INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP

Prova III – F 315 (Diurno) 01/07/2010

RA:________ Nome: Gabarito

1) _____
2) _____
3) _____
4) _____

(Escolha apenas 3 das quatro questões da prova. Mostre claramente qual questão não deve ser considerada na correção !)

Nota:______

Algumas equações úteis.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) + \sum_j \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0 \quad \text{p/} \quad g_j\{y_i;x\} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0;$$

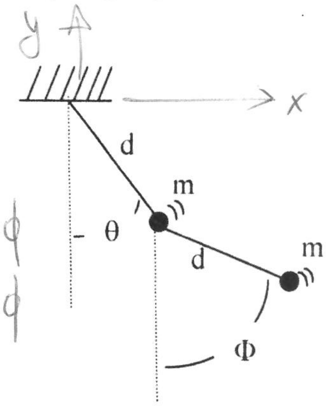
$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}; \; \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i};$$

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i};$$

P1.- Considere um *pêndulo duplo* consistindo de uma massa **m** suspenso por um fio de comprimento **d** inextensível e massa desprezível e uma outra massa **m** suspensa da massa **m** por um outro fio de comprimento **d** inextensível e massa desprezível. Suponha que a oscilação do pêndulo, devida à ação da gravidade **g,** é restrita a um plano vertical.

Encontre as equações de movimento do sistema usando o formalismo de ***Lagrange*** (não assuma pequenos ângulos).

$U = 0$



$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = d \,\text{sen}\,\theta \;;\; \dot{x}_1 = d\dot{\theta}\cos\theta \\ y_1 = -d\cos\theta \;;\; \dot{y}_1 = d\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_2 = x_1 + d\,\text{sen}\,\phi = \dot{x}_1 + d\dot{\phi}\cos\phi \\ y_2 = x_2 - d\,\text{sen}\,\phi = \dot{x}_2 + d\dot{\phi}\,\text{sen}\,\phi \end{array}$$

$$T = \frac{1}{2} m d^2 \left[2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\left(\cos\theta\cos\phi + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\right)\right.$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m d^2 \left[2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta-\phi)\right]} \quad 0.25$$

$$\boxed{U = -mgd\cos\theta - mg\left(d\cos\theta + d\cos\phi\right) = -mgd\left(2\cos\theta + \cos\phi\right)} \quad 0.25$$

$$L = T - U \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m d^2\left[2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta-\phi)\right] + mgd\left(2\cos\theta + \cos\phi\right)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \quad e \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0$$

$$\hookrightarrow -md^2\dot{\phi}\dot{\theta}\,\text{sen}(\theta-\phi) - 2mgd\,\text{sen}\,\theta - \frac{d}{dt}\left[md^2 2\dot{\theta} + md^2\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)\right] = 0$$

$$-md^2\dot{\phi}\dot{\theta}\,\text{sen}(\theta-\phi) - 2mgd\,\text{sen}\,\theta - 2md^2\ddot{\theta} - md^2\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) + md^2\dot{\phi}\,\text{sen}(\theta-\phi)\left[\dot{\theta} - \dot{\phi}\right]$$

$$\boxed{2d^2\ddot{\theta} + d^2\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) + d^2\dot{\phi}^2\,\text{sen}(\theta-\phi) + 2gd\,\text{sen}\,\theta = 0}$$

$$\boxed{2\ddot{\theta} + \ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) + \dot{\phi}^2\,\text{sen}(\theta-\phi) + \frac{2g}{d}\,\text{sen}\,\theta = 0} \quad 1.0$$

$$\cancel{+\,m d^2 \dot{\phi}\dot{\theta}\,\text{sen}(\theta-\phi)} - \cancel{m} g d\,\text{sen}\,\phi - \frac{d}{dt}\left(\cancel{m} d^2 \dot{\phi} + \cancel{m} d^2 \dot{\theta}\cos(\theta-\phi)\right) = 0$$

$$\cancel{d^2\dot{\phi}\dot{\theta}\,\text{sen}(\theta-\phi)} - g d\,\text{sen}\,\phi - d^2\ddot{\phi} - d^2\ddot{\theta}\cos(\theta-\phi) + d^2\dot{\theta}\,\text{sen}(\theta-\phi)\left[\dot{\theta}-\dot{\phi}\right]$$

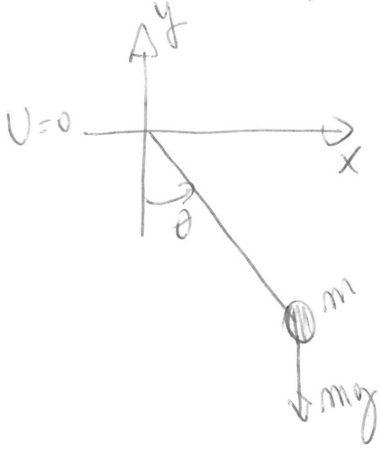
$$d^2\ddot{\phi} + d^2\ddot{\theta}\cos(\theta-\phi) - d^2\dot{\theta}^2\,\text{sen}(\theta-\phi) + g d\,\text{sen}\,\phi = 0$$

$$\boxed{\ddot{\phi} + \ddot{\theta}\cos(\theta-\phi) - \dot{\theta}^2\,\text{sen}(\theta-\phi) + \frac{g}{d}\,\text{sen}\,\phi = 0}$$

1,0

P2- Seja um pendulo simples de massa ***m*** e comprimento *l* inextensível que se move em um plano sob a ação da gravidade ***g***.

a) Escreva o Lagrangeano do problema em coordenadas polares.
b) Encontre o Hamiltoniano do problema em coordenadas polares.
c) Escreva as equação de movimento de Hamilton.
d) Discuta o Hamiltoniano em termos da conservação de energia.



$$T = \frac{1}{2} m\left(\cancel{\dot{l}^2}_{\,0} + l^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = -mgl\cos\theta \quad \therefore$$

a) $$\boxed{L = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta}$$ 1.0

b) $$H = p_\theta \dot{q}_\theta - L = p_\theta \dot{\theta} - L$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{ml^2} - \frac{1}{2} m l^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 l^4} - mgl\cos\theta \Rightarrow \boxed{H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta} \quad \text{I}$$ 1.0

c) $$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}} \quad \text{II}$$

$$\boxed{\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\,\text{sen}\,\theta} \quad \text{III}$$ 1.0

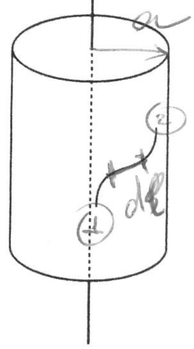
Note que substituindo II em III temos $ml^2\ddot{\theta} + mgl\,\text{sen}\,\theta = 0$

$$\therefore \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0}$$

d) I $\rightarrow H = T + U = E \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Leftarrow$ sistema conservativo!

0.5

P3.- Mostre que a geodésica sobre a superfície de um cilindro reto é o segmento de uma hélice.



$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta & \qquad dx &= -a\,\text{sen}\,\theta\, d\theta \\ y &= a\,\text{sen}\,\theta \quad \therefore & dy &= a\cos\theta\, d\theta \\ z &= z & dz &= dz \end{aligned}$$

$$d\ell = \sqrt{a^2 d\theta^2 + dz^2} \quad \therefore \quad L = \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{a^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{\sqrt{a^2 + z'^2}}_{f(z')}\, d\theta \qquad \text{onde} \qquad z' = \frac{dz}{d\theta}$$

Aplicando a Eq. de Euler na primeira forma:

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial z}}}_{0} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial f}{\partial z'} = C = \text{cte}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{a^2 + z'^2}} = C \Rightarrow \begin{cases} z'^2 = C^2(a^2 + z'^2) \\ \therefore (1 - C^2) z'^2 = C^2 a^2 \\ \therefore z' = \sqrt{\dfrac{C^2}{(1 - C^2)} a^2} = \text{cte} = \alpha \end{cases}$$

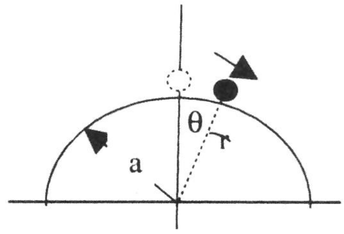
$$\frac{dz}{d\theta} = \alpha = \text{cte}$$

$$\therefore \boxed{z = \alpha\theta + b}$$

z cresce como função de θ a uma taxa constante e esta é uma reta! Esta é a definição de uma <u>hélice</u>.

P4.- Considere uma partícula de massa **m** que parte do repouso no topo de um hemisfério de raio **a**.

a) Encontre as equações de movimento usando o formalismo de Lagrange.
b) Encontre a força de vinculo e o ângulo θ_0 onde a partícula abandona o hemisfério



$U=0$

a) $\begin{cases} T = \dfrac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2\right) \\ U = mgr\cos\theta \\ g(r,\theta) = r - a = 0 \end{cases}$ (condição p/ ficar sempre na superfície da esfera).

$T = \dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$; $U = mgr\cos\theta$

$L = T - U \Rightarrow \boxed{L = \dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\cos\theta}$ 1.0

Se $\theta = 0$ em $t=0$ e $\dot{\theta} = 0$ p/ $t=0$ está então parado no topo.

$\therefore L = \dfrac{ma^2\dot{\theta}^2}{2} - mga\cos\theta$

0.5

$\therefore mga\,\mathrm{sen}\theta - \dfrac{d}{dt}\left(ma^2\dot{\theta}^2\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \dfrac{g}{a}\,\mathrm{sen}\theta}$ Eq. de Movimento

Se $\ddot{\theta} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\dot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$

$\therefore \displaystyle\int_{\theta=0}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta}\,\dot{\theta} = \int_{\theta=0}^{\theta} \dfrac{g}{a}\,\mathrm{sen}\theta'\,d\theta' \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \dfrac{2g}{a}(1-\cos\theta)}$

$\Rightarrow$ equação da velocidade angular como função de $\theta(t)$.

b) Queremos a força de vínculo ∴ Vamos manter r e θ como ~~fun~~ variáveis e incluir um multiplicador de Lagrange e a eq. de vínculo $g(r,\theta)$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = 0 \Rightarrow mr\dot\theta^2 - mg\cos\theta - m\ddot r + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mgr\sin\theta - mr^2\ddot\theta - 2mr\dot r\dot\theta = 0$$

p/ $r = a$ e $\dot r = 0 = \ddot r$ temos:

1.0

$$\left.\begin{cases} ma\dot\theta^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0 \\ \underbrace{mga\sin\theta - ma^2\ddot\theta = 0}_{} \end{cases}\right\}$$

são as eq. de movimento, onde $\lambda \cdot 1 = N =$ força de vínculo!

→ já resolvemos em termos de

$$\dot\theta^2 = \frac{2g}{a}(1-\cos\theta)$$] 0.5

$$\therefore\ m\cancel{a}\frac{2g}{\cancel{a}}(1-\cos\theta) - mg\cos\theta + \lambda = 0$$

$$\therefore\ mg(2 - 2\cos\theta - \cos\theta) + \lambda = 0$$

0.5

$$\therefore\ \boxed{\lambda = N = mg(3\cos\theta - 2)}$$

p/ deixar o hemisfério $N = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)}$