Questão 1 (valor: 2,5 pontos)

Argumente se os limites abaixo existem ou não. Caso algum deles exista calcule o seu valor.

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin^2 y}{y(x^2+y^2)}$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cos(x^2+e^y)}{y^2+1}$$

(a) O limite não existe. Para ver isso considere as duas retas parametrizadas $r_1(t) = (0,t)$ e $r_2(t) = (t,t)$. Sobre r_1 o limite é

$$\lim_{t\to 0} \frac{0 \sin^2 t}{t(0+t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3} = 0.$$

Já sobre r_2 temos o limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\sin^2 t}{\cancel{t}(t^2+t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{2t^2} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Como os dois limites são diferentes, o limite original não existe

(b) O limite é 0, para isso usamos o teorema do confronto.

$$\frac{-|x|}{y^2+1} \leq \frac{x\cos(x^2+e^y)}{y^2+1} \leq \frac{|x|}{y^2+1}$$ já que $-1 \leq \cos(x^2+e^y) \leq 1$.

Agora $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-|x|}{y^2+1} = \frac{-0}{0+1} = 0$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{y^2+1} = \frac{0}{0+1} = 0.$

Logo pelo teorema do confronto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cos(x^2+e^y)}{y^2+1} = 0.$$

$\square$

Questão 2 (valor: 2,5 pontos)

Determine a equação do plano tangente à superfície dada implicitamente por

$$\log(xy) + xz - yz + \log(xz) = 1$$

no ponto $(1, 1, e)$.

Primeiro observe que $(1,1,e)$ realmente pertence à superfície, pois

$$\log(1.1) + e - e + \log e = \log(1) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Além disso a superfície é a curva de nível 1 de

$f(x,y,z) = \log(xy) + xz - yz + \log(xz)$. Sabemos então

que $\nabla f(1,1,e)$ é normal à superfície. Calculando

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\cancel{y}}{x\cancel{y}} + z + \frac{\cancel{z}}{x\cancel{z}} = \frac{2}{x} + z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}y} - z = \frac{1}{y} - z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x - y + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}z} = x - y + \frac{1}{z}$$

Portanto $\nabla f(1,1,e) = (2+e, 1-e, 1/e)$ e uma equação

do plano tangente desejado é

$$\nabla f(1,1,e) \cdot (x-1, y-1, z-e) = 0$$

Questão 3 (valor: 2,5 pontos)

Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais contínuas tal que $T(x, y)$ é a temperatura em Kelvin de um ponto do plano (x, y). Considere ainda que $T_x(2, 1) = 1$ e $T_y(2, 1) = -1$. Um carro se move sobre o plano seguindo a trajetória $x(t) = t^2 + t$ e $y(t) = \log(t + e - 1)$, em que t é medido em segundos. Por exemplo, a posição do carro para $t = 1$s é $(2, 1)$. Nesse instante ($t = 1$s) o carro está se deslocando para pontos onde a temperatura está subido ou caindo? A que taxa?[1]

A temperatura do carro no instante t é dada por $f(t) = T(x(t), y(t))$

Logo sua derivada é

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

e assim

$$f'(1) = T_x(2,1) \cdot (2t+1)\Big|_{t=1} + T_y(2,1) \left(\frac{1}{t+e-1}\right)_{t=1}$$

$$= 1 \cdot 3 + (-1) \cdot \frac{1}{e} = 3 - \frac{1}{e} > 0.$$

Logo, a temperatura está crescendo com taxa $3 - \frac{1}{e}$.

[1] O número e é aproximadamente igual a 2.7182818. Use esse valor apenas para definir se a temperatura vai ou sobe e não para fazer contas até o fim.

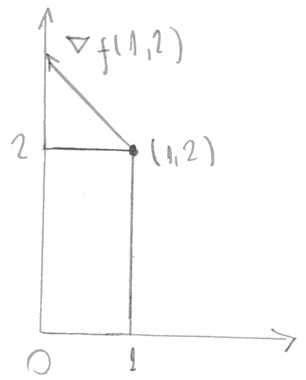
Questão 4 (valor: 2,5 pontos)

Considere a função

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2.$$

Encontre uma direção e sentido na qual seja possível andar a partir do ponto $(1,2)$ mantendo-se dentro do retângulo $\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$ de modo que a função cresça. Qual a taxa de crescimento da função na direção e sentido encontrados?

Queremos uma direção na qual a derivada direcional seja estritamente positiva e que leve a pontos dentro do retângulo. Mas temos $D_u f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot u$. Vejamos a configuração:



$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= x - y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -x + y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla f(1,2) = (-1,1)$$

Fica fácil então ver que ao se mover para esquerda na direção $u = (-1,0)$ permanece-se no retângulo com a função crescendo à taxa $D_u f(1,2) = (-1,1) \cdot (-1,0) = 1$.