2ª Prova

MA-311 - Vespertino — Cálculo III

1º Semestre de 2012

Nome: GABARITO

RA:

Assinatura:

Prof.:

Esta prova tem um total de 5 questões valendo 10 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA!

1	2.0	
2	2.0	
3	1.5	
4	2.0	
5	2.5	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*2.0 pontos*) Resolva por transformada de Laplace o seguinte PVI:

$$y'' + 4y' + 5y = 3 + \delta(t - \pi)$$

onde $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

2. (*2.0 pontos*) Encontre $f(t)$, calculando a seguinte transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+2s+5}e^{-s}\right\} = f(t).$$

3. (*1.5 pontos*) Encontre a solução geral (real) do sistema linear homogêneo de e.d.o.'s $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ usando o método de autovalores e autovetores onde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. (*2.0 pontos*) Dado o sistema:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} t^2 + t - 1 \\ 2t - 1 \end{pmatrix},$$

encontre a solução geral (real) do sistema linear não-homogêneo utilizando o **método de variação de parâmetros** (indicando claramente a matriz fundamental), dado que a solução do homogêneo associado é:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right).$$

5. (*2.5 pontos*)

(a) (0.8) Usando o teste da integral determine se a série converge ou diverge:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{15}}$$

(b) (0.8) Verifique se a série converge condicionalmente, absolutamente ou diverge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{sen} k}{k^2+1}.$$

(c) (0.9) Estude a convergência da série: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^3+n}}{\sqrt[3]{5n^7+2n^2}}$.

1) $y'' + 4y' + 5y = 3 + \delta(t-\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$

$$\mathcal{L}\{y''+4y'+5y\}(s) = s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4(sY - y(0)) + 5Y = Y(s^2+4s+5) - 2$$

$$\mathcal{L}\{3+\delta(t-\pi)\}(s) = \frac{3}{s} + e^{-\pi s} \qquad Y = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$$

$$Y = \frac{3}{s(s^2+4s+5)} + \frac{2}{s^2+4s+5} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+4s+5}$$

0,6

$$\frac{3}{s(s^2+4s+5)} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s} - \frac{3}{5}\cdot\frac{s+4}{(s+2)^2+1}$$

0,3

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s} - \frac{3}{5}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + 2\frac{1}{(s+2)^2+1}\right)$$

0,2

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{3}{5}\right\}(s) - \frac{3}{5}\left(\mathcal{L}\{\cos t\}(s+2) + 2\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s+2)\right)$$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-2t}(\cos t + 2\operatorname{sen} t)\right\}(s)$$

0,3

$$\frac{2+e^{-\pi s}}{s^2+4s+5} = 2\frac{1}{(s+2)^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{(s+2)^2+1}$$

$$= 2\mathcal{L}\{e^{-2t}\operatorname{sen} t\}(s) + e^{-\pi s}\mathcal{L}\{e^{-2t}\operatorname{sen} t\}(s)$$

$$= 2\mathcal{L}\{e^{-2t}\operatorname{sen} t\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)\,u_\pi(t)\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\{\underbrace{2e^{-2t}\operatorname{sen} t}_{0,1} + \underbrace{e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)\,u_\pi(t)}_{0,3}\}(s)$$

0,4

RESPOSTA:

$$y(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-2t}\cos t + \frac{4}{5}e^{-2t}\operatorname{sen} t + e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)\,u_\pi(t)$$

0,2

$-0,2 \leftarrow$ cada erro de conta

2) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{2x-3}{x^2+2x+5} e^{-x} \right\}(t) = y(t)$

$$\frac{2x-3}{x^2+2x+5} e^{-x} = \frac{2x-3}{(x+1)^2+4} e^{-x} = \frac{2(x+1)-5}{(x+1)^2+2^2} e^{-x}$$

$$= \left[2\frac{x+1}{(x+1)^2+2^2} - \frac{5}{2}\frac{2}{(x+1)^2+2^2} \right] e^{-x}$$

0,8

$$= \left[2\,\mathcal{L}\{\cos 2t\}(x+1) - \frac{5}{2}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}(x+1) \right] e^{-x}$$

0,3

$$= \left[2\,\mathcal{L}\{e^{-t}\cos 2t\}(x) - \frac{5}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\operatorname{sen} 2t\}(x) \right] e^{-x}$$

0,3

$$= \mathcal{L}\left\{ e^{-t}\left(2\cos 2t - \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2t\right) \right\}(x)\, e^{-x}$$

$$= \mathcal{L}\left\{ e^{-t+1}\left[2\cos 2(t-1) - \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2(t-1)\right] u_1(t) \right\}(x)$$

0,4

$$y(t) = e^{-t+1}\left[2\cos 2(t-1) - \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2(t-1)\right] u_1(t)$$

0,2

3) $x' = \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}^{A} x$

$$p(r) = \begin{vmatrix} 3-r & -4 \\ 4 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 6r + 25$$

0,2 $r_1 = 3+4i$ e $r_2 = 3-4i$ são os autovalores

$\boxed{r_1 = 3+4i}$ $\begin{bmatrix} 3-r_1 & -4 \\ 4 & 3-r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4i & -4 \\ 4 & -4i \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -4i & -4 \\ 4 & -4i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -4ix - 4y = 0 \\ 4x - 4iy = 0 \end{cases} \iff \boxed{y = -ix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -ix \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$, $x \neq 0$ são os autovetores de A

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

0,5

$$\Phi(t) = e^{3t+4ti}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = e^{3t}(\cos 4t + i \operatorname{sen} 4t)\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

0,2

$$= \underbrace{e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 4t \\ \operatorname{sen} 4t \end{bmatrix}}_{x_1(t)} + i\,\underbrace{e^{3t}\begin{bmatrix} \operatorname{sen} 4t \\ -\cos 4t \end{bmatrix}}_{x_2(t)}$$

0,4 $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções L.I. reais do sistema

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

0,2

---

4) $$X'(t) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} t^2 + t - 1 \\ 2t - 1 \end{bmatrix}$$

$$X_H(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t \\ 2t - 1/2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$ solução geral do sistema homogêneo associado

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t - 1/2 \end{bmatrix}$$

0,2

$$X_p(t) = \Psi(t)\, U(t), \quad U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\Psi(t)\, U'(t) = \begin{bmatrix} t^2 + t - 1 \\ 2t - 1 \end{bmatrix}$$

0,4

$$\begin{cases} u_1' + t u_2' = t^2 + t - 1 \\ 2u_1' + (2t - 1/2) u_2' = 2t - 1 \end{cases} \qquad W = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t - 1/2 \end{vmatrix} = -1/2$$

0,3

$$u_1' = -2 \begin{vmatrix} t^2 + t - 1 & t \\ 2t - 1 & 2t - 1/2 \end{vmatrix} = -4t^3 + t^2 + 3t - 1$$

$$u_1 = -t^4 + t^3/3 + 3t^2/2 - t$$

0,3

$$u_2' = -2 \begin{vmatrix} 1 & t^2 + t - 1 \\ 2 & 2t - 1 \end{vmatrix} = 4t^2 - 2, \quad u_2 = 4t^3/3 - 2t$$

0,3

$$X_p(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t - 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t^4 + t^3/3 + 3t^2/2 - t \\ 4t^3/3 - 2t \end{bmatrix}$$

0,3

$$X(t) = X_H(t) + X_p(t)$$ (Resposta)

0,2

5 a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{15}}$, $a_k = \dfrac{1}{k(\ln k)^{15}}$, $k \geq 2$.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{15}}$, $x \geq 2$; $f(k) = a_k$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{15}} = \frac{1}{(+\infty)(+\infty)^{15}} = 0$

(iii) $f'(x) = -\dfrac{(\ln x)^{15} + 15(\ln x)^{14}}{[x(\ln x)^{15}]^2} < 0$, $x \geq 2$

$\Rightarrow f(x)$ é decrescente

0,2

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x(\ln x)^{15}} = \int \frac{du}{u^{15}} \qquad \begin{cases} u = \ln x \\ du = \dfrac{dx}{x} \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{14}\,\frac{1}{u^{14}} = -\frac{1}{14}\,\frac{1}{(\ln x)^{14}}$$

0,2

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{m\to+\infty} \int_2^m f(x)\,dx = \lim_{m\to+\infty}\left(-\frac{1}{14}\,\frac{1}{(\ln x)^{14}}\Bigg|_{x=2}^{x=m}\right)$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{14}\left(\frac{1}{(\ln 2)^{14}} - \frac{1}{(\ln m)^{14}}\right) = \frac{1}{14(\ln 2)^{14}}$$

Segue pelo Critério da Integral que a série dada converge.

0,4

5b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \frac{\operatorname{sen} k}{k^2+1}}_{a_k}$

0,4 $\displaystyle |a_k| = \frac{|\operatorname{sen} k|}{k^2+1} \leq \frac{1}{k^2+1} \leq \frac{1}{k^2} = b_k$

0,2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ é a série harmônica de ordem $p=2$ e portanto converge

Como $|a_k| \leq b_k$, $k \geq 1$, e a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, segue pelo Critério de Comparação que a

0,2 série dada converge absolutamente.

5c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[5]{m^3+m}}{\sqrt[3]{5m^7+2m^2}}}_{a_m}$

0,4 $\displaystyle a_m = \frac{\sqrt[5]{m^3+m}}{\sqrt[3]{5m^7+2m^2}} \leq \frac{\sqrt[5]{2m^3}}{\sqrt[3]{5m^7}} = \underbrace{\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{5}} \frac{1}{m^{26/15}}}_{b_m}$

0,2 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{5}} \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{26/15}}}$ série harmônica de ordem $p=26/15$ e portanto converge

Como $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ converge e

$0 \leq a_m \leq b_m$, $m \geq 1$, segue pelo Critério de Comparação

0,3 que a série dada converge.