# F 502 C – Eletromagnetismo I – 1º semestre de 2011 – Prova 4 – 29/06/2011

**Nome:**________________________________________________ **RA:**_____________

**Questão 1** – **[2,0 pontos]** Uma casca esférica de raio a perfeitamente condutora gira em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega$, em um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$. Calcule a fem desenvolvida entre o pólo norte e o equador.

**Questão 2** – Uma barra de metal de massa $m$ desliza sem atrito sobre dois trilhos condutores paralelos a uma distância $l$ um do outro (Figura 1). Um resistor $R$ está colocado entre os trilhos e um campo magnético uniforme $\mathbf{B}$, que aponta para dentro da página, preenche toda a região. **(a) [0,5 ponto]** Se a barra se move para a direita à velocidade $v$, qual é a corrente no resistor? Em que direção ela flui? **(b) [0,5 ponto]** Qual é a força magnética sobre a barra? Em que direção? **(c) [1,0 ponto]** Se a barra começar com velocidade $v_0$ no tempo $t$ = 0, e for deixada para deslizar, qual será a sua velocidade em um tempo posterior $t$? **(d) [0,5 ponto]** A energia cinética da barra era, é claro, $\frac{1}{2}mv_0^2$. Verifique se a energia fornecida ao resistor é exatamente $\frac{1}{2}mv_0^2$.

**Questão 3** – Fios finos são conectados ao centro das placas de um capacitor (Figura 2). A corrente $I$ é constante, o raio do capacitor é $a$, e a separação das placas é $w << a$. Assuma que a corrente flui sobre as placas de forma que a carga superficial seja uniforme, a qualquer dado tempo e que ela é nula em $t$=0. **(a) [1,0 ponto]** Encontre o campo elétrico entre as placas como função de $t$. **(b) [0,5 ponto]** Encontre a corrente de deslocamento através de um círculo de raio $s$ no plano que está a meio caminho entre as placas. **(c) [1,0 ponto]** Usando este círculo como a sua 'espira amperiana' e a superfície plana que ela abarca, encontre o campo magnético a uma distância s do eixo.

**Questão 4 – (a) [1,0 pontos]** Escreva e explique cada uma das equações de Maxwell no vácuo na sua forma local. **(b) [1,0 ponto]** Aplique os teoremas de Stokes e do Divergente e transforme as equações de Maxwell para a forma integral. **(c) [1,0 ponto]** Encontre as condições de contorno para as componentes do campo magnético nas proximidades de uma distribuição superficial de corrente $\mathbf{K}$.

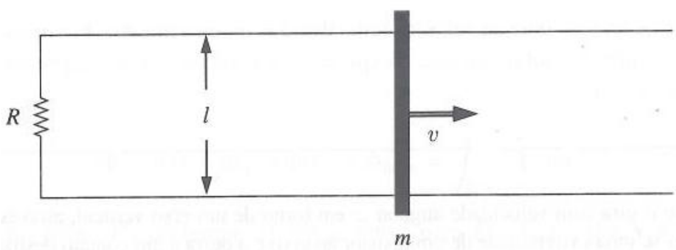



**Figura 1. Questão 2.**

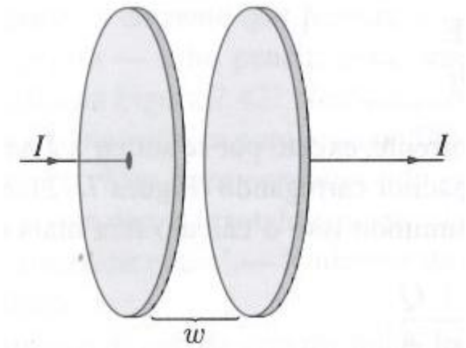



**Figura 2. Questão 3.**

**Dados:**

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s}\,\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial \phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}}. \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} \quad &= \quad \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \quad \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}.$$

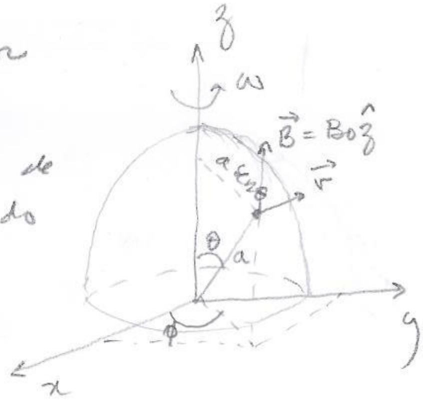
$$\varepsilon = \oint \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}$$

## Questão 01

A força eletromotriz é dada por

$$\mathcal{E} = \int \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

onde $\vec{f}$ é a força por unidade de carga. Como a esfera está girando em torno do eixo $z$, as cargas no material estarão sujeitas a uma força magnética por unidade de carga




$$\vec{f} = \vec{v} \times \vec{B}$$

A velocidade é dada por $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega \hat{z}) \times (a\,\mathrm{sen}\theta\,\hat{s})$

$$\Rightarrow \vec{v} = \omega a\,\mathrm{sen}\theta\,\hat{\phi}$$

A força por unidade de carga é

$$\vec{f} = \omega a B_0\,\mathrm{sen}\theta\,(\hat{\phi} \times \hat{z})$$

onde, $\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \mathrm{sen}\theta\,\hat{\theta} \Rightarrow f = \omega a B_0\,\mathrm{sen}\theta(\cos\theta\,\hat{\theta} + \mathrm{sen}\theta\,\hat{r})$

A integral de linha deve ser realizada ao longo de $dl_\theta = a\,d\theta$:

$$\mathcal{E} = \omega a^2 B_0 \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\theta\,(\cos\theta\,\hat{\theta} + \mathrm{sen}\theta\,\hat{r}) \cdot \hat{\theta}\,d\theta$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \omega a^2 B_0 \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\theta \cos\theta\,d\theta$$

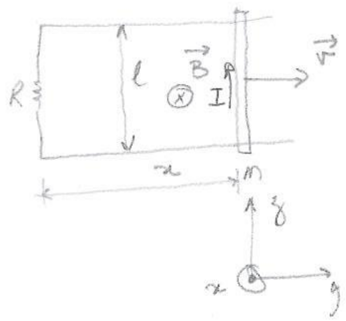
Fazendo $u = \mathrm{sen}\theta$ ; $du = \cos\theta\,d\theta$

$$\mathcal{E} = \omega a^2 B_0 \int_0^1 u\,du \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}\omega a^2 B_0}$$

# Questão 2

(a) Pela lei de fluxos:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt} B\int da$$




$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d}{dt} B.\ell.x \Rightarrow \underline{\mathcal{E} = -B\ell v}$$

A corrente será

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \boxed{I = \frac{B\ell v}{R}}$$

Pela lei de Lenz, como o fluxo está aumentando, a corrente induzida deverá gerar um fluxo de campo magnético saindo da página, logo o sentido da corrente é <u>anti-horário</u>.

(b) A Força sobre a barra é $\boxed{\vec{F}_m = I\vec{L}\times\vec{B} = -\frac{B^2\ell^2 v}{R}\hat{y}}$

(c) Aplicando a 2ª lei de Newton:

$$\vec{F}_m = -\frac{B^2\ell^2 v}{R}\hat{y} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\int_0^t dt \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v_0 e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\hat{y}}$$

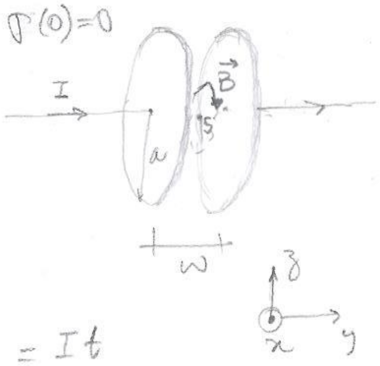
(d) A potência dissipada é $P = \frac{dW}{dt} = RI^2 = \frac{B^2\ell^2 v^2}{R}$

A energia fornecida ao resistor é

$$W = \int_0^{+\infty} \frac{dW}{dt}dt = \int_0^{+\infty} \frac{B^2\ell^2}{R}v^2\, dt = \frac{B^2\ell^2 v_0^2}{R}\int_0 e^{-\frac{2B^2\ell^2}{mR}t}dt$$

$$W = \frac{B^2\ell^2 v_0^2}{R}\cdot\left[-\frac{mR}{2B^2\ell^2}e^{-\frac{2B^2\ell^2}{mR}t}\right]\Bigg|_0^{+\infty} \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}mv_0^2}$$

# Questão 3




(a) O campo elétrico entre as placas do capacitor é

$$\vec{E} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\,\hat{y} = \frac{Q(t)}{A\varepsilon_0}\,\hat{y}$$

Como $I = \frac{dQ}{dt}$, $Q(t) = \int_0^t I\,dt = It$

Logo $\boxed{\vec{E}(t) = \frac{It}{\pi a^2 \varepsilon_0}\,\hat{y}}$

(b) $$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} = \frac{I}{\pi a^2}\,\hat{y}$$

$$I_d = \int \vec{J}_d \cdot d\vec{a} = \frac{I}{\pi a^2}\int_0^s 2\pi s\,ds \Rightarrow \boxed{I_d = I\frac{s^2}{a^2}}$$

(c) Só a corrente de deslocamento contribui para lei de Ampère-Maxwell:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_d \Rightarrow B(2\pi s) = \mu_0 I \frac{s^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\,\hat{\phi}}$$

Questão 4

(a) Equações de Maxwell:

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Lei de Gauss): O fluxo de campo elétrico saindo (ou entrando) em um volume, por unidade de volume, é proporcional à densidade de carga. Esta equação estabelece uma relação entre o campo elétrico e a carga elétrica, fonte de campo.

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Lei de Faraday): A densidade de circulação do campo elétrico, por unidade de área é proporcional à variação do campo magnético. Esta equação mostra como o campo elétrico surge a partir da variação do campo magnético.

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ : Esta equação reflete a ausência de uma carga magnética, fonte do campo magnético. Assim, o fluxo entrando (ou saindo) de qualquer volume é zero.

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Lei de Ampère - Maxwell):

A densidade de circulação, por unidade de área, é proporcional à densidade volumétrica de corrente e à variação do campo elétrico. Esta equação mostra como o campo magnético é gerado por correntes e pela variação do campo elétrico.

(b) Lei de Gauss:

Integrando no volume a lei de Gauss:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} \, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_V \rho \, d\tau}_{Q_{enc}} \xrightarrow[\text{do divergente}]{\text{teorema}} \boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

Da mesma forma para $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) \, d\tau = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Lei de Faraday:

Integrando a lei de Faraday em uma superfície:

$$\int_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{a} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a} \xrightarrow[\text{de Stokes}]{\text{teorema}} \boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}}$$

Lei de Ampère - Maxwell:

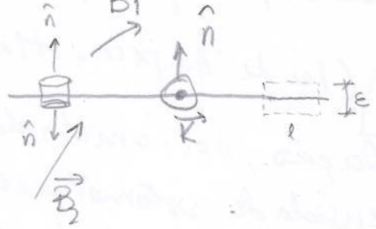
Integrando esta lei em uma superfície:

$$\int_S (\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{a} = \mu_0 \underbrace{\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a}}_{I_{enc}} + \mu_0\epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$$

teorema de Stokes $\Downarrow$

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{a}}$$

(c) Superfície em que flui uma corrente de densidade $\vec{K}$




Componente perpendicular:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow B_1^{\perp}\cdot A - B_2^{\perp}\cdot A = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_1^{\perp} = B_2^{\perp}}$$

Componente paralela:

Próximo à superfície $\epsilon \to 0$, o fluxo de campo elétrico também tende a zero, logo

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow B_1^{\parallel}\cdot l - B_2^{\parallel}\cdot l = K\cdot l$$

Para levar em conta o sentido da mudança:

$$\boxed{\vec{B}_1^{\parallel} - \vec{B}_2^{\parallel} = \vec{K}\times\hat{n}}$$