MA 327 A/B EXAME 13/12/11

RA: ____________ NOME: GABARITO

1) (2,0) Considere $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ com as operações usuais .

a) Mostre que $U = \{A \in V : \text{A é anti-simétrica}\}$ e

$W = \{A \in V : \text{A é triangular superior}\}$ são subespaços vetoriais de V

b) Mostre que $V = U \oplus W$

SOLUÇÃO. (a)

$U = \{A \in V : A = -A^t\}$

Se $A, B \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$-(\alpha A + \beta B)^t = -[\alpha A^t + \beta B^t] = -[\alpha(-A) + \beta(-B)]$$
$$= \alpha A + \beta B \implies \boxed{\alpha A + \beta B \in U}$$

0,5

$W = \{A = (a_{ij})_{m \times m} : a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$

Se $A, B \in W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha A + \beta B = \alpha (a_{ij})_{m \times m} + \beta (b_{ij})_{m \times m} = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{m \times m}$$

$a_{ij} = 0$ e $b_{ij} = 0$ se $i > j \implies \alpha a_{ij} + \beta b_{ij} = 0$ se $i > j$

$$\implies \boxed{\alpha A + \beta B \in W}$$

0,5

(b) Seja $A = (a_{ij})_{m \times m} \in U \cap W$

$$\begin{cases} A \in U \\ \text{e} \\ A \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{ij} = -a_{ji} \\ \text{e} \\ a_{ij} = 0 \text{ se } i > j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \\ \text{e} \\ a_{ii} = -a_{ii} \ \forall i \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{ij} = 0 \ \forall \ i,j \in \{1, \dots, m\}$$

$$\Rightarrow A = 0$$

Então $\boxed{U \cap W = \{0\}}$

0,4

Seja $A = (a_{ij})_{m \times m} \in V$. Tomamos

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1m} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & 0 & & 0 \end{bmatrix}_{m \times m} \in U$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & 2a_{12} & \cdots & 2a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & 2a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \in W$$

$$A = B + C$$

Logo $\boxed{V = U + W}$

0,6

2) (2,0) Seja W o subespaço vetorial do $\mathbb{R}^4$ gerado por $w_1 = (1,1,1,1)$,

$w_2 = (1, 2, -1, 1)$ e $w_3 = (1, 0, 3, 1)$

(1,0) a) Exiba uma base ortogonal para W em relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^4$

(1,0) b) Encontre $W^{\perp}$

SOLUÇÃO. (a):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$W = [\underbrace{(1,1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,-2,0)}_{v_2}]$, $\alpha = \{v_1, v_2\}$ base de W

$$u_1 = v_1 = (1,1,1,1)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\begin{cases} \langle v_2, u_1 \rangle = \langle (0,1,-2,0), (1,1,1,1) \rangle \\ \quad = 1-2 = -1 \\ \|u_1\|^2 = 4 \end{cases}$$

$$u_2 = (0,1,-2,0) - \frac{(-1)}{4}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{4}+\frac{1}{4}, -\frac{8}{4}+\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{-7}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(1,5,-7,1)$$

$$\beta = \{ u_1 = (1,1,1,1),\ 4u_2 = (1,5,-7,1) \}$$

base ortogonal de W

(b) :

$$\langle (x,y,z,w), (1,1,1,1) \rangle = x + y + z + w$$

$$\langle (x,y,z,w), (0,1,-2,0) \rangle = y - 2z$$

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ y - 2z = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2z} \end{cases} \qquad \boxed{w} = -x - y - z = -x - 2z - z = \boxed{-x - 3z}$$

$$(x,y,z,w) = (x, 2z, z, -x - 3z)$$

$$= x(1,0,0,-1) + z(0,2,1,-3)$$

$$W^{\perp} = [(1,0,0,-1), (0,2,1,-3)]$$

3) (2,0) Determine explicitamente a expressão de uma transformação linear

$T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

a) O elemento $p(x) = 1 + x \in N(T)$

b) O elemento $q(x) = x \notin N(T)$

c) $\mathrm{Im}(T) = [(1,1,1)]$

SOLUÇÃO.

$$\begin{cases} T(1+x) = (0,0,0) \\ T(x) = (1,1,1) \\ T(x^2) = (0,0,0) \end{cases}$$

$$a + bx + cx^2 = a(1+x) + (b-a)x + cx^2$$

$$T(a+bx+cx^2) = (b-a)(1,1,1)$$

$$= (b-a, b-a, b-a)$$

4) (1,5) Seja $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $u = P(v)$ é a projeção ortogonal do elemento $v \in \mathbb{R}^3$ sobre o plano $x - 2y - z = 0$. Encontre a expressão de $P(x, y, z)$

SOLUÇÃO. $W : x - 2y - z = 0 \iff z = x - 2y$

$$(x,y,z) = (x,y,x-2y) = x\underbrace{(1,0,1)}_{w_1} + y\underbrace{(0,1,-2)}_{w_2}$$

$$u_1 = w_1$$

$$u_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\langle w_2, u_1\rangle = -2$$

$$\|u_1\|^2 = 2$$

$$= (0,1,-2) + (1,0,1) = (1,1,-1)$$

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de W

$$P(x,y,z) = \langle (x,y,z), v_1\rangle v_1 + \langle (x,y,z), v_2\rangle v_2$$

$$= \frac{x+z}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x+y-z}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{x+z}{2}(1,0,1) + \frac{x+y-z}{3}(1,1,-1)$$

5) (2,5) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por $T(x,y,z) = (x+\sqrt{2}\,y+\sqrt{2}\,z, \sqrt{2}\,x+y, \sqrt{2}\,x+z)$

(0,5) a) Mostre que T é auto-adjunto

(1,5) b) Encontre os autovalores de T e uma base ortonormal de autovetores.

(0,5) c) Se $A = [T]_{can}^{can}$ encontre uma matriz ortogonal $P \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ tal que $D = P^t A P$ é uma matriz diagonal. Escreva D explicitamente.

SOLUÇÃO. (a): $[T]_{can}^{can} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$[T]_{can}^{can}$ é simétrica $\Rightarrow$ T é auto-adjunto

(b): $p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-x & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3 - 4(1-x) = (1-x)(x+1)(x-3)$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$ são os autovalores de T

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ $\begin{cases} x + \sqrt{2}\,y + \sqrt{2}\,z = x & \Rightarrow \boxed{z = -y} \\ \sqrt{2}\,x + y = y \\ \sqrt{2}\,x + z = z \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{x = 0}$

$(x,y,z) = y(0,1,-1)$, $y \neq 0$ são os autovetores de T associados a $\lambda_1 = 1$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ $\begin{cases} x + \sqrt{2}\,y + \sqrt{2}\,z = -x \\ \sqrt{2}\,x + y = -y \\ \sqrt{2}\,x + z = -z \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{y = z}$

$2y = -\sqrt{2}\,x$

$\boxed{y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x}$

$(x,y,z) = x\left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $x \neq 0$, são os autovetores de T associados a $\lambda_2 = -1$

$\boxed{\lambda_3 = 3}$ $\left\{\begin{array}{l} x + \sqrt{2}\,y + \sqrt{2}\,z = 3x \\ \sqrt{2}\,x + y = 3y \\ \sqrt{2}\,x + z = 3z \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y = z}$ $\quad 2y = \sqrt{2}\,x$ $\quad \boxed{y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,x}$

$(x,y,z) = x\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $x \neq 0$, são os autovetores de T associados a $\lambda_3 = 3$

$$v_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada somente por autovetores de T.

(c): $[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$

$$D = [T]^{\beta}_{\beta} = [I]^{can}_{\beta}\,[T]^{can}_{can}\,[I]^{\beta}_{can}$$

$$[I]^{\beta}_{can} = [v_1 \; v_2 \; v_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = P$$

$$[I]^{can}_{\beta} = \left([I]^{\beta}_{can}\right)^t = P^t$$

Logo $\quad D = P^t A P$