④
$$\begin{aligned} -x_1+2x_2+5x_3-2x_4&=0\\ -2x_1+4x_2+10x_3-2x_4&=4\\ -x_1+2x_2+2x_3-2x_4&=-3\\ 2x_1-4x_2-7x_3+5x_4&=5 \end{aligned}$$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} -1&2&5&-2&0\\ -2&4&10&-2&4\\ -1&2&2&-2&-3\\ 2&-4&-7&5&5 \end{array}\right) \begin{matrix}(-2)\\(-1)\\(2)\end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1&2&5&-2&0\\ 0&0&0&2&4\\ 0&0&-3&0&-3\\ 0&0&3&1&5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1&2&5&-2&0\\ 0&0&-3&0&-3\\ 0&0&0&2&4\\ 0&0&3&1&5 \end{array}\right)(+1) \rightsquigarrow$$

erweiterte Koeff. matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1&2&5&-2&0\\ 0&0&-3&0&-3\\ 0&0&0&2&4\\ 0&0&0&1&2 \end{array}\right) \Big| \left(\cdot\tfrac{1}{2}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1&2&5&-2&0\\ 0&0&-3&0&-3\\ 0&0&0&1&2\\ 0&0&0&1&2 \end{array}\right)(-1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1&2&5&-2&0\\ 0&0&-3&0&-3\\ 0&0&0&1&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right) \Big| \left(-\tfrac{1}{3}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1&2&5&-2&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1&2&5&-2&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)(\cdot -5) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1&2&0&-2&-5\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)(2) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1&2&0&0&-1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right) \Big|(-1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-2&0&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$L=\left\{ \begin{pmatrix} 1+2\lambda\\ \lambda\\ 1\\ 2 \end{pmatrix} \,\Big|\, \lambda\in\mathbb{R} \right\}$$

⑤ Typ I: Vertauschen der Zeilen $i$ und $j$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&\cdots&0\\ 0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&&\ddots&&\vdots\\ &&0&1&\\ &&1&0&\\ \vdots&&&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i\\ j\\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Typ II: Multiplizieren der Zeile $i$ mit einem Skalar $s\in K\setminus\{0\}$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&\cdots&0\\ 0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&&\ddots&&\vdots\\ 0&\cdots&s&\cdots&0\\ \vdots&&&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i\\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Typ III: Addieren des $s$-fachen Vielfachen der Zeile $i$ zur Zeile $j$ für einen Skalar $s\in K$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&\cdots&0\\ 0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&&\ddots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&0\ \cdots&0\\ 0&\cdots&s&1\ \cdots&0\\ \vdots&&&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i\\ j\\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

⑥ Erklärung: Warum gibt es $W$ invert. und $R$ in Zf.?

Der Gauß Algorithmus liefert eine Matrix $R$ in Zf. und verwendet ausschließlich Zeilenoperationen.
Aus TS $\Rightarrow$ $\forall$ Zeilenoperation, $\exists$ $E$ Matrix s.d. das Ergebnis nach der Op. gleich $E\cdot A$ ist.
Die verwendete Matrizen sind: $E_1, E_2, \dots, E_n$ $\Rightarrow$ sei $W=E_n\cdot\ldots\cdot E_2\cdot E_1$ eine Matrix mit alle Op.
Aus diesem Grund $\Rightarrow$ $W\cdot A=R$

---

$W$ invertierbar $\Rightarrow \exists\, V=W^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} W^{-1}/\ W\cdot A=R \Rightarrow A=W^{-1}\cdot R\\ \qquad\qquad A\cdot x=b \end{array}\right\} \Rightarrow W^{-1}R\cdot x=b \Rightarrow Rx=W\cdot b$$

$$\left.\begin{array}{r} Rx=W\cdot b\\ \text{sei } b'=W\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow R\cdot x=b'$$

weil $R$ in Zf. $\Rightarrow$ VIEL SCHNELLER LGS zu berechnen, durch Rückwärtssubstitution. $\square$