ME - 310 Probabilidade II
Prof. Caio Azevedo
Segundo semestre de 2009, Data: 14/12/2009
Prova III

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **Tenha em mãos somente: lápis, borracha e caneta.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Em caso de dúvida, levante-se e dirija-se ao professor. Pergunte somente o que for imprescindível.**
- **Coloque seu nome e RA em cada uma das folhas que você recebeu, inclusive nesta.**
- **Entregue todas as folhas que você recebeu, inclusive os rascunhos e a prova propriamente, informando o que deve ser corrigido.**
- **Faça a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado. Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **Não proceda de maneira indevida como: conversar durante a prova, utilizar-se de material que não permitido, emprestar material à colegas, sem autorização do professor e atender o telefone celular (a não ser em casos de EXTREMA URGÊNCIA). Isso acarretará em nota 0 na prova.**
- **Se precisar de algum material, levante-se e dirija-se ao professor.**
- **A prova terá duração de 2 horas, improrrogáveis, das 14h às 16h.**

Faça uma excelente prova!!

Questões

1. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\mathcal{E}(X_n) = \mu$ e $\mathcal{V}(X_n) = \sigma^2, \forall n, \sigma^2 < \infty$ e $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ uma outra sequência de v.a.'s independentes tais que $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ e $P(Y_n = 1) = \frac{1}{n}$, $\forall$ n. Responda aos itens:

   a) Prove que :
   $$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sqrt{n\sum_{j=1}^{n} X_j^2}} \xrightarrow{q.c.} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}},$$
   quando n $\to \infty$ (1,5 pontos).

   b) Prove que $Y_n \xrightarrow{P} 0$, quando n $\to \infty$ (1,5 pontos).

2. Sejam $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de v.a.'s i.i.d., $X_n \sim U[0,1], \forall n$. Sejam $Y_n = min(X_1, ..., X_n)$ e $Z_n = max(X_1, ..., X_n)$, $U_n = nY_n$ e $V_n = n(1 - Z_n)$. Responda aos itens:

   a) Calcule a f.d.a de Y_n e a f.d.a. de Z_n. Justifique, adequadamente, seu desenvolvimento e enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar. OBS: Você deve, de fato, calcular as f.d.a.'s pela definição e não, simplesmente, utilizar qualquer "fórmula final" (2,0 pontos).

   b) Mostre que, quando $n \to \infty$: $Y_n \xrightarrow{P} 0$ e $Z_n \xrightarrow{P} 1$. Justifique, adequadamente, seu desenvolvimento e enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar (1,0 ponto).

   c) Mostre que, quando $n \to \infty$: $U_n \xrightarrow{D} W$ e $V_n \xrightarrow{D} W$, em que $W \sim exp(1)$. Justifique, adequadamente, seu desenvolvimento e enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar (1,0 ponto).

3. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $X_n \sim \text{binomial}(n,p)$, $0 < p < 1$. Seja $T_n = \frac{X_n}{n}, \forall n \geq 1$.

   a) Prove que $\sqrt{n}\,(T_n - p) \xrightarrow{D} N(0, p(1-p))$. Justifique, adequadamente, seu desenvolvimento e enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar. Sugestão: Lembre-se de que uma v.a.d. binomial pode ser definida em função de v.a.'s i.i.d., cada uma com distribuição de Bernoulli (2,0 pontos).

   b) Determine o limite em distribuição de $\sqrt{n}\left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{p}\right)$, utilizando o método Delta. Justifique, adequadamente, seu desenvolvimento e enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar (1,0 ponto).

Formulário

- Se $X \sim binomial(n,p)$, $n \in \{1, 2, ...\}$, $p \in (0,1)$, então $f_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \mathbb{1}_{\{0,1,...,n\}}(x)$ e $M_X(t) = (q + pe^t)^n$, q = 1 - p. Se n = 1, $X \sim Bernoulli(p)$.
- Se $X \sim exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, então $F_X(x) = (1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}) \mathbb{1}_{(0,\infty)}$.
- Se $X \sim U[0,1]$, então $F_X(x) = x \mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{(1,\infty)}$.
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{g(x)}{n}\right)^n = e^{g(x)}$.
- Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d e $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, então:
  - (Lei Fraca dos Grandes Números): Se $\mathcal{E}(X_n) = \mu$, $\forall n$, então $X_n \xrightarrow{P} \mu$.
  - (Lei Forte dos Grandes Números): Se $\mathcal{E}(X_n) = \mu$, $\forall n$, então $X_n \xrightarrow{q.c.} \mu$.
  - (Teorema Central do Limite): Se $\mathcal{E}(X_n) = \mu$, e $\mathcal{V}(X) = \sigma^2$, $\forall n$, então $\sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1)$, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.