3ª prova de EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Nome: ____RA: ___________

Questão 1 (4.0). Dado o modelo abaixo de um helicóptero onde x é translação na direção horizontal, θ é o ângulo do helicóptero e δ é o ângulo do rotor, deseja-se projetar um controlador por realimentação de estado que garanta que para um comando de entrada degrau, a velocidade $\dot{x}$ do helicóptero seja menor que 40% da magnitude do degrau de entrada (erroestacionário), sobressinal menor que 10% e o tempo de estabilização a 2% menor que 4 segundo.

$$\ddot{\theta} + \sigma_1\dot{\theta} + \alpha_1\dot{x} = n\delta$$
$$\ddot{x} + \sigma_2\dot{x} + \alpha_2\dot{\theta} - g\theta = g\delta$$

onde $\sigma_1 = 0.4$, $\alpha_1 = 0.01$, $\sigma_2 = 0.02$, $\alpha_2 = 1.4$, $g = 9.8$, $n = 6.3$

a) Considerando $x_1 = \dot{x}, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \dot{\theta}$, obtenha o modelo de estado em função de $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2, n, g$

$$\dot{x}_1 = -\sigma_2 x_1 + g x_2 - \alpha_2 x_3 + g\delta$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -\alpha_1 x_1 - \sigma_1 x_3 + n\delta$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_2 & g & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & 0 & -\sigma_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g \\ 0 \\ n \end{Bmatrix} \delta$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

b) Substituindo os valores de $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2, n, g$, obtenha a função de transferência da planta $P = \dfrac{\theta}{\delta}$

$\sigma_1 = 0.4; \sigma_2 = 0.02; g = 9.8;$
$\alpha_1 = 0.01; \alpha_2 = 1.4; n = 6.3$
$kp = 1;$
$\mathrm{A} = [\,-\sigma_2 \;\; \mathrm{g} - \alpha_2;\, 0\, 0\, 1;\, -\alpha_1\; 0 - \sigma_1];$
$\mathrm{B} = kp*[\mathrm{g}; 0; \mathrm{n}];$
$\mathrm{C} = [1\,0\,0];$
$\mathrm{D} = 0;$
$[\mathrm{np\ dp}] = \mathrm{ss2tf(A,B,C,D)}$
$\mathrm{P} = \mathrm{tf(np,dp)}$

$$P = \frac{9.8\mathrm{s}^2 - 4.9\mathrm{s} - 61.74}{\mathrm{s}^3 + 0.42\mathrm{s}^2 - 0.006\mathrm{s} + 0.098}$$

c) Determine a constante de ganho proporcional (colocada dentro da malha e antes da planta), a controlabilidade, o vetor dos ganhos de realimentação de estados estimados K, a observabilidade, os ganhos do observador L. Adotar o outro pólo do controlador em -10rad/s e os pólos do observador em –20rad/s para atender as especificações desejadas.

```
kp = 0.18539;
PSS = 10;
TE = 4;
zeta = log(100/PSS)/sqrt(pi^2 + (log(100/PSS))^2);
wn = 4/(TE * zeta);
sigmad = -zeta * wn;
wd = wn * sqrt(1 - zeta^2)
pcon = [sigmad + j * wd, sigmad - j * wd, -10]
M = ctrb(A, B)
det(M)
K = acker(A, B, pcon);
O = obsv(A, C)
det(O)
pobs = [-20 -20 -20]
L = acker(A', C', pobs)'
At = [A - B * K; L * C A - B * K - L * C];
Bt = [B; B];
Ct = [C C * 0];
Dt = 0
T = ss(At, Bt, Ct, Dt)
dcg = dcgain(T)
kp = 0.4 * 1/dcg
step(T)
```

$$kp = 0.18539$$

$$\det(M) > 0 \quad (\textit{controlável})$$

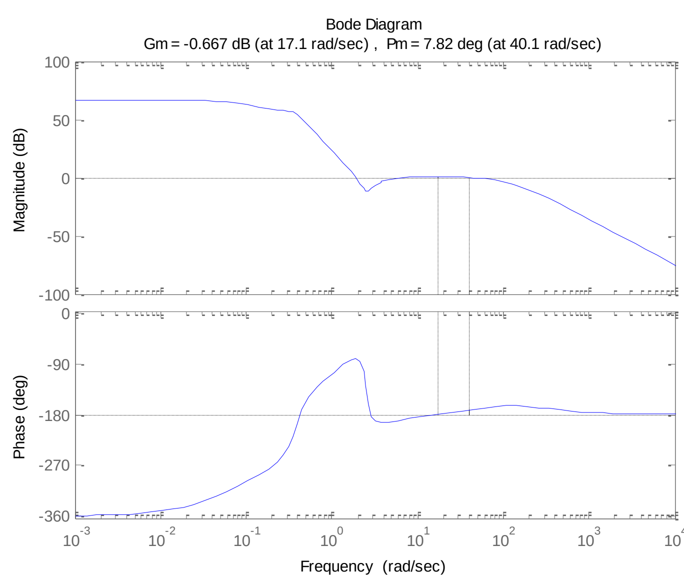
$$K = [0.46009 \quad 3.9826 \quad 1.1224]$$

$$\det(O) > 0 \quad (\textit{observável})$$

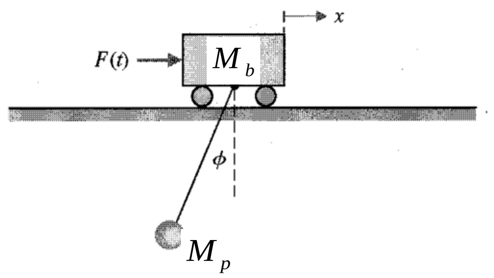
$$L = \begin{bmatrix} 59.58 \\ 223.84 \\ 726.78 \end{bmatrix}$$

d) Determine a margem de ganho e de fase do sistema controlado.

```
Ah = A - B * K - L * C;
Bh = L;
Ch = K;
Dh = 0;
[nh dh] = ss2tf(Ah, Bh, Ch, Dh)
Heq = tf(nh, dh);
figure(2)
margin(P * Heq)
```



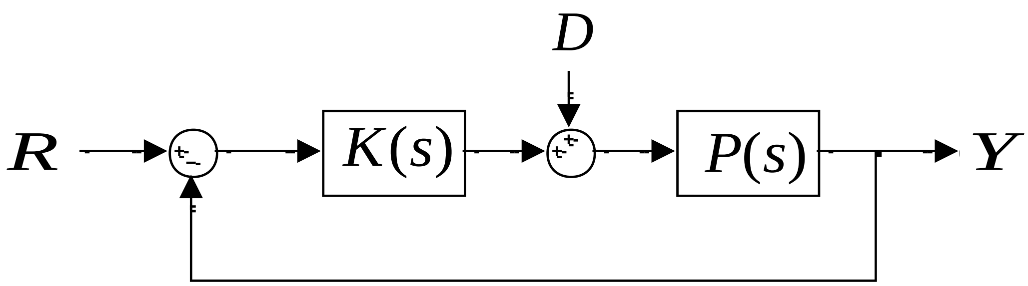
Questão 2 (3,0): Considere um pendulo numa base móvel como mostrado abaixo com a massa do pendulo $\boldsymbol{M_p}$=10kg, a massa da base $\boldsymbol{M_b}$=100kg, o comprimento da haste $\boldsymbol{L}$=1m e $\boldsymbol{g}$=9.81m/s^2. O objetivo é equilibrar o pendulo (isto é, $\phi(t) = 0$) em presença de distúrbio na força de entrada.



(a)

$$P(s) = \frac{F}{\phi} = \frac{\dfrac{1}{M_b L}}{s^2 + \dfrac{(M_b + M_p)g}{M_b L}}$$

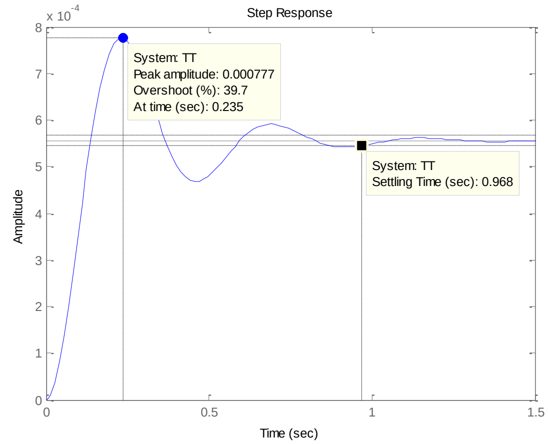
a) Admitindo uma realimentação negativa e um controlador *K(s)*, desenhe o diagrama de blocos de malha fechada deste sistema mostrando o sinal de referência, o distúrbio, a saída, as funções de transferência do controlador e da planta e o ramo de realimentação.



b) Projete um controlador **Avanço ou atraso pelo método analítico lugar das raízes** para controlar um pendulo invertido sujeito a uma perturbação degrau unitário na força de entrada, de forma a atingir o tempo de assentamento (2%) inferior a 10 segundos, ultrapassagem percentual inferior a 40% e erro estacionário inferior a 0,6 graus

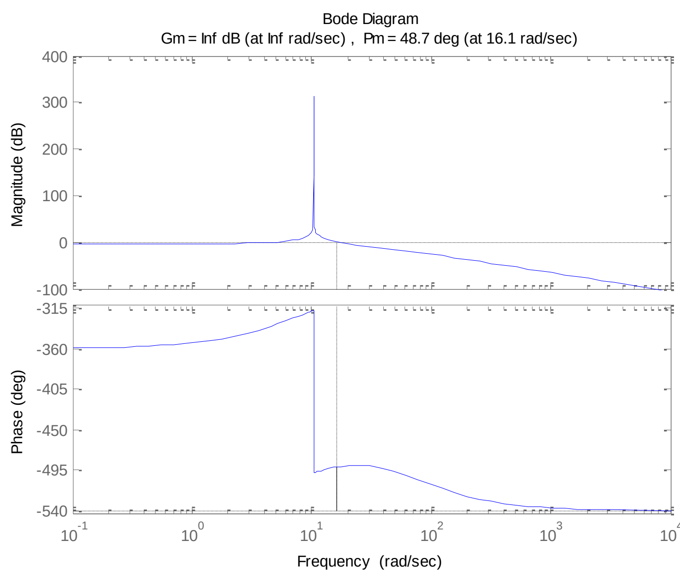
```
PSS = 40;Te = 1;kc = 9711;kc = 719.33
Mp = 10;Mb = 100;L = .1;g = 9.81;
np = [1/(Mb*L)];
dp = [1 0 (Mb + Mp)*g/(Mb*L)];
P = tf(np,dp)
zeta = log(100/PSS)/sqrt(pi^2 + (log(100/PSS))^2);
wn = 4/(zeta*Te);
sigmad = -zeta*wn; wd = wn*sqrt(1- zeta^2);sd = sigmad + j*wd
```

```
rp = freqresp(P,sd); mp = abs(rp); tetap = angle(rp);
mk = 1/mp; tethak = -pi - tetap;
T = -(sigmad * mk * sin(tethak) + kc * wd - wd * mk * cos(tethak))/mk/sin(tethak)/(sigmad^2 + wd^2)
alpha = mk * (wd * cos(tethak) * kc - wd * mk + sigmad * sin(tethak) * kc)/(sigmad * mk * sin(tethak) + kc * wd - wd * mk * cos(tethak))/kc
nk = kc * [alpha * T 1];
dk = [T 1];
K = tf(nk,dk);
TT = P/(1+ P * K);
TT = minreal(TT)
figure(1),step(TT)
```



c) Determine a **margem de ganho e margem de fase** (1,0)

```
L = P * K;
margin(L)
```

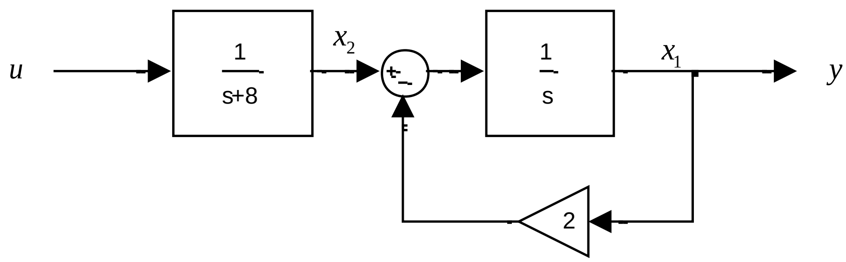


d) Determine a **função de transferência do distúrbio** $T = \dfrac{\theta}{D}$ (1,0).

```
TT = P/(1+ P * K);
TT = minreal(TT)
```

$$T = \frac{0.1s + 6.735}{s^3 + 67.35s^2 + 678.9s + 12110}$$

Questão 3 (7,0): Dado o diagrama de blocos abaixo



a) Definidas as variáveis de estado obtenha o **modelo de estado físico**

$$\dot{x}_1 = x_2 - 2x_1$$
$$\dot{x}_2 = u - 8x_2$$
$$y = x_1$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

b) Dado o vetor K=[10 1] e L=[15 20], determine a equação matricial do modelo de estados da malha fechada em termos dos estados e dos estados estimados e apresente os pólos da planta, do controlador por realimentação de estado estimado e os pólos da malha fechada

```
A = [-2 1;0 -8]; B = [0;1]; C = [1 0]; D = 0;
[np dp] = ss2tf(A,B,C,D);
P = tf(np,dp);
K = [10 1];
L = [15 20]';
At = [A - B*K; L*C A - B*K - L*C]
Bt = [B; B]
Ct = [C C*0]
Dt = 0
Ah = A - B*K - L*C;
Bh = L;
Ch = K;
Dh = 0;
[nh dh] = ss2tf(Ah,Bh,Ch,Dh)
Heq = tf(nh,dh);
eig(A)
eig(Ah)
eig(At)
eig(A - B*K)
```

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -10 & -1 \\ 15 & 0 & -17 & 1 \\ 20 & 0 & -30 & -9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{Bmatrix}$$

Polos Planta = -2 -8

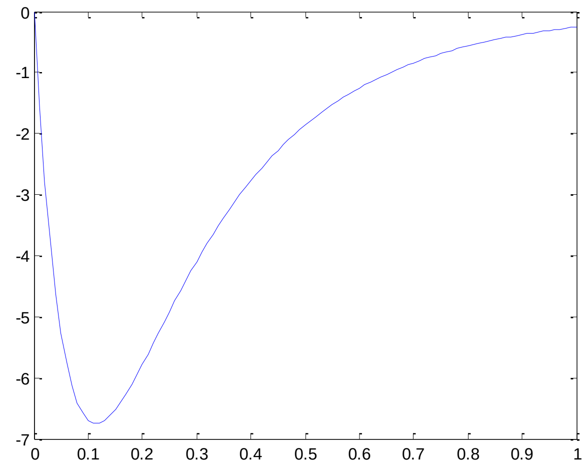
Polos Controlador = -13 + 3.7417i
-13 - 3.7417i

Polos Malha Fechada = -4 -13 -12 -7

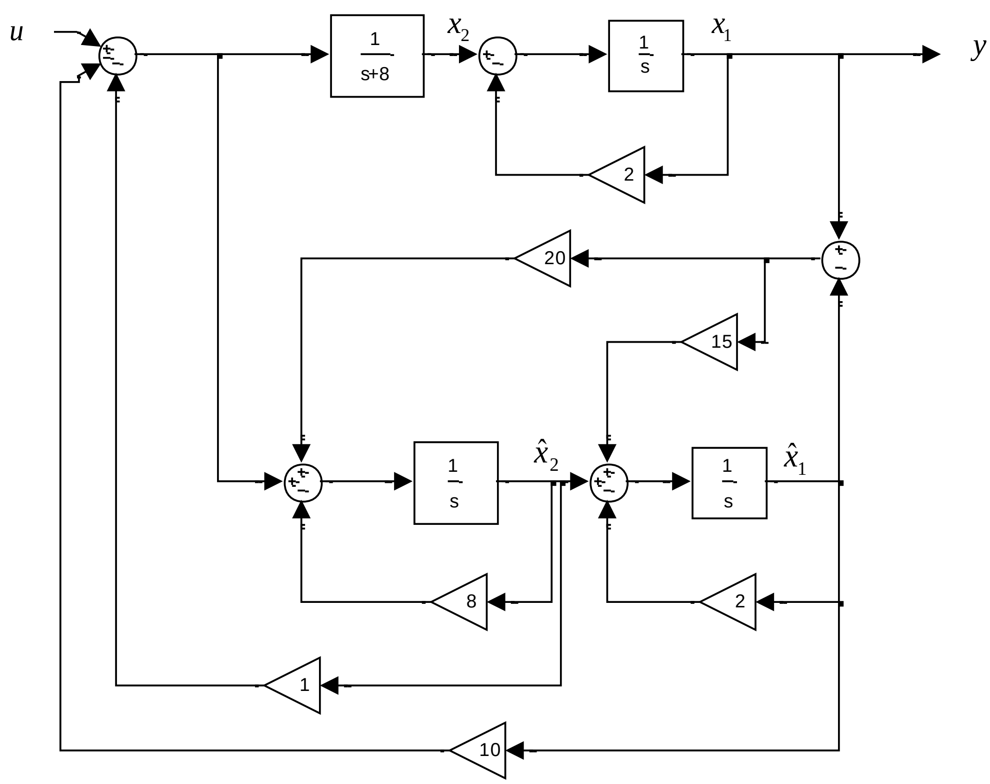
c) Seja a entrada nula, uma condição inicial unitária para a posição do sistema e as demais condições iniciais nulas. Determine o valor máximo (em módulo) do esforço de controle nesta condição.

$$At = [A - B*K; L*C \; A - B*K - L*C]$$
$$Bt = [B; B]$$
$$Ct = [K*0 - K]$$
$$Dt = 0$$
$$T = ss(At, Bt, Ct, Dt)$$
$$t = 0:.01:1$$
$$u = t*0;$$
$$[y \; t] = lsim(T, u, t, [1 \; 0 \; 0 \; 0])$$
$$plot(t, y)$$

$$u_{max} = 6.74$$



e) Construa o diagrama de blocos do sistema controlado mostrando cada ganho K do vetor de realimentação de estados estimados e cada ganho L do observador .



Principais equações úteis:

$$\boxed{\zeta = \frac{\ln(\frac{100}{PSS})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\frac{100}{PSS})}}}$$

$$\boxed{T_e = \frac{4}{\zeta\omega_n}}$$

Critério de Nyquist

$$\boxed{z = p + n}$$

PID analítico resposta em freqüência

$$\boxed{\begin{aligned} &m_k m_p = 1 \\ &\theta_k + \theta_p = -\pi + \phi_{mf} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &K_p = m_k \cos\theta_k \\ &\omega_{cg} K_d - \frac{K_i}{\omega_{cg}} = m_k \sin\theta_k \end{aligned}}$$

Realimentação de Estado

$$\boxed{A_{heq} = A - BK - LC}$$

$$\boxed{B_{heq} = L}$$

$$\boxed{C_{heq} = K}$$

$$\boxed{D_{heq} = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &A_T = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \\ &B_T = \begin{Bmatrix} B \\ B \end{Bmatrix} \\ &C_T = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \\ &D_T = 0 \end{aligned}}$$