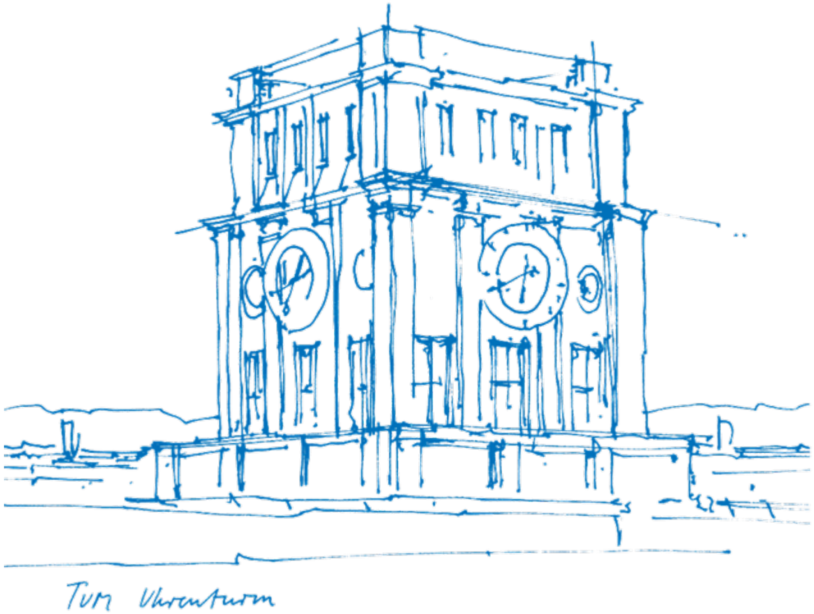
Lineare Algebra für Informatik - Woche 9

Cosmin Aprodu

Technische Universität München

Online, 10 Juni 2021



Basiswechselmatrix

Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ zwei Basen von V. Wir können die *neuen* Basisvektoren w_j, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ mit Hilfe der alten ausdrücken:

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} v_i$$

für eindeutige $a_{i,j} \in K$. Die Matrix $T_C^B = (a_{i,j}) \in K^{n \times n}$ heißt **Basiswechselmatrix** und beschreibt den Übergang von B zu C.

Bemerkungen:

- Für eine Basiswechselmatrix T_C^B, es gilt:

$$T_C^B = (T_B^C)^{-1}$$

- Sei V ein K-Vektorraum, B eine Basis und C die Standardbasis. Dann bilden die Vektoren von B genau die Spalten von T_C^B.

  Beispiel:

  $V = \mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, C ist Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Dann gilt: $T_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Darstellungsmatrizen - Weitere Begriffe

Seien U, V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit Basen A, B bzw. C, und es seien $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann gilt:

$$M_C^A(\psi \circ \varphi) = M_C^B(\psi) \cdot M_B^A(\varphi)$$

Seien B und C endliche Basen von V und sei T_B^C die Basiswechselmatrix. Dann gilt für eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$:

$$\begin{aligned} M_C(\varphi) &= (T_B^C)^{-1} \cdot M_B(\varphi) \cdot T_B^C \\ &= T_C^B \cdot M_B(\varphi) \cdot T_B^C \end{aligned}$$

Seien B, B' endlichen Basen von V und C, C' endliche Basen von W. Dann gilt für eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$:

$$M_{C'}^{B'}(\varphi) = T_{C'}^{C} \cdot M_C^B(\varphi) \cdot T_B^{B'}$$