INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP

Prova 1 – F 315 (Diurno) 13/04/2010

1) ______
2) ______
3) ______
Nota:______

RA:________ Nome: Gabarito

1) (3 pts) A velocidade de uma partícula de massa *m*, varia com a distância *x* como $v(x) = \alpha x^{-2}$. Assumindo $v(x=0)=0$ no instante t=0:

a) Determine a força F(x)
b) Determine x(t)
c) Determine F(t)
d) Achar o potencial correspondente a esta força.

a) $F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m v \frac{dv}{dx} = \alpha x^{-2}\left[-2m\alpha x^{-3}\right]$

$$\boxed{F = -2m\alpha^2 x^{-5}}$$

b) $\frac{dx}{dt} = v(x) = \alpha x^{-2} \Rightarrow \int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{x^{-2}} = \int_0^t \alpha\, dt \Rightarrow \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x_0}^{x} = \alpha t$

$x^3 - x_0^3 = 3\alpha t \Rightarrow \boxed{x(t) = (\cancel{x_0^3} + 3\alpha t)^{1/3}}$

Pelas condições iniciais $x_0 = 0$

c) $\boxed{F(t) = -2m\alpha^2(\cancel{x_0^3} + 3\alpha t)^{-5/3}}$

d) $V(x) = -\int_{+\infty}^{x} F(x')\,dx' = 2m\alpha^2\int_{+\infty}^{x}\frac{1}{x'^5}dx' = -\frac{2m\alpha^2}{4}\left.\frac{1}{x'^4}\right|_{\infty}^{x}$

$$\boxed{V(x) = -\frac{m\alpha^2}{2x^4}}$$

2) (3.5 pts) Considere uma partícula de massa *m* movendo sobre a influência do potencial $U(x) = U_0(\frac{a}{x} + \frac{x}{a})$, para a região de x>0.

a) Encontre as posições de equilíbrio indicando se são pontos de mínimo ou máximo (justifique suas respostas).

b) Considerando <u>pequenas oscilações</u> em torno de um ponto de mínimo deste potencial, encontre o valor para <u>a freqüência</u> de oscilação da partícula e o <u>período</u>. Mostre todos os cálculos.

total
1.5

a) A posição de equilíbrio é dada p/ $F=0$

$$F = -\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dx} = 0 \therefore U_0\left(-\frac{a}{x^2} + \frac{1}{a}\right) = 0$$

$$x^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{x = \pm a}$$ pontos de equilíbrio

1,0

$$\frac{d^2U}{dx^2} = U_0\left(\frac{2a}{x^3}\right)\Big|_{x=\pm a}$$

$$+a \Rightarrow \frac{2U_0}{a^2} > 0 \quad \text{(ponto de mínimo)}$$

$$-a \Rightarrow -\frac{2U_0}{a^2} < 0 \quad \text{(ponto de máximo)}$$

0.5

Não definido no ~~problema~~ pois $x > 0$!

2.0 total

b) $$U(x) = U(a) + \cancel{\frac{dU(x)}{dx}\Big|_{x=a}(x-a)}^{\,0} + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=a}(x-a)^2$$

$$U(x) = U_0\left(\frac{a}{a} + \frac{a}{a}\right) + \frac{1}{2}\frac{2U_0}{a^2}(x-a)^2 = 2U_0 + \frac{U_0}{a^2}(x-a)^2$$

1,0 $$\boxed{F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{2U_0}{a^2}(x-a)}$$

fazendo $\xi = x - a$ $$\boxed{F(\xi) = -\frac{2U_0}{a^2}\xi = -K\xi}$$

Força restauradora tipo oscilador harmônico simples

$$m\ddot{\xi} = -K\xi \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

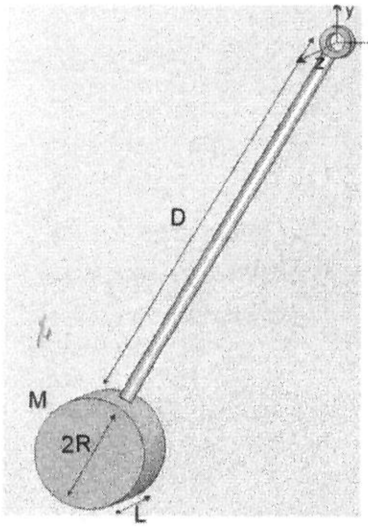
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2U_0}{ma^2}}}$$

0.5

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^2}{2U_0}}}$$

0.5

3) (3.5 pts) Um cilindro de massa *M*, raio *R* e comprimento *L* está ligado, pela sua superfície, a uma haste rígida de comprimento *D* e massa desprezível. Este conjunto forma o pêndulo físico da figura abaixo.

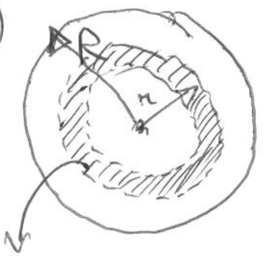


2.0 a) Determine o momento de inércia do cilindro em relação ao eixo z de rotação (origem). Mostre todos os cálculos.

1.0 b) Encontre a equação de movimento deste pendulo.

0.5 c) Considerando pequenas oscilações, encontre a expressão para a posição angular θ(t) e a freqüência angular de oscilação.

a)



dI_{cm}

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{L\pi R^2}$$

$$dI_{cm} = r^2 dm = r^2 \rho \underbrace{2\pi r\, dr\, L}_{dV}$$

1.0

$$I_{cm} = \int dI_{cm} = \rho 2\pi L \int_0^R r^3 dr$$

$$\boxed{I_{cm} = \frac{\cancel{2\pi} \cancel{L} R^{\cancel{4}\,2} M}{_2\cancel{4}\ \cancel{L\pi R^2}} = \frac{MR^2}{2}}$$

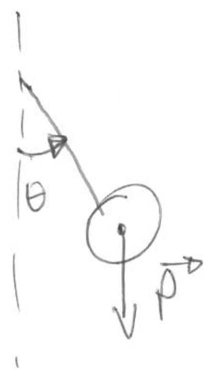
Pelo teorema dos Eixos Paralelos

$$I_Z = I_{cm} + M(D+R)^2$$

1.0

$$I_Z = M \underbrace{\left[\frac{R^2}{2} + (D+R)^2\right]}_{K^2}$$

b)



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \Rightarrow \frac{d}{dt}(I\omega) = -Mg(D+R)\operatorname{sen}\theta$$

1.0

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mg(D+R)\operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{Mg(D+R)}{MK^2}\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g(D+R)}{K^2}\operatorname{sen}\theta = 0}$$

c) $\operatorname{sen}\theta \approx \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g(D+R)}{K^2}\theta = 0$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g(D+R)}{K^2}}}$$

0.5

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

δ é a fase

θ_0 amplitude inic.