Gabarito: Segunda Prova de Resistência dos Materiais I – EM406

27 de Novembro de 2008

<u>Questão 1</u> (5,0 pontos, Unicamp 2004)**:** A viga bi-engastada de comprimento total L descrita na figura abaixo, suporta os carregamentos distribuídos w_0, onde: $w_0 = P/b$.

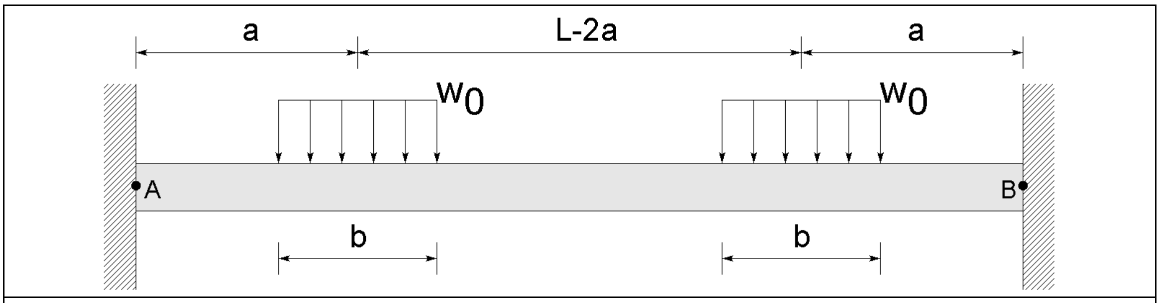


Figura 1: viga bi-engastada com dois carregamentos distribuídos.

a) Esboce os diagramas de esforço cortante e momento fletor. Utilize $b = a = L/5$.
b) Qual é o máximo valor do momento fletor e onde ele ocorre?
c) Se o valor de **b** for muito menor que o de **a**, explique o que mudaria nos seus resultados.
d) Se a viga possuir a seção transversal mostrada na figura abaixo, qual o valor do momento de inércia I_{ZZ} em relação ao eixo que passa pelo seu centróide.

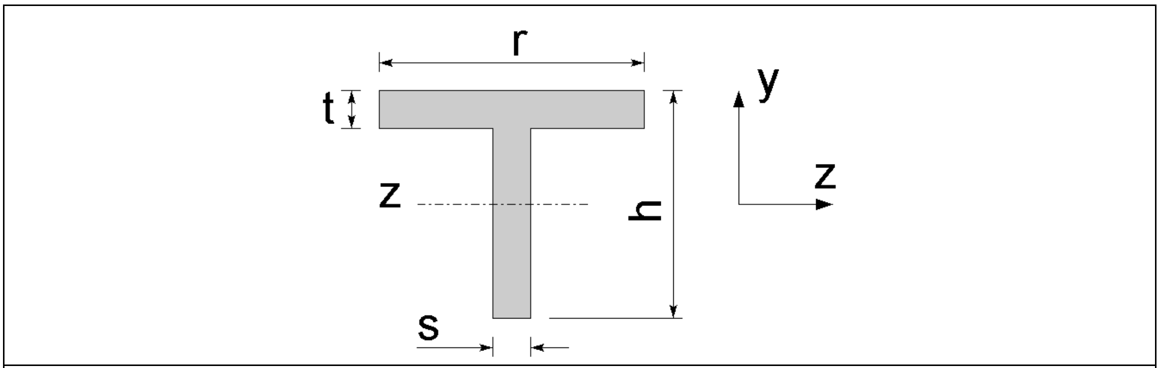


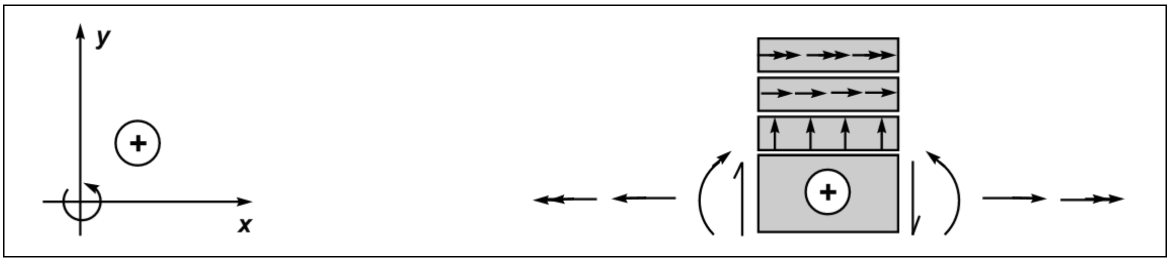
Figura 2: seção transversal da viga.

e) Quais são os valores das tensões σ_{XX} máximas trativas e compressivas na viga
f) Desenhe a distribuição de tensão ao longo da secção no ponto x do item *b*.
g) Qual o valor da máxima deflexão **v**. (Atenção, não é necessário traçar o diagrama para a deflexão em função de x, nem para a rotação em função de x)

Dados: $L = 10\text{m}$, $t = s = 5\text{mm}$, $r = 50\text{mm}$ e $h = 30\text{mm}$;
material aço $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}\,\text{N/m}^2$; carga $P = 1000\text{N}$

Solução

1) Eixos e convenções



2) Equação Diferencial

$$EI_{ZZ}\frac{d^4}{dx^4}v(x)=q(x) \qquad (1)$$

3) Equação de carregamento

$$q(x)=-w_0\langle x-a+b/2\rangle^0+w_0\langle x-a-b/2\rangle^0-w_0\langle x-L+a+b/2\rangle^0+w_0\langle x-L+a-b/2\rangle^0 \qquad (2)$$

4) Condições de Contorno e restrição

$$v(x=0)=0 \qquad (3)$$
$$\theta_Z(x=0)=0 \qquad (4)$$
$$v(x=L)=0 \qquad (5)$$
$$\theta_Z(x=L)=0 \qquad (6)$$

5) Integração da equação diferencial

$$E.I\frac{d^4v(x)}{dx^4}=-w_0\langle x-a+b/2\rangle^0+w_0\langle x-a-b/2\rangle^0-w_0\langle x-L+a+b/2\rangle^0+w_0\langle x-L+a-b/2\rangle^0$$

$$E.I\frac{d^3v(x)}{dx^3}=V_y=$$
$$-w_0\langle x-a+b/2\rangle^1+w_0\langle x-a-b/2\rangle^1-w_0\langle x-L+a+b/2\rangle^1+w_0\langle x-L+a-b/2\rangle^1+c_1$$

$$E.I\frac{d^2v(x)}{dx^2}=M_z=$$
$$-\frac{w_0}{2}\langle x-a+b/2\rangle^2+\frac{w_0}{2}\langle x-a-b/2\rangle^2-\frac{w_0}{2}\langle x-L+a+b/2\rangle^2+\frac{w_0}{2}\langle x-L+a-b/2\rangle^2+c_1x+c_2$$

$$E.I\frac{dv(x)}{dx}=$$
$$-\frac{w_0}{6}\langle x-a+b/2\rangle^3+\frac{w_0}{6}\langle x-a-b/2\rangle^3-\frac{w_0}{6}\langle x-L+a+b/2\rangle^3+\frac{w_0}{6}\langle x-L+a-b/2\rangle^3+c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3$$

$$E.I\cdot v(x)=$$
$$-\frac{w_0}{24}\langle x-a+b/2\rangle^4+\frac{w_0}{24}\langle x-a-b/2\rangle^4-\frac{w_0}{24}\langle x-L+a+b/2\rangle^4+\frac{w_0}{24}\langle x-L+a-b/2\rangle^4+c_1\frac{x^3}{6}+c_2\frac{x^2}{2}+c_3x+c_4$$

6) Determinação das constantes de integração

$$E.I\frac{dv(0)}{dx}=0=$$

$$-\frac{w_0}{6}\underbrace{\langle 0-a+b/2\rangle^3}_{0}+\frac{w_0}{6}\underbrace{\langle 0-a-b/2\rangle^3}_{0}-\frac{w_0}{6}\underbrace{\langle 0-L+a+b/2\rangle^3}_{0}+\frac{w_0}{6}\underbrace{\langle 0-L+a-b/2\rangle^3}_{0}+c_1\frac{0^2}{2}+c_2\cdot 0+c_3\rightarrow c_3=0$$

$$E.I\cdot v(0)=0$$

$$-\frac{w_0}{24}\underbrace{\langle 0-a+b/2\rangle^4}_{0}+\frac{w_0}{24}\underbrace{\langle 0-a-b/2\rangle^4}_{0}-\frac{w_0}{24}\underbrace{\langle 0-L+a+b/2\rangle^4}_{0}+\frac{w_0}{24}\underbrace{\langle 0-L+a-b/2\rangle^4}_{0}+c_1\frac{0^3}{6}+c_2\frac{0^2}{2}+c_3\cdot 0+c_4\rightarrow c_4=0$$

$$E.I\frac{dv(L)}{dx}=0=$$

$$-\frac{w_0}{6}\langle L-a+b/2\rangle^3+\frac{w_0}{6}\langle L-a-b/2\rangle^3-\frac{w_0}{6}\langle L-L+a+b/2\rangle^3+\frac{w_0}{6}\langle L-L+a-b/2\rangle^3+c_1\frac{L^2}{2}+c_2\cdot L=0$$

$$E.I\cdot v(0)=0$$

$$-\frac{w_0}{24}\langle L-a+b/2\rangle^4+\frac{w_0}{24}\langle L-a-b/2\rangle^4-\frac{w_0}{24}\langle L-L+a+b/2\rangle^4+\frac{w_0}{24}\langle L-L+a-b/2\rangle^4+c_1\frac{L^3}{6}+c_2\frac{L^2}{2}=0$$

As duas últimas equações resultam em um sistema linear 2x2 com as incógnitas c_1 e c_2. Substituindo os valores, tem-se:

$$w_0=P/b\rightarrow 1000/2=500N/m$$

$$-\frac{500}{6}\langle 10-2+1\rangle^3+\frac{500}{6}\langle 10-2-1\rangle^3-\frac{500}{6}\langle 2+1\rangle^3+\frac{500}{6}\langle 2-1\rangle^3+c_1\frac{10^2}{2}+c_2\cdot 10=0$$

$$E.I\cdot v(0)=0$$

$$-\frac{500}{24}\langle 10-2+1\rangle^4+\frac{500}{24}\langle 10-2-1\rangle^4-\frac{500}{24}\langle 2+1\rangle^4+\frac{500}{24}\langle 2-1\rangle^4+c_1\frac{10^3}{6}+c_2\frac{10^2}{2}=0$$

$$\begin{bmatrix}50 & 10\\ 166.67 & 50\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3.433\\ 8.833\end{Bmatrix}\cdot 10^4\rightarrow\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1000\\ -1566.7\end{Bmatrix}$$

As expressões finais resultantes são:

$$E.I\frac{d^3v(x)}{dx^3}=V_y=$$

$$-500\langle x-1\rangle^1+500\langle x-3\rangle^1-500\langle x-7\rangle^1+500\langle x-9\rangle^1+1000$$

$$E.I\frac{d^2v(x)}{dx^2}=M_z=$$

$$-250\langle x-1\rangle^2+250\langle x-3\rangle^2-250\langle x-7\rangle^2+250\langle x-9\rangle^2+1000x-1566.7$$

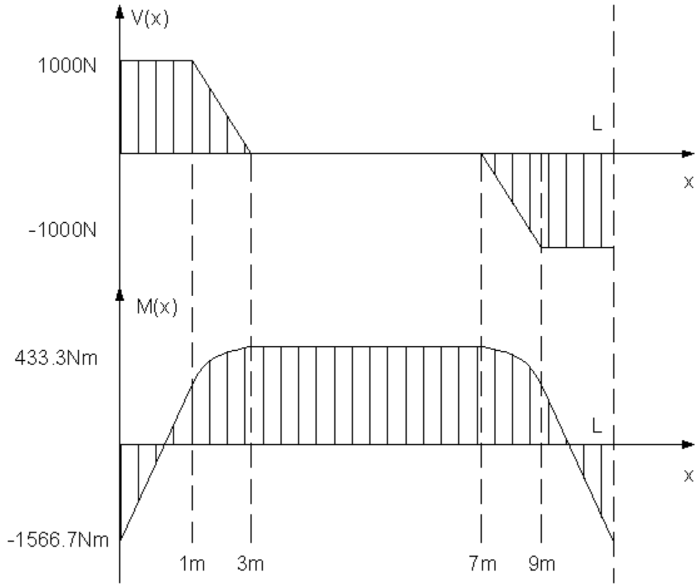
$$E.I\frac{dv(x)}{dx}=$$

$$-83.33\langle x-1\rangle^3+83.33\langle x-3\rangle^3-83.33\langle x-7\rangle^3+83.33\langle x-9\rangle^3+500x^2-1566.7x$$

$$E.I\cdot v(x)=$$

$$-20.83\langle x-1\rangle^4+20.83\langle x-3\rangle^4-20.83\langle x-7\rangle^4+20.83\langle x-9\rangle^4+166.67x^3-783.35x^2$$

Item A) Os diagramas resultantes para o esforço cortante e momento fletor são:

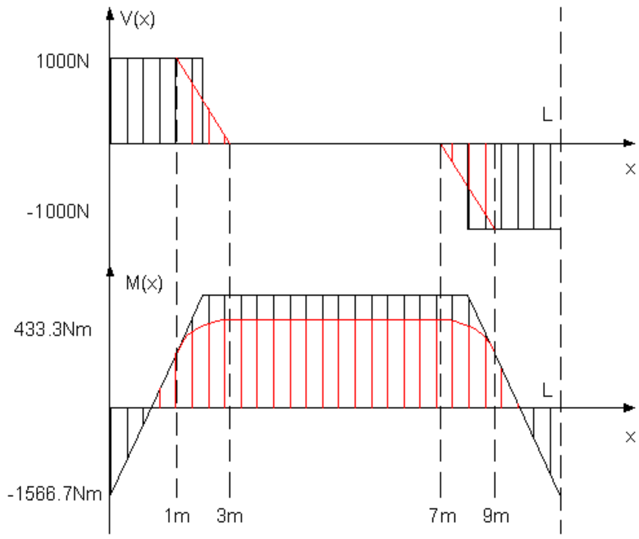


Item B)

Existem dois pontos onde os valores do momento fletores são máximos, estes são justamente no engaste, em x=0 e x=L=10m com valor absoluto de 1566,7 Nm (reação de apoio).

Item C)

Ao se considerar a diminuição do valor de **b** em relação ao de **a**, pode-se verificar a se a seguinte modificação nos diagramas de esforço cortante e momento fletor:



Nota-se que certos patamares do esforço cortante e momento fletor sofreram modificações.

Item D)

Para o calculo de I_{zz}, primeiramente, deve-se determinar o valor do centróide:

$$y_c = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{50 \cdot 5 \cdot 27{,}5 + 5 \cdot 25 \cdot 12{,}5}{50 \cdot 5 + 5 \cdot 25} = 22{,}5\text{mm} \text{ em relação a base}$$

$$I_{zz} = \sum \left(\bar{I}_{zz} + A_i d_i^2 \right) = \frac{50 \cdot 5^3}{12} + 50 \cdot 5 \cdot (27{,}5 - 22{,}5)^2 - \frac{5 \cdot 25^3}{12} - 5 \cdot 25 \cdot (22{,}5 - 12{,}5)^2$$

$$I_{zz} = 2{,}5781 \cdot 10^4 \,\text{mm}^4 \rightarrow I_{zz} = 2{,}5781 \cdot 10^{-8} \,\text{m}^4$$

Item E)

O momento fletor é máximo nos engaste, para x=0 e x=10m:

$$M_z(x=0) = M_z(x=10) = 1566{,}7\text{Nm}$$

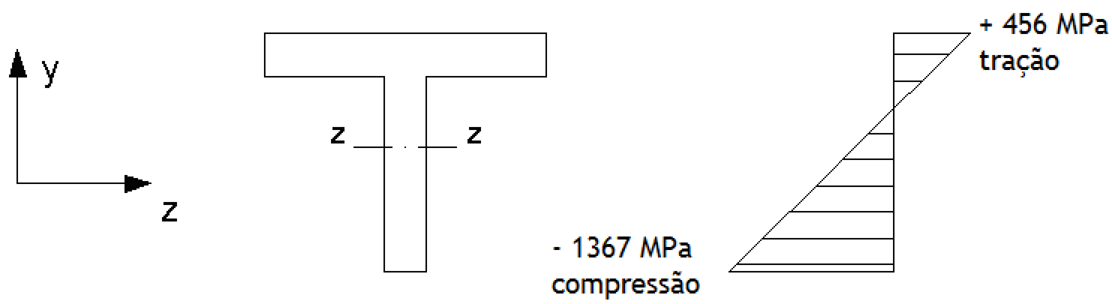
Os valores das tensões máximas trativas e compressivas são:

$$\sigma_{xx\_com} = \frac{-M_z . c_1}{I} \rightarrow \sigma_{xx\_com} = \frac{1566{,}7 \cdot (0 - 22{,}5) \cdot 10^{-3}}{2{,}5781 \cdot 10^{-8}} \rightarrow \sigma_{xx\_com} = -1367{,}31\,\text{Pa}$$

$$\sigma_{xx\_trat} = \frac{-M_z . c_2}{I} \rightarrow \sigma_{xx\_trat} = \frac{1566{,}7 \cdot (30 - 22{,}5) \cdot 10^{-3}}{2{,}5781 \cdot 10^{-8}} \rightarrow \sigma_{xx\_trat} = -455{,}77\,\text{Pa}$$

Item F)

O ponto x do item B) é o engaste, x=0.



Item G)

O valor da flecha máxima ocorre em x=L/2 = 5m, onde a derivada de v é zero ou seja o valor da inclinação $\theta_z = dv/dx$ (ponto de inflexão) e seu valor é dado por:

$$EI_{zz}v\left(L/2\right) = -20.83\langle 5-1\rangle^4 + 20.83\langle 5-3\rangle^4 - 20.83\underbrace{\langle 5-7\rangle^4}_{0} + 20.83\underbrace{\langle 5-9\rangle^4}_{0} + 166.67\cdot 5^3 - 783.35\cdot 5^2$$

$$EI_{zz}v_{max} = \text{-3750,4Nm}^3 \rightarrow v_{max} = -\frac{\text{-3750,4}}{2{,}1\cdot 10^{11}\cdot 2{,}5781\cdot 10^{-8}} \rightarrow v_{max} = -0{,}6927\text{m} \approx -693\text{mm}$$

Gabarito: Segunda Prova de Resistência dos Materiais I – EM406

27 de Novembro de 2008

Questão 2 **(3,0 pontos):** Uma estaca de madeira sustentando um píer desenvolve uma força de atrito f por unidade de comprimento da estaca sobre a porção de seu comprimento que esta submersa no solo (veja na figura). A intensidade da força de tração varia linearmente com a distância y a partir da base da estaca, isto é, $f = cy$, em que c é uma constante. O comprimento de submersão é L_1 e a porção superior da estaca tem comprimento L_2. A carga na estaca é P, sua área de seção transversal é A e seu módulo de elasticidade é E.

a) Mostre que a fórmula para o encurtamento da estaca é dada por: $\delta = \dfrac{P(L_1 + 3L_2)}{3EA}$.

   Dica: A reação de apoio no ponto O é nula.

b) Desenhe um diagrama mostrando a tensão de compressão σ_C varia ao longo do comprimento da estaca.

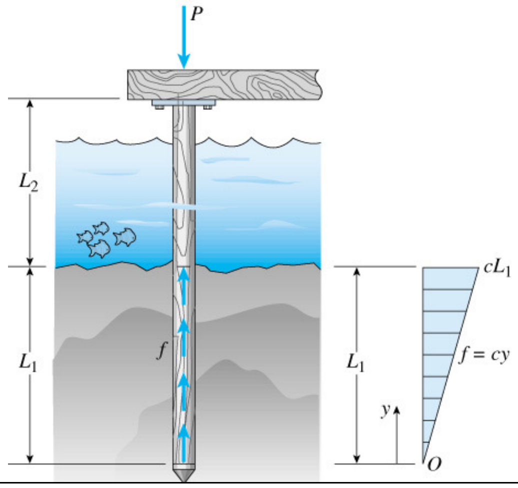


Figura 1: Estaca de madeira enterrada.

Solução

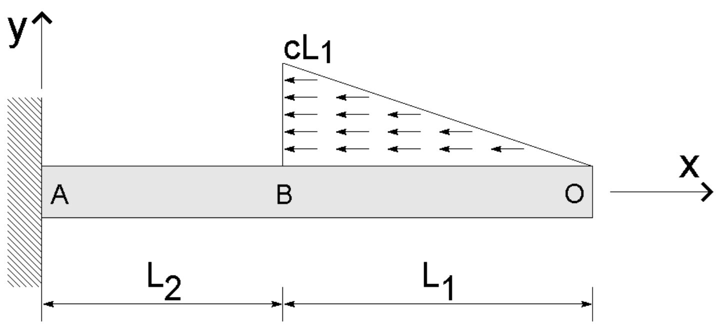
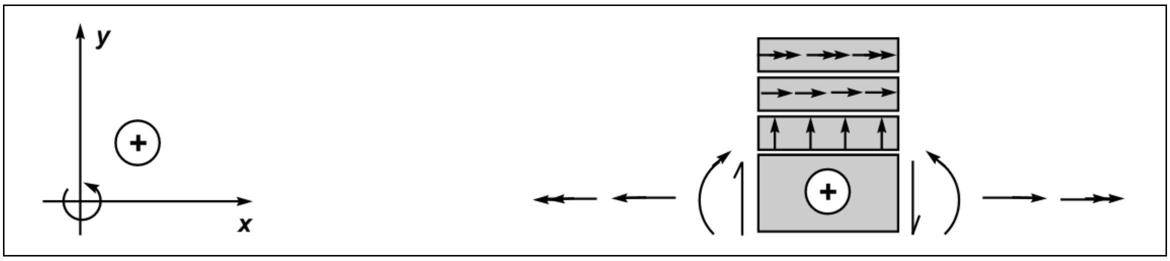


Figura 2: Modelo de barra para a estaca do píer.

A estaca proposta pela questão pode ser modelada como um problema de barra, como mostrado na Figura 2. Sabe-se também que a reação no apoio é a carga P. Resolvendo o problema da barra:

1) Eixos e convenções



2) Equação Diferencial

$$EA\frac{d^2}{dx^2}u(x) = -p(x) \tag{1}$$

3) Equação de carregamento

$$p(x) = -cL_1\langle x - L_2\rangle^0 + c\langle x - L_2\rangle^1 \tag{2}$$

4) Condições de Contorno e restrição

$$u(x = 0) = 0 \tag{3}$$
$$N_X(x = L_1 + L_2) = 0 \tag{4}$$

5) Integração da equação diferencial

$$EA\frac{d^2}{dx^2}u(x) = cL_1\langle x - L_2\rangle^0 - c\langle x - L_2\rangle^1 \tag{5}$$

$$\downarrow \int$$

$$EA\frac{d}{dx}u(x) = N_X(x) = cL_1\langle x - L_2\rangle^1 - \frac{1}{2}c\langle x - L_2\rangle^2 + C_1 \tag{6}$$

$$\downarrow \int$$

$$EAu(x) = \frac{cL_1}{2}\langle x - L_2\rangle^2 - \frac{c}{6}\langle x - L_2\rangle^3 + C_1x + C_2 \tag{7}$$

6) Determinação das incógnitas e constantes de integração

Substituindo (3) em (7), tem-se:

$$EAu(x = 0) = \frac{cL_1}{2}\underbrace{\langle x - L_2\rangle^2}_{=0} - \frac{c}{6}\underbrace{\langle x - L_2\rangle^3}_{=0} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = 0 \tag{8}$$

Substituindo (4) e (8) em (6), tem-se:

$$N_X(x = L_1 + L_2) = cL_1\left(L_1 + L_2 - L_2\right) - \frac{1}{2}c\left(L_1 + L_2 - L_2\right)^2 + C_1 = 0$$

$$cL_1^2\left(L_1 + L_2 - L_2\right) - \frac{1}{2}cL_1^2 + C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}cL_1^2 \tag{9}$$

7) Equações finais

Substituindo (8) e (9) em (6) e (7), obtém-se as equações finais de esforço normal e deslocamento:

$$N_X(x) = cL_1\langle x - L_2\rangle^1 - \frac{c}{2}\langle x - L_2\rangle^2 - \frac{cL_1^2}{2} \tag{10}$$

$$EAu(x) = \frac{cL_1}{2}\langle x - L_2\rangle^2 - \frac{c}{6}\langle x - L_2\rangle^3 - \frac{cL_1^2}{2}x \tag{11}$$

8) Fórmula do encurtamento

$$\delta = u(x = L_1 + L_2)$$

$$\delta = \frac{1}{EA}\left[\frac{cL_1}{2}\left(L_1 + L_2 - L_2\right)^2 - \frac{c}{6}\left(L_1 + L_2 - L_2\right)^3 - \frac{cL_1^2}{2}\left(L_1 + L_2\right)\right]$$

$$\delta = \frac{1}{EA}\left[\frac{cL_1^3}{2} - \frac{cL_1^3}{6} - \frac{cL_1^3}{2} - \frac{cL_1^2L_2}{2}\right] = \frac{1}{EA}\left[-\frac{cL_1^3}{6} - \frac{cL_1^2L_2}{2}\right] = -\frac{cL_1^2}{EA}\left[\frac{L_1}{6} + \frac{L_2}{2}\right]$$

$$\delta = -\frac{cL_1^2}{EA}\left[\frac{L_1 + 3L_2}{6}\right] = -\frac{cL_1^2}{6EA}\left(L_1 + 3L_2\right)$$

(o sinal negativo representa encurtamento).

Por outro lado, do equilíbrio da estaca (Figura 2), sabe-se que:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2}\left(cL_1\right)\left(L_1\right) = \frac{cL_1^2}{2}$$

Assim, tem-se finalmente que:

$$\delta = \frac{P}{3EA}\left(L_1 + 3L_2\right)$$

9) Tensão de compressão σ_C ao longo da estaca

$$\sigma_C(x) = \frac{N_X(x)}{A}$$

$$\therefore \sigma_C(x) = \frac{1}{A}\left[cL_1\langle x - L_2\rangle^1 - \frac{c}{2}\langle x - L_2\rangle^2 - \frac{cL_1^2}{2}\right]$$

Como $c = \dfrac{2P}{L_1^2}$, então:

$$\sigma_C(x) = \frac{P}{A}\left[\frac{2}{L_1}\langle x - L_2\rangle^1 - \frac{1}{L_1^2}\langle x - L_2\rangle^2 - 1\right]$$

$$\sigma_C(0 < x < L_2) = \frac{P}{A}\left[\frac{2}{L_1}\underbrace{\langle x - L_2\rangle^1}_{=0} - \frac{1}{L_1^2}\underbrace{\langle x - L_2\rangle^2}_{=0} - 1\right] = -\frac{P}{A}$$

$$\sigma_C(L_2 < x < L_1 + L_2) = \frac{P}{A}\left[\frac{2}{L_1}\underbrace{\langle x - L_2\rangle^1}_{(x-L_2)} - \frac{1}{L_1^2}\underbrace{\langle x - L_2\rangle^2}_{(x-L_2)^2} - 1\right] =$$

$$= \frac{P}{A}\left[\frac{2}{L_1}(x - L_2) - \frac{1}{L_1^2}(x - L_2)^2 - 1\right]$$

$$\begin{cases} \sigma_C(x = L_2) = -\dfrac{P}{A} \\ \sigma_C(x = L_1 + L_2) = 0 \end{cases}$$

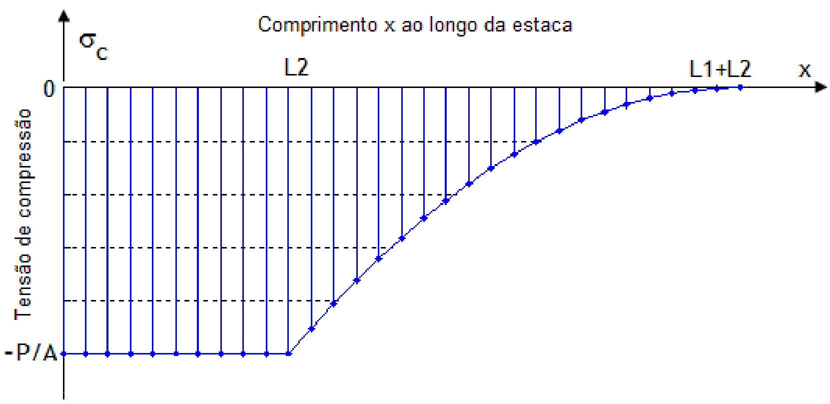


Figura 3: Diagrama de tensão de compressão ao longo da estaca.

Gabarito: Segunda Prova de Resistência dos Materiais I – EM406

27 de Novembro de 2008

<u>Questão3</u>: (**2,0 pontos**, MIT 2006) Na figura abaixo os diagramas de carregamentos e de esforços internos (esforço cortante e momento fletor) de diferentes vigas são mostrados (casos **a**, **b** e **c**). Alguns destes podem estar corretos e outros podem estar errados. Sem efetuar os cálculos correspondentes, pede-se que sejam identificados os diagramas incorretos. Justifique sua indicação com palavras, indique qual a inconsistência encontrada em cada caso e esboce qual seria o diagrama correto correspondente.

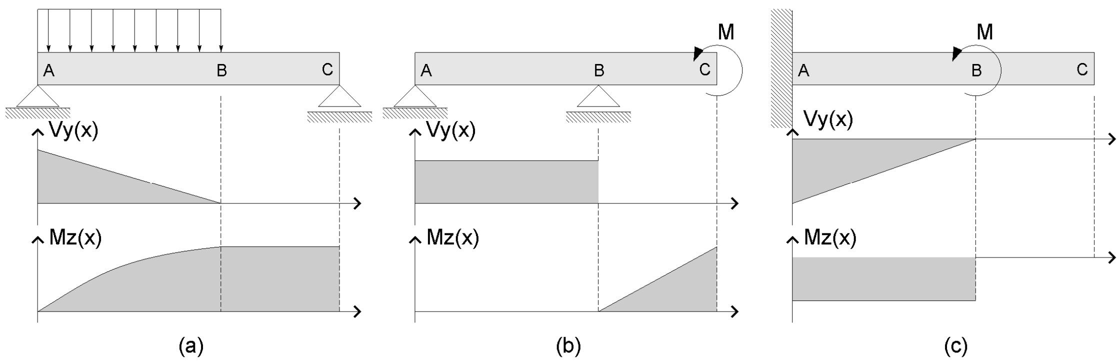


Figura 1: Vigas com diversos carregamentos e vínculos, e diagramas de esforços internos supostamente correspondentes.

Solução

<u>Problema a)</u> A presença do vínculo no ponto C implica que naquele ponto, assim como em toda a seção BC, deve haver um valor de esforço cortante não-nulo. Isso não é mostrado pelo gráfico. Por outro lado, o vínculo no ponto C não resiste a momento fletor, de forma que o momento naquele ponto deveria ser nulo.
Dessa forma, ambos os diagramas estão incorretos.

<u>Problema b)</u> O diagrama de esforço cortante está correto. Há duas reações nos vínculos A e B para equilibrar o esforço aplicado na extremidade. Estudando o equilíbrio de momentos no ponto B, é fácil descobrir que a reação do vínculo A é positiva, como mostra o gráfico. Contudo, como o único esforço aplicado na seção BC é o momento M, o diagrama de momento fletor deveria ser constante nesse trecho.
Assim, no caso *b* somente o diagrama de momento fletor está errado.

<u>Problema c)</u> Não havendo qualquer esforço transversal em toda a viga, não é possível que a reação no apoio não seja nula. Isso contraria o equilíbrio de forças na direção vertical. Já o momento no engaste deve equilibrar o momento M aplicado, e essa reação é constante ao longo da seção AB, como mostra o gráfico. O único problema é que o sinal do gráfico está errado, talvez porque o MIT use uma convenção de sinais diferente da que usamos no curso.
Dessa forma, ambos os diagramas estão incorretos.