GAL - Curs 3 7.03.2024

Algoritmul general

$rg\, A = r$ $\quad \exists\, \Delta p = \det(A_{I,J})$ minor de ordin r $\quad I = \{i_1, \dots, i_p\}$

minor principal $\quad J = \{j_1, \dots, j_p\}$

Δ_c se obțin prin bordare cu col. t. liberi și prin adăugarea unei linii l_i, $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I$

1) Dacă $\exists$ un minor $\Delta_c \neq 0$, at. $rg\, \bar{A} = r+1$ SI

2) Dacă $rg\, \bar{A} = r \Rightarrow$ SC (sistem compatibil)

Fără a restrânge generalitatea $\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$

(altfel renumerotăm)

Fie (**) sistemul format din primele r ec. (ec. principale)
(celelalte ec. sunt combinații liniare ale primelor r ec.)

a) Dacă $m > n$ (nr. ec. > nr. nec.)

a1) $rg\, A = rg\, \bar{A} = n$ SCD ($x_1, \dots x_n$ var princ., $\nexists$ var secundare)

a2) $rg\, A = rg\, \bar{A} = r < n$ $\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_r \text{ var. princ.} \\ x_{r+1}, \dots, x_n \text{ var. sec.} \end{pmatrix}$

Det. $x_1, \dots, x_r$ în funcție de var. secundare

b) Dacă $m < n$ (nr. ec < nr. nec.)

$rg\, A = rg\, \bar{A} = r \leq m$ SCN.

Obs. SLO (Sist. liniar și omogen)

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

Un SLO este întotdeauna compatibil.

a) $m = n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\to \Delta \neq 0$ $\exists!\ (0, 0, \dots, 0)$ SCD

$\to \Delta = 0$ SCN

$\exists$ și sol. nenule.

b) $m \neq n$

$b_1)$ $m > n$, $rg\, A = r = n$ SCD

$rg\, A = r < n$ SCN

$b_2)$ $m < n$ SCN

Def: 2 sist. se numesc echiv. $\Leftrightarrow$ au aceeași mulțime de soluții

Teoremă: Aplicarea transformărilor elementare asupra liniilor (sau a coloanelor) matricei extinse $\bar{A} = (A|B)$ conduce la matrice extinse ale unor sisteme echivalente cu sist. (*) $AX = B$

Metoda eliminării Gauss-Jordan

Exemplu: $\begin{cases} -x + 2y - 3z = -2 \\ 2x - 6y + 9z = 3 \\ -3x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$ $\qquad \bar{A} = (A|B)$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & 9 & 3 \\ -3 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 11 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$z = 1$

$y - \frac{3}{2}z = \frac{1}{2} \Rightarrow y - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$

$x - 2 \cdot y + 3z = 2 \Rightarrow x - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 2 \Rightarrow x - 4 + 3 = 2 \Rightarrow x = 3$

$(x, y, z) = (3, 2, 1)$

Spații vectoriale

Fie $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ corp comutativ, și V mulțime nevidă.

Spunem că V are o structură de spațiu vectorial dacă

$\exists$ „$+$" $: V \times V \to V$ (lege internă)

„$\cdot$" $: \mathbb{K} \times V \to V$ (lege externă)

a.î.: 1) $(V, +)$ grup abelian

2) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$

3) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

4) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$

5) $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$, $\forall x, y \in V$ (vectori), $\forall a, b \in \mathbb{K}$ (scalari)

Not. $(V, +, \cdot)|_{\mathbb{K}}$

Exemple:

a) $(\mathbb{K},+,\cdot)$ corp $\Rightarrow (\mathbb{K},+,\cdot)\big|_{\mathbb{K}}$ sp. v.

$\begin{cases}(\mathbb{R},+,\cdot)\big|_{\mathbb{R}}\\ (\mathbb{C},+,\cdot)\big|_{\mathbb{C}}\\ (\mathbb{Z}_p,+,\cdot)\big|_{\mathbb{Z}_p}\end{cases}$

b) $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{K}$ subcorp $\Rightarrow (\mathbb{K},+,\cdot)\big|_{\mathbb{K}'}$ sp. v.

$(\mathbb{R},+,\cdot)\big|_{\mathbb{Q}}$, $(\mathbb{C},+,\cdot)\big|_{\mathbb{R}}$

c) $(V_1,\oplus,\odot)\big|_{\mathbb{K}}$, $(V_2,\boxplus,\boxdot)\big|_{\mathbb{K}}$ sp. vect. $\Rightarrow (V_1\times V_2,+,\cdot)\big|_{\mathbb{K}}$ sp. v.

$+ : (V_1\times V_2)\times(V_1\times V_2) \to V_1\times V_2$

$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) \overset{def}{=} (x_1\oplus y_1,\ x_2\boxplus y_2)$

$\cdot : \mathbb{K}\times(V_1\times V_2) \longrightarrow V_1\times V_2$

$a\cdot(x_1,x_2) = (a\odot x_1,\ a\boxdot x_2)$, $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in V_1\times V_2$, $\forall a\in\mathbb{K}$

C. particular $(V_1=V_2=\mathbb{R},+,\cdot)\big|_{\mathbb{R}} \Rightarrow (\mathbb{R}^2,+,\cdot)\big|_{\mathbb{R}}$

$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1,\ x_2+y_2)$

$a(x_1,x_2) = (ax_1,\ ax_2)$

Analog $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)\big|_{\mathbb{R}}$ sp. v.

d) $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),+,\cdot)\big|_{\mathbb{K}}$ sp v.

e) $(\mathbb{K}[x],+,\cdot)\big|_{\mathbb{K}}$ sp v.

$\mathbb{K}_n[x] = \{P\in\mathbb{K}[x] \mid \text{grad } P\le n\}$ sp. v.

f) $\mathcal{C}(J) = (\{f: J\to\mathbb{R} \mid f \text{ cont.}\},+,\cdot)\big|_{\mathbb{R}}$ sp. v. al f. cont.

$\mathcal{D}(J) = (\{f: J\to\mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă}\},+,\cdot)\big|_{\mathbb{R}}$ sp. v. al f. derivabile

$\mathcal{I}(J) = (\{f: J\to\mathbb{R} \mid f \text{ integrabilă Reimann}\},+,\cdot)\big|_{\mathbb{R}}$ sp. vect. al f. int. Reimann

Def: Subspațiu vectorial

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect., $V' \subseteq V$ submulțime nevidă

V' sn subspațiu vectorial $\Leftrightarrow$ este închis la adunarea vectorila și la înmulțirea cu scalari

i.e 1) $\forall x,y \in V' \Rightarrow x+y \in V'$

2) $\forall a \in \mathbb{K},\ x \in V' \Rightarrow a\cdot x \in V'$

Obs: $V' \subseteq V$ ssp vect. $\Rightarrow (V',+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vectorial (cu op. induse)

Prop: (caracterizare a subsp. vect.)

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$, $V' \subseteq V$ subm. nevidă

V' ssp v. $\Leftrightarrow [\forall x,y \in V', \forall a,b \in \mathbb{K} \Rightarrow ax+by \in V']$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall x_1,\dots,x_n \in V' \\ \forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K} \end{array} \Rightarrow a_1x_1+\dots+a_nx_n \in V'\right]$

Dem:

„$\Rightarrow$" V' ssp v.

$$\left.\begin{array}{l} a\in\mathbb{K} \\ x\in V' \end{array}\right\} \Rightarrow ax \in V' \qquad \left.\begin{array}{l} b\in\mathbb{K} \\ y\in V' \end{array}\right\} \Rightarrow by \in V' \qquad \Rightarrow ax+by \in V'$$

„$\Leftarrow$" $ax+by \in V'$, $\forall x,y \in V'$, $\forall a,b \in \mathbb{K}$

$a=b=1_{\mathbb{K}} \Rightarrow \underbrace{1_{\mathbb{K}}x+1_{\mathbb{K}}y}_{x+y} \in V'$

$$b = 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow \underbrace{a \cdot x + 0_{\mathbb{K}}}_{a \cdot x} \in V'$$

Exemple de subsp. v.

1) $(V, +, \cdot)/_{\mathbb{K}} \Rightarrow \{0_V\}, V \subseteq V$ ssp v.

2) $n < m \quad \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ ssp. v.

3) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$

$V' = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = diag(a_1, \dots, a_n)\}$

$V'' = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$V''' = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid Tr(A) = 0\}$

$GL(n, \mathbb{R})$

$O(n)$ $\quad \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nu sunt ssp. vect.

$SO(n)$

$SL(n, \mathbb{R})$

4) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}, V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0, a^2 + b^2 > 0\}$

dreaptă care trece prin origine

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}, V' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0, a^2 + b^2 + c^2 > 0\}$

plan care trece prin origine

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}, V'' = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0, a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0\}$

hiperplan care trece prin origine

5) $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$

$$S(A)=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \underset{(m,n)}{A}\cdot\underset{(n,1)}{X}=\underset{(m,1)}{0}\}\subset\mathbb{R}^n \text{ ssp v.}$$

($\cap$ de m hiperplane care trec prin origine)

Ssp. v. generat de o mulțime nevidă

$(V,+,\cdot)/_{K}$ sp. v., $S\subset V$ subm. nevidă

$$\langle S\rangle=\{x\in V \mid x=a_1x_1+\dots+a_nx_n \text{, unde } x_1,\dots,x_n\in S,\ a_1,\dots,a_n\in K\}$$

(Combinații liniare finite de vectori din S cu scalari din K)

Dacă $V=\langle S\rangle$, atunci S s.n. sist. de generatori. (SG)

Spunem că V este un sp. v. finit generat $\Leftrightarrow \exists S$ mulțime finită a.î. $V=\langle S\rangle$ (sp. v. gen. de S)

Obs: a) $S\subset\langle S\rangle$

b) $\langle S\rangle=$ cel mai mic ssp. v., care conține S.

c) $\langle\emptyset\rangle=\{0_V\}$ Convenție.

Def $(V,+,\cdot)/_{K}$, $S\subseteq V$ subm. nevidă

1) S s.n. sistem liniar independent (SLI)

$\forall x_1,\dots,x_n\in S$ a.î. $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0_V \Rightarrow a_1=\dots=a_n=0_K$

$\forall a_1,\dots,a_n\in K$

Prop: $\{\underset{\neq 0_V}{x}\}$ este SLI

Dem: Fie $a \in K$ a.î. $a \cdot x = 0_V$

Pp. prin absurd că $a \neq 0_K$
$(K,+,\cdot)$ corp $\Big| \Rightarrow \exists a^{-1} \in K$

$\underbrace{a^{-1} \cdot a}_{1_K} \cdot x = a^{-1} \cdot 0_V \Rightarrow \underbrace{1_K \cdot x}_{=x} = 0_V$ (Contradicție $x \neq 0_V$)

Pp. este falsă $\Rightarrow a = 0_K \Rightarrow \{x\}$ este SLI, $x \neq 0_V$

Def: S s.n. sistem linear dependent (SLD)

$\Leftrightarrow \exists\ x_1, \dots, x_n \in S$

$\exists\ a_1, \dots, a_n \in K$, nu toți nuli a.î. $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0_V$

Def: $(V,+,\cdot)/_K$ sp. v. și $S \subset V$ submulț. nevidă

S s.n. bază $\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ S \text{ este SLI} \\ 2)\ S \text{ este SG} \end{cases}$

Exemple: 1) $(\mathbb{R},+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$ $B_0 = \{1\}$ baza canonică (cea mai simplă bază)

$\{1\} \Rightarrow SLI$, $1 \neq 0_{\mathbb{R}}$; $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x \cdot 1 \Rightarrow \{1\}$ SG

$\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow B = \{a\}$ bază, $a \neq 0_{\mathbb{R}}$

2) $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$, $B_0 = \{(1,0),(0,1)\}$ bază canonică

SLI: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $\underbrace{a(1,0) + b(0,1)}_{=(a,b)} = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow SLI$

SG: $\forall (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) \Rightarrow SG$

3) $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ - & 1 & - \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$B_0 = \{E_{i,j}\}$ $i = \overline{1,m}$
$j = \overline{1,n}$

4) $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$ nu e sp. v. finit generat

$B_0 = \{1, x, x^2, \dots\}$

$(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$ $\quad P \in \mathbb{K}_n[X]$ $\qquad \mathbb{R}^{n+1}$

$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$

$B_0 = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Prop: a) $\forall$ subm. nevidă a lui SLI este SLI

$S = \{x_1, \dots, x_n\}$ SLI $\Rightarrow S' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ SLI

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} = 0_V$

$a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} + 0_{\mathbb{K}} \cdot x_n = 0_V$

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_{n-1} = 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow S'$ e SLI

S SLI

b) $\forall$ supramulțime a unei SLD este SLD.

$S = \{x_1 \dots x_n\}$ SLD $\Rightarrow S' = S \cup \{x_{n+1}\}$ SLD

$\exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, nu toți nuli, a.î. $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0_V$

$\qquad = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + 0_{\mathbb{K}} \cdot x_{n+1}$

c) $\forall$ supramulțimea a unei SG este SG

$V = \langle S \rangle \Rightarrow V = \langle S \cup \{x_{n+1}\} \rangle$, $S = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\forall x \in V, \exists x_1, \dots, x_n \in S$ a.î. $x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$
$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ $\qquad = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + 0_{\mathbb{K}} \cdot x_{n+1}$

Teoremă $(V,+,\cdot)|_{\mathbb{K}}$ s.p. vect. f. gen.

$\forall\ B_1, B_2$ baze în $V \Rightarrow |B_1| = |B_2| = n = \dim_{\mathbb{K}} V$

(dimensiunea lui V)

Obs: $\dim_{\mathbb{K}} V = n$

a) n = nr. maxim de vectori care formează SLI

b) n = nr. minim de vectori care formează SG

!

Prop. $(V,+,\cdot)|_{\mathbb{K}}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $S = \{x_1, \dots, x_n\}$

UAE 1) S bază

2) S e SLI

3) S e SG