Métodos I - 1S11 - Lista 7

(1) Mostre, a partir das relações de recorrência que seguem derivando a função geratriz, que

$$(n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - xP'_n(x),$$
$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x).$$

(2) Mostre que

$$P_n(\cos\theta) = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right).$$

(3) Mostre, usando explicitamente coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right] = -(n+1)\frac{P_{n+1}(\cos\theta)}{r^{n+2}}.$$

(4) Mostre que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 0, \quad n \geq 1,$$
$$\int_{-1}^{1} x^{2n+1}P_{2m}(x)\,dx = 0, \quad m \neq n,$$
$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\,dx = 0, \quad m < n,$$
$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)\,dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(5) Mostre que

$$P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$P'_n(-1) = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

(6) Construa (a menos de uma normalização) os polinômios de Legendre $P_n(x)$ utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicado à base $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ do espaço dos polinômios no intervalo $(-1, 1)$ equipado com o produto escalar

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

(7) Mostre que as funções de Legendre de segunda espécie $Q_n(x)$ satisfazem as seguintes relações de recorrência:

$$(2n+1)xQ_n(x) = (n+1)Q_{n+1}(x) + nQ_{n-1}(x),$$
$$(2n+1)Q_n(x) = Q'_{n+1}(x) - Q'_{n-1}(x).$$

(8) Mostre que

$$Q_n(-x) = (-1)^{n+1}Q_n(x).$$

(9) Mostre que

$$\begin{aligned} &n[P_n(x)Q_{n-1}(x) - Q_n(x)P_{n-1}(x)] \\ &\quad = P_1(x)Q_0(x) - P_0(x)Q_1(x) = 1. \end{aligned}$$

(10) Mostre que os polinômios de Legendre associados $P_n^m(x)$ satisfazem as seguintes relações de recorrência:

$$\begin{aligned} &P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}P_n^m(x) \\ &\quad + [n(n+1) - m(m-1)]P_n^{m-1}(x) = 0, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} (2n+1)xP_n^m(x) &= (n+m)P_{n-1}^m(x) \\ &\quad + (n-m+1)P_{n+1}^m(x) = 0, \end{aligned}$$
$$(2n+1)\sqrt{1-x^2}P_n^m(x) = P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x),$$
$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2}P_n^{m\prime}(x) &= \frac{1}{2}P_n^{m+1}(x) \\ &\quad - \frac{1}{2}(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(x). \end{aligned}$$

(11) Defina $P_n^{-m}(x)$ $(m \geq 0)$ usando a fórmula de Rodrigues, ou seja,

$$P_n^{-m}(x) = \frac{(1-x^2)^{-m/2}}{2^n n!}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n.$$

Mostre que

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x).$$

(12) Mostre que

$$P_n^m(0) = \begin{cases} (-1)^{(n-m)/2}\dfrac{(n+m-1)!!}{(n-m)!!}, & n+m \text{ par}, \\ 0, & n+m \text{ ímpar}. \end{cases}$$