Exame Vespertino

MA-311 — Cálculo III

Nome: GABARITO	RA:	Prof.:

Esta prova tem um total de 5 questões valendo 10 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA!

1	2.0	
2	2.0	
3	2.0	
4	2.0	
5	2.0	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*2.0 pontos*) Encontre via variação de parâmetros a solução geral da equação diferencial para $x > 0$:
$$y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\, e^{-2x}$$

2. (*2.0 pontos*) Resolva por transformadas de Laplace o seguinte PVI:
$$y'' + 4y = \text{sen}\ t - u_{2\pi}(t)\text{sen}\ (t - 2\pi),$$
$$y(0) = y'(0) = 0.$$

3. (*2.0 pontos*)

   (a) Dê a solução geral real do sistema linear homogêneo, usando autovalores e autovetores
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

   (b) Encontre uma solução particular do sistema usando variação de parâmetros e apresente a solução geral.
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. (*2.0 pontos*) Resolva a equação diferencial
$$(1 - x)y'' + xy' - y = 0$$
através de uma série de potências em torno do ponto $x = 0$. Encontre a relação de recorrência e a expressão do termo geral de solução da equação dada.

5. (*2.0 pontos*)

   (a) Apresente a extensão ímpar da função
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < \pi \\ 1 & \text{se } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

   (b) Encontre a série de Fourier da função acima.

   (c) Esboce o gráfico da soma da série de Fourier no intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$. (Sugestão: Use o Teorema de Convergência de Fourier).

1) $y'' + 4y' + 4y = x^{-2} e^{-2x}$.

$y'' + 4y' + 4y = 0$, $\quad Q(r) = r^2 + 4r + 4 = 0$, $r = -2$

$$\boxed{y_H(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}}$$ (solução geral da eq. homogênea)

0,5

$$y_p(x) = u_1(x) e^{-2x} + u_2(x) x e^{-2x}$$

$$\begin{cases} u_1' e^{-2x} + u_2' x e^{-2x} = 0 \\ u_1'(-2e^{-2x}) + u_2'(e^{-2x} - 2x e^{-2x}) = x^{-2} e^{-2x} \end{cases}$$

0,3

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & x e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2x e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x} - 2x e^{-4x} + 2x e^{-4x} = e^{-4x}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^{-2x} \\ x^{-2} e^{-2x} & e^{-2x} - 2x e^{-2x} \end{vmatrix}}{e^{-4x}} = -x^{-1}, \quad \boxed{u_1 = -\ln x}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^{-2} e^{-2x} \end{vmatrix}}{e^{-4x}} = x^{-2}, \quad \boxed{u_2 = -x^{-1}}$$

0,8

$$\boxed{y_p(x) = -(\ln x) e^{-2x} - e^{-2x}}$$

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - (\ln x) e^{-2x}$$

0,4

2) $y'' + 4y = \operatorname{sen} t - u_{2\pi}(t) \operatorname{sen}(t - 2\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$

$$\mathcal{L}\{y''\}(x) + 4\mathcal{L}\{y\}(x) = x^2\mathcal{L}\{y\}(x) - x\,\overset{=0}{y(0)} - \overset{=0}{y'(0)} + 4\mathcal{L}\{y\}(x)$$
$$= (x^2+4)Y \quad , \quad Y = \mathcal{L}\{y\}(x)$$

0,2

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(x) - \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t-2\pi)\}(x) = \frac{1}{1+x^2} - e^{-2\pi x}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(x)$$
$$= \frac{1-e^{-2\pi x}}{1+x^2}$$

0,2

$$Y = \frac{1-e^{-2\pi x}}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

0,2

$$\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2+1}$$

0,3

$$= -\frac{1}{6}\,\frac{2}{x^2+2^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2+1}$$
$$= \mathcal{L}\left\{-\frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} t\right\}(x)$$

0,4

$$\frac{e^{-2\pi x}}{(x^2+4)(x^2+1)} = e^{-2\pi x}\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} t\right\}(x)$$
$$= \mathcal{L}\left\{u_{2\pi}(t)\left[-\frac{1}{6}\operatorname{sen} 2(t-2\pi) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t-2\pi)\right]\right\}(x)$$

0,4

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(x)\}(t) = -\frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} t$$
$$- u_{2\pi}(t)\left[-\frac{1}{6}\operatorname{sen} 2(t-2\pi) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t-2\pi)\right]$$

0,3

OBSERVAÇÃO : convolução → 0,1
translação errada → −0,3

3(a) $\quad X' = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X \qquad p(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -7 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5$

$\Delta = 36$

$\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1$

$\underline{\lambda_1 = 5}$; $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow x - 2y = 5y \Rightarrow x = 7y$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = -1}$: $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x - 2y = -y \Rightarrow x = y$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

0,4

$$\boxed{x_H(t) = c_1 e^{5t}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

0,3

3(b): $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 7e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & e^{-t} \end{pmatrix} \qquad x_p(t) = \Phi(t)\, u(t)$

$\Phi(t)\, u'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

0,4

$$\begin{cases} u_1' 7e^{5t} + u_2' e^{-t} = 1 \\ u_1' e^{5t} + u_2' e^{-t} = 2 \end{cases} \qquad W = \begin{vmatrix} 7e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & e^{-t} \end{vmatrix} = 6e^{4t}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^{-t} \\ 2 & e^{-t} \end{vmatrix}}{6e^{4t}} = -\frac{1}{6}e^{-5t} \Longrightarrow u_1 = \frac{e^{-5t}}{30}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 7e^{5t} & 1 \\ e^{5t} & 2 \end{vmatrix}}{6e^{4t}} = \frac{13}{6}e^{t} \Longrightarrow u_2 = \frac{13}{6}e^{t}$$

0,6

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} 7e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-5t}/30 \\ 13e^{t}/6 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$$

0,3

4) $(1-x)y'' + xy' - y = 0$, $P(x) = 1-x$, $Q(x) = x$, $R(x) = -1$

$P(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ é um ponto regular da equação

0,1

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \ , \ y' = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} \ , \ y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$$

$$0 = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-1}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m - \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) m a_{m+1} x^m$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+2)(m+1) a_{m+2} - (m+1)m a_{m+1} + (m-1) a_m \right] x^m$$

0,5

$$(m+2)(m+1) a_{m+2} - (m+1) m a_{m+1} + (m-1) a_m = 0, \ m \geqslant 0$$

$$\boxed{a_{m+2} = \frac{m}{m+2} a_{m+1} - \frac{m-1}{(m+2)(m+1)} a_m \ , \ m \geqslant 0}$$

(Relação de recorrência)

0,4

$\underline{m=0}$: $a_2 = \frac{0}{2} a_1 + \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{\cdot 2} = \frac{a_0}{2!}$

$\underline{m=1}$: $a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2 \cdot 3} = \frac{a_0}{3!}$

$\underline{m=2}$; $a_4 = \frac{2}{4} a_3 - \frac{1}{4.3} a_2 = 2 \frac{a_0}{4!} - \frac{a_0}{4!} = \frac{a_0}{4!}$

$\underline{m=3}$; $a_5 = \frac{3}{5} a_4 - \frac{2}{5.4} a_3 = 3 \frac{a_0}{5!} - 2 \frac{a_0}{5!} = \frac{a_0}{5!}$

0,2

$\vdots$

$$\boxed{a_m = \frac{a_0}{m!} \quad , \ m \geq 2} \qquad \text{(termo geral)}$$

0,5

$$y = a_0 + a_1 x + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_0}{m!} x^m$$

$$= a_0 \underbrace{\left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right)}_{y_1(x)} + a_1 \underbrace{x}_{y_2(x)}$$

$$= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \qquad \text{(solução geral)}$$

0,3

5 (a):

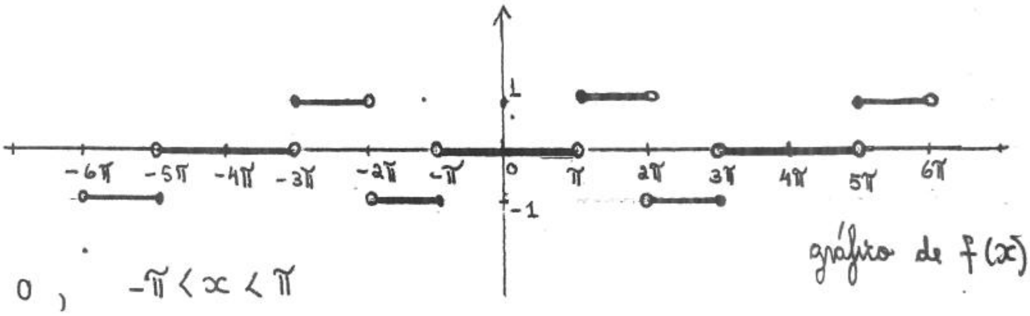

gráfico de $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < \pi \\ 1, & \pi \leq x < 2\pi \\ -1, & -2\pi < x < -\pi \end{cases} \qquad f(x+4\pi) = f(x)$$

0,3

(b): f é ímpar $\Rightarrow$ $a_m = 0 \ \forall \ m \geq 0$

$L = 2\pi$, $T = 4\pi$

0,3

$$b_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{mx}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\text{sen}\left(\frac{mx}{2}\right)dx = -\frac{1}{\pi}\,\frac{2}{m}\cos\frac{mx}{2}\Bigg|_{x=\pi}^{x=2\pi}$$

$$= \frac{2}{m\pi}\left(\cos\frac{m\pi}{2} - \cos m\pi\right)$$

0,5

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi}\left(\cos\frac{m\pi}{2} - \cos m\pi\right)\text{sen}\left(\frac{mx}{2}\right) \quad \text{(série de Fourier)}$$

0,3

(c): (Soma da série de Fourier) $g(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right]$

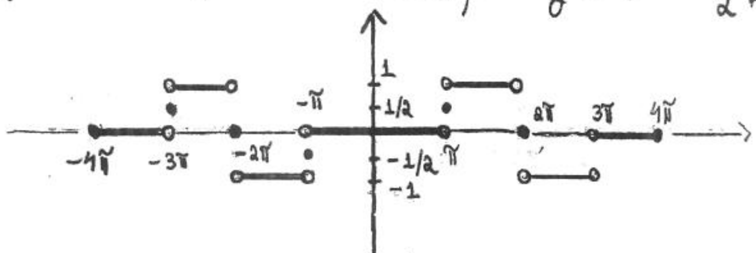

gráfico de $g(x)$:

$g(x)$ é periódica de período 4π

$g(x) = f(x)$, $x \neq k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

$g(2k\pi) = 0$, $g(\pi + 4k\pi) = 1/2 \ \forall \ k \in \mathbb{Z}$,

$g(-\pi + 4k\pi) = -1/2$, $\forall \ k \in \mathbb{Z}$.

0,6