GAL - Sem 4

14.03.2024

Repere coordonate. Operații cu subspații

1) Fie $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$ și $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic.

$R' = \{e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3,\ e_2' = e_1 + 7e_2 + e_3,$

$e_3' = -e_1 + e_2 + e_3\}$

a) R' este reper în $\mathbb{R}^3$

$R_0 \xrightarrow{a} R'$ $A = ?$ (matricea de trecere)

b) Coordonatele lui $X = (3, 2, 1)$ în raport cu R'

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 7 - 2 + \cancel{1} + 7 - \cancel{1} - 2 = 10 \Rightarrow rg A = 3 = \text{maxim}$

$\Rightarrow R_0$ și R' sunt la fel orientate ($\det A > 0$).

(ambele sunt pozitiv orientate)

b) $X=(3,2,1)=x_1'(1,2,1)+x_2'(1,7,1)+x_3'(-1,1,1)$

$=(x_1', 2x_1', x_1')+(x_2', 7x_2', x_2')+(-x_3', x_3', x_3')=$

$=(x_1'+x_2'-x_3', 2x_1'+7x_2'+x_3', x_1'+x_2'+x_3')$

$$\begin{cases} x_1'+x_2'-x_3'=3 \\ 2x_1'+7x_2'+x_3'=2 \\ x_1'+x_2'+x_3'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1'+2x_2'=4 \\ x_1'+6x_2'=1 \\ x_3'=-3+x_1'+x_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1'+2x_2'=4 \\ -2x_1'-12x_2'=-2 \\ x_3'=x_1'+x_2'-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10x_2'=2 \\ x_1'=2-x_2' \\ x_3=x_1'+x_2'-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2'=-\frac{1}{5} \\ x_1'=\frac{11}{5} \\ x_3'=-1 \end{cases} \Rightarrow (x_1', x_2', x_3')=\left(\frac{11}{5}, -\frac{1}{5}, -1\right)$$

coord. lui X în rap. cu R'

3) Fie $(V,+,\cdot)$ sp. vect. 3-dim ($\dim_{\mathbb{R}} V=3$)

Fie $R=\{v_1, v_2, v_3\}$ reper în V și

$R'=\{v_1'=v_1, v_2'=v_1+v_2, v_3'=v_1+v_2+v_3\}\subset V$

a) Să se arate că R' este reper în V; $R\xrightarrow{A}R'$, $A=?$

b) Dacă $v\in V$ are coordonatele (x_1, x_2, x_3) în rap cu reperul R, atunci care sunt coordonatele (x_1', x_2', x_3') în rap. cu reperul R'?

Matricea comp. vectorilor în raport cu reperul R

$$A=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Rang $A=3=$ maxim $\xrightarrow{\text{Crit LI}}$ R' este SLI

Dar $|R|=3=\dim_{\mathbb{R}} V$

$\Rightarrow R$ reper/bază

$X = A \cdot X'$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1' + x_2' + x_3' \\ x_2' + x_3' \\ x_3' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x_3' = x_3} \\ x_2' + x_3' = x_2 \\ \boxed{x_2' = x_2 - x_3} \\ x_1' + x_2' + x_3' = x_1 \\ x_1' = x_1 - x_3 - (x_2 - x_3) \\ \boxed{x_1' = x_1 - \cancel{x_3} - x_2 + \cancel{x_3} = x_1 - x_2} \end{cases}$$

$(x_1', x_2', x_3') = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3)$

Coord. în rap. cu R

(4) $(\mathbb{R}_3[X], +, \cdot)|_{\mathbb{R}}$

$V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$

$V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$

$V_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$

a) $V_i \subseteq \mathbb{R}_3[X]$ subsp. vect $\forall i = \overline{1,3}$

b) R_i reper în V_i cu $i = \overline{1,3}$

c) $P_1 = X + 2X^2 + 3X^3 \in V_1$

$P_2 = 1 + 2X^2 - 3X^3 \in V_2$

$P_3 = X + 3X^2 - 4X^3 \in V_3$

Vrem coord. în rap. cu R_i, $i = \overline{1,3}$

Fie $P \in V_1 \Rightarrow P(0)=0$

$Q \in V_1 \Rightarrow Q(0)=0$ $\Bigg| \Rightarrow (P+Q)(0) = P(0)+Q(0)=0$

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$

$(\alpha P)(\alpha) = \alpha\, P(\alpha) = 0 \Rightarrow V_1 =$ subsp. vect.

Fie $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$

$P \in V_1 \Rightarrow Q =$ rădăcină al lui $P \Rightarrow P = X\, Q,\ Q \in \mathbb{R}_2[X]$

$P = X(b_0 + b_1 X + b_2 X^2) = X \cdot b_0 + X^2 \cdot b_1 + X^3 \cdot b_2$

$P_1 = \{X, X^2, X^3\} \in S$

$R_0 \subset R_1 = \{1, X, X^2, X^3\} \Rightarrow R_1 = SLI \Rightarrow R_1 =$ rep. în V_1

SLI

$(1,2,3)$ sunt coord lui P_1 în rap. cu R

$P \in V_2 \Rightarrow 1 =$ rădăcină pt. $P_0 \Rightarrow P = (X-1)(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)$

$a_0 (X-1) + a_1 \cdot X(X-1) + a_2 \cdot X^2 (X-1)$

$R_2 = \{X-1, X^2+1-2X\}$

SG

$$rg\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad SLI \quad \text{repr}$$

$R_2' = \{X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\}$ reper^2 în V_2

$R_3' = \{X^2 - X, X^3 - X^2\}$ reper în V_3

$R_2 = \{x-1, x^2-x, x^3-x^2\}$

$1+2x^2-3x^3 = a\cdot(x-1)+b(x^2-x)+c(x^3-x^2)$

$\begin{cases} c=-3 \\ b=-1 \\ a=-1 \end{cases}$ $(-1,-1,-3)$ coord. lui P în rap. cu reperul R_2

$x+3x^2-x^3 = a(x^2-x)+b(x^3-x)$

$\begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases}$ $(-4,3)$ coord. lui P_3 în rap. cu R_3

d) $R_3[x] = V_1 \oplus V_1'$

$R_1 = \{x, x^2, x^3\}$

$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

$V_1' = <\{1\}>$

$R_1 \cup \{1\}$ reper în $\mathbb{R}_3[x]$

$R_2 = (x-1, x^2-x, x^3-x^2)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & -1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & -1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix} = 4 = \max$$

$V_2' = <\{1\}>$

$R_3[x] = V_3 \oplus V_3'$

$R_3 = \{x^2-x, x^3-x\}$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$R_3 \cup \{1, x^3\}$ reper în $R_3[x]$

$V_3' = \langle \{1, x^3\} \rangle$

! e) $R_3[X] = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$

$W_1 = \langle \{1, x\} \rangle$

$W_2 = \langle \{x^2\} \rangle$

$W_3 = \langle \{x^3\} \rangle$

$R_3[X] = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$

$U_K = \langle \{x^{K-1}\} \rangle \quad K = \overline{1,4}$

⑥ $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$, $V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \right\} = S(A)$

a) Precizați o bază în V'.

b) $V'' = ?$ $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

c) $x = (1, 1, 2)$. Să se desc. în rap. cu $V' \oplus V''$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Fie $x_3 = \alpha$

$x_1 = -4x_3 = -4\alpha$

$x_2 = -2x_1 = -2(-4\alpha) = 8\alpha$

$V' = \{(x_1, x_2, x_3) = (-4\alpha, 8\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} =$

$= \langle \underbrace{\{(-4, 8, 1)\}}_{R''} \rangle$

R' este SG pt. V'

$$\left.\begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}} V' = 1 \quad (\underline{3 - rg\, A}) \\ |R'| = 1 = \dim_{\mathbb{R}} V' \end{array}\right| \Rightarrow R' \text{ este reper în } V'$$

$$rg \begin{pmatrix} -4 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 8 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 = \max \Rightarrow R' \cup \{e_1, e_2\} \text{ reper în } \mathbb{R}^3$$

(alese de noi)

$V'' = \langle \{e_1, e_2\} \rangle$

! c) $(1, 1, 2) = a \cdot (-4, 8, 1) + b(1, 0, 0) + c(0, 1, 0) =$

$= (-4a + b, 8a + c, a)$

$$\begin{cases} a = 2 \\ -4 \cdot 2 + b = 1 \Rightarrow b = 9 \\ 8 \cdot 2 + c = 1 \Rightarrow c = -15 \end{cases}$$

$v' = 2(-4, 8, 1) = (-8, 16, 2)$

$v'' = 9(1, 0, 0) - 15(0, 1, 0) = (9, -15, 0)$

Temă: T_1 sem, T_1 curs + Ex seminar