IME - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Prof. Dr. Jorge Luis Domínguez Rodríguez

------------------------------ -------------------------------- --

PROVA 1 : MA044 - Matemática IV

Nome:____ **RA**:________________

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	NOTA

B

02/05/2011

QUESTÃO 1:

a. *(0,7 ponto)* Encontre dois números cuja soma é 4 e cujo produto é 8.

Demonstração. Por hipótese $z + w = 4$ e $z \cdot w = 8$. Então

$$z(4 - z) = 8 \Longrightarrow z^2 - 4z + 8 = 0$$

As raízes são,

$$z = 2 \pm 2i$$

□

b. *(1,8 ponto)* Utilize a Fórmula de Moivre para provar que $\dfrac{\operatorname{sen} 4\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = 2\cos 3\varphi + 2\cos\varphi$

Demonstração. Utilizando a fórmula de Moivre, para $n = 4$, temos

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^4 &= \cos 4\varphi + i\operatorname{sen} 4\varphi\\ \left(\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^4\varphi\right) + i\left(4\cos^3\varphi\operatorname{sen}\varphi - 4\cos\varphi\operatorname{sen}^3\varphi\right) &= \cos 4\varphi + i\operatorname{sen} 4\varphi\end{aligned}$$

igualando parte imaginarias, temos

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} 4\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} &= 4\cos^3\varphi - 4\cos\varphi\operatorname{sen}^2\varphi\\ &= 4\cos^3\varphi - 4\cos\varphi(1 - \cos^2\varphi) \ = \ 8\cos^3\varphi - 4\cos\varphi\end{aligned}$$

Novamente para $n = 3$,

$$(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\operatorname{sen} 3\varphi \Longrightarrow \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$

Assim, temos

$$\frac{\operatorname{sen} 4\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = 2\cos 3\varphi + 2\cos\varphi$$

□

QUESTÃO 2: Prove que

a. *(1,2 ponto)* $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$

Demonstração.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} z \cos z &= 2\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i}\right) \\ &= \operatorname{sen} 2z \end{aligned}$$

□

b. *(1,3 ponto)* $\operatorname{sen}^2(z/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(z/2) &= \left(\frac{e^{iz/2} - e^{-iz/2}}{2i}\right)^2 \\ &= -\frac{e^{iz} - 2 + e^{-iz}}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos z) \end{aligned}$$

□

QUESTÃO 3:

a. *(1 ponto)* Dada $f(z) = 3z^2 + 2z$, calcule o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{3z^2 + 2z - 3z_0^2 - 2z_0}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{3(z^2 - z_0^2) + 2(z - z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} 3(z + z_0) + 2 \\
&= 6z_0 + 2
\end{aligned}$$

□

b. *(1,5 ponto)* Determine o domínio de convergência da serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Demonstração. Pelo teste da razão,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}} \right| \\
&= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{z^{2n+1}(2n-1)!}{z^{2n-1}(2n+1)!} \right| \\
&= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{z^2}{2n(2n+1)} \right| \\
&= 0 \ < 1
\end{aligned}$$

Logo a série é convergente em todo o plano complexo.

□

QUESTÃO 4: *(2,5 ponto)* Prove que em coordenadas polares as equações de Cauchy- Riemann, tem a forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

e a equação de Laplace tem a forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0$$

Demonstração. Temos $u(x,y) = u(r,\varphi)$ e $v(x,y) = v(r,\varphi)$, onde $x = r\cos\varphi$ e $y = r\operatorname{sen}\varphi$.

Diferenciando e aplicando as equações de Cuchy Rieman ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$), temos

$$\begin{aligned}
u_r &= u_x x_r + u_y y_r & , \quad v_r &= v_x x_r + v_y y_r \\
u_r &= v_y \cos\varphi - v_x \operatorname{sen}\phi & , \quad v_r &= -u_y \cos\varphi + u_x \operatorname{sen}\phi \\
u_r &= \frac{1}{r}\left(-v_x r \operatorname{sen}\varphi + v_y r\cos\varphi\right) & , \quad v_r &= -\frac{1}{r}\left(-u_x r\operatorname{sen}\varphi + u_y r\cos\varphi\right) \\
u_r &= \frac{1}{r}\left(v_x x_\varphi + v_y y_\varphi\right) & , \quad v_r &= -\frac{1}{r}\left(u_x x_\varphi + u_y y_\varphi\right) \\
u_r &= \frac{1}{r} v_\phi & , \quad v_r &= -\frac{1}{r}\boldsymbol{u}_\phi
\end{aligned}$$

Das equações de Cauchy-Riemann em polares, temos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial^2 \phi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} = -\frac{\partial v}{\partial r} - r\frac{\partial^2 v}{\partial^2 r}$$

Igualando estas duas últimas equações, temos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = 0$$

$\square$

QUESTÃO 5:*(2,5 ponto)* Utilize a fórmula integral de Cauchy para mostrar que se $f(z)$ é uma função inteira tal que

$$|f(z)| \leq |z|, \qquad \forall\ z \in \mathcal{C}$$

então, $f(z)$ é uma função linear.

Demonstração. $f(z)$ é uma função inteira, então ela pode ser expressada em serie de potência,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k, \quad C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

e

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\ dw$$

com γ sendo um círculo de raio R e centro na origem.

Então,

$$\begin{aligned}
|C_k| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left| \frac{f(w)}{w^{k+1}} \right| |\ dw| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|w|}{|w|^{k+1}} |\ dw| \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^{k-1}} d\varphi \\
&= \frac{1}{R^{k-1}}
\end{aligned}$$

Quando $R \to \infty$, temos que $C_k \to 0$, $\forall n \geq 2$. Então

$$f(z) = C_0 + C_1 z.$$

□