1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	$\sum$
1	1	1	0,75	0,75	0,75	1	0	1	1	8,25

PROVA 3, MA 327, 01/12/2009

NOME: [redacted] Turma: D RA: [redacted]

1. a) Definir *autovetor* e *autovalor* de um operador linear.

b) Seja $V = \mathbb{R}^3$, e seja $T: V \to V$ o operador linear definido por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + 3x_3, 3x_2 - 2x_3, -x_2 + 2x_3).$$

Determinar a matriz de T na base canônica de V e encontrar o polinômio característico de T.

c) Mostrar que T é diagonalizável e encontrar uma base de V onde a matriz de T é diagonal. Qual a matriz diagonal?

2. a) Definir *operador normal* e *operador auto-adjunto*.

b) Seja V o espaço $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, e a base canônica e_1, e_2, e_3, e seja $T(e_1) = -8e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $T(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 4e_3$, $T(e_3) = -2e_1 - 4e_2 - 5e_3$. Mostrar que T é autoadjunto e encontrar os autovalores de T.

c) Encontrar uma matriz **ortogonal** $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que a matriz $P^t A P = D$ seja diagonal onde A é a matriz de T na base canônica, e explicitar a matriz D.

3. Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das afirmações abaixo. **Justifique** as suas respostas! Respostas sem a devida justificativa não serão consideradas.

a) Seja $T: V \to V$ um operador linear no espaço V sobre $\mathbb{R}$, $\dim V < \infty$. Se T é diagonalizável, então o adjunto dele T^* também o é.

b) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $\dim V < \infty$ e seja $T: V \to V$ um operador linear auto-adjunto tal que $T^2 = I$ onde I é a identidade. Se T não possui autovalor 1, então $T = -I$.

c) Se V é um espaço vetorial sobre os reais e T é um operador linear em V então T sempre possui subespaço invariante (diferente de 0 e de V).

d) Seja $T: V \to V$ um operador linear, $\dim V < \infty$. Se o polinômio característico de T é $p(\lambda) = \lambda^k q(\lambda)$, onde $q(0) \neq 0$, então o núcleo de T, $N(T)$, tem dimensão k.

1) a) Seja T uma ~~transformação~~ operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$T(v) = \lambda v$, onde v é chamado de autovetor, se satisfizer essa expressão e for diferente de nulo, e λ é chamado de autovalor.

b) $$T(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{matriz de } T \text{ na base canônica de } V.} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico é dado por:

$$\det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \underline{(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(4-\lambda)} = p(\lambda)$$

c) Para que T seja diagonalizável devemos ter 3 autovetores LI. Encontrando as raízes do polinômio característico teremos os autovalores $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 4$.

Encontrando a base do núcleo de $(T - \lambda_1 I)$:

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ temos $N(T - \lambda_1 I) = \{\alpha(1,0,0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, então ele é gerado pelo autovetor $(1,0,0)$.

Encontrando a base do núcleo de $(T - \lambda_2 I)$:

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ temos $N(T - \lambda_2 I) = \{\alpha(-1,2,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, então ele é gerado por $(-1,2,2)$

Encontrando a base do núcleo de $(T - \lambda_3 I)$:

$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ temos: $N(T - \lambda_2 I) = \{\alpha(7, -4, 2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
Então ele é gerado por $(7,-4,2)$

A matriz diagonal é, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, que pode ser relacionada com T por:

$$T = P \cdot D \cdot P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

---

2) a) Seja T uma matriz de transformação linear:

O operador normal é aquele que $\boxed{TT^* = T^*T} = I$ X

E o operador auto-adjunto é $T = T^*$, onde T^* é a adjunta de T, encontrada quando transpomos T.

b) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

De acordo com a definição de auto-adjunto dada acima, temos que T é auto-adjunto,

$T = T^T = T^*$.

$$\det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} -8-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & -5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} =$$

Vá para as últimas páginas na correção dos autovalores

~~Vamos escalonar para deixar o det mais fácil depois aplicamos det(T-λ~~

$$T = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = L_2 + L_3]{L_1 = -4L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 0 & 18 & 18 \\ 0 & -9 & -9 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 = \frac{L_1}{18}]{L_2 = \frac{L_1}{2} + L_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Então:

está errado

$$\det(T - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2 & -4 & -5-\lambda \end{pmatrix} = -5\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 5\lambda + 2) = 0$$

logo $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}$

c) A matriz D será dada por:

Continua nas últimas páginas

A matriz ortogonal P terá os seus vetores colunas obtidos dos vetores da base do $N(T - \lambda_i I)$, onde λ_i é os autovalores encontrados. Depois devemos normalizá-los para que a matriz seja ortogonal. Para garantir que eles sejam ortonormais aplicamos o processo de Gram-Schimit.

3a) Verdadeiro

Sabemos que $[T^*] = [T]^T$ e $[T] = P \cdot D \cdot P^{-1}$, transpondo essa última equação:

$[T^*] = (P \cdot D \cdot P^{-1})^T = (P^{-1})^T \cdot D^T \cdot P^T$, como $D = D^T$

$$\boxed{\text{i.e } T^* = (P^{-1})^T \cdot D \cdot P^T}$$

b) Falso:

Sabemos que T é auto-adjunto, logo:

$T = T^T$ aplicando T temos:

$T^2 = T \cdot T^T \Rightarrow I = T \cdot T^T = T \cdot T^{-1}$

Então a afirmação é Falsa, pois $T = T^{-1}$ satisfaz $T^2 = I$.

c) Falso.

Como V tem dimensão igual a 1 os subespaços possíveis são somente o próprio V ou o subespaço de dimensão nula, i.e, 0.

Portanto a afirmação é Falsa. Caso fosse um espaço de dimensão maior que 1

Poderíamos encontrar subespaço invariante, por exemplo em $\mathbb{R}^2$,
temos as retas que são subespaços invariantes. Rotação em $\mathbb{R}^2$?

f) Falso

Sabemos que:

multiplicidade algébrica $\geq$ multiplicidade geométrica

Assim o núcleo de T não tem dimensão K e sim no máximo dimensão K

2 c) O polinômio característico correto é:

$p(\lambda) = -\lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda$

portanto os seus autovalores são:

$\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -9$

---

2 c)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Encontrando P:

$$N(T-\lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad N(T-\lambda_1 I) = \{\alpha(1,2,-2) \mid \alpha \in \mathbb{R}$$

$$N(T-\lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = -2L_1 + L_2]{L_3 = L_3 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N(T-\lambda_2 I) = \{\alpha(-2,1,0) + \beta(2,0,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Assim deixaremos-os ortogonais:

$V_1 = (-2, 1, 0)$

$V_2 = (2,0,1) - \dfrac{\langle(-2,1,0),(2,0,1)\rangle \cdot (-2,1,0)}{\sqrt{5}} = \dfrac{(2\sqrt{5}-8, 4, \sqrt{5})}{\sqrt{5}}$

$|V_2| = \sqrt{(2\sqrt{5}-8)^2 + 16 + 5} = \sqrt{63 - \sqrt{5}}$

logo $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ X