Cálculo Numérico (MS211) PROVA 1 (25/09/2012)

Nome: ______________________________ RA: __________ Turma: ______

**Trabalhe com *radianos* e 4 *dígitos decimais*! Justifique as suas respostas! Boa sorte!**

---

1. Considere a seguinte equação não linear

$$e^{x^2} = \cos(x) + 0.5\,.$$

   (a) Quantas soluções da equação acima existem? Justifique a sua resposta. [1 pt]

   (b) Uma boa aproximação de uma solução pode ser encontrada através o método de Newton(-Raphson). Se for possível, execute duas iterações do método de Newton(-Raphson) gráficamente para cada um dos chutes iniciais 0, 0.5 e 2. [1.5 pts]

   (c) Escolhe o chute inicial $x_0$ mais apropriado entre as opções 0, 0.5 e 2 e aplique o método de Newton (-Raphson) com $\varepsilon_1 = \varepsilon_1 = 0.01$. Coloque os resultados na tabela apropriada (veja verso). [1.5 pts]

2. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0.3 \\ 1.25 \\ -0.8 \end{pmatrix}.$$

   (a) Verifique se o critério de Sassenfeld está satisfeito. Quais são as consequências para a convergência dos métodos de Gauss-Seidel e de Gauss-Jacobi? [1.5 pts]

   (b) Aplique o método de Gauss-Seidel utilizando o chute inicial $x^{(0)}$ e $\varepsilon = 0.1$. Coloque os resultados na tabela apropriada (veja verso). [1.5 pts]

   (c) A matriz $A$ possui a decomposição $A = LU$, onde $L$ e $U$ são dados abaixo. Quantas soluções de $Ax = b$ existem? Justifique a sua resposta usando $L$ e $U$ mas sem utilizar o próximo item (d). [0.5 pts]

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3333 & -0.2222 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & -0.1667 & -0.1304 & 1 & 0 \\ 0.2 & -0.1333 & -0.1043 & -0.0867 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \\ 0 & 0.75 & -0.1667 & -0.1250 & -0.1000 \\ 0 & 0 & 0.8519 & -0.1111 & -0.0889 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9022 & -0.0783 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9306 \end{pmatrix}.$$

   (d) Entre a decomposição LU e o método de Gauss-Seidel com chute inicial $x^{(0)}$, qual seria o método mais apropriado para obter uma boa aproximação da solução de $Ax = b$? Justifique a sua resposta. [1 pt]

   (e) Utilize a decomposição LU da matriz $A$ para determinar uma solução de $Ax = b$. [1.5 pts]

## ALGUMAS TABELAS ÚTEIS

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $x_k - x_{k-1}$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

---

| $k$ | $x^{(k)}$ | $d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)})$ |
|---|---|---|
| | | |

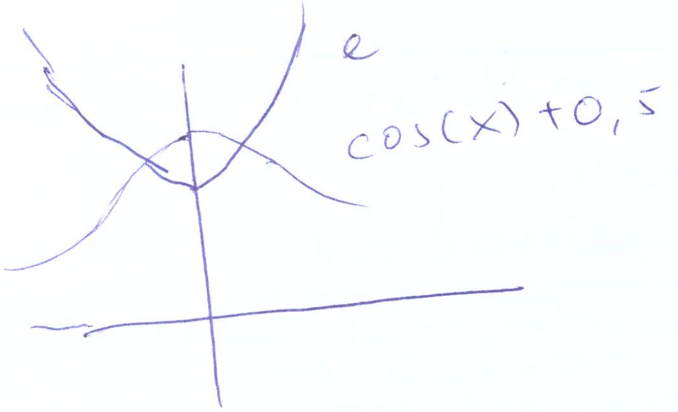
onde

$$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)}) = \frac{||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty}{||x^{(k)}||_\infty} = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|}$$

---

(a) $f(x) = e^{x^2} - \cos(x) - 0,5$

$f'(x) = 2x e^{x^2} + \operatorname{sen}(x)$




2 soluções

1

(b) $x = 0$

Passo de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

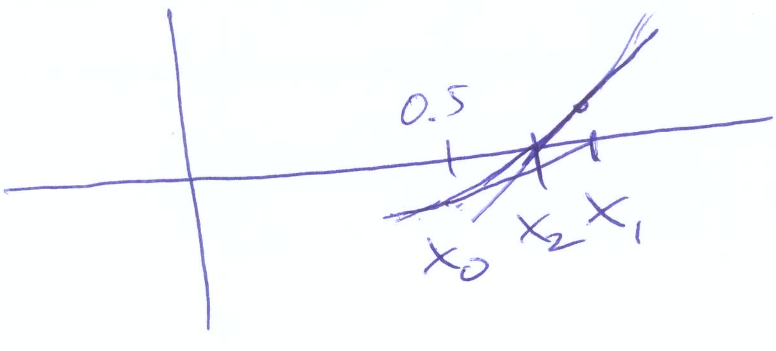
$\frac{1}{2}$

para $x_0 = 0$ temos $f'(x_0) = 0$

então execução do metodo não é possivel

$x = 0,5$:

$f(0.5) = -0.0939$




$\frac{1}{2}$

ALGUMAS TABELAS ÚTEIS

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $x_k - x_{k-1}$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

---

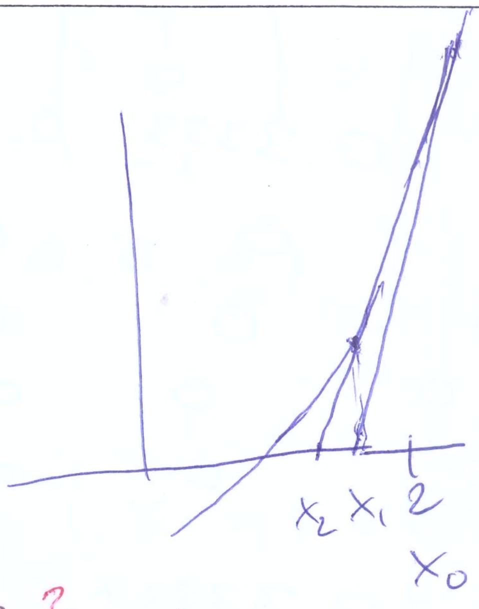
| $k$ | $x^{(k)}$ | $d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)})$ |
|---|---|---|
| | | |

onde

$$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)}) = \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} = \frac{\max_{1\le i\le n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{1\le i\le n} |x_i^{(k)}|}$$

---

~~(c)~~ $x = 2$




1/2

(c) entre 0, 0,5 e 2
0,5 é mais apropriado

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k^2} - \cos(x_k) - 0.5}{2x e^{x_k^2} + \sin(x_k)}$$

1/2

porque

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $x_k - x_{k-1}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,5 | -0.0936 ~~-0,0936~~ | ~~-0~~ — |
| 1 | 0.5531 | ~~-0.0936~~ 0.0069 | |

Resultado

$\xi \approx$ ~~0.6~~ 0.5531

PARE

1

2.

(a)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & -0.3333 & -0.25 & -0.2 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.3333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = 0.5 + 0.3333 + 0.25 + 0.2$$

$$= 1.2833 \geq 1$$

$\therefore$ O critério de Sassenfeld não é satisfeito

$\Rightarrow$ " das linhas " - .

Então não temos garantias que GS vai convergir $\forall x^{(0)}$ para a $x^*$ com $Ax^*=$

e nem temos garantias que

G… $\forall x^0$ … $x^*$ com $Ax^*=$

(b) $\underline{\underline{B = b}} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0.7 \\ 1.25 \\ -0.8 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}$

$C =$

$$x_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & -0.3333 & -0.25 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1.$$

$$= -0.5 - 0.25 + 0.2 + 1.5 = -0.75 + 1.7$$
$$= 0.95$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1.5$$

$$= -0.475 + 1.5 = 1.0250$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.0250 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_3^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.$$

$$= -0.3166 + 0.3 = -0.0166$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ -0.0166 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_4^{(1)} = (-0.25 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ -0.0166 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1.2$$

$$= -0.2375 + 1.25 = 1.0125$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ -0.0166 \\ 1.0125 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_5^{(1)} = (-0.2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ -0.0166 \\ 1.0125 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.$$

$$= -0.9900$$

$$\therefore x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ -0.0160 \\ 1.0125 \\ -0.9900 \end{pmatrix}$$

1/2

| $k$ | $x^{(k)}$ | $d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)})$ |
|---|---|---|
| 0 | $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ | — |
| 1 | $\begin{pmatrix} 0.9500 \\ 1.0250 \\ -0.0166 \\ 1.0125 \\ -0.9900 \end{pmatrix}$ | $\frac{0.05}{1.025} = 0.0488 < \varepsilon = 0.$ PARE |

Resultado $x^* \approx x^{(1)}$

(c) $\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot (1 \cdot 0.75 \cdot 0.8519 \cdot 0.90\ldots \cdot 0.930\ldots$

$\neq 0$

Então $A$ é posto completo

$\Rightarrow \exists!$ solução de $Ax = b$

(d) Visto o fato que dispomos de um bom chute inicial com $Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5500 \\ 1.5 \\ 0.3333 \\ 1.25 \\ -0.8 \end{pmatrix} \approx b$

e que ~~o sis~~ a matriz $A$ é esparsa

e que aparentemente GS converge com $x^{(0)}$

para $x^*$ com $Ax^* = b$

prefere-se utilizar GS

porque as matrizes L e U são

cheias de entradas não-zero

Nesta situação, o esforço computacional

para encontrar uma boa aprox da sol.

$\hat{x}$ de $Ax = b$ é menor com GS do que

com LU. Além disso GS é

numericamente estável porque os pequenos

erros em iterações anteriores não impactam.

1.a)  $A x = b$

$\Longleftrightarrow L(Ux) = b$

no método com 1.2

1/2

1. $L y = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3333 & -0.2222 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & -0.1667 & -0.1304 & 1 & 0 \\ 0.2 & -0.1333 & -0.1047 & -0.08671 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0.3 \\ 1.25 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 1.5$

$0.75 + y_2 = 1.5 \Rightarrow y_2 = 0.75$

$0.5 \cdot -0.1667 + y_3 = 0.3 \Rightarrow y_3 = 0.3 - 0.$
$= -0.033$

$0.25 \cdot 1.5 - 0.1667 \cdot 0.75 + 0.1304 \cdot 0.0333 + y_4 =$

$0.375 - 0.1250 + 0.0043 + y_4 = 1.25$

$y_4 = 1.25 - 0.375 + 0.125 - 0.004$
$= 0.99757$

~~0.21~~

ALGUMAS TABELAS ÚTEIS

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $x_k - x_{k-1}$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

---

| $k$ | $x^{(k)}$ | $d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)})$ |
|---|---|---|
| | | |

onde

$$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)}) = \frac{||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty}{||x^{(k)}||_\infty} = \frac{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)}|}$$

---

$$0.2\cdot 1.5 - 0.1333\cdot 0.75 + 0.1043\cdot 0.0333 - 0.0867\cdot 0.9957 + y_5 = -0.8$$

$$0.3 - 0.1 + 0.0035 - 0.0863 + y_5 = -0.8$$

$$\Rightarrow y_5 = -0.9171$$

$$2.\ Ux = y = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,75 \\ -0,0333 \\ 0,9957 \\ -0,9171 \end{pmatrix}$$

1/2

$$Ux = y = (1.5, 0.75, -0.0333, 0.9957, -0.9\ldots)^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3333 & 0.25 & 0.2 \\ 0 & 0.75 & -0.1667 & -0.1250 & -0.1000 \\ 0 & 0 & 0.8519 & -0.1111 & -0.0889 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9022 & -0.0783 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9306 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$0.9306 x_5 = -0.9171$$

$$\Rightarrow x_5 = -0.9855$$

$$\cancel{-0.9022 \cdot 0.9855 - 0.0783 x_4 = 0.9957}$$

$$\cancel{\Rightarrow x - 0.0783 x_4 = 0.9957 + 0.8891 = 1.8848}$$

$$\cancel{x_4 = 1}$$

$$0.9022 x_4 + 0.0772 = 0.9957$$

$$0.9022 x_4 = 0.9185 \Rightarrow x_4 = 1.0181$$

$$0.8519x_3 - 0.1111 - 1.0181 + \cancel{0.1 - 0.9957}\;0.0876 = -0.0333$$

$$0.8519x_3 - 0.1\cancel{0}31 + \cancel{0.0996}\;0.0876 = -0.0333$$

$$0.8519x_3 = -0.0333 + 0.1131 - 0.0\cancel{996}\,876$$

$$0.8519x_3 = -0.0\cancel{198}078$$

$$x_3 = -0.0092$$

$$0.75x_2 - 0.1667 x_3 - 0.125x_4 - 0.1x_5 = 0.75$$

$$0.75x_2 + 0.0015 - 0.1273 + 0.0986 = 0.75$$

$$0.75x_2 = 0.7772 \Rightarrow x_2 = 1.0363$$

$$x_1 + 0.5x_2 + 0.3333x_3 + 0.25x_4 + 0.2x_5 = 1.$$

$$x_1 + 0.5182 + (-0.0031) + 0.2545 - 0.1971 =$$

$$\Rightarrow x_1 = 1.5 - 0.5182 + 0.0031 - 0.2545 + 0.197$$
$$= 0.9275$$

$$\therefore X = (0.9275, 1.0363, -0.0092, 1.0181, \cancel{0.9275}\;-0.9855)$$

$\frac{1}{2}$