EM607 – Vibrações de Sistema Mecânicos

Prof. Milton Dias Junior

1.ª Prova de Exercícios – 10/10/2008

Nome:____**RA:**____________

Questão 1 (4,0): Uma máquina é modelada pelo sistema mostrado na Figura 1. As massas dos elementos principais são m_1 e m_2 e as rigidezes são como mostradas. Cada rolete rola sem deslizar e tem massa m, diâmetro d e momento de inércia de massa J em relação ao seu centro. Considerando que o movimento ocorre apenas na direção longitudinal, obtenha as equações de movimento, na forma matricial, do sistema para pequenas oscilações.

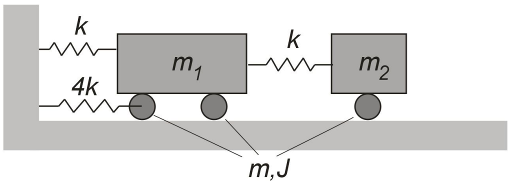


Figura 1

Resposta:

$$\begin{bmatrix} \left(m_1 + \frac{2J}{d^2} + \frac{m}{2}\right) & 0 \\ 0 & \left(m_2 + \frac{J}{d^2} + \frac{m}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Questão 2 (3,0): Uma placa rígida, com massa de 50kg e centro de massa em G, é pivotada no ponto O e suportada por um amortecedor c = 200N.s/m, em G, e por uma mola com rigidez k = 4000N/m, em Q, como ilustrado na Figura 2. Um pequeno ventilador com massa de 25kg e operando a 750rpm é montado sobre a placa no ponto A. O centro de massa do ventilador está localizado a 2,5mm do eixo de rotação. Considerando que a massa do ventilador está toda concentrada no ponto A e que a da placa está concentrada em seu centro de massa, determine:

(2,0) (a) a amplitude da resposta em regime permanente do deslocamento vertical da extremidade Q e

(1,0) (b) a intensidade da força transmitida para o piso no ponto B.

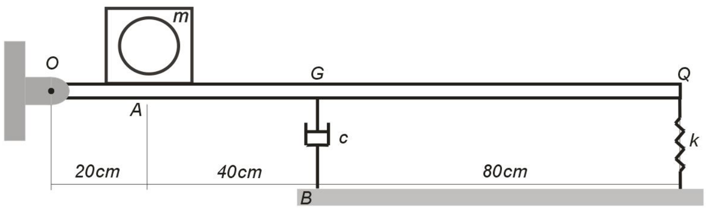


Figura 2

Resposta (a):

$\boldsymbol{X_Q = 0{,}986mm}$

Resposta (b):

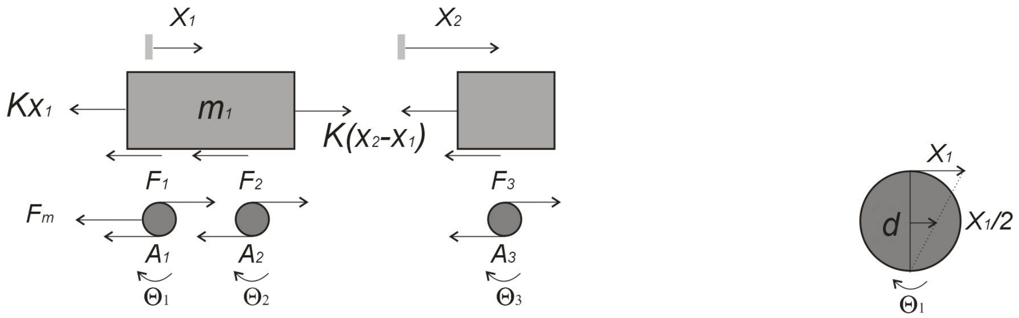
$\boldsymbol{F_T = 6{,}6N}$

Questão 3 (3,0): Um conjunto moto-gerador de massa igual a 520kg produz uma força perturbadora senoidal vertical na freqüência de 25Hz. A força transmitida ao piso deve ter uma amplitude, nesta freqüência, não maior que 0,4 vezes a amplitude da força perturbadora da máquina, e a deflexão estática dos suportes, devido ao peso próprio do conjunto, deve ser a menor possível, mas consistente com a condição anterior. Para esta aplicação, suportes de borracha são utilizados, que estão disponíveis em unidades cuja rigidez vale 359kN/m e com coeficiente de amortecimento igual a 2410Ns/m. Quantas destas unidades são necessárias para satisfazer as condições estabelecidas no projeto?

Resposta: 8

Solução

Questão 1 (4,0): A Figura Q1(a) mostra os DCLs de todos os corpos componentes do sistema, desconsiderando as forças peso e as reações normais.



(a) (b)

Figura Q1

Inicia-se a solução do problema analisando o comportamento dos roletes. Calcula-se, assim, a somatória dos momentos em relação aos pontos de contato dos mesmos com o solo:

Rolete 1:

$$\sum M_C = I_C\ddot{\theta}_1 \Rightarrow F_1 d - F_m\frac{d}{2} = \left(J + m\frac{d^2}{4}\right)\ddot{\theta}_1 . \qquad \text{(Q1.1)}$$

Como não há deslizamento do rolete com o solo e nem em relação à massa m_1, pode-se concluir que $x_1=d\theta_1$, conforme ilustra a Figura Q1(b). Da mesma forma, nota-se que o deslocamento do centro do rolete vale $x_1/2$. Portanto, a força de mola F_m que atua no centro do rolete 1 vale $F_m=4kx_1/2=2kx_1$. Substituindo estes resultados na equação Q1.1, obtém-se:

$$F_1 = \left(J + m\frac{d^2}{4}\right)\frac{\ddot{x}_1}{d^2} + kx_1 = \left(\frac{J}{d^2} + \frac{m}{4}\right)\ddot{x}_1 + kx_1 . \qquad \text{(Q1.2)}$$

Rolete 2: Um procedimento análogo pode ser utilizado para analisar o rolete 2. Neste caso, como não há mola aplicada ao rolete, a equação de momentos resulta em:

$$F_2 = \left(\frac{J}{d^2} + \frac{m}{4}\right)\ddot{x}_1 . \qquad \text{(Q1.3)}$$

Rolete 3: A única diferença que ocorre no rolete 3 é que a relação entre o deslocamento angular do rolete e o deslocamento linear da massa m_2 é $x_2=d\theta_3$. Assim, a equação de momentos fornece:

$$F_3 = \left(\frac{J}{d^2} + \frac{m}{4}\right)\ddot{x}_2 . \qquad \text{(Q1.4)}$$

Analisa-se, agora, o equilíbrio dinâmico dos corpos m_1 e m_2.

Corpo de massa m_1:

$$\sum F = m_1\ddot{x}_1 \Rightarrow -kx_1 + k(x_2 - x_1) - F_1 - F_2 = m_1\ddot{x}_1 . \qquad \text{(Q1.5)}$$

Substituindo os resultados obtidos nas equações Q1.2 e Q1.3 na equação Q1.5, obtém-se:

$$\left(m+2\left(\frac{J}{d^2}+\frac{m}{4}\right)\right)\ddot{x}_1+3kx_1-kx_2=0\Rightarrow\left(m_1+\frac{2J}{d^2}+\frac{m}{2}\right)\ddot{x}_1+3kx_1-kx_2=0. \qquad \text{(Q1.6)}$$

Corpo de massa m_2:

$$\sum F=m_2\ddot{x}_2\Rightarrow -k(x_2-x_1)-F_3=m_2\ddot{x}_2. \qquad \text{(Q1.7)}$$

Substituindo o resultado obtido na equação Q1.4 na equação Q1.7, obtém-se:

$$\sum F=m_2\ddot{x}_2\Rightarrow\left(m_2+\frac{J}{d^2}+\frac{m}{4}\right)\ddot{x}_2+kx_2-kx_1=0. \qquad \text{(Q1.8)}$$

Escrevendo as equações Q1.6 e Q1.8 na forma matricial, tem-se, finalmente, a EDM do sistema:

$$\begin{bmatrix}\left(m_1+\frac{2J}{d^2}+\frac{m}{2}\right) & 0\\ 0 & \left(m_2+\frac{J}{d^2}+\frac{m}{4}\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}3k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=0.$$

<u>Questão 2 (3,0)</u>: A Figura Q2(a) mostra o DCL do sistema, desconsiderando as forças peso uma vez que o sistema encontra-se na posição de equilíbrio estático.

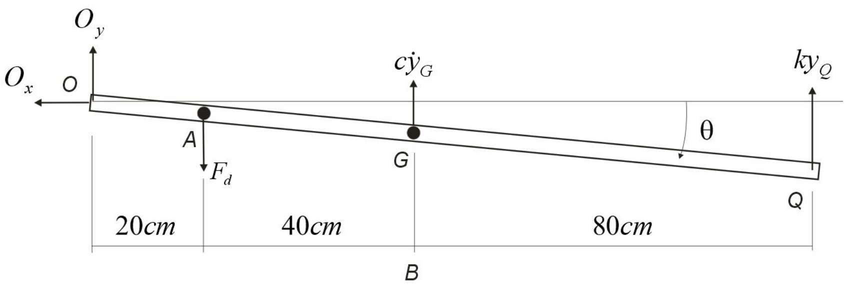


Figura Q2

O sistema gira em torno do ponto fixo *O*. Conforme especificado no enunciado, as massas do ventilador e da placa estão concentradas nos pontos *A* e *G*, respectivamente. Ou seja, o momento de inércia da placa em relação ao seu centro de massa pode ser desprezado. Desta forma, a equação de momentos em relação ao ponto *O* fornece:

$$\sum M_O=I_O\ddot{\theta}\Rightarrow -0{,}6\cos(\theta)c\dot{y}_G-1{,}4\cos(\theta)ky_Q+0{,}2F_d=\left(m_v(0{,}2)^2+m_p(0{,}6)^2\right)\ddot{\theta}, \qquad \text{(Q2.1)}$$

sendo m_v e m_p as massas do ventilador e da placa, respectivamente. Da geometria do problema, pode-se escrever:

$$\text{sen}(\theta)=\frac{y_Q}{1{,}4}=\frac{y_G}{0{,}6}\Rightarrow y_G=\frac{3}{7}y_Q\Rightarrow\dot{y}_G=\frac{3}{7}\dot{y}_Q, \qquad \text{(Q2.2)}$$

Substituindo os resultados apresentados em Q2.2 na equação Q2.1 e linearizando a equação resultante ($\cos(\theta)\approx 1$ e $\dot{\theta}^2\text{sen}(\theta)\approx\dot{\theta}^2\theta\approx 0$), tem-se:

$$\left(m_v(0{,}2)^2 + m_p(0{,}6)^2\right)\frac{\ddot{y}_Q}{1{,}4} + 0{,}6c\frac{3}{7}\dot{y}_Q + 1{,}4ky_Q = 0{,}2F_d\,, \qquad \text{(Q2.3)}$$

ou

$$5\left(m_v(0{,}2)^2 + m_p(0{,}6)^2\right)\ddot{y}_Q + 1{,}8c\dot{y}_Q + 9{,}8ky_Q = 1{,}4F_d\,. \qquad \text{(Q2.4)}$$

A força F_d é causada pelo desbalanceamento do ventilador e sua intensidade é dada por $m_v e\Omega^2$, sendo e a excentricidade e Ω a rotação (em *rad/s*). Assim,

$$F_d = 25.2{,}5.10^{-3}\Omega^2 = 0{,}0625.\left(\frac{750}{60}.2\pi\right)^2 = 385{,}53N\,. \qquad \text{(Q2.5)}$$

Esta força é uma função harmônica cuja freqüência é a mesma da rotação do ventilador.

Utilizando os dados apresentados no enunciado e os resultados mostrados nas equações Q2.4 e Q2.5, obtém-se a seguinte EDM:

$$95\ddot{y}_Q + 360\dot{y}_Q + 39200y_Q = 1{,}4.0{,}0625\Omega^2\mathrm{sen}(\Omega t) = 539{,}744\mathrm{sen}(\Omega t)\,. \qquad \text{(Q2.6)}$$

Podem-se utilizar dois procedimentos diferentes para se obter a resposta em regime permanente deste sistema. O primeiro se baseia na solução da equação de movimento enquanto o segundo faz uso da equação de amplitude devido ao desbalanceamento apresentada em sala de aula e fornecida durante a prova.

Para a primeira abordagem, propõe-se uma solução do tipo:

$$y_Q(t) = A_s\mathrm{sen}(\Omega t) + A_c\cos(\Omega t)\,, \qquad \text{(Q2.7)}$$

Derivando-se esta expressão, obtém-se:

$$\dot{y}_Q(t) = \Omega A_s\cos(\Omega t) - \Omega A_c\mathrm{sen}(\Omega t) \quad \text{e} \quad \ddot{y}_Q(t) = -\Omega^2A_s\mathrm{sen}(\Omega t) - \Omega^2A_c\cos(\Omega t)\,. \qquad \text{(Q2.8)}$$

Substituindo as equações Q2.7 e Q2.8 na equação de movimento Q2.6 e agrupando os termos em seno e cosseno, obtém-se:

$$\begin{aligned}&(-95\Omega^2A_s - 360\Omega A_c + 39200A_s)\mathrm{sen}(\Omega t) + \\ &(-95\Omega^2A_c + 360\Omega A_s + 39200A_c)\cos(\Omega t) = 539{,}744\mathrm{sen}(\Omega t).\end{aligned} \qquad \text{(Q2.9)}$$

Para encontrar os valores de A_s e A_c basta igualar os termos em seno e cosseno de ambos os lados da equação Q2.9. Este processo resulta no seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned}&-95\Omega^2A_s - 360\Omega A_c + 39200A_s = 539{,}744\\ &-95\Omega^2A_c + 360\Omega A_s + 39200A_c = 0.\end{aligned} \qquad \text{(Q2.10)}$$

Resolvendo este sistema, obtém-se que $A_s = -9{,}844.10^{-4}m = -0{,}984mm$ e $A_c = -5{,}09.10^{-5}m = -0{,}051mm$. Finalmente, calcula-se a amplitude da resposta em regime permanente do deslocamento vertical da extremidade Q como sendo:

$$X_0 = \sqrt{A_s^{\,2} + A_c^{\,2}} = 0{,}986mm\,. \tag{Q2.11}$$

A segunda forma de se obter a resposta em regime deste sistema é através da expressão

$$X_0 = \frac{me}{M}\frac{r^2}{\left[\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2\right]^{1/2}}\,, \tag{Q2.12}$$

fornecida durante a prova. Contudo, alguns cuidados precisam ser tomados antes de usar esta expressão.

A equação Q2.12 deriva da seguinte EDM:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\Omega^2 \mathrm{sen}(\Omega t)\,, \tag{Q2.12}$$

Compara-se esta equação com a equação Q2.6, repetida a seguir por conveniência:

$$95\ddot{y}_Q + 360\dot{y}_Q + 39200\,y_Q = 1{,}4.0{,}0625\Omega^2 \mathrm{sen}(\Omega t)\,. \tag{Q2.6}$$

Portanto, no presente caso, tem-se que:

$$M = 95;\;\; c = 360;\;\; k = 39200 \;\text{ e }\; me = 1{,}4.0{,}0625 = 0{,}0875\,. \tag{Q2.13}$$

A freqüência natural do sistema é:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{39200}{95}} = 20{,}31 rad/s\,, \tag{Q2.14}$$

enquanto a freqüência de excitação é:

$$\Omega = \frac{750}{60}.2\pi = 78{,}54 rad/.\,. \tag{Q2.15}$$

Logo $r = \Omega/\omega_n = 3{,}866$. O coeficiente de amortecimento crítico é dado por:

$$c_{cr} = 2\sqrt{kM} = \sqrt{39200.95} = 3859{,}5 Ns/m\,, \tag{Q2.16}$$

Portanto, a razão de amortecimento vale:

$$\zeta = c/c_{cr} = 360/3859{,}5 = 0{,}0933 = 9{,}33\%\,, \tag{Q2.17}$$

Substituindo os resultados de Q2.13 a Q2.17 na equação Q2.12, obtém-se:

$$X_0 = \frac{me}{M}\frac{r^2}{\left[\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{0{,}0875}{95}\frac{3{,}866^2}{\left[\left(1-3{,}866^2\right)^2 + \left(2.0{,}0933.3{,}866\right)^2\right]^{1/2}} = 9{,}86.10^{-4} m\,, \tag{Q2.18}$$

ou $X_0 = 0{,}986mm$, conforme foi obtido anteriormente resolvendo-se a equação de movimento!

A força transmitida ao piso no ponto B é aquela aplicada pelo amortecedor. A sua intensidade vale, portanto:

$$F_T = \hat{c}\left|\dot{y}_G\right|\,. \tag{Q2.19}$$

sendo $\left|\dot{y}_G\right|$ a intensidade da velocidade no ponto G e $\hat{c} = 200 Ns/m$ o coeficiente de amortecimento do elemento amortecedor. Mas, da equação Q2.2, tem-se que:

$$F_T = \hat{c}\left|\dot{y}_G\right| = \frac{3}{7}\hat{c}\left|\dot{y}_Q\right|, \tag{Q2.20}$$

Como a resposta do sistema é harmônica, a relação entre as intensidades da velocidade e do deslocamento no ponto *Q* é dada por:

$$\left|\dot{y}_Q\right| = \Omega\left|y_Q\right| = \Omega X_0, \tag{Q2.21}$$

Logo, de Q2.20 e Q2.21, conclui-se que a intensidade da força transmitida ao solo no ponto B vale:

$$F_T = \frac{3}{7}\hat{c}\Omega X_0 = \frac{3}{7}.200.78,54.9,86.10^{-4} = 6,64N\ . \tag{Q2.22}$$

<u>Questão 3 (3,0)</u>: Do enunciado do problema tem-se que a massa do sistema vale m = 520kg enquanto a freqüência de excitação ω = 25.2.π = 157,08rad/s. Considerando que serão utilizados n suporte associados em paralelo, pode-se escrever que:

$$k = 359.10^3 n\ N/m;\ c = 2410n\ Ns/m\ \text{ e }\ \omega_n^{\ 2} = 359.10^3 n/520 = 690,4n\ s^{-2}\ . \tag{Q3.1}$$

A freqüência de excitação vale ω = 25.2.π = 157,08rad/s. Portanto, $r^2 = \omega^2/\ \omega_n^{\ 2}$ = 35,6/n. Sendo

$$c_{cr}^{\ 2} = 4km = 359.10^3 n.520 = 746,72.10^6 n\ . \tag{Q3.2}$$

tem-se que:

$$\zeta^2 = \frac{c^2}{c_{cr}^{\ 2}} = \frac{(2410)^2 n^2}{746,72.10^6 n} = 0.0078n\ . \tag{Q3.3}$$

O problema impõe que “a força transmitida ao piso deve ter uma amplitude, nesta freqüência, não maior que 0,4 vezes a amplitude da força perturbadora da máquina”, ou seja, na condição mais crítica:

$$\frac{F_T}{F_0} = 0,4\ . \tag{Q3.4}$$

A expressão, fornecida durante a prova, da força transmitida ao solo devido a uma força harmônica aplicada na massa principal do sistema é:

$$\frac{F_T}{F_0} = \left[\frac{1+\left(2\zeta r\right)^2}{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\zeta r\right)^2}\right]^{1/2}\ . \tag{Q3.5}$$

Substituindo os valores obtidos na equação Q3.5, obtém-se o seguinte polinômio:

$$n^2 + 6,42n - 114,6 = 0, \tag{Q3.6}$$

cujas raízes são: n = 8 ou n = -14,5.

Portanto, 8 unidades do suporte disponível associadas em paralelo são necessárias para fornecer a atenuação desejada. Mais unidades fornecerão uma deflexão estática menor mas uma força transmitida maior.