3ª Prova

MA-311 - Matutino — Cálculo III

1º Semestre de 2012

Nome: GABARITO	RA:
Assinatura:	Turma.:

Esta prova tem um total de 5 questões valendo 10 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA!

1	2.0	
2	2.0	
3	2.0	
4	2.0	
5	2.0	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*2.0 pontos*) Dado que

$$f(x) = \ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt.$$

   (a) (0.5) Encontre uma representação em série de potências em torno de $x_0 = 0$.

   (b) (0.8) Encontre o intervalo de convergência da série encontrada acima.

   (c) (0.7) Encontre a soma de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

2. (*2.0 pontos*)

   (a) (0.4) Mostre que a equação diferencial $y'' + xy' + 2y = 0$ tem um ponto ordinário em $x_0 = 0$.

   (b) (0.8) Resolva a equação diferencial dada através de uma série de potências em torno do ponto $x_0 = 0$. Encontre a relação de recorrência.

   (c) (0.8) Encontre as duas soluções linearmente independentes indicando o termo geral de cada solução.

3. (*2.0 pontos*) Considere a equação diferencial $6x^2y'' + 7xy' - (x^2+2)y = 0$. Responda as seguintes questões SEM calcular os coeficientes.

   (a) (0.5) Escreva a forma geral da solução em séries de potências em torno do ponto $x = 2$.

   (b) (0.5) Qual é o raio mínimo de convergência da série de potências em (a)?

   (c) (0.5) Escreva a forma geral da solução em série de Frobenius em torno do ponto $x = 0$.

   (d) (0.5) Qual é o raio mínimo de convergência da série de Frobenius em (c)?

4. (*2.0 pontos*)

   (a) (0.9) Encontre a série de Fourier da extensão ímpar da função

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1, \\ 0 & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

   onde $f(x+4) = f(x)$.

   (b) (0.3) Esboce o gráfico da soma da série de Fourier calculada no item (a) no intervalo $-3 < x < 3$. (Sugestão: Use o Teorema de Convergência de Fourier)

   (c) (0.8) Encontre a soma de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

5. (*2.0 pontos*) Resolva o seguinte problema de valor de contorno usando o método de separação de variáveis justificando detalhadamente TODA a análise:

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx}; & 0 < x < 4, \\ u(0,t) = u(4,t) = 0; & t > 0, \\ u(x,0) = 5 \text{ sen } \frac{3\pi x}{4} + 8 \text{ sen } 2\pi x & 0 < x < 4. \end{cases}$$

$\underline{1(a)}$ $\quad \dfrac{1}{1-r} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k, \quad |r|<1.$

$$r=-t \implies \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k, \quad |t|<1.$$

0,2

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \quad \text{se } |x|<1.$$

0,3

$\underline{1(b)}$ $\quad a_k = \dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}, \quad \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \dfrac{|x|^{k+2}}{k+2}\,\dfrac{k+1}{|x|^{k+1}} = |x|\,\dfrac{k+1}{k+2}$

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{1+1/k}{1+2/k} = |x|$$

$L = |x| < 1 \implies$ a série converge pelo Critério da Razão

$\implies r=1$ é o raio de convergência

0,4

$\underline{x=1}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k, \quad b_k = \frac{1}{k}$

$b_k > b_{k+1}\ \forall k \geq 1$ e $\lim_{k\to\infty} b_k = 0 \implies$ a série converge pelo Critério para Séries Alternadas

$\underline{x=-1}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (série harmônica)

Resposta : $I = (-1, 1]$ é o intervalo de convergência

0,4

$\underline{1(c)}$ $\quad x = 1/2$

$$\ln(3/2) = \ln\left(1+\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

0,7

2) (*) $y'' + xy' + 2y = 0$

(a) $P(x) = 1$, $Q(x) = x$, $R(x) = 2$

$P(0) = 1 \Rightarrow x = 0$ é um ponto ordinário de (*)

0,4

(b) $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, $y' = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}$, $y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2}$

$$0 = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} + \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} 2 c_m x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} m c_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} 2 c_m x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+2)(m+1) c_{m+2} + (m+2) c_m \right] x^m$$

0,5

$$c_{m+2} = -\frac{(m+2) c_m}{(m+2)(m+1)} = -\frac{c_m}{m+1}, \quad m \geq 0 \quad \text{(relação de recorrência)}$$

0,3

(c) $c_2 = -\frac{c_0}{1}$, $c_3 = -\frac{c_1}{2}$, $c_4 = -\frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{1 \cdot 3}$

$c_5 = -\frac{c_3}{4} = \frac{c_1}{2 \cdot 4}$, $c_6 = -\frac{c_4}{5} = -\frac{c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5}$

$c_7 = -\frac{c_5}{6} = -\frac{c_1}{2 \cdot 4 \cdot 6}$

0,1

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}, \quad m \geq 1$$

$$c_{2m+1} = \frac{(-1)^m c_1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2m)} = \frac{(-1)^m c_1}{2^m (m!)}, \quad m \geq 1.$$

0,4

$$y = c_0 \underbrace{\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}\right)}_{y_1(x)} + c_1 \underbrace{\left(x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^m (m!)}\right)}_{y_2(x)}$$

0,3

3. $(*)\ 6x^2y'' + 7xy' - (x^2+2)y = 0$

(a) $P(x) = 6x^2$, $Q(x) = 7x$, $R(x) = -(x^2+2)$

$P(2) = 6.2^2 \neq 0 \overset{0,2}{\Longrightarrow} x = 2$ é um ponto ordinário de $(*)$. 0,1

0,2 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-2)^n$

(b) $p(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)} = \dfrac{7}{6x}$, $q(x) = -\dfrac{x^2+2}{6x^2}$

0,1 $x_1 = 0$ é a única singularidade de $p(x)$ e $q(x)$

0,2 $\begin{cases} \rho_1 = \text{raio de convergência da série de Taylor de } p(x) \text{ em } x_0 = 2 \\ \rho_2 = \text{raio de convergência da série de Taylor de } q(x) \text{ em } x_0 = 2 \end{cases}$

0,2 $\begin{cases} \rho_1 = \rho_2 = |x_1 - x_0| = |0-2| = 2 \\ \rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} = 2 \text{ é o raio mínimo de convergência} \end{cases}$

(c) $P(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ é um ponto singular de $(*)$

0,2 $\begin{cases} p_0 = \lim_{x\to 0} x\,p(x) = \lim_{x \to 0} \frac{7}{6} = \frac{7}{6} \\ q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{6}(x^2+2) = -\frac{1}{2} \end{cases}$ como os limites são finitos, $x = 0$ é um ponto singular regular

$0 = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r^2 + \frac{r}{6} - \frac{1}{3}$ (equação indicial) 0,1

$r_1 = \frac{1}{2}$ e $r_2 = -2/3$ são as raízes

$$y = c_1 x^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) + c_2 x^{-2/3}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right),$$

$x > 0$.

0,1 0,1

3(d) $\rho_1 =$ raio de convergência da série de Taylor de $x\,p(x) = \frac{7}{6}$ em $x_0 = 0$ (0,1)

$\rho_2 =$ raio de convergência da série de Taylor de $x^2 q(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}$ em $x_0 = 0$ (0,1)

(0,1) (0,1)

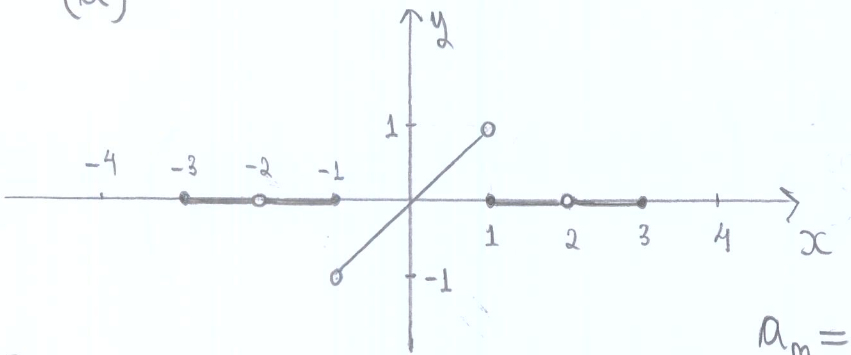
$x\,p(x)$ e $x^2 q(x)$ são polinômios $\Rightarrow$ $\rho_1 = \rho_2 = +\infty$

$\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} = +\infty$ é o raio mínimo.

(0,1)

(4) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$ $\quad f(x+4) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

(a)



$T = 4$ (período)

$L = \frac{4}{2} = 2$

$a_m = 0, \forall m \geq 0$, pois f é ímpar

0,3

$$b_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_0^1 x\, sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx$$

$$= \left(-\frac{2x}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2} + \frac{4}{\pi^2 m^2}\, sen\,\frac{m\pi x}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$

$$= -\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2\pi^2}\, sen\,\frac{m\pi}{2}$$

0,4

Série de Fourier da extensão de f:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2 m^2}\, sen\,\frac{m\pi}{2}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$$

0,2

(b)

$g(x)$ = soma da série de Fourier de $f(x)$

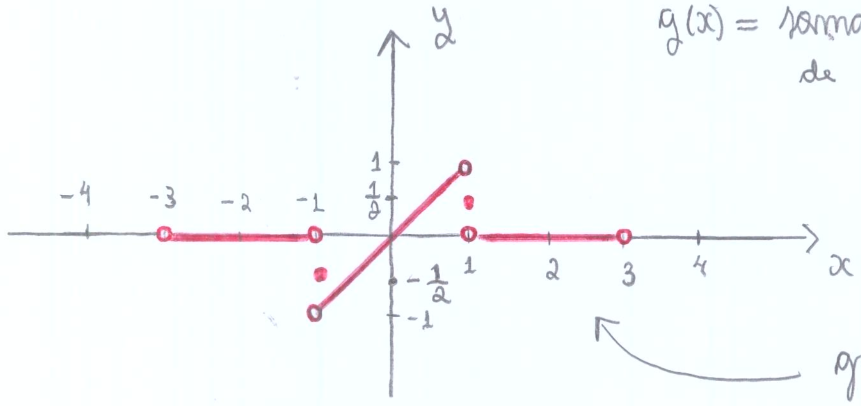


gráfico de $g(x)$

0,3

4 (c) $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2 m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{2} \right)$

$\boxed{x=1}$

$$\frac{1}{2} = g(1) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2 m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2}$$

0,3

$m = 2k,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} = \operatorname{sen} k\pi = 0$

$$m = 2k+1 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} = \operatorname{sen} \left(k\pi + \pi/2 \right) = (-1)^k \\ \cos \frac{m\pi}{2} = \cos \left(k\pi + \pi/2 \right) = 0 \end{cases}$$

0,3

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\,(-1)^k\,(-1)^k}{\pi^2\,(2k+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

0,2

5) $\alpha^2 = 9$, $L = 4$, $f(x) = 5 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{4} + 8 \operatorname{sen} 2\pi x$

(1) $u(x,t) = X(x)\,T(t)$, $u_{xx} = X''T$, $u_t = XT'$

0,2 (2) $\dfrac{X''}{X} = \dfrac{T'}{\alpha^2 T} = -\sigma$ (constante) $\Rightarrow \begin{cases} (3)\ X'' + \sigma X = 0 \\ (4)\ T' + \alpha^2 \sigma T = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 = u(0,t) = X(0)T(t) \\ 0 = u(L,t) = X(L)T(t) \end{cases}$ $T(t) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow u(x,t) = 0, \forall x, \forall t$

$\Rightarrow f(x) = u(x,0) = 0, \forall x$ (contradição)

(*)

0,2 Logo (5) $X(0) = X(L) = 0$

$\boxed{\sigma = 0}$ $X = k_1 x + k_2$

$0 = X(0) = X(L) \Rightarrow k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow X = 0$

$\Rightarrow u(x,t) = 0, \forall x,t$ (contradição por (*))

$\boxed{\sigma < 0}$ $\sigma = -\lambda^2, \lambda > 0 \Rightarrow X = k_1 e^{\lambda x} + k_2 e^{-\lambda x}$

$0 = X(0) = X(L) \Rightarrow k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow X = 0$

$\Rightarrow u(x,t) = 0, \forall x,t$ (contradição por (*))

0,2

$\boxed{\sigma > 0}$ $\sigma = \lambda^2, \lambda > 0 \Rightarrow X = k_1 \cos \lambda x + k_2 \operatorname{sen} \lambda x$

$0 = X(0) = k_1 \Rightarrow X = k_2 \operatorname{sen} \lambda x$

$0 = X(L) = \underset{\neq 0}{k_2} \operatorname{sen} \lambda L \Rightarrow \operatorname{sen} \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L = m\pi,\ m \geq 1$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{m\pi}{L},\ m \geq 1}$

$X_m(x) = \operatorname{sen} \dfrac{m\pi x}{L}$, $m \geq 1$, são soluções de (3) satisfazendo (5)

(4) $T' + \dfrac{\alpha^2 m^2 \pi^2}{L^2} T = 0 \Rightarrow T_m(t) = e^{-\alpha^2 m^2 \pi^2 t / L^2}$, $m \geq 1$

0,4

(b) $u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$,

$n \geq 1$, são soluções da equação do calor satisfazendo as condições de contorno.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-9n^2 \pi^2 t/16} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$$

0,4

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$$

$$= c_1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{4} + c_2 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} + c_3 \operatorname{sen}\frac{3\pi x}{4}$$

$$+ \cdots + c_8 \operatorname{sen} 2\pi x + \cdots$$

$$= f(x) = \underbrace{5}_{c_3} \operatorname{sen}\frac{3\pi x}{4} + \underbrace{8}_{c_8} \operatorname{sen} 2\pi x \qquad c_n = 0 \ \forall\, n \notin \{3,8\}$$

$$u(x,t) = 5\, e^{-9\cdot 3^2\cdot \pi^2 t/16} \operatorname{sen}\frac{3\pi x}{4}$$

$$+ 8\, e^{-9\cdot 8^2 \cdot \pi^2 t/16} \operatorname{sen} 2\pi x$$

0,6