# Моделирование систем

# 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

3.1. Введение в теорию массового обслуживания

3.2. Поток требований и процесс обслуживания

3.3. Система с отказами

3.4. Система с ожиданием в очереди ограниченной длины

# 3.1. Введение в теорию массового обслуживания

СМО – системы, в которых возникают массовые запросы на выполнение каких-либо видов услуг, а, с другой стороны, происходит удовлетворение этих запросов.

Каждая СМО включает некоторое число обслуживающих устройств – каналов (приборов, линий) обслуживания.

На вход СМО поступает один или несколько потоков запросов (заявок, требований, клиентов), требующих однотипного обслуживания.

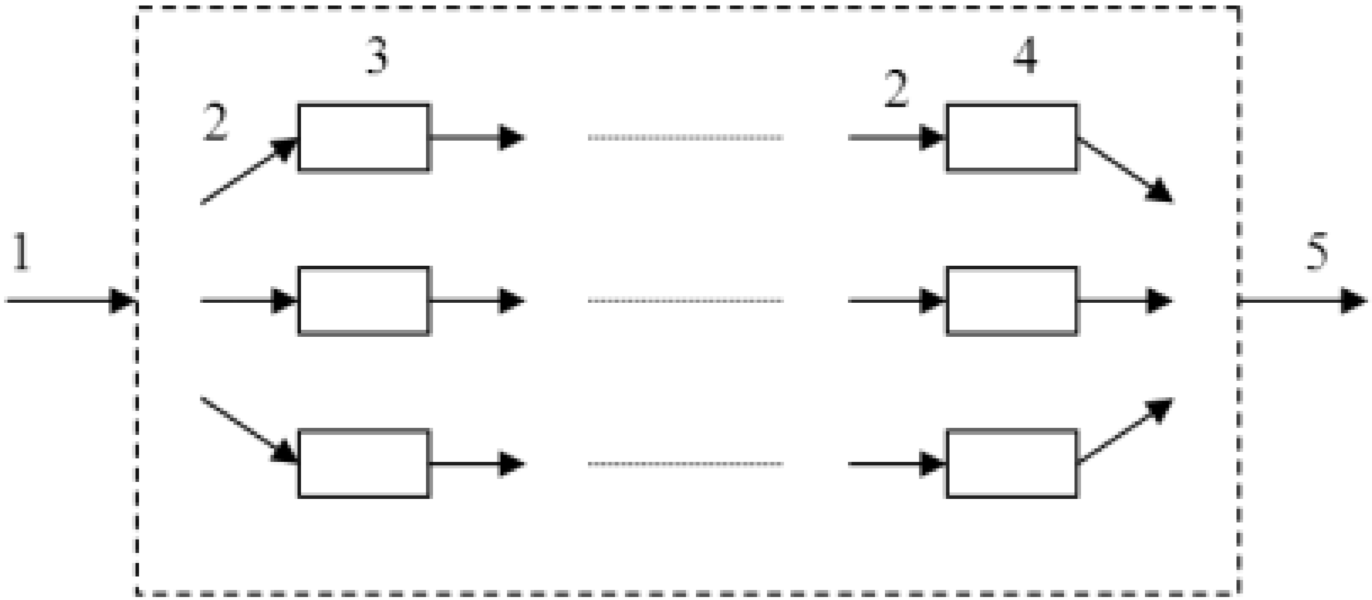
Основные элементы СМО:

1) входящий поток требований;

2) очередь;

3) каналы обслуживания;

4) выходящий поток обслуженных требований.




Структурная схема СМО

1 – входящий поток; 2 – очереди на обслуживание;

3 – обслуживающие аппараты 1-й фазы;

4 – обслуживающие аппараты n-й фазы; 5 – выходящий поток

Если часть требований, поступивших в систему, по каким-либо причинам не проходят обслуживания, то они образуют выходящий поток необслуженных требований.

Период от момента поступления требования в СМО и до начала обслуживания называется ***временем ожидания обслуживания***.

Время ожидания обслуживания в совокупности с временем обслуживания составляет ***время пребывания требования в системе***.

СМО обладает определенной эффективностью функционирования, позволяющей ей справляться с потоком заявок. ***Эффективность*** зависит от параметров СМО:

– характера потока заявок,

– числа каналов обслуживания,

– производительности каналов обслуживания,

– правил организации работы.

Цель ТМО – выработка рекомендаций по рациональному построению СМО и регулированию потока заявок.

***Показатели*** эффективности функционирования СМО

*Абсолютная пропускная способность* СМО – среднее число требований, которое СМО может обслужить в единицу времени.

*Относительная пропускная способность* СМО – отношение среднего числа требований, обслуживаемых СМО в единицу времени, к среднему числу требований, поступивших за это же время.

*Коэффициент использования* СМО – средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием требований.

*Среднее время ожидания* требованием в очереди.

*Среднее время пребывания* требования в СМО.

*Вероятность отказа* требованию в обслуживании.

Вероятность того, что поступившее требование немедленно будет принято к обслуживанию.

Закон распределения времени ожидания требования в очереди.

Среднее число требований, находящихся в СМО, и т.п.

***Классификация СМО***

однофазовые;

многофазовые;

полнодоступные;

неполнодоступные;

с простейшим (пуассоновским) потоком;

с входящим потоком иного типа;

с отказами, в которых заявка, поступившая в СМО в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает очередь;

с ожиданием, в которых заявка становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов;

с приоритетами в обслуживании;

без приоритетов;

замкнутые – СМО с ограниченным потоком требований, в которых обслуженные требования могут возвращаться в СМО;

открытые.

# 3.2. Поток требований и процесс обслуживания

Математическое описание любой СМО начинается с описания потока требований, который рассматривается как поток событий.

*Поток событий* – последовательность однородных событий, следующих одно за другим через какие-то, вообще говоря, случайные интервалы времени.

*Однородные события* – события, различающиеся только моментами появления.

Пусть $t_1, t_2, \dots t_k, \dots$ – моменты наступления событий, $t_k \geq t_{k-1}$.

Поток событий считается *заданным*, если задана последовательность интервалов времени между последовательными моментами наступления событий:

$\{T_k = t_k - t_{k-1};\ \ k \geq 1; t_0 = 0\}$.

*Регулярный поток* – поток, в пределах которого события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени.

*Простейший поток* – поток, удовлетворяющий требованиям стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

*Поток стационарный*, если вероятность попадания некоторого числа событий на участок времени $\Delta t$ зависит только от длины участка и не зависит от его расположения на оси временной оси

$$P_k(t, t + \Delta t) = P_k(\Delta t).$$

Для стационарного потока среднее число событий, воздействующих на систему в течение единицы времени, остается постоянным.

*Поток ординарный*, если вероятность попадания на элементарный участок времени $\Delta t$ двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события

$$P_{k>1}(t, t + \Delta t) \ll P_{k=1}(t, t + \Delta t).$$

Ординарность означает, что события в потоке поступают поодиночке, а не группами.

*Отсутствие последействия* – свойство потока, состоящее в том, что для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени. Это свойство означает, что события появляются независимо друг от друга.

Вероятность того, что за промежуток времени $(0, t)$при поступит $k$ требований подчиняется закону Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Где $\lambda -$ интенсивность потока, т.е. число требований в единицу времени

$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Функция распределение вероятностей промежутка времени $T$ между двумя последовательными моментами поступления требований имеет вид

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Плотность распределения вероятностей

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Длительность интервала между двумя последовательными моментами поступлений требований в простейшем потоке имеет показательное распределение.

***Основные характеристики обслуживания***:

*Пропускная способность* СМО – максимальное число требований, которые могут обслуживаться одновременно. Например, для $n$-канальной СМО пропускная способность равна $n$.

*Доступность обслуживания* – ограничения, снижающие число требований, которые могут обслуживаться одновременно, по сравнению с полной пропускной способностью системы. СМО может быть не полностью доступна, если некоторые из каналов периодически отключаются, или работают не так как другие.

*Длительность обслуживания* – промежуток времени, затраченный на обслуживание отдельного требования $t_{\text{об}}$, в большинстве случаев имеет показательное распределение с плотностью

$$f(t_{\text{об}}) = \nu e^{-\nu t_{\text{об}}},$$

где $\nu$ – интенсивность обслуживания.

Математическое ожидание времени обслуживания равно

$$M\{t_{\text{об}}\} = \frac{1}{\nu}.$$

# 3.3. Система с отказами

СМО с отказами – системы, в которых требования, поступившие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ, покидают систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвуют.

Рассматривается СМО из $n$ однотипных аппаратов с отказами (примеры: автоматическая телефонная станция, камера хранения аэровокзала). Каждый аппарат может одновременно обслуживать только одно требование. Время обслуживания одного требования одним аппаратом подчинено показательному закону с параметром $\nu$, т.е. вероятность того, что время обслуживания $t_{\text{об}}$ меньше $t$, равна

$$P(t_{\text{об}} < t) = F(t) = 1 - e^{-\nu t}.$$

Основные показатели функционирования СМО с отказами:

– вероятность отказа, т. е. вероятность того, что в момент поступления очередного требования все обслуживающие аппараты заняты. Характеризует полноту обслуживания входящего потока;

– среднее число аппаратов, занятых обслуживанием. Характеризует степень загрузки обслуживающей системы.

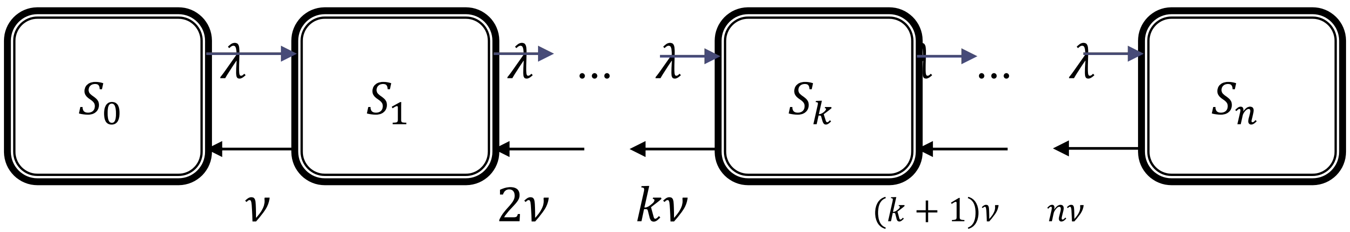
СМО с отказами может находиться в одном из $n+1$ состояний:

$S_0$ – все приборы свободны, требований в системе нет;

$S_1$ – один прибор занят обслуживанием требования, остальные свободны;

$S_n$ – все $n$ приборов заняты обслуживанием.

В других состояниях система находиться не может, т.к. они предполагают наличие очереди.




Для вероятностей состояний СМО с отказами составляется система уравнений Колмогорова

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t);$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\nu)P_k(t) + \nu(k+1)P_{k+1}(t);\, k = 1, 2, \ldots n-1;$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_{n-1}(t) + \nu n P_n(t).$$

Система уравнений Колмогорова при произвольном n может быть решена аналитически для стационарного состояния, т.е. для случая

$$p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t) = const, k = 0, 1, 2, \dots n.$$

При этом

$$\frac{d}{dt}P_k(t) = 0.$$

В этом случае СДУ преобразуется в алгебраическую систему:

$$0 = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t);$$

$$0 = -\lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\nu)P_k(t) + \nu(k+1)P_{k+1}(t); k = 1, 2, \dots n-1;$$

$$0 = -\lambda P_{n-1}(t) + \nu n P_n(t).$$

Её решение имеет вид:

$$p_k = \frac{\alpha^k p_0}{k!}; k = 1, 2, \dots, n;$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}};$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\nu}.$$

***Показатели эффективности функционирования СМО с отказами***

*Вероятность отказа* очередному требованию в обслуживании

$$p_{\text{отк}} = p_n = \frac{\alpha^n p_0}{n!}.$$

*Вероятность обслуживания* очередного требования:

$$p_{\text{об}} = 1 - p_{\text{отк}}.$$

*Среднее число* занятых обслуживанием приборов:

$$N = \sum_{k=1}^{n} k\, p_k = \alpha(1 - p_n).$$

Относительная ($q$) и абсолютная ($A$) *пропускные способности* СМО

$$q = p_{\text{об}} = 1 - p_{\text{отк}};\, A = \lambda q.$$

*Коэффициент занятости* приборов:

$$\theta_{\text{з}} = \frac{N}{n}.$$

Коэффициент простоя приборов:

$$\theta_{\text{пр}} = 1 - \theta_{\text{з}}.$$

# 3.4. Система с ожиданием в очереди ограниченной длины

Рассматривается СМО из $n$ однотипных обслуживающих аппаратов, в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью $\lambda$, время обслуживания требования прибором подчиняется показательному закону с параметром $\nu$. Требование, поступившее в СМО в момент, когда все аппараты заняты, не покидает ее, а «становится» в очередь и ждет пока его не обслужит один из освободившихся аппаратов. Число требований, ожидающих обслуживания, ограничено величиной $m$. Время ожидания не ограничено.

Состояния СМО:

$S_0$ – все аппараты свободны;

$S_1$ – один аппарат занят обслуживанием, остальные свободны;

$S_n$ – все $n$ аппаратов заняты обслуживанием, очереди нет;

$S_{n+r}$ – все аппараты заняты, очередь из $r$ требований;

$S_{n+m}$ – все аппараты заняты, $m$ требований в очереди.

Решение уравнений Колмогорова для СМО с очередью ограниченной длины в установившемся режиме имеет вид

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{\alpha^k}{k!} p_0; 1 \le k \le n-1; \\ \dfrac{\alpha^k}{n!\, n^{k-n}} p_0; n \le k \le n+m. \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{k=n}^{n+m} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n}}.$$

***Показатели эффективности СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины***

*Вероятность отказа* очередному требованию в обслуживании:

$$p_{\text{отк}} = p_{n+m}.$$

*Средняя длина очереди*, которая определяется как математическое ожидание числа требований, составляющих очередь

$$K_{\text{ож}} = \sum_{k=n+1}^{n+m} (k-n) p_k \,.$$

*Среднее число требований* в СМО

$$K_c = K_{\text{ож}} + N,$$

где $N$ − среднее число занятых каналов.

*Среднее время ожидания* требования обслуживания в очереди:

$$T_{\text{ож}} = \frac{1}{\lambda} K_{\text{ож}}.$$

Среднее время пребывания требования в СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины

$$T_c = \frac{1}{\lambda} K_c.$$

Относительная ($q$) и абсолютная ($A$) *пропускные способности* СМО

$$q = 1 - p_{\text{отк}}; \quad A = \lambda q.$$

Среднее число свободных от обслуживания приборов

$$N_{\text{св}} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, p_k.$$

Среднее число занятых каналов

$$N = n - N_{\text{св}}.$$

*Коэффициент занятости* приборов:

$$\theta_{з} = \frac{N}{n}.$$

Коэффициент простоя приборов:

$$\theta_{пр} = 1 - \theta_{з}.$$