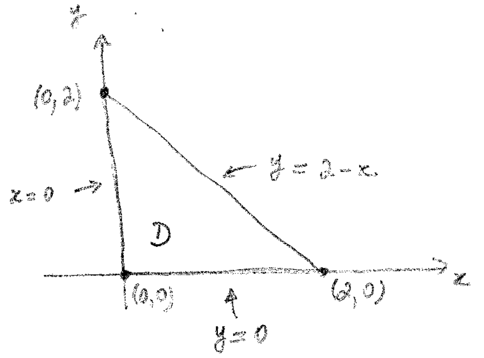
2,5 1



Pontos críticos de f $(f(x,y)=x^2+y^2-2x)$:

$$\nabla f = (2x-2,\ 2y)$$

$$\nabla f=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(1,0)$$

$(1,0) \notin int\,(D)$ 0,5

Logo, os pontos de máximo e mínimo de f ocorrem na fronteira de D.

estudar os extremos 1,0

a) $x=0$: $f(0,y)=y^2$, $0\leq y\leq 2$: tem valor máximo quando $y=2$ e mínimo, quando $y=0$;

b) $y=0$: $f(x,0)=x^2-2x=x(x-2)$, $0\leq x\leq 2$: tem valor máximo (esta função é uma parábola com a concavidade para cima) quando $x=0$ ou $x=2$ e mínimo quando $2x-2=0$ (derivada da função x^2-2x) i.e. $x=1$;

c) $y=2-x$: $f(x,2-x) = x^2+(2-x)^2-2x = x^2+4-4x+x^2-2x$
$= 2x^2-6x+4 = \underbrace{2(x^2-3x+2)}_{\text{parábola com a concavidade para cima e tem discriminante}}$, $0\leq x\leq 2$

Logo seu mínimo ocorre quando, $\Delta = 9-8>0$,
$2x-3=0$ (sua derivada)
i.e. $x=3/2$

o qual é um ponto intervalo em questão $[0,2]$. Além disso, para $x=0$ e $x=2$ (extremos do intervalo $[0,2]$) ela vale 4 e $2(4-6+2)=0$, respectivamente. Então, quando $y=2-x$, $0\leq x\leq 2$, a função $f(x,y)$ tem valores mínimo $f(x,2-x)\big|_{x=\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$ e máximo, 4.

pts possíveis 0,5

De a), b) e c), temos os possíveis pontos onde a função atinge seu valor de mínimo e máximo:

$$(0,0),\ (0,2),\ (1,0),\ (2,0),\ \left(\frac{3}{2},\frac{1}{3}\right).$$

Calculando f nestes pontos, obtemos os valores 0, 4 e -1. Portanto, os valores de máximo e mínimo de f em D são -1 e 4.

+0,5 → min max

2,5 ②

Problema: Achar os valores de máximo e mínimo da função

$$f(x,y,z) = z$$

com as restrições

$$g(x,y,z) \equiv x+y+z = 12 \quad \text{e}$$
$$h(x,y,z) \equiv z - x^2 - y^2 = 0.$$

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos resolver o sistema

montar o problema = sistema = 1,0

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, z, λ e μ. Calculando os gradientes e substituindo nestas equações, obtemos

$$\begin{cases} (0,0,1) = \lambda (1,1,1) + \mu(-2x, -2y, 1) \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu x = 0 & (1) \\ \lambda - 2\mu y = 0 & (2) \\ \lambda + \mu = 1 & (3) \\ x+y+z = 12 & (4) \\ x^2+y^2 = z & (5) \end{cases}$$

−0,2 se não observar $\lambda \neq 0$

resolver o sistema 2,0

Observamos que $\mu \neq 0$, pois se $\mu = 0$, da eq. (3) teríamos $\lambda = 1$ e da (1) ou (2), $\lambda = 0$. Sendo $\mu \neq 0$, das eqs. (1) e (2) obtemos $2\mu x = \lambda = 2\mu y$, ou seja, $\boxed{x = y}$. Daí e de (5) vem que $\boxed{z = 2x^2}$; substituindo em (4), obtemos $2x + 2x^2 = 12$, i.e. $x^2 + x = 6$. Resolvendo,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}.$$

Daí e de (4) com $x = y$, obtemos os valores para z:

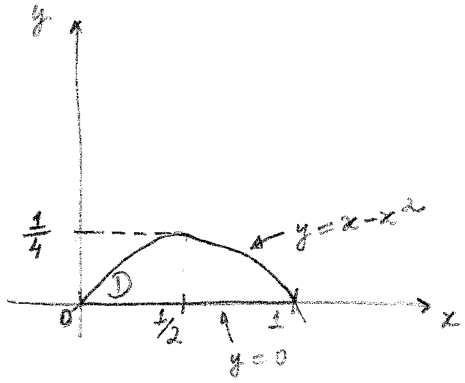
$$4 + z = 12 \therefore \boxed{z = 8} \quad \text{e} \quad -6 + z = 12 \therefore \boxed{z = 18}$$

Portanto, os pontos mais alto e mais baixo da elipse são

$$\underbrace{(-3,-3,18)}_{max} \text{ e } \underbrace{(2,2,8)}_{min}.$$

resposta 0,5

③ 1,5 a)



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{x-x^2} (xy+1)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_{y=0}^{y=x-x^2} dx$$

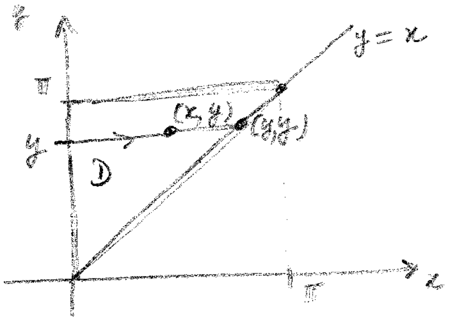
$$= \int_0^1 \left[x\frac{(x-x^2)^2}{2}+x-x^2\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x}{2}(x^2-2x^3+x^4)+x-x^2\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(x^3-2x^4+x^5)+x-x^2\right] dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}}_{\frac{15-24+10}{60}}\Big)+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{\frac{3-2}{6}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{60}+\frac{1}{6} = \frac{1+20}{120} = \frac{21}{120}.$$

1,5 b)



$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\text{sen}\, y}{y}\,dy\,dx = \iint_D \frac{\text{sen}\, y}{y}\,dA$$

$$= \int_0^\pi \int_0^y \frac{\text{sen}\, y}{y}\,dx\,dy$$

trocou a ordem 0,7

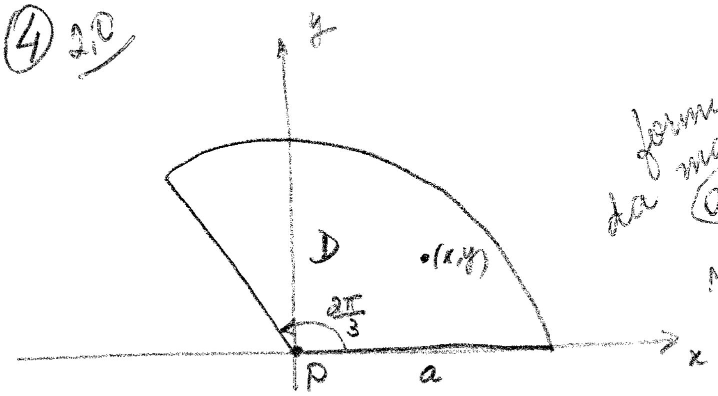
$$= \int_0^\pi \frac{\text{sen}\, y}{y}\, x\Big|_{x=0}^{x=y} dy$$

$$= \int_0^\pi \text{sen}\, y\,dy = -\cos y\Big|_0^\pi = 1+1 = 2.$$

fez a conta correta

+0,8

4) 2,0



A massa m será dada por

formula da massa 0,5

$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dA$$

montou a integral correta 0,5

$$\iint_D K\sqrt{x^2+y^2}\, dA$$

onde K é a constante de proporcionalidade da distância do ponto (x,y) a $P \equiv (0,0)$. Usando coordenadas polares, obtemos

coord. pol. 0,5

$$m = K\int_0^a\int_0^{2\pi/3} r\, r\, d\theta\, dr = \frac{2\pi}{3}K \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^a$$

ou seja

$$\boxed{m = \frac{2K\pi a^3}{9}}.$$

contas corretas 0,5