2,5 pts. Questão 1:

(a) Gráfico do parabolóide $y = x^2 + z^2,\ x^2 + z^2 \leqslant 1.$ 0,5 pts.

(b) $$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\|\, dudv = \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{4u^2+1}\, dudv}_{1{,}0\text{ pts.}} = \underbrace{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).}_{1{,}0\text{ pts.}}$$

2,5 pts. Questão 2:

Considere $S_1 = D = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \leqslant 4\}$ e $E = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0\}$. Pelo Teorema da Divergência,

$$\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot d\overline{S} + \int\int_{S_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overline{S} = \int\int\int_E div\,\overrightarrow{F}\,dV.$$

Como $div\,\overrightarrow{F} = 0$, resulta

$$\underbrace{\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot d\overline{S} = -\int\int_{S_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overline{S}}_{1{,}5\text{ pts.}} = \underbrace{-\int\int_{S_1} \overrightarrow{F}\cdot(-\overrightarrow{k})\, d\overrightarrow{S} = \int\int_D 5\, dA = 20\pi.}_{1{,}0\text{ pts.}}$$

2,5 pts. Questão 3:

Seja $g(x,y) = y+3$. A orientação da superfície S, que possui C como fronteira, é dada pela normal

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}}(-g_x,-g_y,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1).$$

Como $rot\,\overrightarrow{F} = (-2,3,5)$, pelo Teorema de Stokes,

$$\underbrace{\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_S rot\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\, dS}_{1{,}5\text{ pts.}} = \underbrace{\int\int_S \sqrt{2}\, dS = 2\pi.}_{1{,}0\text{ pts.}}$$

2,5 pts. Questão 4:

A fronteira da superfície S é dada por $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, sendo $C_1 : \overrightarrow{r}(t) = (t, 1-t, 0)$, $C_2 : \overrightarrow{r}(t) = (1-t, 0, t)$ e $C_3 : \overrightarrow{r}(t) = (0, t, 1-t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Pelo Teorema de Stokes,

$$\underbrace{\int\int_S rot\,\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}}_{1{,}5\text{ pts.}} = \underbrace{\int_0^1 t-(1-t)\, dt + \int_0^1 -(1-t)\, dt + \int_0^1 t\, dt = 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.}_{1{,}0\text{ pts.}}$$