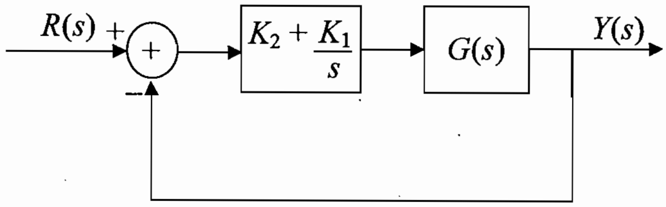
EA616 – $2^{\underline{o}}$ semestre de 2004 – Prova II
Sem consulta - Duração: 100 minutos

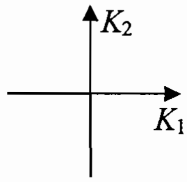
Aluno: Pedro H. S. Nardelli RA: 017086

(2,0) Questão 1) Sabendo que

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)\,(s+2)},$$

determine e esboce graficamente a região no plano $K_1 \times K_2$ que garante a estabilidade assintótica do seguinte sistema em malha fechada:





(2,0) Questão 2) Obtenha a solução $y(k) = y_h(k) + y_p(k)$ da seguinte equação a diferenças:

$$y(k+2) + 0.1 * y(k+1) - 0.12 * y(k) = 2.1 * (0.3)^k,\ y(0) = 5 \text{ e } y(1) = 15$$

sabendo que a solução particular $y_p(k)$ pode ser obtida através do método dos coeficientes a determinar, utilizando funções parametrizadas conforme indicado na tabela abaixo:

$u(k)$	$y_p(k)$
b (cte)	d (cte)
bk^m, m inteiro	$d_0 + d_1 k + d_2 k^2 + \cdots + d_m k^m$
$b\gamma^k$	$d\gamma^k$
$b\cos(\gamma k)$	$d_1\cos(\gamma k) + d_2\text{sen}(\gamma k)$
$b\text{sen}(\gamma k)$	$d_1\cos(\gamma k) + d_2\text{sen}(\gamma k)$

Ainda, se a forma da solução particular contiver termos iguais aos contidos na solução da equação homogênea, a duplicidade deve ser eliminada através da multiplicação pela menor potência de k que remova a duplicidade.

(1,5) Questão 3) Na compra de um produto com preço P, o cliente tem duas opções:

- pagamento à vista no valor de Pd, onde d indica o desconto ($0 < d < 1$);
- pagamento em N prestações fixas de valor P/N, sem entrada.

O cliente sabe que, no caso de optar pelas prestações, ele poderá depositar o valor V ainda não pago em uma aplicação financeira que permite resgate mensal, sem perda de rendimentos, e que concede rendimento mensal de $(100*r)\%$ sobre o que estava aplicado no último mês. Conhecendo-se:

- os valores de r, P e N;
- a equação a diferenças que descreve a evolução do valor mensal aplicado, $V(k)$, com condição inicial Pd, é dada por $V(k+1) = (1+r)V(k) - \frac{P}{N}$ e tem solução $V(k) = P\left\{\left[d - \frac{1}{Nr}\right](1+r)^k + \frac{1}{Nr}\right\}$;

apresente todos os passos para se obter o limitante superior para d, associado ao desconto, para que compense optar pelo pagamento à vista.

(1,0) Questão 4) Para encontrar a solução no tempo $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ do sistema dinâmico:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

é possível empregar a fórmula:

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau, \quad \text{onde} \quad e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right],$$

com $u(t)$ fornecido, assim como as condições iniciais $x_1(0)$ e $x_2(0)$. Além do domínio de técnicas para solução de integrais definidas, é necessário calcular analiticamente e^{At} e $e^{-A\tau}$. Felizmente, uma vez obtido e^{At}, basta substituir t por $-\tau$ para se chegar a $e^{-A\tau}$. Sendo assim, obtenha e^{At}, apresentando todos os passos e usando a Tabela de Transformadas de Laplace a seguir. Repare que não está sendo solicitada a obtenção de $x(t)$.

Pares de Transformada de Laplace	
Impulso unitário	1
Degrau unitário	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\text{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\text{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

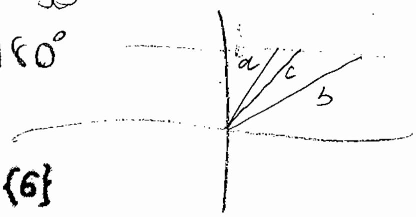
(1,5) Questão 5) Para $b > c > a > 0$, faça a associação entre os diagramas polares abaixo e as respectivas funções de transferência. No entanto, nem todos os diagramas polares presentes encontram correspondência com alguma das funções de transferência. Indique os diagramas polares sem correspondência e esboce os diagramas polares que não estão presentes, apresentando o ângulo de terminação correspondente.

(a) $G(s) = \dfrac{s+a}{(s+c)(s+b)}$ (b) $G(s) = \dfrac{s+b}{(s+a)(s+c)}$ (c) $G(s) = \dfrac{s+b}{s(s+a)(s+c)}$

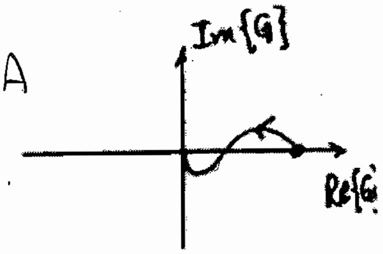
-90°
-180°

(d) $G(s) = \dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$ (e) $G(s) = \dfrac{s+a}{s(s+c)(s+b)}$

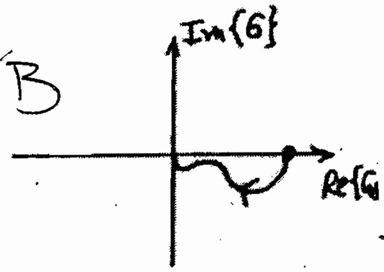
-90
-90

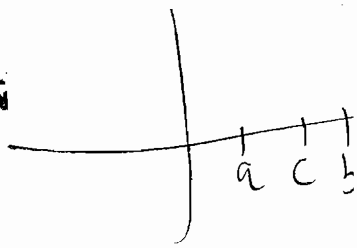


(1) A

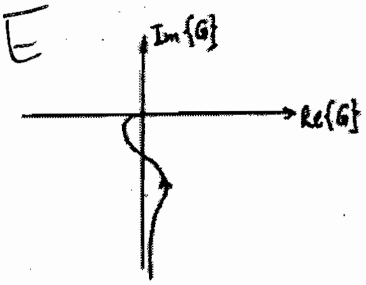


(2) B

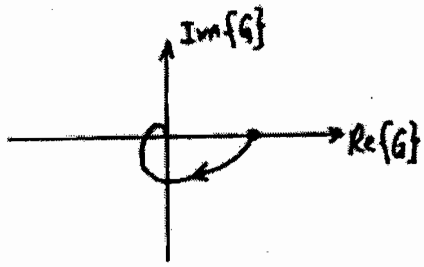




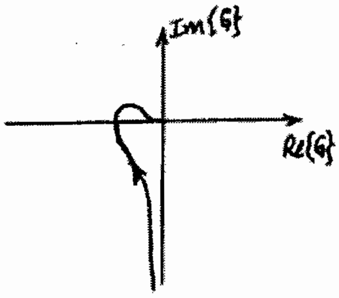
(3) E

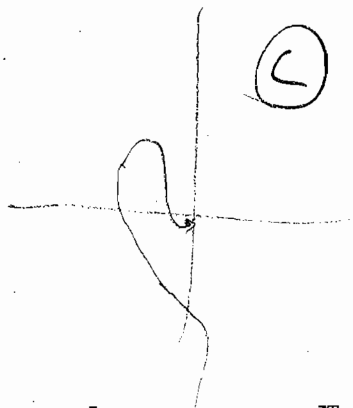


(4)



(5)





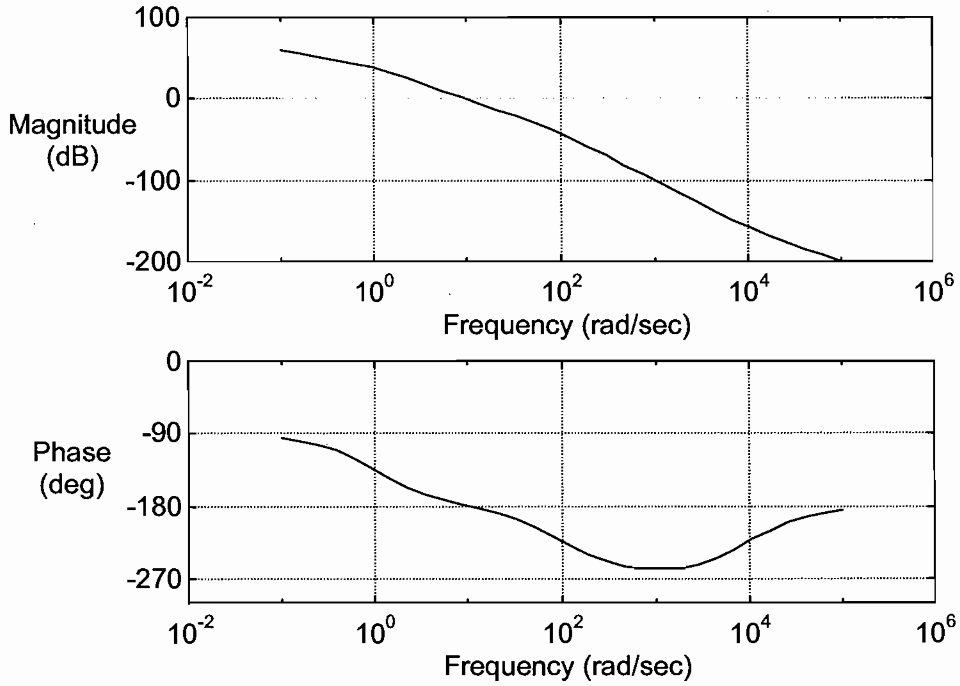
(1,0) Questão 6) Dados os vetores $x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N]^T$ e $y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]^T$ formados a partir dos pares de entrada-saída $(x_i, y_i)_{i=1}^{N}$, construa a matriz A e o vetor b para que a função $g(x) = \sum_{k=1}^{P} w_k f_k(x)$ aproxime otimamente os elementos do vetor y, para cada elemento correspondente do vetor x, segundo o critério dos quadrados mínimos aplicado à solução do sistema linear de equações $Aw = b$, com $w = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_P]^T$. Considere as funções $f_k(x)$, k=1,...,P, conhecidas e $N > P$.

(1,0) Questão 7) Com base no diagrama de Bode a seguir, referente a uma dada função de transferência $G(s)$ de um sistema de fase mínima, responda às seguintes questões, incluindo justificativas:

a) na origem, quantos pólos a mais do que zeros tem $G(s)$?

b) $G(s)$ tem algum zero fora da origem?

c) $G(s)$ tem mais pólos do que zeros? Se sim, quantos a mais?



$$d(1+r)^N - \frac{(1+r)^N}{Nr} + \frac{1}{Nr}$$