MC548: Projeto e Análise de Algoritmos II

Prof. Cid C. de Souza – 2ª Prova – (09/05/2011)

Nome:

RA: **Turma:**

Questão	frac	Peso	Nota
1			
2			
3			
4			
Total		10,0	

Observação: o peso das questões será decidido pelo docente da seguinte forma: as duas questões que você responder melhor terão peso 3 e as demais terão peso 2. Portanto, uma mesma questão pode ter peso 2 para um aluno e peso 3 para um outro aluno.

Instruções:

1. A duração da prova é de 110 minutos.
2. Nenhum aluno poderá sair da sala antes de terem sido transcorridos 60 minutos de prova.
3. O aluno que sair de sala antes do término da prova deve entregá-la em definitivo.
4. Coloque o seu nome, RA e turma em **no alto desta página e em todas as folhas de resposta**.
5. Não é permitido usar qualquer material de consulta.
6. **Questões mal justificadas serão consideradas erradas !**
7. Use as folhas de papel almaço entregues pelo docente para responder às questões da prova.
8. A prova pode ser feita a lápis porém, nesse caso, fica a critério do docente aceitar eventuais pedidos de revisão de nota.
9. O uso de calculadoras ou quaisquer outros equipamentos eletrônicos, **inclusive celulares**, está proibido durante a prova.
10. Não desgrampeie o caderno de questões.
11. **Para efeitos de resolução dessa prova, suponha que os problemas `SAT`, `3SAT`, `PARTIÇÃO (PAR)`, `CLIQUE`, `Cobertura de Vértices (CV)` e `Caminho Hamiltoniano (CaH)` são os <u>únicos</u> que se sabe estar em $\mathcal{NP}$-completo.**
12. Todos os grafos mencionados nos enunciados das questões são não-orientados, simples, sem auto-laços e representados por sua **matriz de adjacências**.

1. Considere os problemas P_1 de $\mathcal{P}$ e P_2 de $\mathcal{NP}$-completo. Indique para cada uma das afirmações abaixo se ela é **verdadeira**, **falsa** ou se **não se sabe**.

(a) Existe uma redução de P_1 para P_2 que toma um tempo polinomial.

(b) Se existe um algoritmo determinístico polinomial para resolver P_2 então $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

(c) Existe uma redução de P_2 para P_1 que leva tempo polinomial.

(d) Se P_3 é um problema $\mathcal{NP}$-difícil, então P_3 se reduz a P_2 em tempo polinomial.

(e) Pode-se afirmar que P_1 está em $\mathcal{PSPACE}$.

(f) Não se pode afirmar que P_2 está em $\mathcal{PSPACE}$.

2. O problema da `CLIQUE` é definido como se segue:

> **Entrada:** um grafo não-orientado $G = (V, E)$ e um valor inteiro $k \in \{1, \ldots, n\}$, onde $n = |V|$.
> **Pergunta:** G possui uma *clique* (i.e., um subrafo completo) com k vértices ?

Foi visto em aula que `CLIQUE` está em $\mathcal{NP}$-completo. Responda os itens a seguir.

(a) Suponha que você dispõe de uma rotina R que gere todos os subconjuntos de k vértices de G usando um algoritmo de complexidade $O(n^k)$. Usando R, você pode resolver `CLIQUE` verificando se cada um dos *grafos induzidos* em G correspondentes aos subconjuntos gerados por R é completo, retornando `SIM` em caso afirmativo e `NÃO` caso contrário. Mostre que a complexidade deste algoritmo é $O(k^2 n^k)$.

(b) O algoritmo do item anterior tem uma complexidade que é polinomial em n. Isso não prova que $\mathcal{P}$=$\mathcal{NP}$?

(c) Considere a seguinte variante do problema `CLIQUE` conhecida como `HALF-CLIQUE`:

> **Entrada:** um grafo não-orientado $G = (V, E)$ com um número par de vértices, ou seja, com $n = |V| = 2p$ para algum inteiro positivo p.
> **Pergunta:** G possui uma *clique* com $p = \frac{n}{2}$ vértices (i.e., metade dos vértices de G) ?

Dê um argumento simples que demonstra que `HALF-CLIQUE` está em $\mathcal{NP}$.

(d) Considere a seguinte afirmativa: "`HALF-CLIQUE` *é obviamente* $\mathcal{NP}$*-difícil pois refere-se ao caso particular de* `CLIQUE` *em que* n *é par e* $k = \frac{n}{2}$*.*"

Você concorda com essa afirmativa ? Justifique.

(e) Faça uma redução envolvendo `CLIQUE` que mostra que `HALF-CLIQUE` é $\mathcal{NP}$-difícil.

3. Responda as perguntas a seguir, justificando cuidadosamente as suas respostas.

(a) Defina o que se entende pelo *problema complementar* de um problema de decisão Π.

(b) Defina o que é uma cobertura de vértices de um grafo não-orientado $G = (V, E)$.

(c) Enuncie abaixo o problema de `Cobertura de Vértices (CV)` (a esquerda) assim como o seu problema complementar (a direita).

Problema `CV`:

Dados de entrada:

Pergunta:

Problema **complementar** de `CV`

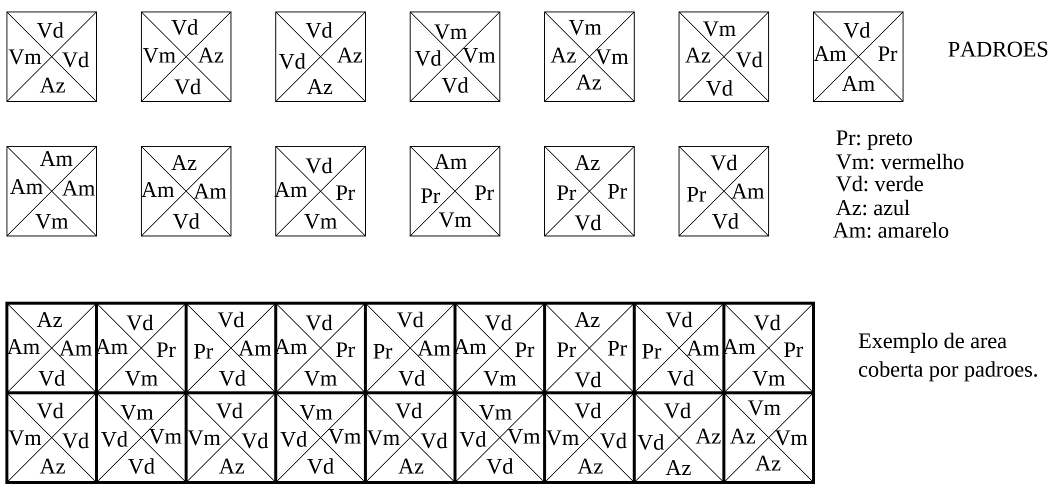
Dados de entrada:

Pergunta:

(d) Defina a classe de problemas co$\mathcal{NP}$.

(e) Duas importantes questões relativas à teoria da Computação vistas em aula são: "$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?" e "$\mathcal{NP} = \text{co}\mathcal{NP}$?" . Mostre que, se $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, então $\mathcal{NP} = \text{co}\mathcal{NP}$.

4. O problema dos *dominós* ou *azulejos* de Wang (PDW) foi proposto pelo matemático e filósofo chinês Hao Wang em 1961. A entrada do problema consiste de um conjunto finito de quadrados, todos com lado do mesmo tamanho, chamados de *padrões*. Cada um dos quatros lados de cada padrão está associado a uma única cor. A pergunta que se deseja responder é a seguinte: se dispusermos de uma quantidade infinita de quadrados de cada padrão é possível cobrir inteiramente o plano com estes padrões de modo que *(i)* nenhum quadrado seja refletido ou rotacionado e *(ii)* se os lados de dois quadrados se tocarem, então eles devem ter a mesma cor ?
A figura abaixo ilustra um conjunto de 13 padrões com o qual se pode cobrir todo plano, ou seja, para o qual PDW tem resposta `SIM`, além de uma pequena área retangular coberta por eles.



Os *dominós* ou *azulejos* de Wang têm encontrado aplicação nas áreas de Química e Biologia, mais particularmente no estudo de estruturas moleculares.
Foi mostrado que o seguinte resultado é **verdadeiro**: *"É possível fazer uma redução do problema da parada (*HALT*) ao* PDW *de modo que a resposta a este último será* SIM se e somente se *a resposta de* HALT *for* NÃO *(o programa não pàra)."*
Resposnda os itens a seguir:

(a) Enuncie o problema da parada (HALT).

(b) No resultado apresentado no enunciado, a redução usada foi a de Turing ou a de Karp ?

(c) Comente a frase a seguir: *"Não é importante saber se a redução mencionada no resultado é feita em tempo polinomial. Basta saber que ela pode ser feita em tempo finito."*

(d) Em 1961, Wang apresentou um algoritmo que resolvia o PDW. Mesmo sem conhecer esse algoritmo, dê os argumentos que mostram que ele estava errado.