GABARITO

F 315 C III Prova (30-06-2010)

PROF. CLEMENTE

Nome: **RA:**

Equação de Euler

I Forma: $\frac{\partial f(y,y',x)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(y,y',x)}{\partial y'} = 0$;

II forma: $\frac{\partial f(y,y',x)}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left[f(y,y',x) - y'\frac{\partial f(y,y',x)}{\partial y'}\right] = 0$

Equações de Lagrange: $L(q_j,\dot{q}_j,t) = T - U \implies \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

Equações de Lagrange com multiplicadores associados às relações de vínculo do tipo $f_m(q_j,t) = 0$:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_m \lambda_m(t)\frac{\partial f_m}{\partial q_j} = 0$$

Força generalizada: $Q_j = \sum_m \lambda_m(t)\frac{\partial f_m}{\partial q_j}$

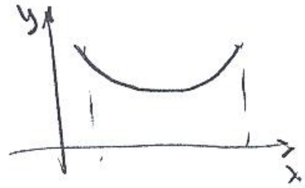
Função Hamiltoniana: $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \implies H(q_j,p_j,t) = \sum_{j=1}^{s} p_j\dot{q}_j - L$

Equações de Hamilton: $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$; $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

1) **(3 pontos)** Uma corda inextensível, de massa **M** e comprimento **L**, está suspensa (sob a ação da gravidade) entre dois suportes na mesma altura e separados por uma distância menor que o comprimento da corda.

a) Determine um funcional que descreva a energia potencial da corda.

b) Obtenha a equação de Euler correspondente ao mínimo desse funcional, verifique que uma possível solução é do tipo y(x)= a cosh(x/b) e deterrmine a/b.



$$dU = -\frac{M}{L} g\, dx \sqrt{1+y'^2} \cdot y$$

a) $$U = \frac{Mg}{L} \int_{x_1}^{x_2} dx\, y \sqrt{1+y'^2}$$

b) Euler II forma:

$$\frac{d}{dx}\left[y\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2 y}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0 \rightarrow$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = k \text{ constante} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{y^2}{k^2} - y'^2 = 1}$$

supondo $y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{b}\right) \rightarrow y'(x) = \frac{a}{b} \operatorname{senh}\left(\frac{x}{b}\right)$

como $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \rightarrow \frac{a^2}{k^2} = \frac{a^2}{b^2} = 1 \rightarrow \boxed{\begin{matrix} k^2 = a^2 \\ b^2 = a^2 \end{matrix}}$

2) **(3,5 pontos)** Uma partícula de massa **M** se move sob a ação da gravidade ao longo de uma hélice definida em coordenadas cilíndricas por **r=R** e **z=kφ** com **R** e **k** constantes e **z** na vertical.

a) Obtenha a lagrangiana correspondente sem utilizar os vínculos.

b) Utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange indeterminados (neste caso serão 2), obtenha as correspondentes equações de Lagrange.

c) Determine as acelerações associadas ao movimento da partícula (para isso tem que utilizar as equações dos vínculos) e com isso as forças generalizadas associadas aos vínculos.

a) $L = \frac{M}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - Mgz$ (r, φ, z coord. cilíndricas)

b) $f_1 = r - R = 0 \qquad f_2 = z - k\varphi = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$$

usando $\frac{\partial f_1}{\partial r} = 1$; $\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = -k$; $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} Mr\dot{\varphi}^2 - M\ddot{r} + \lambda_1 = 0 & (1) \\ -\frac{d}{dt}\left(Mr^2\dot{\varphi}\right) - k\lambda_2 = 0 & (2) \\ -Mg - M\ddot{z} + \lambda_2 = 0 & (3) \\ r - R = 0 \\ z - k\varphi = 0 \end{cases}$$

Como $\dot{r} = \ddot{r} = 0 \rightarrow \lambda_1 = Q_r = -MR\dot{\varphi}^2$, (2) e (3) resultam:

$-k\lambda_2 = Q_\varphi = MR^2\ddot{\varphi}$

$\lambda_2 = Mg + M\ddot{z} = Q_z \rightarrow$ substituindo na eq. de cima

$\cancel{M}R^2\ddot{\varphi} = -k\cancel{M}(g + \ddot{z})$ porém $\dot{z} = k\dot{\varphi}$ e $\ddot{z} = k\ddot{\varphi} \rightarrow$

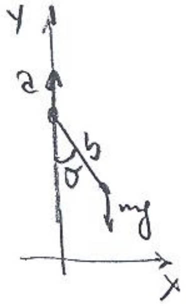
$\ddot{\varphi}(R^2 + k^2) = -gk \rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{-kg}{R^2 + k^2} \rightarrow \ddot{z} = -\frac{k^2 g}{R^2 + k^2}$

3) (3,5 pontos) Considere um pêndulo simples (sob a ação da gravidade) composto por uma massa puntual **M**, na extremidade de um haste rígido, de massa desprezível e comprimento **b**, com o ponto de suspensão se movendo verticalmente com aceleração constante **a** para cima.

a) Calcule a função Lagrangiana correspondente.

b) Obtenha a correspondente equação de Lagrange e calcule a frequência de pequenas oscilações do pêndulo.

c) Calcule a Hamiltoniana do pêndulo (em termos de coordenada e momento generalizados) e determine se é conservada.



$$\begin{cases} x = b\,\text{sen}\,\theta \\ y = \frac{at^2}{2} - b\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot x = b\cos\theta\,\dot\theta \\ \dot y = at + b\,\text{sen}\,\theta\,\dot\theta \end{cases}$$

a) $L = \frac{M}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) - Mgy = \frac{M}{2}\left(b^2\dot\theta^2 + a^2t^2 + 2abt\,\text{sen}\,\theta\,\dot\theta\right) - Mg\left(\frac{at^2}{2} - b\cos\theta\right)$

b) $\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = 0 = Mabt\cos\theta\,\dot\theta - Mgb\,\text{sen}\,\theta - \frac{d}{dt}M\left(b^2\dot\theta + abt\,\text{sen}\,\theta\right) =$

$= M\left[\cancel{abt\cos\theta\,\dot\theta} - gb\,\text{sen}\,\theta - b^2\ddot\theta - ab\,\text{sen}\,\theta - \cancel{abt\cos\theta\,\dot\theta}\right] = 0 \to$

$$\boxed{\ddot\theta = -\frac{g}{b}\text{sen}\,\theta - \frac{a}{b}\text{sen}\,\theta = -\frac{(g+a)}{b}\text{sen}\,\theta}$$

freq. de peq. oscilações $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g+a}{b}}}$

c) $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = Mb^2\dot\theta + Mabt\,\text{sen}\,\theta \to \dot\theta = \frac{p_\theta}{Mb^2} - \frac{at}{b}\text{sen}\,\theta$

$H = p_\theta\dot\theta - L = Mb^2\dot\theta^2 + \cancel{Mabt\,\text{sen}\,\theta\,\dot\theta} - \frac{M}{2}\left[b^2\dot\theta^2 + a^2t^2 + \cancel{2abt\,\text{sen}\,\theta\,\dot\theta}\right] + Mg\left(\frac{at^2}{2} - b\cos\theta\right)$

$= \frac{Mb^2\dot\theta^2}{2} + Mg\left(\frac{at^2}{2} - b\cos\theta\right)$ usando agora $\dot\theta = \frac{p_\theta}{Mb^2} - \frac{at\,\text{sen}}{b}$

$H = \frac{Mb^2}{2}\left[\frac{p_\theta^2}{M^2b^4} + \frac{a^2t^2\,\text{sen}^2\theta}{b^2} - \frac{2p_\theta at\,\text{sen}\,\theta}{b}\right] + Mg\left(\frac{at^2}{2} - b\cos\theta\right)$

$H = \frac{p_\theta^2}{2Mb^2} + \frac{Ma^2t^2\,\text{sen}^2\theta}{2} - Mp_\theta abt\,\text{sen}\,\theta + Mg\frac{at^2}{2} - Mgb\cos\theta$

$= H(\theta, p_\theta, t) \to$ como $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$ H não será conservada