ME-210 Probabilidade I

Lista 2

1. Para quaisquer eventos A, B e C mostre que
(a) se $A \subset B$, então $B^c \subset A^c$;
(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. O atendente de um centro médico codifica os pacientes que chegam ao pronto-socorro de acordo com terem ou não um plano de saude (codificando 1 para aqueles que tem convênio e 0 para aqueles que não tem) e de acordo com sua condição física: (b) para boa, (r) para regular e (s) para séria. Considere o experimento de selecionar ao acaso um paciente que chega ao pronto-socorro de acordo com tal codificação.
(a) Dê o espaço amostral (espaço de estados) neste experimento;
(b) se A é o evento que o paciente está em séria condições, especifique os resultados em A;
(c) se B é o evento que o paciente não tem convênio, especifique os resultados em B;
(d) liste os resultados em $B^c \cup A$.

3. Sejam A e B eventos disjuntos tais que $\mathbf{P}(A) = 0.3$ e $\mathbf{P}(B) = 0.5$. Qual é a probabilidade que
(a) A ou B ocorra;
(b) A ocorra, mas B não ocorra.

4. Os seguintes dados foram obtidos em uma pesquisa feita com 1000 entrevistados: 312 profissionais liberais, 470 pessoas casadas, 525 pessoas com superior completo, 42 profissionais liberais com superior completo, 147 pessoas casadas com superior completo, 86 profissionais liberais casados e 25 profissionais liberais casados com curso superior completo. Mostre que estes dados devem estar errados.

5. Num grupo de 100 pessoas tem 25 pessoas que fumam, 40 bebem e 10 fumam e bebem. Escolha uma pessoa deste grupo ao acaso. Qual é a probabilidade de que a pessoa escolhida
(a) bebe, mas não fuma;
(b) não fuma e não bebe?

6. Pôquer com dados é jogado lançando simultaneamente 5 dados honestos. Mostre que:
(a) $\mathbf{P}[\text{nenhum igual}] = 0.0926$;
(b) $\mathbf{P}[\text{um par}] = 0.4630$;
(c) $\mathbf{P}[\text{dois pares}] = 0.2315$;
(d) $\mathbf{P}[\text{uma trinca}] = 0.1543$;
(e) $\mathbf{P}[\text{full house}] = 0.0386$;
(f) $\mathbf{P}[\text{quadra}] = 0.0193$;

(g) $\mathbf{P}$[quina] $= 0.0008$
("full house"=um par e uma trinca).

7. Uma comunidade consiste de 20 famílias, das quais 4 tem uma criança, 8 tem duas crianças, 5 tem três crianças, 2 tem quatro crianças e 1 tem cinco craiças.
(a) Se uma família é escolhida ao acaso, qual é a probabilidade de que esta família tenha i crianças, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
(b) Se uma criança é escolida ao acaso, qual é a probabilidade que ela venha de uma família com i crianças, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

8. Dois dado são lançados um após o outro.
(a) Qual é a probabilidade de que o segundo dado apresente um valor maior do que primeiro?
(b) Qual é a probabilidade de que soma dos resultados seja igual a i? Faça a conta para $i = 1, 2, 3, 7$ (e para outros valores, se tiver vontade).
(c) Se os dados são lançados até soma dos dois resultados ser igual a 5 ou 7, qual é a probabilidade de que os lançamentos parem com aparecimento de soma igual a 5?

9. Num grupo de 20 pessoas, qual é a probabilidade de que entre 12 mêses do ano há 4 com exatamente 2 aniversários (das pessoas do grupo) e 4 com exatamente 3 aniversários?

10. Numa urna há 4 bolinhas brancas, 3 verdes e 5 azuis. Escolhemos 4 bolinhas. Qual é a probabilidade de que foram escolhidas 2 bolinhas de uma cor e 2 bolinhas de outra cor? Qual é a probabilidade de que todas as bolinhas escolhidas são da mesma cor? Considere dois casos: escolha sem reposição e com reposição.

ME-210: Resolução da Lista 02

Resolução extra-oficial feita por um dos monitores

Questão 1:

a. Seja $x \in B^c$. Para provarmos que $B^c \subset A^c$, basta mostrarmos que $x \in A^c$.

Como $x \in B^c$, $x \notin B$ e, já que $A \subset B$, concluímos que $x \notin A$. Assim, $x \in A^c$, como queríamos demonstrar.

b. Vamos provar a ida e a volta ao mesmo tempo

$$x \in A^c \cap B^c \iff x \in A^c, x \in B^c \iff x \notin A, x \notin B \iff x \notin A \cup B \iff x \in (A \cup B)^c$$

Logo, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

c. ($\Leftarrow$) Sejam $x \in A \cap B$ e $y \in A \cap C$. Então, $x \in A$, $x \in B$, $y \in A$ e $y \in C$. Logo, em $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, temos os elementos de A que estão também em B ou em C, ou seja, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

($\Rightarrow$) Se $x \in A \cap (B \cup C)$, $x \in A$ e $x \in B \cup C$, o que implica que $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Assim, temos $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Juntando os dois resultados, temos que $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$

Questão 2:

a. Existem $2 * 3 = 6$ resultados no espaço amostral, a saber

$$\{(1, s), (1, b), (1, r), (0, s), (0, b), (0, r)\}$$

b. $A = \{(0, s), (1, s)\}$

c. $B = \{(0, s), (0, b), (0, r)\}$

d. Primeiro, determinamos B^c:

$$B^c = \{(1, b), (1, r), (1, s)\}$$

Logo,

$$B^c \cup A = \{(1, s), (1, b), (1, r), (0, s)\}$$

Questão 3:
Como A e B são eventos disjuntos, $A \cap B = \varnothing$.

a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(\varnothing) = P(A) + P(B) = 0,3 + 0,5$

Logo,

$$P(A \cup B) = 0,8$$

b. $P(A \cap B^c) = P(A \cup B) - P(B) = P(A)$

Logo,

$$P(A \cap B^c) = 0,3$$

Se os eventos fossem independentes, teríamos $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,15$. Assim, os resultados se alterariam para:

a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,5 - 0,15$

Logo,

$$P(A \cup B) = 0,65$$

b. $P(A \cap B^c) = P(A \cup B) - P(B) = 0,65 - 0,5$

Logo,

$$P(A \cap B^c) = 0,15$$

Questão 4:

Já que $312 + 470 + 525 - 42 - 147 - 86 + 25 = 1057$, o número de pessoas que são profissionais liberais ou casadas ou tem ensino superior completo é maior de que o número total de entrevistados, ou que é impossível.

Questão 5:

(a) $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{F}^C) = 0.30$

(b) $P(\mathrm{B}^C \cap \mathrm{F}^C) = 0.45$

Questão 6:

O número total de resultados possíveis do lançamento dos dados é 6^5, já que cada um dos dados pode assumir qualquer um dos seis valores possíveis.

a. O primeiro dado pode assumir qualquer um dos seis valores. Os dados seguintes não podem assumir os valores mostrados pelos dados anteriores. Assim, temos que o número de resultados favoráveis é

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$$

A probabilidade é, então

$$P(\text{nenhum igual}) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6^5} \cong 0,0926$$

b. Podemos escolher o valor que o par assumirá como sendo qualquer um dos seis valores possíveis e podemos escolher quaisquer dois dos cinco dados para constituirem o par. Para o restante dos dados, seguimos o mesmo raciocinio do item a), já que eles não podem assumir valores iguais entre si ou igual ao do par. Assim, obtemos

$$6 \times \binom{5}{2} \times 5 \times 4 \times 3$$

resultados favoráveis. A probabilidade é, então

$$P(\text{um par}) = \frac{6 \times \binom{5}{2} \times 5 \times 4 \times 3}{6^5} \cong 0,4630$$

c. Seguindo um raciocínio parecido com o do item b), podemos escolher qualquer um dos seis valores para o primeiro par, que pode ser constituído pela escolha de quaisquer dois dos cinco dados. Para o segundo par, podemos escolher qualquer um dos cinco valores restantes e quaisquer dois dos três dados restantes. Para os outros dois dados, seguimos a mesma lógica do item a). No entanto, já que a ordem dos pares de dados não importa, devemos dividir o resultado por 2!. Assim, temos

$$\frac{6 \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times 5 \times 4}{2}$$

resultados favoráveis. Logo, a probabilidade é

$$P(\text{dois pares}) = \frac{\frac{6 \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times 5 \times 4}{2}}{6^5} \cong 0,2315$$

d. Podemos escolher qualquer um dos seis valores para a trinca e quaisquer três dos cinco dados para compô-la. Os valores dos outros dados são escolhidos como no item a). Assim, temos

$$6 \times \binom{5}{3} \times 5 \times 4$$

resultados favoráveis. Logo, a probabilidade é

$$P(\text{uma trinca}) = \frac{6 \times \binom{5}{3} \times 5 \times 4}{6^5} \cong 0,1543$$

e. Podemos escolher qualquer um dos seis valores para a trinca e quaisquer três dos cinco dados para compô-la. Para a dupla, podemos escolher qualquer um dos cinco valores restantes e temos que escolher os últimos dois dados restantes. Assim, o número de resultados favoráveis é

$$6 \times \binom{5}{3} \times 5 \times \binom{2}{2}$$

Logo, a probabilidade é

$$P(\text{fullhouse}) = \frac{6 \times \binom{5}{3} \times 5 \times \binom{2}{2}}{6^5} \cong 0,0386$$

f. Podemos escolher qualquer um dos seis valores para a quadra e quaisquer quatro dos cinco dados. O dado que sobra poderá assumir qualquer um dos cinco valores restantes. Assim, temos

$$6 \times \binom{5}{4} \times \binom{1}{1} \times 5$$

resultados favoráveis. Logo, a probabilidade é

$$P(\text{quadra}) = \frac{6 \times \binom{5}{4} \times \binom{1}{1} \times 5}{6^5} \cong 0,0193$$

g. Para formar uma quina, todos os dados devem assumir o mesmo valor, que pode ser qualquer um dos seis. Assim, temos apenas 6 resultados favoráveis. Logo, a probabilidade é

$$P(\text{quina}) = \frac{6}{6^5} \cong 0,0008$$

Questão 7:

a. Supondo que todas as famílias tenham a mesma probabilidade de serem escolhidas, a probabilidade P_i de escolher uma família com i crianças é dada por

$$P_i = \frac{n_i}{n}$$

onde n_i é o número de famílias com i crianças e n é o número total de famílias. Logo, obtemos as probabilidades

$$P_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \qquad P_2 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \qquad P_3 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \qquad P_4 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \qquad P_5 = \frac{1}{20}$$

Ou ainda

$$P_1 = 0.2 \qquad P_2 = 0.4 \qquad P_3 = 0.25 \qquad P_4 = 0.1 \qquad P_5 = 0.05$$

b. Supondo que todas as crianças tenham a mesma probabilidade de serem escolhidas, a probabilidade de a criança escolhida vir de uma família com i crianças é dada por

$$P_i = \frac{n_i}{n}$$

onde n_i é o número de crianças que pertencem a uma família com i crianças e n é o número total de crianças. Do enunciado, temos

$$n = 4 \times 1 + 8 \times 2 + 5 \times 3 + 2 \times 4 + 5 \times 1 = 48$$

Logo, as probabilidades são

$$P_1 = \frac{4}{48} = \frac{1}{24} \qquad P_2 = \frac{8 \times 2}{48} = \frac{1}{6} \qquad P_3 = \frac{5 \times 3}{48} = \frac{5}{16} \qquad P_4 = \frac{2 \times 4}{48} = \frac{1}{12} \qquad P_5 = \frac{1 \times 5}{48}$$

Resumindo

$$P_1 = \frac{4}{48} \qquad P_2 = \frac{16}{48} \qquad P_3 = \frac{15}{48} \qquad P_4 = \frac{8}{48} \qquad P_5 = \frac{5}{48}$$

Podemos verificar que as probabilidades somam 1, como deve ser.

.

Questão 8:

a. O número total de resultados é dado por $6^2 = 36$, já que cada dado pode assumir seis valores. Para determinar o número de resultados favoráveis, vamos verificar os valores que o segundo dado pode assumir para cada escolha do valor do primeiro dado. Se o primeiro dado tiver "1", o segundo dado pode assumir os valores "2", "3", "4", "5"e "6". Se o primeiro dado tiver o valor "2", o segundo poderá assumir os valores "3", "4", "5"e "6". Continuando com este raciocínio, o número de resultados favoráveis é

$$1 \times 5 + 1 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 15$$

Assim, a probabilidade desejada é

$$P(2^{\text{o}} \text{ dado} > 1^{\text{o}} \text{ dado}) = \frac{15}{36}$$

Poderíamos obter este resultado pensando em uma matriz $6x6$, com o número da linha correspondendo ao valor do primeiro dado e o número da coluna, ao valor do segundo dado. Assim, o número de resultados favoráveis é o número de elementos acima da diagonal principal e o número total de resultados possíveis é o número de elementos da matriz.

b. Para cada valor do primeiro dado, temos um único valor possível para o segundo dado que satisfaz a condição. Por isso, basta concentrarmos nossa atenção nos valores que podem ser assumidos pelo primeiro dado. Para que a soma dos resultados seja i, o primeiro dado pode assumir os valores de 1 a $i - 1$, já que o mínimo valor que o segundo dado pode ter é 1. Assim, para um valor de i fixado, temos $i - 1$ resultados favoráveis. Logo, a probabilidade desejada é dada por

$$P(i) = \frac{i-1}{36}$$

Para os casos em que $i = 1, 2, 3, 7$, temos

$$P(1) = \frac{1-1}{36} = 0 \qquad P(2) = \frac{2-1}{36} = \frac{1}{36} \qquad P(3) = \frac{3-1}{36} = \frac{1}{18} \qquad P(7) = \frac{7-1}{36} = \frac{1}{6}$$

Se pensarmos na matriz do item a), o número de resultados favoráveis para cada valor de i é dado pelo número de elementos da "diagonal"paralela à diagonal secundária que contém o elemento $(1, i - 1)$.

c. Uma vez que os resultados de lançamentos anteriores não influenciam no resultado de um lançamento, pois os eventos são independentes, podemos definir o seguinte espaço amostral

$$\Omega = \{T_5, T_7\}$$

onde os eventos T_5 e T_7 significam, respectivamente, parar os lançamentos com a soma 5 ou com a soma 7. Sabemos que esses são os únicos dois eventos do espaço amostral e eles são mutuamente exclusivos, pois os dados sao lançados até que um deles aconteça. No entanto, deve-se notar que esses eventos não são equiprováveis. Sabemos do item b) que a probabilidade de se obter uma soma 7 é de $P(7) = \frac{1}{6}$. Usando a relação do item b) para $i = 5$, obtemos a probabilidade de se obter soma 5 como sendo $P(5) = \frac{1}{9}$. Comparando as duas probabilidades, vemos que a probabilidade de se obter a soma 5 equivale a $\frac{2}{3}$ da probabilidade de se obter soma 7, o que nos fornece a relação

$$P(T_5) = \frac{2}{3}P(T_7)$$

Além disso, pelos motivos já explicitados anteriormente, devemos ter

$$P(T_5) + P(T_7) = 1$$

Juntando as duas relações, obtemos

$$P(T_5) = \frac{2}{5} \qquad P(T_7) = \frac{3}{5}$$

Logo, a probabilidade desejada é $P(T_5) = 0.4$. Podemos resolver este problema de outra maneira mais genérica, que pode ser aplicada a casos em que o resultado de um lançamento depende de resultados anteriores. Sabemos que $P(5) = \frac{1}{9}$ e $P(7) = \frac{1}{6}$, o que implica que a probabilidade de não ocorrer uma soma 5 ou uma soma 7 é

$$p = 1 - P(5) - P(7) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$$

Seja E_n o evento em que ocorre uma soma 5 no n-ésimo lançamento e não ocorre soma 5 ou 7 nos $n-1$ lançamentos anteriores. Como os lançamentos são independentes, temos

$$P(E_n) = \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}\frac{1}{9}$$

A probabilidade de que os lançamentos parem com a soma 5 é a soma das probabilidades dos eventos E_n para todos os valores de n. Assim, temos

$$P(T_5) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}\frac{1}{9} = \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{n}$$

Reconhecendo o somatório como a soma dos termos de um PG de razão $\frac{13}{18}$ e primeiro termo 1, concluímos que

$$P(T_5) = \frac{1}{9}\frac{1}{\left(1 - \frac{13}{18}\right)} = \frac{2}{5}$$

confirmando nosso resultado anterior. Podemos obter $P(T_7)$ a partir de $P(T_7) = 1 - P(T_5)$.

Questão 9:

Pensemos em nosso experimento como sendo perguntar a cada uma das pessoas o mês de seu aniversário. Uma vez que cada pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos 12 meses do ano, independentemente das outras, o número total de resultados possíveis é 12^{20}. Agora, precisamos determinar o número de resultados favoráveis. Podemos fazer isso da seguinte maneira: primeiramente, escolhemos 4 dos 12 meses nos quais haverá 2 aniversários. Em seguida, escolhemos 4 dos 8 meses restantes nos quais haverá 3 aniversários. Agora, precisamos escolher as pessoas que farão aniversário em cada mês. Devemos escolher 2 das 20 pessoas para fazerem aniversário no primeiro mês em que há 2 aniversários, 2 das 18 pessoas restantes para fazerem aniversário no segundo mês com 2 aniversários, e assim por diante. Ao final deste processo, teremos 12 pessoas sobrando, as quais devemos distribuir (de modo análogo ao que fizemos antes) nos meses em que há 3 aniversários. Assim, há

$$\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{20}{2}\binom{18}{2}\binom{16}{2}\binom{14}{2}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$$

resultados favoráveis. Logo, a probabilidade desejada é dada por

$$P = \frac{\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{20}{2}\binom{18}{2}\binom{16}{2}\binom{14}{2}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{12^{20}}$$

Questão 10:

- **Sem reposição:** O número total de maneiras que podemos escolher 4 das 12 bolinhas contidas na urna é $\binom{12}{4} = 495$.

  Podemos escolher duas bolinhas de uma cor e duas bolinhas de outra cor de três maneiras: 2 brancas e 2 verdes, 2 brancas e 2 azuis, 2 azuis e 2 verdes. No primeiro caso, teremos $\binom{4}{2}\binom{3}{2}\binom{5}{0}$ maneiras. No segundo, teremos $\binom{4}{2}\binom{3}{0}\binom{5}{2}$ maneiras. No terceiro, teremos $\binom{4}{0}\binom{3}{2}\binom{5}{2}$ maneiras. Juntando tudo, haverá

  $$\binom{4}{2}\binom{3}{2}\binom{5}{0} + \binom{4}{2}\binom{3}{0}\binom{5}{2} + \binom{4}{0}\binom{3}{2}\binom{5}{2}$$

  resultados favoráveis. Logo, a probabilidade desejada é

  $$P(\text{duas de uma cor, duas de outra}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{2}\binom{5}{0} + \binom{4}{2}\binom{3}{0}\binom{5}{2} + \binom{4}{0}\binom{3}{2}\binom{5}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{108}{495}$$

  Se quisermos que todas as bolinhas sorteadas sejam da mesma cor, devemos notar que não é possível que todas elas sejam verdes, já que há menos bolinhas verdes que o número de bolinhas sortadas. Assim, devemos verificar de quantos modos podemos escolher todas as bolinhas como sendo brancas ou azuis. Seguindo o mesmo raciocínio anterior, obtemos

  $$\binom{4}{4}\binom{3}{0}\binom{5}{0} + \binom{4}{0}\binom{3}{0}\binom{5}{4}$$

resultados favoráveis, em que o primeiro termo representa todas as bolinhas sorteadas serem brancas e o segundo, azuis. Logo, a probabilidade desejada é

$$P(\text{todas da mesma cor}) = \frac{\binom{4}{4}\binom{3}{0}\binom{5}{0} + \binom{4}{0}\binom{3}{0}\binom{5}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{6}{495}$$

- **Com reposição:** Para resolver este item, vamos considerar a ordem em que as bolinhas são retiradas como sendo relevante. Neste caso, em cada retirada, podemos pegar qualquer uma das 12 bolinhas. Assim, o número total de possibilidades é dado por 12^4.

  Se quisermos que duas bolinhas sejam de uma cor e duas de outra, devemos considerar os mesmos casos do item anterior: 2 brancas e 2 verdes, 2 brancas e 2 azuis, 2 azuis e 2 verdes. Para cada um desse casos, vamos fixar uma ordem para as bolinhas e calcular a probabilidade de aquele arranjo específico ocorrer e, depois, permutaremos as posições. Para isso, usaremos a regra da multiplicação, levando em conta que cada retirada de uma bolinha é um experimento independente.

  Para o primeiro caso, temos que a probabilidade de obtermos um arranjo específico é dada por $\frac{4^2 3^2}{12^4}$. Para o segundo caso, a probabilidade é de $\frac{4^2 5^2}{12^4}$. Para o terceiro caso, a probabilidade é de $\frac{5^2 3^2}{12^4}$. Em cada um deles, temos $\binom{4}{2}$ arranjos possíveis. Podemos chegar a essa conclusão lembrando que as bolinhas de mesma cor são indistinguíveis. Então, para cada arranjo, podemos escolher duas das posições nas quais queremos as bolinhas de uma cor e as posições das bolinhas da outra cor já ficarão determinadas.

  Logo, a probabilidade desejada é dada por

  $$P(\text{duas de uma cor, duas de outra}) = \frac{\binom{4}{2}(4^2 3^2 + 4^2 5^2 + 5^2 3^2)}{12^4}$$

  Se quisermos que todas as bolinhas sejam da mesma cor, devemos somar as probabilidades de que todas as bolinhas retiradas sejam brancas, verdes ou azuis. Logo, a probabilidade desejada é

  $$P(\text{todas da mesma cor}) = \frac{4^4 + 3^4 + 5^4}{12^4}$$