

EA044 – Planejamento e Análise de Sistemas de Produção

2o. Semestre de 2006 - 3a. Prova - Prof. Paulo Valente

RA: 037311 Nome: *Guilherme M. Almeida* Ass.: *Guilherme M. Almeida*

1. Uma certa região metropolitana do estado é formada por seis cidades. O governo estadual planeja construir novas estações do corpo de bombeiros e precisa determinar em quais cidades construí-las, de tal forma que qualquer uma das cidades seja atendida por uma estação em no máximo quinze minutos. Os tempos de trajeto entre as cidades encontram-se descritos na tabela abaixo. Formule o problema de programação inteira cuja solução forneça o menor número e as localizações das novas estações do corpo de bombeiros.

De / Para	C1	C2	C3	C4	C5	C6
C1	0	10	20	30	30	20
C2	10	0	25	35	20	10
C3	20	25	0	15	30	20
C4	30	35	15	0	15	25
C5	30	20	30	15	0	14
C6	20	10	20	25	14	0

2. A tabela apresentada a seguir é referente ao emprego do algoritmo *branch-and-bound* ao problema de programação inteira

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 \\ &\text{sujeito a } \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5, \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45, \end{aligned} \end{aligned}$$

onde x_1 e x_2 são variáveis inteiras não-negativas. O problema 1 (original) se ramifica nos problemas 2 e 3, o problema 3 nos problemas 4 e 5, e o problema 4 nos problemas 6 e 7. A tabela apresenta uma solução ótima para o problema acima? Justifique.

Problema	(x_1, x_2, z)	Restrição
1	(3.75, 1.25, 23.75)	—
2	(3, 2, 23)	$x_1 \leq 3$
3	(4, 0.83, 23.33)	$x_1 \geq 4$
4	(4.5, 0, 22.5)	$x_2 \leq 0$
5	Infactível	$x_2 \geq 1$
6	(4, 0, 20)	$x_1 \leq 4$
7	Infactível	$x_1 \geq 5$

3. Resolva o problema da mochila a seguir através de programação dinâmica:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ &\text{sujeito a } 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8, \end{aligned}$$

onde x_1 , x_2 e x_3 são variáveis inteiras não-negativas.

4. Uma empresa deseja determinar a localização de um novo depósito. As coordenadas no plano (em km) de quatro consumidores e o número de remessas feitas anualmente para cada consumidor são indicadas na tabela abaixo. A empresa deseja localizar o depósito de forma a minimizar a distância total percorrida durante o ano do depósito aos quatro consumidores. Formule o problema de programação não-linear associado. Assuma que a distância entre dois pontos do plano quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ é medida pela norma Euclideana $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

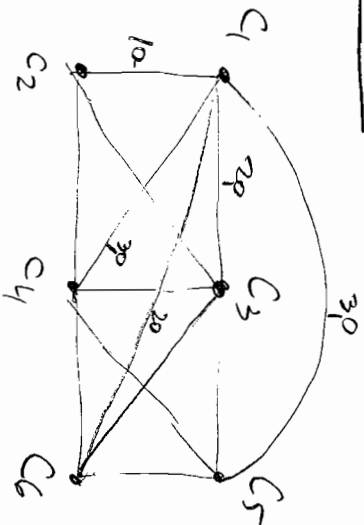
Consumidor	Coordenadas	No. de Remessas
1	(8, 16)	200
2	(16, 8)	150
3	(0, 18)	200
4	(18, 0)	300

(5,0)

Guilherme Nileni Almeida

RA 037391

Questão 1:



$x_i = \begin{cases} 0, & \text{se não há conexão} \\ 1, & \text{se há} \end{cases}$

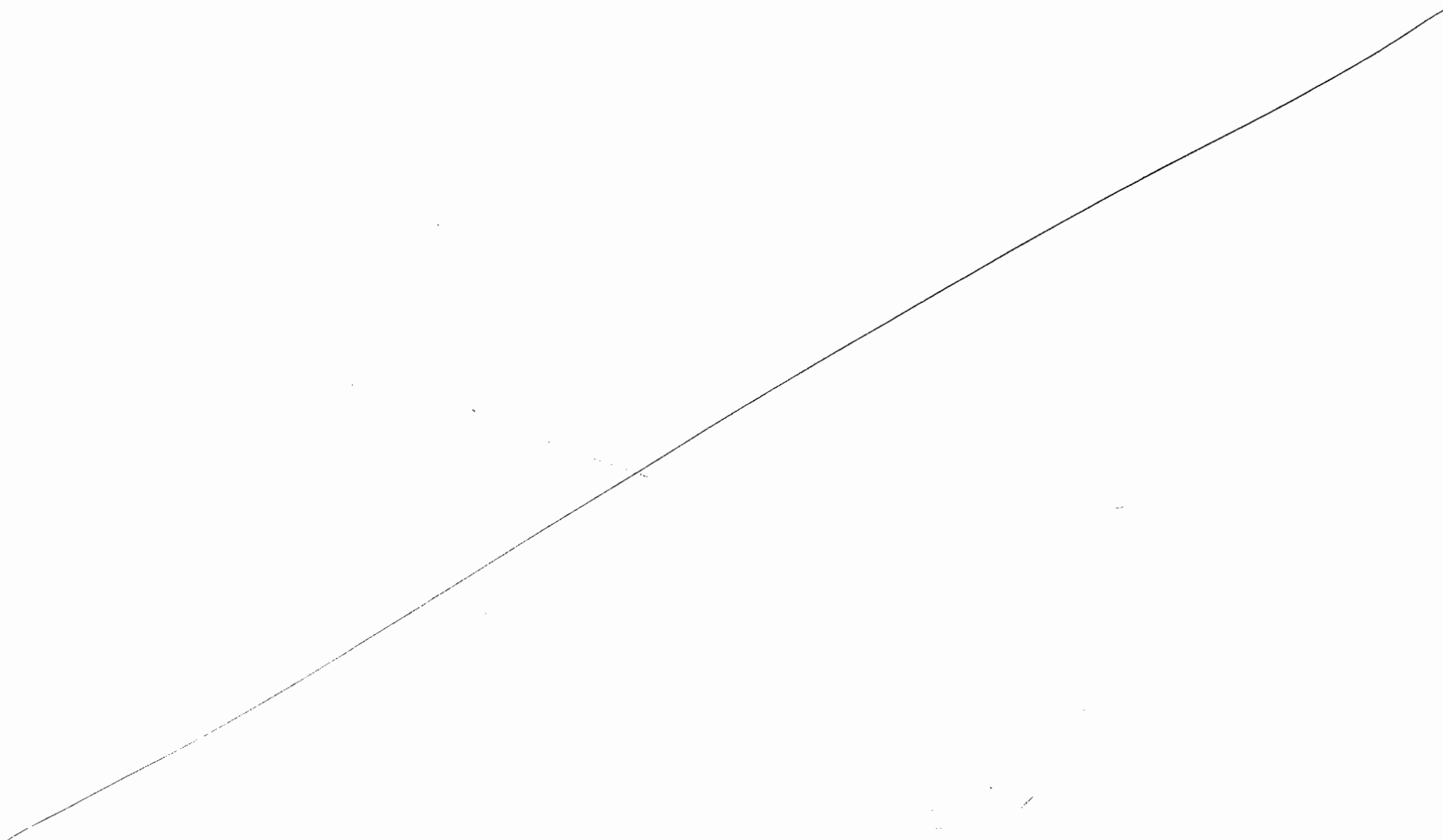
11 0,5
21 2,5
31 0,0
42 2,0
5,0

Seja x_i , $i=1,2,3,4,5,6$ as variáveis do estado

MINIMIZAR $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
Sujeito a:

$x_i \in \{0,1\}$

$$\begin{aligned} 10x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 30x_5 + 30x_6 &\leq 15 \\ 10x_1 + 25x_3 + 35x_4 + 20x_5 + 10x_6 &\leq 15 \\ 20x_1 + 25x_2 + 15x_4 + 30x_5 + 20x_6 &\leq 15 \\ 30x_1 + 35x_2 + 15x_3 + 15x_5 + 25x_6 &\leq 15 \\ 30x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 15x_4 + 14x_6 &\leq 15 \\ 20x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 14x_5 &\leq 15 \end{aligned}$$



Questão 3:

(P1) MAXIMIZE $Z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3$
 $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8$

Rebrotado:

\bar{Z}	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
-1	-5	-4	-2	0	0
0	4	3	2	1	8

\bar{Z}	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
-1	-1	-1	0	1	8
0	2	3/2	1	1/2	4

\bar{Z}	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
-1	0	-1/4	1/2	3/4	0
0	1	3/4	1/2	1/4	2

Programação Dinâmica!

\bar{Z}	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
-1	1/3	0	2/3	4/3	32/3
0	4/3	1	2/3	1/3	8/3

$Z = \frac{32}{3} = 10,66$; $x_2 = \frac{8}{3} = 2,66$

$2 \leq x_2 \leq 3$

(P2) MAXIMIZE $Z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3$
 $s.t. : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8$ INACTIVE!
 $x_2 \geq 3$

(P3) MAXIMIZE $Z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3$
 $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8$
 $x_2 \leq 2$

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
-1	-5	-4	-3	0	0	0
0	4	3	2	1	0	8
0	0	1	0	0	1	2

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
-1	-5	0	-3	0	4	8
0	4	0	2	1	-3	2
0	0	1	0	0	1	2

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
-1	-1	0	0	1	1	10
0	2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1
0	0	1	0	0	1	2

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
-1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{21}{2}$
0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	0	1	0	0	1	2

$$\therefore x_1 = 0,5 \quad x_2 = 2 \quad Z^* = \frac{21}{2} = 10,5$$

(P4) $\text{MAX } Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$
 $\text{s.t. } 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1 \geq 1$

(P5) $\text{MAX } Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$
 $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8$
 $x_2 \leq 2$
 $x_1 \leq 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2 \rightarrow x_3 = 1 \rightarrow Z^* = 11 \\ x_2 &= 1 \rightarrow x_3 = 1,5 \rightarrow Z^* = 11,5 \\ x_2 &= 0 \rightarrow x_3 = 4 \rightarrow Z^* = 12 \end{aligned}$$

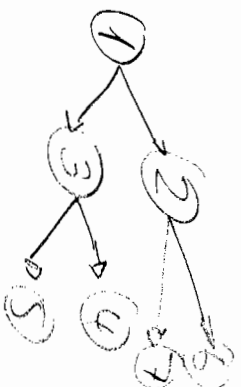
Z_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	LB
-1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	4	3	2	1	0	0	0	8
0	0	1	0	0	1	0	0	2
0	1	0	0	0	0	1	1	1

X

Z_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	LB
-1	-1	0	0	0	0	-1	0	-1
0	4	3	2	1	0	0	0	8
0	0	1	0	0	1	0	0	2
0	1	0	0	0	0	1	1	1

Z_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	LB
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-----	----

X

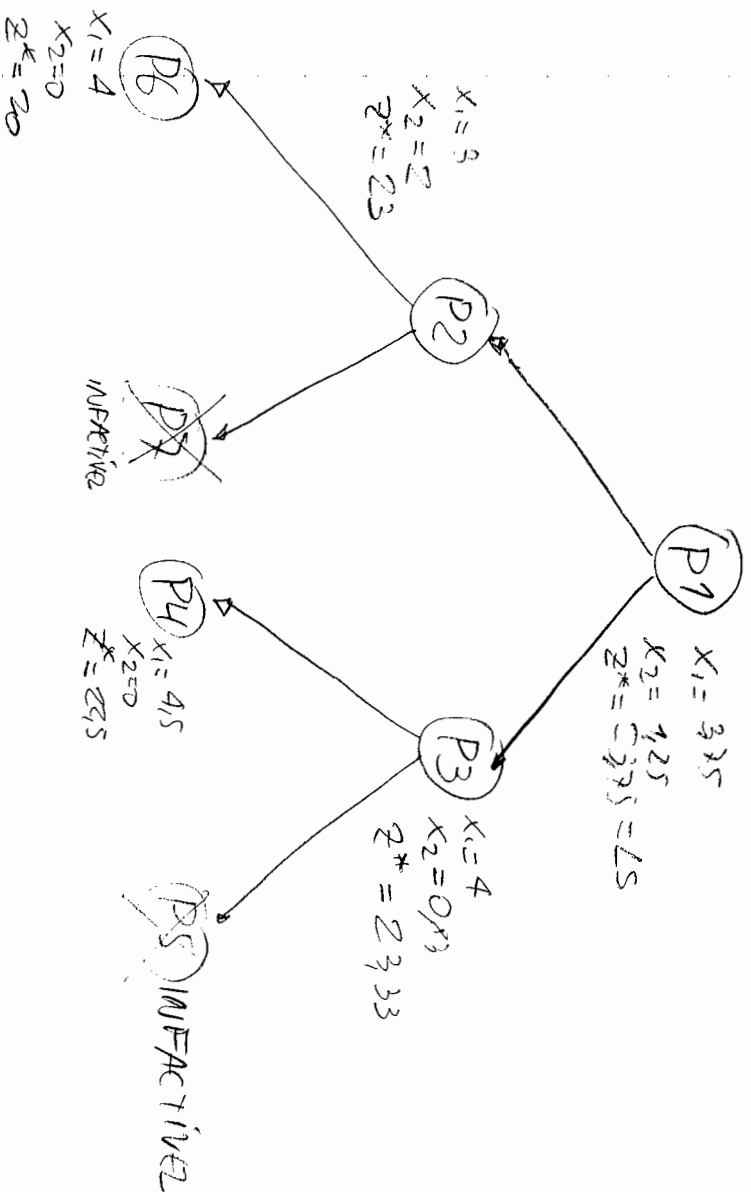


Questão 12:

MAXIMIZAR $Z = 5x_1 + 4x_2$

S.O. $x_1 + x_2 \leq 5$

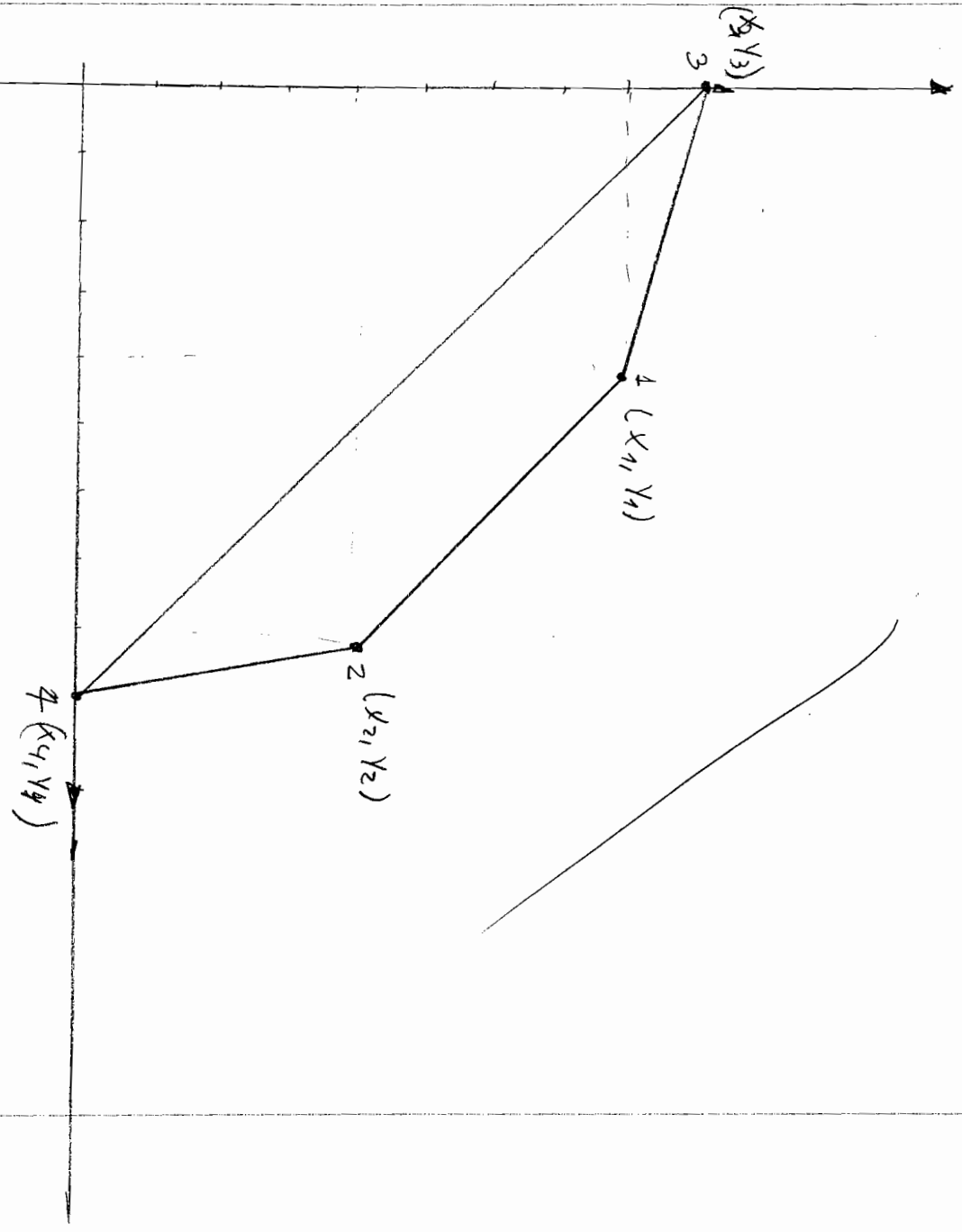
$10x_1 + 6x_2 \leq 45$



Pela árvore acima, percebe-se que a tabela dada tem o problema $P2$ como solução ótima, apesar de $P6$ também ter solução. No entanto, Z^* de $P2$ é maior que Z^* de $P6$ ($Z_2^* = 23$, $Z_6^* = 20$). Além disso, Z_{P2} está mais próximo de LS .

$$\begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 2 \\ Z^* = 23 \end{cases}$$

Question 4:



$$\text{MINIMIZE: } 200\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + 150\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + 200\sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2} + 300\sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}$$

S.t:

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$