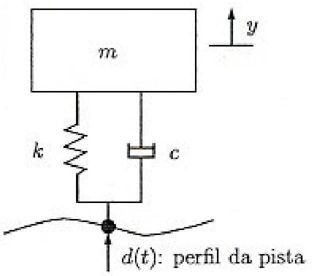
Controle de Sistemas Mecânicos - Terceira Prova - 31/10/2007

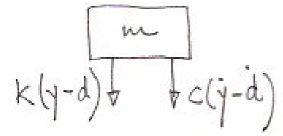
Nome: Gabarito RA: Turma:

1. Considere o movimento vertical do sistema da mecânico mostrado na figura.

   (a) (valor 1.0) Obtenha a equação de equilíbrio dinâmico, desenhe o respectivo diagrama de blocos e indique os estados no respectivo diagrama satisfazendo $x_2 = \dot{x}_1$.



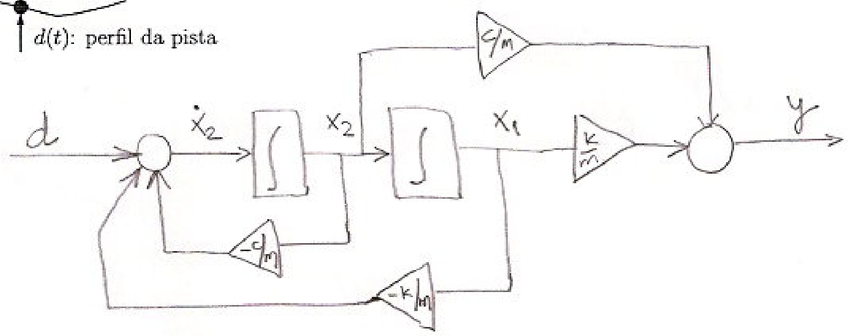
$y > d$



$$m\ddot{y} = -k(y-d) - c(\dot{y}-\dot{d})$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = c\dot{d} + kd$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{c}{m}\dot{d} + \frac{k}{m}d$$



   (b) (valor 1.0) Obtenha o modelo de estado correspondente ao diagrama de blocos.

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_1 + d; \quad \dot{x}_1 = x_2; \quad y = \frac{k}{m}x_1 + \frac{c}{m}x_2;$$

matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{k}{m} & \frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + 0.\,d$$

(c) (valor 1.0) Para $m = 1000kg$, $k = 10000N/m$ e $c = 1000Ns/m$, calcule a matriz de transição de estados.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{10000}{1000} & -\frac{1000}{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \; ; \quad \phi = e^{At} \; ; \quad \text{no matlab } \phi = \text{expm}(A*t)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{39} e^{-t/2} \times \left[39 \cos\left(\sqrt{39} \cdot \frac{t}{2}\right)\right] + \sqrt{39} \operatorname{sen}\left(\sqrt{39} \cdot \frac{t}{2}\right) & \frac{2}{39}\sqrt{39}\, e^{-t/2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{39} \cdot \frac{t}{2}\right) \\ -\frac{20}{39} \cdot \sqrt{39}\, e^{-t/2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{39}\,\frac{t}{2}\right) & -\frac{1}{39} e^{-t/2} \cdot \left(-39 \cos\left(\sqrt{39}\,\frac{t}{2}\right) + \ldots\right. \end{bmatrix}$$

(d) (valor 1.0) Para uma pista lisa e plana, obtenha a resposta $y(t = 2s)$ à condição inicial nos estados de $x_1(0) = 0.009$ e $x_2(0) = 0.01$ usando a matriz calculada no item anterior.

$$\left.\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}\right|_{2s} = \phi(2) \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3654 & -0{,}0045 \\ 0{,}0450 & 0{,}3699 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}009 \\ 0{,}01 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0032 \\ 0{,}0041 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}0032 \\ 0{,}0041 \end{Bmatrix} = 0{,}0365$$

(e) (valor 1.0) Determine os pólos do sistema através do modelo de estados e através da função de transferência e compare os resultados.

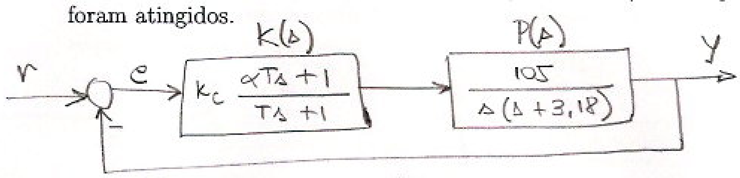
$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{\frac{c}{m} s + \frac{K}{m}}{s^2 + \frac{c}{m} s + \frac{K}{m}} = \frac{s + 10}{s^2 + s + 10}$$

pólos $\rightarrow$ pzmap $\left(\frac{Y}{D}\right) \Rightarrow \left[-\frac{1}{2} \pm 3{,}1225j\right]$

autovalores de A $\longrightarrow$ eig$(A) \Rightarrow \left[-\frac{1}{2} \pm 3{,}1225j\right]$

resultados iguais como esperado.

2. (valor 2.0) Projetar um controlador em avanço para uma planta química aproximada por $P(s) = \frac{105}{s(s+3.18)}$ de forma que a margem de fase seja de 40° e o erro estacionário à rampa unitária seja de 0.01 (considere realimentação unitária). Verifique se todos os requisitos foram atingidos.



$$E = R - PKE \Rightarrow E = \frac{R}{1+PK}$$

$$e_{est} = \lim_{s\to 0} sE = \lim_{s\to 0} s \cdot \left[\frac{1}{1 + \frac{105}{s(s+3,18)} \cdot K_c \frac{\alpha T s+1}{Ts+1}} \cdot \frac{1}{s^2} \right] =$$

$$= \lim_{s\to 0} \left[\frac{1}{\frac{s(s+3,18)+105}{s(s+3,18)} \cdot K_c \frac{\alpha T s+1}{Ts+1}} \cdot \frac{1}{s} \right] =$$

$$= \lim_{s\to 0} \left[\frac{\cancel{s}(s+3,18)(Ts+1)}{K_c\left(s(s+3,18)+105\right)(\alpha T s+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \right] =$$

$$= \lim_{s\to 0} \left[\frac{3,18}{105\ K_c} \right] = 0,01 \Rightarrow K_c = 3,0286$$

Utilizando o código 1 dado na prova tem-se:

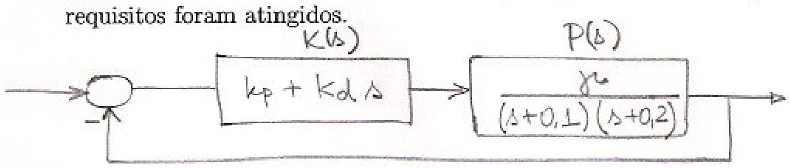
mf = 10,2	com am no diagrama de Bode tem-se:
phiseg = 4°	Wcgf = 24
phi = 0,5899 rad	T = 0,0222
alpha = 3,5075	$Ks = \frac{0,2363s + 3,029}{0,02225s + 1}$ (controlador)
am = 5,4500	

margem de fase final: margin $(ks * P(s)) = 41,2°$ (satisfaz)

malha fechada: $T(s) = \frac{24,82s + 318}{0,02225s^3 + 1,071s^2 + 38s + 318}$

resposta à rampa step $\left(T(s) * \frac{1}{s}\right) \Rightarrow$ erro estacionário de 0,01 (correto)

3. (valor 1.5) Projete um controlador PD (método analítico com base no lugar das raízes) de forma que uma planta cujos pólos são -0.1 e -0.2 e que possua ganho estático de 10, passe a ter um par de pólos complexos em malha fechada (realimentação unitária) com fator de amortecimento de 0.5 e freqüência natural de $3rad/s$. Verifique se todos os requisitos foram atingidos.



$$\lim_{s\to 0} \frac{k}{(s+0,1)(s+0,2)} = 10 \Rightarrow \frac{k}{0,02} = 10 \Rightarrow k = 0,2$$

PD $\rightarrow$ $Ki = 0$

Usando o método 2 dado na prova tem-se:

$sD = -1,5 + 2,598j$

$psD = -0,0134 + 0,0191j$

$ampp = 0,0233$ $\quad (|P(sD)|)$

$tetap = 2,1834$ $\quad (\theta_P)$

$ampk = 42,8697$ $\quad (|K|)$

$a = -4,5$

$b = -1,5$

$alpha = -128,10$

$c = -7,7942$

$d = 2,5981$

$beta = 11,4315$

$Kp = 44,9$

$Kd = 13,5$

$\boxed{K(s) = 13,5s + 44,9 \quad \text{(controlador)}}$

Malha fechada:

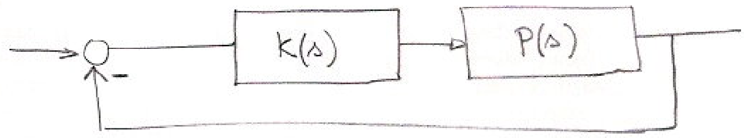
$$T(s) = \frac{2,7s + 8,98}{s^2 + 3s + 9} \quad (\text{feedback}(K(s) * P(s), 1))$$

pólos da malha fechada:

$-1,5 \pm 2,598j$ (como desejado)

Nota: damp(T(s)) mostra diretamente ξ e W_n dos pólos (0,5 e 3rad/s).

4. (valor 1.5) Mostre que nas técnicas analíticas com base no lugar das raízes o módulo do controlador é dado pelo inverso do módulo da planta, e que a fase do controlador somada à fase da planta resulta em $-\pi$.



Equação do lugar das raízes: $1 + K(s)\,P(s) = 0$

$$K(s)\,P(s) = -1 \Rightarrow |K(s)|\, e^{j\theta_K}\, |P(s)|\, e^{j\theta_P} = 1 \angle -\pi$$

$$|K(s)|\,|P(s)| = 1 \Rightarrow \boxed{|K(s)| = \frac{1}{|P(s)|}}$$

$$\boxed{\theta_K + \theta_P = -\pi}$$

método 1

```
P= ...
phiesp= ...
kc= ...
margin(kc*P)
mf= ...
phiseg= ...
phi=phiesp-mf+phiseg
alpha=(1+sin(phi))/(1-sin(phi))
am=10*log10(alpha)
wcgf= ...
T=1/(sqrt(alpha)*wcgf)
ks=kc*(alpha*T*s+1)/(T*s+1)
```

método 2

```
P= ...
sD= ...
psD=freqresp(P,sD)
ampp=abs(psD)
tetap=angle(psD)
tetak=-pi-tetap
ampk=1/ampp
sigmaD=real(sD)
wD=imag(sD)
a=sigmaD^2-wD^2
b=sigmaD
alpha=sigmaD*ampk*cos(tetak)-wD*ampk*sin(tetak)
c=2*sigmaD*wD
d=wD
beta=wD*ampk*cos(tetak)+sigmaD*ampk*sin(tetak)
ki= ...
kp=(alpha*c-ki*c-a*beta)/(b*c-a*d)
kd=(beta-d*kp)/c
```

método 3

```
P= ...
wcg= ...
phi= ...
pwcg=freqresp(P,j*wcg)
ampp=abs(pwcg)
tetap=angle(pwcg)
tetak=-pi+phi-tetap
ampk=1/ampp
ki= ...
kp=ampk*cos(tetak)
kd=(ampk*sin(tetak)+ki/wcg)/wcg
```

método 4

```
P= ...
kc= ...
margin(kc*P)
mf= ...
phiseg= ...
phi=phiesp+phiseg;
angulo=-180+phi
wcgf= ...
am= ...
alpha=10^(am/20)
T=10/(alpha*wcgf)
ks=kc*(alpha*T*s+1)/(T*s+1)
```