Turma:

Nota:

MA 327 Álgebra Linear

Primeiro Semestre de 2006

Terceira Prova

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
T o t a l	

Boa Prova !

Questão 1. (2.0 Pontos)

Seja U um subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tendo como base $\beta = \{\ x - x^2 + x^3,\ 1 + x + x^2\ \}$. Considere a transformação linear $T : U \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por: $T(p(x)) = p'(x) + (x+1)p(0)$.

Considere que $[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, onde γ é uma base para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Pede–se:

(a) Determine $[p(x)]_{\beta}$ sabendo que $[T(p(x))]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Se $\gamma = \{\ x - 1,\ p_1(x),\ p_2(x)\ \}$, determine o polinômio $q(x) = p_1(x) - p_2(x)$.

Questão 2. (2.0 Pontos)

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}^1_0([0,1])$, isto é,

$$\mathcal{C}^1_0([0,1]) = \{\ f \in \mathcal{C}^1([0,1]) \ /\ f(1) = 0\ \}.$$

Verifique se cada uma das aplicações

(a) $\langle\, f\,,\, g\,\rangle = \displaystyle\int_0^1 f'(x)g(x)dx$ **(b)** $\langle\, f\,,\, g\,\rangle = \displaystyle\int_0^1 f'(x)g'(x)dx$

define um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}^1_0([0,1])$. Justifique sua resposta.

Questão 3. (2.0 Pontos)

Sejam V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ e $\|\cdot\|_2$ a norma Euclidiana. Pede–se:

(a) Mostre que se θ é o ângulo entre os elementos $u,\, v \in V$, não nulos, então

$$\|\, u + v\,\|_2^2 = \|\, u\,\|_2^2 + \|\, v\,\|_2^2 + 2\,\|\, u\,\|_2\,\|\, v\,\|_2 \cos(\theta).$$

(b) Mostre que se $\beta = \{\, q_1,\, \cdots,\, q_n\,\}$ é um conjunto ortonormal em V, então β é um conjunto linearmente independente em V.

Questão 4. (2.0 Pontos)

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle\, p\,,\, q\,\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 p(x)q(x)dx \quad ; \quad \forall\ p,\, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço $S = [1 + x]$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com relação ao produto interno $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ definido acima.

Questão 5. (2.0 Pontos)

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle\, p\,,\, q\,\rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)dx \quad ; \quad \forall\ p,\, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Determine a melhor aproximação do polinômio $q(x) = 1 - x^2$ no subespaço $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

G A B A R I T O

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Chamando $[p(x)]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Sabemos que $[T(p(x))]_\gamma = [T]_\gamma^\beta \, [p(x)]_\beta$. Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a + b = 1 \\ \quad - b = 1 \end{cases}$$

que tem uma única solução $a = 2$ e $b = -1$. Logo, $[p(x)]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Chamando $\beta = \{ q_1(x), q_2 \}$, onde

$$q_1(x) = x - x^2 + x^3 \qquad \text{e} \qquad q_2(x) = 1 + x + x^2 .$$

Conhecemos a matriz $[T]_\gamma^\beta$, onde $\gamma = \{ x - 1, p_1(x), p_2(x) \}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} T(q_1(x)) &= (x - 1) + 2p_1(x) + p_2(x) \\ T(q_2(x)) &= (x - 1) + p_1(x) + 2p_2(x) \end{aligned} . \tag{1}$$

Tomando $T(p(x)) = p'(x) + (x + 1)p(0)$, vamos calcular

$$\begin{aligned} T(q_1(x)) &= 1 - 2x + 3x^2 \\ T(q_2(x)) &= 1 + 2x + (x + 1) = 3x + 2 \end{aligned} . \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos um sistema linear nas incógnitas $p_1(x)$ e $p_2(x)$

$$\begin{cases} 2p_1(x) + p_2(x) = 3x^2 - 3x + 2 \\ p_1(x) + 2p_2(x) = 2x + 3 \end{cases}$$

Fazendo a primeira equação menos a segunda equação, obtemos

$$p_1(x) - p_2(x) = 3x^2 - 5x - 1 ,$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

(a) Note que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f'(x)g(x)dx \quad ; \quad \forall\ f, g \in \mathcal{C}_0^1([0,1])$$

não satisfaz a propriedade de **simetria**. De fato,

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f'(x)g(x)dx \neq \int_0^1 g'(x)f(x)dx = \langle g , f \rangle .$$

Por exemplo, tomando as funções $f(x) = 1 - x$ e $g(x) = 1 - x^2$, temos que

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 (x^2 - 1)dx = -\frac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad \langle g , f \rangle = \int_0^1 (2x^2 - 2x)dx = -\frac{1}{3}$$

Portanto, $\langle f , g \rangle \neq \langle g , f \rangle$.

Além disso, podemos verificar facilmente que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ não satisfaz a propriedade de **positividade**. De fato,

$$\begin{aligned} \langle f , f \rangle &= \int_0^1 f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (f^2(x))'dx \\ &= \frac{1}{2} (f^2(1) - f^2(0)) = -\frac{1}{2} f^2(0) \leq 0 , \end{aligned}$$

onde $f(1) = 0$.

Logo, a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ não define um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}_0^1([0,1])$.

(b) Podemos verificar facilmente que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)dx \quad ; \quad \forall\ f, g \in \mathcal{C}_0^1([0,1])$$

satisfaz as propriedades de **simetria**, **homogeneidade** e **distributividade**. De fato,

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)dx = \int_0^1 g'(x)f'(x)dx = \langle g , f \rangle \quad ; \quad \forall\ f, g \in \mathcal{C}_0^1([0,1]) .$$

$$\langle \lambda f , g \rangle = \int_0^1 (\lambda f)'(x)g'(x)dx = \int_0^1 \lambda f'(x)g'(x)dx = \lambda \int_0^1 f'(x)g'(x)dx = \lambda \langle f , g \rangle$$

para todas funções $f, g \in \mathcal{C}_0^1([0,1])$ e $\lambda \in I\!R$.

$$\begin{aligned} \langle f + g , h \rangle &= \int_0^1 (f+g)'(x)h'(x)dx = \int_0^1 f'(x)h'(x)dx + \int_0^1 g'(x)h'(x)dx \\ &= \langle f , h \rangle + \langle g , h \rangle \quad ; \quad \forall\ f, g \in \mathcal{C}_0^1([0,1]) . \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ satisfaz a propriedade de **positividade**. De fato,

$$\langle f , f \rangle = \int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 0 ,$$

pois o integrando é uma função contínua positiva.

Agora, supomos que

$$\langle f , f \rangle = \int_0^1 (f'(x))^2 dx = 0 .$$

Como f' é uma função contínua, temos que $f'(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Logo, f é uma função constante em $[0,1]$, entretanto, $f(1) = 0$. Assim, a única função constante no espaço $\mathcal{C}_0^1([0,1])$ é a função identicamente nula ($f \equiv 0$), isto é, $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Portanto, a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ define um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}_0^1([0,1])$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

(a) Considerando que V é um espaço vetorial real, temos que

$$\| u + v \|_2^2 = \langle u + v , u + v \rangle = \langle u , u \rangle + 2\langle u , v \rangle + \langle v , v \rangle .$$

Agora utilizando o fato que θ é o ângulo entre os elementos u e v, não nulos, temos que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u , v \rangle}{\| u \|_2 \| v \|_2} \quad \Longrightarrow \quad \langle u , v \rangle = \| u \|_2 \| v \|_2 \cos(\theta) .$$

Portanto, obtemos a relação

$$\| u + v \|_2^2 = \| u \|_2^2 + \| v \|_2^2 + 2 \| u \|_2 \| v \|_2 \cos(\theta)$$

que é denominada **Lei do Paralelogramo**.

(b) Tomando a combinação linear nula dos elementos do conjunto β

$$c_1 q_1 + \cdots + c_i q_i + \cdots + c_n q_n = 0_V ,$$

e fazendo o produto interno de ambos os membros com um elemento $q_j \in \beta$ temos que

$$c_1 \langle q_1 , q_j \rangle + \cdots + c_i \langle q_i , q_j \rangle + \cdots + c_n \langle q_n , q_j \rangle = 0 .$$

Usando o fato que β é um conjunto ortonormal, isto é,

$$\begin{cases} \langle q_i , q_j \rangle = 0 & \text{para} \quad i \neq j \\ \langle q_i , q_j \rangle = 1 & \text{para} \quad i = j \end{cases}$$

obtemos

$$c_j = 0 \quad \text{para} \quad j = 1, \cdots , n .$$

Portanto, mostramos que β é um conjunto linearmente independente em V.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Chamando $p(x) = 1 + x$, temos que o subespaço $S = [p(x)] \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

O subespaço $S^{\perp}$ é definido por:

$$S^{\perp} = \{ q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ / \ \langle r , q \rangle = 0 \quad ; \quad \forall \, r \in S \} .$$

Tomando um elemento genérico $q(x) = a + bx + cx^2 \in S^{\perp}$, sabemos que $\langle p , q \rangle = 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\langle p , q \rangle &= \int_{-1}^{1} x^2(1 + x)(a + bx + cx^2)dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x^2 + x^3)(a + bx + cx^2)dx \\
&= \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx^3 + cx^4 + ax^3 + bx^4 + cx^5)dx = 0 \\
&= \int_{-1}^{1} (ax^2 + cx^4 + bx^4)dx = 0
\end{aligned}$$

Calculando a integral, resulta a seguinte equação

$$\frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c + \frac{2}{5}b = 0$$

Resolvendo a equação acima para a incógnita c, temos que

$$c = -\frac{5}{3}a - b .$$

Portanto, todo elemento $q(x) \in S^{\perp}$ é escrito como:

$$\begin{aligned}
q(x) &= a + bx + \left(-\frac{5}{3}a - b \right) x^2 \\
&= \left(1 - \frac{5}{3}x^2 \right) a + (x - x^2) \, b \qquad \text{para} \qquad a, b \in \mathbb{R} .
\end{aligned}$$

Desse modo, uma base para o subespaço $S^{\perp}$ é formada pelos elementos

$$q_1(x) = 1 - \frac{5}{3}x^2 \qquad \text{e} \qquad q_2(x) = x - x^2 ,$$

completando a resolução da questão.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

A melhor aproximação do elemento $q(x) = 1 - x^2$ no subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R) \subset \mathcal{P}_2(I\!R)$ é dada pela projeção ortogonal do elemento $q(x)$ sobre o subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R)$.

Inicialmente, vamos obter uma base ortogonal $\beta^\star = \{ q_1(x), q_2(x) \}$ para o subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R)$ a partir da base canônica $\beta = \{ p_1(x) = 1, p_2(x) = x \}$, através do **Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt**.

Desse modo, escolhemos $q_1(x) = p_1(x) = 1$. Agora, vamos construir o elemento $q_2(x)$ da seguinte forma:

$$q_2(x) = p_2(x) - \alpha_{12}\, q_1(x)$$

ortogonal ao subespaço gerado pelo elemento $q_1(x)$. Assim, temos que

$$\alpha_{12} = \frac{\langle p_2 , q_1 \rangle}{\langle p_2 , q_1 \rangle} = \frac{1}{2}\,.$$

Logo, o elemento $q_2(x) = x - \dfrac{1}{2}$, completando a base ortogonal $\beta^\star = \{ q_1(x), q_2(x) \}$.

Finalmente, vamos determinar a projeção ortogonal, $\tilde{q}(x)$, do elemento $q(x) = 1 - x^2$ no subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R)$ que é dada por:

$$\tilde{q}(x) = \frac{\langle q , q_1 \rangle}{\langle q_1 , q_1 \rangle} q_1(x) + \frac{\langle q , q_2 \rangle}{\langle q_2 , q_2 \rangle} q_2(x)$$

onde

$$\langle q_1 , q_1 \rangle = \int_0^1 dx = 1 \qquad \text{e} \qquad \langle q_2 , q_2 \rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{12}$$

$$\langle q , q_1 \rangle = \int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle q , q_2 \rangle = \int_0^1 (1 - x^2) \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{1}{12}$$

Portanto, temos que

$$\tilde{q}(x) = \frac{2}{3} - \left(x - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6} - x\,,$$

o que completa a resolução da questão.