1) ______

2) ______

3) ______

4) ______

Nota: ________

2ª Prova de F-328 - Diurno

26/10/2011

Nome: X X X **RA:** X X **Turma:** X

Questão 01

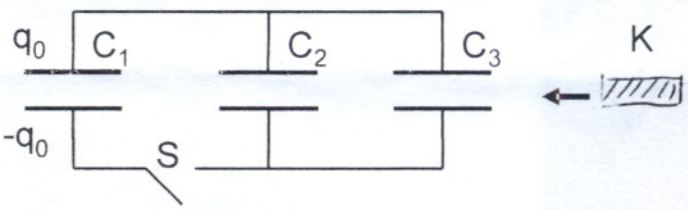
Três capacitores de placas planas e paralelas estão ligados como mostra a figura abaixo. Inicialmente os capacitores C_2 e C_3 estão descarregados e C_1 está carregado com carga q_0. A chave S é então fechada.

a) Calcular a carga em cada capacitor e a diferença de potencial através dos mesmos, após o estabelecimento do equilíbrio. (1,0 ponto)

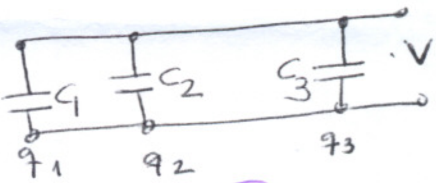
Mantendo-se a chave S fechada é inserido um material de constante dielétrica k no capacitor C_3, preenchendo totalmente o volume entre suas placas.

b) Nesta nova situação, calcular a carga em cada capacitor e a diferença de potencial através dos mesmos, após o restabelecimento do equilíbrio. (1,0 ponto)

c) Calcular a variação da energia potencial elétrica $\Delta U = U_f - U_i$, em C_1, onde U_i é a energia antes do fechamento da chave e U_f a energia após a colocação do dielétrico. (0,5 ponto)



(a) $q_0 = C_1 V_0$



$q_1 + q_2 + q_3 = q_0$ (0,5)

$q_1 = C_1 V$, $q_2 = C_2 V$; $q_3 = C_3 V$

$q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3) V = C_1 V_0 \Rightarrow \boxed{V = \frac{C_1}{C_1+C_2+C_3} V_0}$ $\uparrow \frac{q_0}{C_1}$

$$\boxed{q_1 = \frac{C_1 C_1}{C_1+C_2+C_3} V_0 \; ; \; q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2+C_3} V_0 \text{ e } q_3 = \frac{C_1 C_3}{C_1+C_2+C_3} V_0}$$ (0,5)

(b) ao adicionarmos o dielétrico em C_3 sua capacidade torna-se $C_{3,d} = k C_3$ → (0,2)

$q_1 \to q_1'$, $q_2 \to q_2'$ e $q_3 \to q_3'$

$q_1' + q_2' + q_3' = q_0$. ← (0,2)

$q_1' = c_1 V'$, $q_2' = c_2 V'$ e $q_3' = k c_3 V'$ 0,3

$(c_1 + c_2 + k c_3) V' = q_0 = c_1 V_0 \rightarrow \boxed{V' = \frac{c_1}{c_1 + c_2 + k c_3} V_0}$

$\boxed{q_1' = \frac{c_1 \, c_1}{c_1 + c_2 + k c_3} V_0 \; ; \quad q_2' = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2 + k c_3} V_0 \text{ e } q_3' = \frac{k c_1 c_3}{c_1 + c_2 + k c_3} V_0}$ 0,3

c) $U_{1,i} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{c_1} = \frac{1}{2} c_1 V_0^2$

0,2

$U_{1,f} = \frac{1}{2} \frac{q_1'^2}{c_1} = \frac{c_1^4 \, V_0^2}{2 c_1 (c_1 + c_2 + k c_3)^2} = \frac{c_1^3 V_0^2}{2(c_1 + c_2 + k c_3)^2}$

$\Delta U = U_{1,f} - U_{1,i} = \frac{c_1^3 \, V_0^2}{2(c_1 + c_2 + k c_3)^2} - \frac{1}{2} c_1 V_0^2 \Rightarrow \boxed{\Delta U = + \left[\frac{(c_1 + c_2 + k c_3)^2 - c_1^2}{(c_1 + c_2 + c_3 k)^2} \right] U_{1,i}}$

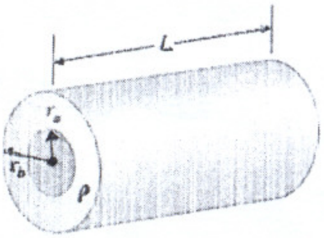
$\boxed{\Delta U < 0}$

0,3

Questão 02

Um condutor coaxial de comprimento L, mostrado abaixo, é formado por um núcleo metálico cilíndrico de raio r_a e resistividade ρ/3, colocado no interior de uma casca metálica cilíndrica e maciça, de raio interno r_a, raio externo r_b e resistividade ρ. O cilindro e a casca estão eletricamente isolados devido à colocação, entre os mesmos, de um filme isolante de espessura desprezível. O condutor coaxial é então ligado a um circuito, conectando-se firmemente toda a área de suas extremidades planas com o uso de placas metálicas de resistência elétrica desprezível. A densidade de corrente que circula pelo condutor coaxial é dada por $\vec{j} = 3j_0\,\hat{k}$, para $r < r_a$, e $\vec{j} = j_0\,\hat{k}$, para $r_a < r < r_b$. Calcular para o condutor coaxial:

a) A corrente total que o atravessa. (1,0 ponto)
b) Sua resistência equivalente. (1,0 ponto)
c) A d.d.p. entre suas extremidades. (0,5 ponto)



$$R_a = \rho_a \frac{L}{A_a} = \frac{\rho L}{3\pi r_a^2}$$

$$R_b = \rho_b \frac{L}{A_b} = \frac{\rho L}{\pi[r_b^2 - r_a^2]}$$

$$R_{eq} = ? \qquad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}$$

$R_{eq} = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}$ e $i_a = J_a A_a$, $i_b = J_b A_b$

$i_a = 3J_0 \cdot \pi r_a^2$, $i_b = J_0 \cdot \pi (r_b^2 - r_a^2)$

(a) $i_{total} = i_a + i_b = \pi J_0 (3r_a^2 + r_b^2 - r_a^2) = \pi J_0 (2r_a^2 + r_b^2)$

$$\boxed{i = \pi J_0 (2r_a^2 + r_b^2)}$$

$= \frac{\rho L}{\pi(2r_a^2 + r_b^2)}$

(b) $R_{eq} = \frac{\rho L}{\pi[r_b^2 - r_a^2]} \frac{\rho L}{3\pi r_a^2} \frac{1}{\left(\frac{\rho L}{3\pi r_a^2} + \frac{\rho L}{\pi(r_b^2 - r_a^2)}\right)} = \frac{\rho L}{\pi[r_b^2 - r_a^2] + 3\pi r_a^2}$

$$\boxed{R_{eq} = \frac{\rho L}{\pi[r_b^2 + 2r_a^2]}}$$

(c) $V_{eq} = R_{eq}\, i \longrightarrow \boxed{V_{eq} = \rho_0 L J_0}$

Questão 03

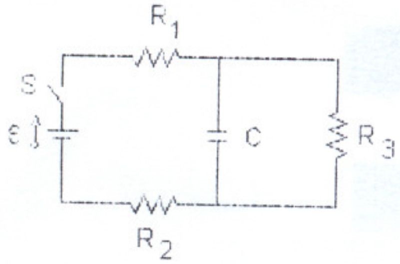
No circuito abaixo, no instante $t = 0$ (chave S aberta) o capacitor encontra-se descarregado. Considerando que a bateria que alimenta o circuito é ideal e com força eletromotriz ε, calcule, após o fechamento da chave S:

a) a corrente que atravessa o capacitor, imediatamente após o fechamento de S; (0,5)

b) a corrente que passa pelo resistor R_3 imediatamente após o fechamento de S (0,5)

c) a corrente que atravessa pela chave S e a carga no capacitor em $t \to \infty$; (0,5)

d) a carga do capacitor e a corrente que atravessa os resistores R_1 e R_2 em função do tempo. (1,0)



(a) $t = 0^+ \longrightarrow$ C descarregado $\longrightarrow V_c = 0 \Longrightarrow$

$$\boxed{i_c = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}}$$

(b) $i_3(0^+) = 0$

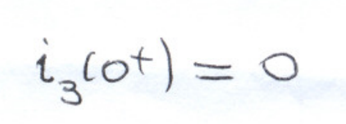
(c) $t \to \infty \Rightarrow$ capacitor carregado $\Rightarrow i_c = 0.$

$$\boxed{i_3 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

Carga no capacitor $\Rightarrow \dfrac{q}{C} - R_3 i_3 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{q(\infty) = R_3 C \cdot i_3 = \frac{R_3\, \varepsilon C}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

(d)



$$\longrightarrow \begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 & (1) \\ \varepsilon - (R_1+R_2)\, i_1 - \dfrac{q}{C} = 0 & (2) \\ R_3 i_3 - \dfrac{q}{C} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\varepsilon - (R_1+R_2)(i_2 + i_3) - \frac{q}{C} = 0$$

$$i_3 = \frac{q}{R_3 C}$$

Logo $$\mathcal{E} - (R_1+R_2)\,i_2 - \frac{R_1+R_2}{R_3}\frac{q}{C} - \frac{q}{C} = 0$$

$$i_2 = dq/dt$$

$$\mathcal{E} - (R_1+R_2)\frac{dq}{dt} - \frac{R_1+R_2+R_3}{R_3 C}\,q = 0$$

ou

$$\frac{dq}{dt} + \frac{R_1+R_2+R_3}{(R_1+R_2)R_3 C}\,q - \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2} = 0$$

$$\boxed{q(t) = \frac{R_3\,\mathcal{E}C}{R_1+R_2+R_3}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2+R_3}{(R_1+R_2)R_3 C}t}\right)}$$

$$\boxed{i_C(t) = i_2 = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2+R_3}\,e^{-\frac{R_1+R_2+R_3}{(R_1+R_2)R_3 C}t}}$$

$$i_3(t) = \frac{q}{R_3 C} = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2+R_3}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2+R_3}{(R_1+R_2)R_3 C}t}\right)$$

$i_1 = i_2 + i_3$ → corrente que passa por R_1 e R_2.

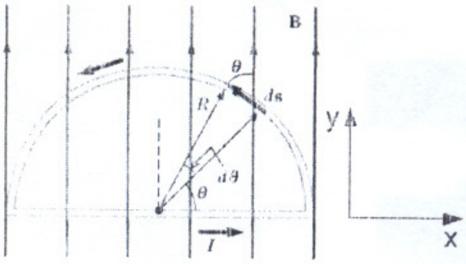
$$\boxed{i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2+R_3}}$$

constante

Questão 04

Um fio, transportando uma corrente I, é dobrado de modo a formar uma espira semicircular de raio R, conforme figura. O fio está no plano xy e o vetor $\vec{B}$ é dado por $\vec{B} = B\hat{y}$.

a) calcule a força magnética que age sobre a parte reta do fio; (0,5 ponto)
b) calcule a força magnética que age sobre a parte curva do fio; (0,5 ponto)
c) calcule a força magnética total sobre a espira; (0,5 ponto)
d) calcule o vetor momento de dipolo magnético da espira. (0,5 ponto)
e) calcule o torque magnético sobre a espira. (0,5 ponto)



a) $d\vec{F} = i\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$

$\vec{B} = B\hat{y}$

$\vec{F} = \int_{reta} i\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$

$d\vec{\ell} = d\ell\,\hat{x}$

$$\vec{F}_{reta} = i\,B\left(\int_{reta} d\ell\right)\hat{x}\times\hat{y} \Longrightarrow \boxed{\vec{F}_{reta} = i\,B\,2R\,\hat{z}}$$

b) $\vec{F}_{curva} = \int_{curva} i\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$ $\qquad d\vec{\ell} = d\ell\,(\cos\theta\,\hat{y} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{x})$

$= R\,(\cos\theta\,\hat{y} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{x})\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi} iRB(\cos\theta\,\hat{y} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{x})\times\hat{y}\,d\theta$$

$$= -iRB\hat{z}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta = -iRB\hat{z}\left[-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$\boxed{\vec{F}_{curva} = -2Ri B\hat{z}}$$

c) $\vec{F}_{total} = 0$

d) $\vec{\mu} = i\,A\,\hat{n} = i\,\frac{\pi R^2}{2}\cdot\hat{z} \rightarrow \boxed{\vec{\mu} = \frac{\pi R^2 i}{2}\,\hat{z}}$

e) $\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} \rightarrow \vec{\tau} = \frac{\pi R^2 i}{2} B(\hat{z}\times\hat{y})$

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{\pi R^2 B i}{2}(-\hat{x})}$$