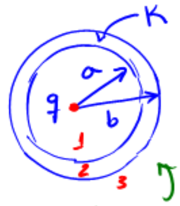
F 502 A - Eletromagnetismo I - 2º Teste – 12/05/2009

Nome:____**RA:**_______

São dadas uma casca dielétrica esférica (raio interno *a*, raio externo *b*, constante dielétrica *K*) e uma carga puntual *q*, inicialmente separadas por uma distância infinita. A carga puntual é, então, trazida para o centro da casca dielétrica. Calcule a variação da energia do sistema.



Situação final

$$\oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}\,da = q$$

S ← sup. gaussiana esférica de raio r, centrada em q

$$D\,4\pi r^2 = q \Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\varepsilon_i}$$

$$u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} \Longrightarrow u_i = \frac{D^2}{2\varepsilon_i} = \frac{q^2}{2(4\pi)^2\varepsilon_i r^4}$$

$$U_{final} = \int_V u\,dv = \int_0^a u_1\,dv + \int_a^b u_2\,dv + \int_b^\infty u_3\,dv =$$

$$= \frac{q^2}{2(4\pi)^{\cancel{2}}\varepsilon_0}\left\{\int_0^a \frac{\cancel{4\pi r^2}\,dr}{r^{\cancel{4}2}} + \frac{1}{K}\int_a^b \frac{\cancel{4\pi r^2}\,dr}{r^{\cancel{4}2}} + \int_b^\infty \frac{\cancel{4\pi r^2}\,dr}{r^{\cancel{4}2}}\right\} =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\int_0^a \frac{dr}{r^2} + \frac{1}{K}\int_a^b \frac{dr}{r^2} + \int_b^\infty \frac{dr}{r^2}\right\}$$

$$U_{inicial} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\int_0^a \frac{dr}{r^2} + \int_a^b \frac{dr}{r^2} + \int_b^\infty \frac{dr}{r^2}\right\}$$

$$-\frac{1}{r}\Big|_a^b$$

$$\Delta U = U_{final} - U_{inicial} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{1}{K} - 1\right]\int_a^b \frac{dr}{r^2}\right\}$$

$$\Delta U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(1-K)}{K}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\boxed{\Delta U = - \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(K-1)}{K}\frac{(b-a)}{ab}}$$