MC548: Projeto e Análise de Algoritmos II

Prof. Cid C. de Souza – 1ª Prova – (04/04/2011)

Nome:

RA: **Turma:**

Observação: o peso das questões será decidido pelo docente da seguinte forma: as duas questões que você responder melhor terão peso 3 e as demais terão peso 2. Portanto, uma mesma questão pode ter peso 2 para um aluno e peso 3 para um outro aluno.

Questão	frac	Peso	Nota
1			
2			
3			
4			
Total		10,0	

Instruções:

1. A duração da prova é de 110 minutos.
2. Nenhum aluno poderá sair da sala antes de terem sido transcorridos 60 minutos de prova.
3. O aluno que sair de sala antes do término da prova deve entregá-la em definitivo.
4. Coloque o seu nome, RA e turma em **no alto desta página e em todas as folhas de resposta**.
5. Não é permitido usar qualquer material de consulta.
6. **Questões mal justificadas serão consideradas erradas !**
7. Use as folhas de papel almaço entregues pelo docente para responder às questões da prova.
8. A prova pode ser feita a lápis porém, nesse caso, fica a critério do docente aceitar eventuais pedidos de revisão de nota.
9. O uso de calculadoras ou quaisquer outros equipamentos eletrônicos, **inclusive celulares**, está proibido durante a prova.
10. Não desgrampeie o caderno de questões.

1. Considere os seguintes problemas:

Unicidade: (UNIC) dada uma seqüência de n números $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, existem dois elementos em S que tenham o mesmo valor ?

Par mais próximo: (CLOSE) dada uma seqüência de n números $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, encontre os dois elementos mais próximos de S, ou seja, os elementos x_i e x_j tais que $|x_i - x_j|$ seja mínimo.

Denotemos por SORT o problema de ordenar um vetor de n números. Sabe-se que SORT tem cota inferior $\Omega(n \log n)$ em um dado modelo de computação $\mathcal{M}$. Responda aos itens a seguir:

(a) Faça uma redução do problema UNIC ao problema SORT que tenha tempo linear em n.

(b) Considere a seguinte afirmativa: *"A redução feita no item (a) garante que, no modelo de computação $\mathcal{M}$, a cota inferior do problema UNIC é $\Omega(n \log n)$."*

Diga se a afirmativa é falsa ou verdadeira. Se for falsa, explique o que você pode concluir da redução feita no item (a). Se for verdadeira, explique como você chegou a essa conclusão.

(c) Suponha que seja provado que o problema UNIC tem uma cota inferior $\Omega(n \log n)$ no modelo $\mathcal{M}$. Mostre que essa cota inferior também é válida para o problema CLOSE. Seja **extremamente** cuidadoso com a sua argumentação.

2. Considere o seguinte problema: são dados um grafo direcionado $G = (V, E)$, sendo $|V| = n$ e $|E| = m$, com um vértice especial v e um custo $c(u) \geq 0$ para cada vértice u de V. Suponha que o custo de um caminho direcionado representado pela seqüência de vértices $\{v, x_1, x_2, \ldots, x_k, u\}$ é dado por $\sum_{i=1}^{k} c(x_i)$. Ou seja, o custo de um caminho é a soma do custo dos seus vértices internos. Assim, se (v, u) é um arco do grafo, o custo deste caminho é *zero*.
O objetivo deste problema, aqui denotado por P, é encontrar um caminho de menor custo entre v e todos os vértices de $V \setminus \{v\}$.
Nessa questão você deve projetar um algoritmo de complexidade polinomial para P usando uma redução que envolva o problema clássico do caminho mais curto em grafos com custos nas arestas (visto em disciplinas anteriores).
Em sua resposta, você deve explicar cuidadosamente como fez a redução e dar a sua complexidade em função de n e m. Ou seja, espera-se que você descreva com um bom nível de detalhes os procedimentos envolvidos na redução e suas complexidades.

Nota 1: se você usar um dos algoritmos de caminhos mais curtos vistos em disciplinas anteriores, não é preciso descrevê-lo. Limite-se apenas a dar o nome do algoritmo e a sua complexidade.

Nota 2: embora não seja mandatório, sugere-se **fortemente** que você dê um pequeno exemplo de uma instância de entrada do problema P para ajudar na explicação de como você fez a redução.

3. Considere o PL abaixo, o qual será chamado de PL **original** no restante dessa questão:

$$
\begin{array}{llcccr}
\min & -3x_1 & -5x_2 & & & \\
\text{s.a} & x_1 & & \leq & 4 \\
 & & x_2 & \leq & 6 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & \geq & 18 \\
 & x_1 & ,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Responda aos itens abaixo:

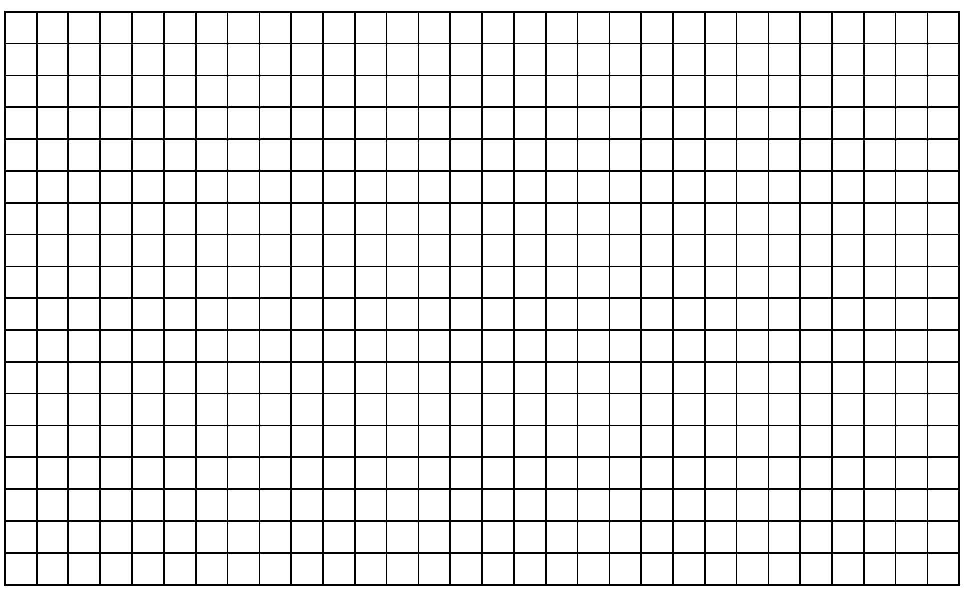
(a) Coloque esse problema na forma canônica (conforme definida em *aula* !) de **maximização**.

(b) Escreva o PL do item (a) na forma relaxada inicial e mostre que a solução básica correspondente não é viável.

(c) A partir do PL do item (a), escreva o PL **auxiliar** que deve ser resolvido na FASE 1 (INITIALIZE-SIMPLEX) na forma relaxada inicial.

(d) Usando o procedimento INITIALIZE-SIMPLEX visto em aula, obtenha uma solução **viável** para o PL **auxiliar** do item anterior. Explique cuidadosamente como você obteve essa solução.

(e) Faça um gráfico que represente o conjunto de soluções viáveis do PL **original** no espaço das variáveis x_1 e x_2. Indique claramente na figura o ponto extremo ótimo. Use o reticulado abaixo para fazer o seu gráfico.



(f) Denote por x_3, x_4 e x_5 as variáveis de folga da primeira, segunda e terceira restrições do PL obtido no item (a) (problema de maximização na forma canônica). Construa a forma relaxada do PL correspondente à base obtida ao se escolher as variáveis x_3 e x_5 como sendo **não** básicas. Indique claramente o ponto extremo correspondente a essa solução na figura do item anterior.

(g) Partindo da forma relaxada do item anterior e analisando a figura do item (e), faça um **único** pivoteamento e mostre a nova forma relaxada que corresponde a uma solução ótima. Qual o valor ótimo do problema ?

(h) Escreva o problema dual do PL do item (a), explique cuidadosamente como obter os valores das variáveis duais de uma solução ótima desse problema e use o *Teorema da Dualidade Forte* e os resultados do item anterior para confirmar que, de fato, a solução que você obteve é ótima para o problema dual (deixe explícito onde você usou o teorema).

4. Sir Francis Drake operando sob a bandeira da Rainha Elizabeth da Inglaterra capturou e destruiu a cidade de Porto Bello no istmo do Panamá em 1572. Como resultado dessa vitória, assumiu o controle de 62000 `up` (unidades de peso) de ornamentos de prata, 44000 `up` de jóias de ouro e 21000 `up` de jóias de pedras preciosas. Seu único navio de carga tem três conveses: anterior, central e posterior, com as seguintes capacidades máximas de peso e volume dadas, respectivamente, em `up` e `uv` (unidades de volume):

convés	peso	volume
anterior	19800	1100
central	30000	1340
posterior	16200	480

Com o empacotamento necessário, a prata ocupará 0.06 `uv/up` no cargueiro. O ouro necessitará de 0.052 `uv/up` e as jóias de pedras preciosas 0.024 `uv/up` no espaço do navio. O peso de cada convés deve ser proporcional à sua capacidade máxima de peso, de forma a garantir o equilíbrio do navio e, portanto, uma navegação segura. O valor da prata é de 24 `um/up`, o do ouro é de 32 `um/up` e o das jóias de pedras preciosas é de 19 `um/up` (`um` é a unidade monetária). O problema que deve ser resolvido por Sir Francis é: *quanto deve ser carregado de cada produto e quanto deve ser distribuído entre os conveses do navio de forma a maximizar o lucro da Coroa Britânica ?*

Formule este problema usando Programação Linear (PL). Para tanto, responda os itens abaixo:

(a) diga quais são as variáveis do seu modelo.

(b) escreva a função objetivo do problema.

(c) liste todas as restrições do modelo explicando resumidamente o significado de cada uma delas.