EA721A - Princípios de Controle e Servomecanismos
Segundo Semestre de 2009 - Prova 3 - Prof. Paulo Valente

RA: **Assinatura** (como no RG):
Nome Legível:

Antes de começar a resolver a prova, atente para o seguinte:

- **Resoluções**. Na resolução das questões a seguir é **absolutamente imprescindível**, para fins de correção, que todos os resultados e afirmações estejam devidamente justificadas.

- **Esboço do Lugar das Raízes**. O esboço do LR deve incluir os pólos e zeros de malha aberta, os pontos e direções associadas a $k = 0$ e $k \to \infty$, assíntotas (valores dos ângulos e ponto de intersecção), localização e sentidos dos ramos, ângulos de partida e chegada, pontos de cruzamento com o eixo imaginário e de entrada e/ou saída no eixo real.

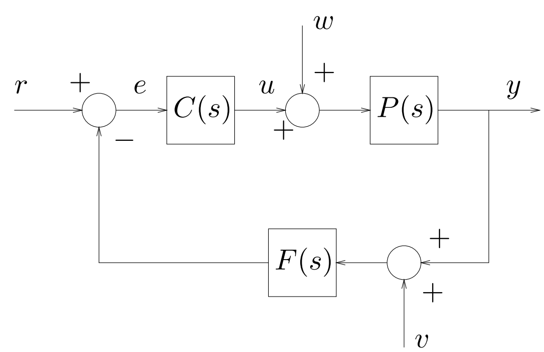

Figura 1: Sistema de controle em malha fechada.

Questão 1 (2,5 pt). Considere o sistema de controle em malha fechada da Figura 1 com $C(s) = k_c$, $P(s) = (s+1)/[s(s-3)]$ e $F(s) = 1$.

(1,5 pt) Esboce o Lugar das Raízes do sistema de controle em malha fechada em função de $0 \leq k_c < \infty$.

(1,0 pt) Determine os valores de k_c para os quais as raízes são complexas conjugadas com partes reais estritamente negativas.

Questão 2 (2,5 pt). Considere o sistema de controle em malha fechada da Figura 1 com $C(s) = k_c$, $P(s) = 2/[s(s+1)]$ e $F(s) = 1$.

a) (1,5 pt) Determine k_c para que a margem de fase do sistema de controle seja exatamente igual a 45^o.

b) (1,0 pt) Justifique uma possível desvantagem na utilização do controlador proporcional (estático) em detrimento de um controlador dinâmico para a finalidade descrita no item a).

Questão 3 (2,5 pt). A Tabela 1 apresenta as respostas em frequência de uma planta de segunda ordem de fase mínima $P(s)$ e de um compensador $C(s)$ associado em série com $P(s)$ com vistas a atingir especificações sobre margens de fase e de ganho de um sistema de controle com realimentação unitária. **Importante**. Ao recorrer à tabela, utilize sempre os valores numéricos mais próximos dos valores teóricos procurados.

a) (0,5 pt) A resposta em frequência de $C(s)$ corresponde a que tipo de compensador (proporcional, avanço, atraso, nenhum dos anteriores)?

b) (1,0 pt) Determine as margens de fase e de ganho do sistema não compensado (correspondente ao ganho de malha $G_1(s) = kP(s)$, onde k é o ganho DC introduzido pelo compensador). O sistema não compensado é estável?

c) (1,0 pt) Determine as margens de fase e de ganho do sistema compensado. Com quantos graus o compensador contribui (positiva ou negativamente) para a margem de fase do sistema?

Questão 4 (1,0 pt). Considere o sistema em malha aberta $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, no qual

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Existem valores de α, β e γ tais que o sistema não é **controlável**? Excetuando-se $\alpha = \beta = \gamma = 0$, existem conjuntos de valores de α, β e γ para os quais o sistema não é **observável**?

Questão 5 (1,5 pt). Considere o sistema em malha aberta

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Projete um controlador por realimentação de estados tal que o erro de regime do sistema em malha fechada para entradas constantes seja nulo. A ordem do sistema em malha fechada deve ser a menor possível e todos os pólos devem ser alocados em -3. Justifique a escolha do esquema de realimentação de estados.

Tabela 1. Respostas em frequencia de $P(s)$ e $C(s)$, Questão 3.

ω(rad/s)	$\mid P(j\omega) \mid$ (dB)	$\angle P(j\omega)$(Gr)	$\mid C(j\omega) \mid$ (dB)	$\angle C(j\omega)$(Gr)
0,0100	46,0205	-90,2865	20,0000	0,0991
0,0127	43,9691	-90,3628	20,0000	0,1255
0,0160	41,9178	-90,4594	20,0001	0,1590
0,0203	39,8663	-90,5818	20,0001	0,2013
0,0257	37,8148	-90,7368	20,0001	0,2549
0,0326	35,7630	-90,9330	20,0002	0,3228
0,0412	33,7111	-91,1815	20,0004	0,4088
0,0522	31,6587	-91,4960	20,0006	0,5177
0,0661	29,6056	-91,8943	20,0009	0,6556
0,0838	27,5514	-92,3984	20,0015	0,8302
0,1061	25,4956	-93,0362	20,0024	1,0512
0,1343	23,4369	-93,8428	20,0038	1,3311
0,1701	21,3739	-94,8620	20,0061	1,6852
0,2154	19,3038	-96,1483	20,0098	2,1333
0,2728	17,2226	-97,7681	20,0157	2,6999
0,3455	15,1237	-99,8014	20,0251	3,4157
0,4375	12,9970	-102,3404	20,0402	4,3187
0,5541	10,8276	-105,4854	20,0643	5,4552
0,7017	8,5934	-109,3335	20,1026	6,8804
0,8886	6,2638	-113,9561	20,1632	8,6573
1,1253	3,8004	-119,3651	20,2585	10,8523
1,4251	1,1604	-125,4718	20,4066	13,5258
1,8047	-1,6946	-132,0619	20,6327	16,7113
2,2855	-4,7872	-138,8110	20,9695	20,3847
2,8943	-8,1156	-145,3547	21,4536	24,4219
3,6652	-11,6548	-151,3802	22,1177	28,5653
4,6416	-15,3651	-156,6894	22,9785	32,4252
5,8780	-19,2038	-161,2091	24,0242	35,5401
7,4438	-23,1333	-164,9609	25,2100	37,4843
9,4267	-27,1244	-168,0215	26,4649	37,9744
11,9378	-31,1559	-170,4892	27,7042	36,9375
15,1178	-35,2136	-172,4638	28,8463	34,5272
19,1448	-39,2880	-174,0361	29,8285	31,0889
24,2446	-43,3729	-175,2842	30,6177	27,0749
30,7029	-47,4644	-176,2730	31,2137	22,9312
38,8816	-51,5600	-177,0554	31,6401	19,0035
49,2388	-55,6583	-177,6740	31,9327	15,4986
62,3551	-59,7581	-178,1629	32,1272	12,4995
78,9652	-63,8590	-178,5491	32,2536	10,0051
100,0000	-67,9605	-178,8542	32,3346	7,9691

Dados

1. **Função de Transferência de Fase Mínima**. Uma função de transferência é de fase mínima se, à exceção de pólos em $s = 0$, todos os zeros e pólos da função têm partes reais negativas.

2. **Lugar das Raízes**. Considere

$$1 + kG(s) = 1 + k\frac{N(s)}{D(s)} = 1 + k\frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = 0, \quad k > 0.$$

   (a) Magnitude e fase: $|kG(s)| = 1, \quad \angle G(s) = 180^o \times r, r = \pm 1, \pm 3, \ldots$.

   (b) Ângulos e Interseção de Assíntotas:

$$\theta = \frac{180^o r}{n - m}, r = \pm 1, \pm 3, \ldots, \quad \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m}.$$

   (c) Ângulos de partida e chegada: satisfazem

$$\sum_{j=1}^{m} \phi_{z_j} - \sum_{i=1}^{n} \phi_{p_i} = 180^o r, r = \pm 1, \pm 3, \ldots,$$

   onde ϕ_{z_j} (ϕ_{p_i}) são os ângulos entre os zeros (pólos) de $G(s)$ e o ponto de interesse.

   (d) Pontos de entrada e saída no eixo real: entre as raízes de $D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = 0$.

   (e) Pontos de cruzamento com o eixo imaginário devem ser determinados por meio do Critério de Routh-Hurwitz.

3. **Compensação Avanço**: $C(s) = k_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$, $T > 0$, $0 < \alpha < 1$

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}, \quad 20 \log \left| \frac{jT\omega + 1}{j\alpha T\omega + 1} \right|_{\omega = \omega_m} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

4. **Compensação Atraso**: $C(s) = k_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$, $T > 0$, $\beta > 1$

$$20 \log \left| \frac{jT\omega + 1}{j\beta T\omega + 1} \right| = -20 \log \beta \qquad (\omega >> 1/T).$$

5. **Matrizes de Controlabilidade e Observabilidade**.

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

6. **Formas Canônicas**.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s_{+}^{n-1} \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Controlável

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \cdots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} x + b_n u$$

Observável

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x + b_n u$$

7. **Controle por Realimentação de Estados com Ação Proporcional**

$$u = -Kx + k_1 r = -\widetilde{K}x + k_1(r - x_1), \quad y = x_1.$$

8. **Controle por Realimentação de Estados com Ação Integral**

$$u = -Kx + K_I \xi, \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r.$$

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em

Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em branco, Em