Métodos I - 1S11 - Lista 6

(1) Mostre que vale a expansão de Jacobi-Anger

$$\mathrm{e}^{iz\cos\theta} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(z)\mathrm{e}^{im\theta}.$$

(2) Mostre que

$$\cos z = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(z),$$

$$\sin z = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(z).$$

(3) Mostre, a partir da função geratriz, que vale a fórmula de adição para as funções de Bessel:

$$J_n(u+v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(u)J_{n-m}(v).$$

(4) Mostre que

$$J_n(z) = (-1)^n z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n J_0(z).$$

(5) Mostre que

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos zt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

(6) Mostre que

$$J_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\pi/2}\cos(z\sin\theta)\cos^{2\nu}\theta\,d\theta.$$

(7) Mostre que a equação

$$z^4 y'' + (\mathrm{e}^{2/z} - \nu^2)y = 0$$

é satisfeita por

$$y = zJ_\nu(\mathrm{e}^{1/z}).$$

OBS: Ss funções de Bessel esféricas $j_n(x)$ e $y_n(x)$ são definidas como

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{n+1/2}(x),$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-n-1/2}(x),$$

e as funções de Bessel esféricas modificadas $i_n(x)$ e $k_n(x)$ como

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}I_{n+1/2}(x), \qquad k_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}K_{n+1/2}(x),$$

onde $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$ são as funções de Bessel modificadas de primeira e segunda espécies.

(8) Mostre que

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right),$$

$$y_n(x) = (-1)^{n+1} x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right).$$

(9) Mostre que

$$j_{n-1}(x) + j_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x}j_n(x),$$

$$nj_{n-1}(x) - (n+1)j_{n+1}(x) = (2n+1)j_n'(x),$$

$$y_{n-1}(x) + y_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x}y_n(x),$$

$$ny_{n-1}(x) - (n+1)y_{n+1}(x) = (2n+1)y_n'(x).$$

(10) Mostre que

$$i_{n+1}(x) = x^n\frac{d}{dx}(x^{-n}i_n(x)),$$

$$k_{n+1}(x) = -x^n\frac{d}{dx}(x^{-n}k_n(x)).$$

(11) Mostre que

$$i_n(x) = x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sinh x}{x}\right),$$

$$k_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right).$$

(12) Mostre que

$$i_{n-1}(x) - i_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x}i_n(x),$$

$$ni_{n-1}(x) + (n+1)i_{n+1}(x) = (2n+1)i_n'(x),$$

$$k_{n-1}(x) - k_{n+1}(x) = -\frac{2n+1}{x}k_n(x),$$

$$nk_{n-1}(x) + (n+1)k_{n+1}(x) = -(2n+1)k_n'(x).$$