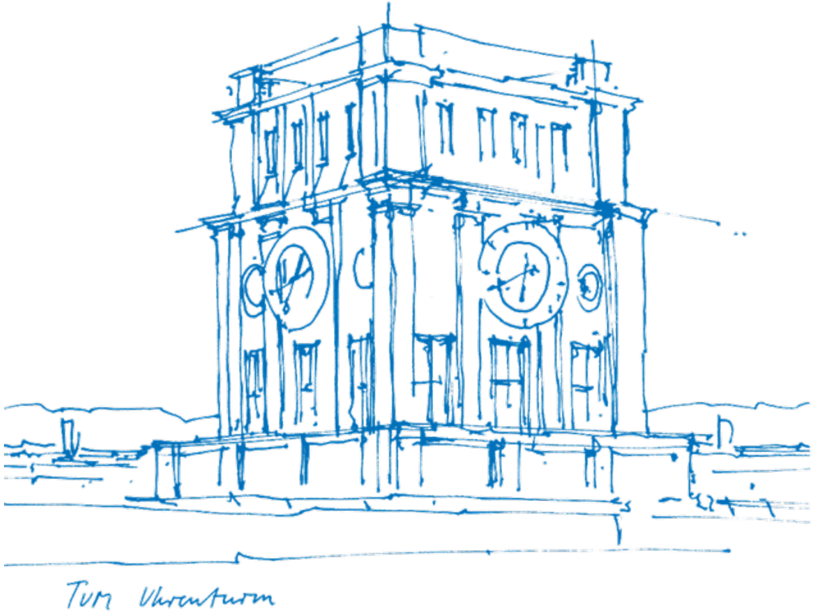
Lineare Algebra für Informatik - Woche 10

Cosmin Aprodu

Technische Universität München

Online, 17 Juni 2021



Skalarprodukte

Für zwei Vektoren $v = (x_1 \cdots x_n)^T \in K^n$ und $w = (y_1 \cdots y_n)^T \in K^n$ heißt

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; (= v^T w) \in K$$

das (**Standard-**)**Skalarprodukt** von v und w. *Achtung: Notation identisch mit der von Erzeugendensystemen!*

Bemerkung: Für alle $u, v, w \in K^n$ und $a \in K$ gelten:

- $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
  (Man sagt auch, dass das Skalarprodukt *symmetrisch* ist.)
- $\langle u, v + a \cdot w \rangle = \langle u, v \rangle + a \cdot \langle u, w \rangle$
- $\langle u + a \cdot v, w \rangle = \langle u, w \rangle + a \cdot \langle v, w \rangle$
  (Man sagt auch, dass das Skalarprodukt *bilinear* ist.)
- $\langle v, v \rangle > 0$, wenn $v \neq 0$
  (Man sagt auch, dass das Skalarprodukt ist *positiv definit* ist.)

Skalarprodukte (2)

Ein reeller Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt heißt ein **euklidischer Raum**.

Sei V ein euklidischer Raum.

- Für $v \in V$ ist die **Länge** (auch **Norm**) von v definiert als:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$$

- Für $v, w \in V$ ist der **Abstand** von v und w definiert als:

$$\mathrm{d}(v, w) := \|v - w\| \geq 0$$

- Für $v, w \in V, v \neq 0, w \neq 0$ ist der **Winkel** α von v und w definiert durch:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Orthogonal oder Orthonormal?

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zwei Vektoren v und w heißen **senkrecht** (auch **orthogonal**) zueinander, falls $\langle v, w\rangle = 0$. Für einen Unterraum $U \subseteq V$ heißt

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0,\ \forall u \in U\}$$

das **orthogonale Komplement** von U. $U^\perp$ ist auch ein *Unterraum* von V.

(1) Eine Menge $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ heißt **Orthogonalsystem**, falls v_i und v_j für $i \neq j$ orthogonal sind.

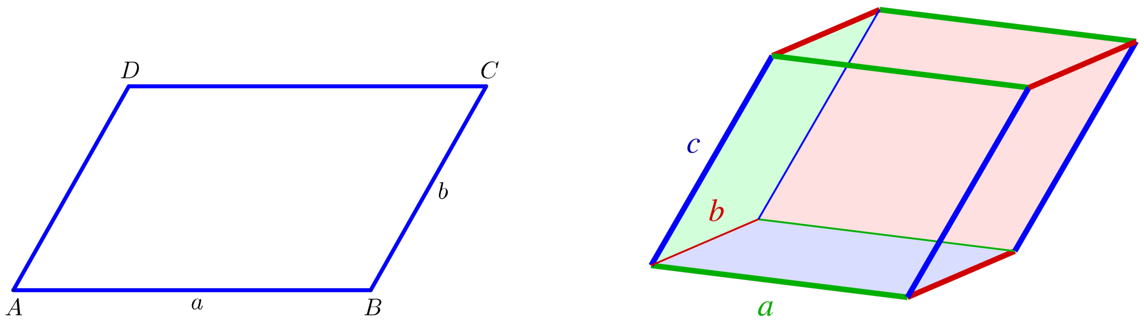
(2) Ein *Orthogonalsystem* $S \subseteq V$ heißt **Orthonormalsystem**, falls zusätzlich $\|v\| = 1$, für alle i.

(3) Ein *Orthonormalsystem* $S \subseteq V$ heißt **Orthonormalbasis**, falls es zusätzlich eine Basis ist.

Determinanten - Intuition

Intuitiv: *Wenn $K = \mathbb{R}$, beschreibt die Determinante das Volumen der entsprechenden geometrischen Figur. Zum Beispiel:*

- *Falls $V = \mathbb{R}^2$, dann beschreibt die Determinante die Fläche des von den Spalten (= Vektoren) aufgespannten Parallelogramms.*
- *Falls $V = \mathbb{R}^3$, dann beschreibt die Determinante das Volumen des von den Spalten (= Vektoren) aufgespannten Parallelepipeds.*
- ...



Source: Google

Determinanten

Sei $A = (a_{i,j}) \in K^{n \times n}$ eine *quadratische* Matrix. Für $\mathbf{n} = \mathbf{1}$, dann $A = (a)$ und $\det(A) = a$. Für $n > 1$:

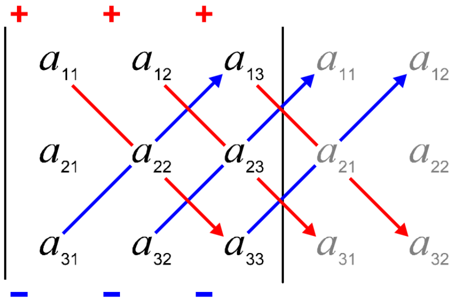
(**1**) Falls $\mathbf{n} = \mathbf{2}$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$

$\rightarrow \det(A) = ad - bc$.

(**2**) Falls $\mathbf{n} = \mathbf{3}$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$

$\rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Zu kompliziert! Regel von Sarrus verwenden:



Determinanten (2)

(**3**) Falls $\mathbf{n} \geq \mathbf{4}$: Laplacescher Entwicklungssatz verwenden:

Sei $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Weglassen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

- Entwicklung nach der i-ten Zeile: Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt dann:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

- Entwicklung nach der j-ten Spalte: Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt dann:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Bemerkung: Der *Laplacesche Entwicklungssatz* gilt *auch* für $n = 2$ und $n = 3$.