ESTIMACIÓN EXPERIMENTAL DE LA MASA DE LA TIERRA

EXPERIMENTAL ESTIMATION OF EARTH'S MASS

Juan S. Mártinez Arevalo[1], Emmanuel Arias Polanco[1], Giovanni Aldana Guzmán[1], Jhonathan A. Sanabria Cantor[1]

[1] Departamento de Física, Facultad de ciencias, Universidad Nacional de Colombia

Resumen

La curiosidad por medir las cantidades físicas en el entorno puede llevar a pensar en medir cosas que salen de la simple percepción humana, como las cantidades asociadas a nuestro planeta. Haciendo uso de la mecánica de Newton se busca calcular la masa de La Tierra con la ayuda de un péndulo simple y trigonometría asociada al radio del planeta.

Palabras clave: Masa, radio, Tierra, cantidad, medir.

Abstract

The curiosity to measure physical quantities on the environment can led to think about measuring stuff that evade the simple human perception, such as the big quantities related to our own planet. Using Newton's mechanics we aim to find Earth's mass, with the aid of a simple pendulum and some trygonometrics associated to the planets radius.

Keywords: Mass, radius, Earth, amount, measure.

e-mail de contacto

Introducción

Los objetos en cercanías a la superficie de La Tierra están bajo un campo gravitacional que los acelera en dirección al centro de la esfera terrestre, dicha aceleración se puede observar en fenómenos físicos como la oscilación de un péndulo, que ante un desplazamiento oscila de manera periódica alrededor de un punto de equilibrio. El hecho mismo de que el movimiento armónico de un péndulo simple esté relacionado con la fuerza gravitacional y que ésta sea producto de la interacción de dos cuerpos masivos nos puede permitir plantear una relación entre dicha oscilación y la masa de La Tierra.

La relación, naturalmente, dependerá de otras cantidades relacionadas con el péndulo y La Tierra misma que deberán ser medidas usando métodos que, aunque antiguos, siguen escapando un poco a la limitada intuición humana.

Desarrollo teórico

El movimiento de una masa puntual que pende de un hilo en cercanías de la superficie de La Tierra y es sacada de su posición de equilibrio de tal manera que el ángulo formado por el hilo y la vertical sea mucho menor que un radian, puede ser descrito mediante la ecuación correspondiente a la de un oscilador armónico simple y su frecuencia angular ω es $\sqrt{g/l}$. Usando ω para obtener la frecuencia con la relación $\omega = 2\pi f$ se tiene que el período queda expresado como [1]

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \longrightarrow g = 4\pi^2\frac{l}{T^2} \tag{1}$$

De tal manera que el período de oscilación del péndulo depende de la atracción gravitatoria que hay entre la masa puntual que cuelga y La Tierra. Tal atracción también puede obtenerse de la ley de gravitación universal que expresa que la fuerza de la gravedad que hay entre dos cuerpos con masa separados una distancia r es [2] [3]

$$\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que el vector $\hat{r}$ va en dirección al centro de La Tierra, se toman las magnitudes. La fuerza que experimenta la masa debido a la gravedad viene dada igualmente por el peso, siendo m la masa puntual del péndulo, M_T la masa de La Tierra y R_T el radio de La Tierra la expresión queda [3]:

$$\cancel{m}g = G\frac{\cancel{m}M_T}{R_T^2}$$

Utilizando 1, podemos despejar la masa de la tierra en términos de su radio, la aceleración de la gravedad y la constante de gravitación universal.

$$M_T = \frac{1}{G}gR_T^2 \tag{3}$$

Para hallar el valor de R_T, asumimos que la tierra es una esfera perfecta. Ubicándonos en al menos dos puntos con distinta latitud e igual longitud, los rayos de luz solar llegarán a la superficie con un ángulo θ que será igual al complementario del ángulo de latitud Entonces midiendo los ángulos θ en dos puntos distintos y teniendo la medida de la longitud de arco que separa dichos puntos se puede hallar el valor del radio terrestre. Esto es, usando la formula de la longitud de arco

$$D_{AB} = R_T|\theta_A - \theta_B| \implies R_T = \frac{D_{AB}}{|\theta_A - \theta_B|}$$

Los ángulos se obtienen de forma simple usando la función arctan y los datos de la altura de la barra y la longitud de la sombra.
Sabiendo que, la medida de incertidumbre al promediar N datos, se propaga como Δx [4], con ε el error de medición y $\bar{x}$ el promedio usual $(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i)$ para los valores medidos Y, sabiendo que, al aplicar valores con incertidumbre a una ecuación f que depende de N variables, a ser, $x_1, x_2, ..., x_N$, el error final está dado por Δf [5], ambas definidas como sigue

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 + \varepsilon^2}, \ \Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2}$$

Estamos listos para ejecutar nuestro experimento

Desarrollo experimental

Montamos un péndulo para el cual nos sirva 1, esto es, un péndulo simple (una masa considerablemente más pesada que la cuerda de la que cuelga), desplazamos este desde su posición de equilibro, cuidando que la cuerda no forme un ángulo mayor a 1rad con la posición de equilibrio. Con esto, tomamos el tiempo que tarda el péndulo en realizar 10 oscilaciones, reportamos ese valor para posteriormente dividir entre 10 y tener un valor de T más exacto, realizamos lo anterior 10 veces y reportamos el largo de la cuerda y los periodos de oscilación

Posteriormente, para obtener un valor del radio de la tierra, ubicamos barras verticales en 4 ciudades distintas (Cúcuta - Norte de Santander, Ayapel - Córdoba, Barrancabermeja - Santander y Aguazul - Casanare) y medimos la longitud de la sombra que proyecta la luz del sol (todos a la misma hora), así como la de la barra misma. Con esto obtendremos un valor del radio de la tierra (Experimento de Eratóstenes).
Los datos se tomaron alrededor de la 1:50PM de 09/12/2020. Se midió utilizando cintas métricas con incertidumbre milimétrica.

Resultados y discusión

Todos los datos se miden en metros y con una apreciación de $\pm 0{,}0005m$, es decir, incertidumbre de 1 milímetro.

Las mediciones adjuntas en el Anexo son implementadas para calcular las cantidades deseadas. [6] Ahora, comparando los resultados obtenidos (contenidos en el archivo `radius.txt` [6]), está claro que los datos observados están muy alejados los unos de los otros. Esta desviación puede ser explicada fácilmente. Pues las ciudades donde se realizaron las medidas no cumplen con el criterio de estar sobre el mismo meridiano, exceptuando Cucuta y Aguazul ($R_{CAz} \approx 6980km$), que, comparando el resultado obtenido con el valor aceptado del radio ecuatorial de la Tierra ($6371km$), este está dentro de un margen considerablemente bueno. Este primer error se pudo haber resuelto si todas las medidas se tomaban a la misma hora real, en vez de sincronizando las mediciones con la hora de Bogotá. Esto resultaba muy complicado de hacer, pues el clima rara vez se ponía a nuestro favor en las 4 ubicaciones al mismo tiempo. Existe otro valor aún mejor, $R_{BA} \approx 67770km$, aunque Ayapel y Barracabermeja están más separadas longitudinalmente, esto se puede explicar analizando `degrees.txt` en [6], cuando vemos que el ángulo medido en Cúcuta no es congruente con los otros datos (31 vs aprox. 33 grados en promedio) y que probablemente hubo un error de medición.

El valor medio de la gravedad medida es de $9{,}76 m/s^2$. Los valores individuales están en `gravity.txt`. La diferencia entre el valor medido y el valor promedio para Colombia que obtenemos al reemplazar latitudes y alturas de cada ciudad en el aplicativo del Physikalisch-Technische Bundesanstalt (Instituto de Metrología de Alemania)[7], es $\approx 9{,}78 m/s^2$, la diferencia se debe principalmente a las limitaciones del péndulo simple. Usando la ecuación 3, nuestro valor medio de la aceleración de la gravedad y nuestra mejor aproximación del radio (radio corregido), obtenemos una masa de 7,13e24 kg. Siendo el valor rea obtenido con métodos modernos 5,9723e24 kg, nuestra aproximación se encuentra al menos dentro del mismo orden de magnitud y con una variación relativa porcentual de aprox. 20,35 %.

Conclusiones

Este tipo de experimentos nos demuestran cuan poderosas pueden ser herramientas matemáticas y físicas relativamente simples. La escala de nuestro planeta es enorme, y sin embargo, somos capaces de hacernos una idea numérica de estas con cosas que cualquier persona tiene en su casa, y un poco de coordinación. Por supuesto, el desarrollo experimental realizado tiene mucho espacio a mejoría, sobretodo la parte del cálculo del radio, pero estábamos limitados en términos de recursos, y solo dos de los miembros de nuestro equipo se encontraban en ciudades aproximadamente sobre el mismo meridiano.

La implementación concreta para el cálculo de los valores y errores está disponible en el código [6].

Referencias

[1] D. Kleppner and R. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics - Second Edition* (Cambridge University Press, 2010) p. 102.

[2] I. Newton, *Newton's Principia : The Mathematical Principles of Natural Philosophy* (Encyclopædia Britannica, London, 1687).

[3] D. Kleppner and R. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics - Second Edition* (Cambridge University Press, 2010) pp. 84,85.

[4] D. Wackerly, W. Mendenhall, and R. Scheaffer, *Mathematical Statistics with Applications - 7th Edition* (Cengage Learning, 2008) p. 393.

[5] A. M. Ardila, *Física Experimental* (Universidad Nacional de Colombia, Unibiblos, 2007) p. 41.

[6] E. A. Polanco, "newtonian-mechanics-finalp. https://github.com/cosmeticmichu/newtonian-mechanics-finalp," (2020).

[7] P.-T. Bundesanstalt, "Welmec zone-configurator." (2020).

Anexo

Datos medidos de altura de la vara y el largo de su sombra

Ayapel		Aguazul		B/bmeja		Cucuta	
Alto	Largo	Alto	Largo	Alto	Largo	Alto	Largo
0.171	0.151	0.124	0.110	0.155	0.143	1.219	1.167
0.172	0.152	0.125	0.111	0.157	0.145	1.219	1.167
0.171	0.153	0.123	0.112	0.155	0.143	1.217	1.170
0.170	0.152	0.123	0.111	0.156	0.143	1.218	1.163
0.170	0.152	0.123	0.111	0.157	0.143	1.219	1.179

Datos medidos para periodos de oscilación y longitud del péndulo

	Ayapel	Aguazul	B/bmeja	Cucuta
Periodo(S)	1.06	1.12	1.04	1.55
Longitud(m)	0.28	0.305	0.272	0.2952
(Gravedad(m/s^2)	9.8149	9.65058	9.84483	9.73736

Los datos completos pueden ser encontrados en `input.txt` (la columna l[i] con $i = 1, 2, 3, 4$ cada medida que hizo cada miembro) e `input2.txt` en el repositorio en GitHub