"Teste"

Use as operações usuais nos exercícios abaixo:

1- Prove as seguintes propriedades de espaço vetorial para o espaço das funções $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a) elemento neutro: Existe $Z \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $f \oplus Z = f$ qualquer que seja $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b) oposto: Para cada $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existe $w_f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $f \oplus w_f = Z$.

2 - Seja $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ;\ x + 2y + \cos(z) = 0 \right\}$.

F é um espaço vetorial?

Resolução:

1. a) Queremos mostrar que $\exists\, Z \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $f \oplus Z = f \quad \forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Tomemos como candidata a Z a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Provemos agora que esta candidata satisfaz

$f \oplus g = f \quad \forall f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Para isto seja $f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

arbitrária. Pela definição de soma em $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$f \oplus g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é tal que } (f \oplus g)(x) \overset{\text{def } \oplus \text{ em } F(\mathbb{R},\mathbb{R})}{=} f(x) + g(x)$$

$$\underset{\text{def de } g}{=} f(x) + 0 \underset{\text{propriedade de } \mathbb{R}}{=} f(x)$$

Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Logo $f \oplus g$ e f tem mesmo domínio, conta-domínio e

$(f \oplus g)(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Portanto $f \oplus g = f$.

Como f foi escolhida arbitrariamente temos que

$f \oplus g = f \quad \forall f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Portanto existe um

vetor elemento neutro em $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, basta tomar $Z = g$.

b) Tomemos como candidata a w_f de uma

função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qualquer dada a função

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

dessa forma

$f \oplus g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $(f \oplus g)(x) \overset{\text{def } \oplus \text{ em } F(\mathbb{R},\mathbb{R})}{=} f(x) + g(x) =$

$\overset{\text{def de } g}{=} f(x) + (-f(x)) =$

$\overset{\text{prop de } \mathbb{R}}{=} 0 = Z(x)$ def de Z

Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Como $f \oplus g$ e Z tem mesmo domínio e contradomínio e $(f \oplus g)(x) = Z(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que $f \oplus g = Z$

Ou seja g satisfaz os requisitos de w_f; e portanto tal w_f existe. Como f foi arbitrária, temos que existe w_f para cada $f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e portanto a propriedade está demonstrada.

2 - Vamos fazer o exercício de 4 maneiras diferentes:

a) Temos que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \in F$ pois $0 + 2 \cdot 0 + \cos(\pi/2) = 0$ e

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} \in F$ pois $1 + 2 \cdot 0 + \cos(\pi) = 0$.

Como a soma usual de $\mathbb{R}^3$ nos daria que

$\begin{pmatrix}0\\0\\\pi/2\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1\\0\\\pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\\frac{3\pi}{2}\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\0\\3\pi/2\end{pmatrix} \notin F$, pois $1+2\cdot 0+\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$,

temos que a soma em F ($\oplus|_{F\times F} \to F$) não está bem definida, logo F não é um espaço vetorial com esta soma.

Para as soluções b), c) e d) vamos usar o fato de que $F \subset \mathbb{R}^3$, e que sabemos que $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial, logo F será um espaço vetorial se, e somente se, for um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

b) Sabemos que todo subespaço contém o elemento neutro do espaço. Como $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ é o elemento neutro de $\mathbb{R}^3$ mas $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \notin F$, pois $0+2\cdot 0+\cos(0) = 1 \neq 0$ temos que F não é um subespaço e portanto não é um espaço vetorial.

c) Como $\begin{pmatrix}0\\0\\\pi/2\end{pmatrix} \in F$, pois $0+2\cdot 0+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e

$\begin{pmatrix}1\\0\\\pi\end{pmatrix} \in F$, pois $1+2\cdot 0+\cos(\pi) = 0$ mas

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} \notin F$, pois $1+2\cdot 0+\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$,

temos que F não é um subespaço e consequentemente não é um espaço vetorial.

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \in F$, pois $0+2\cdot 0+\cos\left(\pi/2\right) = 0$, mas

$4 \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} \notin F$, pois $0+2\cdot 0+\cos(2\pi) = 1 \neq 0$.

Logo F não é um subespaço e consequentemente não é um espaço vetorial.