F 502 A – Eletromagnetismo I – 2º semestre de 2011 – Prova 2 – 03/11/2011

Nome:____ **RA:**____________

Questão 1 – Uma caixa cúbica (com lados de comprimento a) consiste de cinco placas de metal que estão soldadas juntas e aterradas (Figura 1). O topo é feito de uma folha metal separada, isolada das outras e mantidas a um potencial constante V_0. **(a) [1,0 ponto]** Escreva as condições de contorno para o potencial em cada uma das placas. **(b) [1,5 ponto]** Encontre o potencial no interior da caixa.

Questão 2 – Sabendo que o termo de dipolo do potencial é dado por $V_{dip} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$:

(a) [1,0 ponto] Calcule o campo elétrico do dipolo. **(b) [0,5 ponto]** calcule a energia de interação de dois dipolos, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, separados por $\mathbf{r}$ (Figura 2). **(c) [1,0 ponto]** Qual a posição de equilíbrio destes dipolos? Justifique com cálculos.

Questão 3 – O espaço entre as placas de um capacitor de placas planas paralelas é preenchido com duas chapas de material dielétrico linear. Cada chapa tem espessura a, de forma que a distância total entre as placas é $2a$ (Figura 3). A chapa 1 tem constante dielétrica 2 e a chapa 2 tem constante dielétrica 1,5. A densidade de carga livre na placa superior é σ e na placa inferior é $-\sigma$. **(a) [0,5 ponto]** Encontre o deslocamento elétrico **D** em cada chapa. **(b) [0,5 ponto]** Encontre o campo elétrico **E** em cada chapa. **(c) [0,5 ponto]** Encontre a polarização **P** no dielétrico. **(d) [0,5 ponto]** Encontre a diferença de potencial entre as placas **(e) [0,5 ponto]**. Encontre a localização e a quantidade de toda a carga de polarização.

Questão 4 – **[2,5 pontos]** Por um longo fio cilíndrico de raio a, flui uma corrente com densidade volumétrica $\mathbf{J} = \frac{\mathbf{I}}{2\pi a s}$. Calcule o campo magnético dentro e fora do fio.

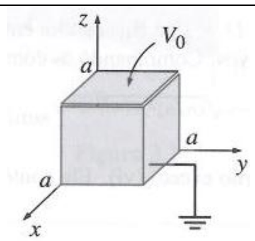


Figura 1. Questão 1.

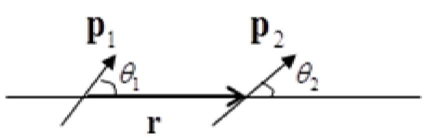


Figura 2. Questão 2.

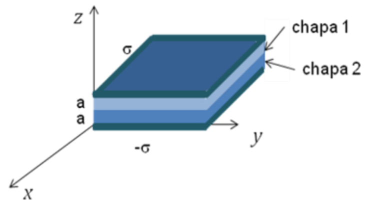


Figura 3. Questão 3.

Dados:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}. \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}.$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$$

$$\varepsilon_r \equiv (1 + \chi_e) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

Questão 1

(a) Condições de contorno:

(i) $V = 0$, para $x = 0$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$
(ii) $V = 0$, para $x = a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$
(iii) $V = 0$, para $0 \leq x \leq a$, $y = 0$, $0 \leq z \leq a$
(iv) $V = 0$, para $0 \leq x \leq a$, $y = a$, $0 \leq z \leq a$
(v) $V = 0$, para $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $z = 0$
(iv) $V = V_0$, para $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $z = a$

(b) Em coordenadas cartesianas as equações a serem resolvida, $V(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ são

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = C_1 X(x) \; ; \; \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = C_2 Y(y) \; ; \; \frac{d^2Z(z)}{dz^2} = C_3 Z(z)$$

com $C_1 + C_2 + C_3 = 0$

Como os valores de contorno são periódicos em x e y, as constantes C_1 e C_2 são escolhidas para serem negativas: $C_1 = -k^2$ e $C_2 = -\ell^2$, de forma que $C_3 = k^2 + \ell^2$, resultando nas soluções:

$$X(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$$
$$Y(y) = C \operatorname{sen} \ell y + D \cos \ell y$$
$$Z(z) = E e^{\sqrt{k^2+\ell^2}\, z} + F e^{-\sqrt{k^2+\ell^2}\, z}$$

Aplicando as condições de contorno:

(i) $\Rightarrow B = 0$

(ii) $\Rightarrow ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(iii) $\Rightarrow D = 0$

(iv) $\Rightarrow \ell = \frac{m\pi}{a}$, $m = 1, 2, 3, \dots$

(v) $\Rightarrow E = -F \Rightarrow Z(z) = E\left(e^{+\sqrt{k^2+\ell^2}} - e^{-\sqrt{k^2+\ell^2}}\right)$

$\Rightarrow Z(z) = 2E \operatorname{senh} \sqrt{k^2+\ell^2}$

A solução para o potencial pode ser escrita como:

$$V(x,y,z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} C_{n,m} \operatorname{senh}\left[\frac{\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}\, z\right] \operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x \operatorname{sen}\frac{m\pi}{a}y$$

Aplicando a condição de contorno (vi)

$$V(x,y,a) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} C_{n,m} \operatorname{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right] \operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x \operatorname{sen}\frac{m\pi}{a}y = V_0$$

Usando o truque de Fourrier:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} C_{n,m} \operatorname{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right] \int_0^a\int_0^a \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n'\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sen}\frac{m'\pi y}{a}\,dx\,dy$$

$$= V_0 \int_0^a\int_0^a \operatorname{sen}\frac{n'\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{m'\pi y}{a}\,dx\,dy$$

Usando a ortogonalidade das funções senos:

$$\int_0^a \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n'\pi x}{a}\,dx = \frac{a}{2}\delta_{n,n'}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} C_{n,m} \operatorname{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right] \cdot \frac{a^2}{4}\delta_{n,n'}\delta_{m,m'} = \frac{V_0 a^2}{n m \pi^2}(1-\cos n'\pi)(1-\cos m'\pi)$$

$$\Rightarrow C_{n,m} = \frac{4V_0}{nm\pi^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right]}(1-\cos n\pi)(1-\cos m\pi)$$

$$\Rightarrow C_{n,m} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ ou } m \text{ forem pares} \\ \dfrac{16V_0}{nm\pi^2}\dfrac{1}{\operatorname{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right]} & \text{se } n \text{ e } m \text{ forem ímpares} \end{cases}$$

Desta forma, a solução para o potencial é:

$$\boxed{V(x,y,z) = \frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1\\(\text{ímpar})}}^{+\infty}\sum_{\substack{m=1\\(\text{ímpar})}}^{+\infty}\frac{1}{nm}\frac{\operatorname{senh}\left[\frac{\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}\,z\right]}{\operatorname{senh}\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\right]}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x \operatorname{sen}\frac{m\pi}{a}y}$$

Questão 2

O potencial do dipolo é dado por $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{p} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$.

(a) O campo elétrico do dipolo é

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \hat{e}_i \partial_i \left[p_j x_j (x_l x_l)^{-3/2} \right] \right\}$$

O momento de dipolo pode sair da derivada, pois é constante

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \hat{e}_i p_j \partial_i \left[x_j (x_l x_l)^{-3/2} \right] \right\}$$

Calculando a derivada

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \hat{e}_i p_j \left[(\partial_i x_j) \cdot (x_l x_l)^{-3/2} + x_j \left(-\frac{3}{2}\right) 2 x_l (x_l x_l)^{-5/2} (\partial_i x_l) \right] \right\}$$

Como $\partial_i x_j = \delta_{ij}$ e $\partial_i x_l = \delta_{il}$

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{\hat{e}_i p_i}{r^3} - 3 \frac{\hat{e}_i x_i \, p_j x_j}{r^5} \right\}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left\{ 3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p} \right\}}$$

(b) Energia de interação: $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Calculando no dipolo 2:

$$U = -p_2 \cdot \vec{E}_1 \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left[\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})(\vec{p}_2 \cdot \hat{r}) \right]}$$

(c) Escrevendo a energia em coordenadas:

$$U = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \right]$$

usando $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$

$$U = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left[\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 - 2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \right]$$

O problema é encontrar os valores de ângulos θ_1 e θ_2 que minimizam a energia:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0 \Rightarrow \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + 2 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + 2 \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 = 0$$

$$3 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + 3 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

A primeira derivada será zero sempre que $\theta_1 + \theta_2 = 0$ ou π. Lembrando que os dipolos se orientam no sentido do campo, as configurações possíveis são:

θ_1	θ_2	$U\ [p_1p_2/4\pi\varepsilon_0 r^3]$	
0	π	2	$\rightarrow \leftarrow$
π	0	2	$\leftarrow \rightarrow$
$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-2}$	$\rightarrow \rightarrow$
$\pi/2$	$\pi/2$	1	$\uparrow \uparrow$
$-\pi/2$	$-\pi/2$	1	$\downarrow \downarrow$
$\pi/2$	$-\pi/2$	-1	$\uparrow \downarrow$
$-\pi/2$	$\pi/2$	-1	$\downarrow \uparrow$

Portanto, a configuração de menor energia ocorre quando os dipolos estão alinhados paralelos a $\vec{r}$.

Outra solução para os itens (a) e (b)

(a) Escrevendo o potencial em coordenadas:

$V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. O campo elétrico será $\vec{E} = -\nabla V$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{p}{4\pi r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{r} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}\right]}$$

(b) O campo em 2 devido a 1 será:

$$\vec{E}_1 = \frac{p_1}{4\pi r^3}\left[2\cos\theta_1\,\hat{x} - \operatorname{sen}\theta_1\,\hat{y}\right]$$

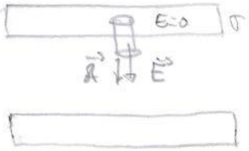
Em coordenadas cartesianas: $\vec{P}_2 = P_2(\cos\theta_2\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta_2\,\hat{y})$

e $U = -\vec{P}_2 \cdot \vec{E}_1 \Rightarrow \boxed{U = \frac{P_1P_2}{4\pi r^3}\left[\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 - 2\cos\theta_1\cos\theta_2\right]}$

Questão 3

(a) Para o deslocamento:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_l$$



Escolhendo um pequeno cilindro para ser a superfície Gaussiana:

$$DA = \sigma A \Rightarrow \boxed{\vec{D} = -\sigma \hat{z}}$$

$\varepsilon_{r1} = 2$
$\varepsilon_{r2} = 1.5$

(b) Para os dielétricos lineares $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

Na chapa 1: $\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_1} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \boxed{-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}}$

Na chapa 2: $\vec{E}_2 = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} = \boxed{-\dfrac{2\sigma}{3\varepsilon_0}\hat{z}}$

(c) Para os dielétricos lineares $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

Na chapa 1: $\vec{P}_1 = \varepsilon_0 \chi_{e1} \cdot \vec{E}_1 = \varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} - 1)\vec{E}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{P}_1 = -\dfrac{\sigma}{2}\hat{z}}$

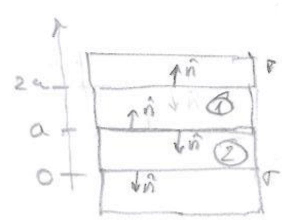
Na chapa 2: $\vec{P}_2 = \varepsilon_0 (\varepsilon_{r2} - 1)\vec{E}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{P}_2 = -\dfrac{\sigma}{3}\hat{z}}$

(d) $V = -\left\{ \int_0^a -\dfrac{2\sigma}{3\varepsilon_0}\hat{z} \cdot \hat{z}\, dz + \int_a^{2a} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} \cdot \hat{z}\, dz \right\}$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{7}{6}\sigma a}$$

(e) A densidade volumétrica é $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$

As densidades superficiais são:



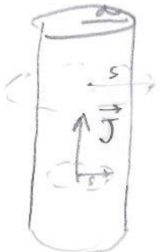
Chapa 1: Em $2a$: $\sigma_p = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = -\dfrac{\sigma}{2}\hat{z} \cdot \hat{z} = -\dfrac{\sigma}{2}$

Em a: $\sigma_p = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = -\dfrac{\sigma}{2}\hat{z}(-\hat{z}) = \dfrac{\sigma}{2}$

Chapa 2: Em a: $\sigma_p = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} = -\dfrac{\sigma}{3}\hat{z} \cdot \hat{z} = -\dfrac{\sigma}{3}$

Em 0: $\sigma_p = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} = -\dfrac{\sigma}{3}\hat{z} \cdot (-\hat{z}) = \dfrac{\sigma}{3}$

Questão 4



Fora do fio:

Usando a lei de Ampère

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int \vec{J}\cdot d\vec{a}$$

Pela simetria do problema

$$B\cdot 2\pi s = \mu_0 \int_0^a \frac{I}{2\pi a s}\cdot 2\pi s\, ds$$

$$B\cdot 2\pi s = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}}$$

Dentro do fio:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_0^s \frac{I}{2\pi a s} 2\pi s\, ds$$

$$B\cdot 2\pi \cancel{s} = \mu_0 \frac{I}{a}\cancel{s} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{\phi}}$$