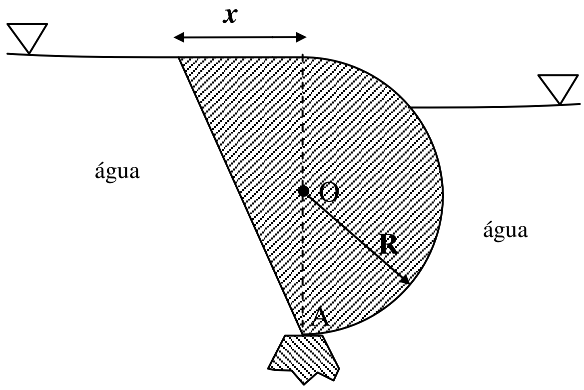
EM 561 – MECÂNICA DOS FLUIDOS II
1ª Prova - 22/04/2010
Consulta permitida ao livro-texto
Duração: 2horas - Gerencie o seu tempo!

Turma A: Prof. Osvair V. Trevisan
Turma B: Prof. Antonio C. Bannwart

UNICAMP

NOME DO ALUNO:_________________________________**RA:**_____________**TURMA**_____

1) A comporta bidimensional mostrada está suspensa por um pivô em O e livre em A. Se seu peso for desprezado, qual o valor da razão x/R para que a comporta não gire em torno do pivô. O desnível entre as superfícies da água é desconhecido.

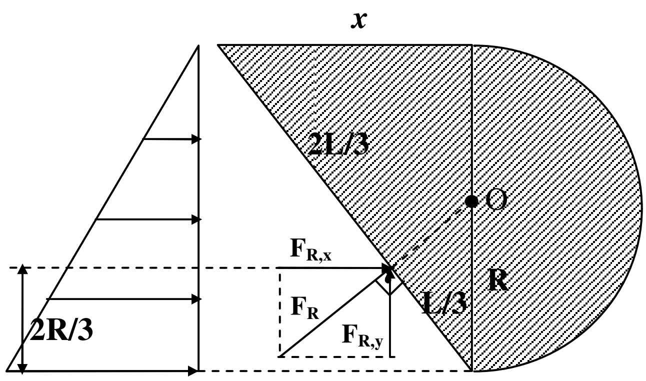


Solução:

No lado direito, não há torque relativamente ao ponto O gerado pela água, uma vez que a linha de ação de cada elemento de força passa pelo ponto O. (**0,5 ponto**)
No lado esquerdo, visto que a distribuição de força é triangular, a força resultante estará aplicada a 2/3 do comprimento inclinado $L = \sqrt{4R^2 + x^2}$ da superfície (ver figura). **(1,0 ponto)**
Por semelhança de triângulos, obtém-se:

$$\frac{L/3}{R} = \frac{2R}{L} \Rightarrow \frac{4R^2 + x^2}{3} = 2R^2$$

$$\Rightarrow x = R\sqrt{2}$$ **(0,5 ponto)**



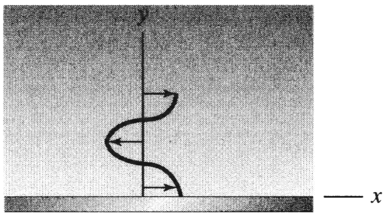
Alternativamente, pode-se calcular o momento das componentes:

$$F_{R,x}\left(R - \frac{2R}{3}\right) = F_{R,y}\,\frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \rho g R \times 2Rw \times \frac{R}{3} = \rho g R \times xw \times \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow x = R\sqrt{2}$$ **(1,5 ponto)**

2) O movimento de um líquido é causado pela oscilação horizontal de uma placa plana larga e comprida, como mostrado na figura. Supondo o escoamento como laminar e bidimensional, ocorrendo paralelamente à placa, e o fluido com viscosidade constante, escreva os termos não nulos da equação diferencial da quantidade de movimento na direção *x*. (Obs.: não é necessário resolver a equação diferencial).



$u_{\text{parede}} = U \text{ sen } \omega t$

Solução:

Considerando o escoamento incompressível (por se tratar de um líquido) e bidimensional ($w = 0$; $\frac{\partial}{\partial z} = 0$) a equação da continuidade fornece:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{u=u(y,t)} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = v(x) \quad \textbf{(0,5 ponto)}$$

Porém, como $v = 0$ em $y = 0$ para todo e qualquer y, conclui-se que: $v \equiv 0$ em todo o domínio. Com essas considerações, a equação da quantidade de movimento na direção x se torna:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{w\frac{\partial u}{\partial z}}_{=0}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{=0}\right) \qquad \textbf{(1,0 ponto)}$$

$$\Rightarrow \quad \rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Como o movimento do fluido é causado apenas pela oscilação da placa, tem-se $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Portanto:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \textbf{(1,0 ponto)}$$

3) O campo de velocidades do escoamento bidimensional incompressível no interior do rotor de uma bomba centrífuga operando em regime permanente pode ser representado por:

$$V_r = \frac{Q}{2\pi r b} \qquad\qquad V_\theta = \omega r$$

onde Q é a vazão da bomba, b a espessura do disco do rotor e ω sua velocidade angular. Verifique se o escoamento satisfaz à conservação da massa. Determine a equação da linha de corrente passando pelo ponto $r = r_1$ em $\theta = 0$.

Solução:

Verificando a equação da continuidade para escoamento 2D incompressível:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q}{2\pi b}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial(\omega r)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{o}k! \quad \textbf{(0,5 ponto)}$$

A função corrente é obtida a partir de:

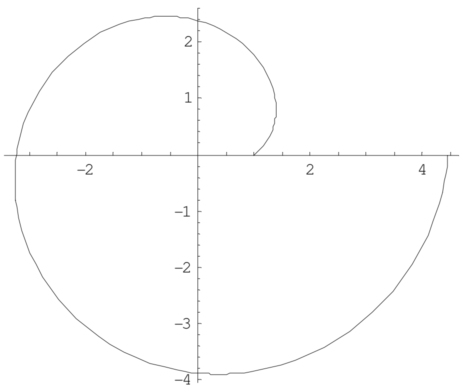
$$\left.\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r b} \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{Q\theta}{2\pi b} + f(r) \\ V_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega r \quad \Rightarrow \quad \psi = -\frac{\omega r^2}{2} + g(\theta) \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad \psi(r,\theta) = -\frac{\omega r^2}{2} + \frac{Q\theta}{2\pi b} \qquad \textbf{(1,0 ponto)}$$

O valor de ψ na LC passando por $r = r_1$ em $\theta = 0$ é: $\psi(r_1, 0) = -\dfrac{\omega r_1^2}{2}$

Logo a equação dessa LC é:

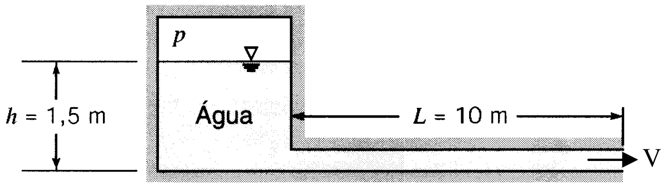
$$-\frac{\omega r_1^2}{2} = -\frac{\omega r^2}{2} + \frac{Q\theta}{2\pi b} \quad \therefore \quad r(\theta) = \sqrt{r_1^2 + \frac{Q\theta}{\pi b \omega}} \quad \textbf{(0,5 ponto)}$$

Trata-se de uma espiral – ver figura abaixo.



Notar que o campo não é irrotacional porque, embora V_r seja definida por uma fonte, a componente V_θ é definida por um vórtice forçado.

4) Ar comprimido é usado para acelerar a passagem da água em um tubo. Despreze a velocidade no reservatório e admita que o escoamento no tubo é uniforme em qualquer seção. Num instante particular, sabe-se que V = 1 m/s e dV/dt = 1,50 m/s². A área da seção reta do tubo é A = 0,02 m². Determine a pressão manométrica p no tanque nesse instante.



Solução:

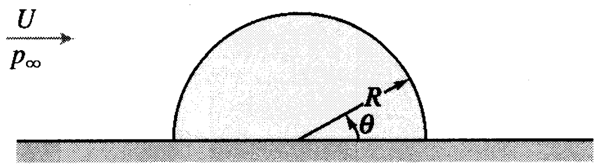
A equação de Bernoulli não-perrmanente para escoamento incompressível é:

$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho}}_{=\frac{p}{\rho}}+\underbrace{\frac{V_1^2}{2}}_{\cong 0}+gz_1=\underbrace{\frac{p_2}{\rho}}_{=0}+\underbrace{\frac{V_2^2}{2}}_{=\frac{V^2}{2}}+gz_2+\int_1^2\frac{\partial V_S}{\partial t}\ \underset{z_1-z_2=h}{\Rightarrow}\ p=\rho\left(\frac{V^2}{2}-gh+L\frac{dV}{dt}\right)$$ **(1,5 ponto)**

Substituindo os valores vem:

$$p=\rho_{água}\left(\frac{V^2}{2}-gh+L\frac{dV}{dt}\right)=998\times\left(\frac{1^2}{2}-9{,}81\times1{,}5+10\times1{,}5\right)\ \Rightarrow\ p=0{,}783\ \mathrm{kPa}$$ **(0,5 ponto)**

5) O escoamento sobre uma cabana semicilindrica pode ser aproximado pela distribuição de velocidade da expressão abaixo, com 0 ≤ θ ≤ π. Durante uma tempestade, a velocidade do vento atinge 120 km/h; a temperatura externa é de 10°C. Um barômetro dentro da cabana indica 96 kPa; a pressão p_∞ é também de 96 kPa. A cabana tem um diâmetro de 5 m e um comprimento de 20 m (perpendicular ao plano). Calcule a força que tende a levantar a cabana das suas fundações.



$$\vec{V} = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\vec{e}_r \;-\; U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\theta$$

Fórmulas:

$$\int \operatorname{sen}^3(x)dx = -\frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{12}\cos(3x)$$

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)dx = \operatorname{sen}^3(x)/3$$

Solução:

Junto à superfície semicilíndrica, tem-se $r = R$, portanto:

$\vec{V}(\theta) = -\ 2U\ \operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad V^2(\theta) = 4U^2\operatorname{sen}^2\theta$ **(0,5 ponto)**

Desprezando o efeito gravitacional, a equação de Bernoulli entre um ponto θ na superfície semicilíndrica e um ponto na corrente livre ao longe fornece a pressão externa sobre a superfície:

$\dfrac{p_{ext}(\theta)}{\rho} + \dfrac{V^2(\theta)}{2} = \dfrac{p_\infty}{\rho} + \dfrac{U^2}{2} \quad \Rightarrow \quad p_{ext}(\theta) = p_\infty + \dfrac{\rho U^2}{2}\left(1 - 4\operatorname{sen}^2\theta\right)$ **(0,5 ponto)**

Sendo a pressão interna $p_{int} = p_\infty$ a força vertical resultante será:

$F_V = \displaystyle\int_0^\pi (p_{\text{int}} - p_{ext})\operatorname{sen}\theta\,dA = \int_0^\pi (p_{\text{int}} - p_{ext})LR\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{LR\rho U^2}{2}\int_0^\pi \left(4\operatorname{sen}^2\theta - 1\right)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$ **(0,5 ponto)**

Efetuando a integral:

$$F_V = \frac{LR\rho U^2}{2}\int_0^\pi \left(4\operatorname{sen}^2\theta - 1\right)\operatorname{sen}\theta\,d\theta = -\frac{LR\rho U^2}{2}\int_0^\pi \left(3 - 4\cos^2\theta\right)d\left(\underbrace{\cos\theta}_{=y}\right) =$$

$$= -\frac{LR\rho U^2}{2}\int_1^{-1}\left(3 - 4y^2\right)dy = \frac{LR\rho U^2}{2}\int_{-1}^{1}\left(3 - 4y^2\right)dy = \frac{5LR\rho U^2}{3}$$

Temos ainda:

$\rho_{ar} = \dfrac{p_\infty}{R_{ar}T} = \dfrac{96000}{287 \times 283{,}15} = 1{,}18\ \text{kg/m}^3 \quad \therefore \quad F_V = \dfrac{5 \times 20 \times 2{,}5 \times 1{,}18 \times 33{,}33^2}{3} = 109{,}2\ \text{kN}$ **(0,5 ponto)**

A força é para cima, tendendo a arrancar a cabana.