$1^{\underline{a}}$ Q — $6^{\underline{a}}$ feira — Gabarito

$$f(x,y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$$

$$f_x = (2 - 2x)(2y - y^2) = 0 \quad (1)$$

$$f_y = (2x - x^2)(2 - 2y) = 0 \quad (2)$$

De (1) $2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $(2y - y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 2$

Se $x = 1$ temos por (2) que $2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 1$

$P_1 = (1, 1)$ pto crítico

Se $y = 0$ temos por (2) que $2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

$\Rightarrow P_2 = (0, 0)$ e $P_3 = (2, 0)$ ptos críticos.

Se $y = 2$ temos por (2) que $2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

$P_4 = (0, 2)$ e $P_5 = (2, 2)$ ptos críticos

Achar os pontos críticos

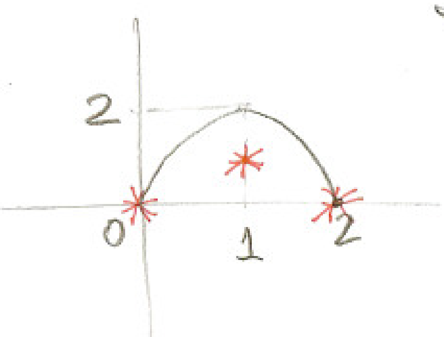
logo os pontos críticos são:

$\boxed{(1,1), (0,0), (2,0)}$, $(0,2)$, $(2,2)$ ↔ 1,0

pontos críticos na região $0 \leq y \leq 2(2x - x^2)$

Na fronteira temos:

1) $y = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow (x, 0)$ p/ $0 \leq x \leq 2$.



2) $\dfrac{y}{2} = 2x - x^2 \Longrightarrow$

até aqui + 0,5

$$f = f(y) = \frac{y}{2}(2y - y^2) \text{ para } 0 \leq y \leq 2.$$

$f'(y) = 2y - \frac{3}{2}y^2 = 0 \iff y = 0$ ou $y = 4/3$

então os pontos críticos são $y = 4/3$ e os extremos $y=0$ e $y = 2$. ($y=0$ e $y=2$ já apareceram)

para $y = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} = 2(2x - x^2) \Rightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

Os pontos críticos na fronteira são:

o segmento $(x, 0)$ para $0 \leq x \leq 2$ e os pontos $\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right)$ e $(1, 2)$ até aqui + 0,7

Calculando os valores de $f(x,y)$ nos pontos encontrados:

$f(x, 0) = 0$, p/ $0 \leq x \leq 2$

$f(1, 1) = 1$

$f\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{27}$

$f(1; 2) = 0$

Resposta + 0,3

Resposta: O valor mínimo é zero e é atingido nos pontos $(1, 2)$ e nos pontos do segmento $(x, 0)$, $0 \leq x \leq 2$.

O valor máximo é $\underline{1}$ e é atingido no ponto $(1, 1)$.

Questão 2: 6ª feira

seja (x,y,z) qq ponto em elipse

$$d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$f(x,y,z) = d^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$g(x,y,z) = x+y+z = 1$$

$$h(x,y,z) = x^2+y^2 = 1.$$

1,0 pt.

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(1) + \mu(2x) \\ 2y = \lambda(1) + \mu(2y) \\ 2z = \lambda(1) + \mu(0) \\ x+y+z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \lambda + 2x\mu & \text{— ①} \\ 2y = \lambda + 2y\mu & \text{— ②} \\ 2z = \lambda & \text{— ③} \\ x+y+z=1 & \text{— ④} \\ x^2+y^2=1. & \text{— ⑤} \end{cases}$$

$$\boxed{① - ② \Rightarrow \quad 2x-2y = (2x-2y)\mu}$$

0,5 pto

I Se $2x-2y=0 \Rightarrow x=y$

em ⑤ $\Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2} \overset{④}{\Rightarrow} z = 1-\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2}\right) \checkmark$$

Se $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}}{2} \overset{④}{\Rightarrow} z = 1+\sqrt{2}$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right). \checkmark$$

(II) Se $2x - 2y \neq 0 \Rightarrow x \neq y \Rightarrow \mu = 1$

De (1) e (2) temos $\lambda = 0 \Rightarrow$ de (3), $z = 0$

De (4) e (5) temos

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 0$ ou $y = 1$

Se $y = 0 \Rightarrow x = 1$

Se $y = 1 \Rightarrow x = 0$

$(1, 0, 0)$

$(0, 1, 0)$

0,5 pts

$f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1-\sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2} \simeq 1,2$

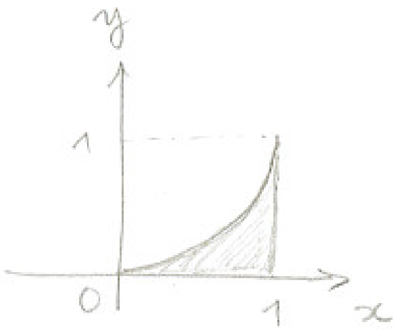
$f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1+\sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2} \simeq 6,8$ (máx)

$f(1, 0, 0) = 1$ (min)

$f(0, 1, 0) = 1$ (min).

0,5 pts

3) a)



0,2

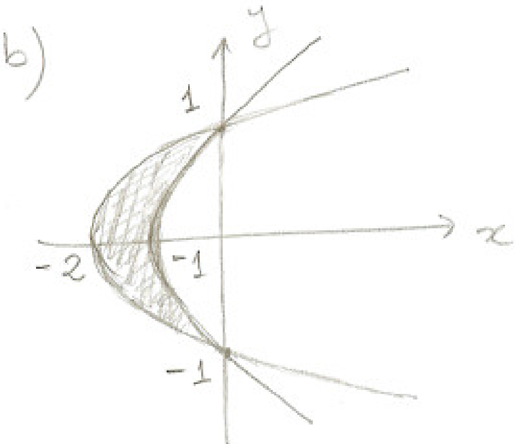
$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\, dy\, dx = \int_0^1 \left[y\sqrt{x^3+1} \right]_0^{x^2} dx =$$

0,2 0,2

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx = \frac{2}{9}\left(x^3+1\right)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

0,2 0,2

b)



0,5

$$\int_{-1}^{1} \int_{2y^2-2}^{y^2-1} 1\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(-y^2+1\right) dy = -\frac{y^3}{3} + y \Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

0,5 0,5

Calcular a metade

4ª questão

COORD. POLARES $\longrightarrow$ (1,0)

MONTAR A INTEGRAL $\longrightarrow$ (1,0)

CONTAS $\longrightarrow$ (0,5)

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}\ \cancel{r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} -\frac{(4-r^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{(4-4\cos^2\theta)^{3/2}}{3}+\frac{8}{3}\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{8}{3}(1-\cos^2\theta)^{3/2}+\frac{8}{3}\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{8}{3}\operatorname{sen}^3\theta+\frac{8}{3}\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{8}{3}\,d\theta - \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{8\pi}{6} - \frac{8}{3}\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right)_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{8\pi}{6} + \frac{8}{3}\left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi}{6} - \frac{8}{3}\,\frac{2}{3} =$$

$$= \frac{8\pi}{6} - \frac{16}{9} \qquad \text{Volume} = \frac{8\pi}{3} - \frac{32}{9}$$