ME-210 Probabilidade I

Lista 5

1. Suponha que o número de vezes que uma pessoa fica resfriada durante um ano tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 4$. Um novo remédio para prevenir resfriados reduz este parâmetro para $\lambda' = 2$ para 75% das pessoas e não faz efeito em 25% restantes. Se uma pessoa tomou este remédio durante um ano e pegou resfriado 2 vezes, qual é a probabilidade de que o remédio funciona para esta pessoa?

2. A aplicação de fundo anti-corrosivo em chapas de aço de 1 m^2 é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória Poisson com taxa $\lambda = 1$ por m^2. Uma chapa é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de:
(a) encontrarmos pelo menos 1 defeito;
(b) encontrar no máximo 2 defeitos;
(c) encontrar de 2 a 4 defeitos.

2. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuiçao de Poisson, com media de 24 chamadas a cada 5 minutos. Qual é a probabilidade de receber durante um minuto:
(a) 10 ou mais chamadas;
(b) menos que 9 chamadas;

4. Uma pessoa comprou 50 bilhetes de loterias diferentes. Se em cada loteria a probabilidade de ganhar algum prêmio é 0.01, calcule, usando uma aproximação apropriada, a probabilidade de ganhar:
(a) exatamente 1 prêmio;
(b) pelo menos 2 prêmios?

5. Seja X uma variável aleatória Geométrica. Demonstre as seguintes propriedades:
(a) $P(X \geq j) = (1-p)^{j-1}$;
(b) $P(X > j + k \mid X > j) = P(X > k)$, para quaisquer j, k (propriedade conhecida como *falta de memória*).

6. Um banco de sangue necessita sangue tipo 0-Rh negativo. Suponha que a probabilidade de uma pessoa ter este tipo de sangue seja 0.1. Doadores permanentes chegam ao hemocentro para fazer sua doação rotineira. Calcule:
(a) a probabilidade de que o terceiro doador com sangue tipo 0-Rh negativo

seja o setimo a chegar;
(b) a probabilidade de que o primeiro doador com sangue tipo 0-Rh negativo apareça entre os 5 primeiros;
(c) a probabilidade de que 3 doadores com sangue tipo 0-Rh negativo apareçam antes de 4 doadores com outros tipos de sangue.

7. Um supermercado vende uma caixa com 20 lâmpadas, das quais 4 não funcionam e as restantes são boas. Um comprador decide testar 5 das lâmpadas (obviamente sem reposição) escolhidas ao acaso e comprar a caixa caso haja no máximo duas defeituosas entre as lâmpadas testadas. Qual é a probabilidade de comprar a caixa? Qual é a distribuição do número de itens defeituosos?

8. Seja X uma v.a. $Poisson(\lambda)$. Calcule $E(\frac{1}{X+1})$.

ME-210A: Resolução da Lista 05

Resolução extra-oficial feita por um dos monitores.

Questão 1:

Seja X a variável aleatória correspondente ao número de vezes em que a pessoa apresentada no enunciado fica resfriada durante um ano e A o evento correspondente ao remédio funcionar para esta pessoa. Queremos calcular a probabilidade condicional $P(A|X=2)$. Pela Fórmula de Bayes, temos

$$P(A|X=2) = \frac{P(X=2|A)P(A)}{P(X=2|A)P(A) + P(X=2|A^c)P(A^c)}$$

Além disso, sabemos que, se o remédio funcionar (ou seja, se o evento A ocorrer), $X \sim Poisson(2)$, e, caso contrário, $X \sim Poisson(4)$. Levando isso em consideração, podemos facilmente calcular as probabilidades condicionais

$$P(X=2|A) = P(Poisson(2)=2) = e^{-2}\frac{2^2}{2!} \qquad P(X=2|A^c) = P(Poisson(4)=2) = e^{-4}\frac{4^2}{2!}$$

Já que $P(A) = 0,75$, temos $P(A^c) = 1 - 0,75 = 0,25$. Por fim,

$$P(A|X=2) = \frac{e^{-2}\frac{2^2}{2!}0,75}{e^{-2}\frac{2^2}{2!}0,75 + e^{-4}\frac{4^2}{2!}0,25} \Rightarrow P(A|X=2) \cong 0,8471$$

Questão 2:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X=0) = e^{-1} \\ P(X \leq 2) &= e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = 2.5e^{-1} \\ P(2 \leq X \leq 4) &= e^{-1}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\Big) \end{aligned}$$

Questão 3:

Seja $N(t)$ o número de chamadas no tempo t. Sabemos que $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, onde

$$\lambda = \frac{24 \text{ chamadas}}{5 \text{ minutos}} = \frac{24}{5}\frac{\text{chamadas}}{\text{minuto}}$$

Como analisaremos as chamadas que ocorrem em um minuto, faremos $t = 1$.

a. $P(N(1) \geq 10) = 1 - P(N(1) \leq 9)$. Logo

$$P(N(1) \geq 10) = 1 - e^{-4.8}\sum_{i=0}^{9}\frac{4.8^i}{i!}$$

b. $P(N(1) < 9) = P(N(1) \leq 8)$. Logo

$$P(N(1) < 9) = e^{-4.8} \sum_{i=0}^{8} \frac{4.8^i}{i!}$$

Questão 4:

Seja X o número de prêmios obtidos. Sabemos que $X \sim bin(n, p)$, onde $n = 50$ e $p = 0,01$. Já que n é grande, p é pequeno e $np = 0,5$ é moderado, podemos aproximar a distribuição binomial pela distribuição de Poisson com parâmetro np, ou seja

$$P(X = i) \cong e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

a. $P(X = 1) \cong e^{-0,5} \frac{(0,5)^1}{1!} \Rightarrow P(X = 1) \cong 0.3033$

b. $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0)$. Como $P(X = 1)$ já foi calculado no item a), basta calcularmos $P(X = 0)$ da mesma maneira:

$$P(X = 0) \cong e^{-0,5} \frac{(0,5)^0}{0!} \Rightarrow P(X = 0) \cong 0.6065$$

Logo

$$P(X \geq 2) \cong 1 - 0,3033 - 0,6065 \Rightarrow P(X \geq 2) \cong 0.0902$$

Observação: a título de comparação, vamos calcular os valores exatos das probabilidades desejadas:

$$P(X = 1) = \binom{50}{1} 0,01 \times 0,99^{49} \cong 0,3056$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0) = 1 - \binom{50}{1} 0,01 \times 0,99^{49} - \binom{50}{0} 0,99^{50}$$

$$P(X \geq 2) \cong 1 - 0,3056 - 0,6050 \Rightarrow P(X \geq 2) \cong 0,0894$$

Como podemos ver, os resultados utilizando a aproximação pela distribuição de Poisson são muito próximos dos valores exatos. Além disso, podemos verificar o quanto a aproximação da distribuição de X pela distribuição normal é próxima dos valores exatos, embora tenhamos $np(1 - p) = 0,5 \times 0,99 = 0,495 < 10$. Neste caso,

$$P(X = 1) = P(0,5 < X < 1,5) = P\left(\frac{0,5 - 0,5}{\sqrt{0,5 \times 0,99}} < \frac{X - 0,5}{\sqrt{0,5 \times 0,99}} < \frac{1,5 - 0,5}{\sqrt{0,5 \times 0,99}}\right)$$

$$P(X = 1) \cong \Phi(1,005) - \Phi(0) \cong 0,8413 - 0,5 \Rightarrow P(X = 1) \cong 0,3413$$

$$P(X = 0) = P(X < 0,5) = P\left(\frac{X - 0,5}{\sqrt{0,5 \times 0,99}} < \frac{0,5 - 0,5}{\sqrt{0,5 \times 0,99}}\right) \cong \Phi(0) = 0,5$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0) \cong 1 - 0,3413 - 0,5 \Rightarrow P(X \geq 2) \cong 0,1587$$

Como podemos notar, a aproximação pela Normal não é tão boa, o que já era esperado.

Questão 5:

a. Faremos a demonstração de duas maneiras diferentes.

   - **Primeiro modo:**

$$P(X \geq j) = P(\text{só ocorrem fracassos nas primeiras } j-1 \text{ tentativas}) = (1-p)^{j-1}$$

   - **Segundo modo:**

$$P(X \geq j) = \sum_{n=j}^{\infty}(1-p)^{n-1}p = p\sum_{n=j}^{\infty}(1-p)^{n-1}$$

Reconhecendo o somatório como a soma dos termos de uma PG de razão $1-p$ e primeiro termo $(1-p)^{j-1}$, temos

$$P(X \geq j) = p(1-p)^{j-1}\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p(1-p)^{j-1}}{p} \Rightarrow P(X \geq j) = (1-p)^{j-1}$$

b.

$$P(X > j+k|X > j) = \frac{P((X > j+k) \cap (X > j))}{P(X > j)} = \frac{P(X > j+k)}{P(X > j)} = \frac{P(X \geq j+k+1)}{P(X \geq j+1)}$$

Usando o resultado do item anterior

$$P(X > j+k|X > j) = \frac{(1-p)^{j+k+1-1}}{(1-p)^{j+1-1}} = (1-p)^k = P(X \geq k+1)$$

Logo

$$P(X > j+k|X > j) = P(X > k)$$

Observação: esta propriedade da variável aleatória geométrica é conhecida como falta de memória.

Questão 6:
Temos aqui a distribuição binomial negativa com $p = 0.1$.
(a)

$$P(\text{3o sucesso na 7a tentativa}) = P(\text{bin neg}(r=3, p=0.1) = 7) = \binom{6}{2}0.1^3 0.9^4.$$

(b)

$$\begin{aligned}&P(\text{o 1o com 0-Rh vai aparecer entre os 5 primerios})\\&= 1 - P(\text{entre os 5o primerios nenhum com 0-Rh})\\&= 1 - 0.9^5.\end{aligned}$$

(c)

$$P(\text{3 sucessos ants de 4 fracassos}) = \sum_{n=3}^{3+4-1}\binom{n-1}{2}0.1^3 0.9^{n-3}.$$

Questão 7:

Numero de itens defeituosos entre testados tem distribuição hipergeométrica com $N = 20$, $m = 4$, $n = 5$.

$$P(X \leq 2) = \frac{\binom{4}{0}\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{4}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{16}{3}}{\binom{20}{5}}$$

Questão 8:

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} P(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+1}}{(i+1)!}$$

Fazendo $j = i + 1$, temos

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}$$

Reconhecendo o somatório como sendo $P(X \geq 1)$, podemos escrever que

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\right) \Rightarrow E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$$