Disciplina: MA 311 /Cálculo III/ Primeiro semestre de 2009

Prova P_3: 26 de junho de 2009, Campinas

Exercício 1. (1,5 pontos) Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ e determine o intervalo de convergência.

A série geométrica

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \tag{1}$$

é convergente para $|r| < 1$. (+0,2)

Fazendo $r = -x^2$ em (1) temos

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1. \qquad (+0,2) \tag{2}$$

Diferenciando (2) obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 2 \, n \, x^{2n-1}, \quad |x| < 1. \qquad (+0,3) \tag{3}$$

Por outro lado:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = (-1)\frac{2x}{(1+x^2)^2}. \qquad (+0,2) \tag{4}$$

Então de (3) e (4):

$$(-1)\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 2 \, n \, x^{2n-1}, \qquad (+0,2)$$

isto é,

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \, n \, x^{2n-1}. \qquad (+0,2)$$

O intervalo de convergência é $(-1, 1)$ no qual todos cálculos realizados são permetidos. (+0,2).

Observação. Este é o método sugerido pela dica. Outras possibilidades matematicamente coretas são admissíveis.

$$(x^2-1)y'' + 8xy' + 12y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 3$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$\sum_{\substack{\cancel{n=2} \\ n=0}}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{\substack{\cancel{n=1} \\ n=0}}^{\infty} 8n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 12 a_n x^n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \left[n(n-1) + 8n + 12 \right] - a_{n+2}(n+2)(n+1) \right\} x^n = 0$$

1,0 $$\boxed{a_{n+2} = \frac{n^2+7n+12}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{(n+4)(n+3)}{(n+2)(n+1)} a_n} \quad n \geq 0$$

$n=0 \quad a_2 = \frac{4.3}{21} a_0$

$n=1 \quad a_3 = \frac{5.4}{3.2} a_1$

$n=2 \quad a_4 = \frac{6.5}{4.3} a_2 = \frac{6543}{4321} a_0$

$n=3 \quad a_5 = \frac{76}{54} a_3 = \frac{7654 a_1}{5432}$

$n=4 \quad a_6 = \frac{87 a_4}{65} = \frac{876543}{65432} a_0$

04 $$\boxed{a_{2k} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{2} a_0}$$

$$\boxed{a_{2k+1} = \frac{(2k+3)(2k+2)}{6} a_1}$$

04 para $k \geq 1$

$$y(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k+1)(2k+1) x^{2k} + 3x + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+3)(k+1) x^{2k+1}$$

$$\boxed{a_0 = 2 \quad a_1 = 3} \leftarrow 02$$

3a) (*) $2xy'' - y' - y = 0$, $P(x) = 2x$, $Q(x) = -1$
$R(x) = -1$

$$\left.\begin{array}{l} P(0)=0 \\ p_0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Q(x)}{P(x)}\, x = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{2x}\, x = -\dfrac{1}{2} \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R(x)}{P(x)}\, x^2 = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{2x}\, x^2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$x=0$ é um ponto singular regular de (*)

0,2

Equação indicial : $0 = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r - 3/2)$

0,2

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \ , \quad y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)\, a_m x^{m+r-1} \ , \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)\, a_m x^{m+r-2}$$

$$0 = \sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$$

$$= \quad \text{''} \quad - \quad \text{''} \quad - \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^{m+r-1}$$

$$= \underset{\neq 0}{a_0} x^{r-1} [2r(r-1) - r] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(m+r)(2m+2r-3)\, a_m - a_{m-1} \right] x^{m+r-1}$$

0,4

$$a_m = \frac{a_{m-1}}{(m+r)(2m+2r-3)} \ , \quad m \geq 1 \qquad \text{(Relação de Recorrência)}$$

0,2

3b) $r = 3/2 \Longrightarrow a_m = \dfrac{a_{m-1}}{m(2m+3)}$, $m \geq 1$

0,2

$$a_1 = \frac{a_0}{1 \cdot 5} = \frac{a_0}{5} \ , \qquad a_2 = \frac{a_1}{2 \cdot 7} = \frac{a_0}{(1\cdot 2)\cdot(5\cdot 7)} = \frac{a_0}{70}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3 \cdot 9} = \frac{a_0}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(5\cdot 7\cdot 9)} = \frac{a_0}{70 \cdot 27} = \frac{a_0}{1.890}$$

0,4 $\quad a_4 = \dfrac{a_3}{4 \cdot 11} = \dfrac{a_0}{4!\,(5\cdot 7\cdot 9\cdot 11)} = \dfrac{a_0}{1.890 \times 44} = \dfrac{a_0}{83.160}$

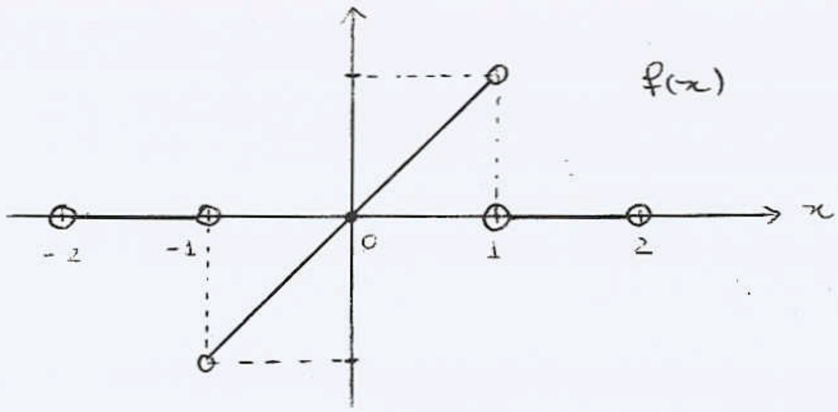
$\boxed{a_0 = 1}$

$$y = x^{3/2} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!\,[5\cdot 7\cdot 9 \cdots (2m+3)]} \right) , \quad x > 0$$

0,4 $$= x^{3/2} \left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{70} + \frac{x^3}{1.890} + \frac{x^4}{83.160} + \cdots \right)$$

0,6 é o valor máximo que pode ser obtido na parte (b) com raiz $r \neq 3/2$ ou relação de recorrência errada.
$-0,2$ cada erro de conta

4) a)



A série de Fourier da função f é dada por

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right]$$ 0,2

onde

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \qquad p/\ n \geq 0 \\ &\text{e} \\ b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \qquad p/\ n \geq 1. \end{aligned}\right\} +0{,}2$$

Como $f(x)$ é uma função ímpar, tem-se que

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 \qquad p/\ n \geq 0 \\ b_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \qquad p/\ n \geq 1. \end{aligned}\right\} +0{,}2$$

Como $f(x)$ tem período $2\ell = 4$, logo $\ell = 2$, segue que

$$b_n = \int_0^2 f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \qquad +0{,}2$$

Finalmente, como $f(x) = x$ em $(0,1)$ e $f(x) = 0$ em $(1,2)$ temos que

$$\underbrace{b_n = \int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx}_{+0{,}2} \overset{\text{integração por partes}}{=} -\frac{2x}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$\left.\begin{aligned} b_n &= -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} \\ b_n &= -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad p/\ n \geq 1 \end{aligned}\right\} 0{,}3$$

Portanto, a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

+ 0,2

b) Avaliando a série de Fourier de $f(x)$ no ponto $x = 1$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Para $n = 2K$ par tem-se que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2K\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(K\pi) = 0 \quad , \quad p/\ K = 1, 2, \dots$$

e para $n = 2K+1$ ímpar tem-se que

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{(2K+1)\pi}{2}\right) = 0 \quad p/\ K \geq 0.$$

Logo, a série acima se reduz a

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2K+1)^2} \cdot \overbrace{\operatorname{sen}^2\left(\frac{(2K+1)\pi}{2}\right)}^{=1}$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(2K+1)^2}$$

0,4

Por outro lado, como $f(x)$ possui uma descontinuidade de salto em $x = 1$, temos que sua série de Fourier converge a

$$\frac{f^+(1) + f^-(1)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

+ 0,4

De onde,

$$\sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(2K+1)^2} = \frac{1}{2}$$

+ 0,2

Gabarito questão 5:

Consideremos soluções da forma $y(x,t) = X(x)T(t)$. Temos $y_{xx}(x,t) = X''(x)T(t), y_{tt}(x,t) = X(x)T''(t)$, e então a equação de onda fica traduzida nas equações

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{25}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\mu$$

onde μ deve ser constante, já que por um lado sómente depende de x e por outro lado sómente depende de t. Podemos separar então em duas equações

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad T''(t) + 25\mu T(t) = 0\,.$$

0,3 pontos

As condições iniciáis e de contorno ficam traduzidas nas condições

$$X(0) = X(3) = 0, \quad T'(0) = 0,$$

já que estamos desestimando soluções triviáis.

0,3 pontos

Consideremos cada caso para μ:

$\underline{\mu = 0}$

Neste caso fica $X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$. A condição de contorno $X(0) = 0$ significa que $c_2 = 0$, e a condição $X(3) = 0$ então diz que $c_1 = 0$, e fica a solução trivial na qual não estamos interesados.

$\underline{\mu < 0}$

Neste caso as soluções são da forma $X(x) = c_1 \operatorname{senh}(\alpha x) + c_2 \cosh(\alpha x)$, onde $\alpha = \sqrt{|\mu|}$. De novo, a condição de contorno $X(0) = 0$ significa que $c_2 = 0$, e a condição $X(3) = 0$ então diz que $c_1 = 0$, e fica a solução trivial na qual não estamos interesados.

$\underline{\mu > 0}$

Neste caso as soluções são da forma $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x)$, onde $\alpha = \sqrt{\mu}$. De novo, a condição de contorno $X(0) = 0$ significa que $c_2 = 0$, mas agora a condição $X(3) = 0$ fixa que $3\alpha = k\pi$, k inteiro (que podemos tomar positivo já que $\operatorname{sen}(\theta) = -\operatorname{sen}(-\theta)$), e temos que $\mu = \alpha^2 = k^2\pi^2/9$, e isto corresponde a soluções da forma $X_k(x) = c_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{3})$.

0,5 pontos

Agora para cada inteiro $\mu = k^2\pi^2/9$ temos a equação para $T(t)$, $T''(t) + \frac{25k^2\pi^2}{9}T(t) = 0$, cujas soluções são da forma $T(t) = d_1 \operatorname{sen}(\frac{5k\pi t}{3}) + d_2 \cos(\frac{5k\pi t}{3})$. Agora a condição inicial $T'(0) = 0$ implica que $d_1 = 0$, e temos a solução $T_k(t) = d_2 \cos(\frac{5k\pi t}{3})$.

0,4 pontos

Temos as funções $y_k(x,t) = X_k(x,t)T_k(x,t) = b_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{3}) \cos(\frac{5k\pi t}{3})$ que cada uma resolve a equação diferencial, as conduções de contorno e a condição inicial $y_t(x,0) = 0$. Sómente falta a condição inicial $y(x,0) = 5\operatorname{sen}(\pi x) + 8\operatorname{sen}(2\pi x)$, que conseguimos usando o principio de superposição e procuramos uma solução da forma

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{3}) \cos(\frac{5k\pi t}{3})\,.$$

Uma solução desta forma satisfaz a condição inicial se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{3}) = 5\operatorname{sen}(\pi x)+ 8\operatorname{sen}(2\pi x)$. Agora é somente comparar coeficentes: temos $b_3 = 5, b_6 = 8$ e todos os outros coeficentes são zero, e temos:

$$y(x,t) = 5\operatorname{sen}(\pi x)\cos(5\pi t) + 8\operatorname{sen}(2\pi x)\cos(10\pi t)\,.$$

0,5 pontos
