$1^{\underline{a}}$ Prova

MA-311 — Cálculo III

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2010

1. (*2.0 pontos*) Dada a equação

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} \qquad x > 0, \quad y > 0$$

   (a) (0.3) Mostre que a equação é homogênea e diga qual a substituição (i.e. mudança de variável) utilizada que torna a equação separável.

   (b) (0.2) Mostre que a equação é de Bernoulli e indique qual a substituição (i.e. mudança de variável) que a torna linear.

   (c) (1.5) Resolva-a por um desses dois métodos.

2. (*1.5 pontos*) Encontre a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y' + xy = \frac{x}{2} \qquad y(0) = 1$$

3. (*2.0 pontos*) Considere a equação diferencial

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0.$$

   Dado que $y_1(x) = x$ é uma solução da equação, use o método de **redução de ordem** para determinar uma segunda solução da forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$.

4. (*2.0 pontos*) Considere a e.d.o.

$$y''' + y'' - y' - y = e^t t^4$$

   (a) Encontre a solução homogênea.

   (b) Usando o método de coeficientes indeterminados encontrar a forma da solução particular **SEM** calcular os coeficientes.

5. (*2.5 pontos*)

   (a) Resolva a seguinte equação de Euler-Cauchy: $t^2y'' + ty' - y = 0, \quad t > 0.$

   (b) Use o método de **variação dos parâmetros** para resolver a seguinte equação:

$$t^2y'' + ty' - y = t^3 \quad t > 0$$

1.ª Questão. (2 pontos) Dada a equação

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \quad y > 0,\ x > 0.$$

(a) (0.3) Mostre que a equação é homogênea e diga qual a substituição (i.e. mudança de variável) utilizada que torna a equação separável.

(b) (0.2) Mostre que a equação é de Bernoulli e indique qual a substituição (i.e. mudança de variável) que a torna linear.

(c) (1.5) Resolva-a por um desses dois métodos.

Resolução:

(a) Re-escrevendo a equação

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = x^2 \frac{3\frac{y^2}{x^2} - 1}{2xy} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

vemos que a equação é homogênea. A substituição $v(x) = \dfrac{y}{x}$ torna a equação separável.

(b) Re-escrevendo a equação

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3}{2x}y - \frac{x}{2}y^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad y' - \frac{3}{2x}y = -\frac{x}{2}y^{-1}$$

temos uma equação de Bernoulli com $n = -1$. A substituição $v = y^{1-n} = y^2$ torna a equação linear.

(c) **Resolução pelo método (a):** Temos $v(x) = \dfrac{y}{x}$ ou $y = v(x)x$. Derivando $y' = v'x + v$ e substituindo na equação

$$v'x + v = g(v) = \frac{3v^2 - 1}{2v} \Leftrightarrow v'x = \frac{3v^2 - 1}{2v} - v = \frac{v^2 - 1}{2v} \Longleftrightarrow \frac{2v}{v^2 - 1}dv = \frac{dx}{x}$$

obtemos uma equação separável para v. (0.5)

Integrando

$$\int \frac{2v}{v^2 - 1}dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v^2 - 1| = \ln x + c,\ c \text{ constante } \Rightarrow v^2 - 1 = Kx \text{ com } K = \pm e^c \text{constante.}$$

Voltando à variável original

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = Kx \Rightarrow y^2 = x^2 + Kx^3. \quad (1.0)$$

(c) **Resolução pelo método (b):** Fazendo $v(x) = y^2$ temos que $v' = 2yy'$. Substituindo na equação

$$2yy' - \frac{3}{x}y^2 = -x \Leftrightarrow v' - \frac{3}{x}y^2 = -x \Leftrightarrow v' - \frac{3}{x}v = -x$$

obtemos uma equação linear em v. (0.5)

O fator integrante é dado por $\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{3}{x}dx\right) = \exp(-3\ln x) = x^{-3}$. Multiplicando a equação de v por μ

$$x^{-3}v' - \frac{3x^{-3}}{x}v = -xx^{-3} = -x^{-2} \Leftrightarrow (x^{-3}v)' = -x^{-2}.$$

Integrando

$$x^{-3}v = x^{-1} + c,\ c \text{ constante } \Rightarrow v = y^2 = x^2 + cx^3. \quad (1.0)$$

Nota: Resolução por outros métodos não será considerada. Esquecer a constante vale (-0.2).

uestão 2 Três formas de ...

Eq. 1ª ordem linear

- $\mu(x) = \exp \int p(x)\,dx = e^{\frac{x^2}{2}}$ (0.5 pt.)
- $\left(e^{\frac{x^2}{2}} \cdot y\right)' = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{x}{2} \Rightarrow e^{\frac{x^2}{2}} y = \int e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x}{2}\,dx$ (0.5 pt)
- integração correta e uso correto do dado inicial. (0.5 pt)

Eq. Separável

- $$\frac{dy}{1-\frac{y}{2}} = x\,dx$$ (0.5 ponto)
- integração correta (0.5 pt)
- uso correto do dado inicial (0.5 pt.)

$dy + \left(xy - \frac{x}{2}\right)dx$ não é exata

- Busca fator integrante $\mu(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ (0.5 pt)
- Multiplicar e integrar corretamente a equação (0.5 pt)
- Uso correto do dado inicial (0.5 pt)

Obs em qualquer dos três casos erros de álgebra / aritmética – perde (0.2 pt

Questão 3

Considere a equação diferencial

$$x^2 y'' - x(x+2) y' + (x+2) y = 0$$

Dado que $y_1(x) = x$ é uma solução da equação, use o método de redução da ordem para determinar uma segunda solução da forma $y_2(x) = v(x) y_1(x)$

Resolução

$y_1 = x$ é solução

$$y_2 = y_1 v = x \cdot v$$
$$y_2' = v' x + v$$
$$y_2'' = v'' x + v' + v' = v'' x + 2v'$$

$$x^2 y_2'' - x(x+2) y_2' + (x+2) y_2 = 0$$

$$x^2(v'' x + 2v') - (x)(x+2)(v' x + v) + (x+2) x v = 0$$

$$x^3 v'' + 2x^2 v' - x^2(x+2) v' \cancel{- x(x+2) v + (x+2) x v} = 0$$

$$x^3 v'' + 2\cancel{x^2 v'} - x^3 v' \cancel{- 2x^2 v'} = 0$$

$$x^3(v'' - v') = 0 \qquad x > 0$$

$$v'' - v' = 0 \qquad u = v' \Rightarrow u' = v''$$

(0,5) pts correcta

$$u' - u = 0 \qquad u = C e^x$$

$$v' = u = C e^x \Rightarrow v = C e^x + D \quad \begin{cases} C = 1 \\ D = 0 \end{cases}$$

Assumimos

$$v(x) = e^x$$

$$\Rightarrow y_2(x) = x e^x$$

(1,5) pts correcta

valor da questao 2.0 pts

Obs: a resposta $y_2(x) = (C e^x + D) x$ foi considerada valida

Questão 4:

a) $y''' + y'' - y' - y = 0$

$y(t) = e^{rt}$ $\quad y' = re^{rt}$ $\quad y'' = r^2e^{rt}$ $\quad y''' = r^3e^{rt}$

$$e^{rt}\left[r^3 + r^2 - r - 1\right] = 0$$

$$r^2(r+1) - (r+1) = (r+1)(r^2-1) = (r+1)^2(r-1) = 0$$

$r = 1$

$r = -1$ multiplicidade 2

$$y_c(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t} + c_3 e^{t}$$

b) $y''' + y'' - y' - y = t^4 e^t$

$$y_p = t(A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4)e^t$$

Questão 5:

a) $t^2 y'' + t y' - y = 0$

Seja $y(t) = t^r$ $\quad y' = r t^{r-1}$ $\quad y'' = r(r-1) t^{r-2}$

0.3 $\left\{ \begin{array}{l} t^2 r(r-1) t^{r-2} + t r t^{r-1} - t^r = 0 \\ t^r \left[r(r-1) + r - 1 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 1 = 0 \quad r = \pm 1 \end{array} \right.$

0.4 $\left\{ y = c_1 t + c_2 t^{-1} \right.$ $\quad$ 0.3

b) $t^2 y'' + t y' - y = t^3$

solução geral $y(t) = y_c + y_p$

- $y_c = c_1 t + c_2 t^{-1}$ (parte a)

- $y_p = u_1 t + u_2 t^{-1}$ $\quad , \quad y_p' = \boxed{\underbrace{u_1' t + u_2' t^{-1}}_{=0}}^{*} + u_1 - u_2 t^{-2}$

OPTATIVO

$y_p'' = u_1' - u_2' t^{-2} + 2 u_2 t^{-3}$

Substituindo na equação:

$(u_1' - u_2' t^{-2} + 2u_2 t^{-3}) t^2 + (u_1 - u_2 t^{-2}) . t - u_1 t - u_2 t^{-1} = t^3$

$u_1' t^2 - u_2' + \cancel{2u_2 t^{-1}} + \cancel{u_1 t} - \cancel{u_2 t^{-1}} - \cancel{u_1 t} - \cancel{u_2 t^{-1}} = t^3$

$\boxed{u_1' t^2 - u_2' = t^3}$ **

Resolver o sistema: $\left\{ \begin{array}{ll} * & u_1' t + u_2' t^{-1} = 0 \\ ** & u_1' - u_2' t^{-2} = t \end{array} \right.$ $\quad$ 0.2

$u_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & t^{-1} \\ t & -t^{-2} \end{vmatrix}}{W} = \dfrac{t}{2}$ $\quad$ 0.4

$W = \begin{vmatrix} t & t^{-1} \\ 1 & -t^{-2} \end{vmatrix} = -2t^{-1}$

$u_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{W} = -\dfrac{t^3}{2}$ $\quad$ 0.4

$\Rightarrow u_1 = \dfrac{t^2}{4}$ e $u_2 = -\dfrac{t^4}{8}$ $\quad \Rightarrow y_p = \dfrac{t^2}{4} . t - \dfrac{t^4}{8} . t^{-1} = \dfrac{t^3}{8}$

0.3

$y(t) = c_1 t + c_2 t^{-1} + \dfrac{t^3}{8}$ $\rightarrow$ 0.2

Erros + comuns:

lado direito ** $= t^3$ $\quad$ −0.4

aritmética / algebra $\quad$ −0.1