Terceira Prova de MA311, Turma A

Prof. Sergio Antonio Tozoni

25/06/2010

RA: **Nome:** GABARITO

Questão 1 (a) (1,0 ponto) Determine a região de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x+1)^{3n}.$$

(b) (1,5 pontos) Calcule a integral $\int_0^{1/2} \ln(1+x^2)dx$, com erro inferior a 10^{-5}.

Questão 2 (2,5 pontos) **(a)** Mostre que $x=0$ é um ponto singular da equação

$$x^2y'' - x(x+3)y' + (x+3)y = 0. \tag{1}$$

(b) Encontre a solução por série da equação (1) na forma

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x > 0,$$

com r sendo a **maior raiz da equação indicial** associada à equação (1). Encontre a expressão do **termo geral** desta solução.

(c) Determine o **raio mínimo de convergência** da série da solução encontrada em (b). Justifique.

Questão 3 (2,5 pontos) **(a)** Determine a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período $T = 4$ e definida no intervalo $(-2, 2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x \leq -1, \\ -1 & -1 < x \leq 0, \\ 0 & 0 < x \leq 1, \\ 1 & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(b) Determine a função $g(x)$ que é a soma da série de Fourier de $f(x)$ e faça o esboço do gráfico de $g(x)$ no intervalo $(-2, 2]$. Justifique.

(c) Calcule a soma da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Justifique.

Questão 4 (2,5 pontos) Usando separação de variáveis, encontrar a solução da seguinte equação do calor:

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_t, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 3\cos x + \operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 3x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Explique detalhadamente como se resolve o problema.

1) (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x+1)^{3n}$, $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}(x+1)^{3n}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{n+1}\,|x+1|^{3n+3}}{(n+1)^2}\;\frac{n^2}{2^n\,|x+1|^{3n}} = 2|x+1|^3\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|x+1|^3 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2 = 2|x+1|^3$$

$L < 1 \iff |x+1|^3 < 1/\sqrt[3]{2} \implies r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ é o raio de convergência

0,8

$x = -1 + 1/\sqrt[3]{2}$: $(x+1)^{3n} = \dfrac{1}{2^n}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}(x+1)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge absolutamente pelo critério da integral

$x = -1 - 1/\sqrt[3]{2}$: $(x+1)^{3n} = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}(x+1)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolutamente e portanto converge

$R = \left[-1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\,,\,-1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ é a região de convergência da série dada

0,7

1(b): Usando a soma da série geométrica obtemos,

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m t^m, \quad |t|<1.$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{m+1}}{m+1}\Bigg|_{t=0}^{t=x}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{m+1}}{m+1}, \quad |x|<1.$$

0,5

$$\ln(1+t^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+2}}{m+1}, \quad x=t^2, \quad |t|<1.$$

$$\int_0^{1/2} \ln(1+t^2)\,dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+3}}{(m+1)(2m+3)}\Bigg|_{t=0}^{t=1/2}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \underbrace{\frac{1}{(m+1)(2m+3)\,2^{2m+3}}}_{a_m}$$

0,5

$$a_{N+1} = \frac{1}{(N+2)(2N+5)\,2^{2N+5}} < 10^{-5} \iff (N+2)(2N+5)\,2^{2N+5} > 10^5$$

$\underline{N=2}$: $4\cdot 9\cdot 2^9 = 36\cdot 512 = 18.432 < 10^5$

$\underline{N=3}$: $5\cdot 11\cdot 2^{11} = 55\cdot 2048 = 112.640 > 10^5$

$$S_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = \sum_{m=0}^{3} \frac{(-1)^m}{(m+1)(2m+3)\,2^{2m+3}}$$

$$\left| \int_0^{1/2} \ln(1+t^2)\,dt - S_3 \right| < 10^{-5}$$ (CRITÉRIO PARA SÉRIES ALTERNADAS)

0,5

2) $\quad x^2 y'' - x(x+3)y' + (x+3)y = 0$

(a) $P(x) = x^2$, $Q(x) = -x(x+3)$, $R(x) = x+3$

$$p_0 = \lim_{x\to 0} \frac{Q(x)}{P(x)} x = \lim_{x\to 0} -\frac{x(x+3)}{x^2} x = \lim_{x\to 0} -x-3 = -3$$

$$q_0 = \lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{P(x)} . x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{x+3}{x^2} x^2 = \lim_{x\to 0} x+3 = 3$$

Como $P(0)=0$ e os limites acima existem e são finitos, segue que $x=0$ é um ponto singular regular da equação dada.

0,3

(b) $\quad 0 = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) - 3r + 3$ (equação indicial)

$0 = r^2 - 4r + 3$, $\Delta = 4$, $r_1 = 3$ e $r_2 = 1$ são as raízes

0,2

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \quad , \quad y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2}$$

$$0 = x^2 y'' - x^2 y' - 3xy' + xy + 3y$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r+1}$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} 3(m+r) a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+1} + \sum_{m=0}^{\infty} 3 a_m x^{m+r}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r} - \sum_{m=1}^{\infty} (m+r-1) a_{m-1} x^{m+r}$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} 3(m+r) a_m x^{m+r} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} 3 a_m x^{m+r}$$

$$= a_0 x^r \left[r(r-1) - 3r + 3 \right]$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \Big\{ \left[(m+r)(m+r-1) - 3(m+r) + 3 \right] a_m - \left[(m+r-1) - 1 \right] a_{m-1} \Big\} x^{m+r}$$

Então

$0 = r(r-1) - 3r + 3$ (equação indicial) pois $a_0 \neq 0$, e

0,5

$$a_m = \frac{m+r-2}{(m+r)(m+r-4)+3}\, a_{m-1}, \quad m \geqslant 1.$$

$$r = 3 \implies \boxed{a_m = \frac{m+1}{m(m+2)}, \quad m \geqslant 1}$$ (Relação de Recorrência)

0,2

$$a_1 = \frac{2}{1 \cdot 3} a_0$$

$$a_2 = \frac{3}{2 \cdot 4} a_1 = \frac{2 \cdot \cancel{3}}{(1\cdot 2)(\cancel{3}\cdot 4)} a_0 = \frac{2}{2! \cdot 4} a_0$$

$$a_3 = \frac{4}{3 \cdot 5} a_2 = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}}{(1\cdot 2 \cdot 3)(\cancel{3}\cdot \cancel{4} \cdot 5)} a_0 = \frac{2}{3!\, 5} a_0$$

$$a_4 = \frac{5}{4 \cdot 6} a_3 = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}}{(1\cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)(\cancel{3}\cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot 6)} a_0 = \frac{2}{4!\, 6} a_0$$

0,2

$$\boxed{a_m = \frac{2}{m!\,(m+2)} a_0, \quad m \geqslant 1}$$

$$a_m = \frac{2(m+1)}{(m+2)!} a_0 = \frac{2\,[(m+1)!]}{m! \cdot (m+2)!} a_0$$

0,5

Tomando $a_0 = 1$, obtemos

$$y = x^3 \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\, x^m}{m!\,(m+2)} \right)$$

0,3

---

c) ρ_1 = raio de convergência da série de $\frac{Q(x)}{P(x)} x = -x+3$

$= +\infty$ (pois é um polinômio)

ρ_2 = raio de convergência da série de $\frac{R(x)}{P(x)} = x+3$

$= +\infty$ (raio da série de um polinômio)

$$\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} = \min\{+\infty, +\infty\} = +\infty.$$

= raio mínimo de convergência da série da solução em (b).

0,3

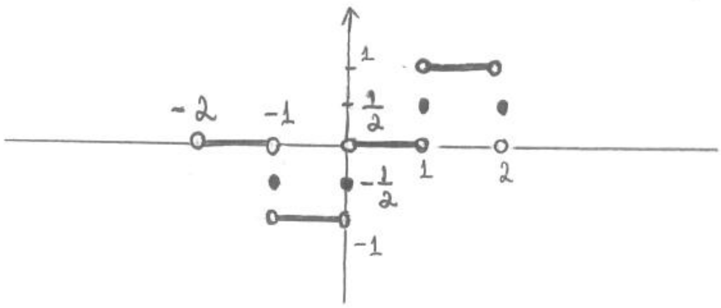
3(b): $g(x) = f(x) \ \forall\, x \in (-2,2],\ x \neq -1, 0, 1, 2$

$$g(-1) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -1_+} g(x) + \lim_{x \to -1_-} g(x)\right) = \frac{1}{2}(-1+0) = -\frac{1}{2}$$

$$g(0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0_+} g(x) + \lim_{x \to 0_-} g(x)\right) = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$$

$$g(1) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 1+} g(x) + \lim_{x \to 1-} g(x)\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$

$$g(2) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 2+} g(x) + \lim_{x \to 2-} g(x)\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$



0,5

3(c): Para $x = 0$ temos que a série de Fourier tem soma $g(0)$, isto é:

$$-\frac{1}{2} = g(0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{(2m+1)\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

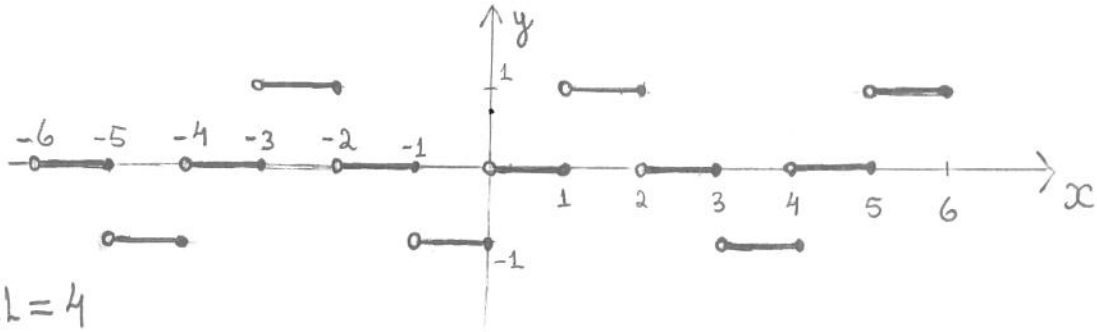
e assim

$$\frac{\pi}{4} - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

0,5

3 (a):

gráfico de $f(x)$



$L = 2, \; T = 2L = 4$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$m \geq 1$

$$a_m = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{2}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{2}{m\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\frac{2}{m\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\Big|_{1}^{2}$$

0,4 $$= -\frac{2}{m\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)$$

0,2 $$\begin{cases} a_{2m} = 0, \; \forall m \geq 1, \\ a_{2m+1} = -\dfrac{2}{(2m+1)\pi}\operatorname{sen}\left(m\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2(-1)^{m+1}}{(2m+1)\pi}, \; \forall m \geq 0. \end{cases}$$

$m \geq 1$

$$b_m = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{2}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\Big|_{1}^{2}$$

0,4 $$= \frac{1}{m\pi}\left(1 - \cancel{\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)}\right) - \frac{1}{m\pi}\left(\cos m\pi - \cancel{\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)}\right) = \frac{1}{m\pi}\left(1 - \cos m\pi\right)$$

0,2 $b_{2m} = 0, \; \forall m \geq 1; \quad b_{2m+1} = \dfrac{2}{(2m+1)\pi}, \; \forall m \geq 0.$

SÉRIE DE FOURIER:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)\pi}\left((-1)^{m+1}\cos\left[\frac{(2m+1)\pi x}{2}\right] + \operatorname{sen}\left[\frac{(2m+1)\pi x}{2}\right]\right)$$

0,3

4) (1) $4u_{xx} = u_t$, (2) $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$, $\forall t > 0$

(3) $u(x,0) = f(x) = 3\cos x + \operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 3x$

Suponhamos que existam funções $X(x)$ e $T(t)$ tal que

(4) $u(x,t) = X(x)T(t)$, $\forall x,t$

$(1) \Rightarrow 4X''T = XT' \Rightarrow \dfrac{X''}{X} = \dfrac{T'}{4T} = -\sigma$ (constante)

$\Rightarrow \begin{cases} (5)\ X'' + \sigma X = 0 \\ (6)\ T' + 4\sigma T = 0 \end{cases}$ (equações diferenciais ordinárias)

0,3

$(2) \Rightarrow \begin{cases} 0 = X'(0)T(t) , \forall t > 0 \\ 0 = X'(\pi)T(t) , \forall t > 0 \end{cases}$

(*) $T(t) = 0\ \forall t > 0 \Rightarrow u(x,t) = 0\ \forall x,t \Rightarrow f = 0$ (absurdo) e logo

(7) $X'(0) = X'(\pi) = 0$

0,2

$\underline{\sigma = 0}$: (5) $X'' = 0 \Rightarrow X = k_1 x + k_2 \Rightarrow X' = k_1$

$(7) \Rightarrow \begin{cases} 0 = X'(0) = k_1 \\ 0 = X'(\pi) = k_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{X = k_2}$

(6) $T' = 0 \Rightarrow T = c_1$ $\qquad u(x,t) = k_2 \cdot c_1$

Seja $\boxed{u_0(x,t) = 1}$ (solução de (1) satisfazendo (2))

0,2

$\underline{\sigma < 0}$: $\sigma = -\lambda^2, \lambda > 0$, (5) $X'' - \lambda^2 X = 0$

(5) $X = k_1 e^{\lambda x} + k_2 e^{-\lambda x}$, $X' = k_1\lambda e^{\lambda x} - k_2 \lambda e^{-\lambda x}$

$(7) \Rightarrow \begin{cases} 0 = X'(0) = k_1\lambda - k_2\lambda \\ 0 = X'(\pi) = k_1\lambda e^{\lambda\pi} - k_2\lambda e^{-\lambda\pi} \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$

$X = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0\ \forall x,t \Rightarrow f = 0$ (absurdo)

0,2

$\underline{\underline{\sigma > 0}}$: $\sigma = \lambda^2$, $\lambda > 0$; (5) $X'' + \lambda^2 X = 0$

$X = k_1 \cos \lambda x + k_2 \operatorname{sen} \lambda x \Rightarrow X' = -k_1 \lambda \operatorname{sen} \lambda x + k_2 \lambda \cos \lambda x$

$$(7) \Rightarrow \begin{cases} 0 = X'(0) = k_2 \lambda \Rightarrow k_2 = 0 \\ 0 = X'(\pi) = -k_1 \lambda \operatorname{sen} \lambda \pi = 0 \quad (k_1 \neq 0) \end{cases}$$

$\Rightarrow X = k_1 \cos \lambda x$ e $\operatorname{sen} \lambda \pi = 0$

$\operatorname{sen} \lambda \pi = 0 \Rightarrow \lambda \pi = m\pi \Rightarrow \lambda = m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$

0,4

$X_m(x) = \cos mx$ é solução de (5), $\forall m \geq 1$ $(\sigma = m^2)$

(6) $T' + 4m^2 T = 0 \Rightarrow T = c_1 e^{-4m^2 t}$

$T_m(t) = e^{-4m^2 t}$ é solução de (6), $\forall m \geq 1$

$u_m(x,t) = X_m(x) \cdot T_m(t) = \cos(mx)\, e^{-4m^2 t}$ é solução de (1) satisfazendo (2)

Se (c_m) é uma sequência limitada, então

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos(mx)\, e^{-4m^2 t}$$

é uma solução de (1) que satisfaz (2).

0,4

$$u(x,0) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos mx = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots$$

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x) &= 3\cos x + \operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 3x \\ &= 3\cos x + \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) - (1 + \cos 6x) = \\ &= -\tfrac{1}{2} + 3\cos x - \tfrac{1}{2}\cos 2x - \cos 6x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_0 = -\frac{1}{2},\ c_1 = 3 \\ c_2 = -\frac{1}{2},\ c_3 = c_4 = c_5 = 0 \\ c_6 = -1,\ c_m = 0,\ m \geq 7 \end{cases}$$

0,4

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\tfrac{1}{2} + 3\cos x\, e^{-4t} - \tfrac{1}{2}\cos 2x\, e^{-4\cdot 2^2 t} - \cos 6x\, e^{-4\cdot 6^2 t} \\ &= -\tfrac{1}{2} + 3\cos x\, e^{-4t} - \tfrac{1}{2}\cos 2x\, e^{-16t} - \cos 6x\, e^{-144t} \end{aligned}$$

0,4