1 | 2.5
2 | 2.5
3 | 2.5
4 | 2.5
10

MA 211 Turmas A,B - Prova 1

09/04/2010

Aluno: Felipe Antonio de Almeida Fleming
RA: 097468

Questão 1: O volume de um cilindro é dado por $V(r,h) = \pi r^2 h$, onde r é o raio da base do cilindro e h é a altura.
(a) Encontre a aproximação linear para o volume do cilindro quando $r = 4cm$ e $h = 12cm$.
(b) Utilize diferenciais para estimar o erro máximo cometido ao se calcular o volume se as medidas foram feitas com uma precisão de $0,1cm$.

Questão 2: Se $z = f(x,y)$ onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Determine $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ e verifique que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

Questão 3: Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
(a) Determine a taxa de variação do potencial no ponto $P = (3,4,5)$ na direção do vetor $v = (1,1,-1)$.
(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?
(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

Questão 4 Qual é o maior volume possível de uma caixa retangular cuja diagonal tem comprimento L?

Questão 1

(a) $V(r,h) = \pi r^2 \cdot h$. Encontremos $L(r,h)$ quando (r,h) está próximo de $r = 4cm$ e $h = 12cm$.

$$L(r,h) \approx V(4,12) + V_r'(4,12)\cdot(r-4) + V_h'(4,12)\cdot(h-12)$$

$V_r' = 2\pi r h$

$V_h' = \pi r^2$

substituindo os valores $\Rightarrow$ $V_r = 2\pi \cdot 4 \cdot 12 = 96\pi$

$V_h = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$

$$V(4,12) = \pi 4^2 \cdot 12 = 192\pi$$

Assim

$$L(r,h) \approx 192\pi + 96\pi\cdot(r-4) + 16\pi\cdot(h-12) =$$

$$L(r,h) \approx \pi\cdot(\cancel{192} + 96r - 384 + 16h - \cancel{192})$$

$$\boxed{L(r,h) \approx \pi\cdot(96r + 16h - 384)}$$

(b) $dV = \dfrac{\partial V}{\partial r}\cdot dr + \dfrac{\partial V}{\partial h}\cdot dh \Rightarrow dV = V_r'\cdot dr + V_h'\cdot dh$

$$dV = 2\pi\cdot r h\cdot 0{,}1 + \pi r^2\cdot 0{,}1$$

$$dV = 2\pi\cdot 4\cdot 12\cdot 0{,}1 + \pi\cdot 4^2\cdot 0{,}1 \Rightarrow \boxed{dV = 11{,}2\pi \ cm^3.}$$

Questão 2

$z = f(x,y)$ $\quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = ?$ $\quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$ $\quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cdot(-\operatorname{sen}\theta) = -r\operatorname{sen}\theta$

$x = r\cdot\cos\theta$

$y = r\cdot\operatorname{sen}\theta$ $\quad \frac{\partial z}{\partial r} = ?$ $\quad \frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta$ $\quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cdot\cos\theta$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot(r\cdot\cos\theta)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)\right)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos\theta\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta +$$

$$+ \frac{1}{\cancel{r^2}}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cdot(\cancel{r^2}\operatorname{sen}^2\theta) + 2\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot(-\cancel{r}\operatorname{sen}\theta)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot(\cancel{r}\cos\theta) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cdot(\cancel{r^2}\cos^2\theta)\right.$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cdot\cos^2\theta + \cancel{2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta - \cancel{2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cdot\cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cdot\underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{1} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cdot\underbrace{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}_{1}$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

cqd.

Questão 3

(a) $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$

Para encontrarmos a taxa de variação de $V(x,y,z)$ no ponto $P=(3,4,5)$ na direção de $v=(1,1,-1)$ devemos encontrar a derivada direcional de $V(x,y,z)$.

$D_v V(x,y,z) = \nabla V(x,y,z) \cdot v$

Como v já é um vetor unitário não precisamos normalizá-lo. Nos preocupamos então em achar $\nabla V(x,y,z)$

$\nabla V(x,y,t) = (V_x', V_y', V_z')$

$V_x = 10x - 3y + yz$

$V_y = -3x + xz$ no ponto $\Rightarrow$ $V_x = 10.3 - 3.4 + 4.5 = 38$

$V_z = xy$ $P=(3,4,5)$ $V_y = -3.3 + 3.5 = 6$

$V_z = 3.4 = 12$

Assim: $\nabla V(3,4,5) = (38, 6, 12)$ faltou unitarizar ⊖

$D_v V(3,4,5) = (38,6,12) \cdot (1,1,-1) = 38+6-12 = 32$

Assim, a taxa de variação do potencial V no ponto P na direção de v era 32.

(b) Em P, V varia mais rapidamente quando v está na mesma direção e sentido de $\nabla V(x,y,z)$, já que

$D_v V(x,y,z) = \nabla V(x,y,z) \cdot v = |\nabla V(x,y,z)| \cdot |v| \cdot \cos\theta$

Para que $D_v V(x,y,z)$ seja máxima $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0°$

o que prova o que foi dito anteriormente. Então, como $\nabla V(x,y,z) = (38,6,12)$ em P, a direção que V varia mais rápido é a $(38,6,12)$.

(c) para efetuar o cálculo de $D_u V(3,4,5)$, normalizemos o vetor $v = (38, 6, 12)$ $u = \dfrac{(38, 6, 12)}{\sqrt{38^2 + 6^2 + 12^2}}$

mas como u é vetor unitário, encontremos $D_u V(3,4,5)$ da seguinte maneira:

$D_u V(3,4,5) = |\nabla V(38,6,12)| \cdot |u| \cdot \cos\theta$, como $|u| = 1$ e $\cos\theta = 1$ temos que

$D_u V(3,4,5) = |\nabla V(38,6,12)| = \sqrt{38^2 + 6^2 + 12^2} = \sqrt{1624}$

Questão 4

$V = x \cdot y \cdot z$, com a restrição que $x^2 + y^2 + z^2 = L$

Pelo método do multiplicador de Lagrange encontramos o maior volume possível com a restrição dada.

$\nabla V(x,y,z) = (V_x, V_y, V_z)$

$V_x = y \cdot z \quad V_y = xz \quad V_z = xy \Rightarrow \nabla V(x,y,z) = (yz, xz, xy)$

Chamemos $W = x^2 + y^2 + z^2$

$\nabla W(x,y,z) = (W_x, W_y, W_z)$

$W_x = 2x \quad W_y = 2y \quad W_z = 2z \Rightarrow \nabla W(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

Por Lagrange:

$\nabla V(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla W(x,y,z)$

$(yz, xz, xy) = \lambda \cdot (2x, 2y, 2z)$

$$\begin{cases} yz = \lambda \cdot 2x \\ xz = \lambda \cdot 2y \\ xy = \lambda \cdot 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = L^2 \end{cases}$$

supondo que x, y, z são valores maiores do que zero, podemos escrever:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{yz}{2x} \\ \lambda = \frac{xz}{2y} \\ \lambda = \frac{xy}{2z} \\ x^2 + y^2 + z^2 = L \end{cases}$$

igualando as 3 primeiras equações temos:

$\lambda = \frac{yz}{2x} = \frac{xz}{2y} = \frac{xy}{2z} \Rightarrow \frac{y\cancel{z}}{\cancel{2}x} = \frac{x\cancel{z}}{\cancel{2}y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = x$

na verdade y poderia ser $\pm x$, mas como estamos trabalhando com medidas x, y, z só podem ser positivos.

$\frac{\cancel{x}z}{\cancel{2}y} = \frac{\cancel{x}y}{\cancel{2}z} \Rightarrow z^2 = y^2 \Rightarrow z = y$. assim: $\boxed{x = y = z}$

$x^2 + y^2 + z^2 = L^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + x^2 = L^2 \Rightarrow 3x^2 = L^2 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}} =$

$$V = x \cdot y \cdot z = x^3 = \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{L^3}{\sqrt{27}} = \frac{L^3}{3\sqrt{3}}$$

$$\boxed{V = \frac{L^3}{3\sqrt{3}} \text{ unidades de volume.}}$$