Pg. 11

Thursday, 24. June 2021 11:08

(30) a) $A\cdot v = \begin{pmatrix}4&-3&1\\1&0&1\\1&-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix} = 3\cdot v \Rightarrow v$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert 3.

b) $\chi_A = \det\begin{pmatrix}x-4&3&-1\\-1&x&-1\\-1&2&x-3\end{pmatrix}(-1) = \begin{vmatrix}x-4&3&-1\\0&x-2&2-x\\-1&2&x-3\end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix}x-4&3&-1\\0&1&-1\\-1&2&x-3\end{vmatrix} \overset{(+1)}{=} (x-2)\cdot\begin{vmatrix}x-4&3&2\\0&1&0\\-1&2&x-1\end{vmatrix} = (x-2)\cdot\begin{vmatrix}x-4&2\\-1&x-1\end{vmatrix} = (x-2)^2(x-3) \Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$

c) Zwei Eigenräume: E_2 und E_3

$E_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A-2I_3)\cdot v = 0\}$

$= \mathrm{Kern}(A-2I_3)$

$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&-2&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\ (-2)\ (-1)$

$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$E_3:\ m_a(3) = m_g(3) = 1 \Rightarrow \dim(E_3) = 1 \Rightarrow E_3 = \langle v\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

d) $m_a(\lambda_1) = 2$

E_2 ist 1-dimensionaler Eigenraum $\Rightarrow m_g(\lambda_1) = 1$ $\Big\}\Rightarrow m_a(\lambda_1) \neq m_g(\lambda_1) \Rightarrow A$ NICHT diagonalisierbar.

(31) Vorbemerkung: A invertierbar $\Rightarrow 0$ ist KEIN Eigenwert von A : wäre $\lambda' = 0$ Eigenwert $\Rightarrow \lambda'$ Nullstelle von $\chi_A \Rightarrow \det(0\cdot I_n - A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow A$ NICHT invertierbar ↯

$v = I_n\cdot v = A^{-1}\cdot A\cdot v = A^{-1}(Av) = A^{-1}(\lambda v) = \lambda\cdot A^{-1}\cdot v$

$\lambda^{-1}/\ v = \lambda\cdot A^{-1}\cdot v \Leftrightarrow \lambda^{-1}\cdot v = A^{-1}\cdot v \Rightarrow \lambda^{-1}$ Eigenwert von A^{-1} ist.

(32) a)

$\langle u\times v, w\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}u_2v_3 - u_3v_2\\u_3v_1 - u_1v_3\\u_1v_2 - u_2v_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}\right\rangle$

$= w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)$

$= u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - u_3v_2w_1 - v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1$

$= \det\begin{pmatrix}u_1&v_1&w_1\\u_2&v_2&w_2\\u_3&v_3&w_3\end{pmatrix}$

b) Aus a), mit $w = u$, folgt: $\langle u\times v, u\rangle = \det(u|v|u)$ 2 gleiche Spalten $\Big\}\Rightarrow (u\times v)\perp u$

c) „$\Rightarrow$": u, v lin. unabh. $\Rightarrow \exists\, w\in\mathbb{R}^3$ s.d. $\{u, v, w\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist $\Rightarrow 0 \neq \det(u|v|w) \overset{(a)}{=} \langle u\times v, w\rangle \Rightarrow u\times v \neq 0$.

„$\Leftarrow$": es sei $u\times v \neq 0$ und es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda\cdot u + \mu\cdot v = 0$

$0 = 0\times v = (\lambda\cdot u + \mu\cdot v)\times v = \lambda(u\times v) + \mu\underbrace{(v\times v)}_{=0} = \lambda\underbrace{(u\times v)}_{\neq 0} \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$.

Analog für $u\times(\lambda u + \mu v)$, $\boxed{\mu = 0}$. $\Big\}\Rightarrow u, v$ lin. unabh.