Приближённые методы решения линейных систем

При использовании приближённых методов предполагается, что система представлена в виде

$$x = Bx + d, \qquad (3)$$

который называется **нормальной формой** системы уравнений.

Процесс вычислений в этом случае организуют следующим образом. По тем или иным соображениям выбирается начальное приближение $x^{(0)}$ к решению системы. Оно подставляется в правую часть (3) , полученное значение обозначается через $x^{(1)}$, принимается в качестве следующего приближения и подставляется в правую часть для получения $x^{(2)}$ и т.д. Таким образом, вычислительный процесс описывается формулой рекуррентной формулой

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b \qquad (4)$$

и называется **итерационным**. Процедура получения очередного приближения называется **итерацией**.

Описанная процедура приближённого решения системы уравнений называется **методом простой итерации**.

Модификацией этого метода является **метод Зейделя**. Его отличие состоит в том, что при получении компонент (κ+1)-го приближения используются полученные на этой же итерации «улучшенные» значения предыдущих компонент. Математически этот процесс описывается следующим способом

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + b_{13}x_3^{(k)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(k)} + d_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + b_{22}x_2^{(k)} + b_{23}x_3^{(k)} + \ldots + b_{2n}x_n^{(k)} + d_2 \\ x_3^{(k+1)} = b_{31}x_1^{(k+1)} + b_{32}x_2^{(k+1)} + b_{33}x_3^{(k)} + \ldots + b_{3n}x_n^{(k)} + d_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k+1)} + b_{n2}x_2^{(k+1)} + b_{n3}x_3^{(k+1)} + \ldots + b_{nn}x_n^{(k)} + d_n \end{cases} \qquad (5)$$

С целью ускорения сходимости в качестве очередной улучшаемой компоненты рекомендуется выбирать ту, которой соответствует наибольшее значение модуля невязки, т.е. значения $\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$. Это реализуется так. После получения *к*-го приближения формируется вектор

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} - x_n^{(k-1)} \end{pmatrix},$$

компоненты которого упорядочиваются по убыванию их модулей. Установленный в результате этого порядок переносится и на последовательность вычисления компонент (κ+1)-го приближения по правилам (5).

Можно показать, что **стационарный** метод Зейделя (5), т.е. когда порядок вычисления компонент неизменен, сводится к методу простой итерации.

Для описания сходимости вычислительного процесса и оценки погрешности приближённого решения необходимы дополнительные понятия.

Понятие нормы. **Нормой вектора x,** обозначается $\|x\|$, называется величина удовлетворяющая условиям:

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$; (6)
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

В теории метрических пространств получили распространение следующие типы норм:

1. $\|x\|_I = \max\limits_i |x_i|$; (Норма Чебышева)
2. $\|x\|_{II} = \sum\limits_i |x_i|$;
3. $\|x\|_{III} = \sqrt{\sum\limits_i {x_i}^2}$. (Евклидова норма)

В зависимости от типа геометрической фигуры, получаемой в трёхмерном пространстве, описываемой условием $\|x\|_I \leq 1$, первая из них называется **кубической**, вторая,- **октаэдрической** и третья,- **сферической**.

Нормой матрицы А, обозначается $\|A\|$, называется величина, удовлетворяющая помимо требований (6) дополнительному условию

$$\|AB\| \leq \|A\| * \|B\|.$$

Обычно, используются одна из следующих норм:

1. $\|A\|_I = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$;
2. $\|A\|_{II} = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$;
3. $\|A\|_{III} = \sqrt{\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2}$.

При одновременном использовании норм необходимо их согласование. А именно, норма вектора первого типа используется с нормой матрицы первого типа и т.д.

Понятие расстояния. **Расстоянием** между векторами x, y, обозначается символом $\rho(x, y)$, называется величина

$$\rho(x, y) = \|y - x\|.$$

Из свойства 4 (6) следует важное для дальнейшего, так называемое, **неравенство треугольника**

$$\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Действительно,

$$\rho(x, z) = \|z - x\| = \|(z - y) + (y - x)\| \le \|z - y\| + \|y - x\| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Сжимающие отображения. Пусть F ,- некоторое отображение в линейном пространстве векторов. Оно называется **сжимающим**,- если существует такое число $\alpha \in (0,1)$, что для любых векторов *x, y* выполняется соотношение

$$\rho(F(x)\ ,F(y)\ ) < \alpha\rho(x,y).$$

Применительно к нормальной форме системы уравнений (3) в качестве F рассмотрим правую часть системы уравнений. А именно,

$$F(x)\ = Bx + d$$

Тогда

$$\rho(F(x),F(y)) = \|F(y) - F(x)\| = \|B(y-x)\| \le \|B\| \cdot \rho(x,y).$$

Таким образом, для того, чтобы отображение, определяемое системой (3) было сжимающим достаточно, чтобы одна из норм матрицы *B* была меньше 1.

Понятие сходимости. Пусть $\left\{x^{(\kappa)}\right\}$, где $\kappa = 1, 2, \ldots$ некоторая бесконечная последовательность векторов. Говорят, что она сходится к вектору x по норме, если

$$\lim_{k \to \infty} \left\| x^{(k)} \right\| = \|x\|.$$

Последовательность $x^{(k)}$ сходится к вектору x **покомпонентно**, если

$$\lim_{k \to \infty} x_i^{(k)} = x_i \quad \text{для } i = \overline{1, n}.$$

Нетрудно показать, что два эти понятия в некотором роде эквивалентны. А именно, если последовательность $x^{(\kappa)}$ сходится по норме, то она сходится покомпонентно и наоборот.

При анализе сходимости последовательностей центральное место принадлежит **признаку Коши**:

Последовательность $\left\{x^{(\kappa)}\right\}$ сходится тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ такой номер $N(\varepsilon)$, что для $k > N(\varepsilon)$ и $\forall$ $m > 0$ выполняется $$\left\|x^{(k)} - x^{(k+m)}\right\| < \varepsilon$$ (или $\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k+m)}\right| < \varepsilon$ для $i = \overline{1,n}$).

Сходимость итерационного процесса. Оценка погрешности. Пусть $\left\{x^{(\kappa)}\right\}$ итерационная последовательность, т.е.

$$x^{(k)} = F(x^{(k-1)}) \ , \tag{7}$$

где F - сжимающее отображение с коэффициентом сжатия $\alpha \in (0;1)$.

Рассмотрим $\rho(x^{(k)},\ x^{(k+1)})$. По индукции имеем

$$\rho(x^{(k)},\ x^{(k+1)}) = \rho(F^{(k)}x^{(0)},\ F^{(k)}x^{(1)}) \le \alpha^k \cdot \rho(x^{(0)},\ x^{(1)}). \tag{8}$$

Далее, по свойству треугольников и с учетом (8), справедливым оказывается соотношение

$$\begin{gathered}\rho(x^{(k)},\ x^{(k+m)}) \le \rho(x^{(k)},\ x^{(k+1)}) + \rho(x^{(k+1)},\ x^{(k+2)}) + \ldots + \\ + \rho(x^{(k+m1)}, x^{(k+m)}) \le (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-1})\rho(x^{(k)}, x^{(k+1)}) \le \\ \le \frac{1-\alpha^m}{1-\alpha} \cdot \alpha^k \cdot \rho(x^{(0)},\ x^{(1)}) < \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\rho(x^{(0)},\ x^{(1)}).\end{gathered} \tag{9}$$

Потребовав теперь, чтобы

$$\frac{\alpha^k}{1-\alpha}\rho(x^{(0)},\ x^{(1)}) < \varepsilon,$$

очевидно, можно найти номер $\mathrm{N}(\varepsilon)$, начиная с которого $\rho(x^{(k)},\ x^{(k+m)}) < \varepsilon$ для $\forall k > N(\varepsilon)$ и $m > 0$.

Таким образом, для сжимающего отображения признак Коши выполнен и, следовательно, итерационный процесс (7) сходится.

Оценим теперь погрешность *к*-го приближения, а именно, величину $\rho(x^{(k)},\ x)$, где x - точное решение. С этой целью рассмотрим соотношение

$$\rho(x^{(k)},\ x^{(k+m)}) \le \frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}\cdot\rho(x^{(\kappa)},\ x^{(k+1)}) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x^{(k-1)},\ x^{(k)}).$$

Переходя в нём к пределу при $m \to \infty$, получим , таким образом,

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\left\| x^{(k-1)} - x^{(k)} \right\|, \tag{10}$$

Таким образом,

Если одна из норм матрицы *B* системы уравнений (3) **меньше единицы**, то итерационный процесс (4) является сходящимся при любом начальном приближении. Погрешность k - го приближения описывается соотношением (10).

Из предыдущего следует, что успех приближённого решения системы линейных алгебраических уравнений (1) во многом определяется возможностью её эффективного приведения к нормальному виду (3), для которого выполняется достаточные условия сходимости. Приведём некоторые соображения и рекомендации на этот счёт.

***Первый вариант*.** Рассмотрим систему

$$Ax=b.$$

Представим матрицу A в виде суммы $A=A_1+A_2$, где $det\ A_1 \neq 0$.

Тогда

$$(A_1 + A_2)x=b,$$

отсюда

$$x = -A_1^{-1} A_2 x + A_1^{-1} b\,.$$

Обозначив через $B = -A_1^{-1}A_2$, $d = A_1^{-1}b$, получим

$$x = Bx + d,$$

что и требовалось. Тогда для того, чтобы обеспечить выполнение достаточного условия сходимости $\|B\| < 1$, в качестве A_1 достаточно взять матрицу близкую к A, т.е. $A_1 \approx A$, в качестве A_2, - «малую» матрицу $(\varepsilon_{ij})_{m,n}$

Поясним это предложение на примере. Рассмотрим

$$\begin{cases} 1x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases},$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 2-\varepsilon \\ 3-\varepsilon & 4-\varepsilon \end{pmatrix},$$

Тогда $A_2 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдём $B = -A_1^{-1} A_2$.

Имеем $det\, A_1 = -2 \neq 0$ и

$$A_1^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4-\varepsilon & -(2-\varepsilon) \\ -(3-\varepsilon) & 1-\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B = -A_1^{-1} A_2 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};\quad b = -\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

и система принимает вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -1-\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Очевидно, для сходимости метода итераций достаточно взять $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Второй вариант. Состоит в следующем. Путём эквивалентных преобразований стараются добиться того, чтобы диагональные элементы в матрице A доминировали в левой части соответствующих уравнений, т.е. были по модулю существенно больше остальных. После этого каждое из уравнений делят на a_{ii} и, первое уравнение разрешают относительно x_1 второе относительно x_2 и т.д.

В качестве примера рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} 2{,}3x_1 - 4{,}2x_2 - \mathbf{11{,}6}x_3 = 14{,}4 \\ \mathbf{8{,}0}x_1 + 5{,}2x_2 + 0{,}2x_3 = -6{,}4 \\ 3{,}9x_1 - \mathbf{7{,}9}x_2 + 8{,}4x_3 = 55{,}6 \end{cases}$$

В результате анализа коэффициентов левой части уравнений производится их перестановка

$$\begin{cases} \mathbf{8{,}0}x_1 + 5{,}2x_2 + 0{,}2x_3 = -6{,}4 \\ 3{,}9x_1 - \mathbf{7{,}9}x_2 + 8{,}4x_3 = 55{,}6 \\ 2{,}3x_1 - 4{,}2x_2 - \mathbf{11{,}6}x_3 = 14{,}4 \end{cases}$$

и для обеспечения доминирования во втором уравнении коэффициента a_{22}, который пока равен -7,9, ко второму уравнению прибавляется третье. В результате этого имеем

$$\begin{cases} \mathbf{8{,}0}x_1 + 5{,}2x_2 + 0{,}2x_3 = -6{,}4 \\ 6{,}2x_1 - \mathbf{12{,}1}x_2 - 3{,}2x_3 = 70{,}0 \\ 2{,}3x_1 - 4{,}2x_2 - \mathbf{11{,}6}x_3 = 14{,}4 \end{cases}$$

или, в нормальной форме,

$$\begin{cases} x_1 = & & -\dfrac{5,2}{8,0}x_2 & -\dfrac{0,2}{8,0}x_3 & -\dfrac{6,4}{8,0} \\ x_2 = -\dfrac{6,2}{12,1}x_1 & & & +\dfrac{3,2}{12,1}x_3 & -\dfrac{70}{12,1} \\ x_3 = -\dfrac{2,3}{11,6}x_1 & & -\dfrac{4,2}{11,6}x_2 & & -\dfrac{14,4}{11,6} \end{cases}.$$

Здесь матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{5,2}{8,0} & -\dfrac{0,2}{8,0} \\ \dfrac{6,2}{12,1} & 0 & \dfrac{3,2}{12,1} \\ \dfrac{2,3}{11,6} & -\dfrac{4,2}{11,6} & 0 \end{pmatrix},$$

очевидно, её норма $\|B\|_I < 1$, и, следовательно, формируемый ею итерационный процесс сходится.