T₃ ( ) F520 ( ) MS550 · Nome: ______________________ RA: __________

Mostre que nenhuma solução não trivial da equação

$$z^2y'' - zy' + 2y = 0$$

que é real no semieixo real positivo do plano complexo pode ser real no semieixo real negativo.

$y = z^r \Rightarrow r(r-1) - r + 2 = 0$

$r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm i$

$\therefore y = A z z^{i} + B z z^{-i}, \quad A, B \in \mathbb{C} \quad \begin{cases} A = \alpha_1 + i\beta_1 \\ B = \alpha_2 + i\beta_2 \end{cases}$

$= A z e^{i \ln z} + B z e^{-i \ln z}$

$+2,0$

(i) $z = re^{i\theta}, \theta = 0$

$y = (\alpha_1 + i\beta_1) r e^{i \ln r} + (\alpha_2 + i\beta_2) r e^{-i \ln r}$

$= [\alpha_1 r \cos \ln r - \beta_1 r \sin \ln r + \alpha_2 r \cos \ln r + \beta_2 r \sin \ln r]$

$+ i[\beta_1 r \cos \ln r + \alpha_1 r \sin \ln r - \alpha_2 r \sin \ln r + \beta_2 r \cos \ln r]$

$Im[y] = 0 \iff \boxed{\beta_1 = -\beta_2}$ e $\boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$ (*) $+3,5$

(ii) $z = re^{i\theta}, \theta = \pi$

$y = (\alpha_1 + i\beta_1)(-r) e^{i \ln r - \pi} + (\alpha_2 + i\beta_2)(-r) e^{-i \ln r + \pi}$

$= -[\alpha_1 e^{-\pi} r \cos \ln r - \beta_1 e^{-\pi} r \sin \ln r + \alpha_2 r e^{\pi} \cos \ln r + \beta_2 e^{\pi} r \sin \ln r]$

$- i[\beta_1 e^{-\pi} r \cos \ln r + \alpha_1 r e^{-\pi} \sin \ln r - \alpha_2 r e^{\pi} \sin \ln r + \beta_2 r e^{\pi} \cos \ln r]$

$Im[y] = 0 \iff \boxed{\beta_1 e^{-\pi} = -\beta_2 e^{\pi}}$ e $\boxed{\alpha_1 e^{-\pi} = \alpha_2 e^{\pi}}$ (**) $+3,5$

MAS (*) e (**) não podem ser satisfeitas concomitantemente!

$+1,0$