EA 513 - Circuitos Elétricos

Gabarito 3ª prova - 19/06/12

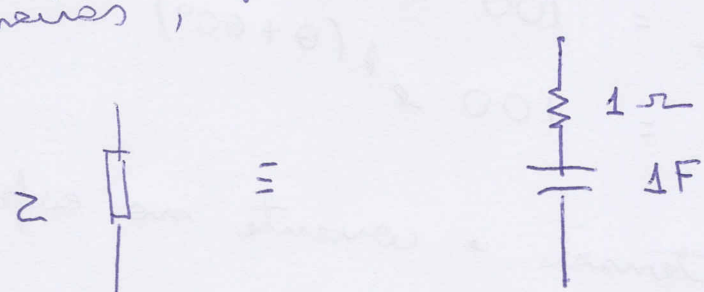
1) Do circuito tem-se:

$$\hat{E} = \left(Z - \frac{j}{\omega C}\right)\hat{I} = (Z - j)\,\hat{I} \qquad \begin{pmatrix}\omega = 1\\ C = 1\end{pmatrix}$$

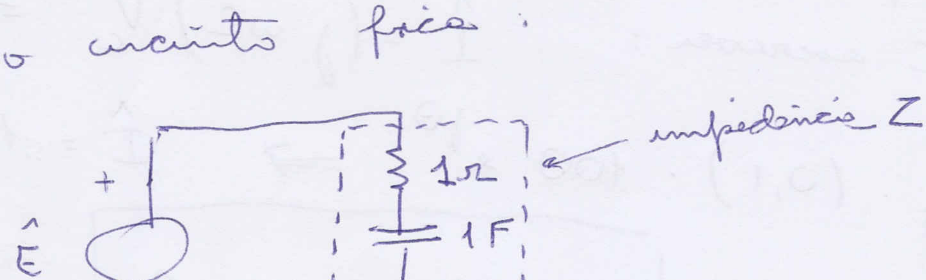
Portanto $\hat{I} = \dfrac{\hat{E}}{Z-j} = \dfrac{1-2j}{Z-j} = 1$ (corrente desejada)

$$\Longrightarrow Z - j = 1 - 2j \Longrightarrow \boxed{Z = 1 - j}$$

Esta impedância pode ser obtida de diversas maneiras, sendo uma possibilidade:



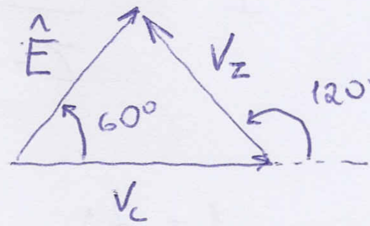
Portanto o circuito fica:



2) Temos: $|\hat{E}| = |V_Z| = |V_C| = 100\,V$

e, do circuito: $\hat{E} = V_Z + V_C$

Considerando que a soma de fasores se comporta como a soma de vetores, temos que os números complexos $\hat{E}$, V_Z e V_C formam um triângulo equilátero.



Observe que a fase de V_C é arbitrária (θ)

Portanto:

$$\begin{cases} V_Z = 100\, e^{j(\theta + 120^\circ)} \\ V_C = 100\, e^{j\theta} \\ \hat{E} = 100\, e^{j(\theta + 60^\circ)} \end{cases}$$

A relação entre tensão e corrente no capacitor permite escrever: $\hat{I} = (j\omega C)\, V_C =$

$= j \cdot (0{,}1) \cdot 100\, e^{j\theta} \implies \hat{I} = 10\, e^{j(\theta + 90^\circ)}$

Portanto: $\boxed{|\hat{I}| = 10\ A}$

Além disso, para a impedância Z podemos escrever:

$$V_Z = Z \cdot \hat{I} \implies Z = \frac{V_Z}{\hat{I}}$$

mas $V_Z = 100\, e^{j(\theta + 120^\circ)}$ e $\hat{I} = 10\, e^{j(\theta + 90^\circ)}$

Portanto: $$Z = \frac{100\, e^{j(\theta+120^\circ)}}{10\, e^{j(\theta+90^\circ)}}$$

$$\implies Z = 10\, e^{j(\theta + 120 - \theta - 90)} = 10\, e^{j30^\circ}$$

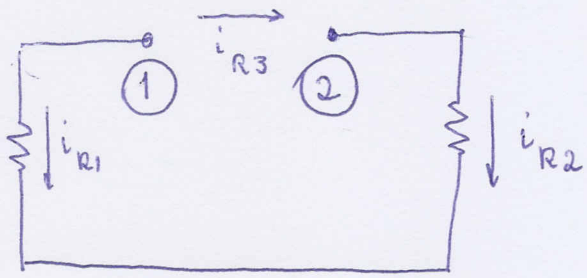
Portanto $$\boxed{\begin{aligned} |Z| &= 10 \\ \angle Z &= 30^\circ \end{aligned}}$$

ou equivalentemente:

$$Z = 10\cos(30^\circ) + j\,10\,\mathrm{sen}(30^\circ)$$

$$\boxed{Z = 5\sqrt{3} + j\,5}$$

3) A árvore própria associada ao circuito é:



Seja i_{R3} a corrente no resistor que não pertence à árvore.

A equação do laço associado ao indutor da esquerda é: $v_1 = L\dfrac{di_1}{dt} = R\,i_{R1} \Longrightarrow \dfrac{di_1}{dt} = i_{R1}$

Para o indutor da direita: $\Longrightarrow \dfrac{di_2}{dt} = i_{R2}$

Dos nós 1 e 2 temos: $\begin{cases} i_1 + i_{R1} + i_3 = 0 & (1) \\ i_2 + i_{R2} - i_3 = 0 & (2) \end{cases}$

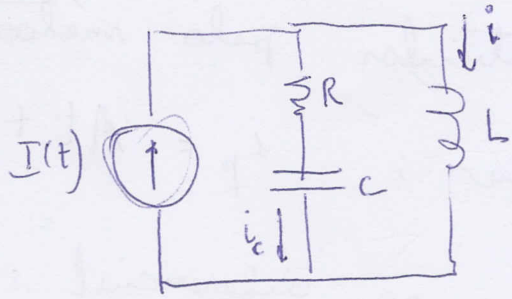
Do laço externo: $-Ri_{R1} + Ri_3 + Ri_{R2} = 0 \Longrightarrow i_3 = i_{R1} - i_{R2}$

Das três equações anteriores conclui-se:

$$\begin{cases} i_{R1} = -\dfrac{2}{3}i_1 - \dfrac{i_2}{3} \\ i_{R2} = -\dfrac{i_1}{3} - \dfrac{2}{3}i_2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Portanto: $A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$; A matriz B não é definida pois o sistema é autônomo.

4)



Tem-se: $i_C = I - i \Leftrightarrow C\dfrac{dv_C}{dt} = I - i$

(eq. do nó)

(eq. do laço): $v_L = v_R + v_C = R(I-i) + v_C$

Substituindo:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -6i + 6I \\ \dfrac{di}{dt} = v_C - 5i + 5I \end{cases}$$

Derivando a 2ª equação:

$$\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{dv_C}{dt} - 5\frac{di}{dt} + 5\frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = (-6i+6I) - 5\frac{di}{dt} + 5\frac{dI}{dt}$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + 5\frac{di}{dt} + 6i = 5\frac{dI}{dt} + 6I = 6t + 5}$$

$I(t) = t$

Da 2ª eq. de estado: $\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = v_C(0) + 5\left(I(0) - i(0)\right)$

Portanto: para $\begin{cases} i(0) = 1 \\ v_C(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} & i(0) = 1 \\ & \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = -5 \end{aligned}}$$

Obtenção da sol. particular pelo método dos coeficientes a determinar ; $i_p = At + B$

Substituindo $i_p(t)$ na eq. diferencial ; $\begin{cases} \dfrac{d^2 i_p}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d i_p}{dt} = A \end{cases}$

$$5A + 6\left(At + B\right) = 6t + 5$$

$$\Rightarrow 6At + (5A + B) = 6t + 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6A = 6 \\ 5A + B = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{i_p(t) = t}$$

Solução da eq. homogênea:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{5 di}{dt} + 6i = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

$$i_h(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t}$$

Sol. Geral : $i(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t} + t$

$$\begin{cases} i(0) = k_1 + k_2 = 1 \\ \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = -2k_1 - 3k_2 + 1 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -3 \\ k_2 = 4 \end{cases}$$

Portanto : $\boxed{i(t) = -3e^{-2t} + 4e^{-3t} + t}$

5) O equacionamento do circuito é idêntico ao anterior, isto é:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{5\,di}{dt} + 6i = \frac{5\,dI}{dt} + 6I$$

A condição inicial $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}$ é obtida de modo semelhante, a partir da 2ª eq. de estado:

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = v_c(0) + 5\left(I(0) - i(0)\right)$$

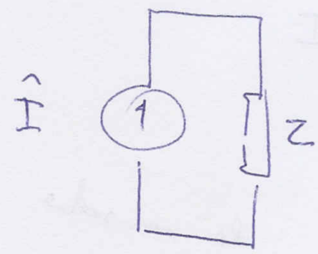
Sendo: $v_c(0) = 0$; $i(0) = 1$

e $I(0) = Re\left[\hat{I}\, e^{j\omega t}\right]\Big|_{t=0} = Re\left[\hat{I}\right] = Re\left[\frac{1}{1+j11}\right]$

$$= Re\left[\frac{1-j11}{122}\right] = \frac{1}{122}$$

Portanto $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 5\left(\frac{1}{122} - 1\right) \simeq -5$

Uma solução particular pode se obtida se considerarmos o circuito:



sendo $Z = \dfrac{1}{\dfrac{1}{j\omega L} + \dfrac{1}{R - \dfrac{j}{\omega C}}} =$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{j} + \dfrac{1}{5-6j}} = \frac{1}{\dfrac{5-6j+j}{(5-6j)j}} = \frac{6+5j}{5-5j}$$

(observe que $I(t) = K\cos(t+\theta) \Longrightarrow \omega = 1$)

Portanto $Z = \dfrac{(6+5j)(5+5j)}{50} = \dfrac{5+55j}{50}$

$$= \frac{1+11j}{10}$$

Dado que $\hat{I} = 1 + 11j$ tem-se que $V_Z = 0,1 = Z\hat{I}$

Esta tensão complexa é a tensão no indutor

Portanto concluímos que $v_L(t) = 0,1 \cos t$

e $i_L(t) = 0,1 \operatorname{sen} t$ são uma ~~soluções~~ solução particular para o circuito dado.

A solução geral é finalmente :

$$i(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t} + 0{,}1 \operatorname{sen} t$$

$$\begin{cases} i(0) = k_1 + k_2 = 1 \\ \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = -2k_1 - 3k_2 + 0{,}1 = -5 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} k_1 = -2{,}1 \\ k_2 = 3{,}1 \end{cases}$$

$$\boxed{i(t) = -2{,}1\, e^{-2t} + 3{,}1\, e^{-3t} + 0{,}1 \operatorname{sen} t}$$