UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS - Matemática 2

Ejercitación 6: Introducción a la investigación operativa

1. Considerar el siguiente grafo dirigido G en el cual hemos puesto el peso de cada arista como un número entero.

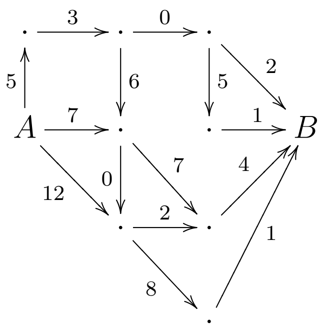
$$\begin{tikzcd}
v_1 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "5"] & v_2 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & v_4 \arrow[d, "1"] \\
v_3 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"] & v_5 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "6"'] & v_7 \arrow[d, "1"] \\
v_6 \arrow[r, "3"'] \arrow[urr, bend right, "2"'] & v_8 \arrow[r, "2"'] & v_9
\end{tikzcd}$$

   (a) Buscar un camino dirigido de v_1 a v_9 de peso mínimo usando un método ambicioso.

   (b) Buscar un camino dirigido de v_1 a v_9 de peso mínimo usando el algoritmo de programación dinámica.

   (c) ¿Son iguales los costos en los caminos de los items anteriores?

2. Un camión debe transportar una cierta mercadería de la ciudad A a la ciudad B. En el siguiente mapa se describen todos los posibles caminos de A a B y se ha indicado, para cada tramo, la cantidad de km en mal estado que contiene.



   Debido a que el camión es viejo y la mercadería es delicada, el chofer decide que tomará la ruta que contenga la menor cantidad de km en mal estado, aún si fuese la más larga. Determine qué camino le conviene tomar.

3. Considere el grafo dirigido dado por la siguiente matriz de incidencia vértice-arista

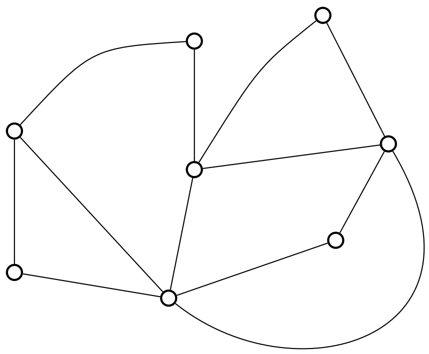
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y cuyo conjunto de aristas tiene asignados los costos de la siguiente lista: $\{5, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 1\}$. Halle un camino dirigido de costo total mínimo desde el vértice 1 hasta el vértice 6.

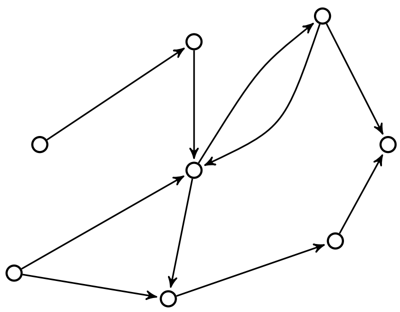
4. Dada la siguiente tabla de adyacencias dibuje el grafo asociado.

v	$A(v)$
1	2,5
2	1,5
3	2,4
4	3
5	1,2,6,8
6	5
7	8
8	7

5. Dado el siguiente grafo, enumere los vértices de alguna manera y construya la tabla de adyacencias.



6. Enumere vértices y aristas del siguiente grafo dirigido y halle la matriz de incidencia vértice-arista correspondiente. A continuación indique si contiene algún ciclo.



7. Sea G un grafo dirigido cuya matriz de incidencia es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine si G tiene algún ciclo.

   (b) Grafique G y verifique que su respuesta en (a) fue correcta.

8. Para cada uno de los siguientes grafos dados por su tabla de adyacencias determinar si es un árbol. Para aquellos que no lo sean realice una mínima modificación para que lo sean.

(a)

v	$A(v)$
1	2
2	1,3,5
3	2,5,6,7
4	5
5	2,3,4
6	3
7	3

, (b)

v	$A(v)$
1	3
2	7,8
3	1,6
4	6
5	6
6	3,4,5
7	2
8	2

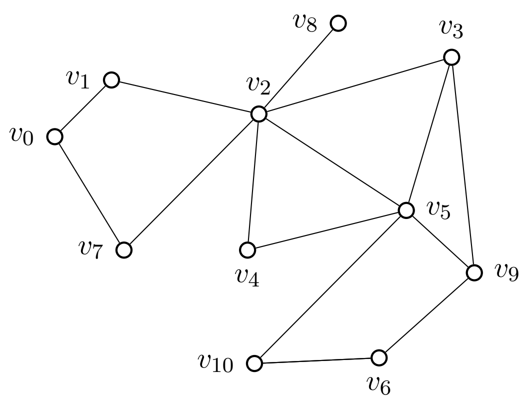
, (c)

v	$A(v)$
1	7
2	3,5,8
3	2,7
4	7
5	2
6	7
7	1,3,4,6
8	2,9
9	8

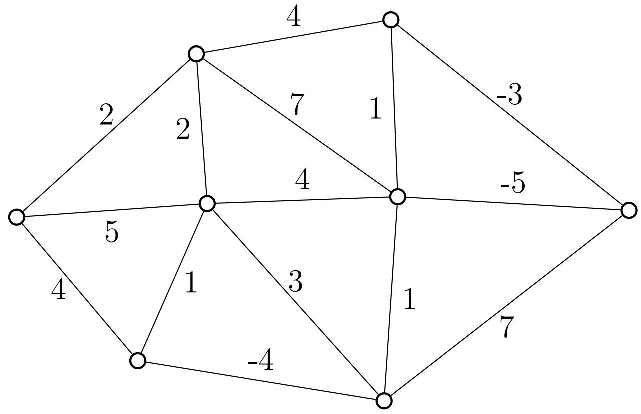
, (d)

v	$A(v)$
1	6
2	6,7
3	4,9
4	3
5	6,7
6	1,2,5
7	2,5,8
8	7
9	3

9. Busque dos o más árboles generadores distintos del siguiente grafo $G = (V, E)$.

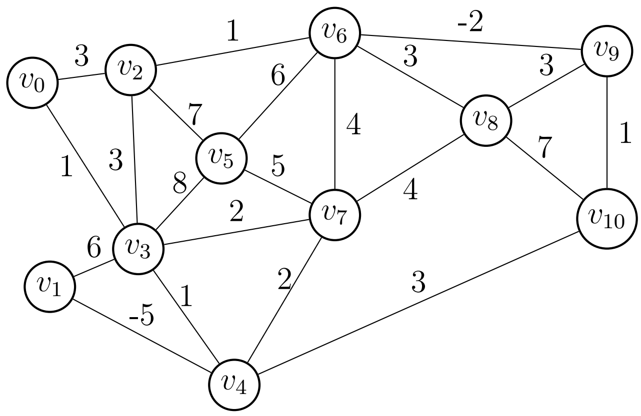


10. Sea el grafo



con el peso indicado en cada arista. Hallar el árbol generado de G con peso total mínimo.

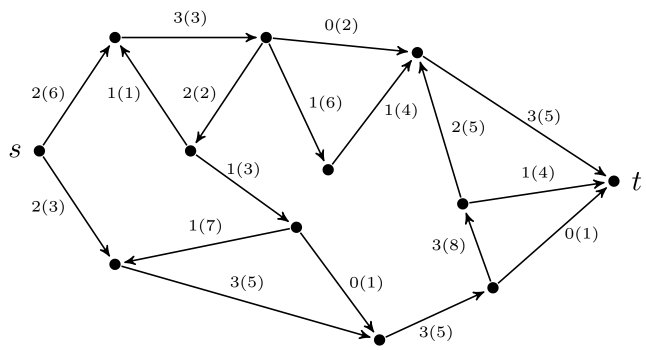
11. Sea G el siguiente grafo, con el peso indicado en cada arista.



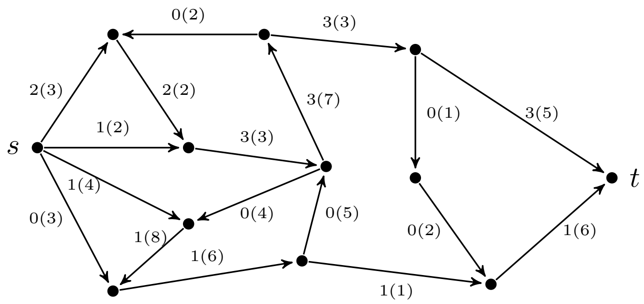
Hallar el árbol generado de G con peso total mínimo.

12. Para cada uno de los siguientes grafos determinar si es óptimo. En caso de qué no lo sea hallar, utilizando el algoritmo de Ford-Fulkerson, un flujo óptimo.

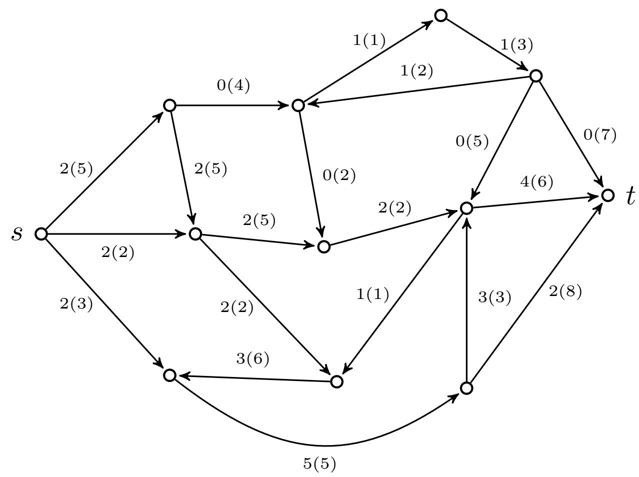
a)



b)



c)



13. En cada uno de los grafos anteriores, hallar el flujo máximo tomando como flujo inicial 0 como peso en todas las aristas.

14. Plantee el siguiente problema como un problema de máximo flujo y resuélvalo utilizando el algoritmo de Ford-Fulkerson:

    Un depósito almacena tres tipos de productos para abastecer a tres localidades. Supongamos que en este momento el distribuidor tiene en stock 5 toneladas del producto 1, 2 toneladas y media del producto 2 y 4 toneladas y media del producto 3 y que dispone de un camión con 5 toneladas de capacidad para enviar a la localidad 1, de un camión con 6 toneladas de capacidad para enviar a la localidad 2 y de un camión con 2 toneladas y media de capacidad para enviar a la localidad 3. Determinar cuál es la máxima cantidad de toneladas que puede entregar de las 13 toneladas que le fueron demandadas en total, sabiendo que la cantidad de toneladas t_{ij} del producto i demandadas por la localidad j está dada por la siguiente matriz:

$$(t_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 3.5 & 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

    (OPCIONAL) Determinar la cortadura mínima.