INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP
Prova 1 - F 315 A 14/09/2010

RA:________ Nome:____

1) _____
2) _____
3) _____
4) _____
Nota:______

Questão 1 (2.5 pts)

Considere um projétil disparado verticalmente com velocidade v_0, sob a ação da gravidade g e de uma força retardadora linearmente proporcional à velocidade ($F_r = -mkv$).

(a) Encontre v(t). (1.5)
(b) Encontre o tempo necessário para o projétil atingir altura máxima. (1.0)

(a) Da 2ª Lei de Newton: $-mg - mkv = m\,dv/dt$

$$\Rightarrow \frac{dv}{1+kv/g} = -g\,dt \Rightarrow \int \frac{dv}{1+kv/g} = -gt + C$$

$$\Rightarrow \frac{g}{k}\ln\left(1+\frac{kv}{g}\right) = -gt + C \Rightarrow \ln\left(1+\frac{kv}{g}\right) = -kt + C'$$

Cond. Inicial: $v(t=0) = v_0 \Rightarrow C' = \ln(1 + kv_0/g)$

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{kv}{g}\right) - \ln\left(1+\frac{kv_0}{g}\right) = -kt \Rightarrow -kt = \ln\left(\frac{1+kv/g}{1+kv_0/g}\right) \; *$$

$$\Rightarrow \frac{1+kv/g}{1+kv_0/g} = e^{-kt} \Rightarrow 1 + kv/g = (1 + kv_0/g)\,e^{-kt}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = -\frac{g}{k}\left(1-e^{-kt}\right) + v_0 e^{-kt}} \quad \text{ou:} \quad \boxed{v = \left(\frac{g}{k} + v_0\right)e^{-kt} - g/k}$$

(b) $* \; t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1+kv/g}{1+kv_0/g}\right)$ Altura máxima: $v = 0$

$$\therefore \boxed{T = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{1+kv_0/g}\right) = \frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{kv_0}{g}\right) = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{g+kv_0}{g}\right)}$$

Questão 2 (2.5 pts)

Considere um satélite de massa m e raio a, movendo-se com velocidade v numa atmosfera de densidade p. Determine a força de atrito exercida sobre ele, supondo que a velocidade das moléculas do ar possam ser desprezadas em comparação com v, e que cada molécula que colide com o satélite permaneça presa na sua superfície (2.5)

Considere um sistema isolado formado pelo conjunto satélite + atmosfera. Como $\vec{F}_{ext} = 0$, temos que $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} = 0$, onde $\vec{P} = \vec{p}_{SAT} + \vec{p}_{ATM}$.

Portanto: $\vec{F}_{SAT} = \frac{d\vec{p}_{SAT}}{dt} = -\frac{d\vec{p}_{ATM}}{dt}$

Em um intervalo de tempo dt, a variação de momento da atmosfera se dá devido às moléculas que colidiram com o satélite: $d\vec{p}_{ATM} = \vec{v}\,dm$.
Mas dm (massa da atmosfera que colide com o satélite durante um intervalo dt) é dada por $dm = \rho\,dV$, onde ρ é a densidade e dV é o volume da atmosfera coletado pelo satélite em dt. Neste caso:

$$dV = \underbrace{\pi a^2}_{\text{SEÇÃO RETA DO SATÉLITE}} \times \underbrace{v\,dt}_{\text{DESLOCAMENTO}}$$

Assim: $d\vec{p}_{ATM} = \vec{v}\,dm = \vec{v} \times \rho \times \pi a^2 v\,dt$

Portanto

$$\vec{F}_{SAT} = -\frac{d\vec{p}_{ATM}}{dt} = -\pi a^2 \rho v^2 \hat{v}$$

Questão 3 (2.5 pts)

Considere uma partícula movendo-se em uma dimensão na região x>0. Sobre ela atua uma força dada por $F = F_0(\frac{a^2}{x^2} - 1)$, onde F_0= 2 N e a= 2 m.

(a) Encontre a energia potencial associada a esta força. (1.0)
(b) Encontre os pontos de equilíbrio. Determine se são máximos ou mínimos. (0.75)
(c) Grafique o potencial, indicando quantitativamente os pontos relevantes. (0.75)

(a) $F = -\frac{dU}{dx} = F_0\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right) \Rightarrow U = -F_0 \int \left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right) dx$

$\Rightarrow U = F_0\left(\frac{a^2}{x} + x\right) = a F_0 \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right) = 4\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)$ Nm

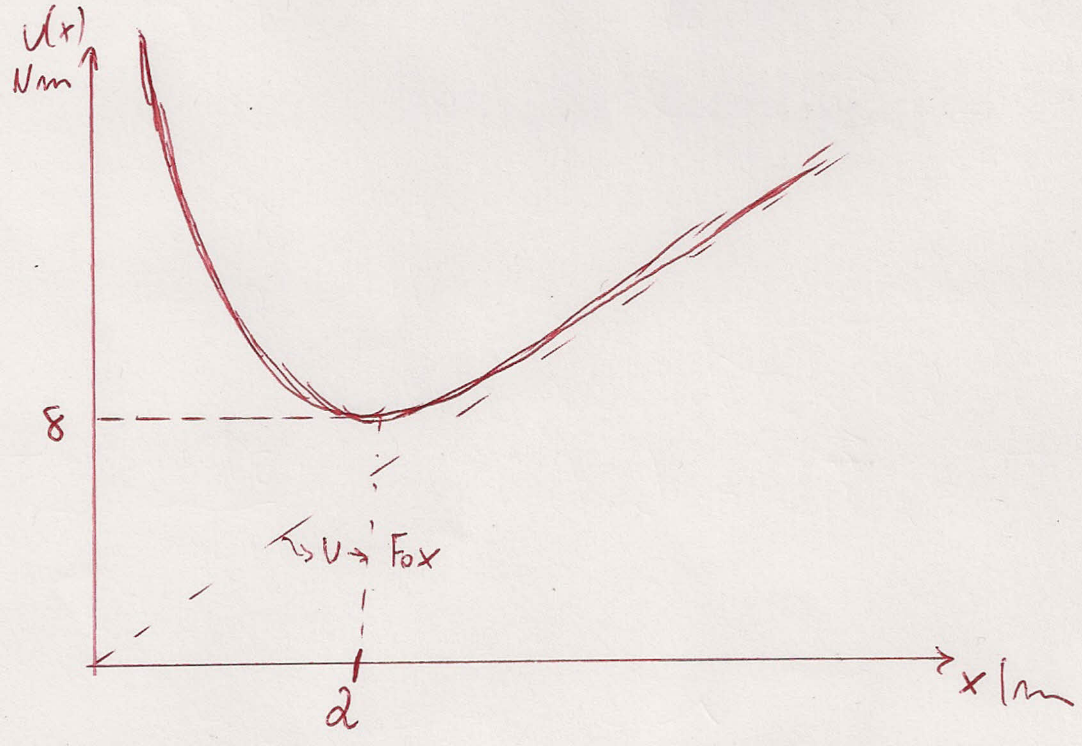
(b) $\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right) = 0 \Rightarrow x = \pm a$

$(x > 0 \Rightarrow \boxed{x = +a})$

$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[-F_0\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)\right] = 2F_0\frac{a^2}{x^3} \Rightarrow \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=a} = \frac{2F_0}{a} > 0$

Portanto, o ponto $x = a$ é um mínimo de potencial

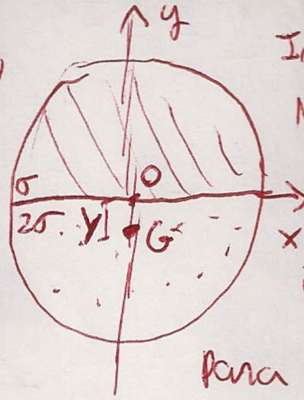
(c)



Questão 4 (2.5 pts)

Um disco circular de raio a, localizado no plano xy, tem seu centro na origem. A parte do disco acima do eixo x tem uma densidade σ por unidade de área, e a metade abaixo do eixo x tem uma densidade 2σ.

(a) Determine a posição do centro de massa G. (0.75)
(b) Demonstre o momento de inércia em relação ao eixo z, primeiramente para um disco homogêneo de densidade σ, e então para o disco não homogêneo descrito no enunciado. (0.75)
(c) Determine o momento de inércia do disco descrito acima em relação a um eixo paralelo ao eixo z, mas passando por G. (0.5)
(d) Determine o momento de inércia em relação aos eixos x e y para o disco não homogêneo descrito no enunciado. (0.5)

(a) 

Inicialmente, considere apenas o semi-círculo superior. Neste caso, usando o teorema de Pappus: $\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi a^2}{2} \cdot 2\pi Y_1 \Rightarrow Y_1 = \frac{4}{3\pi} a$. Para o semi círculo inferior, temos $Y_2 = -\frac{4a}{3\pi}$. Portanto, a posição do C.M. para o círculo inomogêneo é $Y = \frac{1}{3}\left(+\frac{4a}{3\pi} - 2 \cdot \frac{4a}{3\pi}\right) = -\frac{4a}{9\pi}$

(b) Para o círculo homogêneo, consideramos a soma das contribuições dos anéis que formam o círculo: $I_z^0 = \int_0^a \sigma \cdot 2\pi r \cdot r^2 dr = \frac{\pi \sigma a^4}{2}$

Para um semi-círculo de densidade σ, o momento de inércia é metade do valor do círculo homogêneo, por simetria. Para o círculo ñ-homogêneo, basta somar as contribuições de cada semi-círculo:

$I_z^0 = \frac{1}{2}\frac{\pi \sigma a^4}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi (2\sigma) a^4}{2} = \frac{3}{4}\pi \sigma a^4$

(c) Teorema dos eixos paralelos:

$I_z^0 = I_z^G + MY^2 \Rightarrow I_z^G = \frac{3}{4}\pi \sigma a^4 - M\left(\frac{4a}{9\pi}\right)^2$; Mas $M = \frac{\sigma}{2}\pi a^2 + \frac{2\sigma}{2}\pi a^2$ $\Rightarrow M = \frac{3\sigma}{2}\pi a^2$

Portanto: $I_z^G = \frac{3\pi}{4}\sigma a^4 - \left(\frac{3\sigma}{2}\pi a^2\right)\left(\frac{16a^2}{81\pi^2}\right) = \left[\frac{3\pi}{4} - \frac{8}{27\pi}\right]\sigma a^4$

(d) Para um disco homogêneo: $I_z^0 = I_x^0 + I_y^0 = 2I_x^0 \Rightarrow I_x^0 = I_z^0/2 = \frac{\pi \sigma a^4}{4}$

Para um semi-disco de densidade σ: $I_x^0 = \frac{\pi \sigma a^4}{8}$. Somando os dois semi círculos: $I_x^0 = \frac{\pi}{8}\sigma a^4 + \frac{\pi}{8}(2\sigma)a^4 \Rightarrow I_x^0 = \frac{3\pi}{8}\sigma a^4$

Aplicando novamente o teor. eixos perpendiculares:

$I_z^0 = I_x^0 + I_y^0 \Rightarrow I_y^0 = \frac{3}{4}\pi\sigma a^4 - \frac{3\pi}{8}\pi\sigma a^4 \Rightarrow I_y^0 = \frac{3\pi}{8}\sigma a^4$