F 502 C – Eletromagnetismo I – 1º semestre de 2011 – Prova 1 – 13/04/2011

Nome:____ **RA:**_____________

Questão 1 – Mostre, **<u>usando o cálculo tensorial e a notação de Einstein</u>**, que:

(a) [0,5 ponto]: $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times\nabla f$

(b) [0,5 ponto]: $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

(c) [0,5 ponto]: $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(d) [1,0 ponto] Mostre que: $\int_S f(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{A}\times(\nabla f)]\cdot d\mathbf{a} + \oint_C f\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$

Questão 2 – **(a) [1,5 pontos]** Encontre o campo elétrico a uma distância z acima do centro de um disco circular plano de raio R (figura 1), que tem uma densidade de carga uniforme σ. **(b) [0,5 ponto]** O que a sua fórmula revela no limite $R\to\infty$? **(c) [0,5 ponto]** Verifique também o caso $z >> R$.

Questão 3 – Se o campo elétrico em uma região é dado (em coordenadas esféricas) pela seguinte expressão, onde A e B são constantes:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{A\,\hat{\mathbf{r}} + B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r}$$

(a) [1,5 ponto] Qual é a densidade de carga? **(b) [1,0 ponto]** Calcule a diferença de potencial entre os pontos **a** $(R, \pi/2, 0)$ e **b** $(R, \pi/2, \pi/2)$ sobre o equador de uma superfície esférica de raio R.

Questão 4 – Dentro de uma casca esférica condutora de espessura $(b - a)$, inicialmente neutra, é colocada uma carga puntiforme q (figura 2). **(a) [0,5 ponto]** Qual é o campo elétrico em $r > b$? **(b) [0,5 ponto]** Qual é o campo elétrico em $a < r < b$? **(c) [0,5 ponto]** Qual o potencial na superfície da esfera? **(d) [0,5 ponto]** E na casca $(a < r < b)$? **(e) [0,5 ponto]** Faça um esquema das linhas de campo no interior da cavidade. Que características estas linhas devem ter? Justifique todas as suas respostas.

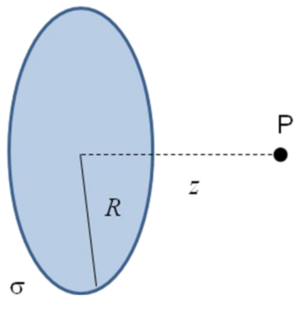


Figura 1. Questão 2.

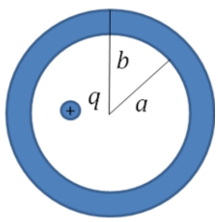


Figura 2. Questão 4.

Dados:

$$d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}. \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

$$d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} \;&=\; \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+\; \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}.$$

$$\iiint\limits_{V} (\nabla \cdot \mathbf{v})\, d\tau = \iint\limits_{\substack{\text{superfície} \\ \text{limitando} V}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\iint\limits_{S} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \oint\limits_{\substack{\text{Ao redor de} \\ S}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Questão 1

(a) $\nabla\times(f\vec{A}) = \varepsilon_{ijk}\hat{e}_i\partial_j fA_k \underset{\text{regra do produto}}{\longrightarrow}= \varepsilon_{ijk}\hat{e}_i\left[f\partial_j A_k + A_k\partial_j f\right]$

$= f\varepsilon_{ijk}\hat{e}_i\partial_j A_k - \underbrace{\varepsilon_{ikj}}_{\text{O sinal é trocado por que os índices são trocados para reproduzir o produto vetorial}}\hat{e}_i A_k\partial_j f$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\times(f\vec{A}) = f(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\times\nabla f}$$

(b) $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \varepsilon_{ijk}\hat{e}_i\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\hat{e}_i\partial_j\partial_l A_m$

$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\hat{e}_i\partial_j\partial_l A_m = \hat{e}_i\partial_j\partial_i A_j - \hat{e}_i\partial_j\partial_j A_i$

$= \hat{e}_i\partial_i(\partial_j A_j) - \partial_j\partial_j(A_i\hat{e}_i)$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}}$$

(c) $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \partial_i\varepsilon_{ijk}A_jB_k = \varepsilon_{ijk}\partial_i(A_jB_k)$

$\underset{\text{regra do produto}}{\longrightarrow}= \varepsilon_{ijk}A_j\partial_i B_k + \varepsilon_{ijk}B_k\partial_i A_j$

$= \underbrace{-\varepsilon_{jik}}_{\text{troca de índices}}A_j\partial_i B_k + \varepsilon_{kij}B_k\partial_i A_j$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = -\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})}$$

(d) Usando a identidade do item (a) e integrando sobre uma superfície aberta S:

$$\int_S[\nabla\times(f\vec{A})]\cdot d\vec{a} = \int_S f(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{a} - \int_S[\vec{A}\times\nabla f]\cdot d\vec{a}$$

$$\Rightarrow \int_S f(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{a} = \int_S[\vec{A}\times\nabla f]\cdot d\vec{a} + \int_S[\nabla\times(f\vec{A})]\cdot d\vec{a}$$

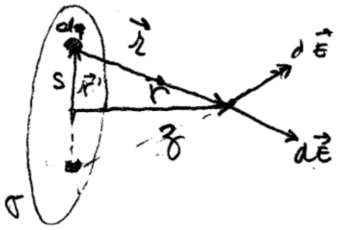
Aplicando o teorema de stokes ao segundo termo do lado direito

$$\boxed{\int_S f(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{a} = \int_S[\vec{A}\times\nabla f]\cdot d\vec{a} + \oint_C f\vec{A}\cdot d\vec{l}}$$

Questão 2

(a)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}^2}\,\hat{\mathscr{r}}\,da$$



Pela simetria do problema, somente a componente z contribui para o campo:

$$dE_z = d\vec{E}\cdot\hat{z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma}{\mathscr{r}^2}\frac{z}{\mathscr{r}}\,da$$

vetor de separação: $\mathscr{r} = \sqrt{|\vec{r}\,'|^2 + |\vec{r}|^2} = \sqrt{s^2+z^2}$

elemento de área: $da = s\,ds\,d\phi$

$$\Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{z}{\sqrt[3]{s^2+z^2}}\,s\,d\phi\,ds$$

Substituição:
$u = s^2+z^2$
$du = 2s\,ds$

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{s}{\sqrt[3]{s^2+z^2}}\,ds$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_{z^2}^{R^2+z^2}\frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right\}\hat{z}}\ ,\ z>0$$

(b) Para $R >> z$ $\quad \frac{1}{z} >> \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}}$, que é o campo gerado pela distribuição superficial infinita de cargas

(c) Para $z >> R$: $\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right\}\hat{z}$

Expandindo o segundo termo nas chaves:

$$\vec{E} \simeq \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2} + \cdots\right)\right\}\hat{z} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^3}\right]\hat{z}$$

$\Rightarrow \vec{E} \simeq \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^2}\hat{z}$ e se a carga total do disco é $q = \sigma\pi R^2$,

$\boxed{\vec{E} \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\hat{z}}$, que é o campo da carga puntiforme.

Questão 3

(a) Pela lei de Gauss:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

Em coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{A}{r} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{B \operatorname{sen}\theta \cos\phi}{r} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{A}{r^2} + \frac{B(-\operatorname{sen}\phi)}{r^2} \rightarrow \boxed{\rho = \varepsilon_0 \frac{(A - B\operatorname{sen}\phi)}{r^2}}$$

(b) A diferença de potencial entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é dada por

$$V = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

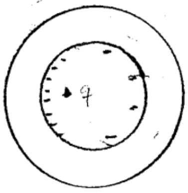
Como $\vec{a}$ e $\vec{b}$ estão sobre a superfície da esfera $r = R$ e como estão sobre o equador $\theta = \pi/2$, de forma que não há variação em r nem em θ e o melhor caminho para integração é o equador da esfera:

$$d\vec{\ell} = r \operatorname{sen}\theta \, d\phi \, \hat{\phi} = R \, d\phi \, \hat{\phi}$$

$$\therefore V = -\int_0^{\pi/2} \frac{B \cos\phi}{R} R \, d\phi = -B \operatorname{sen}\phi \Big|_0^{\pi/2} \Rightarrow \boxed{V = -B}$$

Questão 4

A carga q no interior do condutor induzirá uma carga total $-q$ na superfície da cavidade distribuída de forma que o campo elétrico no interior do condutor seja zero (lei de Gauss). Também pela lei de Gauss, para que o campo elétrico no interior do condutor seja zero, o excesso de cargas positivas deve se concentrar uniformemente pela superfície externa do condutor.



(a) Para $r > b$.

A carga total é q e como o excesso de cargas está distribuído uniformemente pela superfície externa, o campo é o mesmo que seria gerado por uma carga q colocada no centro da esfera.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

(b) Em $a < r < b$, $\vec{E} = 0$ (condutor)

(c) O potencial na superfície da esfera é constante:

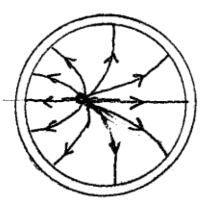
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \quad \text{(referencial no infinito)}$$

pelos motivos explicados no item (a).

(d) Em $a < r < b$, o potencial é o mesmo que na superfície

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \quad \text{(referencial no infinito)}$$

(e)



As linhas de campo devem ser radiais próximo à carga, perpendiculares próximo ao condutor e devem ser mais densas na região onde a carga está mais próxima da parede da cavidade.