(10) a) x_1, x_2, x_3, x_4 sind Unbekannten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ - Koeff. matrix}$$

Sei $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$ $\Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} 6\lambda - \mu \\ 3\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$ Erzeugendensystem: $\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2} \right\rangle$

v_1, v_2 sind lin. unabh.

$\Bigg\} \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ist eine Basis

b) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ unsere Basis

(11) Sei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, wobei $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$

Deshalb müssen wir zeigen, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x) + \lambda_3 \cdot f_3(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot \sin(x) + \lambda_3 \cdot \cos(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Sei $x = 0$: $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot \sin(0) + \lambda_3 \cdot \cos(0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$.

Sei $x = \pi$: $\lambda_1 \cdot \pi + \lambda_2 \cdot \sin(\pi) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \pi = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$.

Sei $x = \frac{\pi}{2}$: $\lambda_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$.

Weil $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow f_1, f_2, f_3$ lin. unabhängig. $\square$

(12) a) Sei $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$ s.d. $\lambda_0 L_0 + \ldots + \lambda_n L_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = \lambda_0 L_0(a_k) + \ldots + \lambda_n L_n(a_k) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_k)$, $k \in \{0, \ldots, n\}$

$\Rightarrow 0 = \lambda_k \cdot L_k(a_k) \Rightarrow 0 = \lambda_k \cdot 1 \Rightarrow \lambda_k = 0, \forall k \in \{0, \ldots, n\} \Rightarrow L_0, \ldots, L_n$ sind lin. unabh.

b) Existenz: Setze $f = \sum_{j=0}^{n} b_j L_j(a_k) \in K[x]$

$\deg(L_j) = n, \forall j$

$\Bigg\} \Rightarrow \deg(f) \leq n$ ✓

$f(a_k) = \sum_{j=0}^{n} b_j L_j(a_k) \overset{a)}{=} b_k \cdot L_k(a_k) = b_k \cdot 1 = b_k$ ✓

Eindeutigkeit: Sei $g \in K[x]$ ein Polynom mit $\deg(g) \leq n$ und $g(a_k) = b_k$.

$\deg(f - g) \leq n$ und

$(f-g)(a_k) = f(a_k) - g(a_k) = 0$, $k \in \{0, \ldots, n\}$

$(f-g)$ ist auch ein Polynom der $(n+1)$ Nullstellen hat, aber

$\deg(f-g) \leq n \Rightarrow$ MUSS $f-g$ das Nullpolynom sein $\Rightarrow f = g$.

c) $L_0 = \dfrac{x(x-3)}{(-1)\cdot(-1-3)} = \dfrac{x^2-3x}{4}$

$L_1 = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \dfrac{x^2-2x-3}{-3}$

$L_3 = \dfrac{(x+1)x}{(3-(-1))(3-0)} = \dfrac{x^2+x}{12}$

$\Bigg\} \Rightarrow f = 1 \cdot L_0 - 1 \cdot L_1 + 5 \cdot L_2 = x^2 - x - 1$ $\square$

Erklärung:

Gemäß Aufgabe b) wissen wir, dass $f(a_k) = b_k$.

In unserem Fall, sei: $\begin{cases} a_0 = -1 \Rightarrow f(a_0) = 1 \\ a_1 = 0 \Rightarrow f(a_1) = -1 \\ a_2 = 3 \Rightarrow f(a_2) = 5 \end{cases}$

$L_0 = \dfrac{x-a_1}{a_0-a_1} \cdot \dfrac{x-a_2}{a_0-a_2} = \dfrac{x-0}{-1-0} \cdot \dfrac{x-3}{-1-3} = \dfrac{x^2-3x}{4}$

$L_1 = \dfrac{x-a_0}{a_1-a_0} \cdot \dfrac{x-a_2}{a_1-a_2} = \dfrac{x+1}{0+1} \cdot \dfrac{x-3}{0-3} = \dfrac{x^2-2x-3}{-3}$

$L_2 = \dfrac{x-a_0}{a_2-a_0} \cdot \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} = \dfrac{x-0}{3-0} \cdot \dfrac{x+1}{3+1} = \dfrac{x^2+x}{12}$

$\Bigg\} \Rightarrow f = f(a_0) \cdot L_0 + f(a_1) \cdot L_1 + f(a_2) \cdot L_2 =$

$= 1 \cdot L_0 - 1 \cdot L_1 + 5 \cdot L_2 =$

$= \ldots =$

$= x^2 - x - 1$