Моделирование систем

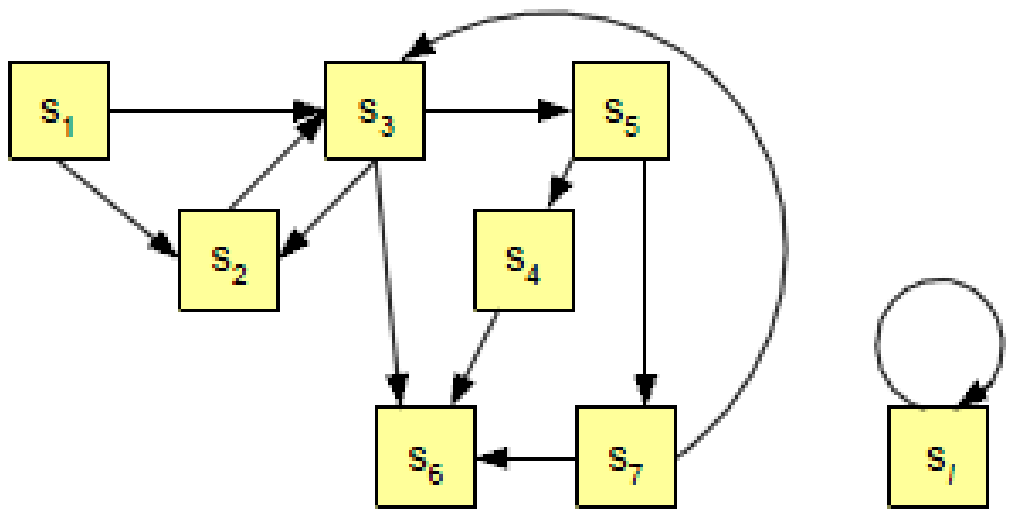
Марковские случайные процессы.

Представление случайных процессов графом состояний.

Рассмотрим физическую систему *S*, в которой протекает случайный процесс с дискретным состояниями $s_1, s_2, \dots, s_i$, число которых конечно или счетно. Прежде всего рассмотрим множество состояний с точки зрения его структуры – возможности системы переходить из одного состояния s_i в данное состояние s_j непосредственно или через другие состояния. Для этого удобно пользоваться наглядной схемой – графом состояний.

Ориентированный граф – совокупность точек (вершины графа) с соединяющими некоторые из них направленными отрезками (ребра графа - стрелки).

Вершины графа будут соответствовать состояниям системы. Стрелка, ведущая из вершины s_i в вершину s_j будет обозначать возможность перехода системы из состояния s_i в состояние s_j непосредственно, минуя другие состояния.



Переход по стрелке, ведущей из состояния si в него же, означает **задержку** системы в состоянии s_i.

Обозначим состояние системы S в момент времени t через $S(t)$.

Вероятность i -ого состояния в момент t – вероятность события, состоящего в том, что система S в момент времени t будет в состоянии s_i , обозначим ее через $p_i(t) = P(S(t) = s_i$.

Очевидно, что $\sum p_i(t) = 1$ для любого момента *t.*

Марковский случайный процесс $S(t)$ – случайный процесс, протекающий в системе S с дискретными состояниями $s_1, s_2, \dots, s_i$, если для любого момента времени t_0 вероятность каждого из состояний системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от ее поведения в прошлом (при $t < t_0$).

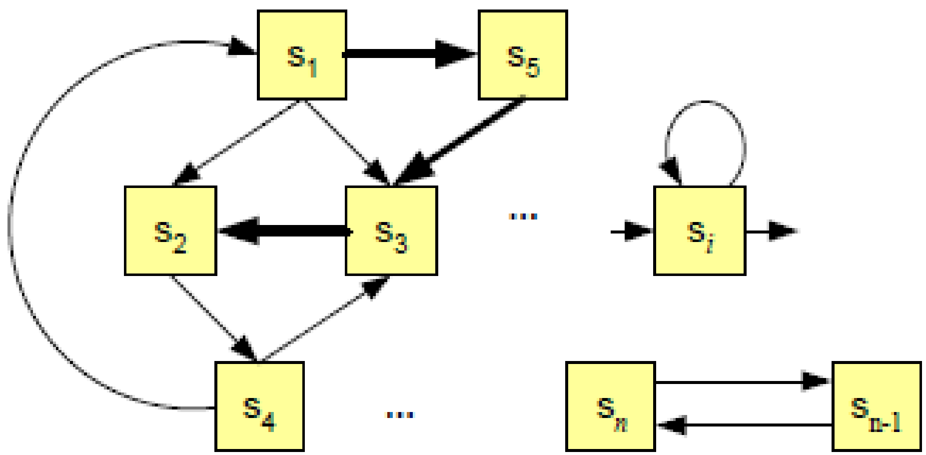
В марковском случайном процессе нет полной независимости от «прошлого»: в общем случае, «будущее» зависит от «настоящего», а «настоящее» зависит от «прошлого». В марковском случайном процессе «будущее» зависит от «прошлого» только через «настоящее».

Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем

Пусть имеется система S с дискретными $s_1, s_2, \dots, s_n$.

Предположим, что случайные переходы системы из состояния в состояние могут происходить только в определенные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots$ Эти моменты мы будем называть шагами процесса, t_0 - его начало. Сам процесс представляет собой случайное блуждание системы S по состояниям. После первого шага система может оказаться в одном (и только одном) из своих возможных состояний $s_1\,(1), s_2\,(1), \dots, s_n(1)$; на втором шаге - $s_1\,(2), s_2\,(2), \dots, s_n(2)$; на *k* –ом шаге $s_1\,(k), s_2\,(k), \dots, s_n(k)$.

Процесс блуждания системы по состояниям можно рассматривать как последовательность (или цепь) событий, состоящих в том, что в начальный момент $t_0 = 0$ система находится в одном состоянии, например $S(0) = s_1$ в момент первого шага система перешла в состояние $S(1) = s_5$, из которого на втором шаге перешла в состояние $S(2) = s_3$, на третьем шаге – $S(3) = s_2$ и т. д.



Траектория системы показана жирными линиями. На каких-то шагах система может адерживаться в том или другом из своих состояний, или же вернуться в него после ряда шагов. Траектория блуждания процесса представляет собой реализацию случайного процесса, полученную в результате одного опыта. При повторении опыта, естественно, реализации в общем случае не совпадают.

Рассмотрим общий случай.

Пусть происходит случайный процесс в системе S дискретными состояниями $s_1, s_2, \dots, s_n$, которые она может принимать в последовательности шагов с номерами $0, 1, 2, \dots k$.

Случайный процесс представляет собой последовательность событий вида

$$\{S(k) = s_i\}, i = 1,2, \dots, n; k = 0,1,2, \dots .$$

Наиболее важной ее характеристикой являются вероятности состояний системы

$$p_i(k) = P(S(k) = s_i) -$$

вероятности того, что на k –ом шаге система будет в состоянии s_i.

Марковская цепь (марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем) $S\,(k)$ – если для любого шага k_0 вероятность каждого из состояний системы в будущем (при $k > k_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $k = k_0$) и не зависит от ее поведения в прошлом (при $k < k_0$).

Основная задача исследования марковской цепи – нахождение безусловных вероятностей нахождения системы S в состоянии s_i на любом шаге k.

Вектор **распределения вероятностей** состояний системы на шаге k имеет вид:

$$\boldsymbol{p}(k) = \left(p_1(k) \;\; p_2(k) \;\; \ldots \;\; p_n(k)\right).$$

Для нахождения этих вероятностей необходимо знать условные вероятности перехода системы S на k –ом шаге в состояние s_j, если известно, что на предыдущем (k −1) –ом шаге она была в состоянии s_i.

Переходной вероятностью марковской цепи на k –ом шаге называется вероятность:

$$\boldsymbol{P}(k) = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & \cdots & p_{1n}(k) \\ \vdots & p_{ij}(k) & \vdots \\ p_{n1}(k) & \cdots & p_{nn}(k) \end{pmatrix}.$$

Так как на каждом шаге система может находиться только в одном из состояний, то для любой строки матрицы сумма всех стоящих в ней вероятностей равна единице:

$$\sum_{j=1,2,\ldots,n} p_{ij}(k) = 1.$$

- Чтобы найти безусловные вероятности $p_i(k)$, недостаточно знать матрицу переходных вероятностей, нужно еще знать начальное распределение вероятностей $\boldsymbol{p}(0)$, то есть вероятности состояний, соответствующие началу процесса – моменту $k = 0$.
- Если известно, что в начальный момент система находится в определенном состоянии s, то вероятность $p_i(0)$ этого состояния равна единице, а все остальные – нулю.
- Цепь Маркова называется **однородной**, если переходные вероятности $p_{ij}(k)$ не зависят от номера шага k, то есть $p_{ij}(k) = p_{ij}$.

Матрица переходных вероятностей для однородной цепи Маркова имеет вид:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & p_{ij} & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Найдем безусловную вероятность

$$p_i(k) = P(S(k) = s_i)$$

нахождения системы *S* на *k* -ом шаге в состоянии s_i, если заданы матрица переходных вероятностей и начальное распределение вероятностей.

Вектор распределения такой вероятности имеет вид

$$\boldsymbol{p}(k) = \boldsymbol{p}(k-1) \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}^k.$$

Обозначим

$$p_{ij}^{(m)} = P\big(S(k+m) = s_j | S(k) = s_i\big)$$

вероятность перехода из состояния s_i в состояние s_j за m шагов, $\boldsymbol{P}^{(m)}$ – для однородной цепи Маркова.

Так как $\boldsymbol{p}(k) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}^k$, то

$$\boldsymbol{P}^{(m)} = \boldsymbol{P}^m.$$

Более того,

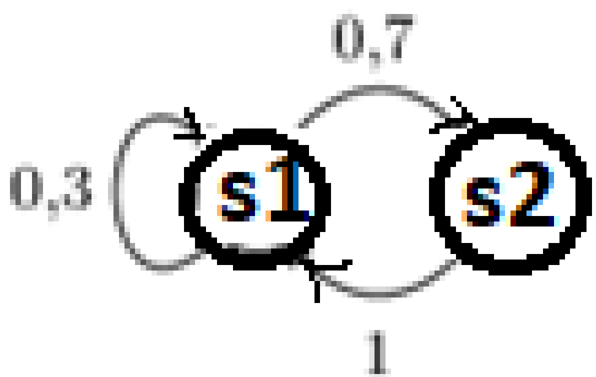
$$\boldsymbol{p}(k+m) = \boldsymbol{p}(k)\boldsymbol{P}^m.$$

Теорема Чепмена-Колмогорова

$$\boldsymbol{P}^{(m+l)} = \boldsymbol{P}^{(m)} \cdot \boldsymbol{P}^{(l)}.$$

Пример

Цепь Маркова задана графом состояний. Найти вероятности состояний на первых трех шагах при условии, что в начальный момент система находилась в состоянии S2.



Тогда $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}(0) = (0 \quad 1)$.

Последовательно находим

$$\boldsymbol{p}(1) = (0 \quad 1) \cdot \boldsymbol{P} = (1 \quad 0);$$

$$\boldsymbol{p}(2) = (1 \quad 0) \cdot \boldsymbol{P} = (0{,}3 \quad 0{,}7);$$

$$\boldsymbol{p}(3) = (0{,}3 \quad 0{,}7) \cdot \boldsymbol{P} = (0{,}79 \quad 0{,}21).$$

Можно было вычислить сразу

$$\boldsymbol{p}(3) = (0 \quad 1) \cdot \boldsymbol{P}^3 = (0{,}79 \quad 0{,}21).$$

Эргодические цепи Маркова

Рассматриваются только однородные цепи Маркова с конечным или счетным числом состояний. Для таких цепей при определенных условиях выполняется следующее свойство:

$$\boldsymbol{p}(k) \to \boldsymbol{\pi} \text{ при } n \to \infty,$$

Причем предельное распределение

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

вероятностей состояний цепи Маркова не зависит от начального распределения $p(0)$, а определяется лишь переходной матрицей $\boldsymbol{P}$. Например, процесс изменения напряжения в сети питания технического устройства, пройдя сразу после включения через ряд колебаний, по прошествии времени устанавливается.

Аналогично этому в некоторых случайных процессах по прошествии достаточно большого времени устанавливается стационарный режим, во время которого состояния системы хотя и меняются случайным образом, но их вероятности остаются постоянными.

Введем обозначение:

$$f_i(n) = P\{S(n) = s_i; S(n-1) \neq s_i, ; \dots ; S(1) \neq s_i | S(0) = s_i\}.$$

вероятность первого возвращения за n шагов в состояние s_i.

Классификация состояний:

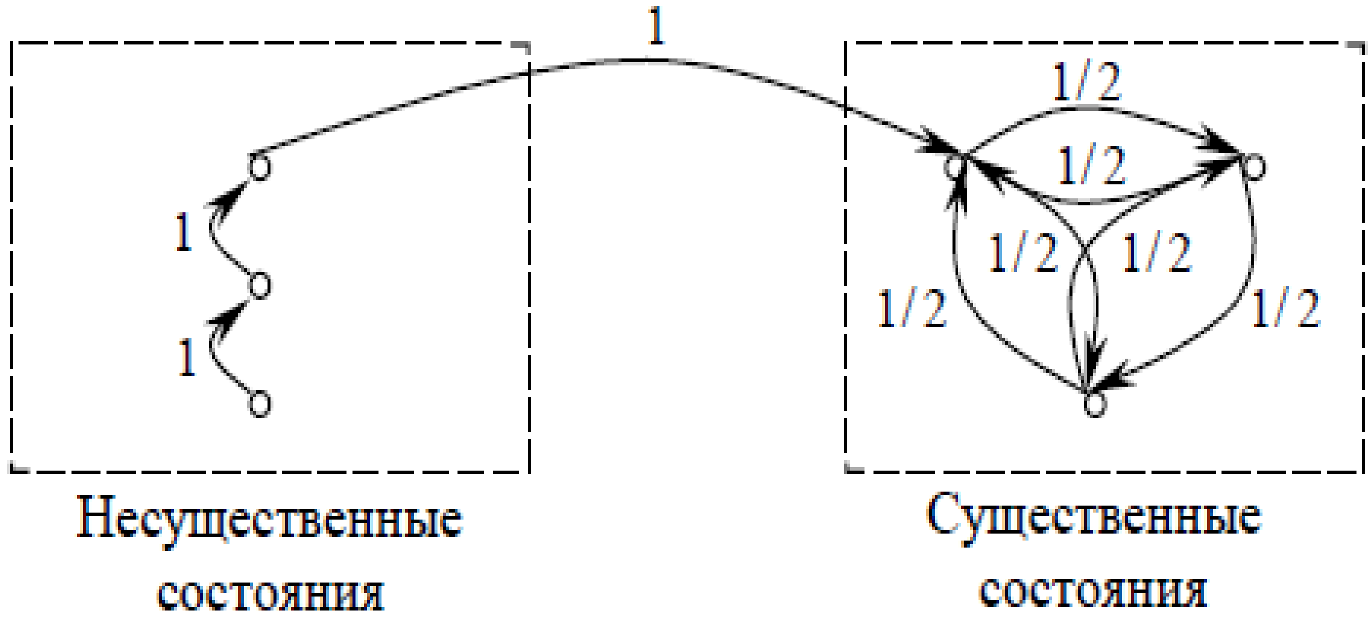
1. *Существенное* состояние s_i - такое состояние, что из него можно выйти, и, покинув его, в него всегда можно вернуться. Иначе состояние называется *несущественным*.

2. *Сообщающиеся* состояния s_i и s_j – если можно попасть из одного в другое за какое-либо число шагов.

3. *Периодическое* состояние с периодом d_i – если d_i – наибольший общий делитель чисел $\{n \geq 1: f_i(n) > 0\}$, $d > 1$ – число шагов, за которое возможно возвращение в состояние.

Иначе – *непериодическое*.

Если из системы выделить все несущественные состояния, то оставшееся множество существенных состояний обладает тем свойством, что, попав в него, цепь Маркова никогда из него не выйдет.

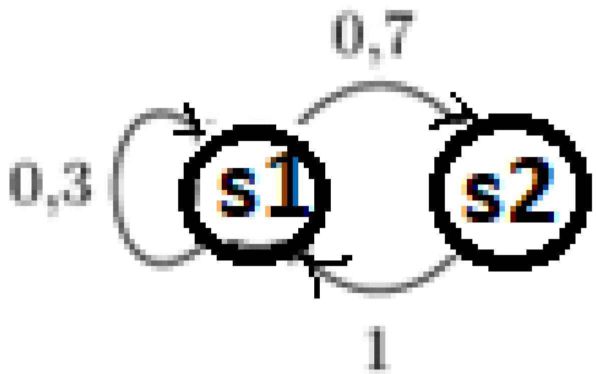


Множество существенных состояний разбивается на конечное или счетное число непересекающихся множеств, состоящих из сообщающихся состояний и характеризующихся тем, что переходы между различными множествами невозможны.

Цепь Маркова называется *неразложимой*, если все ее состояния – существенные и сообщающиеся. Иначе – *разложимой*.

Цепь Маркова называется *непериодической*, если все ее состояния – *непериодические*.

В примере



цепь Маркова неразложима и непериодическая, так как все ее состояния – существенные, сообщающиеся и непериодические.

Однородная цепь Маркова называется эргодической, если существуют не зависящие от i пределы:

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j > 0 \text{ при } n \to \infty \text{ и } \sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1.$$

Распределение вероятностей $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ – *стационарное* (*финальное*) распределение вероятностей.

Теорема. Однородная цепь Маркова с конечным числом возможных состояний имеет переходную матрицу и неразложима и непериодична тогда и только тогда, когда она является эргодической.

Числа $\{\pi_j\}$ являются единственным решением системы уравнений

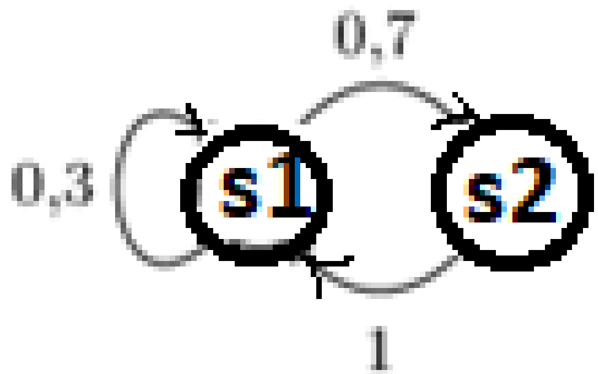
$$\pi_j = \sum_{k=1}^{n} \pi_k \cdot p_{kj}\,; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1.$$

Матричный вид уравнения:

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{P}.$$

Найти финальные вероятности для примера



$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1 \quad \pi_2) = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{P} = (\pi_1 \quad \pi_2)\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0{,}3\pi_1 + \pi_2 = \pi_1 \\ 0{,}7\pi_1 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}7\pi_1 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{10}{17} \\ \pi_2 = \dfrac{7}{17} \end{cases}.$$