ME-323 — Exame

1. Em um grupo de 100 pessoas há 25 pessoas que fumam, 40 que bebem e 10 que fumam e bebem. Escolha-se uma pessoa deste grupo ao acaso. Qual é a probabilidade de que a pessoa escolhida

(a) bebe, mas não fuma;

(b) não fuma e não bebe?

2. A distribuição conjunta de X e Y é dada por $p(x,y)$, onde

$$\begin{array}{lll} p(1,1) = 1/9, & p(2,1) = 1/3, & p(3,1) = 1/9 \\ p(1,2) = 1/9, & p(2,2) = 0, & p(3,2) = 1/18 \\ p(1,3) = 0, & p(2,3) = 1/6, & p(3,3) = 1/9. \end{array}$$

Calcule as distribuições marginais de X e Y. As v. a. X e Y são independentes? Calcule a distribuição condicional de X dado que $Y = 1$.

3. Seja X a v.a. contínua cuja densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \quad\;\; \text{caso contrario.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor de k.

(b) Calcule $\mathbf{P}(1/4 < X < 1/2)$.

(c) Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\operatorname{Var}(X)$, $\mathbb{E}(e^X)$.

(d) Determine a f.d. de X.

4. Seja U uma v.a. Uniforme $(0,1)$ e $X = \ln U$. Usando a função geradora de momentos, calcule $\mathbb{E}X$ e $\operatorname{Var} X$.

5. Considere uma cadeia de Markov com a matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule a matriz de probabilidades de transição em 4 passos.

(b) Calcule as probabilidades estacionárias.

(c) Esta cadeia de Markov é reversível?

(d) Partindo do estado 2, qual é o número médio de passos que o processo precisa fazer para voltar ao mesmo estado?

ME-323 — Exame

$= 3e - 6\,e^x\big|_0^1 + \int_0^1 6e^x\,dx = -3e + 6e - 6 = 3e - 6$

1. Em um grupo de 100 pessoas há 25 pessoas que fumam, 40 que bebem e 10 que fumam e bebem. Escolha-se uma pessoa deste grupo ao acaso. Qual é a probabilidade de que a pessoa escolhida

(a) bebe, mas não fuma;

(b) não fuma e não bebe?

2. A distribuição conjunta de X e Y é dada por $p(x,y)$, onde

$$\begin{array}{lll} p(1,1)=1/9, & p(2,1)=1/3, & p(3,1)=1/9 \\ p(1,2)=1/9, & p(2,2)=0, & p(3,2)=1/18 \\ p(1,3)=0, & p(2,3)=1/6, & p(3,3)=1/9. \end{array}$$

Calcule as distribuições marginais de X e Y. As v. a. X e Y são independentes? Calcule a distribuição condicional de X dado que $Y=1$.

3. Seja X a v.a. contínua cuja densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } \; 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor de k. $k = 3$

(b) Calcule $\mathbf{P}(1/4 < X < 1/2)$. $\frac{7}{64}$

(c) Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}(e^X)$. $EX = \frac{3}{4}$, $EX^2 = \frac{3}{5}$, $\mathrm{Var}\,X = \frac{3}{80}$

(d) Determine a f.d. de X.

$Ee^X = 3e - 6$

4. Seja U uma v.a. Uniforme $(0,1)$ e $X = \ln U$. Usando a função geradora de momentos, calcule $\mathbb{E}X$ e $\mathrm{Var}\,X$. $M(t) = Ee^{t\ln U} = EU^t = \int_0^1 x^t\,dx = \frac{1}{t+1}$

5. Considere uma cadeia de Markov com a matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule a matriz de probabilidades de transição em 4 passos.

(b) Calcule as probabilidades estacionárias.

(c) Esta cadeia de Markov é reversível?

(d) Partindo do estado 2, qual é o número médio de passos que o processo precisa fazer para voltar ao mesmo estado?

$EX = 1$, $\mathrm{Var}\,X = 1$

2)

Y \ X	1	2	3	
1	1/9	1/3	1/9	5/9
2	1/9	0	1/18	1/6
3	0	1/6	1/9	5/18
	2/9	1/2	5/18	

X

$$\left(\mathbb{P}[X=1, Y=3] = \mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(Y=3)\right)$$

$\mathbb{P}(X=1 \mid Y=1) = \frac{1}{5}$

$\mathbb{P}(X=2 \mid Y=1) = \frac{3}{5}$

$\mathbb{P}(X=3 \mid Y=1) = \frac{1}{5}$

---

5) $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

a) $\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,54 & 0,46 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{P}^4 = ($

b) $\pi_1 = 0,5\pi_1 + 0,6\pi_2$ $\quad \pi_1 = 1,2\pi_2 = \frac{6}{5}\pi_2$

$\left(\frac{6}{5} + 1\right)\pi_2 = 1$ $\quad \pi_2 = \frac{5}{11}, \quad \pi_1 = \frac{6}{11}$

c) sim $\left(\frac{6}{11} \cdot 0,5 = \frac{5}{11} \cdot 0,6 \right)$

d) $\frac{11}{5}$