Prova 2 ME523

1. Seja X uma matriz de planejamento tal que

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1+\epsilon & \epsilon\sqrt{3} & 0 \\ \epsilon\sqrt{3} & 1-\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Usando **apenas** relação entre a *valores singulares e autovalores* , determine os valores de ϵ tal que X seja de posto completo.

2. Considere o seguinte modelo de regressão: $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$ onde $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ e X é de posto completo p. Mostre que se H é a matriz de Householder então:

(a) Minimizar $||Y - X\beta||_2^2$ em $\beta \in \mathbb{R}^p$ é equivalente a minimizar $||HY - HX\beta||_2^2$ e,

(b) a solução do item (a) só depende da solução de um sistema triangular superior.

3. Sabendo-se que:
Se A e matriz $n \times n$ com valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \ldots \geq \sigma_n \geq 0$. Então $||A||_2 = \sigma_1$.
Mostre que o número condição

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

4. Seja $\mathbf{X}$ uma matriz $n \times p$ de posto completo. Assuma que a fatorização QR de $\mathbf{X}$ é,

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Uma importante matriz nas aplicações em estatística é a matriz de variâncias e covariâncias $\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{X^T X})^{\mathbf{-1}}$.

(a) Dê uma expressão para a matriz $\mathbf{\Sigma}$ em termos das matrizes da decomposição QR de $\mathbf{X}$.

(b) Explique como computar o escalar $y^T \mathbf{\Sigma} y$ sem formar a matriz $\mathbf{\Sigma}$ explicitamente.