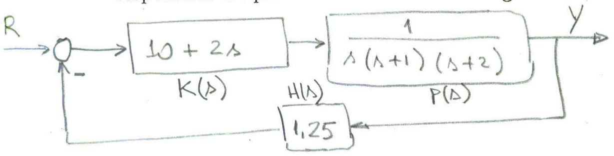
EM707 - Controle de Sistemas Mecânicos - Segunda Prova - 26/09/2007

Nome: Gabarito RA: Turma:

1. Um sistema $P(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ será controlado por um controlador proporcional-derivativo com constantes proporcional e derivativa de 10 e 2 respectivamente. Este sistema possui um ganho 1.25 no ramo de realimentação devido a um fator de correção na instrumentação.

   (a) (valor 1.0) Determine as margens de ganho e de fase do sistema controlado e as respectivas freqüências de cruzamento de ganho e de fase.




$$L(s) = (10+2s) \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \cdot 1{,}25 = \frac{2{,}5s + 12{,}5}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

margin(L(s)) ⟹

$G_m = 1{,}59$ dB

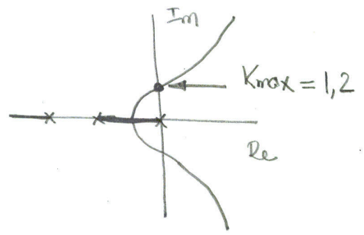
$\omega_{cg} = 2{,}07$ rad/s

$P_m = 2{,}47°$

$\omega_{cf} = 2{,}24$ rad/s

   (b) (valor 1.5) Determine o maior ganho proporcional que multiplica a planta $P(s)$ para o limiar da estabilidade através do gráfico do lugar das raízes. Este valor é compatível com a respectiva margem de ganho?

rlocus(L(s)) ⟶




$K_{max\,dB} = 20 \log 1{,}2 = 1{,}58$

⇓

sim, compatível!

   (c) (valor 1.0) Considerando agora uma entrada de forma senoidal de freqüência de $2rad/s$, determine a resposta de regime do sistema de malha fechada através do respectivo diagrama de Bode.

$$T(s) = \frac{K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)H(s)} = \frac{2s + 10}{s^3 + 3s^2 + 4{,}5s + 12{,}5}$$ ← feedback(K*P, H)

bode(T(s)) ⟶ para $\omega = 2$ rad/s ⟹ RA = 20 dB = 10

$\phi = -45{,}2°$

∴ A resposta de regime será: $10 \times \operatorname{sen}(2t \underbrace{-45{,}2°}_{0{,}79})$

(d) (valor 1.5) Determine, **através do teorema do valor final**, o erro estacionário da malha fechada (diferença entre a saída $y(t)$ e a entrada $r(t)$) se a entrada for um degrau ~~unitário~~.

$$e_{est} = \lim_{t \to \infty} r(t) - y(t) = \lim_{s \to 0} s\left[R(s) - Y(s)\right] =$$

$$= \lim_{s \to 0} s\left[\frac{1}{s} - \underbrace{\frac{2s+10}{s^3+3s^2+4{,}5s+12{,}5}}_{T(s)} \times \underbrace{\frac{1}{s}}_{R(s)}\right] =$$

$$= \lim_{s \to 0}\left[1 - \frac{2s+10}{s^3+3s^2+4{,}5s+12{,}5}\right] = 1 - \frac{10}{12{,}5} = 0{,}2$$

$$\boxed{e_{est} = 0{,}2}$$

(e) (valor 1.0) Analise a estabilidade do sistema de malha fechada através do critério de Nyquist e discuta o resultado em termos dos pólos da malha fechada.

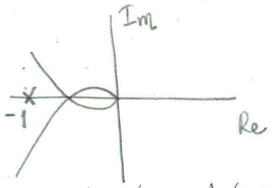
$z = p + n$

↳ nº envolvimentos

↳ nº pólos no semiplano direito } $L(s)$

pólos de $L(s) \rightarrow [0;\ -2;\ -1] \Rightarrow p = 0$

nyquist$(L(s))$:




$n = 0$ (não há envolvimentos do ponto $-1$)

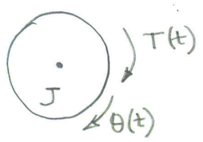
$z = 0 + 0 = 0 \Rightarrow$ estável (não há pólos de $T(s)$ no semiplano direito)

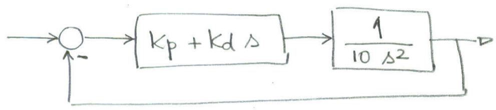
pólos $T(s) \rightarrow [-2{,}92;\ -0{,}0383 \pm j\,2{,}0675]$ (pólos no semiplano esquerdo $\Rightarrow$ Ok!)

2. Um disco de inércia $J = 10$ deverá ser controlado através da aplicação de um torque $T(t)$. Para isso será empregado um controlador PD em realimentação unitária.

(a) (valor 1.5) Determine a função de transferência do controlador de forma que o sistema controládo oscile com uma freqüência de $5rad/s$ e apresente um fator de amortecimento de 0.6.

$$J\ddot{\theta} = T \longrightarrow J s^2 \Theta(s) = T(s) \Rightarrow \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{J s^2}$$




malha fechada

$$T(s) = \frac{K_p + K_d s}{10 s^2 + K_d s + K_p} = \frac{(K_p + K_d s)/10}{s^2 + \frac{K_d}{10} s + \frac{K_p}{10}}$$

$$\omega_d = 5 = \omega_n \sqrt{1 - 0{,}6^2} \Rightarrow \omega_n = 6{,}25$$

$$\frac{K_p}{10} = \omega_n^2 = 6{,}25^2 \Rightarrow K_p = 390{,}6$$

$$\frac{K_d}{10} = 2\xi\omega_n = 2 \times 0{,}6 \times 6{,}25 \Rightarrow K_d = 75$$

Controlador: $\boxed{K(s) = 390{,}6 + 75 s}$

(b) (valor 1.0) Determine o sobressinal esperado em função dos requisitos de projeto e verifique, através da resposta ao degrau unitário, se este valor foi obtido com o uso do controlador. Se não foi, apresente a justificativa para isso.

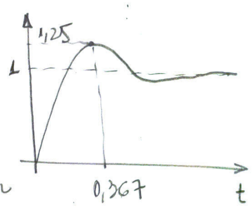
$$\xi = \frac{\ln(100/pss)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{100}{pss}\right)}} \; ; \quad x = \ln\left(\frac{100}{pss}\right) \; ; \quad \xi \cdot \sqrt{\pi^2 + x^2} = x \Rightarrow \xi^2(\pi^2 + x^2) = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi^2\pi^2 + \xi^2 x^2 = x^2 \Rightarrow x^2(1 - \xi^2) = \xi^2\pi^2 \Rightarrow x = \frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln\left(\frac{100}{pss}\right) \Rightarrow$$

$$e^{\left[\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right]} = \frac{100}{pss} \Rightarrow pss = 100\, e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

para $\xi = 0{,}6 \Rightarrow pss = 100\, e^{-\pi \times 0{,}6/\sqrt{1-0{,}6^2}} = 100\, e^{-2{,}356} = 9{,}48\%$

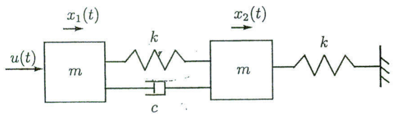
resposta ao degrau da malha fechada: $step(T(s)) \Rightarrow$



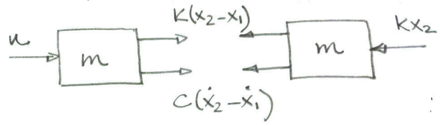

$$T(s) = \frac{75s + 390{,}6}{10s^2 + 75s + 390{,}6} \; ; \quad pss = 25\%.$$

A diferença é devido ao sistema não ser de segunda ordem na forma padrão (possui um zero)

3. (valor 1.5) Determine a função de transferência entre a força de entrada $u(t)$ e a saída em aceleração $y(t) = \ddot{x}_2(t)$ do sistema massa-mola-amortecedor da figura (somente existe movimento na horizontal e não há atrito).




$x_2 > x_1$




$$m\ddot{x}_1 = k(x_2-x_1) + c(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + u \Rightarrow ms^2X_1 = kX_2 - kX_1 + csX_2 - csX_1 + U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ms^2+cs+k)X_1 = (cs+k)X_2 + U \Rightarrow X_1 = \frac{(cs+k)X_2+U}{ms^2+cs+k}$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2-x_1) - c(\dot{x}_2-\dot{x}_1) - kx_2 \Rightarrow ms^2X_2 = -kX_2 + kX_1 - csX_2 + csX_1 - kX_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ms^2+cs+2k)X_2 = (cs+k)X_1 = (cs+k)\left[\frac{(cs+k)X_2+U}{ms^2+cs+k}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ms^2+cs+2k)(ms^2+cs+k)X_2 = (cs+k)^2X_2 + (cs+k)U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(ms^2+cs+2k)(ms^2+cs+k) - (cs+k)^2\right]X_2 = (cs+k)U$$

$$y = \ddot{x}_2 \Rightarrow Y = s^2X_2 \Rightarrow X_2 = \frac{Y}{s^2}$$

$$\left[(ms^2+cs+2k)(ms^2+cs+k) - (cs+k)^2\right]\frac{Y}{s^2} = (cs+k)U$$

$$\boxed{\frac{Y}{U} = \frac{s^2(cs+k)}{\left[(ms^2+cs+2k)(ms^2+cs+k) - (cs+k)^2\right]}}$$

Algumas fórmulas:

$$pss = 100\frac{y_p-\gamma}{\gamma}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1}\left(\left.\frac{d^i f}{dt^i}\right|_{t=0}\right)$$

$$t_{e5\%} \approx 3.2\tau = \frac{3.2}{\xi w_n}$$

$$\mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = e^{-sT}F(s)$$

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$$

$$\xi = \frac{ln\frac{100}{pss}}{\sqrt{\pi^2+\left(ln\frac{100}{pss}\right)^2}}$$

$$e_v(t) = \gamma\left(1 \pm \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$t_{e2\%} \approx 4\tau = \frac{4}{\xi w_n}$$

$$\delta_l = ln\frac{y_1}{y_2} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[tu(t)] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[sen(wt)] = \frac{w}{s^2+w^2}$$

$$G(s) = \frac{\gamma w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$$

$$J = \int r^2 dm$$

$$G(s) = \frac{\gamma}{\tau s+1}$$

$$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$w_r = w_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$z = p + n$$

| Tipo de $G(s)$ | Degrau | Rampa | Parábola |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{1+k_{pos}}$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{k_{vel}}$ | $\infty$ |
| 2 | 0 | 0 | $\frac{1}{k_{acel}}$ |