Pg. 2

Thursday, April 22, 2021 1:53 PM

④
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -3 \\ 2x_1 - 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 10 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2) \\ (-1) \\ (2) \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) (+1) \rightsquigarrow$$

erweiterte Koeff. matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Big| \left(\cdot \tfrac{1}{2}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) (-1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Big| \left(-\tfrac{1}{3}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) (\cdot 5) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) (2) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Big| (-1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ \lambda \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

⑤ Typ I: Vertauschen der Zeilen i und j:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Typ II: Multiplizieren der Zeile i mit einem Skalar $s \in K \setminus \{0\}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Typ III: Addieren des s-fachen Vielfachen der Zeile i zur Zeile j für einen Skalar $s \in K$:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & s & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

③ **Erklärung**: Warum gibt es W invert. und R in Zf.?

Der Gauß Algorithmus liefert eine Matrix R in Zf. und verwendet ausschließlich Zeilenoperationen.
Aus TS $\Rightarrow$ $\forall$ Zeilenoperation, $\exists$ E Matrix s.d. das Ergebnis nach der Op. gleich $E \cdot A$ ist.
Die verwendete Matrizen sind: $E_1, E_2, \dots, E_n$ $\Rightarrow$ sei $W = E_s \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1$ eine Matrix mit alle Op.
Aus dieser Grund $\Rightarrow$ $W \cdot A = R$

W invertierbar $\Rightarrow \exists V = W^{-1}$

$W^{-1} / \; W \cdot A = R \Rightarrow A = W^{-1} \cdot R$

$A \cdot x = b$ $\Big\} \Rightarrow W^{-1} R \cdot x = b \Rightarrow R x = W \cdot b$

sei $b' = W \cdot b$ $\Big\} \Rightarrow R \cdot x = b'$

weil R in Zf. $\Rightarrow$ VIEL SCHNELLER LGS zu berechnen, durch Rückwärtssubstitution. □