Gabarito: Exame de Resistência dos Materiais I – EM406

9 de Dezembro de 2008

__Questão 1__ **(4,0 pontos)**: A viga ilustrada pela Figura 1 é engastada na extremidade esquerda e apoiada na extremidade direita. Há uma rótula no ponto B, e um momento M_{ZC} aplicado na extremidade direita. Para esta viga, determine:

a) Os diagramas de esforço cortante e momento fletor;
b) O valor do momento fletor máximo, e onde ele ocorre;
c) A reação de apoio no vínculo C;
d) Este problema pode ser resolvido usando uma equação diferencial de segunda ordem ou mesmo o método das seções. Contudo, na teoria técnica temos trabalhado com equações diferenciais de quarta ordem para vigas. Qual a vantagem de usar essas equações de quarta ordem, uma vez que o problema fica mais difícil de resolver?

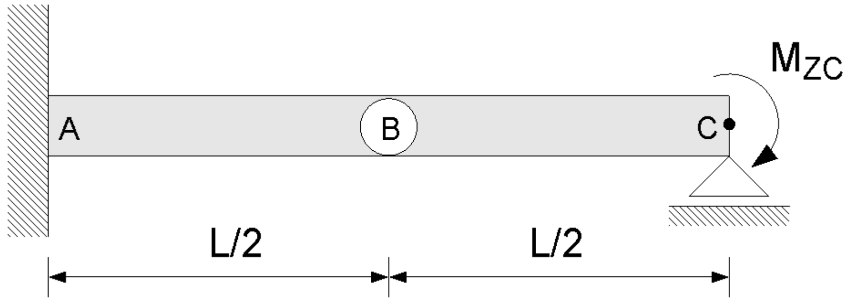
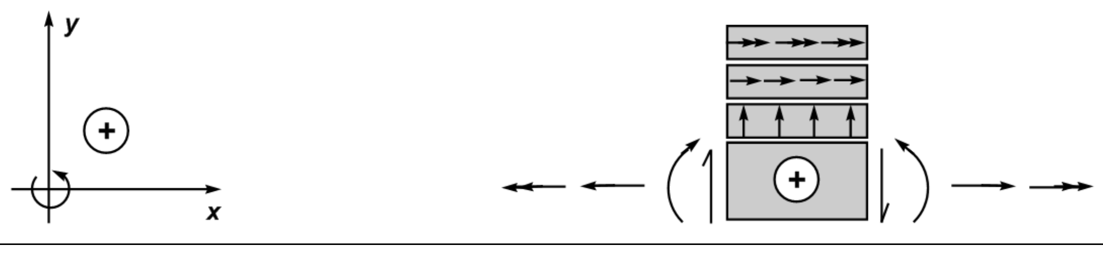


Figura 1: viga engastada-apoiada, com carregamento distribuído e momento na extremidade.

Solução

1) Eixos e convenções



2) Equação Diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2} M_Z(x) = q(x) \tag{1}$$

3) Equação de carregamento

$$q(x) = 0 \tag{2}$$

4) Condições de Contorno e restrição

Condições de contorno

$$M_Z(x = L) = -M_{ZC} \tag{3}$$

Equação de Restrição

$$M_Z(x = L/2) = 0 \quad \text{(rótula)} \tag{4}$$

5) Integração da equação diferencial

Substitui-se (2) em (1) para se obter

$$\frac{d^2}{dx^2} M_Z(x) = 0 \tag{5}$$

Integrando uma vez:

$$\frac{d}{dx} M_Z(x) = V_Y(x) = C_1 \tag{6}$$

Integrando novamente:

$$M_Z(x) = C_1 x + C_2 \tag{7}$$

6) Determinação das constantes de integração

Aplicando (4) em (7), tem-se:

$$M_Z(x = \tfrac{L}{2}) = C_1 \frac{L}{2} + C_2 = 0$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} C_1 L \tag{8}$$

Aplicando (3) e (8) em (7), tem-se:

$$M_Z(x = L) = C_1 L + C_2 = C_1 L + \left(-\frac{1}{2} C_1 L\right) = -M_{ZC}$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{2}{L} M_{ZC} \tag{9}$$

Assim, de (9) em (8), tem-se:

$$C_2 = -C_1 \frac{L}{2} = -\left(-\frac{2}{L} M_{ZC}\right)\frac{L}{2} = M_{ZC} \tag{10}$$

7) Equações finais

Substitui-se (9) e (10) em (6) e (7) para se obter as expressões finais de força cortante e momento fletor:

$$V_Y(x) = -\frac{2}{L} M_{ZC} \tag{11}$$

$$M_Z(x) = -\frac{2M_{ZC}}{L} x + M_{ZC} \tag{12}$$

8) Diagramas de esforço cortante

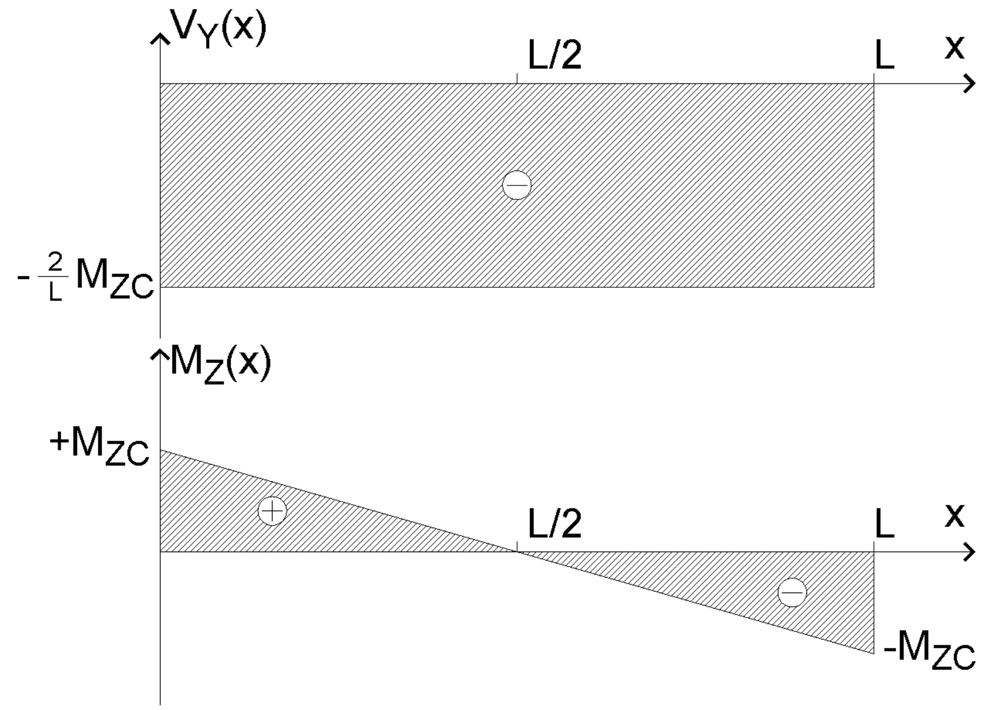


Figura 1.1: Diagramas de esforço cortante e momento fletor.

9) Análise

O momento fletor é máximo no engaste e no vínculo C, com valor M_{ZC}. A reação de apoio no vínculo C pode ser determinada tanto pela Equação 11 quanto pelo gráfico. O valor é $-2M_{ZC}/L$.
A vantagem de usar as equações de quarta ordem para vigas é que assim podemos também resolver problemas hiperestáticos. Esse problema só pôde ser resolvido pela Equação 1 porque trata-se de um problema isostático.

Gabarito: Exame de Resistência dos Materiais I – EM406

9 de Dezembro de 2008

__Questão 2__ **(2,5 pontos)**: Em aplicações comuns de engenharia, o ângulo de torção que os eixos sofrem são muito pequenos.

a) Se o eixo da Figura 2 tem 10 cm de diâmetro e é feito de aço, que comprimento deveria ter para que o ponto B torcesse uma volta inteira em relação ao ponto A?

b) Faça um esboço da distribuição de tensão para o ponto x=L/2, e indique o valor da tensão máxima.

Dados: M_X = 2000 N·m; $G_{AÇO}$ = 75 GPa.

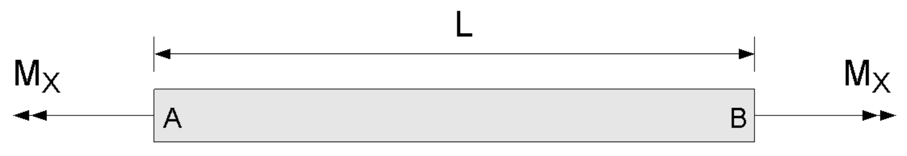


Figura 2: eixo de comprimento L, carregado nas extremidades por momentos M_X.

Solução

É preciso estabelecer uma das extremidades como referência para determinação de ângulos de torção. Assim, o problema pode ser modelado como na Figura 2.1.

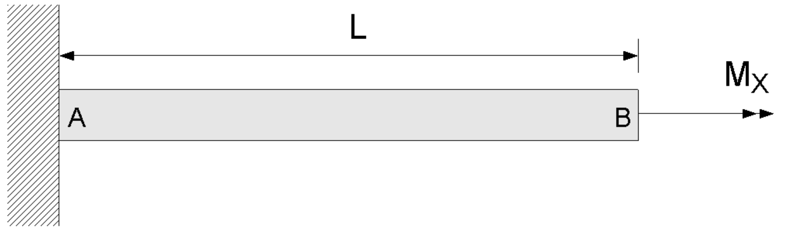
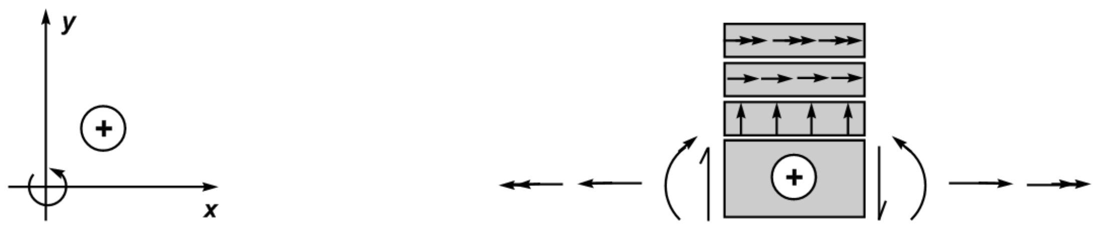


Figura 2.1: remodelagem o problema do eixo.

1) Eixos e convenções



2) Equação Diferencial

$$J_p G \frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = -t(x) \tag{1}$$

3) Equação de carregamento

$$t(x) = 0 \tag{2}$$

4) Condições de contorno

$$\phi(x = 0) = 0 \tag{3}$$
$$M_X(x = L) = M_X \tag{4}$$

5) Integração da equação diferencial

Substitui-se (2) em (1) para se obter

$$J_p G \frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = 0 \tag{5}$$

Integrando uma vez:

$$J_p G \frac{d}{dx}\phi(x) = M_X(x) = C_1 \tag{6}$$

Integrando novamente:

$$J_p G \cdot \phi(x) = C_1 x + C_2 \tag{7}$$

6) Determinação das constantes de integração

Aplicando (3) em (7), tem-se:

$$J_p G \cdot \phi(x = 0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \tag{8}$$

Aplicando (4) em (6), tem-se:

$$M_X(x = L) = C_1 = M_X \Rightarrow C_1 = M_X \tag{9}$$

7) Equações finais

Substitui-se (8) e (9) em (6) e (7) para se obter as expressões finais de ângulo de torção e momento torsor:

$$M_X(x) = M_X \tag{10}$$

$$J_p G \cdot \phi(x) = M_X x \tag{11}$$

8) Análise

Como estamos usando a face A como referência (com ângulo de torção igual a zero), o ângulo da face B em relação a A é dado por:

$$\phi_{BA} = \phi(x = L) = \frac{M_X L}{J_p G},$$

em que J_p é o momento polar de inércia,

$$J_p = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{32} d^4$$

Determinando L para que esta torção seja de uma volta inteira:

$$L = \frac{\phi_{BA} J_p G}{M_X} = \frac{(2\pi) G}{M_X}\left(\frac{\pi d^4}{32}\right) = \frac{(2\pi)(75 \cdot 10^9 \, Pa)}{(2000 \, N \cdot m)} \cdot \frac{\pi (0,1 \, m)^4}{32}$$

$$L = 2,31 \, km$$

A tensão de cisalhamento em uma seção do eixo é dada por:

$$\tau_{XY}(r) = \frac{M_X}{J_P} r = \frac{2M_X}{\pi r^3}$$

$$\begin{cases} \tau_{XY}(r = 0) = 0 \\ \tau_{XY}(r = R_e) = \dfrac{2M_X}{\pi r^3} = \dfrac{2(2000 \, N \cdot m)}{\pi (0,05 \, m)^3} = 10,18 \, MPa \end{cases}$$

A distribuição das tensões de cisalhamento na seção x=L/2 é mostrada na Figura 2.2, e o valor máximo é 10,18 MPa, como calculado acima.

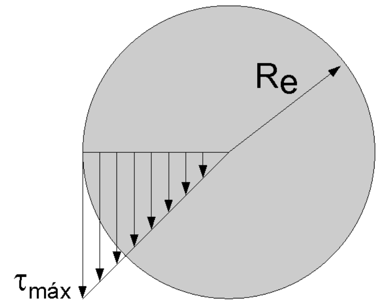


Figura 2.2: distribuição das tensões de cisalhamento na seção.

Gabarito: Exame de Resistência dos Materiais I – EM406

9 de Dezembro de 2008

<u>Questão 3</u> (3,5 pontos): Uma barra de área A e comprimento L é construída com um material com razão de Poisson ν. A barra é engastada na extremidade esquerda, e uma folga δ a separa da parede à direita, como mostrado na Figura 3a. Determine a intensidade do carregamento p_0 que deve ser aplicado para que a extremidade B encoste sem folga e sem tensão na parede direita. O diagrama de tensão de cisalhamento × distorção do material da barra é mostrado na Figura 3b.

Dados: $\nu = 0{,}3$; $A = 8\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}^2$; $L = 5$ m; $\delta = 0{,}1$ mm.

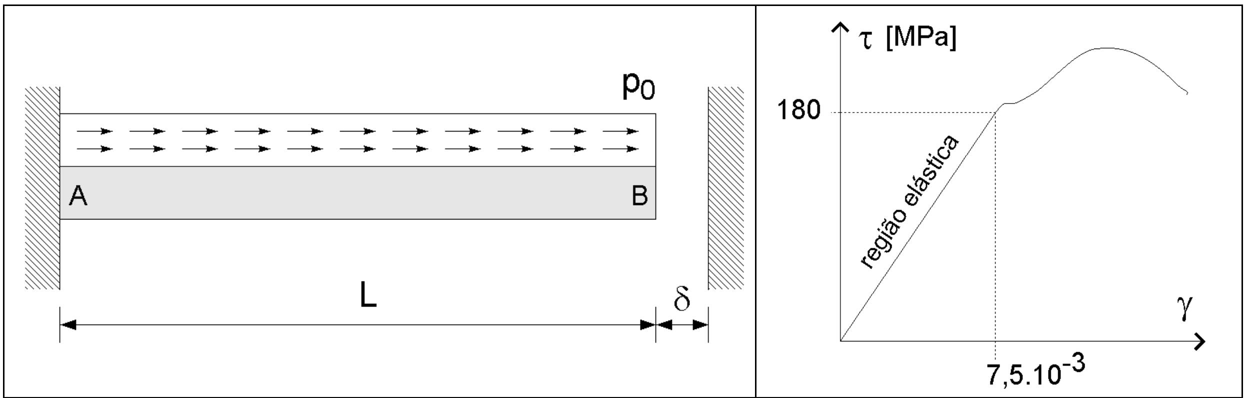
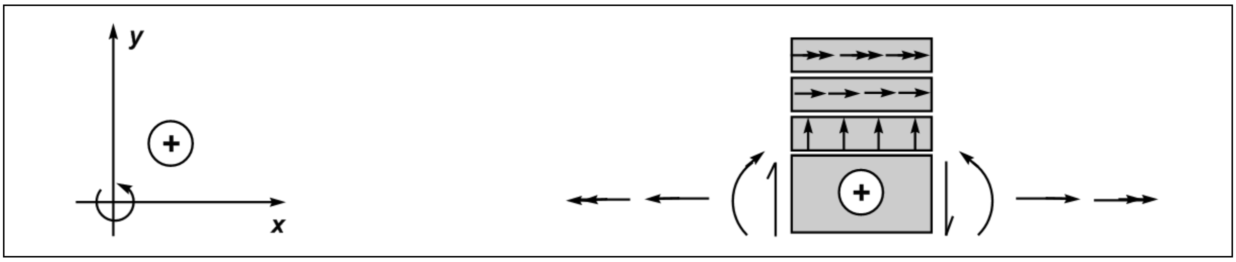


Figura 3: a) barra engastada, próxima a parede rígida. b) diagrama tensão de cisalhamento × deformação angular do material.

Solução

1) Eixos e convenções



2) Equação Diferencial

$$EA\frac{d^2}{dx^2}u = -p(x) \tag{1}$$

3) Equação de carregamento

$$p(x) = p_0 \tag{2}$$

4) Condições de Contorno

$$u(x=0)=0 \quad (3)$$

$$N_X(x=L)=0 \quad (4)$$

5) Integração da equação diferencial

Substitui-se (2) em (1) para se obter

$$EA\frac{d^2}{dx^2}u=-p_0 \quad (5)$$

Integrando uma vez:

$$EA\frac{d}{dx}u(x)=N_X(x)=-p_0x+C_1 \quad (6)$$

Integrando novamente:

$$EAu(x)=-\frac{p_0}{2}x^2+C_1x+C_2 \quad (7)$$

6) Determinação das constantes de integração

Aplicando (3) em (7), tem-se:

$$u(x=0)=-\frac{p_0}{2}0^2+C_1\cdot 0+C_2=0$$

$$\Rightarrow C_2=0 \quad (8)$$

Aplicando (4) e (8) em (6), tem-se:

$$N_X(x=L)=-p_0L+C_1=0$$

$$\Rightarrow C_1=p_0L \quad (9)$$

7) Equações finais

Substitui-se (9) e (10) em (6) e (7) para se obter as expressões finais de força normal e deslocamento:

$$N_X(x)=p_0(L-x) \quad (11)$$

$$EAu(x)=-\frac{p_0}{2}x^2+p_0Lx \quad (12)$$

8) Análise

Deseja-se que a barra toque a parede à direita, isto é, o deslocamento na extremidade da barra deve ser igual a δ. Da Equação 12, tem-se:

$$u(x=L)=\frac{1}{EA}\left(-\frac{p_0}{2}L^2+p_0L\cdot L\right)=\delta$$

$$\delta=\frac{p_0L^2}{2EA}\Rightarrow p_0=\frac{2\delta EA}{L^2} \tag{13}$$

Do diagrama tensão de cisalhamento × distorção, sabe-se que:

$$\tau=\mathrm{G}\cdot\gamma\Rightarrow \mathrm{G}=\frac{\tau}{\gamma}=\frac{180\cdot10^{6}\,\mathrm{Pa}}{7{,}5\cdot10^{-3}}=24\cdot10^{9}\,\mathrm{Pa} \tag{14}$$

Das relações constitutivas, sabe-se também que E = 2G(1+ν). Assim, pode-se determinar o módulo de elasticidade:

$$\mathrm{E}=2\mathrm{G}\left(1+\nu\right)=2\left(24\cdot10^{9}\,\mathrm{Pa}\right)\cdot\left(1+0{,}32\right)=62{,}4\cdot10^{9}\,\mathrm{Pa} \tag{15}$$

Por fim, substituindo (14) e (15) em (13), determina-se a carga p_0 necessária.

$$p_0=\frac{2\left(0{,}1\cdot10^{-3}m\right)\left(62{,}4\cdot10^{9}\,Pa\right)\left(8\cdot10^{-3}m^{2}\right)}{\left(5m\right)^{2}}=3993{,}6\frac{N}{m}\approx4\frac{kN}{m}$$