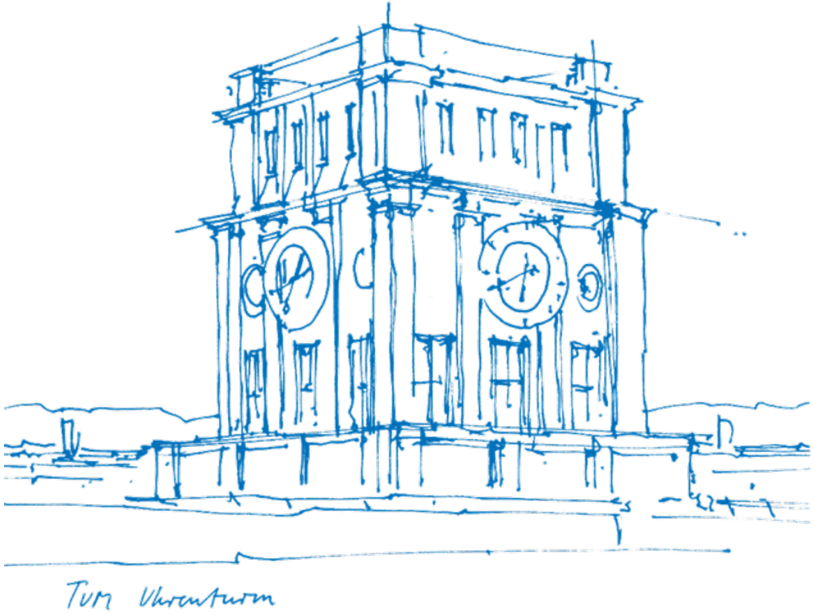
Lineare Algebra für Informatik - Woche 7

Cosmin Aprodu

Technische Universität München

Online, 27 Mai 2021



Wiederholung - Vektorräume

Eine Menge V ist ein K-**Vektorraum** zusammen mit zwei Abbildungen $\oplus : V \times V \to V, (v, w) \mapsto v \oplus w$ und $\odot : K \times V \to V, (a, v) \mapsto a \odot v$, so dass folgende Axiome gelten:

(1) $(V, \oplus)$ ist eine kommutative (abelsche) Gruppe.

(2) Für alle $a \in K$ und $v, w \in V$ gilt:

$$a \odot (v \oplus w) = a \odot v \oplus a \odot w$$

(3) Für alle $a, b \in K$ und $v \in V$ gilt:

$$(a + b) \odot v = a \odot v \oplus b \odot v$$

(4) Für alle $a, b \in K$ und $v \in V$ gilt:

$$(a \cdot b) \odot v = a \odot (b \odot v)$$

(5) Für alle $v \in V$ gilt:

$$1 \odot v = v, \ 1 \in K$$

Lineare Abbildungen

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit Abbildungen $\oplus$, $\odot$ und W ein K-Vektorraum mit Abbildungen $\oplus$, $\odot$. Eine $\varphi : V \to W$ heißt **linear**, falls:

- Für alle $v, v' \in V$, $\varphi(v \oplus v') = \varphi(v) \oplus \varphi(v')$.
- Für alle $v \in V$ und $a \in K$, $\varphi(a \odot v) = a \odot \varphi(v)$ (insbesondere $\varphi(0) = 0$).

Im folgenden, verwenden wir *als Notation* die Addition $(+)$ und die Multiplikation $(\cdot)$ anstelle von $\oplus$, $\odot$ und $\oplus$, $\odot$. Dies bedeutet *nicht*, dass wir uns nur auf die ersten beiden Operationen beziehen!

Wichtige Beispiele:

- Die Abbildung $V \to W,\ v \mapsto 0$ ist *linear* und heißt **Nullabbildung**.
- Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix, dann ist φ_A eine *lineare* Abbildung, wobei:

$$\varphi_A : K^n \to K^m,\ v \mapsto A \cdot v$$

Kern und Bild

Sei $\varphi : V \to W$ eine *lineare* Abbildung.

- $\mathrm{Kern}(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$. Zusätzlich ist $\mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq V$ ein Unterraum.
- $\mathrm{Bild}(\varphi) := \varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \subseteq W$. Zusätzlich ist $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq W$ ein Unterraum.

Bemerkung: Die folgende Äquivalenzen gelten:

$$\varphi \text{ ist } \textit{injektiv} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$$

$$\varphi \text{ ist } \textit{surjektiv} \;\Leftrightarrow\; \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(W)$$

Dimensionssatz: Sei $\varphi : V \to W$ eine *lineare* Abbildung. Dann gilt:

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$$

Isomorphismen

Eine *lineare* Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt **Isomorphismus**, falls φ **bijektiv** ist. Dann ist auch $\varphi^{-1} : W \to V$ ein *Isomorphismus*.
$\to$ V und W heißen **isomorph**, falls es ein *Isomorphismus* $V \to W$ gibt. Notation: $V \cong W$.

Es gelte $\dim(V) = \dim(W) < \infty$ und $\varphi : V \to W$ sei eine *lineare* Abbildung. Dann sind äquivalent:

- φ ist ein *Isomorphismus*.
- φ ist *injektiv*.
- φ ist *surjektiv*.