19 a) φ_1 ist linear, denn $\varphi_1 = \varphi_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

b) φ_2 ist nicht linear, denn: $\varphi_2\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}8\\0\\-2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} = 2\cdot\varphi_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

c) φ_3 ist nicht linear, denn $\varphi_3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

d) φ_4 ist linear, denn: sei $f, g \in \mathbb{R}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_4(f + \lambda g) \overset{?}{=} \varphi_4(f) + \lambda\cdot\varphi_4(g)$$

$$\varphi_4(f + \lambda\cdot g) = (f + \lambda\cdot g)(x^2) = \underbrace{f(x^2)}_{\varphi_4(f)} + \lambda\cdot\underbrace{g(x^2)}_{\varphi_4(g)} = \underbrace{\varphi_4(f) + \underbrace{\lambda\cdot\varphi_4(g)}_{2.\text{ Bed.}}}_{1.\text{ Bed.}}$$

20 a) $\varphi_A : K^n \to K^m,\ v \mapsto A\cdot v\ ,\ A \in K^{m\times n}$

$$\text{Bild}(\varphi_A) = \{A\cdot x \mid x \in K^n\} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1,\dots,x_n \in K\right\} =$$

$$= \left\{ x_1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}}_{=s_1} + \dots + x_n\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}}_{=s_n} \,\middle|\, x_1,\dots,x_n \in K \right\} = \langle s_1,\dots,s_n\rangle$$

b) 1. Teil: $\text{Kern}(\varphi_A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi_A(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A\cdot x = 0\}$. Wir sollen das durch A gegebene homogene LGS.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (+2) \\ (-1) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} (+1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 2 freie Variablen, also $\text{rg}(A) = 2 \overset{\text{Prop. 6.11}}{\Longrightarrow}$ irgendwelche Basis muss $4 - \text{rg}(A) = 4 - 2 = 2$ Vektoren haben.

Beispiel Basis: $B = \left\{\begin{pmatrix}-1\\-4\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

2. Teil: Aus a), $\text{Bild}(\varphi_A) = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} \right\rangle$

$4 = \underbrace{\dim(\text{Kern}(\varphi_A))}_{=2} + \dim(\text{Bild}(\varphi_A)) \Rightarrow \dim(\text{Bild}(\varphi_A)) = 4 - 2 = 2$

$\Rightarrow$ Wir wählen 2 Vektoren aus: z.B. $C = \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

(die 2 Vektoren MUSSEN lin. unabh. sein)

21 0_V ist der Nullvektor von V.
0_W ist der Nullvektor von W.

1) Nullvektor:

U Unterraum $\Rightarrow 0_V \in U$.
φ linear $\Rightarrow 0_W = \varphi(0_V) \in \varphi(U)$

2) Abgeschlossenheit bezgl. Addition:

Es seien $w_1, w_2 \in \varphi(U)$, dann $\exists\, u_1, u_2 \in U$ s.d. $\varphi(u_1) = w_1$, $\varphi(u_2) = w_2$.
U Unterraum $\Rightarrow u_1 + u_2 \in U$
φ linear $\Rightarrow w_1 + w_2 = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \varphi(u_1 + u_2) \in \varphi(U)$

3) Abgeschlossenheit bezgl. Multiplikation:

Es seien $w \in \varphi(U)$ und $\lambda \in K$, dann $\exists\, u \in U$ s.d. $\varphi(u) = w$
U Unterraum $\Rightarrow \lambda\cdot u \in U$
φ linear $\Rightarrow \lambda\cdot w = \lambda\cdot\varphi(u) = \varphi(\lambda\cdot u) \in \varphi(U)$