*Turma:*

*Nota:*

# MA 327 Álgebra Linear

*Segundo Semestre de 2006*

## Primeira Prova

**Nome:** **RA:**

| *Questões* | *Pontos* |
|---|---|
| Questão 1 | |
| Questão 2 | |
| Questão 3 | |
| Questão 4 | |
| *T o t a l* | |

## Questão 1. **(2.5 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ e os seguinte subespaços

$$U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 3x \} \qquad \text{e} \qquad W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = -2x \} \ .$$

Verifique se o seguinte subconjunto

$$U \cup W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x,y) \in U \quad \text{ou} \quad (x,y) \in W \}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

## Questão 2. **(2.5 Pontos)**

Sejam $V$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $u, v, w$ elementos distintos de $V$. Prove que o conjunto $\{ u, v, w \}$ é linearmente independente em $V$ se, e somente se, o conjunto $\{ u + v, u + w, v + w \}$ é linearmente independente em $V$.

## Questão 3. **(2.5 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e os seguintes subespaços

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \ ; \ a \, , \, b \, , \, c \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{e} \qquad W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix} \ ; \ a \, , \, b \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

(a) Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços:

$$U \ , \quad W \ , \quad U \cap W \quad \text{e} \quad U + W \ .$$

(b) $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = U \oplus W$ ? Justifique sua resposta.

## Questão 4. **(2.5 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. A matriz de mudança da base ordenada $\gamma = \{ u_1, u_2 \}$, onde $u_1 = (1,1)$ e $u_2 = (-2,2)$, para a base ordenada $\alpha = \{ v_1, v_2 \}$ é dada por:

$$[I]_\alpha^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} .$$

(a) Determine a base ordenada $\alpha$.

(b) Determine o elemento $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $[u]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

# *G A B A R I T O*

## Questão 1. **(2.5 Pontos)**

Vamos verificar se o elemento neutro da adição $0_{\mathbb{R}^2}$ pertence ao subconjunto $U \cup W$ e se o subconjunto $U \cup W$ é fechado com relação à operação de adição de elementos e com relação à operação de multiplicação por escalar.

Como $U$ e $W$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$, temos que $0_{\mathbb{R}^2}$ pertence tanto a $U$ quanto a $W$. Logo, $0_{\mathbb{R}^2} \in U \cup W$. Note que, $U \cap W = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \}$.

Considere um elemento $v \in U \cup W$, isto é, $v \in U$ ou $v \in W$. Assim, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda v \in U \cup W$, pois $\lambda v \in U$ ou $\lambda v \in W$.

Finalmente, tomando os elementos $v_1, v_2 \in U \cup W$, temos três possibilidades.

A primeira, consideramos que $v_1, v_2 \in U$. Como $U$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, temos que $v_1 + v_2 \in U$. Logo, $v_1 + v_2 \in U \cup W$.

A segunda, consideramos que $v_1, v_2 \in W$. Como $W$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, temos que $v_1 + v_2 \in W$. Logo, $v_1 + v_2 \in U \cup W$.

A terceira, consideramos que $v_1 \in U$ e $v_2 \in W$. Assim, temos que

$$v_1 = (x_1 \,,\, 3x_1) \quad \text{e} \quad v_2 = (x_2 \,,\, -2x_2)\,.$$

Logo, $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2 \,,\, 3x_1 - 2x_2)$. Portanto, temos que

$$v_1 + v_2 \notin U \quad \text{e} \quad v_1 + v_2 \notin W\,.$$

Desse modo, $v_1 + v_2 \notin U \cup W$. Assim, mostramos que $U \cup W$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, pois o subconjunto $U \cup W$ não é fechado com relação à operação de adição de elementos.

## Questão 2. **(2.5 Pontos)**

Inicialmente vamos provar que

$$\{\, u,\, v,\, w \,\}\ \text{LI} \quad \Longrightarrow \quad \{\, u+v,\, u+w,\, v+w \,\}\ \text{LI}\,.$$

Tomando a combinação linear nula

$$a\,(u\,+\,v) \;\;+\;\; b\,(u\,+\,w) \;\;+\;\; c\,(v\,+\,w) \;\;=\;\; 0_V$$

obtemos

$$(a\,+\,b)u \;\;+\;\; (a\,+\,c)v \;\;+\;\; (b\,+\,c)w \;\;=\;\; 0_V\,.$$

Utilizando a hipótese que o conjunto $\{\, u,\, v,\, w \,\}$ é linearmente independente, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a \;+\; b \;=\; 0 \\ a \;+\; c \;=\; 0 \\ b \;+\; c \;=\; 0 \end{cases}$$

que possui somente a solução trivial $a = b = c = 0$. Portanto, provamos que o conjunto $\{\, u+v,\, u+w,\, v+w \,\}$ é linearmente independente.

Finalmente, vamos provar que

$$\{\, u+v,\, u+w,\, v+w \,\} \ \text{LI} \quad \Longrightarrow \quad \{\, u,\, v,\, w \,\} \ \text{LI}\,.$$

Equivalentemente, podemos provar que

$$\{\, u,\, v,\, w \,\} \ \text{LD} \quad \Longrightarrow \quad \{\, u+v,\, u+w,\, v+w \,\} \ \text{LD}\,.$$

Tomando a combinação linear nula

$$a\,(u + v) \ + \ b\,(u + w) \ + \ c\,(v + w) \ = \ 0_V$$

obtemos

$$(a + b)u \ + \ (a + c)v \ + \ (b + c)w \ = \ 0_V\,.$$

Utilizando a hipótese que o conjunto $\{\, u,\, v,\, w \,\}$ é linearmente dependente, temos que os coeficientes da combinação linear acima não são todos nulos, isto é,

$$(a + b) \quad , \quad (a + c) \qquad \text{e} \qquad (b + c)$$

não são todos nulos. Assim, existem escalares $a,\, b,\, c \in \mathbb{F}$ não todos nulos tais que

$$a\,(u + v) \ + \ b\,(u + w) \ + \ c\,(v + w) \ = \ 0_V\,.$$

Portanto, mostramos que o conjunto $\{\, u+v,\, u+w,\, v+w \,\}$ é linearmente dependente.

Assim, provamos que

$$\{\, u+v,\, u+w,\, v+w \,\} \ \text{LI} \quad \Longrightarrow \quad \{\, u,\, v,\, w \,\} \ \text{LI}\,.$$

completando a resolução da questão.

## Questão 3. **(2.5 Pontos)**

**(a)**

Vamos determinar uma base para o subespaço $U$. Note que, toda matriz $A \in U$ é escrita da seguinte forma:

$$A = a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{para} \qquad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}.$$

Tomando a combinação linear nula

$$a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

obtemos que $a = b = c = 0$, são os únicos escalares que satisfazem o sistema acima. Assim, mostramos que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para o subespaço $U$, pois gera o subespaço $U$ e é linearmente independente. Logo, temos que $dim(U) = 3$.

Vamos determinar uma base para o subespaço $W$. Note que, toda matriz $A \in W$ é escrita da seguinte forma:

$$A = a\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{para} \qquad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

Tomando a combinação linear nula

$$a\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

obtemos que $a = b = 0$, são os únicos escalares que satisfazem o sistema acima. Assim, mostramos que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para o subespaço $W$, pois gera o subespaço $W$ e é linearmente independente. Logo, temos que $dim(U) = 2$.

Agora, vamos determinar uma base para o subespaço $U \cap W$. Considere uma matriz $A \in U \cap W$, isto é, $A \in U$ e $A \in W$. Assim, temos que $A$ é escrita como:

$$A = a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} = d\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} + e\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

para $a,\, b,\, c,\, d,\, e \in \mathbb{R}$.

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a &= 0 \\ b &= d \\ c &= -d \\ a &= e \end{cases}$$

cuja solução é $a = 0$ , $b = d$ , $c = -d$ e $e = 0$. Portanto, toda matriz $A \in U \cap W$ é escrita como

$$A = d \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{para} \qquad d \in \mathbb{R}\,.$$

Assim, temos que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para o subespaço $U \cap W$. Logo, $dim(U \cap W) = 1$.

Finalmente, vamos determinar uma base para o subespaço $U + W$. Pelos resultados obtidos acima, sabemos que

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 4\,,$$

e que o subespaço $U + W$ tem por um sistema de geradores o seguinte conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Podemos observar que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para o subespaço $U + W$.

**(b)**

Como $U + W$ é um subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e $dim(U + W) = dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}))$, temos que $U + W = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, entretanto, não como soma direta, pois $U \cap W \neq \{ 0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})} \}$.

## Questão 4. **(2.5 Pontos)**

**(a)**

Conhecendo a matriz de mudança de base $[I]_{\alpha}^{\gamma}$, temos que

$$\begin{cases} u_1 = v_1 + 4v_2 \\ u_2 = \quad - 2v_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + 2u_2 \\ v_2 = \quad - \dfrac{1}{2}u_2 \end{cases}$$

Logo, $v_1 = (-3, 5)$ e $v_2 = (1, -1)$, que são os elementos da base ordenada $\alpha$.

**(b)**

Conhecendo a matriz de mudança de base $[I]_{\alpha}^{\gamma}$ e o vetor de coordenadas $[u]_{\alpha}$, temos que

$$[u]_{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\gamma}\,[u]_{\gamma}.$$

Chamando $[u]_{\gamma} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

cuja única solução é $a = b = 1$. Portanto, temos que

$$u = a\,u_1 + b\,u_2 = u_1 + u_2 = (-1, 3)\,.$$

Observe que podemos obter o elemento $u$ a partir do vetor de coordenadas $[u]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e da base ordenada $\alpha$ obtida no item **(a)**. Desse modo, temos que

$$u = v_1 + 2v_2 = (-1, 3)\,.$$