Gabarito da Prova 1 de MA311 - Cálculo III - Turma Z - 06/09/2012

1.ª Questão. (2 pontos) Encontre um fator integrante e resolva a equação

$$(x+2)\text{sen}\, y dx + x\cos y dy = 0.$$

Resolução: Sendo $M(x,y) = (x+2)\text{sen}\, y$ e $N(x,y) = x\cos y$, temos

$$M_y = (x+2)\cos y \neq N_x = \cos y.$$

Portanto, a equação não é exata. Procuremos um fator integrante:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(x+2)\cos y - \cos y}{x\cos y} = \frac{x+1}{x},$$

que só depende de x. Logo um fator integrante dependendo de x é dado pela solução da equação

$$\mu' = \frac{x+1}{x}\mu.$$

Notemos que a equação é separável:

$$\frac{d\mu}{\mu} = (1+\frac{1}{x})dx, \text{ integrando obtemos } \ln(\mu) = x + \ln x, \text{ assim } \mu(x) = xe^x. \qquad (1\,ponto)$$

Multiplicando a equação pelo fator integrante obtemos uma equação exata:

$$xe^x(x+2)\text{sen}\, y dx + x^2e^x\cos y dy = 0.$$

Logo sabemos que existe $\psi(x,y)$ tal que $\psi_x = xe^x(x+2)\text{sen}\, y$ e $\psi_y = x^2e^x\cos y$. Integrando $\tilde{N}(x,y)$ em relação a y e mantendo x constante, obtemos

$$\psi(x,y) = \int x^2e^x\cos y dy = x^2e^x\text{sen}\, y + h(x).$$

Assim,

$$\psi_x = 2xe^x\text{sen}\, y + x^2e^x\text{sen}\, y + h'(x) = xe^x(x+2)\text{sen}\, y.$$

Então

$$h'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(x) = constante.$$

Deste modo, a solução geral é dada implicitamente por

$$\psi(x,y) = x^2e^x\text{sen}\, y = C. \qquad 1\,ponto$$

2.ª Questão. (2 pontos) (0,5)(a)*Sem resolver o problema*, responda:
o problema $\frac{dy}{dx} = (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$, $y(0)=0$ admite solução única?
(0,5) (b) *Sem resolver o problema*, determine um intervalo no qual a solução certamente existe:

$$xy' - 2y = x^2+1, \quad y(1) = y_0.$$

(1,0) (c) Resolva o ítem (b) para $y_0 = \frac{1}{2}$.

Resolução: (a) Verifiquemos as hipóteses do TEU para equações não lineares de 1a. ordem. $f(x,y) = (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ está bem definida e é contínua para $1-x^2-y^2 \geq 0$ ou seja, para $x^2+y^2 \leq 1$. Calculemos a derivada com relação a y: $f_y = -\frac{y}{(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}$ que é um quociente de $g(x,y) = -y$ que é contínua para todo (x,y) e $h(x,y) = (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ que é contínua para $x^2+y^2 \leq 1$ e se anula em $x^2+y^2 = 1$. Por tanto f_y é contínua em $D = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$. (0,25 pontos)

Como podemos tomar um retângulo aberto contendo o ponto $(0,0)$ e contido na região D, pelo TEU, o problema admite solução única em algum intervalo aberto contendo $x_0 = 0$. (0,25 pontos)

(b) A equação é linear de 1a. ordem: $y' - \frac{2}{x}y = \frac{x^2+1}{x}$ com $p(x) = -\frac{2}{x}$ e $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$, que são contínuas para todo $x \neq 0$, ou seja, nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. (0,25 pontos)

Como $x_0 = 1$ pertence ao intervalo $(0, +\infty)$ pelo TEU concluímos que a solução certamente existe no intervalo $(0, +\infty)$. (0,25 pontos)

(c) Com a equação na forma: $y' - \frac{2}{x}y = \frac{x^2+1}{x}$, o fator integrante é:

$$\mu(t) = \exp\Big(-2\int \frac{1}{x}dx\Big) = \exp(-2\ln x) = \exp(\ln x^{-2}) = x^{-2}. \qquad (0,3\,pontos)$$

Multiplicamos a equação na forma padrão por x^{-2} e reescrevemos

$$x^{-2}y' - 2x^{-3}y = x^{-2}\frac{x^2+1}{x} \Longleftrightarrow (x^{-2}y)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}.$$

Integramos

$$x^{-2}y = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}dx + C = \ln x - \frac{1}{2x^2} + C \Rightarrow y = x^2\ln x - \frac{1}{2} + Cx^2. \qquad (0,5\,pontos)$$

Utilizando a condição inicial $y(1) = 0$, determinamos o valor para C :

$$y(1) = -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2}, \quad \text{logo} \quad C = 1.$$

A solução do problema de valor inicial é:

$$y = x^2\ln x - \frac{1}{2} + x^2. \qquad (0,2\,pontos)$$

3.ª Questão.(1,5 pontos) Encontre a solução geral explícita da equação

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x}.$$

Resolução: Dividindo por x, obtemos a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x}.$$

Como o lado direito da equação acima depende somente do quociente y/x, isso mostra que a equação é homogênea. (0,5 pontos)

Fazendo a mudança de variável $v = y/x$ a equação acima se transforma na equação separável

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + e^v \quad \text{ou} \quad e^{-v}dv = \frac{dx}{x}.$$

Integrando

$$-e^{-v} = \ln|x| + C,$$

e voltando á variável original

$$-e^{-y/x} = \ln|x| + C \quad \Longrightarrow \quad y = -x\ln(\ln|x|^{-1} - C).(1\,ponto)$$

4.ª Questão.(2 pontos) Considere a equação diferencial

$$y^{(4)} - y' = 2te^t + \cos t + 3t$$

(a) Encontre a solução da equação homogênea. Dica: $r^3 - 1 = (r-1)(r^2+r+1)$.

(b) Usando o método de coeficientes indeterminados encontre uma forma da solução particular SEM calcular os coeficientes.

Resolução: (a) A equação homogênea associada é $y^{(4)} - y' = 0$.

A equação característica é: $r^4 - r = r(r^3-1) = r(r-1)(r^2+r+1)$.

Raízes: $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ para $(r^2 + r + 1) = 0$ temos as raízes complexas conjugadas: $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

O conjunto fundamental de soluções é: $y_1 = e^{0t} = 1$, $y_2 = e^t$, $y_3 = e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$ e $y_4 = e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$.

A solução geral da homogênea é:

$$y_h = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + c_4 e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t). \qquad (1\,\textit{ponto})$$

(b) Como $g(t) = 2te^t + \cos t + 3t$ consideramos três problemas separadamente.

Consideremos primeiro a equação: $y^{(4)} - y' = 2te^t$. Como e^t é solução da homogênea, uma solução particular será da a forma $Y_1 = t(At + B)e^t$.

Consideremos agora a equação $y^{(4)} - y' = \cos t$. Uma solução particular terá a forma $Y_2 = C\cos t + D\mathrm{sen}t$.

Consideremos a equação: $y^{(4)} - y' = 3t$. Como as constantes são soluções da homogênea, uma solução particular será da a forma $Y_3 = t(Et + F)$.

Portanto, uma solução particular terá a forma:

$$y_p = Y_1 + Y_2 + Y_3 = t(At + B)e^t + C\cos t + D\mathrm{sen}t + t(Et + F). \qquad (1\,\textit{ponto})$$

5.ª Questão. Considere a equação diferencial ordinária

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3(x+2), \quad x > 0.$$

(a) (1,5 pontos) Sabendo que a função $y_1 = x$ é uma solução da equação homogênea associada, aplique o *método de redução de ordem* para encontrar uma outra solução y_2 que seja linearmente independente com y_1. Verifique que y_1 e y_2 são linearmente independentes.

(b) (1 ponto) Usando o método de variação dos parâmetros determine a solução geral da equação não homogênea.

Resolução: (a) Pelo *método de redução de ordem* procuramos uma solução $y_2 = v(x)y_1 = v(x)x$, onde $v(x)$ é uma função a ser determinada. Derivando e substituindo na equação, temos que v' satisfaz a equação linear de ordem um

$$x^3v'' - x^3v' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'' = v'. \qquad 1\,\textit{ponto}$$

Então $v'(x) = e^x$ e portanto $v(x) = e^x$. Assim, uma segunda solução é

$$y_2 = xe^x. \qquad 0,3\,\textit{pontos}$$

Calculamos o Wronskiano para verificar que y_1 e y_2 são l.i.,

$$W(x, xe^x)(x) = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = x(e^x + xe^x) - xe^x = x^2e^x.$$

Como o Wronskiano não é identicamente nulo ($x > 0$), as funções são l.i. 0,2 pontos

(b) Pelo método de variação dos parâmetros procuramos a solução geral na forma

$$y = u(x)y_1 + v(x)y_2 = u(x)x + v(x)xe^x,$$

onde u' e v' satisfazem o sistema

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 &= 0, \\ u'y_1' + v'y_2' &= x(x+2), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'x + v'xe^x &= 0, \\ u' + v'(e^x + xe^x) &= x(x+2), \end{cases}$$

Calculemos o Wronskiano

$$W(x, xe^x) = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = x^2e^x.$$

Pela regra de Cramer

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ x(x+2) & e^x + xe^x \end{vmatrix}}{x^2e^x} = -\frac{x^2e^x(x+2)}{x^2e^x} = -(x+2) \Rightarrow u = -\frac{x^2}{2} - 2x + c_1,$$

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x(x+2) \end{vmatrix}}{x^2e^x} = \frac{x^2(x+2)}{x^2e^x} = e^{-x}(x+2) \Rightarrow$$

$$v = \int e^{-x}(x+2)dx = -e^{-x}(x+2) + \int e^{-x}dx = -e^{-x}(x+3) + c_2.$$

Portanto a solução geral é:

$$y = u(x)x + v(x)xe^x = (-\frac{x^2}{2} - 2x + c_1)x + (-e^{-x}(x+3) + c_2)xe^x = (c_1 - 3)x + c_2e^x - \frac{x^3}{2} - 3x^2.$$