```python
import pandas as pd
import numpy as np
import scipy.stats as st
from IPython.display import display, Markdown
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
```

Лабораторная работа №3

Задание 5

{Фамилия Имя}, {Номер группы}, Вариант {Номер варианта}, ({Дата})

Данные

По данным выборки проверить с помощью критерия Пирсона при уровне значимости α гипотезу:

- о показательном;
- равномерном;
- нормальном законе распределения генеральной совокупности.

В ответе привести:

1. выбранную гипотезу о виде закона распределения;
2. вычисленное значение критерия;
3. критическое значение;
4. вывод о принятии или не принятии гипотезы.

```python
src_data = pd.Series([15.6, 29.1, -5.3, 8.8, 8.7, 2.5, 10.3, 14.4, 21.5,
9.9, 33.5, 15.9, 8.0, 21.4, 9.9, 1.7, 11.2, 9.0, 4.5, 26.2, 3.2, 11.0,
18.3, 5.7, 21.4, 14.4, 17.5, -1.4, 0.3, 17.5, 8.8, 16.0, 0.7, 4.2, 12.2,
14.6, 16.8, 15.2, 17.0, 17.2, -1.7, 24.0, 23.6, 33.2, 21.4, 10.4, 1.5,
8.1, 12.2, 8.2, 17.6, 9.5, 22.9, 9.0, 30.0, 18.2, -10.0, -4.6, 21.4,
20.1, 18.4, 24.3, 7.5, 12.5, 7.7, 0.2, -11.0, 24.2, 24.8, 6.0, 6.6, 15.9,
15.5, 18.6, 4.3, 21.4, 8.0, 13.9, 3.9, 25.2, 16.8, 14.2, 11.8, 16.4, 14.2,
2.9, -2.3, 14.8, 19.7, -1.3, 6.0, 14.7, 9.5, 2.8, 25.0, -0.4, 9.9, 16.3,
4.8, 16.0])
n = len(src_data)
alpha = 0.025
```

```
src_data
```

```
0     15.6
1     29.1
2     -5.3
3      8.8
4      8.7
      ...
95    -0.4
96     9.9
97    16.3
98     4.8
99    16.0
Length: 100, dtype: float64
```

```
Markdown(f'$n = {n}$, $\\alpha = {alpha}$')
```

$n = 100$, $\alpha = 0.025$

Шаг 1: Построение интервального ряда

```
m = int(np.ceil(np.log2(n) + 1))
m
```

```
8
```

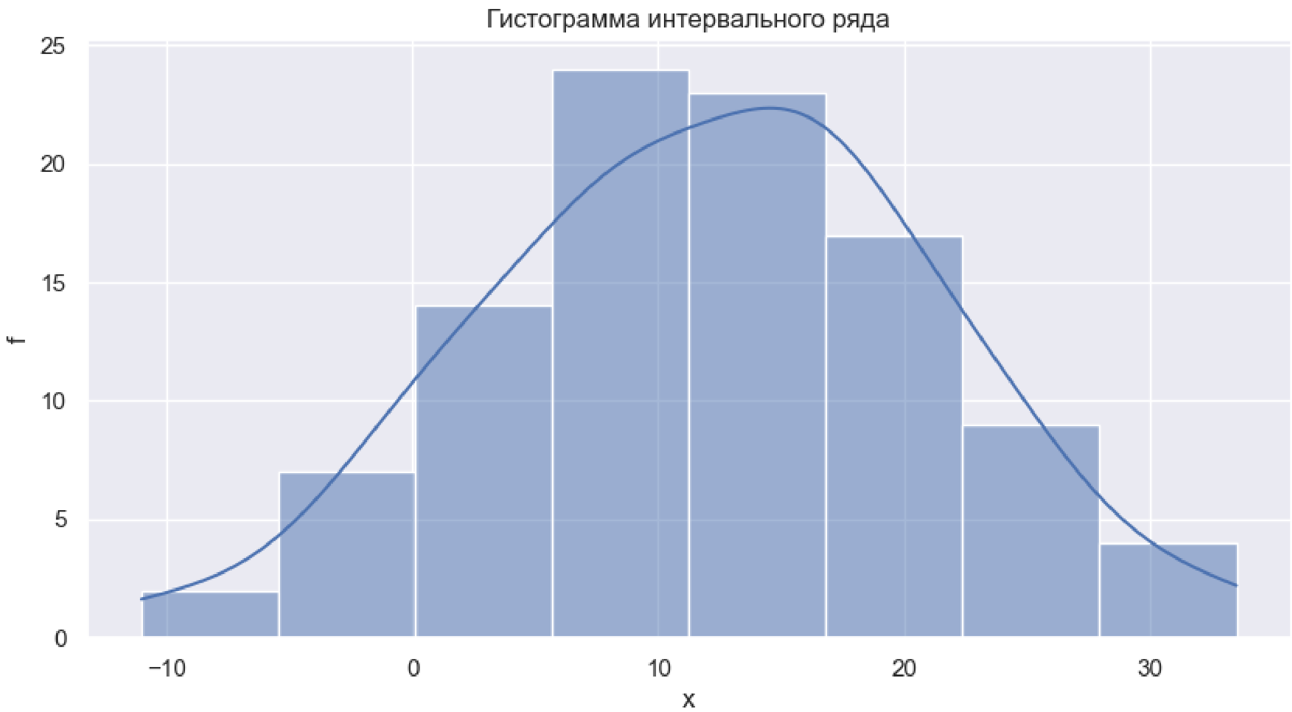
```
bins = src_data.value_counts(bins=m).sort_index()
data = pd.DataFrame()
data['x_i'] = list(map(lambda x: x.left, bins.index))
data['x_(i+1)'] = list(map(lambda x: x.right, bins.index))
data['f'] = bins.values
data
```

	x_i	x_(i+1)	f
0	-11.045	-5.438	2
1	-5.438	0.125	7
2	0.125	5.688	14
3	5.688	11.250	24
4	11.250	16.812	23

	x_i	x_(i+1)	f
5	16.812	22.375	17
6	22.375	27.938	9
7	27.938	33.500	4

```
def hist(data):
    sns.set_theme()
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))
    ax = sns.histplot(data, bins=m, kde=True, ax=ax)
    ax.set_xlabel("x")
    ax.set_ylabel("f")
    ax.set_title("Гистограмма интервального ряда")
    plt.plot()

hist(src_data)
```



Шаг 2: Проверка гипотезы о показательном распределение

```
dist = "показательным"
Markdown(f"""
- $H_0$: закон распределения генеральной совокупности является {dist}.
- $H_1$: закон распределения генеральной совокупности не является {dist}.
""")
```

- H_0: закон распределения генеральной совокупности является показательным.

- H_1: закон распределения генеральной совокупности не является показательным.

Вычисление среднего значения

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

```
def mean_interval_row(xi, xj, f):
    x_mean = (xi + xj) / 2
    return (x_mean * f).sum() / f.sum()

mean = mean_interval_row(data["x_i"], data["x_(i+1)"], data["f"])
mean
```

```
12.139555
```

Для проверки гипотезы о показательном распределения воспользуемся критерием согласия хи-квадрат. Нужно вычислить теоретические (ожидаемые) частоты попадания значений в каждый интервал, если бы распределение было равномерным. Для этого воспользуемся формулой:

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}$$

$$f' = f P_i$$

$$\lambda = 1/\bar{x}$$

```
lmbda = 1 / mean
lmbda
```

```
0.08237534242400155
```

```
p = st.expon.cdf(data["x_(i+1)"], scale=1/lmbda) -
st.expon.cdf(data["x_i"], scale=1/lmbda)
p, p.sum()
```

```
(array([0.        , 0.01024409, 0.36384733, 0.23005964, 0.14549867,
        0.09203206, 0.05819986, 0.03679961]),
 0.9366812617799309)
```

```
data["f'"] = p * data["f"].sum()
data["f'"]
```

```
0     0.000000
1     1.024409
2    36.384733
3    23.005964
4    14.549867
5     9.203206
6     5.819986
7     3.679961
Name: f', dtype: float64
```

Вычислим значение статистики критерия χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - f_i^*)^2}{f_i^*} = \frac{(\text{наблюдаемая частота} - \text{ожидаемая частота})^2}{\text{ожидаемая частота}}$$

```
chi2_value_expon = ((data["f"] - data["f'"])**2 / data["f'"]).sum()
chi2_value_expon
```

```
inf
```

Степени свободы:

```
df = (data["f"] >= 5).sum() - 2
df
```

```
4
```

Критическое значение

```
chi2_critical_expon = st.chi2.ppf(1-alpha, df=df)
chi2_critical_expon
```

```
11.143286781877796
```

```
display(Markdown(f"Так как вычисленное значение статистики критерия
Пирсона ($\chi^2 = {chi2_value_expon}$) превышает критическое значение
($\chi^2 = {chi2_critical_expon}$), то мы отвергаем нулевую гипотезу $H_0$
и принимаем альтернативную гипотезу $H_1$. Это означает, что закон
распределения генеральной совокупности не является {dist}."))
```

Так как вычисленное значение статистики критерия Пирсона ($\chi^2 = inf$) превышает критическое значение ($\chi^2 = 11.143286781877796$), то мы отвергаем нулевую гипотезу H_0 и приниамаем альтернативную гипотезу H_1. Это означает, что закон распределения генеральной совокупности не является показательным.

Шаг 3: Проверка гипотезы о равномерном распределение

```
dist = "равномерным"
Markdown(f"""
- $H_0$: закон распределения генеральной совокупности является {dist}.
- $H_1$: закон распределения генеральной совокупности не является {dist}.
""")
```

- H_0: закон распределения генеральной совокупности является равномерным.
- H_1: закон распределения генеральной совокупности не является равномерным.

Вычисление дисперсии

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

```
def var_interval_row(xi, xj, f):
    x_mean = (xi + xj) / 2
    mean_square = ((x_mean ** 2) * f).sum() / f.sum()
    mean = mean_interval_row(xi, xj, f)
    return mean_square - mean ** 2

variance = var_interval_row(data["x_i"], data["x_(i+1)"], data["f"])
variance
```

```
78.126559814475
```

Вычисление стандартного отклонения

$$s = \sqrt{s^2}$$

```
std = np.sqrt(variance)
std
```

```
8.838923000822838
```

Для проверки гипотезы о равномерном распределения воспользуемся критерием согласия хи-квадрат. Нужно вычислить теоретические (ожидаемые) частоты попадания значений в каждый интервал, если бы распределение было равнромерным. Для этого воспользуемся формулой:

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = \frac{1}{b^* - a^*}$$

$$\text{при } a^* \le x_j \le b^*$$

$$f' = fP_i$$

$$a^* = \bar{x} - \sqrt{3} \cdot S$$

$$b^* = \bar{x} + \sqrt{3} \cdot S$$

```
a = mean - np.sqrt(3) * std
b = mean + np.sqrt(3) * std
a, b
```

```
(-3.16990872161432, 27.44901872161432)
```

```
p = st.uniform.cdf(data["x_(i+1)"], loc=a, scale=b-a) -
st.uniform.cdf(data["x_i"], loc=a, scale=b-a)

assert np.isclose(p.sum(), 1, rtol=.01), "Сумма теоретических оснований
должна быть равна 1."
p
```

```
array([0.        , 0.10761019, 0.18168501, 0.18165235, 0.18165235,
       0.18168501, 0.1657151 , 0.        ])
```

```
data["f'"] = p * data["f"].sum()
data["f'"]
```

```
0     0.000000
1    10.761019
2    18.168501
3    18.165235
4    18.165235
5    18.168501
6    16.571510
7     0.000000
Name: f', dtype: float64
```

Вычислим значение статистики критерия χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - f_i^*)^2}{f_i^*} = \frac{(\text{наблюдаемая частота} - \text{ожидаемая частота})^2}{\text{ожидаемая частота}}$$

```
((data["f"] - data["f'"])**2 / data["f'"])
```

```
0         inf
1    1.314491
2    0.956402
3    1.874156
4    1.286796
5    0.075152
6    3.459417
7         inf
dtype: float64
```

```
chi2_value_uniform = ((data["f"] - data["f'"])**2 / data["f'"]).sum()
chi2_value_uniform
```

```
inf
```

Степени свободы:

```
df = (data["f"] >= 5).sum() - 3
df
```

```
3
```

Критическое значение

```
chi2_critical_uniform = st.chi2.ppf(1-alpha, df=df)
chi2_critical_uniform
```

```
9.348403604496148
```

```
display(Markdown(f"Так как вычисленное значение статистики критерия
Пирсона ($\chi^2 = {chi2_value_uniform}$) превышает критическое значение
($\chi^2 = {chi2_critical_uniform}$), то мы отвергаем нулевую гипотезу
```

```
$H_0$ и принимаем альтернативную гипотезу $H_1$. Это означает, что закон распределения генеральной совокупности не является {dist}."))
```

Так как вычисленное значение статистики критерия Пирсона ($\chi^2 = inf$) превышает критическое значение ($\chi^2 = 9.348403604496148$), то мы отвергаем нулевую гипотезу H_0 и принимаем альтернативную гипотезу H_1. Это означает, что закон распределения генеральной совокупности не является равномерным.

Шаг 4: Проверка гипотезы о нормальном распределение

```
dist = "нормальным"
Markdown(f"""
- $H_0$: закон распределения генеральной совокупности является {dist}.
- $H_1$: закон распределения генеральной совокупности не является {dist}.
""")
```

- H_0: закон распределения генеральной совокупности является нормальным.
- H_1: закон распределения генеральной совокупности не является нормальным.

Для проверки гипотезы о нормальности распределения воспользуемся критерием согласия хи-квадрат. Нужно вычислить теоретические (ожидаемые) частоты попадания значений в каждый интервал, если бы распределение было нормальным. Для этого воспользуемся формулой:

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = \Phi(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{S}) - \Phi(\frac{x_i - \bar{x}}{S})$$

$$f' = fP_i$$

```
p = st.norm.cdf((data["x_(i+1)"] - mean) / std) - st.norm.cdf((data["x_i"] - mean) / std)

data["f'"] = p * data["f"].sum()
data["f'"]
```

```
0     1.901186
1     6.365950
2    14.569556
3    22.719307
4    24.154813
5    17.510135
6     8.649398
```

```
7     2.910631
Name: f', dtype: float64
```

Вычислим значение статистики критерия χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - f_i^*)^2}{f_i^*} = \frac{(\text{наблюдаемая частота} - \text{ожидаемая частота})^2}{\text{ожидаемая частота}}$$

```
chi2_value_norm = ((data["f"] - data["f'"])**2 / data["f'"]).sum()
chi2_value_norm
```

```
0.6547506282482705
```

Степени свободы:

```
df = (data["f"] >= 5).sum() - 3
df
```

```
3
```

Критическое значение

```
chi2_critical_norm = st.chi2.ppf(1-alpha, df=df)
chi2_critical_norm
```

```
9.348403604496148
```

```
display(Markdown(f"Так как вычисленное значение статистики критерия
Пирсона ($\chi^2 = {chi2_value_norm}$) превышает критическое значение
($\chi^2 = {chi2_critical_norm}$), то мы принимаем нулевую гипотезу $H_0$
и отвергаем альтернативную гипотезу $H_1$. Это означает, что закон
распределения генеральной совокупности является {dist}."))
```

Так как вычисленное значение статистики критерия Пирсона ($\chi^2 = 0.6547506282482705$) превышает критическое значение ($\chi^2 = 9.348403604496148$), то мы принимаем нулевую гипотезу H_0 и отвергаем альтернативную гипотезу H_1. Это означает, что закон распределения генеральной совокупности является нормальным.

Шаг 5: Вывод

```
display(Markdown("## Вывод"))
display(Markdown(f"Таблица распределения хи-квадрат ($\chi^2$) со степенями свободы {df} и уровнем значимости {alpha} даёт критическое значение $\chi^2 = {chi2_critical_norm}$."))
display(Markdown(f"Так как вычисленное значение статистики критерия Пирсона ($\chi^2 = {chi2_value_norm}$) превышает критическое значение ($\chi^2 = {chi2_critical_norm}$), то мы принимаем нулевую гипотезу $H_0$ и отвергаем альтернативную гипотезу $H_1$. Это означает, что закон распределения генеральной совокупности является {dist}."))
```

Вывод

Таблица распределения хи-квадрат (χ^2) со степенями свободы 3 и уровнем значимости 0.025 даёт критическое значение $\chi^2 = 9.348403604496148$.

Так как вычисленное значение статистики критерия Пирсона ($\chi^2 = 0.6547506282482705$) превышает критическое значение ($\chi^2 = 9.348403604496148$), то мы принимаем нулевую гипотезу H_0 и отвергаем альтернативную гипотезу H_1. Это означает, что закон распределения генеральной совокупности является нормальным.