Turma:

MA 141 Geometria analítica

Segundo Semestre de 2008

Turma Especial - Segunda Prova - 01/10/2008

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Q 1	
Q 2	
Q 3	
Q 4	
Q 5	
T o t a l	

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

Questão 1 (1 ponto cada item)
Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Ache a matriz inversa de M.

(ii) Resolva o sistema linear

$$MX = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Solução: A matriz inversa pode ser encontrada aplicando o método de Gauss-Jordan à matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Portanto

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema linear do item (ii) é dada por:

$$X = M^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Questão 2 (2 pontos)

Considere o vetor $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e o plano $\pi : \; x + y - z + 1 = 0$. Decomponha $\vec{v}$ como soma de dois vetores, $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, onde $\vec{u}$ é perpendicular ao plano π e $\vec{w}$ é paralelo ao plano π.

Solução:

O vetor normal ao plano π é $\vec{n} = (1, 1, -1)$. O vetor $\vec{u}$ será a projeção ortogonal de $\vec{v}$ na direção de $\vec{n}$ e o vetor $\vec{w}$´será dado pela diferença $\vec{v} - \vec{u}$.

$$\vec{v} = \mathrm{proj}_{\vec{n}}\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||}\vec{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{n} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Segue portanto que

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Questão 3 (0,5 ponto cada item)

Verdadeiro ou Falso? Justifique a sua resposta.

(i) Se A e B são matrizes $n \times n$ equivalentes por linhas, então $\det(A) = \det(B)$;

(ii) Se A é uma matriz quadrada tal que $A^2 = 0$ então $A = 0$;

(iii) Os planos $2x + y + z = 1$, $x + 3y + z = 2$ e $x + y + 4z = 3$ se interceptam em um único ponto;

(iv) As retas dadas por $(x, y, z) = (1, 2, -1) + t(5, 0, -3)$ e $(x, y, z) = (0, 1, 1) + s(4, 1, 2)$ são reversas.

Solução:

(i) Falso

(ii) Falso

(iii) Verdadeiro

(iv) Verdadeiro

Questão 4 (1 ponto cada item)
Considere os planos $\alpha : x - y + z - 3 = 0$ e $\beta : 2m^2x - (m+1)y + 2z = 0$.

(i) Determine m para que os planos α e β sejam paralelos;

(ii) para $m = -1$ encontre a equação da reta interseção entre α e β.

Solução:
Os planos são paralelos se os seus vetores diretores são paralelos; portanto

$$\lambda = 2 \quad , \quad \lambda = 2m^2 \ \text{ e } \ \lambda = m + 1 \ .$$

Segue que $m = 1$.
Para $m = -1$, temos que encontrar a solução geral so seguinte sistema de duas equações com três incógnitas:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

A solução geral é $x = -z$ e $y = -3$. Note ainda que o ponto $(0, -3, 0)$ pertence a interseção dos planos. Portanto a equação da reta $\alpha \cap \beta$ é $(x, y, z) = (0, -3, 0) + t \cdot (1, 0, -1)$.

Questão 5 (0,5 ponto cada item)
Dado o elipsóide $E : x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2x - 8y - 6z + 1 = 0$, encontre:

(i) o seu centro;

(ii) os pontos de interseção de E com a reta $r : (x = 1 \text{ e } z = 2)$

(iii) a equação da elipse determinada pela interseção de E com o plano xy;

(iv) o centro e os focos de tal elipse.

Solução:
Primeiramente, note que a equação de E pode ser reescrita como:

$$(x-1)^2 + 4(y-1)^2 + 3(z-1)^2 = 7$$

Portanto o centro do elipsóide é o ponto $(1, 1, 1)$.
Fazendo $x = 1$ e $z = 2$ na equação acima obtemos $4(y-1)^2 = 4$. Segue que $y = 0$ ou $y = 2$, portanto os pontos de interseção são $(1, 0, 2)$ e $(1, 2, 2)$.
Fazendo $z = 0$ na equação acima obtemos $(x-1)^2+4(y-1)^2 = 4$. Esta elipse é centrada no ponto $(1, 1, 0)$; segue ainda que $a = 2$, $b = 1$, portanto $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ é metade da distância entre os focos. Assim, os focos são $(1 - \sqrt{3}, 1)$ e $(1 + \sqrt{3}, 1)$.