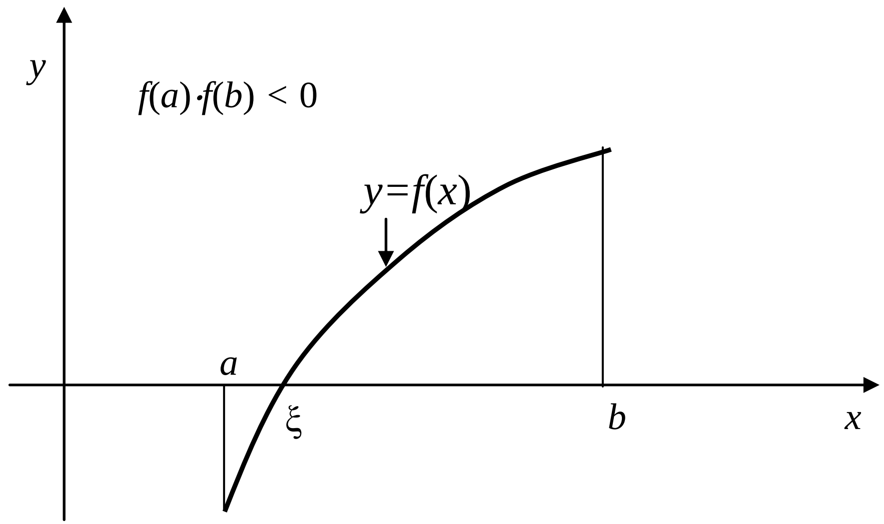
Тема «Численные методы решения нелинейных уравнений»

Теоретическую основу численного отыскания корней уравнения $f(x) = 0$ дает следующая



<u>Теорема (Больцано-Коши):</u> Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[\alpha;\beta]$, то есть $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения $f(x) = 0$, то есть найдется хотя бы одно число $\xi \in (\alpha;\beta)$ такое, что $f(\xi) = 0$. Корень ξ заведомо будет единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала $(\alpha;\beta)$.

Процесс отыскания корня уравнения $f(x)=0$ состоит из двух этапов:

1) Нахождение приближенного значения корня;
2) Уточнения приближенного значения до некоторой заданной степени точности.

Процесс определения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в граничных точках $x=a$ и $x=b$ в области ее существования.

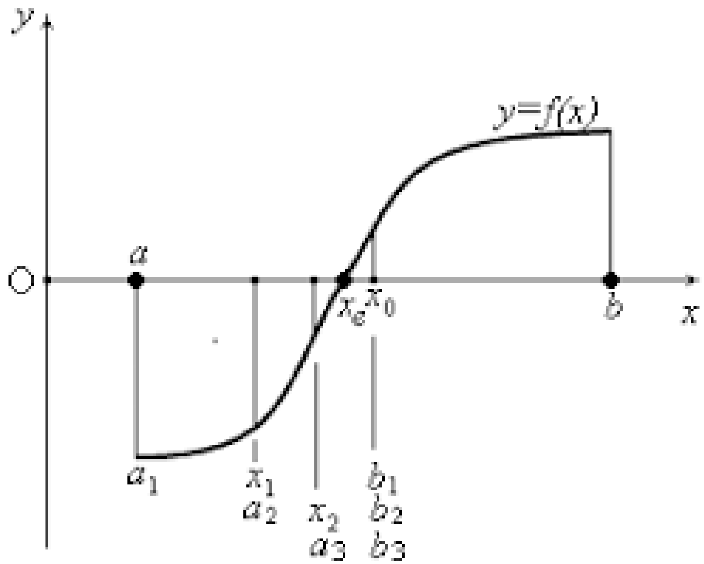
На втором этапе строится последовательность $\{x_n\}$, элементы которой в пределе сходятся к точному значению корня, то есть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

Именно в различных методах построения этой уточняющей последовательности $\{x_n\}$, в зависимости от ограничений на функцию $f(x)$, и заключается отличие методов численного решения уравнения.

Один из наиболее универсальных (неприхотливых к свойствам функции $f(x)$) является метод дихотомии или метод половинного деления.

Метод половинного деления для уравнения $f(x) = 0$ (метод дихотомии).



Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, причем функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Найдем середину отрезка $x_1 = \frac{a+b}{2}$, если $f(x) \neq 0$, то для продолжения вычислений выберем ту из частей данного отрезка $[a;x_1]$ или $[x_1;b]$ на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Концы нового отрезка обозначим через a_1 и b_1. Новый суженный промежуток $[a_1;b_1]$ снова делим пополам и проводим вычисления по разобранной схеме т.д.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока длина полученного отрезка не станет меньше величины Δ, где Δ - заданная точность. За приближенное решение принимается либо средняя точка последнего промежутка, либо последнее значение.

За n шагов алгоритма величина отрезка $[a_n; b_n]$ содержащего корень x_c оказывается равной $\frac{b-a}{2^n}$, тогда чтобы найти значение корня с абсолютной погрешностью Δ нужно

$$\frac{b-a}{2^n} \le \Delta; \quad \frac{b-a}{\Delta} \le 2^n; \quad n \ge \log_2 \frac{b-a}{\Delta}$$

То есть, через $\left[\log_2 \frac{b-a}{\Delta}\right]$ шагов ($[x]$ – целая часть действительного x) алгоритм дихотомии дает значение корня с нужной точностью.

Метод хорд (метод пропорциональных частей).

Дано уравнение $f(x)=0$, причем функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Если $f(a)<0$ и $f(b)>0$, то последовательные приближения

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n),\ (n=0,\,1,\,2,\,\ldots;\ x_0=a)$$

образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность,

при этом $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots<\xi<b$,

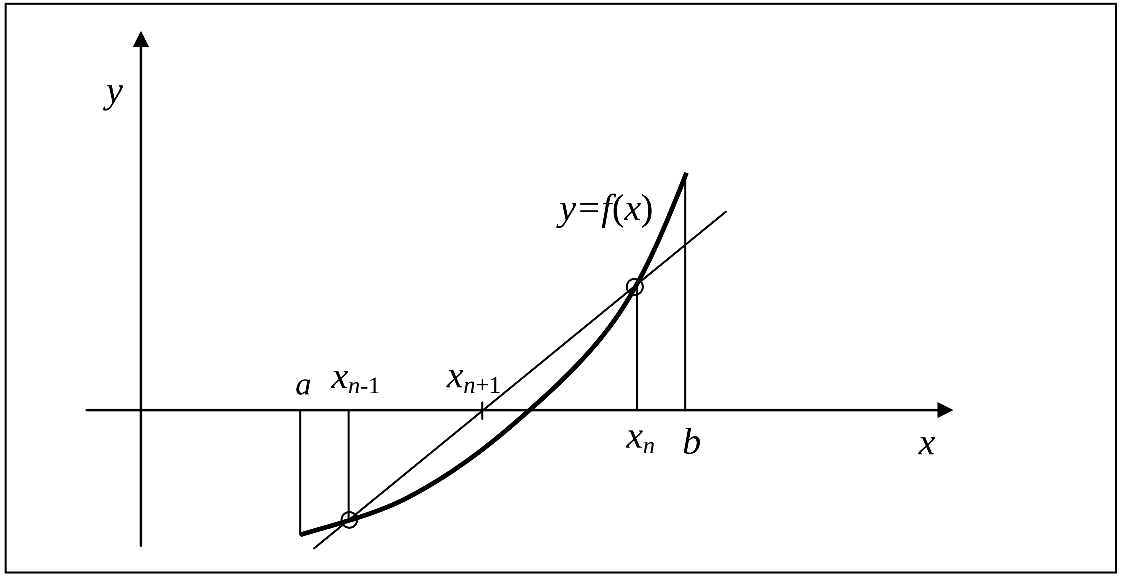
где ξ - корень уравнения.

Если $f(a)>0$ и $f(b)<0$, то последовательные приближения

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}(x_n-a),\ (n=0,\,1,\,2,\,\ldots;\ x_0=b)$$

образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем $a<\xi<\ldots<x_{n+1}<x_n<\ldots<x_1<x_0$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет обнаружено, что $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$, где ε - заданная точность. За приближенное решение принимается $\xi\approx x_{n+1}$.

Выясним его геометрический смысл.



Рассмотрим точки кривой $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_n, f(x_n\ ))$ и проведем через них прямую

$$\frac{x - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y - f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Найдем, далее, ее точку пересечения с осью абсцисс. Имеем при $y = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1}\ )}(x_n - x_{n-1}).$$

Сравнивая полученные выражения, приходим к выводу, абсцисса точки пересечения прямой, проходящей через точки кривой, определяемые двумя последними приближениями, представляет собой следующее приближение к решению уравнения

Пример. Решить уравнение $x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0$ с точностью $\Delta = 0,002$

Пусть $f(x) = x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2$

Прежде всего, отделим корень: $f(1) = -0,6 < 0$ и $f(1,5) = 1,425 > 0$

То есть искомый корень лежит в интервале (1; 2). Уточняем корень по методу хорд:

$$x_1 = 1 + \frac{0,6}{1,425 + 0,6}(1,5 - 1) = 1,15 \qquad f(x_1) = -0,173$$

$$x_2 = 1,15 + \frac{0,173}{1,425 + 0,173}(1,5 - 1,15) = 1,19 \qquad f(x_2) = -0,036$$

$$x_3 = 1,19 + \frac{0,036}{1,425 + 0,036}(1,5 - 1,19) = 1,198 \qquad f(x_3) = -0,0072$$

$$x_4 = 1,198 + \frac{0,0072}{1,425 + 0,0072}(1,5 - 1,198) = 1,1995 \qquad f(x_4) = -0,0017$$

Так как $|x_4 - x_3| < 0,0015 < 0,002$, то корень уравнения приближенно равен

$$\xi = 1,198$$

Метод последовательных приближений (метод простой итерации). В этом случае уравнение приводится к виду

$$x = F(x)$$

Далее, выбирается начальное приближение x_0 к решению и по правилу

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

строится последовательность $\{x_n\}$.

Определение. Отображение, заданное функцией $F(x)$ по правилу

$$y = F(x)$$

имеет **неподвижную точку** c, если верно равенство $c = F(c)$

Очевидно, что в этом случае неподвижная точка является решением уравнения.

Определение. Отображение, заданное функцией $F(x)$ по правилу $y = F(x)$ называется **сжимающим в области *D***, если для любых $x_1, x_2 \in D$ верна оценка

$$\left|F(x_1) - F(x_2)\right| \le \alpha \left|x_1 - x_2\right| \text{ где } \alpha < 1.$$

Теорема. Для того, чтобы в области $\boldsymbol{D}$ существовала неподвижная точка у отображения $F(x)$ достаточно, чтобы это отображение было сжимающим.

Рассмотрим отображение, формируемое функцией $F(x)$. Пусть x_1, x_2 некоторые произвольные значения переменной $x \in [a,b]$, оценим величину $|F(x_1)-F(x_2)|$. Имеем

$$|F(x_1)-F(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot \left|\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1 - x_2}\right| = |x_1 - x_2| \cdot \left|\frac{dF(c)}{dx}\right| \le \alpha |x_1 - x_2|$$

где $\alpha = \max\left|\dfrac{dF(x)}{dx}\right|$.

Отсюда вытекает следующее **утверждение**. Если $\alpha < 1$ или $\left|\dfrac{dF}{dx}\right| \le \alpha < 1$ для $\forall x \in [a,b]$, то отображение $F(x)$ является сжимающим. Следовательно, итерационный процесс в этом случае сходится.

Заметим, что при использовании метода простой итерации важно как именно приводит уравнение к требуемому виду $x = F(x)$.

Пример. Рассмотрим уравнение вида $x^3 - x - 1 = 0$

Данное уравнение имеет корень на интервале (1; 2), так как *f*(1) = -1 < 0 и *f*(2) = 5 > 0

Возможно два варианта действий:

1)Очевидный путь состоит в том, что преобразовать уравнение к виду

$$x = x^3 - 1$$

Но тогда, $F(x) = x^3 - 1$. Проверяем условие сходимости на (1; 2)

$$\left|\frac{dF}{dx}\right| = 3x^2 > 1$$

Вывод: процесс итераций будет расходится

2)Пусть $x = \sqrt[3]{x+1}$ и $F(x) = \sqrt[3]{x+1}$

Тогда $\left|\frac{dF}{dx}\right| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < 1$ - процесс сходится

Метод Ньютона.

Рассмотрим уравнение $f(x)=0$, в предположении что функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;\ b]$. Пусть далее x_0 - некоторое приближение к его решению. Разложим левую часть уравнения по формуле Тейлора в точке x_0

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)=0$$

Ограничимся в этом разложении первыми двумя слагаемыми (приближение дифференциала)

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

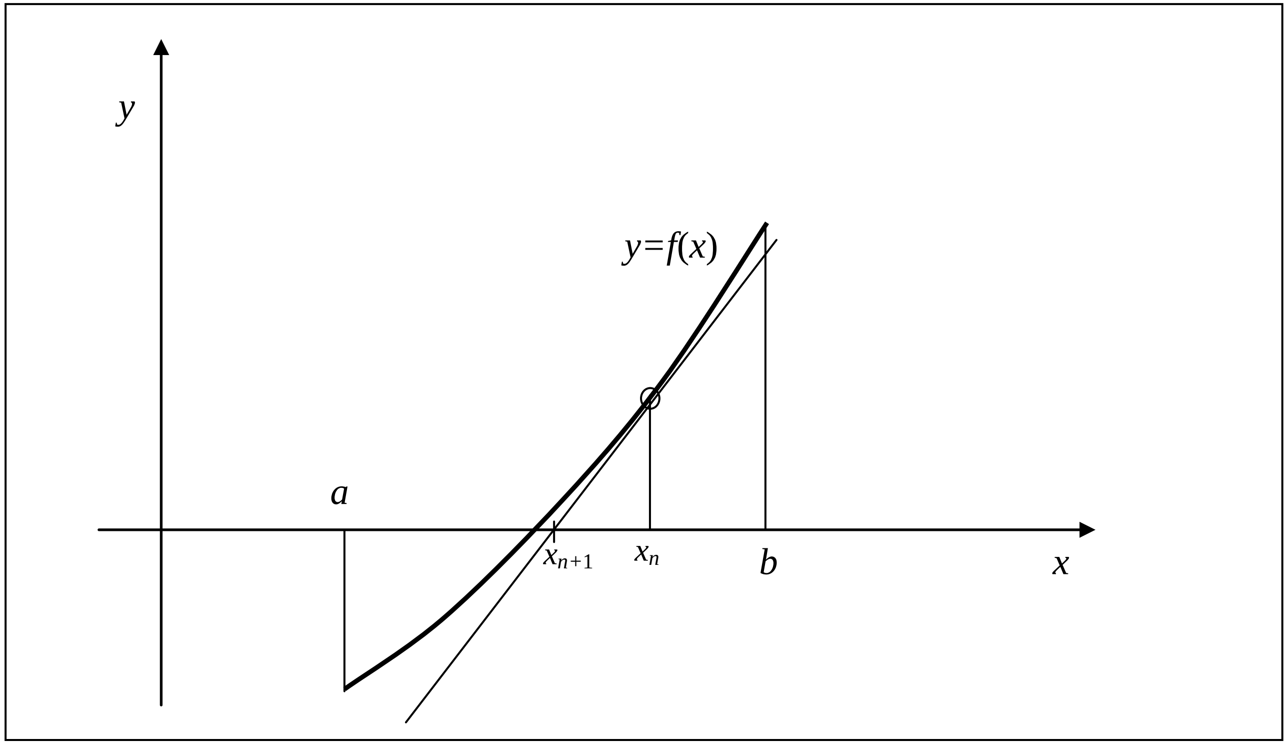
И решим относительно x

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Последнее соотношение принимается в качестве базового для формирования вычислительного процесса. Он описывается формулой

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

и называется **методом Ньютона**. Заметим, что это правило имеет вполне определённый геометрический смысл.



Действительно, рассмотрим уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_n, y_n)

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

и определим её точку пересечения с осью *Ox*:

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Из сравнения полученного выражения с итерационной формулой метода Ньютона следует вывод, что абсцисса точки пересечения касательной, проведённой к графику функции в точке $(x_n, f(x_n))$ и представляет собой следующее приближение к решению уравнения

По этой причине метод Ньютона называют ещё **методом касательных.**

Сходимость, оценка погрешности примере метода Ньютона.

Рассмотрим отображение

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

где $f(x)$ - левая часть уравнения, причем $f'(x) \neq 0$.

Заметим, что неподвижная точка отображения $F(x)$, если она есть, является и решением уравнения. Действительно, пусть существует значение x такое, что $x = F(x)$. Отсюда

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$$ откуда $f(x) = 0$, что и требовалось доказать.

Далее, пусть x_1, x_2 произвольные значения x, оценим величину

$$\left|F(x_1)-F(x_2)\right| = \left|(x_1-x_2)-\left(\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}\right)\right| = \left|x_1-x_2\right|\cdot\left|1-\frac{\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}}{x_1-x_2}\right|.$$

Тогда по теореме Лагранжа

$$\left|F(x_1)-F(x_2)\right| = \left|x_1-x_2\right|\cdot\left|1-\left(\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{f'(x)}\right)_{x=c}\right|,$$

где $c\in(x_1,x_2)$, или

$$\left|F(x_1)-F(x_2)\right|\le\alpha\left|x_1-x_2\right|$$

где $\alpha=\max\limits_{[a,b]}\left|1-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)\right|$.

Отсюда следует **утверждение**. Если $\alpha < 1$ или, что то же $0 < \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right) < 2$, то отображение $F(x)$ является сжимающим, последовательность

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

им формируемая, является сходящейся и, следовательно, метод Ньютона (касательных) в этом случае сходится.