Soluções para MS550, Métodos de Matemática Aplicada I, e F520, Métodos Matemáticos da Física I

Lista 2 - Continuação Analítica

Antes de apresentar as soluções é importante destacar os abuso de notação utilizados:

- $\mathbb{R} \geq 0$ representa os números reais maióres ou iguais a zero,
- $\mathbb{R} > 0$ representa os números reais estritamente maiores que zero,
- $\mathbb{R} \neq 0$ represente os números reais diferentes de zero, ...

1. Mostre que a solução de

$$y' + z^{-2}y = 0$$

possui uma singularidade essencial em $z = 0$.

Solução: *Antes de apresentar a solução para esta questão vamos lembrar a definição de singularidade essencial:*

> *A série de Laurent, válida para $0 < |z - a| < R$ (para algum R) deve possuir uma parte principal infinita (para maiores detalhes ver página 82 do Butikov).*

Manipulando a equação temos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-1}{z^2}y \\ \frac{y'}{y} &= \frac{-1}{z^2} \\ \ln y &= z^{-1} + c_1 \\ y &= c\exp\left(z^{-1}\right). \end{aligned}$$

Como $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z^n)/n!$ podemos reescrever a expressão anterior como uma série de Laurent em torno de $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} y(z) &= c'\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n n!} \\ y(z) &= c' + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n n!}. \end{aligned}$$

Daí, fazendo $z = 0$ na equação anterior temos que $\lim_{z\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} b_n/(z^n n!) = \infty$, que é a parte principal. Logo, $z = 0$ é uma singularidade essencial.

2. (T3 de 2012) Mostre que nenhuma solução não trivial da equação

$$z^2y'' + zy' + y = 0$$

que é real no semieixo real positivo do plano complexo pode ser real no semieixo real negativo.

Solução: *Além da solução trivial ($z = 0$) temos que as demais soluções são do tipo $y(z) = z^r$ e portanto $y'(z) = rz^{r-1}$ e $y''(z) = r(r-1)z^{r-2}$.*
Daí,

$$r\,(r-1)\,z^r + rz^r + z^r = 0.$$

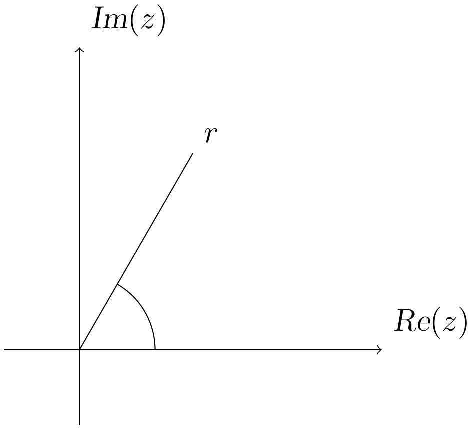
Como $z \neq 0$

$$r\,(r-1) + r + 1 = 0 \leftarrow r^2 + 1 = 0 \leftarrow r = \pm i.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} y(z) &= Az^i + bz^{-i}, \quad A, B \in \mathbb{C} \\ &= A\exp\left(i\ln z\right) + B\exp\left(-i\ln z\right) \\ &= A\left(\cos\left(\ln z\right) + i\sin\left(\ln z\right)\right) + B\left(\cos\left(\ln z\right) - i\sin\left(\ln z\right)\right) \\ &= \left(A + B\right)\cos\left(\ln z\right) + \left(A - B\right)i\sin\left(\ln z\right), \end{aligned}$$

onde $A, B \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R} \geq 0$, $A = \alpha_1 + i\beta_1$, $B = \alpha_2 + i\beta_2$ e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ (ver detalhes na figura abaixo).



Agora queremos observar as soluções dessa EDO em dois ramos especificos da função $\ln z$, no semi-eixo real positivo ($\theta = 0$) e no semi-eixo real negativo ($\theta = \pi$). Nosso objetivo é mostrar que uma solução totalmente real na parte positiva do eixo real não pode ser real na parte negativa.

Como $z \in \mathbb{C}$, podemos escrever $z = re^{i\theta}$, o que implica que $\ln z = \ln r + i\theta$. Com isso, para $\theta = 0$ temos $\ln z = \ln r$. Logo,

$$\begin{aligned} y(z) &= \left(A + B\right)\cos\left(\ln z\right) + \left(A - B\right)i\sin\left(\ln r\right) \\ &= \left(\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2\right)\cos\left(\ln r\right) + \left(\alpha_1 + i\beta_1 - \alpha_2 - i\beta_2\right)i\sin\left(\ln r\right), \\ Rey\left(z\right) &= \alpha_1\cos\left(\ln r\right) + \alpha_2\cos\left(\ln r\right) - \beta_1\sin\left(\ln r\right) + \beta_2\sin\left(\ln r\right), \\ Imy\left(z\right) &= \beta_1\cos\left(\ln r\right) + \beta_2\cos\left(\ln r\right) + \alpha_1\sin\left(\ln r\right) - \alpha_2\sin\left(\ln r\right). \end{aligned}$$

Para que a solução da equação seja real, $Imy\left(z\right)) = 0$. Daí, $\beta_1 = -\beta_2$ e $\alpha_1 = \alpha_2$. Substituindo na expressão anterior para $Rey\left(z\right)$, tem-se

$$Rey\left(z\right) = 2\alpha_1\cos\left(\ln r\right) + 2\beta_2\sin\left(\ln r\right).$$

Para $\theta = \pi$ temos $\ln z = \ln r + i\pi$. Com isso temos:

$$\begin{aligned} y(z) &= (A+B)\cos(\ln(r)+i\pi) + (A-B)\, i\sin(\ln(r)+i\pi) \\ &= (\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2)\cos(\ln r + i\pi) + (\alpha_1 + i\beta_1 - \alpha_2 - i\beta_2)\, i\sin(\ln r + i\pi). \end{aligned}$$

Sabemos que,

$$\begin{aligned} \sin(\ln r + i\pi) &= \sin(\ln r)\cos(i\pi) - \cos(\ln r)\sin(i\pi) \\ \cos(\ln r + i\pi) &= \cos(\ln r)\cos(i\pi) - \sin(\ln r)\sin(i\pi). \end{aligned}$$

Além disso, lembrando que $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz})/2$, $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$, $\cosh(z) = (e^{-z} + e^{z})/2$, $\sinh(z) = (e^{-z} - e^{z})/2$, *então* $\cos(i\pi) = i\cosh\pi$ *e* $\sin(i\pi) = i\sinh\pi$. *Como* $\cosh$ *e* $\sinh \in \mathbb{R}$, *então,*

$$\begin{aligned} y(z) &= (A+B)\cos(\ln z) + (A-B)\, i\sin(\ln z) \\ &= (\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2)(\cos(\ln r)\cos(i\pi) - \sin(\ln r)\sin(i\pi)) \\ &\quad + (\alpha_1 + i\beta_1 - \alpha_2 - i\beta_2)\, i(\sin(\ln r)\cos(i\pi) + \cos(\ln r)\sin(i\pi)) \\ &= (\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2)(\cos(\ln r)\, i\cosh(\pi) - \sin(\ln r)\, i\sinh(\pi)) \\ &\quad + (\alpha_1 + i\beta_1 - \alpha_2 - i\beta_2)\, i(\sin(\ln r)\, i\cosh(\pi) + \cos(\ln r)\, i\sinh(\pi)) \\ &\quad = (\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2)\, i\omega(r) - (\alpha_1 + i\beta_1 - \alpha_2 - i\beta_2)\,\psi(r) \end{aligned}$$

Com $\omega(r)$ *e* $\psi(r) \in \mathbb{R}$. *Com isso,*

$$\begin{aligned} y(z) &= (A+B)\cos(\ln z) + (A-B)\, i\sin(\ln z) \\ \mathit{Re} y(z) &= -\left[(\beta_1 + \beta_2)\,\omega(r) + (\alpha_1 - \alpha_2)\,\psi(r)\right] \\ \mathit{Im} y(z) &= (\alpha_1 + \alpha_2)\,\omega(r) - (\beta_1 - \beta_2)\,\psi(r). \end{aligned}$$

não pode ser definida para $\theta = \pi$. Logo, não é real no semi-eixo real negativo.

Para que a solução seja real, $\mathit{Im} y(z) = 0$, o que implica que $\alpha_1 = -\alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$.

Portanto não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo, então nenhuma solução real no semi-eixo real positivo do plano complexo pode ser real no semi-eixo real negativo, como queriamos demonstrar.

3. (a) Mostre que, se

(1) $$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$$

possui um ponto singular regular em $z = 0$ e $q(0) \neq 0$, então

(2) $$y'' + [p - (q'/q)]\, y' + [p' - (pq'/q) + q]\, y = 0$$

possui um ponto singular regular em $z = 0$.

Solução: *Se* (1) *possui um ponto singular em $z = 0$ e $q(0) \neq 0$, tem-se:*

$$p(z) = \frac{A}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad A, a_n \in \mathbb{R} \neq 0,$$

$$q(z)=\frac{B_1}{z^2}+\frac{B_2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\quad B_1,B_2,b_n\in\mathbb{R}\neq 0.$$

Reescrevendo (2) *temos*

$$y''+P(z)y'+Q(z)y=0$$

com $P(z)=p-q'/q$ *e* $Q(z)=p'-(pq')/q+q$. *Como* $p(z)$ *e* $q(z)$ *possuem pontos singulares em* $z=0$, *elas são analíticas em torno de* $z=0$. *Logo,* q' *e* p' *estão definidas em* $z=0$.

Daí,

$$\begin{aligned}
P(z)&=\frac{A}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n-\left(\frac{2B_1+zB_2-\sum_{n=1}^{\infty}nb_nz^{n+2}}{z^3}\right)\left(\frac{1}{B_1/z^2+B_2/z+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n}\right)\\
&=\frac{A}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\frac{1}{z}\underbrace{\left(\frac{2B_1+zB_2-\sum_{n=1}^{\infty}nb_nz^{n+2}}{B_1+B_2z+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{n+2}}\right)}_{h(z)\text{ é analítica em }z=0}\\
&=\frac{A}{z}+\frac{h(z)}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.
\end{aligned}$$

Portanto, $P(z)$ *possui, no máximo, um pólo simples.*

E

$$\begin{aligned}
Q(z)=&-\frac{A}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^n+\frac{B_1}{z^2}+\frac{B_2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\\
&-\frac{1}{z^2}\underbrace{\left(\frac{\star}{B_1+B_2z+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{n+2}}\right)}_{g(z)\text{ é analítica em }z=0}\\
=&\frac{B_1-A-g(z)}{z^2}+\frac{B_2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^n,
\end{aligned}$$

onde $\star=-2AB_1-AB_2z+A\sum_{n=1}^{\infty}nb_nz^{n+1}-2B_1\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+1}-B_2\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+2}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}nb_nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+3}\right)$. *Portanto,* $Q(z)$ *possui, no máximo, um pólo de ordem* 2.

Daí, (2) *possui um ponto singular regular em* $z=0$.

(b) Mostre que, se $\{y_1,y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções de (1) então $\{y_1',y_2'\}$ é um conjunto fundamental de soluções de (2).

Solução: *Se* $y=\{y_1,y_2\}$ *é um conjunto fundamental de soluções de* (1), *então*

$$y_1''+py_1'+qy_1=0.$$

Fazendo $y'=\{y_1',y_2'\}$ *em* (2), *tem-se*

$$y_1'''+(p-q'/q)\,y_1''+\left[p'-(pq')/q+q\right]y_1'=0$$

$$
\begin{aligned}
y_1''' + py_1'' - \frac{q'}{q}y_1'' + p'y_1' - \frac{pq}{q}y_1' + qy_1' &= 0 \\
y_1''' + py_1'' - \frac{q'}{q}\left(y_1'' + py_1'\right) + p'y_1' + qy_1' &= 0 \\
y_1''' + \left(py_1'\right)' + qy_1' + q'y_1 &= 0 \\
y_1''' + \left(py_1'\right)' + \left(qy_1'\right)' &= 0 \\
\left(y_1'' + py_1' + qy_1'\right)' &= 0.
\end{aligned}
$$

Logo, y_1 é solução de (2). Para y_2' o procedimento é análogo.

4. Seja a equação

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$$

e tal que $z = 0$ é um ponto singular regular. Mostre que uma mudança de variável dependente $y \to w$ da forma $y(z) = z^\rho \phi(z) w(z)$, onde $\phi(0) \neq 0$ e $\phi(z)$ regular em torno de $z = 0$, leva o ponto singular regular $z = 0$ com equação indicial $I(r) = 0$ nesse ponto com equação indicial $I(r + \rho) = 0$.

Solução: *Para a equação do enunciado temos*

$$\lim_{z\to 0} zp(z) = p_0 \neq \infty, \quad \lim_{z\to 0} z^2 q(z) = q_0 \neq \infty,$$

como $p(z) = A/z + \sum_n a_n z^n$ e $q(z) = B_1/z^2 + B_2/z + \sum_n b_n z^n$.
A equação indicial é

$$
\begin{aligned}
I(r) &= r\left(r-1\right) + p_0 r + q_0 = 0 \\
I(r) &= r\left(r-1\right) + Ar + B_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Fazendo $y \to w$ com $y = z^\rho \phi\left(z\right) w\left(z\right)$, $\phi\left(0\right) \neq 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dz} &= w\frac{d}{dz}\left(z^\rho \phi\left(z\right)\right) + \left(z^\rho \phi\left(z\right)\right) w', \\
\frac{d^2y}{dz^2} &= w\left(z^\rho \phi\left(z\right)\right)'' + 2\left(z^\rho \phi\left(z\right)\right) w' + \left(z^\rho \phi\left(z\right)\right) w''.
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação inicial

$$
\begin{aligned}
w\left(z^\rho\phi\right)'' + 2\left(z^\rho\phi\right)' w' + \left(z^\rho\phi\right) w'' + p\left(z^\rho\phi\right)' w& \\
+ p\left(z^\rho\phi\right) w' + q\left(z^\rho\phi\right) w &= 0 \\
\left(z^\rho\phi\right) w'' + \left[2\left(z^\rho\phi\right)' + p\left(z^\rho\phi\right)\right] w'& \\
+ \left[\left(z^\rho\phi\right)'' + p\left(z^\rho\phi\right)' + q\left(z^\rho\phi\right)\right] w &= 0.
\end{aligned}
$$

Como $z \neq 0$ e $\phi(0) \neq 0$

$$w'' + \underbrace{\frac{2\left(z^\rho\phi\right)' + p\left(z^\rho\phi\right)}{z^\rho\phi}}_{P(z)} w' + \underbrace{\frac{\left(z^\rho\phi\right)'' + p\left(z^\rho\phi\right)' + q\left(z^\rho\phi\right)}{z^\rho\phi}}_{Q(z)} w = 0.$$

Então

$$
\begin{aligned}
I'(r) &= r\,(r-1)\,rP(0) + Q(0) = 0, \\
P(0) &= \lim_{z\to 0} zP(z) = \lim_{z\to 0} 2z\phi'/\phi + \lim_{z\to 0} 2\rho + \lim_{z\to 0} pz\,(z) = 0 \\
&= 2\rho + \lim_{z\to 0} z \left(A/z + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n}_{0} z^n \right) \\
&= 2\rho + A, \\
Q(0) &= \lim_{z\to 0} z^2 Q(z) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{z^2\left[z^\rho\phi'' + \rho z^{\rho-1}\phi' + \rho z^{\rho-1}\phi' + \rho\,(\rho-1)\,z^{\rho-2}\phi\right]}{z^\rho\phi} \\
&\quad + \lim_{z\to 0} \frac{z^2 p\left[z^\rho\phi' + \rho z^{\rho-1}\phi\right]}{z^\rho\phi} + \lim_{z\to 0} z^2 q \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{z^2\phi''}{\phi} + 2\lim_{z\to 0} \frac{\rho z\phi'}{\phi} + \lim_{z\to 0} \rho\,(\rho-1) \\
&\quad + \lim_{z\to 0} \frac{z^2 p\phi'}{\phi} + \lim z \to 0\rho pz + \lim_{z\to 0} z^2 q \\
&= \rho\,(\rho-1) + \lim_{z\to 0} \frac{z^2\phi'}{\phi}\left(\frac{A}{z} + \sum_n a_n z^n\right) \\
&\quad + \lim_{z\to 0} \rho z \left(\frac{A}{z} + \sum_n a_n z^n\right) + \lim_{z\to 0} z^2 \left(\frac{B_1}{z^2} + \frac{B_2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) \\
&= \rho\,(\rho-1) + \rho A + B_1.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
I'(r) &= r\,(r-1) + r2\rho + Ar + \rho\,(\rho-1) + \rho A + B_1 \\
&= r^2 - r + 2\rho r + Ar + \rho^2 - \rho + \rho A + B_1 \\
&= (r+\rho)^2 - (r+\rho) + (r+\rho)\,A + B_1 \\
&= (r+\rho)\,(r+p-1) + (r+\rho)\,A + B_1 \\
&= I(r+\rho).
\end{aligned}
$$

5. (P1 de 2011) Mostre que a única equação diferencial linear de segunda ordem que possui apenas dois pontos singulares regulares e localizados em $z = 0$ e $z = \infty$ é a equação diferencial de Euler

$$z^2y'' + \alpha zy' + \beta y = 0.$$

Solução: *Considere a equação*

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0,$$

onde

$$p(z) = A/z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad A, a_n \in \mathbb{R} \neq 0,$$

$$q(z) = B_1/z^2 + B_2/z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad B_1, B_2, b_n \in \mathbb{R} \neq 0,$$

com $zp(z)$ e $z^2 q(z)$ analíticas em $z = 0$ ($z = 0$ é ponto singular regular).
Fazendo $z = 1/t$ temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dz} = \frac{1}{z^2}\frac{dy}{dt} = -t^2\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dz^2} &= \frac{d}{dz}\left(-t^2\frac{dy}{dz}\right) = -t^2\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right) = t^1\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação inicial temos

$$\begin{aligned} t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt} - p\left(1/t\right)t^2\frac{dy}{dt} + q\left(1/t\right)y = 0 \\ t^4\frac{d^2y}{dt^2} + \left(2t^3 - p\left(1/t\right)t^2\right)\frac{dy}{dt} + q\left(1/t\right)y = 0. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}p\left(1/t\right) \\ &= \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\left(At + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{t^n}\right) \\ &= \frac{2}{t} - \frac{A}{t} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{t^{n+2}}, \\ q(t) &= \frac{1}{t^4}\left[B_1 t^2 + B_2 t + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{t^n}\right] \\ &= \frac{B_1}{t^2} + \frac{B_2}{t^3} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{t^{n+4}}. \end{aligned}$$

Vemos que $p(t)$ e $q(t)$ são claramente não-analíticas em $t = 0$. Para que $tp(t)$ seja analítica devemos ter $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/t^{n+2} = 0$. Já para que $t^2 q(t)$ seja analítica devemos ter $\sum_{n=0}^{\infty} b_n/t^{n+4} = B_2/t^3 = 0$. Logo, $a_n = 0$, $b_n = 0$, $B_2 = 0$ e consequentemente $p(z) = A/z$ e $q(z) = B_1/z^2$.
Substituindo $p(z)$e $q(z)$ na equação inicial temos

$$\begin{aligned} y'' + \left(A/z\right)y' + \left(B_1/z^2\right)y = 0 \\ z^2 y'' + Azy' + B_1 y = 0 \end{aligned}$$

que corresponde a $z^2y'' + \alpha zy' + \beta y = 0$ quando $\alpha = A$ e $\beta = B_1$.

6. Mostre que a equação de Bessel

$$z^2y'' + zy' + \left(z^2 - v^2\right) y = 0$$

possui um ponto singular irregular em $z = \infty$.

Solução: *Considerando a equação de Bessel apresentada no enunciado temos, para $z = \infty$,*

$$\begin{aligned} z &= 1/t, \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dz} = -t^2\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dz^2} &= \frac{d}{dz}\left(-t^2\frac{dy}{dz}\right) \\ &= t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação de Bessel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2}\left(t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{t}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{t^2}y - v^2y = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^4}y - \frac{v^2}{t^2}y = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \left(\frac{1}{t^4} - \frac{v^2}{t^2}\right)y = 0. \end{aligned}$$

Os pontos singulares irregulares são $tp(t)$ e $t^2q(t)$ tal que

- *$tp(z) = 1$ é analítica em $t = 0$,*
- *$t^2q(t) = 1/t^2 - v^2$ não é analítica em $t = 0$.*

Logo, a equação de Bessel possui ponto singular irregular em $t = 0$ que equivale a um ponto singular em $z = \infty$.

7. Mostre que, se $f(0) = 0$ mas $f'(0) \neq 0$, a mudança de variável $z = f(t)$ leva uma equação diferencial

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$$

com ponto singular regular localizado em $z = 0$ em uma equação diferencial com um ponto singular regular localizado em $t = 0$ satisfazendo a mesma equação indicial.

Solução: *Pela questão 4 desta lista temos que a equação do enunciado possui ponto singular regular em $z = 0$.*

Fazendo $z = f(t)$, com $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$, tem-se

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dz}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{dy}{dz} f'(t), \\
\frac{dy}{dz} &= \frac{1}{f}\frac{dy}{dt}, \\
\frac{d^2y}{dz^2} &= \frac{1}{f'}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f'}\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \frac{1}{f}\left(-\frac{f''}{(f')^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{f'}\frac{d^2y}{dt^2}\right) \\
&= \frac{-f''}{(f')^3}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{(f')^2}\frac{d^2y}{dt^2}.
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação do enunciado temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(f')^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{p(f)}{f'} - \frac{f''}{(f')^3}\right)\frac{dy}{dt} + q(f)\,z = 0 \\
\frac{d^2y}{dt^2} + \left(p(f)f' + \frac{f''}{f'}\right)\frac{dy}{dt} + (f')^2 q(f)y = 0.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
p(f(t)) &= A/f(t) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(t))^n, \\
q(f(t)) &= B_1/(f(t))^2 + B_2/f(t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (f(t))^n.
\end{aligned}
$$

Verficando se $t = 0$ é ponto singular temos

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \lim_{t\to 0} f(t)\left(\frac{Af'(t)}{f(t)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n f(t) f'(t) + \frac{f''}{f'}\right) \\
&= \lim_{t\to 0} Af'(t) \\
&= Af'(0), && Af'(0) \neq 0, \\
q_0 &= \lim_{t\to 0} (f(t))^2 \left(\frac{B_1}{(f(t))^2} + \frac{B_2}{f(t)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (f(t))^n\right)(f'(t))^2 \\
&= B_1 (f'(0))^2, && B_1 (f'(0))^2 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $t - 0$ é ponto singular regular.

Para calcular a equação indicial de

$$
\frac{d^2y}{dt^2} + \left(p(f)f' + \frac{f''}{f'}\right)\frac{dy}{dt} + (f')^2 q(f)y = 0
$$

temos primeiro que

$$\begin{aligned} y &= (f(t))^r\,, \\ y' &= r\,(f(t))^{r-1}\,f'(t), \\ y'' &= r\,(f(t))^{r-1}\,f''(t) + r\,(r-1)\,(f(t))^{r-2}\,(f'(t))^2 \end{aligned}$$

e ao substituirmos na equação

$$\begin{aligned} r f^{r-1} f'' + r\,(r-1)\,f^{r-2}\,(f')^2 + r f' r f^{r-1} f' \\ + r f'' f^{r-1} + (f')^2\,q f^r = 0 \\ 2r f^{r-1} f'' + r\,(r-1)\,f^{r-2}\,(f')^2 + rA f^{r-2}\,(f')^2 + r\,(f')^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{n+r-1} \\ + (f')^2\,B_1 f^{r-2} + (f')^2\,B_2 f^{r-1} + (f')^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n f^{n+r} = 0 \\ 2f'' + [r\,(r-1) + rA + B_1]\,(f')^2 + r\,(f')^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{n+1} \\ + (f')^2\,B_1 f + (f')^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n f^{n+2} = 0. \end{aligned}$$

Logo, quando $t=0$, $f(0)=0$ *e* $f'(0)\neq 0$. *Daí,* $[r\,(r-1)+rA+B_1]\,(f'(0))^2 = 0$ *e portanto* $r\,(r-1)+rA+B_1=0$ *que é a equação indicial.*

8. (T3 de 2011) Mostre que nenhuma solução não trivial da equação

$$z^2 y'' + z y' + 2y = 0$$

que é real no semieixo real positivo o plano complexo pode ser real no semieixo real negativo.

Solução: