ME 430A - Técnicas de Amostragem
Segundo semestre de 2011
Prova III
Data: 28/11/2011

Nome: ______________________________ RA: ______________

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **Coloque seu nome completo e RA em todas as folhas que você recebeu, inclusive nesta.**
- **Utilize somente um dos lados de cada folha.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique, adequadamente, seus desenvolvimentos, sem, no entanto, escrever excessivamente.**
- **O(a) aluno(a) só poderá sair da sala após as 16h30, mesmo que já tenha finalizado a prova. Após a saída do(a) primeiro(a) aluno(a) não será permitido a entrada de nenhum(a) outro(a) aluno(a).**
- **Não é permitdo empréstimo de material.**
- **Não serão dirimidas dúvidas de quaisquer natureza.**
- **Resolva a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **O(a) aluno(a) deverá portar sua carteira de estudante e apresentá-la, quando for solicitada sua assinatura.**
- **Contestações a respeito da nota, só serão consideradas se estiverem por escrito.**
- **A nota do aluno(a) será $\frac{NP}{NT} \times 10$, em que NP é o número de pontos obtidos na prova e NT é o numero total de pontos da prova.**
- **Os resultados numéricos finais devem ser apresentados com duas casas decimais, apenas.**
- **A prova terá duração de 120 minutos, das 16h às 18h, improrrogáveis.**

Faça uma excelente Prova!!

Questões

1. A Tabela abaixo apresenta informações sobre a=3 conglomerados sorteados segundo um procedimento AASc (com reposição) de uma população dividida em A = 90 conglomerados. Considere que todos os conglomerados têm o mesmo tamanho $B = 5$. O interesse é estimar μ (média populacional). Responda os itens:

α	$\widehat{\mu}_\alpha$	$\widehat{\sigma}^2_\alpha$	$(\widehat{\mu}_\alpha - \widehat{\mu}_C)^2$
1	15,00	120,00	225,00
2	16,00	110,00	256,00
3	12,00	130,00	144,00

a) Obtenha uma estimativa para o coeficiente de correlação intraclasse. Interprete o resultado em termos da qualidade da divisão da população em conglomerados para a estimação do parâmetro de interesse (50 pontos).

b) Utilizando o estimador $\widehat{\mu}_C$, obtenha uma estimativa pontual, o erro-padrão associado à esta e um IC (intervalo de confiança) assintótico com coeficiente de confiança de aproximadamente $\gamma = 0,95$ para μ (média populacional) (100 pontos).

c) Considerando que a amostra acima foi obtida segundo um planejamento AASc (com reposição), ou seja, sem a estrutura de conglomerados, obtenha uma estimativa pontual, o erro-padrão associado à esta e um IC assintótico com coeficiente de confiança de aproximadamente $\gamma = 0,95$ para μ (média populacional), de modo apropriado. Justifique, adequadamente, seu desenvolvimento (100 pontos).

d) Compare os resultados obtidos nos itens b) e c), através dos erros-padrão associados às duas estimativas e dos IC's assintóticos obtidos. Qual das estimativas seria preferível para se estimar μ? Sua conclusão está de acordo com o resultado obtido no item a)? Justifique, adequadamente, sua resposta (50 pontos).

e) Prove que o tamanho da amostra que satisfaz $P(|\widehat{\mu}_C - \mu| < \delta) \approx \gamma$, é dado por $a = \dfrac{\sigma^2_{ec} z^2}{\delta^2}$, em que $P(Z > z) = \dfrac{1-\gamma}{2}$. Calcule a para $\gamma = 0,95$, $\delta = 0,5$ e a estimativa de σ^2_{ec} obtida no item b) (50 pontos).

2. Considere uma população dividida em A conglomerados da qual se seleciona, segundo AASs (sem reposição), uma amostra de a conglomerados. Considere que todos os conglomerados têm o mesmo tamanho, ou seja $B_\alpha = B, \forall\alpha$ e o estimador $\widehat{\mu}_C$ para estimar μ. Responda os itens:

a) Prove que $\mathcal{E}_{A_2}(\widehat{\mu}_C) = \mu$ e $\mathcal{V}_{A_2}(\widehat{\mu}_C) = \left(1 - \dfrac{a}{A}\right)\dfrac{s^2_{ec}}{a}, s^2_{ec} = \dfrac{A}{A-1}\sigma^2_{ec}$, utilizando os resultados da AASs tradicional, ou seja sem a população estar dividida em conglomerados (100 pontos).

b) Calcule o EPA do estimador $\widehat{\mu}_C$ considerando a amostragem por conglomerados (AC) sem reposição em relação à amostragem por conglomerados com resposição. Qual dos procedimentos amostrais leva ao melhor estimador (AC com ou sem reposição)? Justifique, adequadamente, sua resposta (50 pontos).

3. A Tabela abaixo apresenta informações sobre a=3 conglomerados sorteados segundo um procedimento AASc (com reposição) de uma população dividida em A = 30 conglomerados. O interesse é estimar μ (média populacional). Considere que $\overline{B} = 15$ (tamanho médio dos conglomerados na população). Responda os itens:

α	b_α	$\widehat{\mu}_\alpha$	$\widehat{\sigma}^2_\alpha$	$\widehat{\tau}_\alpha$	$b_\alpha\widehat{\sigma}^2_\alpha$	$\left(\frac{b_\alpha}{\overline{B}}\widehat{\mu}_\alpha - \widehat{\mu}_{C_1}\right)^2$	$\left(\frac{b_\alpha}{\overline{b}}\right)^2(\widehat{\mu}_\alpha - \widehat{\mu}_{C_2})^2$	$(\widehat{\mu}_\alpha - \widehat{\mu}_{C_3})^2$
1	10	25,00	350,00	250,00	3500,00	0,20	0,44	0,00
2	5	23,00	330,00	115,00	1650,00	89,20	1,78	4,00
3	15	27,00	370,00	405,00	5550,00	97,79	4,00	4,00

a) Obtenha as estimativas pontuais para μ, usando cada um dos estimadores $\widehat{\mu}_{C_i}, i = 1, 2, 3$. Obtenha também os respectivos erros-padrão associados (100 pontos).

b) Usando cada um dos estimadores considerados no item a), obtenha IC's assintóticos com coeficiente de confiança $\gamma = 0,99$ para μ. Usando os erros-padrão e os IC's, compare os estimadores do item a) e diga qual deles você escolheria para estimar μ. Sua conclusão era esperada? Justifique, adequadamente, sua resposta (100 pontos).

c) Considerando que a amostra acima foi obtida segundo um planejamento AASc (com reposição), ou seja, sem a estrutura de conglomerados, obtenha uma estimativa pontual, o erro-padrão associado à esta e um IC assintótico com coeficiente de confiança de aproximadamente $\gamma = 0,99$ para μ (média populacional), de modo apropriado. Justifique, adequadamente, seu desenvolvimento (100 pontos).

d) Compare os resultados obtidos no item c) com o resultado do estimador eleito no item b). Qual dos dois você escolheria para estimar μ? Sua conclusão era esperada? Justifique, adequadamente, suas respostas (100 pontos).

Formulário

Amostragem Aleatória Simples

1. Parâmetros populacionais de interesse:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \ ; \ \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2 \ ; \ s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2.$$

2. Estimadores:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i\in \boldsymbol{s}} Y_i \ ; \ \widehat{\sigma}^2 = \widehat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i\in \boldsymbol{s}}(Y_i-\widehat{\mu})^2.$$

3. Variâncias dos estimadores

   (a) AASc : $\mathcal{V}(\widehat{\mu}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

   (b) AASs : $\mathcal{V}(\widehat{\mu}) = \left(1-\dfrac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n}$.

4. Estimadores não viciados para as variâncias dos estimadores

   (a) AASc : $\widehat{\mathcal{V}}(\widehat{\mu}) = \dfrac{\widehat{\sigma}^2}{n}$.

   (b) AASs : $\widehat{\mathcal{V}}(\widehat{\mu}) = \left(1-\dfrac{n}{N}\right)\frac{\widehat{s}^2}{n}$.

Amostragem por conglomerados (sortendo-se os conglomerados segundo um planejamento AASc)

Conglomerados de mesmo tamanho

1. Parâmetros populacionais de interesse:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{i=1}^{B_\alpha} y_{\alpha i} = \frac{1}{A}\sum_{\alpha=1}^{A}\frac{B_\alpha}{\overline{B}}\mu_\alpha \ ; \ \tau = N\mu = \sum_{\alpha=1}^{A}\tau_\alpha \ ; \quad \sigma^2 = \sigma^2_{ec} + \sigma^2_{dc};$$

$$\sigma^2_{ec} = \frac{1}{A}\sum_{\alpha=1}^{A}(\mu_\alpha-\mu)^2 \ ; \ \sigma^2_{dc} = \frac{1}{A}\sum_{\alpha=1}^{A}\sigma^2_\alpha \ ; \ \rho_{int} = \frac{\sigma^2_{ec} - \dfrac{\sigma^2_{dc}}{B-1}}{\sigma^2_{ec}+\sigma^2_{dc}}.$$

2. Estimadores

$$\widehat{\mu}_C = \frac{1}{a}\sum_{\alpha=1}^{a}\widehat{\mu}_\alpha \ ; \ \widehat{\rho}_{int} = \frac{\widehat{\sigma}^2_{ec} - \dfrac{\widehat{\sigma}^2_{dc}}{B-1}}{\widehat{\sigma}^2_{ec}+\widehat{\sigma}^2_{dc}} \ ;$$

$$\widehat{\sigma}^2_{ec} = \frac{1}{a-1}\sum_{\alpha=1}^{a}(\widehat{\mu}_\alpha-\widehat{\mu}_C)^2 \ ; \ \widehat{\sigma}^2_{dc} = \frac{1}{a}\sum_{\alpha=1}^{a}\widehat{\sigma}^2_\alpha.$$

3. Variância do estimador

$$\mathcal{V}(\widehat{\mu}_C) = \frac{\sigma^2_{ec}}{a}$$

4. Estimador para a variância dos estimador

$$\widehat{\mathcal{V}}(\widehat{\mu}_C) = \frac{\widehat{\sigma}^2_{ec}}{a}$$

Conglomerados de tamanhos desiguais

5. Estimadores

$$\widehat{\mu}_{C_1} = \frac{\widehat{\overline{\tau}}}{\overline{B}}, \;\; \widehat{\overline{\tau}} = \frac{1}{a}\sum_{\alpha=1}^{a}\widehat{\tau}_\alpha \;\; ;$$

$$\widehat{\mu}_{C_2} = \frac{\widehat{\overline{\tau}}}{\overline{b}}, \;\; \overline{b} = \frac{1}{a}\sum_{\alpha=1}^{a} b_\alpha \;\; ;$$

$$\widehat{\mu}_{C_3} = \frac{1}{a}\sum_{\alpha=1}^{a}\widehat{\mu}_\alpha \;\; ;$$

$$\widehat{\rho}_{C_2} = \frac{\widehat{\sigma}^2_{eq} - \dfrac{\widehat{\sigma}^2_{dc}}{\overline{B}-1}}{\widehat{\sigma}^2_{eq} + \widehat{\sigma}^2_{dc}} \;\; ;$$

$$\widehat{\sigma}^2_{eq} = \frac{1}{a-1}\sum_{\alpha=1}^{a}\left(\frac{b_\alpha}{\overline{b}}\right)^2(\widehat{\mu}_\alpha - \widehat{\mu}_{C_2})^2 \;\; ; \;\; \widehat{\sigma}^2_{dc} = \frac{1}{a}\sum_{\alpha=1}^{a}\frac{b_\alpha}{\overline{B}}\widehat{\sigma}^2_\alpha.$$

$$\widehat{\sigma}^2_{ect} = \frac{1}{a-1}\sum_{\alpha=1}^{a}\left(\frac{b_\alpha}{\overline{B}}\widehat{\mu}_\alpha - \widehat{\mu}_{C_1}\right)^2 \;\; ; \;\; \widehat{\sigma}^2_{em} = \frac{1}{a-1}\sum_{\alpha=1}^{a}(\widehat{\mu}_\alpha - \widehat{\mu}_{C_3})^2.$$

6. Estimadores para as variâncias dos estimadores

$$\widehat{\mathcal{V}}(\widehat{\mu}_{C_1}) = \frac{\widehat{\sigma}^2_{ect}}{a}$$

$$\widehat{\mathcal{V}}(\widehat{\mu}_{C_2}) = \frac{\widehat{\sigma}^2_{eq}}{a}$$

$$\widehat{\mathcal{V}}(\widehat{\mu}_{C_3}) = \frac{\widehat{\sigma}^2_{em}}{a}$$