ME 430A - Técnicas de Amostragem
Segundo semestre de 2011
Prova
Data: 14/09/2011

Nome: ________________________________ RA: ______________

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **Coloque seu nome completo e RA em todas as folhas que você recebeu, inclusive nesta.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique, adequadamente, seus desenvolvimentos, sem, no entanto, escrever excessivamente.**
- **O(a) aluno(a) só poderá sair da sala após as 16h30, mesmo que já tenha finalizado a prova. Após a saída do(a) primeiro(a) aluno(a) não será permitido a entrada de nenhum(a) outro(a) aluno(a).**
- **Não é permitdo empréstimo de material.**
- **Não serão dirimidas dúvidas de quaisquer natureza.**
- **Resolva a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **O(a) aluno(a) deverá portar sua carteira de estudante e apresentá-la, quando for solicitada sua assinatura.**
- **Contestações a respeito da nota, só serão consideradas se estiverem por escrito.**
- **A nota do aluno(a) será $\frac{NP}{NT} \times 10$, em que NP é o número de pontos obtidos na prova e NT é o numero total de pontos da prova.**
- **A prova terá duração de 120 minutos, das 16h às 18h, improrrogáveis.**

Faça uma excelente Prova!!

Questões

1. Considere uma população com N = 3 elementos, em que $\boldsymbol{d} = (1, 3, 4)$, da qual pretende-se estimar a média μ, através da média amostral $\widehat{\mu}$. Para isso selecionar-se-á uma amostra aleatória de tamanho n = 2. Considere os planos amostrais A e B, assim definidos:

Tabela 1: Plano amostral A

s	12	13	23
P(**s**)	1/3	1/3	1/3

Tabela 2: Plano amostral B

s	11	12	13	22	23	33
P(**s**)	1/9	2/9	2/9	1/9	2/9	1/9

Responda os itens.

a) Encontre a distribuição (exata) de $\widehat{\mu}$ para o plano Amostral A. Calcule também a esperança, variância, erro-padrão e o EQM de $\widehat{\mu}$ (50 pontos).

b) Encontre a distribuição (exata) de $\widehat{\mu}$ para o plano Amostral B. Calcule também a esperança, variância, erro-padrão e o EQM de $\widehat{\mu}$ (50 pontos).

c) Com os resultados obtidos nos itens a) e b) compare, da forma mais completa possível, o estimador em estudo, em relação aos planos amostrais. Qual dos planos amostrais você sugere para estimar μ usando $\widehat{\mu}$? Justifique, adequadamente, sua resposta (30 pontos).

d) [Este item não está relacionado aos planos amostrais acima] Considere o plano amostral AASs (sem reposição). Utilizando a distribuição assintótica de $\widehat{p}$ vista em classe, prove que o tamanho da amostra (n) que satisfaz:

$$P(|\widehat{p} - p| < \delta) = \gamma$$

é dado por $\dfrac{N}{\dfrac{\delta^2(N-1)}{p(1-p)z^2} + 1}$, em que $P(Z > z) = \frac{1-\gamma}{2}, Z \sim N(0,1)$ (50 pontos).

e) [Este item não está relacionado aos planos amostrais acima] Em relação ao item d), encontre n (considerando a maior variância possível associada à população), para $\gamma = 0,95$, $\delta = 0,02$ e $N = 2000$ (20 pontos).

2. Considere o plano AASs (sem reposição). Responda os itens:

a) Suponha uma população com N = 1500, da qual desejamos estimar a média μ, com base em uma amostra de tamanho n e utilizando a média amostral $\widehat{\mu}$. Baseado em uma amostra piloto de tamanho $n = 20$, obtevê-se $\widetilde{s}^2 = 100,25$. Determine o tamanho da amostra de tal forma que $P(|\widehat{\mu} - \mu| < 3) = 0,90$. Sugestão: vide formulário (60 pontos).

b) Com base na amostra retirada da população "restante" (formada pela população original excluídos os elementos que foram sorteados na amostra piloto), cujo tamanho foi determinado no item a), junto com a amostra piloto, obtevê-se os seguintes resultados: $\widetilde{\mu} = 13,55$ e $\widetilde{s}^2 = 93,32$. Construa um IC assintótico de $\gamma = 0,99$ com base nos resultados que você obteve através dessa amostra total (70 pontos).

c) Seja (Δ_i, Δ_j) o vetor aleatório como definido para o plano AASs (sem reposição). A distribuição conjunta desse vetor é dada por:

	Δ_i	
Δ_i	0	1
0	$\dfrac{(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)}$	α
1	α	$\dfrac{n(n-1)}{N(N-1)}$

em que $\alpha \in (0,1)$. Encontre o valor de α (70 pontos).

3. Considere uma população com N elementos, ou seja, $\mathcal{U} = \{1, 2, ..., N\}$ da qual pretende-se estimar a média μ, através de um plano AASs. Considere o seguinte estimador:

$$\widehat{\mu}_{st} = \frac{y_1 + y_N + (N-2)\widehat{\mu}_2}{N},$$

em que y_1 e y_N sao os valores da característica de interesse associados ao primeiro e último elementos, respectivamente, os quais são conhecidos e $\widehat{\mu}_2$ é a média amostral oriunda de uma amostra de tamanho $n-2$ retirada dos N - 2 ($\mathcal{U}^*\{2, 3, ..., N-1\}$) elementos restantes.

a) Prove que $\mathcal{E}(\widehat{\mu}_{st}) = \mu$ (80 pontos).

b) Prove que $\mathcal{V}(\widehat{\mu}_{st}) = \left(\frac{N-2}{N}\right)^2 \left(1 - \frac{n-2}{N-2}\right) \dfrac{s_2^2}{n-2}$, em que $s_2^2 = \frac{1}{N-3} \sum_{i=2}^{N-2} (y_i - \mu_2)^2$ e $\mu_2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=2}^{N-2} y_i$ (70 pontos).

c) Considere que $s_2^2 < s^2$ e que N e n são, ambos, muito grandes. Compare $\mathcal{V}(\widehat{\mu}_{st})$ e $\mathcal{V}(\widehat{\mu})$. Quals dos dois estimadores você escolheria para estimar μ? Justifique, adequadamente sua resposta (50 pontos).

Formulário

1. Parâmetros populacionais de interesse: $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$; $\tau = N\mu = \sum_{i=1}^{N} y_i$; $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2$; $s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2$, $p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i, y_i \in \{0,1\}$.

2. Estimadores: $\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i\in \boldsymbol{s}} Y_i; \widehat{\tau} = N\widehat{\mu} = \sum_{i\in \boldsymbol{s}} Y_i$; $\widehat{\sigma}^2 = \widehat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i\in \boldsymbol{s}}(Y_i-\widehat{\mu})^2$, $\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i\in \boldsymbol{s}} Y_i, Y_i \in \{0,1\}$.

3. Variâncias dos estimadores

   (a) AASc : $\mathcal{V}(\widehat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}; \mathcal{V}(\widehat{\tau}) = N^2\frac{\sigma^2}{n}$; $\mathcal{V}(\widehat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$.

   (b) AASs : $\mathcal{V}(\widehat{\mu}) = \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n}; \mathcal{V}(\widehat{\tau}) = \left(1-\frac{n}{N}\right)N^2\frac{s^2}{n}$; $\mathcal{V}(\widehat{p}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{p(1-p)}{n}$.

4. Estimadores não viciados para as variâncias dos estimadores

   (a) AASc : $\widehat{\mathcal{V}}(\widehat{\mu}) = \frac{\widehat{\sigma}^2}{n}; \widehat{\mathcal{V}}(\widehat{\tau}) = N^2\frac{\widehat{\sigma}^2}{n}$; $\widehat{\mathcal{V}}(\widehat{p}) = \frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}$.

   (b) AASs : $\widehat{\mathcal{V}}(\widehat{\mu}) = \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\widehat{s}^2}{n}; \widehat{\mathcal{V}}(\widehat{\tau}) = \left(1-\frac{n}{N}\right)N^2\frac{\widehat{s}^2}{n}$; $\widehat{\mathcal{V}}(\widehat{p}) = \left(\frac{1-n/N}{n-1}\right)\widehat{p}(1-\widehat{p})$.

5. Tamanho da amostra relativo à média (visto em sala) para o plano AASs , $n = \dfrac{Ns^2z^2}{\delta^2 N + s^2z^2}$, em que $P(Z>z) = \frac{1-\gamma}{2}, Z \sim N(0,1)$.