Matematik A/B/C, stx

Vejledning

Undervisningsministeriet
Styrelsen for Undervisning og Kvalitet
Gymnasiekontoret, marts 2019

Vejledningen præciserer, kommenterer, uddyber og giver anbefalinger vedrørende udvalgte dele af læreplanens tekst, men indfører ikke nye bindende krav.

Citater fra læreplanen er anført i kursiv.

Følgende ændringer er foretaget i vejledningen i marts 2019:

Præciseringer:

- *Vektorer: Geometrisk modellering (B/C), trigonometri (B/C)*
- *Funktioner: Andengradspolynomier (C)*
- *Statistik: Regressionsanalyse (B), hypotesetest (A/B)*
- *Mundtlige prøver: Eksamen med en elev (B/C)*
- *Skriftlige prøve: Tonede skriftlige prøver (B), betydning af 'beregning' og 'aflæsning' (A/B), geometrisk modellering (A/B), betegnelse for grafvindue (A/B), ekstrema (A/B), tangentplan (A), stationære punkter (A), betydning af 'parametre' (A/B), kopi af opgavetekst (A/B)*

Tilføjelse, afsnit 3.3 It:

- *Om matematiks rolle i udvikling af elevernes digital dannelse (A/B/C)*

Indholdsfortegnelse

0. Forord

I læreplanen indgår tre overordnede faglige områder, nemlig funktionsteori, geometri samt sandsynlighedsregning og statistik (de tre ”søjler” illustreret i modellen nedenfor). Disse tre områder er gennemgående fra start til slut henover de tre gymnasieår og de tre stx-niveauer C, B og A.

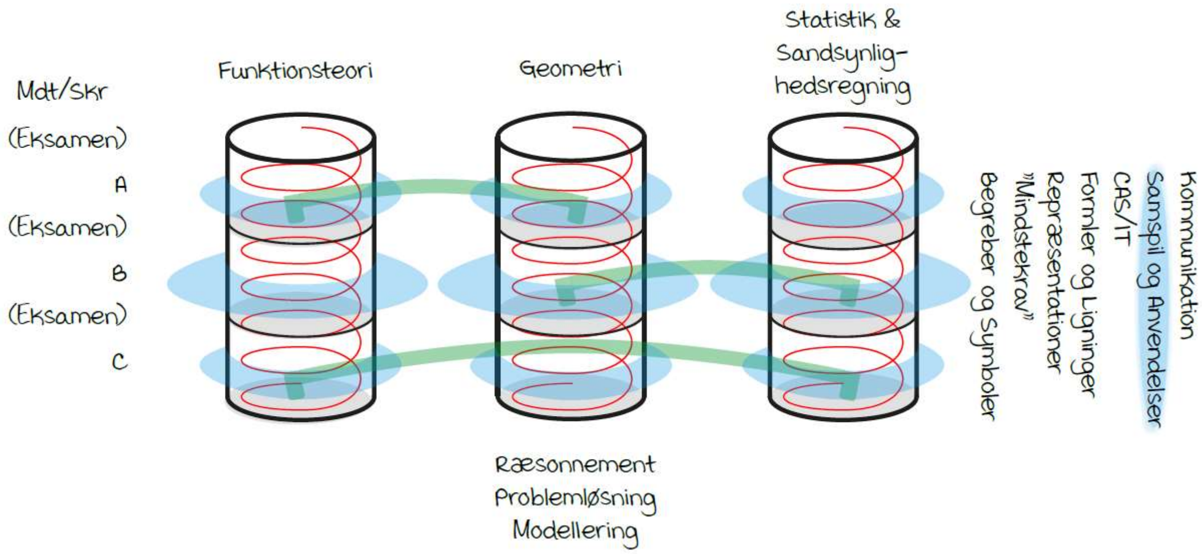
Der vil i nærværende undervisningsvejledning blive refereret til modellens enkeltelementer, som beskrives i det følgende: ’Søjle’, ’spiral’, ’bro’, ’altan’ og ’spor’, og samlet set refereres til tanken bag modellen som et didaktisk ’spiralprincip’.

Matematik er et svært fag. At lære matematik er forbundet med hård træning med mange gentagelser. I Søren Kirkegaards retorik fra 1843[1] kunne man sige, at matematik skal læres forlæns, men må forstås baglæns. I modsætning til umuligheden af at bevæge sig tilbage i tid, så udnyttes muligheden for at gå tilbage i sine matematiske erfaringer og forstå nye dybder af et matematisk resultat, som måske ikke var synlige ved første møde. Det kræver gentagen tilbagevenden *at lære* matematik, ligesom det kræver vedligeholdelse *at bevare* en matematisk færdighed eller kompetence som en aktiv del af et matematisk beredskab.

I matematikundervisningen er der tradition for at gennemarbejde store dele af en ’søjle’ hørende til et bestemt niveau C, B eller A (fx hele differentialregningen eller vektorregningen), inden man tager fat på et nyt emne inden for samme ’søjle’ eller springer til en ny ‘søjle’. Læreplanens intention er, at behandlingen af stoffet bør ske efter et didaktisk ’spiralprincip’, hvor eleven på sin vej frem mod et C-, B- eller A-niveau møder matematiske begreber og procedurer behandlet i ét forløb i nye sammenhænge i andre forløb og på den måde vedligeholder og videreudvikler de dertil knyttede matematiske færdigheder og kompetencer. Desuden bør det indtænkes, hvordan de enkelte ‘søjler’ kan knyttes sammen via ‘broer’, så færdigheder og kompetencer tilegnet i én kontekst bringes i spil i nye kontekster knyttet til en anden ‘søjle’. Det er en kendt sag, at videnstransfer (dvs. i en given kontekst at kunne aktivere viden lært i en anden kontekst) mellem fag er overordentlig vanskeligt, og det samme gælder, når eleverne skal hente begreber og procedurer, de har lært i geometrien, ind i et optimeringsforløb, der bygger på differentialregning. Et første skridt på vejen er en bevidsthed om, hvornår en aktivitet nødvendiggør videnstransfer, og næste skridt er en eksplicitering af de matematiske detaljer i den aktuelle didaktiske situation. Mindstekravskategorierne repræsenterer det grundlæggende matematiske arbejde beskrevet på tværs af ’søjlerne’. Ved at arbejde på ’broerne’, hvor stofområder kombineres, udvikles elevernes innovative evner i form af kompetence til at kunne udvælge og aktivere en bestemt del af den matematik, de har lært, i en given ”ny” atypisk modellerings- og problembehandlingssammenhæng. De skal kort sagt lære at ’gå til’ et problem – de skal turde give sig i kast med at undersøge, hvad problemet går ud på, i stedet for at lede efter en standardprocedure.

Specielt skal ræsonnementskompetencen, modelleringskompetencen og problembehandlingskompetencen være centralt placeret i behandlingen af ethvert emne, parallelt med at elevens erfaringer med matematiske begreber og repræsentationer samt det matematiske symbolsprog udvikles og konsolideres i et aktivt skriftligt og mundtligt ordforråd.

[1] *”Det er ganske sandt, hvad Philosophien siger, at Livet maa forstaaes baglænds. Men derover glemmer man den anden Sætning, at det maa leves forlænds. Hvilken Sætning, jo meer den gjennemtænkes, netop ender med, at Livet i Timeligheden aldrig ret bliver forstaaeligt, netop fordi jeg intet Øieblik kan faae fuldelig Ro til at indtage Stillingen: baglænds.”* Citat fra Journalen JJ:167 (1843), SKS bd. 18, s. 194 / SKS-E.



En 'altan' er udtryk for de faglige samarbejder, som matematik på C-, B- eller A-niveau har mulighed for at indgå i med andre fag – bredt på B-niveau og smallere på C- og A-niveau. På C-niveau er der muligheder for samarbejder med dansk, samfundsfag og fysik, men også de kunstneriske fag idræt, musik, design og billedkunst er gode samspilspartnere for matematik. Matematik på B-niveau skal indgå i faglige samarbejder med de studieretningsfag, som eleven har på A-niveau, herunder biologi A, samfundsfag A, musik A og fortsættersprog A. På hold, der har matematik på B-niveau, er det derfor nødvendigt fra begyndelsen af studieretningsforløbet, at læreren retter henvendelse til kolleger, der underviser samme hold i studieretningsfagene, med henblik på at skitsere og tilrettelægge, hvad temaerne for de faglige samspil skal være, hvilken baggrundsviden det kræver, og hvor i det samlede forløb til B-niveau samspillet skal foregå. Når matematik på A-niveau optræder som studieretningsfag, kan de faglige samspil mellem studieretningsfagene nå en større dybde, og der er brug for løbende erfaringsudveksling mellem lærerne i de to (tre) fag.

Matematik er i sit grundlag skriftligt. Enhver form for mundtlig matematik har altid et parallelt skriftligt sidespor – enten i form af symbolsk notation eller illustrationer. Dele af matematikken læres med papir og blyant som eneste redskaber, mens andre dele læres med brug af de utallige muligheder for at skrive, illustrere og eksperimentere med matematik, som et matematisk værktøjsprogram tilbyder.

Med et alsidigt matematisk værktøjsprogram er det muligt på ét matematikniveau at introducere til begreber og procedurer, der teoretisk er knyttet til emner, der behandles grundigere på overliggende niveauer. Disse muligheder udnyttes til at antyde og lægge motivationsskabende 'spor' ud til matematiske emner på højere matematikniveauer, som viser vejen frem mod teorien bag løsning af nye typer af matematiske problemer.

"Matematisk værktøjsprogram" dækker i nærværende undervisningsvejledning over et program eller en samling af flere programmer, der kan håndtere både CAS, dynamisk statistik og dynamisk geometri, hvor CAS henviser til kommandoer, der kan håndtere symbolsk (algebraisk) omskrivning, reduktion, formelhåndtering, ligningsløsning, differentiation og integration (ubestemt). Netop CAS-kommandoerne repræsenterer den algebra, som i simple tilfælde også skal kunne håndteres alene med papir og blyant.

Med inddragelse af værktøjsprogrammernes lettilgængelige multiple repræsentationer åbnes mulighederne for, at eleverne rent instrumentelt på ét tidspunkt kan stifte bekendtskab med og anvende begreber, som først foldes ud rent matematikteoretisk på et senere tidspunkt. Værktøjsprogrammerne bør således i høj grad udnyttes til at skabe grundlag for, at eleverne støder på og genkender begreber henover det samlede forløb til C-, B- eller A-niveau.

De teoretiske dele af matematikken opbygges gennem undersøgende spørgsmål og eksperimenterende aktiviteter, postulater, formodninger og beviser for endeligt at konsolideres som en del af elevens værktøjskasse gennem anvendelser i opgaveregning og i projekter i arbejdet med større og mere åbne problemstillinger eventuelt hentet fra andre fagområder. Indgangen til at forstå matematiske begreber og mestre matematiske procedurer går ad forskellige veje for forskellige elevtyper, og en meningsfuld undervisning tilrettelægges derfor med varierende udgangspunkt, så den enkelte elev bliver bevidst om, hvilken vej ind i faget der er mest velfungerende for netop ham eller hende.

Læreplanen beskriver fagets indhold, arbejdsformer og redskaber. Undervisningsvejledningen folder læreplanens intentioner ud og operationaliserer sammen med de skriftlige eksamensopgavesæt læreplanens beskrivelse af kernestoffet.

Lærebogen derimod er de aktuelle *forfatteres fortolkning* af læreplanens formuleringer. Det er derfor helt centralt, at man som lærer orienterer sig i forskellige lærebøger, diskuterer disses forskellige udlægninger af læreplanens indhold med kolleger og på den baggrund skaber et solidt grundlag for implementering af læreplanens krav.

Matematikfaget optræder i stx på tre niveauer C-, B- og A-niveau.

På alle matematikniveauer i stx skal der arbejdes med en centralt udmeldt formelsamling afpasset til hvert af de tre niveauer. Formelsamlingerne udgives af UVM i samarbejde med Matematiklærerforeningen og kan hentes på uvm.dk. Eleverne skal have adgang til den til niveauet hørende formelsamling under delprøve 1 ved de skriftlige prøver jf. afsnit 4.2.

For alle niveauer gælder det, at der skal arbejdes med faget ud fra både et udadrettet og anvendelsesorienteret synspunkt (matematisk arbejde på tværs) og et mere internt matematikfagligt synspunkt (matematisk arbejde på langs), der skal sikre overlevering af blandt andet basale færdigheder og begreber.

Nærværende undervisningsvejledning er bygget op, så den dækker alle tre stx-niveauer. Strukturen er, at teksten som udgangspunkt dækker alle tre niveauer (C-, B- og A-niveau), medmindre andet specifikt er nævnt, og der, hvor der er tale om udvidelser på B-niveau henholdsvis A-niveau, er det aktuelle niveau markeret med indrykning og baggrundsfarve på overskriften:

stxB:

stxA:

Strukturen i undervisningsvejledningen følger samme opbygning som læreplanen, men i afsnit 2, der omhandler kernestof, mindstekrav og supplerende stof, anvendes underoverskrifter, der dækker over punktopstillingernes indhold i de tre læreplaner.

1. Identitet og formål

Nedenfor følger direkte citater fra læreplanen. Indholdet i afsnit 1 foldes i øvrigt ud gennem beskrivelser af læreplanens øvrige afsnit.

1.1. Identitet

”Matematik er uundværlig i den naturvidenskabelige og teknologiske udvikling samt i de fleste aspekter af styring og udvikling af samfundet. Matematik er samtidigt væsentlig i hverdagen. Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskets første overvejelser om tal og form. Videnskabsfaget matematik har udviklet sig gennem en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og teoriopbygning.

Når hypoteser og teorier formuleres matematisk, vindes ofte ny indsigt. Den udbredte anvendelse af matematik og matematiske metoder til modellering og problembehandling bunder i fagets potentiale til at indfange og beskrive, hvordan mange vidt forskellige fænomener grundlæggende opfører sig ensartet. Gennem abstraktion og anvendelse af logik bliver bagvedliggende fælles strukturer og lovmæssigheder tydelige og brugbare.”

1.2. Formål

”Eleverne skal opnå alment dannende, anvendelsesbetonet og studieforberedende matematisk indsigt, der bidrager til en forståelse af matematikkens afgørende betydning for at kunne beskrive, forstå og kommunikere om naturvidenskabelige og teknologiske samt samfundsvidenskabelige og kulturelle spørgsmål. Herigennem skal de opnå et solidt grundlag for at kunne begå sig og bidrage aktivt, konstruktivt og innovativt i et demokratisk samfund.”

Det almendannende matematik C-niveau skal give alle elever bedre muligheder for at forstå og forholde sig til problemstillinger fra omverdenen, i andre fag, fra samfundsdebat eller privatliv. Konkret skal eleverne opnå kompetence til at håndtere virkelighedsnære problemstillinger og argumentere logisk, så de kan forholde sig kritisk til andres brug af matematik. Herigennem bliver de i stand til at gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår på et grundlæggende niveau.

Det anvendelsesorienterede matematik B-niveau skal med hovedvægt på modellering og anvendelser af matematik samt bearbejdning af matematisk teori sætte eleverne i stand til at kunne inddrage viden fra andre fag (særligt studieretningsfagene) og indgå i fagligt samspil med andre fag i gymnasiet. Konkret skal eleverne opnå kompetence til at håndtere problemstillinger opstået i andre fag og udøve matematisk ræsonnement i matematikfaget selv. Herigennem bliver eleverne i stand til at kunne forholde sig til og diskutere andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige faglige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse med betydelig vægt på anvendelse af matematik.

Det teoretiske matematik A-niveau skal med hovedvægt på matematisk teori og metode samt overblik i modellering og problembehandling sætte eleverne i stand til at kunne sammenstille og udnytte matematisk viden og viden fra andre fag (særligt studieretningsfag) til at opnå en dybere indsigt i matematikkens indre strukturer og matematikkens beskrivelseskraft. Herigennem skal eleverne blive i stand til at kunne forholde sig kritisk til og vurdere andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige faglige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse med betydeligt matematikteoretisk indhold.

De enkelte niveauers karakteristika skal afspejles i undervisningens tilrettelæggelse.

2. Faglige mål og fagligt indhold

De faglige mål, som eleverne skal opnå i undervisningen i matematik, er formuleret i læreplanens afsnit 2.1, og det faglige indhold er beskrevet i afsnit 2.2 og 2.3. De særlige faglige mål, som eleverne skal opnå med henblik på de skriftlige prøver, er ud over beskrivelsen af kernestoffet udmøntet gennem de stillede opgavesæt. Det følgende er således en uddybning af læreplanen samt nogle supplerende kommentarer.

2.1. Faglige mål

I læreplanens afsnit 2.1 er formuleret de faglige mål, som eleverne skal opnå gennem undervisningen i matematik på det aktuelle niveau. De faglige mål danner grundlaget for både skriftlig og mundtlig eksamen. De faglige mål udmøntes gennem undervisningen dels i kernestof, der er beskrevet i afsnit 2.2, og dels i supplerende stof, der er beskrevet i afsnit 2.3. De faglige mål uddybes gennem beskrivelsen af kernestof og supplerende stof i afsnit 2.2 og 2.3 nedenfor.

De faglige mål og det samlede faglige indhold bygger specielt på udvikling og styrkelse af elevernes ræsonnements-, modellerings- og problembehandlingskompetencer. I arbejdet med disse indgår udvikling af elevernes tankegangskompetence, symbol- og formalismekompetence samt repræsentationskompetence. I undervisningens tilrettelæggelse indgår desuden, at eleverne opnår kompetence til at kunne foretage bevidst hensigtsmæssigt valg af løsningsstrategi med og uden brug af matematiske værktøjsprogrammer. Eleverne skal igennem gymnasieforløbet have mulighed for at demonstrere og blive vurderet på deres opnåede matematikforståelse, hvorfor det også indgår i de faglige mål, at eleverne skal kunne kommunikere aktivt *i*, *med* og *om* matematik i både mundtlig og skriftlig formidling.

2.2. Kernestof og mindstekrav

Kernestoffet på de tre matematikniveauer C, B og A er beskrevet nedenfor ud fra en struktur, hvor store dele af vejledningen gælder for alle tre niveauer, og enkelte dele repræsenterer udvidelser fra et niveau til det næste. Overskrifterne dækker i nogle tilfælde en enkelt pind i læreplanen og i andre tilfælde flere, og samlet set dækker alle overskrifterne det samlede faglige indhold på C-, B- og A-niveau. Det er et gennemgående princip, at der med et nyt højere matematikniveau sker en uddybning af 'spor' fra det underliggende matematikniveau, og at der tilføres helt nye faglige emner. Hvis intet er nævnt, gælder beskrivelsen for alle matematikniveauer.

Tal og formler

Eleverne skal opnå en talforståelse, så de behersker regningsarternes hierarki og beregninger i almindelighed samt kan vurdere rimeligheden af fundne resultater. At have talfornemmelse, dvs. kunne overskue mængder og sammenligne størrelser, fx om køen i kantinen er lang, eller om 8 bolsjer er flere end 3, er en medfødt evne, som naturligt stimuleres og udvikles i opvæksten, mens talforståelse, dvs. manipulation med tal, skal læres og udvikles. At kunne gennemføre og vurdere præcise beregninger kræver talforståelse. Elevernes talforståelse fra folkeskolen skal vedligeholdes og udvikles, fx bør eleverne opnå forståelse af, at det på trods af let adgang til lommeregnere på; fx mobiltelefoner er en stor fordel i mange typer af beregninger umiddelbart at kunne aktivere 'den store tabel' og især kvadrattallene. Tilsvarende har eleverne i matematikanvendelser i andre fag brug for at kunne repræsentere meget små og meget store tal med titalspotenser, som bygger på en grundlæggende forståelse af titalssystemet som et positionssystem.

Til en veludviklet talforståelse hører også kendskab til talmængderne og håndtering af rationale tals repræsentation som brøk og som decimaltal. Et lille forløb om lige og ulige tal eller primtal og primtalsfaktorisering samt simple ræsonnementer ved hjælp af primtal kan være med til at understøtte elevernes generelle talforståelse med metoder fra diskret matematik.

> stxA:
> Det forventes yderligere, at eleverne kan forklare forskellen mellem rationale og irrationale tal.

Eleverne skal kunne håndtere brøkregning, potensregler og parentesregler (herunder kvadratsætningerne), i det omfang de støder på dem i arbejdet med formler og ligningsløsning, mens mere komplicerede udtryk håndteres ved hjælp af CAS. Eleverne skal kunne forklare formler og anvende formler til beregning, og de skal selv kunne frembringe nye formler ud fra allerede kendte.

Begreberne ligefrem og omvendt proportionalitet er særligt relevante for de naturvidenskabelige fag, især fysik og kemi, hvor eleverne skal kunne omskrive formler og isolere ukendte størrelser, og derfor behandles proportionalitet i matematikundervisningen med inddragelse af eksempler fra andre fagområder, som eleverne har kendskab til.

> stxA:
> Endvidere bør eleverne møde et argument for det udvidede potensbegreb, hvor de samtidig opnår en flig af indsigt i de reelle tals kompleksitet.

Gennem eksempler og gentagen behandling skal eleverne opnå en grundlæggende forståelse af balanceprincippet i ligninger og have opbygget indsigt i, at ligningsløsning sker gennem gentagne anvendelser af 'omvendte operationer'. Til løsning af ligninger hører også simple ligninger med de elementære funktioner, der indgår i kernestoffet. Løsning af ligninger med sådanne sammensatte udtryk løses med CAS, og det er generelt accepteret, at CAS i de aktuelle situationer finder samtlige løsninger.

I ligningsløsning indgår også arbejdet med repræsentationsformerne, fx skal eleverne kunne indføre passende variable (herunder betegnelser for disse) og opstille formler, simple ligninger og matematiske modeller med de elementære funktioner ud fra en sproglig beskrivelse af de sammenhænge, der forbinder forskellige størrelser, eller oplysninger om sammenhørende værdier for de variable repræsenteret ved koordinatsæt eller fastlagt ved en tabel.

Ved grafisk løsning er det vigtigt, at eleverne opnår fortrolighed med koordinatsystemets 'uendelige rumlighed', herunder at en grafisk repræsentation kun er et udsnit (et vindue ud til uendeligheden) af noget meget større. Parallelt hermed bør tabelrepræsentationers begrænsede og forsimplede udtryk af sammenhængen indgå. Ved grafisk løsning af ligninger kræves en argumentation for, at alle løsninger til den aktuelle ligning fremgår af det valgte grafvindue.

> stxB:
>
> Eleverne forventes at kunne løse simple ligningssystemer og simple andengradsligninger samt ligninger, der involverer indgående kendskab til egenskaberne ved andengradspolynomier.

stxA:

Eleverne forventes at kunne håndtere ligningsløsning, som involverer indgående kendskab til egenskaberne ved eksponentiel- og logaritmefunktionerne (den naturlige og 10-talslogaritmen). Eleverne skal desuden kunne anvende nulreglen.

Eleverne skal gennem inddragelse af velvalgte eksempler opnå indsigt i, hvordan matematikkens symbolholdige sprog historisk set fik en helt afgørende rolle som redskab til at sammenfatte forskellige metoder og løsning af forskelligartede problemer (herunder løsning af ligninger) samt til at oversætte problemer fra naturligt sprog til symbolholdigt sprog, hvorved problemerne (herunder ligningerne) blev mere overskuelige. I alle fag, der anvender matematik, indgår løsning af ligninger eller ligningssystemer, og emnet skal tages op gentagne gange, når lejligheden byder sig i det emne, der aktuelt behandles, fx i infinitesimalregning.

Med en omfattende brug af CAS er det helt centralt for fortolkning af CAS-svar, at eleverne kender forskellen på eksakt og tilnærmet værdi samt kender betydningen af begrebet absolut værdi (numerisk værdi). Absolut værdi optræder desuden i flere formler, som eleverne skal kunne håndtere, fx bestemmelse af areal udspændt af to vektorer på C-niveau samt afstandsbestemmelse på B-niveau.

Løsning af abstrakte uligheder indgår ikke som selvstændigt emne. Derimod vil eleverne i anvendelsesopgaver kunne møde problemstillinger som: For hvilke værdier af x er medicinkoncentrationen større end/mindre end en given værdi?

Procent- og rentesregning, absolut og relativ ændring (indekstal)

Inden for procent- og rentesregning skal eleverne kunne håndtere generel procentregning, og de skal kunne anvende renteformlen til problembehandling, herunder redegøre for begreberne start- og slutkapital, rentefod og terminer. Specielt skal det mere generelle begreb vækstrate, som har stor betydning i arbejdet med modeller hele vejen igennem kernestoffet, gives en særlig behandling, idet det fremhæves som begreb, når det optræder i den givne sammenhæng.

Eleverne skal desuden som en del af en dybere talforståelse kunne håndtere relative beregninger, der involverer indekstal (herunder begrebet basisår).

Statistik

Statistik handler om at uddrage viden fra data, dvs. alle former for registreringer og målinger fra alle former for opgørelser, monitoreringer og ikke mindst videnskabelige undersøgelser og eksperimenter. Med computerens, internettets og kommunikationsmidlernes udvikling lagres nu mængder af data i en størrelsesorden, som udvikler sig eksplosivt, og statistik anvendes med udgangspunkt i data i stigende grad i politiske beslutninger.

Statistik og sandsynlighed betragtes ofte som to sider af samme sag, men det er kun delvist korrekt. Sandsynlighedsteorien er i sig selv en vigtig del af den matematiske teori og har også relevans for mange virkelige fænomener, som eksempelvis spil og forståelsen af den grundlæggende biologi og artsudvikling. Statistik bruger matematik, herunder i høj grad sandsynlighedsteori, men skal som fag betragtes og forstås bredere, nemlig som et fag, der giver rammerne og principperne for hele processen omkring dataindsamling, modellering, analyse og konklusion, hvor begrebet repræsentativitet spiller en afgørende rolle.

I arbejdet med statistisk modellering er det helt centralt, at eleverne opnår forståelse af, at statistik faktisk forsøger at modellere (og kvantificere) systemer, der indeholder en stokastisk komponent, dvs. en grad af tilfældighed. Statistisk modellering er karakteriseret ved, at den søgte model er ukendt. Hvis alle altid var enige om, hvilken statistisk model der skulle benyttes, og hvilke forudsætninger der var gældende, så ville alle statistiske problemstillinger blive reduceret til matematiske problemer. Derfor skal eleverne opnå indsigt i, at et statistisk ræsonnement adskiller sig fra et matematiske ræsonnement, og de skal opnå kompetence til at kunne oversætte et virkelighedsnært problem (fx hentet fra et fag, som eleverne har kendskab til) til et statistisk problem og kunne fortolke de resultater, der kommer ud af den statistiske analyse, i henhold til den aktuelle kontekst.

I tilknytning til nærværende undervisningsvejledning følger tre dokumenter (findes på emu.dk), der uddyber statistikkens rolle i de gymnasiale uddannelser, herunder en diskussion af forklaringsgradens betydning.

Statistik og sandsynlighedsregning har så mange berøringsflader med omverdenen og med andre fag, at der er et stort og varieret antal emner inden for dette område, som kan være genstand for et samarbejde med andre fag, eller som kan dyrkes på rent matematikfagligt grundlag. Hvor det er muligt, er det en stor fordel for indlæring af begreber og metoder, at det foregår i et samarbejde med andre fag som samfundsfag og de naturvidenskabelige fag, der som en naturlig del af faget producerer datamaterialer, som kan behandles i matematik.

Eleverne skal kende og kunne anvende de indbyggede faciliteter og muligheder, som deres matematiske værktøjsprogram tilbyder til behandling af stikprøver (fx én-variabel statistik). I behandling af stikprøver diskuteres konkrete datamaterialers repræsentativitet, og betydningen af de enkelte deskriptorer fortolkes ind i problemets kontekst. Eleverne skal kunne håndtere diskret og grupperet datamateriale, simple statistiske deskriptorer og simple grafiske repræsentationer af data.

Eleverne skal for simple datasæt (afhængigt af om det er diskret eller grupperet) kunne bestemme og fortolke begreberne hyppighed, frekvens, kumuleret frekvens, middelværdi, fraktiler, median og øvrige kvartiler samt maksimum og minimum, og de skal kunne tegne og aflæse på boksplot og sumkurve.

Eleverne skal kunne beskrive og sammenligne grafiske repræsentationer med brug af ovennævnte deskriptorer samt simple spredningsbegreber som kvartilbredde, variationsbredde og den instrumentelt beregnede stikprøvespredning (standardafvigelse). Desuden skal de kende begrebet ’outlier’, og de skal kunne forklare, hvad man forstår ved en højre- eller venstreskæv fordeling i et datasæt. I samarbejdet med andre fag kan de grafiske repræsentationer søjlediagram og cirkeldiagram desuden være nyttige redskaber.

Eleverne skal opnå fortrolighed med gængse regnearkskommandoer, der gør dem i stand til at bearbejde store datasæt i en statistisk analyse, herunder modellering med brug af regression. Det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at importere store datasæt i deres matematiske værktøjsprogram med henblik på videre bearbejdning, herunder datamanipulation (med gængse kommandoer), grafisk repræsentation, bestemmelse af simple statistiske deskriptorer mv. Det betyder blandt andet, at eleverne skal kunne håndtere eventuelle tekniske problematikker knyttet til deres matematiske værktøjsprogram vedrørende brug af decimalkomma og decimalpunktum samt andre tekniske udfordringer En vej kan være at indstille computerens sprogindstillinger, så der overalt bruges decimalpunktum, mens komma reserveres til tusindtalsseparator.

Eleverne skal kunne opstille modeller ved hjælp af lineær og eksponentiel regression samt potensregression og kunne tegne det tilhørende residualplot. Eksponentiel regression og potensregression kan udføres direkte eller som lineær regression på logaritmisk transformerede data. Specielt den lineære model, herunder lineær regression (forstået som mindste-kvadraters-metode), gives en særlig behandling, hvor residualer studeres nøjere. Eleverne skal kunne beregne residualer (herunder fx udpege den observation, der repræsenterer den største afvigelse) i en lineær regression og vurdere afvigelsernes størrelser i forhold til modelværdierne, og de skal kunne give en kvalitativ vurdering af en lineær models gyldighed med henvisning til den tilfældighed (eller omvendt, den systematik) i afvigelserne, der kommer til udtryk i residualplottet. Inddragelsen af residualer og residualplot i vurdering af andre modeller forventes udelukkende at ske gennem brug af værktøjsprogrammernes automatiserede beregninger. På emu.dk ligger et materiale, der uddyber lineær regression som statistisk metode.

stxB:

Specielt gives lineær regression en særlig behandling, hvor eleverne opnår kvalitativt kendskab til mindstekvadraters metode svarende til de faciliteter, et matematisk værktøjsprogram tilbyder, fx visning af residuelle kvadrater og undersøgende tilpasninger med flytbare linjer. Behandlingen heraf antyder og lægger 'spor' ud til beregning af konfidensintervaller for hældningskoefficienten i en lineær model på A-niveau.

Eleverne skal i relation til de lineære modeller bestemt ved lineær regression kunne foretage simple analyser ud fra det tilhørende residualplot og en kvantificering af den gennemsnitlige afstand mellem de observerede data og modelværdierne, som den kommer til udtryk gennem regressionslinjen. Hertil anvendes et estimat for 'den underliggende spredning' på de observerede data for den afhængige variabel, hvilket betegnes residualspredningen. Residualspredningen beregnes ved formlen: $\text{residualspredning} = \sqrt{\dfrac{\text{sum(residuelle kvadrater)}}{\text{antal observationer} - 2}}$, hvor nævneren hentyder til det antal frihedsgrader, der aktuelt er i et empirisk datasæt, der ligger til grund for en lineær regression. Dette spredningsmål har samme enhed som den afhængige variabel (og modelværdierne), hvorved skalaafhængigheden tydeligt kommer til udtryk (hvor den er mere skjult i beregning af forklaringsgraden, som let overfortolkes). Eleverne forventes at kunne beregne og udnytte dette spredningsmål i deres analyse af modellens tilstrækkelighed til at beskrive de forelagte data ved lineær modellering af data i en given kontekst. I vurdering af en bestemt models tilstrækkelighed forventes eleverne udelukkende at argumentere statistisk på baggrund af forudgående beregninger, idet residualspredningen (afhængigt af den aktuelle kontekst) forholdes til de observerede data for den afhængige variabel og til de enkelte residualer (hvorigennem eventuelle exceptionelle observationer kan komme til udtryk) samt til ændringen i den afhængige variabel over hele det interval, som den uafhængige variabel gennemløber. Herunder omtales den varsomhed, hvormed man bør omgås lineære modeller, hvor hældningskoefficienten viser sig at være tæt på nul.

Residualspredningen er indført som en erstatning for brug af forklaringsgraden i lineære modeller og skal sammen med residualplottet give eleverne et mål for at kunne vurdere modellens 'tilstrækkelighed' (altså ikke om modellen er 'korrekt') i forhold til at beskrive data.

Eleverne skal opnå kendskab til stikprøvespredning, som udtrykker, hvor meget en beregnet størrelse, typisk den estimerede middelværdi, forventes at variere ”fra stikprøve-til-stikprøve", altså hvor usikkert bestemt estimatet egentlig er. Ser man på et datasæt, hvor man har registreret højde og vægt for en række personer, hvor vægten modelleres som en lineær funktion af højden, vil residualspredningen udtrykke vægtspredningen for mennesker med den samme (fastholdte) højde. Dette tal vil typisk være noget mindre end vægtspredningen i populationen som helhed på tværs af alle højder. Eleverne forventes desuden at kunne opstille modeller ved hjælp af polynomiel regression og kunne tegne det til den aktuelle model hørende residualplot.

Residualerne kan også gøres til genstand for nærmere statistiske undersøgelser med repræsentationer og begreber fra den deskriptive statistik, hvor eleverne fx ved brug af boksplots kan undersøge, om der er ’outliers’, eller de kan undersøge ’tommelfingerreglen’ om, at 95% af residualerne ligger inden for 2 residualspredninger ved at plotte vandrette linjer, der afgrænser intervallet $[-2s;2s]$ sammen med residualerne og tælle, hvor mange punkter der ligger udenfor (evt. med en tælle-kommando i et regneark/værktøjsprogram). Som ’spor’ til A-niveauet kan man eventuelt yderligere inddrage en grafisk instrumentel (’black box’) undersøgelse af, om residualerne er normalfordelte. Desuden kan det i forbindelse med samarbejdet med andre fag være relevant at udnytte værktøjsprogrammernes muligheder til (instrumentelt eller undersøgende) at arbejde med linearisering gennem variabeltransformation i anvendelsesorienterede kontekster.

stxA:

Eleverne forventes i tilknytning til en lineær model bestemt ved lineær regression at kunne give en grundigere vurdering af residualerne ved også at inddrage viden om normalfordelingen, dvs. at de ved hjælp af deres matematiske værktøjsprogram skal kunne vurdere, om residualerne er normalfordelte. Eleverne forventes desuden rent instrumentelt (’black box’) at kunne benytte deres matematiske værktøjsprograms indbyggede faciliteter til bestemmelse af konfidensintervaller for hældningskoefficienten i en lineær model. Som resultat heraf oplyses i de gængse matematiske værktøjsprogrammer også residualspredningen, som er introduceret på B-niveau. Det vil være oplagt at tilrettelægge en eksperimenterende undersøgelse af en bestemt lineær sammenhæng (eventuelt med data hentet fra andre fag), hvor hældningskoefficienten ligger tæt på nul, med det formål at kunne vurdere, om det overhovedet giver mening at tale om en sammenhæng mellem de aktuelle variable.

I forbindelse med forløb om vurdering af lineære modeller kan man desuden vælge at gå dybere ned i forståelse af, hvad mindste kvadraters metode dækker over, og hvordan korrelations- og determinationskvotient beregnes. Eller man kan fordybe sig i værktøjsprogrammets måde at anvende linearisering på i fx eksponentiel regression, herunder undersøge residualerne i de transformerede lineære modeller.

Kombinatorik og sandsynlighedsregning

Eleverne skal have kendskab til både a priori (på forhånd givne) og frekventielle (statistisk bestemte) sandsynligheder og kende forskellen på disse. Sandsynlighedsfelter, herunder symmetriske sandsynlighedsfelter, behandles som model for stokastiske eksperimenter gennem konkrete eksempler.

Eleverne skal kende og kunne anvende begreberne fakultet, permutation og kombination. Eleverne skal kunne håndtere simple kombinatoriske beregninger af sandsynligheder ved hjælp af additions- og multiplikationsprincippet; herunder inddrages naturligt tælletræer, som eleverne kender fra folkeskolen. Uafhængige hændelser omtales i forbindelse med problemløsning, der kræver multiplikation af sandsynligheder, men gives ikke en selvstændig behandling. Formlen for $K(n,r)$ generaliseres fx ud fra et eksempel, men den egentlige kombinatorik behandles kun i det omfang, det er nødvendigt for forståelsen af binomialfordelingen, som indføres på B-niveau. I behandlingen af kombinatorik vil det være oplagt at inddrage Pascals trekant.

stxB:

Begrebet stokastisk variabel indgår i kernestoffet, men det er ikke tanken, at det skal gives en selvstændig behandling. Begrebet skal indføres i behandlingen af binomialfordelingen, hvorved man opnår en notation, der gør det mere enkelt at formulere spørgsmål og opstille formler. Eleverne skal kunne håndtere beregninger med middelværdi, varians og spredning for en stokastisk variabel med en given sandsynlighedsfordeling.

Eleverne skal kunne håndtere begreberne stokastisk eksperiment og sandsynlighed, og de skal kunne anvende binomialfordelingen til løsning af virkelighedsnære problemstillinger, dvs. de skal kunne beregne punktsandsynligheder og kumulerede sandsynligheder samt middelværdi og spredning. Desuden skal eleverne kunne tegne og kunne aflæse på et søjlediagram på baggrund af en binomialfordeling.

En udledning af formlen for binomiale sandsynligheder vil være en naturlig opfølgning på argumentet for binomialkoefficienten. Eleverne skal kende betingelserne for, hvornår et empirisk datasæt kan betragtes som realiserede værdier af en binomialfordelt stokastisk variabel; herunder inddrages diskussion af eksperimenter med og uden tilbagelægning.

Hypotesetest i binomialfordelingen anvendes til at vurdere situationer, hvor der ud fra stikprøver sluttes til generelle udsagn om en population. Udgangspunktet for beregning af de forventede værdier i testet er den sandsynlighedsparameter p, som vi i den aktuelle situation betragter som 'den sande' værdi for p i populationen. De centrale begreber i et binomialtest er population, stikprøve, nulhypotese, alternativ hypotese, teststørrelse, kritisk mængde, acceptmængde, signifikansniveau og p-værdi. Konklusioner draget af et hypotesetest diskuteres med henblik på systematiske fejl (bias) og skjulte variable (konfundering). Eleverne skal gennem eksempler kunne argumentere for nødvendigheden af at udføre et bestemt hypotesetest i binomialfordelingen som enten et ensidet eller tosidet test. Eleverne skal opnå forståelse af begrebet nulhypotese, herunder at hypotesen altid opstilles før stikprøven til belysning af hypotesen udtages, og at en bemærkelsesværdig observation i én stikprøve peger på en ny hypotese, som testes på baggrund af en ny stikprøve. Eleverne skal kunne bestemme konfidensintervaller for sandsynlighedsparameteren p ('den sande' værdi for p i populationen) ud fra stikprøvens størrelse n og et stikprøveestimat for p (ofte kaldet $\hat{p}$) med de indbyggede faciliteter, som et matematisk værktøjsprogram tilbyder, og de forventes herudfra at kunne uddrage den statistiske usikkerhed. Der findes flere måder at angive konfidensintervaller på i binomialfordelingen. Eleverne forventes også at kunne håndtere beregninger med den eksakt udledte formel (gengivet i formelsamlingen) for usikkerhed baseret på normalfordelingsapproximationen. Bemærk, at en rimelig normalfordelingsapproximation kræver, at både $n \cdot p \geq 5$ og $n \cdot (1-p) \geq 5$. Eleverne forventes dog ikke at argumentere for dette i besvarelsen af opgaver ved den skriftlige prøve.

En naturlig indgang til arbejdet med binomialtests og konfidensintervaller for sandsynlighedsparameteren er simulering af nulhypotese fx knyttet til meningsmålinger. Igennem simuleringer operationaliseres begreberne i en kontekst, hvorved eleverne har bedre mulighed for at opnå meningsfuld indsigt i problemets natur. Desuden vil simuleringer og beregninger med binomialfordelingens sandsynlighedsfunktion give gode muligheder for at diskutere løsningsmetodernes grad af præcision set i relation til praktisk anvendelse. Simulering kan desuden udnyttes til eksperimentelt at forstå statistiske sammenhænge, som er for svære at behandle teoretisk. Eksempler på dette kan være: "Hvorfor divideres med $n-1$ i formlen til beregning af et estimat for spredningen ud fra en stikprøve?", "Hvorfor må en stikprøve (uden tilbagelægning) ikke udgøre for stor en andel af populationen, når man ønsker at anvende binomialtest?" og "Indeholder et 95% konfidensinterval faktisk den teoretiske andel ca. 95% af gangene?"

Som "spor" til A-niveauet omtales og behandles sammenhængen mellem binomialfordelingen og normalfordelingen med anvendelse af middelværdi og spredning fra binomialfordelingen. Eleverne skal derudover kende begreberne normale udfald, der højst ligger to spredninger fra middelværdien, og exceptionelle udfald, der ligger mere end tre spredninger fra middelværdien. Disse begreber anvendes typisk i beskrivelsen af normalfordelte datasæt og knyttes gennem normalfordelingsapproximationen også til binomialfordelingen.

stxA:

Mens der på B-niveau lægges 'spor' ud til normalfordelingen ved brug af et matematisk værktøjsprograms indbyggede faciliteter, så skal normalfordelingen gives en selvstændig behandling på A-niveauet.

Eleverne skal opnå kendskab til tæthedsfunktionen for normalfordelingen, herunder standardnormalfordelingen, repræsenteret ved tabel, graf og forskrift. De skal kunne håndtere middelværdi og spredning som parametre i normalfordelingsmodeller, herunder den betydning, middelværdi og spredning har for form og beliggenhed af tæthedsfunktionens og fordelingsfunktionens graf. I arbejdet med fordelingsfunktionens graf kan man med fordel trække referencer til sumkurver i den deskriptive statistik.

Eleverne skal kunne inddrage begreberne middelværdi og spredning i analyse af, om udfald er normale eller exceptionelle (som beskrevet ovenfor) i normalfordelingen, herunder sandsynligheden for, at en observation falder i hver af kategorierne.

Eleverne forventes at benytte deres matematiske værktøjsprograms indbyggede faciliteter til beregninger i normalfordelingen og til undersøgelse af, om et givet empirisk datasæt med rimelighed kan antages at stamme fra en normalfordelt stokastisk variabel.

I et sammenhængende forløb om normalfordelingen er det oplagt at koble til supplerende stof om inddragelse af autentisk data.

Som på B-niveau kan simulering også på A-niveau støtte begrebsforståelsen i statistik. Fx kan simuleringer belyse: "Hvorfor divideres med $n-2$ i beregning af residualspredning?", "Hvor stor skal stikprøven være, før man med rimelighed kan skelne mellem, om den kommer fra en normalfordeling eller en uniform fordeling?" og "Den centrale grænseværdisætning".

Funktioner

Funktionsbegrebet er helt centralt i moderne matematik, og en stærk forståelse af begrebet er afgørende på matematikholdige uddannelser. Desuden er funktioner omdrejningspunkt i mange samspil med andre fag, da funktioner ofte kommer i spil, når omverdensfænomener skal forstås, beskrives og behandles. Funktionsbegrebet er samtidig svært at lære, og elever tænker ofte blot på funktioner som symbolmanipulationer eller procedurer, hvilket giver dem problemer, når de skal repræsentere funktioner på forskellige måder, og når de i fx differentialregningen skal tænke på funktioner som objekter i stedet for processer.

De algebraiske procedurer, der hører til funktionsbegrebet, skal derfor i undervisningen kobles til en generel forståelse af funktionsbegrebet, så eleverne hjælpes bedre til at løse mere komplekse problemstillinger med funktioner samt til at fortolke meningsfuldt i forskellige kontekster. For at opnå dette bør der jævnligt indgå aktiviteter i undervisningen med henblik på at:

- tydeliggøre forskellen mellem en regneforskrift og en ligning.
- sætte fokus på, at en funktion kan repræsenteres på flere måder.
- give eleverne en intuitiv forståelse af, hvordan output varierer med input (herunder definitions- og værdimængde).
- arbejde med vandret og lodret parallelforskydning af funktioner med brug af et matematisk værktøjsprograms mange muligheder.
- vise eleverne mange forskellige typer af funktioner (ikke kun kontinuerte) og eksempler på relationer, der ikke er funktioner.

Eleverne skal opnå viden om de elementære funktioner: lineære og eksponentielle funktioner samt potensfunktioner, herunder disse funktioners karakteristiske egenskaber og grafiske forløb med henblik på definitionsmængde, værdimængde, monotoniforhold samt asymptotiske forløb (eksponentiel og potens). Hvor der indgår konstanter i en regneforskrift, forventes eleverne at kunne argumentere for disses betydning for det grafiske forløb. Desuden bør eleverne have kendskab til, hvordan sammenhængen mellem lodret og vandret parallelforskydning af grafer kommer til udtryk i de aktuelle funktioners forskrifter.

Til de karakteristiske egenskaber for eksponentielle funktioner hører begreberne fremskrivningsfaktor og vækstrate, fordoblings- og halveringskonstant og sammenhængen mellem a^x og e^{kx}, mens procentvækstsammenhængen mellem afhængig og uafhængig variabel er central for potensfunktioner. En sammenligning af de tre vækstttyper: lineær (konstant vækst), eksponentiel (procentvækst) og potensvækst (procent-procent-vækst) bør inddrages.

Eleverne skal kunne anvende de elementære funktioner i modellering, og de skal kunne forholde sig reflekterende til fremskrivninger ud fra modellerne, herunder diskutere idealiseringer og rækkevidden af modellerne med beregning af absolut/relativ afvigelse. De elementære funktioner bør derfor introduceres i en vekselvirkning mellem rent matematiske aktiviteter og modellering af virkelighedsnære problemstillinger, som giver mening for eleverne, og hvor de aktuelle funktioners egenskaber kommer særligt klart til udtryk. Fx kan eksponentielle funktioner introduceres i modeller for radioaktivt henfald eller populationsvækst, hvor også logaritmefunktionen naturligt indgår ved beregning af fordoblingsog halveringskonstanter. På den måde bliver det meningsfuldt for eleverne at skulle opnå kendskab til eksponentialfunktioners regnetekniske egenskaber og specielt logaritmefunktioners skaleringsegenskaber, herunder kendskab til og aflæsning på logaritmiske skalaer. Eleverne forventes ikke selv at kunne indtegne eller aflæse punkter i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

Andengradspolynomier og logaritmefunktioner (10-talslogaritmen og den naturlige logaritme) indføres og behandles grafisk i en anvendelsesorienteret sammenhæng med fokus på modellering. Det indgår ikke i kernestoffet på C-niveau, at eleverne kan udtale sig om parametrenes betydning i et andengradspolynomium, og de skal ikke kunne løse andengradsligninger eller eksponentielle ligninger algebraisk uden CAS. I anvendelsesorienteret sammenhæng kan de to funktionstyper indgå i modeller beskrevet på begrænsede intervaller, hvor eleverne udover grafisk løsning forventes at kunne løse ligninger algebraisk med CAS, når de besvarer spørgsmål i relation til modellen. Behandlingen af disse funktioners anvendelse skal i særlig grad udnyttes til at antyde og lægge 'spor' ud til B-niveauets dybere behandling af samme.

stxB:

De elementære funktioner kan bygges sammen til mere komplekse funktioner ved brug af regningsarterne og ved sammensætning, ligesom stykkevist definerede funktioner giver mulighed for at modellere fænomener, der opfører sig forskelligt i forskellige sekvenser, hvor definitionsmængden er intervalopdelt.

Elevernes funktionsberedskab udvides yderligere på B-niveau. Her skal de opnå viden om andengradspolynomier samt overordnet kendskab til polynomier af højere grad. De skal opnå viden om logaritmefunktionerne (10-talslogaritmen og den naturlige logaritme) og deres egenskaber, herunder logaritmeregnereglerne. Indgår der grafer tegnet i enkeltlogaritmiske koordinatsystem i en opgave ved den skriftlige prøve, så vil koordinatsættene til relevante punkter være trukket frem i opgaven.

Eleverne skal kende begrebet rod i et polynomium, og de forventes at kende begrebet faktorisering, specielt med henblik på andengradspolynomier. Eleverne skal opnå viden om sammenhængen mellem grad og antal rødder (nulpunkter) for polynomier. Specielt for andengradspolynomier skal eleverne kunne redegøre for både konstanternes og diskriminantens betydning for parablens beliggenhed i koordinatsystemet.

I bearbejdningen af de elementære funktioner bør der desuden indgå en grafisk og algebraisk undersøgelse af funktioner, hvor der indgår en parameter i funktionsforskriften, fx i kombination med lodret og vandret parallelforskydning.

Som "spor" til A-niveauet indføres og behandles de trigonometriske funktioner (sinus og cosinus) i en anvendelsesorienteret sammenhæng med fokus på modellering af periodiske fænomener med sinusfunktionen, hvor eleverne forventes at kunne håndtere skiftet til radianer i graftegning. Det indgår ikke i kernestoffet, at eleverne kan udtale sig om parametrenes betydning, og de skal ikke kunne løse trigonometriske ligninger med brug af enhedscirkel og overgangsformler, men det forventes, at eleverne udover grafisk løsning også møder løsning af trigonometriske ligninger med CAS, når de besvarer spørgsmål i relation til modeller beskrevet på begrænsede intervaller. Egenskaber som amplitude og svingningstid vil kun indgå implicit, forstået på den måde, at eleverne grafisk skal kunne bestemme ekstremums-steder og -værdier, og de skal kunne svare på spørgsmål af typen ”Hvor lang tid går der mellem de to gange, hvor vanddybden er størst?” eller ”Hvor lang tid tager det for pendulet at gennemføre en hel svingning?”.

stxA:

Mens der på B-niveau lægges ’spor’ ud til trigonometriske funktioner i form af en grafisk behandling af disse i anvendelsessammenhænge, så skal de trigonometriske funktioner behandles i dybden på A-niveauet, men også her gerne med udgangspunkt i relevante eksempler fra andre fagområder i modellering af periodiske (harmonisk svingende) fænomener som fx tidevand eller lydbølger. Eleverne skal kunne håndtere radianbegrebet og sammenhængen med enhedscirklen. De skal kunne håndtere begreberne amplitude, periode og faseforskydning knyttet til en harmonisk svingning samt kende disse begrebers betydning for funktionens forskrift og for grafens beliggenhed. Trigonometriske funktioner skal således behandles i såvel anvendelsessammenhænge som rent matematisk med henblik på forståelse af begreber knyttet til disse funktioner og udforskning af funktionernes egenskaber.

I arbejdet med funktionsbegrebet forventes eleverne at opnå kendskab til invers funktion som begreb, og ikke blot som en procedure, der går ud på at isolere x og bytte om på x og y eller spejle grafen i linjen $y = x$, men som en omvendt proces, der definerer en afbildning af output over i input.

Monotoni og differentialregning

Eleverne skal grafisk kunne håndtere en simpel funktionsundersøgelse i en anvendelsesorienteret sammenhæng, hvor modellen er givet på et begrænset interval. Det betyder, at de skal kunne bestemme en funktions ekstrema samt monotoniforhold ved aflæsning på grafen, herunder opskrive monotoniintervaller, og de skal grafisk kunne bestemme ligningen for en tangent til en graf. De anvendelsesorienterede kontekster vælges, så det giver mening for eleverne, når de skal fortolke resultaterne af aflæsningerne. På den måde skal eleverne opleve, at matematiske værktøjsprogrammer bidrager til, at de kan opnå information om den kontekst, som modellen beskriver, og som de ikke ville kunne opnå uden. Den grafiske behandling af de nævnte begreber skal yderligere udnyttes til at antyde og lægge ’spor’ ud til differentialregningen på B-niveau.

stxB:

Eleverne forventes at opnå fortrolighed med differentiation af de elementære funktioner og med regnereglerne for differentiation (sum, differens, produkt, ’gange en konstant’ og sammensat funktion med lineær indre funktion). Det drejer sig både om at bestemme afledet funktion og tangentligning samt om at kende og kunne anvende sammenhængen mellem afledet funktion, monotoniforhold og ekstrema i problembehandling.

I nogle tilfælde vil den matematiske modellering resultere i udtryk, som rækker ud over de funktionstyper, der er dækket af de elementære funktioner, og de regneregler for differentiation, der er beskrevet i kernestoffet. I disse tilfælde forventes eleverne at anvende CAS til at differentiere disse udtryk. Matematisk modellering med brug af differentialregning bør omhandle eksempler fra flere andre fag – og hvor det er muligt især fra fag i studieretningen.

Arbejdet med begrebet differentialkvotient indebærer, at grænseværdibegrebet inddrages, så eleverne opnår en intuitiv forståelse af begrebet, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling. Tilsvarende inddrages kontinuitetsbegrebet på intuitiv vis i behandlingen af sammenhængen mellem den afledede funktion og begreber som monotoniforhold og ekstrema, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling. I begge tilfælde (grænseværdi og kontinuitet) bør man udnytte de matematiske værktøjsprogrammers muligheder for at undersøge begrebernes betydning både grafisk og med CAS-beregninger af grænseværdier, og det er vigtigt for udvikling af elevernes begrebsforståelse, at de også møder funktionstyper, der ikke er kontinuerte, og funktioner, der ikke er differentiable.

Tangentbegrebet følges op med udledning af tangentens ligning med udgangspunkt i elevernes viden om den rette linjes ligning.

Eleverne skal kunne redegøre for differentialkvotientens betydning både i interne matematiske sammenhænge og i anvendelsesorienteret sammenhæng, dvs. de skal kunne fortolke differentialkvotienten som en væksthastighed i modelleringssammenhæng.

stxA:

Eleverne forventes yderligere at kunne differentiere sammensat funktion med ikke-lineær indre funktion og håndtere simple problemstillinger i relation dertil.

Geometri og vektorregning

Geometrien bygger videre på, at alle elever i folkeskolen har arbejdet med problembehandling med udgangspunkt i Pythagoras' læresætning og forholdsberegninger i ensvinklede trekanter med brug af skalafaktor, og at de fleste har prøvet kræfter med et dynamisk geometriprogram. Eleverne forventes ikke at kunne konstruere trekanter eller andre geometriske objekter i et dynamisk geometriprogram, men det forudsættes, at eleverne har kendskab til linjer ved trekanten, fx højde, median og vinkelhalveringslinje.

Vektorregningen i kernestoffet tjener flere formål. Igennem vektorregningen arbejder eleverne med talforståelse, begrebsforståelse og algebra, parallelt med at de opstiller og løser geometriske problemer i og uden for koordinatsystemet. Vektorregningen skal således bidrage til, at eleverne vedligeholder og udvikler deres beregningsmæssige og algebraiske færdigheder, som de har med fra folkeskolen, samtidig med at de lærer noget helt nyt og går i dybden med nye geometriske begreber. Indførelsen af vektorbegrebet bør derfor såvel foregå i en vekslen mellem konstruktion og beregning som i en vekslen mellem aktiviteter med papir/blyant og matematiske værktøjsprogrammer.

Overordnet set skal eleverne kunne give en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer og udnytte dette til at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål, dvs. de skal kunne opstille og løse trigonometriske og andre plangeometriske problemer på grundlag af vektorberegninger med vektorer på koordinatform.

Cosinus og sinus indføres som koordinater for retningsvektoren til et givet punkt på enhedscirklen, og eleverne forventes at kende tangens som forholdet mellem sinus og cosinus. Eleverne forventes at kunne operere med begreberne nulvektor, enhedsvektor, stedvektor og forbindelsesvektor. Desuden forventes de at kunne anvende de simple overgangsformler, som er nødvendige for at kunne håndtere stumpe vinkler mellem vektorer. Eleverne skal desuden kunne håndtere beregninger i retvinklede trekanter ud fra de trigonometriske formler, som fx kan udledes ud fra enhedscirklen. Især i forhold til fysik er disse formler centrale, og de bør i den sammenhæng gives en særlig behandling fx i opgaveregning eller i et tværfagligt projekt med fysik.

Eleverne skal i beregninger og i geometrisk fortolkning ved tegning/konstruktion kunne anvende regnereglerne for vektorer (addition, subtraktion og 'gange en konstant') og de elementære operationer til at bestemme: længden af en vektor, tværvektor til en given vektor, skalarproduktet og determinanten mellem to vektorer, vinkel mellem to vektorer (herunder parallelle og ortogonale vektorer) samt projektionen af en vektor på en vektor. Geometriske problemer tager udgangspunkt i og løses med vektorregning. Elevernes forventes at kunne håndtere geometrisk modellering i form af at kunne indlægge geometriske objekter i et koordinatsystem og udføre aflæsninger og beregninger knyttet til modellen. Nogle trigonometriske problemer løses lettere med sinus- og cosinusrelationerne, men disse formler er ikke en del af kernestoffet, og eleverne forventes ikke at kunne anvende disse. Formlerne kan dog let udledes som en del af vektorregningen (under henholdsvis skalarprodukt og determinant).

stxB:

På B-niveau udvides vektorregningen med den del af den analytiske geometri, som omhandler analytisk beskrivelse af objekterne linje og cirkel. Også i denne fase er det vigtigt som støtte for elevernes begrebsforståelse, at der i undervisningen veksles mellem konstruktion og beregning og mellem aktiviteter med papir/blyant og matematiske værktøjsprogrammer.

Eleverne skal opnå færdigheder og kompetencer i at kunne opstille og omskrive ligninger for cirkler (kvadratkomplettering) og bestemme ligninger for cirkeltangenter samt omskrive frem og tilbage mellem ligning og parameterfremstilling for en ret linje. Desuden skal eleverne kunne bestemme skæringspunkter mellem linjer og mellem linjer og cirkler samt vinkler mellem linjer og afstand fra punkt til linje. Til vinkel mellem linjer hører også sammenhængen mellem hældningsvinkel (med førsteaksen) og hældningskoefficient for en ret linje.

For at understøtte elevernes rumlige forståelse kan der indgå plangeometrisk modellering og problembehandling i relation til tredimensionale objekter. I nogle forløb kan det være naturligt at inddrage klip fra matematikhistoriske tekster eller tegninger/fotos af moderne design og arkitektur.

stxA:

På A-niveau inddrages vektorregningen i arbejdet med vektorfunktioner, som er beskrevet nedenfor.

Matematiske modeller og modellering

Eleverne forventes at kunne anvende funktionsudtryk til modellering af geometriske fænomener, statistiske sammenhænge og andre variabelsammenhænge, og de forventes at opnå viden om de forskellige faser i en modelleringscyklus. Specielt skal den indledende fase i en modelleringsproces og selve matematiseringsfasen gives særlig opmærksomhed, så eleverne får kendskab til metoder, der kan benyttes til at få hul på en problemstilling, udvælge den matematik, der skal bringes i anvendelse, og dernæst matematisere problemet.

En række modeller udspringer af rent matematiske analyser af et problem, fx et optimeringsproblem, som på C-niveau kan håndteres rent grafisk og eksperimentelt, mens andre udspringer af fx økonomiske eller naturvidenskabelige sammenhænge, hvor eleverne arbejder med at forstå og beskrive sammenhænge i både statiske og dynamiske systemer.

I enhver modellering indgår principielle overvejelser om idealiseringer og rækkevidde, som typisk er relateret til den kontekst, som modellen indgår i. I samarbejde med andre fag eller ved inddragelse af viden fra andre fag kan man overveje, hvilke forenklinger, idealiseringer og abstraktioner der er acceptable i den givne situation og danner grundlag for en meningsfuld og anvendelig matematisering.

Modeller til beskrivelse af et datamateriale inviterer til spørgsmål om fremskrivninger og prognoser eller spørgsmål, der vedrører fortolkning af de formeludtryk og regneforskrifter, som modellerne genererer samt konkrete beregningsmæssige spørgsmål på baggrund af bestemte oplysninger om konteksten. Eleverne skal i arbejdet med modeller opnå kompetence til at begrunde deres svar med beregning af absolut eller relativ afvigelse afhængigt af den aktuelle situation.

Eleverne skal kunne opstille simple matematiske modeller ud fra et givet talmateriale, en figur eller en beskrivende tekst, hvor de elementære funktioner bringes i anvendelse.

Den del af kernestoffet, der omhandler lineære modeller, er obligatorisk i grundforløbet. . Kernestoffet i grundforløbet er foldet ud i afsnit 3.1 nedenfor.

Vektorfunktioner og banekurver

stxA:

I arbejdet med vektorfunktioner indgår naturligt begreber og procedurer fra funktioner og fra vektorregningen, og der dannes hermed en ’bro’ mellem disse to ’søjler’.

Eleverne skal have kendskab til vektorfunktioners forskellige repræsentationsformer og kunne skifte mellem de forskellige repræsentationer. I arbejdet med vektorfunktioner skal eleverne kunne bestemme skæringspunkter med akserne, dobbeltpunkter (når en parameterværdi er kendt) samt retningsvektor for tangent og tangentligning, herunder ligning for vandret og lodret tangent.

Til anvendelser hører modeller beskrevet ved vektorfunktioner, herunder at eleverne kan håndtere problemstillinger i relation til et objekts bevægelse, hvor tiden er input og stedkoordinaterne er output, og at de kender betydningen af begreberne hastigheds- og accelerationsvektor.

Vil man arbejde yderligere med anvendelser, kan man fx inddrage krumningsbegrebet, kurvelængde af banekurve og areal af et område afgrænset af en banekurve. Hvis sådanne begreber optræder i opgaver ved den skriftlige prøve, så vil formler knyttet dertil være beskrevet i opgaven.

Funktioner af to variable

stxA:

Funktioner af to variable optræder i læreplanen som ’spor’ til eventuelle videre studier med matematikindhold, og der er således ikke krav om, at eleverne skal kunne redegøre for teorien knyttet til emnet. Eleverne skal kende og kunne anvende begreber i problembehandling med funktioner af to variable på et instrumentelt niveau svarende til de muligheder, som et matematisk værktøjsprogram tilbyder.

Arbejdet med funktioner af to variable skal bibringe eleverne en dybere forståelse af funktionsbegrebet og udvikle elevernes rumlige forståelse. Eleverne skal kunne tegne grafer for funktioner af to variable, herunder niveaukurver, og de skal kunne bestemme partielle afledede, tangentplaner og gradienter samt stationære punkter (saddelpunkter og ekstremumspunkter). Eleverne forventes ikke at kunne argumentere for at en given tangentplan eksisterer.

Integralregning

stxA:

De fleste hold vil vælge at introducere integralregningen gennem en diskussion af stamfunktionsbegrebet, og man bør her trække på elevernes erfaringer fra differentialregningen og omtale bestemmelse af stamfunktioner som den omvendte proces af differentiation, så eleverne som udgangspunkt kan finde reference i allerede kendt stof.

Eleverne forventes at opnå en sådan fortrolighed med bestemmelse af stamfunktion for de elementære funktioner og med regnereglerne (sum, differens, 'gange en konstant' og substitution) for bestemte og ubestemte integraler, at de kan håndtere problembehandling, hvor disse begreber indgår.

I nogle tilfælde vil den matematiske modellering resultere i udtryk, som rækker ud over de funktionstyper, der er dækket af de elementære funktioner, og de regneregler for integration, der er beskrevet i kernestoffet. I disse tilfælde forventes eleverne at anvende CAS til at integrere disse udtryk.

Sammenhængen mellem areal og stamfunktion skal gives en særlig behandling, og det vil være naturligt at tænke dette sammen med det supplerende stof om deduktive metoder og bevisførelse.

Til anvendelser hører problembehandling, der involverer integraler til bestemmelse af areal afgrænset af funktioner, rumfang af omdrejningslegeme og kurvelængde.

Vil man arbejde yderligere med anvendelser, kan man fx inddrage overfladeareal af omdrejningslegeme eller integralregningens middelværdisætning. Desuden er det oplagt at arbejde med kumulerede beregninger i normalfordelingen ved brug af integraler.

Differentialligninger

stxA:

Eleverne skal kunne løse logistiske og lineære første ordens differentialligninger, herunder eksponentiel vækst og forskudt eksponentiel vækst, samt simple separable differentialligninger af andre typer. Separation af de variable skal ikke gives en egentlig selvstændig behandling, men eleverne skal ud over den logistiske differentialligning kunne løse forelagte separable differentialligninger med CAS i et matematisk værktøjsprogram.

De grundlæggende elementer i en kvalitativ analyse af differentialligninger (viden, som modellen giver, uden at ligningen løses) er også en del af kernestoffet.

Eleverne forventes at kunne opstille simple differentialligninger på baggrund af en sproglig formulering, og de skal kunne håndtere procedurer til undersøgelse af, om en bestemt funktion er løsning til en forelagt differentialligning, samt kunne forstå og afkode en differentialligning på en sådan måde, at de kan bestemme ligningen for en tangent til en bestemt løsningskurve.

Eleverne skal opnå kendskab til begrebet linjeelement, og de skal kunne bestemme og tegne linjeelementer for differentialligninger. Desuden skal de have kendskab til numeriske metoder til løsning af differentialligninger med matematiske værktøjsprogrammer, herunder kunne tegne og afkode en grafisk repræsentation af en numerisk løsning til en differentialligning i et hældningsfelt. Dette giver muligheder for at eksperimentere med og studere differentialligninger, som ikke kan løses analytisk. Eleverne forventes at kunne aflæse relevante oplysninger af en forelagt numerisk løsning til en differentialligning i et hældningsfelt.

Holdet vælger selv, hvilke typer differentialligningsmodeller man vil fordybe sig i, men hvor det er muligt, tilrettelægges dette med fordel i et samarbejde med andre fag. Fx kan den lineære inhomogene førsteordens differentialligning anvendes til at modellere fænomener som dobbelt radioaktivt henfald eller forløb af epidemier, og studiet af denne type kan således naturligt foregå i et samarbejde med andre fag. Modellering af fysiske fænomener som frit fald og udspring med faldskærm, varmestrømning og tømning af en vandbeholder fører ofte til opstilling af differentialligninger, der principielt kan løses ved separation. Sådanne modeller kan derfor give anledning til fordybelse i teorien for og metoder til løsning af separable differentialligninger.

Mindstekrav

Mindstekravene udgør dels en balance mellem *færdigheder* og *kompetencer* og dels en balance mellem *uden* og *med* matematisk værktøjsprogram.

Mindstekravene knytter sig til de mest enkle og lettest forståelige dele af kernestoffet, som en elev forventes at kunne begå sig inden for. Mindstekravene retter sig dermed mod de grundlæggende matematiske færdigheder og kompetencer med og uden matematiske værktøjsprogrammer, som en elev som minimum skal kunne mestre inden for et givet felt, når eleven har gennemført og bestået matematik på det aktuelle niveau.

Mindstekravene kæder viden og begrebsforståelse sammen med færdigheder og kompetencer i relation til simpelt ræsonnement, modellering og problembehandling. Kravene til brug af matematiske værktøjsprogrammer bygger på forståelse og fortolkning af såvel input som output både grafisk og symbolsk, og derfor dækker mindstekrav også over basal brug af de muligheder, som matematiske værktøjsprogrammer tilbyder.

Mindstekrav må ikke forveksles med beherskelse af basale algebraiske færdigheder alene. Beherskelse af basale algebraiske færdigheder uden matematiske værktøjsprogrammer udgør en central, men mindre del af mindstekravene.

Til mindstekravene hører, at eleverne kan identificere kernen i et simpelt matematisk problem, og at de kan gå til problemet med en rimelig struktureret tankegang, som de er i stand til at redegøre for. Som en del af mindstekravene skal eleven også besidde en vis robusthed, dvs. faglig fortrolighed med og selvstændighed i udvælgelse og anvendelse af metoder i bestemte typer af problembehandling med og uden brug af matematiske værktøjsprogrammer.

Overordnet set ligger de grundlæggende færdigheder og kompetencer på alle de tre matematikniveauer (C-, B- og A-niveau) inden for tal, variable, problembehandling, argumentation og analyse. Bearbejdninger heraf på ét niveau vil resultere i nye færdigheder og kompetencer, der kan anvendes og give anledning til nye på næste niveau. Mindstekravene udvides således dels med henblik på reelt nyt fagligt indhold og dels med henblik på det taksonomiske niveau, hvorpå en elev forventes at kunne forholde sig til allerede behandlet fagligt stof, når eleven bevæger sig fra et matematikniveau til et andet. Men samtidig kan mindstekrav på ét matematikniveau (B- eller A-niveau) indeholde elementer af de(t) underliggende niveau(er)s kernestof, som stadig er aktuelt i behandlingen af det aktuelle niveaus kernestof.

Opgaver, der afprøver, hvorvidt en elev mestrer mindstekravene, har karakter af typeopgaver, dvs. opgaver, der er forbundet med (en vis grad af) genkendelse for den elev, der aktivt har deltaget i undervisningen på det aktuelle niveau. Opgaverne er knyttet til hvert af de faglige emner i kernestoffet og består af spørgsmål med et eller få trin svarende til det unistrukturelle niveau i SOLO-taksonomien, herunder brug af simple kommandoer i et matematisk værktøjsprogram. Når en opgave omfatter et element af anvendelsesorientering, så beskrives problemstillingen i en kort og letforståelig tekst. Tilsvarende er symbolbrugen i 'nøgne' matematikopgaver letforståelig. Opgaverne fokuserer dels på beregninger, dels på forståelse og stilles ved de skriftlige prøver på B- og A-niveau både ved delprøve 1 og delprøve 2.

Overordnet fokuserer mindstekravsopgaverne som udgangspunkt på følgende kategorier af færdigheder og kompetencer, som optræder inden for et eller flere kernestofemner:

Begreber og symboler:

– Kende begrebsbetegnelser (ord og symboler) og betydning af begreber
– Indføre variable og angive symbolske betegnelser

Formler og funktioner:

– Omskrive og reducere formler og udtryk med papir/blyant og med CAS
– Indsætte konkrete værdier i formler (forskrifter) og tilskrive resultatet betydning
– Aflæse indgående størrelser og tilskrive størrelserne betydning (matematisk og i kontekst)
– Opstille formler og udtryk ud fra givne oplysninger eller en sproglig beskrivelse

Ligningsløsning:

– Afgøre, om et oplyst resultat (værdi, udtryk, funktion (*A-niveau*)) er en løsning til en ligning med papir/blyant og med CAS
– Algebraisk løse ligninger med papir/blyant og med CAS (herunder differentialligninger på *A-niveau*)
– Grafisk løse ligninger med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram

Operationer på funktioner: *Kun relevant for B-niveau og A-niveau*

- Differentiere funktioner med papir/blyant og med CAS
- Sammensætte funktioner med papir/blyant og med CAS
- Bestemme stamfunktioner og areal med papir/blyant og med CAS (A-niveau)

Grafer og figurer:

– Tegne grafer og grafiske repræsentationer samt geometriske figurer med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram, herunder hensigtsmæssigt valg af 'grafvindue'
– Aflæse på forelagte grafer og grafiske repræsentationer samt geometriske figurer på selvfrembragte (med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram) grafer (og geometri-

ske figurer) – og tilskrive resultater betydning (matematisk og i kontekst)

Tabeller:

– Aflæse data fra tabel, herunder funktionstabel og sandsynlighedsfordeling
– Opskrive (importere) data i tabel, herunder frembringelse af funktionstabel med papir/blyant og med CAS

'Black box'-kommandoer i matematisk værktøjsprogram:

- Anvende indbyggede 'en-knap-kommandoer'
- Anvende indbyggede statistiske undersøgelser af data

I bilag 2 samt på emu.dk findes eksempler på opgavetyper, der beskriver kategoriernes indhold. Mindstekravene, som de eksplicit kommer til udtryk ved de skriftlige prøver, eksemplificeres i de vejledende opgaver. Ovenstående (inkl. opgaverne i bilag 2) er således ikke en udtømmende liste, men blot eksempler, der anskueliggør kravene.

2.3. Supplerende stof

Det supplerende stof er obligatorisk. Det vil ikke indgå i opgaver til den skriftlige prøve, men skal indgå i spørgsmålene til den mundtlige prøve. Det supplerende stof kan på C- og B-niveau med fordel inddrages i behandlingen af nærliggende kernestof, mens der på A-niveau er krav om sammenhængende forløb med udgangspunkt i supplerende stof. Desuden vil dele af det supplerende stof være naturligt at behandle i samarbejde med andre fag. Der er en række bindinger på det supplerende stof, men man kan også beskæftige sig med andet supplerende stof, fx i relation til et konkret studieretningssamarbejde eller andre faglige samspil.

> stxA:
>
> Hvert år i offentliggøres et forberedelsesmateriale forud for den skriftlige eksamen på A-niveau. Materialet indgår ikke som en del af det supplerende stof i forløbet, men det kan inddrages ved mundtlig eksamen, hvis et hold ønsker det.

Ræsonnement og bevisførelse

Det matematiske ræsonnement og det matematiske bevis er ikke kun et værktøj til at godtgøre den valgte metode eller den givne sætning. Reduceres matematik til metoder, anvendelser af sætninger og indlæring af procedurer, går en væsentlig del af faget tabt. Beviserne og de matematiske ræsonnementer udgør en stor del af den matematiske teori. Tilegnelsen af beviset giver indsigt i, hvorfor en sætning eller en metode er gyldig, og hvorfor netop sætningens forudsætninger er nødvendige.

Eleverne skal møde den matematiske teori og selv arbejde med forskellige elementer af matematisk ræsonnement gennem hele gymnasieforløbet og inden for alle områder af undervisningen. Kun derved kan eleverne opnå en sådan fortrolighed med matematisk tankegang, at de i en problembehandling umiddelbart vil skelne mellem ”hvad man ved”, ”hvad man antager” og ”hvad man ønsker at vide”. Det gælder, uanset om emnet er ren matematisk teori eller drejer sig om anvendelse af matematik til løsning af givne problemer. Dette aspekt kan fx fremhæves ved at præsentere eleverne for vidt forskellige beviser for samme sætning. Eleverne skal opnå viden om, at der er forskel på den måde, hvorpå matematiske emner fremstilles i bøger, og den måde, hvorpå teorien hørende til emnet oprindeligt er fremkommet. De skal kende til bevisets rolle og forskellige bevistyper.

Ræsonnementet bør også trænes eksplicit i arbejdet med matematisk modellering, hvor det tilsvarende ekspliciteres for eleverne, at de skal gøre sig overvejelser over ”hvad man ved”, ”hvad man antager”, og ”hvad man ønsker at vide”. Identifikation af variable, viden om relationer mellem disse samt antagelser om årsagssammenhænge vil ofte bygge på en faglig viden fra andre fag. Men matematiske metoder er afgørende for at oversætte problemet til et, som man kan håndtere.

Uanset hvilke emner der arbejdes med på det enkelte hold, forventes det, at eleverne opnår en sådan indsigt i fagets deduktive natur (afpasset de matematiske niveauer C, B og A), at de grundlæggende kan skelne mellem forudsætninger, antagelser, definitioner og sætninger, samt at de selvstændigt kan fremlægge de bærende idéer i en række centrale beviser inden for forskellige dele af fagets områder. Denne side af matematikkens væsen bør introduceres tidligt gennem et eksemplarisk materiale, der både rummer muligheder for elevekspe-rimenter, for en diskussion af antagelser og forudsætninger, sætning og bevis samt for en diskussion af det induktive contra det deduktive. Det kan være direkte knyttet til kernestoffet, eller det kan være andre fascinerende problemstillinger.

En dybere talforståelse kan understøttes af et forløb, hvor primtallenes egenskaber studeres gennem deduktive ræsonnementer på alle niveauer, mens primtallenes anvendelse i kryptologi er godt stof på B- og A-niveau. Et forløb, hvor eleverne fordyber sig i de rationale og irrationale tals karakteristiske egenskaber via den successive udvidelse af talmængderne, kan give indblik i de reelle tals kompleksitet.

I den indledende vektorregning er der rige muligheder for, at eleverne selv arbejder med at formulere enkle sætninger, gennemfører små beviser og herved opnår en vis indsigt i matematikkens væsen i et forløb tilrettelagt som en vekselvirkning mellem eksperimenterende undersøgelser og indblik i den aksiomatisk-deduktive opbygning af matematisk teori.

stxB:

Differentialregningen er det helt centrale abstrakte emne og skal derfor i denne sammenhæng gives en særlig behandling, eksempelvis ved at benytte tretrinsreglen til bestemmelse af simple differentialkvotienter og regneregler for samme.

Betingelserne for løsning af andengradsligningen og for udledning af løsningsformlen kan give mulighed for at sætte fokus på, hvordan et matematisk ræsonnement ofte bevæger sig gennem én sammenhængende kæde af argumenter.

stxA:

På A-niveau er der større vægt på deduktive metoder end på C- og B-niveau. Særligt skal dele af infinitesimalregningen behandles med en deduktiv tilgang, herunder udledning af analysens fundamentalsætning om sammenhængen mellem areal og stamfunktion samt udledning af fuldstændige løsninger til udvalgte differentialligninger.

Under arbejdet med differentialligninger kan man vælge at gennemføre forløb med fokus på metoder til løsning af lineære og logistiske (samt evt. lineære anden ordens) differentialligninger, der anvender substitution, og som bygger på monotonisætningen, eller inddrage begreber som eksistens og entydighed. Et sådant forløb kan illustrere både matematikkens hierarkiske struktur og en af de grundlæggende metoder i problembehandling: at oversætte et komplekst problem til et mere simpelt problem, som vi allerede har styr på.

I forløb om deduktive metoder og matematikkens aksiomatisk deduktive opbygning vil det være oplagt også at diskutere videnskabsteoretiske spørgsmål. Det kan være i forløb om indledende vektorregning, differentialregning, differentialligninger etc.

Ca. 3 uger før den skriftlige eksamen offentliggøres forberedelsesmaterialet til den skriftlige eksamen. Eleverne arbejder med materialet under vejledning, og stoffet kan indgå som en del af det supplerende stof, der stilles spørgsmål i ved den mundtlige eksamen.

Væksthastighed – et vigtigt begreb i matematiske modeller

Eleverne skal som 'spor' til B-niveauet opnå kendskab til, hvordan man ud fra tangentens hældningskoefficient kan opnå information om, hvordan en given udvikling forløber, dvs. de skal kunne fortolke tangentens hældningskoefficient som en væksthastighed i en forelagt matematisk model. Det vil være naturligt, at bestemmelse af væksthastighed indgår i nogle af de problemstillinger, der anvendes ved gruppedelprøven jf. afsnit 4.2. Eleverne skal rent instrumentelt ved brug af CAS eller ved aflæsning kunne bestemme tangentens hældningskoefficient i en anvendelsesorienteret kontekst fx hentet fra et andet fag, som eleverne har kendskab til.

stxB:

Eleverne skal som 'spor' til A-niveauet opnå kendskab til, hvordan man ud fra viden om en afledet funktion beskrevet som væksthastighed i konstant eller eksponentiel vækst kan opnå kendskab til den oprindelige funktions vækstforhold gennem opstilling af en ligning, hvori både den afledede funktion og funktionen selv indgår. De skal rent instrumentelt ved brug af CAS kunne bestemme løsningen til simple begyndelsesværdiproblemer (differentialligning med begyndelsesværdi), der beskriver en problemstilling i en anvendelsesorienteret kontekst fra et andet fag, som eleverne har kendskab til. Det er ikke tanken, at eleverne skal kunne opstille, analysere eller løse andre typer af differentialligninger.

Desuden kan den dobbelt afledede naturligt inddrages i undersøgelse af funktioners monotoniforhold og grafers krumningsforhold.

Autentiske data

Eleverne skal arbejde med autentiske data. Til autentisk datamateriale hører både data hentet i diverse databanker eller andre steder og data, som eleverne selv producerer. Det vil desuden være oplagt at inddrage diskussion og behandling af store datamængder ("bigdata") som et led i arbejdet med elevernes digitale dannelse. Autentiske data skal som andre forelagte data behandles i et matematisk værktøjsprogram (eventuelt med regnearksfaciliteter som nævnt ovenfor). Inddragelse af autentiske data bør, hvor det er muligt, løbende foregå i behandlingen af kernestoffet. Eleverne forventes at kunne importere og bearbejde store datamængder i deres matematiske værktøjsprogram.

Simulering af nulhypotese

stxB:

Eleverne forventes selvstændigt at kunne gennemføre simulering af en nulhypotese i deres matematiske værktøjsprogram. I kernestoffet indgår binomialtest, og det vil være naturligt at inddrage simulering af nulhypoteser i relation hertil. Et sådant forløb kan fx tage udgangspunkt i faktiske terningkast, der siden udvides til simulering af terningkast i elevernes matematiske værktøjsprogram.

I samarbejdet med andre fag kan der være brug for andre fordelinger, og det vil i sådanne tilfælde være naturligt at inddrage simuleringer af nulhypoteser i den sammenhæng. Det kunne fx være anvendelser af χ^2-test i samfundsfag og biologi.

Diskret matematik

stxB:

Den klassiske matematik er domineret af analysen, hvor de variable løber kontinuert gennem delmængder af de reelle tal. I moderne matematik spiller diskrete modeller, hvor de variable eksempelvis løber gennem delmængder af de naturlige tal, en stigende rolle, fordi diskrete metoder i form af algoritmer er essentielle i computerens bearbejdning af information.

Diskret matematik dækker således over teori knyttet til objekter, der varierer trinvist og ikke kontinuert. Emnerne er utallige, og der er ikke præcise krav til omfang eller antal. Man kan vælge at fremhæve og uddybe de diskrete metoder, der indgår i det obligatoriske stof fx i behandlingen af kombinatorik og binomialfordelingen, annuitetsregning eller polynomier – og på A-niveau numerisk integration – eller man kan vælge at give eleverne indsigt i nye områder af matematikken som fx logik, talteori, grafteori, følger og rækker eller lineær algebra – og på A-niveau differensligninger, epidemimodeller, iteration og kaos. Hvad der vælges må afhænge af, om man ønsker at styrke modellering, algoritmisk tænkning, forståelse af matematikkens natur eller matematikhistorie.

Ved metoder fra diskret matematik forstås algoritmer knyttet til diskrete emner. En algoritme er generelt set et sæt regler, der bruges til at løse et problem i et bestemt antal trin, dvs. et endeligt antal beregningstrin eller argumentationstrin, der skal udføres for at nå frem til et resultat. Det kan fx være numeriske metoder eller matematiske beviser. På emu.dk ligger der eksempler på undervisningsaktiviteter i diskrete emner som spilteori, tællemetoder og grafteori.

Annuiteter

Som en udvidelse af arbejdet med renteformlen skal eleverne opnå viden om annuitetsregning, og det vil være oplagt at inddrage både trinvise beregninger i regneark samt de tilhørende formler. Emnet behandles gennem anvendelsesorienterede eksempler, der bygger på autentiske data. Man kan vælge at udbygge forløbet med serielån, amortisationstabeller eller skatteberegninger, som kan give eleverne et indblik i, hvordan forskuds- og årsopgørelser fra skat, læses. Dette stof er velegnet til projektorienterede forløb, hvor eleverne selv skaffer stof og problemstillinger til behandling.

Matematikhistorie

Matematikhistorie er et fascinerende område, der inddrager både matematik, historie og videnskabsteori, og som repræsenterer en mulighed for at udvikle elevernes opfattelse af matematik som dynamisk og meningsfuldt og samtidig styrke deres interesse for mere færdighedsrelaterede matematikkundskaber. Eleverne skal derfor præsenteres for nedslag i den matematikhistoriske udvikling, der perspektiverer et eller flere emner i kernestof eller supplerende stof. Det kan fx foregå ved en motiverende historisk introduktion til et eller flere emner eller ved løbende nedslag og uddybende behandling, der perspektiverer enkeltdele og kæder gymnasiematematikken sammen med historiske resultater. Matematikhistoriske forløb i samspil med faget historie, som alle elever møder i deres gymnasieforløb, vil desuden kunne underbygge elevernes fremtidige arbejde med studieretningsprojektet. Der bør om muligt, specielt i sammenhængende forløb, indgå matematikhistoriske kilder,

som lægger op til et undersøgende arbejde, der udfordrer og udvikler eleverne nysgerrighed med henblik på matematikkens udvikling, form og brug.

> stxA:
>
> Det historiske perspektiv skal her indgå som en del af et sammenhængende forløb. Det kan være i selvstændige forløb eller i kernestofforløb, hvor det er oplagt at lægge historiske passager ind, hvor eleverne fx arbejder med historiske kilder, fx ved tangentbestemmelse eller behandling af logistisk vækst.

Videnskabsteori og matematiske metoder

Der skal ikke alene undervises *i* matematik, men også *om* matematik. Når faget indgår i et samarbejde med andre fag, så skal eleverne kunne inddrage og anvende relevante matematiske metoder, redegøre for disse i et sprog, som man også uden for faget kan forstå, samt forholde sig til fagets muligheder og begrænsninger i arbejdet med en konkret problemstilling.

Elevernes arbejde med matematikkens metoder og matematikkens videnskabsteori skal ske løbende i det samlede gymnasieforløb, dvs. på både C-, B- og A-niveau, hvor emner og fagligt stof er afpasset det faglige indhold og det faglige abstraktionsniveau. Eleverne skal gennem arbejdet med kernestoffet og eventuelt i selvstændige forløb støde på og arbejde med både induktive og deduktive metoder, idet forskellen belyses og fremhæves ved henvisninger til tidligere behandlet stof. De skal opnå et indblik i matematikken som en aksiomatisk-deduktiv videnskab, idet de arbejder med betydningen af definitioner, aksiomer, sætninger og beviser. Her kan man fx se på et af holdets egne undervisningsforløb eller på Lakatos' beskrivelse af matematisk praksis, når ny matematik opfindes og bekræftes.

Matematikkens videnskabsteori og metoder kan med fordel behandles i samarbejde med andre fag, hvor eleverne fx får øjnene op for forskellen mellem matematikkens metoder og de naturvidenskabelige induktive empiribaserede metoder. Eleverne bør også undervejs med små indslag præsenteres for eksempler på det umiddelbart overraskende, at abstrakt og unyttig matematik udviklet i matematikkens eget univers viser sig at kunne beskrive fænomener i fx naturen og kunsten.

I arbejde med modellering, hvor eleverne møder syntetiske metoder (fx geometriske konstruktioner), formelle metoder (fx modeller til fremskrivninger) samt numeriske metoder (fx simuleringer og diskrete beregninger), bør forskellen på metoderne fremhæves.

2.4. Omfang

Det forventede omfang af fagligt stof er ikke opgivet i normalsider. Matematiske tekster (i bred forstand) indeholder som oftest større mængder af symbolsprog. For traditionelt lærebogsmateriale opgøres omfanget af læst stof ud fra det aktuelle antal sider i materialet (en side er en side). Omfanget af det faglige stof formidlet igennem andre medier opgøres på fornuftig vis under hensyntagen til sværhedsgraden af stoffet, og hvilket medie der er tale om.

Det samlede omfang af fagligt stof anføres i beskrivelsen af den gennemførte undervisning (undervisningsbeskrivelsen). Omfanget angives med en sådan detaljeringsgrad, så det fremgår, hvorledes det faglige stof har været vægtet i det samlede undervisningsforløb, fx ved angivelse af et skønsmæssigt sidetal eller en procentvis fordeling af stoffet.

3. Tilrettelæggelse

Tilrettelæggelse af undervisningen kan foregå på mange måder, og nedenstående repræsenterer en række anbefalinger til, hvilke elementer der bør overvejes i forberedelsen af de enkelte lektioner og sammenhængende forløb.

3.1. Didaktiske principper

Undervisningen tilrettelægges med variation i forhold til arbejdsformer og undervisningsformer. Et modul kan eksempelvis begynde med et eksperiment, hvor eleverne prøver sig frem og selv opdager matematiske strukturer og sammenhænge. Andre gange præsenteres stof og metoder af læreren, hvorefter elever arbejder med dette, fx i form af opgaveregning. Nogle forløb og moduler tilrettelægges, sådan at hele klassen har en dialog om et emne, mens andre tilrettelægges, så elever i par eller i små grupper arbejder mere selvstændigt med et givent stof. I alle tilfælde vil omdrejningspunktet være elevernes selvstændige arbejde med stoffet.

For at udvikle den enkelte elevs matematikfaglige potentiale må det medtænkes i planlægningen af undervisningen, at både den fagligt stærke og den fagligt svage elev får et fagligt udbytte af undervisningen. Hele klassen behøver derfor ikke altid arbejde med det samme stof, og de behøver ikke altid arbejde med stoffet på samme måde.

Det er motiverende for de fleste elever at opdage, at matematikken kan bringes i anvendelse. Derfor er det helt centralt, især på C- og B-niveau, at have blik for og udpege over for eleverne, hvor de forskellige dele af det faglige stof bringes i spil i nye kontekster. Undervisningen tilrettelægges, så eleverne møder og bearbejder problemstillinger, der udspringer fra faget selv såvel som fra omverdenen.

Ved at formulere faglige mål og delmål for hvert større forløb bliver det tydeligt i en fælles forståelse for både lærer og elever, hvilke forventninger der er til indhold, form og elevernes indsats, så eleverne har de bedste forudsætninger for at tage aktiv del i de aktiviteter, der igangsættes i undervisningen. Tydelige mål og delmål er desuden afgørende for en effektiv evaluering, som både læreren og den enkelte elev kan bruge fremadrettet.

Overgang og grundforløb

Grundforløbet er et kort, afgrænset forløb, hvor eleverne skal introduceres til gymnasial matematik, som er en helt ny verden for mange af dem. De faglige krav er ikke kun højere, men de opleves også som meget anderledes. Eleverne går fra hovedsageligt at skulle kunne beskrive indholdet af fx en formel og forklare en løsningsprocedure til at skulle kunne argumentere for, hvordan fx en formel er fremkommet, og hvorfor en bestemt løsningsprocedure foretrækkes frem for en anden.

Eleverne skal gennem behandling af det faglige emne lineære modeller og lineære funktioner dels inspireres til at gå på opdagelse og stille spørgsmål, dels møde passende krav til symbolbehandling og præcision i matematisk sprogbrug. Der skal være plads til både simple ræsonnementer i en teoretisk behandling af stofområdet og til modellering og problembehandling, der illustrerer stofområdets anvendelsesmuligheder blandt andet i samspil med naturvidenskabeligt grundforløb.

I grundforløbet skal eleverne introduceres til gymnasiets tre forskellige matematikniveauer, C-, B- og A-niveau. Eleverne skal derfor igennem tilrettelæggelsen af undervisningen i grundforløbet opnå indsigt i forskellen på de tre niveauer, så de kan vælge studieretning og dermed matematikniveau på et oplyst grundlag.

Grundforløbet bør tilrettelægges, så eleverne fra dag ét møder matematik som et levende og spændende fag og ikke løbes over ende af krav om at kunne mestre diverse basale færdigheder.

Da eleverne efter grundforløbet fortsætter i studieretningsklasser, bør der på den enkelte skole behandles en ensartet kerne af stof for alle matematikhold i grundforløbet, så alle elever så vidt muligt har samme udgangspunkt, når de starter på studieretningsforløbet. Der er ikke faste regler for, hvor mange timer der skal afsættes til matematikundervisning i grundforløbet. Derfor skal matematikfaggruppen lokalt på den enkelte skole blive enige om det konkrete faglige indhold, herunder eventuel inddragelse af yderligere kernestof. Det vil fx være demotiverende for elever at skulle igennem det samme stof to gange.

Matematikfaggruppen bør have klare aftaler for elevernes brug af matematiske værktøjsprogrammer i grundforløbet og på hvert af de tre niveauer C-, B- og A-niveau, så eleverne også i den henseende har samme udgangspunkt, når de starter på studieretningsforløbet.

Eleverne kommer normalt fra folkeskolen med ret forskellige matematikfaglige forudsætninger, og de er blandet på hold på tværs af kommende studieretninger og dermed interesse for faget. Det er derfor helt afgørende, at læreren indtænker undervisningsdifferentiering i sin tilrettelæggelse af grundforløbet, så hver enkelt elev oplever at være tilpas udfordret. Det er desuden en væsentlig pædagogisk opgave i grundforløbet, at alle elever oplever et spændende fag, som virker overkommeligt for dem at arbejde med fremover. Arbejdsformerne skal varieres, og der bør indgå forskelligartede skriftlige og mundtlige produkter – og ikke et ensidigt fokus på grundforløbets afsluttende screening.

Som lærer skal man være opmærksom på de udfordringer, der ofte beskrives ved overgangen fra folkeskolens matematikundervisning til gymnasiets matematikundervisning. Det handler blandt andet om tempoet, hvormed der indføres nye begreber, at der generelt er et højere abstraktionsniveau, og at der stilles større krav til præcision, fx i forbindelse med simpel symbolmanipulation og algebraisk løsning af simple førstegradsligninger samt krav til systematik i brugen af matematiske værktøjsprogrammer.

Eleverne skal i løbet af grundforløbet så vidt muligt udvikle gode studievaner, herunder også gode lektielæsningsvaner, dvs. eleverne skal lære, hvordan man forbereder sig bedst muligt til matematikundervisningen i gymnasiet. Læreren må derfor sørge for at give eleverne meningsfulde og overkommelige lektier for og følge op på disse i hver lektion. Lektierne behøver ikke nødvendigvis være de samme for alle elever. Det er en stor hjælp for mange elever, at der i lektien er formuleret konkrete fokuspunkter eller spørgsmål til en tekst eller en opgave, som eleverne arbejder med derhjemme, så formålet med lektien er klart for den enkelte elev. Eleverne skal opleve, at det er betydningsfuldt for deres matematiklæring og for undervisningens tilrettelæggelse, at de møder velforberedt til timerne. Tilsvarende er det vigtigt at gøre eleverne opmærksomme på, at de meget let går glip af noget og kommer bagud i et fag som matematik, der i høj grad opbygges kumulativt, hvis ikke de møder forberedt frem og deltager aktivt i undervisningen.

Screeningen skal ligge i den afsluttende del af grundforløbet, så både elever og lærere kan anvende resultatet heraf som led i elevernes endelige beslutning om valg af studieretning, herunder matematikniveau. Screeningen varer to timer og skal anvendes til at få et indblik i, om den enkelte elev er i stand til at anvende det faglige stof, som er behandlet i grundforløbet, til at løse forskellige typer af opgaver knyttet hertil. Eleverne skal under hele prøven have adgang til alle de sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger (herunder i-bøger), egne noter og matematisk værktøjsprogram. Eneste begrænsning er kommunikation med andre. Det er ikke et krav, at screeningen bedømmes med en karakter. En formativ tilbagemelding, knyttet til elevens nødvendige indsats set i forhold til kommende valg af matematikniveau, vil være mere konstruktiv for elevens valgproces.

Ræsonnement

Eleverne skal selvstændigt arbejde med matematisk ræsonnement gennem hele gymnasieforløbet inden for alle områder af det faglige stof. De skal opnå fortrolighed med matematisk tankegang, sådan at de kan skelne mellem forudsætninger, antagelser, definitioner og sætninger samt redegøre for centrale beviser inden for flere af det aktuelle matematikniveaus stofområder. Ræsonnement skal eksplициteres i forbindelse med behandling af ren matematisk teori, i modellering og under en eksperimentel behandling af et stof, hvor eleverne selvstændigt opdager ”nye” matematiske sætninger eller arbejder med simuleringer. Se under supplerende stof for en yderligere udfoldning af begrebet.

Problembehandling

Opgaveløsning er en central del af matematikfaget, som skal tilrettelægges med det formål at konsolidere færdigheder og udvikle en dybere forståelse af begreber. At løse opgaver med et ensidigt fokus på at kunne løse fagets skriftlige eksamensopgaver giver eleverne store problemer med at kunne håndtere matematiske problemstillinger, som ikke er ’standardopgavetyper’, fordi de snarere lærer at *genkende* en opgavetype end at *forstå*, hvad en forelagt opgave egentlig går ud på. At kunne afkode, hvad et matematisk problem dækker over, og dernæst kunne vælge en hensigtsmæssig løsningsstrategi kræver matematisk indsigt, der rækker udover almindelig mønstergenkendelse.

Eksamensopgaverne kan med fordel naturligt indgå på mange måder i undervisningen (også fra hf eller andre skoleformer). Hvornår og hvordan afhænger af, hvor i det samlede forløb holdet befinder sig. Sædvanligvis kan det være hensigtsmæssigt at omskrive opgaverne og lette det faglige niveau ved at tilføje delspørgsmål, ved at stille krav om en bestemt løsningsmetode, så de passer til det relevante taksonomiske niveau, eller omvendt ved at omskrive og udvide dem, så de bliver mere åbne og mere omfattende til brug for et projektforløb.

Problembehandling skal også tilrettelægges, så eleverne selv lærer at formulere matematiske spørgsmål (og opgaver) med henblik på at kunne opstille problemformuleringer med relevante spørgsmål i modellering. Formuleringerne kan være målet i sig selv, eller spørgsmålene kan fx besvares (løses) af andre elever.

Matematisk modellering

Eleverne skal arbejde med matematisk modellering i forbindelse med flere forskellige emner samt i kombination af emner (svarende til ’broer’ imellem ’søjlerne’). Eleverne skal arbejde med alle faser i modelleringsprocessen, herunder i særlig grad med matematiseringsfasen. Herigennem skal eleverne opleve, at den samme matematik kan anvendes i vidt forskellige situationer.

Undersøgelsesbaserede aktiviteter

Matematik fremstilles ofte deduktivt, men udvikles induktivt, og dette skal elever opleve gennem en undersøgende behandling af matematiske emner og problemstillinger, hvor eleverne prøver sig frem og derigennem opnår ny viden. Der findes fx flere udgivelser fra udviklingsprojekter i Matematiklærerforeningens regi, der beskriver eksempler herpå. Desuden er der til de gængse matematiske værktøjsprogrammer udviklet materiale, der kan findes på de respektive programmers undervisningsrelaterede websites.

Ikke alle forløb skal tilrettelægges med en eksperimentel tilgang. Indimellem vælges en traditionel deduktiv behandling af en matematisk teori, hvorved eleverne skal opnå en forståelse af matematikkens (aksiomatisk) deduktive opbygning. Eleverne skal arbejde selvstændigt med stoffet i en progression frem mod at kunne gennemføre en individuel præsentation af et matematisk ræsonnement.

Færdigheder

Basale matematiske færdigheder tager lang tid at opnå, og de kan smuldre eller helt forsvinde, hvis de ikke holdes ved lige. De er dynamiske, og de kan kun konsolideres, hvis de fremhæves og dyrkes i andre sammenhænge end der, hvor de er bygget op. Det kræver tid, før en basal matematisk færdighed modnes og bliver en robust og aktiv del af en elevs matematikberedskab. Det er derfor helt centralt, at man i undervisningen vender tilbage til de basale matematiske færdigheder mange gange i løbet af et gymnasieforløb. Erfaringer har gang på gang vist, at et intensivt kursus i begyndelsen af skoleåret (fx i grundforløbet) kun har yderst ringe effekt.

Læreren må indtænke en for eleverne meningsfuld gentagen træning af de basale færdigheder, netop når det er relevant, dvs. når behovet naturligt opstår i de faglige aktiviteter. Et matematisk begreb eller en matematisk procedure knyttet til en bestemt matematisk færdighed eller kompetence giver sjældent mening første gang, eleven møder det/den. Derfor kan eleverne på det stade i læreprocessen med fordel benytte diverse huskeregler. Men efterhånden som eleverne anvender begrebet eller proceduren i forskellige situationer, vil de kunne tilskrive indholdet mening og derved lære sig de relevante begreber og procedurer. Man kan betragte de kognitive strukturer, som den enkelte elev lægger i et begreb, som en slags ‘begrebsbillede’, der omfatter de ‘mentale billeder’, egenskaber og processer, som eleven forbinder med begrebet. Elevernes begrebsbilleder er ikke nødvendigvis sammenhængende og konsistente, <u>*mens*</u> de udvikles. Man kan forestille sig, at der i én situation ‘vækkes’ én del af en elevs begrebsbilleder, og i en anden situation ‘vækkes’ en anden del af elevens begrebsbilleder. Det er kun, når modstridende begrebsbilleder vækkes på samme tid, at der kan opstå en kognitiv konflikt, som rummer et læringspotentiale for at udvikle ‘billedsamlingen’ yderligere.

Som element i arbejde med de af mindstekravene, der kan henføres til færdigheder, bør formelsamlingen være et centralt hjælpemiddel. Hvis formelsamlingen skal repræsentere en reel hjælp for den enkelte elev, så skal eleven lære at slå op i den og bruge den på de enkelte trin frem mod en løsning af et givet problem. De af de grundlæggende matematiske færdigheder, som også er mindstekrav, skal fremhæves i undervisningen, så det bliver tydeligt for den enkelte elev, hvad der er mindstekrav, fx ved at bede eleverne om at angive, hvilke formler de har brugt til at løse bestemte opgaver.

Spiralprincippet

Kernestoffet og det supplerende stof skal tilrettelægges efter 'spiralprincippet' frem mod det højeste taksonomiske niveau således, at hver af de tre 'søjler' (funktioner, geometri og statistik) er i spil flere gange henover elevens samlede matematikgymnasieforløb. Man skal altså ikke færdiggøre eksempelvis vektorregningen i en samlet klump, men vende tilbage til den én eller flere gange – hver gang på et højere taksonomisk niveau og med nye faglige elementer.

Nogle kernestofemner er tænkt som 'spor' til det overliggende matematikniveau, dvs. de skal ikke behandles til bunds på det pågældende niveau. Ved behandling af 'spor' udnyttes muligheden for at introducere og behandle matematiske begreber fra et højere niveau med brug af matematiske værktøjsprogrammer. På C-niveau indgår 'spor' i form af en grafisk behandling af andengradspolynomier og logaritmefunktionerne (10-talslogaritmen og den naturlige logaritme) samt en grafisk undersøgelse af begrebet væksthastighed gennem aflæsning af tangenthældninger i forskellige kontekster. På B-niveau indgår 'spor' i form af en værktøjsbaseret behandling af de trigonometriske funktioner, hvor fokus skal lægges på sinusfunktionen og på den harmoniske svingning. På A-niveau indgår 'spor' i form af en værktøjsbaseret behandling af funktioner af to variable, der ikke tænkes behandlet dybt, før eleverne møder det igen på en eventuel matematikholdig videregående uddannelse efter gymnasiet. Andre emner kan behandles som 'spor' tidligt i gymnasieforløbet for at blive taget op igen på et dybere taksonomisk niveau senere i gymnasiets matematikforløb. Monotoniforhold og optimeringsproblemer kunne være eksempler på dette.

'Broerne', der skaber forbindelse mellem 'søjlerne', er vigtige for elevernes læring. I kraft af 'broerne' oplever de matematik som et sammenhængende fag, hvor begreber lært i ét emne understøtter begrebsudviklingen i et andet emne, og med en kombination af begreber løses nye typer af problemer, eller kendte problemer løses på nye måder. En oplagt 'bro' opstår, når statistik supplerer funktionsteorien ved at bidrage til vurdering af modeller gennem usikkerhedsbetragtninger. I behandlingen af vektorfunktioner på A-niveau trækkes på begreber fra både funktionsteorien og geometrien, hvorved emnet danner en naturlig bro mellem de to 'søjler'. Arbejdet med disse 'broer' skal være med til at udvikle elevernes problembehandlingskompetence således, at eleverne i højere grad vil være i stand til få hul på, arbejde med og løse ikke-standardiserede problemer og opgavetyper.

Med tilrettelæggelse af undervisningen og behandling af stoffet efter 'spiralprincippet' kan man sjældent følge én lærebog fra ende til anden, da traditionelt opbyggede lærebøger som oftest samler større emner i afsluttede kapitler. Denne traditionelle opbygning af lærebøgerne repræsenterer dog efter endt forløb til C-, B- eller A-niveau en fornuftig organisering af stoffet, som kan skabe overblik over et område for eleverne, når de skal repetere det samlede stof i forbindelse med eksamensforberedelse hen mod afslutningen af det aktuelle niveau.

Mundtlighed

Kommunikation *i* matematik med brug af symbolsprog både skriftligt og mundtligt skal med en hensigtsmæssig progression trænes igennem elevens samlede matematikforløb. Eleverne kan bl.a. træne dette ved at læse, sammenligne og diskutere matematiske tekster hentet fra forskellige typer af kilder, herunder forskellige lærebøger, som ofte repræsenterer forskellige fremstillinger af et bestemt emne. Tilsvarende kan forberedelsesmaterialerne (fra hfB eller stxA) samt historiske fremstillinger af et bestemt matematisk emne inddrages. Elevernes selvstændige brug af matematikkens symbolsprog læres dog ikke alene ved at læse andres matematiske tekster. Der bør være særligt fokus på, at eleverne udvikler matematisk symbolsprog i udvalgte mundtlige og skriftlige produkter. Kommunikation *med* matematik foregår bl.a. i forbindelse med modellering, hvor matematikkens sprog, teori og metoder anvendes til at opstille og løse forskellige problemer, der udspringer fra situationer uden for matematikken selv. I tværfaglige forløb er det oplagt at formidle et produkt både skriftligt og mundtligt med matematik. Kommunikation *om* matematik kan trænes naturligt i forbindelse med en mere overordnet behandling af matematikkens (basale) videnskabsteori og faglige metoder. Eleverne kan fx få til opgave at formidle, hvad forskellen er mellem matematik og andre faglige discipliner i gymnasiet. Dette kan ske i såvel tværfaglige som i enkeltfaglige forløb om matematikkens identitet eller udvikling i relation til andre fag. Der veksles hensigtsmæssigt mellem skriftlig og mundtlig formidling *i*, *med* og *om* matematik.

Matematiske værktøjsprogrammer

Matematiske værktøjsprogrammer skal ikke blot inddrages som middel til at løse matematiske problemer som fx eksamensopgaver. Programmerne skal i høj grad også udnyttes til begrebsindlæring inden for alle emner. Det kunne være i undersøgende tilgange til stoffet i forbindelse med indlæring og forståelse af begreber i relation til:

- konstanters betydning i forskellige funktionstyper vha. ”skydere”.
- simple sammenhænge inden for vektorregning ved visuelle betragtninger af fx koordinatsæt for tværvektor og forbindelsesvektor.
- differentialkvotienter for forskellige funktionstyper ved at opsamle tangenthældninger i forskellige punkter og udføre en passende regression.
- statistiske fordelinger ved at udføre simuleringer.
- mulige løsninger til differentialligninger ved at tegne linjeelementer (hældningsfelt).

Når de matematiske værktøjsprogrammer anvendes i opgaveløsning, skal det tydeliggøres for eleverne, hvori mindstekravene i forhold til anvendelse af et matematisk værktøjsprogram består.

Specielt om tilrettelæggelse af undervisningen mhp. træning frem mod de mundtlige prøver

På C- og B-niveau evalueres elevernes modelleringskompetence og problembehandlingskompetence afslutningsvist særligt ved den mundtlige gruppedelprøve. For at være bekendte med denne arbejdsform skal eleverne løbende igennem undervisningen præsenteres for og have mulighed for at bearbejde eksempler på problemstillinger, der kan optræde ved gruppedelprøven, fx gennem selvstændigt projektarbejde i grupper (jf. afsnit 3.2), hvor problemstillingerne er tilpasset et emnes aktuelle taksonomiske niveau på det tidspunkt, hvorpå stoffet er bearbejdet. Derfor skal undervisningen tilrettelægges, så eleverne bliver i stand til at arbejde undersøgende og udforskende også med mere åbne spørgsmål. Det centrale er, at eleverne opnår indsigt i, hvordan en problemstilling knyttet til et kendt stof er formuleret, og hvilke krav der stilles til bearbejdningen af denne, samt opnår metodiske erfaringer i forhold til arbejdet med problemstillinger.

Eleverne skal løbende igennem undervisningen på C-, B- og A-niveau præsenteres for og have mulighed for at bearbejde eksempler på formulering af spørgsmål, der kan optræde ved den individuelle mundtlige prøve, fx gennem individuelle præsentationer i grupper, hvor spørgsmålene er tilpasset emnets aktuelle taksonomiske niveau på det tidspunkt, hvorpå stoffet er bearbejdet. Fx er måden, hvorpå man vil formulere et spørgsmål om funktioner ('funktionssøjlen'), afhængig af, hvor i det samlede tidsmæssige forløb stoffet er behandlet. Det centrale er, at eleverne opnår indsigt i, hvordan et spørgsmål knyttet til et kendt stof er formuleret, og hvilke krav der stilles til en præsentation af et svar herpå og en samtale herom.

Der findes ingen differenslæreplan for opgradering fra et niveau til det næste niveau (C- til B-niveau, B- til A-niveau), men de endelige spørgsmål formuleres fortrinsvist med udgangspunkt i det højeste taksonomiske niveau, hvorpå emnet er behandlet, og således at hvert af spørgsmålene afspejler det aktuelle matematikniveau. De endelige spørgsmål vil derfor ikke kunne udformes endeligt før ved afslutningen af det samlede forløb frem mod det aktuelle niveau (B- eller A-niveau). Først på det tidspunkt vil eleverne kunne anvende deres erhvervede matematiske færdigheder og kompetencer til at ræsonnere, besvare spørgsmål og indgå i en faglig samtale på det aktuelle matematikniveau med inddragelse af underliggende niveauers stofområder på et passende taksonomisk niveau.

Særlig om løft fra hfB til stxA

På mange VUC- og hf-kurser udbydes også matematik på A-niveau, herunder GSK. Det A-niveau, der skal anvendes til at løfte fra B- til A-niveau på hf-kurser, er stx A-niveau. Da læreplanen for stx A dækker det samlede løft over gymnasiets 3-årige forløb til A-niveau, er det naturligt, at der i undervisningen fokuseres på det 'nye' stof (med indlagt repetition af stof fra de underliggende niveauer), så eleverne opnår matematiske færdigheder og kompetencer svarende til et A-niveau og knyttet til A-niveau-stof. Se yderligere om løftehold i undervisningsvejledning Matematik B/C, hf.

3.2. Arbejdsformer

Da elever lærer på forskellige måder, er en forudsætning for, at flest muligt lærer mest muligt, at arbejdsformerne er varierede og elevaktiverende. Arbejdsformerne kan varieres med henblik på elevernes muligheder for forståelsesafprøvning og feedback samt overvejelser om hensigtsmæssig inddragelse af matematiske værktøjsprogrammer. Arbejder eleverne sammen i mindre grupper, er det let for de fleste elever at stille opklarende spørgsmål og derudfra danne deres egen begrebsforståelse, mens det kan være grænseoverskridende for mange elever at stille den samme type spørgsmål i en klasseundervisningssituation. Derfor bør klasseundervisning i form af foredrag og læreroplæg, hvor læreren formidler et fagligt stof, altid jævnligt afbrydes af korte sekvenser med fx parvise diskussioner og opfølgninger på det, der netop er blevet præsenteret/gennemgået, eller spørgsmål, der har karakter af at forudsige, hvad der sker i de(t) næste trin.

Nogle forløb, timer og sekvenser tilrettelægges undersøgelsesbaseret, hvor eleverne selvstændigt i par eller mindre grupper undersøger matematiske sammenhænge og strukturer. I centrum for valg af arbejdsform skal altid stå elevernes mulighed for at bidrage aktivt til kommunikationen om og arbejdet med at lære nye begreber og metoder.

Som lærer må man være opmærksom på elevernes faglige forudsætninger og evne til abstrakt tænkning, hver gang man tilrettelægger et nyt forløb. Arbejdsformerne skal afspejle elevernes aktuelle niveau, så det faglige løft bliver størst muligt.

Elevernes evne til individuelt at arbejde med matematiske problemstillinger skal udvikles, ved at de gradvist får mere og mere ansvar for deres selvstændige arbejde med stoffet hen over det samlede gymnasieforløb. I begyndelsen af forløbet gives grundig stilladsering til det stof, der skal bearbejdes, og de opgaver, der skal løses derhjemme, for på længere sigt at forpligte eleverne selv på at opnå den faglige erkendelse knyttet til det aktuelle stof. Dette kan både være i forbindelse med elevernes skriftlige produkter og deres daglige lektier.

Elevernes evne til skriftligt at formulere sig er ikke udelukkende en spejling af deres matematiske tankegang. De skal gradvist indføres i den matematiske sprogbrug, notation og krav til sproglig præcision. Det lærer de ikke udelukkende ved at læse matematiske tekster. Desuden vil det at formulere sig skriftligt i matematik være med til at skærpe elevernes matematiske tankegang. Matematik er i sit grundlag et skriftligt fag, forstået på den måde at næsten enhver mundtlig aktivitet vil være suppleret med noget skriftligt. Eleverne lærer derfor ikke matematik uden at skrive. At formidle matematikholdigt stof kræver, at man ved, hvad matematik er for en slags disciplin, og eleverne bliver derfor først rigtig gode til at skrive matematikholdige tekster, når de har opnået et godt kendskab til matematikkens identitet. Man kan med fordel præsentere eleverne for forskellige fremstillinger af fx matematisk teori hentet fra forskellige lærebøger eller korte matematiske tekster fra artikler el. lign., så de opdager, at symbolsproget kan være forskelligt, på trods af at indholdet er det samme. Netop dette vil være en stor hjælp i arbejdet med studieretningsprojektet (SRP) og bør indgå som en del af studieretningsopgaven (SRO).

Matematikkens mundtlige dimension er ligeledes væsentlig, da det er i elevernes dialog med hinanden og med læreren, at de får afprøvet deres forståelse af matematik, og derigennem opnår ny viden. Eleverne møder mange nye ord i deres matematikundervisning, og de lærer først ordene at kende og erkender først betydningen af dem, når de prøver at anvende ordene i en eller anden form for matematisk kommunikation – skriftligt eller mundtligt. Den mundtlige dimension kan trænes ved fx at læse højt af matematiske tekster, præsentere et matematisk ræsonnement og diskutere problembehandlingsstrategier.

Mange elever vil i forbindelse med informationssøgning i relation til forskellige matematiske arbejder støde på engelske tekster, ligesom de på deres efterfølgende videre uddannelser ofte vil møde matematiske tekster på engelsk eller andre fremmedsprog. Derfor skal de møde sådanne fremmedsprogede (fortrinsvist engelske) matematiske tekster allerede i gymnasiet, så de får et vist indblik i betegnelsen af forskellige fagbegreber. Der er skrevet enorme mængder af relevant undervisningsmateriale på engelsk, som eleverne fx også bør kunne læse i forbindelse med SRP, så de ikke er begrænset til at kunne læse danske tekster. Matematikfaggruppen kan derfor med fordel i fællesskab udvælge en bank af engelske (eller andre fremmedsprogede) tekster, der fungerer godt på gymnasialt niveau.

Udvalgte forløb tilrettelægges som korte eller længerevarende styrede læringsforløb, hvor eleverne selvstændigt i par eller små grupper arbejder med et stof eller et tema, som sædvanligvis er det samme for alle elever. Oplægget til grupperne og den vejledning, eleverne får undervejs, kan i disse forløb med fordel differentieres i forhold til gruppernes faglige niveau. Eleverne skal i disse forløb på baggrund af et gennemarbejdet skriftligt (i bred forstand) forlæg fra læreren arbejde selvstændigt med stoffet i deres eget tempo og med læreren som vejleder gennem hele forløbet. Undervejs kan eleverne fx producere tekster, løse opgaver og lave korte videoer, som de samler i en portfolio som afslutning på forløbet, eller de kan skrive en afsluttende rapport, der beskriver deres arbejde med forløbets problemstillinger. Det afsluttende produkt rettes ikke nødvendigvis af læreren. Opsamlinger over sådanne længere forløb kan være meget omfattende, og der vil derfor i højere grad være tale om, at enkeltdele rettes eller kommenteres undervejs i selve forløbet. Netop sådanne forløb vil kunne forberede eleverne på den mundtlige prøves individuelle del.

Udvalgte forløb tilrettelægges projektorienteret, hvor eleverne i forløbet undersøger forskellige problemstillinger, som ikke nødvendigvis er ens for alle elever. Sådanne forløb vil kunne forberede eleverne til den mundtlige eksamens gruppedelprøve på C- og B-niveau. Projekterne formuleres, så eleverne får mulighed for at arbejde undersøgende, og projekterne kan formuleres mere eller mindre lukkede afhængigt af elevernes aktuelle niveau. De kan gøres mere åbne, jo længere eleverne er nået i deres matematikfaglige progression på vej mod slutniveauet. Projektforløbet afsluttes, ved at eleverne afrapporterer deres arbejde med en form for afrapportering, fx en projektrapport. For hvert projektorienteret forløb på C- og B-niveau kan læreren med fordel formulere en eller flere lignende problemstillinger, der kan bruges til den afsluttende mundtlige gruppedelprøve (disse holdes ukendt for eleverne).

For at tydeliggøre den faglige progression for eleverne formuleres i forbindelse med hvert forløb opsamlende skriftlige opgaver og mundtlige spørgsmål afpasset elevernes niveau og

den faktiske behandling af stoffet. Disse skriftlige opgaver og mundtlige spørgsmål udvikles således undervejs i elevernes samlede gymnasieforløb, når de bevæger sig op gennem emnerne efter 'spiralprincippet'. Mindstekravene tydeliggøres ligeledes i forbindelse med hvert forløb, så det er tydeligt for eleverne, hvad der kræves for at kunne begå sig på det aktuelle niveau i hver af 'søjlerne'. På B- og A-niveau tydeliggøres mindstekravene særligt i form af opgaver, der stilles ved den skriftlige prøve.

3.3. It

Matematik skal på lige fod med andre fag bidrage til elevernes digitale dannelse. I matematik er det oplagt at beskæftige sig med at genkende, bearbejde, forstå og opbygge algoritmer. Som nævnt under diskret matematik er en algoritme generelt set et sæt regler, der bruges til at løse et problem i et endeligt antal beregningstrin eller argumentationstrin, der skal udføres for at nå frem til et resultat, som det fx er tilfældet med numeriske metoder eller udvalgte matematiske beviser. Matematikfaget har i kraft af de matematiske værktøjsprogrammer en digital platform, som danner udgangspunkt for dele af elevernes matematiklæring, som fx at kunne udnytte værktøjerne til eksperimenterende undersøgelse af sammenhænge og problemstillinger.

I forbindelse med mundtlig og skriftlig formidling spiller elevens digitale kompetencer en større og større rolle. Elevernes kritiske udvælgelse og behandling af relevant information, herunder data, er afgørende for elevernes læring i mange fag. Her kan matematik fx bidrage med opstilling og test af hypoteser samt opstilling og kritisk bearbejdning af både matematiske og statistiske modeller.

En del elever møder op i gymnasiet med en vis matematikforskrækkelse fra folkeskolen, som kan have medført negativ selvopfattelse med henblik på matematiske færdigheder og kompetencer, der som oftest kommer til udtryk i en demotiveret indstilling til matematik. For sådanne elever kan matematiske aktiviteter med grafiske faciliteter og 'black box'-kommandoer i deres matematiske værktøjsprogram være med til at bløde op for en evt. modstand. Fx vil grafisk løsning af ligninger parallelt med CAS-ligningsløsning betyde, at disse elever oplever, at de kan noget med matematikken, fordi de ikke sidder fast i afskrækkende algebraisk ligningsløsning. I grundforløbet skal eleverne blandt andet arbejde med de fire forskellige repræsentationsformer i relation til lineære funktioner og modeller. Introduktionen hertil foregår læringsmæssigt mest effektivt med inddragelse af et matematisk værktøjsprogram, hvor der er let adgang til at skifte mellem repræsentationsformerne, fordi netop dette vil styrke elevernes forståelse af sammenhængen mellem punkter, forskrifter og tilhørende grafisk fremstilling. Ligeledes bør eleverne også allerede i grundforløbet arbejde med at formulere egne hypoteser fremkommet ved eksperimenter i værktøjsprogrammet.

Det er en fordel for både elever og lærere, hvis skolen formulerer en fælles politik mht. anskaffelse og anvendelse af matematiske værktøjsprogrammer. Specielt af hensyn til elever, der ønsker at opgradere fra et matematikniveau til det næste, bør der træffes velovervejede fælles beslutninger, og det vil samtidig styrke mulighederne for fagligt samarbejde på tværs af klasser og hold. Læreplanens betoning af repræsentationsformerne og skift imellem disse, eksperimentelle aktiviteter og simuleringer peger på, at der bør være adgang til værktøjer, der kan håndtere eksperimentel (dynamisk) geometri og eksperimentel (dynamisk) statistik.

Det tager tid at lære at bruge et bestemt program. Derfor bør man inddrage de matematiske værktøjsprogrammer, man har valgt at arbejde med, så tidligt som muligt og som et naturligt redskab på linje med papir, blyant, bøger etc. Herudover kan man i undervisningen med fordel udnytte de didaktiske muligheder, der ligger i at inddrage andre digitale redskaber som fx videooptagere (herunder screencast), online quizzer og præsentationsprogrammer.

De matematiske værktøjsprogrammers faciliteter skal introduceres i forbindelse med behandling af matematisk stof og ikke ved at afholde et decideret introkursus for eleverne i værktøjsprogrammet. I stedet skal relevante faciliteter introduceres undervejs i undervisningen, når behovene naturligt opstår i behandlingen af det faglige stof. I langt de fleste undervisningssituationer vil brugen af matematiske værktøjsprogrammer ske i en vekselvirkning med papir og blyant. Erkendelse af nye matematiske begreber og sammenhænge kan som oftest understøttes af skift mellem redskaberne. Derfor bør der i de matematiske aktiviteter, som eleverne sættes i gang med, altid indgå overvejelser om, hvordan redskaberne kan inddrages didaktisk mest hensigtsmæssigt. Afgørelsen af, hvorvidt inddragelsen er hensigtsmæssig, beror på den aktuelle situation, idet både 'black box'- og 'white box'-aktiviteter har sin berettigelse i matematikundervisningen. Det centrale er, at lærer og elever er bevidste om, hvornår en matematisk aktivitet er 'black box' henholdsvis 'white box'.

Bevidst anvendelse af matematiske værktøjsprogrammers 'black box'-kommandoer i kompensations-øjemed skal bidrage til, at eleverne møder matematiske begreber tidligere i deres forløb, end den egentlige teoretiske behandling finder sted. Fx kan eleverne i optimeringsproblemer, hvor definitionsmængden er begrænset, arbejde grafisk med bestemmelse af monotoniforhold og ekstrema uden at kende til differentialregning og tilsvarende med begrebet væksthastighed, hvor tangentbestemmelse klares med en indbygget kommando. I statistik kan eleverne udføre forskellige typer af regression og opstille modeller uden at kende til mekanismerne bag regression. Overblik over forskellige deskriptorer til beskrivelse af datasæt frembringes med få kommandoer, idet regneark og plots giver mange muligheder for at bearbejde data og skabe indsigt og overblik. Statistiske beregninger og tests med indbyggede kommandoer anvendes til at holde fokus på problemet, så de ikke fortaber sig i beregningsmæssige teknikaliteter. Værktøjerne kan således på mange måder kompensere for endnu ikke opnået indsigt i både matematisk teori og problembehandlingsstrategi, og det er en vigtig del af undervisningen, at eleverne opnår bevidsthed herom.

Til 'white box'-aktiviteter hører anvendelse af de matematiske værktøjsprogrammer til at lære matematik med, dvs. til at undersøge og forstå begreber og sammenhænge. Fx kan eleverne undersøge parametres betydning i en funktionsforskrift, simulere eller på anden måde eksperimentere sig frem til resultater og postulater, som er beskrevet i afsnit 2 og 3.

I både 'black box'- og 'white box'-aktiviteter bør der indgå spørgsmål som: "Hvornår bidrager de matematiske værktøjsprogrammer til øget eller mere effektiv matematiklæring hos eleven?", "Hvornår har værktøjerne ingen effekt på læringen?", "Hvornår skygger værktøjet for den matematik, eleven burde lære i den pågældende aktivitet?".

En banal, men effektiv, klassificering af matematiske aktiviteter med it (generelt) er baseret på 'trafiklys' spændende fra 'røde aktiviteter' uden effekt til 'grønne aktiviteter' med positiv effekt på elevens læring. Den kan måske være en hjælp i operationaliseringen af, hvad vi mener, når vi taler om 'hensigtsmæssig brug' i en given situation, fordi den giver os en terminologi til at kommunikere om og opnå en fælles forståelse af, hvordan aktuelle matematiske aktiviteter med it kan klassificeres og udvikles, fx i form af "hvordan gør vi den her røde aktivitet mere grøn?".

'Black box'-kommandoer er altid at betragte som røde aktiviteter, fordi de ikke i sig selv repræsenterer en læringsaktivitet, men de kan være elementer i en sådan, fx ved at stilladsere læring, fordi alt ikke nødvendigvis skal læres på samme tid i en bestemt aktivitet. Som nævnt ovenfor kan fx en statistisk beregning af en række deskriptorer i en given stikprøve være velvalgt i en større statistisk undersøgelse af formodede sammenhænge, som ellers ville kræve omfattende enkeltberegninger, der ville skygge for det egentlige mål med aktiviteten. Tilsvarende kan andre 'black box'-kommandoer som fx ligningsløsning, binomiale sandsynligheder, differentiation og integration repræsentere hensigtsmæssige valg i én problembehandlingssituation, mens eleverne i andre situationer skal kunne håndtere disse strategier ud fra kendskab til teorien bag. I forbindelse med introduktion af nyt fagligt stof og nye begreber kan det være en fordel at anvende 'black box'-aktiviteter til at synliggøre målet, mens den centrale begrebsindlæring og tilegnelse af nye problembehandlingsstrategier kræver 'white box'-aktivitet.

De matematiske værktøjsprogrammers dynamiske muligheder skal især udnyttes til, at eleverne selvstændigt går på opdagelse og eksperimenterer med begreber, repræsentationsformer, modellering og problembehandling, hvor de alene eller sammen med andre elever formulerer konklusioner på undersøgelserne. Eleverne skal derfor hurtigst muligt blive fortrolige med brug af de dynamiske muligheder, programmet tilbyder, fx at styre parametre med en skyder, trække i objekter, anvende spor og dataopsamling, samt i at fremstille simple simuleringer, fx i statistik, hvor simulering af terningekast er en god introduktion til faciliteter til håndtering af tilfældige udtræk (random-kommandoer). Elevernes fortrolighed med programmet vil efterhånden øges, og det vil blive et helt naturligt redskab, som de vil benytte til at formulere og undersøge påstande og belæg herfor, som senere kan påvises gennem et formelt matematisk ræsonnement.

3.4. Samspil med andre fag

Flere af læreplanens faglige mål involverer fagligt samspil svarende til 'altanerne' i modellen beskrevet i forordet, herunder følgende:

- *demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling*

- *demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling*
- *demonstrere viden om fagets metoder og identitet*

Og tilsvarende omfatter det faglige indhold under supplerende stof oplagte muligheder for fagligt samspil:

- *matematikhistoriske perspektiver på udvalgte emner*
- *inddragelse og diskussion af videnskabsteoretiske spørgsmål og matematiske metoder*

Når der arbejdes med læreplanens øvrige faglige indhold, opfyldes ovenstående løbende ved inddragelse af historiske aspekter, ved tydeliggørelse af, hvilke matematiske metoder der er i spil, og ved diskussion af matematikdisciplinens kendetegn samt inddragelse af problemstillinger fra andre fagområder etc.

En bredere forståelse for matematikkens metoder samt videnskabsteoretiske spørgsmål opnås dog nok først, når der samarbejdes med andre fag, hvor eleverne inddrager og anvender relevante matematiske metoder, og det bliver tydeligt, hvordan matematik adskiller sig fra andre fag.

I grundforløbet er det særligt naturvidenskabeligt grundforløb, samfundsfag og dansk, der kan indgå i faglige samspil med matematik, mens det i studieretningen er særligt vigtigt at inddrage studieretningens centrale fag i faglige samspil med matematik. I den lokale planlægning af både grundforløb og studieretningsforløb vil der formentlig være forskellige andre fag, der kan være naturlige samarbejdspartnere for matematik. Mindst ét af de tværfaglige forløb, som matematik indgår i, skal være med et centralt fag i studieretningen.

Stofudvælgelsen foretages gennem hele forløbet med øje for holdets muligheder for fagligt samspil. Valg af stof i grundforløbet skal således koordineres med naturvidenskabeligt grundforløb. Den lineære model er omdrejningspunktet for matematikundervisningen, og det er oplagt at arbejde med lineære modeller af naturvidenskabelige sammenhænge, herunder udføre lineær regression på data, som eleverne har produceret i naturvidenskabeligt grundforløb. Lineær regression er et emne, der behandles i både matematik og i naturvidenskabeligt grundforløb, og fagenes tilrettelæggelse bør derfor koordineres, så eleverne oplever sammenhæng. Tilsvarende kan der være andre kernestofemner, som er oplagte at behandle i faglige samarbejder eller parallellæsning. Desuden er det oplagt at inddrage eksempler på anvendelse af matematik hentet fra andre fag, som eleverne kender til og måske selv henleder opmærksomheden på.

For at forberede eleverne på SRP (hvad enten de påtænker at skrive SRP med eller uden matematik) bør der tilrettelægges aktiviteter, der giver eleverne mulighed for at kommunikere både skriftligt og mundtligt om deres tværfaglige arbejde, herunder redegøre for matematiske metoder i et sprog, som man også uden for faget kan forstå.

4. Evaluering

Evaluering er en central del af al undervisningspraksis, således også i matematikundervisningen i gymnasiet. Evaluering skal være et redskab for både lærer og elever til at gøre undervisning og læring mere motiverende og mere effektiv for den enkelte.

4.1. Løbende evaluering

Evaluering af elevernes faglige udbytte sker gennem løbende evaluering og feedback. Den løbende evaluering skal relatere sig til både elevens mundtlige og skriftlige niveau, og progression skal indtænkes i den løbende evaluering. Således bør formativ evaluering være dominerende i begyndelsen af et niveau, hvor der er fokus på, hvordan eleven kan forbedre sit faglige niveau, mens summativ evaluering bør være dominerende i slutningen af niveauet, bl.a. i form af terminsprøve og/eller prøveeksamen.

Evaluering af det mundtlige faglige niveau foregår via feedback på mundtlige præstationer som fx mundtlige fremlæggelser eller mundtlige svar på spørgsmål i undervisningen. Man kan fx også aftale særlige sekvenser i undervisningen, hvor læreren tydeligt evaluerer elevernes udtalelser i relation til matematisk notation og matematiske sprogbrug. I enhver kommunikation med eleverne i klassen i form af klassedialog, gruppearbejde, elevfremlæggelse mv., hvor eleverne kommer med faglige input, giver læreren passende feedback (niveausvarende) med henblik på brug af fagbegreber og faglig præcision med det for øje, at eleverne skal lære et nye sprog ('at tale matematiksk'). Nogle gange fx i form af forståelsesafprøvning mellem elev og lærer eller eleverne imellem, hvor eleverne gennem dialog kommer frem til korrekte svar eller mere præcise formuleringer og andre gange i form af konkret feedback eller bedømmelse af fx en elevfremlæggelse. I matematik er der oftest et korrekt svar eller en mere præcis formulering af et svar. Samtidig skal elevbidrag anerkendes og roses, så alle elever får mod på at deltage aktivt. Langt de fleste elevbidrag kan bruges positivt i vejen frem mod det størst mulige matematikfaglige udbytte, og matematikkens præcise sprogbrug bør hele tiden udvikles i elevernes dialog med hinanden og med læreren.

Indimellem tilrettelægges korte individuelle evalueringssamtaler. Evalueringssamtaler, der som oftest er af formativ karakter, kan fx afholdes i forbindelse med prøver, projektarbejde, mundtlige fremlæggelse eller andet selvstændigt arbejde. Det kan også være i forbindelse med afgivning af standpunktskarakterer, hvor man afholder samtalen, enten før eller efter eleverne har fået deres karakterer. Alternativt kan samtalen lægges ind midt mellem to karaktergivninger for at flytte fokus fra de konkrete karakterer til, hvilke matematikfaglige udviklingsmuligheder, eleven har. Selvevaluering kan danne grundlaget for samtalen, idet eleverne ofte har god og realistisk vurdering af deres niveau. Dette kan eventuelt foregå ved, at eleverne forud for en karaktergivning udfylder et spørgeskema, hvor de bliver bedt om at vurdere deres eget faglige niveau på en række punkter og derud fra selv komme med et bud på en karakter. SOLO-taksonomien kan med fordel være udgangspunktet for disse evalueringssamtaler.

Evaluering af elevernes skriftlige produkter bør gives på en række forskellige måder afhængig af, hvilken type skriftligt produkt der er tale om, og afhængig af, hvilket formål produktet har. Elevernes skriftlige produkter skal have mange forskellige udtryksformer såsom: svar på træningsopgaver eller eksamenslignende opgaver, projektrapporter, portfolio over lærerstyrede undervisningsforløb jf. afsnit 3.1, multiple choice-opgaver, formidlingsopgaver, videoer af matematiske aktiviteter (fx sætning-bevis, præsentation af matematisk teori, ræsonnement i modellering, simulering og opgaveløsning), disposition/ talepapir som støtte til mundtlig fremlæggelse, tværfaglige produkter mv.

Et skriftligt produkt har altid et eksplicit formål, som bør formuleres tydeligt for eleven. Når en lærer giver feedback på et elevprodukt, hvor det primære formål har været at dokumentere elevens faglige niveau, så vil feedbacken ofte være i form af en karakter eller anden summativ bedømmelse (fx ud fra SOLO-taksonomien). Det modsatte vil være tilfældet, når formålet med elevproduktet har været læring af ny matematik. Her er konkrete fremadskuende anvisninger mere effektive end en afsluttende bedømmelse.

I forbindelse med skriftligt arbejde skal det tydeliggøres, hvorvidt eleverne skriver for at lære eller for at dokumentere deres viden, og hvad et eventuelt bedømmelsesgrundlag omfatter. Feedback på skriftligt arbejde bør tænkes individuelt og differentieret, så den enkelte elev kan opnå optimal læring. Samtidig skal elevernes arbejde med skriftlige produkter anerkendes og roses, så alle elever får mod på at deltage aktivt i skriveprocesser. Den formative feedback bør være dominerende i en væsentlig del af undervisningen frem mod det afsluttende niveau. Elementer i formativ feedback er lærerens mundtlige feedback i timerne i arbejdet med matematiske aktiviteter af enhver art, dvs. både i arbejdet med teori og under opgaveregning, lærerens feedback på afleverede udkast til besvarelser (der efterfølgende skrives færdig af eleven), feedback med henblik på genaflevering m.m., og den kan struktureres på forskellig vis med brug af forskellige medier. Det væsentlige i formativ feedback er, at eleven modtager målrettet individuel vejledning til at forbedre sig fagligt, fx kan screencast være en effektiv feedbackform i en genafleveringsproces, fordi elever nødvendigvis må lytte vejledningen igennem og selv effektuere eventuelle rettelser og forbedringsforslag.

Meget tyder på, at de fleste elever lærer mest ved at få hjælp i skriveprocessen fremfor at få afsluttende kommentarer på et produkt. Læreren bør derfor som oftest tilrettelægge det skriftlige arbejde, så eleverne får feedback på flere stadier i deres udarbejdelse af et produkt. Det kan derfor være en god ide at give eleverne tid til at arbejde videre med lærerens anvisninger, når de får en aflevering tilbage, ligesom det kan være en god ide at starte ny skrivning i klassen, så læreren hele tiden er tæt på den enkelte elevs faglige progression. Nogle typer af skriftlige produkter kan med fordel tilrettelægges med en genaflevering, hvorved læreren også giver feedback undervejs i skriveprocessen. Det kan være en rapport, hvor læreren retter dele af en ufærdig rapport, fx enkelte sider eller afsnit, eller hvor læreren retter en rapport eller et udkast hertil med et bestemt rettefokus, fx præcis sprogbrug, korrekte matematiske metoder, opbygning af rapporten, korrekte resultater eller brug af figurer. Når eleverne afleverer den endelige rapport, retter læreren med et andet fokus, så der ikke bruges tid på at rette det samme to gange.

En metode til at fastholde både elev og lærer på elevens vej til at forbedre sit faglige niveau er at arbejde med et feedback-dokument, der løbende opdateres med oplysninger om, hvad eleven skal gøre for at forbedre sit faglige niveau. Et sådant dokument kan gøre det synligt for eleven, hvad vedkommende har lært og fremover skal lære for at løfte sit faglige niveau. For at effektivisere brugen af feedbackdokumentet kan der indføres krav om, at eleven selv i forbindelse med næste skriftlige aflevering formulerer fem punkter med afsæt i tidligere feedback, der danner udgangspunkt for lærerens rettefokus.

Tests kan anvendes som evaluering af både mundtligt og skriftligt niveau. Evaluering af mundtligt niveau kan fx ske gennem en test med åbne forståelsesrelaterede spørgsmål såsom ”Hvad forstås ved en tangent til en graf?”. Tests kan være korte seancer i starten eller slutningen af et modul, eller det kan være længerevarende tests. Korte tests er uformelle, ofte er eleverne uforberedte, og testene har et formativt sigte. Her kan forståelse fx testes via en multiple choice-test eller quiz om begrebsforståelse eller basale færdigheder knyttet til mindstekravene. Længerevarende tests på et helt modul vil typisk være forberedte og have et overvejende summativt sigte. Nogle tests vil læreren rette og bedømme, mens andre fx bedømmes af andre elever eller i fællesskab på klassen. Mindstekravsopgaver skal være et element i elevernes selvevaluering, og de kan være et hjælperedskab i lærerens evaluering af eleverne, når de indgår i fx tests, skriftlige afleveringsopgaver og projektrapporter.

Elevernes skriftlige og mundtlige arbejde kan også indgå som led i lærerens evaluering af egen undervisningspraksis. Er der eksempelvis faglige pointer, som store dele af en klasse ikke har fået fat i, bør man vende tilbage til dette ved en senere lejlighed, og man bør som lærer overveje, om der er andre måder at arbejde med lige netop dét stofområde.

Læreres fælles arbejde med udvikling af forløb og undervisningssekvenser (fx med inspiration fra japanske ”lesson studies”) kan være en måde at kvalitetssikre på, og man kan med fordel evaluere på disse ved at observere hinandens undervisning og efterfølgende kort diskutere forbedringsmuligheder. Denne måde at udvikle undervisningen på i fællesskab i matematikfaggruppen kan være meget givende på trods af det større tidsforbrug, der i perioder er nødvendigt.

Årsprøver

For at opnå en rimelig fleksibilitet i den øvrige eksamensafvikling i matematik kan skolen overveje at placere de omtalte mundtlige årsprøver i det tidsrum, hvor der afvikles afsluttende skriftlige prøver for 3g-eleverne.

stxB:

Af læreplanen for matematik på stx B-niveau fremgår det i afsnit 4.1 om løbende evaluering, at *”I det samlede forløb til B-niveau gennemføres efter første år en todelt mundtlig årsprøve, der tilrettelægges som den afsluttende mundtlige prøve jf. pkt. 4.2.”*

Det betyder, at eleverne efter første år på et 2-årigt forløb til matematik på stx B-niveau skal til en intern mundtlig prøve, som tilrettelægges efter de samme hovedprincipper, som den endelige mundtlige prøve på stx B-niveau. Prøveformen skal strukturelt være den samme, men prøven kan indskrænkes i tid, så den svarer til den tilsvarende mundtlige prøve i matematik på stx C-niveau, hvor der afsættes 90 minutter til gruppedelprøven og 20 minutters eksaminationstid (samt 20 minutters forberedelsestid) pr. elev til den individuelle prøve. Desuden kan man opjustere antallet af elever ved gruppedelprøven fra 10 til 14 således, at prøven på et sædvanligt hold med 28 elever kan afvikles over to dage, som eksemplet vist nedenfor.

Det centrale er, at eleverne skal opnå eksamenstræning i begge delprøver, herunder prøvestrukturen, som den afsluttende mundtlige prøve på stx B-niveau, hvor den enkelte elevs individuelle prøve følger efter elevens gruppedelprøve samme dag.

<table>
<tr><th colspan="5">Strukturplan for årsprøve matematik stx B-niveau</th></tr>
<tr><td colspan="5">Prøvetiden for gruppedelprøven = prøvetiden for gruppedelprøven på C-niveau
Prøvetiden for den individuelle delprøve = prøvetiden for den individuelle delprøve på C-niveau</td></tr>
<tr><td></td><td>Antal elever</td><td>Prøvetid</td><td>Forberedelsestid</td><td>Eksaminationstid</td></tr>
<tr><td>Gruppedelprøve</td><td>14</td><td>90</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Individuel prøve</td><td>14</td><td>40 minutter i alt pr elev</td><td>20</td><td>20</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
</table>

Tid 20/20	**Gruppedel**	**Forberedelse**	**Eksamination**
8.00-9.30	Alle elever		
9.30-9.40	Pause for alle elever		
9.40-10.00		Elev 1	
10.00-10.20		Elev 2	Elev 1
10.20-10.40		Elev 3	Elev 2
…	…	…	…

stxA:

Hvis årsprøven afholdes efter det første år skal det være en todelt skriftlig prøve, hvor der ved besvarelse af første delprøve ikke må benyttes andre hjælpemidler end en centralt udmeldt formelsamling, mens anden delprøve besvares med matematiske værktøjsprogrammer. Hvis prøven afholdes efter det andet år, så skal det være en mundtlig prøve, der tilrettelægges som den afsluttende mundtlige prøve jf. pkt. 4.2. Hvis der kun afholdes én årsprøve skal det være efter andet år."

Det betyder, at hvis skolen vælger, at eleverne på et 3-årigt hold til matematik på stx A-niveau som et led i deres eksamenstræning skal til årsprøve i matematik både efter 1g og efter 2g, så kan prøven efter 1g være skriftlig eller mundtlig, mens prøven efter 2g skal være en mundtlig prøve. Hvis skolen vælger, at eleverne kun skal til én årsprøve i matematik i det 3-årige forløb, så skal denne prøve være en mundtlig prøve efter det andet år. Eleven opnår således gennem årsprøven på andet år erfaringer med kravene forbundet med fagets mundtlige side, mens eleven gennem den skriftlig terminsprøve på tredje år opnår erfaringerne med kravene forbundet fagets skriftlige side. Prøven skal tilrettelægges efter de samme hovedprincipper, som den endelige mundtlige prøve på stx A-niveau. Prøveformen skal strukturelt være den samme, men prøven kan indskrænkes i tid, så den svarer til en mundtlig individuel prøve i matematik på stx B-niveau, hvor der afsættes 24 minutters eksaminationstid (samt 24 minutters forberedelsestid) pr. elev. Prøven kan således på et sædvanligt hold med 28 elever afvikles over to dage. Vælger skolen derudover at tilbyde eleverne på holdet en skriftlig intern prøve i matematik efter det første år, så tilrettelægges prøven todelt og skolen fastsætter selv tiden for hver af de to delprøver. Det anbefales, at de to delprøver vægtes ens i omfang.

For at sidestille en elev, der opgraderer fra matematik på B-niveau til matematik på A-niveau i 3g, med en elev, der har et samlet 3-årigt forløb til matematik på A-niveau, kan det overvejes at tilbyde opgraderingseleven (hvis der er plads i elevens eksamensplan) en mundtlig årsprøve efter samme form, som den prøve, de skal til, når de afslutter A-niveauet i 3.g.

4.2. Prøveform

Der afholdes en skriftlig prøve på B- og A-niveau samt en mundtlig prøve på alle tre niveauer.

Den skriftlige prøve

Nedenfor er indholdet og afviklingen af den skriftlige prøve på B-niveau henholdsvis A-niveau uddybet.

stxB:

Den skriftlige prøve er centralt stillet og består af to delprøver, hvor delprøve 1 varer 1½ time, og delprøve 2 varer 2½ time. Opgavesættet består i begge delprøver af opgaver stillet inden for kernestoffet.

For studieretninger med samfundsfag eller biologi på A-niveau vil flere af spørgsmålene i delprøve 2 tage udgangspunkt i en problemstilling knyttet til henholdsvis samfundsfag eller biologi, som eleverne skal anvende matematisk kernestof fra B-niveauet til at besvare. Opgaver med sådanne spørgsmål kaldes 'tonede opgaver'. Bemærk, at eksaminander på sproglige studieretninger og studieretninger med musik samt eksaminander, der tager matematik på B-niveau som valgfag (opgradering fra C-niveau), ikke får 'tonede opgaver' i deres opgavesæt. De får i stedet spørgsmål, der ikke forudsætter særligt kendskab til opgavens eventuelle kontekst. Der stilles således tre prøver i matematik B, stx: en 'normal' prøve, en prøve med 'biologitoning' og en prøve med 'samfundsfagstoning'. Disse 'tonede' prøver vil kun blive stillet ved sommer- og sygeterminerne, mens den 'normale' prøve også stilles ved vinterterminen.

stxA:

Den skriftlige prøve er centralt stillet og består af to delprøver, hvor delprøve 1 varer 2 timer, og delprøve 2 varer 3 timer. Desuden udsendes ca. 3 uger før prøven (sommerterminen) et forberedelsesmateriale, som eleverne selvstændigt under vejledning skal arbejde med i 6 timer, der afsættes af holdets samlede uddannelsestid. Materialet kan være en matematisk tekst, der uddyber eller perspektiverer et kernestofemne eller introducerer et helt nyt emne. Der kan heri indgå behandling af et større datamateriale. Opgavesættet består i begge delprøver af opgaver stillet inden for kernestoffet samt indhold og metoder fra forberedelsesmaterialet. Materialet vil danne grundlag for 10-15 procent af det samlede pointtal i et opgavesæt ved den skriftlige prøve.

Forberedelsesmaterialet er også gældende for den skriftlige eksamen ved de efterfølgende to prøveterminer, dvs. august (syge) og december (vinter) samme kalenderår.

Fælles retningslinjer for den skriftlige prøve på B- og A-niveau

Ved delprøve 1 er eneste tilladte hjælpemiddel den centralt udmeldte formelsamling (ren, dvs. uden tilføjelser) til det aktuelle matematikniveau. Ved delprøve 2 må eksaminanden benytte alle hjælpemidler (bortset fra kommunikation med omverdenen), og opgaverne til denne del af prøven vil i forskelligt omfang kræve, at eksaminanden behersker et matematisk værktøjsprogram, der lever op til beskrivelsen i læreplanens afsnit 3.3.

Eksaminanderne får adgang til begge delprøver ved prøvens start, men må først tage yderligere hjælpemidler frem, når tiden til delprøve 1 er udløbet, og alle eksaminander har afleveret deres besvarelser af delprøve 1.

Der kan i særlige tilfælde i enkelte opgaver forekomme emner og problemstillinger, der ikke direkte er beskrevet i kernestoffet, og i sådanne tilfælde vil grundlaget for besvarelsen klart fremgå af opgaveformuleringen. Det kan fx være tilfældet i forbindelse med opgaver, der omhandler matematisk modellering, hvor der kan optræde funktionsudtryk, som eksaminanderne forventes at kunne håndtere med brug af et matematisk værktøjsprogram med CAS.

Hovedparten af opgaverne i det samlede opgavesæt tager udgangspunkt i det aktuelle matematikniveau (B- hhv. A-niveau) med inddragelse af elementer fra stofområdets behandling på de(t) underliggende niveau(er) (C- hhv. C/B-niveau) og med en niveausvarende taksonomi. Fx kan inddragelse af en parameter i en given formel være med til at løfte opgaven fra et regneteknisk niveau til et ræsonnerende niveau. Der kan også forekomme opgaver, der tager direkte udgangspunkt i stof hørende til de(t) underliggende niveau(er) (C- hhv. C/B-niveau), hvor problemstillingen dog er af en sådan karakter, at det kræver et abstraktionsniveau hørende til det aktuelle matematikniveau (B- hhv. A-niveau).

En del af opgaverne i hver af de to delprøver indeholder tydeligt markerede spørgsmål, der er knyttet til afprøvning af mindstekravene på det aktuelle niveau (jf. afsnit 2.2). De markerede mindstekravsspørgsmål dækker tilsammen ca. 125% af det pointtal, der i det forelagte opgavesæt kræves for at opnå karakteren 02. Opgaverne involverer forskellige typer af mindstekravskategorier, der tilsammen beskriver det netop acceptable faglige niveau ved den aktuelle prøve i det forelagte opgavesæt.

Brug af formuleringer som 'løs ligningen', 'bestem nulpunkter' eller 'bestem skæringspunkter mellem to grafer' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Hvis der er krav om en bestemt løsningsmetode, så vil det fremgå af opgaveformuleringen. I delprøve 1 begrænses svarmulighederne naturligt af, at elevernes eneste hjælpemiddel er en formelsamling. I delprøve 2 skelnes der mellem 'beregning' og 'aflæsning'. I delprøve 2 betyder en formulering som 'Bestem ved beregning…' eller 'Beregn…', at et korrekt svar skal baseres på en algebraisk beregning med et formeludtryk i kombination med en CAS-kommando (fx 'solve'), mens formuleringen 'Bestem ved aflæsning…' eller "Aflæs…" betyder, at et korrekt svar skal baseres på en præcis aflæsning med en dertil indbygget kommando på en grafisk eller en geometrisk repræsentation frembragt i et matematisk værktøjsprogram. I alle andre opgaver vil der være frit valg med hensyn til metode. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i styrker og svagheder ved forskellige løsningsstrategier med og uden matematiske værktøjsprogrammer, herunder symbolske, numeriske og grafiske metoder til løsning af ligninger og andre matematiske problemer. Det forventes desuden, at eleverne opnår indsigt i, hvorledes man i opgaver, hvor det er relevant, kan argumentere ved hjælp af den afledede funktion. Formålet er, at eleverne bliver i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden ved en given løsningsmetode samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl, fx i de tilfælde, hvor eksaminandens matematiske værktøjsprogram giver et uventet svar.

Det forventes, at eksaminanderne kan opstille modeller ved regression, men det forventes ikke, at de kan begrunde én bestemt model frem for andre.

Ordene 'skitse' og 'tegn' bruges forskelligt. Hvilke detaljer, der bør medtages i en 'skitse', afhænger af det konkrete spørgsmål, og det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at afkode, hvilke oplysninger der er nødvendige at medtage i den aktuelle situation. Når der bliver bedt om en tegning af en graf, et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation, så forventes eleverne at medtage de karakteristiske egenskaber ved de objekter, der indgår, herunder hensigtsmæssigt grafvindue og størrelsesforhold.

Når der i en opgave omhandlende geometrisk modellering indgår, at en geometrisk figur på passende vis skal indlægges (indtegnes) i et koordinatsystem, så skal de mål, der er oplyst, anvendes med en sådan præcision at koordinatsættene til relevante punkter i modellen kan aflæses og anvendes i de videre beregninger i relation til modellen.

Hvis der i en opgave stilles krav om, at en graf for en funktion skal tegnes i et bestemt udsnit af koordinatsystemet, så vil det ønskede grafvindue være angivet som et interval for hver af de variable eller på mængdeproduktform $[-10;10]\times[-10;10]$.

Et ekstremumspunkt angives som et punkt i det todimensionale koordinatsystem repræsenteret ved begge koordinater. Førstekoordinaten repræsenterer ekstremumsstedet (maksimums- eller minimumssted), mens andenkoordinaten repræsenterer funktionens ekstremum (maksimum eller minimum). Tilsvarende angives et stationært punkt for en funktion af to variable på A-niveau som et punkt i det tredimensionale koordinatsystem repræsenteret ved alle tre koordinater. Denne overinformerede form er valgt, fordi emnet blandt andet skal give eleverne indsigt i repræsentation af objekter i det tredimensionale koordinatsystem. Første- og andenkoordinaterne repræsenterer det stationære punkt i funktionens definitionsmængde, mens tredjekoordinater repræsenterer det stationære punkt i funktionens værdimængde, og i tilfælde af ekstrema repræsenterer første-og andenkoordinaten ekstremumsstedet (maksimums- eller minimumssted), mens tredjekoordinaten repræsenterer funktionens ekstremum (maksimum eller minimum).

Der kan forekomme bilag til opgavesættet i form af regneark med data, som eksaminanderne forventes at kunne importere til videre bearbejdning i deres eget matematiske værktøjsprogram. Der anvendes som standard dansk decimalkomma (fx 1,53 og ikke 1.53), og det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at importere data i forskellige formater.

I særlige tilfælde, hvor det danske komma vil give anledning til misforståelser, som fx ved angivelse af koordinater, vil der optræde decimalpunktum. Tilsvarende hvis en autentisk kilde el. lign. benytter decimalpunktum, så vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen i opgavesættet.

De vejledende opgavesæt og de stillede prøvesæt illustrerer dels omfang og opbygning af opgavesæt, dels hvorledes den konkrete udformning af forskellige spørgsmål kan være, herunder hvordan 'spor' hentet fra niveauets kernestof indgår i opgaver i anden delprøve ('spor' kan ikke forekomme i første delprøve). De stillede opgavesæt er dog ikke definerende for det pågældende niveau. Alle prøvesæt (inkl. de vejledende) findes på Materialeplatformen.

Den mundtlige prøve

Nedenfor er indholdet og afviklingen af den mundtlige prøve på C-niveau, B-niveau henholdsvis A-niveau uddybet.

Den mundtlige prøve på stxC og stxB

Den mundtlige prøve er todelt. Delprøve 1 er en gruppeprøve, mens delprøve 2 er en individuel prøve.

Eksaminator sender forud for prøven en fortegnelse over problemstillinger og spørgsmål, der skal anvendes ved hver af de to delprøver, til censor. Desuden skal censor have adgang til en oversigt over samtlige undervisningsforløb, herunder en fortegnelse over produkter knyttet til projektforløb og styrede læringsforløb, der tilsammen udgør eksamensgrundlaget.

I de to delprøver testes hovedsageligt forskellige matematiske kompetencer, og der er derfor ingen krav om, at eksaminanderne ikke må trække samme emne ved hver af de to delprøver.

Delprøve 1: Gruppedelprøven på stxC og stxB

Gruppedelprøven er en problemorienteret prøve med ukendte problemstillinger, hvor der er fokus på matematikkens anvendelser, herunder eksaminandernes modellerings- og problembehandlingskompetence. De ukendte problemstillinger skal tilsammen dække de faglige mål, kernestoffet og supplerende stof.

De enkelte problemstillinger skal tage udgangspunkt i de gennemgåede faglige emner og må ikke introducere matematisk teori, der er ny for eleverne. Samtidigt må de konkrete formuleringer af problemstillinger med delspørgsmål ikke på forhånd være kendt af eleverne. Problemstillingerne skal så vidt muligt være ækvivalente med henblik på omfang og sværhedsgrad.

Problemstillingernes overskrift skal angive de(t) overordnede emne(r) (samt evt. en titel, der beskriver et problem, en 'sag' eller en kompetence) for eksaminationen, og de efterfølgende delspørgsmål skal være udformet med progression i sværhedsgrad således, at der indledes med konkrete 'kom-i-gang'-spørgsmål. Her kan SOLO-taksonomien (jf. afsnit 3.2) være en god støtte for den konkrete udformning af de enkelte delspørgsmål.

Delspørgsmålene kan fx samles i sammenhængende sekvenser af delspørgsmål ('bølger') således, at der inden for hver sekvens af delspørgsmål er stigende sværhedsgrad. Dette vil give eksaminanderne mulighed for at springe mellem sekvenserne af delspørgsmål uden at bearbejde én sekvens helt i bund først, idet de så kan arbejde med de delspørgsmål inden for hver sekvens, som er af en passende sværhedsgrad for netop dem. Det skal samtidigt gøres klart for eksaminanderne, at ikke alle delspørgsmål behøver blive besvaret. Fx skal en gruppe, der selv finder på matematisk relevante undersøgelser af den udtrukne problemstilling, have plads til at følge op på disse. Der bør være tilstrækkeligt mange delspørgsmål af forskellig karakter (lukkede, halvåbne og åbne spørgsmål) til, at der er stof nok til alle eksaminander inden for den tid, der er til rådighed. Hensigten med spørgsmål i taksonomiske sekvenser er både at sikre, at alle eksaminander får mulighed for at forklare sig på alle taksonomiske niveauer, og at gøre det nemt for eleverne at udvælge stof på et passende taksonomisk niveau, som de vil præsentere, når lærer og censor kommer på besøg.

Delspørgsmålene kan dels formuleres med krav om en bestemt løsningsmetode, dels uden, idet der i vurderingen i disse tilfælde kan lægges vægt på, om eksaminandernes valg af løsningsmetode er hensigtsmæssig i den givne situation. Desuden bør delspørgsmålene inden for hver sekvens formuleres ud fra et progressionsprincip om at gå fra konkrete lukkede delspørgsmål med præcise krav til åbne delspørgsmål, hvor det er overladt til eksaminanderne selv at overveje og finde en egnet løsningstrategi.

Tildeling af problemstillinger til eksaminanderne (grupperne) foregår ved lodtrækning. Der skal være så mange problemstillinger, at sidste gruppe af eksaminander har mindst 4 problemstillinger at trække i blandt. Derudover er der ikke nogen grænse for hvor få eller hvor mange problemstillinger, der skal være, men normalt formuleres til et hold på 28 elever, der er opdelt i par, 17 forskellige problemstillinger. Alle problemstillinger skal være lagt frem ved eksaminationens start, og ingen af problemstillingerne må gå igen. Alle eksaminander skal deltage i hele eksaminationstiden, og alle elever skal sidde i samme lokale, så lærer og censor har overblik over alle grupper.

Eksaminanderne arbejder parvist (undtagelsesvist enkeltvis eller i grupper af tre) med hver deres ukendte problemstilling, som trækkes ved prøvens start. Eksaminationstiden for gruppedelprøven er 90 minutter på C-niveau og 120 minutter på B-niveau, og der må højst eksamineres 10 eksaminander samtidigt. Prøven organiseres normalt således, at gruppedelprøven og den individuelle prøve afvikles samme dag for alle 10 eksaminander. Hver eksaminand skal under gruppedelprøven bære tydeligt navneskilt, hvoraf også gruppenummeret fremgår.

Under prøven cirkulerer eksaminator og censor mellem grupperne og samtaler med eksaminanderne om deres konkrete behandling af problemstillingerne, herunder den aktuelt anvendte matematiske teori og de konkret anvendte modellerings- og problembehandlingsstrategier. Det er eksaminandernes eget ansvar at gøre interessante dele af deres arbejde klar til fremvisning, når eksaminator og censor med passende mellemrum aflægger gruppen besøg. Eksaminator og censor stiller opklarende og udfordrende spørgsmål til eksaminanderne både gruppevist og enkeltvist (med navns nævnelse). Det er eksaminators ansvar, at grupperne hele tiden har stof at arbejde med.

Undervejs, efter besøg i de enkelte grupper, noterer eksaminator og censor centrale observationer, som kan anvendes i bedømmelsen af den enkelte eksaminands matematiske præstation med henblik på viden, færdigheder og kompetencer (jf. afsnit 4.3).

På emu.dk findes eksempler på problemstillinger til begge niveauer.

I tilfælde af eksamen med kun en elev, som fx sygeeksamen, afvikles prøven som beskrevet ovenfor, men med en lidt mere pragmatisk tilgang i forhold til tidsaspektet i gruppedelprøven. I udgangspunktet afholdes hele prøvetiden til gruppedelprøven, men i praksis afvejes situationen undervejs og prøvetiden kan på passende vis afkortes, under forudsætning af elevens accept, når eksaminator og censor har indsamlet tilstrækkeligt belæg for at sikre en korrekt bedømmelse af elevens samlede præstation efter afslutning af den individuelle prøve, der gennemføres som beskrevet ovenfor med sædvanlig forberedelses- og eksaminationstid.

Delprøve 2: Den individuelle prøve på stxC og stxB

Delprøve 2 er en individuel prøve med fokus på eksaminandens evne til på selvstændig vis at gennemføre matematiske ræsonnementer, herunder bevisførelse, og indgå i en faglig samtale på baggrund af et udtrukket, men kendt, spørgsmål. Eksaminationstiden er på C-niveau ca. 20 minutter og på B-niveau ca. 24 minutter pr. eksaminand, og forud herfor har eksaminanden på C-niveau ca. 20 minutters forberedelsestid og eksaminanden på B-niveau ca. 24 minutters forberedelsestid.

Prøven består dels af eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne spørgsmål, og dels af en uddybende faglig samtale med eksaminator (og eventuelt censor) med udgangspunkt i det overordnede emne for spørgsmålet. Fordelingen mellem de to faser er ikke præcist fastsat, men som rettesnor påbegyndes den faglige samtale senest, når halvdelen af eksaminationstiden er gået. Udformningen af spørgsmålene beskrives nedenfor.

Den mundtlige prøve på stxA

Censor skal forud for prøven have adgang til de spørgsmål og ukendte bilag, der skal anvendes. Desuden skal censor have adgang til en oversigt over samtlige undervisningsforløb, herunder projektforløb og styrede læringsforløb, der tilsammen udgør eksamensgrundlaget.

Den mundtlige prøve er en individuel prøve med fokus på eksaminandens evne til på selvstændig vis at gennemføre matematiske ræsonnementer, herunder bevisførelse, og indgå i en faglig samtale på baggrund af et udtrukket, men kendt, spørgsmål. Eksaminationstiden er ca. 30 minutter pr. eksaminand, og forud herfor har eksaminanden ca. 30 minutters forberedelsestid.

Prøven består dels af eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne spørgsmål, og dels af en uddybende faglig samtale med udgangspunkt i det ukendte bilag samt det overordnede emne for spørgsmålet. Fordelingen mellem de to faser er ikke præcist fastsat, men som rettesnor påbegyndes den faglige samtale senest, når halvdelen af eksaminationstiden er gået.

De ukendte bilag skal perspektivere spørgsmålet gennem billeder, figurer, grafer, tabeller, formler, kort overskuelig tekst og lignende. Bilag kan også være fysiske genstande, fx 3D-print. Bilaget udleveres under eksaminationen, når den faglige samtale i anden del af eksaminationen begynder. Bilagets inddrages derefter i den faglige samtale. Eleverne skal være bekendt med, hvordan de ukendte bilag kan se ud, og hvordan man kan inddrage disse i en samtale, men de aktuelle bilag må ikke være kendte for eleverne forud for eksamen.

Fælles retningslinjer for den mundtlige individuelle prøve på C- og B-niveau samt den mundtlige prøve på A-niveau

De endelige spørgsmål til den (på C- og B-niveau individuelle) mundtlige prøve skal offentliggøres i god tid, mens der fortsat er undervisning og senest 10 dage før prøven således, at eventuelle uklarheder kan ryddes af vejen inden prøven. Spørgsmålene skal tilsammen dække de faglige mål, kernestof og supplerende stof. Spørgsmålene skal udformes med en overskrift og et eller flere konkrete delspørgsmål, som dog hverken må indeholde en disposition for eksaminationens forløb eller stikord til samtaledelen, og der skal levnes plads til, at eleven selv kan udvælge og disponere stoffet. Samtlige faglige emner skal dækkes af eksamensspørgsmålene, men enkelte knapt så vellykkede undervisningsforløb kan fravælges. Overskriften danner rammen for den faglige samtale, mens de konkrete delspørgsmål skal besvares gennem eksaminandens præsentation, som i udgangspunktet skal være selvstændig. Spørgsmålene må gerne inddrage stof fra flere 'søjler' og tage udgangspunkt i et projekt, der repræsenterer en 'bro'. Spørgsmålene må også gerne tage udgangspunkt i en overordnet kompetence eller en mindstekravskategori, der indgår i flere faglige stofområder.

Tildeling af spørgsmål til eksaminanderne ved den individuelle prøve foregår ved lodtrækning. Der skal være så mange spørgsmål, at sidste eksaminand har mindst 4 spørgsmål at vælge mellem. Derudover er der ikke nogen grænse for, hvor få eller hvor mange spørgsmål, der skal være, men normalt formuleres til et hold på 28 elever 16 forskellige spørgsmål, som alle går igen to gange. For meget store hold (>40) kan spørgsmålene undtagelsesvist gå igen tre gange. Alle spørgsmål skal være lagt frem ved eksaminationens start. De endelige spørgsmål, som så vidt muligt skal være ækvivalente i omfang og sværhedsgrad, skal før offentliggørelsen drøftes med eleverne, så det er klart for dem præcist, hvilke krav en given formulering dækker over. Det enkelte spørgsmål skal være så præcist formuleret, at der ikke kan være tvivl om, hvilket emne (stofområde eller kompetence) der ligger til grund for eksaminationen, og så det er klart, hvornår et spørgsmål er fuldt besvaret. Stofområderne vælges med udgangspunkt i det aktuelle matematikniveau. For ethvert spørgsmål gælder, at en fuld besvarelse udløser den højeste karakter (når eleven samtidigt præsterer på samme høje niveau i samtaledelen og på C- og B-niveau i gruppedelprøven). Derfor skal ethvert spørgsmål formuleres i termer svarende til det højeste taksonomiske niveau, man kan forvente af en elev på henholdsvis C-, B- og A-niveau. Igen kan SOLO-taksonomien (jf. afsnit 3.2) være en god hjælp i den konkrete udformning af de enkelte spørgsmål. Ord som ”fortæl om” eller lignende, der ikke er klare i sin kravsspecifikation, bør undgås. Tilsvarende bør udtryk som ”du kan eventuelt komme ind på...” eller ”hvis, der er tid, kan du...” undgås, fordi de skaber usikkerhed om, hvornår et spørgsmål er fuldt besvaret. Eksaminanderne må benytte alle hjælpemidler, herunder egne noter, ved både forberedelse og eksamination.

Beder man om en *redegørelse* for en given påstand, så svarer det i matematik til det højeste taksonomiske niveau, forstået på den måde, at kravet til eksaminanden vil være en gennemgang af et bestemt bevis eller en udledning af et bestemt udtryk gennem en logisk følge af matematiske ræsonnementer. Ordet er således ækvivalent med ord som ”bevis” eller ”udled”. Beder man om en *forklaring* på, hvad en given påstand går ud på, så er kravet på et lavere taksonomisk niveau, og en fuld besvarelse vil ikke kræve, at eksaminanden beviser eller udleder noget, men i stedet at eksaminanden fx forklarer, hvilken mening påstanden giver, og hvor den finder anvendelse.

Den faglige samtale kan tage udgangspunkt i elementer fra eksaminandens egen præsentation, som fx giver eksaminanden mulighed for at demonstrere kendskab til, hvilke typer af problemer teorien kan anvendes til at besvare (fx ved opstilling af modeller), at inddrage et historisk perspektiv eller at vise overblik over hele det faglige område. Under samtalen kan eksaminanden ikke afkræves bevistunge eller meget detaljerede redegørelser. Under hele eksaminationen er det eksaminators opgave, at sikre, at såvel fortrin som mangler ved eksaminandens præstation, træder tydeligt frem.

Eksaminanden må under sin præsentation gerne støtte sig til egne notater, som samtidigt skal være tilgængelige for eksaminator og censor. Normalt foregår eksaminationen ved tavle og/eller computer (fx eksperimenter og simuleringer), hvor eksaminanden ’fører pennen’ og har sine notater i nærheden, så disse let kan konsulteres af alle tre parter undervejs i eksaminationen. Det skal pointeres, at ren oplæsning eller afskrift af egne eller andres materialer på ingen måde kan tælle positivt i bedømmelsen. Det er en del af undervisningen, at eleverne arbejder med at frigøre sig fra eventuelle notater og lignende under en mundtlig præsentation af et fagligt stof.

På emu.dk findes eksempler på spørgsmål til den individuelle prøve på alle tre niveauer.

Regler vedrørende eksaminandernes brug af internettet for at tilgå tilladte hjælpemidler ved prøverne fremgår af § 6 i ”Bekendtgørelse om visse regler om prøver og eksamen i de gymnasiale uddannelser”. I vejledningen til denne bekendtgørelse er der givet eksempler på, hvilke hjælpemidler der må, og hvilke der ikke må tilgås via internettet.

4.3. Bedømmelseskriterier

Bedømmelsen er knyttet til de faglige mål, som grundlæggende karakteriserer det pågældende niveau. Bedømmelsen er altid en vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de relevante faglige mål (jf. afsnit 2.1).

I både den skriftlige og den mundtlige prøve gives der én karakter ud fra en helhedsbedømmelse.

Når der afgives karakterer, er det vigtigt at kende karakterbekendtgørelsens bestemmelser og beskrivelser af de enkelte karakterer. Karakteren er ét tal og ikke en udtalelse, og karakterskalaen består kun af ganske få tal. Derfor vil den enkelte karakter altid rumme en vis kompleksitet. I bilag 1 er det på skematisk form beskrevet, hvorledes 7-trinsskalens terminologi kan knyttes sammen med de faglige mål for henholdsvis skriftlig og mundtlig matematik på det aktuelle niveau for karaktererne 02, 7 og 12.

Bedømmelse: Den skriftlige prøve på stxB og stxA

Vægtningen af hver af de to delprøver i det todelte centralt stillede opgavesæt svarer til forholdet mellem det samlede pointtal, der kan opnås, i hver af de to delprøver. I ekstreme tilfælde, hvor en eksaminand præsterer højt niveau i den ene delprøve og intet eller meget lavt niveau i den anden delprøve, vurderes, hvorvidt eksaminandens præstation på det foreliggende grundlag lever op til de faglige mål, hvor der indgår både færdigheder og kompetencer dels uden og dels med brug af et matematisk værktøjsprogram.

Vægtningen af de enkelte opgaver i hver af de to delprøver fremgår af opgavesættet. Hver opgave indeholder ét eller flere spørgsmål. Et spørgsmål kan indeholde delspørgsmål.

En fuld besvarelse af ca. 80% af samtlige mindstekravsopgaver i et opgavesæt resulterer i karakteren 02. Besvarer eksaminanden yderligere andre opgaver i opgavesættet korrekt, tæller disse besvarelser positivt med frem mod en højere karakter. En eksaminand kan også opnå karakteren 02 ved korrekt besvarelse af tilfældigt udvalgte opgaver, der tilsammen indgår med samme vægt som ca. 80% af mindstekravsopgaverne i opgavesættet.

Bedømmelsen af eksaminandens samlede besvarelse af den skriftlige prøve tager udgangspunkt i en overordnet vurdering af besvarelsen som helhed, hvor der lægges særlig vægt på matematisk korrekthed, men også på om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.

Der lægges særlig vægt på, om eksaminanden:

- mestrer mindstekravene, dvs. de grundlæggende matematiske færdigheder og kompetencer med og uden matematiske værktøjsprogrammer.
- kan håndtere matematisk symbolsprog og operere med matematiske begreber.
- kan anvende matematisk teori og matematiske metoder til modellering og løsning af forelagte problemer.
- kan redegøre for forelagte matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde og inddrage relevante usikkerhedsbetragtninger.
- kan præsentere en løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde.
- behersker matematiske værktøjsprogrammer til bearbejdning af forelagte matematiske problemer.

Kravene til helhedsindtrykket ved besvarelse af opgaver i delprøve 1 og delprøve 2 er lidt forskellige, idet fx angivelse af mellemregninger giver god mening i besvarelse af opgaver i delprøve 1, men sjældent i besvarelser af opgaver i delprøve 2 med brug af matematiske værktøjsprogrammer, hvor der i stedet er krav om, at eksaminanden dokumenterer sine matematiske overvejelser i brugen af programmets faciliteter. Til gengæld er der behov for forklaringer og henvisninger til diverse grafer og figurer i besvarelser af opgaver ved begge delprøver.

Ved bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelse af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger *eller* matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.
- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.
- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke kan henføres til standardviden, skal der redegøres for betydningen.
- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.
  Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentationen af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Specielt med henblik på kategorien formidling og forklaring bemærkes, at ordet ”parametre” omfatter både de variable og konstanterne i en model. Formuleringer som ”Indfør passende variable…” betyder, at eleven skal vælge variabelbetegnelser og forklare, hvad hver af de variable beskriver i den aktuelle kontekst. Formuleringer som ”Gør rede for, hvad tallene fortæller om…” hentyder til, at eleverne skal forklare, hvad modellens konstanter betyder i den aktuelle kontekst. I modelleringsopgaver, hvor eleverne fx bliver bedt om at præsentere et punktplot, residualplot eller en graf, er er der ikke krav om en konklusion.

I besvarelsesprocessen kan det være hensigtsmæssigt for nogle elever at kopiere opgaveformuleringer fra den digitale version af opgavesættet ind i besvarelsen, som typisk udfærdiges i et matematisk værktøjsprogram. Det anbefales dog, at eleverne uddrager den nødvendige information for besvarelse af opgaven (og derefter eventuelt sletter udklippet), så det sikres, at opgavebesvarelsen fremstår som en helhed, og elevens tankegang fremgår klart.

Bedømmelse: Den mundtlige prøve på stxC, stxB og stxA

Ved den mundtlige gruppedelprøve på C- og B-niveau lægges særlig vægt på, om eksaminanden:

- kan anvende matematisk teori og matematiske værktøjsprogrammer til at undersøge og analysere en konkret matematisk problemstilling.
- kan diskutere, vurdere og anvende hensigtsmæssige matematiske metoder til modellering og problembehandling.
- kort og præcist kan præsentere en fremgangsmåde til løsning af et konkret matematisk problem.
- har overblik over og kan perspektivere en matematisk problemstilling.
- kan reflektere over matematikkens anvendelser både faginternt og fageksternt.

Ved den mundtlige individuelle delprøve på C-, B- og A-niveau lægges særlig vægt på, om eksaminanden:

- kan præsentere et konkret afgrænset matematisk emne på en klar og overskuelig måde.
- demonstrere indsigt i matematisk teori og karakteristiske sider af matematisk ræsonnement og bevisførelse.
- kan håndtere matematisk symbolsprog og operere med matematiske begreber.
- kan med eksperimenterende metoder og en logisk følge af matematiske ræsonnementer argumentere for en matematisk påstand og/eller opstille en matematisk model.
- har overblik over og kan perspektivere et konkret afgrænset matematisk emne.

Karakteren for præstationen ved den mundtlige prøve på C- og B-niveau er en helhedsvurdering, og den kan ikke fastsættes som et gennemsnit af to delkarakterer for hver af de to delprøver. Ved bedømmelse af eksaminandens samlede præstation skal eksaminandens matematiske færdigheder og kompetencer ved begge delprøver afvejes i overensstemmelse med bedømmelseskriterierne for at nå frem til helhedsvurderingen. I ekstreme tilfælde, hvor en eksaminand præsterer højt niveau i den ene delprøve og intet eller meget lavt niveau i den anden delprøve, vurderes, hvorvidt eksaminandens samlede præstation på det foreliggende grundlag lever op til de faglige mål, hvor der indgår dels modellerings- og problembehandlingskompetence, dels ræsonnementskompetence.

Bilag 1: Karakterbeskrivelser

Oversigt over karakterskalaen

12	Fremragende	Karakteren 12 gives for den fremragende præstation, der demonstrerer udtømmende opfyldelse af fagets mål, med ingen eller få uvæsentlige mangler.
7	God	Karakteren 7 gives for den gode præstation, der demonstrerer opfyldelse af fagets mål, med en del mangler.
02	Tilstrækkelig	Karakteren 02 gives for den tilstrækkelige præstation, der demonstrerer den minimalt acceptable grad af opfyldelse af fagets mål.

Karakterbeskrivelser: *Mundtlige besvarelser på C-niveau*

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgsmål/problemstilling.

Eksaminanden...	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan håndtere og diskutere rækkevidde af simple matematiske modeller. - kan præsentere en fremgangsmåde ved behandling af et simpelt matematisk problem på en klar og overskuelig måde. - kan gennemføre simple matematiske ræsonnementer.	- kan anvende simple matematiske modeller. - kan præsentere de vigtigste trin i behandling af et simpelt matematisk problem. - kan indgå i en faglig dialog om simple matematiske ræsonnementer.	- kan, med en del usikkerhed, indgå i en faglig dialog om simple matematiske modeller. - demonstrerer i en samtale kendskab til fremgangsmåden i behandlingen af et simpelt matematisk problem.
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan fremlægge velstruktureret og udtrykke sig klart med sikker anvendelse af matematisk symbolsprog.	- kan fremlægge sammenhængende med et godt kendskab til matematiske symboler.	- kan anvende simple matematiske formler, men fremlægger noget usammenhængende og med usikker brug af matematiske symboler.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- demonstrerer overblik over et område af matematik eller viden om et område, hvor matematik anvendes.	- demonstrerer viden om et område af matematik, eller viden om simple anvendelser af matematik.	- demonstrerer i en samtale kendskab til et område af matematik eller til simple anvendelser af matematik.

Karakterbeskrivelser: *Skriftlige besvarelser på B-niveau*

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende prøvesæt.

Eksaminanden…	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan redegøre for og anvende modeller og reflektere over prognoser og rækkevidde. - vælger og anvender med stor sikkerhed hensigtsmæssige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer viden om anvendelse af matematiske modeller. - demonstrerer viden om vigtige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer elementært kendskab til simple matematiske modeller. - demonstrerer nogen kendskab til fremgangsmåder i behandlingen af simple matematiske problemer.
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan udforme en veldisponeret besvarelse med en sikker brug af figurer og symbolsprog, og hvor tankegangen fremgår klart	- kan udforme en opgavebesvarelse med god sammenhæng inden for de enkelte spørgsmål og med en god brug af figurer og symbolsprog	- kan anvende simple formler, men udformer en noget usammenhængende besvarelse med en beskeden inddragelse af figurer og en noget upræcis anvendelse af symboler.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- er i stand til at bruge matematiske værktøjsprogrammer hensigtsmæssigt. - demonstrerer viden og færdigheder på stort set alle felter med kun uvæsentlige mangler	- er i stand til at bruge matematiske værktøjsprogrammer hensigtsmæssigt i de fleste sammenhænge. - demonstrerer viden om og gode færdigheder inden for adskillige felter	- kan anvende matematiske værktøjsprogrammer i løsning af simple opgavetyper. - demonstrerer elementær viden og elementære færdigheder inden for flere felter

Karakterbeskrivelser: *Mundtlige besvarelser på B-niveau.*

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgsmål/problemstilling.

Eksaminanden…	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling. - kan forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modeller. - demonstrerer indsigt i matematisk ræsonnement og teori	- kan redegøre for karakteristiske træk ved foreliggende matematiske modeller og diskutere rækkevidde af disse. - kan præsentere de vigtigste trin i behandling af et simpelt matematisk problem. - kan gennemføre hovedlinjerne i et simpelt matematisk ræsonnement	- kan, med en del usikkerhed, indgå i en faglig dialog om simple matematiske modeller. - demonstrerer i en samtale kendskab til fremgangsmåden i behandlingen af et simpelt matematisk problem. - demonstrerer i en samtale kendskab til enkelte aspekter i et simpelt matematisk ræsonnement
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan fremlægge velstruktureret og udtrykke sig klart med sikker anvendelse af matematisk terminologi.	- kan fremlægge sammenhængende med et godt kendskab til matematisk terminologi	- kan anvende simple matematiske formler, men fremlægger noget usammenhængende og mangler præcision i matematisk terminologi.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- demonstrerer overblik over et område af matematik eller viden om et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag.	- demonstrerer viden om et område af matematik, eller viden om simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag.	- demonstrerer i en samtale kendskab til et område af matematik eller til simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag.

Karakterbeskrivelser: *Skriftlige besvarelser på A-niveau*

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende prøvesæt.

Eksaminanden…	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan opstille og tolke modeller og reflektere over prognoser og rækkevidde. - vælger og anvender med stor sikkerhed hensigtsmæssige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer viden om opstilling og tolkning af matematiske modeller. - demonstrerer viden om vigtige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer elementært kendskab til simple matematiske modeller. - demonstrerer nogen kendskab til fremgangsmåder i behandlingen af simple matematiske problemer.
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan udforme en veldisponeret besvarelse med en sikker brug af figurer og symbolsprog, og hvor tankegangen fremgår klart	- kan udforme en opgavebesvarelse med god sammenhæng inden for de enkelte spørgsmål og med en god brug af figurer og symbolsprog	- kan anvende simple formler, men udformer en noget usammenhængende besvarelse med en beskeden inddragelse af figurer og en noget upræcis anvendelse af symboler.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- er i stand til at bruge matematiske værktøjsprogrammer hensigtsmæssigt. - demonstrerer viden og færdigheder på stort set alle felter med kun uvæsentlige mangler	- er i stand til at bruge matematiske værktøjsprogrammer hensigtsmæssigt i de fleste sammenhænge. - demonstrerer viden om og gode færdigheder inden for adskillige felter	- kan anvende matematiske værktøjsprogrammer i løsning af simple opgavetyper. - demonstrerer elementær viden og elementære færdigheder inden for flere felter

Karakterbeskrivelser: *Mundtlige besvarelser på A-niveau.*

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgsmål.

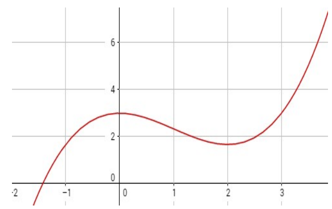
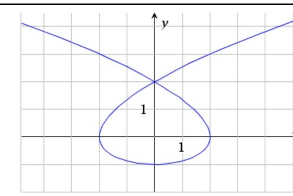
Eksaminanden…	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling. - kan forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modeller. - demonstrerer indsigt i matematisk ræsonnement og teoribygning.	- kan redegøre for karakteristiske træk ved foreliggende matematiske modeller og diskutere rækkevidde af disse. - kan præsentere de vigtigste trin i behandling af et foreliggende matematisk problem. - kan gennemføre hovedlinjerne i et matematisk ræsonnement	- kan, med en del usikkerhed, indgå i en faglig dialog om simple matematiske modeller. - demonstrerer i en samtale kendskab til fremgangsmåden i behandlingen af et simpelt matematisk problem. - demonstrerer i en samtale kendskab til enkelte aspekter i et simpelt matematisk ræsonnement
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan fremlægge velstruktureret og udtrykke sig i et klart sprog med ubesværet anvendelse af matematisk terminologi.	- kan fremlægge sammenhængende med et godt kendskab til matematisk terminologi	- kan anvende simple matematiske formler, men fremlægger noget usammenhængende og mangler præcision i matematisk terminologi.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- demonstrerer overblik over et område af matematik eller viden om et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag.	- demonstrerer viden om et område af matematik, eller viden om simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag.	- demonstrerer i en samtale kendskab til et område af matematik eller til simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag.

Bilag 2: Eksempler på opgaver i mindstekravskategorierne

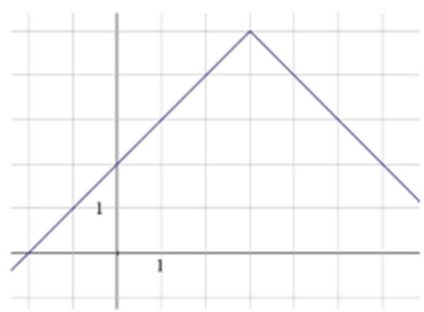
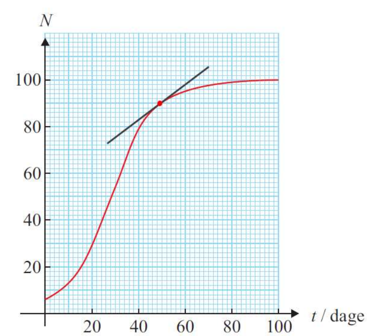
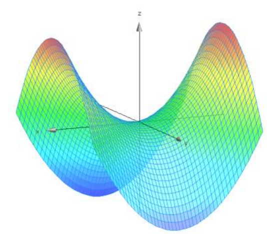
For hver opgaver er det markeret, om opgaven hører til i delprøve 1 (D1) eller delprøve 2 (D2).

Begreber og symboler	**stx C**	**stx B**	**stx A**
Kende begrebsbetegnelser (ord og symboler) og betydning af begreber	Bestem tværvektoren til vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. Stx – D1	En andengradsligning har en positiv diskriminant. Angiv antallet af løsning til ligningen. D1	Vektorfunktionen $\vec{r}(t)$ har lodret tangent i punktet (1,2). Hvilken betydning har det for hastighedsvektoren i punktet? D1
Indføre variable og angive symbolske betegnelser	Indfør passende variable og opstil en model for udviklingen i (en simpel kontekst – eksponentielt voksende med fx 30% pr år). D1	En ærlig 8-sidet terning viser tallene 1 til 8. Opstil et udtryk til bestemmelse af sandsynligheden for at få 4 ottere ud af 10 kast med terningen. D1	Væksthastigheden for udviklingen i antallet af fluer i et bestemt område er 3 gange så stor som antallet af fluer i området. Indfør passende variable og opstil en differentialligning, der beskriver udviklingen i antallet af fluer. D1

Formler og funktioner	**stx C**	**stx B**	**stx A**
Omskrive og reducere formler og udtryk med papir/blyant og med CAS	Reducer udtrykket $a\cdot(a-b)+2ab$. D1	Reducer udtrykket $(a-b)^2-b^2$. D1	Reducer udtrykket $\dfrac{a^2+a}{a}$. D1
Indsætte konkrete værdier i formler (forskrifter) og tilskrive resultatet betydning	Funktionen $f(x)=25\cdot 1{,}3^x$ beskriver udviklingen i (en simpel kontekst). Bestem $f(5)$, og fortolk resultatet. D2	Bestem en ligning for tangenten til *f* i punktet $P(2,4)$, når det oplyses at $f'(2)=3$. D1	En funktion *f* af to variable er givet ved $f(x,y)=x^2-y^2$. Bestem gradienten i punktet *P*(1,1), og forklar betydningen heraf. D2
Aflæse indgående størrelser og tilskrive størrelserne betydning (matematisk og i kontekst)	Funktionen $f(x)=25\cdot 1{,}32^x$ beskriver udviklingen i (en simpel kontekst). Giv en fortolkning af konstanterne 25 og 1,32. D1	Givet ligningen for en cirkel $(x-2)^2+(y+3)^2=16$. Forklar hvad de tre konstanter fortæller om cirklen. Stx – D1	Giv en geometrisk fortolkning af konstanterne i udtrykket $\int_2^4 f(x)\,dx=7$. D1
Opstille formler og udtryk ud fra givne oplysninger eller en sproglig beskrivelse	Peter indsætter 5000 kr. på en konto, der giver en rente på 2% pr år. Pengene bliver stående i n terminer, hvorefter Peter kan hæve *K* kr. Opstil et udtryk, der beskriver sammenhængen mellem *K* og *n*. D1	Fra et almindeligt spil kort trækkes et kort, og det noteres om kortet er en ruder. Forsøget gentages 7 gange. Angiv sandsynlighedsparameteren og antalsparameteren, og opskriv en formel til beregning af sandsynligheden for, at der blandt de 7 kort er netop 4 rudere. D1	En havvindmølles energiproduktion er ligefrem proportional med vindens hastighed opløftet i tredje potens. Indfør passende variable, og opstil en model for en havvindmølles energiproduktion som funktion af vindens hastighed. D1

Ligningsløsning	**stx C**	**stx B**	**stx A**
Afgøre om et oplyst resultat er en løsning til en ligning med papir/blyant og med CAS	Undersøg om punktet (2,4) ligger på linjen med forskriften $f(x)=x+3$. D1	Undersøg, om 2 er løsning til ligningen $$x^3-5x+3x+6=0.$$ D1	Vis, at $f(x)=e^{2x}+3$ er løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx}=2y-6$. D1
Algebraisk løsning af ligninger med papir/blyant og med CAS	Løs ligningen $2(x+1)=7+x$. D1	Løs ligningen $-x^2+4x-3=0$. D1	Løs ligningen $(x^2-4)\cdot\ln(x)=0, x>0$ D1
Grafisk løsning af ligninger med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram	To funktioner *f* og *g* er givet ved $f(x)=x+2$ og $g(x)=-2x+5$ Tegn graferne for de to funktioner, og bestem koordinatsættet til skæringspunkterne mellem de to grafer. D2	 På figuren ses grafen for en funktion *f*. Løs ligningen $f'(x)=0$. D1	 På figuren ses banekurven for vektorfunktionen $\vec{r}(t)$. Bestem koordinatsættene til de punkter, hvori grafen har vandret eller lodret tangent samt til dobbeltpunktet. D1

Operationer på funktioner	stx C	stx B	stx A
Differentiere funktioner med papir/blyant og med CAS		Givet funktionen $f(x)=x^3+\frac{1}{x}, x>0$. Bestem den afledede funktion $f'(x)$. D1	Givet funktionen $f(x)=e^x\cdot\frac{1}{x}$. Bestem den afledede funktion $f'(x)$. D1
Integrere funktioner / bestemme stamfunktioner med papir/blyant og med CAS			Givet funktionen $f(x)=x^3+e^{2x}$. Bestem en stamfunktion $F(x)$. D1
Sammensætte funktioner med papir/blyant og med CAS		Givet funktionerne $f(x)=2x+2$ og $g(x)=x^2$. Opstil et funktionsudtryk for den sammensatte funktion $f\circ g$, og beskriv funktionstypen. D2	Funktionerne *f* og *g* er givet ved $f(x)=e^x$ og $g(x)=2x-1$. Opstil et funktionsudtryk for de sammensatte funktioner $f\circ g$ og $g\circ f$. D1

Grafer og figurer	**stx C**	**stx B**	**stx A**
Tegne grafer og grafiske repræsentationer samt geometriske figurer med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram, herunder hensigtsmæssigt valg af 'grafvindue'	To vektorer er givet ved $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Tegn vektorerne i samme koordinatsystem. Stx – D1 Om en trekant *ABC* oplyses, at sidelængderne er *a*=5, *b*=6 og *c*=8. Konstruer en geometrisk model af trekant *ABC*, og giv en kort beskrivelse af konstruktionsmetoden. Hf – D2	En funktion *f* er givet ved $f(x)=\begin{cases} -x+7 & x\leq 2 \\ x^2+1 & x>2 \end{cases}$ Tegn grafen for *f* i et passende koordinatsystem. D2	Givet $f(x,y)=x^2-x\cdot y$. Tegn grafen for *f*. D2
Aflæse på forelagte grafer og grafiske repræsentationer samt geometriske figurer og på selvfrembragte (med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram) grafer (og geometriske figurer) – og tilskrive resultater betydning (matematisk og i kontekst)	 På figuren ses grafen for en stykkevist defineret funktion. Bestem x når $y=2$. D1	 Bestem væksthastigheden for antallet af individer i populationen til tidspunktet t =50. D1	 På figuren ses grafen for en funktion af to variable. Hvilken type stationært punkt har funktionen i punktet $O(0,0,0)$? Hvilken information om grafen for f kan uddrages af, at $f(11,7)=5$? D2

<table>
<tr><th>Tabeller</th><th>stx C</th><th>stx B</th><th>stx A</th></tr>
<tr>
<td>Aflæse data fra tabel, herunder funktionstabel (herunder sandsynlighedsfordeling)</td>
<td>Udfyld resten af tabellen, når det oplyses at f er en eksponentialfunktion.
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td></td></tr>
</table>
D1</td>
<td>Tabellen nedenfor viser udvalgte funktionsværdier for et andengradspolynomium f, hvis graf er en parabel.
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>9</td><td>6</td><td>5</td><td>6</td><td>9</td></tr>
</table>
Bestem toppunktet for parablen.
D1</td>
<td>Bestem arealet af området M, når det oplyses, at (inkl. tegning af graf for f med området M og grænser markeret):
<table>
<tr><td>x</td><td>$F(x)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td></tr>
</table>
D1</td>
</tr>
<tr>
<td>Opskrive (importere) data i tabel, herunder frembringelse af funktionstabel med papir/blyant og med CAS</td>
<td>I tabellen er angivet de svar 100 personer gav, da de blev spurgt om deres skonummer.
Bestem frekvensen for hvert skonummer.
D2</td>
<td>Opstil en sandsynlighedstabel for kast med to terninger, hvor den stokastiske variabel X tæller summen af de to terningers øjental.
D1</td>
<td>I tabellen er angivet de svar 1000 personer gav, da de blev spurgt om deres højde. (Datafil vedlagt)
Undersøg, om datasættet med rimelighed kan siges at være normalfordelt.
D2</td>
</tr>
</table>

'Black box'-kommandoer i matematisk værktøjsprogram	**stx C**	**stx B**	**stx A**
Anvende indbyggede 'en-knap-kommandoer'	På en restaurant kan man vælge mellem 16 småretter. Bestem antallet af måder, hvorpå man kan sammensætte en menu med tre retter på restauranten. D2	En funktion *f* er givet ved $f(x)=x^2-x-3$. Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $P(2, f(2))$. D2	En funktion *f* er givet ved $f(x)=x^3-8x^2+16x$. Det oplyses, at grafen for *f* skærer førsteaksen i x=0 og x=4. Bestem arealet af det område, som grafen for *f* afgrænser sammen med førsteaksen i første kvadrant. D2
Indbyggede statistiske undersøgelser af data ('black box')	Én-variabel-statistik og regression		