MC548: Projeto e Análise de Algoritmos II

Prof. Cid C. de Souza – 1ª Prova – (02/09/2010)

Nome:	
RA:	**Turma:**

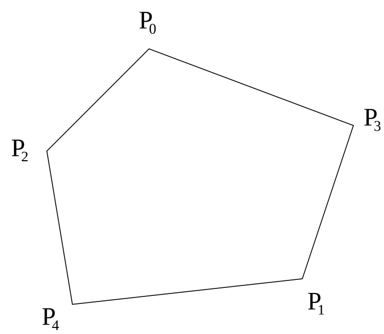
Observação: o peso das questões será decidido pelo docente da seguinte forma: as duas questões que você responder melhor terão peso 3 e as demais terão peso 2. Portanto, uma mesma questão pode ter peso 2 para um aluno e peso 3 para um outro aluno.

Questão	frac	Peso	Nota
1			
2			
3			
4			
Total		10,0	

Instruções:

1. A duração da prova é de 110 minutos.
2. Coloque o seu nome, RA e turma em **no alto desta página e em todas as folhas de resposta**.
3. Não é permitido usar qualquer material de consulta.
4. **Questões mal justificadas serão consideradas erradas !**
5. Use as folhas de papel almaço entregues pelo docente para responder às questões da prova.
6. A prova pode ser feita a lápis porém, nesse caso, você fica impedido de solicitar revisão de nota.
7. O uso de calculadoras ou quaisquer outros equipamentos eletrônicos, inclusive celulares, está proibido durante a prova.
8. Não desgrampeie o caderno de questões.
9. **Você pode supor que os seguintes resultados como sendo conhecidos:** em um modelo de computação baseado em comparações, os problemas de ordenar um vetor de n elementos e o de buscar uma chave x em um vetor *ordenado* de n elementos têm cota inferior $n \log n$ e $\log n$, respectivamente.

1. Seja P um polígono convexo com n lados no plano e $\{p_0 = (x_0, y_0), p_1 = (x_1, y_1), \dots, p_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ os pontos que definem seus vértices. Uma forma de representar P no computador é através de uma seqüência de inteiros distintos $\{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}\}$ de modo que que, para todo $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $i(j) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e o segmento de reta $\overline{p_{i(j)}p_{i(j+1)}}$ é um lado de P (os índices são calculados módulo n). Em outras palavras, esta seqüência poderia ser entendida do seguinte modo: começando do vértice $p_{i(0)}$ e nos deslocando *sempre* em sentido horário (ou anti-horário, tanto faz) sobre o perímetro de P, os vértices visitados seriam $p_{i(0)}, p_{i(1)} \cdots, p_{i(n-1)}$, nessa ordem. Por exemplo, no polígono abaixo, a representação poderia ser dada por $\{2, 0, 3, 1, 4\}$.



O problema POL tem o seguinte enunciado: *são dados um valor inteiro $n > 0$ e, para todo $i = 0, \dots, n-1$, um par de valores (x_i, y_i) com as coordenadas do vértice i do polígono P no plano. Suponha que a ordem de entrada dos dados relativos aos vértices seja* **arbitrária**. *Encontre uma seqüência de índices dos vértices de modo que P seja representado na forma descrita acima.* Responda aos itens a seguir:

(a) Se A for um problema com cota inferior $n \log n$ e existir uma redução de A para POL com complexidade $\Theta(n \log n)$ então pode-se concluir que $n \log n$ é uma cota inferior para POL. Falso ou verdadeiro ? **Justifique**.

(b) Mostre que em um *modelo de computação baseado em comparações*, todo algoritmo que resolve POL tem complexidade dada por $\Omega(n \log n)$.

2. Considere o seguinte problema de programação linear (PL):

$$
(P) \quad
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max\ z = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.a} & x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\
 & x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & & & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 4 \\
\end{array}
$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \text{ irrestrito em sinal.}$$

Escreva o problema dual de (P) com **exatamente** três variáveis duais e três restrições (desconsideradas aquelas referentes aos sinais das variáveis duais).

3. Considere o PL abaixo:

$$
\begin{array}{lrrcr}
\max & x_1 & +3x_2 & & \\
 & -\ x_1 & +\ x_2 & \leq & -1 \\
 & -2x_1 & -2x_2 & \leq & -6 \\
 & -\ x_1 & +4x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Responda aos itens abaixo:

(a) Escreva esse PL na forma relaxada inicial e mostre que a solução básica correspondente não é viável.

(b) Escreva o PL que deve ser resolvido na FASE 1 (INITIALIZE-SIMPLEX) na forma **canônica** (conforme definida em *aula*) **e** na forma relaxada inicial.

(c) Resolva o PL do item anterior (FASE 1) pelo algoritmo SIMPLEX até encontrar uma solução ótima. Em seguida, argumente porque essa solução mostra que o PL original (aquele do início do enunciado) é viável e construa o PL na forma relaxada que corresponde à solução básica (do problema original) encontrada no final da FASE 1.

(d) Faça um gráfico que represente o conjunto de soluções viáveis do PL **original** no espaço das variáveis x_1 e x_2, indicando qual é ponto que corresponde à solução básica obtida ao final da FASE 1. Finalmente, indique na figura um ponto que corresponde à uma solução ótima ou, se for o caso, argumente porque o problema é ilimitado.

Se facilitar, use o reticulado abaixo para fazer o seu gráfico.

4. O Cafiristão, pequeno país asiático, está planejando a expansão da sua geração de energia elétrica para atender à previsão de demanda para os próximos H anos. Por simplificação, nesse planejamento supõe-se que as variações na quantidade de energia ofertada e demandada pelo sistema sempre ocorrem no início do ano. Assim, para cada ano h em $\{1, 2, \ldots, H\}$, a demanda estimada é de d_h megawatts. Além disso, a quantidade de energia existente hoje, integralmente gerada por termoelétricas a **óleo**, e que estará disponível no ano h será de e_h megawatts (esse valor é variável ao longo do horizonte porque as usinas vão sendo descontinuadas com o passar dos anos). Existem duas **alternativas** para expandir a geração de energia elétrica: *(a)* usinas termoelétricas a **carvão** e *(b)* usinas **nucleares**. O custo por megawatt produzido por uma usina a carvão e disponibilizado no início do ano h é dado por c_h. Da mesma forma, o custo por megawatt produzido por uma usina nuclear e disponibilizado no início do ano h é dado por n_h. Por razões políticas e de segurança, decidiu-se que, em nenhum momento (ano), mais que 20% da energia **total** em produção poderá ser proveniente de usinas nucleares. Além disso, sabe-se que a vida útil de uma usina à carvão é de 20 anos enquanto que a de uma usina nuclear é de 15 anos. Obviamente, o ministério da Fazenda do Cafiristão deseja planejar a expansão do setor elétrico de modo a minimizar os seus custos. Essencialmente, cabe ao ministério decidir a quantidade de energia que será adicionada ao sistema a cada ano e qual a sua origem (se de usina a carvão ou de nuclear).

Formule o problema acima como um PL. Para tanto, responda aos itens abaixo:

(a) Diga quais são as variáveis do seu modelo, explicando cuidadosamente o seu significado. Qual o número total de variáveis ?

(b) Escreva qual é a função objetivo do seu modelo.

(c) Para um ano h em $\{1, 2, \ldots, H\}$, como você pode descrever qual a quantidade de energia (em megawatts) produzida por usinas a **carvão** naquele ano usando uma função **linear** nas variáveis do seu modelo ?

(d) Repita o item anterior mas considerando a energia produzida por usinas nucleares.

(e) Diga quais são as restrições do seu modelo explicando cuidadosamente o seu significado. Qual é o número total de restrições ?