EA-721 : PRINCÍPIOS DE CONTROLE E SERVOMECANISMO
Quarta Lista de Exercícios

José C. Geromel e Rubens H. Korogui

Exercício 1 *Considere a seguinte equação diferencial, com condições iniciais nulas*

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} + 3u$$

a) Determine sua representação de estado.

b) Para $u(t) = 1, \ \forall \ t \geq 0$, determine o valor da saída $y(t)$ em regime permanente.

c) Considere que a entrada $u(t)$ deve ser sintetizada através de um projeto via realimentação de estado, isto é $u(t) = r(t) - Kx(t)$, onde $x(t)$ é o vetor de estado. Calcule o ganho matricial K de tal forma que o erro em regime permanente para uma referência $r(t)$ do tipo degrau seja igual a 25% e que os polos do sistema em malha fechada tenham fator de amortecimento igual $\xi = \sqrt{2}/2$.

Exercício 2 *Um sistema dinâmico a tempo contínuo de fase mínima possui uma função de transferência em malha aberta $G(s)$, cujo diagrama de Bode assintótico de módulo é dado pela Figura 1*

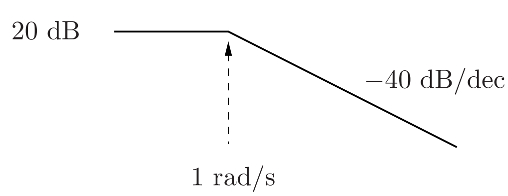

Figura 1: Diagrama de Bode de módulo.

a) Considerando $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$, determine sua representação de estado.

b) Supondo que todos os estados do sistema possam ser medidos e denotando $r(t)$ o sinal de referência, adote a estratégia de controle via realimentação de estado $\hat{u}(s) = \hat{r}(s) - K\hat{x}(s)$, onde x é o estado do sistema, e calcule o vetor K de forma que os polos do sistema em malha fechada sejam -2 e -3.

c) Calcule o erro em regime permanente para $r(t)$ igual a um degrau unitário.

d) Se possível, calcule outro valor de K para que o erro para uma referência degrau unitário seja nulo, mantendo um dos polos em malha fechada em -2.

Exercício 3 *Um sistema de dinâmico a tempo contínuo de fase mínima é representado por uma função de transferência em malha aberta $G(s)$, cujo diagrama de Bode assintótico de módulo é dado pela Figura 2*

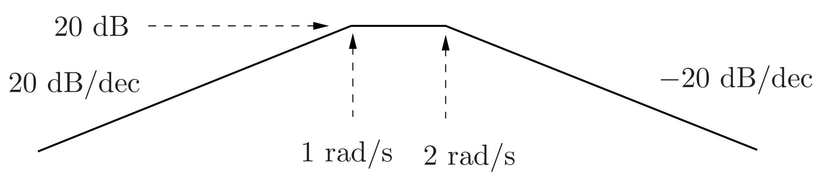

Figura 2: Diagrama de Bode de módulo.

a) *Considerando a relação entrada-saída $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$, determine sua representação de estado.*

b) *Sendo $r(t)$ o sinal de referência e $x(t)$ o vetor de estado do sistema, para o controle via realimentação de estado $u = r - Kx$, determine o ganho K de modo que os polos do sistema em malha fechada tenham constante de tempo de* $1/3$ [s].

c) *Com o ganho determinado no item b) e $r(t) = 6\text{sen}(3t)$, calcule a saída $y(t)$ para $t \geq 0$ suficientemente grande.*

Exercício 4 *Um sistema dinâmico a tempo contínuo é descrito pela seguinte equação diferencial*

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = u \ , \ y(0) = 0 \ , \ \dot{y}(0) = 1$$

a) *A partir de sua representação de estado determine um observador de estado de tal forma que a constante de tempo de seus polos seja de* 0,5 [s].

b) *Determine, em função de $t \geq 0$, o erro cometido pelo observador obtido no item a) para estimar $\dot{y}(t)\ \forall\ t \geq 0$ a partir de condições iniciais nulas.*

Exercício 5 *Seja $G(s)$ a função de transferência de um sistema dinâmico de fase mínima a tempo contínuo, cujo diagrama de Bode assintótico de módulo é dado na Figura 3*

a) *Obtenha a função de transferência $G(s)$, esboce seu diagrama de Bode de fase e estime sua margem de fase.*

b) *Determine a representação de estado para o sistema $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$.*

c) *Projete um observador de estado com polos cujas constantes de tempo sejam* 0,20 [s] *e* 0,25 [s].

d) *Considerando $u(t) = 1\ \forall\ t \geq 0$, condições iniciais do sistema $x(0) = [1\ 0]'$ e condições iniciais nulas para o observador, determine o erro cometido ao se estimar a segunda variável de estado $\forall\ t \geq 0$.*

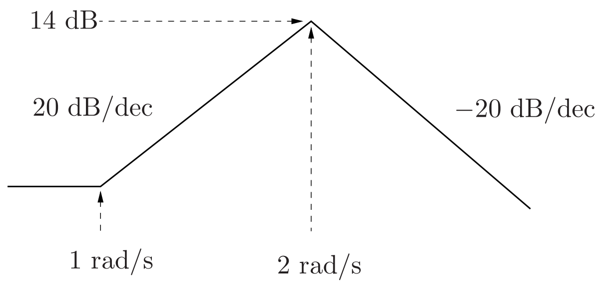

Figura 3: Diagrama de Bode de módulo.

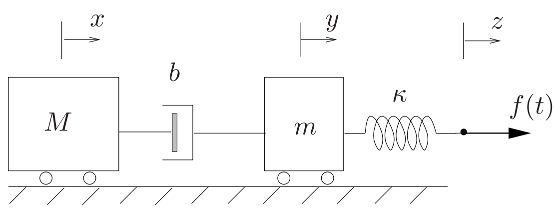

Figura 4: Massas acopladas por amortecedor.

Exercício 6 *Considere o sistema mecânico da Figura 4, no qual as massas têm os valores* $M = 5$ [kg], $m = 2$ [kg], *a constante de mola vale* $\kappa = 100$ [N/m] *e o coeficiente de atrito viscoso é dado por* $b = 4$ [Ns/m].

a) *Deseja-se projetar um controlador via realimentação de estado de modo que os polos do sistema em malha fechada tenham fator de amortecimento igual a* 0,707 *e constante de tempo de* 2 [s]. *É possível atender a especificação? Explique.*

b) *Supondo que se consiga medir apenas a posição* $z(t)$ *da extremidade da mola onde é aplicada a força* $f(t)$, *é possível determinar um observador de estado de modo a obter a velocidade da massa* M*? Explique.*

c) *Insira uma mola de constante elástica* $\kappa = 100$ [N/m] *entre as massas* M *e* m *e refaça os itens anteriores.*

Exercício 7 *Um sistema dinâmico a tempo contínuo tem como função de transferência*

$$G(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+6)}$$

a) *Determine a representação de estado da relação entrada-saída* $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$.

b) *Supondo que todas as suas variáveis de estado possam ser medidas, projete um controlador via realimentação de estado de modo que:*

- *a máxima sobre-elevação para uma entrada degrau seja menor ou igual a* 30%.
- *o tempo de estabilização não ultrapasse* 2 [s].
- *a largura de faixa não ultrapasse* 50 [Hz].
- *o erro para uma entrada degrau seja nulo.*

c) *Pensando apenas no projeto do regulador, suponha que desejamos implementar o controlador obtido no item b) através de um controlador PID. Qual deve ser a variável de estado a ser medida? Qual é a função de transferência do controlador?*

d) *A partir da medida da saída $y(t)$ do sistema em malha aberta, determine um observador de estado, com polos alocados adequadamente, capaz de fornecer todos os estados do sistema,* $\forall\ t \geq 0$.

e) *Refaça o projeto do item b) utilizando o observador de estado projetado no item d) e avalie, utilizando um pacote computacional, a resposta ao degrau do sistema em malha fechada para os dois projetos.*

Exercício 8 *Um sistema a tempo contínuo tem como função de transferência em malha aberta*

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

a) *Determine a representação de estado da relação entrada-saída $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$.*

b) *Supondo que todas as suas variáveis de estado possam ser medidas, calcule um ganho matricial K, de modo que a lei de controle $u(t) = r(t) - Kx(t)$ posicione os polos do sistema em malha fechada numa região do plano complexo de modo que suas constantes de tempo sejam de* 0,5 [s] *e seu fator de amortecimento igual a* 0,5.

c) *Se quisermos implementar o controlador obtido no item b) como um PD, qual variável de $G(s)$ deve ser medida? Qual a função de transferência do controlador?*

d) *Supondo que apenas a saída $y(t)$ é mensurável, projete um observador de estado que forneça $\dot{y}(t)\ \forall\ t \geq 0$.*

e) *Refaça o projeto do item b) resolvendo o problema linear-quadrático, considerando peso* 0,5 *sobre a primeira variável de estado. Calcule o peso sobre o sinal de controle $u(t)$ de modo que o sistema em malha fechada não apresente oscilação e possua o menor tempo de estabilização possível.*

Exercício 9 *Um sistema dinâmico a tempo contínuo tem como função de transferência em malha aberta*

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

a) *Determine a representação de estado correspondente à relação entrada-saída $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$.*

b) *Supondo que todas as variáveis de estado do sistema possam ser medidas, projete um controlador via realimentação de estado, alocando os polos do sistema em malha fechada de modo a garantir:*

- *margem de fase maior ou igual a* 40^{o}.
- *largura de faixa entre* 0,5 [Hz] *e* 10 [Hz].
- *erro nulo para uma entrada do tipo degrau.*

c) *Refaça o projeto do item anterior, mas agora alocando os polos do sistema em malha fechada de modo que o controlador resolva o problema de otimização*

$$\min \int_0^\infty \left[6{,}25x_1^2(t) + 2{,}5x_1(t)x_2(t) + 0{,}25x_2^2(t) + \rho u^2(t)\right] \, dt$$

onde $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)\ x_3(t)]'$ *é o vetor de estado do sistema.*

Calcule $\rho > 0$ *através do lugar das raízes simétrico de forma que os polos dominantes do sistema em malha fechada tenham fator de amortecimento* 0,86. *Determine a localização de todos os polos em malha fechada e, em seguida, calcule o ganho de realimentação de estado* K *que os posiciona nos valores desejados.*

d) *Supondo que apenas a saída* $y(t)$ *da planta* $G(s)$ *está disponível para medição, refaça o projeto do item b) utilizando um observador de estado para gerar todas as variáveis de estado. Aloque convenientemente os polos do observador.*

e) *Refaça o projeto do item anterior, alocando os polos do observador de estado assumindo um erro de* 5% *na medição de* $y(t)$, *isto é,* $\mu = 25 \times 10^{-4}$ *e que um erro de* 10% *no sinal de controle implementado, isto é,* $U = 10^{-1}B$. *Resolva a equação de Riccati associada ao problema linear-quadrático utilizando um pacote computacional.*

f) *Compare os projetos realizados nos itens d) e e) fazendo a simulação numérica do projeto ao adicionar ruídos brancos ao sinal de controle e à saída* $y(t)$.

Exercício 10 *Considere o sistema de controle com realimentação unitária apresentado na Figura 5, onde a planta* $G(s)$ *e o controlador* $C(s)$ *admitem as seguintes representações de*

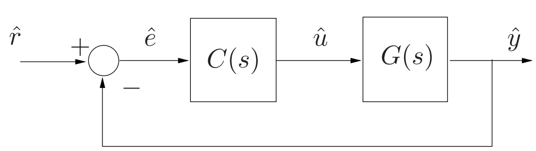

Figura 5: Sistema com realimentação unitária.

estado:

$$G(s) : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx \end{array} \right. \qquad C(s) : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z} & = & (A - LC)z + Bu - Le \\ u & = & -Kz \end{array} \right.$$

sendo K *e* L *ganhos matriciais a determinar.*

a) *Interprete o funcionamento do controlador* $C(s)$ *através de sua representação de estado.*

b) Mostre que se as matrizes $(A - BK)$ e $(A - LC)$ forem estáveis, então o sistema em malha fechada é estável.

c) Para cada uma das funções de transferência $G(s)$ dadas a seguir, projete um controlador $C(s)$ de acordo com a estrutura da Figura 5, de modo que:

- *o erro para uma entrada do tipo degrau seja nulo.*
- *os polos em malha fechada tenham constante de tempo menor do que* 0,5 [s].
- *a máxima sobre-elevação para uma entrada degrau seja de, no máximo,* 40%.
- *o sistema em malha fechada rejeite ruídos a partir da faixa de* 100 [rad/s].

i) $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$

ii) $G(s) = \dfrac{s+5}{(s+2)(s+10)}$

iii) $G(s) = \dfrac{s+5}{s^2+6s+25}$

d) Refaça os projetos do item anterior no contexto do problema-linear quadrático

$$\min \int_0^\infty \left[x_1^2(t) + \rho u^2(t)\right] \, dt$$

no qual $x_1(t)$ é a primeira variável de estado de $G(s)$ na representação canônica controlável. Determine $\rho > 0$ através do lugar das raízes simétrico, segundo as especificações impostas e, em seguida, calcule os ganhos K e L.

e) Refaça os projetos dos ganhos L no item d) supondo que o sinal de controle $u(t)$ seja implementado com erro de 5%, isto é, $U = 5 \times 10^{-2} B$, e a saída $y(t)$ seja medida com erro de 10%, ou seja, $\mu = 10^{-2}$. Utilize um pacote computacional para resolver a equação de Riccati associada a esse problema.

Exercício 11 *O modelo em espaço de estado para o problema de controle potência ativa-frequência em um gerador síncrono é expresso por*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -5 & 0 & -100 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}08 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}1 \end{bmatrix} \delta P_d + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta P_c \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

onde a saída $y(t)$ representa a frequência da rede de energia elétrica.

a) Projete um controle via realimentação de estado do tipo $\delta P_c = -Kx$, e determine K de modo que o tempo de estabilização do sistema em malha fechada seja menor que 2,5 [s].

b) Considerando o projeto do servomecanismo $\delta P_c = K(M\delta P_d - x)$, calcule M para que, em regime permanente, a variação na potência exigida pela carga δP_d não afete a frequência da linha.

Exercício 12 *Um sistema a tempo contínuo caracterizado pela função de transferência*

$$G(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+10)}$$

será controlado através de um computador digital, com período de amostragem de 10 [ms]*. Considerando a função de transferência discretizada através de um segurador de ordem zero, de modo que todos os seus estados possam ser medidos, projete um ganho de realimentação de estado K e um vetor de ganhos M de forma que o sistema se comporte como um equivalente contínuo com polos dominantes com constante de tempo de* 0,25 [s] *e fator de amortecimento* 0,707*, além de apresentar erro nulo para uma entrada do tipo degrau.*