F 520
MS550

Nome: GABARITO R.A.:

Métodos Matemáticos I **1º Teste** (12/03/2008)

(**Atenção:** *Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.*)

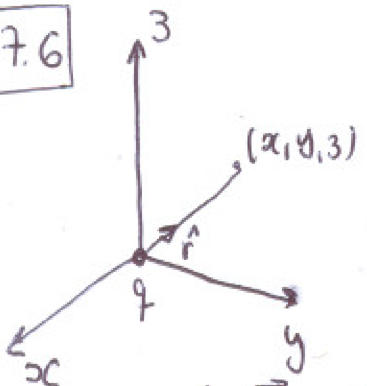
1.7.6 (5 Pontos) O campo eletrostático de uma carga puntual q situada na origem é dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Calcule o divergente do campo $\vec{E}$. Comente o que ocorre na origem.

1.6.5a (5 Pontos) Mostre que a condição necessaria e suficiente para que duas funções suaves $u(x,y,z)$ e $v(x,y,z)$ obedeçam a uma relação funcional do tipo $f(u,v)=0$ é que $(\nabla u)\times(\nabla v)=0$.

$\boxed{1.7.6}$



$$\hat{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{r}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{1}{r^3}\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^3}\left(1 - 3\frac{x^2}{r^2}\right)$$

as outras componentes são calculadas de maneira análoga. Finalmente:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3x^2}{r^2} + 1 - \frac{3y^2}{r^2} + 1 - \frac{3z^2}{r^2}\right) = 0$$

para todos os pontos exceto a origem, onde $|\vec{E}| \to \infty$. O que ocorre na origem? Calculando-se o fluxo do campo $\vec{E}$ em uma esfera de raio R com centro na origem obtem-se facilmente: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$. Porem, pela lei de Gauss, $\int \operatorname{div}\vec{E}\, d\mathrm{vol} = \frac{q}{\varepsilon_0}$. Como $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ em todos os pontos exceto a origem, temos que $\operatorname{div}\vec{E} \to \infty$ na origem para que $\int \operatorname{div}\vec{E}\, d\mathrm{vol} \neq 0$.

— // —

$\boxed{1.6.5a}$ <u>Condição necessaria</u>: $f(u,v)=0 \Longrightarrow (\nabla u)\times(\nabla v)=0$.

Calculando-se o gradiente de $f(u,v)$ tem-se $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v = 0$. Os campos ∇u e ∇v são, portanto, colineares, implicando em $(\nabla u)\times(\nabla v)=0$

<u>Condição suficiente</u>: $(\nabla u)\times(\nabla v)=0 \Longrightarrow f(u,v)=0$.

Se $(\nabla u)\times(\nabla v)=0$, então os campos vetoriais ∇u e ∇v são, necessariamente, colineares: $\nabla u = g\,\nabla v \equiv \vec{F}$ (g é uma função $g: R^3 \to R$). O campo vetorial $\vec{F}$ é, por construção, um gradiente. Como ∇u e ∇v são colineares, as hipersuperficies $u(x,y,z) = C_1$ (ortogonal a ∇u) e $v(x,y,z) = C_2$ (ortogonal a ∇v) são <u>idênticas</u>. Fixando-se um ponto (x_0, y_0, z_0) pode-se relacionar C_1 e C_2. Em outras palavras, existirá uma relação do tipo $f(C_1, C_2) = f(v, u) = 0$ para todo (x,y,z) em que u e v estiverem definidos.