PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

2º Semestre de 2009 | MS629A

Profa.: Sandra Augusta Santos | sala IM111

Nome: ____________________ **RA:** ____________

Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Total	

SEGUNDA PROVA
09/12/2009

Seja cuidadoso no encaminhamento do seu raciocínio.
A clareza da sua argumentação também será avaliada.

---

1. (3.0 pontos) Considere o problema ($\star$): min $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2z^2)$ sujeito a $x + y - z = 2$. Seja $\boldsymbol{x_0} = (1, 1, 0)^T$. Resolva o problema aplicando o método de Newton ao problema reduzido e verificando que $\boldsymbol{x_1}$ satisfaz as condições de otimalidade de primeira e segunda ordens para ($\star$).

---

2. (2.0 pontos) Considere o problema (P):

$$\text{minimizar } f(x) \text{ sujeita a } Ax \le b,$$

onde $A \in I\!R^{m \times n}$, $m < n$, $b \in I\!R^m$ e o sistema não linear (S):

$$\begin{array}{l} \nabla f(x) + A^T \mu = 0 \\ \mu_j (a_j^T x - b_j) = 0, j = 1, \ldots, m \end{array}$$

onde $A^T = [a_1 \cdots a_m]$. Qual é a relação entre as soluções de (P) e (S)? Justifique.

---

3. (3.0 pontos) Considere o problema

$$\text{minimizar } f(x) \text{ sujeita a } u(x) \le 0, v(x) \le 0,$$

onde $f, u, v : I\!R^2 \to I\!R$, $f, u, v \in C^2$, e suponha que $\tilde{x}$ é uma solução regular. Para cada caso abaixo, explicite funções f, u e v e defina problemas em que:

(a) $u(\tilde{x}) = 0$ e $v(\tilde{x}) < 0$;

(b) $u(\tilde{x}) = v(\tilde{x}) = 0$ e os dois multiplicadores são diferentes de zero;

(c) $u(\tilde{x}) = v(\tilde{x}) = 0$ e um dos multiplicadores é zero.

Justifique as suas escolhas

---

4. (2.0 pontos) Considere o problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} & x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 0 \\ & (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \end{array}$$

onde $\mathcal{X}$ é o conjunto formado pelas combinações convexas dos pontos $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(0, -1)$. (a) Encontre a solução ótima graficamente. (b) Verifique se as condições KKT são satisfeitas na solução obtida em (a).

Segunda Prova - MS629

9/12/09

1)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}(x^2+y^2+2z^2) \\ \text{s.a} & x+y-z=2 \end{array}} \quad (\star) \qquad x_0 = (1 \;\; 1 \;\; 0)^T$$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+2z^2) \; ; \; \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} \; ; \; \nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = (1 \;\; 1 \;\; -1)$$

Z tal que $Im(Z) = Nu(A) \Rightarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Z^T \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Z^T \nabla^2 f(x_0) Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Newton:} \\ \boxed{Z^T \nabla^2 f(x_0) Z d_N = -Z^T \nabla f(x_0)} \end{array}} \; ; \; \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{d_1 = d_2 = -\frac{1}{5}}$$

$$x_1 = x_0 + Z d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 4/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} \Rightarrow Z^T \nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z^T \nabla^2 f(x_1) Z^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} > 0$$

logo x_1 satisfaz as CS2 para $(\star)$ sendo portanto um minimizador local deste problema.

Observações

1] (I) Outra base para Nu(A) gera outro desenvolvimento, mas x_1 será o mesmo:

Por ex, para $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$Z^T \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z^T \nabla^2 f(x_0) Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Newton: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} d_1 = -1/5 \\ d_2 = -2/5 \end{matrix}}$

$$x_1 = x_0 + Z d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} Z^T \nabla f(x_1) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 \\ 4/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Z^T \nabla^2 f(x_1) Z^T &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} x_1 \\ \text{cumpre} \\ \text{CS2} \\ \text{para } (\star). \end{matrix}$$

(II) Substituindo a restrição na f. objetivo por ex fazendo $x = 2 - y + z$ teríamos

$$\phi(y,z) = f(2-y+z, y, z) = \frac{1}{2}(4 - 4y + 4z - 2yz + 2y^2 + 3z^2)$$

$$\nabla \phi(y,z) = \begin{pmatrix} -2 - z + 2y \\ 2 - y + 3z \end{pmatrix} \quad \nabla^2 \phi(y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

do ponto x_0 dado, $\nabla \phi(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e o mesmo sistema de Newton acima seria obtido, portanto

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

e então $x_1 = 2 - y_1 + z_1 = 2 - \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$.

2)

(P) $\boxed{\begin{array}{l}\min f(x)\\ \text{s.a } Ax \leq b\end{array}}$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m<n$, $b\in\mathbb{R}^m$

As condições necessárias de 1ª ordem para (P) são as seguintes: se $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é minimizador local de (P) então existe $\mu \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\boxed{\begin{array}{ll}\nabla f(\bar{x}) + A^T\mu = 0 & (1)\\ \mu_j\,(a_j^T\bar{x} - b_j) = 0,\ j=1\dots m & (2)\\ A\bar{x} \leq b,\ \mu \geq 0 & (3)\end{array}}$$

Como as relações (1) e (2) formam o sistema não linear (S) dado, vemos que as soluções de (S) são condições necessárias para as soluções de (P):

soluções de (P) $\Longrightarrow$ soluções de (S).

No entanto, não vale a recíproca pois $(\bar{x}, \mu)$ solução de (S) não cumpre necessariamente $\mu \geq 0$ nem $A\bar{x} \leq b$.

As soluções de (S) <u>com</u> $\underline{\mu \geq 0}$ e $\underline{A\bar{x} \leq b}$ serão pontos estacionários de 1ª ordem para (P).

3]

$$\boxed{\begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{s.a } u(x) \leq 0 \\ \quad\; v(x) \leq 0 \end{array}}$$

$f, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f, u, v \in C^2$

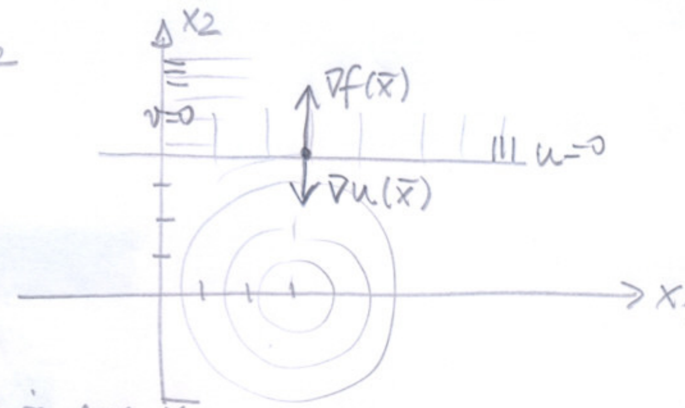
$\bar{x}$ solução regular

a) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2$

$u(x_1, x_2) = 4 - x_2 \leq 0$

$v(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$



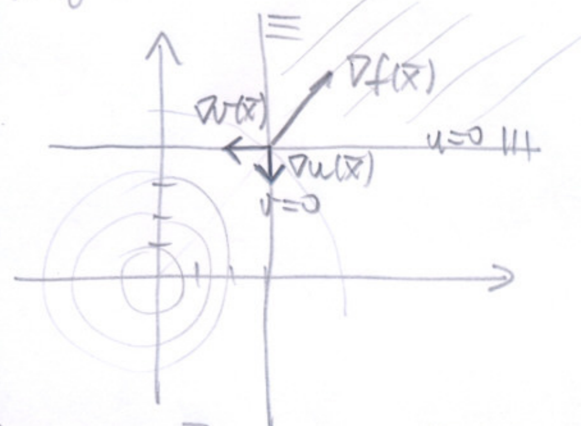
a primeira restrição é ativa em $\bar{x}$
e a 2ª é satisfeita com folga

b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$u(x_1, x_2) = 4 - x_2 \leq 0$

$v(x_1, x_2) = 3 - x_1 \leq 0$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$



as duas restrições são ativas em $\bar{x}$ e são importantes para caracterizar este minimizador

c) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$u(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 + 4)^2 - 4 \leq 0$

$v(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 2 \leq 0$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

as duas restrições são ativas em $\bar{x}$
mas apenas a 1ª basta para
caracterizar o minimizador. A 2ª
é redundante neste ponto, portanto
seu multiplicador é zero.

4| $\min \; x_1 - x_2$

$\text{sa} \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 0$

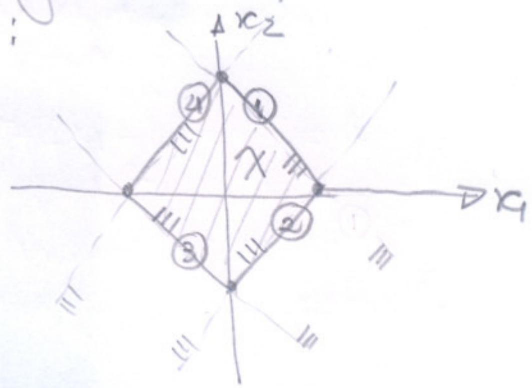
$(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ 0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \leq 1 \end{array} \right\}$$

= região plana delimitada pelo quadrado de vértices nos pontos dados.

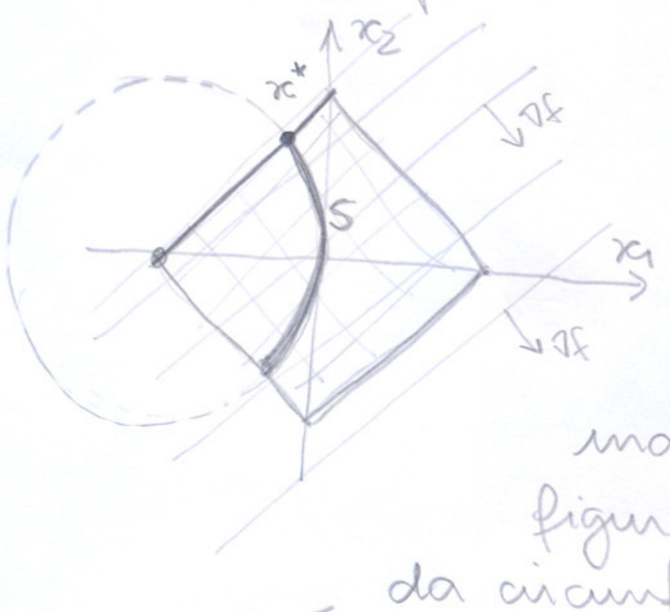
Alternativamente, o conjunto $\mathcal{X}$ pode ser descrito por quatro desigualdades:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 & (1) \\ x_1 - x_2 \leq 1 & (2) \\ -x_1 - x_2 \leq 1 & (3) \\ -x_1 + x_2 \leq 1 & (4) \end{cases}$$



A restrição de igualdade $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 0$ corresponde a uma circunferência centrada em $(-1, 0)$ e raio 1.

A região viável S do problema é, portanto, o arco da circunferência contido em $\mathcal{X}$:

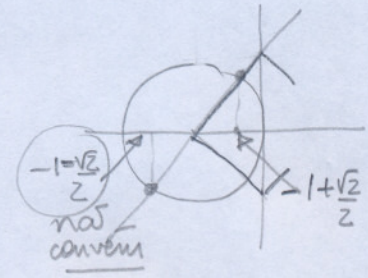


Como a função objetivo f é linear, $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ é constante e suas curvas de nível são retas.

O minimizador x^* está indicado graficamente na figura e corresponde à interseção da circunferência com a restrição (4), a única restrição de desigualdade do problema ativa na solução:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 0 & (\text{I}) \\ -x_1 + x_2 = 1 & (\text{II}) \end{cases} \longrightarrow x_2 = 1 + x_1$$

4] cont.



subst $x_2 = 1 + x_1$ em (I) vem:

$x_1^2 + 2x_1 + (1+x_1)^2 = 0 \Rightarrow 2x_1^2 + 4x_1 + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-4 \pm \sqrt{8}}{4} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

logo $x^* = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

KKT: $\boxed{\begin{array}{c} \nabla f(x^*) + \lambda \nabla h(x^*) + \mu \nabla g(x^*) = 0 \\ \mu \geq 0 \end{array}}$

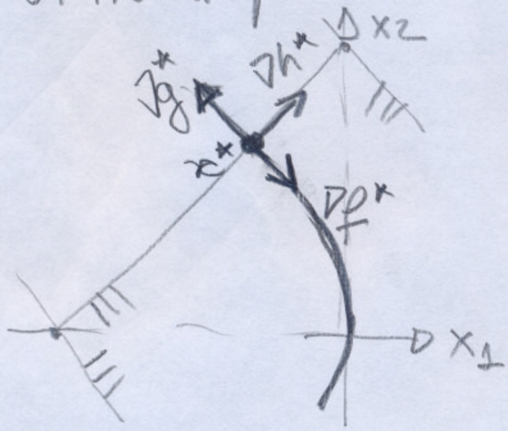
onde $h(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 0$

$g(x) = -x_1 + x_2 - 1 \leq 0$

$\nabla h(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$; $\nabla g(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*) \\ \mu \geq 0 \end{array} \right.$

os multiplicadores são $\boxed{\lambda = 0}$ e $\boxed{\mu = 1}$ e a condição KKT se cumpre em x^*, ponto regular de S.



A combinação linear (*) está ilustrada ao lado: a restrição de igualdade não é essencial para a representação do gradiente da f. obj. em termos dos gradi. das rest. ativas, portanto seu multiplicador é nulo.