Turma:

Nota:

MA 327 Álgebra Linear

Segundo Semestre de 2006

Segunda Prova

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Total	

Questão 1. **(3.0 Pontos)**

Determine explicitamente a expressão de uma transformação linear $T : \mathcal{P}_2(I\!R) \longrightarrow I\!R^3$ satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

(a) O elemento $p(x) = (1 + x) \in Ker(T)$.

(b) O elemento $q(x) = x \notin Ker(T)$.

(c) $Im(T) = [(1, 1, 1)]$.

Questão 2. **(3.0 Pontos)**

Sejam T um operador linear sobre $I\!R^4$, $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ uma base ordenada para o espaço vetorial real $I\!R^4$ e o subespaço $S = [v_1, v_2, v_3]$. Pede–se:

(a) Sabendo que $T(v) = v$ para todo $v \in S$ e $T(v_4) = v_1 + v_3$, determine $[T]^{\gamma}_{\gamma}$.

(b) Sabendo que

$$[I]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$ é a base canônica de $I\!R^4$, determine $[T(e_1)]_{\gamma}$.

Questão 3. **(3.0 Pontos)**

Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_2(I\!R)$, definido por: $T(p(x)) = p'(x) + p(x)$, e a transformação linear $P : \mathcal{P}_2(I\!R) \longrightarrow I\!R^3$ definida por: $P(a + bx + cx^2) = (a + b, c, a - b)$.

(a) Determine a transformação linear $P \circ T : \mathcal{P}_2(I\!R) \longrightarrow I\!R^3$.

(b) Determine a matriz $[P \circ T]^{\beta}_{\gamma}$, onde β é a base canônica de $\mathcal{P}_2(I\!R)$ e γ é a base canônica de $I\!R^3$.

(c) Verifique se P é um isomorfismo de $\mathcal{P}_2(I\!R)$ em $I\!R^3$. Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso $P^{-1} : I\!R^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(I\!R)$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, com $dim(V) = n$, e T um operador linear sobre V tal que $Im(T) = Ker(T)$. Pede–se:

(a) Mostre que n é par.

(b) Considerando $V = I\!R^4$, determine um operador linear T sobre V com essas propriedades.

G A B A R I T O

Questão 1. **(3.0 Pontos)**

Da condição **(a)**, temos que $T(1 + x) = (0,0,0)$.

Da condição **(b)**, isto é, $q(x) = x \notin Ker(T)$, implica que o elemento $r(x) = 1$ não pode pertencer ao $Ker(T)$, pois podemos escrever $q(x) = p(x) - r(x)$. Claramente, se o elemento $r(x) \in Ker(T)$, então $q(x) \in Ker(T)$, o que contradiz a hipótese.

Da condição **(c)**, isto é, $Im(T) = [(1,1,1)]$, temos que $dim(\, Im(T)\,) = 1$. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, devemos ter $dim(\, Ker(T)\,) = 2$, pois $dim(\, \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\,) = 3$.

Assim, podemos considerar $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com $\{\, 1 + x \,,\, x^2 \,\}$ uma base ordenada para $Ker(T)$, definida da seguinte forma:

$$T(1 + x) = (0,0,0) \quad , \quad T(x^2) = (0,0,0) \quad , \quad T(x) = (1,1,1) \, ,$$

onde estamos escolhendo $\gamma = \{\, 1 + x \,,\, x^2 \,,\, x \,\}$ uma base ordenada para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, que foi obtida completando a base do $Ker(T)$.

Finalmente, vamos determinar a expressão da transformação linear T definida acima.

Para isso, tomamos um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que é representado com relação à base ordenada γ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p(x) &= d_1(\, 1 + x\,) + d_2x^2 + d_3x \\ &= d_1 + (d_1 + d_3)x + d_2x^2 \, , \end{aligned}$$

obtendo o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \phantom{d_1 + {}} d_1 = a \\ d_1 + d_3 = b \\ \phantom{d_1 + {}} d_2 = c \, , \end{cases}$$

que possui somente a solução $d_1 = a$, $d_2 = c$ e $d_3 = b - a$. Desse modo, temos que

$$p(x) = a(\, 1 + x\,) + cx^2 + (b - a)x \, .$$

Agora, fazendo $T(p(x)) = T(a + bx + cx^2)$, obtemos

$$T(a + bx + cx^2) = a\,T(1 + x) + c\,T(x^2) + (b - a)\,T(x) = (b - a)(1,1,1) \, .$$

Assim, encontramos uma transformação linear T com as propriedades pedidas.

Questão 2. **(3.0 Pontos)**

(a) Sabendo que $T(v) = v$ para todo $v \in S$ e que $T(v_4) = v_1 + v_3$, obtemos

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= v_1 &&= 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 \\
T(v_2) &= v_2 &&= 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + 0v_4 \\
T(v_3) &= v_3 &&= 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 0v_4 \\
T(v_4) &= v_1 + v_3 &&= 1v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 0v_4 \,.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Conhecemos as matrizes $[I]_\gamma^\beta$ e $[T]_\gamma^\gamma$. Assim, para obter $[T(e_1)]_\gamma$, vamos determinar inicialmente $[e_1]_\gamma$ da seguinte forma:

$$[e_1]_\gamma = [I]_\gamma^\beta \, [e_1]_\beta \qquad \Longrightarrow \qquad [e_1]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, vamos calcular

$$[T(e_1)]_\gamma = [T]_\gamma^\gamma \, [e_1]_\gamma \qquad \Longrightarrow \qquad [T(e_1)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 3. **(3.0 Pontos)**

(a) Dado um polinômio $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(I\!R)$, inicialmente vamos calcular

$$T(p(x)) = p'(x) + p(x) = (b+a) + (b+2c)x + cx^2 ,$$

para em seguida calcular

$$\begin{aligned} (P \circ T)(p(x)) &= P(T(p(x)) = P(\,(b+a) + (b+2c)x + cx^2)\,) \\ &= (\,a + 2b + 2c\,,\, c\,,\, a - 2c\,)\,. \end{aligned}$$

Portanto, a transformação linear $P \circ T : \mathcal{P}_2(I\!R) \longrightarrow I\!R^3$ é dada por:

$$(P \circ T)(p(x)) = (\,a + 2b + 2c\,,\, c\,,\, a - 2c\,)$$

para todo $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(I\!R)$.

(b) Considerando $\beta = \{\,1\,,\, x\,,\, x^2\,\}$ a base canônica de $\mathcal{P}_2(I\!R)$ e $\gamma = \{\,e_1, e_2, e_3\,\}$ a base canônica de $I\!R^3$, vamos determinar a matriz $[P \circ T]^\beta_\gamma$.

Para isso, vamos calcular

$$\begin{aligned} (P \circ T)(1) &= (1,0,1) &&= 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \\ (P \circ T)(x) &= (2,0,0) &&= 2e_1 + 0e_2 + 0e_3 \\ (P \circ T)(x^2) &= (2,1,-2) &&= 2e_1 + 1e_2 - 2e_3\,. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$[P \circ T]^\beta_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(c) Vamos verifique se P é um isomorfismo de $\mathcal{P}_2(I\!R)$ em $I\!R^3$.

Para isso, basta verificar se $Ker(P) = \{ 0_{\mathcal{P}_2(I\!R)} \}$.

Tomando um elemento $p(x) = a + bx + cx^2 \in Ker(P)$, isto é,

$$P(a + bx + cx^2) = (a + b \, , \, c \, , \, a - b) = (0,0,0) \, ,$$

obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \quad\;\; c = 0 \\ a - c = 0 \, , \end{cases}$$

que possui somente a solução trivial $a = b = c = 0$. Logo, $Ker(P) = \{ 0_{\mathcal{P}_2(I\!R)} \}$.

Portanto, temos que P é um isomorfismo de $\mathcal{P}_2(I\!R)$ em $I\!R^3$.

Vamos determinar o isomorfismo inverso. Dado um elemento $(a,b,c) \in I\!R^3$ tal que

$$P^{-1}(a,b,c) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 \, ,$$

temos que

$$P(d_1 + d_2 x + d_3 x^2) = (a,b,c) \qquad \Longrightarrow \qquad (\, d_1 + d_2 \, , \, d_3 \, , \, d_1 - d_2 \,) = (a,b,c) \, .$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = a \\ \quad\;\; d_3 = b \\ d_1 - d_2 = c \, , \end{cases}$$

que possui somente a solução

$$d_1 = \frac{a+c}{2} \quad , \quad d_2 = \frac{a-c}{2} \qquad \text{e} \qquad d_3 = b \, .$$

Portanto, obtemos

$$P^{-1}(a,b,c) = \left(\frac{a+c}{2} \right) + \left(\frac{a-c}{2} \right) x + b x^2 \, ,$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

(a) Sabemos que $dim(V) = n$ e que $Im(T) = Ker(T)$.

Assim, podemos afirmar que $dim(\,Im(T)\,) = dim(\,Ker(T)\,) = m$.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$dim(\,Im(T)\,) \; + \; dim(\,Ker(T)\,) \; = \; dim(V)\,.$$

Portanto, temos que $n = 2m$. Logo, podemos concluir que n é par e que $m = \dfrac{n}{2}$.

(b) Considerando $V = I\!\!R^4$, temos que $dim(\,Im(T)\,) = dim(\,Ker(T)\,) = 2$.

Tomando a base canônica $\beta = \{\, e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4 \,\}$ para $I\!\!R^4$, vamos definir um operador linear T sobre $I\!\!R^4$, com as propriedades acima, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (0,0,0,0) = 0_{I\!\!R^4} \\ T(e_2) &= (0,0,0,0) = 0_{I\!\!R^4} \\ T(e_3) &= (1,0,0,0) = e_1 \\ T(e_4) &= (0,1,0,0) = e_2\,. \end{aligned}$$

Podemos observar facilmente que $\{\, e_1,\, e_2 \,\}$ é uma base para o subespaço $Ker(T)$ e também para o subespaço $Im(T)$. Logo, temos que

$$dim(\,Ker(T)\,) = dim(\,Im(T)\,) = 2 \qquad \text{e} \qquad Ker(T) = Im(T)\,.$$

Portanto, o operador linear T, definido acima, possui as propriedades desejadas. Podemos verificar facilmente que

$$T(x,y,z,t) = (z,t,0,0) \qquad \text{para todo} \qquad (x,y,z,t) \in I\!\!R^4\,.$$