$3^{\underline{o}}$ Exame - Turma especial - MA-327 - 24/05/12

Nome:——————————————————————**RA:**——————

1.(2pts) Decida em quais casos, abaixo, W é subespaço de V. Nos casos afirmativos exiba uma base de W.Justifique suas respostas.

a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ 2x + y - z + t = 0 \text{ e } x + z + t = 0\}$

b)$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = sen(x)\}$.

d) $W = \{p(x) = bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_2(x);\ \ p(1) = p(-1) = 0\}$ (aqui $\mathbb{P}_2(x)$ é o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2 e com coeficientes reais).

2.(3pts) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por:
$T(x, y, z) = (2x + z, 2y - z, x - y + z)$. Seja $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

a) Encontre a matriz $A = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ e conclua que T é um operador auto-adjunto (ou simétrico) considerando em $\mathbb{R}^3$ o produto interno canônico.

b) Encontre uma base ortonormal de autovetores de T.

c) Encontre uma matriz P, 3×3, tal que $P^t.P = I_3$ e $P^tAP = D$ matriz diagonal

3.(2pts) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno $<, >$ dado por:

$$< (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) >= \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

a) Ortogonalize (processo de Gram-Schmidt) a base canônica $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ segundo o produto interno definido acima.

b) Dado o vetor $u = (1, -1, 1)$ encontre uma base do subespaço $W = \{v \in \mathbb{R}^3; < u, v >= 0\}$.
(lembro que o único produto interno envolvido nesta questão é o definido acima)

4.(3pts) Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo. Justifique suas respostas (respostas sem justificativas não serão consideradas)

a) A aplicação linear $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $S(x, y, z) = (x - y + z, y - z, z + y)$ é bijetora.

b) A função $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + y + 1, x - y + z, y + 3z)$ é linear.

c) Sejam W e K subespaços de $\mathbb{R}^n$ com produto interno canônico. Se $K \subseteq W^{\perp}$ e $dim(K) = n - dim(W)$ então $K = W^{\perp}$.

d) O operador linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definido por $T(x, y, z, w) = (x + y + w, x + z + 2w, y - 3z + w, x - 2y + z - w)$ tem 5 auto valores distintos dois a dois.