$2^{\underline{a}}$ Prova

MA-311 - Vespertino — Cálculo III

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2011

Nome: GABARITO

RA:

Assinatura:

Prof.:

Esta prova tem um total de 5 questões valendo 10 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA!

1	2.0	
2	2.0	
3	1.5	
4	2.0	
5	2.5	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*2.0 pontos*) Resolva por transformada de Laplace o seguinte PVI:

$$y'' + 2y' + 2y = 2\delta(t - \pi)$$

   onde $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

2. (*2.0 pontos*) Calcule a inversa da transformada de Laplace de:

$$\frac{1}{s^2(s^2 + s + 1)}$$

3. (*1.5 pontos*)

   Encontre a solução geral (real) do sistema linear homogêneo de e.d.o.'s usando o método de autovalores e autovetores:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

4. (*2.0 pontos*) Encontre a solução geral (real) do sistema linear não-homogêneo utilizando o método de variação de parâmetros (indicando claramente a matriz fundamental).Note que o sistema homogêneo associado está descrito na questão 3.

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 4e^{-t} \end{pmatrix}$$

5. (*2.5 pontos*)

   (a) (0.5) Estude a convergência da sequência quando $n \to \infty$. Se convergir calcule o limite e se divergir justifique:

$$\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 1}.$$

   (b) (1.0) Calcule a soma da série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5^{-(k+1)} \ln \frac{k^5}{k+1}.$$

   (c) (1.0) Verifique se a série converge condicionalmente, absolutamente ou diverge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(1.3.5 \ldots (2k+1))}.$$

1) $y'' + 2y' + 2y = 2\delta(t-\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$

$$\mathcal{L}\{y''+2y'+2y\}(x) = x^2\mathcal{L}\{y(t)\}(x) - x\,y(0) - y'(0)$$

$$+ 2\left(x\mathcal{L}\{y(t)\}(x) - y(0)\right) + 2\mathcal{L}\{y(t)\}(x)$$

$Y = \mathcal{L}\{y(t)\}(x)$

$$= Y(x^2+2x+2) - 2$$

0,2

$$\mathcal{L}\{2\delta(t-\pi)\}(x) = 2e^{-\pi x}$$

0,2

$$Y(x^2+2x+2) - 2 = 2e^{-\pi x}$$

$$Y = \frac{1}{x^2+2x+2}\left(2+2e^{-\pi x}\right)$$

0,2

$$= \frac{1}{(x+1)^2+1}\left(2+2e^{-\pi x}\right)$$

0,3

$$= 2\mathcal{L}\{\sin t\}(x+1)\left(1+e^{-\pi x}\right)$$

$$= \mathcal{L}\{2e^{-t}\sin t\}(x) + e^{-\pi x}\mathcal{L}\{2e^{-t}\sin t\}(x)$$

0,4

$$= \mathcal{L}\{2e^{-t}\sin t\}(x) + \mathcal{L}\{\underbrace{2e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\,u_\pi(t)}_{-0,4 \text{ se esquecer deslocar}}\}(x)$$

0,5

$$y(t) = 2e^{-t}\sin t + 2e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\,u_\pi(t)$$ (RESPOSTA)

0,2

2) $$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+s+1)} \doteq \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+s+1}$$

0,2

$$1 = s^3(A+C) + s^2(A+B+D) + s(A+B) + B$$

$$\begin{cases} A+C=0 \Rightarrow \boxed{C=1} & \boxed{D} = -(A+B) = -0 = \boxed{0} \\ A+B+D=0 \\ A+B=0 \Rightarrow \boxed{A=-1} \\ \boxed{B=1} \end{cases}$$

0,4
$$F(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+s+1}$$

0,4
$$= \underbrace{-\mathcal{L}\{1\}(s) + \mathcal{L}\{t\}(s)}_{0,2} + \overbrace{\frac{s}{(s+1/2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}^{0,2}$$

0,4
$$= \mathcal{L}\{-1+t\}(s) + \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \mathcal{L}\{t-1\}(s) + \mathcal{L}\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\}(s+\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}\left\{\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\}(s+\tfrac{1}{2})$$

0,4
$$= \mathcal{L}\{t-1\}(s) + \mathcal{L}\left\{e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\left\{t-1+e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\}(s)$$

RESPOSTA: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = t-1+e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

0,2

3) $$x' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} x$$

AUTOVALORES: $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$$\boxed{\lambda = -1 \pm i}$$

AUTOVETORES DE $\lambda = -1+i$:

$$\begin{bmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow a(2-i) - b = 0$$

$$\Longrightarrow b = a(2-i)$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ (2-i)a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix} \qquad \boxed{v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix}}$$

0,5

SOLUÇÃO COMPLEXA:

$$ve^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix} e^{-t} (\cos t + i \,\mathrm{sen}\, t)$$

$$= \underbrace{e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}\, t \end{bmatrix}}_{x_1(t)} + i \underbrace{e^{-t} \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\, t \\ 2\,\mathrm{sen}\, t - \cos t \end{bmatrix}}_{x_2(t)}$$

0,5

SOLUÇÃO GERAL REAL:

$$x_H(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

0,5

4) MATRIZ FUNDAMENTAL:

$$\Phi(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t & 2\operatorname{sen} t - \cos t \end{bmatrix}$$

0,3

SOLUÇÃO PARTICULAR: $x_p(t) = \Phi(t)\, U(t)$, $U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$

$$\Phi(t)\cdot U'(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 4e^{-t} \end{bmatrix}$$

0,4

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t}\operatorname{sen} t \\ 4e^{-t} & e^{-t}(2\operatorname{sen} t - \cos t) \end{vmatrix}}{\det(\Phi(t))} = \frac{e^{-2t}(-2\operatorname{sen} t - \cos t)}{-e^{-2t}} = 2\operatorname{sen} t + \cos t$$

0,4

$$u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t} \\ e^{-t}(2\cos t + \operatorname{sen} t) & 4e^{-t} \end{vmatrix}}{-e^{-2t}} = -2\cos t + \operatorname{sen} t$$

0,3

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t - 2\cos t \\ -2\operatorname{sen} t - \cos t \end{bmatrix}$$

$$x_p(t) = \Phi(t)\, U(t)$$

0,3

$$x(t) = \underbrace{x_H(t)}_{\text{SOLUÇÃO DA QUESTÃO 3}} + x_p(t)$$

0,3

$\underline{\underline{5(a)}}$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}$.

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}\right) \frac{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{2}{\infty+\infty} = 0$$

0,5

$\underline{\underline{5(b)}}$: $a_n = 5^{-n-1} \ln\left(\frac{n^5}{n+1}\right) = \frac{\ln n}{5^n} - \frac{\ln(n+1)}{5^{n+1}}$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$= \left(\frac{\ln 1}{5} - \cancel{\frac{\ln 2}{5^2}}\right) + \left(\cancel{\frac{\ln 2}{5^2}} - \cancel{\frac{\ln 3}{5^3}}\right) + \left(\cancel{\frac{\ln 3}{5^3}} - \cancel{\frac{\ln 4}{5^4}}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\cancel{\frac{\ln(n-1)}{5^{n-1}}} - \cancel{\frac{\ln n}{5^n}}\right) + \left(\cancel{\frac{\ln n}{5^n}} - \frac{\ln(n+1)}{5^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{\ln 1}{5} - \frac{\ln(n+1)}{5^{n+1}} = -\frac{\ln(n+1)}{5^{n+1}}$$

0,5

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{5^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{x\ln 5}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(\ln 5)\,5^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

0,3

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{5^{n+1}} = 0 \quad \text{(soma da série)}$$

0,2

5(c): $a_n = \dfrac{(-1)^n\, n!}{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n+1)}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)(2n+3)} \quad \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{2n+3}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{n}}}{2+\underset{\searrow 0}{\frac{3}{n}}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

$L = \frac{1}{2} < 1 \implies$ a série dada converge absolutamente pelo "critério da razão"

1,0 ponto