Тема «Численные методы решения линейных систем алгебраических уравнений».

В развёрнутом виде система n линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

где a_{ij}, b_k - известные коэффициенты, x_m - искомые величины. Если обозначить через

$A = (a_{ij})_{n,n}$, $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \ldots b_n)^T$, то (1) можно представить и в матричном виде

$$Ax = b$$

Решением системы (1) называется набор значений $x_1, x_2, ...x_n$, обращающий каждое из уравнений системы в верное равенство.

Необходимые и достаточные условия разрешимости системы (1) описываются теоремой **Кронекера – Капелли**. Предполагая их выполненными, остановимся на рассмотрении точных и приближённых методах её решения.

Точным называется метод, позволяющий за конечное число точно выполняемых операций получить точное решение. В противном случае метод называется **приближённым.**

К числу распространённых относятся **метод Гаусса** и его модификация, называемая методом **Жордана – Гаусса**.

Метод Гаусса. Центральной частью данного метода является процедура приведения исходной системы уравнения к треугольному, в общем случае, трапецеидальному, виду. Это осуществляется путём эквивалентных преобразований системы в следующей последовательности.

Шаг 1. В левой части первого уравнения выбирается отличный от нуля коэффициент, который называется **ведущим** или **определяющим**. Пусть это a_{11}, в противном случае добьёмся этого, переставив столбцы и перенумеровав неизвестные. После этого разделим первое уравнение на ведущий элемент

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}{}' x_2 + \ldots + a_{1n}{}' x_n = b_1{}' \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}.$$

Шаг 2. Вычтем почленно из второго уравнения первое, умноженное на a_{21}, далее, из третьего первое, умноженное на a_{31} и т.д., наконец из *n*-го, - первое, умноженное на a_{n1} . В результате этого получим

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}' x_2 + \ldots + a_{1n}' x_n = b_1' \\ \quad a_{22}' x_2 + \ldots + a_{2n}' x_n = b_2' \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{n2}' x_2 + \ldots + a_{nn}' x_n = b_n' \end{cases}.$$

Шаг 3. Первое уравнение оставим неизменным, а во втором,- выберем ведущий элемент, пусть это a_{22}' и разделим на него второе уравнение.

Шаг 4. Из третьего и всех последующих уравнений, описанным выше способом, исключим переменную x_2.

Далее, поступая таким же образом с третьим и остальными уравнениями за конечное число шагов приведём систему к треугольному виду

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}{}' x_2 + a_{13}{}' x_3 + \ldots + a_{1n}{}' x_n = b_1{}' \\ \qquad x_2 + a_{23}{}'' x_2 + \ldots + a_{2n}{}'' x_n = b_2{}'' \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = b_n{}^{(n)} \end{cases} \tag{2}$$

если решение единственно, или к трапецеидальному, если решений бесконечно много. Если же на каком-то шаге одно из уравнений примет вид $0 = b_i^{(m)} (b_i^{(m)} \neq 0)$, то это означает несовместимость исходной системы уравнений.

Описанный процесс преобразования системы называется **прямым ходом.** Предположим, что в результате выполнения прямого хода система приведена к виду (2). В этом случае из последнего уравнения определяется значение x_n. Оно подставляется в предыдущее, из которого находится x_{n-1}. Найденные значения x_n, x_{n-1} подставляются в (*n* - 2)-е уравнение, из которого находится x_{n-2}.

Далее, действуя аналогичным образом, из (*n* - 3)-го уравнения определяется значение x_{n-3}, из (*n* - 4)-го, - x_{n-4} и, наконец, из первого – значение x_1. Процесс последовательного нахождения $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ из системы (2) называется **обратным ходом**.

С целью снижения влияния погрешностей округления, возникающих при выполнении вычислений, в качестве ведущего рекомендуется выбирать наибольший по модулю элементы левой части уравнения.

Действительно, в этом случае коэффициенты $a_{ij}^{(k)}$ системы (2) по модулю не превышают единицу и частичные погрешности значения x_i, обусловленные ошибками $\varepsilon_m (m > i)$ значений x_m

$$\left| a_{im}(x_m + \varepsilon_m) - a_{im} x_m \right| = \left| a_{im} \varepsilon_m \right| \leq \left| \varepsilon_m \right|$$

не превышает величины $\left| \varepsilon_m \right|$, т.е. не возрастают.

ПРИМЕР. Решение методом Гаусса системы

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Проведем элементарные преобразования над строками таким образом, чтобы все элементы, расположенные ниже главной диагонали, стали равными нулю.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -7 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \mathbf{II - 5 \cdot I} \\ \mathbf{III - 3 \cdot I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & -17 & -15 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mathbf{9 \cdot III - II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & -17 & -15 \\ 0 & 0 & -10 & -30 \end{array}\right).$$

В результате этих преобразований система принимает следующий вид

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ \quad 9x_2 - 17x_3 = -15 \\ \qquad -10x_3 = -30 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения имеем $x_3 = 3$, подставив это значение во второе уравнение, получим $x_2 = 4$ и, наконец, из первого уравнения находим

$$x_1 = 3 - 2 \cdot x_3 + x_2 = 3 - 2 \cdot 3 + 4 = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 4;\ x_3 = 3$.

Метод Жордана -Гаусса. Совмещает выполнение прямого и обратного ходов метода Гаусса. Реализуется следующим образом.

Шаг 1, 2, 3. Совпадают с первыми шагами метода Гаусса.

Шаг 4. С помощью второго уравнения переменная x_2 удаляется **не только из последующих**, **но и из предыдущего**, т.е. первого уравнения. В результате этого система принимает вид

$$\begin{cases} x_1 \qquad + a_{13}' x_3 + \ldots + a_{1n}' x_n = b_1' \\ \quad x_2 + a_{23}' x_3 + \ldots + a_{2n}' x_n = b_2' \\ \qquad\quad a_{33}' x_3 + \ldots + a_{3n}' x_n = b_3' \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{n3}' x_3 + \ldots + a_{nn}' x_n = b_n' \end{cases}.$$

Далее, рассматривается третье уравнение и с его помощью описанным образом исключается переменная x_3 из всех остальных уравнений.

Поступая также с каждым следующим уравнением, за конечное число шагов система приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 & & & & = b_1' \\ & x_2 & & & = b_2'' \\ & & x_3 & & = b_3''' \\ & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \\ & & & x_n & = b_n^{(n)} \end{cases}.$$

Столбец правых частей и представляет собой решение системы уравнений.

Сравнительный анализ. С точки зрения трудоёмкости вычислений оба метода практически эквивалентны. Так, для реализации метода Гаусса необходимо $\frac{n(2n^2+9n+1)}{6}$ арифметических операций, для выполнения метода Жордана-Гаусса $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Вместе с тем, в литературе отмечается интересная особенность метода Жордана-Гаусса. А именно, если внести некоторые изменения в порядок его выполнения, то можно достичь существенного снижения необходимого объёма оперативной памяти.

Так, рассматривая второе уравнение, использовать первое для исключения в нем переменной x_1, после чего использовать модифицированное второе для исключения переменной x_2 из первого уравнения. Далее, при рассмотрении третьего уравнения использовать первые два для исключения в них переменных x_1 , x_2 , после чего использовать третье для исключения из первых двух переменных x_3. И так далее. При такой организации вычислений на каждом шаге в работе участвует не вся система, а только её часть. Показано, что при равных объёмах используемой оперативной памяти это позволяет примерно в два раза, по сравнению с методом Гаусса, повысить порядок решаемой системы.

Замечание. К числу точных относятся и методы, основанные на разложении матрицы A левой части системы в виде произведения двух треугольных матриц B и C, т.е. $A=BC$, где

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .... & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & ...... & \\ b_{n_1} & b_{n_2} & b_{n_3} & .... & 1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & .... & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & .... & c_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & ...... & c_{3n} \\ .... & .... & .... & ...... & \\ 0 & 0 & 0 & ...... & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае система принимает вид

$$BCX=b,$$

и, обозначив $Y=CX$, вместо системы (1), имеем две системы уравнений с треугольными матрицами

$$BY=b; \quad CX=Y.$$

Центральным моментом таких методов является реализация указанного разложения матрицы A. Показано, что для симметрических и невырожденных матриц такие процедуры существуют.