Turma:

MA 141 P Geometria analítica

Segundo Semestre de 2008

Prof. Marcos Jardim

Terceira Prova - 27/11/2008

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Q 1	
Q 2	
Q 3	
Q 4	
Q 5	
T o t a l	

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

Questão 1 (2 pontos)

Determine a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva $yz = 1$ e $x = 0$ em torno do eixo z.

Solução: Dado $f(y, z) = yz - 1$, a superfície de revolução desejada será obtida substituindo-se a variável y pela distância ao eixo de rotação:

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = \pm\sqrt{x^2 + y^2}z - 1 = 0$$

Elevando ao quadrado, a equação da superfície simplifica para

$$(x^2 + y^2)z^2 = 1.$$

Questão 2 (2 pontos)

Mostre que a equação:

$$xz + 2yz - 1 = 0$$

representa uma superfície cilíndrica e determine a equação de uma curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes.

Lembre que uma superfície cilíndrica é uma superfície que pode ser obtida quando uma reta, chamada *geratriz*, se move paralelamente passando por uma curva fixa, chamada *diretriz*.

Solução: Fazendo $y = 0$, obtemos a curva $f(x, z) = xz - 1 = 0$ no plano xz. O vetor paralelo às retas geratrizes seria da forma $(a, 1, c)$, pois não é paralelo ao plano xz. Fazendo

$$f(x - ay, z - cy) = (x - ay)(z - cy) - 1 = xz + 2yz - 1,$$

conclui-se que $a = -2$ e $c = 0$. Portanto a curva diretriz é dado por $xz - 1 = 0$, $y = 0$ enquanto um vetor paralelo às retas geratrizes é $(-2, 1, 0)$.

Questão 3 (2 pontos)
Mostre que as interseções do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c)$$

com planos paralelos ao plano xy são elipses de excentricidade constante.
Lembre que a excentricidade da cônica $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ quando $a > b$ é $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$.

Solução: A interseção do elipsóide acima com o plano $z = k$ gera a cônica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}.$$

Esta curva é uma elipse quando $-c < k < c$, é apenas um ponto quando $k = \pm c$ e vazia quando $|k| > c$. Nos concentramos no primeiro caso.
Dividindo os dois lados a última equação por $1 - k^2/c^2$ obtemos

$$\frac{x^2}{a^2(1 - k^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - k^2/c^2)} = 1.$$

A excentricidade, como função de k, é dada por

$$e = \frac{\sqrt{a^2(1 - k^2/c^2) - b^2(1 - k^2/c^2)}}{a\sqrt{1 - k^2/c^2}} = \frac{\sqrt{1 - k^2/c^2}\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{1 - k^2/c^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

o que acaba por ser independente de k.

Questão 4 (2 pontos)
Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ equidistantes do plano $\pi : y = -1$ e do ponto $P_0 = (0, 1, 0)$. Em seguida, identifique que tipo de quádrica é esse conjunto (elipsóide, hiperbolóide de 1 ou 2 folhas, ou um parabolóide elíptico ou hiperbólico).

Solução: Dado $P = (x, y, z)$, note que

$$\text{dist}(P, \pi) = y + 1 \quad \text{e} \quad \text{dist}(P, P_0) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}$$

Como queremos $\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P_0)$, fazemos:

$$(y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2$$

que simplifica para

$$4y = x^2 + z^2.$$

Esta quádrica é um parabolóide elíptico.

Questão 5 (2 pontos)
Identifique a quádrica
$$4x^2 - 3y^2 + 4z^2 + 4xz - 60 = 0$$
como sendo um elipsóide, hiperbolóide de 1 ou 2 folhas, ou um parabolóide elíptico ou hiperbólico. Determine a excentricidade da cônica definida pela interseção da quádrica acima com o plano $z = 2$.
Lembre que a excentricidade da cônica $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ é $e = \sqrt{a^2 + b^2}/a$.

Solução: Primeiramente, calculemos os autovalores da matriz associada a quádrica:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
O polinômio característico é dado por:
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}) = (-3 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12)$$
As raízes de $p_A(\lambda) = 0$ são 2, -3 e 6. Como dois autovalores são positivos e um é negativo, a quádrica é um hiperbolóide de 1 folha.
A interseção da quádrica dada com o plano $z = 2$ é a cônica:
$$4x^2 - 3y^2 + 8x = 44 \implies 4(x^2 + 2x) - 3y^2 = 44 \implies$$
$$4(x+1)^2 - 3y^2 = 48 \implies \frac{1}{12}(x+1)^2 - \frac{1}{16}y^2 = 1$$
Portanto a cônica é um hipérbole de excentricidade $e = \sqrt{12 + 16}/\sqrt{12} = \sqrt{7/3}$.