EA513 — 2^0 Semestre de 2008 — Prof. Christiano Lyra Filho

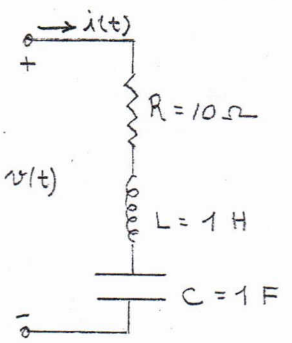
Terceira Prova — 27 de novembro de 2008

1. Considere o circuito representado a seguir ($R = 10\Omega$, $L = 1$ H e $C = 1$ F), ao qual é aplicada a tensão $v(t) = 15\cos 10t$ Volts.

   (a) (1,0 pto) Determine a impedância do circuito;

   (b) (1,0 pto) Encontre a corrente em regime permanente $i(t)$, pelo método das amplitudes complexas (isto é, usando fasores); apresente também o fasor correspondente, $\widehat{I}$;

   (c) (1,0 pto) Encontre o valor da capacitância de um capacitor capaz de corrigir completamente o *fator de potência* do circuito, quando ligado em paralelo com o mesmo.



a) $Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$

$Z = 10 + j10 - \frac{j}{10}$

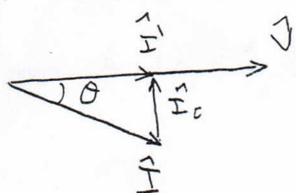
$Z = 10 + j10 - j0{,}1$

$\boxed{Z = 10 + 9{,}9j}\ \Omega$ $\boxed{Z = 14{,}1 \angle 44{,}7^\circ}\ \Omega$

b) $\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z} = \frac{15 \angle 0^\circ}{14{,}1 \angle 44{,}7^\circ} = 1{,}1 \angle -44{,}7^\circ$ $\cong 0{,}78$ rad.

$\boxed{\hat{I} = 1{,}1 \angle -44{,}7^\circ \text{ A}}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{i(t) = 1{,}1 \cos(10t - 44{,}7^\circ) \text{ A}}$

c)



$\operatorname{sen}\theta = \frac{I_c}{I} \therefore I_c = I \operatorname{sen}\theta$ (1) $\Longrightarrow$ $\omega C V = I \operatorname{sen}\theta$

$C = \frac{Q}{\omega V^2}$

$I_c = \left|\frac{\hat{V}}{Z_c}\right| = \frac{V}{\frac{1}{\omega C_A}} = \omega C_A V$ (2)

$\boxed{C_A = \frac{I \operatorname{sen}\theta}{\omega V}}$ ou $\boxed{C = \frac{Q}{\omega V^2}}$

$C = \frac{(1{,}1)\cdot(0{,}7)}{10 \cdot 15} = \frac{0{,}77}{150} = \frac{770 \cdot 10^{-3}}{150}$ F

$\boxed{C_A = 5{,}13 \cdot 10^{-3} \text{ F}}$

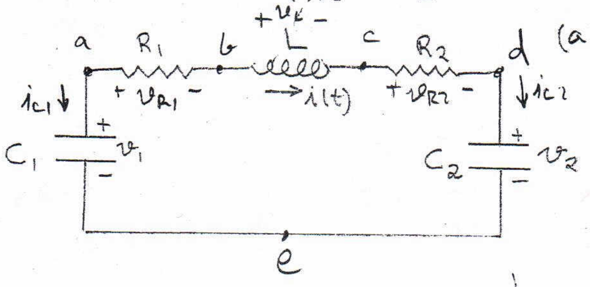
2. Considere o circuito representado abaixo ($R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $L = 1$ H, $C_1 = 2$ F e $C_2 = 2$ F).

   (a) (0,5 pto) Encontre uma *árvore própria* para o circuito;

   (b) (1,0 pto) A partir da *árvore própria* escolhida para o circuito, usando as leis de Kirchhoff e as características dos bipolos, encontre as *equações de estado* que representam a dinâmica do circuito; apresente as equações de estado na *forma canônica* e explicite as *variáveis de estado*;

   (c) (1,0 pto) A partir das *equações de estado*, encontre a equação diferencial que caracteriza o comportamento dinâmico da corrente através do indutor, $i(t)$;

   (d) (1,5 ptos) Conhecendo o valor inicial para a corrente através do indutor e para as tensões nos capacitores, $i(0) = 1$ A, $v_1(0) = 0$ e $v_2(0) = 0$, encontre a corrente $i(t)$, para $t \geq 0$.



(a, b)

c1) $i_{c1} + i = 0$

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} + i = 0$$

c2) $-i + i_{c2} = 0$

$$C_2 \frac{dv_2}{dt} = i$$

VARIÁVEIS DE ESTADO: $\underline{v_1, v_2, i}$

e) $+v_L + v_{R2} + v_2 - v_1 + v_{R1} = 0$

$$L\frac{di}{dt} + R_2 i + v_2 - v_1 + R_1 i = 0$$

← cont...

(a, b)...cont

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{1}{C_1} i \\ \dfrac{dv_2}{dt} = +\dfrac{1}{C_2} i \\ \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{\overbrace{(R_1+R_2)}^{R}}{L} i + \dfrac{1}{L} v_1 - \dfrac{1}{L} v_2 \end{cases}$$

$$\therefore \left.\frac{di}{dt}\right|_0 = -R\, i(0) + \frac{1}{L} v_1(0) - \frac{1}{L} v_2(0)$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_0 = -R\, i(0) \implies \left.\frac{di}{dt}\right|_0 = -4\, i(0) = -4$$

$R = R_1 + R_2$

c) $$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{L}\frac{dv_1}{dt} - \frac{1}{L}\frac{dv_2}{dt} = -\frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{L}\left(-\frac{1}{C_1} i\right) - \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_2} i\right)$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{R}{L}\frac{di}{dt} - \frac{1}{L}\underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}_{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \therefore C_{eq} = 1F} i \quad , \; L = 1\text{ H}, \; C_1 = C_2 = 2F, \; R = 4$$

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + i = 0}$$

d) $2\alpha = 4 \therefore \alpha = 2$

$(w_0)^2 = 1 \therefore w_0 = 1$

$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -2 \pm \sqrt{3}$

$\lambda_1 = -2 + 1,7 = -0,3$

$\lambda_2 = -2 - 1,7 = -3,7$

$i(t) = k_1 \exp(-0,3t) + k_2 \exp(-3,7t)$

$i(0) = k_1 + k_2 = 1 \therefore k_2 = 1 - k_1$

$\left.\frac{di}{dt}\right|_0 = -0,3k_1 - 3,7k_2 = -4$

$-0,3k_1 - 3,7(1-k_1) = -4$

$-0,3k_1 + 3,7k_1 = -4 + 3,7$

$3,4k_1 = -0,3 \therefore k_1 = -\frac{0,3}{3,4} \cong -0,1$

$k_2 = 1 - k_1 = 1,1$

$$\boxed{i(t) = -0,1\exp(-0,3t) + 1,1\exp(-3,7t)}$$

A

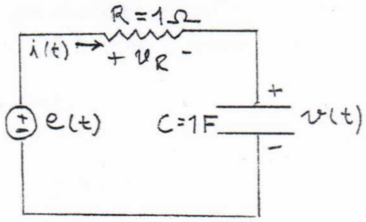
3. Considere o circuito de primeira ordem não autônomo representado abaixo, onde $e(t) = 10 + 20\cos t$ Volts, $R = 1\Omega$ e $C = 1$ F.

   (a) (1,0 pto) Determine o *valor médio* e o *valor eficaz* da tensão $e(t)$;

   (b) (0,5 ptos) A partir das leis de Kirchhoff e das características dos bipolos, deduza a equação diferencial que caracteriza o comportamento dinâmico da tensão no capacitor, $v(t)$;

   (c) (1,0 pto) Encontre a tensão no capacitor em regime permanente, $v_p(t)$;

   (d) (1,5 ptos) Encontre a tensão no capacitor a partir do instante inicial ($v(t)$, para $t \geq 0$), considerando que a tensão inicial no mesmo é 20 Volts ($v(0) = 20$ V).



(a) $e(t) = 10 + 20\cos t$

$E_{ef} = 10 + \frac{20}{\sqrt{2}} = 10 + 14,2$

$\boxed{E_{ef} = 24,2 \text{ V}}$ $\boxed{E_m = 10 \text{ V}}$

(b) $-e(t) + v_R + v(t) = 0$

$v_R = R\, i(t)$

$i(t) = C\frac{dv}{dt}$

$\boxed{RC\frac{dv}{dt} + v = e(t)}$

(c) $e(t) = E_1 + E_2 \cos t$

$v_p(t) = v_1 + v_2$

$v_1 = E_1 = 10$ V.

$\hat{e}_2(t) = \hat{E}_2 \cdot \exp(j\omega t)$

$\hat{v}_2(t) = \hat{V}_2 \exp(j\omega t)$

$\frac{d\hat{v}_2(t)}{dt} = j\omega \hat{V}_2 \exp(j\omega t)$

$RC\, j\omega \hat{V}_2 + \hat{V}_2 = \hat{E}_2$

$\hat{V}_2 (1 + j\omega RC) = \hat{E}_2$

$\hat{V}_2 = \frac{\hat{E}_2}{1 + j\omega RC}$

$V_2 = \frac{20}{\sqrt{1+1}} = \frac{20}{\sqrt{2}}$

$\angle\hat{V}_2 = \angle\hat{E}_2 - tg^{-1}\frac{\omega RC}{1}$

$\angle\hat{V}_2 = 0 - tg^{-1}(1) = 0 - 45^\circ$

$\angle\hat{V}_2 = -45^\circ$

$v_2(t) = \frac{20}{\sqrt{2}}\cos(t - 45^\circ)$

$\boxed{v_p(t) = 10 + 14,2\cos(t - 45^\circ)}$ Volts

(d) $v(t) = v_p(t) + k\exp(-\frac{t}{RC})$

$v(t) = 10 + \frac{20}{\sqrt{2}}\cos(t - 45^\circ) + k\exp(-t)$

$v(0) = 10 + \frac{20}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}) + k = 10 + 10 + k = 20$

$v(0) = 20 + k = 20 \therefore k = 0$

ou seja,

$\boxed{v(t) = 10 + 14,2\cos(t - 45^\circ)}$ Volts

Boa prova,

Bom feriado