14/06/10

EA721A - PRINCÍPIOS DE CONTROLE & SERVOMECANISMOS

SEGUNDA PROVA - RESOLUÇÃO

QUESTÃO 1. A equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + C(s)P(s) = 1 + \frac{16s+\alpha}{s+\alpha} \cdot \frac{9}{s^2} = 0.$$

Evidenciando o parâmetro α,

$$(s+\alpha)s^2 + 9(16s+\alpha) = 0,$$

$$s^3 + \alpha s^2 + 144s + 9\alpha = 0,$$

$$1 + \alpha \frac{s^2+9}{s^3+144s} = 0$$

$$1 + \alpha \frac{(s+j3)(s-j3)}{s(s+j12)(s-j12)} = 0$$

O L.R. possui apenas uma assíntota de $180°$ (pois $n - m = 3 - 2 = 1$). Os ângulos de partida dos pólos são calculados por

$$\phi_{s=j3} + \phi_{s=-j3} - \phi_{s=0} - \phi_{s=-j12} - \phi_{s=j12} = 180° \times r,$$

$r = \pm 1, \pm 3$

No pólo em $s = j12$,

$$90° + 90° - 90° - 90° - \phi_{s=j12} = -180°$$

tilibra

e então $\phi_{s=j12} = 180°$. Por simetria, $\phi_{s=-j12} = -180°$.
Para o ângulo de chegada no zero em $s = j3$,

$$\phi_{s=j3} + \phi_{s=-j3} - \underbrace{\phi_{s=j12}}_{-\phi_{s=0}} - \phi_{s=-j12} = 180° r \quad , \quad r = \pm 1, \pm 3, \ldots$$

Do mesmo modo,

$$\phi_{s=j3} = -90° - 90° + 90° + 90° + 180°$$
$$= 180° \quad , \quad \phi_{s=-j3} = -180°$$

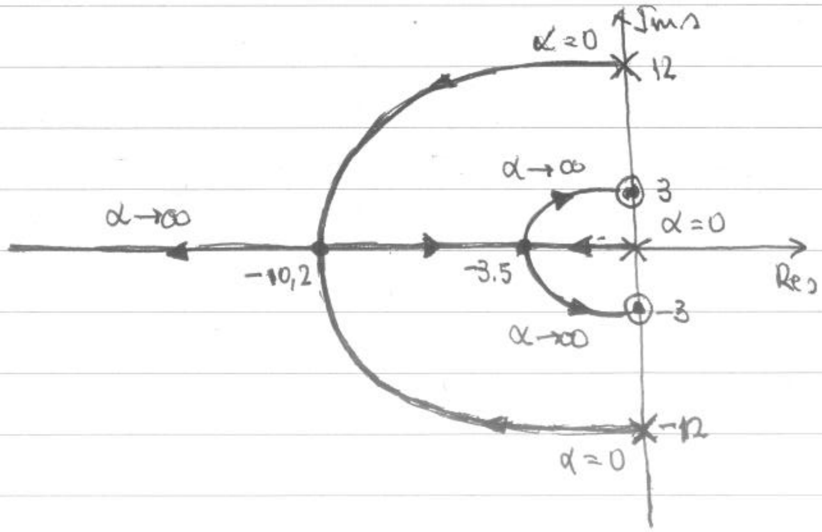
Para a análise da intersecção com Im s,

$$s^3 + \alpha s^2 + 144 s + 9\alpha = 0$$

s^3	1	144
s^2	α	9α
s^1	$\star$	
s^0	9α	

$$\star = \frac{144\alpha - 9\alpha}{\alpha} > 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Não há cruzamento com Im s. O L.R. seria como ilustrado na figura abaixo.



QUESTÃO 2.

a) Os compensadores avanço e atraso deslocam o cruzamento com 0 dB para a direita e para a esquerda, respectivamente, devido às suas características de magnitude. O compensador avanço adiciona ganho, enquanto que o compensador atraso remove ganho. Ao deslocarem o cruzamento com 0 dB para a direita e para a esquerda, respectivamente, os compensadores avanço e atraso aumentam e reduzem a faixa de passagem do sistema.

b) Para que a perda de fase produzida pelo compensador atraso seja pequena na nova frequência de cruzamento com 0 dB. Apenas a característica de atenuação do compensador atraso é usada.

∎

QUESTÃO 3.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0]\, x.$$

a) Os pólos dominantes devem ser posicionados em

$$p_c(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$
$$= s^2 + 10s + 100$$

O polinomio característico do sistema em malha fechada é

$$\det(sI - A + Bk) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10k_1 & 10k_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 10k_1 & s+5+10k_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= s^2 + (5+10k_2)s + 10k_1$$

Fazendo $\det(sI - A + Bk) = p_c(s)$, obtem-se

$$5 + 10k_2 = 10, \quad 10k_1 = 100$$

O vetor de ganhos procurado é $k = [k_1 \; k_2] = [10 \; 0{,}5]$.

b) A função de transferência do sistema em malha fechada, dado que $u = -kx + \rho r$, é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C(sI - A + Bk)^{-1}(\rho B)$$

$$= \frac{[1 \; 0]\begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -100 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 10\rho \end{bmatrix}}{s^2 + 10s + 100}$$

$$= \frac{10\rho}{s^2 + 10s + 100}.$$

/ /

Para que o erro de regime devido a entradas constantes seja nulo, é necessário que $T(0) = 1$, ou $\rho = 10$.

Resolução Alternativa: a planta possui um integrador, pois $\det(sI - A) = s(s+5)$. Adotando "Controle proporcional", $u = -kx + k_1 r$, e $k_1 = 10$. Logo, se $\rho = 10$, obtém-se erro nulo para entradas constantes. Do ponto de vista da implementação, a adotada pelo "Controle Proporcional" é preferível porque variações em k_1 serão compensadas (minimizadas) pela malha de controle. O ganho ρ está em malha aberta.

∎

QUESTÃO 4.

a) $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, $u = ly$. Em malha fechada,

$$\dot{x} = Ax + B(ly) = Ax + BlCx = (A + lBC)x.$$

O polinômio característico do sistema em malha fechada é

$$\det(sI - A - lBC) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix} - l\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -10l & s+5 \end{bmatrix}\right) = s^2 + 5s - 10l.$$

/ /

Qualquer valor $l < 0$ estabiliza assintoticamente o sistema em malha fechada.

b) Como a identidade $\det(sI - A - lBC) = p_c(s)$, ou seja $s^2 + 5s - 10l = s^2 + 10s + 100$, não possui solução (não é verdadeira para nenhum valor de l) não é possível realizar o posicionamento de pólos do item anterior.

QUESTÃO 5.

A planta discretizada é

$$P(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$$

$$= \frac{z-1}{z} \cdot \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(z+1)}{(z-1)^2} \qquad (T = 1\ [s])$$

a) $C(z) = 2$. A equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + C(z)P(z) = 1 + 2\,\frac{z+1}{2(z-1)^2} = 0,$$

ou $(z-1)^2 + z + 1 = z^2 - z + 2 = 0$. As raízes dessa equação são

$$z_{1,2} = \left(1 \pm j\sqrt{7}\right)/2,$$

e seus módulos são maiores do que 1. O sistema em malha fechada é instável e o valor absoluto do erro tende a $+\infty$ quando $k \to \infty$.

b) $C(z) = \frac{2}{3}\,\frac{z-1}{z}$. Neste novo caso,

$$1 + C(z)P(z) = 1 + \frac{2}{3}\,\frac{z-1}{z}\,\frac{z+1}{2(z-1)^2} = 0,$$

ou $3z(z-1) + z + 1 = 3z^2 - 2z + 1 = 0$. As raízes da equação são

$$z_{1,2} = \left(1 \pm j\sqrt{3}\right)/3,$$

e seus módulos são menores do que 1. O sistema em malha fechada é estável. O erro para entrada degrau é

$$e(\infty) = \lim_{k\to\infty} e(kT) = \lim_{z\to 1} \left(1 - z^{-1}\right) E(z)$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\,\frac{R(z)}{1 + C(z)P(z)}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\,\frac{\frac{z}{z-1}}{1 + \frac{1}{3}\,\frac{z+1}{z(z-1)}}$$

$$= 0.$$