⑦ a) (i) Die 3. Bed. wird verletzt

Sei $a = 0 \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\Bigg\} \Rightarrow 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \notin M_1$ ϟ

(ii) M_2 ist Unterraum, weil M_2 die Lösungsmenge des LGS: $x + y - 3z = 0$

(iii) $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

(iv) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in M_4$ $\quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \notin M_4$ ϟ

(v) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in M_5$, aber $(-5) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \notin M_5$ ϟ

b) (i) Seien $f, g \in M_1$, dann $f(1) = 0$ und $g(1) = 0$.

$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$ ✓

Sei $f \in M_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann: $(\lambda f)(1) = \lambda \cdot f(1) = \lambda \cdot 0 = 0$ ✓ $\Bigg\} \Rightarrow M_1$ Unterraum

(iii) Sei: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ $\Bigg\} \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x$, endlich viele Nullstellen, (z.B. $x = 0$) ϟ

c) I Behauptung: $U \cap M_1 = \{0\}$

$M_1 \cap U \subseteq \{0\} \Leftarrow$ Sei $f \in U \cap M_1 \Rightarrow f$ konstant UND $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow M_1 \cap U \subseteq \{0\}$

$\{0\} \subseteq M_1 \cap U$ trivial

II Behauptung: $U + M_1 = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$U + M_1 \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ trivial

$\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq U + M_1 \Leftarrow$ Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(1)$, dann gilt: $g \in M_1 \Rightarrow f - g$ konstant $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \underset{\substack{\cap \\ M_1}}{g(x)} + \underset{\substack{\cap \\ U}}{(f(x) - g(x))} \in M_1 + U$

⑧ $U = \langle v_1, v_2 \rangle = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda+\mu\\\mu\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

Gilt $\langle v_3, v_4 \rangle = U$?

Wenn das richtig wäre, könnten wir sagen: $v_3 \in U$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in U$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda+\mu\\\mu\end{pmatrix}$,

Das bedeutet: $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$ ϟ $\Rightarrow U \neq \langle v_3, v_4 \rangle$

⑨ a) $S_1 \subseteq S_2$

Jede Element $v \in \langle S_1 \rangle$ ist eine Linearkombination von Vektoren aus S_1 $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow v$ ——— // ——— aus $S_2 \Rightarrow v \in \langle S_2 \rangle \Rightarrow \langle S_1 \rangle \subseteq \langle S_2 \rangle$

b) Gegenbeispiel: für $V = \mathbb{R}^2$

$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$, $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ $\Bigg\} \Rightarrow \langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle \Rightarrow \langle S_1 \rangle \subseteq \langle S_2 \rangle$, ABER $S_1 \nsubseteq S_2$

c) $u, w \in \langle u, w \rangle \Rightarrow 1 \cdot u + 2 \cdot w \in \langle u, w \rangle \Rightarrow \langle u, w \rangle = \langle u, w, u + 2w \rangle$

d) Gegenbeispiel: für $V = \mathbb{R}^2$

$u = w = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\Bigg\} \Rightarrow u \in \langle v, w \rangle$ ABER $v \notin \langle u, w \rangle = \{0\}$