^1 = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}t \end{pmatrix}, \quad x^2 = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \mathrm{sen}t \\ 2\mathrm{sen}t - \cos t \end{pmatrix}.$$

**(+ 0,5)**

**b)**
Matriz fundamental:

$$\Psi(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \cos t & \mathrm{sen}t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}t & 2\mathrm{sen}t - \cos t \end{pmatrix}$$

**(+ 0,25)**

Solução particular:

$$x_P = \Psi(t)\int \Psi(t)^{-1} g(t)\,dt, \quad g := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 4\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

**(+ 0,25)**

$$\Psi(t)^{-1} = \frac{1}{|\Psi(t)|}\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2\mathrm{sen}t - \cos t & -\mathrm{sen}t \\ -2\cos t - \mathrm{sen}t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$|\Psi(t)| = -\mathrm{e}^{-2t}$$

**(+ 0,25)**

$$\Psi(t)^{-1} = -\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 2\mathrm{sen}t - \cos t & -\mathrm{sen}t \\ -2\cos t - \mathrm{sen}t & \cos t \end{pmatrix}$$

**(+ 0,25)**

$$x_P = -\Psi(t)\int \begin{pmatrix} 2\mathrm{sen}t - \cos t & -\mathrm{sen}t \\ -2\cos t - \mathrm{sen}t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} dt$$

$$\ldots$$

**(+ 0,25)**

$$x = x_H + x_P$$

**(+ 0,25)**

**Questão 4** Explique detalhadamente.

1. **(1,0 ponto)** Calcule a soma da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}.$$

(Sugestão: $\frac{2}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)$.)

*Resolução:*

$$\begin{aligned} s_n &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{5}\right) + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{9}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{4n-3} - \tfrac{1}{4n+1}\right)\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{4n+1}\right). \end{aligned}$$

Daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)} = \lim s_n = \lim \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

**(1,0 ponto até aqui.)**

2. **(1,0 ponto)** Estude a convergência da série: converge absolutamente ou condicionalmente ou diverge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} n}{n^2+1}.$$

*Resolução:*

$$\left|\frac{(-1)^n \operatorname{sen} n}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ é uma série convergente (2-série), logo, $\sum \frac{(-1)^n \operatorname{sen} n}{n^2+1}$ converge absolutamente, pelo Teste da Comparação. **(1,0 ponto)**

3. **(1,0 ponto)** Estude a convergência da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^3+n}}{\sqrt[3]{5n^7+2n^2}}$$

*Resolução:* Sejam $a_n = \frac{\sqrt[5]{n^3+n}}{\sqrt[3]{5n^7+2n^2}}$ e $b_n = \frac{1}{n^{26/15}}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim n^{26/15} \frac{\sqrt[5]{n^3+n}}{\sqrt[3]{5n^7+2n^2}} = \lim n^{26/15} \frac{n^{3/5}\sqrt[5]{1+\frac{n}{n^3}}}{n^{7/3}\sqrt[3]{5+\frac{2}{n^5}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} > 0\,.$$

A série $\sum b_n$ é convergente, pois é uma p-série com $p > 1$ ($p = \frac{26}{15}$), logo, a série $\sum b_n$ também é convergente, pelo Teste da Comparação por Limite. **(1,0 ponto)**