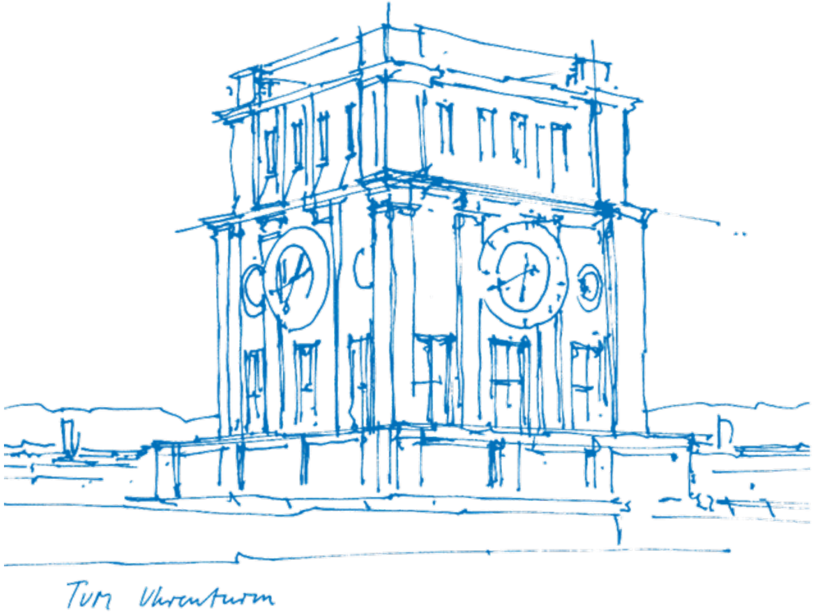
# Lineare Algebra für Informatik - Woche 10

Cosmin Aprodu

Technische Universität München

Online, 17 Juni 2021



# Skalarprodukte

Für zwei Vektoren $v = (x_1 \cdots x_n)^T \in K^n$ und $w = (y_1 \cdots y_n)^T \in K^n$ heißt

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; (= v^T w) \in K$$

das (**Standard-**)**Skalarprodukt** von $v$ und $w$. *Achtung: Notation identisch mit der von Erzeugendensystemen!*

Bemerkung: Für alle $u, v, w \in K^n$ und $a \in K$ gelten:

- $\langle u, v + a \cdot w \rangle = \langle u, v \rangle + a \cdot \langle u, w \rangle$
- $\langle u + a \cdot v, w \rangle = \langle u, w \rangle + a \cdot \langle v, w \rangle$

  (Man sagt auch, dass das Skalarprodukt *bilinear* ist.)
- $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

  (Man sagt auch, dass das Skalarprodukt *symmetrisch* ist.)
- $\langle v, v \rangle > 0$, wenn $v \neq 0$

  (Man sagt auch, dass das Skalarprodukt ist *positiv definit* ist.)

# Skalarprodukte (2)

Sei $V$ ein euklidischer Raum.

- Für $v \in V$ ist die **Länge** (auch **Norm**) von $v$ definiert als:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$$

- Für $v, w \in V$ ist der **Abstand** von $v$ und $w$ definiert als:

$$\mathrm{d}(v, w) := \|v - w\| \geq 0$$

- Für $v, w \in V, v \neq 0, w \neq 0$ ist der **Winkel** $\alpha$ von $v$ und $w$ definiert durch:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

# Orthogonal oder Orthonormal?

Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum. Zwei Vektoren $v$ und $w$ heißen **senkrecht** (auch **orthogonal**) zueinander, falls $\langle v, w\rangle = 0$. Für einen Unterraum $U \subseteq V$ heißt

$$U^{\perp} := \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0, \ \forall u \in U\}$$

das **orthogonale Komplement** von $U$. $U^{\perp}$ ist auch ein *Unterraum* von $V$.

**(1)** Eine Menge $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ heißt **Orthogonalsystem**, falls $v_i$ und $v_j$ für $i \neq j$ orthogonal sind.

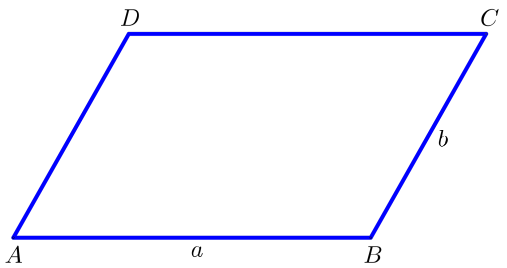
**(2)** Ein *Orthogonalsystem* $S \subseteq V$ heißt **Orthonormalsystem**, falls zusätzlich $\|v\| = 1$, für alle $i$.

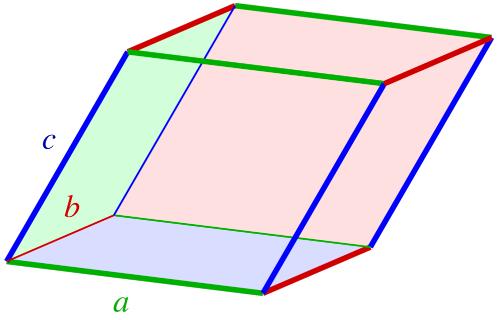
**(3)** Ein *Orthonormalsystem* $S \subseteq V$ heißt **Orthonormalbasis**, falls es zusätzlich eine Basis ist.

# Determinanten - Intuition

Intuitiv: *Wenn $K = \mathbb{R}$, beschreibt die Determinante das Volumen der entsprechenden geometrischen Figur. Zum Beispiel:*

- *Falls $V = \mathbb{R}^2$, dann beschreibt die Determinante die Oberfläche des von den Spalten (= Vektoren) aufgespannten Parallelogramms.*
- *Falls $V = \mathbb{R}^3$, dann beschreibt die Determinante das Volumen des von den Spalten (= Vektoren) aufgespannten Parallelepipeds.*
- ...




*Source: Google*

# Determinanten

Sei $A = (a_{i,j}) \in K^{n \times n}$ eine *quadratische* Matrix. Für $\mathbf{n} = \mathbf{1}$, dann $A = (a)$ und $\det(A) = a$. Für $n > 1$:

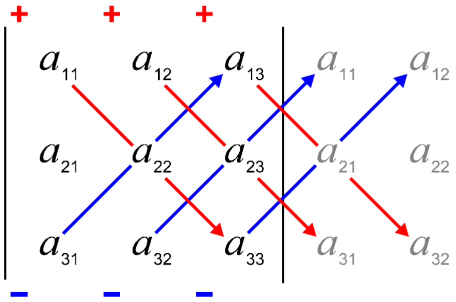
**(1)** Falls $\mathbf{n} = \mathbf{2}$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$

$\rightarrow \det(A) = ad - bc$.

**(2)** Falls $\mathbf{n} = \mathbf{3}$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$

$\rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Zu kompliziert! Regel von Sarrus verwenden:



# Determinanten (2)

**(3) Falls $\mathbf{n \geq 4}$:** Laplacescher Entwicklungssatz verwenden:

Sei $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus $A$ durch Weglassen der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte entsteht.

- Entwicklung nach der $i$-ten Zeile: Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt dann:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

- Entwicklung nach der $j$-ten Spalte: Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt dann:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Bemerkung: Der *Laplacesche Entwicklungssatz* gilt *auch* für $n = 2$ und $n = 3$.