ME 420 - Inferência Estatística II / ME 419 - Inferência
Primeiro semestre de 2011
Prova
Data: 20/05/2011

Turma: ____________

Nome: ________________________________ RA: ______________

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **Coloque seu nome completo e RA em todas as folhas que você recebeu, inclusive nesta.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique, adequadamente, seus desenvolvimentos, sem, no entanto, escrever excessivamente.**
- **Resolva a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **Contestações a respeito da nota, só serão consideradas se estiverem por escrito.**
- **A prova terá duração de 120 minutos, das 16h às 18h, improrrogáveis.**

Faça uma excelente Prova!!

Questões

1. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens.

a) Coloque a f.d.p conjunta da amostra nas formas da família exponencial tradicional e canônica, identificando, corretamente, cada função (10 pontos).

b) Obtenha uma estatística suficiente e completa (5 pontos).

c) Obtenha o estimador pelo método dos momentos de θ (10 pontos).

d) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança (e.m.v.) de θ. Obtenha também o e.m.v de $P(X < 1/2)$ (30 pontos).

e) Calcule a esperança e variância exatas do e.m.v. (50 pontos).

2. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2), \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$.

   Responda os itens.

   a) Coloque a f.d.p conjunta da amostra na forma da família exponencial tradicional, identificando, corretamente, cada função (20 pontos).

   b) Obtenha o estimador pelo método dos momentos de $\boldsymbol{\theta}$ (20 pontos).

   c) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança (e.m.v.) de $\boldsymbol{\theta}$. OBS: Você não precisa demonstrar que o valor que você encontrou é o máximo global (30 pontos).

   d) Obtenha a distribuição assintótica do e.m.v. de $\boldsymbol{\theta}$ especificando, corretamente, seus parâmetros(50 pontos).

3. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, tal que :

$$f_X(x;\mu) = e^{-(x-\mu)} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x), \mu > 0$$

   Responda os itens.

   a) Prove que $Y_1 = \min(X_1, ..., X_n)$ é uma estatística suficiente (10 pontos).

   b) Prove que $Y_1 = \min(X_1, ..., X_n)$ é uma estatística completa (20 pontos).

   c) Sejam $\widehat{\mu}_1 = Y_1$ e $\widehat{\mu}_2 = \overline{X}$ dois estimadores de μ. Calcule seus valores esperados, variâncias e erros-quadráticos médios (EQM). Considerando o EQM como critério de escolha dos estimadores, qual você escolheria? Justifique, adequadamente, sua resposta (50 pontos). Sugestão:

      Se X for uma v.a.c. com f.d.p.

$$f_X(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x), \mu > 0, \sigma > 0$$

      então Y = (X - μ) $\sim$ exp(σ).

Formulário

1. Se $X \sim exp(\theta), \theta > 0$, então $f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \mathbb{1}(x)_{(0,\infty)}, \mathcal{E}(X) = \theta, \mathcal{V}(X) = \theta^2$.

2. Se $X \sim$ gama$(r,\theta), r > 0, \theta > 0$, então $f_X(x;r,\theta) = \frac{1}{\theta^r \Gamma(r)} e^{-\frac{x}{\theta}} x^{r-1} \mathbb{1}(x)_{(0,\infty)}, \mathcal{E}(X) = r\theta, \mathcal{V}(X) = r\theta^2$.

3. $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$, $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$.

4. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in (-\infty, \infty), \sigma^2 \in (0, \infty), \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$ então $f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x), \mathcal{E}(X) = \mu, \mathcal{V}(X) = \sigma^2$.

5. Seja $g(\mu) = \int_\mu^\infty h(x) dx$, então $\frac{\partial}{\partial\mu} g(\mu) = -h(\mu)$.