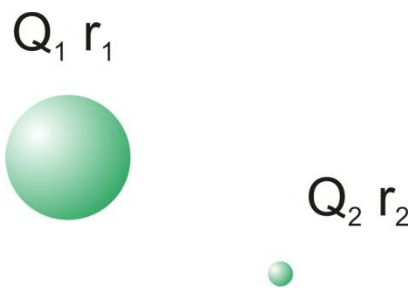
Prova de Eletromagnetismo EE 521 (parte 1) – 2 de abril de 2009. Prof. Cesar Pagan. FEEC – UNICAMP



1. **Campo e potencial elétrico.** Em uma peça metálica carregada com uma carga Q, o campo elétrico é mais intenso próximo às bordas e aos pontos que apresentam saliências agudas. Para entender porque isso acontece, faça os seguinte:
   a. Distribua uma carga $Q=Q_1+Q_2$ entre as duas esferas (1) e (2) de raios r_1 e r_2 respectivamente, posicionadas muito distante uma da outra, impondo a condição que o potencial elétrico *V* em suas superfícies seja o mesmo para ambas. Escreva o valor das cargas em função apenas de r_1, r_2 e Q.
   b. Escreva o valor do campo elétrico (módulo) nas vizinhanças das esferas (1) e (2), em função apenas de *r* (distância à origem, fora da esfera), r_1, r_2 e Q. Como as esferas estão muito longe uma da outra, despreze os efeitos de E_1 em E_2 e vice-versa.
   c. Mostre que o campo elétrico E_2 na superfície de (2) relaciona-se com o campo elétrico E_1 na superfície de (1) pela equação:
   $r_2 E_2(r_2) = r_1 E_1(r_1)$.
   d. Considere uma carga de 10 nC distribuída entre duas esferas de raios r_1 = 20 cm e r_2 0,2 cm. Qual é o campo elétrico em cada uma delas?

   Nota: O modelo acima corresponde – ainda que de maneira muito aproximada – ao que acontece com o campo elétrico na superfície de um metal. Nele, o potencial eletrostático é igual em todos os pontos, mas o campo elétrico é mais intenso e há maior densidade de cargas nos locais que apresentam curvaturas com raios pequenos, como nas quinas e bordas.

Solução:

(a) O potencial elétrico causado por cargas pontuais é:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

para um referencial nulo do potencial no infinito. Como as esferas estão “posicionadas muito distante uma da outra”, vamos supor que o potencial na superfície de cada esfera seja resultado apenas de sua própria carga. Assim calculando o potencial em (1) para r_1 e em (2) para r_2, temos

$$V_1(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} \text{ e } V_2(r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2}\,.$$

O problema exige que os potenciais sejam iguais, então:

$$\frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2}$$

a qual juntando com a informação $Q=Q_1+Q_2$, resulta em

$$\begin{cases} r_2 Q_1 - r_1 Q_2 = 0 \\ Q_1 + Q_2 = Q \end{cases}$$

Cuja solução é:

$$Q_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} Q$$
$$Q_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} Q$$

Assim, quanto maior o raio de curvatura maior a carga.

(b) O módulo do campo elétrico nas vizinhanças de uma esfera de cargas, do lado de fora, é dado por

$$|\mathbf{E}| = E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Assim, desprezando os efeitos de uma esfera sobre a outra, o campo na superfície das esferas é dado por:

$$E_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2} Q \right) \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_1}{r_1 + r_2} \frac{Q}{r^2}$$

e assim

$$E_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_1}{r_1 + r_2} \frac{Q}{r^2} \text{ e } E_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{Q}{r^2}$$

onde r mede a distância ao centro das respectivas esferas.

(c) Fazendo $r = r_1$ na esfera (1) e r_2 na esfera (2), temos:

$$E_1(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_1}{r_1 + r_2} \frac{Q}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1 + r_2} \frac{Q}{r_1} \quad \text{e} \quad E_2(r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1 + r_2} \frac{Q}{r_2}$$

logo

$$r_1 E_1(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1 + r_2} Q = r_2 E_2(r_2)$$

temos

$$r_2 E_2(r_2) = r_1 E_1(r_1)$$

(d) Usaremos $E_1(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1 + r_2} \frac{Q}{r_1}$ e $E_2(r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1 + r_2} \frac{Q}{r_2}$, para Q=10 nC distribuída entre duas esferas de raios r_1 = 20 cm e r_2 0,2 cm.

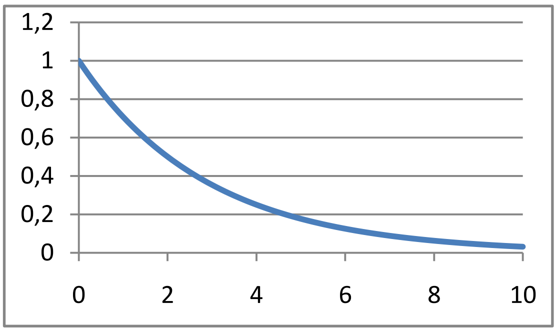
Então,

$E_1(r_1)$ = 2,2 kV/m

e $E_2(r_2)$ = 222,3 kV/m.

Concluímos que o campo é 100 vezes mais intenso na esfera de raio 100 vezes menor.

2. **Densidade de cargas e Lei de Gauss.** Uma densidade volumétrica *ρ(z)* infinita decresce exponencialmente a partir da superfície z=0 para o lado negativo do eixo z. Imagine que, seguindo esta distribuição, metade desta carga esteja alojada mais próximas à superfície, ou seja, a uma distância *0>z>-δ*.Escreva uma expressão para *ρ(z)*.



Solução:

O enunciado dá três informações:

i. a primeira que estamos diante de *uma densidade volumétrica ρ(z) infinita decresce exponencialmente a partir da superfície z=0 para o lado negativo do eixo z*. Então, temos uma expressão para *ρ(z)* proporcional a $e^{\alpha z}$.
ii. A segunda é que na posição z=0 é $\rho(0)=\rho_0$. Sendo assim, a densidade de cargas terá a forma $\rho(z)=\rho_0 e^{\alpha z}$. Resta determinar *α.*
iii. Para determinar , temos a terceira informação que é "metade da carga está a uma distância 0>*z*>-*δ*". Vamos considerar uma pequena área superficial ΔS=ΔxΔy. A carga Q(ΔS) total sob esta área é

$$Q(\Delta S)=\int_{-\infty}^{0}\rho(z)dz\Delta S=\rho_0\Delta S\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha z}dz=\rho_0\Delta S\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha z}\right)\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{\rho_0\Delta S}{\alpha}$$

de onde concluímos que

$$\alpha Q(\Delta S)=\rho_0\Delta S \qquad (*)$$

Afirmamos que metade da carga está em *z*>-*δ*, e assim temos

$$\frac{Q(\Delta S)}{2}=\rho_0\Delta S\int_{-\delta}^{0}e^{\alpha z}dz=\rho_0\Delta S\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha z}\right)\Big|_{-\delta}^{0}=\frac{\rho_0\Delta S}{\alpha}(1-e^{-\alpha\delta})$$

ou ainda

$$\frac{Q(\Delta S)}{2}=\frac{\alpha Q(\Delta S)}{\alpha}(1-e^{-\alpha\delta})$$

logo

$$\frac{1}{2}=1-e^{-\alpha\delta}\rightarrow e^{-\alpha\delta}=\frac{1}{2}\text{ e portanto }\ln(e^{-\alpha\delta})=\ln(\frac{1}{2})\rightarrow\alpha=\frac{1}{\delta}\ln(2)$$

Temos a expressão para a densidade de cargas:

$$\rho(z)=\rho_0 e^{\alpha z}\text{ com }\alpha=\frac{1}{\delta}\ln(2)$$

ou

$$\rho(z)=\rho_0 e^{-\alpha z}\text{ com }\alpha=\frac{1}{\delta}\ln(\frac{1}{2})$$

3. **Energia de uma distribuição esfericamente simétrica de cargas.** Considere uma esfera de raio *a* e densidade de cagas constante ρ_0. Calcule a energia total deste sistema a partir da expressão

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\mathbf{E}|^2 dv$$

Solução

Dentro da Esfera:

Utilizando a Lei de Gauss, calculamos o campo dentro da esfera:

$$\oint_{sup} \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}}_r dS = Q$$

$$E4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3}r^3$$

Logo

$\mathbf{E} = \frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} r\hat{\mathbf{e}}_r$ dentro da esfera.

Dentro da Esfera:

Fora da esfera, temos $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3}\rho_0 a^3\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho_0\frac{a^3}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$

Integração:

Fazendo a Integral dentro da esfera temos

$$U_{Dentro} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\left(\frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}r\right)^2 r^2\sin\theta drd\theta d\phi = \varepsilon_0 2\pi\left(\frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\right)^2\int_0^a r^4 dr = \varepsilon_0 2\pi\left(\frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\right)^2\frac{a^5}{5}$$

Fora da esfera, a integral resulta em

$$U_{Fora} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty}\left(\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho_0\frac{a^3}{r^2}\right)^2 r^2\sin\theta drd\theta d\phi = \varepsilon_0 2\pi\left(\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho_0 a^3\right)^2\int_a^{\infty}\frac{1}{r^2}dr = \varepsilon_0 2\pi\left(\frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\right)^2 a^6(\frac{1}{a})$$

$$= \varepsilon_0 2\pi\left(\frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\right)^2 a^5$$

Somando os resultados:

Assim, a energia U do sistema é a soma $U_{Dentro}+U_{Fora}$:

$$U = \varepsilon_0 2\pi\left(\frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\right)^2 a^5(1+\frac{1}{5}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4\pi}{15}\rho_0{}^2 a^5.$$

4. **Distribuições de cargas e princípio da Superposição.** Estamos interessados em calcular o campo elétrico na origem (0,0,0) para distribuições de cargas próximas, de diversos tipos. Você deve conhecer a forma do campo elétrico provocada por um plano infinito, uma reta de cargas e por uma esfera.
   a. Primeiro: usando a Lei de Gauss, calcule o campo elétrico de um plano infinito de cargas com densidade superficial de cargas σ_0, de uma reta de cargas densidade linear de cargas λ_0, e (no exterior) de uma esfera com carga Q. Escreva os resultados em separado para cada caso, dependendo apenas da distância ao plano, da distância à reta de cargas e da distância ao centro da esfera.

b. Segundo: Posicione o plano em y=1 m, com densidade de cargas 2 nC/m^2 e calcule o campo na origem.

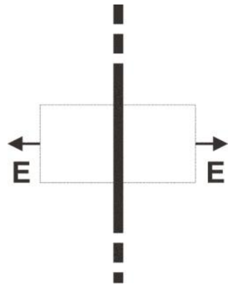
c. Terceiro: Posicione a reta de cargas em z=1 m, y=0 m, com densidade de cargas (2π) nC/m e calcule o campo na origem.

d. Quarto: Posicione duas esferas com raios 0,1 m, uma em (x=1 m, y=0 m, z=0 m) e outra em (x=-1 m, y=0 m, z=0 m) com Q=(4π) nC cada e calcule o campo elétrico causado por elas.

e. Use o princípio da superposição para obter o campo total devido ao plano, à reta e às duas cargas.

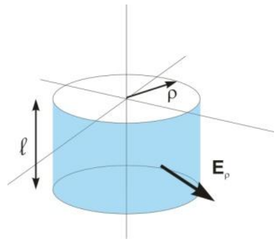
Solução

(a) No caso do plano, temos



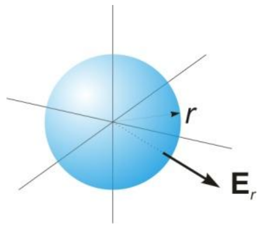
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow 2EA = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}A \therefore \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$$, apontando para fora do plano

Para a reta de cargas,



$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E2\pi\rho\ell = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\ell \therefore \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho$$, apontando para longe da reta de cargas

Para a esfera temos



$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \therefore \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$$, apontando para fora da esfera.

(b) Posicionando o plano em y=1, e fazendo σ=2 nC/m^2, calculamos $\mathbf{E}_{Plano}$ em (0,0,0):

$$\mathbf{E}_{Plano}(0,0,0) = -\frac{2x10^{-9}}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{e}}_y = -\frac{10^{-9}}{8{,}85x10^{-12}}\hat{\mathbf{e}}_y = -113\hat{\mathbf{e}}_y (V/m)$$

(c) Posicionando a reta em z=1, y=0, e fazendo λ=(2π) nC/m, calculamos $\mathbf{E}_{Reta}$ em (0,0,0):

$$\mathbf{E}_{Reta}(0,0,0) = -\frac{(2\pi)10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{1}\hat{\mathbf{e}}_z = -\frac{10^{-9}}{8{,}85x10^{-12}}\hat{\mathbf{e}}_y = -113\hat{\mathbf{e}}_z (V/m)$$

(d) Posicionando uma carga em (x=1, y=0, z=0), temos e Q= (4π) nC

$$\mathbf{E}_{Esfera1}(0,0,0) = -\frac{(4\pi)x10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{1}\hat{\mathbf{e}}_x = -\frac{10^{-9}}{8{,}85x10^{-12}}\hat{\mathbf{e}}_x = -113\hat{\mathbf{e}}_x (V/m)$$

e de modo similar, em (x=-1, y=0, z=0), temos e Q= (4π) nC

$$\mathbf{E}_{Esfera2}(0,0,0) = 113\hat{\mathbf{e}}_x (V/m)$$

(e) O campo total $\mathbf{E}_{Total}$ será a soma vetorial dos campos calculados acima:

$$\mathbf{E}_{Total} = \mathbf{E}_{Plano}(0,0,0) + \mathbf{E}_{Reta}(0,0,0) + \mathbf{E}_{Esfera1}(0,0,0) + \mathbf{E}_{Esfera2}(0,0,0) =$$

$$= -113\hat{\mathbf{e}}_y - 113\hat{\mathbf{e}}_z - 113\hat{\mathbf{e}}_x + 113\hat{\mathbf{e}}_x = -113\hat{\mathbf{e}}_y - 113\hat{\mathbf{e}}_z (V/m)$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{Total} = -113\hat{\mathbf{e}}_y - 113\hat{\mathbf{e}}_z (V/m)}$$