EE 400 Métodos da Engenharia Elétrica
Gabarito - Exame - 13/12/2010 - Prof. Rafael

1) A superfície S pode ser parametrizada por:

$r(u,v) = 2$
$\phi(u,v) = u \qquad 0 \leq u < 2\pi$
$z(u,v) = v \qquad v$ ilimitado

Portanto: $\dfrac{\partial \vec{l}}{\partial u} = 2\,\vec{a}_\phi \; ; \; \dfrac{\partial \vec{l}}{\partial v} = \vec{a}_z$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{\partial \vec{l}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{l}}{\partial v} = 2\,\vec{a}_r$$

A integral de superfície é dada por:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} \vec{F}(u,v)\cdot\vec{N}\,du\,dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} \left(K e^{-|v|}\,\vec{a}_r + v\,\vec{a}_z\right)\cdot\left(2\,\vec{a}_r\right)\,du\,dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} 2K\,e^{-|v|}\,du\,dv = 4K\pi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|}\,dv$$

$$= 4K\pi\cdot 2\int_0^{\infty} e^{-v}\,dv = \boxed{8K\pi}$$

Obs.: O teo de Gauss não pode ser usado, pois a superfície não é limitada.

2) $f(z) = z^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}\log z}$

Para $z = e$, temos:

$$\log z = \underbrace{\log e}_{\text{função complexa}} = \underbrace{\text{Log}\, e}_{\text{função real}} + i\,2m\pi$$

$m \in \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$

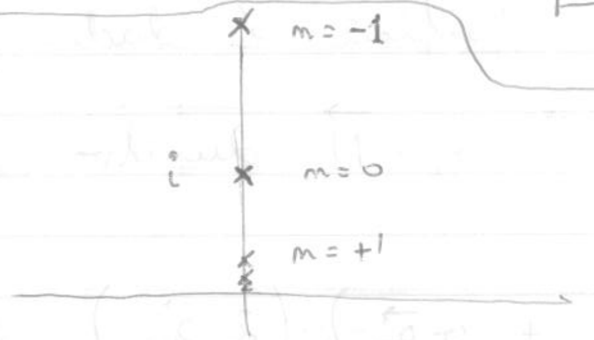
Portanto:

$$f(e) = e^{i\frac{\pi}{2}\left(\text{Log}\, e + i\,2m\pi\right)} =$$

$$= e^{-m\pi^2 + i\frac{\pi}{2}\text{Log}\, e} = e^{-m\pi^2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}\text{Log}\, e} =$$

$$= e^{-m\pi^2}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{i\, e^{-m\pi^2}}$$

$m \in \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$



3) A transformação desejada é do tipo

$$\omega = e^{i\theta_0}\,\frac{z - z_0}{z + \bar{z}_0} \qquad \text{Re}\, z_0 > 0$$

que mapeia o semi-plano direito no interior do círculo unitário

As retas $x = 0$ e $x = 1$ tem como imagem respectivamente os círculos

$$|w| = 1 \quad \text{e} \quad |w + 1/2| = 1/2$$

O ponto de intersecção entre estes círculos (i.e. $w = -1$) corresponde ao $\lim_{z \to \infty} f(z)$

Portanto:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = e^{i\theta_0} = -1$$

(Além disso o ponto $z = 1$ tem como imagem algum ponto do círculo $|w + 1/2| = 1/2$)

O ponto $w = 0$ é imagem de algum ponto pertencente à reta $x = 1$. Este ponto é arbitrário pois o círculo $|w + 1/2| = 1/2$ é o único círculo totalmente contido no disco unitário que passa pelos pontos $w = -1$ e $w = 0$. Vamos escolher portanto $f(1) = 0$:

$$\Rightarrow 0 = -1 \cdot \frac{1 - z_0}{1 + \bar{z}_0} \Longrightarrow z_0 = 1$$

Finalmente: $\boxed{f(z) = -\frac{z - 1}{z + 1}}$

4) $$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 3}{(z-1)(z-2)^2}$$

Expandindo em frações parciais:

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B_1}{z-2} + \frac{B_2}{(z-2)^2}$$

$$A = (z-1)\, f(z)\Big|_{z=1} = 1$$

$$B_2 = (z-2)^2 f(z)\Big|_{z=2} = 1$$

$$B_1 = \frac{d}{dz}\left[(z-2)^2 f(z)\right]\Big|_{z=2} = \frac{(2z-3)(z-1) - (z^2-3z+3)}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=2}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_1 = 0}$$

Logo $$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-2)^2}$$

Imediatamente conclui-se que:
Resíduo no polo simples $z=1$: $K_1 = 1$
Resíduo no polo duplo $z=2$: $K_2 = 0$

Dado que a traj. C_1 envolve apenas o polo $z=2$ e que a traj. C_2 envolve os dois polos ($z=1$ e $z=2$) temos:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= \oint_{C_1} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot K_2 = 0 \\ I_2 &= \oint_{C_2} f(z)\, dz = 2\pi i\,(K_1+K_2) = 2\pi i \end{aligned}}$$

5) $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta$$

Façamos $z = e^{i\theta}$

$$dz = i e^{i\theta}\, d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Se $\theta \in [0, 2\pi)$ então $|z| = 1$ ($z \in$ círculo unitário)

Portanto:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^2}{5 - 4\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]} \frac{dz}{iz} =$$

$$= \frac{1}{8i} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2}{z^2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\, dz$$

O integrando tem polos em $z=0$ (duplo) $z=1/2$ (simples) e $z=2$ (simples)

Apenas os ~~polos~~ resíduos em $z=0$ e $z=1/2$ entram no cálculo da integral, pois o polo $z=2$ está fora do círculo unitário.

Residuo em $z = 0$:

$$K_0 = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}\right]\Bigg|_{z=0} = \frac{5}{2}$$

Residuo em $z = 1/2$

$$K_{1/2} = \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-2)}\Bigg|_{z=1/2} = -\frac{3}{2}.$$

Portanto:

$$I = 2\pi i \, \frac{1}{8i}\left(K_0 + K_{1/2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$