EE521- Turma U - 1º Semestre/2005 - Prova Nº 1 - 11/04/2005

Questão 1. Considere um disco de raio a, eletricamente carregado. Em cada ponto, a densidade superficial de carga é dada por

$$\sigma = \sigma_0 \frac{b^2}{a^2} \qquad 0 \le b \le a\,; \quad \sigma_0 = \text{constante positiva.}$$

onde b representa a distância desse ponto até o centro do disco.

a) Determine a magnitude do campo elétrico a uma distância h acima do centro do disco.

b) Expresse o resultado do item a em termos da carga total no disco, Q_0.

c) Obtenha uma expressão simplificada que aproxima a magnitude do campo (do item a ou item b) quando $h >> a$. *Sugestão: Escreva a expressão exata como um produto* $F.f\left(\frac{a}{h}\right)$, *onde o fator F independe da distância h. Expresse a função* $f(\alpha)$ *em série de potências de* α, $f(\alpha) = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 + \ldots$; *para isso, a série* $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \ldots$ *, pode ser útil. Finalmente, faça a aproximação, válida para* $\left|\frac{a}{h}\right| << 1, f\left(\frac{a}{h}\right) \cong c_k\left(\frac{a}{h}\right)^k$ *onde k representa o menor dos índices n para os quais vale* $c_n \ne 0$.

Questão 2. Considere a distribuição volumétrica de carga elétrica, confinada à esfera (bola) de raio a,

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \qquad 0 \le r \le a \qquad \rho_0 = \text{constante.}$$

a) Determine o campo elétrico no interior da esfera carregada.

b) Para o campo determinado em a, com $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}} + E_z\hat{\mathbf{z}}$, calcule $\frac{\partial E_x}{\partial x}$, $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ e $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ e compare a soma $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ com $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$. *Sugestão: Note que* $\hat{\mathbf{r}} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}}$ *e* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

c) Sabendo que o campo, da distribuição de carga acima, atinge sua máxima magnitude a uma certa distância r_0 do centro da esfera, com $0 < r_0 < a$, determine r_0 e o valor do campo correspondente.

d) Suponha que seja adicinada carga elétrica superficial, com densidade uniforme, à superfície esférica $r = a$. Que valor deve ter a densidade superficial, σ_0, para que o campo se anule em toda a região $r > a$?

Valor das questões:

1a	1b	1c		2a	2b	2c	2d
2	1	2		2	1	1	1

Formulário

Convenções.

$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ $\quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$

$\mathbf{s} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ $\quad s = |s| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad \hat{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s}}{s}$

As coordenadas cilíndricas (s, ϕ, z) podem ser definidas pelas relações:

$x = s\cos\phi \qquad y = s\sin\phi \qquad z = z$

As coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) podem ser definidas pelas relações:

$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad y = r\sin\theta\sin\phi \qquad z = r\cos\theta$

Integrais para cálculo de campo elétrico.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{P}} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau'$$

Note que $\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, onde $\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ é o vetor unitário na direção de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Elementos de volume e área em coordenadas cilíndricas e esféricas.

volume, cilíndricas: $d\tau = s ds d\phi dz$
volume, esféricas: $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$
área, cilíndricas, superfície paralela ao plano xy: $da = s ds d\phi$
área, esféricas, superfície esférica centrada na origem, raio r: $da = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$

Lei de Gauss.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ representa o vetor unitário normal e orientado para fora, em cada ponto da superfície fechada, S, Q_{int} representa a totalidade da carga elétrica no interior de S e

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad (\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}} + E_z\hat{\mathbf{z}}).$$

Algumas integrais.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + c^2}\right) \qquad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + c^2}} = \sqrt{x^2 + c^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + c^2)^{3/2}} = \frac{x}{c^2\sqrt{x^2 + c^2}} \qquad \int \frac{x dx}{(x^2 + c^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + c^2}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + c^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + c^2}\right) \qquad \int \frac{x^3 dx}{(x^2 + c^2)^{3/2}} = \frac{x^2 + 2c^2}{\sqrt{x^2 + c^2}}$$

EE521- Turma U - 1º Semestre/2005 - Prova Nº 1 - 11/04/2005

Soluções

Questão 1a

Tome um sistema de coordenadas com origem no centro do disco e eixo z perpendicular ao plano do mesmo.O campo pedido é $\mathbf{E}(h\hat{\mathbf{z}})$. Temos

$$\mathbf{E}(h\mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0\frac{s^2}{a^2}}{(s^2+h^2)^{3/2}}(h\hat{\mathbf{z}} - s\hat{\mathbf{s}})sd\phi ds.$$

Por simetria, $\mathbf{E}(h\hat{\mathbf{z}}) = E_z\hat{\mathbf{z}} \Rightarrow |\mathbf{E}(h\hat{\mathbf{z}})| = |E_z|$. Além disso, uma vez que $\sigma \geq 0$, $|E_z| = E_z$.

$$|\mathbf{E}(h\hat{\mathbf{z}})| = E_z = \frac{\sigma_0 h}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{s^3}{(s^2+h^2)^{3/2}}d\phi ds = \frac{\sigma_0 h}{2\varepsilon_0 a^2}\int_0^a \frac{s^3}{(s^2+h^2)^{3/2}}ds.$$

Como

$$\int \frac{s^3}{(s^2+h^2)^{3/2}}ds = \frac{s^2+2h^2}{\sqrt{s^2+h^2}},$$

obtemos

$$E_z = \frac{\sigma_0 h}{2\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{a^2+2h^2}{\sqrt{a^2+h^2}} - 2h\right).$$

Questão 1b

$$Q_0 = \int_0^a\int_0^{2\pi}\sigma_0\frac{s^2}{a^2}sd\phi ds = \frac{2\pi\sigma_0}{a^2}\int_0^a s^3 ds,$$

ou seja,

$$Q_0 = \frac{2\pi\sigma_0}{a^2}\frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^2\sigma_0}{2} \Rightarrow \sigma_0 = \frac{2Q_0}{\pi a^2}.$$

Portanto,

$$E_z = \frac{Q_0 h}{\pi\varepsilon_0 a^4}\left(\frac{a^2+2h^2}{\sqrt{a^2+h^2}} - 2h\right)$$

Questão 1c

$$E_z = \frac{\sigma_0 h}{2\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{h^2\left(2+\left(\frac{a}{h}\right)^2\right)}{h\sqrt{1+\left(\frac{a}{h}\right)^2}} - 2h\right)$$

$$E_z = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\left(\frac{a}{h}\right)^2}\left(\frac{2+\left(\frac{a}{h}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{h}\right)^2}} - 2\right) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}f\left(\frac{a}{h}\right),$$

onde

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{2+\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}} - 2\right).$$

Usando a série para $\left(\sqrt{1+x}\right)^{-1}$ com $x = \alpha^2$, temos

$$\frac{2+\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}} - 2 = -2 + (2+\alpha^2)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) = -2 + (2+\alpha^2)\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha^4 - \frac{5}{16}\alpha^6 + \ldots\right).$$

Esta última série é a soma de

$$\begin{aligned}
-2 &= -2, \\
2\left(1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{3}{8}\alpha^4 - \tfrac{5}{16}\alpha^6 + \ldots\right) &= 2 - \alpha^2 + \tfrac{3}{4}\alpha^4 - \tfrac{5}{8}\alpha^6 + \ldots \quad \text{e} \\
\alpha^2\left(1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{3}{8}\alpha^4 - \tfrac{5}{16}\alpha^6 + \ldots\right) &= \alpha^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^4 + \tfrac{3}{8}\alpha^6 - \tfrac{5}{16}\alpha^8 + \ldots \ .
\end{aligned}$$

Fica claro que

$$\frac{2+\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}} - 2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\alpha^4 + \ldots = \frac{1}{4}\alpha^4 + \ldots \ ,$$

e

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{4}\alpha^4 + \ldots\right) = \frac{1}{4}\alpha^2 + \ldots \ .$$

Portanto,

$$f\left(\frac{a}{h}\right) \cong \frac{a^2}{4h^2} \quad \text{para } h >> a,$$

e

$$E_z \cong \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\frac{a^2}{4h^2} = \frac{\sigma_0 a^2}{8\varepsilon_0 h^2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 h^2} \quad \text{para } h >> a,$$

que é a intensidade do campo que se obteria com a totalidade da carga concentrada na origem, resultado previsível.

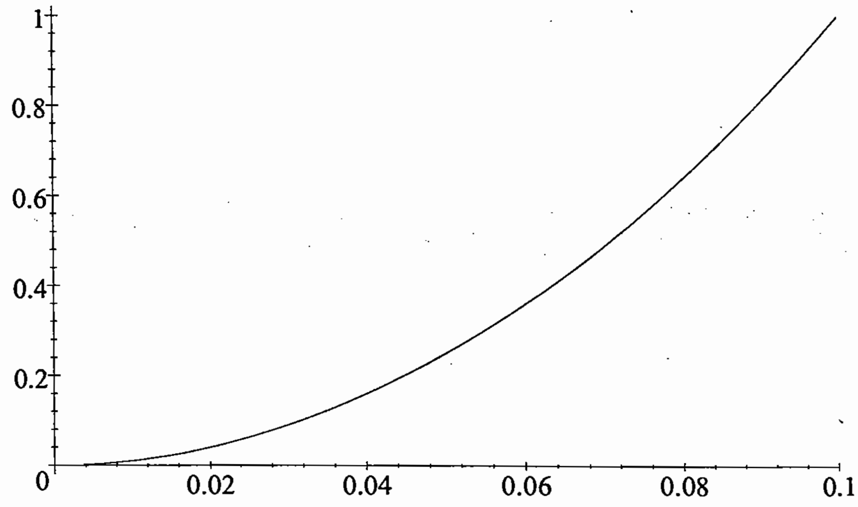

Gráfico do erro percentual: $100 \times \dfrac{\frac{\alpha^2}{4} - f(\alpha)}{f(\alpha)}$

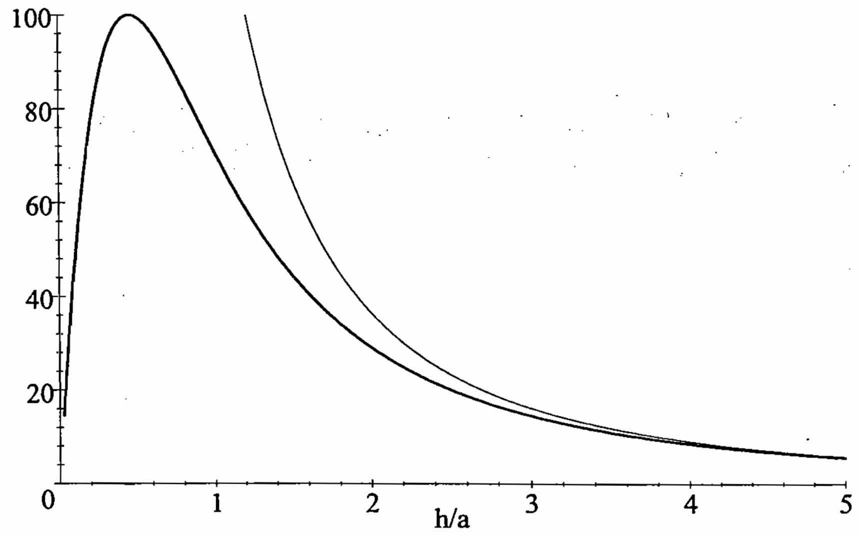

Gráfico da intensidade do campo, em percentagem relativa ao valor máximo, em função da distância normalizada em relação a a, $\frac{r}{a}$. O traço mais fino representa a aproximação obtida acima.

Questão 2a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

onde

$$Q_{int} = \int_0^r \rho_0\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)4\pi u^2 du = 4\pi\rho_0\left(\int_0^r u^2 du - \frac{1}{a^2}\int_0^r u^4 du\right) = 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right)$$

ou

$$Q_{int} = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3\left[1 - \frac{3}{5}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right].$$

Portanto

$$\mathbf{E(r)} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left[1 - \frac{3}{5}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r}{a} - \frac{3}{5}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right]\hat{\mathbf{r}}$$

Questão 2b

$$\mathbf{E(r)} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r\left[1 - \frac{3}{5}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\left(\frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}}\right).$$

$$E_x = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}x\left[1 - \frac{3}{5a^2}(x^2 + y^2 + z^2)\right] = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[x - \frac{3}{5a^2}(x^3 + xy^2 + xz^2)\right].$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[1 - \frac{3}{5a^2}(3x^2 + y^2 + z^2)\right].$$

De modo similar,

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[1 - \frac{3}{5a^2}(x^2 + 3y^2 + z^2)\right]$$

e

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[1 - \frac{3}{5a^2}(x^2 + y^2 + 3z^2)\right].$$

Portanto,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(3 - \frac{3}{5a^2}5r^2\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

que é a expressão da lei de Gauss em forma diferencial.

Questão 2c

Para $0 \leq r \leq a$,

$$\mathbf{E(r)} = \frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0}g\left(\frac{r}{a}\right)\hat{\mathbf{r}},$$

onde

$$g(\alpha) = \alpha - \frac{3}{5}\alpha^3 = \alpha\left(1 - \frac{3}{5}\alpha^2\right).$$

A magnitude do campo para $0 \leq r \leq a$,

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = \frac{|\rho_0| a}{3\varepsilon_0} g\left(\frac{r}{a}\right),$$

é proporcional a $g\left(\frac{r}{a}\right)$. Repare que $g\left(\frac{r}{a}\right) \geq 0$ para $0 \leq \frac{r}{a} \leq 1$.

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{9}{5}\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Portanto, para $\alpha \geq 0$ só existe um valor crítico para α, ou seja $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$. Para esse valor, $g(\alpha)$ atinge o máximo, pois pode-se ver facilmente que

$$g'(\alpha) > 0 \quad \text{para } 0 \leq \alpha < \frac{\sqrt{5}}{3}$$

e

$$g'(\alpha) < 0 \quad \text{para } \alpha > \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Portanto, no intervalo $0 \leq \frac{r}{a} \leq 1$, a magnitude do campo atinge seu valor máximo em

$$\frac{r}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{3}a.$$

Como sabemos que para $r > a$ a magnitude do campo continua decaindo, com o inverso do quadrado de r, esse é também o valor máximo absoluto. O valor do campo em $r = \frac{\sqrt{5}}{3}a$ é

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0}\frac{\sqrt{5}}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\frac{5}{9}\right)\hat{\mathbf{r}} = \frac{2\sqrt{5}}{27}\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}.$$

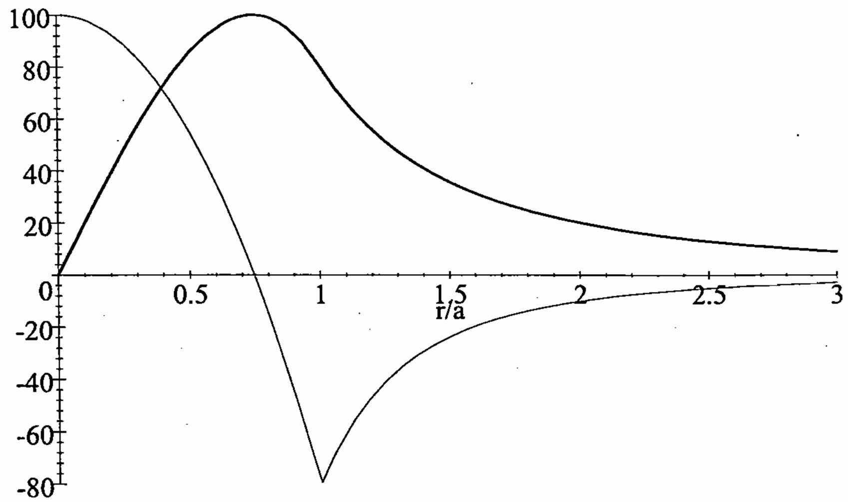

Gráfico da magnitude do campo, em percentagem de seu valor máximo, em função da distância r normalizada em relação ao raio a, $\frac{r}{a}$. O traço mais fraco representa a derivada dessa magnitude, também em percentagem com relação a seu valor máximo.

Questão 2d

A adição da carga superficial não altera a validade da expressão

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Para que o campo seja nulo em todos ospontos com $r > a$, é necessário e suficiente que a carga interna a qualquer superfície de raio $r > a$, Q_{int}, seja nula. Mas a carga interna a qualquer dessas superfícies é simplesmente

$$Q_{int} = \left(\text{carga } \textit{no interior} \text{ da superfície } r = a\right) + \left(\text{carga } \textit{na} \text{ superfície } r = a\right),$$

ou seja,

$$Q_{int} = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3\left[1 - \frac{3}{5}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\Bigg|_{r=a} + 4\pi a^2\sigma_0 = \frac{8}{15}\pi\rho_0 a^3 + 4\pi a^2\sigma_0.$$

Igualando a zero a expressão acima, obtemos

$$4\pi a^2\sigma_0 = -\frac{8}{15}\pi\rho_0 a^3$$

ou

$$\sigma_0 = -\frac{2}{15}\rho_0 a.$$