MA 211 Turmas A,B - Prova 2

21/05/2010

7,0

Aluno: Felipe Antonio de Almeida Fleming
RA: 097468

2,5 **Questão 1:** Determine o volume do sólido dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

1,0 **Questão 2:** Determine a massa e o centro de massa do cubo

$$C = \{(x, y, z) \, : \, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\},$$

cuja densidade num ponto (x, y, z) é dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

1.5 **Questão 3:** Calcule

$$\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y} dA$$

onde R é o paralelogramo delimitado pelas retas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$ e $3x - y = 8$.

2.0 **Questão 4** Calcule $\int_C xe^{yz} ds$ onde C é o segmento de reta de $(0,0,0)$ a $(1,2,3)$. Qual o valor dessa integral se C for o segmento de reta de $(1,2,3)$ a $(0,0,0)$?

Obs: as coordenadas do centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ são:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \; ; \; \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \; e \; \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho(x,y,z)\,dV \; ; \; M_{xz} = \iiint_E y\rho(x,y,z)\,dV \; e$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho(x,y,z)\,dV \; e \; m = \iiint_E \rho(x,y,z)\,dV$$

A função $\rho(x,y,z)$ é a densidade no ponto (x, y, z)

Felipe Antonio de Almeida Fleming RA 097468

① $x^2+y^2=4$ $4x^2+4y^2+z^2=64$

Analisando a equação do cilindro em coordenadas cartesianas, podemos facilitar o cálculo das integrais passando para coordenadas polares:

$0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

$$z^2 = 64-4x^2-4y^2 \Rightarrow z = \sqrt{64-4x^2-4y^2}$$

$$\iint_D \sqrt{64-4x^2-4y^2}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{64-4(r\cdot\cos\theta)^2-4\cdot(r\,\text{sen}\,\theta)^2}\; r\cdot dr\,d\theta$$

resolvendo a integral interna:

$$\int_0^2 \sqrt{64-4r^2\cos^2\theta-4r^2\,\text{sen}^2\theta}\;r\,dr = \int_0^2 \sqrt{64-4r^2}\;r\,dr$$

Por substituição:

$$u = 64-4r^2 \Rightarrow \frac{du}{dr} = -8r \Rightarrow \frac{-du}{8} = r\,dr$$

$$\int \sqrt{u}\left(\frac{-du}{8}\right) = \frac{-1}{8}\int\sqrt{u}\,du = \frac{-1}{8}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]$$

$$= \frac{-1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[(64-4r^2)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{-1}{12}\left[(64-4\cdot2^2)^{3/2}-(64)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{-1}{12}\left[48^{3/2}-(8^2)^{3/2}\right] = \frac{-1}{12}\left[48^{3/2}-8^3\right]$$

resolvendo a integral externa:

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{-1}{12}\left(48^{3/2}-8^3\right)\right]d\theta = \left[\frac{-1}{12}\left(48^{3/2}-8^3\right)\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{-1}{12}\left(48^{3/2}-8^3\right)\cdot 2\pi$$

$$= \frac{-\pi}{6}\left(48^{3/2}-8^3\right)$$

O volume que acabamos de calcular está acima do plano xy. Como o elipsóide é simétrico em relação a este plano, então para encontrarmos o volume total entre o elipsóide e o cilindro, devemos multiplicar esse valor da integral por 2.

Assim $V = 2\cdot\left(\frac{-\pi}{6}\cdot\left(48^{3/2}-8^3\right)\right) = \frac{-\pi}{3}\left(48^{3/2}-8^3\right)$

(2) $M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x,y,z)\,dV = \int_0^a \int_0^a \int_0^a x\cdot(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$

$$\int_0^a x(x^2+y^2+z^2)\,dx = \int_0^a x^3+y^2x+z^2x\,dx = \left.\frac{x^4}{4}+\frac{y^2x^2}{2}+\frac{z^2x^2}{2}\right]_0^a$$

$$= \frac{a^4}{4}+\frac{y^2a^2}{2}+\frac{z^2a^2}{2}$$

$$\int_0^a \frac{a^4}{4}+\frac{a^2}{2}y^2+\frac{a^2}{2}z^2\,dy = \left[\frac{a^4}{4}\cdot y+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{a^2}{2}\cdot z^2 y\right]_0^a$$

$$= \frac{a^5}{4}+\frac{a^5}{6}+\frac{a^3}{2}z^2$$

$$\int_0^a \frac{a^5}{4}+\frac{a^5}{6}+\frac{a^3}{2}z^2\,dz = \left[\frac{a^5}{4}\cdot z+\frac{a^5}{6}\cdot z+\frac{a^3}{2}\cdot\frac{z^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \left[\frac{a^6}{4}+\frac{a^6}{6}+\frac{a^6}{6}\right] = \left[\frac{a^6}{4}+\frac{a^6}{3}\right] = \frac{3a^6+4a^6}{12} = \frac{7a^6}{12}$$

$$= \frac{7a^6}{12}$$

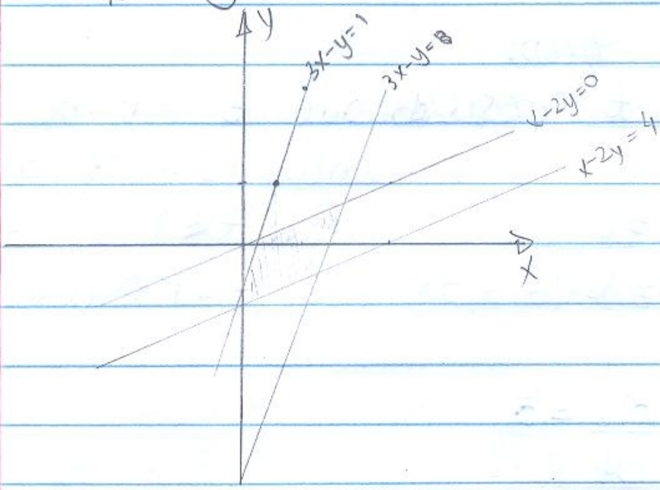
Como o procedimento para calcular M_{xz} e M_{xy} é análogo ao de M_{yz} que calculamos anteriormente $M_{xz} = M_{xy} = M_{yz} = \frac{7a^6}{12}$

$$m = M_{xz}+M_{xy}+M_{yz} = 3\cdot\left[\frac{7a^6}{12}\right] = \frac{7a^6}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{7a^6/12}{7a^6/4} = \frac{1}{3} = \bar{y} = \bar{z}$$

$\therefore\ \bar{x} = \frac{1}{3}$, $\bar{y} = \frac{1}{3}$ e $\bar{z} = \frac{1}{3}$ como já era esperado, os valores de $\bar{x}, \bar{y}$ e $\bar{z}$ serem iguais devido a simetria do cubo.

③ $\iint_R \dfrac{x-2y}{3x-y}\, dA \qquad x-2y=0\ ,\ x-2y=4,\ 3x-y=1\ ,\ 3x-y=8$



$u = x-2y \qquad \dfrac{du}{dx} = 1 \qquad \dfrac{du}{dy} = -2 \qquad 0 \leq u \leq 4$

$v = 3x-y \qquad \dfrac{dv}{dx} = 3 \qquad \dfrac{dv}{dy} = -1 \qquad 1 \leq v \leq 8$

$J = \begin{vmatrix} du/dx & du/dy \\ dv/dx & dv/dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-(-2\cdot 3) = -1+6 = 5$

Transf inversa $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ $\Rightarrow J = 1/5$

Assim:

$\iint_R \dfrac{x-2y}{3x-y}\, dA = \int_1^8 \int_0^4 \dfrac{u}{v}\; 5 \cdot du\, dv$

$\int_0^4 \dfrac{u}{v}\, 5\, du = \dfrac{5}{v} \cdot \left[\dfrac{u^2}{2}\right]_0^4 = \dfrac{5}{v} \cdot \dfrac{16}{2} = \dfrac{40}{v}$

$\int_1^8 \dfrac{40}{v}\, dv = 40 \cdot \int_1^8 \dfrac{1}{v}\, dv = 40 \cdot \left[\ln v\right]_1^8$

$= 40 \cdot (\ln 8 - \cancel{\ln 1}^{\,0}) = 40 \cdot \ln 8$

(4) vetor diretor da semi-reta que vai de (0,0,0) a (1,2,3)

$v = (1,2,3) - (0,0,0) = (1,2,3)$

parametrizando r temos:

$$r: \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t = t \\ y = 0 + 2 \cdot t = 2t \\ z = 0 + 3 \cdot t = 3t \end{cases}$$

sendo que t varia entre o seguinte intervalo: $0 \leq t \leq 1$, já que para $t = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$ e p/ $t = 1 \Rightarrow (x,y,z) = (1,2,3)$

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2, \quad \frac{dz}{dt} = 3$$

$$\int_C x e^{yz}\, ds = \int_0^1 t \cdot e^{2t \cdot 3t} \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot e^{6t^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\, dt = \int_0^1 t \cdot e^{6t^2} \cdot \sqrt{14}\, dt$$

$$u = 6t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 12t \Rightarrow \frac{du}{12} = t\, dt$$

$$\int e^u \sqrt{14} \cdot \frac{du}{12} = \frac{\sqrt{14}}{12} \int e^u\, du = \frac{\sqrt{14}}{12} \cdot \left[e^u\right]$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{12} \cdot \left[e^{6t^2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{14}}{12} \cdot \left(e^6 - e^0\right) = \frac{\sqrt{14}}{12} \cdot \left(e^6 - 1\right)$$

Se invertêssemos o sinal teríamos:

$$\int_1^0 -t e^{6t^2} \sqrt{14}\, dt = \int_0^1 t e^{6t^2} \sqrt{14}\, dt = \frac{\sqrt{14}}{12} \cdot \left(e^6 - 1\right)$$

Portanto, os valores das integrais seriam os mesmos para as duas parametrizações