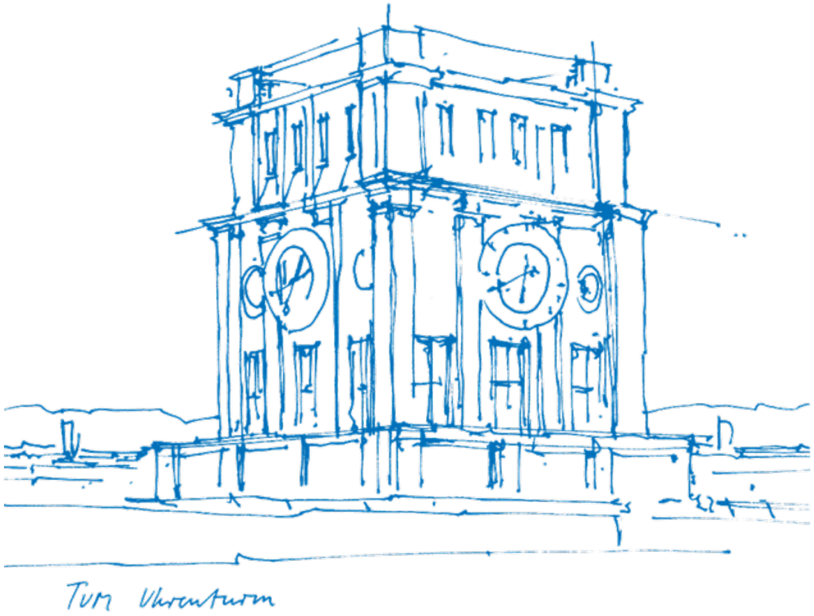
Lineare Algebra für Informatik - Woche 13

Cosmin Aprodu

Technische Universität München

Online, 08 Juli 2021



Eigenschaften symmetrischer Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, also $A = A^T$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $U \neq \{0\}$, so dass für alle $u \in U$ gilt: $A \cdot u \in U$.
$\to$ Dann enthält U einen *Eigenvektor* von A.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und seien $\lambda \neq \mu$ zwei Eigenvektoren von A.
$\to$ Dann gilt für alle $v \in E_\lambda$ und $w \in E_\mu$, dass v und w *orthogonal* (auch *senkrecht*) zueinander sind, also:

$$\langle v, w\rangle \; = \; 0$$

Erinnerung: $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T \cdot A = I_n\}$ ist die **orthogonale Gruppe**.
Hauptachsentransformation: Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es eine **Orthonormalbasis** von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus *Eigenvektoren* von A. Anders gesagt:

- Es gibt $S \in O_n(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS (= S^TAS)$ eine *Diagonalmatrix* ist.
- A ist diagonalisierbar.

Weitere Eigenschaften

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann ist die Matrix $A^T \cdot A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *symmetrisch* und *positiv definit* (alle Eigenwerte von A sind positiv).

Singulärwertzerlegung: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix von Rang $r = \mathrm{rg}(A)$. Dann gibt es die orthogonale Matrizen $U \in O_m(\mathbb{R})$ und $V \in O_n(\mathbb{R})$, sowie die positive reelle Zahlen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, so dass:

$$\Sigma := U^T \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \vdots \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$\rightarrow$ Die äquivalente Gleichung $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$ heißt **Singulärwertzerlegung** von A.