GAL – Curs 1 29.02.2024

Săptămâni pare = temă

Matrice. Determinanți. Rang. Forma eșalon

Fie $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ corp comutativ (de exemplu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, p prim)

$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

$\det(A) = \sum \varepsilon_\sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}, \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$

$(S_n, \cdot)$ grupul permutărilor, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

$(\sigma = \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bij$)$, $|S_n| = n!$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$, $m(\sigma)$ = nr de inversiuni

(i, j) s.n. inversiune a lui $\sigma \Leftrightarrow \begin{cases} i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$

$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma = \text{pară i.e. } \varepsilon(\sigma) = 1\}$, $|A_n| = \frac{n!}{2}$

Obs: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} + \varepsilon(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)}$

$S_2 = \{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Def $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s.n. nesingulară $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

—— " —— inversabilă $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a.î.

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

Prop. A nesingulară $\Leftrightarrow$ A inversabilă

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det A \neq 0$; $n \geq 2$; $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

$A \to A^T \to A^*$

$\det(A^*) = (\det A)^{n-1}$

$A^*_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$ complemenții algebrici pentru a_{ij}

Dem: 1) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ / det

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

2) $A^* = A^{-1} \cdot \underbrace{\det(A)}_{\alpha}$

$$\det(A^*) = \det(\alpha A^{-1}) = \det(\alpha A^{-1}) = (\det A)^n \det(A^{-1}) = (\det A)^{n-1}$$

Notații

1) $(GL(n,K) = A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\}, \cdot)$ grupul general liniar.

2) $(O(n) = \{A \in M_n(K) \mid A \cdot A^T = I_n\}, \cdot)$ grupul ortogonal

3) $(SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}, \cdot)$ grupul special ortogonal

4) $(SL(n) = \{A \in GL(n, K) \mid \det A = 1\}, \cdot)$ grupul special liniar

Obs: $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$

Exemple

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = -1 \quad \Rightarrow A \in GL(3, \mathbb{R})$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$t = \frac{\pi}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot A^T = I_3 \\ \det A = 1 \end{array}\right| \Rightarrow A \in O(3) \Rightarrow A \in SO(3)$$

Def $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A \neq O_{m,n}$

$\operatorname{rang}(A) = k$, $(k \leq \min\{m,n\}) \iff \exists$ un minor de ordin k și toți minorii de ordin mai mare sunt nuli (dacă $\exists$)

Conv. $\operatorname{rang}(O_{m,n}) = 0$

Obs. $\exists\ C_m^{k+1} \cdot C_n^{k+1}$ minori de ord. $k+1$

Teoremă: $\operatorname{rg} A = k \iff \exists$ un minor de ordin k nenul ($\Delta_k \neq 0$) și toți minorii de ordin $k+1$ (dc. $\exists$), care conțin Δ_k sunt nuli

Obs: $\exists\ (m-k)(n-k)$ minori de ord. $k+1$ (am optimizat algoritmul de determinare a rangului)

Ex: A pătratică (mare $\to$ mic)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \ \operatorname{rg} A = ?$$

Sol:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$L_1' = L_1 + L_2 + L_3$

$$= (a+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2) \cdot (a-1)^2$$

1) $\Delta(a) \neq 0 \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ $\quad rg\, A = 3$

2) $\Delta(a) = 0 \iff a = 1$
$\qquad\qquad\qquad\quad a = -2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad rg\, A = 1$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad rg\, A = 2$

A nu e pătratică $\quad$ (mic → mare)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}),\ rg\, A$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{C_3 - C_1}{\overset{C_2 - C_1}{=}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Ex: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^3 - A - I_n = O_n$

a) $rg\, A = ?$ $\qquad$ b) $rg\,(A + I_n) = ?$

Sol: $A^3 - A - I_n = O_n \Rightarrow A^3 - A = I_n \Rightarrow A(A^2 - I_n) = I_n \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2 - I_n = A^{-1} \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow rg\, A = n$ (maxim)

b) $A^3 = A + I_n \Rightarrow (\det A)^3 = \det(A + I_n) \Rightarrow rg\,(A + I_n) = n$
(maxim)

Definiție: S_n - transformări elementare asupra liniilor matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

T_1: transformări prin care se înmulțește o linie cu o constantă nenulă

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

T_2: transformări prin care se schimbă 2 linii între ele

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \quad i \neq j$$

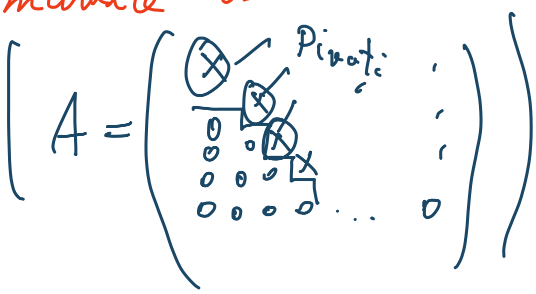
T_3: transformări prin care se adună la elementele unei linii elementele coresp. altei linii, eventual „$\cdot$" cu un scalar $\neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \xrightarrow{T_4} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \alpha L_j \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

<u>Def</u>: $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ s.n. <u>matrice echivalente</u> pe linii și se notează $A \sim B$ dacă B se obține din A printr-un număr finit de transf. elem. pe linii, analog pe coloane.

Prop. $A \sim B \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$

Def: O matrice s.n. matrice în formă eșalon pe linii dacă



1) liniile nule se află sub toate liniile nenule.

2) Pe fiecare linie nenulă, primul element din stânga care este nenul s.n. pivot. Pivotul de pe linia L_{i+1} se află la dreapta pivotului de pe linia L_i.

A este în formă eșalon redusă pe linii dacă în plus:

3) Toți pivoții sunt 1

4) deasupra pivoților, toate elementele sunt nule

OBS:

a) MATLAB
- → formă eșalon pt A: ref(A)
- → formă eșalon redusă pt A: rref(A)

b) În franceză: scară: échelle.

Prop: $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ se poate transforma într-o matrice eșalon (resp. eșalon redusă) pe linii, după un număr finit de transf. elementare pe linii.

Obs: Forma eșalon (pe linii) nu este unică.

Forma eșalon redusă (pe linii) este unică.

Exemplu:

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 10 & 7 \\ -4 & 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & 14 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

a) Să se aducă la forma eșalon, respectiv cea redusă (pe linii)

b) rg A.

Sol:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$L_2' = L_2 - L_1$

$L_3' = L_3 + 2L_1$

$L_4' = L_4 - 2L_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma eșalon

$L_1' = \frac{1}{2} L_1$

$L_2' = \frac{1}{3} L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$L_2' = L_2 - 3L_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_1' = L_1 + L_2$

✓ Forma eşalon Redusă

Rang A = rang $I_3 = 3$ (nr. pivoţilor)

Algoritmul de inversare a unei matrici

Fie matricea dublă $(A \mid I_n) \sim (C \mid B)$

C = forma eşalon redusă pt A

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este inversabilă, atunci $C = I_n$ şi $B = A^{-1} \Leftrightarrow$

$(A \mid I_n) \sim (I_n \mid A^{-1})$