Pg. 14

Wednesday, 14. July 2021 22:36

Darstellungsmatrizen & Basiswechselmatrizen:

Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V

$C = \{w_1, \dots, w_m\}$ Basis von W

- $\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \Rightarrow A = (a_{ij})$ ist Darstellungsmatrix von φ bzgl. B und C.

- $T_C^B = M_C^B(id)$ $(id(x) = x)$

Beispiel (T 25):

- $M_B(\varphi)$, B Standardbasis, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \underline{1}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underline{0}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \underline{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}1\\0\\2\end{matrix} \text{ erste Spalte} \\ \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \dots \Rightarrow \begin{matrix}-1\\-1\\0\end{matrix} \text{ zweite Spalte} \\ \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = \dots \Rightarrow \begin{matrix}0\\3\\0\end{matrix} \text{ dritte Spalte} \end{array}\right\} \Rightarrow M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $M_{B'}(\varphi)$, $B' = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}1\\-2\\2\end{matrix} \text{ Spalte} \\ \varphi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}1\\-3\\2\end{matrix} \text{ Spalte} \\ \varphi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = (-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}-2\\0\\2\end{matrix} \text{ Spalte} \end{array}\right\} \Rightarrow M_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

↳ 2-te Variante:

$$M_{B'}(\varphi) = T_{B'}^{B} \cdot M_B(\varphi) \cdot T_B^{B'}.$$

① V ist $\mathbb{R}$-Vr.

$\dim(V) = 13$

$B = \{v_1, \dots, v_{13}\}$ Basis

Bestimmen alle $i \in \{1, \dots, 13\}$ s.d. $B := (B \setminus \{v_i\}) \cup \{v\}$ Basis von V.

Wobei $\underbrace{v = 2v_3 - 5v_6 + 10v_7 - 11v_{12}}$ $\in V$

$v_3 = \frac{1}{2}(v + 5v_6 - 10v_7 + 11v_{12})$

$v_6 = \dots$

$v_7 = \dots$

$v_{12} = \dots$

$\Rightarrow i = \{3, 6, 7, 12\}$

② $\varphi: \mathbb{F}_3^5 \to \mathbb{F}_3$, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5$

$|\varphi^{-1}(2)| = ?$

$\varphi(x) = 2 = x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5$

x_1	x_2	x_3	x_5
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	2	2

.....

③ $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M \in SO_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} M^T \cdot M = I_n \\ \det(M) = 1 \end{cases}$

Gilt $A \in SO_n(\mathbb{R})$?

$\det(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) = \frac{2}{\sqrt{2}} \neq 1 \Rightarrow A \in SO_n(\mathbb{R})$

④ U, V zwei K-Vr.

$\{u_1, u_2\} \subseteq U$ lin. unabh.

$\varphi: U \to V$ lineare Abbildung, injektiv

Zeigen Sie $\{\varphi(u_1), \varphi(u_2)\} \subseteq V$ lin. unabh.

φ injektiv $\Leftrightarrow$ Kern$(\varphi) = \{0\}$

Sei $\alpha, \beta \in K$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cdot \varphi(u_1) + \beta \cdot \varphi(u_2) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\alpha u_1 + \beta u_2) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 \in \text{Kern}(\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 = 0 \\ u_1, u_2 \text{ lin. unabh.} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \varphi(u_1), \varphi(u_2) \text{ lin. unabh.}$$

⑤ $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$B = \{1, x, x^2, x^3\}$ Standardbasis von V.

$C = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ Basis von $\mathbb{R}^3$.

$\varphi: V \to \mathbb{R}^3$, $f(x) \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(-1) \end{pmatrix}$ lineare Abbildung

Bestimmen Sie $M_C^B(\varphi)$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{1}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underline{0}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \underline{1}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \\ \varphi(x) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \underline{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underline{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \underline{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \\ \varphi(x^2) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{0}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underline{0}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \underline{1}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \\ \varphi(x^3) = \varphi(x) \end{array}\right\} \Rightarrow M_C^B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{T\,16}$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = -(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow \dim(U) = 3.$

Vielen Dank &
viel Erfolg!