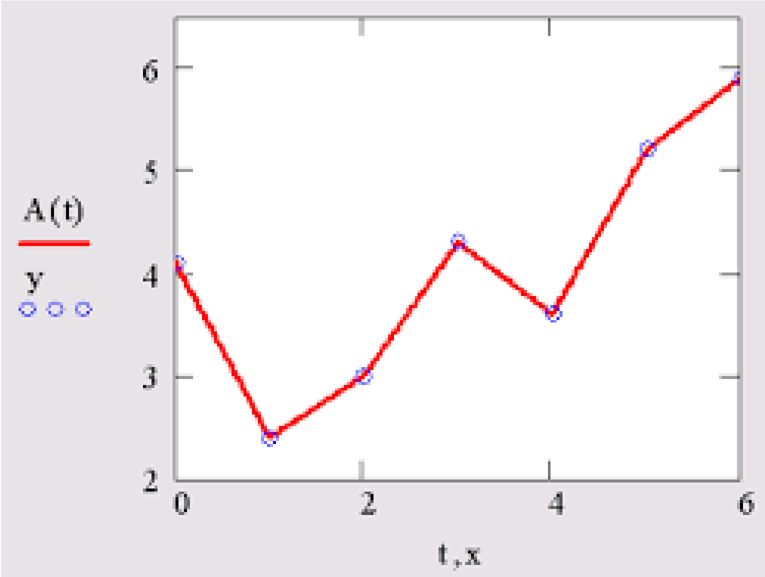
Тема «Интерполяция функций»

Пусть имеется набор значений x_i и соответствующих им значений y_i, $i=0,1,\ldots,n$ (допустим, полученных экспериментально). Необходимо получить значение y аргумента x^*, который принадлежит отрезку $[x_0, x_n]$, но не совпадает ни с одним из значений x_i.

Поставленную задачу можно решить следующим способом: построить аналитическую функцию $F(x)$ таким образом, чтобы она проходила через данные точки (x_i,y_i), т.е. $F(x_0)= y_0$, $F(x_1)= y_1,\ldots,F(x_n)= y_n$. В этом случае нахождение $F(x)$ называют **интерполяцией**, точки (x_i,y_i) **-узлами интерполяции**, точку x^* – **точкой интерполяции**, а $F(x)$ **-интерполяционной функцией**.

Рассмотрим некоторые виды интерполяции:



Интерполяция называется **линейной**, если каждые две соседние точки (x_i, y_i) соединены прямолинейными отрезками. Как известно, уравнение прямой, проходящей через две точки $M_i(x_i, y_i)$ и $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ записывается как

$$\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i}$$ или

$$y = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n\text{-}1)$$

Данная формула позволяет найти линейную интерполяцию табличной функции

$$y^* = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x^* - x_i) + y_i$$

Отметим, что недостатком этой формулы является то, что для вычисления значения функции, нужно сначала определить интервал, где расположена точка интерполяции x^*.

Интерполяция при помощи классического полинома

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

где a_i – неизвестные коэффициенты, определяемые из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} F(x_0) = y_0, \\ F(x_1) = y_1, \\ \ldots, \\ F(x_{n-1}) = y_{n-1}, \\ F(x_n) = y_n. \end{cases}$$

Тогда для определения коэффициентов a_i имеем линейную систему уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Определительэтой системы обозначим через $W(x_1, \ldots x_n)$:

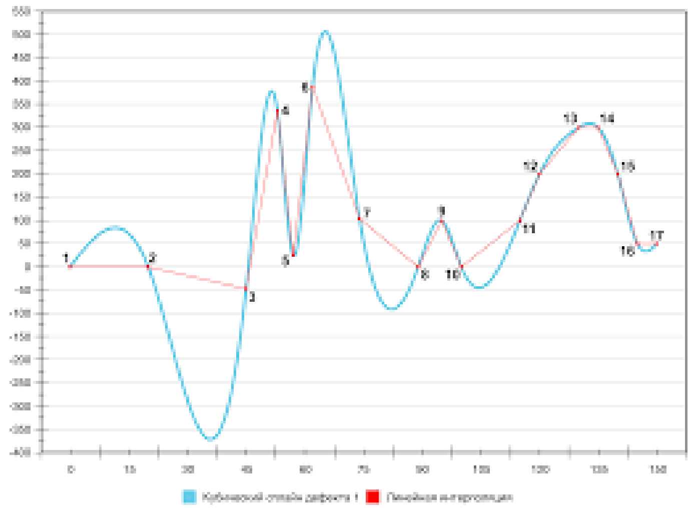
$$W(x_1, \ldots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix},$$

который называется **определителем Вандермонда**.

Индукцией по n можно показать, что

$$W(x_1,\dots x_n)=\prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}(x_i-x_j).$$

Очевидно, что при $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ значение $W \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение исуществует единственный интерполяционный многочлен.



Заметим, что интерполяция при помощи многочленов высокой степени часто приводит к сильной осциляции значений интерполяционной функции между узлами интерполяции. По этой причине, обычно на практике не используют интерполяционные многочлены степени выше пятой, так как это может привести к большой погрешности при вычислении функции в x^*.

Интерполяционный многочлен Лагранжа ищется в виде

$$P_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \ldots + l_n(x)y_n$$

где коэффициенты $l_n(x)$ являются многочленами и удовлетворяют условиям

$$l_n(x_j) = \delta_{nj} = \begin{cases} 1, & n = j \\ 0, & n \neq j \end{cases}.$$

Оказывается, что этих требований достаточно для однозначного определения $l_n(x)$. Действительно, многочлен $l_i(x)$ обращается в ноль в узловых точках $x = x_j\ (i \neq j)$. Следовательно, он имеет разложение

$$l_i(x) = C_i(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n).$$

Положим теперь $x = x_i$. Тогда

$$l_i(x_i) = 1 = C_i(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n),$$

откуда

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

С целью сокращения записи введем функцию

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

тогда

$$C_i = \frac{1}{\omega'(x_i)}, \quad l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}$$

и многочлен $l_i(x)$ принимает вид

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_0)\omega'(x_i)} y_i$$

Или в развернутой форме

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}.$$

Многочлен $L(x)$ называется **интерполяционным многочленом Лагранжа**.

Конечные и разделенные разности

Конечные и разделённые разности играют особую роль в теории интерполяции. Они используются как для формирования новых интерполяционных формул, так и для оценки погрешности интерполяции.

Пусть дана таблица $y_i = f(x_i)$ значений функции $y = f(x)$.

Конечной разностью первого порядка в точке x_i

(обозначается символом Δy_i), называется выражение

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i ,$$

второго порядка, обозначается $\Delta^2 y_i$, – выражение

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i ,$$

И вообще говоря, k-го порядка

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

Так, например, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$

Разделенной разностью первого порядка в точках x_i и x_j (обозначается $f(x_i, x_j)$), называется выражение

$$y_{ij} = f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i},$$

второго порядка в точках x_i, x_j, x_k выражение

$$y_{ijk} = f\left(x_i, x_j, x_k\right) = \frac{f\left(x_j, x_k\right) - f\left(x_i, x_j\right)}{x_k - x_i},$$

k-го порядка в точках x_{i_0}, x_{i_1}, $\cdots$ x_{i_k}, – выражение

$$y_{i_0 i_1 \ldots i_k} = f\left(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots x_{i_k}\right) = \frac{f\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right) - f\left(x_{i_0}, \ldots, x_{i_{k-1}}\right)}{x_{i_k} - x_{i_0}}.$$

Так, например,

$$f\left(x_0, x_1\right) = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}, \quad f\left(x_0, x_1, x_2\right) = \frac{f\left(x_1, x_2\right) - f\left(x_0, x_1\right)}{x_2 - x_0} \text{ и т.п.}$$

Получим некоторые полезные для дальнейшего соотношения, связанные с разделенными разностями. Выразим $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ через значения функции в узловых точках. Так, непосредственно из определения следует

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0},$$

и, после очевидных преобразований,

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Продолжая, далее, по индукции, получим

$$f(x_0, x_1, \ldots x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Получим теперь второе полезное соотношение.

Выразим $f(x_m)$ через разделенные разности. Так, непосредственно из определения следует

$$f(x_1)=f(x_0)+(x_1-x_0)f(x_0,x_1),$$
$$f(x_2)=f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_1,x_2)=f(x_0)+(x_1-x_0)f(x_0,x_1)+(x_2-x_1)f(x_1,x_2).$$

Прибавляя теперь к правой части $\pm(x_2-x_1)f(x_0,x_1)$ после очевидных преобразований получим

$$f(x_2)=f(x_0)+(x_2-x_0)f(x_0,\ x_1)+(x_2-x_0)(x_2-x_1)f(x_0,\ x_1,\ x_2).$$

Рассуждая далее по индукции по m придем к искомому соотношению

$$f(x_m)=f(x_1)+(x_m-x_0)f(x_0,x_1)+$$
$$+(x_m-x_0)(x_m-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+\ldots$$
$$+(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})f(x_0,x_1,\ldots,x_m)$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

Рассмотрим многочлен степени n вида

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \ldots + (x - x_0) \ldots (x - x_n) f(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Определим его значения в узловых точках.

Так, непосредственно из определения следует

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

Далее,

$$P_n(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f(x_0, x_1),$$

но с учетом

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

получаем

$$P_n(x_1) = f(x_1)$$

Аналогичным образом получаем, что

$$P_n(x_2) = f(x_2),$$
$$\ldots$$
$$P_n(x_n) = f(x_n).$$

Таким образом, многочлен $P_n(x)$ принимает заданные значения в заданных точках и, следовательно, является интерполяционным. Он и называется **интерполяционным многочленом Ньютона**. Заметим, что в силу единственности интерполяционного многочлена различия между интерполяционными многочленами Лагранжа и Ньютона чисто внешние.

С помощью теоремы Ролля можно показать, что для функции $y=f(x)$, по аргументам x_i которой строится полином Ньютона, остаточный член определяется формулой

$$R(x) = f(x) - F(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n),$$

где ξ зависит от x и лежит внутри отрезка $[x_0, x_n]$.

Сплайн– интерполяция – это функция, которая на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ интерполяции является алгебраическим многочленом, а на всем заданном отрезке непрерывна вместе с несколькими своими производными.

Наиболее распространены кубические сплайны:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

где неизвестные коэффициенты находятся из системы:

$$\begin{cases} c_0 = 0, \\ c_n + 3d_n h_n = 0, \\ a_i = y_{i-1}, \\ b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1}, \\ b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \\ c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}. \end{cases}$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}.$$