ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Метод итераций

Предполагается, что система уравнений представлена в виде

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, \quad \dots \quad x_n) \\ x_2 = f_2(x_1, \quad \dots \quad x_n) \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = f_n(x_1, \quad \dots \quad x_n) \end{cases}, \qquad (1)$$

где $f_i(x_1, \ \dots \ x_n)$ непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1, \ \dots \ x_n$ в некоторой области *D*, содержащей решение системы (1).

Обозначив через

$$x = (x_1 , \quad \dots \quad x_n)^T \text{ и } f = (f_1 , \quad \dots \quad f_n)^T$$

систему (1) можно представить в более удобном для изложения виде

$$x = f(x^T)$$

Пусть $x^{(0)} = (x_1^{(0)} , \quad \dots \quad x_n^{(0)})^T$ некоторое приближение к искомому решению. Тогда вычислительный процесс, организуемый по формуле

$$x^{(\kappa+1)} = f(x^{(\kappa)^T}), \qquad (2)$$

где $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ называется **методом итераций.** Если при вычислении очередной координаты (κ+1)-го приближения использовать вычисленные перед этим значения предыдущих координат этого же приближения, получим модификацию, называемую **методом Зейделя.**

В ней алгоритм вычислений описывается следующим образом

$$\begin{cases} x_1^{(\kappa+1)} = f_1(x_1^{(\kappa)},\ x_2^{(\kappa)},\ \ \ldots\ \ x_{n-1}^{(\kappa)},\ x_n^{(\kappa)}) \\ x_2^{(\kappa+1)} = f_1(x_1^{(\kappa+1)},\ x_2^{(\kappa)},\ \ \ldots\ \ x_{n-1}^{(\kappa)},\ x_n^{(\kappa)}) \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n^{(\kappa+1)} = f_n(x_1^{(\kappa+1)},\ x_2^{(\kappa+1)},\ \ \ldots\ \ x_{n-1}^{(\kappa+1)},\ x_n^{(\kappa)}) \end{cases}.$$

При определенных условиях метод итераций (2) сходится к точному решению системы (1). Установим эти условия, используя, как и при анализе линейных систем, понятие сжимающего отображения.

В предыдущей лекции было показано, что сходимость итерационной последовательности обеспечивается сходимостью образующего ее отображения.

Пусть в *n*-мерном пространстве $R_n = \left\{ (x_1, \dots x_n),\ x_i \in R,\ i = \overline{1,n} \right\}$ набор функций $f_i(x)$ определяет некоторое непрерывно дифференцируемое отображение. Пусть x, y произвольные точки $\boldsymbol{R}_n$, оценим $\| f(x) - f(y) \|$. Предположим, что величина $\| x - y \|$ достаточно мала и в тейлоровских разложениях функций $f_i(x)$ в точке x позволительно ограничиться величинами первого порядка малости. Тогда

$$\| f(x) - f(y) \| \cong \| f(x) - (f(x) - I(f(x)) \cdot (y - x)) \| =$$
$$= \| I(f(x) \cdot (y - x)) \| \le \| I(f(x)) \| \cdot \| y - x \| \quad ,$$

где

$$I(f(x))=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

матрица Якоби системы функций $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Если $\|I\| \le \alpha < 1$ в области D, отображение f является сжимающим и итерационный процесс (2) сходится к решению системы (1). Более определенно это формулируется в виде следующей **теоремы:**

Пусть в области D система (1) имеет, по крайней мере, одно решение, принадлежащее ее внутренней части и норма матрицы Якоби $I(f(x))$ в замыкании $\overline{D}$ области D меньше единицы. То есть, существует такое $\alpha \in (0;1)$, что $\sup\limits_{x \in \overline{D}} \|I\| = \alpha < 1$. Тогда в области D система (1) имеет решение и итерационный процесс (2) сходится к одному из решений при любом выборе начального приближения $x^{(0)}$

Погрешность *k*-го приближения можно оценить соотношением

$$\left\| x^{(к)} - x \right\| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\| x^{(к)} - x^{(к-1)} \right\|.$$

Замечание. Нередко исходная система уравнений бывает представленной в неявной форме

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \quad ... \quad x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, \quad ... \quad x_n) = 0 \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \varphi_n(x_1, \quad ... \quad x_n) = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

где якобиан системы

$$\frac{D(\varphi_1, \quad ... \quad \varphi_n)}{D(x_1, \quad ... \quad x_n)} \ne 0.$$

Тогда для приведения (4) к виду (1), обеспечивающему сходимость, можно использовать соображения, аналогичные высказанным выше (см. предыдущую лекцию). А именно, умножим обе части (4) на некоторую неособенную квадратную матрицу A

$$0 = A\varphi,$$

прибавим, далее к обеим частям x

$$x = x + A\varphi,$$

обозначим

$$f(x) = x + A\varphi$$

и потребуем, чтобы

$$\| I(f(x)) \| = \alpha < 1.$$

Из этого соотношения можно определить коэффициенты матрицы A. Если это сделать затруднительно для всей области D, то указанную операцию можно производить пошагово на каждом шаге итерационного процесса.

Поясним это на примере двух уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y)=0 \\ \varphi_2(x,y)=0 \end{cases}.$$

Обозначим

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{cases} x=x+a\varphi_1+b\varphi_2 \\ y=y+c\varphi_1+d\varphi_2 \end{cases}.$$

Отсюда

$$I(\varphi_1,\varphi_2)=\begin{pmatrix} 1+a\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}+b\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & a\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}+b\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \\ c\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}+d\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & 1+c\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}+d\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Зададим далее, $\alpha < 1$ и потребуем, чтобы

$$\begin{cases} 1+a\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}+b\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\dfrac{\alpha}{2} \\ a\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}+b\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}=\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}.$$

Отсюда, по правилу Крамера получаем

$$a=\frac{(\dfrac{\alpha}{2}-1)\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}-\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}}{\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)}},\quad b=\frac{\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}-(\dfrac{\alpha}{2}-1)\cdot\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}}{\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)}}.$$

Аналогичным образом, потребовав

$$\begin{cases} c\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + d\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \dfrac{\alpha}{2} \\ 1 + c\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} + b\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Найдем c и d.

Проводя указанные преобразования на каждом шаге итерационного процесса, тем самым создаем условия для сходимости его со скоростью α в целом.

Метод Ньютона

В принципиальном плане он представляет собой обобщение ранее рассмотренного метода касательных. Предположим, что исходная система уравнений имеет вид (4) или в свернутом виде

$$\varphi(x^T) = 0 . \qquad (4)$$

Пусть $x^{(0)}$ - некоторое приближение к решению. Разложим левые части (4) по формуле Тейлора, ограничиваясь учетом малых первого порядка. В результате этого, получим

$$\begin{cases} \varphi_1(x^{(0)^T}) + d\varphi_1(x^{(0)^T}) \cong 0 \\ \varphi_2(x^{(0)^T}) + d\varphi_2(x^{(0)^T}) \cong 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \varphi_n(x^{(0)^T}) + d\varphi_n(x^{(0)^T}) \cong 0 \end{cases} ,$$

или, в более удобном, матричном виде

$$\varphi(x^{(0)^T})+I(\varphi(x^{(0)^T})(x-x^0)\cong 0,$$

где $I(\varphi(x^{(0)^T}))$ - матрица Якоби системы функций $\varphi_1, \dots \varphi_n$. Предполагая, что $det\, I \neq 0$, разрешим последнее уравнение относительно *x*. Тогда

$$x\cong x^{(0)}-I^{-1}(\varphi(x^{(0)^T})\cdot\varphi(x^{(0)^T})$$

и на основе этого соотношения формируется вычислительный процесс, который и называется **методом Ньютона:**

$$x^{(\kappa+1)}\cong x^{(\kappa)}-I^{-1}(\varphi(x^{(\kappa)^T})\cdot\varphi(x^{(\kappa)^T}) \qquad (5)$$

Если последовательность $\left\{x^{(\kappa+1)}\right\}$ сходится к некоторому вектору *x*, то он очевидно, и является решением системы (4). Действительно, в этом случае из (5) следует

$$x = x - I^{-1}(\varphi(x^T)) \cdot \varphi(x^T),$$

откуда, в силу $\det I \neq 0$, $\varphi(x^T) = 0$.

Вопросы сходимости последовательности (5) могут быть изучены также, как для метода простой итерации. Достаточным для реализации метода в области *D*, содержащим решение, **является требование**

$$\det I(\varphi(x^T)) \neq 0.$$