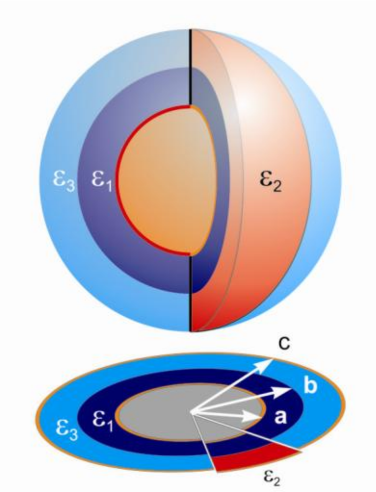
Prova de Eletromagnetismo EE 521 – 21 de maio de 2009. Prof. Cesar Pagan. FEEC – UNICAMP

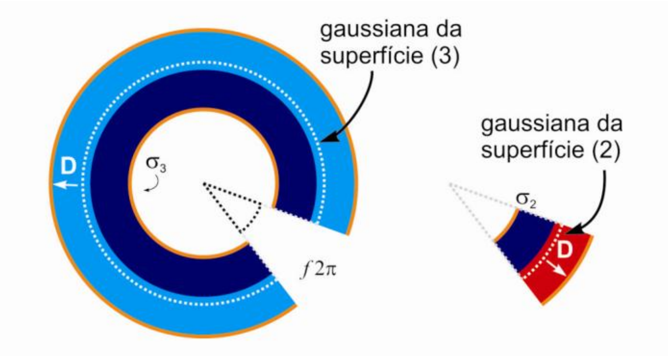
1. **(4,0) Dielétricos e Capacitância.** Duas esferas condutoras concêntricas, com raios *a* e *c*, são preenchidas com um material dielétrico dividido em duas camadas. A primeira camada possui permissividade elétrica ε_1 e preenche o espaço a<r<b (aqui, a<b<c). A segunda, é dividida em duas partes: para $0<\phi<f2\pi$ (sendo $0<f<1$), temos ε_2 e para $f2\pi<\phi<2\pi$, temos ε_3. Considere que as camadas são finas em comparação com o raio interno a.
   a. (0,8) Calcule a densidade de fluxo elétrico **D** para $0<\phi<f2\pi$ e para $f2\pi<\phi<2\pi$.
   b. (0,8) Calcule a diferença de potencial para $0<\phi<f2\pi$ e para $f2\pi<\phi<2\pi$.
   c. (0,8) Calcule a densidade superficial de cargas para $0<\phi<f2\pi$ e para $f2\pi<\phi<2\pi$.
   d. (0,8) Calcule a carga total.
   e. (0,8) Calcule a capacitância.

Solução



O esquema do capacitor deste exercício está na figura ao lado. Este capacitor possui diferentes regiões, nas quais o valor para o campo elétrico não é o mesmo em função do raio. Nas interfaces 1-2 e 1-3, que ocorrem ao longo da superfície *r=b*, a componente **radial** do campo elétrico é descontínua, $\varepsilon_1 E_{r1}=\varepsilon_2 E_{r2}$ e $\varepsilon_1 E_{r1}=\varepsilon_3 E_{r3}$. Entretanto, na interface entre os meios 2-3 que ocorre nas superfícies com ϕ constante em $\phi=0$ e $\phi=f2\pi$, a componente tangencial do campo elétrico também está na direção **radial**, desta vez é igual nos dois meios. Esta complicação pode ser removida se consideramos que as camadas “finas” quando comparadas com o raio das superfícies. Com esta hipótese podemos supor que, localmente (para um valor fixo de ϕ), o campo mantém-se perpendicular à superfície condutora por toda a extensão entre a esfera interna e a esfera externa. É com este modelo que resolveremos nosso problema.

Supor que o campo é exclusivamente radial, permite tratar o problema em duas regiões: uma para $0<\phi<f2\pi$ e outra para $f2\pi<\phi<2\pi$. Em cada uma delas temos uma camada interna com permissividade elétrica igual, ε_1, e outra em que as permissividades elétricas são diferentes, respectivamente ε_2 e ε_3. Analisando cada uma em separado, vemos que o campo elétrico é diferente, visto que as permissividades são diferentes. Mas o fato de que as superfícies condutoras em a e em c sejam equipotenciais, impõe que a integral do campo elétrico na direção radial entre estes limites apresente o mesmo resultado nas duas regiões. Isto só é possível se a densidade de cargas superficial – causadora do campo – possuir um valor próprio para cada região. Faremos esta hipótese para resolver este problema, utilizando o índice (2) para identificar a região $0<\phi<f2\pi$, onde há uma camada com ε_2, e o índice (3) para identificar a região $f2\pi<\phi<2\pi$, onde há uma camada com ε_3. Calculamos inicialmente o valor de D para cada região, para a qual usamos as superfícies gaussianas como desenhadas ao lado.



Em cada caso, consideramos o vetor **D** normal à superfície esférica externa e paralelo às faces laterais, que são radiais. Temos:

$$f4\pi r^2 D_{r,2} = f4\pi a^2\sigma_2\text{, logo } D_{r,2} = \sigma_2\frac{a^2}{r^2}$$

O mesmo cálculo vale para a região (3), porém para a superfície $(1-f)4\pi$:

$$D_{r,3} = \sigma_3\frac{a^2}{r^2}.$$

O valor do campo elétrico é diretamente obtido de *D,* pela relação **D =** ε**E**. Na camada interna, os valores de **E** são

$$E_{r,2}(a < r < b) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_1}\frac{a^2}{r^2} \quad \text{e} \quad E_{r,3}(a < r < b) = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_1}\frac{a^2}{r^2}.$$

e para a camada externa,

$$E_{r,2}(b < r < c) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}\frac{a^2}{r^2} \quad \text{e} \quad E_{r,3}(b < r < c) = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_3}\frac{a^2}{r^2}.$$

Com isto, podemos calcular a diferença de potencial entre os condutores em *r=a* e *r=c.* Fazendo a placa *r=a* (interna) positiva, seu potencial será maior do que o da placa negativa. Assim, *V=V(a)-V(c)* será positivo. Para a região (2),

$$V = -\frac{\sigma_2 a^2}{\varepsilon_2}\int_c^b \frac{dr}{r^2} - \frac{\sigma_2 a^2}{\varepsilon_1}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \sigma_2 a^2 [\frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_2}(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})]$$

e para a região (3),

$$V = \sigma_3 a^2 [\frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_3}(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})].$$

Com estas informações, podemos calcular as densidades de superficiais de carga, σ_2 e σ_3:

$$\sigma_2 = \frac{1}{a^2}\frac{V}{[\frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_2}(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})]} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \frac{1}{a^2}\frac{V}{[\frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_3}(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})]}.$$

Assim, a carga total é a integral da densidade de cargas nas duas regiões:

$$Q = \int_0^{f2\pi}\int_0^{\pi} \sigma_2 a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi + \int_{f2\pi}^{(1-f)2\pi}\int_0^{\pi} \sigma_3 a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{f4\pi V}{[\frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_2}(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})]} + \frac{(1-f)4\pi V}{[\frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_3}(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})]}.$$

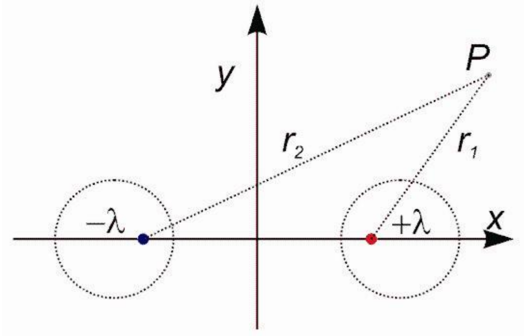
ou

$$Q = 4\pi\left[\frac{f}{[\frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_2}(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})]} + \frac{1-f}{[\frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_3}(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})]}\right]V.$$

Comparando esta relação com Q=CV, obtemos

$$C = 4\pi\left[\frac{f}{[\frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_2}(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})]} + \frac{1-f}{[\frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_3}(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})]}\right].$$

2. **(2,0) Linha de dois fios.** Mostre que para dois fios condutores paralelos infinitos no plano *xz,* um carregado positivamente em x=a e outro negativamente em x=-a , com densidades +λ e -λ respectivamente, temos superfícies equipotenciais dadas por cilindros. Calcule o raio e o centro de cada cilindro em função do potencial. Considere o zero de potencial no plano *x=0*.



Solução

Considere o potencial devido a um fio infinito com densidade linear de cargas λ

$$V_\lambda(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(\frac{r_0}{r}).$$

Fazendo r_0 na origem, podemos escrever o potencial devido às duas linhas de carga como

$$V(r) = V_1 + V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}[\ln(\frac{r_0}{r_1}) - \ln(\frac{r_0}{r_2})] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(\frac{r_2}{r_1}).$$

onde r_1 e r_2 são, respectivamente, a distância das linhas de cargas positiva e negativa até a posição r=(x,y). Não consideramos a coordenada *z* porque a distância de um ponto às retas não dependem de *z.* Assim:

$r_1 = ((x-a)^2 + y^2)^{1/2}$ e $r_2 = ((x+a)^2 + y^2)^{1/2}$.

Substituindo estes valores, obtemos

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}).$$

Note que ao fazer o argumento do logaritmo constante para variações de *x* e *y, V(r)* também será constante. Assim,

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(K),\ \text{para}\ K = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}.$$

Desenvolvendo a expressão para o parâmetro *K,*

$$K(x^2 - 2ax + a^2) + y^2 = (x^2 + 2ax + a^2) + y^2$$
$$x^2 - 2a\frac{(K+1)}{(K-1)}x + a^2 + y^2 = 0$$

Somando e subtraindo $a^2(K+1)^2/(K-1)^2$,

$$x^2 - 2a\frac{(K+1)}{(K-1)}x + a^2\frac{(K+1)^2}{(K-1)^2} - a^2\frac{(K+1)^2}{(K-1)^2} + a^2 + y^2 = 0$$
$$(x - a\frac{K+1}{K-1})^2 + y^2 = a^2\frac{(K+1)^2}{(K-1)^2} - a^2\frac{(K-1)^2}{(K-1)^2} = a^2\frac{K^2 + 2K + 1 - K^2 + 2K - 1}{(K-1)^2} = (a\frac{2\sqrt{K}}{(K-1)})^2$$

que é a equação de uma circunferência de raio $R = 2a\sqrt{K}/|K-1|$ e centro em a(K+1)/(K-1). Assim, mostramos que as superfícies equipotenciais são cilindros com centro x_c em

$$x_c = a\frac{K+1}{K-1}\ \text{e raio}\ R = a\frac{2\sqrt{K}}{|K-1|}.$$

Note que a substituição de K por 1/K, resulta na manutenção do valor de R e na troca de x_c por $-x_c$.

3. **(2,0) Equação de Laplace.** Seja *V(x,y)*= $V(x,y) = ae^{\pm\alpha x} + f \pm by^2$, em uma região na qual ρ*=0.* Sabe-se que E_x e *V* são zero na origem. Encontre o valor de *f*(x) e V(x,y).

Solução

Considere o laplaciano de∇^2V=0,

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V = a\alpha^2 e^{\pm\alpha x} + f'' \pm 2b = 0$$

de onde concluímos que

$$f'' = -a\alpha^2 e^{\pm\alpha x} \mp 2b$$

Integrando *f''*, obtemos

$$f' = \mp a\alpha e^{\pm\alpha x} \mp 2bx + C_1$$

e

$$f = -ae^{\pm\alpha x} \mp bx^2 + C_1 x + C_2.$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração. Assim,

$$V(x,y) = ae^{\pm\alpha x} + ae^{\pm\alpha x} \mp bx^2 + C_1 x + C_2 \pm by^2 = \pm b(y^2 - x^2) + C_1 x + C_2.$$

Sabemos que *V(0,0)=0,* logo

$$C_2 = 0.$$

Para obter a componente E_x do campo elétrico fazemos

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}V(x,y) = \mp bx^2 + C_1$$

e como $E_x(0,0)=0$, concluímos que

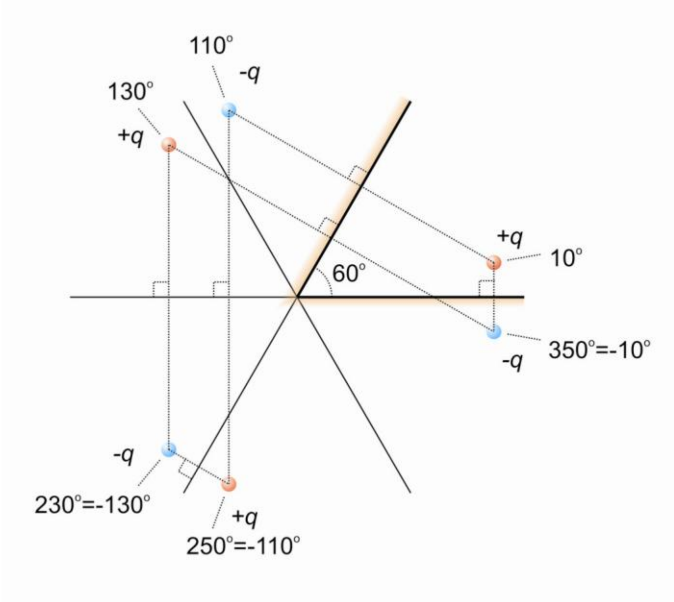
$$C_1 = 0.$$

Assim, temos

$$f = -ae^{\pm\alpha x} \mp bx^2 \quad \text{e} \quad V(x,y) = \pm b(y^2 - x^2).$$

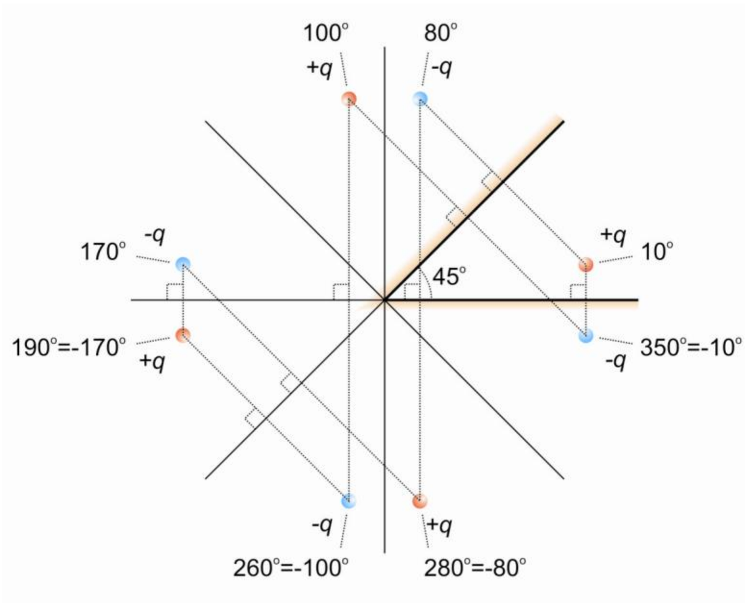
4. **(2,0) Método das Imagens.** Considere duas placas condutoras semi-infinitas formando um ângulo α=45° (ou de α=60° dependendo da prova) entre si. Suponha um sistema de coordenadas cilíndricas em que a junção dos semi-planos coincida com o eixo z, sendo que uma das placas está na direção ϕ =0 e a outra está na direção ϕ =α. Uma carga *+q* é colocada na posição $\rho_0=1$, $\phi_0=10^o$. Indique a posição (em coordenadas cilíndricas) e o valor de todas as cargas imagem necessárias para manter os condutores em potencial nulo.

Solução para α=60°:



O conjunto de cargas imagem para dois semi-planos inclinados em 60º é mostrado ao lado. Para a carga real colocada em $\rho_0=1$, $\phi_0=10^o$, temos cinco cargas imagem, todas em $\rho_0=1$. A solução deste problema é realizada através da colocação de cargas imagem em posições que tornam nulos os potenciais dos planos condutores, não apenas na região em que eles efetivamente existem, mas em todo o espaço, supondo estes planos infinitos. As cargas nos ângulos -10° e 110° são imagens diretas da carga real. São as primeiras a serem colocadas e posicionam-se sobre segmentos de reta que as ligam à carga real, formando um ângulo reto com os planos dos condutores. A existência destas cargas exige a colocação de outras cargas imagem: uma em 130° para balancear a carga colocada na em -10° e outra em -110° para compensar a carga colocada em +110°. Finalmente, as cargas-imagem colocadas em 130° e -110° necessitam de outra carga imagem colocada em 230°. Este conjunto fará com que o potencial nos semi-planos seja zero, uma vez que todas estão colocadas simetricamente em relação aos seus pares com cargas opostas, o que torna nulo o potencial nos planos de simetria.

Solução para α=45°:



Neste caso, temos sete cargas imagens. As cargas imediatamente próximas aos semi-planos reais foram colocadas em 80° e -10°. Para balancear a primeira, outra carga é colocada em -80°, enquanto o balanceamento da segunda necessita de uma nova carga em 100°. Para compensar estas cargas e manter a simetria, colocamos novas cargas em 170° e -100° respectivamente. Finalmente, uma carga em -170° é necessária para balancear as duas últimas.