ME - 310 Probabilidade II
Prof. Caio Azevedo
Segundo semestre de 2009, Data: 30/09/2009
Prova I

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **Tenha em mãos somente: lápis, borracha e caneta.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Em caso de dúvida, levante-se e dirija-se ao professor. Pergunte somente o que for imprescindível.**
- **Entregue todas as folhas que você recebeu, inclusive os rascunhos e a prova propriamente, informando o que deve ser corrigido.**
- **Faça a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado. Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **Não proceda de maneira indevida como: conversar durante a prova, utilizar-se de material que não permitido, emprestar material à colegas, sem autorização do professor e atender o telefone celular (a não ser em casos de EXTREMA URGÊNCIA). Isso acarretará em nota 0 na prova.**
- **Se precisar de algum material, inclusive calculadora, levante-se e dirija-se ao professor.**
- **A prova terá duração de 2 horas, improrrogáveis, das 14h às 16h.**

Faça uma excelente prova!!

Questões

1. Seja X uma v.a.c., $X \sim \text{Weibull}(k, \lambda), (k, \lambda) \in (0, +\infty)^2$, cuja f.d.p é dada por:

$$f_X(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

Responda os itens:

a) Prove que f_X é de fato uma f.d.p (0,2 pontos)?

b) Calcule a f.d.a (F_X) de X e a escreva usando funções indicadoras (0,2 pontos).

c) Calcule $\mathcal{E}(X^s), s > 0$ (0,6 pontos).

d) Calcule $\mathcal{E}(X)$ e $\mathcal{V}(X)$ (0,2 pontos).

2. Seja X uma v.a.c, cuja f.d.p é dada por: $f_X(x) = (1/2)\left[\theta \mathbb{1}_{(0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,2]}(x) + (1-\theta)\mathbb{1}_{(2,3)}(x)\right]$, $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$. Responda aos itens:

   a) Prove que f_X é de fato uma f.d.p (0,4 pontos).

   b) Encontre a f.d.a de X, (F_X) e a escreva usando funções indicadoras (0,4 pontos).

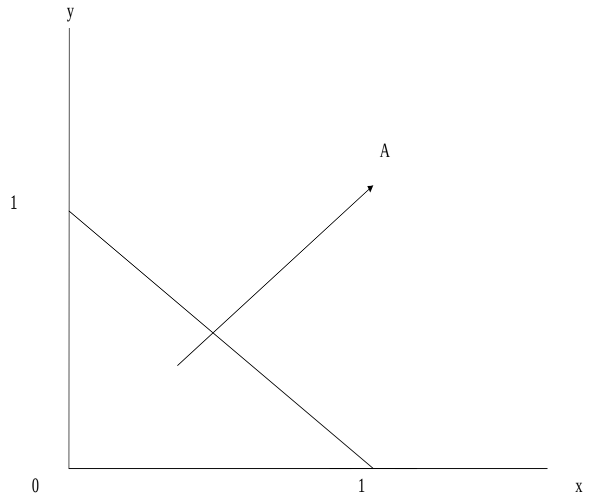
   c) Verifique que F_X satisfaz a seguinte propriedade (1,0 ponto):

   - $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

   d) Calcule $\mathcal{E}(X)$, $\mathcal{V}(X)$ (1,0 ponto).

   e) Calcule $Md(X)$ (1,0 ponto).

3. Seja (X, Y) um vetor aleatório contínuo, cuja f.d.p é dada por $f_{(X,Y)}(x, y) = c\mathbb{1}_A(x, y)$, em que A é a região definida pelo triângulo abaixo:



   a) Escreva $f_{(X,Y)}$, primeiramente, com x variando em função de y, depois com y variando em função de x. Determine o valor de c de modo que $f_{(X,Y)}$ seja de fato uma f.d.p. (0,5 pontos)

   b) Encontre as f.d.p.'s marginais de X e de Y. Identifique suas distribuições (1,0 ponto).

   c) Calcule a $\mathcal{E}(X)$, $\mathcal{E}(Y)$, $\mathcal{V}(X)$ e $\mathcal{V}(Y)$ (1,0 ponto).

   d) Calcule a f.d.p condicional de $X|Y$. Identifique sua distribuição (0,5 pontos).

   e) Calcule $\mathcal{E}(X)$ através da f.d.p. obtida no item d). O resultado é o mesmo daquele obtido no item c)? Sua conclusão era esperada? Jusitifique adequadamente sua resposta (2,0 pontos).

Legenda

- v.a.c: variável aleatória contínua.
- f.d.p: função densidade de probabilidade ou função de probabilidade.
- f.d.a: função de distribuição acumulada.

Formulário

- $\forall r > 0$, $\Gamma(r) = \begin{cases} (r-1)!, & \text{se r for inteiro.} \\ \displaystyle\int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx, & \text{se r não for inteiro.} \end{cases}$
- $\forall r > 0 \ \Gamma(r) = r\Gamma(r-1)$.
- Sejam X e Y duas v.a.'s quaisquer, então: $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(\mathcal{E}(X|Y))$.
- Sejam X e Y duas v.a.'s quaisquer, então: $\mathcal{E}(X+Y) = \mathcal{E}(X) + \mathcal{E}(Y)$.
- Se $X \sim Beta(a,b), a, b > 0$, então $f_X(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Nesse caso $\mathcal{E}(X) = \frac{a}{a+b}$ e $\mathcal{V}(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.
- Se $X \sim U(a,b), a, b > 0$ (Uniforme), então $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$, $\mathcal{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.