F315 Mecânica Geral - 1a. Prova - turmas A e D

1o. Semestre de 2011

Nome: GABARITO RA: Turma:

Esta prova é composta de 3 questões e 4 folhas. Uma folha é para rascunho. Não a destaque. Escreva seu nome e RA em todas as folhas assim que receber a prova.

Apague tudo o que estiver escrito na sua carteira e naquelas vizinhas a você.

1. (3 pontos) Mostre que num movimento unidimensional em que uma força $F(x)$ (que depende somente da posição x) atua sobre uma partícula de massa m, a grandeza

$$\frac{1}{2}mv^2 - \int_{x_s}^{x} F(x)dx,$$

onde v é a velocidade da partícula e x_s é um ponto de referência arbitrário, se conserva.

Como se interpreta este resultado usualmente?

$$m\frac{dv}{dt} = F(x) \Rightarrow m\int_{x_0}^{x}\frac{dv}{dt}\,dx = \int_{x_0}^{x}F(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\int_{t_0}^{t}\frac{dv}{dt}\overset{v}{\frac{dx}{dt}}\,dt = m\int_{v_0}^{v}v\,dv = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x_s}F(x)\,dx + \int_{x_s}^{x}F(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} - \int_{x_s}^{x_0}F(x)\,dx = \underbrace{\frac{mv^2}{2} - \int_{x_s}^{x}F(x)\,dx}_{\text{se conserva}}$$

Conservação da Energia Mecânica.

Nome: RA: Turma:

2. **(3 pontos) Encontre como varia a posição em função do tempo $x(t)$ de uma partícula de massa m sujeita a uma força $F(v) = -bv$ que parte da posição $x = x_0$ com velocidade $v = v_0$. b é uma constante de proporcionalidade positiva.**

$$m \frac{dv}{dt} = -bv \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \left[\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}\right] dt = -\frac{b}{m}\int_{t_0}^{t} dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}(t-t_0) \Rightarrow \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{b}{m}(t-t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0\, e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0\, e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt}\, dt = v_0 \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}\, dt$$

$$\Rightarrow x - x_0 = v_0 \left[\left(-\frac{m}{b}\right) e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}\right]_{t_0}^{t}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 - \frac{m}{b} v_0 \left[e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} - 1\right]}$$

Nome: RA: Turma:

3. (4 pontos) Um oscilador harmônico unidimensional de massa m está sujeito à ação de uma força restauradora linear, cuja constante elástica é k, e de uma força de atrito proporcional a sua velocidade, cuja constante de amortecimento é b.

   (a) Escreva as relações entre estas constantes que levam ao movimento de oscilador harmônico sub-amortecido, super-amortecido e criticamente amortecido.

   (b) Se $m = 1$ kg, $k = 1$ N/m e $b = 2$ kg/s, escreva a solução geral da equação do movimento.

   (c) No item anterior, determine as constantes arbitrárias da solução encontrada se o oscilador parte do repouso da posição $x(t = 0) = 1$ m.

   (d) Se ao oscilador harmônico do item (b) for adicionada uma força externa $F(t) = F_0 e^{-at}$, qual é a solução geral da nova equação do movimento? (F_0 e a são constantes positivas. Não se solicita, neste item, que se determine as constantes arbitrrias envolvidas.)

a) $b^2 < 4mk \iff$ SUB ; $b^2 > 4mk \iff$ SUPER

$b^2 = 4mk \iff$ CRÍTICO

b) para $m = 1$ kg, $k = 1$ N/m, $b = 2$ kg/s $\Rightarrow b^2 = 4mk$

$\Rightarrow$ CRÍTICO : $\boxed{x(t) = (C_1 + t\,C_2)\, e^{-\frac{b}{2m}t}}$

c) $x(t=0) = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 1}$

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 1}$ $\Rightarrow x(t) = (1+t)\,e^{-t}$

d) supõe-se $x_p = A e^{-at}$ $\Rightarrow$ subst. em :

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 e^{-at} \Rightarrow A = \dfrac{F_0}{ma^2 - ab + k}$

$$\boxed{x(t) = (C_1 + t C_2)\, e^{-t} + \frac{F_0 e^{-at}}{ma^2 - ab + k}}$$