F 315 - A GABARITO

a) Oscilador harmônico simples:

$\ddot{x} + w_0^2 x = 0$, onde $w_0 = \sqrt{k/(M+m)}$

Solução geral: $x(t) = A \cos w_0 t + B \sin w_0 t$

$V(t) = -A w_0 \sin w_0 t + B w_0 \cos w_0 t$

Condições iniciais: $x(t=0) = 0$ (i)

Cons. momento na colisão: $m v_0 = (M+m) V(t=0)$

$\Rightarrow V(t=0) = \frac{m}{M+m} v_0$

Aplicando na solução geral:

$x(t=0) = A = 0$

$V(t=0) = B w_0 = \frac{m}{M+m} v_0 \Rightarrow B = \frac{m v_0}{w_0 (M+m)}$

Portanto:

$x(t) = \frac{m v_0}{w_0(M+m)} \sin w_0 t = \frac{m v_0}{\sqrt{k(M+m)}} \sin w_0 t$

Amplitude $= B = \frac{m v_0}{w_0(M+m)} = \frac{m v_0}{(M+m)} \sqrt{\frac{(M+m)}{k}} = \frac{m v_0}{\sqrt{k(M+m)}}$

b) O bloco atinge o pto mais próximo da parede quando $\sin w_0 t = 1$

$\Rightarrow w_0 \Delta t = \pi/2 \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2 w_0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M+m}{k}}$ //

c) Na primeira parte do movimento, temos que $F_{at} = -\mu N = -\mu g (M+m)$, contrária à velocidade positiva

Temos que $F = (M+m)\ddot{x} \Rightarrow -kx - \mu g(M+m) = (M+m)\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + w_0^2 x = -\mu g$, onde $w_0 \equiv \sqrt{k/(M+m)}$

Sol. geral da Homogênea: $x_H = A' \cos w_0 t + B' \sin w_0 t$

Sol. particular: $x_p = -\frac{\mu g}{w_0^2} = -\frac{\mu g}{k}(M+m)$

Sol. geral:

$x(t) = x_H + x_p = A' \cos w_0 t + B' \sin w_0 t - \frac{\mu}{k} g (M+m)$

$v(t) = -A' w_0 \sin w_0 t + B' w_0 \cos w_0 t$

Cond. Iniciais: $x(t=0) = 0 \Rightarrow A' - \frac{\mu g}{k}(M+m) = 0 \Rightarrow A' = \frac{\mu g}{k}(M+m)$

$v(t=0) = \frac{m v_0}{M+m} \Rightarrow B' w_0 = \frac{m v_0}{M+m} \Rightarrow B' = \frac{m v_0}{(M+m) w_0} = \frac{m v_0}{M+m}\sqrt{\frac{(M+m)}{k}}$

$\Rightarrow B' = \frac{m v_0}{\sqrt{k(M+m)}}$

Portanto: $x(t) = \frac{\mu g (M+m)}{k} \cos w_0 t + \frac{m v_0}{\sqrt{k(M+m)}} \sin w_0 t - \frac{\mu g (M+m)}{k}$

d) $v(t) = -\mu g \frac{(M+m)}{k} \cdot w_0 \sin w_0 t + \frac{m v_0}{\sqrt{k(M+m)}} w_0 \cos w_0 t$

$= -\mu g \sqrt{\frac{(M+m)}{k}} \sin w_0 t + \frac{m v_0}{(M+m)} \cos w_0 t$

O bloco atingirá o ponto mais próximo da parede quando $v(\Delta t') = 0$

$\Rightarrow -\mu g \sqrt{\frac{(M+m)}{k}} \sin w_0 (\Delta t') + \frac{m v_0}{(M+m)} \cos w_0 \Delta t' = 0$

$$\Rightarrow tg(\omega_0 \Delta t') = \frac{m v_0}{M+m} \cdot \frac{1}{\mu g} \sqrt{\frac{k}{(M+m)}} = \frac{m v_0}{(M+m)^{3/2}} \frac{\sqrt{k}}{\mu g}$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{arctg}\left[\frac{m v_0}{(M+m)^{3/2}} \frac{\sqrt{k}}{\mu g}\right] = \sqrt{\frac{M+m}{k}}\, tg^{-1}\left[\frac{m v_0}{(M+m)^{3/2}} \frac{\sqrt{k}}{\mu g}\right]$$

e) Como ~~arct~~ $tg^{-1}\left[\frac{m v_0}{(M+m)^{3/2}} \frac{\sqrt{k}}{\mu g}\right] < \pi/2$

Temos que $\Delta t' < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(M+m)}{k}}$

Portanto: $\Delta t' < \Delta t$ (sem Atrito)

Isso acontece porque a força de atrito freia o movimento, fazendo o bloco parar mais rapidamente.

Note que, se $\mu = 0$, então

$$\Delta t' = \sqrt{\frac{(M+m)}{k}}\, tg^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(M+m)}{k}} = \Delta t,$$

como esperado.

2) a) $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + b/_m \dot{x} + k/_m x = 0$

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = 0$

b) Buscamos soluções do tipo $x = e^{rt}$

$\Rightarrow r^2 e^{rt} + 2\beta r e^{rt} + w_0^2 e^{rt} = 0 \Rightarrow r^2 + 2\beta r + w_0^2 = 0$

$\Rightarrow r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - w_0^2}$. Estamos no caso superamortecido ($\beta > w_0$). Portanto as duas soluções possíveis são $x_1 = e^{r_1 t}$ e $x_2 = e^{r_2 t}$, onde $r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - w_0^2}$
$r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - w_0^2}$

Solução geral:

$x(t) = A x_1(t) + B x_2(t) = A e^{[-\beta + \sqrt{\beta^2 - w_0^2}]t} + B e^{[-\beta - \sqrt{\beta^2 - w_0^2}]t}$

Definimos: $w_2 \equiv \sqrt{\beta^2 - w_0^2}$. Assim

$x(t) = e^{-\beta t}\left[A e^{w_2 t} + B e^{-w_2 t}\right]$

Consideramos as condições iniciais:

$x(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$

$\dot{x}(0) = v_0$

$\dot{x}(t) = (-\beta + w_2) A e^{[-\beta + w_2]t} + (-\beta - w_2) B e^{[-\beta - w_2]t}$

$\Rightarrow (w_2 - \beta) A - (w_2 + \beta) B = v_0 \Rightarrow (w_2 - \beta) A + (w_2 + \beta) A = v_0$

$\Rightarrow [w_2 - \beta + w_2 + \beta] A = v_0 \Rightarrow A = v_0/2w_2$; $B = -v_0/2w_2$

$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{2w_2} e^{-\beta t}\left[e^{w_2 t} - e^{-2w_2 t}\right]$

$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{w_2} e^{-\beta t} \operatorname{senh} w_2 t$

(c) $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0\cos\omega t \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$

$x(t) = x_H + x_p$, onde $x_H = e^{-\beta t}\left[Ae^{\omega_2 t} + Be^{-\omega_2 t}\right]$

Para x_p, propomos uma solução da forma:

$x_p = D\cos(\omega t - \delta)$; $\dot{x}_p = -\omega D\sin(\omega t - \delta)$; $\ddot{x}_p = -\omega^2 D\cos(\omega t - \delta)$

Assim:

$$-\omega^2 D\cos(\omega t-\delta) - 2\beta\omega D\sin(\omega t-\delta) + \omega_0^2 D\cos(\omega t-\delta) = F_0/m \cos\omega t$$

$$\Rightarrow D(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\omega t-\delta) - 2\beta\omega D\sin(\omega t-\delta) = (F_0/m)\cos\omega t$$

$$\Rightarrow D(\omega_0^2-\omega^2)(\cos\omega t\cos\delta + \sin\omega t\sin\delta) - 2\beta\omega D(\sin\omega t\cos\delta - \cos\omega t\sin\delta) = (F_0/m)\cos\omega t$$

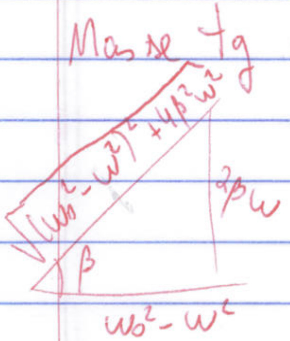
$$\Rightarrow \left[D(\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta + 2\beta\omega D\sin\delta - F_0/m\right]\cos\omega t + \left[D(\omega_0^2-\omega^2)\sin\delta - 2\beta\omega D\cos\delta\right]\sin\omega t = 0$$

Para que a igualdade valha $\forall t$, os dois termos entre colchetes devem se anular. Portanto:

$$\cancel{D}(\omega_0^2-\omega^2)\sin\delta - 2\beta\omega\cancel{D}\cos\delta = 0 \Rightarrow \boxed{tg\,\delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

$$\Rightarrow D(\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta + 2\beta\omega D\sin\delta = F_0/m$$

Mas se $tg\,\delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \Rightarrow \sin\delta = \frac{2\beta\omega}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}}$ e



$$\cos\delta = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow D\left\{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\cdot(\omega_0^2-\omega^2)}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}} + \frac{2\beta\omega\cdot 2\beta\omega}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}}\right\} = F_0/m$$

$$\Rightarrow D = \frac{F_0/m}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}}$$

Portanto, a solução geral será dada por:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[A e^{\omega_2 t} + B e^{-\omega_2 t}\right] + D \cos(\omega t - \delta),$$

onde $D = \dfrac{F_0/m}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}}$,

$$\delta = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right),$$

e A e B são encontrados a partir das condições iniciais.

1 _____

INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP

2 _____

Prova 2 - F 315 A 17/10/2013

3 _____

RA:__________ Nome:____

4 _____

Total _____

3-) Considere uma fina barra homogênea de comprimento L e massa M.

a-) Calcule o potencial gravitacional a uma distância D da extremidade mais próxima da barra, ao longo do eixo da barra. Obtenha também a força gravitacional exercida em uma massa pontual m nesse local. (1,5)

b-) Calcule o potencial gravitacional a uma distância R do centro da barra, na direção perpendicular à barra. Obtenha também a força gravitacional exercida em uma massa pontual m nesse local. (2,0)

Dica:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

Solução:

a-)

$$\Phi = -G\int \frac{\rho dl}{r} = -\frac{GM}{L}\int_D^{L+D}\frac{dx}{x} = \boxed{-\frac{GM}{L}ln\left(\frac{L+D}{D}\right)} \quad \textbf{(0,7)} \tag{1}$$

O módulo da força:

$$|F| = Gm\int \frac{dM}{x^2} = \frac{GMm}{L}\int_D^{L+D}\frac{dx}{x^2} = \boxed{\frac{GMm}{D(L+D)}} \quad \textbf{(0,8)} \tag{2}$$

Essa força atua na direção do eixo da barra, no sentido massa → barra.

b-)

$$d\Phi = -\frac{G\rho dx}{s}\ ;\rho = M/L\ ;\ s^2 = x^2+R^2 \tag{3}$$

$$\Phi = -\frac{GM}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}dx \tag{4}$$

Usando a dica do enunciado:

$$\boxed{\Phi = -\frac{GM}{L}\left[ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2+4R^2}}{-L+\sqrt{L^2+4R^2}}\right)\right]} \quad \textbf{(1,5)} \tag{5}$$

Para calcular a força lembramos que:

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = -\nabla\Phi \tag{6}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{2GM}{R(L^2+4R^2)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{|F| = \frac{2GMm}{R(L^2+4R^2)^{1/2}}} \quad \textbf{(0,5)} \tag{7}$$

Essa força atua na direção que liga a massa pontual ao centro da barra, no sentido massa→barra.