EE521

Prof. Leonardo Mendes

P1 - Prova 1 - 03/10/07

Duração: 100 minutos

1. Três cargas elétricas +Q, -2Q e +Q são localizadas nos pontos (0,0, d/2), (0,0,0) e (0,0,-d/2), respectivamente. Encontre o potencial elétrico em todo o espaço para pontos em que R>>d segundo as seguintes considerações: (1) usando aproximação de 1ª. ordem, $(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cong 1-\frac{1}{2}x$; (2) usando aproximação de 2ª. ordem, $(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cong 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$. Qual dos resultados está correto? Explique.

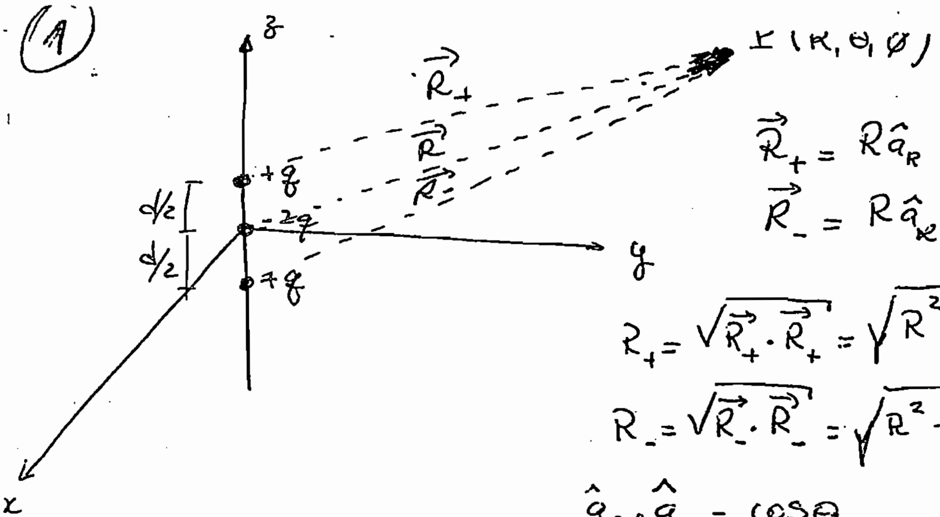
2. As seguintes distribuições cilíndricas de carga existem no espaço:

$$\rho_v = \rho_1 r \qquad a<r<b$$
$$\rho_s = -\rho_0 \qquad r=a$$
$$\rho_s = \rho_0 \qquad r=b$$

Calcule o campo elétrico e o potencial elétrico em todo o espaço. Calcule o valor de ρ_1 que anula o campo elétrico para $R>b$.

3. Seja um capacitor de placas paralelas, separadas por uma distância d, cujo núcleo esteja preenchido por duas camadas, também paralelas às placas, de material dielétrico. A primeira camada, com espessura igual a ω, é adjacente à placa positivamente carregada do capacitor e é composta por material de constante dielétrica igual a ε_r. A segunda camada possui constante dielétrica igual à do espaço livre e completa o preenchimento do núcleo do capacitor. Considere o capacitor submetido a um potencial V_0 e carregado com uma carga Q. Calcule o vetor densidade de fluxo elétrico e o campo elétrico no interior do capacitor. Calcule a capacitância do capacitor.

4. Responda às seguintes questões:
   (a) Quais são os postulados fundamentais da eletrostática?
   (b) Qual o valor do potencial coulombiano de uma carga localizada em um ponto arbitrário do espaço?
   (c) O que é carga de polarização?
   (d) Enuncie a "Lei de Gauss" para a eletrostática.



$$\vec{R}_+ = R\hat{a}_R - \frac{d}{2}\hat{a}_z$$

$$\vec{R}_- = R\hat{a}_R + \frac{d}{2}\hat{a}_z$$

$$R_+ = \sqrt{\vec{R}_+ \cdot \vec{R}_+} = \sqrt{R^2 - Rd\,\hat{a}_R \cdot \hat{a}_z + \frac{d^2}{4}}$$

$$R_- = \sqrt{\vec{R}_- \cdot \vec{R}_-} = \sqrt{R^2 + Rd\,\hat{a}_R \cdot \hat{a}_z + \frac{d^2}{4}}$$

$$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_z = \cos\theta$$

$$R_+ = R\left[1 - \frac{d}{R}\cos\theta + \frac{d^2}{4R^2}\right]^{1/2} \quad ; \quad R_- = R\left[1 + \frac{d}{R}\cos\theta + \frac{d^2}{4R^2}\right]^{1/2},$$

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_+} - \frac{2}{R} + \frac{1}{R_-}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left[\frac{R}{R_+} + \frac{R}{R_-} - 2\right]$$

$$\frac{R}{R_+} = \left[1 - \frac{d}{R}\cos\theta + \frac{d^2}{4R^2}\right]^{-1/2} \quad ; \quad \frac{R}{R_-} = \left[1 + \frac{d}{R}\cos\theta + \frac{d^2}{4R^2}\right]^{-1/2}$$

Aproximação de 1ª ordem:

(a) $$\frac{R}{R_+} \simeq 1 \mp \frac{d}{2R}\cos\theta \qquad \frac{R}{R_-} \simeq 1 \pm \frac{d}{2R}\cos\theta$$

OBS: Esta é a aproximação usada para obter-se o potencial do dipolo elétrico para campos distantes.

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left[1 - \frac{d}{2R}\cos\theta + 1 + \frac{d}{2R}\cos\theta - 2\right]$$

$$\therefore \boxed{V(R) = 0}$$

Esta solução não está errada; ela apenas indica que, em uma aproximação de 1ª ordem, o potencial do quadrupolo axial é nulo.

(b) Outra aproximação de 1ª ordem

$$\frac{R}{R_+} \simeq 1 \mp \frac{d}{2R}\cos\theta \pm \frac{d^2}{8R^2} \qquad \frac{R}{R_-} = 1 \pm \frac{d}{2R}\cos\theta \pm \frac{d^2}{8R^2}$$

$$\therefore V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\cdot\frac{d^2}{4R^2} = \frac{-qd^2}{16\pi\epsilon_0 R^3}$$

Pode-se supor inicialmente que esta solução seja correta pelo fato de se usar um refinamento na aproximação de 1ª ordem. No entanto, esta solução é "incorreta" pois o termo de 2ª ordem $\left(\left(\frac{d}{R}\right)^2\right)$, não possui coeficiente $\left(\frac{1}{4}\right)$ como suposto aqui. É necessário então buscar-se uma aproximação de 2ª ordem.

Aproximação de 2ª ordem:

Os termos $\frac{R}{R_+}$ e $\frac{R}{R_-}$ possuem a forma geral

$$f(x) = (1+x)^{-1/2}$$

Expansão em série:

$$f(x) = (1+x)^{-1/2} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-5/2}$$

Para $x_0 = 0$:

$$f(0) = 1 \; ; \quad f'(0) = -\frac{1}{2} \; ; \quad f''(0) = \frac{3}{4}$$

Para $x \ll 1$, desprezando-se os termos de ordem x^3 e superiores, teremos

$$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \qquad (\mathrm{I})$$

e

$$(1-x)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \qquad (\mathrm{II})$$

Então, teremos

$\frac{R}{R_-}$ é obtido de (I) com $x = \frac{d}{R}\cos\theta + \frac{d^2}{4R^2}$

$$\frac{R}{R_-} = \left[1 + \frac{d}{R}\cos\theta + \frac{d^2}{4R^2}\right]^{1/2} \simeq 1 - \frac{d}{2R}\cos\theta - \frac{d^2}{8R^2} + \frac{3}{8}\left[\frac{d}{R}\cos\theta + \frac{d^2}{4R^2}\right]^2 =$$

$$= 1 - \frac{d}{2R}\cos\theta - \frac{d^2}{8R^2} + \frac{3}{8}\cdot\left[\frac{d^2}{R^2}\cos^2\theta + \overbrace{\cancel{\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^3}\right)}}^{\simeq 0}\right]$$

$$= 1 - \frac{d}{2R}\cos\theta + \frac{d^2}{8R^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

e

$\frac{R}{R_+}$ é obtido de (II) com $x = \frac{d}{R}\cos\theta - \frac{d^2}{4R^2}$

$$\frac{R}{R_+} = \left[1 - \frac{d}{R}\cos\theta + \frac{d^2}{4R^2}\right]^{-1/2} = 1 + \frac{d}{2R}\cos\theta - \frac{d^2}{8R^2} + \frac{3}{8}\left[\frac{d}{R}\cos\theta - \frac{d^2}{4R^2}\right]^2$$

$$= 1 + \frac{d}{2R}\cos\theta - \frac{d^2}{8R^2} + \frac{3}{8}\left[\frac{d^2}{R^2}\cos^2\theta + \underbrace{\cancel{\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^3}\right)}}_{\approx 0}\right]$$

$$= 1 + \frac{d}{2R}\cos\theta + \frac{d^2}{8R^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

Assim,

$$\frac{R}{R_+} + \frac{R}{R_-} - 2 = \cancel{1} + \cancel{\frac{d}{2R}\cos\theta} + \frac{d^2}{8R^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cancel{1} \cancel{- \frac{d}{2R}\cos\theta} + \frac{d^2}{8R^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) - \cancel{2}$$

$$= \frac{d^2}{4R^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$$\boxed{V(R) = \frac{qd^2}{16\pi\epsilon_0 R^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

(2)

$$\oint \vec{D}\cdot\vec{ds} = q_{int}$$

$$\vec{D} = D_r\,\hat{a}_r$$

$$\vec{ds} = r\,d\phi\,dz\,\hat{a}_r$$

$$\vec{D}\cdot\vec{ds} = r D_r\,d\phi\,dz$$

$$\oint \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{L} r D_r\,d\phi\,dz = 2\pi r L D_r = q_{int}$$

Para a superfície Gaussiana:

$$\boxed{D_r = \frac{q_{int}}{2\pi r L}} \qquad E_r = \frac{q_{int}}{2\pi\epsilon_0 r L}$$

Campo Elétrico

(a) $r < a$

$$q_{int} = 0$$

$$D_r = 0$$

$$E_r = 0$$

$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

(b) $a < r < b$

$$q_{int} = q_{s'} + q_v$$

$$q_s = \int_{S'} \rho_s\,dS' = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}(-\rho_0)\,a\,d\phi\,dz = -2\pi a L\rho_0$$

$$q_v = \int_V \rho_v\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_a^{r}\rho_1 r\; r\,d\phi\,dz\,dr = 2\pi L\rho_1 \left.\frac{r^3}{3}\right|_a^r =$$

$$= \frac{2\pi L\rho_1}{3}\left(r^3 - a^3\right)$$

$$E_r = \frac{1}{\cancel{2\pi}\epsilon_0 r \cancel{L}}\left[-\cancel{2\pi} a \cancel{L}\rho_0 + \frac{\cancel{2\pi}\cancel{L}\rho_1}{3}\left(r^3 - a^3\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \hat{a}_r \cdot \frac{1}{\epsilon_0 r}\left[\frac{(r^3-a^3)\rho_1}{3} - a\rho_0\right]}$$

c) $r > b$

$$q_{s_a} = -2\pi a \rho_0$$

$$q_v = \frac{2\pi L \rho_1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$q_{s_0} = 2\pi b \rho_0$$

$$E_r = \frac{1}{\cancel{4}\pi\epsilon_0 r \cancel{L}}\left[-\cancel{2}\pi a \cancel{L}\rho_0 + \cancel{2}\pi b \cancel{L}\rho_0 + \frac{\cancel{2\pi L}\rho_1}{3}(b^3-a^3)\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \hat{a}_r \cdot \frac{1}{\epsilon_0 r}\left[\frac{\rho_1(b^3-a^3)}{3} + (b-a)\rho_0\right]}$$

Valor de ρ_1 que anula $\vec{E}$ para $r > b$:

$$\frac{\rho_1(b^3-a^3)}{3} + (b-a)\rho_0 = 0$$

$$\boxed{\rho_1 = -\frac{3(b-a)}{(b^3-a^3)}\rho_0}$$

<u>Potencial Elétrico</u>

$r > b$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{a}_r$$

(campo elétrico ~~potencial~~ de linha de cargas)

onde

$$\rho_\ell = 2\pi\left[\frac{\rho_1(b^3-a^3)}{3} + (b-a)\rho_0\right]$$

Potencial Elétrico

Seja $V_{ref} = V(r=0) = 0$ (7)

ⓐ $r<a$

$$V = -\int_0^r (\vec{E}\cdot d\vec{\ell}) = -V(r) - V(0) = 0$$

$\therefore$ $\boxed{V(r) = 0}$

ⓑ $a<r<b$

$$V - V_a = -\int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_a^r E_r\, dr$$

$$V - V_a = -\int_a^r \frac{1}{\epsilon_0 r}\left[\frac{(r^3 - a^3)\rho_1}{3} - a\rho_0\right] dr =$$

$$= \left[-\frac{\rho_1}{3\epsilon_0}\cdot\frac{r^3}{3} + \left(\frac{a^3\rho_1}{3\epsilon_0} + \frac{a\rho_0}{\epsilon_0}\right)\ln r\right]_a^r + \cancel{V(a)}^{=0}$$

$$\therefore \boxed{V(r) = -\frac{\rho_1(r^3 - a^3)}{9\epsilon_0} + \left(\frac{a^3\rho_1}{3\epsilon_0} + \frac{a\rho_0}{\epsilon_0}\right)\ln\left(\frac{r}{a}\right)}$$

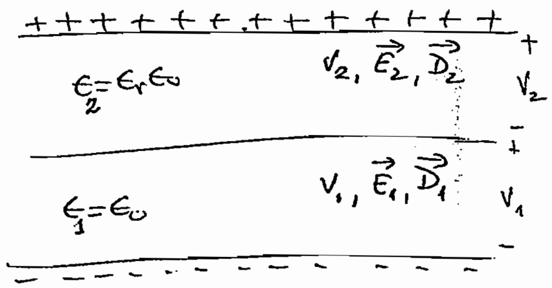
ⓒ Se $\vec{E} = 0$ p/ $r>b$

$$\boxed{V(r) = -\frac{\rho_1(b^3 - a^3)}{9\epsilon_0} + \left(\frac{a^3\rho_1}{3\epsilon_0} + \frac{a\rho_0}{\epsilon_0}\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = V(b)$$

Se $\vec{E} \neq 0$ p/ $r>b$ $\rightarrow$ = linha de cargas

$$\boxed{V(r) = V(b) + \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln r}$$

③



$$\rho_{s+} = \frac{Q}{S} \qquad \rho_{s-} = -\frac{Q}{S}$$

$$D_{1n} = +\rho_{s-} \qquad D_{2n} = +\rho_{s+}$$

$$\therefore \quad \vec{D}_1 = \rho_{s-}\,\hat{a}_y \qquad \vec{D}_2 = \rho_{s+}\,(-\hat{a}_y)$$

$$\boxed{\vec{D}_1 = -\frac{Q}{S}\,\hat{a}_y} \qquad \boxed{\vec{D}_2 = -\frac{Q}{S}\,\hat{a}_y}$$

$\vec{D}_1 = \vec{D}_2 \implies$ como se deveria esperar (pq?)

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_1} = -\frac{Q}{\epsilon_0 S}\,\hat{a}_y} \qquad \boxed{\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2} = \frac{-Q}{\epsilon_r \epsilon_0 S}\,\hat{a}_y}$$

$$V_1 = -\int_0^{d-w} \vec{E}_1 \cdot \vec{dl} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}(d-w)$$

$$\boxed{V_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 S}(d-w)}$$

$$V_2 = -\int_{d-w}^{d} \vec{E}_2 \cdot \vec{dl} = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 S} \cdot w$$

$$\boxed{V_2 = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 S}\, w}$$

$$V_0 = V_1 + V_2$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{Q}{V_1 + V_2}$$

$$\frac{1}{C'} = \frac{V_1 + V_2}{Q} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q} = \frac{d - w}{\epsilon_0 S} + \frac{w}{\epsilon_r \epsilon_0 S}$$

$$\frac{1}{C'} = \frac{(d - w) + w/\epsilon_r}{\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_r d - \epsilon_r w + w}{\epsilon_r \epsilon_0 S}$$

$$\boxed{C' = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{\epsilon_r d + (1 - \epsilon_r) w}}$$

(4)

(a)

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{ds} = q_{int} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

(b)

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$\vec{r} \rightarrow$ pto de observação

$\vec{r}' \rightarrow$ localização da carga

(c) É a distribuição de carga induzida em um meio dielétrico devido à aplicação de um campo elétrico externo.

$$\rho_s = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\rho_v = -\nabla \cdot \vec{P}$$

(d)

$$\boxed{\oint \vec{D} \cdot \vec{ds} = q_{int}}$$

$\vec{D}$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$