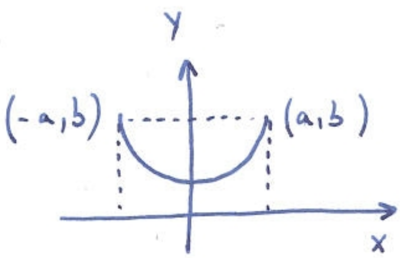
1. **Uma corda suspensa sob a ação da gravidade toma a forma correspondente a um mínimo de sua energia potencial. Suponha que a corda tenha massa M e comprimento L e esteja supensa num plano vertical xy, com x sendo a coordenada horizontal, entre os pontos $(-a, b)$ e (a, b), com $L > 2b$:**

   (a) **Escreva a integral correspondente à energia potencial da corda.**

   (b) **Obtenha a Equação de Euler que descreve a forma da corda quando sua energia potencial é mínima. (Escolha com cuidado entre a 1a. e a 2a. forma da Equação de Euler).**

   (c) **Resolva a equação obtida no item acima.**

   Integral útil:



$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} = arcosh\frac{y}{\alpha} + \beta$$

a) $dU = dm\, g\, y \Rightarrow dm = \rho\, d\ell = \frac{M}{L} d\ell \Rightarrow d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$

$$\Rightarrow U = \int dU = \frac{gM}{L}\int y\, d\ell = \boxed{\frac{gM}{L}\int y\sqrt{1+y'^2}\, dx} \quad (1.5)$$

b) $f = \frac{gM}{L} y\sqrt{1+y'^2}$; como $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, escolhemos a 2ª forma da Eq. de Euler:

$$\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{y\sqrt{1+y'^2} - \frac{y' y\, 2y'}{2\sqrt{1+y'^2}}}_{K \text{ constante}}\Big] = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = K} \quad (1.0)$$

c)

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{y^2 - K^2}{K^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-K^2}}{K} \Rightarrow$$

$$x = \int \frac{K\, dy}{\sqrt{y^2-K^2}} = \boxed{K \operatorname{arcos} \frac{y}{K} + K_1} \quad (1.0) \Rightarrow y = K\cosh\left(\frac{x - K_1}{K}\right)$$

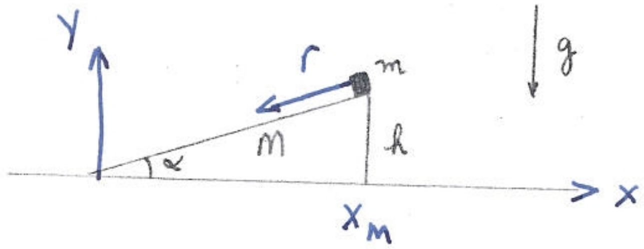
- que é a equação da catenária. K e K_1 podem ser obtidas de:

$$\begin{cases} b = K\cosh\left(\frac{a - K_1}{K}\right) \\ b = K\cosh\left(\frac{-a - K_1}{K}\right) \end{cases}$$

2. Um corpo de massa m desliza sem atrito sobre uma cunha de massa M sob a ação da graviade. A cunha por sua vez também desliza sem atrito sobre um plano horizontal. Sendo α o ângulo de inclinação da cunha, h sua altura e as dimensões do corpo de massa m desprezíveis:

(a) Escreva a função Lagrangeana apropriada para o sistema.

(b) Escreva e resolva as equações de Lagrange correspondentes durante a descida do corpo de massa m.



(x,y) é a posição de m: $\begin{cases} x = x_M - r\cos\alpha \\ y = h - r\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_M - \dot{r}\cos\alpha \\ \dot{y} = -\dot{r}\sin\alpha \end{cases}$ (1.0)

a) $L = T - U = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_M^2 - 2\dot{x}_M\dot{r}\cos\alpha + \underbrace{\dot{r}^2\cos^2\alpha + \dot{r}^2\sin^2\alpha}^{\dot{r}^2}\right] + \frac{1}{2}M\dot{x}_M^2$

$- mg(h - r\sin\alpha)$. $(U_M = \text{cte})$ (1.0)

b) Em r: $\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = g\sin\alpha + \ddot{x}_M\cos\alpha$ ①

Em x_M: $\cancel{\frac{\partial L}{\partial x_M}}^{0} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{x}_M = \frac{m}{m+M}\ddot{r}\cos\alpha$ ②

De ① e ②: $\boxed{\begin{aligned} \ddot{r} &= g\sin\alpha\left(\frac{M+m}{M+m\sin^2\alpha}\right) \\ \ddot{x}_M &= \frac{g\sin\alpha\cos\alpha\, m}{M+m\sin^2\alpha} \end{aligned}}$ acelerações constantes

Soluções: $\begin{cases} r(t) = r_0 + v_0^r\, t + \ddot{r}\frac{t^2}{2} \\ x_M(t) = x_{M_0} + v_0^{x_M}\, t + \ddot{x}_M\frac{t^2}{2} \end{cases}$ (1.5)

3. **Uma partícula de massa m é atraída para um determinado ponto chamado centro de força segundo uma força do tipo k/r^2, onde k é uma constante positiva e r é a distância da partícula ao centro de força. Usando coordenadas polares:**

   (a) **Construa a Lagrangeana do sistema.**

   (b) **Calcule os momentos generalizados.**

   (c) **Encontre as quatro equações de Hamilton.**

[redacted] : 3º) $F = -k/r^2 \Rightarrow U = -kr^{-1}$

a) $L = T - U = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{k}{r}$ (1.0)

b) $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$ (1.0)

$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$

Como as transformações de coordenadas são independentes de t e a energia potencial é independente da velocidade $\Rightarrow$ a Hamiltoniana é a energia total:

$$H = T + U = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{k}{r}$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} \right] - \frac{k}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}}$$

Eqs. de Hamilton:

$$\left[\begin{array}{ll} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, & \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}; & \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \end{array} \right.$$

(1.5)