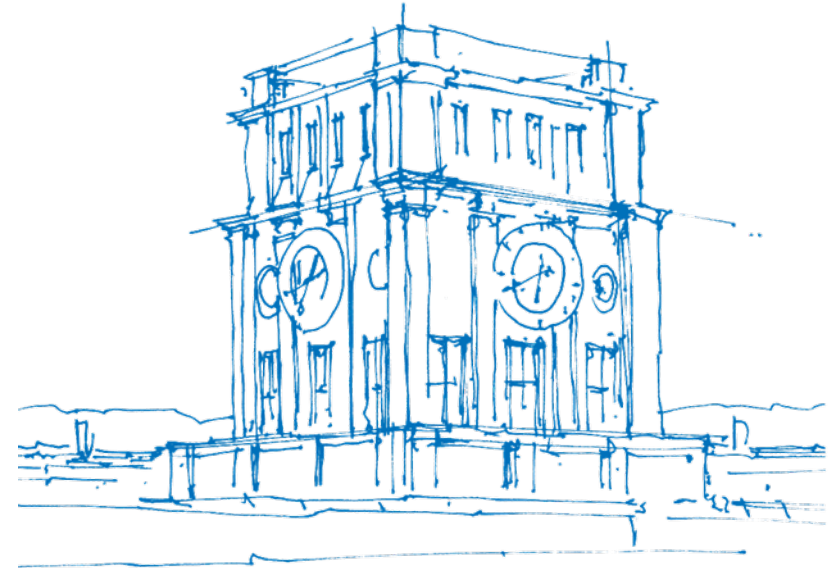


# Lineare Algebra für Informatik - Woche 11

Cosmin Aprodu

Technische Universität München

Online, 24 Juni 2021



*TUM Uhrenturm*

# Eigenwerte und Polynome

Sei  $K$  wieder ein Körper und  $A \in K^{n \times n}$  eine *quadratische* Matrix. Ein  $\lambda \in K$  heißt **Eigenwert** von  $A$ , falls es  $v \in K^n \setminus \{0\}$  gibt mit  $A \cdot v = \lambda \cdot v$ . Ein solcher Vektor  $v$  heißt dann ein **Eigenvektor** von  $A$  (zum Eigenwert  $\lambda$ ).

$$E_\lambda := \{v \in K^n \mid A \cdot v = \lambda \cdot v\}$$

heißt **Eigenraum** (zum Eigenwert  $\lambda$ ).

Sei  $A \in K^{n \times n}$  eine quadratische Matrix. Das Polynom

$$\chi_A := \det(x \cdot I_n - A) \in K[x]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von  $A$ .

**Wichtig:** Die Eigenwerte einer quadratischen Matrix  $A$  sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_A$ .

# Vielfachheiten

Es sei  $\lambda \in K$  ein *Eigenwert* einer Matrix  $A \in K^{n \times n}$ .

- Die **algebraische Vielfachheit**  $m_a(\lambda)$  von  $\lambda$  ist die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda$  im charakteristischen Polynom  $\chi_A$ .
- Die **geometrische Vielfachheit**  $m_g(\lambda)$  von  $\lambda$  ist definiert wie folgt:

$$m_g(\lambda) := \dim(E_\lambda)$$

**Bemerkung:**  $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

*Beispiel:* Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Dann gilt:  $\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2$ . Also ist  $\lambda_0 = 1$  der einzige Eigenwert mit

$m_a(\lambda_0) = 2$  (wegen Potenz von  $x-1$ ). Weiter, bemerken wir, dass  $A - \lambda_0 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  Rang 1 hat  $\Rightarrow \dim(E_{\lambda_0}) = 1$   
 $\Rightarrow m_g(\lambda_0) = 1$ .

# Diagonalisierbar oder nicht?

**Erinnerung:**  $GL_n(K) = \{S \in K^{n \times n} \mid S \text{ invertierbar}\}.$

Eine quadratische Matrix  $A \in K^{n \times n}$  heißt **diagonalisierbar**, falls  $A$  ähnlich zu einer Diagonalmatrix  $D$  ist, also:

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1} \text{ oder auch } D = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

für eine Matrix  $S \in GL_n(K)$ . Die Eigenvektoren sind dabei die Spalten von  $S$ .

**Wichtig:** Eine quadratische Matrix  $A \in K^{n \times n}$  ist genau dann *diagonalisierbar*, wenn **beide** der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Das charakteristische Polynom  $\chi_A$  zerfällt in Linearfaktoren, also:

$$\chi_A = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{e_i}, \text{ wobei } e_i = m_a(\lambda_i)$$

- Für alle Eigenwerte  $\lambda_i$  gilt:

$$m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$$