Instituto de Física Gleb Wataghin
UNICAMP
F315 Mecânica Geral - Prova 3 - turmas A e B
1o. Semestre de 2012

Nome: GABARITO RA: Turma:

Esta prova contém 4 folhas. Pode-se usar o verso destas folhas para a resolução dos exercícios e para rascunho.

1. **Considerando a ação S de um sistema físico unidimensional definida como:**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\{x(t), \dot{x}(t); t\} dt,$$

onde $L\{x(t), \dot{x}(t); t\}$ é a Lagrangiana do sistema e $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$,

(a) (2 pontos) enuncie o Princípio de Hamilton e

(b) (3 pontos) deduza detalhadamente a Equação de Euler-Lagrange, isto é, as condições sobre $L\{x(t), \dot{x}(t); t\}$ para que o Princípio de Hamilton seja satisfeito.

a) "De todos os caminhos possíveis que um sistema dinâmico pode percorrer entre dois pontos num específico intervalo de tempo, o caminho real é aquele que minimiza a Ação S."

b) Define-se $x(\alpha, t) = x(0, t) + \alpha\,\eta(t)$ tal que $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ e $x(0,t) = x(t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial t} \right\} dt$$ (condição de minimização)

$$\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \eta(t) \; ; \; \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dot{x}(0,t) + \alpha\,\dot{\eta}(t) \right) = \dot{\eta}(t) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}\eta(t) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d\eta(t)}{\partial t}} \right\}$$

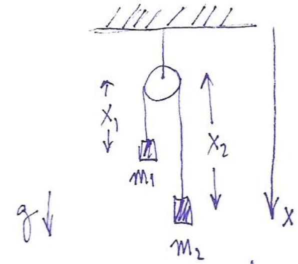
integrando por partes

$$= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\eta(t)\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ pois } \eta_1(t_1) = \eta(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\eta(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \right] \eta(x)\, dx \quad \forall\, \eta(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0}$$ Equação de Euler-Lagrange

2. Considere um sistema composto por dois corpos de massa m_1 e m_2 sujeitos à ação da aceleração da gravidade g e conectados por uma corda de comprimento l que passa por uma polia sem massa e sem atrito, como mostrado na figura.



o raio da polia é desprezível.

Utilizando o formalismo de Euler-Lagrange, determine:

(a) (1 ponto) a Lagrangiana do sistema,

(b) (1 ponto) a equação de vínculo do sistema,

(c) (2 pontos) as equações do movimento do sistema escritas a partir da Equação de Lagrange com Vínculos,

(d) (1 ponto) as posições em função do tempo $x_1(t)$ e $x_2(t)$ referentes aos dois corpos, considerando que o sistema parte do repouso da posição onde $x_1(t=0)=0$.

Dado: Equação de Lagrange com Vínculos:
$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k(t)\frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0$

a) $T_1 = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2}$, $T_2 = \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}$, $U_1 = -m_1 g x_1$, $U_2 = -m_2 g x_2$ $\Rightarrow$ $L = T_1 + T_2 - U_1 - U_2$

b) $f = x_1 + x_2 - l = 0$

c) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = m_1 g$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$ $\Rightarrow$ da Eq. de Euler-Lagrange com vínculos:

$\boxed{m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g + \lambda = 0}$ (1) Igualmente p/ x_2: $\boxed{m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g + \lambda = 0}$ (2)

vínculo: $\boxed{x_1 = l - x_2}$ (3)

De (3) $\Rightarrow$ $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$. De (1)-(2): $\ddot{x}_1(m_1+m_2) - g(m_1-m_2) = 0 \Rightarrow$

$\boxed{\ddot{x}_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} g}$ (4) e $\boxed{\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1}$

$x_1(t=0)=0$, $v_1(t=0)=0$

d) De (4): $x_1(t) = x_1(t=0) + v_1(t=0)\,t + \frac{1}{2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} g t^2 = \boxed{\frac{1}{2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} g t^2}$

e $\boxed{x_2(t) = l - x_1}$

Note que, dadas as condições iniciais $x_1(t=0) = v_1(t=0) = 0$ e o vínculo, a situação física descrita no problema implica que se $m_1 < m_2$, o sistema está parado em $x_1(t) = 0$ e $x_2(t) = l$.