1 - 3,00
2 - 3,50
3 - 3,50

10,0

Tiago Rodante Riccardi 036305

P3-EA614

① a) $h(t) = 10 \cdot Sa^2[10\pi(t-10)]$

$h(t) = 10 \cdot Sa[10\pi(t-10)] \cdot Sa[10\pi(t-10)]$

$H(\omega) = 10 \cdot \frac{1}{2\pi}\left[\mathcal{F}\{Sa(10\pi(t-10))\} * \mathcal{F}\{Sa(10\pi(t-10))\}\right]$

$H(\omega) = \frac{5}{\pi}\left[\frac{1}{10} e^{-j\omega 10} r_{20\pi}(\omega) * \frac{1}{10} e^{-j\omega 10} r_{20\pi}(\omega)\right]$

$H(\omega) = \frac{5}{\pi} \frac{2\pi}{10} tri_{40\pi}(\omega)\, e^{-j\omega 10}$

$H(\omega) = tri_{40\pi}(\omega) \cdot e^{-j\omega 10}$

$\begin{cases} |H(\omega)| = tri_{40\pi}(\omega) \\ \angle H(\omega) = -10\omega \end{cases}$

$\mathcal{F}\{Sa(10\pi(t-10))\} = \mathcal{F}\{Sa(\frac{20\pi}{2}(t-10))\} = \mathcal{F}\{\frac{20\pi}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{20\pi} \cdot Sa(\frac{20\pi}{2}(t-10))\}$

$= \frac{2\pi}{20\pi} \mathcal{F}\left\{\frac{20\pi}{2\pi} Sa\left(\frac{20\pi(t-10)}{2}\right)\right\} = \frac{1}{10} \cdot r_{20\pi}(\omega) \cdot e^{-j\omega 10}$

$X(\omega) = \frac{Y}{\cdot} \cdot H(\omega)$

$X(\omega) = 0{,}01\, H(\omega)$

$$X(\omega) = tri_{40\pi}(\omega)\, e^{-j10\omega} \qquad \begin{cases} |X(\omega)| = tri_{40\pi}(\omega) \\ \angle X(\omega) = -10\omega \end{cases}$$

$y(t) = x(t) \cdot sen(20\pi t)$

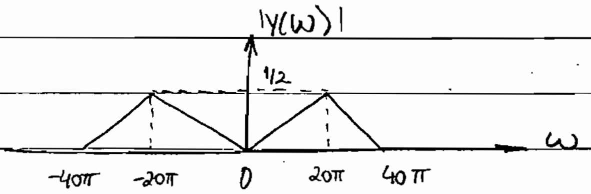
$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * \left(-j\pi\,\delta(\omega - 20\pi) + j\pi\,\delta(\omega + 20\pi)\right)\right]$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[-j\pi\, X(\omega - 20\pi) + j\pi\, X(\omega + 20\pi)\right]$$

$$Y(\omega) = \frac{-j}{2}\, X(\omega - 20\pi) + \frac{j}{2}\, X(\omega + 20\pi)$$

$X(\omega)$ é dado acima.

b)



$\omega_{Nyquist} = 2 \cdot \omega_{max}$

$\omega_{Nyquist} = 2 \cdot 40\pi$

$\omega_{Nyquist} = 80\pi$

A menor frequência de amostragem de $y(t)$ é $\omega_s = 80\pi$, a frequência de Nyquist do sinal $y(t)$.

c) $f_s = 50\ Hz \Rightarrow \omega_s = 2\pi f_s \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50}\ s$

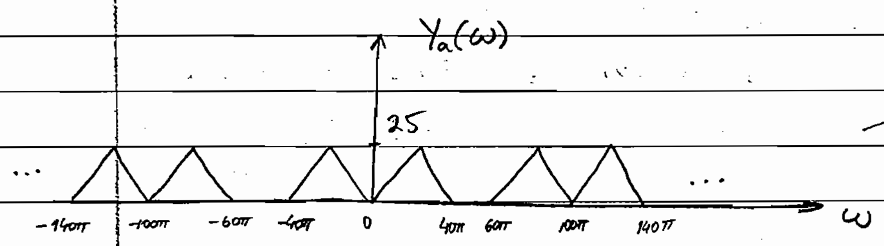
$\omega_s = 2\pi \cdot 50$

$\omega_s = 100\pi\ \frac{rad}{s}$

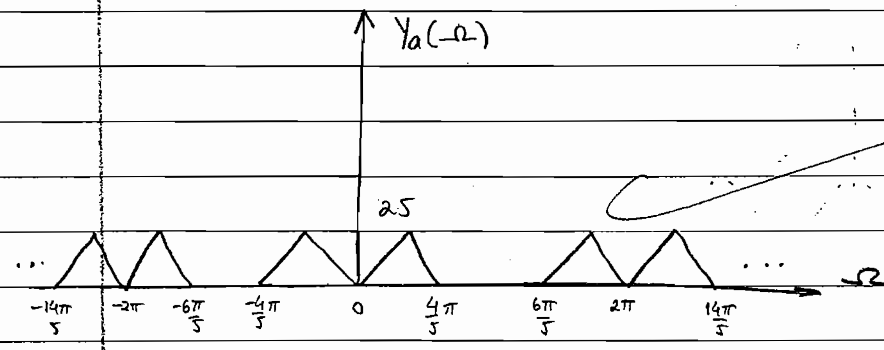
$y_a(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} y(nT) \cdot \delta(t - nT) \rightarrow$ amostragem ideal.

$Y_a(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} Y(\omega - k\omega_s) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$

A amostragem de $y(t)$ torna o espectro de $y(t)$ periódico com período ω_s além de alterar sua amplitude para $1/T$.



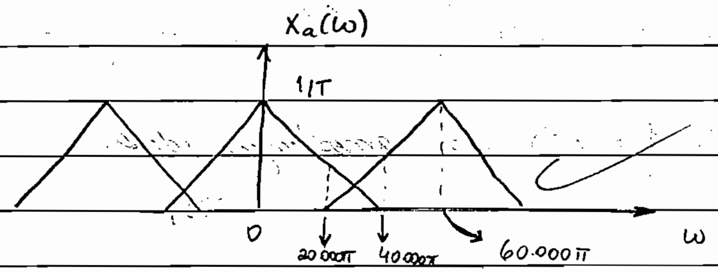
→ periódico com período 100π



$\Omega = \omega T$

→ periódico com período 2π

(2) a) Podemos ter sobreposição espectral para $|W| > 20.000\pi$, visto que desejamos preservar apenas a faixa de frequencias $|W| < 20.000\pi$.



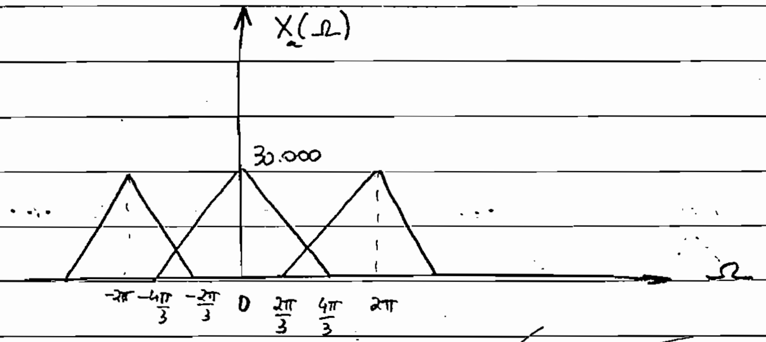
Analisando o esboço do espectro, podemos usar, no limite, uma amostragem com $W_s = 60.000\pi$. Para $W_s = 60.000\pi$ não teremos sobreposição espectral para $|W| < 20.000\pi$.

$W_s = 60.000\pi \rightarrow W_s = 2\pi f_s$

$f_s = \frac{60.000\pi}{2\pi} = 30.000$ amostras/s.

$\boxed{\text{Resp.: } 30.000 \text{ amostras/s}}$

b)



$\Omega = W T$

$T = \frac{1}{30.000}$ s

periódico com período 2π

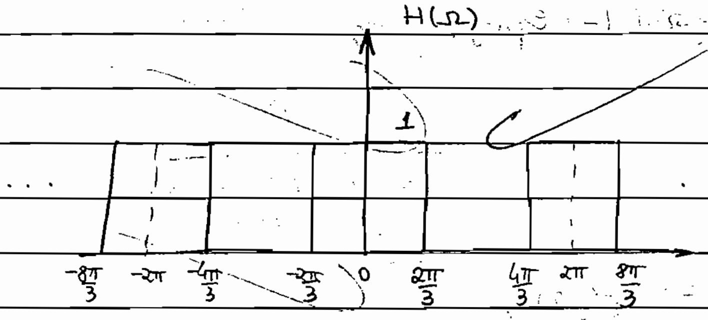
Tiago R. Ricardi   036305

c) $H(\Omega)$

$\Omega_c = \omega_c \cdot T$

$\Omega_c = 20.000\pi \cdot \frac{1}{30.000}$

$\Omega_c = 2\pi/3$

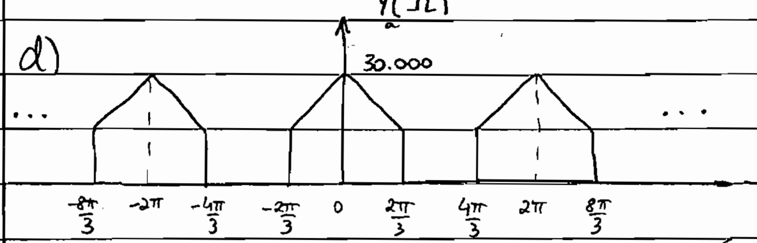


← periódico c/ período 2π.

O filtro digital ideal deve ser um passa-baixas com frequência de corte igual à $\frac{2\pi}{3}$. Dessa forma, ele irá cortar todas as frequências $|W| > 20.000\pi$ das amostras $x[n]$.

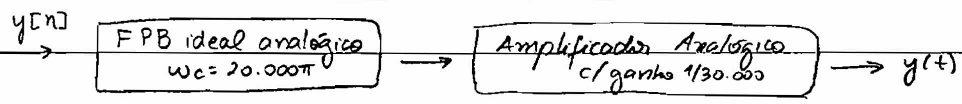
d)

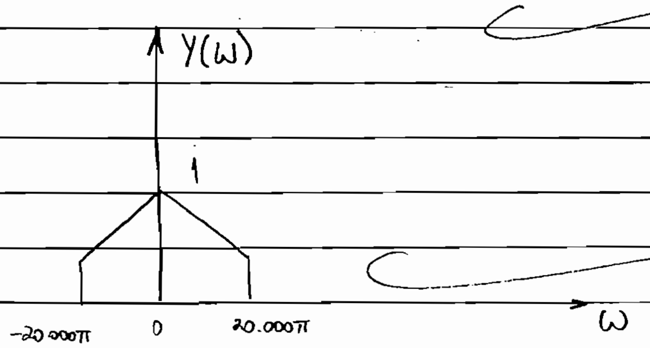
$Y_a(\Omega) = X_a(\Omega) \cdot H(\Omega)$



→ periódico c/ período 2π

Devemos filtrar a sequência $y[n]$ com um filtro passa baixas analógico ideal com frequência de corte 20.000π e depois amplificá-lo com um ganho de $1/30.000$ para obtermos $y(t)$.





$$X(\Omega) = \frac{\exp(-j\Omega)}{(1-0{,}5\exp(-j\Omega))(1-2\exp(-j\Omega))}$$

$$X(\Omega) = X(z)\Big|_{z=\exp(j\Omega)}$$

(8)

(3) a) $X(z) = \dfrac{z^{-1}}{(1-0,5z^{-1})(1-2z^{-1})}$

$$X(z) = \frac{(1/z)}{\left(1-\left(\frac{1}{2z}\right)\right)\left(1-\left(\frac{2}{z}\right)\right)}$$

A região de convergência será delimitada pelos pólos de $X(z)$.

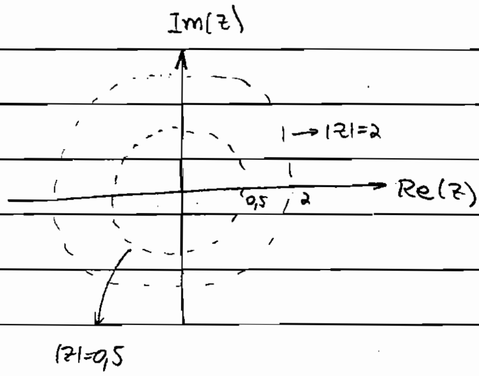
pólos de $X(z)$:

$$1 - \frac{1}{2z} = 0 \qquad\qquad 1 - \frac{2}{z} = 0$$

$$1 = \frac{1}{2z} \qquad\qquad 1 = \frac{2}{z}$$

$$2z = 1 \qquad\qquad z = 2$$

$$z = \frac{1}{2}$$



As possíveis regiões de convergência são
1) $|z| < 0,5$
2) $0,5 < |z| < 2$
3) $|z| > 2$

b) $X(z) = \dfrac{z^{-1}}{(1-0,5z^{-1})(1-2z^{-1})} = \dfrac{A}{(1-0,5z^{-1})} + \dfrac{B}{(1-2z^{-1})} =$

$= \dfrac{A(1-2z^{-1}) + B(1-0,5z^{-1})}{(1-0,5z^{-1})(1-2z^{-1})}$ $\qquad z^{-1}(-2A - 0,5B) + 1(A+B) = z^{-1}$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -2A - 0,5B = 1 \end{cases}$$

$-2A - 0,5(-A) = 1$

$-2A + 0,5A = 1$

$-1,5A = 1 \qquad A = -2/3$

$\Rightarrow B = 2/3.$

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{(1-0{,}5z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{-2}{3}\left(\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-2z^{-1}}\right)$$

Usando o método da Inspeção:

p/ $|z| < 0{,}5$

$$x[n] = \frac{-2}{3}\cdot\left(-0{,}5^n \cdot u[-n-1]\right) + \frac{2}{3}\left(-2^n \cdot u[-n-1]\right)$$

$$x[n] = \frac{2}{3}\cdot 0{,}5^n \cdot u[-n-1] - \frac{2}{3}\cdot 2^n \cdot u[-n-1]$$

p/ $0{,}5 < |z| < 2{,}0$

$$x[n] = \frac{-2}{3} 0{,}5^n u[n] + \frac{2}{3}\cdot\left(-2^n \cdot u[-n-1]\right)$$

$$x[n] = -\frac{2}{3}\cdot 0{,}5^n \cdot u[n] - \frac{2}{3}\cdot 2^n \cdot u[-n-1]$$

p/ $|z| > 2{,}0$

$$x[n] = \frac{-2}{3}\cdot 0{,}5^n \cdot u[n] + \frac{2}{3}\cdot 2^n \cdot u[n]$$

c) A transformada de Fourier de uma sequência só existe se a região de convergência da transformada z correspondente contiver a CRU. Assim, só teremos transformada de Fourier p/ $0{,}5 < |z| < 2{,}0$, a única região de convergência que possui a CRU.

Apenas a sequência $x[n] = \frac{-2}{3} 0{,}5^n \cdot u[n] \frac{-2}{3} \cdot 2^n \cdot u[-n-1]$ possui $X(\Omega)$ que vale

7