Gabarito - noite 29/08/08.

① a) A função a) ^{0,2} $f(x,y) = (x^2-y^2)^2 \longrightarrow III$, b) ^{0,2} $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1} \rightarrow I$

e c) ^{0,2} $f(x,y) = (x-y)^2 \longrightarrow II$.

A escolha a) ^{0,3} porque $f(x,y) \geq 0$ e as retas $y=x$ e $y=-x$ são as curvas de nível em $z=0$. Única função com $f(0,0) \neq 0$.

A escolha b) ^{0,3} porque para $y=0$ a fç $f(x,0) = \frac{1}{x^2+1}$ tem gráfico de I interseção plano $y=0$

A escolha de c) ^{0,3} porque a curva de nível em $z=0$ é apenas $y=x$.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta - 2r\cos\theta\, r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

Em coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$(x,y) \to 0 \iff r \to 0 \ \forall \theta$.

logo $$\lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\theta - 2\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta)}{r^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta) = 0$$ ~~0,1~~ 4

porque $(\cos^3\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta)$ é limitado

e $\lim_{r\to 0} r = 0$. justificativa do limite (0,3)

Usou o resultado

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$ então

$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$

Logo a função é contínua pois $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

~~limite~~ definição continuidade 0,3

② a) $u(x,y) = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$

$$u_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{\frac{(x^2+y^2)\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad 0{,}3$$

$$u_{xx} = \frac{y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad 0{,}3$$

$$u_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{(x^2+y^2)x}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad 0{,}3$$

$$u_{yy} = \frac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad 0{,}3$$

logo $u_{xx} + u_{yy} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$ $\quad 0{,}3$

b) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$ $\quad 0{,}3$

Como $\frac{dx}{dt} = e^{(t^2-1)} \cdot 2t$ $\quad 0{,}2$

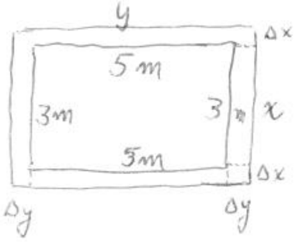
$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2t-1} \cdot 2 = \frac{2}{2t-1}$ $\quad 0{,}2$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(1,0) = 2 \\ f_y(1,0) = -1 \end{array} \right.$$

para $t = 1$, $\frac{dx}{dt}(1) = 2$ e $\frac{dy}{dt}(1) = 2$

então $\frac{dz}{dt} = 2(2) - 1(2) = 2$ $\quad 0{,}3$

Obs. Foi considerado certo quem supôs $\log = \log_{10}$

③ a) 

$A(x,y) = xy$

$\Delta A = A(x+2\Delta x, y+2\Delta y) - A(x,y)$

0,5

$dz \cong \Delta A$ e $dz = A_x dx + A_y dy = y dx + x dy$ onde

consideramos $dx = 2\Delta x = 12\text{ cm} = dy = 2\Delta y$

logo $dz = 500 \times 12 + 300 \times 12 = 6000 + 3600 = 9600\text{ cm}^2 = 0{,}96\text{ m}$

(Valor correto para $\Delta A = 0{,}9744\text{ m}^2$) 0,7

b) $f(x,y) = xy$, $f_x = y$ e $f_y = x$

plano tg $z = f(x_0,y_0) + f_x^{(x_0,y_0)}(x-x_0) + f_y^{(x_0,y_0)}(y-y_0)$ 0,4

onde $(x_0,y_0) = (1,2)$

então $z = 2 + 2(x-1) + 1(y-2)$ 0,4 $\Rightarrow$

$z = \cancel{2} + 2x - \cancel{2} + y - 2$

$\boxed{z - 2x - y = -2}$ 0,5

④ a) $f(x,y) = x^2 + \operatorname{sen} xy$

$\nabla f = (2x + (\cos xy)y, (\cos xy)x)$ 0,3

$\vec{u} = \dfrac{(2,1)}{\sqrt{4+1}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 0,3

$D_{\vec{u}} f(\tfrac{1}{2}, \pi) = \nabla f(\tfrac{1}{2}, \pi) \cdot \vec{u} = (1 + \pi \cdot 0, 0)\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 0,4

b) A taxa de variação é máxima na direção do $\nabla f(\frac{1}{2}, \pi) = (1,0)$. 0,9

Taxa máxima de variação é

$$D_{\nabla f} f(\tfrac{1}{2}, \pi) = \nabla f(\tfrac{1}{2}, \pi) \cdot \frac{\nabla f(\frac{1}{2}, \pi)}{|\nabla f(\frac{1}{2}, \pi)|} = |\nabla f(\tfrac{1}{2}, \pi)| = 1$$

0,8

— // —