1ª Prova de F-128 – Turmas do Diurno

Segundo semestre de 2004 – 18/10/2004

1) No instante em que a luz de um semáforo fica verde, um automóvel sai do repouso com aceleração constante a_A. Neste mesmo instante ele é ultrapassado por um caminhão se movendo com velocidade constante v_C.

(a) Em um certo momento, o carro irá alcançar novamente o caminhão. A velocidade do carro neste instante será maior ou menor que a velocidade do caminhão? Justifique.

(b) Em quanto tempo o automóvel irá ultrapassar o caminhão?

(c) A que distância do semáforo ocorrerá esta ultrapassagem?

(c) Esboce um gráfico da posição em função do tempo para os dois veículos até um tempo posterior a ultrapassagem do automóvel.

Solução:

a) A velocidade média do percurso (até o carro alcançar o caminhão) é a mesma para os dois veículos (pois percorreram a mesma distância no mesmo intervalo de tempo). Logo a velocidade final do carro no percurso **deve ser maior que a velocidade do caminhão** para que ambos tenham a mesma velocidade média (lembre-se que o carro partiu do repouso)

(b) Os veículos devem seguir equações de movimento abaixo:

Caminhão: $x_C(t) = x_0 + v_C t$ (mov. com velocidade constante)

Automóvel: $x_A(t) = x_0 + \frac{a_A}{2}t^2$ (mov. com aceleração constante)

onde x_0 corresponde a posição do semáforo.Desejamos encontrar o tempo $t = t_E$ tal que:

$$x_C(t_E) = x_A(t_E) \Rightarrow x_0 + v_C t_E = x_0 + \frac{a_A}{2}t_E^2 \Rightarrow t_E\left(\frac{a_A}{2}t_E - v_C\right) = 0$$

A equação acima tem duas soluções:

1) $t_E = 0$ (já sabíamos que inicialmente eles estavam na mesma posição)

2) $t_E = 2\frac{v_C}{a_A}$ (é a solução que desejamos obter)

logo, o carro irá ultrapassar o caminhão em $t_E = 2\frac{v_C}{a_A}$.

(c) A distância D depois do semáforo em que ocorre esta ultrapassagem é dada por:

$$D = x_C(t_E) - x_0 = v_C t_E = v_C\left(2\frac{v_C}{a_A}\right)$$

Logo, a distância com relação ao semáforo em que ocorre a ultrapassagem é dada por:

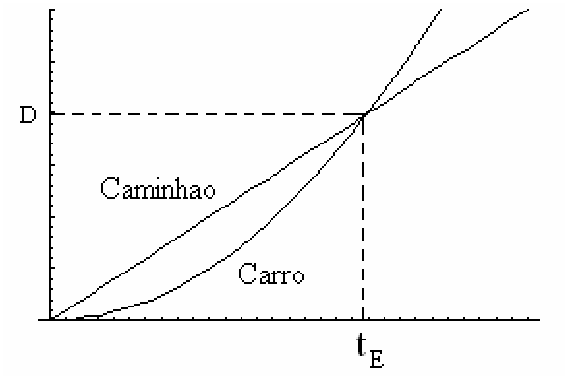
$$D = 2\frac{v_C^2}{a_A}$$

(d) Conhecendo as equações de movimento dos dois veículos:

Caminhão: $x_C(t) = x_0 + v_C t$ (Equação linear).

Automóvel: $x_A(t) = x_0 + \frac{a_A}{2}t^2$ (Equação de segundo grau).

Podemos esboçar o gráfico x(t) versus t (aqui escolhemos $x_0 = 0$ para facilitar a visualização):



Lembrando que $D = 2\frac{v_C^2}{a_A}$ e $t_E = 2\frac{v_C}{a_A}$ no gráfico acima.

2) Em uma base militar sob ataque, parte do sistema de defesa entrou em pane devido à ataques anteriores e travou o lançador de projéteis de tal maneira que só é possível lançá-los a velocidade formando um ângulo de **45 graus** com a horizontal. No instante $t_0 = 0$, o radar indica que um bombardeiro B-52 inimigo se aproxima com velocidade igual a **820 km/h** a uma altitude de **400 m** e a uma distância horizontal de **2 km**.

a) Qual deve ser o módulo da velocidade mínima, v_{min}, de lançamento do projétil para que o avião inimigo possa ser abatido?

b) Devido à pane, o lançador de míssil só pode lançar projéteis a uma velocidade igual a 3 vezes a velocidade mínima, ou seja, $v_0 = 3v_{min}$. Calcule o intervalo de tempo após t_0 em que se deve lançar o projétil de tal maneira que o bombardeiro inimigo seja abatido. Interprete o seu resultado com um desenho esquemático das trajetórias do avião e do projétil indicando o ponto de impacto. Dados: $g = 10$ m/s^2

Dados: $g \approx 10$ m/s.

RESPOSTA:

a) A velocidade mínima necessária para abater o avião inimigo é tal que a altura máxima, $H_{\text{máx}}$, atingida pelo projétil deve ser igual a altura do bombardeiro. Logo,

$$H_{\text{máx}} = 400 \text{ m}.$$

Como

$$H_{\text{máx}} = \frac{(v_{\text{min}} \text{sen}\theta)^2}{2g}, \Longrightarrow v_{\text{min}} \approx 126 \text{ m/s},$$

onde $\theta = 45°$.

b) Neste caso, o projétil será lançado a uma velocidade inicial igual a $v_0 = 378$ m/s. Para que o avião seja abatido, é necessário que

$$\vec{R}_p(t_E) = \vec{R}_a(t_E), \quad (1)$$

onde $\vec{R}_p(t)$ e $\vec{R}_a(t)$ são os vetores posição do projétil e do avião, respectivamente, e t_E é o instante de tempo em que o avião é abatido. O vetor posição do avião é

$$\vec{R}_a(t) = x_0 - v_a t\,\hat{i} + h\hat{j},$$

onde escolhemos a origem do sistema de coordenadas a posição do lançador de projéteis. Portanto, $x_0 = 2$ km é a distância horizontal do avião ao lançador no instante $t_0 = 0$, $v_a \approx 228$ m/s é a velocidade do avião, e $h = 400$ m é a sua altura.

Definimos t^* o intervalo de tempo após t_0 em que se deve lançar o projétil de modo que o avião seja abatido. Portanto, o vetor posição do projétil é

$$\vec{R}_p(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \le t^*, \\ v_{0x}(t - t^*)\hat{i} + v_{0y}(t - t^*) - \frac{1}{2}g(t - t^*)^2\,\hat{j}, & \text{se } t > t^*, \end{cases}$$

onde $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$, com $v_{0x} = v_0 \cos\theta \approx 267$ m/s e $v_{0y} = v_0 \text{sen}\theta \approx 267$ m/s.

Da Eq. (1) temos que

$$x_0 - v_a t_E = v_{0x}(t_E - t^*), \quad (2)$$
$$h = v_{0y}(t_E - t^*) - \frac{1}{2} g (t_E - t^*)^2, \quad (3)$$

onde encontramos os valores de t_E e t^*. Substituindo $t_E - t^*$ da Eq. (2) na Eq. (3), encontramos que

$$\alpha t_E^2 + \beta t_E + \gamma = 0,$$

onde

$$\alpha = \frac{g v_a^2}{2 v_{0x}^2} \approx 3,64,$$
$$\beta = \frac{v_a}{v_{0x}} \left(v_{0y} - \frac{g x_0}{v_{0x}} \right) \approx 164,17,$$
$$\gamma = h + \frac{x_0}{v_{0x}} \left(\frac{g x_0}{2 v_{0x}} - v_{0y} \right) \approx -1320,05.$$

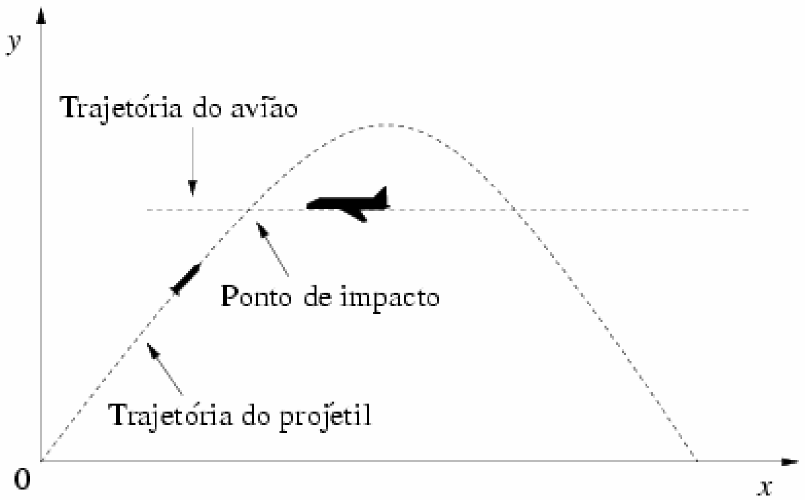
Dessa maneira, encontramos as seguintes soluções,

$$t_E \approx -52,09 \text{ s e } t^* \approx -104 \text{ s},$$

ou

$$t_E \approx 6,97 \text{ s e } t^* \approx 5,42 \text{ s}.$$

A primeira solução se refere ao caso em que o projétil atingiria o avião após este ter ultrapassado o ponto de máxima altura de sua trajétoria. Como esta solução requer valores de tempos negativos, tal situação não pode mais ocorrer. A segunda solução se refere ao caso em que o avião é abatido quando o projétil ainda está ascendendo. Para tal, o projétil deve ser lançado 5,42 segundos após o avião inimigo ter sido detectado pelo radar.



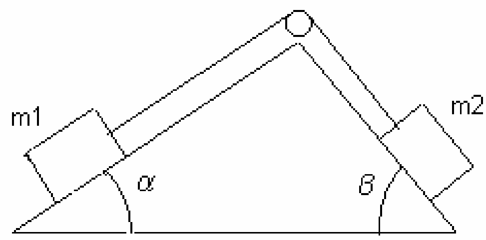
3) Um pequeno objeto de massa **m = 2,5 g** é colocado no prato de um toca-disco. O período de rotação do toca-disco é **T = 3.14 s**.
a) Qual é a velocidade do objeto quando ele gira sem deslizar, se está localizado a uma distância de **4 cm** do centro do disco?
b) Qual é a força de atrito que atua sobre o objeto no item (a)?
c) Qual é o coeficiente de atrito estático entre o objeto e o prato do toca-disco, se o objeto desliza e cai quando colocado a uma distância superior a **12 cm** do centro do disco? Dados: g = 10 m/s^2

a) $v = \frac{2pR}{T} = \frac{2p.4}{3,14} \approx 8$ cm/s ou 0.08m/s.

b) $F_{at} = F_c = \frac{0,0025\,.(0,08)^2}{0,04} = 0,4 \times 10^{-3}\,N$

c) $F_{at} = F_c =$ $mgm = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow m = \frac{w^2 R}{g} = 0.048.$

4) Considere dois blocos de massa m_1 e m_2 ligados por um fio, que passa por uma polia. Os dois blocos estão sobre planos inclinados lisos (sem atrito), que fazem ângulos a e b com a horizontal (ver figura abaixo).



(a) determine a aceleração dos blocos e a tensão na corda em função das massas m_1 e m_2, dos ângulos a e b e da aceleração da gravidade g.

(b) Considere o caso $m_2 = m_1 \frac{sena}{senb}$. Quais são os tipos de movimento possíveis?

Solução:

(a) Bloco 1: Primeiro, decompomos a força peso em uma componente paralela ($P_{1//}$) e uma componente perpendicular ($P_{1\perp}$) ao plano inclinado:

$$P_{1\perp} = P_1 \cos a = m_1 g \cos a \quad ; \quad P_{1//} = P_1 sena = m_1 gsena$$

Em seguida, aplicamos a segunda lei de Newton na direção paralela ao plano inclinado, onde estão atuando sobre o bloco a tensão T e a componente do peso P_{1T} :

$$T - P_{1//} = m_1 a \Rightarrow T = m_1 a + m_1 g sen a \qquad (1)$$

Bloco 2: Desta vez, decompomos a força peso em uma componente paralela ($P_{2//}$) e uma componente perpendicular ($P_{2\perp}$) ao outro plano inclinado (de inclinação b) :

$$P_{2\perp} = P_2 \cos b = m_2 g \cos b \qquad ; \qquad P_{2//} = P_2 sen b = m_2 g sen b$$

E aplicamos novamente a segunda lei de Newton:

$$P_{2//} - T = m_2 a \Rightarrow T = m_2 g sen b - m_2 a \qquad (2)$$

Igualando as equações (1) e (2), obtemos que:

$$m_1 a + m_1 g sen a = m_2 g sen b - m_2 a$$

De onde obtemos a aceleração dos blocos:

$$a = \left(\frac{m_2 sen b - m_1 sen a}{m_2 + m_1} \right) g$$

Para obter a tensão no fio, basta substituir o resultado acima na equação (1) (ou na equação (2))

$$T = m_1 (a + g sen a) = m_1 \left[\left(\frac{m_2 sen b - m_1 sen a}{m_2 + m_1} \right) g + g sen a \right]$$

Portanto, temos que a tensão no fio é dado por:

$$T = (sen a + sen b) \left(\frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1} \right) g$$

(b) Substituindo $m_2 = m_1 \dfrac{sen a}{sen b}$ na aceleração do item (a), obtemos que:

$$a = \left[\frac{\left(m_1 \dfrac{sen a}{sen b} \right) sen b - m_1 sen a}{m_2 + m_1} \right] g \Rightarrow a = 0$$

Se a aceleração é nula, temos apenas dois tipos de movimento:

1) Os blocos estão em repouso
2) Os blocos se movimentam com velocidade constante.