ME 420 - Inferência Estatística II / ME 419 - Inferência
Primeiro semestre de 2011
Prova 3
Data: 29/06/2011

Turma: ____________

Nome: ________________________________ RA: ______________

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **Coloque seu nome completo e RA em todas as folhas que você recebeu, inclusive nesta.**
- **Utilize somente um lado de cada folha para resolver as questões, numerando cada uma das páginas.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique, adequadamente, seus desenvolvimentos, sem, no entanto, escrever excessivamente.**
- **Resolva a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **Contestações a respeito da nota, só serão consideradas se estiverem por escrito.**
- **A prova terá duração de 120 minutos, improrrogáveis.**

Faça uma excelente Prova!!

Questões

1. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens.

a) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de θ. (30 pontos)

b) Encontre a distribuição de $Y = \ln(1+X)$ e prove que $Q = \theta\sum_{i=1}^{n} Y_i$ é uma quantidade pivotal, em que $Y_i = \ln(1+X_i)$. Além disso, obtenha um IC exato para θ com coeficiente de confiança de γ usando Q. (20 pontos)

c) Considere as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Obtenha o teste da razão de verossimilhanças com nível de signficância α. Sugestão: a quantidade pivotal do item b) pode ser útil. (60 pontos)

d) Suponha que para uma amostra de tamanho $n = 25$, obtivemos $\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + x_i) = 4,36$. Para $\theta_0 = 4$, relativo as hipóteses do item c), qual sua conclusão para $\alpha = 0,10$? Calcule também o p-valor associado ao valor da estatística do teste que você encontrou. (30 pontos)

e) Considere as hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$. Encontre um teste UMP com nível de significância α e calcule a respectiva função poder. Sugestão: a quantidade pivotal do item b) pode ser útil. (50 pontos)

2. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, tal que:

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{r}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{r-1} e^{-(x/\lambda)^r} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,, \boldsymbol{\theta} = (r, \lambda)$$

Ou seja, X tem distribuição Weibull(r, λ), $r > 0, \lambda > 0$. **Considere r conhecido**. Responda os itens.

a) Encontre a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança (emv) de λ, especificando, corretamente, seus parâmetros. Sugestão: utilize a função gama para o cálculo da informação de Fisher. (50 pontos)

b) Encontre um intervalo de confiança assintótico para λ, baseado na distribuição assintótica do emv de λ, com coeficiente de confiança de aproximadamente γ. Sugestão: utilize a fórmula mais simples. (20 pontos)

c) Proponha um teste assintótico de nível de significância de aproximadamente α, baseado na distribuição assintótica do emv de λ, para testar $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$. Sugestão: utilize a fórmula mais simples. (30 pontos)

d) Considere agora, $r = 1$. Sejam as hipóteses $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda > \lambda_0$. Encontre um teste UMP com nível de significância α e a respectiva função poder. (50 pontos)

e) Suponha que para uma amostra de tamanho $n = 30$, obteve-se $\overline{x} = 6,07$, para r = 1. Considerando $\lambda_0 = 4,5$ nas hipóteses do item d), qual sua conclusão usando o teste UMP obtido no item d), para um $\alpha = 0,05$? Obtenha o poder estimado. (30 pontos)

f) Para os dados fornecidos no item e), obtenha o intervalo de confiança determinado no item b), para $\gamma = 0,95$. (20 pontos)

3. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\ln(x) - \mu\right)^2\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \mu > 0,$$

ou seja $X \sim$ lognormal$(\mu, 1)$. Suponha que, a priori, $\mu \sim N(\alpha, \psi)$, (α, ψ) conhecidos.

a) Seja $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, y_i = \ln(x_i)$. Prove que a distribuição a posteriori, ou seja, a distribuição de $\mu|\boldsymbol{x}$ é $N(\alpha^*, \psi^*)$, em que (50 pontos) :

$$
\begin{aligned}
\alpha^* &= \psi^* \left(n\overline{y} + \frac{\alpha}{\psi} \right) \\
\psi^* &= \left(n + \frac{1}{\psi} \right)^{-1}
\end{aligned}
$$

b) Encontre $\widehat{\theta}_B = \mathcal{E}[\theta|\boldsymbol{X}]$ e $\mathcal{V}[\theta|\boldsymbol{X}]$. (10 pontos)

c) Encontre um intervalo de credibilidade com coeficiente de credibilidade de γ, para μ. (20 pontos)

Formulário

1. Se $X \sim exp(\theta), \theta > 0$, então $f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \mathcal{E}(X) = \theta, \mathcal{V}(X) = \theta^2$.
2. Se $X \sim$ gama$(r,\theta), r > 0, \theta > 0$, então $f_X(x;r,\theta) = \frac{1}{\theta^r\Gamma(r)}e^{-\frac{x}{\theta}}x^{r-1}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \mathcal{E}(X) = r\theta, \mathcal{V}(X) = r\theta^2$.
3. $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$, $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$, se for r for inteiro $\Gamma(r) = (r-1)!$.
4. Se $X \sim N(\mu,\sigma^2), \mu \in (-\infty,\infty), \sigma^2 \in (0,\infty), \boldsymbol{\theta} = (\mu,\sigma^2)$ então $f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x), \mathcal{E}(X) = \mu, \mathcal{V}(X) = \sigma^2$.