Exame

Questão 1

1

Eq. do movimento: Para $0 \le t \le t_0$:

$$m\ddot{x} = -k(x-x_0) + F = -kx + (F + kx_0) \quad 0.5$$

Para $t > t_0$: $m\ddot{x} = -k(x-x_0)$; $\xi = x - x_0$

$$\Rightarrow m\ddot{\xi} = -k\xi + F \ ; \quad 0 \le t \le t_0 \qquad (1)$$

$$m\ddot{\xi} = -k\xi \ ; \quad t \ge t_0 \qquad (2)$$

A solução da homogênea é $\xi(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Uma solução particular para (1) é: $\xi = F/k$

As soluções gerais são:

$$\left.\begin{aligned} \xi_- &= \frac{F}{k} + Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \ ; \quad 0 \le t \le t_0 \\ \xi_+ &= Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t} \ ; \quad t \ge t_0 \end{aligned}\right] \ 0.5$$

Det. das constantes: $x(t=0) = x_0$

$$\Rightarrow \xi_-(t=0) = \dot{\xi}_-(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A = B = -\frac{F}{2k}} \quad 0.5$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi_- = x - x_0 = \frac{F}{k}(1 - \cos\omega t)} \quad 0 \le t \le t_0$$

As condições iniciais p/ a 2ª equação são as condições finais da 1ª: 0.5

$$\xi_+(t=t_0) = \frac{F}{k}(1 - \cos\omega t_0) = Ce^{i\omega t_0} + De^{-i\omega t_0}$$

$$\dot{\xi}_+(t=t_0) = \frac{F}{k}\,\omega \sin\omega t_0 = i\omega\left[Ce^{i\omega t_0} - De^{-i\omega t_0}\right]$$

$$\begin{cases} C = \dfrac{F}{2k} e^{-i\omega t_0}\left(1 - e^{i\omega t_0}\right) \\ D = \dfrac{F}{2k} e^{i\omega t_0}\left(1 - e^{-i\omega t_0}\right) \end{cases}$$

1.0

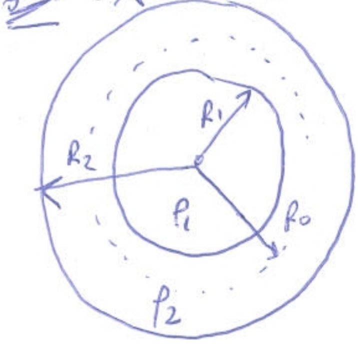
Substituindo:

$$\xi_+ = \frac{F}{2k}\left[\left(e^{-i\omega t_0} - 1\right) e^{i\omega t} + \left(e^{i\omega t_0} - 1\right) e^{-i\omega t}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{x - x_0 = \frac{F}{k}\left[\cos\omega(t - t_0) - \cos\omega t\right]} \quad ; \; t \geq t_0$$

0.5

Exame Questão 2: a) dentro da nuvem: $R_1 < R_0 < R_2$



R_0 = posição da partícula

Assume-se que toda massa para $r < R_0$ está na origem $r = 0$ e despreza-se p/ $r > R_0$:

$$F = \frac{GMm}{R_0}$$, onde M é a massa para $r < R_0$

$$M = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1 + \frac{4}{3}\pi \left(R_0^3 - R_1^3\right)\rho_2$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{4}{3}\pi G m \left[\frac{\rho_1 - \rho_2}{R_0^2} R_1^3 + \rho_2 R_0^{\cancel{3}}\right]\hat{r} \qquad (2.0)$$

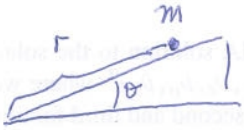
b) massa total: $M_T = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1 + \frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)\rho_2$

$$\vec{F} = -\frac{G M_T m}{R_0^2} = -\frac{Gm}{R_0^2}\left[\frac{4\pi}{3} R_1^3 \rho_1 + \frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)\rho_2\right]\hat{r}$$

$$= -\frac{4\pi G m}{3 R_0^2}\left[(\rho_1 - \rho_2) R_1^3 + \rho_2 R_2^3\right]\hat{r} \qquad (1.0)$$

Exame ~~[illegible]~~

Questão 3



$$L = T - U = \frac{1}{2} m\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) - mgr\sin\theta$$

$$\theta = \alpha t \; ; \quad \dot\theta = \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m\left(\dot r^2 + \alpha^2 r^2\right) - mgr\sin\alpha t} \quad 1.0$$

A Equação de Lagrange para r:

$$m\ddot r = m\alpha^2 r - mg\sin\alpha t \quad \text{ou} \quad \boxed{\ddot r - \alpha^2 r = -g\sin\alpha t} \quad 1.0$$

A solução geral é do tipo: $r = r_p + r_h$

(r_h é a solução da homogênea e r_p é uma solução particular)

$$r_h = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$

$$r_p = C\sin\alpha t \Rightarrow \ddot r_p = -C\alpha^2\sin\alpha t \Rightarrow C = \frac{g}{2\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{r(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t} + \frac{g}{2\alpha^2}\sin\alpha t} \quad 1.0$$

Para se determinar as constantes A e B $\Rightarrow$ $r(0) = r_0$ e $\dot r(0) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_0 = A + B \\ 0 = A - B + \dfrac{g}{2\alpha^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left[r_0 - \frac{g}{2\alpha^2}\right] \\ B &= \frac{1}{2}\left[r_0 + \frac{g}{2\alpha^2}\right] \end{aligned}} \quad 0.5$$

$$r(t) = \frac{1}{2}\left[r_0 - \frac{g}{2\alpha^2}\right]e^{\alpha t} + \frac{1}{2}\left[r_0 + \frac{g}{2\alpha^2}\right]e^{-\alpha t} + \frac{g}{2\alpha^2}\sin\alpha t$$

ou

$$r(t) = r_0\cosh\alpha t + \frac{g}{2\alpha^2}\left(\sin\alpha t - \sinh\alpha t\right)$$