36 A symmetrisch $\Rightarrow$ es gibt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

$\chi_A = \det\begin{pmatrix} x-5 & -12 \\ -12 & x+2\end{pmatrix} = (x-5)(x+2) - 144 = x^2-5x+2x-10-144 = x^2-3x-154 = x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 154 = \left(x-\frac32\right)^2 - \frac{625}{4} = \left(x-\frac32-\frac{25}{4}\right)\left(x-\frac32+\frac{25}{4}\right) = (x-14)(x+11)$. $\Rightarrow$ 14 und -11 Eigenwerte.

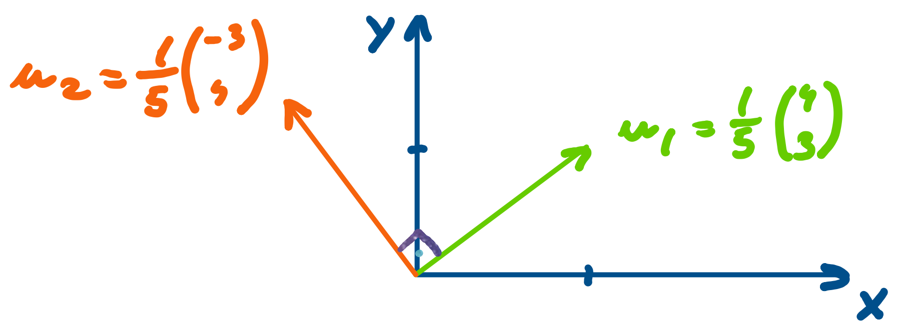
E_{14} (ergibt sich als Lösungsraum des homogenen LGS $14I_2 - A$):

$14I_2 - A = \begin{pmatrix}9 & -12\\ -12 & 16\end{pmatrix} \begin{matrix}|\cdot\frac13\\|\cdot\frac14\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}3&-4\\-3&4\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}3&-4\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow E_{14} = \left\langle\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right\rangle$. Sei $v_1 = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

Auf die Basis von E_{14}, wenden wir das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren einmal an:

$\|v_1\| = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \Rightarrow w_1 = \frac15\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

A symmetrisch und $-11 \neq 14$ Eigenwerte $\Rightarrow \forall v\in E_{-11} \wedge \forall w \in E_{14}, \langle v,w\rangle = 0 \Rightarrow$ Wir suchen für ein w_2 s.d. $w_2 \perp w_1$.



Also, $w_2 = \frac15\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

37 $A = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow A^T\cdot A = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{A^TA} = \det\begin{pmatrix}x-2&-1\\-1&x-2\end{pmatrix} = (x-2)^2-1 = (x-3)(x-1) \Rightarrow$ 3 und 1 Eigenwerte für $A^T A$.

Bestimmung von E_3: $3I_2 - A^T\cdot A = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow E_3 = \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$. Wir normieren und erhalten: $v_1 = \frac{1}{\sqrt2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Nach den Folien, wissen wir, dass $E_3 \perp E_1$. Also genügt, für einen Erzeuger von E_1, einen auf v_1 senkrechten Vektor der Länge 1 anzugeben: $v_2 = \frac1{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Wie bei Diagonalisierung, bilden wir eine Matrix mit v_1 und v_2 als Spalten: $V = (v_1\ \ v_2) = \frac1{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

Analog, brauchen wir eine orthogonale Matrix $U = (u_1\ \ u_2\ \ u_3)$ s.d. U^TAV eine Diagonalmatrix ist.

$A\cdot V = \begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A\cdot v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac1{\sqrt6}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \\ A\cdot v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac1{\sqrt2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow u_3 = u_1\times u_2 = \frac{1}{2\sqrt3}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac1{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}. \Rightarrow U = \frac1{\sqrt6}\begin{pmatrix}1&-\sqrt3&\sqrt2\\2&0&-\sqrt2\\1&\sqrt3&\sqrt2\end{pmatrix}$.