EE521 - 2º S/2005 - T. U - Prova 2 - 08/10/2005

Questão 1. Considere uma distribuição de carga formada por dois discos de raio a, paralalelos, separados por uma distância $2b$, uniformemente carregados com densidades superficiais de carga σ_0 e $-\sigma_0$, respectivamente. Tome a origem do sistema de coordenadas no ponto central entre os discos, com o eixo z perpendicular aos mesmos (o semi eixo positivo interceptando o disco com densidade σ_0). Determine:

a) o potencial nos pontos do eixo z;

b) o potencial nos pontos do eixo z, no intervalo $-b < z < b$, quando $a \to \infty$

Dica: $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+u} - \sqrt{x+v} \right) = 0.$

Solução

a)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{-\sigma_0}{\sqrt{(z+b)^2 + s^2}} s d\phi ds + \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0}{\sqrt{(z-b)^2+s^2}} s d\phi ds \right)$$

$$= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(-\int_0^a \frac{s}{\sqrt{(z+b)^2+s^2}} ds + \int_0^a \frac{s}{\sqrt{(z-b)^2+s^2}} ds \right).$$

De

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = f(a,x) = \sqrt{a^2+x^2}$$

obtemos

$$V = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(-\sqrt{(z+b)^2+a^2} + \sqrt{(z+b)^2} + \sqrt{(z-b)^2+a^2} - \sqrt{(z-b)^2} \right)$$

b)

No intervalo $-b < z < b$

$$V = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(-\sqrt{(z+b)^2+a^2} + (z+b) + \sqrt{(z-b)^2+a^2} - (b-z) \right)$$

ou

$$V = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(2z + \sqrt{(z-b)^2+a^2} - \sqrt{(z+b)^2+a^2} \right)$$

quando $a \to \infty$, $\sqrt{(z-b)^2+a^2} - \sqrt{(z+b)^2+a^2} \to 0$, e

$$V \to \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} z$$

Questão 2. Um sistema de condutores é constituído por uma esfera condutora envolta por uma *concha* esférica concêntrica, também de material condutor. O raio do condutor interno é a e os raios interno e externo do condutor externo são respectivamente b e c. Inicialmente o condutor externo está neutro (carga total nula) e o potencial do condutor interno é V_0. Adotando a origem do sistema de coordenadas no centro comum dos condutores, determine

a) a função potencial nos pontos com $r \geq c$;

b) o novo potencial, V_1, no condutor interno quando o condutor externo é *aterrado* (o que se entende por *aterrar* o condutor é alterar sua carga total de forma a tornar seu potencial nulo, com respeito ao infinito);

c) a energia eletrostática, W, nas condições do item b.

Solução

a)

As três superfícies condutoras estão uniformemente carregadas. Se a carga total no condutor interno é Q_0 então a superfície de raio b acumula carga total $-Q_0$ enquanto a superfície de raio c acumula carga total Q_0. Representando por $V_a(r)$, $V_b(r)$ e $V_c(r)$ as funções potenciais devido às distribuições de carga nas superfícícies de raios a, b e c, respectivamente, obtemos, para os pontos $r \geq c$:

$$V(r) = V_a(r) + V_b(r) + V_c(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Para expressar Q_0 em termos dos dados do problema usamos a relação:

$$V(a) = V_0 = V_a(a) + V_b(a) + V_c(a)$$

$$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 c} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}.$$

Portanto,

$$V(r) = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) r}$$

b)

Como a carga no condutor interno permace inalterada, a carga total na superfície de raio b também permanece inalterada por exigência da lei de Gauss. Se na nova situação a carga total acumulada na superfície de raio c for representada por Q_c e a nova função potencial for representada por $V'(r)$, temos

$$V'(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0$$

para todo r no intervalo $b \leq r \leq c$, o que implica

$$Q = 0.$$

Portanto,

$$V_1 = V'(a) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right),$$

ou seja

$$V_1 = \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} V_0 = \frac{bc - ac}{ab + bc - ac} V_0$$

c)

Usando

$$W = \frac{1}{2}\int_S \sigma V da,$$

e notando que só nos pontos da superfície de raio o produto σV é diferente de zero, obtemos

$$W = \frac{1}{2} V_1 \int \sigma da = \frac{1}{2} V_1 Q_0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} V_0 \right)\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \right),$$

ou

$$W = \frac{2\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} V_0^2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 abc(bc - ac)V_0^2}{(bc - ac + ab)^2}.$$

Questão 3. Uma carga pontual Q_0 está situada a uma distância b, do centro de um condutor esférico de raio a, *neutro*.

a) Determine o potencial do condutor.

b) Qual é o limite do potencial do condutor para $b \to a$?

c) Qual o limite do potencial do condutor qdo $a \to \infty$?

Solução

a)

Sabemos pelo método das imagens que o potencial e, portanto, o campo elétrico no espaço fora do condutor são os mesmos que os que seriam produzidos por : a carga pontual original, uma carga pontual de valor

$$q' = -\frac{a}{b} Q_0$$

situada no segmento que une a carga pontual dada e o ponto que seria o centro do condutor e a uma distância

$$D = \frac{a^2}{b}$$

desse mesmo ponto; uma carga de valor

$$q'' = \frac{a}{b} Q_0$$

no ponto que seria o centro do condutor. Esse arranjo de cargas produz um potencial constante nos pontos do que seria a superfície esférica do condutor, e além disso a carga total interna a tal superfície é nula. Estas condições são suficientes para determinar a igualdade das funções potenciais como afirmado acima.

O potencial do condutor pode então ser calculado por

$$V_0 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\frac{a}{b} Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 b}.$$

Usou-se o fato de a soma dos potenciais associados à carga Q_0 e à carga q' ser nula nos pontos do que seria a superfície do condutor.

b)

Embora o enunciado não seja explícito, é claro que só estamos considerando o caso $b > a$. Nota-se, da solução encontrada, que o potencial na superfície do condutor é idêntoco ao que a carga Q_0 produziria no ponto onde se encontra o centro do condutor, caso o condutor não estivesse presente. A resposta é claramente

$$V_0 \to \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

que coincide com o potencial que o condutor apresentaria se estivesse carregado com carga Q_0, e a carga pontual estivesse ausente.

c)

O enunciado deste item foi mal formulado. Se for interpretado como: aumentar o raio do condutor enquanto a distância $b - a > 0$ permanece finita obteríamos

$$V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{a}{b} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{a}{a + (b - a)} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{1 + \frac{b - a}{a}} \to \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

para $a >> b - a$. O potencial, para Q_0 fixo é inversamente proporcional ao raio da esfera. Para um condutor com o raio da Terra obteríamos

$$\frac{V_0}{Q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{4\pi(8.85 \times 10^{-12})(6.37 \times 10^6)} \cong 1400(V/C)$$

Valor das questões:

1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c
2,0	1,0	2,0	1,0	1,0	2,0	0,5	0,5

Formulário

Convenções

$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, $\quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$,

$\mathbf{s} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$, $\quad s = |\mathbf{s}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad \hat{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s}}{s}$.

Coordenadas cilíndricas, (s, ϕ, z) e esféricas, (r, θ, ϕ):

$$\begin{array}{lll} x = s\cos\phi & y = s\sin\phi & z = z \\ x = r\sin\theta\cos\phi & y = r\sin\theta\sin\phi & z = r\cos\theta \end{array}.$$

Integrais para cálculo de campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{P}} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau'$$

$d\tau = s ds d\phi dz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$; $\quad da = s ds d\phi$ (sup. paralela ao plano xy);
$da = s d\phi dz$ (sup. cil. raio s, eixo coincidente com eixo z) ;
$da = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ (sup esf. raio r centro na origem).

Lei de Gauss

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ representa o vetor unitário normal e orientado para fora, em cada ponto da superfície fechada, $\mathcal{S}$, Q_{int} representa a totalidade da carga elétrica no interior de $\mathcal{S}$ e

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \text{(coord. ret.);}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} \quad \text{(coord. esf.).}$$

Potencial Elétrico e Energia Eletrostática

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \ \ (\text{ref.: } \infty), \quad V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy + \hat{\mathbf{z}}dz = \hat{\mathbf{s}}ds + \hat{\boldsymbol{\phi}}s d\phi + \hat{\mathbf{z}}dz = \hat{\mathbf{r}}dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}r d\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}r\sin\theta d\phi$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'; \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'; \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{P}} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl'$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V; \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{(eq. de Poisson)}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho V d\tau \left(\text{ou } \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \sigma V da ; \ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \lambda V dl ; \ \frac{1}{2} \sum q_i V_i \right) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\text{todo espaço}} |\mathbf{E}|^2 d\tau$$

Integrais

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x \qquad \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2}} = \ln\left(x + a + \sqrt{(x+a)^2 + b^2} \right)$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$