ME-210 Probabilidade I

Lista 3

1. Suponha que a probabilidade de viver 70 ou mais anos é 0.6 e que a probabilidade de viver 80 ou mais anos é 0.2. Se uma pessoa faz 70 anos, qual é a probabilidade de que comemore o aniversario número 80?

2. Suponha que se testam os chips para um circuito integrado e que a probabilidade de que sejam declarados com falhas quando efectivamente as tem é 0.95, sendo que a probabilidade de que sejam declarados em bom estado se efectivamente estão em bom estado é 0.97. Se 0.5% dos chips apresentam falhas, qual é a probabilidade de que um chip que foi declarado com falhas seja bom?

3. Considere uma urna com 3 bolas brancas e 7 bolas vermelhas. Duas bolas são retiradas da urna uma depois da outra sem repor a primeira delas na urna antes da retirada da segunda. Assuma a seguinte notação: B_1V_2 representando que foi retirada uma bola branca na primeira retirada e uma bola vermelha na segunda. Calcule as seguintes probabilidades

$$P(B_1B_2),\ P(V_1B_2),\ P(B_1V_2),\ P(V_1V_2).$$

Considere que se faz mais uma extração de bolas da urna, recolocando na urna a segunda bola extraída anteriormente e calcule $P(B_1V_2B_3)$, onde $B_1V_2B_3$ representa que foi extraída branca na primeira, vermelha na sengunda e branca na terceira. Calcule

$$P(B_1B_2B_3),\ P(B_1B_2V_3),\ P(V_1B_2B_3).$$

4. Considere duas urnas, a urna A e a urna B. Urna A contém 4 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 2 bolas verdes. Urna B contém 2 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 4 bolas verdes. Uma bola é extraída da urna A e colocada na urna B, depois uma bola é extraída da urna B.
(a) Qual é a probabilidade de que uma bola extraída desde a urna B seja vermelha?
(b) Se uma bola vermelha é extraída da urna B, qual é a probabilidade de que uma bola vermelha tenha sido extraída da urna A?

5. Demonstre as seguintes afirmações:
(a)Se $P(A) = 0$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes;
(b)Se $P(A) = 1$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes;
(c)Os eventos D e D^c são independentes se e somente se $P(D) = 0$ ou $P(D) = 1$;
(d)Ache uma condição para que o evento E seja independente dele mesmo.

6. Genes relacionados ao albinismo são denotados por A e a. Somente as pessoas que recebem o gene a do pai e da mãe serão albinos. Pessoas carregando o par (A, a) ou (a, A) serão normais na aparência mas, como eles podem passar a característica para seus descendentes, são chamados portadores. Suponha que um casal normal em aparência tenha duas crianças, exatamente uma das quais

albina. Suponha que o filho não albino case-se com uma pessoa que sabe-se ser portadora de albinismo.
(a) Qual é a probabilidade de que seu primeiro finho seja albino?
(b) Qual é a probabilidade condicional de que seu segundo filho seja albino dado que o primeiro não é?

7. Para estimar a proporção de idosos numa cidade com 100.000 habitantes, o seguinte método é proposto. Durante alguns dias, ande pelas ruas e anote a proporção de idosos entre pessoas encontradas. Comente este método.
Dica: Seja p a proporção de idosos na cidade. Sejam α_1 a proporção de tempo que um idoso passa fora de casa, e α_2 a proporção de tempo que uma pessoa "jovem" (não idosa) passa fora de casa. O que o método proposto estima? Quando essa quantia é próxima a p?

8. Pedro, José e Marcelo estão praticando tiro ao alvo. Suponha que Pedro acerta o alvo com probabilidade 1/2, José com probabilidade 1/3 e Marcelo com probabilidade 1/4. Eles atiram no mesmo momento para o mesmo alvo. Qual é a probabilidade de que o alvo seja atingido? Se o alvo foi atingido, qual é a probabilidade condicional que que Pedro acertou? Que suposição você precisa fazer para resolver este problema?

9. Se $\mathbf{P}(B) > 0$, mostre que $\mathbf{P}(A \cap B \mid B) \geq \mathbf{P}(A \cap B \mid A \cup B)$.

ME-210: Resolução da Lista 03

Resolução extra-oficial feita por um dos monitores.

Questão 1:

Sejam A e B os eventos viver 70 ou mais anos e viver 80 ou mais anos, respectivamente. Queremos saber o valor da probabilidade condicional $P(B|A)$. Sabemos que

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$$

Substituindo os valores

$$P(B|A) = \frac{0,2}{0,6} \Rightarrow P(B|A) = \frac{1}{3}$$

Questão 2:

Sejam A o evento em que foi detectada uma falha no chip e B o evento em que o chip não apresenta falha. Queremos determinar o valor da probabilidade condicional $P(B|A)$. Pela Fórmula de Bayes, temos

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

Utilizando os dados do enunciado, obtemos

$$P(A|B^c) = 0,95 \qquad P(A|B) = 1 - P(A^c|B) = 1 - 0,97 = 0,03 \qquad P(B^c) = 0,005$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0,005 = 0,995$$

Substituindo esses valores na expressão de $P(B|A)$, temos que

$$P(B|A) = \frac{0,03 \times 0,995}{0,03 \times 0,995 + 0,95 \times 0,005} \Rightarrow P(B|A) \cong 0,8627$$

Questão 3:

Para o cálculo de todas as probabilidades desejadas, vamos usar a regra da multiplicação.

Para o caso em que retiramos duas bolas da urna sem reposição, temos

$$P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \Rightarrow P(B_1B_2) = \frac{1}{15}$$

$$P(V_1B_2) = P(V_1)P(B_2|V_1) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \Rightarrow P(V_1B_2) = \frac{7}{30}$$

$$P(B_1V_2) = P(B_1)P(V_2|B_1) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \Rightarrow P(B_1V_2) = \frac{7}{30}$$

$$P(V_1V_2) = P(V_1)P(V_2|V_1) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \Rightarrow P(V_1V_2) = \frac{7}{15}$$

Podemos verificar que, como era de se esperar, as somas das probabilidades calculadas é 1.

Para o caso em que fazemos uma terceira retirada, repondo a bola da segunda extração, vamos utilizar os resultados anteriores.

$$P(B_1V_2B_3) = P(B_1V_2)P(B_3|B_1V_2) = \frac{7}{30} \times \frac{2}{9} \Rightarrow P(B_1V_2B_3) = \frac{7}{135}$$

$$P(B_1B_2B_3) = P(B_1B_2)P(B_3|B_1B_2) = \frac{1}{15} \times \frac{2}{9} \Rightarrow P(B_1B_2B_3) = \frac{2}{135}$$

$$P(B_1B_2V_3) = P(B_1B_2)P(V_3|B_1B_2) = \frac{1}{15} \times \frac{7}{9} \Rightarrow P(B_1B_2V_3) = \frac{7}{135}$$

$$P(V_1B_2B_3) = P(V_1B_2)P(B_3|V_1B_2) = \frac{7}{30} \times \frac{3}{9} \Rightarrow P(V_1B_2B_3) = \frac{7}{90}$$

Questão 4:

Sejam A_V o evento em que a bola extraída da urna A é vermelha e B_V o evento em que a bola extraída da urna B é vermelha.

a. Queremos calcular $P(B_V)$. Para isso, vamos utilizar a Fórmula da Probabilidade Total

$$P(B_V) = P(B_V|A_V)P(A_V) + P(B_V|A_V^c)P(A_V^c)$$

Logo

$$P(B_V) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{5}{9} \Rightarrow P(B_V) = \frac{11}{45}$$

b. Queremos calcular a probabilidade condicional $P(A_V|B_V)$. Para isso, vamos utilizar a Fórmula de Bayes

$$P(A_V|B_V) = \frac{P(B_V|A_V)P(A_V)}{P(B_V)}$$

Logo

$$P(A_V|B_V) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{11}{45}} \Rightarrow P(A_V|B_V) = \frac{6}{11}$$

Questão 5:

Dois eventos E e F são chamados de independentes se eles satisfazem a relação

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

a. Para quaisquer eventos A e B, podemos escrever que

$$A \cap B \subset A$$

O que implica

$$P(A \cap B) \leq P(A)$$

Mas $P(A) = 0$, então

$$P(A \cap B) \leq 0$$

Como a probabilidade de um evento qualquer está contida no intervalo $[0, 1]$, temos

$$P(A \cap B) = 0$$

Como $P(A)P(B) = 0 \times P(B) = 0$, concluímos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, o que mostra que os eventos são independentes.

b. Para quaisquer eventos A e B, podemos escrever que

$$A \subset A \cup B$$

O que implica

$$P(A) \leq P(A \cup B)$$

Mas como $P(A) = 1$ e a probabilidade de um evento qualquer está contida no intervalo $[0, 1]$, temos que

$$1 \leq P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 1$$

Também sabemos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Já que $P(A) = 1$, a relação fica

$$1 = 1 + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$$

Mais uma vez usando o fato de que $P(A) = 1$, podemos escrever que

$$P(A \cap B) = 1 \times P(B) = P(A)P(B)$$

o que mostra que os eventos são independentes.

c. $(\Rightarrow)$ Se D e D^c são independentes, temos

$$P(D \cap D^c) = P(D)P(D^c) \Rightarrow 0 = P(D)P(D^c)$$

Como $P(D^c) = 1 - P(D)$, obtemos

$$0 = P(D) - P(D)^2$$

ou seja, $P(D) = 0$ ou $P(D) = 1$.

$(\Leftarrow)$ Se $P(D) = 0$ ou $P(D) = 1$, teremos $P(D^c) = 1$ ou $P(D^c) = 0$, respectivamente. Em ambos os casos, $P(D)P(D^c) = 0 = P(D \cap D^c)$, o que implica que D e D^c são independentes.

d. Para que o evento E seja independente dele próprio, devemos ter

$$P(E \cap E) = P(E)P(E) \Rightarrow P(E) = P(E)^2$$

Assim, devemos ter $P(E) = 0$ ou $P(E) = 1$.

Questão 6:

a. Para calcular a probabilidade desejada, vamos usar a Fórmula da Probabilidade Total

$$P(1^{\text{o}} \text{ filho aa}) = P(1^{\text{o}} \text{ filho aa}|\text{pai aA})P(\text{pai aA}) + P(1^{\text{o}} \text{ filho aa}|\text{pai AA})P(\text{pai AA})$$

Como $P(1^{\text{o}} \text{ filho aa}|\text{pai AA}) = 0$ (já que, neste caso, o filho não tem como receber um gene a do pai), $P(1^{\text{o}} \text{ filho aa}|\text{pai aA}) = \frac{1}{4}$ e $P(\text{pai aA}) = \frac{2}{3}$ (pois os pais do pai da criança são Aa e sabemos que o pai tem um gene A, ou seja, não pode ser aa), temos

$$P(1^{\text{o}} \text{ filho aa}) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \Rightarrow P(1^{\text{o}} \text{ filho aa}) = \frac{1}{6}$$

b. Para calcular a probabilidade desejada, vamos usar a Fórmula de Bayes

$$P(2^{\text{o}} \text{ filho aa}|1^{\text{o}} \text{ filho não é albino}) = \frac{P(1^{\text{o}} \text{ filho não é albino}|2^{\text{o}} \text{ filho aa})P(2^{\text{o}} \text{ filho aa})}{P(1^{\text{o}} \text{ filho não é albino})}$$

Além disso, sabemos que

$$P(1^{\text{o}} \text{ filho não é albino}) = 1 - P(1^{\text{o}} \text{ filho é albino}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

e

$$P(1^{\text{o}} \text{ filho não é albino}|2^{\text{o}} \text{ filho aa}) = \frac{3}{4}$$

pois, neste caso, os pais são ambos Aa e queremos que o 1^{o} filho seja AA, Aa ou aA. E ainda

$$P(2^{\text{o}} \text{ filho aa}) = P(1^{\text{o}} \text{ filho aa}) = \frac{1}{6}$$

Substituindo os valores na expressão da probabilidade desejada, temos

$$P(2^{\text{o}} \text{ filho aa}|1^{\text{o}} \text{ filho não é albino}) = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} \Rightarrow P(2^{\text{o}} \text{ filho aa}|1^{\text{o}} \text{ filho não é albino}) = \frac{3}{20}$$

Questão 7:

O método proposto estima a probabilidade de encontrar um idoso na rua, ou seja, a probabilidade de um indivíduo ser idoso dado que está na rua ($P(\text{ser idoso}|\text{está na rua})$).

Sendo α_1 e α_2 as proporções de tempo que, respectivamente, idosos e jovens passam na rua, e p a proporção real de idosos na cidade, temos que

$$P(\text{ser idoso}|\text{está na rua}) = \frac{P(\text{estar na rua}|\text{é idoso})P(\text{é idoso})}{P(\text{estar na rua})} = \frac{\alpha_1 p}{P(\text{estar na rua})}$$

Usando a Fórmula da Probabilidade Total, obtemos

$$P(\text{estar na rua}) = P(\text{estar na rua}|\text{é idoso})P(\text{é idoso}) + P(\text{estar na rua}|\text{é jovem})P(\text{é jovem})$$

$$P(\text{estar na rua}) = \alpha_1 p + \alpha_2(1-p)$$

Juntando tudo, temos

$$P(\text{ser idoso}|\text{está na rua}) = \frac{\alpha_1 p}{\alpha_1 p + \alpha_2(1-p)}$$

Esta é a proporção observada de idosos que o método estima. Vemos que, em geral, ela é diferente da proporção p real de idosos. Para que elas sejam iguais, devemos ter $\alpha_1 = \alpha_2$, ou seja, jovens e idosos devem passar a mesma proporção de tempo fora de casa.

Questão 8:

Sejam P, J e M, respectivamente, os eventos em que Pedro acerta o alvo, José acerta o alvo e Marcelo acerta o alvo. Do enunciado, sabemos que

$$P(P) = \frac{1}{2} \qquad P(J) = \frac{1}{3} \qquad P(M) = \frac{1}{4}$$

A suposição que faremos para resolver este problema é a de que os tiros dos praticantes são independentes, ou seja, que o tiro de um deles não afeta o tiro de outro.

A probabilidade de que o alvo seja atingido é dada por

$$P(P \cup J \cup M)$$

Pela Identidade da Inclusão-Exclusão, sabemos que

$$P(P \cup J \cup M) = P(P) + P(J) + P(M) - P(P \cap J) - P(P \cap M) - P(J \cap M) + P(P \cap J \cap M)$$

Já que supusemos que os tiros são independentes, a Regra da Multiplicação nos fornece

$$P(P \cap J \cap M) = P(P)P(J)P(M) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$P(P \cap J) = P(P)P(J) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{4}{24}$$

$$P(P \cap M) = P(P)P(M) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \frac{3}{24}$$

$$P(J \cap M) = P(J)P(M) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \frac{2}{24}$$

Logo

$$P(P \cup J \cup M) = \frac{12+8+6-4-3-2+1}{24} \Rightarrow P(P \cup J \cup M) = \frac{3}{4}$$

A probabilidade condicional de que Pedro acertou o alvo dado que ele foi atingido é dada por

$$P(P|P \cup J \cup M) = \frac{P(P \cap (P \cup J \cup M))}{P(P \cup J \cup M)} = \frac{P(P)}{P(P \cup J \cup M)}$$

Substituindo os valores

$$P(P|P \cup J \cup M) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow P(P|P \cup J \cup M) = \frac{2}{3}$$

Questão 9:

Temos

$$P(A \cap B \mid B) = \frac{P((A \cap B) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

e

$$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}.$$

Como $P(B) \leq P(A \cup B)$, segue $P(A \cap B \mid B) \geq P(A \cap B \mid A \cup B)$.