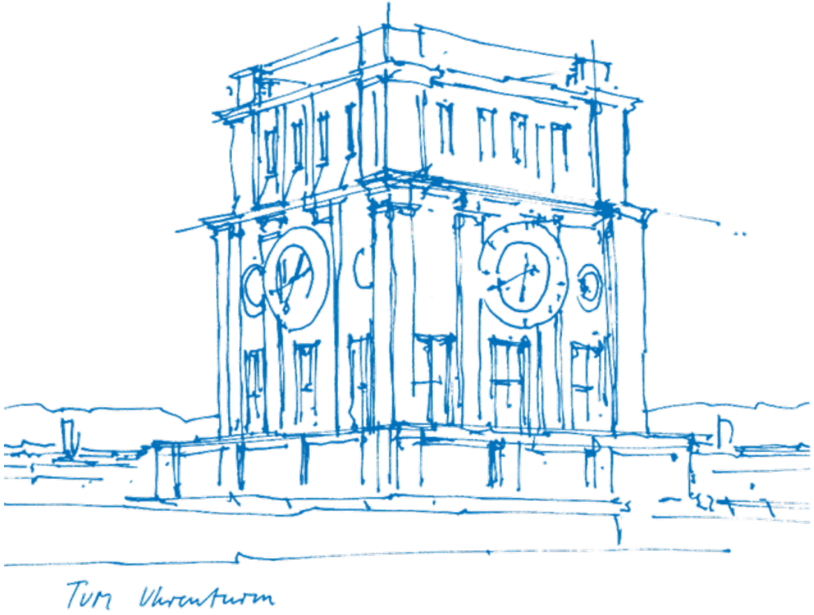
Lineare Algebra für Informatik - Woche 8

Cosmin Aprodu

Technische Universität München

Online, 03 Juni 2021



Lineare Fortsetzung

Erinnerung: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit Abbildungen $\oplus$, $\odot$ und W ein K-Vektorraum mit Abbildungen $\oplus$, $\odot$.
Eine $\varphi : V \to W$ heißt **linear**, falls:

- Für alle $v, v' \in V$, $\varphi(v \oplus v') = \varphi(v) \oplus \varphi(v')$.
- Für alle $v \in V$ und $a \in K$, $\varphi(a \odot v) = a \odot \varphi(v)$ (insbesondere $\varphi(0) = 0$).

Prinzip der linearen Fortsetzung: Es sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V.

- Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ ist durch die Bilder der Basisvektoren v_i *eindeutig bestimmt*. Anders ausgedrückt: Ist $\psi : V \to W$ eine weitere lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = \psi(v_i), \forall i \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt: $\varphi = \psi$.
- Seien $w_1, \dots, w_n \in W$ beliebig. Dann gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ mit $\varphi(v_i) = w_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Darstellungsmatrizen

Intuitiv: *Warum Darstellungsmatrizen? Eine* ***Darstellungsmatrix*** *stellt eine Beziehung zwischen dem konkreten Konzept der Matrizen und dem abstrakten Konzept der linearen Abbildungen dar.*

Sei V, W zwei K-Vektorräume und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ bzw. $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ Basen von V bzw. W. Ferner, sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ und $a_{i,j} \in K$ können wir schreiben: $\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i$. Nun bilden wir die Matrix:

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

Diese Matrix heißt die **Darstellungsmatrix** von φ (bzgl. der Basen B und C). Notation: $A = D_{C,B}(\varphi)$ (auch $M_C^B(\varphi)$).
$\to$ Die *Spalten* von A sind die *Koordinatenvektoren* der $\varphi(v_i)$.

Darstellungsmatrizen (2)

Bemerkungen:

- Falls $V = W$, so verwendet man dieselbe Basis $B = C$ und schreibt: $D_B(\varphi) \in K^{n \times n}$ (auch $M_B(\varphi)$).
- φ ist durch seine Darstellungsmatrix *eindeutig bestimmt* (wegen des *Prinzips der linearen Fortsetzung*).

Falls $V = K^n$ und $W = K^m$ mit Basen B und C, $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $A := D_{C,B}(\varphi) = M_C^B(\varphi)$. Dann gilt:

$$\varphi = \varphi_A$$

Inverse einer Matrix

Eine *quadratische* Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt **invertierbar**, falls es $B \in K^{n \times n}$ gibt mit $A \cdot B = I_n$. B heißt dann die **Inverse** von A und wird als $B = A^{-1}$ geschrieben. B ist dann *eindeutig bestimmt* und es gilt auch $B \cdot A = I_n$ (also $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$).
$\rightarrow$ Für $A \in K^{n \times n}$ gilt also die Äquivalenz:

$$A \text{ invertierbar} \;\Leftrightarrow\; A \text{ regulär}$$

Spezialfall:
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$. Wenn $ad - bc \neq 0$ ist, besitzt A eine Inverse und diese ist: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
$\rightarrow$ Der Wert $\det(A) := ad - bc$ heißt die **Determinante** und die folgende Äquivalenz gilt auch:

$$A \text{ invertierbar} \;\Leftrightarrow\; \det(A) \neq 0 \tag{1}$$

Bemerkung: Aussage (1) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, aber diese Fälle werden wir in einem zukünftigen Kapitel betrachten.