Turma:

Nota:

MA 327 Álgebra Linear

Primeiro Semestre de 2006

E X A M E

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
T o t a l	

Boa Prova !

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e o subconjunto U definido por:

$$U = \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ / \ \int_{-1}^{1} p(x)dx + p'(0) = 0 \right\}.$$

O subconjunto U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$? Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, determine uma base para U.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere V um espaço vetorial real e $\beta = \{ u_1, u_2, u_3 \}$ uma base ordenada de V. Seja $\gamma = \{ w_1, w_2, w_3 \}$ cujos elementos estão relacionados com os elementos da base β da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - u_2 - u_3 \\ w_2 = 2u_2 + 3u_3 \\ w_3 = 3u_1 + u_3 \end{cases}$$

(a) Mostre que γ é uma base para V.

(b) Determine a matriz de mudança de base $[I]_{\beta}^{\gamma}$.

(c) Se um elemento $v \in V$ tem por vetor de coordenadas, em relação à base γ,

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

qual é o seu vetor de coordenadas com relação à base ordenada β ?

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Sejam U e W subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$$
$$W = [(1, 0, 1), (0, -1, 1)]$$

Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = U$ e $Ker(T) = U \cap W$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere o operador linear $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido por:

$$T(p(x)) = p(x) + (1 + x)p'(x).$$

Verifique se T é um automorfismo de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e determine a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$, onde β é a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx \quad ; \quad \forall \ p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço $S = [1 + x, 1 - x^2]$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido acima.

G A B A R I T O

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

(a) Podemos verificar facilmente que U é um subconjunto não vazio, pois o polinômio identicamente nulo satisfaz a condição para que um elemento de $\mathcal{P}_2(I\!R)$ pertença a U. Desse modo, $0_{\mathcal{P}_2(I\!R)} \in U$.

Assim, devemos mostrar que U é fechado com relação à operação de adição e fechado com relação à operação de multiplicação por escalar.

Tomando $p(x),\, q(x) \in U$, isto é, satisfazendo

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx \;+\; p'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{-1}^{1} q(x)dx \;+\; q'(0) = 0\,.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{1} (p+q)(x)dx \;+\; (p+q)'(0) &= \int_{1}^{1} (\,p(x)+q(x)\,)dx \;+\; p'(0) \;+\; q'(0) \\
&= \left\{ \int_{-1}^{1} p(x)dx + p'(0) \right\} + \left\{ \int_{-1}^{1} q(x)dx + q'(0) \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim, mostramos que $(\,p(x) + q(x)\,) \in U$.

Tomando $p(x) \in U$ e $\lambda \in I\!R$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{1} (\lambda p)(x)dx \;+\; (\lambda p)'(0) &= \int_{1}^{1} \lambda p(x)dx \;+\; \lambda p'(0) \\
&= \lambda \left\{ \int_{-1}^{1} p(x)dx + p'(0) \right\} \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Assim, mostramos que $\lambda p(x) \in U$.

Portanto, mostramos que o subconjunto U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(I\!R)$.

(b) Vamos determinar uma base para o subespaço U. Tomando um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, e impondo a condição que $p(x) \in U$, isto é,

$$\int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2)dx + b = 0,$$

obtemos uma equação algébrica

$$6a + 3b + 2c = 0,$$

que possui dois grau de liberdade, de onde concluímos que $dim(U) = 2$.

Assim, temos que

$$c = -3a - \frac{3}{2}b \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Logo, todo elemento $p(x) \in U$ é escrito da seguinte forma:

$$p(x) = (1 - 3x^2)a + \left(x - \frac{3}{2}x^2\right)b \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Portanto, temos que o conjunto

$$\gamma = \left\{ 1 - 3x^2, x - \frac{3}{2}x^2 \right\}$$

é uma base para o subespaço U.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

(a) Como $dim(V) = 3$, basta mostrar que o conjunto γ é linearmente independente. Para isso, vamos considerar uma combinação linear nula dos elementos do conjunto γ

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0_V .$$

Substituindo as relações entre os elementos de γ e os elementos da base β temos que

$$c_1 (u_1 - u_2 - u_3) + c_2 (2u_2 + 3u_3) + c_3 (3u_1 + u_3) = 0_V ,$$

que reorganizando os termos, obtemos

$$(c_1 + 3c_3) u_1 + (-c_1 + 2c_2) u_2 + (-c_1 + 3c_3 + c_3) u_3 = 0_V .$$

Como o conjunto β é linearmente independente, pois é uma base de V, implica que os coeficientes da combinação linear nula acima devem ser todos iguais a zero. Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} c_1 \qquad\quad + 3c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 \qquad\quad = 0 \\ -c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

que possui somente a solução trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Logo, provamos que o conjunto γ é linearmente independente. Portanto, o conjunto γ é uma base para V.

(b) Podemos encontrar facilmente a matriz $[T]^\gamma_\beta$ utilizando as relações entre os elementos de γ e os elementos da base β. Assim, temos que

$$[T]^\gamma_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} .$$

(c) Sabemos que $[v]_\beta = [T]^\gamma_\beta [v]_\gamma$. Desse modo, obtemos

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} ,$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Inicialmente vamos determinar um conjunto de geradores para o subespaço U. Sabemos que todo elemento $(x, y, z) \in U$ satisfaz a equação algébrica

$$x + y + z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = -x - y\,.$$

Logo, todo elemento $(x, y, z) \in U$ é escrito da seguinte forma:

$$(x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \quad ; \quad x, y \in I\!R\,.$$

Portanto, temos que $U = [(1, 0, -1), (0, 1, -1)] = Im(T)$.

Agora considerando o subespaço $W = [(1, 0, 1), (0, -1, 1)]$, vamos determinar uma base para o subespaço $U \cap W$, que é o núcleo do operador que desejamos encontrar.

Tomando um elemento $v \in U \cap W$, isto é, $v \in U$ e $v \in W$. Logo, temos que existem escalares $a, b, c, d \in I\!R$ tais que

$$v = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1) = c(1, 0, 1) + d(0, -1, 1)\,.$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a = c \\ b = -d \\ -a - b = c + d \end{cases}$$

que possui a seguinte solução $c = 0$, $a = 0$ e $b = -d$ para $d \in I\!R$.

Portanto, todo elemento $v \in U \cap W$ é escrito da seguinte forma:

$$v = b(0, 1, -1) \quad ; \quad b \in I\!R\,.$$

Logo, temos que $U \cap W = [(0, 1, -1)] = Ker(T)$.

Completamos a base do subespaço $Ker(T)$ para obter uma base para o espaço vetorial $I\!R^3$. Assim, podemos escolher $\gamma = \{ (0, 1, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 0) \}$ uma base para $I\!R^3$.

Finalmente definimos o operador linear T com as características solicitadas

$$\begin{aligned} T(0, 1, -1) &= (0, 0, 0) \\ T(1, 0, 0) &= (1, 0, -1) \\ T(0, 1, 0) &= (0, 1, -1) \end{aligned}$$

Para obtermos a expressão do operador T, vamos inicialmente representar um elemento genérico $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base ordenada γ, isto é,

$$(x, y, z) = a(0, 1, -1) + b(1, 0, 0) + c(0, 1, 0),$$

obtendo o seguinte sistema linear nas incógnitas a, b, c

$$\begin{cases} b = x \\ a + c = y \\ -a = z \end{cases}$$

Assim, temos que $a = -z$, $b = x$ e $c = y + z$.

Logo, todo elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é escrito da seguinte forma:

$$(x, y, z) = -z(0, 1, -1) + x(1, 0, 0) + (y + z)(0, 1, 0).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= -zT(0, 1, -1) + xT(1, 0, 0) + (y + z)T(0, 1, 0) \\ T(x, y, z) &= -z(0, 0, 0) + x(1, 0, -1) + (y + z)(0, 1, -1) \\ T(x, y, z) &= (x,\ y + z,\ -x - y - z) \end{aligned}$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Vamos verificar se o operador T é um automorfismo de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Para isso, devemos determinar o subespaço $Ker(T)$, isto é,

$$Ker(T) = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ T(p(x)) = 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \}.$$

Tomando um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, vamos impor a condição que $p(x) \in Ker(T)$, isto é,

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= (a + bx + cx^2 + dx^3) + (1 + x)(b + 2cx + 3dx^2) = 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \\ &= (a + b) + (2b + 2c)x + (3c + 3d)x^2 + 4dx^3 = 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Isso nos leva a um sistema linear homogêneo cuja solução é $a = b = c = d = 0$.

Logo, $Ker(T) = \{ 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \}$, isto é, T é um operador injetor. Pelo Teorema do núcleo e da imagem, sabemos que $Im(T) = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, isto é, T é um operador sobrejetor. Portanto, mostramos que T é um automorfismo de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Finalmente vamos determinar a representação matricial do operador T com relação à base canônica $\beta = \{ 1, x, x^2, x^3 \}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Para isso, vamos calcular

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(x) &= 1 + 2x \\ T(x^2) &= 2x + 3x^2 \\ T(x^3) &= 3x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos que

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Chamando $p_1(x) = 1 + x$ e $p_2 = 1 - x^2$, temos que o subespaço $S = [p_1(x), p_2(x)]$.

O subespaço $S^{\perp}$ é definido por:

$$S^{\perp} = \{ \, q(x) \in \mathcal{P}_2(I\!R) \ / \ \langle \, r \, , \, q \, \rangle = 0 \quad ; \quad \forall \ r(x) \in S \, \} \, .$$

Tomando um elemento genérico $q(x) = a + bx + cx^2 \in S^{\perp}$, sabemos que

$$\begin{aligned} \langle \, p_1 \, , \, q \, \rangle &= \int_1^1 (\, a + bx + cx^2 \,)(\, 1 + x \,) dx \\ &= \int_1^1 (\, a + bx + cx^2 + ax + bx^2 + cx^3 \,) dx \\ &= \int_1^1 (\, a + cx^2 + bx^2 \,) dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \, p_2 \, , \, q \, \rangle &= \int_1^1 (\, a + bx + cx^2 \,)(\, 1 - x^2 \,) dx \\ &= \int_1^1 (\, a + bx + cx^2 - ax^2 - bx^3 - cx^4 \,) dx \\ &= \int_1^1 (\, a + cx^2 - ax^2 - cx^4 \,) dx = 0 \end{aligned}$$

Calculando as integrais acima obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2a + \dfrac{2}{3}c + \dfrac{2}{3}b = 0 \\ \\ \dfrac{4}{3}a + \dfrac{4}{15}c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6a + 2c + 2b = 0 \\ \\ 5a + c = 0 \end{cases}$$

que possui a seguinte solução $b = 2a$ e $c = -5a$ para $a \in I\!R$.

Desse modo, todo elemento $q(x) \in S^{\perp}$ é escrito da seguinte forma:

$$q(x) = a(\, 1 + 2x - 5x^2 \,) \qquad ; \qquad a \in I\!R \, .$$

Portanto, uma base para o subespaço $S^{\perp}$ é dada pelo conjunto

$$\gamma = \{ \, 1 + 2x - 5x^2 \, \} \, ,$$

o que completa a resolução da questão.