Gabarito da Prova 1 de MA311 - Cálculo III - Turmas WXY - **09/09/2011**

Erro de conta -(0,2)

1.ª Questão. (2 pontos) Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} = y + xe^{y/x}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(0,5)(a) Mostre que a equação é homogênea e diga qual a mudança que torna a equação separável.

(1,5)(b) Resolva o problema de valor inicial.

Resolução: (a) Dividindo por x, obtemos a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x}.$$

Como o lado direito da equação acima depende somente do quociente y/x, isso mostra que a equação é homogênea (0,3). Neste caso, a mudança de variável é dada por $v = y/x$ (0,2).

(b)Fazendo a mudança de variável $v = y/x$ a equação acima se transforma na equação separável

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + e^v \quad \text{ou} \quad e^{-v}dv = \frac{dx}{x}.(0,6)$$

Integrando

$$-e^{-v} = \ln|x| + C,$$

e voltando á variável original

$$-e^{-y/x} = \ln|x| + C \quad \text{ou} \quad y = -x\ln(\ln|x|^{-1} - C).(0,6)$$

Como $y = 1$ quando $x = 1$ temos $1 = -\ln(-C)$ ou $C = -e^{-1}$. Logo a solução do problema de valor inicial é

$$y = -x\ln(\ln|x|^{-1} + e^{-1}).(0,3)$$

2.ª Questão. (2 pontos) Encontre um fator integrante e resolva a equação:

$$(\frac{4x^3}{y^2} + \frac{3}{y}) + (\frac{3x}{y^2} + 4y)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad y > 0.$$

Resolução: Sendo $M(x,y) = \frac{4x^3}{y^2} + \frac{3}{y}$ e $N(x,y) = \frac{3x}{y^2} + 4y$, temos

$$M_y = -\frac{8x^3}{y^3} - \frac{3}{y^2} \quad \text{e} \quad N_x = \frac{3}{y^2}.$$

Procuramos um fator integrante:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-\frac{8x^3}{y^3} - \frac{6}{y^2}}{\frac{3x}{y^2} + 4y} = \frac{\frac{-8x^3-6y}{y^3}}{\frac{3x+4y^3}{y^2}} = -\frac{2}{y}\frac{4x^3+3y}{3x+4y^3}$$

como depende de x e de y, não tem fator integrante dependendo de x. Agora,

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{\frac{8x^3}{y^3} + \frac{6}{y^2}}{\frac{4x^3}{y^2} + \frac{3}{y}} = \frac{\frac{8x^3+6y}{y^3}}{\frac{4x^3+3y}{y^2}} = \frac{2}{y}\frac{4x^3+3y^2}{4x^3+3y^2} = \frac{2}{y}$$

portanto tem um fator integrante dependendo de y dado pela solução da equação

$$\mu' = \frac{2}{y}\mu.$$

Notemos que a equação é separável:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2dy}{y}, \text{ integrando obtemos } \ln(\mu) = 2\ln y = \ln(y^2), \text{ assim } \mu(y) = y^2.(1,0)$$

Multiplicando a equação pelo fator integrante obtemos uma equação exata:

$$(4x^3 + 3y) + (3x + 4y^3)\frac{dy}{dx} = 0$$

Logo sabemos que existe $\psi(x, y)$ tal que $\psi_x = 4x^3+3y$ e $\psi_y = 3x+4y^3$. Integrando $M(x, y)$ em relação a x e mantendo y constante, obtemos

$$\psi(x, y) = \int 4x^3 + 3y dx = x^4 + 3yx + h(y).(0,4)$$

Assim,

$$\psi_y = 3x + h'(y) = 3x + 4y^3.$$

Então

$$h'(y) = 4y^3 \quad \text{e integrando} \quad h(y) = y^4.$$

Deste modo, a solução geral é dada implicitamente por

$$\psi(x, y) = x^4 + 3yx + y^4 = C.(0,6)$$

Esquecer a constante C: -(0,2)

3.ª Questão.(2 pontos) Considere a equação diferencial

$$y^{(4)} + y'' = 4x + 10 \operatorname{sen} x + xe^{2x}.$$

(a) Encontre a solução geral da equação homogênea.

(b) Usando o **método de coeficientes indeterminados** dê a forma da solução particular SEM CALCULAR os coeficientes.

Resolução: (a) A equação homogênea associada é $y^{(4)} + y'' = 0$.

A equação característica é: $r^4 + r^2 = r^2(r^2 + 1) = 0$. As raízes são: $r = \pm i$ simples e $r = 0$ dupla (0,5)

Logo, a solução geral da equação homogênea é dada por:

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x.(0,5)$$

(b) Pelo método dos coeficientes indeterminados, procuramos uma solução particular na forma

$$y_p = x^2(Ax + B) + x(C\cos x + D\operatorname{sen} x) + (Ex + F)e^{2x},$$

onde A, B, C, D, E e F são os coeficientes a determinar. (0,4) + (0,3) + (0,3) =(1,0)

4.ª Questão.(2 pontos) Verifique que $y_1 = e^x$ é uma solução da equação

$$xy'' - (x + 1)y' + y = 0, \quad x > 0.$$

Aplique o **método de redução de ordem** para encontrar uma outra solução $y_2(x) = v(x)y_1(x)$.

Resolução: Derivamos $y_1' = y_1'' = e^x$. Substituindo na equação, temos

$$xe^x - (x + 1)e^x + e^x = 0,$$

logo y_1 é uma solução. (0,2)

Pelo método de redução de ordem procuramos uma solução $y_2 = v(x)y_1 = v(x)e^x$, onde $v(x)$ é uma função a ser determinada. Derivamos

$$y_2' = v'e^x + ve^x, \quad y_2'' = v''e^x + 2v'e^x + ve^x.$$

Substituindo na equação obtemos

$$x(v''e^x + 2v'e^x + ve^x) - (x+1)(v'e^x + ve^x) + ve^x = e^x[x(v'' + 2v' + v) - (x+1)(v' + v) + v] = 0$$

$$\Leftrightarrow xv'' + (x-1)v' = 0 \Leftrightarrow v'' + \frac{(x-1)}{x}v' = 0$$

uma equação de primeira ordem linear para $u = v'$. (0,7)

Fator integrante: $\mu = \exp(\int 1 - \frac{1}{x}dx) = \exp(x - \ln x) = \frac{e^x}{x}$. Logo

$$(\frac{e^x}{x}u)' = 0 \Rightarrow \frac{e^x}{x}u = c_1(\text{ tomando } c_1 = 1) \Rightarrow u = v' = xe^{-x}$$

$$\Rightarrow v = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1) + c_2.(0,8)$$

Tomando $c_2 = 0$ obtemos uma segunda solução: $y_2 = -e^{-x}(x+1)e^x = -(x+1)$. (0,3)

5.ª Questão.(2 pontos)

(0,8)(a) Resolva a equação de Euler: $2x^2y'' + 5xy' + y = 0,\ x > 0$.

(1,2)(b) Use o método de **variação dos parâmetros** para resolver a equação

$$2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x.$$

Resolução: (a) Procuramos soluções da forma $y = x^r$. Derivando e substituindo na equação, temos

$$2x^2r(r-1)x^{r-2} + 5xrx^{r-1} + x^r = x^r(2r(r-1) + 5r + 1) = 0.$$

Logo,r deve ser raiz da equação

$$2r^2 + 3r + 1 = 0 \Rightarrow r = -1 \text{ e } r = -\frac{1}{2}.(0,4)$$

A solução geral é $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-1/2}$. (0,4)

(b) Colocamos a equação na forma padrão

$$y'' + \frac{5}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = g(x).(0,2)$$

Pelo método de variação dos parâmetros procuramos uma solução particular na forma

$$y = u(x)y_1 + v(x)y_2 = u(x)x^{-1} + v(x)x^{-1/2},$$

onde u' e v' satisfazem o sistema

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 &= 0, \\ u'y_1' + v'y_2' &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}, \end{cases}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-1/2} \\ -x^{-2} & -\frac{1}{2}x^{-3/2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}x^{-5/2} + x^{-5/2} = \frac{1}{2}x^{-5/2}$$

$$u' = 2x^{5/2}\begin{vmatrix} 0 & x^{-1/2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2}x^{-3/2} \end{vmatrix} = -x^{5/2}(x^{-1/2} - x^{-3/2}) = x - x^2 \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$v' = 2x^{5/2}\begin{vmatrix} x^{-1} & 0 \\ -x^{-2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} \end{vmatrix} = x^{5/2}(x^{-1} - x^{-2}) = (x^{3/2} - x^{1/2}) \Rightarrow v = \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{2x^{3/2}}{3}$$

Portanto uma solução particular é:

$$y = u(x)x^{-1} + v(x)x^{-1/2} = (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})x^{-1} + (\frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{2x^{3/2}}{3})x^{-1/2} = \frac{x^2}{15} - \frac{x}{6}.(0,8)$$

e a solução geral

$$y = y_c + y_p = c_1x^{-1} + c_2x^{-1/2} + \frac{x^2}{15} - \frac{x}{6}.(0,2)$$