ME-310 Probabilidade II

Lista 2

1. Uma máquina funciona enquanto pelo menos 3 das 5 turbinas funcionam. Se cada turbina funciona um tempo aleatório com densidade xe^{-x}, $x > 0$, independentemente das outras, calcule a distribuição de tempo de funcionamento da máquina.
Dica: estatísticas de ordem.

2. Considere uma amostra de tamanho 5 da distribuição Uniforme $(0, 1)$. Ache a probabilidade de que a mediana está no intervalo $(1/4, 3/4)$.

3. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x, y) = \frac{1}{x^2y^2}$, $x \geq 1$, $y \geq 1$. Calcule a densidade conjunta das variáveis $U = XY$ e $V = X/Y$.

4. Sejam X e Y v.a. i.i.d. Uniformes (0,1). Calcule a densidade conjunta de
(a) $U = X + Y$, $V = X/Y$;
(b) $U = X$, $V = X/Y$.

5. Sejam X e Y v.a. independentes Uniformes $(0, 1)$. Mostre que para qualquer $\alpha > 0$

$$\mathbb{E}(|X - Y|)^\alpha = \frac{2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}.$$

6. N bolas (númeradas de 1 até N) são distribuídas em N urnas (também numeradas de 1 até N) da maneira que para cada i a bola i vai para uma das urnas $1, \ldots, i$ com probabilidade $1/i$ (independentemente das outras bolas). Calcule
(a) o número esperado das urnas vazias;
(b) a probabilidade de que nenhuma urna está vázia.

7. Se $\mathbb{E}X = 1$ e $\operatorname{Var} X = 2$, calcule $\mathbb{E}(2 + X)^2$ e $\operatorname{Var}(1 + 3X)$.

8. Dois dados são lançados. Seja X a soma dos resultados, e Y a diferença (mas não o valor absoluto da diferença) entre os resultados no primeiro e no segundo dados. Calcule $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

9. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-(y + \frac{x}{y})}, & \text{se } x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

10. Seja $X \sim U[-\pi, \pi]$, e considere v.a. $Y = \operatorname{sen} X$, $Z = \cos X$.
As v.a. Y, Z são independentes?
Calcule $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}Z$, $\operatorname{Cov}(Y, Z)$.

Probabilidade 2 - ME310 - Lista 2

September 14, 2012

Lembrando:

1. Estatística de ordem, pg 328 Ross: $f_{x_j}(x) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \cdot F(x)^{j-1} \cdot (1 - F(x))^{n-j} \cdot f(x)$

2. Distribuição de probabilidade conjunta de funções de variáveis aleatórias, pg. 330 Ross: $f_{Y_1,Y_1}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_1}(x_1, x_2) \cdot |\mathbf{J}(x_1, x_2)|^{-1}$

3. Covariância: $Cov(X,Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y))) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$

4. Variância: $Var(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$

1. Uma máquina funciona enquanto pelo menos 3 das 5 turbinas funcionam. Se cada turbina funciona um tempo aleatório com densidade $x \cdot e^{-x}$, x > 0, independentemente das outras, calcule a distribuição de tempo de funcionamento da máquina. Dica: estatísticas de ordem.

Resp. 1)

da equação 1, sabemos que $f_{x_j}(x) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \cdot F(x)^{j-1} \cdot (1-F(x))^{n-j} \cdot f(x)$, se três turbinas funcionam então o avião funciona, como $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, basta calcularmos a probabilidade da turbina x_3 estar funcionando (se ela não estiver, o avião não estará).

para isso, temos $n = 5, j = 3$

$f_{X_3}(T) = \frac{5!}{2!2!} \cdot F_X(T)^2 \cdot (1 - F_X(T))^2 \cdot f(T) = 30 \cdot (1 - (1+T)e^{-T})^2 \cdot ((1+T)e^{-T})^2 \cdot T \cdot e^{-T}$

2. Considere uma amostra de tamanho 5 da distribuição $Uniforme(0,1)$. Ache a probabilidade de que a mediana está no intervalo $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

Resp. 2)

De novo, usamos estatística de ordem.

Nesse caso, temos que lembrar que a mediana amostral é o elemento $x+1$ em uma amostra de $2 \cdot x + 1$ elementos, nesse caso $x = 2$, então temos que calcular a distribuição do terceiro elemento:

Usando a equação 1 temos:

$f_{x_3}(x) = \frac{5!}{(5-3)!(3-1)!} \cdot F(x)^{3-1} \cdot (1-F(x))^{5-3} \cdot f(x) = 30 \cdot x^2 \cdot (1-x)^2 \cdot \mathbf{I}_{x \in (0,1)}$

Para calcular a probabilidade de estar no intervalo $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ fazemos:

$P(\frac{1}{4} \leq X_3 \leq \frac{3}{4}) = \int_{1/4}^{3/4} 30 \cdot x^2 \cdot (1-x)^2 dx = \int_{1/4}^{3/4} 30 \cdot (x^2 - 2 \cdot x^3 + x^4) dx = 30 \cdot (\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5})|_{x=1/4}^{x=3/4} = 0,0265$

3. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x,y) = \frac{1}{x^2 \cdot y^2} \cdot \mathbf{I}_{\{x \geq 1, y \geq 1\}}$. Calcule a densidade conjunta das variáveis $U = XY$ e $V = X/Y$.

Resp. 3)

$f_{U,V}(U,V) = f_{X,Y}(x,y) \cdot |\mathbf{J}(x,y)|^{-1}$

- $\mathbf{J}(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix} = -\frac{x}{y} - \frac{x}{y} = -2 \cdot \frac{x}{y}$

- $f_{U,V}(U,V) = \frac{\frac{1}{x^2 \cdot y^2} \cdot \mathbf{I}_{\{x\geq 1, y\geq 1\}}}{\left|-2\cdot \frac{x}{y}\right|} = \frac{\frac{1}{x^2 \cdot y^2} \cdot \mathbf{I}_{\{x\geq 1, y\geq 1\}}}{2\cdot \frac{x}{y}} = \frac{y}{2x} \cdot \frac{1}{x^2 y^2} \cdot \mathbf{I}_{\{x\geq 1, y\geq 1\}} = \frac{1}{2VU^2} \cdot \mathbf{I}_{\{U\geq 1, V>0\}}$

4. Sejam X e Y v.a. i.i.d. $Uniformes(0,1)$. Calcule a densidade conjunta de

a) $U = X + Y$, $V = X/Y$

Resp. a) $f_X(a) = f_Y(a) = 1 \cdot \mathbf{I}_{\{a \in (0,1)\}}$

- $\mathbf{J}(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}$

- $f_{U,V}(u,v) = \frac{1\cdot \mathbf{I}_{\{x\geq 1, y\geq 1\}}}{\left|-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}\right|} = \frac{1\cdot \mathbf{I}_{\{x\geq 1, y\geq 1\}}}{\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}} = \frac{1\cdot \mathbf{I}_{\{x\geq 1, y\geq 1\}}}{\frac{x+y}{y^2}} = \frac{(\frac{u}{1+v})^2 \cdot \mathbf{I}_{\{x\geq 1, y\geq 1\}}}{u} = \frac{u\cdot \mathbf{I}_{\{2\geq u\geq 0, v>0\}}}{(1+v)^2}$

b) $U = X$, $V = X/Y$.

- $\mathbf{J}(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix} = -\frac{x}{y^2}$

- $f_{U,V}(u,v) = \frac{1\cdot \mathbf{I}_{\{x\geq 1, y\geq 1\}}}{\left|-\frac{x}{y^2}\right|} = \frac{1\cdot \mathbf{I}_{\{x\geq 1, y\geq 1\}}}{\frac{x}{y^2}} = \frac{u}{v^2} \cdot \mathbf{I}_{\{u\geq 0, v>0\}}$

5. Sejam X e Y v.a. independentes $Uniformes(0,1)$. Mostre que para qualquer $\alpha > 0$: $\mathbf{E}(|X-Y|^\alpha) = \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$

Resp. 5)

$\mathbf{E}(|X-Y|^\alpha) = \int\int_{x\in(0,1), y\in(0,1)} |x-y|^\alpha \, dxdy = \int\int_{x<y} (y-x)^\alpha dxdy + \int\int_{x>y} (x-y)^\alpha dxdy = \int_0^1 \int_0^y (y-x)^\alpha dxdy + \int_0^1 \int_0^x (x-y)^\alpha dydx =$
$= \int_0^1 (-1)\cdot \frac{(y-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{x=0}^{x=y} dy + \int_0^1 (-1)\cdot \frac{(x-y)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy + \int_0^1 \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} dx = \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$

6) N bolas (numeradas de 1 até N) são distribuídas em N urnas (também numeradas de 1 até N) de forma que para cada i a bola i vai para uma das urnas 1, . . . , i com probabilidade 1/i (independentemente das outras bolas). Calcule

a) o número esperado das urnas vazias

Resp. a)

Seja $P(X_j = i) = \frac{1}{i}$ a probabilidade da j-ésima bola cair em uma urna específica i, então a probabilidade da j-ésima bola não cair na urna i é $P(X_j \neq i) = 1 - \frac{1}{i}$.

Considere o evento $Y_i = \begin{cases} 1 & se\, urna\, i\, está\, vazia \\ 0 & caso\, contrário \end{cases}$, e considere o evento $U = \sum_{i=1}^{i=N} Y_i$, "quantidade de urnas vazias"

$\mathbf{E}(Y_i) = P(Urna_i = 0) = P(X_1 \neq i, X_2 \neq i, X_3 \neq i, X_3 \neq i, X_4 \neq i, ...) = \prod_{j=i}^{j=N} (1 - \frac{1}{j})$

$\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{i=N} Y_i) = \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^{i=N} \prod_{j=i}^{j=N} (1 - \frac{1}{j})$

b) a probabilidade de que nenhuma urna está vázia.

Resp. b)

Observe que para que isso ocorra, cada bola deve estar em exatamente uma urna.

Mas para que isso ocorra, a i-ésima bola deve estar na urna i, pois a bola 1 só pode estar na urna 1, com isso, a bola 2 que poderia estar na urna 1 ou na urna 2 fica restrita apenas à urna 2, assim por diante. Logo:

$P(X_N = N, X_{N-1} = N - 1, ..., X_1 = 1) = \prod_{j=1}^{j=N} (\frac{1}{j})$

7) Se $\mathbf{E}(X) = 1$ e $Var(X) = 2$, calcule $\mathbf{E}((2 + X)^2)$ e $Var(1 + 3X)$

Resp. a)

- $Var(X) = 2 = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \implies \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(X)^2 + 2 = 3$
- $\mathbf{E}((2 + X)^2) = \mathbf{E}(4 + 4X + X^2) = \mathbf{E}(4) + 24E(X) + \mathbf{E}(X^2)$

Logo $\mathbf{E}((2 + X)^2) = 4 + 4 \cdot 1 + 3 = 11$

Resp. b)

Logo $Var(1+3X) = \mathbf{E}((1+3X)^2) - \mathbf{E}((1+3X))^2 = \mathbf{E}(1+6X+9X^2) - \mathbf{E}(1+3X)^2 = \mathbf{E}(1) + 6\mathbf{E}(X) + 9\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(1+3X)^2 = 34 - (\mathbf{E}(1) + 3\mathbf{E}(X)) \cdot (\mathbf{E}(1) + 3\mathbf{E}(X)) = 34 - (1 + 3 \cdot 1) \cdot (1 + 3 \cdot 1) = 18$

8) Dois dados são lançados. Seja X a soma dos resultados, e Y a diferença (mas não o valor absoluto da diferença) entre os resultados no primeiro e no segundo dados. Calcule Cov(X, Y).

Resp. 8)

- $Cov(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y)))$
- $A \sim U(1, 6)$, discreta
- $B \sim U(1, 6)$, discreta
- $X = A + B$
- $Y = A - B$

Com isso: $Cov(X, Y) = \mathbf{E}((A + B - \mathbf{E}(A + B)) \cdot (A - B - \mathbf{E}(A - B))) = \mathbf{E}((A+B) \cdot (A-B) - (A+B) \cdot 0 - 7 \cdot (A-B) + 7 \cdot 0) = \mathbf{E}((A^2 - B^2 - 7 \cdot (A-B)) = \mathbf{E}(A^2) - \mathbf{E}(B^2) = 0$

9) A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x, y) = \frac{1}{y} \cdot e^{-(y+\frac{x}{y})} \cdot \mathbf{I}_{\{x>0,y>0\}}$. Calcule Cov(X, Y).

Resp. 9)

- $Cov(X, Y) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$
- $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{xy}{y} \cdot e^{-(y+\frac{x}{y})} dxdy = \int_0^\infty \int_0^\infty x \cdot e^{-(y+\frac{x}{y})} dxdy = \int_0^\infty (-(\frac{x+y}{y}) \cdot e^{-\frac{x+y^2}{y}} |_{x=0}^{x=\infty}) dy = \int_0^\infty e^{-y} dy = 1$
- $\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x}{y} \cdot e^{-(y+\frac{x}{y})} dxdy = \int_0^\infty (-(x + y) \cdot e^{-\frac{x+y^2}{y}} |_{x=0}^{x=\infty}) dy = \int_0^\infty (-y) \cdot e^{-y} dy = 0$
- Como $\mathbf{E}(Y) < \infty$, então nem precisamos calculá-lo, pois $\mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y) = 0 \cdot \mathbf{E}(Y) = 0$, com isso a solução é $Cov(X, Y) = 1 - 0 = 1$

10) Seja $X \sim U(-\pi, \pi)$, e considere v.a. $Y = sen(X)$, $Z = cos(X)$.

a) As v.a. Y, Z são independentes?

Resp. a)

- Não, observe que dado Y, podemos calcular X ($X = arcsen(Y)$) e dado X podemos determinar Z, logo dado Y podemos determinar Z (Z depende de Y).O mesmo raciocínio vale para Y em função de Z

b) Calcule $\mathbf{E}(Y)$

Resp. b)

- $\mathbf{E}(Y) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot sen(x)dx = -\frac{1}{2\pi} \cdot cos(x)|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{-(-1)-(-(-1))}{2 \cdot \pi} = 0$

c) Calcule $\mathbf{E}(Z)$

Resp. c)

- $\mathbf{E}(Z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot cos(x)dx = -\frac{1}{2\pi} \cdot sen(x)|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0 - 0 = 0$

d) Cov(Y, Z)

- $E(YZ) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi \cdot} \cdot sen(x) \cdot cos(x)dx = -\frac{1}{2} \cdot cos(x)^2|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$
- $Cov(Y, Z) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Z) = 0 - 0 \cdot 0 = 0$

Conclusão, elas são variáveis dependentes com Covariância 0.

Este solucionário foi feito para a disciplina ME310 - 2Sem 2012. Caso encontre algum erro, por favor peça alteração informando o erro em nosso grupo de discussão:

https://groups.google.com/forum/?fromgroups#!forum/me310-2s-2012

Bons estudos,

Eric.