UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Física Gleb Wataghin
F 128 - 1^o semestre 2008 - Fernando Sato
Prova 2 (Gabarito) - Diurno - 19/05/2008

Problema 1: Na Figura 1, uma prancha de massa m$_1$ = 40 kg repousa sobre um piso sem atrito e o bloco de massa m$_2$ = 10 kg repousa sobre o topo da prancha (há atrito entre eles). Em um dado instante, é aplicada no bloco uma força $\vec{F}$ de intensidade 100 N. (a) Isole os corpos e faça o diagrama de forças; (b) Qual deveria ser o mínimo valor do força de atrito estática entre os blocos para não ocorrer deslizamento entre eles? Se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a prancha é 0,60, e o de atrito cinético é 0,40, qual é a aceleração resultante (c) do bloco e (d) da prancha? (Dê sua resposta na notação de vetor unitário)

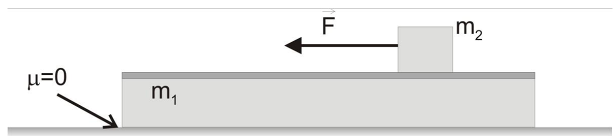

Figura 1: Esquema da prancha e do bloco sobre a prancha.

Item (a), Diagrama de forças

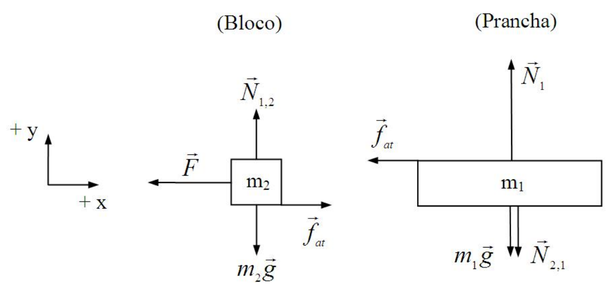

Figura 2: Diagrama de forças para o bloco e para a prancha.

Item (b), o mínimo valor do força de atrito estática entre os blocos para não ocorrer deslizamento entre eles:

Aplicando a segunda lei de Newton (somente em x) a ambos os corpos, temos:

$$\begin{cases} \vec{F}+\vec{f}_{at}=m_2\vec{a}_2 \Rightarrow F\left(-\hat{i}\right)+\vec{f}_{at}\left(-\hat{i}\right)=m_2\vec{a}_2 \Rightarrow a_2=\frac{F-f_{at}}{m_2} \\ \vec{f}_{at}=m_1\vec{a}_1 \Rightarrow \vec{f}_{at}\left(-\hat{i}\right)=m_1\vec{a}_1\left(-\hat{i}\right) \Rightarrow a_1=\frac{f_{at}}{m_1} \end{cases}$$

Para que não haja deslizamento entre os corpos, devemos ter $a_1=a_2$, ou seja:

$$\frac{f_{at}}{m_1}=\frac{F-f_{at}}{m_2} \Rightarrow m_2 f_{at}=m_1\left(F-f_{at}\right) \Rightarrow \left(m_1+m_2\right)f_{at}=m_1 F$$

$$f_{at}=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)F=\left(\frac{40}{50}\right)100(N)=80N$$

Item (c), a força de atrito estática é:

$$\vec{f}_e=\mu_e\vec{N}_{1,2}=\mu_e m_2\vec{g} \Rightarrow \left|\vec{f}_e\right|=f_e=(0,6).(10).(10)=60N$$

Como o módulo de $\vec{F}$ é maior que o módulo de $\vec{f_e}$, o bloco se desloca e portanto a força de atrito que atua é cinética:

$$\vec{f_c} = \mu_c \vec{N}_{1,2} = \mu_c m_2 \vec{g} \Rightarrow \left|\vec{f_c}\right| = f_c = (0,4).(10).(10) = 40N$$

Assim,

$$\vec{F} + \vec{f_c} = m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow F\left(-\hat{i}\right) + \vec{f_c}\left(-\hat{i}\right) = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f_c - F}{m_2}(\hat{i}) = \frac{40 - 100}{10}(\hat{i})$$

$$\vec{a}_2 = -6\hat{i}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Item (d), para a prancha:

$$\vec{f_c} = m_1 \vec{a}_1 \Rightarrow \vec{f_c}\left(-\hat{i}\right) = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f_c}{m_1}(-\hat{i}) = \frac{40}{40}(-\hat{i})$$

$$\vec{a}_1 = -1\hat{i}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Problema 2: Um bloco de 1,5 kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal lisa quando uma força horizontal no sentido positivo de um eixo x é aplicada a ele. A força é dada por $\vec{F}(x) = (2,5 - x^2)\vec{i}$ N, onde x é dado em metros e a posição inicial do bloco é $x = 0$. a) Qual a energia cinética do bloco ao passar por $x = 2{,}0$m? b) Qual a energia cinética máxima do bloco entre $x = 0$ e $x = 2{,}0$ m?

$$\Delta K(x) = W(x) = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}(x).d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (2,5 - x^2)dx(\hat{i}\cdot\hat{i}) = \int_{x_i}^{x_f} (2,5 - x^2)dx$$

$$K(x_f) - K(x_i) = \left[2,5(x_f) - \frac{(x_f)^3}{3}\right] - \left[2,5(x_i) - \frac{(x_i)^3}{3}\right]$$

Com $x_i = 0$, ficmaos com:

$$K(x_f) = K(x) = 2,5(x) - \frac{(x)^3}{3}$$

Portanto, a energia cinética do bloco ao passar por $x = 2m$ será:

$$K(2) = 2,5(2) - \frac{(2)^3}{3} = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3} \cong 2,33(J)$$

Item (b), a energia cinética máxima ocorre no ponto em que $\frac{d}{dx}K(x) = 0$. Portanto:

$$\frac{d}{dx}\left[2,5(x) - \frac{(x)^3}{3}\right] = 0 \Rightarrow 2,5 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2,5}m$$

Como estamos interessados somente no intervalo $0 \leq x \leq 2, x+\sqrt{2,5}m$, a energia cinética no ponto vale:

$$K(x = +\sqrt{2,5}m) = 2,5\left(\sqrt{2,5}\right) - \frac{\left(\sqrt{2,5}\right)^3}{3} = 2,5\left(\sqrt{2,5}\right) - \frac{2,5\sqrt{2,5}}{3} = (3-1)\,\frac{2,5\sqrt{2,5}}{3}$$

$$K_{\max} = \frac{(2)\,(2,5)\,\sqrt{2,5}}{3} = \frac{5}{3}\sqrt{2,5} \cong 2,64(J)$$

Problema 3: Uma partícula move-se ao longo da direção x sob o efeito de uma força $F(x) = -kx + Kx^2$, onde $k = 200N/m$ e $K = 300N/m^2$.

(a) Calcule a energia potencial $U(x)$ da partícula, tomando $U(0) = 0$.

(b) Ache as posições de equilíbrio da partícula e esboce um gráfico de $U(x)$ para o intervalo $-0,5m < x < 1m$.

(c) Qual é a máxima energia mecânica que a partícula pode ter para que ainda ocorra movimento oscilatório e, para essa energia, em qual intervalo de x ela oscila?

Item (a), como a força F (conservativa) é a única força que atua sobre a partícula, a energia mecânica da partícula não se altera. Em outras palavras, temos:

$$K_i(x) + U_i(x) = K_f(x) + U_f(x) \quad \Rightarrow \quad K_f(x) - K_i(x) = -\left[U_f(x) - U_i(x)\right]$$

$$\Delta K(x) = -\Delta U(x)$$

Como a variação da energia cinética é igual ao trabalho:

$$\Delta U(x) = -W(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx$$

Seja $F(x) = -200x + 300x^2$. Logo:

$$W(x) = -\Delta U(x) = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_f} (-200x + 300x^2)\, dx = \left[-\frac{200x^2}{2} + \frac{300x^3}{3}\right]_{x_i}^{x_f}$$

$$\Delta U(x) = -\left[-100x^2 + 100x^3\right]_{x_i}^{x_f}$$

$$U(x_f) - U(x_i) = \left[100(x_f)^2 - 100(x_f)^3\right] - \left[100(x_i)^2 - 100(x_i)^3\right]$$

Como $U(x_i) = 0$, temos que:

$$U(x_f) = U(x) = 100x^2 - 100x^3$$

Item (b), Um corpo que se encontra em equilíbrio quando a resultante das forças que atuam sobre ele é nula.

Que similarmente corresponde a $\frac{d}{dx}\left[U(x)\right] = 0$. Portanto:

$$F(x) = 300x^2 - 200x = 0 \quad \Rightarrow \quad (100\,x)\,(3x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Para esboçar o gráfico de $U(x)\text{vs}(x)$, precisamos conhecer alguns valores:

$$U(-0,5) = U\left(-\frac{5}{10}\right) = 100\left(-\frac{5}{10}\right)^2 - 100\left(-\frac{5}{10}\right)^3 = 25 + 12,5 = 37,5\,(J)$$

$$U(0) = 100\,(0)^2 - 100\,(0)^3 = 0\,(J)$$

$$U\left(\frac{2}{3}\right) = 100\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 100\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{400}{9} - \frac{800}{27} = \frac{1200-800}{27} = \frac{400}{27} \approx 15\,(J)$$

$$U(1) = 100\,(1)^2 - 100\,(1)^3 = 0\,(J)$$

$x = 0m$ é uma posição de equilíbrio estável, enquanto que $x = (2/3)m$ é uma posição de equilíbrio instável.

Item (c), Pelo gráfico, a máxima energia que a partícula pode ter para que ainda ocorra movimento oscilatório é a energia que possui em $x = (2/3)m$.

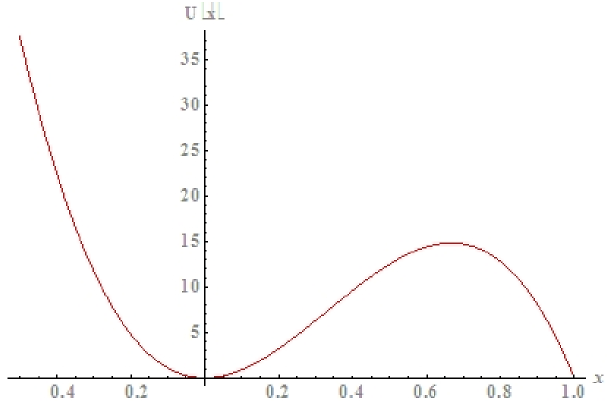

Figura 3: Gráfico.

$$U\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{400}{27}\,(J)$$

Se queremos descobrir para qual outro valor de x a partícula possui essa energia, fazemos:

$$\begin{gathered} U(x) = 100x^2 - 100x^3 = \tfrac{400}{27}\,(J) \quad \Rightarrow \quad x^3 - x^2 + \tfrac{4}{27} = 0 \\ (x+a)\,(x+b)\,\left(x - \tfrac{2}{3}\right) = x^3 - x^2 + \tfrac{4}{27} \\ \left[x^2 + (a+b)\,x + ab\right]\,\left(x - \tfrac{2}{3}\right) = x^3 - x^2 + \tfrac{4}{27} \\ x^3 + \left(a + b - \tfrac{2}{3}\right)x^2 + \left(ab - \tfrac{2}{3}a - \tfrac{2}{3}b\right)x - \tfrac{2}{3}ab = x^3 - x^2 + \tfrac{4}{27} \end{gathered}$$

Comparando termo a termo a última equação, temos:

$$\begin{cases} \left(a + b - \tfrac{2}{3}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -\left(b + \tfrac{1}{3}\right) \\ ab = -\tfrac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad -\left(b + \tfrac{1}{3}\right)b = -\tfrac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad b^2 + \tfrac{b}{3} - \tfrac{2}{9} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo por fórmula de Bháskara (usada para determinar raízes de uma equação quadrática), encontramos:

$$b = \frac{-(1/3) \pm \sqrt{(1/3)^2 + (8/9)}}{2} = \frac{-(1/3) \pm 1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b' = \frac{1-(1/3)}{2} = \frac{1}{3} \\ b'' = \frac{-1-(1/3)}{2} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

É fácil verificar que se $b = 1/3, a = -2/3$ e vice-verso. Como não há distinção entre a e b:

$$(x+a)\,(x+b)\,\left(x - \frac{2}{3}\right) = \left(x - \frac{2}{3}\right)\,\left(x + \frac{1}{3}\right)\,\left(x - \frac{2}{3}\right) = x^3 - x^2 + \frac{4}{27}$$

E as raízes são, portanto:

$$x_1 = x_3 = \frac{2}{3} \quad e \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

Assim, a partícula oscila no intervalo:

$$-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

Problema 4: Um caminhão-tanque cheio de água, massa total M, utilizado para limpar ruas com um jato de água, trafega por uma via horizontal. Ao atingir uma velocidade v_0, o motorista coloca a marcha no ponto morto e liga o jato de água, que é enviada para trás com a velocidade v_e relativa ao caminhão, com uma vazão de γ quilos por segundo. Ache a velocidade $v(t)$ do caminhão depois de um tempo t.

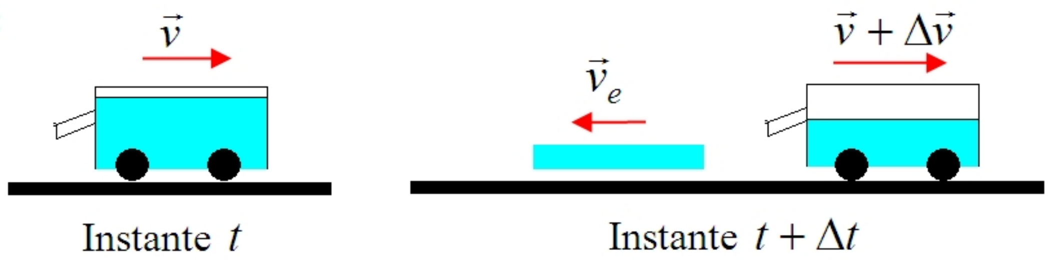

Figura 4: Esquema do objeto perdendo massa com o tempo.

Desprezemos o atrito entre os pneus do caminhão e a via, e consideremos que em um dado tempo t o caminhão possui massa $M + \delta M$ e velocidade v. Nesse instante, o momento linear será:

$$P_i = (M + \delta M)\ v$$

onde v_1 é a velocidade do jato de água. Usando a definição de velocidade relativa ($\vec{v_{12}} = \vec{v_1} - \vec{v_2}$), temos:

$$v_e(-\hat{i}) = v_1(-\hat{i}) - v(+\hat{i}) \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_e - v$$

Que substituindo na equação do momento linear final, nos dá:

$$P_f = M\ (v + \Delta v) - \delta M\ (v_e - v)$$

Como não há forças dissipativas envolvidas, o momento linear é conservado, ou seja:

$$(M + \delta M)\ v = M\ (v + \Delta v) - \delta M\ (v_e - v)$$

$$M\ \Delta v = \delta M\ v_e.$$

A variação de massa no tempo Δt será:

$$M\,(t + \Delta t) - M\,(t) = M - (M + \delta M) = -\delta M$$

Portanto:

$$M\ \Delta v = -\delta M\ v_e \quad \Rightarrow \quad \Delta v = -\frac{\delta M}{M} v_e$$

Tomando uma variação infinitesimal do tempo, $\Delta v \approx dv$ e $\delta M \approx dM$. Dessa forma:

$$dv\,(t) = -\ v_e\ \frac{dM\,(t)}{M}$$

Integrando ambos os lados da equação:

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = -\, v_e \; \int_{M}^{M(t)} \tfrac{dM}{M}$$

$$v(t) - v_0 = -\, v_e \; [\ln M(t) - \ln M]$$

$$v(t) - v_0 = \; v_e \; [\ln M - \ln M(t)]$$

$$v(t) = v_0 + \; v_e \; \ln\left(\tfrac{M}{M(t)}\right) .$$

Mas,

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\gamma \quad \Rightarrow \quad \int_{M}^{M(t)} dM = -\,\gamma \int_{0}^{t} dt \quad \Rightarrow \quad M(t) - M = -\,\gamma\, t \quad \Rightarrow \quad M(t) = M - \,\gamma\, t$$

Por fim, temos que:

$$v(t) = v_0 + \; v_e \; \ln\left(\frac{M}{M - \,\gamma\, t}\right) .$$