Cálculo Numérico (MS211) PROVA 2 (16/06/2010)

Nome: ______________________________ RA: __________ Turma: ______

Trabalhe com *radianos* e 4 *dígitos decimais*!!! Justifique as suas respostas e explicite todas as contas. Boa sorte e bom divertimento!

---

1. O sistema LORAN (LOng RAnge Navigation) calcula a posição de um barco no mar a partir de sinais de dois pares de transmissores fixos. O sistema calcula a diferença de tempo entre o recebimento dos sinais dos dois transmissores de cada um dos pares. Uma dada diferença constante de tempo entre os sinais pode ser representada por uma linha hiperbólica de posição. Portanto, a posição do barco é dada pela interseção de duas hiperbolas como por exemplo:

$$\begin{cases} \frac{(x_1)^2}{186^2} - \frac{(x_2)^2}{300^2-186^2} & = & 1 \\ \frac{(x_2-500)^2}{279^2} - \frac{(x_1-300)^2}{500^2-279^2} & = & 1\,. \end{cases}$$

(a) Encontre a matriz Jacobiana do sistema. [0.5 pts]

(b) Partindo do chute inicial $x^{(0)} = (250, 200)^T$, execute o método de Newton utilizando a última tabela do verso até $||F(x^{(k)})||_\infty < 0.1$ ou $||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty < 0.1$ (Dica: pelo menos um dos dois critérios é satisfeito em ≤ 1 passo). Qual é a aproximação obtida da posição do barco? [2 pts]

(c) Qual é o problema se escolhermos $(0, 0)^T$ como chute inicial? [0.5 pts]

2. A tabela seguinte mostra o número de usuários de internet entre 100 habitantes nos anos 1998 até 2007.

Ano t	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
% Usuários	1	1	2	3	4	5	7	9	12	17

(a) Seja $x = t - 1998$. Utilize o método dos quadrados mínimos para ajustar uma curva exponencial da forma ae^{bx} aos dados da tabela. [1.5 pts]

(b) Qual é o erro obtido neste ajuste? Em outras palavras, qual é a norma euclidiana do resíduo? [0.5 pts]

(c) Utilize o seu resultado para estimar a percentagem de usuários de internet nos países em desenvolvimento no ano 2010. [0.5 pts]

3. Considere a seguinte tabela de dados:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	1	-4	4	0

(a) Determine o polinômio q_2 de grau ≤ 2 que interpola f em $2, 3, 4$. [1 pt]

(b) Seja p_2 o polinômio dado por $-3.5x^2 + 5.5x - 1$ e seja

$$g(x) = \begin{cases} p_2(x) & \text{se } x \leq 2 \\ q_2(x) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Verfique se g interpola os dados. [0.5 pts]

(c) Verfique se g é um spline cúbico interpolante. [1 pt]

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' & = & \sin(y) \cdot e^x + y^2 \\ y(1) & = & 2 \end{cases}$$

Aplique o método de Euler Aperfeiçoado (de preferência em forma tabelar!) com $h = 0.1$ para encontrar uma aproximação para $y(1.2)$. Qual é a aproximação obtida? [2 pts]

ALGUMAS TABELAS

x	y	$y' = f(x, y)$	$\Delta y \approx y'h$

x	y	$y' = f(x, y)$	y''	$\Delta y \approx y'h + y''\frac{h^2}{2}$

x_k	y_k	$y'_k = f(x_k, y_k)$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$	$\Delta y_k \approx (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$

---

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\|\|F(x^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|s^{(k-1)}\|\|_\infty$	$s^{(k)}$
0				$-$	

X

—

1,

1. 1.(a) $g(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x_1}{186^2} - \dfrac{2x_2}{300^2 - 186^2} \\ \cancel{2(x_2 - 500} \\ -\dfrac{2(x_1-300)}{500^2 - 279^2} \quad \dfrac{2(x_2-500)}{279^2} \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}$

(b) $F(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1^2}{186^2} - \dfrac{x_2^2}{300^2-186^2} - 1 \\[2ex] \dfrac{(x_2-500)^2}{279^2} - \dfrac{(x_1-300)^2}{500^2-279^2} - 1 \end{pmatrix}$

Solve

$J(x^{(0)}) \cdot s^{(0)} = -F(x^{(0)})$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.0145 & -.0072 & -0.08416 \\ 0.0006 & -.0077 & -0.1417 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow s^{(0)} = \begin{pmatrix} 3.4589 \\ 18.6417 \end{pmatrix}$

1/4

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\lVert F(x^{(k)})\rVert_\infty$	$\lVert s^{(k-1)}\rVert_\infty$	$s^{(k)}$
0	$\begin{pmatrix} 250 \\ 200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.08416 \\ 0.1417 \end{pmatrix}$	0.1417	—	$\begin{pmatrix} 3.4589 \\ 186417 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 253.4589 \\ 218.6417 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0059 \\ 0.0044 \end{pmatrix}$	$0.0059 < 0.1$ "ε"		

1/4 1/4 PARE

valor exato

posição do barco $\approx x^{(1)}$ 1/4 ~~exato~~

(c) Para $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ temos e $J(x^{(0)}) \cdot s^{(0)} = -F(x^{(0)})$

$J(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{600}{500^2-279^2} & \dfrac{-2 \cdot 500^2}{279^2} \end{pmatrix}$ tem posto 1

não tem solução

Não podemos aplicar o mét. de Newton com este $x^{(0)}$!

2.(a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y = % usuarios	1	1	2	3	4	5	7	9	12	17

$$y \approx a e^{bx}$$

$$z = \ln(y) \approx \underbrace{\ln(a)}_{\alpha_1} + \underbrace{b}_{\alpha_2} x$$

1/4

$$A \cdot \alpha \approx z$$

1/4

$$A^T A \alpha = A^T z$$

1/4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 45 \\ 45 & 285 \end{pmatrix}$$

1/4

$$A^T z = \begin{pmatrix} 14.2487 \\ 80.7087 \end{pmatrix}$$

1/2

1/4

$$\alpha = \begin{pmatrix} -0.0255 \\ 0.3223 \end{pmatrix}$$ 1/4

$$a = e^{\alpha_1} = e^{-0.0255} = 0.9748$$

$$b = \alpha_2 = 0.3223$$ 1/4

$$\therefore y \approx 0.9748 \cdot e^{0.3223x}$$

(b) $$\text{erro} = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.9748\, e^{0.3223 \cdot 0} \\ 0.9748\, e^{0.3223 \cdot 1} \\ \vdots \\ 0.9748 \cdot e^{0.3223 \cdot 9} \end{pmatrix} \right\|_2$$ 1/4

≈ 14.002 1/4

(c) $t = 2010$ corresponde a $x = 2010 - 1998 = 12$

% usuarios em 2010 $\approx a \cdot e^{b \cdot 12} \approx 46.6222$ 1/2

Ordem

3. (a)

x	0	1	2
2	-4		
		8	
3	4		-6
		-4	
4	0		

$\cancel{1/2}$

$q_2(x) =$ 1/2

$= -4 + 8(x-2) - 6(x-2)(x-3)$

$q'(x) =$

$8 - 6[x-3 + x-2]$

$= 8 - 6[2x-5]$

(b) $p_2\cancel{(0)}$ $g(0) = p_2(0) = -1$ ✓

$g(1) = p_2(1) = -3.5 + 5.5 - 1 = 1$ ✓

$g(2) = p_2(2) = -3.5 \cdot 4 + 11 - 1 = -14 + 10 = -4$ ✓

$\frac{1}{2}$

$g(3) = q_2(3) = 4$ ✓

$g(4) = q_2(4) = 0$ ✓ $\frac{1}{2}$ $\therefore$ g interpola os dados

(c) Para ser um spline cúbico, g precisa ser em

$C^2([\cancel{0}, 4])$

mas $p_2'(2) = -7 \cdot 2 + 5.5 = -14 + 5{,}5 = -8.5$

$q_2'(2) = 8 - 6[4-5] = 8 + 6 = 14$

então $g'(2)$ não existe e portanto g não é um spline cúbico

4.

x_k	y_k	$y_k' = \sin y_k \cdot e^{x_k} + y_k^2$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y_k' h$	$\bar{y}_{k+1}' = \sin \bar{y}_{k+1} e^{x_{k+1}} + \bar{y}_{k+1}^2$	$\Delta y_k \approx y_k' + \bar{y}_{k+1}' \cdot \frac{h}{2}$
1	2	6.4717	2.6472	8,4331	0.7452
1,1	2.7452	8.6961	3.6149	11.5539	1.0125
1.2	3.7577				

$\therefore y(1.2) \approx \underline{\underline{3.7577}}$