# ME-210 Probabilidade I

## Lista 1

**1.** Quantas placas de carro podem ser feitas se, ao invés de utilizar 3 letras e 4 números, forem utilizados 2 letras seguidas de 4 números? E se nenhuma letra ou número possa se repetir?

**2.** Quantos anagramas (combinações de letras) podem ser criados com as letras das palavras:

**(a)** LISTA

**(b)** MATEMÁTICA

**3.** Considere um grupo de 5 pessoas. Se todos apertam as mãos, quantos apertos de mão teremos?
Neste grupo há 3 mulheres e 2 homens. As mulheres se beijam entre si com 3 beijos, homens não se beijam e mulheres e homens trocam somente 1 beijo. Quantos beijos teremos nos cumprimentos?

**4.** De quantas maneiras 3 livros de matemática, 4 livros de física e 1 dicionario podem ser colocados na prateleira, se

**(a)** os livros de matemática tem que ficar junto;

**(b)** o dicionario tem que separar os livros de matemática dos livros de física?

**5.** De quantas maneiras podemos fazer um arranjo de $n$ bolinhas, das quais $r$ são brancas e $n-r$ verdes (bolinhas da mesma cor são indistinguiveis)?

**6.** Mostre que

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}.$$

Dica: considere o grupo de $n$ homens e $m$ mulheres. Quantos grupos de tamanho $r$ existem? Suponha-se que $\binom{n}{k} = 0$, se $k > n$.

**7.** Expanda as expressões: $(3x^2+y)^5$, $(x_1+2x_2+3x_3)^4$. Suponha que você precisa expandir a expressão $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^6$. Quantos termos haverá na somatória?

**8.** Mostre que

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0.$$

# ME-210: Resolução da Lista 01

Resolução extra-oficial feita por um dos monitores

Questão 1:

- $26^2 10^4$;
- $26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

Questão 2:

**a.** Já que a palavra não tem nenhuma letra repetida, temos:

$$N = 5!$$

**b.** Se desconsiderarmos o acento na letra A, teremos duas letras M, duas letras T e três letras A. Assim, o número de anagramas é dado por:

$$N = \frac{10!}{3!2!2!}$$

Caso consideremos Á como sendo diferente de A, teremos apenas duas letras A. Assim, o número de anagramas é dado por:

$$N = \frac{10!}{2!2!2!}$$

Questão 3:

- **Apertos de mão:**

  O número total de apertos de mão é dado pelo número de pares que podemos formar entre as pessoas. Desta maneira, se tivermos $n$ pessoas, o número total de apertos de mão será dado por:

  $$N = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

  Para o caso em que há 5 pessoas, temos:

  $$N = \frac{5(5-1)}{2} \Longrightarrow N = 10$$

- **Beijos:**

  Para obter o total de beijos nos cumprimentos ($N$), devemos considerar separadamente os casos de cumprimentos entre duas mulheres (totalizando $N_m$ beijos), entre dois homens (totalizando $N_h$ beijos) ou entre um homem e uma mulher (totalizando $N_{hm}$ beijos). Consideremos

o caso geral em que temos $H$ homens e $M$ mulheres.
Quando dois homens se cumprimentam, não há beijos. Assim:

$$N_h = 0$$

Quando duas mulheres se cumprimentam, elas se beijam três vezes. Então, o número total de beijos é dado pelo número de cumprimentos entre mulheres multiplicado por 3:

$$N_m = 3 \times \frac{M(M-1)}{2}$$

Quando um homem e uma mulher se cumprimentam, eles trocam apenas um beijo. Então, o número total de beijos é dado pelo número de cumprimentos entre homens e mulheres. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, pensando no primeiro experimento como sendo escolher um dentre os $H$ homens e no segundo experimento como sendo escolher uma dentre as $M$ mulheres, obtemos:

$$N_{hm} = HM$$

Desta maneira, o total de beijos nos cumprimentos será dado por:

$$N = N_h + N_m + N_{hm} = 3 \times \frac{M(M-1)}{2} + HM$$

Fazendo $H = 2$ e $M = 3$, obtemos a resposta desejada:

$$N = 3 \times \frac{3(3-1)}{2} + 2 \times 3 \Longrightarrow N = 15$$

Questão 4:

**a.** Já que os livros de matemática devem ficar juntos, vamos considerá-los como sendo um objeto único. Podemos permutar os livros de matemática entre si de 3! maneiras e podemos permutar o grupo dos livros de matemática com os outros livros de 6! maneiras, o que resulta em

$$N = 6!3! = 4320$$

arranjos possíveis.

**b.** Neste caso, podemos pensar em dois grupos: o grupo 1, formado pelos livros de matemática; e o grupo 2, formado pelos livros de física. Estes dois grupos devem ser separados pelo dicionário, de modo que sua posição fica determinada quando escolhemos as posições para os dois grupos. Podemos arranjar os livros de matemática de 3! maneiras e os livros de física, de 4! maneiras. Além disso, podemos trocar os dois grupos de posição entre si, o que se dá de 2! maneiras. Assim, o número de arranjos possíveis é

$$N = 3!4!2! = 288$$

Questão 5:

O número de arranjos possíveis equivale a escolher das $n$ posições aquelas nas quais colocaremos as $r$ bolinhas brancas. Ao fazermos isso, as posições das bolinhas verdes já ficam especificadas. Logo, o número de arranjos possíveis é dado por

$$N = \binom{n}{r}$$

Analogamente, poderíamos escolher as posições para as $n - r$ bolinhas verdes e, assim, as posições das bolinhas brancas já seriam determinadas. Este raciocínio nos levaria a

$$N = \binom{n}{n-r}$$

Os dois resultados obtidos acima são idênticos, já que

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{n-r}$$

Questão 6:

Vamos demonstrar a igualdade de duas maneiras:

- **Considerações combinatórias:**

$$\binom{n+m}{r}$$

corresponde a escolher $r$ objetos de um grupo de $n+m$ objetos. Podemos dividir esse grupo em dois outros menores: o grupo 1, com n objetos; e o grupo 2, com m objetos. Cada escolha de $r$ objetos corresponde a escolher $k$ objetos do grupo 1 e $r-k$ objetos do grupo 2, com $k \in [0, r]$ ($k \in \mathbb{N}$).

Para cada escolha de $k$ objetos do grupo 1, temos

$$\binom{m}{r-k}$$

escolhas possíveis no grupo 2. Como há

$$\binom{n}{k}$$

escolhas possiveis no grupo 1, o Princípio Básico da Contagem nos fornece que, para um dado valor de $k$, há

$$\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

escolhas possíveis. Fazendo $k$ variar de 0 a $r$, temos que o número total de escolhas possíveis é

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

.

Assim, obtemos a relação desejada

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}$$

Se $r$ é maior que $n$ ou $m$, os coeficientes binomiais em que ocorre $\binom{a}{b}$ com $b > a$ são nulos, correspondendo à situação de que não há como escolher um conjunto com mais elementos do que o próprio grupo do qual se quer escolher o conjunto. Desta maneira, estes termos não contribuem no resultado do somatório.

- **Indução em $r$:** Podemos tomar como base da indução o caso $r = 1$. A validade da igualdade para o caso $r \leq 0$ é bastante clara levando em conta a definição de

$$\binom{a}{b} = 0$$

para $b < 0$ ou $b > a$. De fato, para o caso $r = 1$, podemos ver que

$$\binom{n+m}{1} = \frac{(n+m)!}{1!(n+m-1)!} = n+m$$

e

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \binom{m}{1-k} = \binom{n}{0} \binom{m}{1} + \binom{n}{1} \binom{m}{0} = m+n$$

A hipótese de indução é

$$\binom{n+m}{r-1} = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \binom{m}{r-1-k}$$

Usando a relação de Stiffel, temos

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n+m-1}{r} + \binom{n+m-1}{r-1}$$

Fazendo $q = m - 1$ e $r = p - 1$, obtemos

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n+q}{p-1} + \binom{n+q}{r-1}$$

que, pela hipótese de indução, pode ser escrito como

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \binom{q}{p-1-k} + \sum_{t=0}^{r-1} \binom{n}{t} \binom{q}{r-1-t}$$

Voltando a $m$ e $r$

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{m-1}{r-k} + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \binom{m-1}{r-1-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \left[ \binom{n}{k} \binom{m-1}{r-k} + \binom{n}{k} \binom{m-1}{r-1-k} \right] + \binom{n}{r} \binom{m-1}{0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \left[ \binom{m-1}{r-k} + \binom{m-1}{r-1-k} \right] + \binom{n}{r} * 1$$

Usando novamente a relação de Stiffel e substituindo 1 por $\binom{m}{0}$, obtemos

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} + \binom{n}{r} \binom{m}{0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}$$

como queríamos demosntrar.

Questão 7:

- $(3x^2+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (3x^2)^{5-k} y^k = \binom{5}{0} y^5 + \binom{5}{1} (3x^2)^1 y^4 + \binom{5}{2} (3x^2)^2 y^3 + \binom{5}{3} (3x^2)^3 y^2 + \binom{5}{4} (3x^2)^4 y^1 + \binom{5}{5} (3x^2)^5 = y^5 + 15x^2y^4 + 90x^4y^3 + 270x^6y^2 + 405x^8y + 243x^{10}$

- $(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^4 = \sum_{n_1+n_2+n_3=4} \binom{4}{n_1, n_2, n_3} x_1^{n_1} (2x_2)^{n_2} (3x_3)^{n_3}$

- Número de termos de $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^6 = \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$

Questão 8:

Vamos manipular a expressão do somatório para que possamos utilizar o Teorema Bionomial. Podemos escrever que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (1)^{n-i} \binom{n}{i}$$

Pelo Teorema Binomial, isso equivale a

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = (1 + (-1))^n = 0^n = 0$$

o que conclui a demonstração.