Wednesday, 19. May 2021 18:11

17 a) Per Definition:

$$d(C) = \min\{ w(c-c') \mid c, c' \in C,\ c \neq c' \}$$

C linearer Code $\Rightarrow$ C Unterraum $\Rightarrow$ wenn $c, c' \in C$, dann $c - c' \in C$

Deshalb, gilt:

$$d(C) = \min\{ w(c) \mid c \in C \setminus \{0\} \}$$

b) Seien $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{F}_2^{n-k}$ die Spalten von P. Also: $P = (s_1 | \dots | s_n)$

Für einen Vektor $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^n$ gilt dann: $c \in C \overset{(*)}{\Leftrightarrow} P \cdot c = 0 \overset{(x)}{\Leftrightarrow} c_1 s_1 + \dots + c_n s_n = 0$

$$d(C) = \min\{ w(c) \mid c \in C \setminus \{0\} \}$$

$$= \min\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists\, c \in C \setminus \{0\} \text{ mit } w(c) \leq r \}$$

$$\overset{(*)}{=} \min\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists\, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^n \text{ mit } P \cdot c = 0 \text{ und } 1 \leq w(c) \leq r \}$$

$$\overset{(x)}{=} \min\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}_2 \text{ mit } c_1 s_1 + \dots + c_n s_n = 0 \text{ und mind. 1 und höchstens } r \text{ von den } c_i \neq 0 \}$$

$$= \min\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists\, i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N} \text{ Indizes mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n \text{ und } \exists\, c_{i_1}, \dots, c_{i_r} \in \mathbb{F}_2, \text{ NICHT alle } = 0, \text{ mit } c_{i_1} s_{i_1} + \dots + c_{i_r} s_{i_r} = 0 \}$$

$$= \min\{ r \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt } r \text{ linear abhängige Spalten in } P \}$$

16 a) $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, x_1, x_2, x_1 + x_2)$

- Ein $(5,2)$-Code
- Informationsrate: $\frac{2}{5}$
- Redundanz: 3

b) Alle Codewörter sind: $C = \{ (0,0,0,0,0), \overbrace{(1,0,1,0,1)}^{w(c)=3}, \overbrace{(0,1,0,1,1)}^{w(c)=3}, \overbrace{(1,1,1,1,0)}^{w(c)=4} \}$

C linearer Code $\Rightarrow$ C Unterraum $\Rightarrow d(C) = \min\{ w(c) \mid c \in C \setminus \{0\} \} = \min\{3, 3, 4\} = 3 \Rightarrow$ C ist 1-fehlerkorrigierend.

c) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_2 \\ A \end{pmatrix} \Rightarrow P = (-A \quad i_{5-2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) - v_1 ist ein Codewort für Info.wort $(1,1)$.

- v_2 ist KEIN Codewort, aber, für $c_2 = (0,1,0,1,1) \in C$, ist $d(v_2, c_2) = 1$.
  C ist 1-fehlerkorrigierend, also wir können die Fehler beheben und Info.wort $(0,1)$ herauslesen.

- v_3 ist KEIN Codewort, und $\nexists\, c_3 \in C$ s.d. $d(v_3, c_3) = 1$. Die Fehler kann nicht behoben werden $\Rightarrow$ ERNEUT senden!

18 a) Zuerst, die Generatormatrix:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_2 \\ A \end{pmatrix} \Rightarrow P = (-A \quad i_{4-2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Menge der möglichen Syndrome: $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{F}_2^2 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

c) $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f \in \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f \in \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f \in \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

d) Das Dekodierungsverfahren gibt ein Codewort aus, wenn f EINDEUTIG ist. Anders, FEHLER.

$v_0 \Rightarrow$ Codewort

$v_1, v_2, v_3 \Rightarrow$ Fehler

e) Codewort: (x, y, x, y). In allen anderen Fällen $\Rightarrow$ Fehler!