Teoria de Informação – IE660
Prof. Cândido
2º semestre de 2013

$\boxed{\text{GABARITO}}$

PROVA #2

1. Considere uma cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ (1-\alpha)/2 & \alpha & (1-\alpha)/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

   a. (1,0) Encontre a PMF estacionária do processo.
   b. (1,0) Encontre a entropia do processo.
   c. (1,0) Para qual valor de α a entropia é máxima? Quanto vale essa entropia?
   d. (1,0) Para o valor de α do item c, encontre a taxa de entropia do processo.

2. Considere uma variável aleatória $X \in \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ com a seguinte PMF:

$$\begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \\ (0.1 & 0.18 & 0.40 & 0.05 & 0.06 & 0.1 & 0.07 & 0.04) \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 6 & 4 & 5 & 8 \end{array}$$

   a. (1,0) Construa um código de Huffman binário para X.
   b. (1,0) Calcule o comprimento médio do código.
   c. (1,0) Em que sentido o código de Huffman é ótimo? Qual a relação disso com a entropia de X?

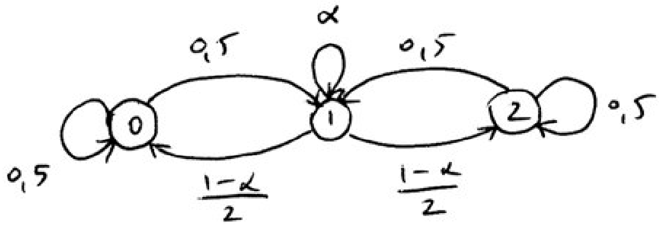
3. Considere um canal discreto com alfabetos binários de entrada e saída, e com a seguinte matriz de transição:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

   a. (2,0) Calcule a capacidade do canal.
   b. (1,0) É possível transmitir por esse canal uma fonte binária i.i.d. uniforme? Por quê?

(1)

(a)



$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ \frac{1-\alpha}{2} & \alpha & \frac{1-\alpha}{2} \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} [\mu_0 \;\; \mu_1 \;\; \mu_2] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ \frac{1-\alpha}{2} & \alpha & \frac{1-\alpha}{2} \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} = [\mu_0 \;\; \mu_1 \;\; \mu_2] & \text{(i)} \\ \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 1 & \text{(ii)} \end{cases}$$

↓ POR SIMETRIA, $\mu_0 = \mu_2$ (iii)

1ª EQUAÇÃO DE (i) : $\begin{cases} 0,5\,\mu_0 + \frac{1-\alpha}{2}\mu_1 = \mu_0 & (\times 4) \\ 2\mu_0 + \mu_1 = 1 \end{cases}$ +

(ii) :

$$2(1-\alpha)\mu_1 + \mu_1 = 1 \rightarrow \boxed{\mu_1 = \frac{1}{3-2\alpha}}$$

(ii) & (iii)

$$\boxed{\mu_0 = \mu_2 = \frac{1-\alpha}{3-2\alpha}}$$

(b)
$$\boxed{H(X) = -\frac{1-\alpha}{3-2\alpha}\log_2\left(\frac{1-\alpha}{3-2\alpha}\right) - \frac{1-\alpha}{3-2\alpha}\log_2\left(\frac{1-\alpha}{3-2\alpha}\right) - \frac{1}{3-2\alpha}\log_2\left(\frac{1}{3-2\alpha}\right)}$$

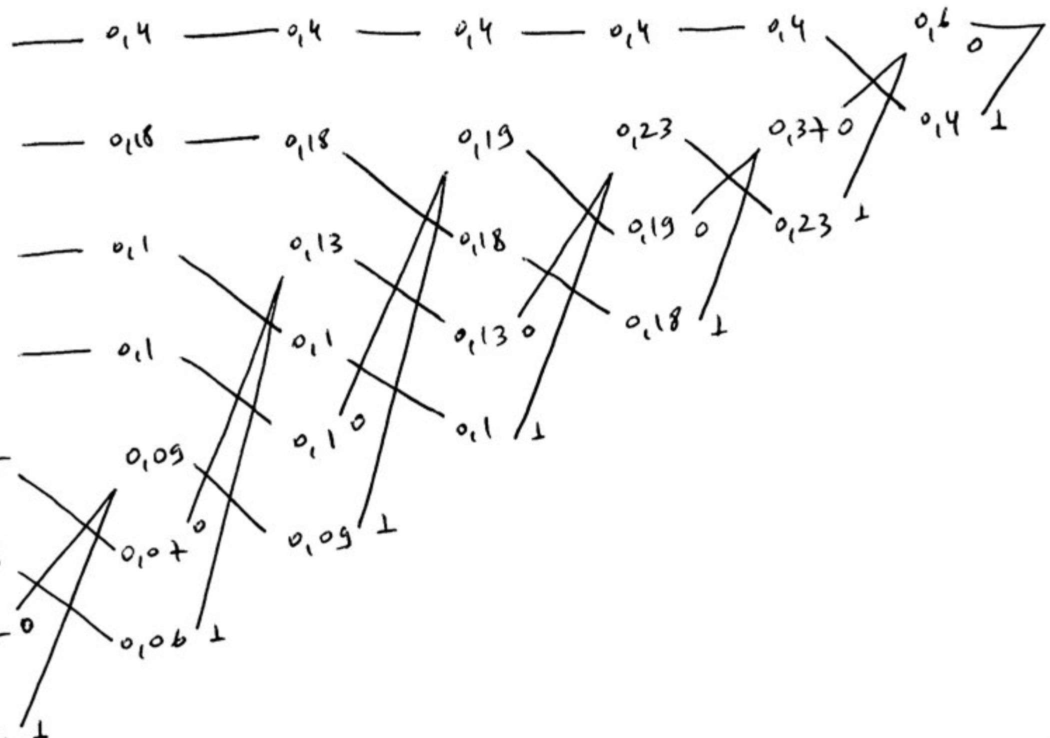
(c)
$$\boxed{\alpha = 0} \rightarrow \underbrace{\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3}}_{\text{PMF UNIFORME}} \xrightarrow[\text{MÁXIMA}]{\text{ENTROPIA}} \boxed{H(X) = \log_2 3 \approx 1,58 \text{ BITS}}$$

(d)
$$H(X) = \underset{\mu_0}{\frac{1}{3}}\underbrace{h\left(\frac{1}{2}\right)}_{=1} + \underset{\mu_1}{\frac{1}{3}}\underbrace{h\left(\frac{1}{2}\right)}_{=1} + \underset{\mu_2}{\frac{1}{3}}\underbrace{h\left(\frac{1}{2}\right)}_{=1} \rightarrow \boxed{H(X) = 1 \text{ BIT}}$$

(2)

(a)

x	$p(x)$	$C(x)$
C	0,4	1
B	0,18	001
A	0,1	011
F	0,1	0000
G	0,07	0100
E	0,06	0101
D	0,05	00010
H	0,04	00011

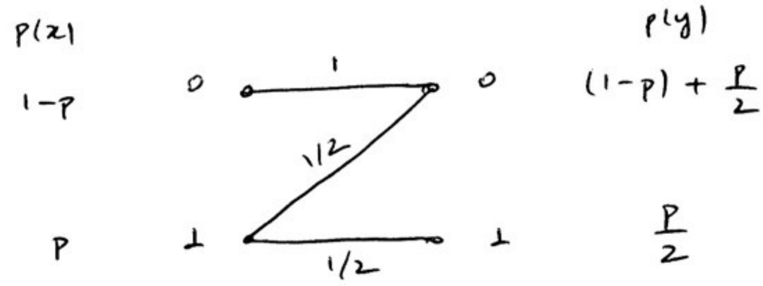


(b) $L = \sum p_i l_i = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}18 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot 4 + 0{,}07 \cdot 4 + 0{,}06 \cdot 4 + 0{,}05 \cdot 5 + 0{,}04 \cdot 5$

$= 2{,}61$ BITS / SÍMBOLO

(c) O CÓDIGO DE HUFFMAN FORNECE O MÍNIMO COMPRIMENTO MÉDIO PARA A REPRESENTAÇÃO (SEM PERDAS) DE UMA DADA FONTE. PELO TEOREMA DA CODIFICAÇÃO DE FONTE, ESSE COMPRIMENTO MÉDIO NÃO PODE SER INFERIOR À ENTROPIA DA FONTE.

(3)



(a)

PARA UM DADO VALOR DE $p = \Pr[X=1]$, TEM-SE QUE:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y|X) = \underbrace{(1-p)\cdot \emptyset}_{H(Y|X=0)} + \underbrace{p \cdot h\left(\tfrac{1}{2}\right)}_{H(Y|X=1)} = p$$

$$H(Y) = h(\Pr[Y=1]) = h\left(\tfrac{p}{2}\right) = -\frac{p}{2}\log_2\left(\frac{p}{2}\right) - \left(1-\frac{p}{2}\right)\log_2\left(1-\frac{p}{2}\right)$$

$$\therefore\quad I(X;Y) = -\frac{p}{2}\log_2\left(\frac{p}{2}\right) - \left(1-\frac{p}{2}\right)\log_2\left(1-\frac{p}{2}\right) - p$$

$$C = \max_{p} I(X;Y)$$

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial p} = -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{p}{2}\right) - \cancel{\left(\frac{p}{2}\right)\frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)\ln 2}\cdot\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\log_2\left(1-\frac{p}{2}\right) - \cancel{\left(1-\frac{p}{2}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{p}{2}\right)\ln 2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} - 1$$

$$= -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1-\frac{p}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\log_2\left(\frac{1-p/2}{p/2}\right) = 2 \longrightarrow \frac{1-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}} = 4 \longrightarrow 1-\frac{p}{2} = 2p \longrightarrow p = \frac{2}{5}$$

$$\therefore\quad C = -\frac{1}{5}\log_2\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{4}{5}\log_2\frac{4}{5} - \frac{2}{5}$$

$$\boxed{C \approx 0{,}32 \text{ BITS/TRANSMISSÃO}}$$

(b) NÃO, POIS A ENTROPIA DESSA FONTE VALE $H(X) = H(X) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ BIT, (TAXA)

ESTANDO POIS ACIMA DA CAPACIDADE DO CANAL.