Тема «Численные методы вычисления определенных интегралов»

Традиционный подход для приближенного вычисления определенных интегралов опирается на определение интеграла как предела интегральных сумм

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (1)$$

где точки $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ задают разбиение отрезка [a; b],
$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$.

Тогда на отрезке **[**a, b**]** выбирается ряд узловых точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и значение интеграла приближенно представляется в виде линейной комбинации значений подинтегральной функции в узловых точках

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (2)$$

Формула вида (2) называются **квадратурной формулой**. При заданном числе *n* расположение узлов и значения коэффициентов A_i подбирается так, чтобы обеспечивалась наивысшая точность результата. Наиболее просты и употребительны методы, в которых узловые точки выбираются равноотстоящими. На их рассмотрении далее мы и остановимся.

Предположим, что отрезок **[***a*, *b***]** разделен на *n* равных частей величиной

$$h = \frac{b-a}{n}$$

и обозначим точки деления через $x_k = a + kh$ ($k = 0,1, \ldots, n$).

Приблизим подинтегральную функцию *f*(*x*) с помощью многочлена Лагранжа

$$f(x) \approx P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}\, t(t-1)...(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)}\, y_i,$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\int_0^n \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)\ldots(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)} f(x_i)dt$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n} H_i f(x_i),$$

$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}dt \qquad (3)$$

Данные соотношения называются **квадратурными формулами Ньютона-Котеса.**

В случае, когда деление отрезка [a,b] не производится и на нем выбирается единственная узловая точка, обозначим ее через x_0, интерполяционный многочлен принимает вид $P_0(x) = y_0$, а квадратурная формула принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)y_0. \qquad (4)$$

Заметим важное, для вычисления коэффициентов H_i, **свойство:**

при фиксированном n значения H_i и H_{n-i} равны.

Вернемся к вычислению коэффициентов H_i.

Рассмотрим n=1. Тогда из (3) следует

$$H_0 = \frac{-1}{0!\cdot 1!}\int_0^1 (t-1)dt = -\frac{(t-1)^2}{2!}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $H_1 = 1/2$ и квадратурная формула принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) \tag{5}$$

Пусть теперь n =2, тогда из (3) имеем

$$H_2 = H_0 = \frac{1}{0!2!}\int_0^2 (t-1)(t-2)dt = \frac{1}{3},\; H_1 = \frac{4}{3}.$$

Получаем

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)) \qquad (6)$$

Рассмотрим n = 3. Согласно (3) имеем

$$H_0 = H_2 = \frac{1}{0!3!}\int_0^3 (t-1)(t-2)(t-3)dt = \frac{3}{8}$$

$$H_1 = H_3 = \frac{1}{1!\cdot 2!}\int_0^1 t(t-2)(t-3)dt = \frac{9}{8},$$

Тогда квадратурная формула принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3))$$

Простейшие квадратурные правила

Стремление повысить точность приближенного вычисления интеграла путем повышения степени интерполяционного многочлена неизбежно приводит к возрастанию технических сложностей при вычислении квадратурных коэффициентов. Поэтому на практике стараются обойтись многочленами невысокой степени, разбивая исходный отрезок интегрирования на меньшие части. В результате этого получают семейства квадратурных правил, зависящих от степени использованных интерполяционных многочленов. Рассмотрим простейшие из них.

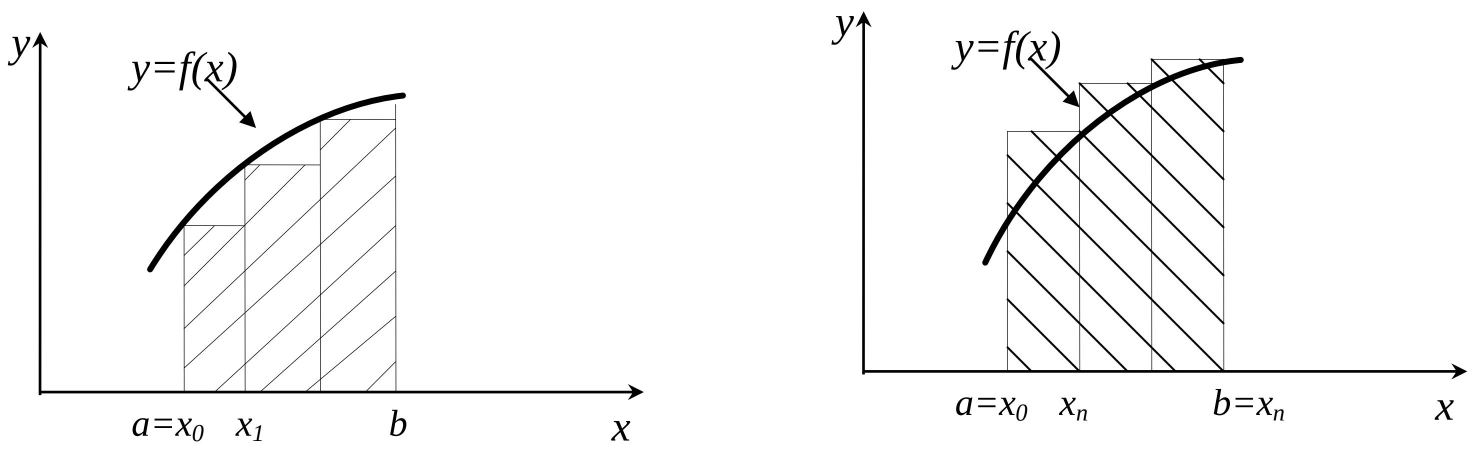
Правило прямоугольников. Исходный отрезок $[a,b]$ разбивается на n равных частей величиной $h = \frac{b-a}{n}$, на каждом из них выбирают по одной точке $x_{0,} x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Далее, применяя к каждой из них формулу (4) получаем правило

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}$$

называемое **правилом прямоугольников**.

Если $f(x) \geq 0$, то площадь криволинейной трапеции вычисляется как площадь фигуры, состоящей из прямоугольников с основанием h и высотами y_i. В зависимости от выбора точек x_i различают формулы **левых** и **правых прямоугольников** (Рисунок 1).



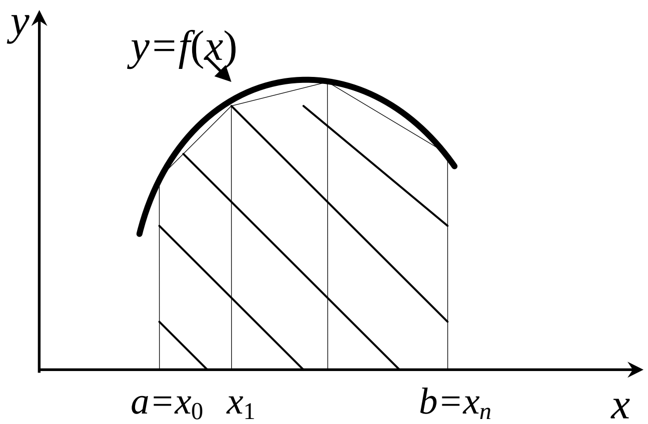
а) б)

Рисунок. Правило прямоугольников : а)- левых; б)- правых

Правило трапеций. Разделим отрезок [a, b] на n равных частей и обозначим точки деления через $x_k = a + kh$ (k = 0,1, …, n), $h = \dfrac{b-a}{n}$. Применяя, далее, к каждому из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ формулу (5), получим квадратурное правило

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)},$$

называемое **формулой трапеций**. Ее геометрический смысл состоит в замене кривой $y=f(x)$ ломаной и замене криволинейной трапеции, соответствующей участку $[x_{i-1}, x_i]$, обычной, – прямолинейной



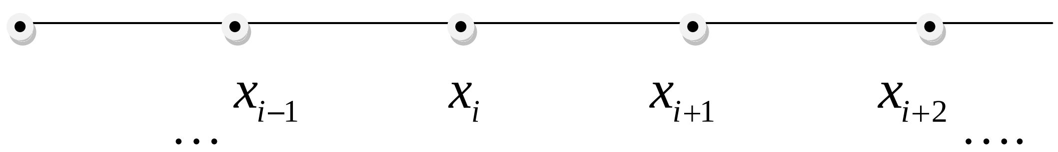
Правило парабол (Симпсона). Разделим отрезок [a, b] на $n = 2m$ частей, обозначим точки деления через $x_0, x_1, \ldots, x_{2m}$ и рассмотрим сдвоенные отрезки. К каждому из них применим формулу (6), в результате чего получим формулу

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)}$$

где $h = \dfrac{b-a}{2m}$

которую называют **формулой парабол** или **Симпсона**. Название также отчасти объясняется геометрическими особенностями, состоящими в том, что на каждом сдвоенном отрезке кривая $y = f(x)$ заменяется участком параболы.

Правило трех восьмых. Разделим исходный отрезок на $3m$ частей, образуем строенные отрезки $[x_{i-1}, x_{i+2}]$ и к каждому из них применим формулу (7).



В результате этого получим правило

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3\sum_{k=1}^{m}(f(x_{3k-2}) + f(x_{3k-1})) + 2\sum_{k=2}^{m} f(x_{3k-3}) + f(b)\right)}$$

где $h = \dfrac{b-a}{3m}$, называемое **формулой трех восьмых**.

Погрешности квадратурных формул

Погрешности квадратурных формул, рассмотренных выше, устанавливаются похожим образом. А именно, в каждом случае определяются локальные погрешности, которые затем суммируются.

Рассмотрим формулу левых прямоугольников. Согласно формуле Тейлора погрешность интерполяционной формулы на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ составляет

$$R_i(x) = f'(\xi_i)(x - x_{i-1}) \text{ ,где } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \ .$$

Тогда погрешность интегрирования формулы вида (4) описывается выражением

$$\varepsilon_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} R_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_{i-1})dx$$

которое, согласно обобщенной теоремы о среднем значении, можно представить в более удобной для последующего использования форме

$$\varepsilon_i = f'(\bar{\xi}_i)\frac{h^2}{2} \text{ , где } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Тогда суммируя, получаем, что погрешность формулы прямоугольников равна

$$\boxed{\varepsilon_{пр} = \frac{h(b-a)}{2} f'(\xi) = O(h), \quad \xi \in [a,\ b]}$$

Для формулы трапеций погрешность формулы составляет

$$\boxed{\varepsilon_{тр} = \frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi) = O(h^2), \quad \xi \in [a,\ b]}$$

Для формулы Симпсона

$$\boxed{\varepsilon_{Симпсона} = \frac{h^3(b-a)}{180} f'''(\xi) = O(h^3), \quad \xi \in [a,\ b]}$$

В заключении обратим внимание на следующий любопытный факт. Несмотря на более высокую степень интерполяционного многочлена, используемого в правиле 3/8, его итоговая погрешность интегрирования, при прочих равных условиях, выше, чем в правиле Симпсона.

Понятие о методах Монте–Карло

Методы Монте-Карло приближенного вычисления интегралов основаны на использовании равномерно распределенных последовательностей.

Рассмотрим на плоскости некоторую ограниченную область D площадью V_D и предположим, что в ней задана некоторая бесконечная последовательность точек $P_0, P_1, ..., P_n, \ldots$.

Пусть $d \subset D$ некоторая произвольная область площадью V_d. Рассмотрим первые N точек последовательности $\{P_i\}$ и обозначим через s_N число точек из них, попадающих в d. Отсюда следует, что при достаточно больших значениях N, если распределение точек $\{P_i\}$ равномерное в области, отношение

$$\frac{s_N}{N} \approx \frac{V_d}{V_D},$$

Так как частота будет приближенно равна геометрической вероятности.

Откуда площадь области приближенно равна

$$V_d \approx V_D \frac{s_N}{N}$$

Таким образом, если площадь области D известна, то, генерируя в ней равномерно распределенную последовательность, площадь произвольной области, расположенной в ней, можно определить простым подсчетом числа точек попадающих в последовательность $\{P_i\}$.

На этих особенностях и базируется методы приближенного интегрирования Монте-Карло. Так как геометрически смысл интеграла – площадь, то остается сгенерировать достаточно большое число N равномерно распределенных в области отрезка точек и подсчитать

Для определения площади под графиком функции можно использовать следующий стохастический алгоритм:

- ограничим функцию прямоугольником (n-мерным параллелепипедом в случае многих измерений), площадь которого S можно легко вычислить;
- «набросаем» в этот прямоугольник (параллелепипед) некоторое количество точек (N штук), координаты которых будем выбирать случайным образом;
- определим число точек (K штук), которые попадут под график функции;
- площадь области, ограниченной функцией и осями координат

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx S\frac{K}{N}}$$

Для малого числа измерений интегрируемой функции производительность Монте-Карло интегрирования гораздо ниже, чем производительность детерминированных методов.