IME - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Prof. Dr. Jorge Luis Domínguez Rodríguez

------------------------------ -------------------------------- --

PROVA 1 : MA044 - Matemática IV

Nome:____ **RA**:______________

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	NOTA

A

02/05/2011

QUESTÃO 1:

a. *(1 ponto)* Resolva a equação polinomial $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Demonstração. Seja $w = z^2$, então

$$w^2 + w + 1 = 0 \Longrightarrow w = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}i\right)$$

Na forma polar, $z^2 = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}i\right) \Longrightarrow z_k = \text{ cis} \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k = 0, 1$. Então

$$\begin{aligned} z_1 &= \text{cis}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 &= \text{cis}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Analogamente, $z^2 = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}i\right) \Longrightarrow z_k = \text{ cis} \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k = 0, 1$. Então,

$$\begin{aligned} z_1 &= \text{cis}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 &= \text{cis}\,\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

□

b. *(1,5 ponto)* Utilize a Fórmula de Moivre para provar que $\dfrac{\text{sen}\,4\varphi}{\text{sen}\,\varphi} = 8\cos^3\varphi - 4\cos\varphi$.

Demonstração. utilizando a fórmula de Moivre, para $n = 4$, temos

$$\begin{aligned} (\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)^4 &= \cos 4\varphi + i\,\text{sen}\,4\varphi \\ \left(\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\,\text{sen}^2\varphi + \text{sen}^4\varphi\right) + i\left(4\cos^3\varphi\,\text{sen}\,\varphi - 4\cos\varphi\,\text{sen}^3\varphi\right) &= \cos 4\varphi + i\,\text{sen}\,4\varphi \end{aligned}$$

igualando parte imaginarias, temos

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}\,4\varphi}{\text{sen}\,\varphi} &= 4\cos^3\varphi - 4\cos\varphi\,\text{sen}^2\varphi \\ &= 4\cos^3\varphi - 4\cos\varphi(1 - \cos^2\varphi) \\ &= 8\cos^3\varphi - 4\cos\varphi \end{aligned}$$

$\square$

QUESTÃO 2: Prove que

a. *(1,2 ponto)* $\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4} \\
&= \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{2} \\
&= \cos 2z
\end{aligned}$$

$\square$

b. *(1,3 ponto)* $\operatorname{sen}^2(z/2) = \dfrac{1}{2}(1-\cos z)$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2(z/2) &= \left(\frac{e^{iz/2}-e^{-iz/2}}{2i}\right)^2 \\
&= -\frac{e^{iz}-2+e^{-iz}}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}(1-\cos z)
\end{aligned}$$

$\square$

QUESTÃO 3:

a. *(1 ponto)* Dada $f(z) = \dfrac{3z-1}{3z+2}$, $z \neq -2/3$, calcule o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

Demonstração. Note que $f(z) = \dfrac{3z-1}{3z+2} = 1 - \dfrac{3}{3z+2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{3}{3z_0+3h+2} + \frac{3}{3z_0+2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{9}{(3z_0+3h+2)(3z_0+2)} \\
&= \frac{9}{(3z_0+2)^2}
\end{aligned}$$

□

b. *(1,5 ponto)* Determine o domínio de convergência da serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Demonstração. Pelo teste da razão,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{2n+1}(2n-1)!}{z^{2n-1}(2n+1)!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^2}{2n(2n+1)} \right| \\
&= 0 \ < 1
\end{aligned}$$

Logo a série é convergente em todo o plano complexo.

□

QUESTÃO 4:*(2,5 ponto)* Prove que em coordenadas polares as equações de Cauchy- Riemann, tem a forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

e a equação de Laplace tem a forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0$$

Demonstração. Temos $u(x,y) = u(r,\varphi)$ e $v(x,y) = v(r,\varphi)$, onde $x = r\cos\varphi$ e $y = r\operatorname{sen}\varphi$.

Diferenciando e aplicando as equações de Cuchy Rieman ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$), temos

$$\begin{aligned}
u_r &= u_x x_r + u_y y_r &, \qquad v_r &= v_x x_r + v_y y_r \\
u_r &= v_y \cos\varphi - v_x \operatorname{sen}\phi &, \qquad v_r &= -u_y \cos\varphi + u_x \operatorname{sen}\phi \\
u_r &= \frac{1}{r}\left(-v_x r \operatorname{sen}\varphi + v_y r\cos\varphi\right) &, \qquad v_r &= -\frac{1}{r}\left(-u_x r \operatorname{sen}\varphi + u_y r\cos\varphi\right) \\
u_r &= \frac{1}{r}\left(v_x x_\varphi + v_y y_\varphi\right) &, \qquad v_r &= -\frac{1}{r}\left(u_x x_\varphi + u_y y_\varphi\right) \\
u_r &= \frac{1}{r} v_\phi &, \qquad v_r &= -\frac{1}{r}\boldsymbol{u}_{\phi}
\end{aligned}$$

Das equações de Cauchy-Riemann em polares, temos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial^2 \phi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} = -\frac{\partial v}{\partial r} - r\frac{\partial^2 v}{\partial^2 r}$$

Igualando estas duas últimas equações, temos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = 0$$

□

QUESTÃO 5:*(2,5 ponto)* Utilize a fórmula integral de Cauchy para mostrar que se $f(z)$ é uma função inteira tal que

$$|f(z)| \leq |z|, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

então, $f(z)$ é uma função linear.

Demonstração. $f(z)$ é uma função inteira, então ela pode ser expressada em serie de potência,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k, \quad C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

e

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\, dw$$

com γ sendo um círculo de raio R e centro na origem.

Então,

$$\begin{aligned}
|C_k| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{f(w)}{w^{k+1}} \right| |\, dw| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|w|}{|w|^{k+1}} |\, dw| \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{R^{k-1}} d\varphi \\
&= \frac{1}{R^{k-1}}
\end{aligned}$$

Quando $R \to \infty$, temos que $C_k \to 0$, $\forall n \geq 2$. Então

$$f(z) = C_0 + C_1 z.$$

$\square$