Questões	Valores	Notas
1.^{a}	3.0	
2.^{a}	3.0	
3.^{a}	4.0	
Total	10.0	

3^a Prova de MA141 — 21/06/2012 (NOITE)

Nome:____

RA:______________________Turma:______________________

ATENÇÃO: Será corrigida a redação da resposta. Cada resposta deve ser redigida com todos os detalhes. Caso duas ou mais provas apresentem alguma resposta cujas redações coincidam em mais de 50%, essa questão será **ZERADA** em todas elas. Não é permitido **DESTACAR** as folhas da prova.

(1) (3 pontos) Seja $\mathcal{C}$ a curva do plano constituída dos pontos que satisfazem a equação

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y = -4.$$

- (a) Encontre a forma canônica (ou reduzida) de $\mathcal{C}$.
- (b) Encontre as coordenadas do(s) foco(s) da curva $\mathcal{C}$ em relação ao sistema de eixos XY.
- (c) Esboce o desenho da curva $\mathcal{C}$ no sistema de eixos XY.

(2) (3 pontos)

- (a) Determine a equação da superfície cilíndrica com curva diretriz

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ z & = 0 \end{cases}$$

e vetor paralelo as retas geratrizes $W = (0, 2, -1)$.

- (b) Dada a equação da curva diretriz

$$\mathcal{C} = \begin{cases} y - x^2 & = 0 \\ z & = 2 \end{cases}$$

determine a equação da superfície cônica que tem vértice na origem $O = (0, 0, 0)$

- (c) Mostre que a equação $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ representa uma superfície de revolução e ache uma parametrização dela.

(3) (4 pontos)

- (a) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto $(1, 1)$ com $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.
- b) Determine as coordenadas cartesianas de todos os pontos que estão sobre uma reta paralela ao eixo polar a $\theta = \pi$ unidades dele.
- (c) Reescreva a equação $2\,x\,y = 25$ em coordenadas polares.
- (d) Reescreva a equação $r = 3\,\cos(\theta)$ em coordenadas cartesianas.

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

GABARITO

1) Seja $\mathcal{C}$ a curva do plano constituída dos pontos que satisfazem a equação

$$3x^2+3y^2+2xy+4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y=-4.$$

Construimos a matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

como $\det(A)=8>0$ concluimos que a cônica é uma elipse. Procuramos os autovalores da matriz, para isto determinamos os 0 de

$$f(x)=\det(A-xId)=\det\begin{pmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix}=x^2-6x+8$$

Donde $x=\frac{6\pm 2}{2}$, assim os autovalores serão $\lambda_1=4$ e $\lambda_2=2$.

Calculamos os autovetores: Para λ_1 temos que o autovetor será dado por um vetor unitario u_1 que é solução do sistema linear $(A-4Id)V=0$. Assim

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_1=_2 \Longrightarrow u_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Utilizando o fato de que u_2 é de u_1 trocando-se as componentes e depois o sinal da primeira componente temos que $u_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Portanto a mudança de coordenadas fica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y & = & \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

a) Para obter a forma canônica ou reduzida de $\mathcal{C}$ observamos que A equação da cónica transforma em

$$4(x')^2+2(y')^2+4\sqrt{2}\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)-4\sqrt{2}\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)=-4.$$

Simplificando

$$4(x')^2+2(y')^2-8y'=-4.$$

Completando quadrados

$$4(x')^2+2(y'-2)^2=-4+8=4 \Longrightarrow (x')^2+\frac{(y'-2)^2}{2}=1.$$

Fazendo uma nova mudança de variáveis $u=x'$ e $v=y'-2$ temos que a forma canônica de $\mathcal{C}$ é

$$u^2+\frac{v^2}{2}=1$$

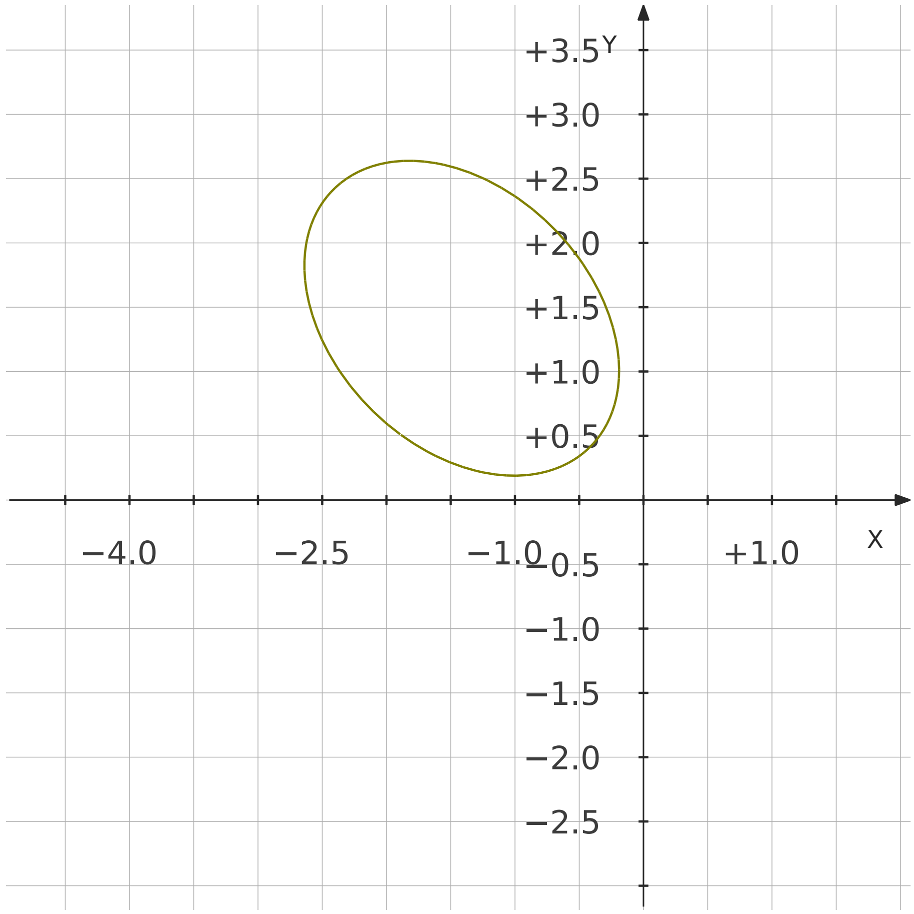
A mudança de variáveis de UV para XY é dada então por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v+2 \end{pmatrix}$$

b) Para obter os focos no sistema UV primeiramente obtemos $c^2=2-1=1$. Portanto os focos no sistema UV tem coordenadas $F_1=(0,1)$ e $F_2(0,-1)$ Portanto, no sistema de coordenadas XY

$$F_1: \quad =\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$F_2: \quad =\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$


Y
+3.5
+3.0
+2.5
+2.0
+1.5
+1.0
+0.5
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
X
−4.0
−2.5
−1.0
+1.0

(2) (a) Sabemos que a curva diretriz é

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ z & = 0 \end{cases}$$

e o vetor paralelo as retas geratrizes $W = (0, 2, -1)$. Portanto se $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ e $V = -W = (0, -2, 1)$ então a equação da superfície cilíndrica é

$$f(x, y + 2z) = 0 \implies x^2 - (y + 2z)^2 = 1$$

(b) Dada a equação da curva diretriz

$$\mathcal{C} = \begin{cases} y - x^2 & = 0 \\ z & = 2 \end{cases}$$

A superfície cônica que tem vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ é dada pela equação

$$f\left(\frac{2x}{z}, \frac{2y}{z}\right) = 0$$

para $f(x, y) = y - x^2$. Portanto a equação procurada é

$$2y = 4zx^2$$

(c) Se $f(x, z) = x^2 - z^3$ e um curva no plano x, z e o eixo de revolução é o eixo y então a superfície de revolução obtida de girar f em torno de y é descrita pela equação

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \implies x^2 + y^2 = z^3.$$

Donde segue que a equação representa uma superfície de revolução.
Para achar uma parametrização dela considere as coordenadas cilíndricas $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta),\ z$. Então substituindo por estas na equação obtemos que $r^2 - z^3 = 0$ donde $z = r^{2/3}$.
Então uma parametrização é

$$\begin{cases} x = & r\cos(\theta) \\ y = & r\sin(\theta) \\ z = & r^{2/3} \end{cases} \qquad r \in [0, \infty),\ \theta \in [0, 2\pi)$$

(3) (a) As coordenadas polares (r, θ) do ponto $(1, 1)$ são $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e θ tal que $\tan(\theta) = 1/1 = 1$ portanto $\theta = \pi/4$

(b) Um ponto (r, θ) que é paralelo ao eixo polar é escrito, em coordenadas polares, da forma $(r, 0)$ ou (r, π) com $r > 0$. Portanto se, $\theta = \pi$ temos que o ponto é de coordenadas polares (r, π) com $r > 0$ i.e. em coordenadas cartesianas $(x, 0)$ com $x < 0$.

(c) Reescrevemos a equação $2\,x\,y = 25$ em coordenadas polares substituindo $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$. Portanto

$$2r^2\cos\theta\sin(\theta) = 25 \ \equiv\ r^2\sin(2\theta) = 25$$

(d) Reescrevemos a equação $r = 3\,\cos(\theta)$ em coordenadas cartesianas utilizando as equivalências acima. Primeiramente multiplicamos a expresão por r e fica $r^2 = 3r\cos(\theta)$. Então a equação em coordenadas cartesianas é $x^2 + y^2 = 3x$