(1) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = u \qquad x_1 = y \;,\; x_2 = \dot{y}$

$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$

$\dot{x}_2 = \ddot{y} = u - 2\dot{y} - 2y = u - 2x_2 - 2x_1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

a) $p_c(s) = (s+1+j)(s+1-j) = s^2 + 2s + 2$

Como a matriz A está na forma companheira, a sua eq característica é $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, portanto os autovalores do sistema já estão no lugar desejado. $K = [0 \;\; 0]$ é suficiente.

b) $p_o = (s+5-j)(s+5+j) = s^2 + 10s + 26 \quad , \; L = \begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}$

$\det(sI - A + LC) = s^2 + (2 + l_1)s + 2l_1 + 2 + l_2$

$2 + l_1 = 10 \Rightarrow l_1 = 8$

$2l_1 + 2 + l_2 = 26 \Rightarrow l_2 = 26 - 2 - 16 \Rightarrow l_2 = 8$

$$\boxed{L = \begin{bmatrix}8\\ 8\end{bmatrix}}$$

(2) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{10}{(s+1)^2} = \dfrac{10}{s^2 + 2s + 1} \Rightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 10u \qquad x_1 = y \quad x_2 = \dot{y}$

$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$

$\dot{x}_2 = \ddot{y} = 10u - 2\dot{y} - y = 10u - 2x_2 - x_1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 10\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Como o sistema não possui pólo na origem (efeito integrador) precisamos usar controle integral.

Condição de alocação arbitrária

$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & B\\ -C & 0\end{bmatrix}\right) = n+1 \Rightarrow \operatorname{rank}(\cdot) = 3 \Rightarrow \underline{OK}$

Controlabilidade: $\mathcal{C} = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix}0 & +10\\ 10 & -20\end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathcal{C}) \neq 0 \Rightarrow \underline{OK}$

Sistema aumentado

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\xi}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}A - BK & BK_I\\ -C & 0\end{bmatrix}}_{\tilde{A}}\begin{bmatrix}x\\ \xi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r$$

$\Rightarrow \det(sI - \tilde{A}) = (s+10)(s+2-2j)(s+2+2j) \Rightarrow s^3 + (2 + 10K_2)s^2 + (1 + 10K_1) + 10K_I = s^3 + 14s^2 + 48s + 80 \Rightarrow$

$2 + 10K_2 = 14 \qquad 10K_I = 80$

$1 + 10K_1 = 48 \qquad \Rightarrow \boxed{K_I = 8 \quad K_2 = 12/10 \quad K_1 = 47/10}$

(3) - $\mathcal{C} = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(\mathcal{C}) = 2 \Rightarrow$ é controlável.

Alocação: $s_1 = -5,\ s_2 = -5 \Rightarrow p_c(s) = s^2 + 10s + 25$

$\det(sI - A + BK) = s^2 + (3 + K_2)s + 2 + K_1 \Rightarrow 3 + K_2 = 10 \Rightarrow K_2 = 7$

$2 + K_1 = 25 \Rightarrow K_1 = 23$ $\quad \boxed{K = [23 \;\; 7]}$

- Erro em regime nulo: Se $r = u(t)$ então $y(\infty) = 1$

$y(s) = [C(sI - A + BK)^{-1}B] \cdot R(s) \cdot \rho = \left(\frac{1}{s^2 + 10s + 25}\right) R(s) \cdot \rho$

Para $R(s) = 1/s$

$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,Y(s) = \cancel{s}\left(\frac{1}{s^2 + 10s + 25}\right)\frac{1}{\cancel{s}} \cdot \rho = 1 \Rightarrow \frac{1}{25} \cdot \rho = 1 \Rightarrow \boxed{\rho = 25}$

O erro em regime é nulo somente se ρ não variar, ao contrário do esquema de controle integral.

1) $y = \left(\frac{2}{s+4} + \frac{5}{s+4}\right) u =$

$X_1(s) = U(s) \cdot \frac{2}{s+4} \Rightarrow \dot{x}_1 - 4x_1 = 2u$

$X_2(s) = U(s) \frac{5}{s+4} \Rightarrow \dot{x}_2 + 4x_2 = 5u$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$

$y = [1 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\mathcal{C}\ [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 5 & -20 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(\mathcal{C}) = 1 \Rightarrow$ não é controlável

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(\mathcal{O}) = 1 \Rightarrow$ não é observável

$p(\lambda) = (s+4)^2 \Rightarrow$ é assintoticamente estável