1) ____
2) ____
3) ____
4) ____
Nota: ____

2ª Prova de F-328 - Diurno
24/10/2012

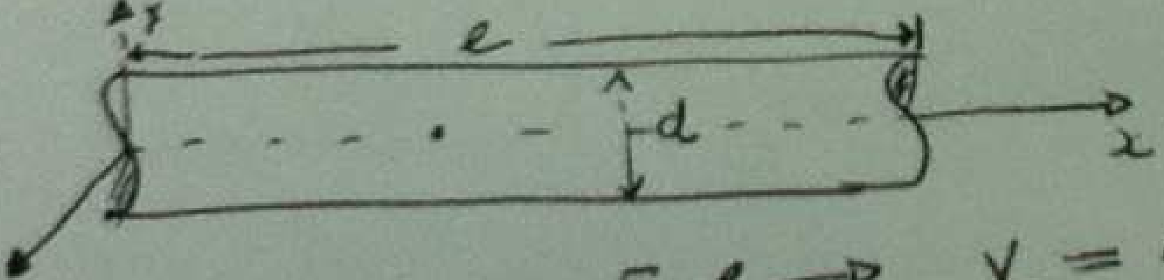
Nome: X X X **RA:** X X **Turma:** X

Questão 01

Um fio cilíndrico está ao longo do eixo x, tem comprimento l, diâmetro d e resistividade ρ, sendo este material um condutor ôhmico. Considere que o potencial é $V(x=0)=V_0$ e $V(x=l)=0$. Em termos de l, d, V_0, ρ e constantes físicas, deduza expressões para :

a) o campo elétrico no fio; (0,5 ponto)
b) a resistência elétrica do fio; (0,5 ponto)
c) a corrente no fio; (0,5 ponto)
d) a densidade de corrente; (0,5 ponto)
e) qual é a expressão do campo elétrico em função de ρ e J? (0,5 ponto)

(a)



material ôhmico
$V(0)=V_0$; $V(l)=0$.

$$V(l)-V(0) = -E\cdot l \rightarrow V_0 = El$$

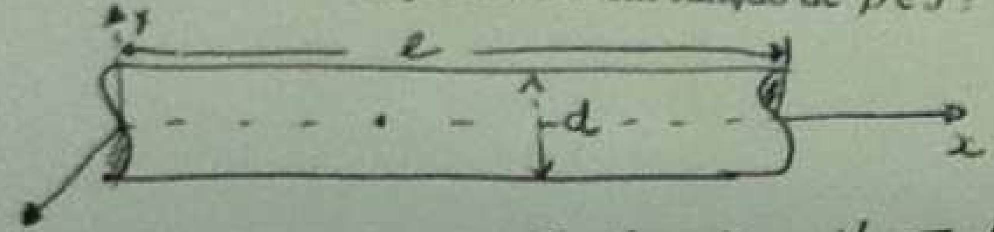
$$\boxed{E = V_0/l \longrightarrow \vec{E} = E\hat{x}}$$

(b)

$$R = \rho\frac{l}{A} \rightarrow \boxed{R = 4\rho l/\pi d^2}$$

a) o campo elétrico no fio; (0,5 ponto)
b) a resistência elétrica do fio; (0,5 ponto)
c) a corrente no fio; (0,5 ponto)
d) a densidade de corrente; (0,5 ponto)
e) qual é a expressão do campo elétrico em função de ρ e J? (0,5 ponto)

a)



material ôhmico
$V(0) = V_0$; $V(\ell) = 0$.

$$V(\ell) - V(0) = -E \cdot \ell \rightarrow V_0 = E\ell$$

$$\boxed{E = V_0/\ell \longrightarrow \vec{E} = E\,\hat{x}}$$

b)

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \rightarrow \boxed{R = 4\rho\ell/\pi d^2}$$

c) material ôhmico

$$V = R\,i \rightarrow \boxed{i = \frac{\pi V_0 d^2}{4\rho\ell}}$$

d)

$$i = \int \vec{J}\, d\vec{A} \rightarrow i = J A \rightarrow \boxed{J = \frac{V_0}{\rho\ell}}$$

e)

$$\boxed{E = \rho J} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \rho J\,\hat{x}}$$

Questão 02

Um capacitor de placas paralelas, de área A e separação s, é originalmente carregado com carga Q_0. Desligando-se a bateria, uma lâmina dielétrica de espessura d ($d<s$) e constante dielétrica κ é então inserida entre as placas do capacitor. Calcule:

a) o vetor $\vec{E}$ no interior do dielétrico; (1,0 ponto)
b) a capacitância deste capacitor; (0,5 ponto)
c) a diferença de potencial entre as placas do capacitor; (0,5 ponto)
d) o valor da densidade superficial de carga σ' induzida nas paredes do dielétrico. (0,5 ponto)

(a) $E_d = E_0/k$

$$\oint \vec{E_0}\cdot d\vec{A} = Q_0/\varepsilon_0 \longrightarrow E_d = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A k} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 k}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 k}\hat{e}}$$

$\hat{e}$ da placa de cargas positivas p/ a
" " " negativas

(b) Dois capacitores em série 1 com area A e espaç. s-d, meio vácuo e outro area A, espaçamento d e meio dielétrico k.

$1 \quad 1 \quad 1 \quad s-d \quad d \quad \frac{1}{\;}\left[(s-d)k + d\right]$

$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = Q_0/\varepsilon_0 \longrightarrow E_d = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A k} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 k}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 k}\hat{e}}$$ $\hat{e}$ da placa de cargas positivas p/ a
" " " negativas

(b) Dois capacitores em série 1 com área A e espaç. s-d, meio vácuo e outro área A, espaçamento d e meio dielétrico $\underline{k}$.

$$\frac{1}{C_{ef}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{s-d}{\varepsilon_0 A} + \frac{d}{k\varepsilon_0 A} = \frac{1}{k\varepsilon_0 A}\left[(s-d)k + d\right]$$

$$C_{ef} = \frac{k\varepsilon_0 A}{(s-d)k+d} \longrightarrow \boxed{C = \frac{k\varepsilon_0 A}{(s-d)k+d}}$$

(c) $$V = E_0(s-d) + E_d\, d = E_0(s-d) + E_0\frac{d}{k} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A k}\left[(s-d)k+d\right]$$

$$\boxed{V = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A k}\left[(s-d)k+d\right]}$$

(d) $$\left.\begin{aligned} &\oint \vec{E}\, d\vec{A} = (Q_0+q')/\varepsilon_0 \\ &\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = Q_0/\varepsilon_0 \end{aligned}\right] \quad E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 k} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$E = E_0/k \qquad \sigma' = \frac{\sigma_0}{k} - \sigma_0 = -\left(\frac{k-1}{k}\right)\sigma_0$$

Dois capacitores em serie 1 com area A e espaç s-d, meio Vácuo e outro area A, espaçamento d e meio dielétrico k.

$$\frac{1}{C_{ef}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{s-d}{\varepsilon_0 A} + \frac{d}{k\varepsilon_0 A} = \frac{1}{k\varepsilon_0 A}\left[(s-d)k + d\right]$$

$$C_{ef} = \frac{k\varepsilon_0 A}{(s-d)k+d} \longrightarrow \boxed{C = \frac{k\varepsilon_0 A}{(s-d)k+d}}$$

c)

$$V = E_0(s-d) + E_d d = E_0(s-d) + E_0\frac{d}{k} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A k}\left[(s-d)k+d\right]$$

$$\boxed{V = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A k}\left[(s-d)k+d\right]}$$

d)

$$\left.\begin{aligned} \oint \vec{E}\, d\vec{A} &= (Q_0 + q')/\varepsilon_0 \\ \oint \vec{E}_0\, d\vec{A} &= Q_0/\varepsilon_0 \end{aligned}\right]$$

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 k} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

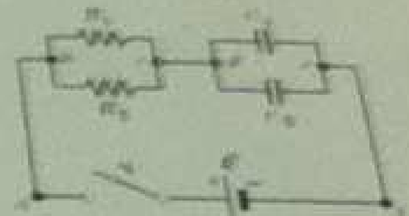
$$E = E_0/k$$

$$\sigma' = \frac{\sigma_0}{k} - \sigma_0 = -\left(\frac{k-1}{k}\right)\sigma_0$$

$$\boxed{\sigma' = -\frac{k-1}{k}\sigma_0}$$

Questão 03

O circuito da figura contém dois resistores R_1 e R_2 e dois capacitores C_1 e C_2 e o conjunto é ligado a uma bateria de fem ε. Antes de a chave S ser ligada, os capacitores estão descarregados.



a) determine a constante de tempo deste circuito; (0,5 ponto)

b) determine a corrente que atravessa a bateria em função do tempo após o fechamento de S; (0,5 ponto)

c) determine a *ddp* entre os pontos b e c em função do tempo; (0,5 ponto)

d) com S fechada por um longo tempo, quais são as cargas nos capacitores C_1 e C_2? (1,0 ponto)

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \quad ; \quad C_{eq} = C_1 + C_2$$

(a) circuito RC $\longrightarrow$ $\varepsilon - R_{eq}\, i - \frac{q}{C_{eq}} = 0 \rightarrow q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}\right)$

$$\boxed{\tau = R_{eq} C_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}(C_1+C_2)}$$

(b) corrente solução da eq. da malha $\rightarrow$

$$i(t) = dq(t)/dt = \frac{Q}{R_{eq}C_{eq}}\, e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}$$

Através da condição $t \to \infty$, $\frac{dq}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{Q = C_{eq}\,\varepsilon}$

$$\boxed{\tau = R_{eq} C_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}(C_1 + C_2)}$$

(b) Corrente solução da eq. da malha →

$$i_b(t) = d\,q(t)/dt = \frac{Q}{R_{eq} C_{eq}} e^{-\frac{t}{R_{eq} C_{eq}}}$$

Q sai da condição $t \to \infty$, $\frac{dq}{dt} = 0 \to \boxed{Q = C_{eq} \varepsilon}$

$$i_b(t) = \frac{C_{eq} \varepsilon}{R_{eq}} e^{-\frac{t}{R_{eq} C_{eq}}} \to \boxed{i_b(t) = \frac{(R_1 + R_2)\varepsilon}{R_1 R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t}}$$

(c) Dif de Potencial entre b e c

$$R_1 \quad = R_2 i_2 \to i_2 = \frac{R_1}{R_2} i_1$$

$$i_1 + i_2 = i_b \Rightarrow \boxed{i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_b(t)} \to \boxed{i_1(t) = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t}}$$

$$\boxed{V_{bc} = R_1 i_1 = \varepsilon\, e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t}}$$

(d) longos tempos $i_b(t) = 0 \Rightarrow C_1 \parallel C_2 \parallel C \Rightarrow$

Q vem da condição $t \to \infty$, $\frac{dq}{dt} = 0 \to \boxed{Q = C_{eq} \mathcal{E}}$

$$i_b(t) = \frac{C_{eq} \mathcal{E}}{R_{eq}} e^{-\frac{t}{R_{eq} C_{eq}}} \longrightarrow \boxed{i_b(t) = \frac{(R_1+R_2)\mathcal{E}}{R_1 R_2} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 (C_1+C_2)} t}}$$

(c) Dif de potencial entre b e c

$$R_1 \quad = R_2 i_2 \to i_2 = \frac{R_1}{R_2} i_1$$

$$i_1 + i_2 = i_b \Rightarrow \boxed{i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} i_b(t)} \to \boxed{i_1(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 (C_1+C_2)} t}}$$

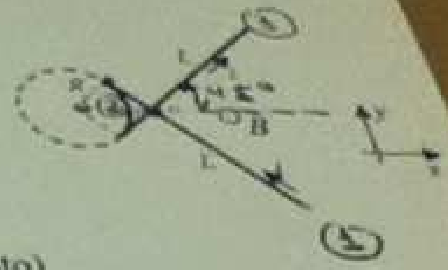
$$\boxed{V_{bc} = R_1 i_1 = \mathcal{E} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 (C_1+C_2)} t}}$$

(d) longos tempos $i_b(t) = 0 \to C_1 \parallel C_2 \parallel C \Rightarrow$

$V_{de} = \mathcal{E}$ e portanto $\boxed{Q_1 = \mathcal{E} C_1 \text{ e } Q_2 = \mathcal{E} C_2}$

Questão 04

A figura abaixo mostra um fio que conduz uma corrente i. Ele é formado por dois trechos retilíneos de comprimento L, ambos tangentes à mesma circunferência de raio R, e por um arco desta circunferência que subentende um ângulo central de 90°, conforme figura abaixo. O fio está numa região onde existe um campo magnético $\vec{B}$ uniforme, perpendicular ao plano da página e orientado para fora dela.



a) calcule o vetor força magnética que age sobre cada segmento de fio retilíneo; (1,0 ponto)

b) calcule o vetor força magnética que age sobre a parte circular; (1,0 ponto)

c) calcule a força resultante que age sobre o fio. (0,5 ponto)

Força sobre segmento de fio

$$d\vec{F} = i\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

(a) Sobre o segmento 1 → $\vec{F}_1 = i\int_{fio} d\vec{l} \times \vec{B} = iB\int_{fio} (-\hat{x}+\hat{y})\frac{\sqrt{2}}{2}\, dl \times \hat{z}$

$$\vec{F}_1 = iB\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{y}+\hat{x})L \longrightarrow \boxed{\vec{F}_1 = iLB\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}+\hat{y})}$$

$$\vec{F}_3 = iB\int_{fio} \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}+\hat{y}) \times \hat{z}\, dl = iBL\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}-\hat{y})$$

$$\boxed{\vec{F}_3 = iLB\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}-\hat{y})}$$

$$\vec{F}_1 = i\,B\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{y}+\hat{x})L \longrightarrow \boxed{\vec{F}_1 = i\,LB\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}+\hat{y})}$$

$$\vec{F}_3 = i\,B\int_{\text{fio}} \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}+\hat{y})\times\hat{z}\,dl = i\,BL\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}-\hat{y})$$

$$\boxed{\vec{F}_3 = i\,LB\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}-\hat{y})}$$

(b) $$\vec{F}_2 = i\int_{\text{arco}} d\vec{l}\times\vec{B} = i\int_{\text{arco}} d\vec{l}\times B\hat{z}$$

$$d\hat{l} = dl(-\cos\theta\,\hat{y} + \sin\theta\,\hat{x}) \quad , dl = R\,d\theta$$

$$= i\,BR\int_{+45^\circ}^{-45^\circ}(-\cos\theta\,\hat{y} + \sin\theta\,\hat{x})\times\hat{z}\,d\theta$$

$$= i\,BR\int_{45^\circ}^{-45^\circ}\left(-\cos\theta\,d\theta\,\hat{x} - \sin\theta\,d\theta\,\hat{y}\right) = i\,BR\left[-\sin\theta\Big|_{45^\circ}^{-45^\circ}\hat{x} + \cos\theta\Big|_{45^\circ}^{-45^\circ}\hat{y}\right]$$

$$\boxed{\vec{F}_2 = -i\,BR\sqrt{2}\,\hat{x}}$$

$$\ldots\sqrt{2}\left[\hat{x}+\hat{y}+\hat{x}-\hat{y}\right] + i\,B\sqrt{2}\,\hat{x} = \sqrt{2}\,iB(L+R)\hat{x}$$

$$\boxed{\vec F_3 = i L B \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat x - \hat y)}$$

(b) $\vec F_2 = i \int_{arco} d\vec l \times \vec B = i \int_{arco} d\vec l \times B\hat z$

$d\vec l = dl(-\cos\theta\,\hat y + \sin\theta\,\hat x)$, $dl = R\,d\theta$

$$= iBR \int_{+45°}^{-45°} (-\cos\theta\,\hat y + \sin\theta\,\hat x)\times\hat z\,d\theta$$

$$= iBR \int_{45°}^{-45°} \left(-\cos\theta\,d\theta\,\hat x - \sin\theta\,d\theta\,\hat y\right) = iBR\left[-\sin\theta\Big|_{45°}^{-45°}\hat x + \cos\theta\Big|_{45°}^{-45°}\hat y\right]$$

$$\boxed{\vec F_2 = -iBR\sqrt{2}\,\hat x}$$

(c) $\vec F = \vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_3 = iBL\frac{\sqrt2}{2}\left[\hat x + \hat y + \hat x - \hat y\right] + iB\sqrt2\,\hat x = \sqrt2\, iB(L+R)\,\hat x$

$$\boxed{\vec F = \sqrt{2}\, i B (L - R)\,\hat x}$$