EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismos
Primeiro Semestre de 2005 - Terceira Prova - Prof. Paulo Valente

RA: **Nome:** **Ass.:**

1. Considere o sistema de segunda ordem representado por variáveis de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2500 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Supondo realimentação de estados na forma $u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + r$, onde r é uma entrada degrau, determine as condições a serem impostas sobre k_1 e k_2 para que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável e sua saída apresente erro de regime nulo para entrada degrau.

2. O critério de Routh-Hurwitz é utilizado para se investigar a estabilidade de sistemas contínuos no tempo. Com a transformação

$$s = \frac{z+1}{z-1}$$

e sua inversa

$$z = \frac{s+1}{s-1},$$

na qual $s = \mathrm{Re}\, s + j\mathrm{Im}\, s$ e $z = \mathrm{Re}\, z + j\mathrm{Im}\, z$, o critério pode ser adaptado para se investigar a estabilidade de sistemas discretos no tempo. Mostre que, dada a transformação acima,

$$\text{se} \begin{cases} \mathrm{Re}\, s < 0, \text{ então } \mid z \mid < 1, \\ \mathrm{Re}\, s = 0, \text{ então } \mid z \mid = 1, \\ \mathrm{Re}\, s > 0, \text{ então } \mid z \mid > 1. \end{cases}$$

Em seguida use a transformação para determinar se o sistema cuja equação característica é $z^2 - 2z - 1$ é estável.

3. Considere o sistema

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u.$$

Obtenha a representação do sistema na forma $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, definindo como variáveis de estado $x_1 = y$ (saída do sistema) e $x_2 = \dot{y}$. Projete um controlador por realimentação de estados, $u = -Kx$, de tal forma que os pólos de malha fechada apresentem fator de amortecimento $\xi = 0.5$ e freqüência natural $\omega_n = 2$ rad/s.

4. Considere o problema de implementar digitalmente o controle do sistema contínuo

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2},$$

a partir da utilização de um amostrador ideal e de um segurador de ordem zero como conversores A/D e D/A, respectivamente. Assuma realimentação unitária e período de amostragem $T = 1$ s. Supondo controle digital na forma

$$C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = k\left(\frac{z - z_1}{z}\right),$$

na qual $z_1 = 0.8$, quanto deve valer k para que a constante de aceleração do sistema,

$$k_a = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)^2 C(z) P(z)}{T^2},$$

seja igual a 10 ? Em seguida determine a equação à diferênças associada ao controlador $C(z)$.

5. Considere o sistema dinâmico de terceira ordem representado por meio de variáveis de estado:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha \\ 5\alpha \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Existem valores de α para os quais o sistema dinâmico é completamente controlável ? É possível construir um estimador de ordem completa com alocação arbitrária de pólos definindo-se uma e apenas uma das variáveis de estado como saída do sistema ? Justifique suas respostas.

Determinante e inversa

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Representação de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx + Du \ \Leftrightarrow\ G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Matrizes de controlabilidade e observabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Forma Canônica Controlável

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s_{+}^{n-1} \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s_{+}^{n-1} \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \cdots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} x + b_n u$$

Função de transferência discreta

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$