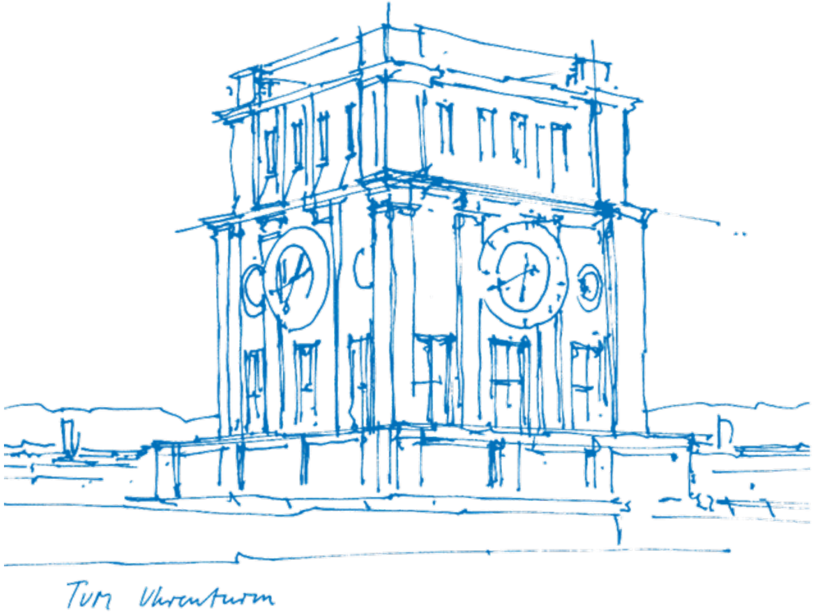
Lineare Algebra für Informatik - Woche 11

Cosmin Aprodu

Technische Universität München

Online, 24 Juni 2021



Eingenwerte und Polynome

Sei K wieder ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine *quadratische* Matrix. Ein $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von A, falls es $v \in K^n \setminus \{0\}$ gibt mit $A \cdot v = \lambda \cdot v$. Ein solcher Vektor v heißt dann ein **Eigenvektor** *von A (zum Eigenwert λ)*.

$$E_\lambda := \{v \in K^n \mid A \cdot v = \lambda \cdot v\}$$

heißt **Eigenraum** *(zum Eigenwert λ)*.

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Das Polynom

$$\chi_A := \det(x \cdot I_n - A) \in K[x]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von A.
Wichtig: Die Eigenwerte einer quadratischen Matrix A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A.

Vielfachheiten

Es sei $\lambda \in K$ ein *Eigenwert* einer Matrix $A \in K^{n \times n}$.

- Die **algebraische Vielfachheit** $m_a(\lambda)$ von λ ist die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom χ_A.
- Die **geometrische Vielfachheit** $m_g(\lambda)$ von λ ist definiert wie folgt:

$$m_g(\lambda) := \dim(E_\lambda)$$

Bemerkung: $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann gilt: $\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2$. Also ist $\lambda_0 = 1$ der einzige Eigenwert mit $\boxed{m_a(\lambda_0) = 2}$ (wegen Potenz von $x-1$). Weiter, bemerken wir, dass $A - I_2 \cdot \lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Rang 1 hat $\Rightarrow \dim(E_{\lambda_0}) = 1$ $\Rightarrow \boxed{m_g(\lambda_0) = 1}$.

Diagonalisierbar oder nicht?

Erinnerung: $GL_n(K) = \{S \in K^{n\times n} \mid S \text{ invertierbar}\}$.

Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt **diagonalisierbar**, falls A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, also:

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1} \quad \text{oder auch} \quad D = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

für eine Matrix $S \in GL_n(K)$. Die Eigenvektoren sind dabei die Spalten von S.

Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann *diagonalisierbar*, wenn **beide** der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt in Linearfaktoren, also:

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{e_i}, \text{ wobei } e_i = m_a(\lambda_i)$$

- Für alle Eigenwerte λ_i gilt:

$$m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$$