

2,5 pts. Questão 1:

(a) $f(x, y) = \frac{x^5}{x^5 + y^5}$.

Sobre o eixo x : $y = 0$ e $f(x, 0) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$.

Sobre o eixo y : $x = 0$ e $f(0, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) \neq \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)$, não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5}{x^5 + y^5}$. **/1,0 pts.**

(b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{7x^2 + 7y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

$(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow f(x, y) = \frac{x^3}{7x^2 + 7y^2}$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{7} x \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Pois, $\frac{1}{7}x \rightarrow 0$ e $\frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$. **/1,0 pts.** Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \neq f(0, 0)$, f não é contínua em $(0, 0)$. **/0,5 pts.**

2,5 pts. Questão 2:

Plano tangente em (x_0, y_0, z_0) : $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$.

Vetor normal ao plano tangente: $\vec{n}_1 = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$.

Vetor normal ao plano $2x + 3y - z = 0$: $\vec{n}_2 = (2, 3, -1)$. **/0,5 pts.**

Planos paralelos $\Rightarrow \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)) = (3, -4, -3)$. **/1,5 pts.**

Logo, substituindo o ponto de tangência $(3, -4, -3)$ na primeira equação, obtemos: $z = 2x + 2y + 3$. **/0,5 pts.**

2,5 pts. Questão 3: $D_u f(0, 1) = \nabla f(0, 1) \cdot \vec{u}$, $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{8}}(2, 2)$.

$\nabla f(0, 1) = (f_x(0, 1), f_y(0, 1)) = ?$

Substituindo $x = 0$ e $y = 1$ em $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0$, obtemos $z = -1$.

Pondo $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$, temos

$f_x(0, 1) = -\frac{F_x(0, 1, -1)}{F_z(0, 1, -1)} = \frac{1}{3}$ e $f_y(0, 1) = -\frac{F_y(0, 1, -1)}{F_z(0, 1, -1)} = -1$. **/1,5 pts.**

Portanto, $D_u f(0, 1) = (1/3, -1) \cdot (2/\sqrt{8}, 2/\sqrt{8}) = -4/3\sqrt{8}$. **/0,5 pts.** e o valor máximo, que ocorre na direção do gradiente, é dado por $|\nabla f(0, 1)| = \sqrt{10}/3$. **/0,5.**

2,5 pts. Questão 4:

$\frac{\partial}{\partial x}[f(3x+3, 3x-1)] = \frac{\partial}{\partial x}[4] \stackrel{\text{Reg. da Cadeia}}{\Rightarrow} 3 \frac{\partial f}{\partial x}(3x+3, 3x-1) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(3x+3, 3x-1) = 0$
 $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(3x+3, 3x-1) = -\frac{\partial f}{\partial y}(3x+3, 3x-1)$ **/2, 5pts.**