EA513 — 1º Semestre de 2008 — Prof. Christiano Lyra Filho

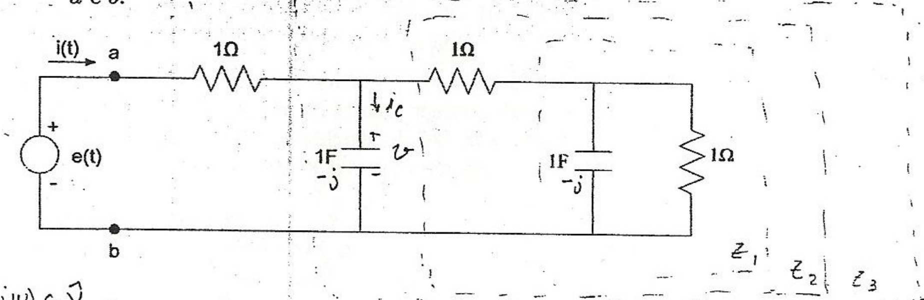
Terceira Prova — 18 de junho de 2008

1. Considere o circuito representado a seguir.

   (a) Conhecento $e(t) = 10\cos t$, encontre a solução particular $i_p(t)$ para a corrente $i(t)$ pelo método das amplitudes complexas (isto é, usando fasores); apresente também o fasor $\hat{I}$. 1,5

   (b) Determine o *valor máximo*, o *valor médio* e o *valor eficaz* da função $e(t)$. 0,5

   (c) Determine a impedância do circuito à direita dos terminais marcados a e b. 1,0



a) $\hat{I}_c = (j\omega)C\hat{V}$

$\omega = 1,\ C = 1 \Rightarrow \hat{I}_c = j\hat{V} \therefore j\hat{I}_c = -\hat{V} \therefore \hat{V} = -j\hat{I}_c$

$$Z_1 = \frac{(-j)(1)}{1-j} = \frac{-j(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{-j+1}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$$

$$Z_2 = 1 + Z_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j$$

$$Z_3 = \frac{(-j)Z_2}{-j+Z_2} = \frac{-j\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}j\right)}{-j+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}j} = \frac{-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}j} = \frac{(-1-3j)(3+3j)}{(3-3j)(3+3j)} = \frac{-3-3j-9j+9}{9+9}$$

$$Z_3 = \frac{6-12j}{18} = \frac{1-2j}{3}$$

$$Z_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}j$$

$$Z = 1 + Z_3 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}j = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}j$$

c) $\boxed{Z = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}j\ \Omega \quad Z = 1,49\ \angle -26,7\ \Omega}$

$\hat{E} = 10\ \angle 0^\circ$

$\hat{I} = \frac{\hat{E}}{Z} = 10\ \angle 0-(-26,7) \therefore \hat{I} = 6,7\ \angle 26,7^\circ$

$i(t) = 6,7\cos(t + 26,7^\circ)$ A.

Obs: $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1,49}\angle 26,7^\circ = 0,67\ \angle 26,7^\circ$

$Y = 0,6 + j0,3$

b) $E_M = \text{Max } e(t) = 10$ V

$\bar{E} = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\,dt = 0$

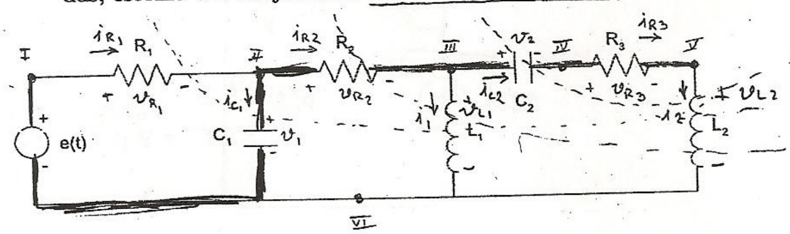
$E_{ef} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,1$ V

2. Considere o circuito representado abaixo.

(a) Encontre uma *árvore própria para o circuito*. Usando a *árvore própria* escolhida para o circuito, encontre as *equações de estado* que representam a dinâmica do circuito. Apresente as equações de estado na *forma canônica* e explicite as *variáveis de estado*. 2 — 1,0 ; 0,5 forma canon.

(b) Utilizando a árvore própria escolhida, escreva o maior número possível de equações independentes de correntes em termos dos cortes fundamentais (primeira Lei de Kirchhoff); considerando as equações apresentadas, escolha um conjunto de *correntes independentes*. 1 (0,6 + 0,4)

(c) Utilizando a árvore própria escolhida, escreva o maior número possível de equações independentes de tensões em termos dos *laços fundamentais* (segunda Lei de Kirchhoff); considerando as equações apresentadas, escolha um conjunto de correntes independentes. ← tensões independentes 1 (0,6 + 0,4)



(a)

$$c1: \; -i_{R1} + i_{c1} + i_1 + i_2 = 0 \;\therefore\; -\frac{(e(t) - v_1)}{R_1} + C_1\frac{dv_1}{dt} + i_1 + i_2 = 0$$

$$C_1\frac{dv_1}{dt} = -i_1 - i_2 - \frac{v_1}{R_1} + \frac{e(t)}{R_1}$$

$$c2: \; -i_{c2} + i_2 = 0 \;\therefore\; -C_2\frac{dv_2}{dt} + i_2 = 0 \;\therefore\; C_2\frac{dv_2}{dt} = i_2$$

$$L1: \; v_{L1} - v_1 + v_{R2} \;\therefore\; L_1\frac{di_1}{dt} = v_1 - v_{R2} \qquad L_1\frac{di_1}{dt} = v_1 - R_2(i_1 + i_2)$$

$$-i_{R2} + i_1 + i_2 = 0$$

$$i2: \; +v_{L2} - v_1 + v_{R2} + v_2 + v_{R3}$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} = v_1 - v_2 - R_2(i_1 + i_2) - R_3 i_2$$

na forma canônica,

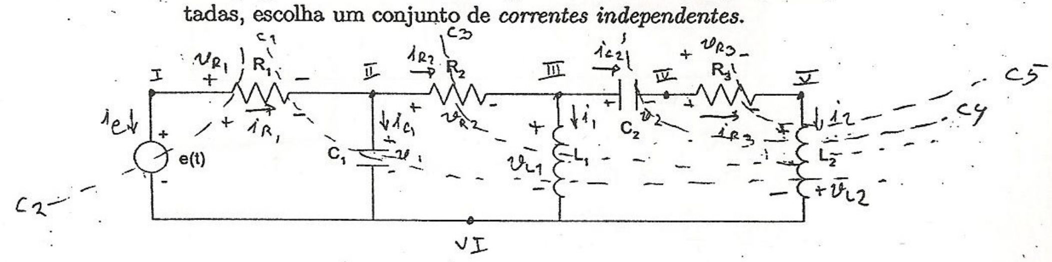
$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} = -\dfrac{R_2}{L_1}i_1 - \dfrac{R_2}{L_1}i_2 + \dfrac{1}{L_1}v_1 \\ \dfrac{di_2}{dt} = -\dfrac{R_2}{L_2}i_1 - \dfrac{(R_2+R_3)}{L_2}i_2 + \dfrac{1}{L_2}v_1 - \dfrac{1}{L_2}v_2 \\ \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{1}{C_1}i_1 - \dfrac{1}{C_1}i_2 - \dfrac{1}{R_1C_1}v_1 + \dfrac{1}{R_1C_1}e(t) \\ \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{1}{C_2}i_2 \end{cases}$$

2. Considere o circuito representado abaixo.

(a) Encontre uma *árvore própria para o circuito.* Usando a *árvore própria* escolhida para o circuito, encontre as *equações de estado* que representam a dinâmica do circuito. Apresente as equações de estado na *forma canônica* e explicite as *variáveis de estado.*

(b) Utilizando a árvore própria escolhida, escreva o maior número possível de equações independentes de correntes em termos dos cortes fundamentais (primeira Lei de Kirchhoff); considerando as equações apresentadas, escolha um conjunto de *correntes independentes.* 1 (0,6+0,4)

(c) Utilizando a árvore própria escolhida, escreva o maior número possível de equações independentes de tensões em termos dos *laços fundamentais* (segunda Lei de Kirchhoff); considerando as equações apresentadas, escolha um conjunto de *correntes independentes.* 1 (0,6+0,4)



(b)

c1: $-i_{R_1}+i_{C_1}+i_1+i_2=0$

c2: $+i_e+i_{R_1}=0$

c3: $-i_{R2}+i_1+i_2=0$

c4: $-i_{C2}+i_2=0$

c5 = $-i_{R3}+i_2=0$

as correntes independentes podem ser as correntes na co-árvore: i_{R_1}, i_1 e i_2 (3 correntes)

(c)

1) $+v_{R_1}+v_1-e(t)=0$

2) $+v_{L_1}-v_1+v_{R2}=0$

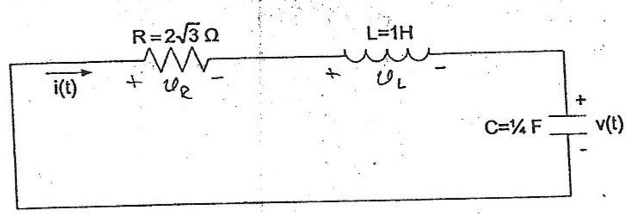
3) $+v_{L2}-v_1+v_{R2}+v_2+v_{R3}=0$

as tensões independentes podem ser as tensões na árvore: $+e(t)$, v_1, v_{R2}, v_2, v_{R3} (5 tensões)

3. Considere o circuito de segunda ordem autônomo representado abaixo, onde a corrente inicial no indutor é nula ($i(0) = 0$) e a tensão inicial no capacitor é 10 Volts ($v(0) = 10$ V)

(a) A partir das leis de Kirchhoff e das características dos bipolos, deduza a equação diferencial que caracteriza o comportamento dinâmico da tensão no capacitor, $v(t)$. 1 pto

(b) Encontre a tensão no capacitor ($v(t)$, $t \geq 0$) para $R = 2\sqrt{3}$ ohms. 2 pts / 1 val. / 1 val.



$$v_R + v_L + v(t) = 0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + v = 0 \qquad i = C\frac{dv}{dt} \therefore \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}i \therefore \left.\frac{dv}{dt}\right|_0 = 0$$

$$RC\frac{dv}{dt} + LC\frac{d^2v}{dt^2} + v = 0$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + (\omega_0)^2 v = 0$$

$$\frac{R}{L} = 2\alpha \;\therefore\; \alpha = \frac{R}{2L} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\alpha = \sqrt{3}}$$

$$(\omega_0)^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{4}} = 4 \therefore \boxed{\omega_0 = 2}$$

$\alpha < \omega_0 \Rightarrow$ AMORTECIMENTO FRACO

$$\omega_d = \sqrt{(\omega_0)^2 - \alpha^2} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$$

$$v(t) = (A\cos\omega_d t + B\,\text{sen}\,\omega_d t)\exp(-\alpha t)$$

$$v(t) = (A\cos t + B\,\text{sen}\,t)\exp(-1{,}7t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = (-A\,\text{sen}\,t + B\cos t)\exp(-1{,}7t) + (-1{,}7)(A\cos t + B\,\text{sen}\,t)\exp(-1{,}7t)$$

$$v(0) = A = 10\text{V}$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_0 = B - 1{,}7A = 0 \therefore B \cong 1{,}7A \cong 17$$

$$\boxed{v(t) = (10\cos t + 17\,\text{sen}\,t)\exp(-1{,}7t)\ \text{Volts}}$$

ou $v(t) = 20\, e^{-\sqrt{3}t}\cos(t - \underbrace{\pi/3}_{60^\circ})$

$\sqrt{A_c^2 + A_s^2}$

θ

$\text{tg}\,\theta = -\frac{A_s}{A_c}$

Boa prova!