3ª PROVA DE MA311 – 26/06/09 – VESPERTINO

1. (*1.5 pontos*)

   (a) (1.0) Encontre o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\, 3^n}(x+2)^n$. Não esqueça de testar os extremos do intervalo, se for o caso.

   (b) (0.5) Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

2. (*2.0 pontos*) Resolva a equação diferencial

$$(4 - x^2)y'' + 2y = 0 \quad y(0) = 2 \;\; y'(0) = 3$$

   através de uma série de potências em torno do ponto $x = 0$. Encontre a relação de recorrência e as duas soluções linearmente independentes indicando o termo geral de cada solução.

3. (*2.0 pontos*) Considere a equação diferencial $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$. Responda as seguintes questões:

   (a) Escreva a forma geral da solução em séries de potências em torno do ponto $x = 2$.

   (b) Qual é o raio mínimo de convergência da série de potências em (a)?

   (c) Escreva a forma geral da solução em série de Frobenius em torno do ponto $x = 0$.

   (d) Qual é o raio mínimo de convergência da série de Frobenius em (c)?

4. (*2.5 pontos*)

   (a) (1.5) Encontre a série de Fourier de cosenos da extensão par da função

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1, \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

   (b) (1.0) Utilize a parte (a) para encontrar a soma de $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(\pi k)^2}\right)(1 - \cos k\pi)$. Justifique via o teorema de convergência de Fourier em $x = 1$. (Dica: Considere o coeficiente de Fourier a_n no caso par $n = 2k$ e no caso ímpar $n = 2k + 1$)

5. (*2.0 pontos*) Resolva o seguinte problema usando o método de separação de variáveis justificando detalhadamente TODA a análise:

$$\begin{cases} -2tu_x = 3x^2u_t \\ u(x, 0) = -e^{2x^3} + 2e^{-x^3}. \end{cases}$$

1a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n\,3^n}(x+2)^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x+2|^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}}\,\frac{n\,3^n}{|x+2|^n} = \frac{|x+2|}{3}\,\frac{1}{1+1/n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x+2|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n} = \frac{|x+2|}{3}$$

$L = \frac{|x+2|}{3} < 1 \iff |x+2| < 3$, $r = 3$ é o raio de convergência

0,6

$x = -2-r = -5$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\,3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, série harmônica

0,2

$x = -2+r = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\,3^n}3^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge pelo critério para séries alternadas

0,2

$I = (-5, 1]$ é o intervalo de convergência

1b) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x = -t^2$

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n} \quad , \forall\ t\in\mathbb{R}$$

0,2

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{2n}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\Bigg|_{t=0}^{t=x}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$$

para $\forall\ x\in\mathbb{R}$

0,3

2) $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \; , \quad y' = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} \; , \quad y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$

$$0 = (4-x^2)y'' + 2y = \sum_{m=2}^{\infty} 4m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)a_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} 2a_m x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} 4(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m - \quad '' \quad + \quad ''$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left[4(m+2)(m+1)a_{m+2} - m(m-1)a_m + 2a_m\right] x^m$$

0,5

$$0 = 4(m+2)(m+1)a_{m+2} - a_m[m(m-1)-2] = 4(m+2)(m+1)a_{m+2} - a_m(m-2)(m+1) \; , \quad m \geq 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_{m+2} = \frac{m-2}{4(m+2)} a_m \; , \quad m \geq 0}$$

0,5

$\underline{m=0}$: $a_2 = -\frac{a_0}{4}$

$\underline{m=1}$; $a_3 = -\frac{1 \cdot a_1}{4 \cdot 3}$

$\underline{m=2}$: $a_4 = 0$

$\underline{m=3}$: $a_5 = \frac{1 a_3}{4 \cdot 5} = -\frac{a_1}{4^2 \cdot 3 \cdot 5}$

$\underline{m=4}$: $a_6 = 0 =$

$\underline{m=5}$: $a_7 = \frac{3 a_5}{4 \cdot 7} = -\frac{3 \cdot a_1}{4^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$

$\underline{m=6}$; $a_8 = 0$

$\underline{m=7}$: $a_9 = \frac{5 a_7}{4 \cdot 9} = -\frac{3 \cdot 5 \; a_1}{4^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$

0,2

$$a_{2m+1} = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m-3)}{4^m \cdot [3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)]} a_1 = -\frac{a_1}{4^m (2m-1)(2m+1)} \; , m \geq 0$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{4} \; , \quad a_{2m} = 0 \text{ para } m \geq 2$$

0,5

$$y = \underset{\substack{\| \\ 2}}{a_0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)}_{y_1(x)} + \underset{\substack{\| \\ 3}}{a_1} \underbrace{\left(x - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{4^m (2m-1)(2m+1)}\right)}_{y_2(x)}$$

0,3

$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{4^2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^7}{4^3 \cdot 5 \cdot 7} - \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{240} - \frac{x^7}{2.240} - \cdots$$

3a) $P(x) = 2x^2$, $P(2) \neq 0 \Rightarrow x=2$ é ponto ordinário

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-2)^m$$

0,5

b) $x_1 = 2$ é ponto ordinário
$x_2 = 0$ é o único ponto singular da equação.

$r = |x_2 - x_1| = |0-2| = 2$ é o raio mínimo da solução.

0,5

c) $P(x) = 2x^2$, $Q(x) = 3x$, $R(x) = 2x^2 - 1$
$P(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ é ponto singular

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \lim_{x\to 0} \frac{Q(x)}{P(x)} x = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2x^2} x = \frac{3}{2} \\ q_0 &= \lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{P(x)} x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2-1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=0 \text{ é um ponto singular regular}$$

$$0 = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r^2 + \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \quad (\text{equação indicial}) \Rightarrow \begin{cases} r = 1/2 \\ \text{ou} \\ r = -1 \end{cases}$$

$$y(x) = C_1 x^{1/2}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m\right) + C_2 x^{-1}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m\right), \quad x > 0.$$

0,5

d) ρ_1 = raio da série de Taylor de $\frac{Q(x)}{P(x)} x = \frac{3}{2}$ em torno de $x = 0$.

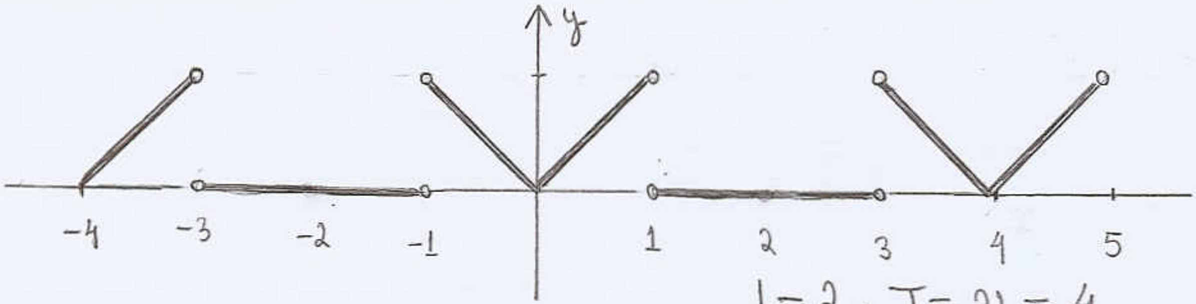
ρ_2 = raio da série de Taylor de $\frac{R(x)}{P(x)} x^2 = x^2 - \frac{1}{2}$ em torno de $x = 0$.

$\rho_1 = +\infty$, $\rho_2 = +\infty$

$\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} = +\infty$ é o raio mínimo

0,5

4a)



$L=2\,,\ T=2L=4$

$b_m = 0\,,\ \forall\ m \geq 1$ pois a extensão de f é uma função par

0,5

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$m \geq 1,\ a_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_0^1 x\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx$$

$$\int x\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx = \frac{2x}{m\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \frac{4}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$$

0,7

$$a_m = \frac{2}{m\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \frac{4}{m^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - 1\right)$$

A série de Fourier é dada por

0,3

$$\frac{1}{4} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{2}{m\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \frac{4}{m^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - 1\right)\right]\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$$

4b) O Teorema de Fourier diz que a série de Fourier de $f(x)$ em $x=1$ converge para $\frac{1}{2}\left(f(1+) + f(1-)\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$

0,2

$m = 2k+1\,,\ x = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) = \cos\left(k\pi + \pi/2\right) = 0\,,\ \forall\ k \geq 0$

$m = 2k \Rightarrow \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \mathrm{sen}(k\pi) = 0\,,\ \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$

0,4

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2}\left(\cos k\pi - 1\right)\cos k\pi = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos k\pi}{(\pi k)^2}$$

$$\frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2}\left(1 - \cos k\pi\right)$$

0,4

5) (1) $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$u_x = X' \cdot T \quad , \quad u_t = X \cdot T'$

$(1) \Rightarrow -2t X' \cdot T = 3x^2 X \cdot T' \Rightarrow \frac{X'}{3x^2 X} = -\frac{T'}{2tT}, \forall x,t$

Então existe uma constante $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{X'}{3x^2 X} = -\frac{T'}{2tT} = \sigma \quad \forall x, \forall t$$

(1) $X' - 3x^2 \sigma X = 0$

(2) $T' + 2t\sigma T = 0$

0,5

$$\frac{X'}{X} = 3x^2\sigma \Rightarrow \ln X = \int 3x^2 \sigma \, dx = x^3\sigma + C_1$$

$$\boxed{X = C_2 e^{\sigma x^3}}$$

0,3

$$\frac{T'}{T} = -2t\sigma \Rightarrow \ln T = \int -2t\sigma \, dt = -t^2\sigma + C_3$$

$$\boxed{T = C_4 e^{-\sigma t^2}}$$

0,3

$$u(x,t) = C e^{\sigma(x^3 - t^2)}$$

0,2

$$u(x,t) = k_1 e^{\sigma_1 (x^3 - t^2)} + k_2 e^{\sigma_2 (x^3 - t^2)}$$

$$\begin{cases} \bar{u}(x,0) = k_1 e^{\sigma_1 x^3} + k_2 e^{\sigma_2 x^2} \\ \bar{u}(x,0) = -e^{2x^3} + 2e^{-x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1, \; k_2 = 2, \\ \sigma_1 = 2, \; \sigma_2 = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\bar{u}(x,t) = -e^{2(x^3 - t^2)} + 2e^{-(x^3 - t^2)}}$$

0,7