1) ______
2) ______
3) ______
4) ______
Nota: ______

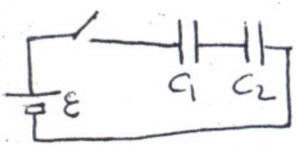
F 328: Segunda Prova
Diurno/ 2S - 20/10/2010

RA: XX **Nome:** GABARITO **Turma:** X

Questão 01

Dois capacitores, de capacitâncias $C_1 = 3{,}0\,\mu F$ e $C_2 = 6{,}0\,\mu F$, estão ligados em série a uma bateria de 6 V. Os capacitores são cuidadosamente desligados, **sem perder carga**, e **ligados em paralelo**, com as placas positivas ligadas entre si e as placas negativas também ligadas entre si. Calcular:

a) A diferença de potencial entre as placas e a carga acumulada em cada capacitor antes de serem ligados em paralelo; (0,5 ponto)
b) A diferença de potencial entre as placas de cada capacitor depois de serem ligados em paralelo; (1,0 ponto)
c) A energia armazenada em cada capacitor quando eles estão ligados em paralelo; (0,5 ponto)
d) A perda de energia ao serem ligados em paralelo? Justifique.(0,5 ponto)



$q = CV \rightarrow$ série $q_{c_1} = q_{c_2} = q = C_{eq} V$

$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{3 \times 6}{3+6}\,\mu F \Rightarrow C_{eq} = 2\,\mu F$

$\boxed{q = 2\,\mu F \times 6\,V = 12\,\mu C}$

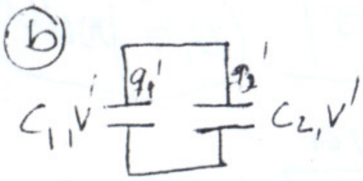
$\boxed{q_1 = q_2 = 12\,\mu C}$

$V_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{12\,\mu C}{3\,\mu F} = 4\,V \rightarrow \boxed{V_{c_1} = 4{,}0\,V}$

$V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{12\,\mu C}{6\,\mu F} = 2\,V \rightarrow \boxed{V_{c_2} = 2{,}0\,V}$

0,5 ponto

(b)



$q_1' + q_2' = 2q = 24\,\mu C$

0,5 ponto

$q_1' = C_1 V'$
$q_2' = C_2 V'$ $\Rightarrow (C_1 + C_2) V' = 2q$

$\boxed{V' = \frac{2q}{C_1 + C_2} = \frac{24\,\mu C}{(3+6)\,\mu F} = \frac{24}{9}\,V = \frac{8}{3}\,V}$

0,5 ponto

1,0 ponto

$$q_1' = C_1 V' = 3\times10^{-6} \times \frac{8}{3} C = 8\mu C$$

$$q_2' = C_2 V' = 6\times10^{-6} \frac{8}{3} = 16\mu C$$

$$\boxed{q_1' = 8\mu C} \text{ e } \boxed{q_2' = 16\mu C}$$

(c) $U_i = \frac{1}{2} C_i V'^2$

$$U_1 = \frac{1}{2}\, 3{,}0\times10^{-6}\mu F \left(\frac{8}{3}\right)^2 V^2 = \frac{32}{3}\times10^{-6} J$$

$$\boxed{U_1 = \frac{32}{3}\mu J}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\, 6{.}0\times10^{-6} \times \left(\frac{8}{3}\right)^2 V^2 = \frac{64}{3}\times10^{-6} J$$

$$\boxed{U_2 = \frac{64}{3}\mu J}$$

0,5 ponto

(d) $U_{antes} = U_{1,antes} + U_{2,antes} = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2$

$$= \left(\frac{1}{2}\, 3\times10^{-6}\times16 + \frac{1}{2}\, 6\times10^{-6}\times4\right) J$$

$$\boxed{U_{antes} = 36\mu J}$$

$$U_{depois} = \frac{32}{3}\mu J + \frac{64}{3}\mu J = \frac{96}{3}\mu J = 32\mu J$$

$$\boxed{\Delta U = U_{depois} - U_{antes} = -4\mu J}$$

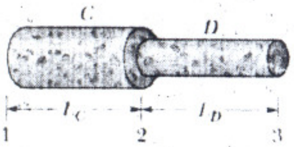
0,5 ponto

Perda de $4\mu J$ de energia

Questão 02

Os fios C e D são feitos de materiais diferentes e tem comprimentos l iguais de $1{,}00m$. As resistividades e diâmetros dos fios são respectivamente, $\rho_c = 2{,}0\times10^{-6}\,\Omega\cdot m$, $d_c = 1{,}0\,mm$, $\rho_d = 1{,}0\times10^{-6}\,\Omega\cdot m$ e $d_d = 0{,}5\,mm$. Os fios são unidos na forma mostrada pela figura abaixo e submetidos a uma corrente de $i = 2{,}00\,A$. Determine:

a) a diferença de potencial elétrico em cada fio; (0,5 ponto)
b) o campo elétrico em cada fio; (1,0 ponto)
c) a densidade de corrente elétrica em cada fio; (0,5 ponto)
d) calcule a razão das potências dissipadas nos dois fios. (0,5 ponto)



(a) $\boxed{V = RI}$ $\boxed{R = \rho\, \ell/A}$

$V_C = \rho_C \cdot \ell/A_C \cdot I$

$V_C = 2{,}0\times10^{-6}\,\Omega\cdot m \times 1{,}0\,m \times 2{,}0\,A/\pi\,(0{,}5\times10^{-3})^2\,m^2$

$\boxed{V_C = \frac{16}{\pi}\,V}$

0,5 ponto

$V_d = 1{,}0\times10^{-6}\,\Omega\cdot m \times 1{,}0\,m \times 2{,}0\,A/\pi\,(0{,}25\times10^{-3})^2\,m^2$

$\boxed{V_d = \frac{32}{\pi}\,V}$

(b) 1,0 ponto

$E_\ell = -\frac{\partial V}{\partial \ell} \rightarrow$

$E_C = V_C/1{,}0\,m = \frac{16}{\pi}\,V/m$ 0,5 ponto

$E_d = V_d/1{,}0\,m = \frac{32}{\pi}\,V/m$ 0,5 ponto

(c) 0,5 ponto

$I = J\cdot A \rightarrow J_C = 2{,}0\,A/[\pi\,(0{,}5\times10^{-3})^2]\,m^2$

$\boxed{J_C = \frac{8}{\pi}\times10^{6}\,A/m^2}$

$\boxed{J_d = \frac{32}{\pi}\times10^{6}\,A/m^2}$

0,5 ponto

(d) 0,5 ponto

$\boxed{P = RI^2}$ $P_C = R_C I^2$; $P_d = R_d I^2$

$$\frac{P_C}{P_d} = \frac{R_C}{R_d} = \frac{\rho_C\,\ell/A_C}{\rho_d\,\ell/A_d} = \frac{\rho_C A_d}{\rho_d A_C} = \frac{2\times10^{-6}\,\Omega\cdot m\cdot\pi\left(\frac{1}{4}\times10^{-3}\right)^2}{1\times10^{-6}\,\Omega\cdot m\;\pi\left(\frac{1}{2}\times10^{-3}\right)^2}$$

$\boxed{\frac{P_C}{P_d} = \frac{1}{2}} \rightarrow$ ou $\boxed{P_C = \frac{1}{2}P_d}$ 0,5 ponto

Questão 03

Na figura abaixo temos um circuito formado por duas baterias, dois resistores, um capacitor e uma chave S. Inicialmente a chave S está aberta por um tempo muito longo.

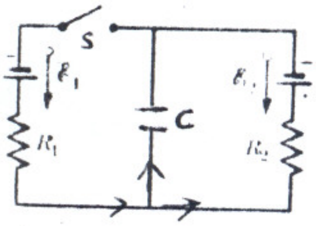
a) Nesta situação determine a carga no capacitor C; (0,5 ponto)

A chave S é então fechada e mantida assim por muito tempo, determine:

b) As correntes nos resistores R_1 e R_2; (0,5 ponto)

c) A diferença de potencial entre as placas do capacitor; (1,0 ponto)

d) Qual a mudança de cargas nas placas do Capacitor . (0,5 ponto)



(a) $\boxed{q = CV} \Rightarrow \boxed{q = C\,\varepsilon_2}$ 0,5 ponto

chave é então fechado por longo tempo.

(b) Não há corrente em $\underline{\underline{C}}$. logo

$$\varepsilon_1 - R_1 i - R_2 i - \varepsilon_2 = 0 \longrightarrow \boxed{i = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2}}$$ 0,5 ponto

(c)

$$V_C = \varepsilon_1 - R_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} \quad \text{ou}$$

$$V_C = \varepsilon_2 + R_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{V_C = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}}$$ 1,0 ponto

(d)

$$q_{final,C} = C \cdot V_C = C \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 R_2}$$

$$\Delta q = q_{final} - q_{inicial}$$

$$q_{antes,C} = C\,\varepsilon_2$$

$$\Delta q = C\left[\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}\right] = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) R_2 C}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{\Delta q = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\, C}$$ 0,5 ponto

Questão 04

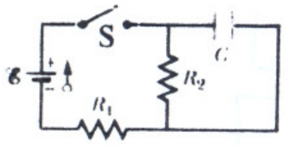
Considere no circuito mostrado na figura abaixo, *fem* da bateria igual 120 V, $R_1 = 1{,}2M\Omega$, $R_2 = 600k\Omega$ e $C = 2{,}5\,\mu F$. Determine:

a) A corrente que passa pela bateria imediatamente após a chave ser fechada; (0,5 ponto)

b) As correntes nos resistores para um tempo muito longo; (0,5 ponto)

c) A tensão entre os terminais do capacitor para um tempo muito longo; (0,5 ponto)

d) A corrente que passa pela bateria em função do tempo após a chave ser fechada. (1,0 ponto)



$t = 0^+$

(a) $\boxed{i_{R_2} = 0A}$, $i_{bat} = \boxed{i_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{R1}}$ (0,5 ponto)

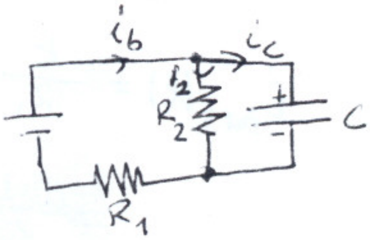
(b) $t \to \infty \Rightarrow$ C está carregado $\Rightarrow$

$$\boxed{i_{bat} = i_c = i_{R_1} = i_{R_2} = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}}$$ (0,5 ponto)

(c) $t \to \infty \quad V_C = R_2 i_2 = R_2 \cdot \dfrac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$

$$\boxed{V_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\varepsilon}$$ (0,5 ponto)

(d) $i_{bat} = ?$



$i_{bat} = i + i_C \quad (1)$

$\varepsilon - R_2 i_2 - R_1 i_b = 0 \quad (2)$

$-\dfrac{q}{C} + R_2 i_2 = 0 \quad (3)$ $\qquad i_c = \dfrac{dq}{dt}$

subst. (1) em (2) temos

$\varepsilon - R_1(i_2 + i_c) - R_2 i_2 = 0$

$\varepsilon - (R_1 + R_2) i_2 - R_1 i_c = 0 \quad (4)$

Substituindo (3) em (4) temos

$$\varepsilon - (R_1+R_2)\frac{q}{R_2 C} - R_1 i_c = 0$$

logo

$$R_1 \frac{dq}{dt} + \frac{R_1+R_2}{R_2 C} q - \varepsilon = 0$$

0,5 pontos

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} q = \frac{\varepsilon}{R_1}}$$

$$t \to \infty \Rightarrow \frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{q_\infty = \frac{R_2 \varepsilon C}{R_1+R_2}}$$

$$\boxed{q(t) = q_\infty\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C}t}\right)}$$

$$i_c(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\cancel{R_2}\, \varepsilon \cancel{C}}{\cancel{R_1+R_2}} \cdot \frac{\cancel{R_1+R_2}}{R_1 \cancel{R_2} \cancel{C}} e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{R_1 R_2 C}}$$

$$\boxed{i_c(t) = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C}t}} \quad C$$

0,5 pontos

$$i_{bat}(t) = i_2(t) + i_c(t)$$

$$i_2(t) = \frac{q(t)}{R_2 C} = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2}\left[1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C}t}\right]$$

$$i_{bat}(t) = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C}t} + \frac{\varepsilon}{R_1+R_2} - \frac{\varepsilon}{R_1+R_2} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C}t}$$

$$= \frac{1}{R_1+R_2}\varepsilon + \frac{\varepsilon R_2}{(R_1+R_2)R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C}t}$$

$$\boxed{i_{bat}(t) = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2} + \frac{R_2 \varepsilon}{(R_1+R_2)R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C}t}}$$