19 / 04 / 10

EA721A - PRINCÍPIOS DE CONTROLE & SERVOMECANISMOS

PROVA 1 - RESOLUÇÃO

QUESTÃO 1. A equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + C(s)P(s) = 1 + k(s+1)\frac{1}{s^2-1} = 0,$$

ou $s^2 + ks + k - 1 = 0$. O sistema em malha fechada é estável para $k > 1$. A componente da saída devida à entrada r é

$$\frac{Y_r(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$= \frac{k(s+1)/(s^2-1)}{1 + k(s+1)/(s^2-1)}$$

$$= \frac{k(s+1)}{s^2+ks+k-1}$$

Pelo Teorema do Valor Final (supondo $k > 1$),

$$y_r(\infty) = \lim_{t\to\infty} y_r(t) = \lim_{s\to 0} s\, Y_r(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{k(s+1)}{s^2+ks+(k-1)} \cdot \frac{A_1}{\cancel{s}}$$

$$= \frac{kA_1}{k-1}$$

A componente da saída devida ao distúrbio w é (supondo $k>1$)

$$y_w(\infty) = |T(j1)| \cdot A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \angle T(j1)),$$

onde

$$T(s) = \frac{Y_w(s)}{W(s)} = \frac{P(s)}{1 + C(s)\,P(s)}$$

$$= \frac{1/(s^2-1)}{1 + k(s+1)/(s^2-1)}$$

$$= \frac{1}{s^2 + ks + (k-1)}$$

Portanto,

$$T(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + j\omega k + (k-1)} = \frac{1}{\sqrt{(k-1-\omega)^2 + (\omega k)^2}} \angle -tg^{-1}\, \omega k / k-1-\omega$$

Em $\omega = 1$ rad/s,

$$y(\infty) = \frac{kA_1}{k-1} + \frac{A_2}{\sqrt{(k-2)^2 + k^2}} \operatorname{sen}\left(t - tg^{-1}\, k/k-2\right).$$

Para que a amplitude da componente devida a w seja $\frac{A}{10}$, deve-se ter $(k-2)^2 + k^2 = 100$, ou

$$k^2 - 4k + 4 + k^2 = 2k^2 - 4k + 4 = 100.$$

As raízes de $k^2 - 2k - 48 = 0$ são $k_1 = 8$ e $k_2 = -6$.

O ganho procurado é $k = 8$.

∎

QUESTÃO 2. A equação característica do sistema em malha fechada é

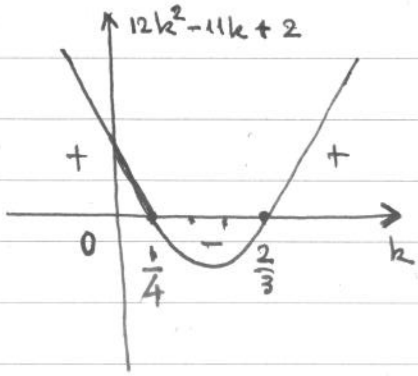
$$1 + C(s)P(s) = 1 + k\,\frac{(s+6)^2}{s(s+1)^2} = 0,$$

ou $s^3 + (2+k)s^2 + (1+12k)s + 36k = 0$. O array de Routh é

s^3	1	$(1+12k)$
s^2	$(2+k)$	$36k$
s^1	$*$	
s^0	$36k$	

$$* = \frac{(2+k)(1+12k)-36k}{2+k} = \frac{12k^2-11k+2}{2+k}$$

As raízes de $12k^2 - 11k + 2 = 0$ são $k_1 = 1/4$ e $k_2 = 2/3$.



O sistema em malha fechada é estável para

$0<k<\frac{1}{4}$ ou $k>\frac{2}{3}$; marginalmente estável, se $k=0$

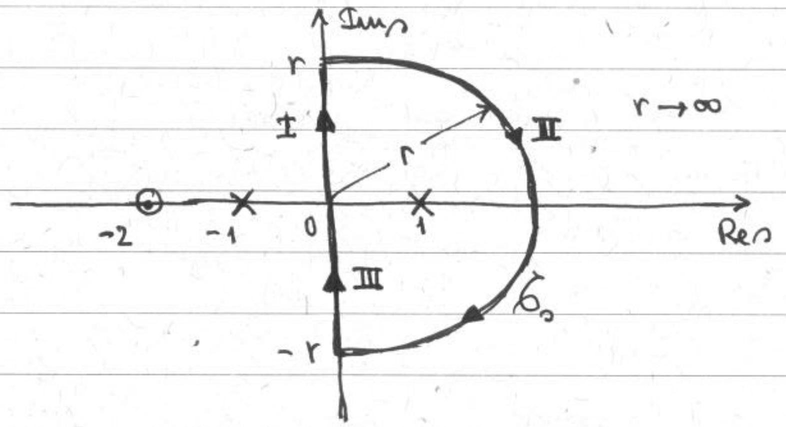
$k=\frac{1}{4}$, $k=\frac{2}{3}$; instável, se $\begin{cases} \frac{1}{4}<k<\frac{2}{3} \\ \text{ou } k<0 \end{cases}$. As situa-

ções descritas correspondem a nenhuma troca de sinal na primeira coluna do array, linha nula no array e uma ou mais trocas de sinal na primeira coluna do array. ∎

QUESTÃO 3. O ganho de malha do sistema é

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{s^2-1}$$

Observa-se que $G(s)$ possui um pólo no semiplano direito do plano s, isto é, $P=1$. A curva $\mathcal{C}_s$ apropriada é



No trecho I; $\{s : s=j\omega,\ 0\le\omega<\infty\}$, tem-se que

$$G(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{k(j\omega+2)}{-\omega^2-1} = \frac{k\sqrt{\omega^2+4}}{\omega^2+1}\ \angle\, 180^\circ + tg^{-1}\omega/2 .$$

tilibra

/ /

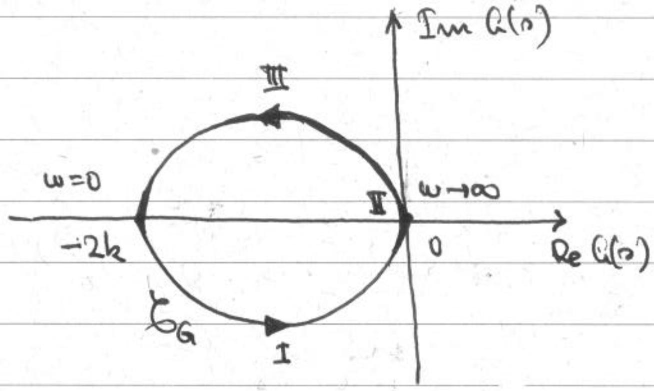
Em $\omega = 0$, $|G(j0)| = 2k$, $\angle G(j0) = 180°$. Quando $\omega \to \infty$, $|G(j\omega)| \to 0$, $\angle G(j\omega) \to 270°$.

No trecho II, $\{s : s = re^{j\phi},\ r \to \infty,\ -90° \leq \phi \leq 90°\}$, tem-se que

$$\lim_{r\to\infty} G(s)\Big|_{s=re^{j\phi}} = \lim_{r\to\infty} \frac{k\,(re^{j\phi}+2)}{r^2e^{j2\phi}-1} = \lim_{r\to\infty} \frac{k}{r}\,e^{-j\phi}.$$

O módulo de $G(s)$ tende a zero e a fase varia de $-90°$ ($\equiv 270°$) a $+90°$ ($\equiv -270°$) quando a fase de s varia de $+90°$ a $-90°$. O trecho III é simétrico em relação ao trecho I.

Diagrama de Nyquist (Curva Γ_G)



Análise de Estabilidade: se $-2k < -1$, então Γ_G envolve $-1+j0$ uma vez no sentido anti-horário, isto é, $N = -1$. Logo $Z = N + P = -1 + 1 = 0$, e o sistema em malha fechada é estável para $k > 1/2$. Se $-2k > -1$, então $N = 0$, $Z = 1$, e o sistema é instável para

$k < 1/2$. Se $k = 1/2$ o sistema é marginalmente estável.

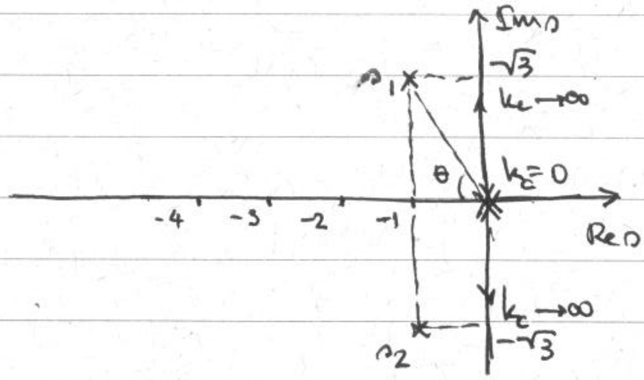
QUESTÃO 4. A equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + C(s)P(s) = 1 + k_c\frac{(s + 1/T)}{s + 1/\alpha T}\,\frac{1}{s^2} = 0$$

Os pólos a serem alocados são

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -0{,}5\times 2 \pm j\,2\sqrt{1-(0{,}5)^2}$$
$$= -1 \pm j\sqrt{3}.$$

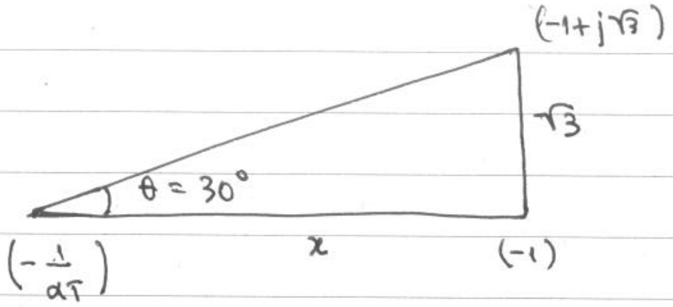
O L.R. do sistema não compensado é



Observa-se que $\theta = tg^{-1}\sqrt{3}/1 = 60°$. Logo a fase da planta em $s_1 = -1 + j\sqrt{3}$ é

$$\angle P(s)\Big|_{s=s_1} = -240°.$$

O controlador avanço deve somar $+60°$ em s_1. Escolhendo-se $-1/T = -1$, o zero do compensador contribuirá com $+90^\circ$ em s_1. O pólo do controlador deve então remover $+30^\circ$ em s_1:



Portanto, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{x}$, ou $x = \sqrt{3}/\operatorname{tg} 30^\circ$, $x = 3$. O pólo deve ser posicionado em $-\frac{1}{\alpha T} = -4$. O ganho k_c é obtido da condição de magnitude:

$$\left| k_c \frac{s+1}{s+4} \cdot \frac{1}{s^2} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

$$k_c \left| \frac{j\sqrt{3}}{(3+j\sqrt{3})(-1+j\sqrt{3})^2} \right| = 1$$

$$k_c \left| \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9+3}\,(1+3)} \right| = 1,$$

ou $k_c = 8$. O controlador que realiza a alocação é

$$C(s) = 8\,\frac{s+1}{s+4}.$$

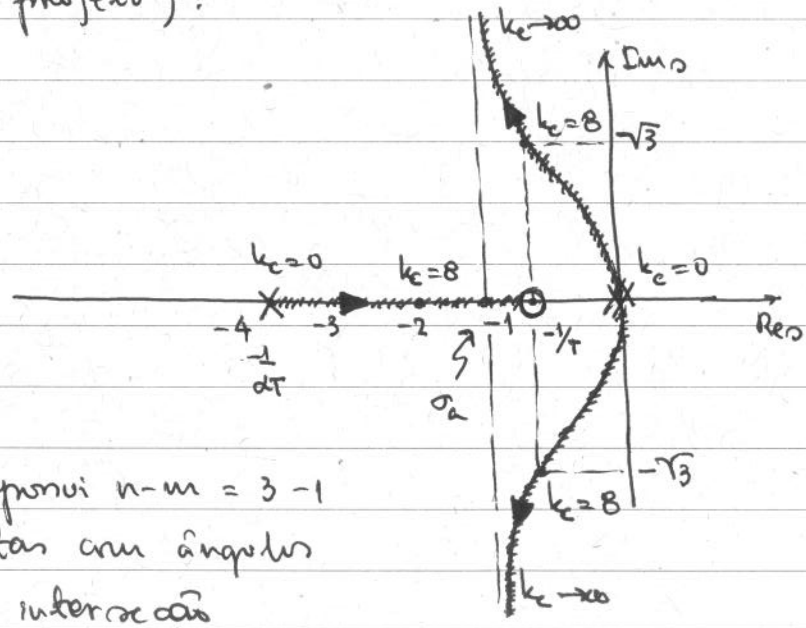
Projeto Alternativo: faz-se $1/T = 0$ $(T \to \infty)$, somando-se $+120°$, e $1/\alpha T = 2$, subtraindo-se $60°$. Desta forma o controlador somará $+60°$ em s_1. O ganho do controlador será

$$\left| k_c \frac{s}{s+2} \cdot \frac{1}{s^2} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

$$\left| \frac{k_c}{(1+j\sqrt{3})(-1+j\sqrt{3})} \right| = 1$$

$$\left| \frac{k_c}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}} \right| = 1 \quad , \quad k_c = 4.$$

Lugar das raízes do sistema compensado (pelo primeiro projeto):

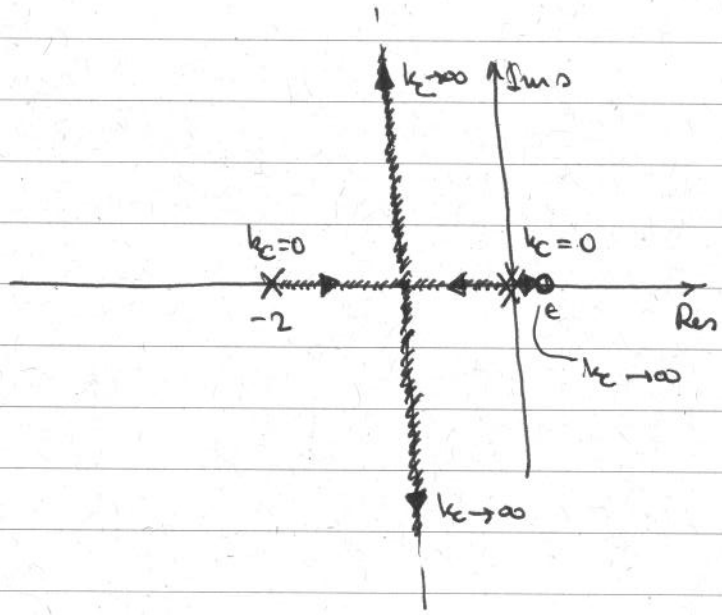


O L.R. possui $n-m = 3-1$ assíntotas com ângulos $\pm 90°$ e intersecção

$$\sigma_a = \frac{0+0-4-(-1)}{2} = -3/2.$$

/ /

Discussão: porque o segundo projeto pode não funcionar na prática. Suponha que o cancelamento de um pólo na origem não é perfeito; ao invés de um zero em $s=0$, surge um zero em $s=\epsilon>0$. O L.R. seria



Para qualquer k_c haveria um pólo de malha fechada no semi plano direito; o sistema em malha fechada seria instável. ∎