GABARITO

F 315 C II Prova (17-05-2010)

Nome: **RA:**

1) Um projétil de massa **M** é disparado horizontalmente sobre um plano sem atrito por um dispositivo que contém uma mola de constante elástica **k**, acoplada a um amortecedor. Antes do disparo a mola está comprimida por uma distância **Δx**. Supondo que o amortecedor esteja calibrado para operar em regime **crítico** e que o projétil não está preso à mola encontre:

a) O deslocamento do projétil até se desprender da mola. (2 pontos)

b) A velocidade final com a qual o proétil se deslocará sobre o plano horizontal. (1 ponto)

a) $x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$ sol. geral para amort. crítico $\left(\gamma = \sqrt{\frac{k}{M}}\right)$

$x(0) = A = -\Delta x$

$\dot{x}(t) = -\gamma(A+Bt)e^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t}$

$\dot{x}(0) = 0 = -\gamma A + B \rightarrow B = \gamma A = -\gamma \Delta x$

$x(t) = -\Delta x(1+\gamma t)e^{-\gamma t}$

$\dot{x}(t) = \gamma \Delta x(1+\gamma t - 1)e^{-\gamma t} = \gamma^2 \Delta x\, t e^{-\gamma t}$

$\ddot{x}(t) = \gamma^2 \Delta x\, e^{-\gamma t}(1 - \gamma t)$

$\ddot{x}(t^*) = 0$ quando $t^* = \frac{1}{\gamma}$ condição para se desprender da mola

$x(t^*) = -\frac{2\Delta x}{e}$

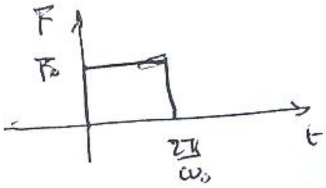
$\dot{x}(t^*) = \gamma \frac{\Delta x}{e}$ vel. final

2) Considere um oscilador linear **não amortecido** de massa **M** e constante elástica **k**, inicialmente em repouso. No instante t=0 uma força $\mathbf{F_0}$ atua durante um intervalo de tempo $\Delta t=2\pi\sqrt{m/k}$. (Não há gravidade no problema)

a) Encontre o deslocamento como função do tempo.(2 pontos)

b) Faça um gráfico qualitativo da velocidade como função do tempo indicando valores máximos e mínimos.(1,5 pontos)

2)



$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

$M\ddot{x} + kx = F_0 \qquad 0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega_0}$

$M\ddot{x} + kx = 0 \qquad t > \frac{2\pi}{\omega_0}$

para $0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\qquad x(t) = A\cos\omega_0 t + B\,\text{sen}\,\omega_0 t + \frac{F_0}{k}$

Condições iniciais : $\quad x(0) = 0 = A + \frac{F_0}{k} \rightarrow A = -\frac{F_0}{k}$

$\dot{x} = -\omega_0 A\,\text{sen}\,\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t$

$\dot{x}(0) = 0 \rightarrow B = 0$

$x(t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - \cos\omega_0 t\right); \; \dot{x}(t) = \frac{\omega_0 F_0}{k}\,\text{sen}\,\omega_0 t$

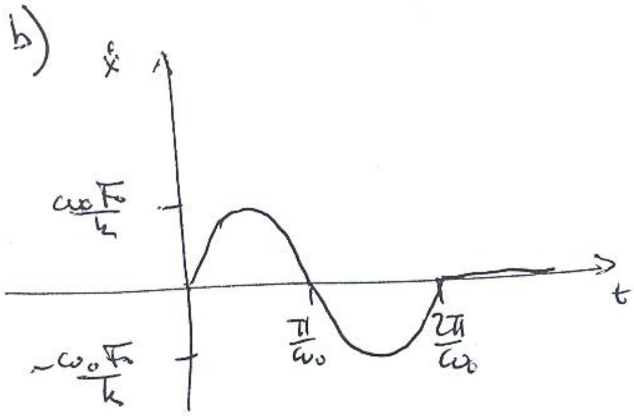
para $t > \frac{2\pi}{\omega_0}$

$x(t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - \cos\omega_0 t\right) - \frac{F_0}{k}\left(1 - \cos\omega_0\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right)$

$x(t) = 0$ porque $\cos\left[\omega_0\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] = \cos\omega_0 t$

$\dot{x}(t) = 0$ consequentemente

b)



3) Um planeta tem um caroço esférico, de **densidade constante** ρ_1 e raio $\mathbf{R_1}$, que está rodeado por uma cámada espessa de líquido de **densidade constante** ρ_2 e raio externo $\mathbf{R_2}$.

a) Qual será a força gravitacional que atua numa partícula de massa **m dentro** da camada líquida? (1,5 pontos)

b) Qual será a força gravitacional que atua numa partícula de massa **m fora** da camada líquida? (0,5 pontos)

c) Qual será a diferença de energia potencial dessa partícula quando ela se deslocar do infinito até o fundo da camada líquida? (1.5 pontos)

Teorema de Gauss: $\int_S dS\, \hat{n} \cdot \vec{g} = -4\pi G \int_{V(S)} d^3x\, \rho$

a)
$$4\pi r^2 F = -4\pi G m \left[\frac{4}{3}\pi \rho_1 R_1^3 + \frac{4}{3}\pi \rho_2 (r^3 - R_1^3) \right]$$

$$F = -\frac{4\pi}{3} G m \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2) R_1^3}{r^2} + \rho_2 r \right] \qquad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

b)
$$4\pi r^2 F = -4\pi G m \left[\frac{4}{3}\pi \rho_1 R_1^3 + \frac{4}{3}\pi \rho_2 (R_2^3 - R_1^3) \right]$$

$$F = -\frac{4\pi}{3} G m \frac{\left[(\rho_1 - \rho_2) R_1^3 + \rho_2 R_2^3 \right]}{r^2}$$

c)
$$\Delta U = -\frac{4\pi}{3} G m \left\{ \int_{R_1}^{R_2} dr \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2) R_1^3}{r^2} + \rho_2 r \right] + \int_{R_2}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[(\rho_1 - \rho_2) R_1^3 + \rho_2 R_2^3 \right] \right\}$$

$$= -\frac{4\pi}{3} G m \left[(\rho_1 - \rho_2) R_1^3 \left(\frac{1}{R_1} - \cancel{\frac{1}{R_2}} \right) + \rho_2 \left(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right) + \cancel{\frac{(\rho_1 - \rho_2) R_1^3}{R_2}} + \rho_2 \frac{R_2^3}{R_2} \right]$$

$$= -\frac{4\pi}{3} G m \left[\rho_1 R_1^2 + \rho_2 \frac{3}{2} (R_2^2 - R_1^2) \right]$$