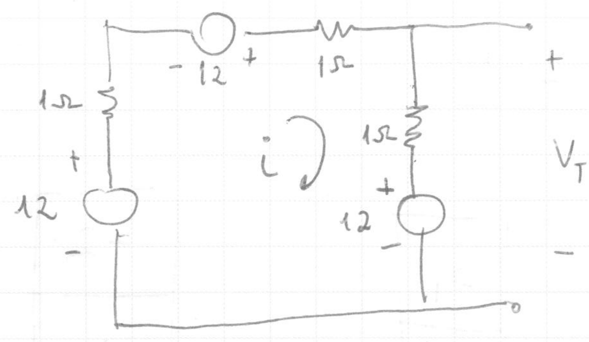
EA 513 - Circuitos Elétricos
Exame - 10/7/12 - Gabarito - prof. Rafael

1)

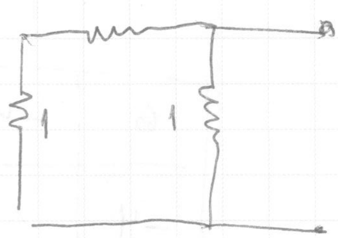


Cálculo da corrente na malha acima:

$$12 - i + 12 - i - i - 12 = 0 \Rightarrow 12 = 3i \Rightarrow \boxed{i = 4\,A}$$

$$\Rightarrow V_T = 12 + 4 = \boxed{16\,V}$$

Cálculo da resist. de Thévenin:

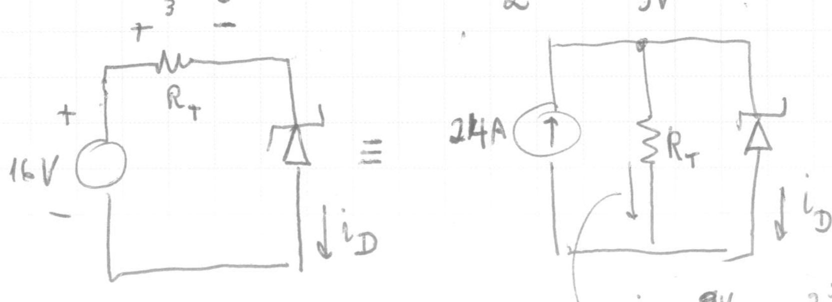


$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \Longrightarrow R_T = \boxed{\frac{2}{3}\,\Omega}$$

Consequentemente: $I_N = \frac{V_T}{R_T} = \frac{16}{2/3} = \boxed{24\,A}$

Circuitos equivalentes;

$\frac{2}{3} i_D = 7V \Rightarrow i_D = \frac{21}{2}$

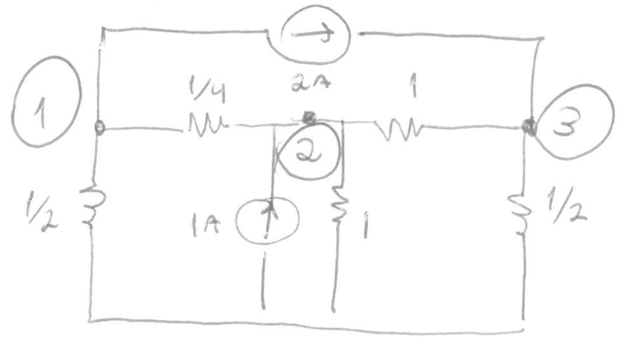


Portanto:

$$\boxed{i_D = 10{,}5\,A}$$

$i: \frac{9V}{2/3\,\Omega} = \frac{27}{2} \Rightarrow i_D = 24 - \frac{27}{2} = \frac{21}{2}$

2)



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1/4}+\frac{1}{1/2} & -\frac{1}{1/4} & 0 \\ -\frac{1}{1/4} & \frac{1}{1/4}+1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1+\frac{1}{1/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ +2 \end{bmatrix}$$

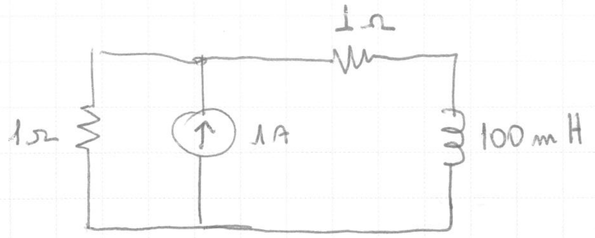
$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

matriz admitância de nós

tensões de nos

fontes de corrente de nós

3) Chave na posição A:

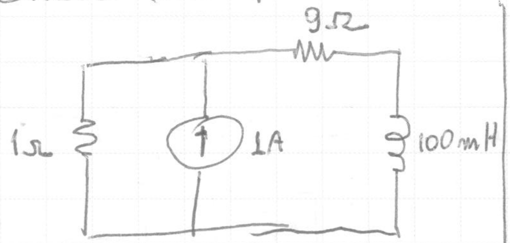


Depois de tempo suficiente a tensão no indutor é nula

Nesta situação a corrente em cada resistor é 0,5A

Portanto em $t = 0$: $\boxed{i_L = 0,5A} = i_L(0)$

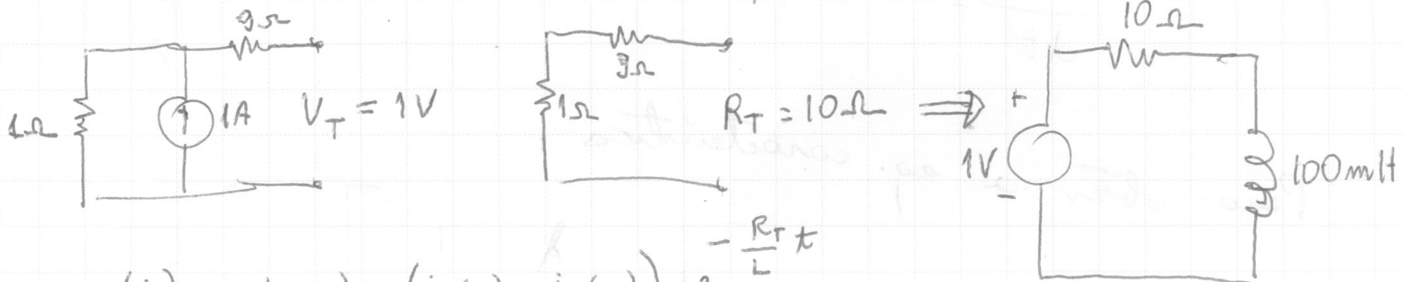
Chave na posição B



Quando $t \to \infty$, novamente a tensão no indutor será nula. Neste caso a corrente no indutor é:

$$\boxed{i_L(\infty) = 0,1\ A}$$

O circuito de Thévenin equivalente é obtido assim:



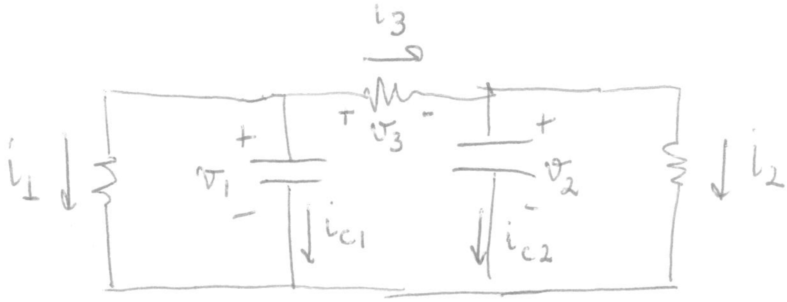
$$i_L(t) = i_L(\infty) + \left(i_L(0) - i_L(\infty)\right) e^{-\frac{R_T}{L} t}$$

$$= \boxed{0,1 + 0,4\, e^{-100t}}$$

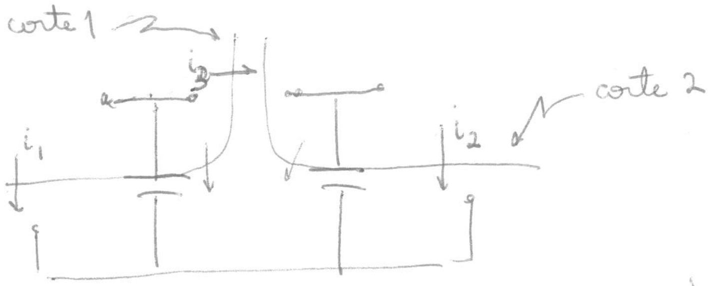
$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 0,1 \times 0,4 \times (-100)\, e^{-100t} = \boxed{-4\, e^{-100t}} \text{ (em Volts)}$$

Para que $|v_L| \leq 0,2 \Rightarrow e^{-100t} < 0,05 \Rightarrow \boxed{t > 0,03\,s}$

4)



árvore fundamental:



Do 1º corte: $i_1 + i_{c1} + i_3 = 0$

Do 2º corte: $i_2 + i_{c2} - i_3 = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} C\dfrac{dv_1}{dt} = -v_1 - v_3 \\[2ex] C\dfrac{dv_2}{dt} = -v_2 + v_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \underline{\text{Obs}}: \; v_1 = 1\Omega \cdot i_1 \Rightarrow v_1 = i_1 \\ v_2 = 1\Omega\, i_2 \Rightarrow v_2 = i_2 \\ v_3 = 1\Omega\, i_3 \Rightarrow v_3 = i_3 \quad \text{e onde } v_3 = v_1 - v_2 \end{array} \right)$$

Portanto

$$\frac{dv_1}{dt} = -2v_1 + v_2$$

$$\frac{dv_2}{dt} = v_1 - 2v_2$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Para obter a eq. característica:

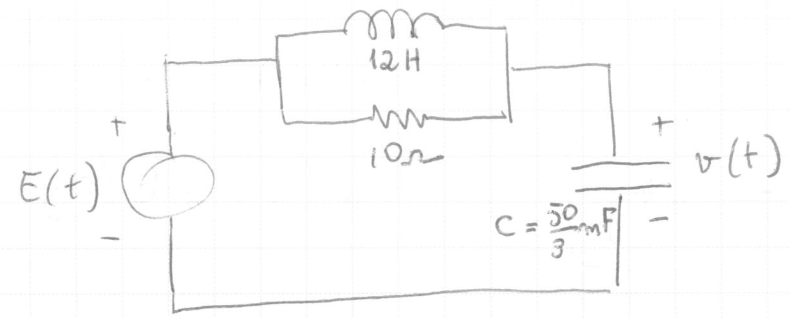
$$\det\left(A - \lambda \mathbb{1}\right) = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-2-\lambda)(-2-\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

O sistema não oscila porque as raízes da eq. característica tem parte imaginária nula.

5)



Equacionamento:

$$\begin{cases} i_C = i_L + i_R \\ v_L = E - v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C\dfrac{dv}{dt} = i_L + \dfrac{E-v}{R} \\ L\dfrac{di_L}{dt} = -v + E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{-v}{RC} + \dfrac{i_L}{C} + \dfrac{E}{RC} \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{-v}{L} + \dfrac{E}{L} \end{cases}$$

$$\left(\text{obs}: v_R = E - v \Rightarrow i_R = \frac{E-v}{R} \right)$$

$$\boxed{\text{obs.: } \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{-v_0}{RC} + \frac{i_{L0}}{C} + \frac{E}{RC}}$$

Derivando a 1ª equação:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{-1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{C}\underbrace{\frac{di_L}{dt}}_{2^a\ eq.} + \frac{1}{RC}\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{C}\left[-\frac{v}{L} + \frac{E}{L}\right] + \frac{1}{RC}\frac{dE}{dt}$$

Finalmente:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{1}{RC}\frac{dE}{dt} + \frac{1}{LC}E$$

$$\begin{cases} L = 12\,H \\ C = \dfrac{50}{3}\,mF \\ R = 10\,\Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{RC} = 6 \\ \dfrac{1}{LC} = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + 6\frac{dv}{dt} + 5v = 6\frac{dE}{dt} + 5E}$$

Condições iniciais: $v(0) = 4$; $i_L(0) = 0$

Portanto $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -6v_0 + 6E_0 = 6[E_0 - v_0]$

Tem-se que $E(0) = \left. K\cos\left(\frac{5}{6}t + \theta\right)\right|_{t=0} = K\cos\theta = Re\left[\underbrace{K e^{j\theta}}_{\text{= impedância do circuito}}\right]$

Calculando-se a impedância do circuito, na freq. $\omega = \frac{5}{6}$ rad/s, obtém-se $Z = \frac{(\omega L)^2 R + j\, R^2(\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{j}{\omega C} =$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega L = 10 \\ \omega C = \frac{1}{72} \\ R = 10 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{Z = 5 - 67j} \Rightarrow Re(Z) = E(0) = 5$$

Portanto: $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = 6\,[5-4] = 6$

Solução da homogênea: $v_h(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$

sendo $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -5 \end{array}\right. \Rightarrow v_h(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-5t}$

Solução particular: Em regime permanente senoidal, com $\omega = \frac{5}{6}$, é dado que $\hat{E} = Z$, portanto $\hat{I} = \frac{\hat{E}}{Z} = 1$. Portanto em regime, a corrente no circuito (= corrente no capacitor) é $\hat{I} = 1$, logo $i_c(t) = \cos\left(\frac{5}{6}t\right)$. A tensão $v_p(t)$ em regime é:

$$v_p = \frac{1}{C}\int \cos\frac{5}{6}\tau \, d\tau = \frac{10^3}{\frac{50}{3}} \times \frac{6}{5} \operatorname{sen}\frac{5}{6}t \Rightarrow \boxed{v_p(t) = 72 \operatorname{sen}\frac{5}{6}t}$$

Solução geral: $v(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-5t} + 72 \operatorname{sen}\frac{5}{6}t$ $\quad \left\{\begin{array}{l} v(0) = 4 \\ \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = 6 \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} v(0) = k_1 + k_2 = 4 \\ \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -k_1 - 5k_2 = -54 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 = -17/2 \\ k_2 = 25/2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{v(t) = -\frac{17}{2} e^{-t} + \frac{25}{2} e^{-5t} + 72 \operatorname{sen}\frac{5}{6}t}$$