F315 - 1a. Prova - turmas A e B

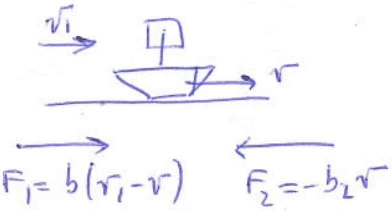
1o. Semestre de 2009

Nome: GABARITO **RA:** **Turma:**

1. Um barco a vela de massa m, inicialmente em repouso, é empurrado por um vento constante cuja velocidade é v_1, que fornece ao barco uma força proporcional à diferença da velocidade do vento e a velocidade v do barco [$b_1(v_1 - v)$ com b_1 constante positiva]. Atua também sobre o barco uma força devido à resistência da água que é proporcional à velocidade do barco ($-b_2 v$ com b_2 constante positiva).

(a) Encontre a velocidade limite do barco.

(b) Ache a velocidade e o deslocamento do barco em função do tempo.



a) $F = ma \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}\left[b_1(v_1 - v) - b_2 v\right]$

velocidade limite : $\dfrac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{v_{max} = \dfrac{b_1 v_1}{b_1 + b_2}}$

b) $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt}\,\frac{1}{b_1 v_1 - (b_1 + b_2)v}\,dt = \frac{t}{m} \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{b_1 v_1}{b_1 + b_2}\left[1 - e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{m}}\right]}$

$v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ $\boxed{x(t) = \dfrac{b_1 v_1}{b_1 + b_2}\left[t + \dfrac{m}{b_1 + b_2}e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{m}} + \text{constante}\right]}$

2. **Uma partícula de massa m está sujeita à ação de uma força**

$$F(x) = -ax + \frac{b}{x^3}$$

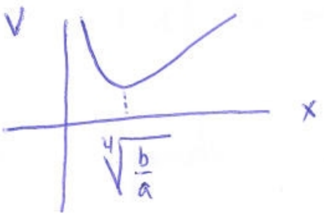
(válida para $x > 0$ e a e b constantes positivas).

(a) Calcule o potencial associado a esta força, faça um esboço do gráfico correspondente, encontre os pontos de equilíbrio e mostre se são estáveis ou instáveis.

(b) Determine a frequência para pequenas oscilações em torno de um ponto de equilíbrio estável, mostrando detalhadamente as aproximações utilizadas.

Dado: Série de Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n}|_{x=x_0}$.

a) $V(x) = -\int_{x_s}^{x} \left(-a + \frac{b}{x^3}\right) dx = \frac{ax^2}{2} + \frac{b}{2x^2} + \text{constante}$



ptos equilíbrio $\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$

$\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x = \pm\sqrt[4]{\frac{b}{a}}} = 4a > 0 \Rightarrow$ ptos estáveis

b) $V(x)\Big|_{x \sim \sqrt[4]{\frac{b}{a}}} = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^2 \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x \sim \sqrt[4]{\frac{b}{a}}}$

$= \frac{1}{2}(4a)\left(x - \sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^2$

$$\boxed{w = \sqrt{\frac{4a}{m}}}$$

3. **Considere um oscilador harmônico amortecido de massa m, constante elástica k e constante de amortecimento $b = \sqrt{4mk}$, que inicialmente se encontra na posição $x = x_0$ (medida a partir da posição de repouso da mola) com velocidade $v = v_0$.**

   (a) **Encontre o deslocamento e a velocidade como funções do tempo.**

   (b) **Quando $x_0 \neq 0$, para que v_0 o corpo cruzará a origem das coordenadas $x = 0$?**

a) oscilador harm. crítico : $x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\gamma C_1 e^{-\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t} + (-\gamma) C_2 t e^{-\gamma t}$

$x(t=0) = x_0 \Rightarrow \boxed{C_1 = x_0}$

$v(t=0) = v_0 \Rightarrow \boxed{C_2 = v_0 + \gamma x_0}$

b) impondo $x(t) = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{-x_0}{t} - \gamma x_0$

para cruzar a origem : $\boxed{\begin{array}{l} v_0 < -\gamma x_0 \quad \text{se } x_0 > 0 \\ v_0 > -\gamma x_0 \quad \text{se } x_0 < 0 \end{array}}$