Métodos I - 1S11 - Lista 3

(1) Mostre que a solução de

$$y' + z^{-2}y = 0$$

possui uma singularidade essencial em $z = 0$.

(2) Mostre que nenhuma solução não trivial da equação

$$z^2y'' + zy' + y = 0$$

que é real no semieixo real positivo do plano complexo pode ser real no semieixo real negativo.

(3) (a) Mostre que, se

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0 \qquad (\star)$$

possui um ponto singular regular em $z = 0$ e $q(0) \neq 0$, então

$$y'' + [p - (q'/q)]y' + [p' - (pq'/q) + q]y = 0 \qquad (\star\star)$$

possui um ponto singular regular em $z = 0$.

(b) Mostre que, se $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções de $(\star)$ então $\{y_1', y_2'\}$ é um conjunto fundamental de soluções de $(\star\star)$.

(4) Seja a equação

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$$

e tal que $z = 0$ é um ponto singular regular. Mostre que uma mudança de variável dependente $y \mapsto w$ da forma $y(z) = z^\rho \phi(z) w(z)$, onde $\phi(0) \neq 0$ e $\phi(z)$ regular em torno de $z = 0$, leva o ponto singular regular $z = 0$ com equação indicial $I(r) = 0$ nesse ponto com equação indicial $I(r + \rho) = 0$.

(5) Mostre que a única equação diferencial linear de segunda ordem que possui apenas dois pontos singulares regulares e localizados em $z = 0$ e $z = \infty$ é a equação diferencial de Euler

$$z^2y'' + \alpha zy' + \beta y = 0.$$

(6) Mostre que a equação de Bessel

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0$$

possui um ponto singular irregular em $z = \infty$.

(7) Mostre que, se $f(0) = 0$ mas $f'(0) \neq 0$, a mudança de variável $z = f(t)$ leva uma equação diferencial

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$$

com um ponto singular regular localizado em $z = 0$ em uma equação diferencial com um ponto singular regular localizado em $t = 0$ satisfazendo a mesma equação indicial.