# F 315 A - Teste 2 (26/09/2013)

**Nome:** **RA:**

(a) Obtenha a expansão de Fourier completa de uma força periódica do tipo $\frac{F(t)}{m} = \begin{matrix} -B/2 \ (-\pi/\omega < t < 0) \\ +B/2 \ (0 < t < \pi/\omega) \end{matrix}$, com $F(t+\frac{2\pi}{\omega}) = F(t)$ e sendo $B$ uma constante. (5.0)

(b) Seja um oscilador harmônico subamortecido com massa $m$ e constantes $\beta$ e $\omega_0$, e sujeito à força externa descrita no ítem (a). Encontre $x(t)$, ignorando efeitos transientes. (5.0)

FORMULÁRIO

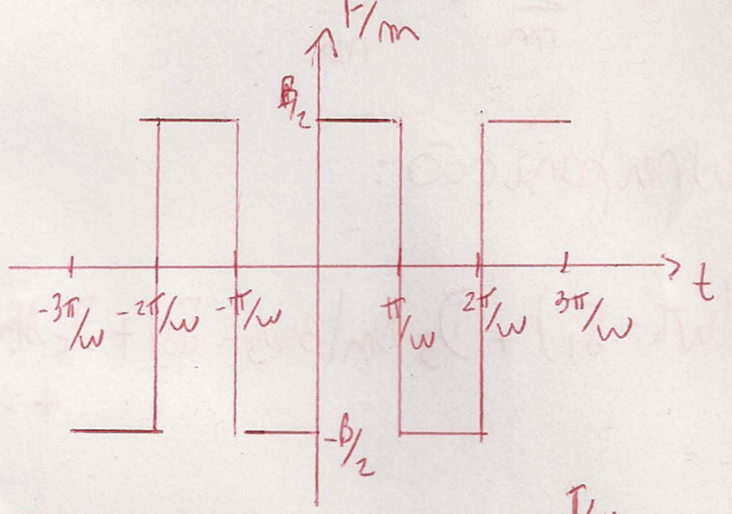
$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t')\cos(n\omega t')dt'$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t')\sin(n\omega t')dt'$$

PS: Note que, para um oscilador harmônico amortecido e forçado sujeito a uma força externa $\frac{F(t)}{m} = A\cos(\omega t)$, temos que $x_p = D\cos(\omega t - \delta)$, onde $D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}$ e $\delta = \arctan(\frac{2\omega\beta}{\omega_o^2 - \omega^2})$

(a)




Temos que: $a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t')\cos(n\omega t')dt' = 0$,

uma vez que o integrando é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico em relação à origem do tempo. Ou seja, a contribuição para a integral em $t' < 0$ se cancela com a contribuição em $t' > 0$.

Além disso, temos que:

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t')\,\text{sen}(n\omega t')\,dt' = \frac{2\omega}{\pi}\int_{0}^{\pi/\omega} m\frac{B}{2}\,\text{sen}\,n\omega t'\,dt'$$

$$= \frac{\omega B m}{\pi}\left(-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t'\right)\Big|_{0}^{\pi/\omega} = \frac{mB}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right] = \frac{mB}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

Assim

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\,n\omega t = \frac{mB}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[1-(-1)^n\right]\text{sen}\,n\omega t$$

$$\Rightarrow \frac{F(t)}{m} = \frac{2B}{\pi}\left[\text{sen}\,\omega t + \frac{1}{3}\text{sen}\,3\omega t + \frac{1}{5}\text{sen}\,5\omega t + \dots\right]$$

(b) $$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{2B}{\pi}\left[\text{sen}\,\omega t + \frac{1}{3}\text{sen}\,3\omega t + \frac{1}{5}\text{sen}\,5\omega t + \dots\right]$$

$$= \frac{F_1(t)}{m} + \frac{F_3(t)}{m} + \frac{F_5(t)}{m} + \dots$$

Pelo princípio da superposição:

$$\underline{\underline{x_p(t)}} = \sum_i x_p^{(i)} = D_1\,\text{sen}(\omega t - \delta_1) + D_3\,\text{sen}(3\omega_3 - \delta_3) + D_5\,\text{sen}(5\omega t - \delta_5) + \dots$$

onde $$D_n = \frac{2B/n\pi}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4(n\omega)^2\beta^2}}$$ e

$$\delta_n = \arctan\left(\frac{2(n\omega)\beta}{\omega_0^2 - (n\omega)^2}\right)$$

Como $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ e a solução $x_H(t)$ decai com e tempo (transiente), temos que, para $t \gg 1/\beta$,

$x(t) \simeq x_p(t)$