Prova $2^{\underline{0}}$ Exame - Turma especial - MA-327 - 24/04/12

Nome:——————————————————**RA:**————————

1. Considere W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores
$v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,1)$, $v_3 = (1,0,0,1)$ e $v_4 = (-1,3,2,0)$

a) (1,0) Exiba uma base de W e calcule sua dimensão. Justifique.

b) (1,0) Pergunta-se: o vetor $v = (4,3,1,3)$ está em W?

c) (0,5) Considere K o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por $K = \{(x,y,z,w);\ x-y+z-w=0\}$. Encontre a dimensão de $W \cap K$.

---

2. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z) = (-y+2z, x-z, 2z)$ e $\mathcal{C}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

a) (1,0) Encontre a matriz $[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}$, o polinômio característico de T e seus auto-valores .
b) (1,0) Para cada auto valor encontre o auto-espaço dos auto-vetores associados.
c) (0,5) Pergunta-se: A é diagonalizável em $\mathbb{R}$, ie, existe uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ é diagonal? (justifique sua resposta).

---

3. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual (aqui dados $u, v \in \mathbb{R}^4$ vamos denotar tal produto por $< u, v >$). Tome os vetores $v_1 = (1,-1,1,1)$, $v_2 = (1,0,-1,1)$ e $v_3 = (0,0,-1,2)$.

a) (1,0) Encontre o conjunto
$S = \{u = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4; < u, v_1 >= 1, < u, v_2 >= 2 \quad \text{e} \quad < u, v_3 >= 3\}$

b) (1,0) Encontre uma base ortogonal para o subespaço W gerado por v_1 e v_2.

c) (0,5) Pergunta-se: o conjunto S do item a) é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$? (justifique sua resposta)

---

4. Responda cada uma das questões abaixo.

a) (0,7) Sejam W e K subespaços de $\mathbb{R}^n$ tal que $W \cap K = \{0\}$. Mostre que: se $\alpha = \{u_1, ..., u_s\} \subset W$ é LI, $\beta = \{v_1, \cdots, v_t\} \subset K$ é LI e $K \cap W = \{0\}$ então $\{u_1, \cdots u_s, v_1, \cdots, v_t\}$ é LI.

b) (0,6) Pergunta-se: Existe uma transformação linear **injetora** de $\mathbb{R}^5$ em $\mathbb{R}^4$? (justifique sua resposta)

c) (0,6) Responda se a seguinte afirmação é falsa ou verdadeira: O conjunto, $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 = y^2\}$ **não é** subespaço de $\mathbb{R}^3$, mas é a união de dois subespaços.

d) (0,6) Sejam $\mathbb{R}^n$ com o produto interno canônico e $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear. Chame de $K = N(T)$ =núcleo de T e $W = Img(T^*)$ =imagem do operador adjunto de T. Mostre que: se $u \in K$ então $u \in W^{\perp}$.

BOA PROVA