Nome: ____ R.A.: ____________

Métodos Matemáticos I **2º Exame** (11/07/2008)

(Justifique todas suas respostas e boas férias!)

Faça apenas 4 dentre as 5 questões abaixo

1. (2.5 Pontos) Considere a seguinte equação auto-adjunta

$$\mathcal{L}(y(x)) = y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = y(\pi/2) = 0.$$

Escreva a função de Green pertinente e use-a para resolver a equação $\mathcal{L}(y(x)) = \sin(2x)$, com as mesmas condições de contorno.

Soluções da equação homogênea $y(x) = A\cos x + B\sin x$. Solução satisfazendo a condição de contorno $y(0) = 0$, $y_{\mathrm{E}}(x) = \sin(x)$, $y_{\mathrm{D}}(x) = \cos(x)$ satisfaz a outra condição $y(\pi/2) = 0$. Tem-se $y_{\mathrm{E}}(x)y'_{\mathrm{D}}(x) - y'_{\mathrm{E}}(x)y_{\mathrm{D}}(x) = -1$. A função de Green compatível com essas condições de contorno é

$$G(x,t) = \begin{cases} -\sin(x)\cos(t), & x < t, \\ -\cos(x)\sin(t), & x \geq t. \end{cases}$$

A solução da não homogênea será

$$y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t)\sin(2t)\,dt = -\cos(x)\int_0^x \sin(t)\sin(2t)\,dt - \sin(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(2t)\,dt = -\frac{1}{3}\sin 2x.$$

Para fazer a integral, basta usar as identidades elementares: $2\sin(at)\cos(t) = \sin(a+1)t + \sin(a-1)t$ e $2\sin(at)\sin(t) = \cos(a+1)t - \cos(a-1)t$.

2. (2.5 Pontos) Resolva o seguinte problema de Sturm-Liouville

$$y''(x) - 2y'(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y'(1) = 0,$$

e escreva o produto interno do espaço das autofunções.

Solução geral da equação é $y(x) = e^x(Ae^{\sqrt{1+\lambda}x} + Be^{-\sqrt{1+\lambda}x})$. Há três casos distintos:

Caso: *$1 + \lambda > 0$. A condição de contorno $y(0) = 0$ implica que $A = -B$. A segunda condição de contorno implicará*

$$e^{\sqrt{1+\lambda}} + e^{-\sqrt{1+\lambda}} + \sqrt{1+\lambda}\left(e^{\sqrt{1+\lambda}} - e^{-\sqrt{1+\lambda}}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = -\tanh\sqrt{1+\lambda},$$

que não possui solução diferente da trivial $A = 0$.

Caso: *$1 + \lambda = 0$. A solução geral é $y(x) = Ae^x + Bxe^x$. A condição de contorno $y(0) = 0$ implica que $A = 0$. A segunda condição implica que a única solução é a trivial $A = B = 0$.*

Caso: *$1 + \lambda = -\omega^2 < 0$. A solução geral é $y(x) = e^x(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$. A primeira condição de contorno implica $A = 0$. A segunda implicará em:*

$$\sin\omega + \omega\cos\omega \Longrightarrow -\omega = \tan\omega,$$

que possui infinitas soluções ω_n. A solução do problema de Sturm-Liouville será, portanto, $(\lambda_n, e^x\sin\omega_n x)$, com $\lambda_n = -(1 + \omega_n^2)$, sendo ω_n a n-ésima raiz da equação transcendental acima.

A forma auto-adjunta da equação é

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}y'(x)\right) = \lambda e^{-2x}y(x),$$

de onde se concluí que o produto interno do espaço das autofunções será

$$(y_n, y_m) = \int_0^1 y_n(x)y_m(x)e^{-2x}\,dx.$$

3. (2.5 Pontos) Mostre que o ponto $x = 0$ é um ponto singular regular da equação

$$2x^2y''(x) + 2xy'(x) + (x-1)y(x) = 0$$

e resolva-a usando o método de Frobenius em torno desse ponto.

$x = 0$ é ponto singular regular já que

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{2x}{2x^2} = 1, \quad \lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0} x^2\frac{x-1}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Frobenius $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k}$. Tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+k)(n+k-1)a_n x^{n+k} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+k)a_n x^{n+k} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k+1} = 0$$

A equação indicial será $2k^2 - 1 = 0$, que tem como solução $k = \pm 1/\sqrt{2}$. A relação de recorrência será

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(n+k)^2 - 1} = -\frac{a_{n-1}}{2n(n \pm \sqrt{2})}.$$

4. (2.5 Pontos) Mostre que o conjunto de funções

$$\{1, \exp x, \exp 2x, \dots, \exp nx\},$$

com n inteiro, é linearmente independente.

Resolvido no gabarito do T6.

5. Considere o seguinte campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F} = \ln(x^2 + y^2 + z^2)(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}).$$

(a) (0.5 Ponto) Escreva $\vec{F}$ em coordenadas cilíndricas.
$\vec{F} = \ln(r^2 + z^2)(r\hat{r} + z\hat{z})$.

(b) (0.5 Ponto) Calcule $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$, sendo Γ o circulo unitário com centro na origem contido no plano $z = 0$.
Zero. O campo é radial, portanto $\vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ ao longo do circulo Γ.

(c) (0.5 Ponto) Calcule $\nabla \cdot \vec{F}$.
Zero. $\partial_x \left(x \ln(x^2 + y^2 + z^2)\right) + \partial_y \left(y \ln(x^2 + y^2 + z^2)\right) + \partial_z \left(z \ln(x^2 + y^2 + z^2)\right) = 3 \ln(x^2 + y^2 + z^2) + 2.$

(d) (1.0 Ponto) Determine a função escalar ϕ tal que $\vec{F} = -\nabla\phi$.
Em coordenadas esféricas $\vec{F} = 2r\hat{r}\ln r$, de onde tem-se $\phi = -2\int r \ln r \, dr = r^2(1/2 - \ln r)$.