Cálculo Numérico (MS211) PROVA 1 (27/09/2011)

Nome: ______________________________ RA: __________ Turma: ______

Trabalhe com 4 *dígitos decimais nas Questões 1 e 4*!!! Responde a todas perguntas e explicite as contas. Boa sorte!

---

1. Uma corrente oscilante em um circuito elétrico é descrito por

$$I = 10e^{-t}\sin(2\pi t)\,,$$

onde t é dado em segundos.

(a) Determine uma aproximação para o último momento tal que $I = 2$ utilizando o Método de Newton(-Raphson) com $t_0 = 1.5$ e precisões $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$. Apresente os resultados em forma tabelar. [1.5 pts]

k	t_k	$f(t_k)$	$t_k - t_{k-1}$
0	1.5		

(b) A seguinte figura mostra $f(t) = 10e^{-t}\sin(2\pi t) - 2$ para $t \in [0.9, 1.65]$. Chegamos a mesma raiz que no item (a) utilizando o chute inicial $t_0 = 1.65$? Justifique a sua resposta através de duas iterações gráficas do Método de Newton(-Rhaphson). Calcule t_1 e t_2 para conferir o seu desenho. [1 pt]

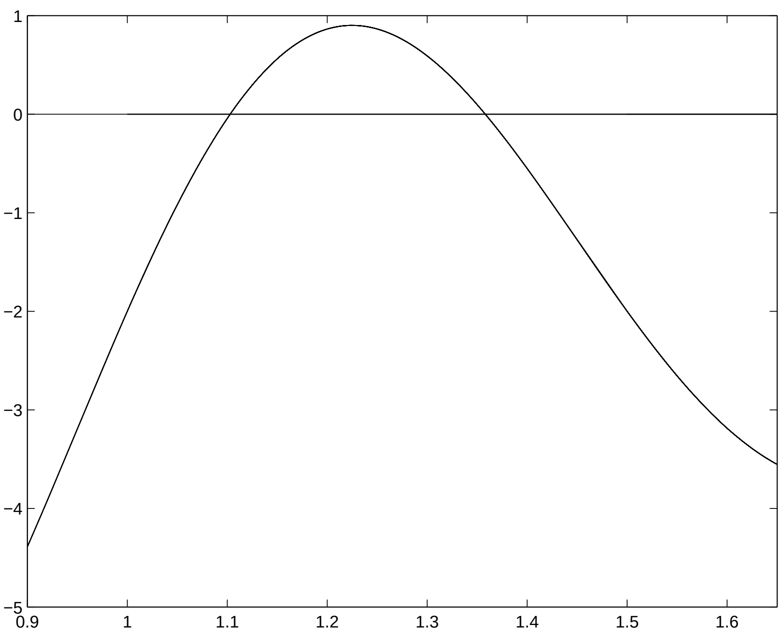

Figure 1: $10e^{-t}\sin(2\pi t) - 2$

2. Considere uma maquina que trabalha no sistema decimal com aritmética de ponto flutuante utilizando arredondamento e 5 dígitos na mantissa. Sejam A e b tais que

$$A = \begin{pmatrix} -0.20000 \cdot 10^{-6} & 0.50000 \cdot 10^{0} \\ 0.20000 \cdot 10^{0} & 0.10000 \cdot 10^{0} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0.50000 \cdot 10^{0} \\ 0.30000 \cdot 10^{0} \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcule $0.1 \cdot 10^0 + 0.5 \cdot 10^6$ na maquina. Qual é o erro relativo? [0,5 pts]

   (b) Resolve $Ax = b$ usando Eliminação Gaussiana sem pivoteamento parcial nesta maquina. (Não precisa detalhar as operações no sistema de ponto flutuante.) [0,5 pts]

   (c) Resolve $Ax = b$ usando Eliminação Gaussiana com pivoteamento parcial nesta maquina. (Não precisa detalhar as operações no sistema de ponto flutuante.) [0,5 pts]

   (d) Compare a qualidade das soluções x_a e x_b obtidas em (a) e (b) e comente sobre as diferenças nas soluções. [1 pt]

3. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Considere o problema de encontrar uma matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $AX = B$.

   (a) Verifique que resolver $AX = B$ é equivalente a resolver m sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes. [0.5 pts]

   (b) Considere um sistema linear da forma $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$. O escalonamento da matriz aumentada para obter a forma triangular superior requer aproximadamente $2/3n^3$ flops (operações na aritmética de ponto flutuante). Portanto a decomposição de A na forma $A = LU$ também custa aproximadamente $2/3n^3$ flops. A resolução de um sistema triangular custa aproximadamente n^2 flops. Dado estes fatos, você escolheria Eliminação Gaussiana ou a Decomposição LU para resolver $AX = B$ com $n = 9$ e $m = 3$? [1 pt]

4. Considere a matriz A abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Seja $b = (-3, 6, 5)^t$. Obtenha um sistema linear equivalente $\tilde{A}x = \tilde{b}$ através de troca de linhas tal que o critério de Sassenfeld é satisfeito. O que pode ser concluido sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel? [1.5 pts]

   (b) Escolhe um chute incial $x^{(0)} \in \mathbb{Z}^3$ tal que $||\tilde{A}x^{(0)} - \tilde{b}||_\infty \leq 1$. Aplique o método de Gauss-Seidel com este chute inicial e $\varepsilon = 0.15$. Apresente os seus resultados finais na seguinte forma: [2 pts]

k	$x^{(k)}$	$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)})$

   onde

$$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)}) = \frac{||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty}{||x^{(k)}||_\infty} = \frac{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)}|}$$

1. (a) $f(t) = 10\, e^{-t} \operatorname{sen}(2\pi t) - 2$

$$t_{k+1} = t_k - \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, \text{ onde}$$

$$f'(t) = 10\left[-e^{-t} \operatorname{sen}(2\pi t) + e^{-t} \cdot \cos(2\pi t) \cdot 2\pi\right]$$

$$= 10\, e^{-t}\left[2\pi \cos(2\pi t) - \operatorname{sen}(2\pi t)\right]$$

$$\Rightarrow t_{k+1} = t_k - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t_k) - 0{,}2 \cdot e^{t_k}}{2\pi \cos(2\pi t_k) * - \operatorname{sen}(2\pi t_k)}$$

K	t_K	$f(t_K)$	$t_K - t_{K-1}$
0	1,5000	-2,0000	-
1	1,3573	0,0105	-0,1427
2	1,3582	-0,0004	0,0009

$|-0{,}0004| < \varepsilon$

Pare.*

∴ o último momento tal que $I = 2$ é aprox. $\underline{\underline{1{,}3582}}$

(b) Com $t_0 = 1{,}65$ obtemos $t_1 = 1{,}0084$ e $t_2 = 1{,}0880$. Com este chute inicial, o metodo de Newton (-Raphson) converge para a raiz de f próximo de 1,1.

Veja gráfico

Cálculo Numérico (MS211) PROVA 1 (27/09/2011)

Nome: ______________________________ RA: __________ Turma: ______

Trabalhe com 4 *dígitos decimais nas Questões 1 e 4*!!! Responde a todas perguntas e explicite as contas. Boa sorte!

---

1. Uma corrente oscilante em um circuito elétrico é descrito por

$$I = 10e^{-t}\sin(2\pi t)\,,$$

onde t é dado em segundos.

(a) Determine uma aproximação para o último momento tal que $I = 2$ utilizando o Método de Newton(-Raphson) com $t_0 = 1.5$ e precisões $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$. Apresente os resultados em forma tabelar. [1.5 pts]

k	t_k	$f(t_k)$	$t_k - t_{k-1}$
0	1.5		

(b) A seguinte figura mostra $f(t) = 10e^{-t}\sin(2\pi t) - 2$ para $t \in [0.9, 1.65]$. Chegamos a mesma raiz que no item (a) utilizando o chute inicial $t_0 = 1.65$? Justifique a sua resposta através de duas iterações gráficas do Método de Newton(-Rhaphson). Calcule t_1 e t_2 para conferir o seu desenho. [1 pt]

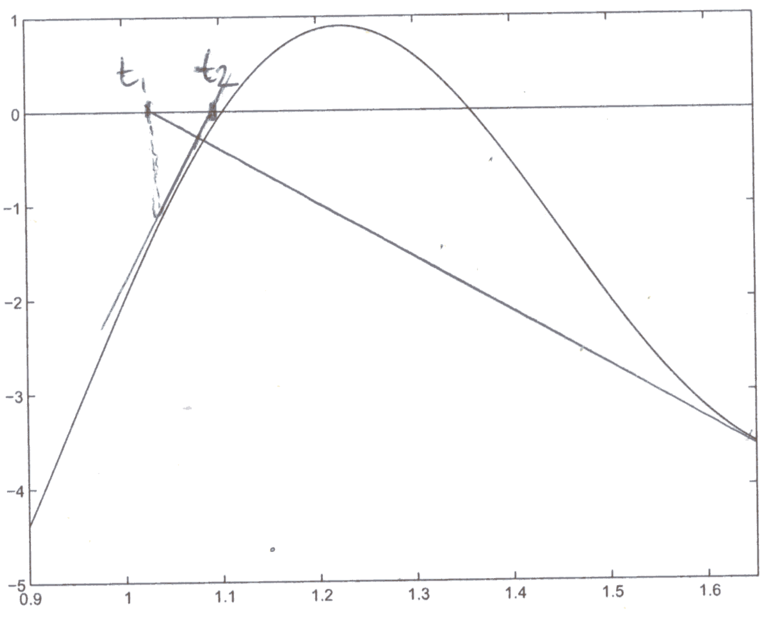

Figure 1: $10e^{-t}\sin(2\pi t) - 2$

2. (a) Seja $x = 0.1 \cdot 10^0$ e $y = 0.5 \cdot 10^6$

temos $\bar{x} = x$ e $\bar{y} = y$

Utilizamos
$$\left.\begin{array}{l} x \to \bar{x} \\ y \to \bar{y} \end{array}\right\} + : \bar{x} + \bar{y} \to \overline{\bar{x} + \bar{y}}$$

$$\bar{x} + \bar{y} = 0.0000001 \cdot 10^6 + 0.50000 \cdot 10^6$$
$$= 0.5000001 \cdot 10^6$$
$$\Rightarrow \overline{\bar{x} + \bar{y}} = 0.50000 \cdot 10^6$$

Seja $z = x + y$, $ER_z = \dfrac{(x+y) - (\overline{\bar{x}+\bar{y}})}{\overline{\bar{x}+\bar{y}}}$

$$= \frac{0.0000001 \cdot \cancel{10^6}}{0.5 \cdot \cancel{10^6}} = \frac{10^{-7}}{0.5} = \frac{1}{0.5} \cdot 10^{-7}$$
$$= 2 \cdot 10^{-7}$$

(b) Na maquina com $t = 5$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -0.20000 \cdot 10^{-6} & 0.50000 \cdot 10^0 & 0.50000 \cdot 10^0 \\ 0.20000 \cdot 10^0 & 0.10000 \cdot 10^6 & 0.30000 \cdot 10^0 \end{array}\right)$$

$m = -10^6$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -0.20000 \cdot 10^{-6} & 0.50000 \cdot 10^0 & 0.50000 \cdot 10^0 \\ 0 & 0.50000 \cdot 10^6 & 0.\cancel{3}^{5}0000 \cdot 10^6 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_2 = 0.10000 \cdot 10^1 = 1$ e $x_1 = 0$

$$x_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

~~(b)~~ (c)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0.20000\cdot10^{0} & 0.10000\cdot10^{0} & 0.30000\cdot10^{0} \\ -0.20000\cdot10^{-6} & 0.50000\cdot10^{0} & 0.50000\cdot10^{0} \end{array}\right)$$

$$m = -10^{-6}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.20000\cdot10^{0} & 0.10000\cdot10^{0} & 0.30000\cdot10^{0} \\ 0 & 0.50000\cdot10^{0} & 0.50000\cdot10^{0} \end{array}\right)$$

$$x_2 = 0.10000\cdot10^{1} = 1 \text{ e } x_1 = 0.10000\cdot10^{1} = 1$$

$$x_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A\cdot x_b = A\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \text{ é longe de } b = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mas } A\cdot x_c = \begin{pmatrix} 0{,}5 - 0{,}2\cdot10^{-6} \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = b$$

$\therefore$ a solução x_c é muito melhor que x_b

As diferenças são devidas ao fato que $|m|$ é muito grande em (b) quando foi utilizado Eliminação Gaussiana sem pivoteamento e $|m|$ é pequeno em (c) com pivoteamento. Em (b) todas as informações referentes à segunda equação de $Ax=b$ foram perdidas. Em (c) foram mantidas as principais informações referentes às 2 equações, já que um múltiplo pequeno de uma linha foi somado a outra.

3.(a) $AX = B$

$$\Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} e \; A \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots A \cdot \begin{pmatrix} x_{1m} \\ \\ x_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1m} \\ \\ b_{nm} \end{pmatrix}$$

(b) Resolver um sistema linear da forma $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ custa aproximadamente

$$\underbrace{\frac{2}{3}n^3}_{\substack{\text{escalonar} \\ \text{matriz aument.}}} + \underbrace{n^2}_{\substack{\text{resolver} \\ \text{sistema} \\ \text{triangular} \\ \text{sup.}}} \text{ flops utilizando El. Gauss.}$$

$$\underbrace{\frac{2}{3}n^3}_{\substack{\text{calcular} \\ L \text{ e } U}} + \underbrace{2n^2}_{\substack{\text{resolver} \\ \text{2 sistemas} \\ \text{triangulares}}} \text{ flops utilizando } LU$$

Então, resolver $AX = B$ com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ usando El. Gauss.

~~co~~ custa $\approx m\left(\frac{2}{3}n^3 + n^2\right)$ flops

$= 1701$ para $m = 3$ e $n = 9$

$\frac{2}{3}n^3 + 2mn^2$ com $LU = 972$ flops para $m = 3, n = 9$

porque somente necessita 1 vez calculo de L e U

Escolha a **LU**

4.(a) Seja $\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\hat{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$Ax = b \iff \hat{A}x = \hat{b}$

$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\hat{C}| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ +\frac{1}{3}\cdot\gamma_1 & 0 & +\frac{2}{3} \\ +\frac{3}{5}\cdot\gamma_1 & \frac{4}{5}\cdot\gamma_2 & 0 \end{pmatrix}$ $\gamma_1 = 0 < 1$ ✓ $\gamma_2 = \frac{2}{3} < 1$ ✓ $\gamma_3 = \frac{8}{15} < 1$ ✓

$\therefore$ o critério de Sassenfeld é satisfeito

$\Rightarrow$ o método de Gauss-Seidel converge $\forall x^{(0)}$

para x^* com $Ax^* = b$

Não ~~d~~ podemos afirmar nada baseado neste critério sobre a convergência do método de Gauss-Jacobi

(b) Seja $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$

Temos $\|\hat{A}x^{(0)} - \hat{b}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1 \leq 1$

$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow x_1^{(1)} = (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 = 1$

$x_2^{(1)} = \left(-\frac{1}{3} \quad 0 \quad -\frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 = 1$

$x_3^{(1)} = \left(-\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} \quad 0\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$

$\therefore x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,8 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = 0,2$

$d_r(x^{(1)}, x^{(0)}) = \frac{0,2}{1} = 0,2 > \varepsilon$

$$x_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 = 1$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

$$x_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4/5 \end{pmatrix} + 2 = -\frac{5}{15} - \frac{8}{15} + \frac{30}{15} = \frac{17}{15}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{17}{15} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$x_3^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{17}{15} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \frac{3}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{68}{75} + \frac{3}{5} = \frac{68}{75}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{17}{15} \\ \frac{68}{75} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4}$$

$$\| x^{(2)} - x^{(1)} \|_\infty = \frac{2}{15} = 0.1333$$

$$\Rightarrow d_r(x^{(2)}, x^{(1)}) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{17}{15}} = \frac{2}{17} = 0.1176 < \varepsilon \qquad \frac{1}{4}$$

k	$x^{(k)}$	$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)})$
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.8 \end{pmatrix}$	$0.2 = \frac{1}{5}$
2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 17/15 \\ 68/75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.1333 \\ 0.9067 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{17} = 0.1176 < \varepsilon$