Nome: Gabarito R.A.:

Métodos Matemáticos I **4º Teste** (7/05/2008)

(**Atenção:** *Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.*)

1. (1.15.13 *plus*) Considere a seqüência aproximante de $\delta(x)$ abaixo

$$f_n(x) = \frac{n}{2\cosh^2 nx}.$$

   (a) (1.5 Ponto) Esboce o gráfico de $f_n(x)$ e mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1$ para todo n.

   (b) (1.5 Ponto) Calcule a função $g_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(s)\,ds$ e esboce o seu gráfico.

   (c) (1 Ponto) Esboce o gráfico da função correspondente a $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$.

   (d) (3 Pontos) Suponha que você necessita aproximar $\theta(x)$ pela seqüência $g_n(x)$ com erro inferior a ϵ para $x \geq x_0 > 0$. Determine o valor mínimo necessário de n.

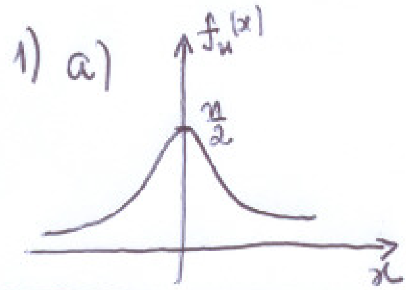
2. Considere a seqüência aproximante de $\delta(x)$ abaixo

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1/2n\,, \\ n, & |x| < 1/2n\,. \end{cases}$$

   (a) (2 Pontos) Calcule a função $g_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(s)\,ds$ e faça o seu gráfico **em detalhes**.

   (b) (1 Ponto) Esboce o gráfico da função correspondente a $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$.

1) a)



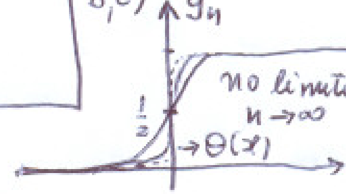
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big|\tanh nx\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

b)

$$g_n = \int_{-\infty}^{x} f_n(s)\,ds = \frac{1}{2}(1 + \tanh nx)$$

↳ constante de integração

b, c)

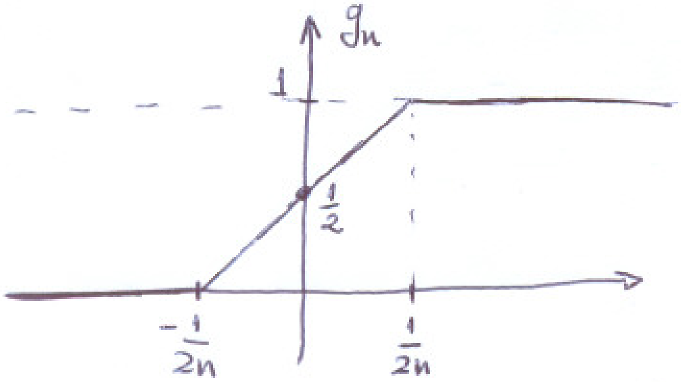


d) $\varepsilon = |\theta(x) - g_n(x)| = \frac{1}{2}(1 - \tanh nx)$ para $x > 0$. $n_{max} = \frac{1}{x_0}\operatorname{arctanh}(1 - 2\varepsilon)$

$$= \frac{1}{2x_0}\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

1) a)

$$g_n = \int_{-\infty}^{x} f_n(s)\,ds = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \leq -\frac{1}{2n} \\ nx + \frac{1}{2}\,, & \text{se } -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 1\,, & \text{se } x \geq \frac{1}{2n} \end{cases}$$



b) no limite $n \to \infty$, tem-se uma $\theta(x)$