Turma:

Nota:

MA 327 Álgebra Linear

Segundo Semestre de 2006

Terceira Prova

Nome: **RA:**

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
T o t a l	

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $I\!F$, T um operador linear sobre V, $\lambda \in I\!F$ e E_λ o subconjunto de V definido por:

$$E_\lambda = \{ v \in V \ / \ T(v) = \lambda v \}.$$

Prove que $T(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

Questão 2. **(3.0 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $I\!F$ e T um operador linear sobre V. Pede–se:

(a) Se $v \in V$ é um autovetor de T, quantos autovalores associados a v podem existir, no máximo? Justifique sua resposta.

(b) Se $\lambda = 0$ é um autovalor de T, podemos afirmar que T não é um operador injetor? A recíproca é verdadeira? Justifique suas respostas.

(c) Se o operador linear T possui somente dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 com $dim(V_{\lambda_1}) = n - 1$, prove que T é um operador diagonalizável.

Questão 3. **(3.0 Pontos)**

Seja $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ um operador linear definido por $T(x,y) = (5x - 6y\,,\, x)$. Pede–se:

(a) Calcule os autovalores e os autovetores do operador T.

(b) Exiba uma base para cada um dos autoespaços do operador T.

(c) Utilizando o resultado do item (a), calcule os valores de a, b, c, $d \in I\!R$, tais que

$$T^8(x,y) = (ax + by\,,\, cx + dy)\,,$$

onde $T^n : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ é o operador linear definido por:

$$T^0 = I \qquad \text{e} \qquad T^n = T^{n-1} \circ T \qquad \text{para todo natural} \qquad n \geq 1\,.$$

Questão 4. **(3.0 Pontos)**

Determine explicitamente a expressão do operador linear T sobre $I\!R^4$, diagonalizável, satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

(a) $Ker(T) = \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x + y - z + t = 0 \quad \text{e} \quad z - t = 0 \}$.

(b) $T(0,0,1,0) = (0,0,2,0)$.

(c) $(0,1,0,0) \in Im(T)$.

(d) $\lambda = -3$ é um autovalor do operador T.

G A B A R I T O

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Seja $w \in T(E_\lambda)$, isto é, existe um elemento $v \in E_\lambda$ tal que $w = T(v)$. Como $v \in E_\lambda$, temos que $w = T(v) = \lambda v$. Logo, $w = \lambda v$.

Aplicando o operador T no elemento w, obtemos $T(w) = \lambda T(v)$.

Como $w = T(v)$, temos que $T(w) = \lambda w$. Assim, podemos concluir que $w \in E_\lambda$. Portanto, provamos que $T(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

Questão 2. **(3.0 Pontos)**

(a) Temos somente um autovalor λ associado ao autovetor v. Podemos observar que o autovalor λ é unicamente determinado pelo operador T e pelo autovetor v. De fato, considere que λ e λ' são autovalores do operador T associados ao autovetor v, isto é,

$$T(v) = \lambda v \qquad \text{e} \qquad T(v) = \lambda' v .$$

Assim, temos que

$$\lambda v - \lambda' v = 0_V \implies (\lambda - \lambda') v = 0_V \implies (\lambda - \lambda') = 0 \implies \lambda = \lambda' ,$$

pois $v \neq 0_V$.

(b) Sim. De fato, se $\lambda = 0$ é um autovalor de T e v um autovetor associado, temos que $v \in Ker(T)$, pois $T(v) = \lambda v = 0_V$. Logo, como $v \neq 0_V$, $Ker(T) \neq \{ 0_V \}$. Portanto, T não é um operador injetor.

Reciprocamente, se T não é um operador injetor, sabemos que $Ker(T) \neq \{ 0_V \}$. Logo, os elementos não nulos $v \in Ker(T)$ são autovetores do operador T associados ao autovalor $\lambda = 0$, pois $T(v) = 0_V = \lambda v$.

(c) Seja $\{ v_1 , \cdots , v_{n-1} \}$ uma base para o subespaço V_{λ_1}, desde que $dim(V_{\lambda_1}) = n - 1$. Sabemos que cada elemento v_j é um autovetor de T associado ao autovalor λ_1, pois

$$T(v_j) = \lambda_1 v_j \qquad \text{para} \qquad j = 1 , \cdots , (n-1) .$$

Assim, temos $(n-1)$ autovetores T linearmente independentes. Tomando v_n o autovetor de T associado ao autovalor λ_2, temos que o conjunto $\{ v_1 , \cdots , v_{n-1} , v_n \}$ também é linearmente independente, pois o autovetor $v_n \notin V_{\lambda_1}$.

Desse modo, temos uma base ordenada $\gamma = \{ v_1 , \cdots , v_{n-1} , v_n \}$ de autovetores de T para o espaço vetorial V. Assim, sabemos que $[T]^{\gamma}_{\gamma} = diag(\lambda_1, \lambda_1, \cdots \lambda_1, \lambda_2)$. Logo, T é um operador diagonalizável.

Questão 3. (3.0 Pontos)

(a) Com relação à base canônica $\beta = \{ (1,0)\,,\, (0,1) \}$ de $\mathbb{R}^2$, temos que

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que o polinômio característico do operador T é o polinômio característico da matriz $A = [T]_\beta^\beta$ que é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(5 - \lambda) + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6\,.$$

Portanto, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$ são os autovalores do operador T.

Para determinar os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$, temos que encontrar os elementos não nulos do núcleo do operador $T - \lambda_1 I$.

Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff x - 2y = 0$$

que possui como solução $x = 2y$ para $y \in \mathbb{R}$ não nulo.

Desse modo, os autovetores do operator T associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são do tipo $v = (2y, y)$ para $y \in \mathbb{R}$ não nulo. Assim, podemos escolher $v_1 = (2,1)$ o autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

De modo análogo, para determinar os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$, temos que encontrar os elementos não nulos do núcleo do operador $T - \lambda_2 I$.

Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \iff x - 3y = 0$$

que possui como solução $x = 3y$ para $y \in \mathbb{R}$ não nulo.

Desse modo, os autovetores do operator T associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$ são do tipo $v = (3y, y)$ para $y \in \mathbb{R}$ não nulo. Assim, podemos escolher $v_2 = (3,1)$ o autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

(b) Do item **(a)**, podemos observar facilmente que

$$V_{\lambda_1} = [(2,1)] \qquad \text{e} \qquad V_{\lambda_2} = [(3,1)]$$

são os autoespaços do operador T associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, respectivamente.

(c) Do item **(a)**, podemos concluir que T é um operador diagonalizável. Logo, a matriz $A = [T]_{\beta}^{\beta}$ é uma matriz diagonalizável.

Além disso, sabemos que os autovetores da matriz A são

$$X_1 = [v_1]_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_2 = [v_2]_{\beta} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, respectivamente.

Temos que a matriz A é similar a matriz diagonal $\Lambda = diag(2,3)$, onde a matriz invertível P que realiza a transformação de similaridade é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, temos que $A = P \, \Lambda \, P^{-1}$. Logo, sabemos que $A^8 = P \, \Lambda^8 \, P^{-1}$ e que a matriz do operador T^8 com relação à base canônica β é dada por $[T^8]_{\beta}^{\beta} = A^8$.

Temos que a matriz A^8 é obtida da seguinte forma:

$$A^8 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 3^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 6561 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19171 & -37830 \\ 6305 & -12354 \end{bmatrix}$$

Finalmente, temos que

$$[T^8(u)]_{\beta} = [T^8]_{\beta}^{\beta}[u]_{\beta} \quad \text{para} \quad u = (x,y) \in I\!R^2 .$$

Portanto, a expressão explícita do operador linear T^8 é dada por:

$$T^8(x,y) = (\, 19171x - 37830y \,,\, 6305x - 12354y \,) \quad \text{para} \quad (x,y) \in I\!R^2 .$$

Questão 4. **(3.0 Pontos)**

Da condição (a), sabemos que

$$Ker(T) = \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x+y-z+t = 0 \quad \text{e} \quad z-t = 0 \} \,.$$

Podemos verificar facilmente que $\{ (-1,1,0,0) \,,\, (0,0,1,1) \}$ é uma base para $Ker(T)$.

Desse modo, podemos concluir que $\lambda_1 = 0$ é um autovalor de T com multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica também igual a 2, pois $V_\lambda = Ker(T)$ e $dim(\,Ker(T)\,) = 2$. Assim, podemos escolher $v_1 = (-1,1,0,0)$ e $v_2 = (0,0,1,1)$ os autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$.

Da condição (b), sabemos que $v_3 = (0,0,1,0)$ é um autovetor do operador T associado ao autovalor $\lambda_3 = 2$. De fato, $T(v_3) = \lambda_3 v_3$, isto é, $T(0,0,1,0) = 2(0,0,1,0)$.

Podemos observar que $\{ v_1 \,,\, v_2 \,,\, v_3 \}$ é linearmente independente em $I\!R^4$. Assim, estamos precisando de mais um elemento $v_4 \in I\!R^4$ para autovetor do operador T de modo que $\gamma = \{ v_1 \,,\, v_2 \,,\, v_3 \,,\, v_4 \}$ seja uma base de autovetores para $I\!R^4$.

Da condição (c), sabemos que o elemento $(0,1,0,0) \in Im(T)$. Assim, podemos escolher $v_4 = (0,1,0,0)$ como um autovetor do operador T associado ao autovalor $\lambda_4 = -3$.

Portanto, temos que

$$v_1 = (-1,1,0,0) \quad , \quad v_2 = (0,0,1,1) \quad , \quad v_3 = (0,0,1,0) \quad \text{e} \quad v_4 = (0,1,0,0)$$

são os autovetores do operador linear T associados aos autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = -3$, respectivamente. Desse modo, $\gamma = \{ v_1 \,,\, v_2 \,,\, v_3 \,,\, v_4 \}$ é uma base de autovetores para $I\!R^4$ e sabemos que $[T]^\gamma_\gamma = diag(0,0,2,-3)$.

Finalmente, vamos determinar a expressão explícita do operador linear T diagonalizável que satisfaz as condições desejadas. Para isso, vamos representar um elemento genérico $(x,y,z,t) \in I\!R^4$ em relação à base de autovetores $\gamma = \{ v_1 \,,\, v_2 \,,\, v_3 \,,\, v_4 \}$, isto é,

$$(x,y,z,t) = a(-1,1,0,0) + b(0,0,1,1) + c(0,0,1,0) + d(0,1,0,0) \,.$$

Podemos verificar facilmente que $a = -x$, $b = t$, $c = z - t$ e $d = x + y$.

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} T(x,y,z,t) &= -xT(-1,1,0,0) + tT(0,0,1,1) + (z-t)T(0,0,1,0) + (x+y)T(0,1,0,0) \\ &= (0 \,,\, -3x-3y \,,\, 2z-2t \,,\, 0) \end{aligned}$$