F 502 C – Eletromagnetismo I – 2º semestre de 2011 – Prova 2 – 11/05/2011

Nome:____ **RA:**______________

Questão 1 – **(a) [3,0 pontos]** Encontre a força sobre a carga $+q$ na Figura 1 (O plano xy é um condutor aterrado).

Questão 2 – Uma esfera metálica, sem carga, de raio R é colocada em um campo elétrico inicialmente uniforme, $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$.

(a) [1,0 pontos] Escreva as condições de contorno necessárias para encontrar o potencial fora da esfera.

(b) [1,0 ponto] Encontre o potencial fora da esfera.

(c) [1,0 ponto] Calcule o campo elétrico fora da esfera.

(d) **[1,0 ponto]** Encontre a densidade superficial induzida de carga na esfera.

Questão 3 – Um condutor esférico de raio a tem uma carga Q. Ele está cercado por um material dielétrico linear, homogêneo, de suscetibilidade χ_e, até o raio b (Figura 2).

(a) [0,5 ponto] Encontre o deslocamento elétrico **D** em cada região do espaço.

(b) [0,5 ponto] Encontre o campo elétrico **E** em cada região do espaço.

(c) [0,5 ponto] Encontre a polarização **P** no dielétrico.

(d) [0,5 ponto] Encontre a localização e a quantidade de toda a carga de polarização.

(e) [1,0 ponto] Calcule a energia desta configuração.

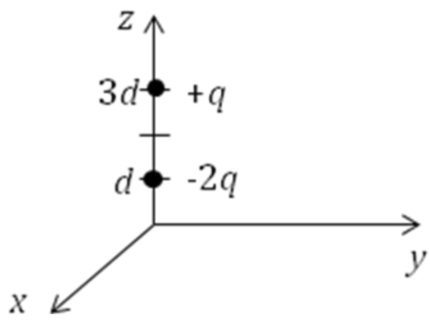


Figura 1. Questão 1.

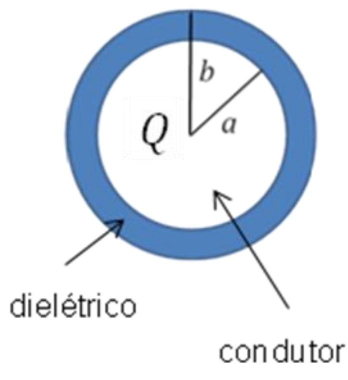


Figura 2. Questão 3.

Dados:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s}\,\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial \phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}}. \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}.$$

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$$

$$\varepsilon_r \equiv (1+\chi_e) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

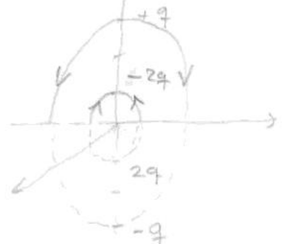
$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

Questão 1

O plano xy é um condutor, de forma que as linhas de campo precisam ser perpendiculares próximo a ele. Pelo teorema de unicidade, se encontrarmos uma solução da equação de Laplace que obedece às condições de contorno, esta será a solução do problema. As condições de contorno são: (1) $V \to 0$ quando $r \to \infty$; (2) $V(x,y,0) = 0$; (3) linhas de campo perpendiculares no condutor. O potencial do dipolo sobre o eixo z obedece a estas condições, portanto, para $z > 0$, o potencial gerado pelas cargas induzidas no condutor pode ser substituído pelo potencial de duas cargas imagem, $-q$ em $z = -3d$ e $+2q$ em $z = -d$.

O potencial será dado por



$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-3d)^2}} - \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+3d)^2}} \right\}$$

Sobre o eixo z: $$V(0,0,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{1}{|(z-3d)|} - \frac{2}{|z-d|} + \frac{2}{|z+d|} - \frac{1}{|z+3d|} \right\}$$

A força sobre a carga q será originada das outras 3 cargas, logo

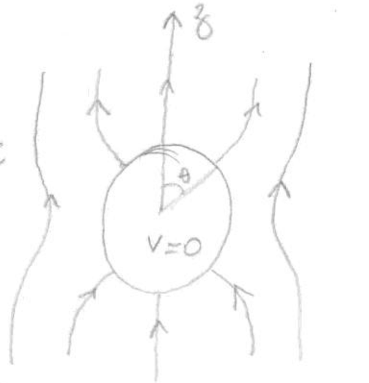
$$\vec{F} = q\vec{E} = -(\nabla V)q\Big|_{z=3d} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{-2}{(2d)^2} + \frac{2}{(4d)^2} - \frac{1}{(6d)^2} \right\}\hat{z} = \boxed{\frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(\frac{29}{72}\right)\hat{z}}$$

Alternativamente, a força pode ser diretamente calculada a partir da configuração de cargas imagem pela superposição das forças entre cargas

$$\vec{F} = -\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}\hat{z} + \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0(4d)^2}\hat{z} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(6d)^2}\hat{z}$$

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{36}\right\}\hat{z} = \boxed{-\frac{29}{72}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{z}}$$

Questão 2



(a) Antes da esfera ser colocada o potencial no campo era $V = -\int E_0 \hat{z}\cdot\hat{z}\, dz = -E_0 z + C$

Fixando $V(0)=0 \Rightarrow V = -E_0 z$.

Em coordenadas esféricas $V = -E_0 r \cos\theta$.

Se não há excesso de cargas

$$\left.\begin{array}{l} V=0 \quad \text{para } r \leq R \\ V \to -E_0 r\cos\theta \quad \text{para } r >> R \end{array}\right\} \text{Condições de contorno}$$

(b) Solução da equação de Laplace:

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

Para $r >> R$

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) = -E_0 r\cos\theta$$

$$\Rightarrow A_1 = -E_0 \quad e \quad A_0 = A_2 = \cdots = A_\ell = 0 \quad \ell \neq 1$$

Logo, para $r \geq R$ $\quad V(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$

Para $r = R$ $\quad -E_0 R\cos\theta + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) = 0$

$$\Rightarrow B_1 = E_0 R^3 \quad e \quad B_\ell = 0,\ \ell \neq 1$$

Portanto, o potencial fora da esfera é

$$V(r,\theta) = E_0 \left\{ -r + \frac{R^3}{r^2} \right\} \cos\theta \Leftrightarrow \boxed{V(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + E_0 \frac{R^3}{r^2}\cos\theta, \quad r \geq R}$$

(c) $$\vec{E} = -\nabla V(r,\theta) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} = E_0 \left\{ 1 + 2\frac{R^3}{r^3} \right\} \cos\theta\, \hat{r} + E_0 \left\{ -1 + \frac{R^3}{r^3} \right\} \operatorname{sen}\theta\, \hat{\theta}$$

(d) Próximo à superfície:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} \Rightarrow \vec{E}\cdot\hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}\cdot\hat{n} \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{n}\Big|_{r=R}$$

Na superfície da esfera $\hat{n} = \hat{r}$, logo

$$\sigma = \varepsilon_0 \left[E_0\left(1 + \frac{2R^3}{R^3}\right)\cos\theta\,\hat{r} + E_0\left(-1 + \frac{R^3}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}\right]\cdot\hat{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta}$$

Obs.: Se a esfera não estivesse aterrada, a condição para $r \leq R$ seria $V = V_0$ (condutor: potencial constante)

Na aplicação desta condição:

$$-E_0 R\cos\theta + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) = V_0$$

$$\Rightarrow -E_0 R\cos\theta + \frac{B_0}{R} + \frac{B_1}{R^2}\cos\theta = V_0$$

$$\Rightarrow B_0 = V_0 R$$
$$B_1 = E_0 R^3$$

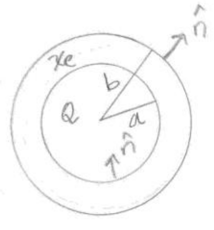
Portanto, a solução seria

$$\boxed{V(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + V_0\frac{R}{r} + E_0\frac{R^3}{r^2}\cos\theta \quad r \geq R}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V = \left[E_0\left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta + \frac{V_0 R}{r^2}\right]\hat{r} + E_0\left(-1 + \frac{R^3}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}}$$

$$\boxed{\sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta + \frac{\varepsilon_0 V_0}{R}}$$

Questão 3



(a) Para $r<a$ $\vec{D}=0$ porque não há cargas livres.

Para $r>a$ $\int \vec{D}\cdot d\vec{a} = Q_\ell = Q$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}}$$

(b) Para $r<a$ $\underline{\vec{E}=0}$ (condutor)

Para $a<r<b$ $\epsilon\vec{E}=\vec{D} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(1+\chi_e)r^2}\hat{r}}$

Para $r>b$ não há dielétrico, logo $\epsilon=\epsilon_0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

(c) A polarização é $\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \boxed{\frac{\chi_e Q}{4\pi(1+\chi_e)r^2}\hat{r}}$

(d) $\boxed{\rho = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{\chi_e Q}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right) = 0}$

$\sigma = \vec{P}\cdot\hat{n}$ $\quad \sigma_a = \frac{\chi_e Q}{4\pi(1+\chi_e)a^2}\hat{r}\cdot(-\hat{r}) = \boxed{-\frac{\chi_e}{(1+\chi_e)}\frac{Q}{4\pi a^2}}$

$\sigma_b = \frac{\chi_e}{(1+\chi_e)}\frac{Q}{4\pi b^2}\hat{r}\cdot\hat{r} = \boxed{\frac{\chi_e}{(1+\chi_e)}\frac{Q}{4\pi b^2}}$

(e) $W = \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\,d\tau$. Entre 0 e a o campo e o deslocamento são nulos. No restante do espaço:

$$W = \frac{1}{2}\left\{\int_a^b \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r r^2}4\pi r^2 dr + \int_b^{+\infty}\frac{Q}{4\pi r^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2 dr\right\}$$

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\varepsilon_r a} - \frac{1}{\varepsilon_r b} + \frac{1}{b}\right\} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(1+\chi_e)}\left\{\frac{1}{a} + \frac{\chi_e}{b}\right\}}$$