```python
import pandas as pd
import numpy as np
import scipy.stats as st
from IPython.display import display, Markdown
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
import plotly.express as px
```

Лабораторная работа №5

Задание 3

{Фамилия Имя}, {Номер группы}, Вариант {Номер варианта}, ({Дата})

Данные

Для выборки значений случайной величины X из генеральной совокупности:

1. Найти выборочные оценки математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения случайной величины X , указать свойства этих оценок.
2. Составить группированный вариационный ряд.
3. Построить гистограмму и полигон относительных частот. На их основе выдвинуть нулевую гипотезу H0 о виде распределения (нормальное распределение).
4. На одном чертеже с гистограммой построить график теоретической плотности вероятностей. Сделать вывод об их визуальном совпадении.
5. Составить эмпирическую функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.
6. На одном чертеже с эмпирической функцией распределения построить график теоретической функции распределения. Сделать вывод об их визуальном совпадении.
7. С помощью критерия согласия $\chi^2 \$ Пирсонапроверитьгипотезу H0овидераспределениягенеральнойсовокупностидляуровнязнач$. Сделать статистический вывод.
8. Построить доверительные интервалы для неизвестных математического ожидания и дисперсии нормально распределенной генеральной совокупности с параметрами $a = \overline{x_в}$ и $\sigma = S$ для уровней значимости $a = 0.1, a = 0.05, a = 0.01$. Сделать вывод о ширине доверительного интервала, в зависимости от уровня значимости a.

```python
freq = pd.Series([71, 73, 19, 47, 78, 28, 35, 22, 48, 86, 27, 50, 27,
109, 20, 54, 58, 64, 56, 98, 55, 12, 52, 24, 24, 22, 67, 71, 23, 58, 19,
68, 31, 41, 95], name="f")
n = len(freq)
alpha_1 = 0.1
alpha_2 = 0.05
alpha_3 = 0.01
k = int(np.floor(np.log2(n) + 1))
min_x = min(freq) - k/2
h = round((max(freq) - min(freq))/k, 0)
```

```python
Markdown(f'$n = {n}$; $\\alpha={alpha_1}, {alpha_2}, {alpha_3}$; min_x $=
{min_x}$; $h = {h}$')
```

$n = 35$; $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$; min_x $= 9.0$; $h = 16.0$

```python
data = pd.DataFrame()
data["x_i"] = [min_x + h * i for i in range(k + 1)]
data["x_(i+1)"] = [min_x + h * (i + 1) for i in range(k + 1)]
data["f"] = freq.value_counts(bins=k + 1).sort_index().values
data
```

	x_i	x_(i+1)	f
0	9.0	25.0	9
1	25.0	41.0	5
2	41.0	57.0	5
3	57.0	73.0	7
4	73.0	89.0	5
5	89.0	105.0	2
6	105.0	121.0	2

Шаг 1: Вычисление характеристик выборки.

Вычисление среднего значения

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

```python
mean = freq.sum() / n
mean
```

```
49.48571428571429
```

Вычисление дисперсии

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

```
variance = freq.var(ddof=1)
variance
```

```
660.198319327731
```

Вычисление стандартного отклонения

$$s = \sqrt{s^2}$$

```
std = np.sqrt(variance)
std
```

```
25.69432465210423
```

Выборочное среднее:

1. Несмещенная оценка
2. Состоятельная
3. Линейная

Выборочная дисперсия:

1. Смещенная оценка. Для получения несмещенной оценки используют исправленную выборочную дисперсию.
2. Состоятельна
3. Неотрицательна

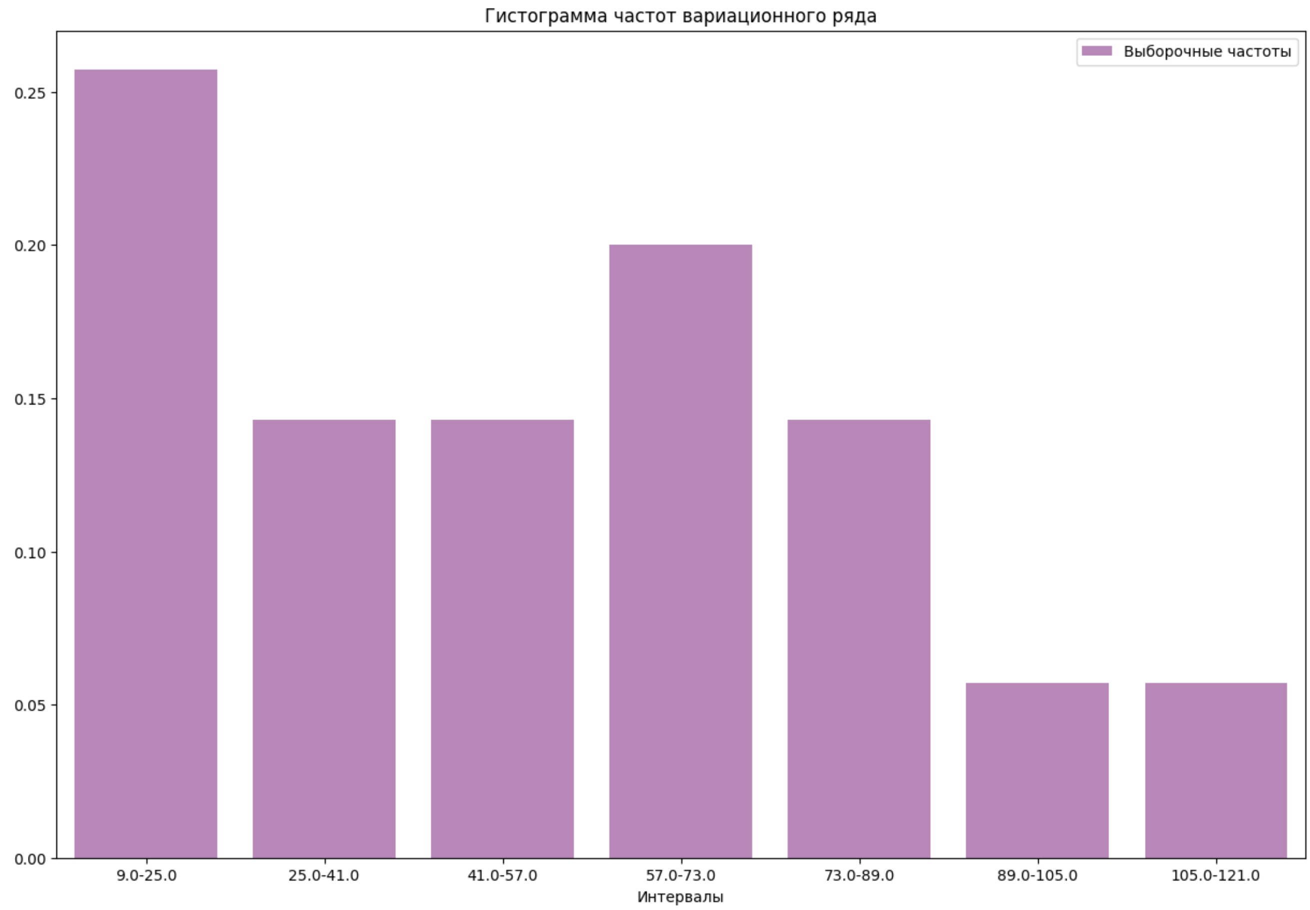
Шаг 2: Составить группированный вариационный ряд

```
data["w"] = data["f"] / n
data
```

	x_i	x_(i+1)	f	w
0	9.0	25.0	9	0.257143
1	25.0	41.0	5	0.142857
2	41.0	57.0	5	0.142857
3	57.0	73.0	7	0.200000
4	73.0	89.0	5	0.142857
5	89.0	105.0	2	0.057143
6	105.0	121.0	2	0.057143

Шаг 3: Гистограмма относительных частот

```
def plot_barplot(x, y1, y2=None, title=""):
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(15, 10))
    ax = sns.barplot(x=x, y=y1, ax=ax, color="purple", alpha=0.5, 
label="Выборочные частоты")
    if y2 is not None:
        ax = sns.barplot(x=x, y=y2, ax=ax, color="red", alpha=0.5, 
label="Теоретичесие частоты")
    ax.set_title(title)
    ax.set_xlabel("Интервалы")
    ax.set_ylabel("")
    ax.legend()

plot_barplot(x=[f"{data.loc[i, 'x_i']}-{data.loc[i, 'x_i'] + h}" for i in 
data.index], y1=data["w"], title='Гистограмма частот вариационного ряда')
```



Шаг 4: Проверка гипотезы о нормальности распределения

Для проверки гипотезы о нормальности распределения воспользуемся критерием согласия хи-квадрат. Нужно вычислить теоретические (ожидаемые) частоты попадания значений в каждый интервал, если бы распределение было нормальным. Для этого воспользуемся формулой:

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = \Phi(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{S}) - \Phi(\frac{x_i - \bar{x}}{S})$$

$$f' = fP_i$$

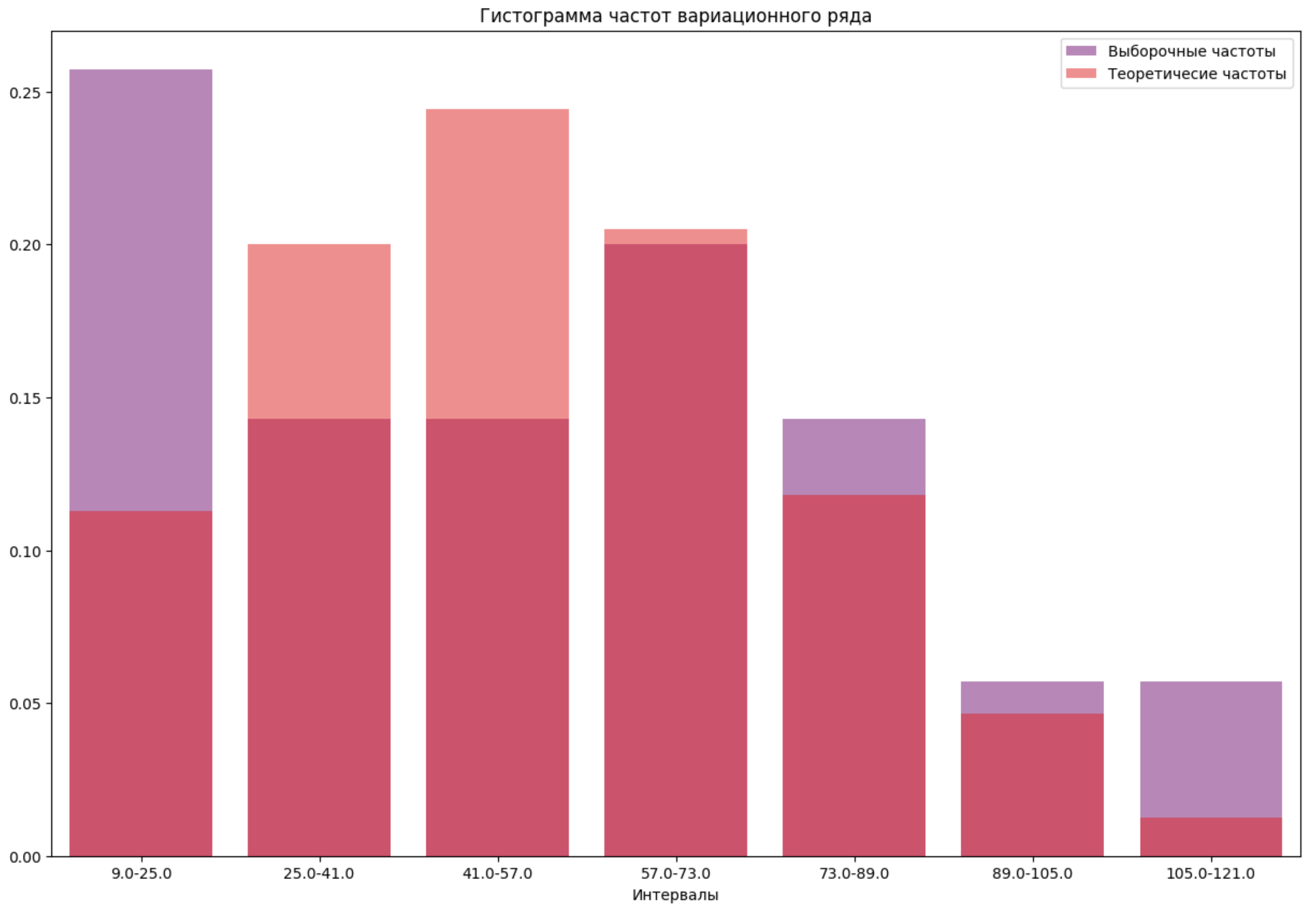
```
p = st.norm.cdf((data["x_(i+1)"] - mean) / std) - st.norm.cdf((data["x_i"]
- mean) / std)

# assert np.isclose(p.sum(), 1, rtol=.01), "Сумма теоретических оснований
должна быть равна 1."

data["f'"] = p * n
data["f'"]
```

```
0    3.946371
1    7.010446
2    8.554885
```

```
3    7.172074
4    4.130483
5    1.633693
6    0.443581
Name: f', dtype: float64
```

Шаг 5: Гистограмма относительных частот с теоретическими

```
plot_barplot(x=[f"{data.loc[i, 'x_i']}-{data.loc[i, 'x_i'] + h}" for i in
data.index], y1=data["w"], y2=p, title='Гистограмма частот вариационного
ряда')
```



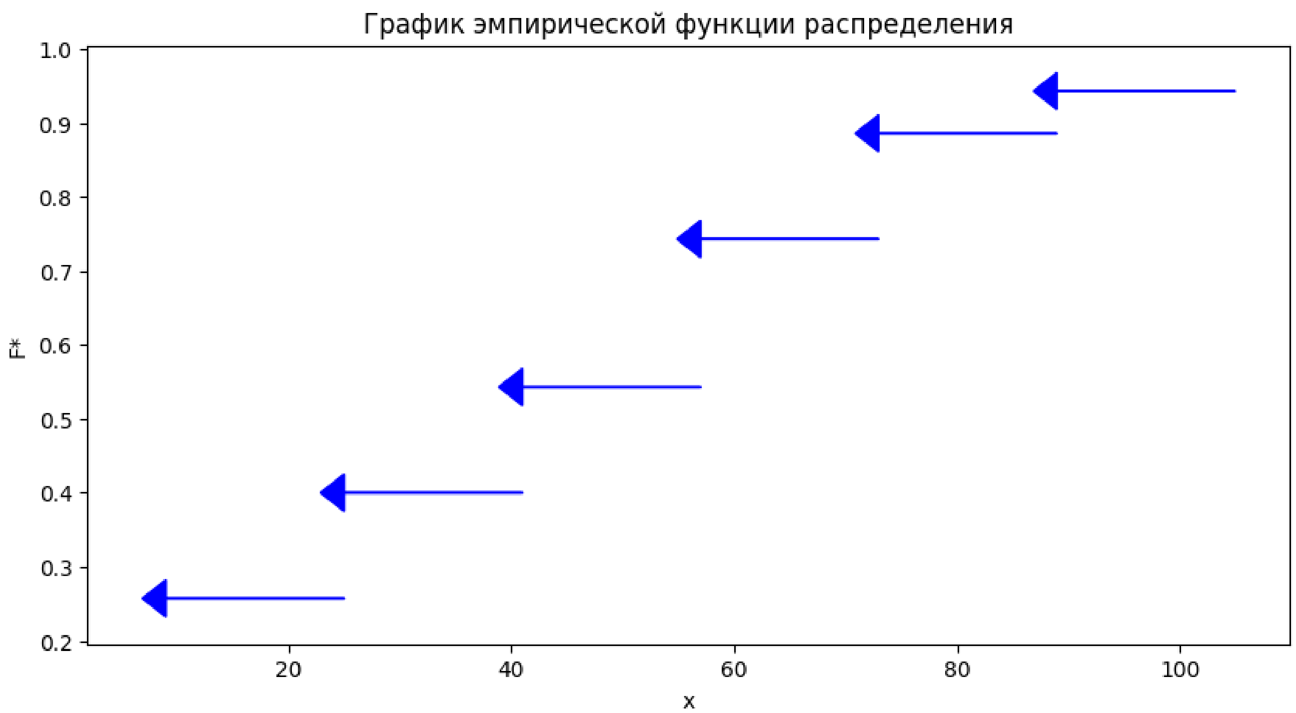
Исходя из гистограммы визуально распределения не совпадают.

Шаг 6: Функция распределения

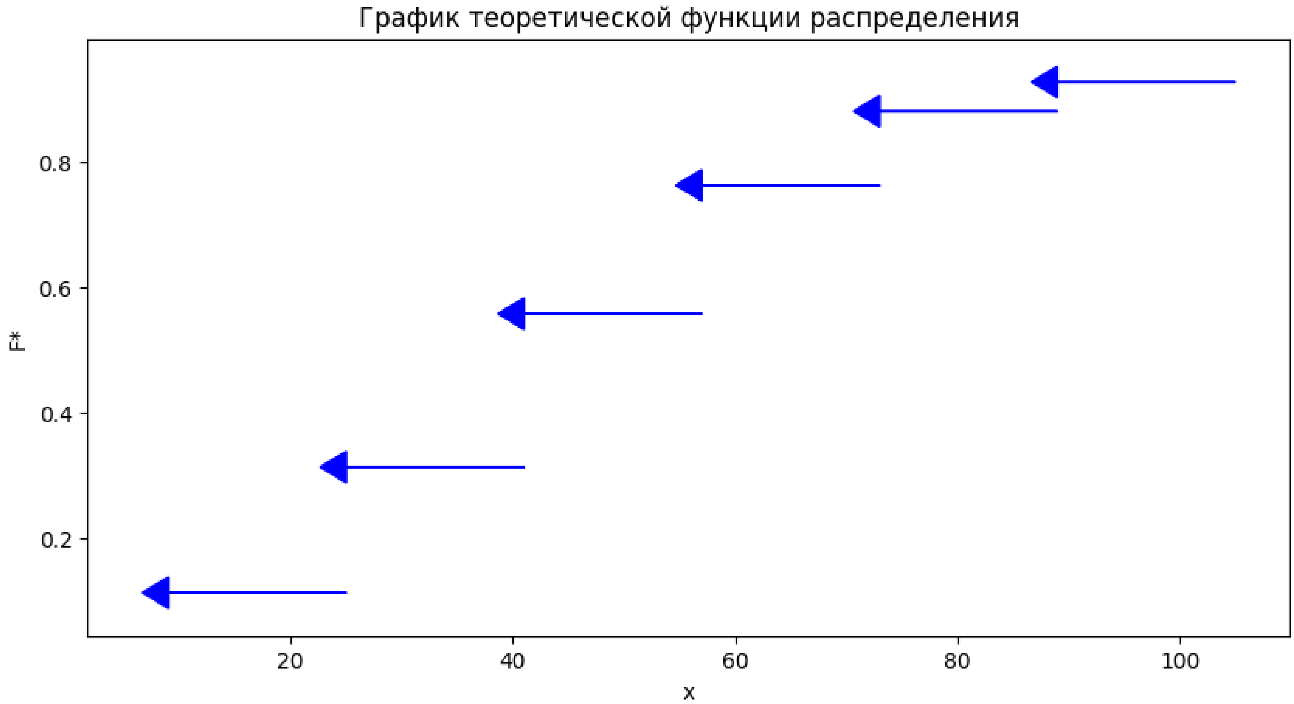
```
emp_func = data["w"].cumsum()
data["F*"] = emp_func
data[["x_i", "x_(i+1)", "F*"]]
```

	x_i	x_(i+1)	F*
0	9.0	25.0	0.257143
1	25.0	41.0	0.400000
2	41.0	57.0	0.542857
3	57.0	73.0	0.742857
4	73.0	89.0	0.885714
5	89.0	105.0	0.942857
6	105.0	121.0	1.000000

```
def plot_cdf_func(x, y, title, c=1):
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))
    min_y, max_y = min(y), max(y)
    arrow_length = ((max_y - min_y) / len(y)) * c * 20
    for idx in range(len(y) - 1):
        dx = x[idx] - x[idx + 1]
        ax.arrow(x=x[idx + 1], y=y[idx], dx=dx, dy=0, color="blue",
head_width=.05, head_length=arrow_length)
    ax.set_title(title)
    ax.set_ylabel("F*")
    ax.set_xlabel("x")
    plt.plot()


plot_cdf_func(data["x_i"], emp_func.values, 'График эмпирической функции
распределения')
```



```
plot_cdf_func(data["x_i"], p.cumsum(), 'График теоретической функции распределения')
```



Шаг 7: Вычисление значения статистики критерия

Вычислим значение статистики критерия χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - f_i^*)^2}{f_i^*} = \frac{(\text{наблюдаемая частота} - \text{ожидаемая частота})^2}{\text{ожидаемая частота}}$$

```
data
```

	x_i	x_(i+1)	f	w	f'	F*
0	9.0	25.0	9	0.257143	3.946371	0.257143
1	25.0	41.0	5	0.142857	7.010446	0.400000
2	41.0	57.0	5	0.142857	8.554885	0.542857
3	57.0	73.0	7	0.200000	7.172074	0.742857
4	73.0	89.0	5	0.142857	4.130483	0.885714
5	89.0	105.0	2	0.057143	1.633693	0.942857
6	105.0	121.0	2	0.057143	0.443581	1.000000

```
chi2_value = ((data["f"] - data["f'"])**2 / data["f'"]).sum()
chi2_value
```

```
14.255702789201939
```

Степени свободы:

```
# два параметра у норм. распр. мат. ожидание и стандартное отклонение
df = (data["f"] >= 5).sum() - 3
df
```

```
2
```

Критическое значение

```
alpha_1
```

```
0.1
```

```
chi2_critical = st.chi2.ppf(1-alpha_1, df=df)
chi2_critical
```

```
4.605170185988092
```

```
from IPython.display import Markdown, display

display(Markdown("## Вывод"))
display(Markdown(f"Таблица распределения хи-квадрат ($\chi^2$) со
степенями свободы {df} и уровнем значимости {alpha_1} даёт критическое
значение $\chi^2 = {chi2_critical}$."))
display(Markdown(f"Так как вычисленное значение статистики критерия
Пирсона ($\chi^2 = {chi2_value}$) превышает критическое значение ($\chi^2
= {chi2_critical}$), то мы отвергаем нулевую гипотезу $H_0$ и принимаем
альтернативную гипотезу $H_1$. Это означает, что закон распределения
генеральной совокупности не является нормальным."))
```

Вывод

Таблица распределения хи-квадрат (χ^2) со степенями свободы 2 и уровнем значимости 0.1 даёт критическое значение $\chi^2 = 4.605170185988092$.

Так как вычисленное значение статистики критерия Пирсона ($\chi^2 = 14.255702789201939$) превышает критическое значение ($\chi^2 = 4.605170185988092$), то мы отвергаем нулевую гипотезу H_0 и принимаем альтернативную гипотезу H_1. Это означает, что закон распределения генеральной совокупности не является нормальным.

Шаг 8: Доверительные интервалы

Доверительный интервал для мат. ожидания.

```
def calc_confidence_interval_mean(alpha, mean):
    x_gamma = st.norm.ppf(1 - alpha/2)
    delta = (x_gamma * std) / np.sqrt(n)
    return (mean - delta, mean + delta)

for a in [alpha_1, alpha_2, alpha_3]:
    display(Markdown(f"Таким образом с вероятностью {1 - a} можно утверждать, что можно утверждать, что мат. ожидание лежит в интервал {calc_confidence_interval_mean(alpha_1, mean)}"))
```

Таким образом с вероятностью 0.9 можно утверждать, что можно утверждать, что мат. ожидание лежит в интервал (42.34189529652223, 56.62953327490634)

Таким образом с вероятностью 0.95 можно утверждать, что можно утверждать, что мат. ожидание лежит в интервал (42.34189529652223, 56.62953327490634)

Таким образом с вероятностью 0.99 можно утверждать, что можно утверждать, что мат. ожидание лежит в интервал (42.34189529652223, 56.62953327490634)

Чем меньше уровень значимости тем шире доверительный интервал.

Доверительный интервал для стандартного отклонения.

```
def calc_confidence_interval_std(alpha, std):
    chi2_left = np.sqrt(st.chi2.ppf((2 - alpha)/2, n - 1))
    chi2_right = np.sqrt(st.chi2.ppf(alpha/2, n - 1))
    return (std * np.sqrt(n - 1))/chi2_left, (std * np.sqrt(n - 1))/chi2_right

for a in [alpha_1, alpha_2, alpha_3]:
    display(Markdown(f"Таким образом с вероятностью {1 - a} можно утверждать, что стандартное отклонение генеральной совокупности лежит в интервале {calc_confidence_interval_std(a, std)}"))
```

Таким образом с вероятностью 0.9 можно утверждать, что стандартное отклонение генеральной совокупности лежит в интервале (21.49057095433622, 32.18878088323685)

Таким образом с вероятностью 0.95 можно утверждать, что стандартное отклонение генеральной совокупности лежит в интервале (20.783421302089437, 33.6647586477339)

Таким образом с вероятностью 0.99 можно утверждать, что стандартное отклонение генеральной совокупности лежит в интервале (19.511177054199333, 36.88229591213995)