Instituto de Física Gleb Wataghin
UNICAMP

F315 Mecânica Geral - Prova 1 - turmas A e B

1o. Semestre de 2012

Nome: **RA:** **Turma:**

Esta prova contém 5 folhas. Pode-se usar o verso destas folhas para a resolução dos exercícios e para rascunho.

1. Uma partícula de massa m está no eixo x e sujeita à ação de uma força
$$F(x) = A\sin(ax),$$
onde A e a são constantes positivas.

   (a) (1 ponto) Calcule o potencial associado a esta força.

   (b) (1 ponto) Faça um esboço do gráfico correspondente à energia potencial.

   (c) (1 ponto)Encontre os pontos de equilíbrio e mostre se são estáveis ou instáveis.

   (d) (1 ponto) Supondo que a energia potencial V(x=0)=0, encontre os pontos de retorno para uma energia mecânica $E = -A/a$. Determine as regiões no eixo x que são proibidas para o movimento da partícula.

   (e) (1 ponto) Determine a frequência para pequenas oscilações em torno de um ponto de equilíbrio estável, mostrando detalhadamente as aproximações utilizadas.

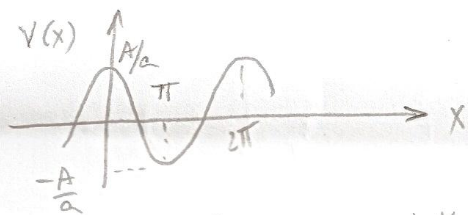
   Dado: Série de Taylor: $f(x)|_{x\approx x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}\frac{d^n f(x)}{dx^n}|_{x=x_0}$.

...315 1ª Prova 1º Semestre 2012

1ª Questão

a) $V(x) = -\int_{x_s}^{x} A\sin(ax)\,dx = +\frac{A}{a}\cos(ax)$

b) $V(x)$



c) pontos de equilíbrio: $\left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=x_{eq}} = 0 \Rightarrow$

$\longrightarrow \left.\frac{d\left[\frac{A}{a}\cos(ax)\right]}{dx}\right|_{x=x_{eq}} = \left. -A\sin(ax)\right|_{x=x_{eq}} \Rightarrow x_{eq} = \frac{n\pi}{a}, \; n \in \mathbb{Z}$

pontos de equilíbrio estável: $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_{eq}} > 0 \Rightarrow$

$-Aa\cos(ax) > 0 \Rightarrow x_{eq\,estável} = \frac{(2n+1)\pi}{a}, \; n \in \mathbb{Z}$

$-Aa\cos(ax) < 0 \Rightarrow x_{eq\,instável} = \frac{2n\pi}{a}; \; n \in \mathbb{Z}$

d) $V(x=0) = 0$ define uma constante aditiva à $V(x)$

$V(x) = \left.\frac{A\cos(ax)}{a}\right|_{x=0} + \text{constante} = 0 \Rightarrow \text{constante} = -\frac{A}{a}$

pontos de retorno: $V(x_{ret}) = E \Rightarrow \frac{A\cos(ax)}{a} - \frac{A}{a} = -\frac{A}{a}$

$\Rightarrow \cos ax\Big|_{x_{ret}} = 0 \Rightarrow \boxed{x_{ret} = \frac{n\pi}{2a}}$ $n \in \mathbb{Z}$; são proibidas as regiões onde $E < V(x_p) \Rightarrow$

$x_p = \left[\frac{\pi}{2a}(4n-1), \frac{\pi}{2a}(4n+1)\right]$

e) $V(x) = V(x=x_{eq}) + (x-x_{eq})\cancelto{0}{\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_{eq}}} + \frac{(x-x_{eq})^2}{2}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_{eq}} + \cdots$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_{eq}}} = \sqrt{\frac{1}{m}\left[-aA\cos(ax)\Big|_{x=\frac{\pi}{a}}\right]} = \sqrt{\frac{aA}{m}}$$ 2

Nome: RA: Turma:

2. Um oscilador harmônico unidimensional de massa m está sujeito à ação de uma força restauradora linear, cuja constante elástica é k, e de uma força de atrito proporcional a sua velocidade, cuja constante de amortecimento é b.

   (a) (1,5 pontos) Determine as relações entre as constantes m, b e k que levam ao movimento de oscilador harmônico sub-amortecido, super-amortecido e criticamente amortecido.

   (b) (2 pontos) Se $m = 2$ kg, $k = 1$ N/m e $b = 2$ kg/s, escreva a solução geral da equação do movimento. Determine as constantes arbitrárias da solução encontrada se o oscilador parte do repouso da posição $x(t = 0) = 1$ m.

   (c) (1,5 pontos) Se ao oscilador harmônico do item (b) for adicionada uma força externa $F(t) = F_0$, onde F_0 é constante, qual é a solução geral da nova equação do movimento? Determine as constantes arbitrárias da solução encontrada se o oscilador parte do repouso da posição $x(t = 0) = 1$ m.

③

Questão: 2

a) $x = e^{pt} \Rightarrow$ Eq do movimento: $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$

$\rightarrow (mp^2 + bp + k)e^{pt} = 0 \Rightarrow p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$

se $b^2 < 4mk \Rightarrow$ sub-amortecido $\sqrt{b^2 - 4mk} \in \mathbb{C} \Rightarrow$

se $b^2 > 4mk \Rightarrow$ superamortecido $\sqrt{b^2 - 4mk} \in \mathbb{R}$

se $b^2 = 4mk \Rightarrow$ criticamente amortecido $\sqrt{b^2 - 4mk} = 0$

b) $b^2 = 4$, $4mk = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \Rightarrow b^2 < 4mk \Rightarrow$ sub

$x_{geral} = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \theta)$ $\qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\gamma = \frac{b}{2m}$

Cálculo de A e θ:

$x_{geral}(t=0) = 1 \Rightarrow A\sin\theta = 1$

$\left.\frac{dx_{geral}}{dt}\right|_{t=0} = 0 \Rightarrow -\gamma A e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \theta)\Big|_{t=0} +$

$\omega_1 A e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta)\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow$

$-\gamma A\sin\theta + \omega A\cos\theta = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{A}{2}\sin\theta = -\frac{1}{2}A\cos\theta \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow A\sin\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \boxed{x_{geral} = \sqrt{2}\, e^{-0.5t}\sin\left(0.5t + \frac{\pi}{4}\right)}$

c) $x_p = $ Const
subst.:
$\Rightarrow$ na Eq. do Movimento $\quad$ const $= \frac{F_0}{k}$

$$x_{geral} = A e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2} + \theta\right) + \frac{F_0}{k}$$

$$x_{geral}(t=0) = A \sin\theta + \frac{F_0}{k} = 1$$

$$\left.\frac{dx_{geral}}{dt}\right|_{t=0} = 0 \quad -\frac{A}{2} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}+\theta\right)\Big|_{t=0} + \frac{A}{2} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}+\theta\right)\Big|_{t=0} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\cancel{A}}{\cancel{2}} \sin\theta + \frac{\cancel{A}}{\cancel{2}} \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow A \sin\frac{\pi}{4} + \frac{F_0}{k} = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{F_0}{k}\right) = \sqrt{2}\left(1 - F_0/k\right)$$

$$\boxed{x_{geral} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{F_0}{k}\right) e^{-t/2} \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{F_0}{k}}$$

Testes:

1E, 2E, 3C, 4C, 5D