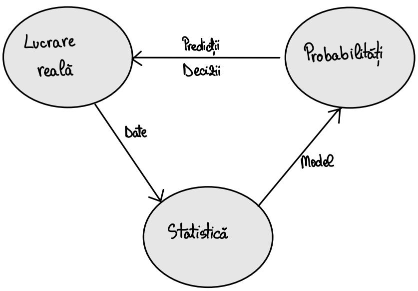
[redacted]

Cuprins

CURS 1

Notare
- → activitate laborator/seminar: 30p
- → Proiect (în R): 20p
- → Examen: 50p (min 25p) – 2 foi A4 semnate
- → Oficiu: 10p

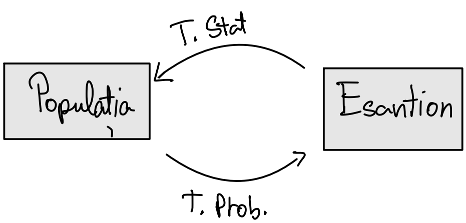
Introducere



Exemplu: Avem o urnă cu bile albe și negre. Proporția B/A este p și efectuăm n extrageri cu întoarcere

Pb. Probab: pp că $p = 25$
efectuăm $n=20$ extrageri cu întoarcere
Care este probabilitatea ca în cele n bile extrase, 5 să fie albe?

Pb statistică: Am efectuat 20 de extrageri și am obs că 5 bile sunt albe. Ce pot spune despre p?



Câmp de probabilități

Def: Numim experiment aleator un fenomen / set de acțiuni al cărui rezultat nu poate fi prezis cu exactitate înaintea realizării acestuia

Def. S.n mulțimea stărilor, spațiul stărilor și se notează cu Ω mulțimea tuturor rez. posibile ale unui exp. aleator

Def. Elementele $\omega \in \Omega$ s.n. evenimente elementare

Exp. 1) Aruncarea banului

$\Omega = \{H, T\}$ $\quad \omega = H, \ \omega = T$

a) mutual exclusive
b) mutual exhaustive

$$\Omega = \begin{cases} H \cap \text{afară plouă} \\ H \cap \text{afară NU plouă} \\ T \cap \text{afară plouă} \\ T \cap \text{afară NU plouă} \end{cases}$$

2) Aruncăm cu banul de 3 ori

$\omega = \{HHT\}$

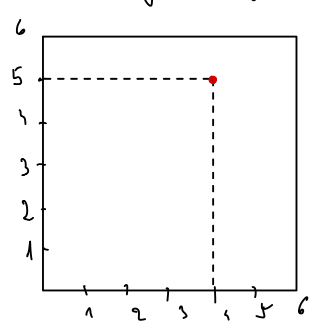
$\Omega = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{H, T\}\} = \{H, T\}^3$

3) Aruncăm cu zarul $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4) Aruncăm 2 zaruri

$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{1, \dots, 6\}^2$

4, 5



Zar 2

Zar 1

Def: Un eveniment A este o submulțime $A \in \Omega$

Exp: Aruncăm cu zarul $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

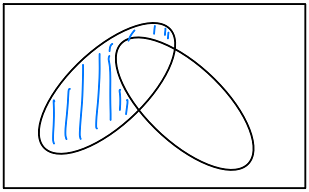
$A = \{2, 4, 6\}$ - nr par

$B = \{1, 3, 5\}$ - nr imp

$C = \{2, 3, 5\}$ - nr prim

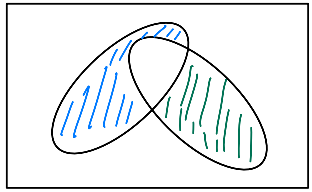
	T. MULȚIMILOR	T. Prob
Ω	→ mult. Ω	→ even sigur, spațiul stărilor probelor
ω	→ elem ω	→ even. elementar
ϕ	→ mulț vidă	→ even. imposibil
A	→ mult A	→ even A
$A^c (\bar{A})$	→ complementară mulț A	→ even contrar lui A
$A \cup B$	→ reuniune	→ realizarea lui A sau a lui B (măcar 1)
$A \cap B$	→ intersecție	→ realizarea simultană A și B
A / B $=$ $A \cap \bar{B}$	→ diferență	→ A se realizează dar B nu
$A \Delta B$	→ diferență simetrică $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	→ doar unul dintre cele 2 se realiz
$A \subseteq B$	→ incluziune	→ A implică B

$A \setminus B$



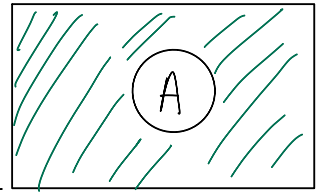
Ω

$A \triangle B$



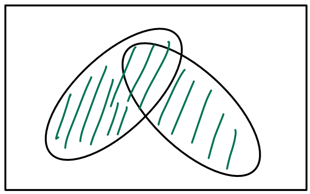
Ω

A^c



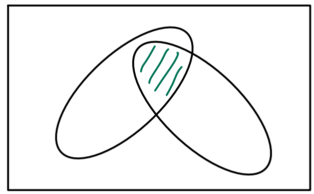
Ω

$A \cup B$



Ω

$A \cap B$



Ω

CURS 2

Recap

Ω - mult even. posibile (even. sigur)

ω - even. elementar

$A \subseteq \Omega$

$\mathcal{F}$ - mult even posibile asoc exp aleat.

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subseteq \Omega\}$ - mult părților

Experiment: Aruncăm cu banul în mod repetat și ne interesăm la nr de aruncări până obținem prima dată H

$$\Omega = \{\underset{H}{\overset{\uparrow}{1}}, \underset{TH}{\overset{\uparrow}{2}}, \underset{TTH}{\overset{\uparrow}{3}}, \dots\} = \mathbb{N}^*$$

$A = \{$ obținem prima dată H într-un nr par de aruncări $\}$
$= \{2, 4, 6, \dots\} = \bigcup_{i \geq 1} \{2i\}$

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ (cel puțin unul se realizează)
3') $(A_n)_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$

$\boxed{\text{Def. O mult } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \text{ care verif. 1, 2 și 3' s.n. } \sigma\text{- algebră peste } \Omega}$

Exp aleator $\to (\underset{\text{mult rez}}{\Omega}, \underset{\text{mult even}}{\mathcal{F}}) \to$ s.n spațiul probabilizabil

Prop: 1) even impos $\emptyset \in \mathcal{F}$
2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$
3) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \end{array} \right. \in \mathcal{F}$

4) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{F}$

$\Omega \in \mathcal{F}$
$A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
$(A_n)_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$

$$A \xrightarrow{[0,1]} P$$

$$\mathbb{P}(A) \simeq \frac{N(A)}{N}$$
$N(A)$ ← nr realizări A
N ← nr rep. ale exp

Dc $A = \emptyset \Rightarrow N(\emptyset) = 0 \Rightarrow \frac{N(\emptyset)}{N} = 0$ $\quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$A = \Omega \Rightarrow N(\Omega) = N \Rightarrow \frac{N(\Omega)}{N} = 1$

$A \in \mathcal{F} \Rightarrow \frac{N(A)}{N} \in [0,1] \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in [0,1]$

Dacă $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) \Rightarrow \frac{N(A \cup B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ (aditivitate)}$$

$$(A_n)_n \subset \mathcal{F} \text{ disj 2 câte 2} \Rightarrow P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$$

Def. Fie $(\Omega, \mathcal{F})$ un sp probabilizabil asoc unui even aleator.

Funcția $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ care verifică $\begin{cases} P(\Omega) = 1 \\ \text{pt } (A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \text{ disj 2 câte 2}: P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n) \end{cases}$

s.n. probabilitate (măsură de probabilitate) pe $(\Omega, \mathcal{F})$

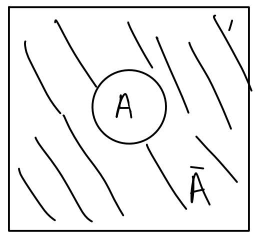
Prop:

1) $P(\emptyset) = 0$; $\left(\begin{array}{l} \text{pp } P(\emptyset) > 0,\ P(\emptyset) = a.\ \text{Fie } A_n = \emptyset \Rightarrow \\ \Rightarrow P(\underbrace{\bigcup_n A_n}_{\emptyset}) = \sum_n P(A_n) \Rightarrow a = \underbrace{\sum_n a}_{\infty} \ \cancel{\text{X}} \end{array} \right)$

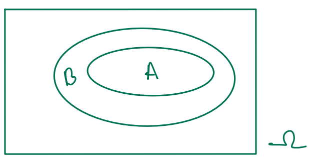
2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$\Omega = A \cup \bar{A}$ $\qquad P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$



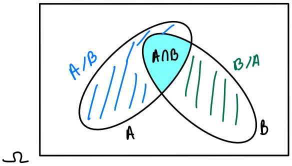
3) $A, B \in \mathcal{F}$ $\quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$ (Monotonie)



$B = A \cup (B/A)$

$P(B/A) = P(B) - P(A)$

4) $A, B \in \mathcal{F}$. $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

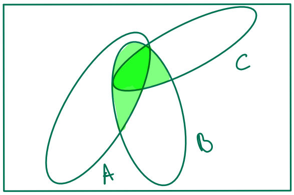


$A \cup B = (A/B) \cup (A \cap B) \cup (B/A)$

$P(A \cup B) = P(A/B) + P(A \cap B) + P(B/A)$

$B/A = B/(A \cap B) \Rightarrow P(B/A) = P(B) - P(A \cap B)$

5) $A, B, C \in \mathcal{F}$; $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$



6. Formula lui Poincarté

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)}$$

7. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$

$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$

Ineg Boole: $\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$

Exp: Aruncăm cu banul de o inf. de ori

$$\Omega = \{(\omega_i)_n \mid \omega_n = \{H, T\}\} = \{H, T\}^{\mathbb{N}}$$

$$A^B = \{f : B \to A\}$$

$A = \{$obținem H mai devreme sau mai târziu$\}$

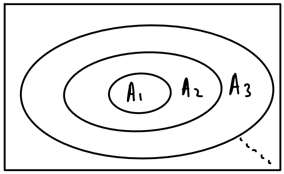
$\mathbb{P}(\{H\}) = p \in (0,1)$ $\quad \mathbb{P}(\{T\}) = 1 - p$

Fie A_n even prin care în primele n aruncări am obține H

$$A_n = \{ (\omega_n)_n \mid (\exists)\, i \in \{1, \dots, n\} \text{ a.î. } \omega_i = H \}$$

$$A = \bigcup_n A_n \qquad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_n A_n$$



$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \quad \in \mathbb{R}$

$\lim_n x_n = \sup_n x_n$

$$\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$$

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_n})$$

Model clasic de problemă (Modelul lui Laplace)

Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ rez posibile exp aleator

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \qquad |\mathcal{F}| = 2^N$$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{N}$ echirepartiție (= repartiția unif. discretă)

Fie $A \in \mathcal{F}$ Vrem $\mathbb{P}(A) = ?$ $\quad A = \bigcup_{i \in A} \{\omega_i\} \quad \mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{\sum_{i \in A} 1}{N}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nr caz. fav}}{\text{nr caz. posibile}}$$

Elem de comb

1) Formula sumei: fie A și B 2 mulț. finite cu $A \cap B = \emptyset$

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

dc. $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2) Principiul includerii și excluderii

Fie $A_1, A_2, \dots, A_n$ m. finite

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_n|$$

Exp: Funcția lui Euler: $\varphi(n)$ - nr de nr prime cu n ($\leq n$)

$$\varphi(n) = n \prod_{\text{prim}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$

CURS 3

Câmpul de probabilitate a lui Laplace: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$|\Omega| < \infty$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

1) Regula sumei
2) Regula produsului

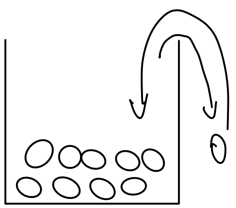
$|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$; atunci $A_1 \times A_2 = \{(u, v), u \in A_1, v \in A_2\}$

$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$

Formulare: Dacă un obiect a poate fi ales în n_1 moduri și un obiect b poate fi ales în n_2 moduri, atunci (a,b) poate fi ales în $n_1 \cdot n_2$ moduri

Scheme de eșantionare

1) Schema de eșantionare (extragere) cu întoarcere (revenire)



n bile numerotate de la 1 la n

k extrageri cu întoarcere

ex: $n = 3$, $k = 4$

n	n	n	n
3	3	3	3

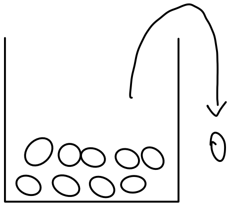
→ nr de șiruri de la n cu termeni oarecare

→ $3^4 = n^k$ posibilități

$A = \{1, \dots, n\}$

$A^k = \{(u_1, u_2, \dots, u_k) \mid u_i \in A\}$

2) Schema de eșantionare fără întoarcere (fără revenire)



n bile numerotate de la 1 la n

k extrageri

n	$n-1$	$n-2$	$\dots$	

$n-k-1$

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$$

mod de extragere

	ordonate	neordonate
cu întoarcere	n^k	C_{n+k-1}^k
fără întoarcere	$\frac{n!}{(n-k)!}$	C_n^k

Exp: Pb aniversărilor

n persoane. Care este prob ca 2 să fie născute în aceeași zi

Presupuneri: anul are 365 zile

- o pers aleasă aleator are aceeași șansă să fie născută în oricare din cele 365 zile: $1/365$
- ziua de naștere a unei persoane nu influențează zilele de naștere a celorlalte n-1 pers

$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x \in \{1, \dots, 365\}\}$

↑ tuplul zilelor de naștere ale celor n pers

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\qquad A \in \mathcal{F}$ $\qquad A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid \exists\, i \neq j$ a.î. $x_i = x_j\}$

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{365^n}$

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{365^n}$ $\qquad \bar{A}$ - toate cele n pers sunt născute în zile dif.

$\bar{A} = A_{365}^n = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365-n+1) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365-n+1)}{365^n}$

$n = 23 \Rightarrow \mathbb{P}(A) \simeq 0{,}50 \simeq 99\%$

Să pp că avem n pers și vrem să formăm o comisie cu k dintre ele

Nr comisii cu k elem: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Poker: C_{52}^5 mâini   Câte mâini conțin 2A, 2K, 1D

52 → 4 culori (♥ roșie, ♥ neagră, treflă, romb)
52 → 13 figuri (1, 2, ..., 10, J, D, K, A)

$$\underbrace{C_4^2}_{2A} \cdot \underbrace{C_4^2}_{2K} \cdot \underbrace{C_4^1}_{1D} = 36 \cdot 4 = 144$$

Prob să avem full house (2 cărți de un tip, 3 de altul)

A, A, D, D, D   fig pt A: $C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^3$

Prob să avem o pereche?   AA235

fig pt pereche: C_{13}^1
cul pt pereche: C_4^2

figură pt celelalte 3 cărți: C_{12}^3

Culoare: $(C_4^1)^3$ $P = \dfrac{C_{13}^1 C_4^2 C_{12}^3 (C_4^1)^3}{C_{52}^5}$

2 perechi: AA 2 10 10
1 pereche: $C_{13}^1 C_4^2$ (A, A)
2 per: $C_{12}^1 C_4^2$ (10, 10)
3: $C_{11}^1 \cdot C_4^1$ (2)

$$P = \frac{C_{13}^1 C_4^2 C_{12}^1 C_4^2 C_{11}^1 C_4^1}{C_{52}^5}$$

Exp: Problema Newton - Pepys

a) Cel puțin un 6 apare când aruncăm 6 zaruri = A

sau

b) Cel puțin 2 val de 6 apar când aruncăm 12 zaruri = B

sau

c) Cel puțin 3 val de 6 apar când aruncăm 18 zaruri = C

$\mathbb{P}$ cea mai mare dintre cele 3 even = ?

a) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^6 \qquad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ echirep

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(\text{să nu apara niciun zar de } 6) = 1 - \frac{5^6}{6^6}$$

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(\text{nu avem nicio val de 6 sau exact 1 val de 6})$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\text{nu avem } 6) - \mathbb{P}(\text{avem exact un } 6)$$

$$= 1 - \frac{5^{12}}{6^{12}} - \frac{C_{12}^{1}\, 5^{11}}{6^{12}}$$

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \frac{5^{18}}{6^{18}} - \frac{C_{18}^{1}\, 5^{17}}{6^{18}} - \frac{C_{18}^{2}\, 5^{16}}{6^{18}}$$

CURS 4

Probabilități Condiționate

Exp1: Pp că aruncăm cu banul de 3 ori: $\Omega = \{H, T\}^3$

$|\Omega| = 2^3 = 8$; $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\cdot)$ - echirep.

$A = \{HHH\}$ - am obț cap la toate cele 3 aruncări

HHH (A)	HHT	THH	THT
HTH	HTT (B)	TTH	TTT

Ω

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{8}$

B = even prin care la prima aruncare a obținut H

$B = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A | B)$

$\mathbb{P}(A | B)$ - prob even A știind că B s-a realizat

even de atins

even realizat

Obs: "$A|B$" nu e eveniment

Abordarea frecvenționistă : $\mathbb{P}(A) \simeq \frac{N(A)}{N}$

Fie A, B două even. Repetăm exp de N ori

pp că B s-a realizat $\frac{N(A \cap B)}{N(B)} \simeq \mathbb{P}(A|B)$

$N(B) \rightarrow$ nr realizări B

$$\mathbb{P}(A|B) \simeq \frac{N(A\cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} \simeq \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

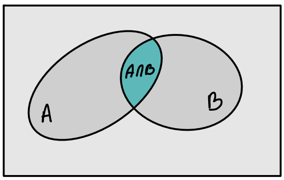
Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - câmp de prob, $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(B) > 0$, atunci

$\mathbb{P}$ realizări lui A știind că B s-a realizat, $\mathbb{P}(A|B)$ e def:

prob cond a lui A la B

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

Exp1 (cont): $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{1/8}{1/2} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$



Ω

Exp2: Pp că avem un pachet de cărți de joc (52) și extrag aleator 2 cărți succesiv și fără întoarcere

A = prima carte ♡
B = a 2-a carte ♡
C = a 2-a care ♡/♢

$\mathbb{P}(B|A),\ \mathbb{P}(C|A),\ \mathbb{P}(A|B),\ \mathbb{P}(A|C)$

$\mathbb{P}(B|A) = ?$

13 cărți inimă roșii
26 cărți roșii

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

$\mathbb{P}(A\cap B) = \dfrac{13\cdot 12}{52\cdot 51} = \dfrac{3}{51}$

I   II

$\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{3/51}{1/4} = \dfrac{12}{51}$

$\mathbb{P}(C\cap A) = \dfrac{13}{52}\cdot\dfrac{25}{51} = \dfrac{25}{4\cdot 51}$

$\mathbb{P}(C|A) = \dfrac{\mathbb{P}(C\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{25}{\cancel{4}\cdot 51}\cdot\dfrac{\cancel{4}}{1} = \dfrac{25}{51}$

$$\mathbb{P}(A\mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3/51}{\mathbb{P}(B)} =$$

$\mathbb{P}(B) = 1/4$ (nu știu ce s-a întâmplat la I extragere => 13/52)

$$\mathbb{P}(A\mid B) = \frac{3/51}{1/4} = \frac{12}{51}$$

$$\mathbb{P}(A\mid C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{25}{4\cdot 51}}{\frac{26}{52}} = \frac{25}{102} \neq \frac{25}{51} = \mathbb{P}(C\mid A)$$

Obs: $\mathbb{P}(A\mid B) \neq \mathbb{P}(B\mid A)$ ← în general

Exp 3: O familie are 2 copii

a) Care este probabilitatea că ambii copii să fie F știind că cel puțin unul este F? 1/3

b) Care este probabilitatea că ambii copii să fie F știind că cel tânăr este F? 1/2

a) $\Omega = \{F, B\}^2 = \{FF, FB, BF, BB\}$

$A = \{FF\}$; $B = \{$ cel puțin un copil e F $\} = \{FF, FB, BF\}$

$$\mathbb{P}(A\mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

b) cel tânăr este F $= C = \{FF, BF\}$

$$\mathbb{P}(A\mid C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

a') fată născută iarna

$\Omega = \{FI, FP, FV, FT, BI, BP, BV, BT\}^2$

$A = \{\underset{4}{\_}, FI\}$, $\{FI, \underset{3}{\_}\}$; $\{FI, FI\}$ - o dată

Exp 5: Dc aeronavă => alarmă 95%
Dc ! aeronavă => alarmă falsă 10%
Prob să obs aeronava = 5%

a) $\mathbb{P}$ să nu avem aeronavă și să avem alarmă
b) $\mathbb{P}$ să aven aeronavă și să nu fie detectata

$A = \{$ avem aeronavă $\}$ $\qquad \mathbb{P}(A) = 5\% = 0.05$

a) $\mathbb{P}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nu aeronava}}}{\bar{A}} \cap \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aven alarmă}}}{B})$ $\quad B = \{$ avem alarmă $\}$ $\qquad \mathbb{P}(B|A) = 0.95$

$\mathbb{P}(B|\bar{A}) = 0.10$

$$\mathbb{P}(B|\bar{A}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)}{\mathbb{P}(\bar{A})} \Leftrightarrow 0.1 = \frac{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)}{0,95} \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = 0.95 \cdot 0,1 = 0.095$$

$$P(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

b) $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{B} | A) \cdot \mathbb{P}(A) = (1 - \mathbb{P}(B|A)) \cdot \mathbb{P}(A) = 0.1 \cdot 0.05 = 0.005$

Formula Probabilității totale

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p și $A \in \mathcal{F}$:

a) Fie $B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(B) \in (0,1)$. Atunci $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})$

b) Fie $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ o partiție pe Ω cu $\mathbb{P}(B_i) > 0$ $A+$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B) \, \mathbb{P}(B_i)$$

Formula lui Bayes

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})}$$

Obs: $\mathbb{P}(B|A) = \boxed{\dfrac{\mathbb{P}(B) \, \mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}}$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\text{form prob totale}}$$

Exp 5: Testare pt o afecțiune gravă

Prevalența unei afecțiuni în pop e de 1%

Efectuăm test, acc = 95%

acuratețe → Senzitivitate : 95% (rata true pozitiv)

acuratețe → Specificitate : 95% (rata true negative)

Fie $D = \{\text{avem afecțiunea}\}$

$T = \{\text{testul a ieșit pozitiv}\}$

false pozitive $= \mathbb{P}(T \mid \bar{D})$

true negative $= \mathbb{P}(\bar{T} \mid \bar{D})$

Q: Știind că testul e poz, care e prob să avem afecțiunea?

$$\mathbb{P}(D \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T)}$$

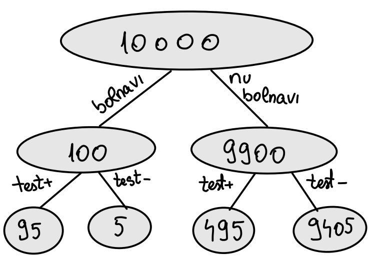
Form. prob totale: $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \mid D) \cdot \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T \mid \bar{D}) \cdot \mathbb{P}(\bar{D})$

$$= 0.95 \cdot 0.01 + (1 - \underbrace{\mathbb{P}(\bar{T} \mid \bar{D})}_{0.95}) \cdot (1 - \mathbb{P}(D))$$

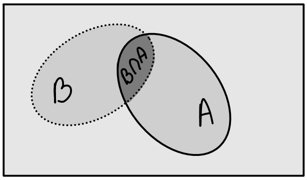
$$= 0.95 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99$$

$$\mathbb{P}(D \mid T) = \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99} = 16\%$$

Pp 10000



CURS 5



Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p $A \in \mathcal{F}$

$\mathbb{P}(A) > 0$

Notăm $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid A)$

$Q : \mathcal{F} \to [0,1]$ – probabilitate

Ca să fie probabilitate Q : $\Leftrightarrow$ 1) $Q(A) = 1$, $Q(\emptyset) = 0$

2) $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ disj 2 câte 2 $\quad Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$

1) $Q(A) = \mathbb{P}(A \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$

2) $$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$$

Exp: Formula lui Bayes

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – c.p și $A, B, C \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A \cap C) > 0$ și $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}(B \mid A, C) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B, C)\,\mathbb{P}(B \mid C)}{\mathbb{P}(A \mid C)}$$

$$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C)$$

Exp: Pp că o pers are în buzunar 2 monede: una echilibrată $(\mathbb{P}(H) = 1/2)$, una trucată $(\mathbb{P}(H) = 3/4)$

Alege random o monedă și o aruncă de 3 ori, obținând H, H, H

a) Care este prob ca moneda să fie echilibrată?

Fie $A = \{$ obținem HHH $\}$

$B = \{$ am ales moneda echilibrată $\}$

$\mathbb{P}(B) = 1/2$

$\mathbb{P}(A|B) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1/8$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}(A) = \underbrace{\mathbb{P}(A|B)}_{1/8} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(B)}_{1/2} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A|\bar{B})}_{(3/4)^3} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\bar{B})}_{1/2} = 0{,}27$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{(1/2)^3 \cdot 1/2}{0{,}27} = 0{,}23$$

b) Aruncăm și a 4-a oara. Care e pb să pice H

$C = \{$ a 4-a aruncare obț $H \}$

$$Q(C) = \underbrace{Q(C|B)}_{1/2} \cdot Q(B) + \overset{3/4}{Q(C|\bar{B})} \cdot \overset{1-Q(B) = 0{,}78}{Q(\bar{B})}$$

$\hookrightarrow Q(B) = \mathbb{P}(B|A) = 0{,}22$

Independența

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p, $A, B \in \mathcal{F}$.

A, B independente $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ și $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

Def. Spunem că 2 evenimente sunt independ. ($A \perp\!\!\!\perp B$) dacă $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Obs: $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp \bar{B},\ \bar{A} \perp\!\!\!\perp B,\ \bar{A} \perp\!\!\!\perp \bar{B}$

Exp: Aruncăm de 2 ori cu banul

A_1: even. prin care am obț H la I aruncare

A_2: even. prin care am obținut H la a II aruncare

$\Omega = \{H, T\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega$

$\mathbb{P}$ - echirep

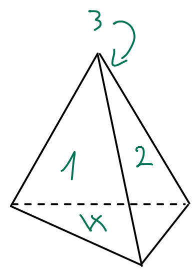
$A_1 = \{HH, HT\}$

$A_2 = \{TH, HH\}$

$A_1 \cap A_2 = \{HH\}$

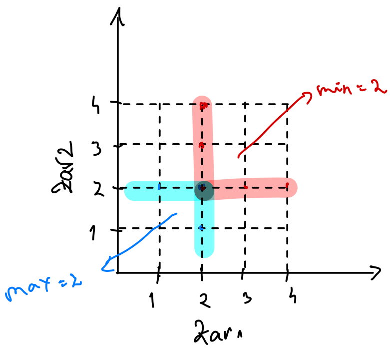
$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 1/4 \\ \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$$

Exp 2: zar cu 4 fete



A_1 - I zar: fata 1

A_2 - suma să fie 5



$\Omega = \{1,2,3,4\}^2$

$\mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}$ - echirep

$\mathbb{P}(A_1) = 4/16$

$A_2 = \{(1,4),(2,3),(3,2)(4,1)\}^2 \to 1/4$

$A_1 \cap A_2 = \mathbb{P}(A_1)\cdot \mathbb{P}(A_2) = 1/16$

$A = \{$ max de pe cele 2 zaruri să fie 2 $\} = \{(1,2),(2,1)(2,2)\}^2$

$B = \{$ min de pe cele 2 zaruri să fie 2 $\} = \{(2,2),(2,3),(2,4),(4,2),(3,2)\}$

$\mathbb{P}(A) = 3/16$ $\qquad A \cap B = \{(2,2)\}$

$\mathbb{P}(B) = 5/16$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{16} \neq \frac{15}{16} \; (\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B))$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Spunem că even $A_1, \dots, A_n$ sunt independent de

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \quad (\forall)\ I \in \{1,\dots n\} \text{ finit}$$

Obs: $n=3$ $\quad A_1, A_2, A_3$ indep $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_3) \\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\cdot\mathbb{P}(A_3) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2)\cdot\mathbb{P}(A_3) \end{cases}$

Obs: $C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n - n - 1$

Exp: Aruncăm de 2 ori cu banul

A_1 - H la I armchair : $A_1 = \{HH, HT\}$
A_2 - H la a $\overline{II}$-a armchair : $A_2 = \{HH, TH\}$
B - rez dif : $B = \{HT, TH\}$

$\left.\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ B \end{matrix}\right\} 1/2$

$A_1 \cap A_2 = \{HH\}$
$A_1 \cap B = \{HT\}$
$A_2 \cap B = \{TH\}$
$\Big\} 1/4$

$\Rightarrow A_1, A_2, B$ sunt independente 2 câte 2 dar nu sunt independente toate 3 (mutual)

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq 1/8$

Def (indep cond): Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p $A, B, C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) > 0$. Spunem că A și B sunt indep. cond la C dacă $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A|C) \cdot \mathbb{P}(B|C)$

Exp (cont): D $\quad \mathbb{P}(D) = 1\%$; T - test poz

acuratețea testului (senzitivitate = specificacitate) = 95%

$\mathbb{P}(T|D) = \mathbb{P}(\overline{T}|\overline{D}) = 0,95$; $\quad \mathbb{P}(D|T) \simeq 16\%$

Să pp că efectuăm un nou test, independent de primul (în rap cu statusul afecțiunii)

T_1 - test 1 poz
T_2 - test 2 poz

$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D) = \mathbb{P}(T_1|D) \cdot \mathbb{P}(T_2|D) = 0,95^2$
$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | \overline{D}) = \mathbb{P}(T_1|\overline{D}) \cdot \mathbb{P}(T_2|\overline{D})$

Vreau $\mathbb{P}(D | T_1 \cap T_2) = \dfrac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)}$

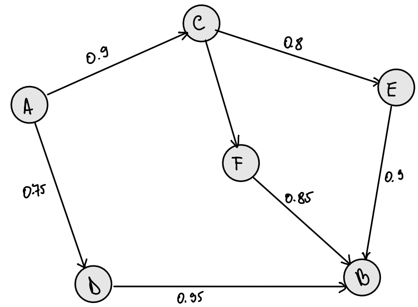
Formula lui Bayes

$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \underbrace{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D)}_{0,95^2} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(D)}_{0,1} + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | \overline{D}) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\overline{D})}_{0,99}$

$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | \overline{D}) = \mathbb{P}(T_1|\overline{D}) \cdot \mathbb{P}(T_2|\overline{D}) = (1 - \mathbb{P}(\overline{T_1}|\overline{D}))^2 = 0,05^2$

$\mathbb{P}(D | T_1 \cap T_2) = 78\%$

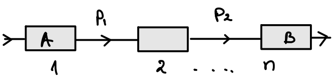
Exp: Pp că avem o rețea de calculatoare



a) pb ca info din A să ajungă în B

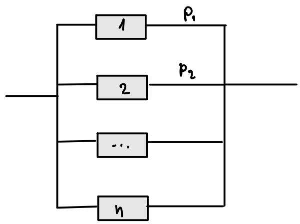
$A \to B$

sist în serie



$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$

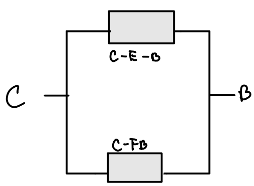
sist paralel

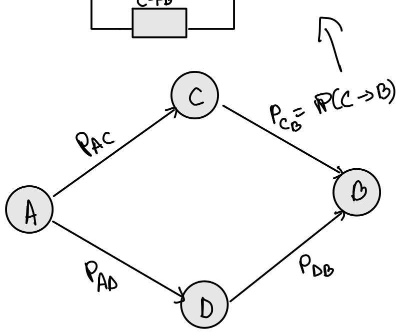


$\mathbb{P}(\exists \text{ conex}) = 1 - \mathbb{P}(\nexists \text{ conex})$
$= 1 - \mathbb{P}(\text{nu am conex } 1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\nexists \text{ conex } n)$

Prob într-un sist paralel să $\exists$ conexiune este: $1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$

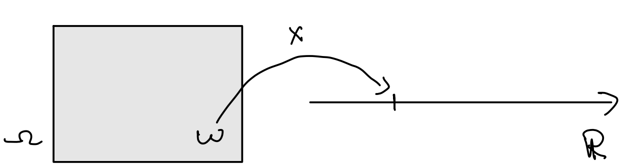
$\mathbb{P}(C \to B) = 1-(1-P_{CE}P_{EB})(1-P_{CF}P_{FB})$





$\mathbb{P}(A \to B) = \left(1-(1-\mathbb{P}_{AC}\mathbb{P}_{CB})(1-\mathbb{P}_{AD}\mathbb{P}_{DB})\right)$

Variabile aleatoare

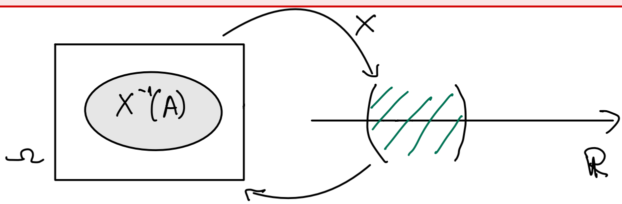


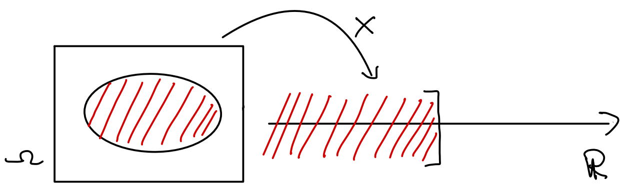
$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\quad X : \Omega \to \mathbb{R};\ X(\omega) = \omega^3$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. O variabilă aleatoare, v.a., $X : \Omega \to \mathbb{R}$ care verifică urm prop:

$$\{\omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F},\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$$





scop: $\mathbb{P}(X \in A)$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}$

Exp: Aruncăm de 2 ori cu banul

$X =$ nr de H

$x = \sqrt{2}$

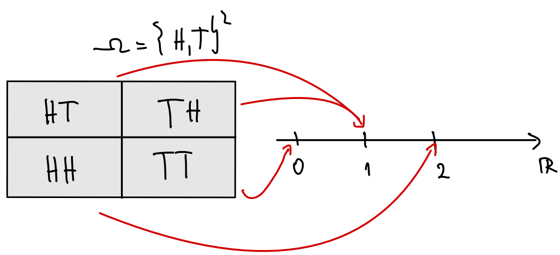
$\{\omega \mid X(\omega) \le x\} = \{TT, TH, HT\} \in \mathcal{F}$

$x = 0$

$\{\omega \mid X(\omega) \le x\} = \{TT\} \in \mathcal{F}$

$x = -1$

$\{\omega \mid X(\omega) \le x\} = \emptyset$



Notăm v.a $X, Y, Z \ldots$

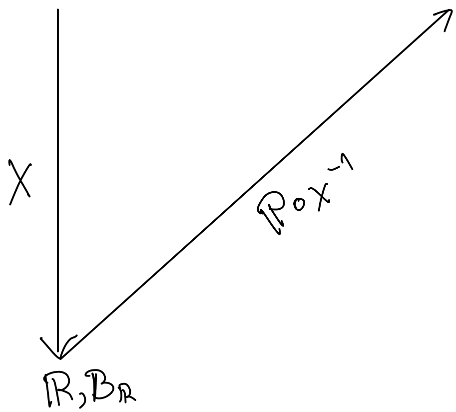
$x, y, z, \ldots$ a val v.a $X, Y, Z \ldots$, în ω (val obs)

$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A)$

Def (Repartiția / Distribuția): Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p și X o v.a. S.n. repartiția v.a. X măsura de prob : $\mathbb{P}_X$ def $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1)$

$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\circ X^{-1})(A)$

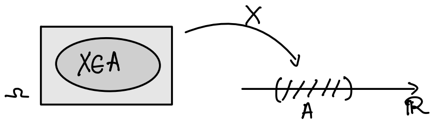
$\Omega, \mathcal{F} \to [0,1]$



CURS 6

Variabile aleatoare

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p spunem că $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o var aleatoare dacă
$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$, $\forall x \in \mathbb{R}$



$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \to$ preimaginea lui A
$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

Def (Repartiția unei variabile aleatoare)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ var.aleat, s.n repartiția lui X măsura de probabilitate pe $\mathbb{R}$
$\mathbb{P}_X : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$ def prin relația: $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A)$

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} (\Omega, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\mathbb{P}} & [0,1] \\ \downarrow & & \\ (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) & & \end{array}$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \to$ mulțimea borelienilor pe $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Def (Funcția de repartiție)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un cp și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. Sn funcție de repartiție a lui X (funcția cumulativă) $F : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Obs: dc $A = (-\infty, x]$ atunci $(\mathbb{P} \circ X^{-1})(A) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x) = F(x)$

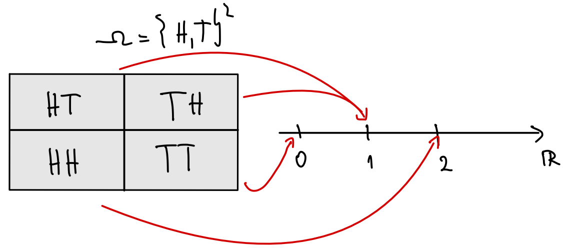
Ex: Aruncăm o monedă (echilibrată) de 2 ori

$\Omega = \{H, T\}^2 = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad\quad$ $\mathbb{P}$ - echirep

$X : \Omega \to \mathbb{R}$; X - nr de capete în cele 2 aruncari

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$



$\mathbb{P}(X=0) = ?$

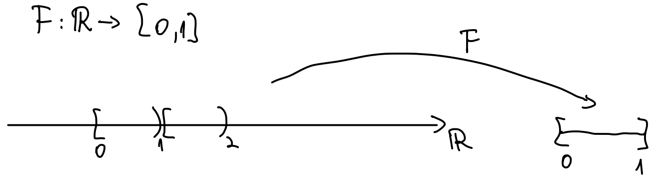
$\{X=0\} = \{TT\}$ $\quad\quad$ $\mathbb{P}(X=0) = 1/4$

$\mathbb{P}(X=2) = 1/4 = \mathbb{P}(\{HH\})$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{HT, TH\}) = 1/2 \ \left(\frac{2}{4}\right)$

Vrem să determinăm $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$:

$F : \mathbb{R} \to [0,1]$



Dacă $x < 0$, evenimentul $\{X \le x\} = \emptyset$

$F(x) = 0, \ \forall x < 0$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4, & 0 \le x < 1 \\ 3/4, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

Dacă $0 \le x < 1$, evenimentul $\{X \le x\} = \{X = 0\}$

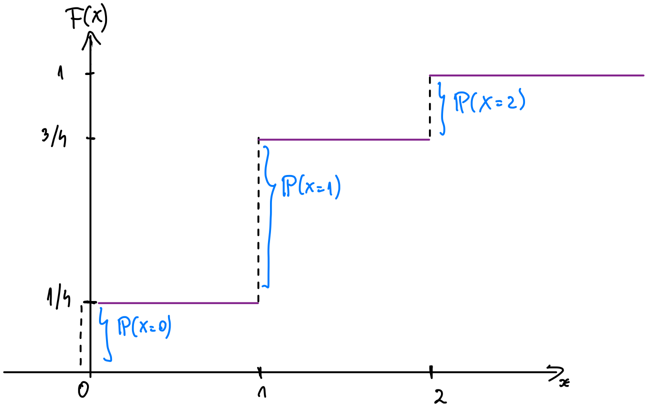
$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X=0) = 1/4$

$F(x) = 1/4, \quad 0 \le x < 1$

Dacă $1 \le x < 2$, $\{X \le x\} = \{X=0\} \cup \{X=1\}$

$F(x) = \mathbb{P}(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 1/4 + 2/4 = 3/4$

Dacă $x \ge 2$ atunci $\{X \le x\} = \Omega$



Prop ale funcției de repartiție

$$F:\mathbb{R}\to[0,1],\quad F(x)=\mathbb{P}(X<x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$$

a) F crescătoare

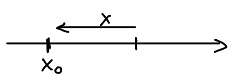
$$F(x)\le F(y)\ (\forall)\ x<y$$

$$(-\infty,x]\subseteq(-\infty,y)$$

$$F(x)=\mathbb{P}((-\infty,x])\le\mathbb{P}((-\infty,y])=F(y)$$

b) F continuă la dreapta

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}F(x)=F(x_0)\ ,\ (\forall)\ x_0$$



c) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

Obs: $\forall$ funcție care verifică a, b, c, este o funcție de repartiție

În plus față de a, b, c :

d) $\mathbb{P}(X>x)=1-\mathbb{P}(X\le x)=1-F(x)$

e) $\mathbb{P}(X<x)=\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y<x}}F(y)=F(x-)$

limita la st în x

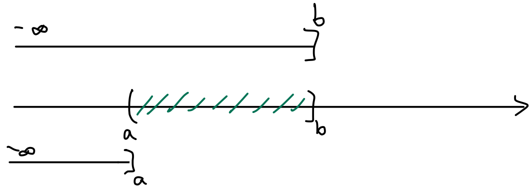
$f(x-)$ - limita la st

$f(x+)$ - lim. la dr

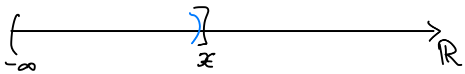
f cont dacă $f(x-)=f(x+)=f(x)$

f) $\mathbb{P}(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

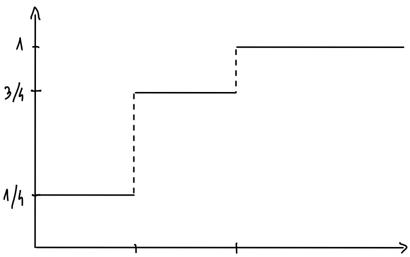
$\mathbb{P}(X \le b) - \mathbb{P}(X \le a)$



g) $\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X \le x) - \mathbb{P}(X < x) = F(x) - F(x-)$



$-\ \{x\} = (-\infty, x] / (-\infty, x)$

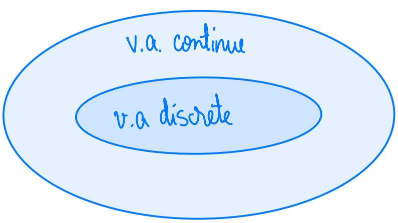


$\mathbb{P}(X=2) = \underbrace{F(2)}_{1} - \underbrace{F(2-)}_{3/4} = 1/4$

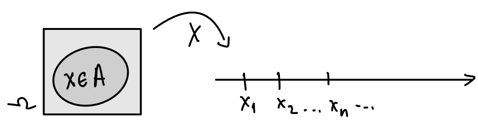
Variabile aleatoare discrete

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ var aleatoare. Spunem că X este o var aleatoare discretă dacă $X(\Omega)$ - img X $\left(X(\Omega) = \{ X(\omega) \mid \omega \in \Omega \} \right)$ este cel mult numărabilă

$|X(\Omega)| < \infty$ sau $X(\Omega)$ numărabilă



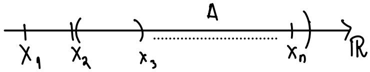
Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a discretă:

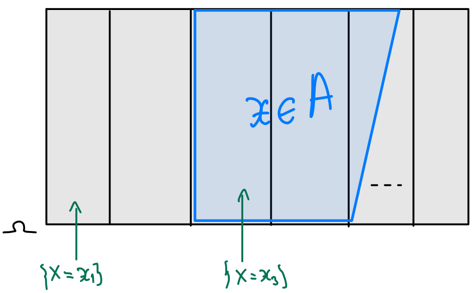


$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ și vrem să vedem $\mathbb{P}(X \in A)$

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \bigcup \{x\},\ x \in A \cap X(\Omega)\}$$
$$= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \cap X(\Omega)\} = \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} \{X = x\}$$





$$\{X \in A\} = \bigcup_{x \in X(\Omega) \cap A} \{X = x\}$$

reuniune cel mult numărabilă

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} \mathbb{P}(X = x)$$

Def (Funcția de masă): Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. discretă. Se numește funcție de masă asociată lui X funcția

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$$

Obs: Uneori se mai folosește notația $p(x)$ sau $p_X(x)$

Notație: Dacă $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a. discretă cu valori $x_1, \dots\}$ atunci notăm repartiția lui X:

$$X : \begin{pmatrix} x_1, \dots, & x_n, \dots \\ f(x_1) \dots & f(x_n) \dots \end{pmatrix}, \quad \text{altfel spus: } X : \begin{pmatrix} x_1 \dots & x_n \dots \\ \mathbb{P}(X = x_1) \dots & \mathbb{P}(X = x_n) \dots \end{pmatrix}$$

Exp: fie $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$. Se citește: Fie X o v.a. repartizată sub forma

Ce proprietate are f. de masă?

a) $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ (nenegativitate)

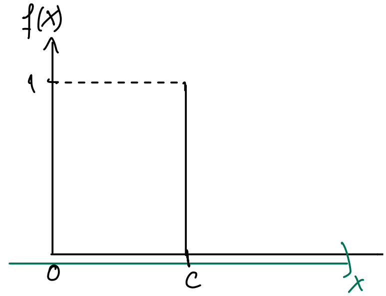
b) Masa totală este 1: $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1$; $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\{\omega \mid X(\omega) \in \mathbb{R}\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

$$\{X \in \mathbb{R}\} = \{X \in \bigcup_{x \in \mathbb{R} \cap X(\Omega)} \{x\}\} = \bigcup_{x \in \mathbb{R} \cap X(\Omega)} \{X = x\}$$

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)$$

Exemple de v.a. discrete

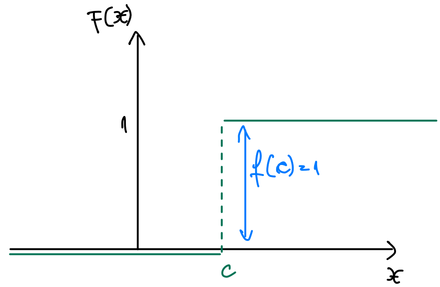
1) v.a. constantă



$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X = c$ (constantă)

F. de masă: $f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 0, & x \neq c \\ 1, & x = c \end{cases}$

F. de repartiție: $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$

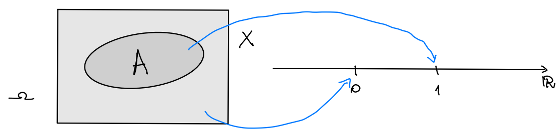


2) v.a. de tip Bernoulli

Să pp că avem un exp aleator și A este un eveniment de interes.

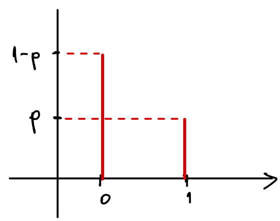
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p, $A \in \mathcal{F}$. Să pp că $\mathbb{P}(A) = p \in [0,1]$

Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$



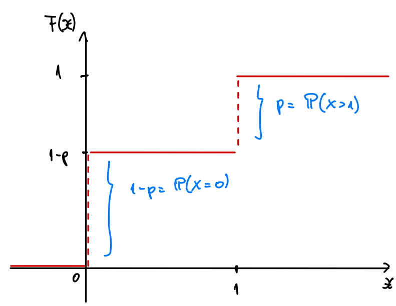
F. de masă:

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 1-p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \\ 0, & x \notin \{0,1\} \end{cases}$$



F. de repartiție:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



Def: Spunem că v.a X este repartiția Bernoulli de parametru p și notăm:

$X \sim B(p)$ (v.a X este reprezentată de Bernoulli de parametru p

Dacă $X \in \{0,1\}$ și $P(X=1)=p$, sub formă compactă: $f(x) = p^{x}(1-p)^{1-x}$, $x \in \{0,1\}$

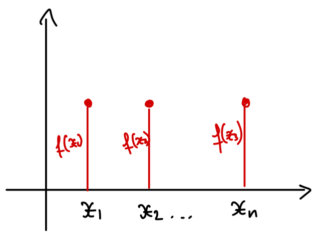
3) v.a de suport finit.

Fie $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discretă. $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n)$ și pp că $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n\}$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \dots & f(x_n) \end{pmatrix}$$

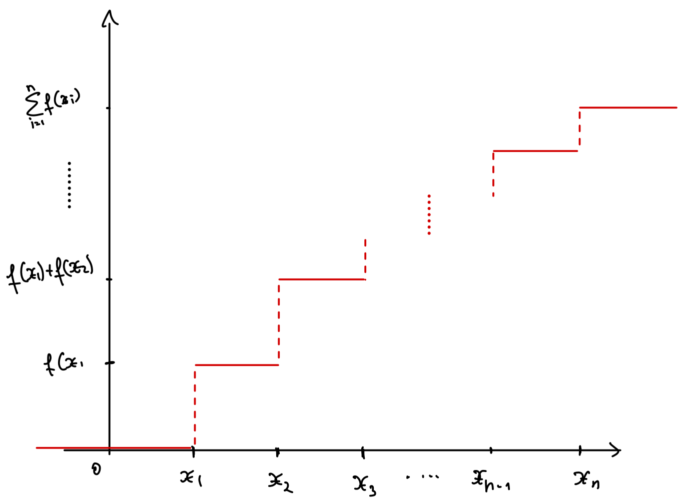
F. de masă:

$f(x_i) = P(X = x_i)$



F. de repartiție

$$F(X) = \begin{cases} 0, & X < x_1 \\ f(x_1), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ f(x_1) + f(x_2), & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i), & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1, & x \geq x_n \end{cases}$$



CURS 7

Recap: • V.a discretă : $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega)$ cel mult numărabilă.

• f. de masă: $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$ $\quad (f \geq 0, \ \sum f(x) = 1)$

• f. de repartiție $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

$$\begin{cases} f \nearrow \\ \text{continuă la dr} : F(x+) = f(x) \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1 \end{cases}$$

1) v.a. const $X = c$

2) v.a. Bernoulli $X \sim B(p)$

$X \in \{0,1\}$, $\mathbb{P}(X=1) = p$

3) v.a discretă cu suport finit

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $\qquad X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$

$p_1 = f(x_1)$; $p_2 = f(x_2)$ ...., $p_n = f(x_n)$

$p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$

4) V.a. Binomială

Repetăm un exp aleator de n ori și ne interesăm asupra realizării unui ev. de interes A

Pp $\mathbb{P}(A) = p$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p

Ex. Presupunem că experimentul constă în aruncatul cu banul:

$\Omega = \{H, T\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{2}$

$\Omega_n = \Omega^n = \{H, T\}^n$

Fie $X = \#$ de realizari ale lui A în cele n repetiții ale exp

$A = \{H\}$, $X : \Omega_n \to \mathbb{R}$, $X(\Omega_n) = \{0, 1, \dots, n\}$; $\quad X$ = nr de H în cele n aruncări

F. de masă: $f(k) = \mathbb{P}(X = k)$, $k = \overline{0,n}$

$|\{X = k\}| = C_n^k$

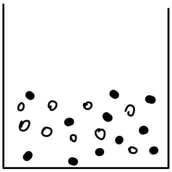
$\omega = \{X = k\}$ avem $\mathbb{P}(\{\omega\}) = (1-p)^{n-k} p^k$

$$\boxed{f(k) = \mathbb{P}(X=k) = C_n^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p^k}$$

$$\begin{cases} f(k) \geq 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (1-p)^{n-k} \cdot p^k = (p + 1 - p)^n = 1 \end{cases}$$

binomul lui Newton

Exp: Pp că avem o urnă cu N bile albe și negre. M sunt negre. Efectuăm n extrageri cu întoarcere



X - nr de bile negre din cele n extrageri

$f(k) = C_n^k (1-p)^{n-k} p^k$

Def: V.a $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ s.n v.a. repartizată binomial și se not $X \sim B(n, p)$

(x este reprezentat ca obinomială de parametri n și p)

Obs: $Bin(n, p)$

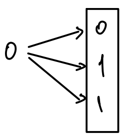
Obs: $B(1, p) = B(p)$

Obs: $X = \underset{0 \quad 1}{\overset{\wedge}{x_1}} + \underset{0 \quad 1}{\overset{\wedge}{x_2}} + \dots + \underset{0 \quad 1}{\overset{\wedge}{x_n}}$

X_i - v.a Bernoulli, $B(p)$ unde $p = \mathbb{P}(x_i = 1)$

$$X_i = \begin{cases} 1, & A \text{ s-a realizat la expi} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Ex: Transmitem un bit cu prob să fie corect $= p$

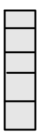


interpretat ca 1 de re -or

n impar: fie $n = 5$

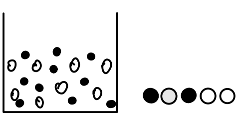
$\mathbb{P}(X \le 2)$

$\sum_{k=0}^{2} C_5^k p^k (1-p)^{5-k}$



5) V.a hipergeometrice

Pp că avem o urnă cu N bile albe și negre, M sunt negre. Efectuăm n extrageri fără întoarcere și X nr de bile negre din cele n bile extrase.



$X \in \{0, 1, 2, \dots, \min(n, M)\}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{C_M^k \; C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

$P_p \quad n < M$

$f(k) \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_M^k \, C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = ?$$

$C_N^n = \sum_{k=0}^{n} C_N^k \, C_{N-m}^{n-k}$ Identitatea Vandermonde

$$(1+x)^N = (1+x)^N \cdot (1+x)^{N-M}$$

egalăm coef lui x^n din membrul st cu cel din membrul dr

Jocul de noroc: 6 din 49

$N = 49 \quad M = 6$

$n = 6$

$$\mathbb{P}(\text{să nimerim } k \text{ numere}) = \frac{C_6^k \, C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6}$$

$\mathbb{P}(\text{să câștig}) = \mathbb{P}(3) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6)$

$\mathbb{P}(\text{să câștig cu 5 bilete}) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_5^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c)^5$ (independente)

$= 1 - (1 - \mathbb{P}(A_1))^5$

6) V.a. uniformă discretă

$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$\mathbb{P}(X = x) = 1/n \qquad X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1/n & 1/n & & 1/n \end{pmatrix}$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n} \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} 1 = \frac{|X(\Omega) \cap A|}{n}$$

Ex: Să pp că avem o urnă cu bile $1 \to 100$. Extragem 5 bile succesiv

a) Rep v.a care ne dă nr bilelor ≥ 70?

b) Rep va care ne dă nr bilelor de la extragerea i?

c) Care este prob ca nr 100 să fie extras cel puțin 1 dată?

Caz I: Extragerea cu întoarcere

a) Fie X v.a care ne dă nr de bile cu o val ≥ 70

$X \in \{0,1,2,3,4,5\}$
$X \sim B(5, \frac{31}{100})$

$X \sim HG(n, N, M)$ nr tot urne; nr; nr negre

$X \sim \mathcal{U}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ uniformă

b) $X_1 \in \{1, 2, \dots, 100\}$
$\mathbb{P}(X_1 = k) = 1/100$

$X_2 \in \{1, \dots, 100\}$
$P(X_2 = k) = 1/100$

c) A_1 - even prin care la prima extragere am obț 100
A_i - – // – a i-a – // –

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = \mathbb{P}(X_1 = 100 \mid X_2 = 100 \mid X_3 = 100 \mid X_4 = 100 \mid X_5 = 100\}$$
sau

$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ nu sunt disj 2 câte 2

$$= 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \underset{\text{indep}}{=} 1 - \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c)\mathbb{P}(A_3^c)\mathbb{P}(A_4^c)\mathbb{P}(A_5^c) = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^5$$

Caz II: fără întoarcere

a) Fie Y v.a care ne dă nr de bile cu o val ≥ 70
(sch hipergeometrică): $\mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{C_{31}^k \cdot C_{69}^{5-k}}{C_{100}^k}$

b) $Y_1 \in \{1, 2, \dots, 100\}$ $\quad \mathbb{P}(Y_1 = k) = 1/100$
$Y_2 \sim \mathcal{U}(\{1, \dots 100\})$

$$\mathbb{P}(Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(Y_2 = j \mid Y_1 = i) \underbrace{\mathbb{P}(Y_1 = i)}_{1/100}$$
form prob totale

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{100} 1/99 \cdot 1/100 = \frac{99}{99} \cdot 1/100 = 1/100$$

$$\mathbb{P}(Y_2 = j \mid Y_1 = i) = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1/99, & i \neq j \end{cases}$$

$Y_3 \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, 100\})$

c) $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(Y_i = 100) = 5/100$

$A_1 \cap A_2 = \phi$ (extr. fără întoarcere)

eveniment sunt dij 2 câte 2

7.) V.a. repartizate geometric și negativ binomial

Pp că aruncăm cu banul în mod repetat și că $\mathbb{P}(H) = p$. Fie X v.a. care ne dă nr de aruncări până când obținem pt prima oară H și incluzând această aruncare

$X \in \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$

$H \quad TH \quad TTH$

Pt $k \geq 1$

$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad \underbrace{TT\dots T}_{k-1}H$

Def: O v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$, $p \in (0,1)$ s.n. v.a rep geometric de parametrul p

$X \sim Geom(p)$

$f(k) = (1-p)^{k-1} p \geq 0 \qquad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

$\sum_{k \geq 1} f(k) = 1$? (suma unei serii)

$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum (1-p)^{k-1} \overset{q = 1-p}{=} p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$ Bună $\int a^2 + bx$

Dacă luăm Y = nr de eșecuri până la I succes : $Y = X - 1$

CURS 9

Repartiția Poisson

Def: S.n rep. Poisson o v.a cu f. de masă $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$

Not: $X \sim Pois(\lambda)$

Se folosește atunci când modelăm evenimente de tipul nr. de apariții ale unui eveniment de interes A, atunci când exp de N ori (N f. mare) și $\mathbb{P}(A)$ f. mică

$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}$ este o f. de masă?

$\begin{cases} f \geq 0 \\ \sum_x f(x) = 1 \end{cases}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = 1.$$

Aprox. Poisson a Binomului

$X \sim B(n,p)$ a.î. $p = p_n$ iar $n \cdot p \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$ $\quad p = \frac{\lambda}{n}$ $\quad p \sim \frac{\lambda}{n}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \Big(\underbrace{\frac{\lambda}{n}}_{\to p_n}\Big)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X=k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!\, n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \underset{[1^\infty]}{=} \lim_{n\to\infty} \left\{ \Big[\underbrace{1 + \left(-\frac{\lambda}{n}\right)}_{e} \Big]^{\left(\frac{1}{-\frac{\lambda}{n}}\right)} \right\}^{-\frac{\lambda}{n} \cdot n} = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}{n^k} = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Funcții de v.a (discrete)

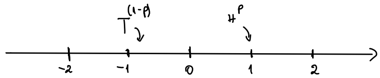
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\begin{tikzcd} \Omega : \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "g \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$y = g(x)$ este tot v.a

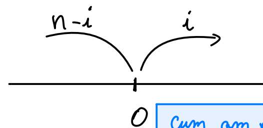
X discretă $\Rightarrow$ $g(x)$ discretă

Ex: (mersul la întâmplare)



Pp că particula se mișcă în pași. Care este poz după n pași?

Fie X nr de pași spre dreapta. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$



Pp că particula a efectuat i pași spre dreapta

Dc $X = i \Rightarrow Y = i - (n-i) = 2i - n \Rightarrow \boxed{Y = 2X - n}$

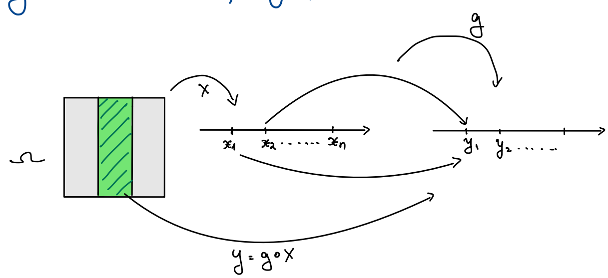
Cum am modela mișcarea în plan? (posibil de examen)

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(2X - n = k) = \mathbb{P}\left(X = \frac{n+k}{2}\right) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$$

am folosit binomială
Nu poisson

(P) Dacă $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a discretă și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ atunci $Y = g(X)$ este discretă

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\{x \mid g(x) = y\}} \mathbb{P}(X = x)$$



$$\mathbb{P}(Y = y_1) = \mathbb{P}(g(X) = y_1)$$

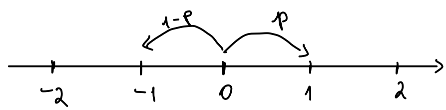
$$\{g(X) = y_1\} = \{w \mid g(X(w)) = y_1\} = \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\}$$

$$\mathbb{P}(Y = y_1) = \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2)$$

Exp: $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}45 \end{pmatrix}$

$y = X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

Exp:

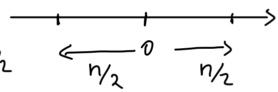


$y = 2X - n$ poz după n pași

$X =$ nr pași la dreapta

Fie Z distanța față de origine, n pași

$Z = |Y| \in \{0, 2, 4, \dots\}$



$\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}\left(X = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} p^{n/2} \cdot (1-p)^{n/2}$

$\mathbb{P}(Z=j) = \mathbb{P}(X=j) + \mathbb{P}(x=-j)$; $j \in \{2, 4, \dots\}$

$= \binom{n}{\frac{n+j}{2}} p^{\frac{n+j}{2}} (1-p)^{\frac{n-j}{2}} + \binom{n}{\frac{n-j}{2}} p^{\frac{n-j}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{n-j}{2}}$

Dc. $p = 1/2 \Rightarrow \mathbb{P}(Z=j) = 2\binom{n}{\frac{n+j}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Independența v.a. (discrete)

$\boxed{A \perp\!\!\!\perp B \text{ dacă } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$

Def. Fie X și Y 2 v.a discrete. Sp că X și Y sunt independente dacă

$$\boxed{\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \cdot \mathbb{P}(Y=y) \quad , (\forall)\, x, y}$$

P: a) V.a X și Y sunt $\perp\!\!\!\perp \iff \mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$, $(\forall) x, y$

b) V.a X și Y sunt $\perp\!\!\!\perp \iff \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$, $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$

Def: Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. discretă. Sp că v.a sunt independente $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J}\{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(X_i \in A_i) \quad \forall J \subseteq \{1,2,\dots,n\},\ A_i \subset \mathbb{R}$$

Exp: 1) Dc. $X_1,\dots,X_n \sim B(p)$ indep $\Rightarrow X = X_1 + \dots + X_n \sim B(n,p)$

2) Dacă $X_1,\dots,X_n \sim Geom(p)$ indep $\Rightarrow X = X_1 + \dots + X_n \sim NB(r,p)$

P: $X \perp\!\!\!\perp Y$ și $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \Rightarrow g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$

Exp: 1) (sume de binomiale)

$X \sim B(n_1,p)$, $Y \sim B(n_2,p)$ indep $\Rightarrow X+Y \sim B(n_1+n_2,p)$

2) $X \sim Pois(\lambda_1)$, $Y \sim Pois(\lambda_2)$ indep $\Rightarrow X+Y \sim Pois(\lambda_1+\lambda_2)$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X+Y=k \mid X=x)\,\mathbb{P}(X=x) = \sum_{x=1}^{k} \mathbb{P}(Y=k-x \mid X=x)\,\mathbb{P}(X=x)$$

$$\{X+Y=k\} = \bigcup_{x=0}^{\infty}\{X=x,\ X+Y=k\} \overset{indep}{=} \sum_{x=0}^{k} \mathbb{P}(Y=k-x)\,\mathbb{P}(X=k)$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x=0}^{k} \frac{\lambda_1^x}{x!}\cdot\frac{\lambda_2^{k-x}}{(k-x)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x=0}^{k} \frac{k!}{x!(k-x)!}\cdot\frac{1}{k!}\,\lambda_1^x\cdot\lambda_2^{k-x} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}\sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}\frac{\lambda_1^x\,\lambda_2^{k-x}}{(\lambda_1+\lambda_2)^k} \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^x\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-x}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = 1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

3) $X \sim Pois(\lambda_1)$, $Y \sim Pois(\lambda_2)$ indep

$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) = ?$

$X \mid X+Y=n \sim B(n,p)$; $p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}$

Media și variația v.a

Repetăm un experiment de N ori $\longrightarrow$ # de H în 10 aruncări

$N=8$ $\qquad x_1, x_2, \dots, x_8$

$\qquad\qquad 1, 1, 1, 3, 4, 4, 5, 8$

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N} = \frac{x_1+\dots+x_8}{8} \begin{cases} \nearrow \dfrac{1+1+1+3+4+4+5+8}{8} \\ \searrow \dfrac{1\cdot 3+3\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 1+8\cdot 1}{8} \end{cases}$$

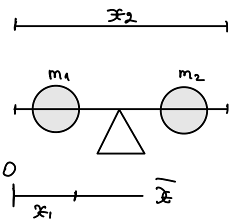
$$f(x) = \mathbb{P}(X=x) \simeq \frac{N(x)}{N} \Rightarrow N(x) \simeq f(x)\cdot N$$

$$\sum_i \frac{x_i}{N} = \sum_x \frac{x\,N(x)}{N} = \sum_x x f(x)$$

Def. Fie X v.a. S.n media v.a X (not $\mathbb{E}[X]$) $\mathbb{E}[X] = \sum_x x\mathbb{P}(X=x)$ ori de câte ori $<\infty$

Obs. Dacă $\sum x\mathbb{P}(X=x) = \infty \Rightarrow$ sp că X nu are medie

Interpretarea fizică:



(sist să fie în echilibru)

$M = m_1 + m_2$

$\bar{x}M = m_1 x_1 + m_2 x_2$

$$\boxed{\bar{x} = x_1 \frac{m_1}{m_1+m_2} + x_2 \frac{m_2}{m_1+m_2}}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_x x f(x)$$

Exp: $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{E}[X] = (-1)\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}5 = 1$$

Proprietăți:

a) X e ct $\Rightarrow \mathbb{E}[X] = c$

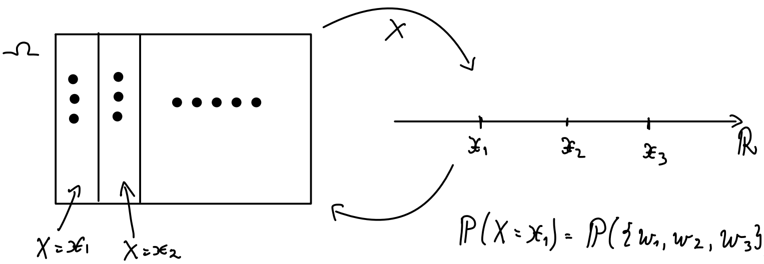
b) $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0$

c) $X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$

$X(\omega) \geq Y(\omega)$

d) $a, b \in \mathbb{R}$, X, Y v.a (discrete) $\Rightarrow \mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$



$$\mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(\{w_1, w_2, w_3\}) = \sum_{w \in \{w_1, w_2, w_3\}} \mathbb{P}(\{w\})$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x} x\, \mathbb{P}(X = x) = \sum_{w} X(w)\, \mathbb{P}(\{w\})$$

$$\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{x} (X(w) + Y(w))\, \mathbb{P}(\{w\})$$

e) A un even și fnct indicator $\mathbb{1}_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

$$\mathbb{1}_A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{P}(A) & 1 - \mathbb{P}(A) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$$

f) fie X v.a. și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Y = g(X)$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x} g(x) f(x) = \sum_{x} g(x)\, \mathbb{P}(X = x)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y} y\, \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y} y \sum_{\{x \mid g(x) = y\}} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x} g(x)\, \mathbb{P}(X = x)$$

Def: Fie X o v.a (discretă).

→ S.n. moment de ordin k, $\mathbb{E}[X^k]$

→ S.n moment ct de ord k, $\mathbb{E}[(X-a)^k]$

→ S.n mom centrat de ord k, $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k]$

→ Momentul centrat de ord 2 s.n. Varianta v.a. X

$$\boxed{Vr(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] \geq 0} \ !$$

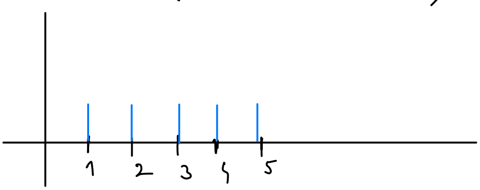
P: $Vr(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \longrightarrow$

Dem:

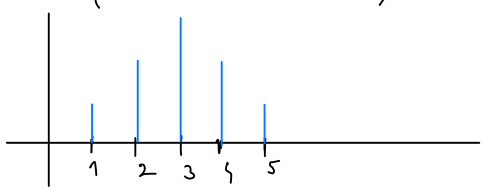
$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] =$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\,\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 =$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Ex:

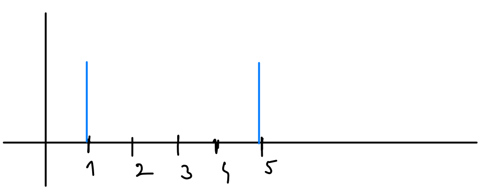
$$X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$



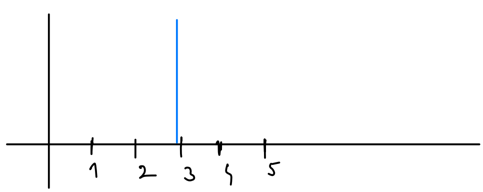
$$X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$$



$$X_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



$$X_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



CURS 10

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ discretă

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}(X = x) \quad \text{atunci când} \quad \mathbb{E}[X] < \infty$$

$Y = g(X)$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

atunci : $\mathbb{E}[Y] = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\, \mathbb{P}(X = x)$

Momentul de ordin k : $\mathbb{E}[X^k] = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k\, \mathbb{P}(X = x)$

Momentul centrat în a de ord k :

$$\mathbb{E}[(X-a)^k] = \sum (x-a)^k\, \mathbb{P}(X = x)$$

— // — centrat ($r = \mathbb{E}[X]$) : $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k] =$

$$= \sum (x - \mathbb{E}[X])^k\, \mathbb{P}(X = x)$$

Momentul curent de ord = 2 Varianța $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

Prop varianța

a) $X = c$ const $\Rightarrow Var(X) = 0$

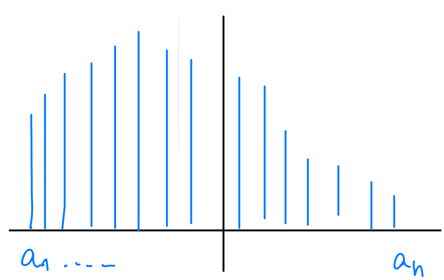
b) $Var(X) \geq 0$

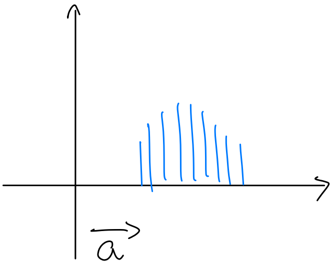
c) $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

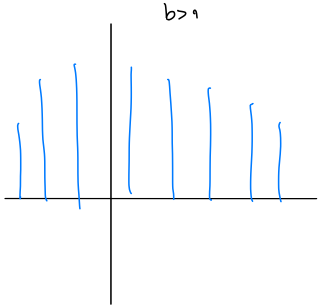
$\Big\} \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2}$

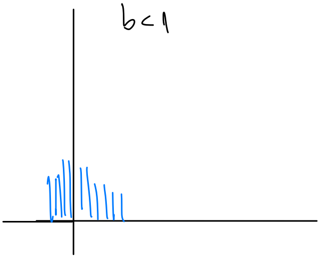
cât este varianța lui $a + bX$, $a, b \in X$

d) $Var(a + bX) = Var(X) \cdot b^2$









$$\mathbb{E}[ax+b] = a+b\,\mathbb{E}[x]$$

$$a+bx - \mathbb{E}[a+bx] = b(x - \mathbb{E}[x])$$

$$\mathrm{Var}(a+bx) = \mathbb{E}\left[\left(a+bx - \mathbb{E}[a+bx]\right)^2\right]$$
$$= b^2\,\mathbb{E}\left[(x - \mathbb{E}[x])^2\right] = b^2\,\mathrm{var}(x)$$

e) dacă $x \perp\!\!\!\perp y$ (independente) atunci $\mathrm{Var}(x+y) = \mathrm{Var}(x) + \mathrm{Var}(y)$

$$\mathrm{Var}(x+y) = \mathbb{E}\left((x+y - \mathbb{E}[x+y])^2\right)$$
$$= \mathbb{E}\left[(x - \mathbb{E}[x] + y - \mathbb{E}[y])^2\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[(x-\mathbb{E}(x))^2 + 2(x-\mathbb{E}(x))(y-\mathbb{E}[y]) + (y-\mathbb{E}[y])^2\right]$$
$$= \mathrm{Var}(x) + 2\,\mathbb{E}\left[(x-\mathbb{E}(x))(y-\mathbb{E}(y))\right] + \mathrm{Var}(y)$$

Def. Fie x, y două var aleatoare. Sn covarianța dintre x, y

$$\boxed{\mathrm{Cov}(x,y) = \mathbb{E}\left[(x - \mathbb{E}(x))(y - \mathbb{E}(y))\right]}$$

Obs: 1) Dc. $x = y$ atunci $\mathrm{Cov}(x,y) = \mathrm{Var}(x)$

2) Dc $x \perp\!\!\!\perp y \Rightarrow x - \mathbb{E}(x) \perp\!\!\!\perp y - \mathbb{E}(y)$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \mathbb{E}\left[(x-\mathbb{E}(x))(y-\mathbb{E}(y))\right] = \underbrace{\mathbb{E}(x-\mathbb{E}[x])}_{=0} \cdot \mathbb{E}(y-\mathbb{E}[y]) = 0$$

3) Dacă $x_1, \dots, x_n$ independente

$$Var(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = Var(x_1) + \dots + Var(x_n)$$

Exemple de calcul al mediei și variantei

1) Var de tip Bernoulle

dacă $x \in \{0,1\}$ cu $P(x=1) = p$

$$x \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[x] = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$x^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

$$Var(x) = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$$

$$\boxed{E[g(x)] = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \cdot P(X = x)}$$

$$\mathbb{E}[x^2] = p$$

$$= 0^2(1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

2) Var de tip Binomial

$$x \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ f(0) & f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

$$X \sim B(n, p)$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}$$

Vrem să găsim $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k f(k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \cdot \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{k-k}}_{1} \Big) = np$$

din $k=0$ se face simplificări

$X \sim B(n,p) \leftarrow$ Bernouli

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad X_i \sim B(p)$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = np$$

$$Var(X) \overset{\text{indep}}{=} Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n) = np(1-p)$$

$\boxed{3) \quad X \sim HG(n, N, M)}$ $\leftarrow$ (urnă cu N bile din care M negre, n extrageri fără întoarcere)

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Vreau să găsim $\mathbb{E}[X] = ?$

$$X = X_1 + \dots + X_n \qquad X_j = \begin{cases} 1, & \text{bila } j \text{ e neagră} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$X_j \sim B(p) \qquad p = \frac{M}{N}$$

$X_1, \dots, X_n$ Nu sunt indep

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[(X_1 + \dots + X_n)] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = n\frac{M}{N}$$

$\boxed{4) \text{ Variabilă Poisson}}$ $\quad X \sim Pois(\lambda)$

$$X \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \cancel{k}\frac{\lambda^k}{\cancel{k!}} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}}_{1} = \lambda$$

$$Var(x) = \mathbb{E}[x^2] - (\mathbb{E}[x])^2$$

$$\mathbb{E}[x^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{\lambda^{l+1}}{l!} = e^{-\lambda} \left[\sum_{l=0}^{\infty} l \frac{\lambda^{l+1}}{l!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^{l+1}}{l!} \right.$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{l+1}}{(l-1)!} + \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \right) = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{l+1}}{(l-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = \lambda^2 + \lambda$$

$$Var(x) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

5) Var Geometrică

$X \sim Geom(p)$

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k \geq 1$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p$$

$\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)}$?

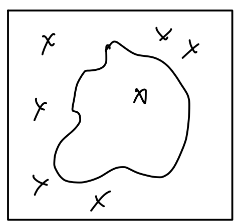
Not $q = 1-p$

$\boxed{f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)}$?

$$\mathbb{E}[x] = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p$$

$$\mathbb{E}[x] = p \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k q^{k-1}}_{(q^k)'} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dq} q^k = p \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{n} q^k \right) =$$

$$= p \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$



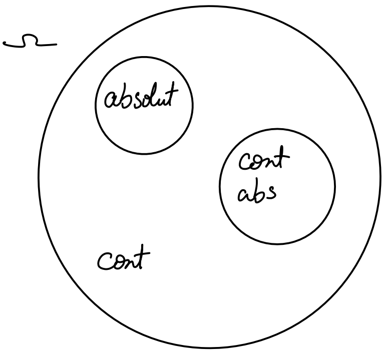
$$Var(x) = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$$

$$\mathbb{E}[x^2] = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) q^{k-1}}_{(q^{k+1})''} - \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^{k+1}\right)'' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{k+1}\right)'' = \frac{d^2}{dq^2}\left(q\,\frac{q}{1-q}\right) = \frac{d}{dq}\left(\frac{2q(1-q)-q^2(-1)}{(1-q)^2}\right)$$

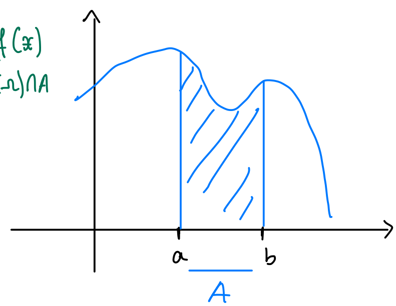
$$= \frac{d}{dq}\left(\frac{2q-q^2}{(1-q)^2}\right) = \frac{2(1-q)^3 - 2q(2-q)(-1)(1-q)}{(1-q)^4} = \frac{2}{(1-q)^3}\left[(1-q)^2 + q(2-q)\right] =$$

Variabile aleatoare continue (Absolut continue)



Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a.
Sp că v.a X este o v.a cont (abs cont) dacă
$(\exists)$ o fnct $f \geq 0$ aî $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,d(x)$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}$
(intervalul / semiintervalul închis și deschis)
Funcția f sn densitatea repartiției

Obs: Dacă X este o v.a discretă $\Rightarrow \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} (X = x) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} f(x)$



Dacă $A = [a,b] \Rightarrow \mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Dacă $A = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

$\{x \in \mathbb{R}\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \mathbb{R}\} = \Omega$

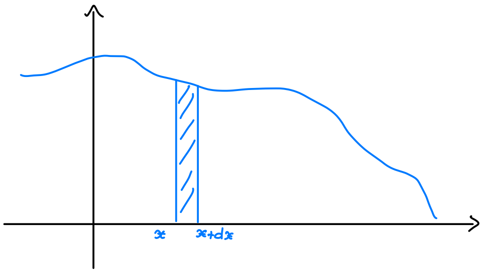
P: O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este densitatea de reprezentare $\Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$

Obs: pp că X v.a discretă cu densitatea f

$A = \{a\}$

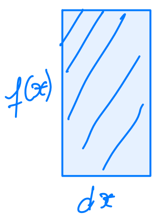
$\mathbb{P}(X = a) = \int_{\{a\}} f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

De ce s.n. densitate?



$$P(X \in (x, x+dx)) = \int_x^{x+dx} f(t)\,dt \simeq f(x)\,dx$$

pt dx mic

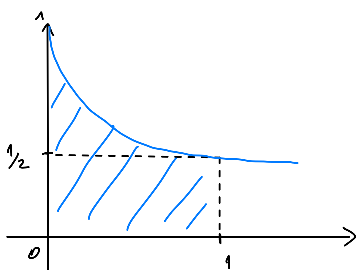


$$f(x) \simeq \frac{P(X \in [x, x+dx])}{dx}$$

← probabilitatea pe unitatea de lungime

Exp: (o densitate de repartiție poate lua valori oricât de mari)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \qquad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$



$f \ge 0$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,1]}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\,\Big|_0^1 = 1$$

Obs: O densitate NU este o probabilitate!

Discret	Cont
$f(x) = P(X = x)$	0
funct de masă	$f(x)$
$P(X \in A) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} f(x)$	$P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$

$$\sum \longrightarrow \int$$

$$P(X = x) \longrightarrow f(x)\,dx$$

- Fct de repartiție $F : \mathbb{R} \to [0,1]$

  $F(x) = P(X \le x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

- Dacă X este v.a. cont cu densitate f ($X \sim f$)

$$F(x) = P(X \in (-\infty, x]) = \int_{(-\infty, x]} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Prop (fct de repartiție): 1) F cresc

2) F ct la dr

3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ și $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Obs: Din Th. fundamentală a analizei, dacă f cont în x_0, atunci f este derivabilă în x_0, iar $F'(x) = f(x)$

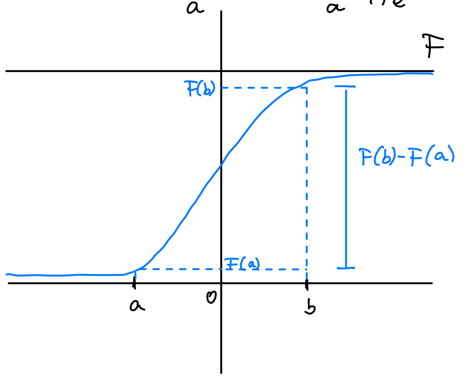
Exp: fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

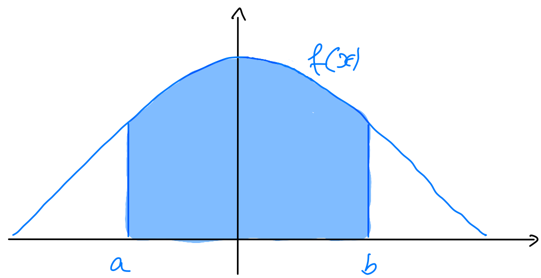
(rep. logistică) $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}, \; x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx \overset{u = e^x}{=\!=} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u)^2}\,du = -\frac{1}{1+u}\Big|_0^{\infty} = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt \overset{u = e^t}{=} \int_0^{e^x} \frac{1}{(1+u)^2}\,du = \frac{-1}{1+u}\Big|_0^{e^t} = -\frac{1}{1+e^x} + 1 = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$





Obs: Dacă X v.a cont cu densitatea f și fct. de repar F

atunci $\mathbb{P}(x \in (a,b)) = \mathbb{P}(X \in (a,b]) = \mathbb{P}(X \in [a,b)) = \mathbb{P}(X \in [a,b])$
$= F(b) - F(a)$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$$

$\sum x\, \mathbb{P}(X = x)$

CURS 11

Media și momentele v.a. cont

~ discret ~

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\, \mathbb{P}(X=x)$$

$$\mathbb{E}[X^k] = \sum_x x^k\, \mathbb{P}(X=x)$$

$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k] = \sum_x (x-\mathbb{E}[X])^k\, \mathbb{P}(X=x)$$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)\, \mathbb{P}(X=x)$$

~ cont ~

Def: Fie X o v.a cont cu densitatea f. Media v.a X este def:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx, \quad \text{dacă} \quad \mathbb{E}[|X|] = \int |x| f(x)\,dx < \infty$$

În caz contrar spunem că X nu are medie

Momentul de ord k: $\mathbb{E}[X^k] = \int x^k f(x)\,dx$

Momentul centrat în a de ordin k: $\mathbb{E}[(X-a)^k] = \int (x-a)^k f(x)\,dx$

Momentul centrat de ord k: $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k] = \int (x-\mathbb{E}[X])^k f(x)\,dx$

pt $k=2$ avem varianta:

$$Var(X) = \mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X])^2] = \int (x-\mathbb{E}[X])^2 f(x)\,dx$$

Media unei fct de o v.a:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int g(x) f(x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \sum \longrightarrow \int \\ \\ \mathbb{P}(X=x) \longrightarrow f(x)\,dx \end{array}\right.$$

Proprietăți (medie și var): Fie X o v.a cu densitatea f

1) Dc X e constant, c, $\Rightarrow \mathbb{E}[X]=c$, $Var(X)=0$
2) $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0$
3) $X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$
4) $a, b \in \mathbb{R}$, X, Y v.a. cont $\Rightarrow \mathbb{E}[aX+bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
5) $Var(X) \geq 0$
6) $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
7) $Var(a+bX) = b^2 Var(X)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$
8) Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y$ atunci: $\begin{cases} \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \\ Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) \end{cases}$

Independente
$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B)$

Exemplu de v.a cont

1) v.a. repartizată uniform pe $[a,b]$

O v.a X este repartizată uniform pe $[a,b]$, $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, dacă densitatea de repartiție a lui X este const pe $[a,b]$ și o altă ?

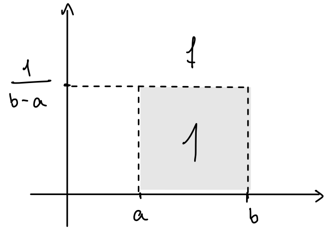
$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} c \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

f densitate $\Leftrightarrow$ 1) $f(x) \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$
2) $\int f(x)\,dx = 1$

$$c(b-a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

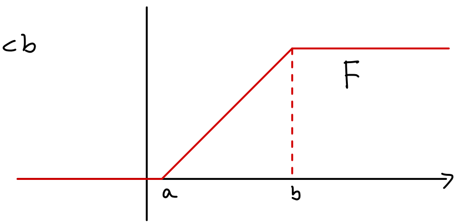
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$



Fct de repartiție :

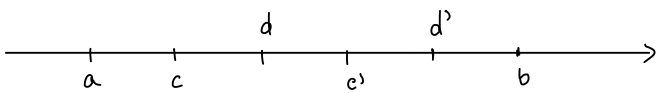
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{x-b}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

$$\int_{[-\infty, x] \cap [a,b]} \frac{1}{b-a}\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}\,dx$$



$[c,d] \subseteq [a,b]$

$$\mathbb{P}(X \in [c,d]) = \int_{[c,d]} f(x)\,dx = \int_{c}^{d} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[c,d]}(x)\,dx = \frac{d-c}{b-a}$$



$$\mathbb{E}[X] = \int x f(x)\,dx = \int x \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \frac{(b^2-a^2)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

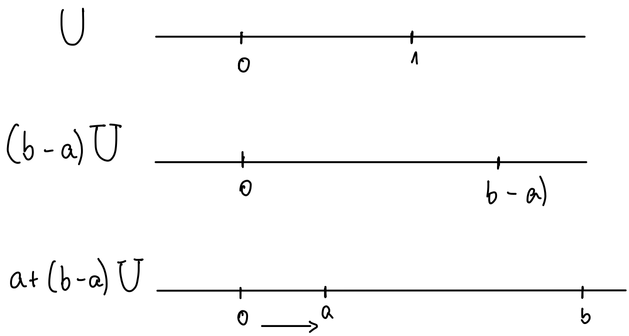
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Dacă $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ atunci $V = a + (b-a)U \sim \mathcal{U}([a,b])$

translatare



$U \sim \mathcal{U}([0,1]) \Rightarrow \mathbb{E}[U] = \int_0^1 x\, dx = 1/2$

$\mathbb{E}[U^2] = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$

$Var(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1/12$

$X = a + (b-a)U \Rightarrow \mathbb{E}[X] = a + (b-a)\mathbb{E}[U] = \frac{a+b}{2}$

$Var(X) = (b-a)^2 \, Var(U) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Teoremă : Universalitatea rep. uniforme

Fie X o v.a. cu fnct de rep F cont și s.cresc (bij). Atunci:

a) Dc. $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ atunci $F^{-1}(U)$ este rep la fel ca și X

b) $F(X) \sim \mathcal{U}[0,1]$

Dem: a) Fie $Y = F^{-1}(U)$ a.î. $\mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \le y) = \mathbb{P}(F(F^{-1}(U)) \le F(y))$ $= F(Y)$

astfel Y și X sunt rep. la fel

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ u, & 0 \le u < 1 \\ 1, & u \ge 1 \end{cases}$$

b) Fie $Y = F(X)$, $\mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(F(X) \le y) = \mathbb{P}(F(F^{-1}(U)) \le y)$

$X \sim F^{-1}(U) = \mathbb{P}(U \le y) = y$, $y \in [0,1) \Rightarrow F(X) \sim \mathcal{U}[0,1)$

Exp: $X \sim f$, $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, $F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

Calc. F^{-1} ?

$$F(x) = y \iff \frac{e^x}{1+e^x} = y \iff e^x = \frac{y}{1-y} \iff x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

$$F^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{y+1}\right), \; y \in (0,1)$$

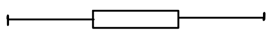
$$\begin{cases} \text{gen. o v.a } U \sim U(0,1) \\ \text{Calc. } \ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \sim \text{Logistic} \end{cases}$$

Obs. În general, definim fd. cuantilă

$$F^{-1}:[0,1] \to \mathbb{R}, \quad F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$$

Cuantila de ord $p \in (0,1)$ este $x_p = F^{-1}(p)$

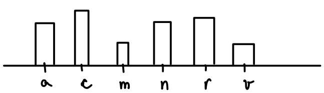
Dc $p = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1/2}$ – mediană

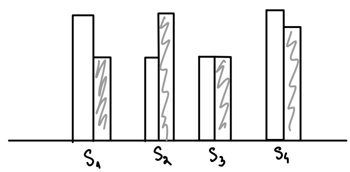


baxplot

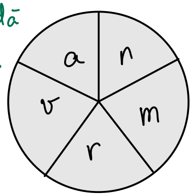
- Diagrama cu bară (pt. v.a discrete)

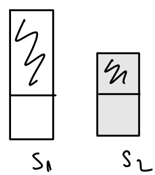
frecventa $x_1, x_2, \ldots, x_n$



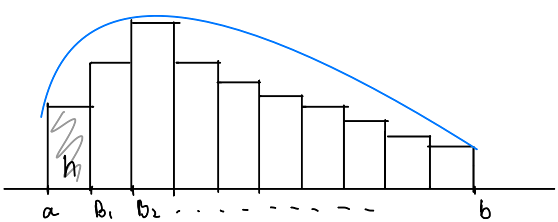


Nerecomandată

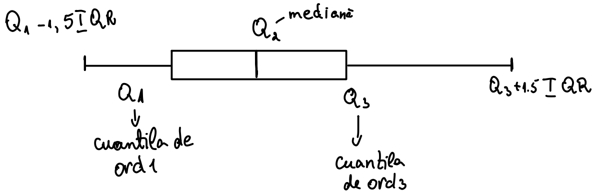




Histogramă



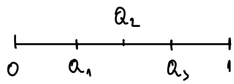
$$B_i = \left[a + \frac{b-a}{n} i, \; a + \frac{(b-a)(i-n)}{n}\right)$$

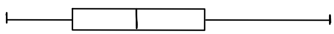


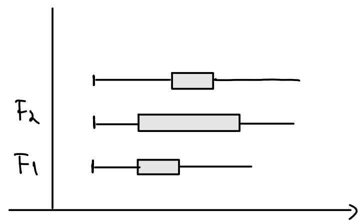
$IQR = Q_3 - Q_1$ variabile potential absente

$Q_1 = F^{-1}(0,25)$

$Q_3 = F^{-1}(0,75)$





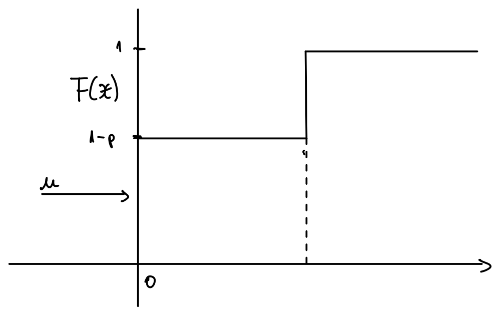


Exp: $X \sim B(p)$ $\quad \mathbb{P}(X=1) = p \quad ; \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$

↳ Bernoulli

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 0, & 0 < u \le 1-p \\ 1, & 1-p < u \le 1 \end{cases}$$



$U \sim \mathcal{U}[0,1)$

$F^{-1}(U) \sim B(p)$

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} 0, & U < 1-p \\ 1, & U \ge 1-p \end{cases} = \begin{cases} 0, & p < 1-U \\ 1, & p \ge 1-U \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1, & U \le p \\ 0, & U > p \end{cases}$$

dacă $U \leq p$ atunci $y = 1$
altfel $y = 0$

2. Reprezentarea exponențială

Spunem că o v.a X este rep exp. de parametrul λ, $X \sim Exp(\lambda)$

$$f(x) \leq \lambda e^{-\lambda x},\ x \in \mathbb{R}_+,\ \lambda > 0$$

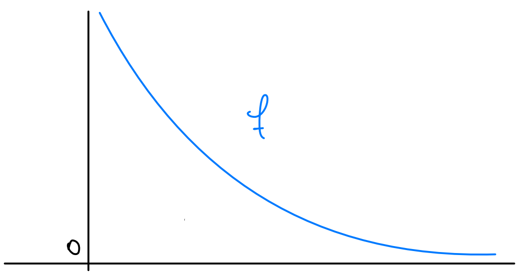
este densitate ?

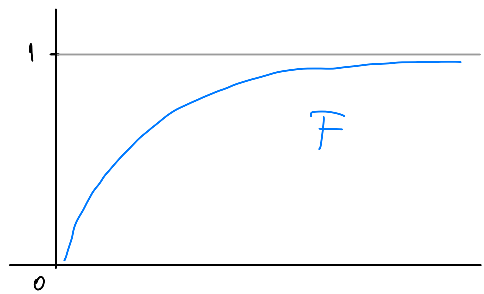
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left(-e^{\lambda x}\right)\Big|_0^{\infty} = 1$$

Cât e $F(x) = ?$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, x\, dt = \int_0^x \left(-e^{-\lambda t}\right)' dt =$$

$$= -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{\lambda x}$$

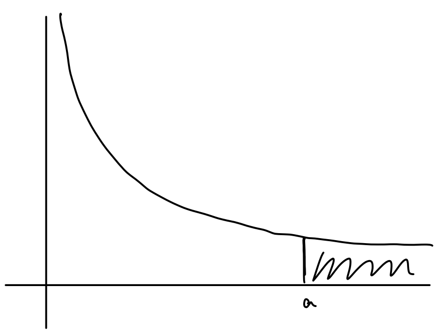




$$\mathbb{P}(X > a) = \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_a^{\infty} = e^{-\lambda a}$$

Prob de supravietuire →

că X depăseste pragul a descreste exp



Media: $\mathbb{E}[X] = \int x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} -x\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx$

$$= \int_0^{\infty} x\left(-e^{-\lambda x}\right)' dx = \underbrace{-x e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}}_{0\ \text{(polinom pe exp)}} + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx}_{1/\lambda}$$

$$= 1/\lambda$$

Varianța: $Var(X) = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$

$$\mathbb{E}[x^2] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx = 2/\lambda^2$$

(P) : Pb lipsei de memorie

a) $X \sim Exp(\lambda)$ atunci: $\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq t) = \mathbb{P}(X > s)$, $\forall s, t \geq 0$

Dc? $\mathbb{P}(X \geq s+t / X \geq t) = \dfrac{\mathbb{P}(X \geq s+t / X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \dfrac{\mathbb{P}(X \geq s+t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X \geq s)$

b) Dacă X e o v.a. cont, ≥ 0 care admite prop lipsei de memorie atunci $X \sim Exp(\cdot)$

$h(s+t) = h(s) + h(t)$, $\forall s, t)$

$g(x+y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$g(x) = \lambda x$

3. Rep. Normală (Gaussiană)

o. v.a X este rep. normal de parametrul μ și σ^2, $X \sim N(\mu\, \sigma^2)$, dacă

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dacă $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$, at sp că $X \sim N(0,1)$ (normala standard)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

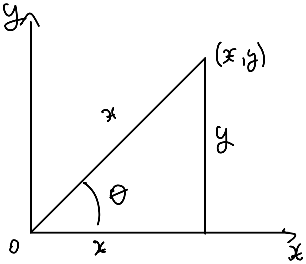
în fct de repartiția $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$

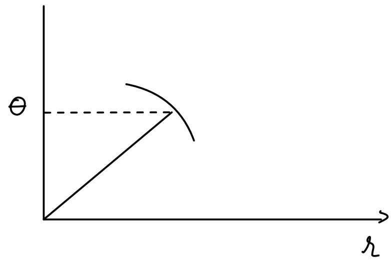
- f simetric : $f(z) = e(-z)$

De ce f e densitate? $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$

$\int f(x)\, dx = 1$

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x/2}\,dx\right) x \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right) \overset{\text{Fubini}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$



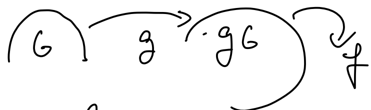


$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) =$
$= (x,y)$

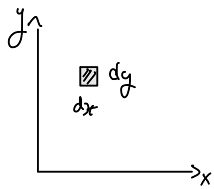
$$\int_{g(G)} f(x)\,dx = \int_G f(g(x))\,\underbrace{|J_g(x)|}_{\text{jacobiană}}\,dx$$



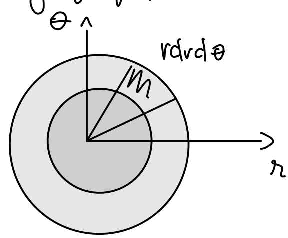
$g(G) = \mathbb{R}^2$

$G = [0,\infty) \times (0, 2\pi]$

$$J_g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$



$g(g_1, g_2)$



$\det J_g = r$

$$J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = \iint f(g(r,\theta))\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \iint_{(0,\infty)\times(0,\pi)} e^{-r^2/2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2}\,r\,dr\,dr = 2\pi \underbrace{\int_0^{\infty} re^{-r^2/2}\,dr}_{1} \Rightarrow I = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_0^{\infty} re^{-r^2/2}\,dr = \int_0^{\infty}\left(-e^{-r^2/2}\right)'\,dr = 1$$

CURS 13

Media unei funcții care depinde de (X, Y)

Reamintim: X v.a discretă f_X - fct de masă

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x f_X(x)$$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot f_X(x)$$

Fie X, Y v.a discretă cu $f(x, y)$ - fct de masă comună, atunci

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_{x,y} g(x,y) \cdot f(x,y)$$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Exp: 1) $g(x, y) = x + y$

$$\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{x,y} (x+y) \cdot f(x,y)$$

2) $g(x,y) = xy$

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x,y} xy \cdot f(x,y)$$

$\sum_x \sum_y$

Exp:

X\Y	-1	0	2	
1	1/18	3/18	2/18	
2	2/18	0	3/18	
3	0	4/8	3/18	

Vrem rep marginală X, Y,
rep $X|Y = 0$
$Y|X=1$, $\mathbb{E}[X, Y]$, $\mathbb{E}[3X + 4Y]$

$X \setminus Y$	-1	0	2	
1	$1/18$	$3/18$	$2/18$	$6/18$
2	$2/18$	0	$3/18$	$5/18$
3	0	$4/18$	$3/18$	$7/18$
	$3/18$	$7/18$	$8/18$	1

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y)$$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6/18 & 5/18 & 7/18 \end{pmatrix}$$

$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3/18 & 7/18 & 8/18 \end{pmatrix}$$

Rep $X \mid Y=0$ ⟵ repartiţia condiţionată

$$f_{X|Y}(x|y) = P(X=x \mid Y=y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

$$X \mid Y=0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3/18}{7/18} & 0 & \frac{4/18}{7/18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Rep $Y \mid X=1$

$$Y \mid X=1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{1/18}{6/18} & \frac{3/18}{6/18} & \frac{2/18}{6/18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1/6 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$E[XY] = \sum_x \sum_y xy \cdot f(x,y) = 1\cdot(-1)\cdot 1/18 + 0 + 1\cdot 2\cdot 2/18 + 2\cdot(-1)\cdot 2/18 + 0 + 2\cdot 2\cdot 3/18 + 0 + 0 + 3\cdot 2\cdot 3/18$$

Media condiționată

Fie X v.a discretă și A eveniment $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$. Atunci

$$\boxed{\mathbb{E}[X|A] = \sum_x x \, f_{X|A}(x)} \longrightarrow \mathbb{P}(X = x|A)$$

$$\boxed{\mathbb{E}[g(X)|A] = \sum_x g(x) f_{X|A}(x)}$$

dacă $A = \{Y = y\}$

$$\boxed{\mathbb{E}[X|Y=y] = \sum_x x \, f_{X|Y}(x|y)}$$

Exp: $\mathbb{E}[X|Y=0] = 1 \cdot 3/7 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4/7$

$\mathbb{E}[Y|X=1] = 1 \cdot 1/6 + 0 \cdot 3/6 + 2 \cdot 2/6$

Def: Media cond a lui X la Y, $\mathbb{E}[X|Y]$ este o variabilă aleatoare de forma $g(Y)$, unde $g(y) = \mathbb{E}[X|Y=y]$

Exp: $\mathbb{E}[X|Y=0] = 5/7$

$\mathbb{E}[X|Y=1] = 5/3$

$\mathbb{E}[X|Y=2] = 17/8$

$X|Y=1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$

$X|Y=2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2/8 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{E}[X|Y] \sim \begin{pmatrix} 5/3 & 17/8 & 15/7 \\ 3/18 & 8/18 & 7/18 \end{pmatrix}$$

(P) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$

(P) $\mathbb{E}[X] = \sum_y \mathbb{E}[X|Y=y]\, f_Y(y)$

Varianța condiționată

X v.a , $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A)>0$

$$Var(X|A) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|A])^2|A] = \mathbb{E}[X^2|A] - (\mathbb{E}[X|A])^2$$

Cazul continuu: Repartiția comună, marginală, condiționată

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X, Y v.a continue

Se numește densitatea de repartiție comună a vectorului (X,Y) o funcție $f \geq 0$ a.î. $(\forall) A, B$

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}((X,Y) \in A \times B) = \iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy$$

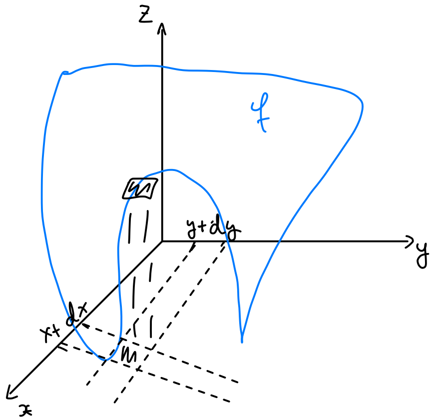
Exp: $A = B = \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathbb{R}^2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

f densitate de rep dacă:

$$\begin{cases} f \geq 0 \\ \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \end{cases}$$

Interpretarea



$$\mathbb{P}(X \in (x, x+dx), Y \in (y, y+dy)) =$$

$$= \iint_{(x+dx)\times(y+dy)} f(u,v)\,du\,dv$$

$$f(x,y) = \frac{\mathbb{P}(X \in (x, x+dx), Y \in (y, y+dy))}{dx\,dy} = f(x,y)\,dx\,dy$$

Obs: Dacă cunoaștem densitatea comună a vect (X, Y) atunci putem calcula orice probabilitate de tipul $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)$

Particular

$$P(X\in A) = \mathbb{P}((X,Y) \in A \times \mathbb{R}) = \iint_{A\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy$$

Dacă X v.a cont cu densitatea f_X atunci $\mathbb{P}(X\in A) = \int_A f_X(x)\,dx) = \int_A \int_R f(x,y)\,dy\,dx$

densitățile marginale ale lui X resp Y

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$$

Discret	Continuu
$f(x,y)$ - fct de masă comună	$f(x,y)$ - densitate comună
$f_X(x) = \sum_y f(x,y)$	$f_X(x) = \int f(x,y)\,dy$
$f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$	$f_Y(y) = \int f(x,y)\,dx$
$\sum$ $\longrightarrow$	$\int$

$\mathbb{P} \longrightarrow f(x)\,dx$

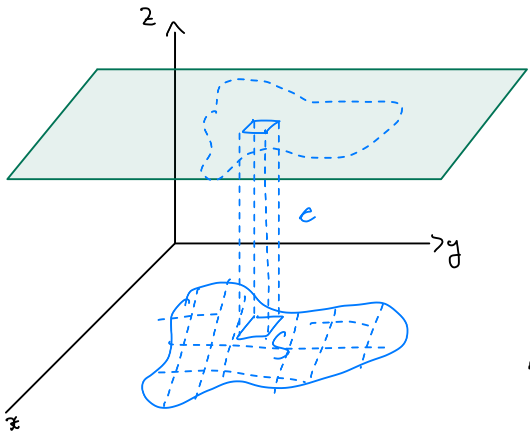
Rep uniformă pe o mulțime $S \subseteq \mathbb{R}^2$

$(X,Y) \sim \mathcal{U}(S)$ vect (X,Y) este rep uniform pe S

dacă $(\exists)$ $f \geq 0$ a.î. $f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in S \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

cât e c?

cum f e densitate $\Rightarrow f \begin{cases} \geq 0 & \Rightarrow c \geq 0 \\ \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy = 1 & \Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} c\, \mathbb{1}_S(x,y)\, dx\, dy = 1 \end{cases}$



$c \cdot$ Ariile micuțe

$c \cdot (\underbrace{\Sigma \quad}_{\text{Aria lui } S})$

$c \cdot \mathcal{A}(S) = 1 \Rightarrow \boxed{c = \dfrac{1}{\mathcal{A}(S)}}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathcal{A}(S)}, & (x,y) \in S \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Funcția de repartiție

$$\boxed{F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}\int_{+\infty} f(u,v)\, dv\, du}$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

∂ - derivata a 2-a

Rep cond

X v.a și $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$, Densitatea cond este o fct $f_{X|A}(x) \geq 0$ care verifică

$$P(X \in B | A) = \int_B f_{X|A}(x)\, dx, \ \forall B$$

$\exists f_{X|A}(x) \geq 0 \qquad P(X \in B | A) = \int_B f_{X|A}(x)\, dx, \ \forall B$

Dacă $A \to \{X \in A\}$

$$P(X \in B | X \in A) = \frac{P(X \in B, X \in A)}{P(X \in A)} = \frac{P(X \in A \cap B)}{P(X \in A)} = \frac{\int_{A \cap B} f_X(x)\, dx}{P(X \in A}$$

$$P(X \in B | X \in A) = \int_B \underbrace{f_{X|X \in A}}(x)\, dx$$

$$\boxed{f_{X|X \in A}(x) = \frac{f_X(x)}{P(X \in A)}}$$

Exp: $X \sim \mathcal{U}[a,b]$, $[c,d] \subseteq [a,b]$

$X | X \in [c,d]$

$$f_{X|X\in[c,d]}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\mathbb{P}(X\in[c,d])}, & x\in[c,d] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{d-c}, & x\in[c,d] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \mid X\in[c,d] \sim \mathcal{U}[c,d]$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

$$\mathbb{P}(X\in[c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$$

Formula Probabilității totale

Fie X o v.a f_X și $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{F}$ o partiție Ω, $\mathbb{P}(A_i)\geq 0$

$$\boxed{f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|A_i}(x)\cdot \mathbb{P}(A_i)}$$

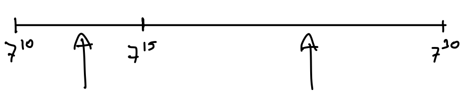
$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$$

$$\{X\leq x\} \Rightarrow \mathbb{P}(X\leq x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X\leq x \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$

$$\frac{d}{dx}(\quad) = \sum \frac{d}{dx}(\qquad)\,\mathbb{P}(A_i$$

Exp: $7^{10} - 7^{30}$ ajungeți în stație în mod uniform

Densitatea timpului de așteptare până la I metrou



Not X = timpul de sosire

$X \sim \mathcal{U}[10, 30]$

Not A = even prin care ajunge între $7^{10}-7^{15}$

$A = \{10 \leq X \leq 15)$

Not B = — // — $7^{15}-7^{30}$

$B = \{15 < X \leq 30\}$

$P(A) = 1/4 = \frac{15-10}{30-10}$

$P(B) = 3/4 = \frac{30-15}{30-10}$

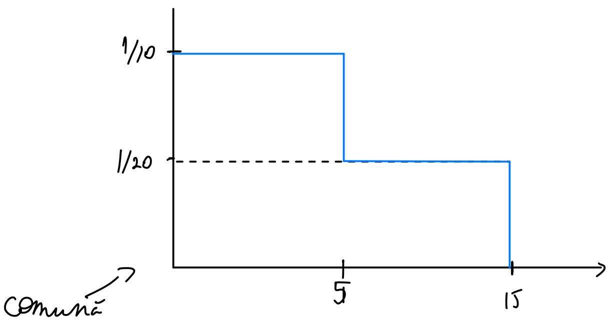
Y - timpul de asteptare

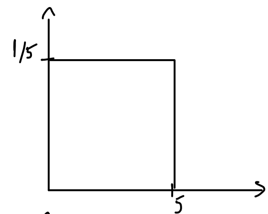
$$f_Y(y) = P(A)\, f_{Y|A}(y) + P(B)\, f_{Y|B}(y)$$

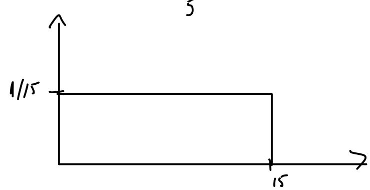
$Y|A \sim \mathcal{U}(0,5)$

$Y|B \sim \mathcal{U}(0,15)$

$$f_Y(y) = 1/4 \cdot \frac{1}{5} \mathbb{1}_{[0,5]}(y) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{15} \mathbb{1}_{[0,15]}(y)$$







Fie (X,Y) cu densitatea comuna f. S.n densitate cond a lui X la $Y=y$

$$f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

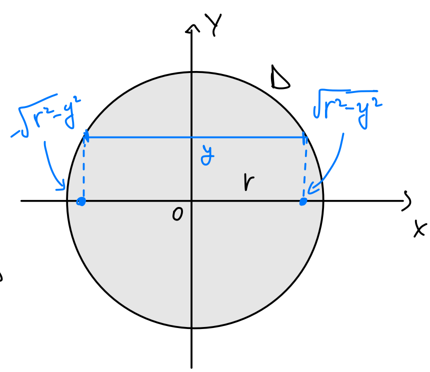
$$\left.\begin{aligned} f_{X|Y}(x,y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\ f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x,y) = f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)$$

Exp: Uniforma pe disc

$$\Delta = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le r^2\}$$

$(X,Y) \sim \mathcal{U}(\Delta)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & (x,y) \in \Delta \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$



Vrem să det $f_{X|Y}(x|y) = ?$ $\quad \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$(x,y) \in D \Leftrightarrow x^2+y^2 \le r^2 \Leftrightarrow x^2 \le r^2-y^2$

$\Leftrightarrow -\sqrt{r^2-y^2} \le x^2 \le \sqrt{r^2-y^2}$

$y \in [-r, r]$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi r^2} \mathbb{1}_D(x,y)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi r^2} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx = \frac{1}{\pi r^2}\, 2\sqrt{r^2-y^2}, \quad y \in [r,r]$$

Rayling

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2} \mathbb{1}_{[-r,r]}(y) \quad -\sqrt{r^2-y^2}}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1/\cancel{\pi r^2}\ \mathbb{1}_D(x,y)}{\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\cancel{\pi r^2}} \mathbb{1}_{[-r,r]}(y)} = \frac{\cancel{\mathbb{1}_{[-r,r]}(y)}\ \mathbb{1}_{[-\sqrt{r^2-y^2},\, \sqrt{r^2-y^2}]}(x)}{2\sqrt{r^2-y^2}\ \cancel{\mathbb{1}_{[-r,r]}(y)}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}} \mathbb{1}_{[-\sqrt{r^2-y^2},\, \sqrt{r^2-y^2}]}(x)$$

$\approx \dfrac{1}{2a} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ – uniforma

CURS 14

Independența v.a. continue

Def: Spunem că v.a X, Y sunt independente dacă densitatea comună este produsul densităților

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall x, y$$

Obs. 1) $f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$

Dacă X și Y indep ($X \perp\!\!\!\perp Y$) $\Rightarrow \begin{cases} f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \\ f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) \end{cases}$

2) Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y$ atunci ${}^{*}\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B), (\forall) A, B$

3) Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y$, $A = (-\infty, x]$, $B = (-\infty, y)$ atunci

$*$ devine $\underset{\mathbb{P}(X \leq x,\, Y \leq y)}{\underset{\parallel}{F_{X,Y}}} = F_X(x) F_Y(y)$, $\forall x, y$

(fct de repartiție)

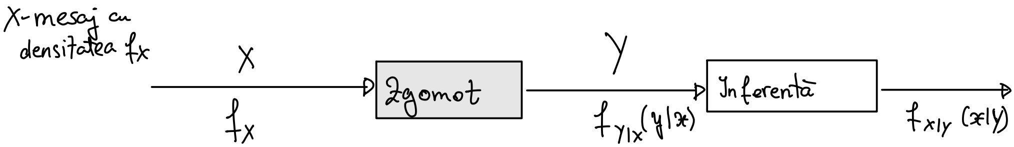
4) Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y$ atunci $\mathbb{E}[X, Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

În general
$$\boxed{\mathbb{E}[g(X,Y)] = \iint g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \qquad g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$$

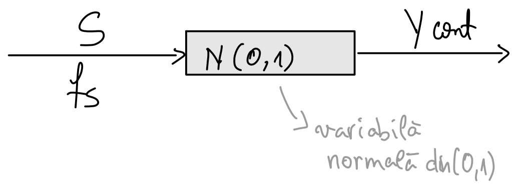
Exp:
$$\boxed{\mathbb{E}[X,Y] = \iint xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy}$$

Formula lui Bayes



$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)}{\int f_{Y|X}(y|x')\, f_X(x')\, dx'}$$

Caz hibrid:



$$\mathbb{P}(A \mid Y=y) \simeq \mathbb{P}(A \mid Y \in (y, y+dy)) = \frac{\mathbb{P}(A \cap Y \in (y, y+dy))}{\mathbb{P}(y, y+dy)}$$

A even

Y - var. cont $\quad \mathbb{P}(Y=y)=0$

$$= \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}(Y \in y, y+dy)}{\mathbb{P}(y, y+dy)} = \frac{\mathbb{P}(A) \int_y^{y+dy} f_{Y|A}(z)\, dz}{\int_y^{y+dy} f_{Y|A}(z)\, dz} \simeq$$

$$\simeq \frac{\mathbb{P}(A)\ f_{Y|A}(y)\cancel{dy}}{f_Y(y)\cancel{dy}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \mid Y=y) = \frac{\mathbb{P}(A)\ f_{Y|A}(y)}{f_Y(y)}$$

$$A = \{X = x \mid Y = y\} : \frac{\mathbb{P}(X=x)\ f_{Y|X}(y)}{f_Y(y)}$$

discretă

cont

Formula $\mathbb{P}$ totale	Formula lui Bayes

Formula $\mathbb{P}$ totale

$X \backslash Y$	discret	cont
discret	$P(X=x) = \sum_y \mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\, \mathbb{P}(Y=y)$	$\mathbb{P}(X=x) = \int \mathbb{P}(X=x \mid Y=y) \cdot f_Y(y)\,dy$
cont	$f_X(x) = \sum_y f_{X\mid Y}(x \mid y) \cdot \mathbb{P}(Y=y)$	$f_X(x) = \int f_{X\mid Y}(x \mid y)\, f_Y(y)\,dy$

Formula lui Bayes

$X \backslash Y$	discret	cont
discret	$\mathbb{P}(Y=y \mid X=x) = \dfrac{\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\, \mathbb{P}(Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}$	$f_{Y\mid X}(y \mid x) = \dfrac{\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\, f_Y(y)}{\mathbb{P}(X=x)}$
cont	$\mathbb{P}(Y=y \mid X=x) = \dfrac{f_{X\mid Y}(x \mid y)\, \mathbb{P}(Y=y)}{f_X(x)}$	$f_{Y\mid X}(y \mid x) = \dfrac{f_{X\mid Y}(x \mid y)\, f_Y(y)}{f_X(x)}$

Exp: A, B. Pp că tel produse de A $\quad Exp(\lambda_0)$

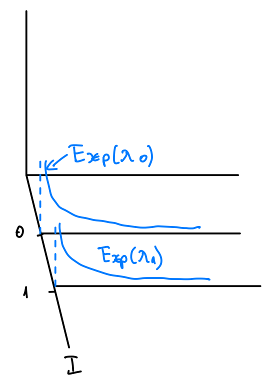
B $\quad Exp(\lambda_1) \qquad \lambda_0 < \lambda_1$

$\mathbb{P}$ ca tel să provină de la A este p_0 și $\mathbb{P}$ ca tel să provină de la B $p_1 = 1 - p_0$

T - durata de viață

a) $F_T = ?$

b) Pp că $T = t$ care este $\mathbb{P}(A \mid T = t)$ și $\mathbb{P}(B \mid T = t)$



Fie $I = \begin{cases} 0, & \text{dacă tel provine de la A} \\ 1, & \text{—//— B} \end{cases}$

$\mathbb{P}(I = i) = p_1 = 1 - p_0 \qquad I \sim B(p_1)$

↳ Bernoulli

$T \mid A \sim Exp(\lambda_0)$

$T(B) \sim Exp(\lambda_1)$

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T = t) = \mathbb{P}(T \le t \mid I = 0) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(I = 0)}_{p_0} + \mathbb{P}(T \le t \mid I = 1)\, \underbrace{\mathbb{P}(I = 1)}_{1 - p_0}$$

$Exp\, \lambda$ — $\lambda e^{-\lambda x}$ ← densitate

$x \geq 0$

— $1 - e^{-\lambda x}$ ← fct de rep

$$F_T(t) = (1 - e^{-\lambda_0 t}) p_0 + (1 - e^{-\lambda_1 t}) p_1 = 1 - p_0 e^{-\lambda_0 t} - (1-p_0) e^{-\lambda_1 t}$$

$$f_T(t) = \frac{dF_T}{dt} = \lambda_0 p_0 e^{-\lambda_0 t} + (1-p_0)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$$

$$\mathbb{P}(I=0 \mid T=t) = \frac{f_{T|I}(t|0)\,\overbrace{\mathbb{P}(I=0)}^{p_0}}{f_T(t)} = \frac{\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} p_0}{\lambda_0 p_0 e^{-\lambda_0 t} + (1-p_0)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}}$$

Media condiționată

Fie X o v.a cont și $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$

$$\mathbb{E}[X|A] = \int x f_{X|A}(x)\,dx$$

densitatea cond a lui X la a

Dacă $A = \{Y = y\}$ $\boxed{\mathbb{E}[X|Y=y] = \int x f_{X|Y}(x|y)\,dx}$

Din formula $\mathbb{P}$ totale $f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|A_i}(x)\,\mathbb{P}(A_i)$ $\Big|\cdot x$

unde $A_1, \dots, A_n$ part Ω

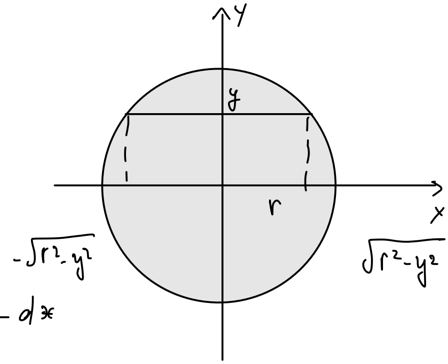
(P) Dacă X v.a cont și $A_1, \dots, A_n$ pat Ω $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i]\,\mathbb{P}(A_i)$

(P) Dacă X și Y v.a cont: $\mathbb{E}[X] = \int \mathbb{E}[X|Y=y]\, f_Y(y)\,dy$

Def: Fie X, Y două v.a cont și $g(y) = \mathbb{E}[X|Y=y]$. S.n medie cond a lui X la Y

$$\mathbb{E}[X|Y] = g(Y)$$

Exp: $(X,Y) \sim \mathcal{U}(D)$



$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}} \mathbb{1}_{[-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}]}(x)$$

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{x}{2\sqrt{r^2-y^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = 0$$

$n \qquad X_1, \dots, X_n$

$T = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$N(\omega) = 100, \; i > 0$

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[T|N]] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[T|N=n]\, \mathbb{P}(N=n)$$

$\mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = n\,\mathbb{E}[X_1]$

$$= \mathbb{E}[X_1] \sum n\, \mathbb{P}(N=n)$$

$\hookrightarrow$ pp că fiecare cheltuie în medie aceeași sumă

Covarianța și corelații

→ covarianță

Def: Fie X și Y v.a. S.n. covarianța dintre X și Y $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

Obs: 1) Semnul Cov ne arată tendința de creștere simultană a celor 2 v.a.

$\mathrm{Cov}(X,Y) > 0$ at X și $Y \nearrow$ simultan ($\searrow$)

$\mathrm{cov}(X,Y) > 0$ at când $X \nearrow$ $Y \searrow$ (și reciproc)

2) Dacă $X = Y$ at $Cov(X,Y) = Var(X)$

3) $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[X,Y] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$

4) Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$ $\qquad Cov(X,Y) = 0 \not\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

Def: Dacă $Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow$ spunem că v.a sunt necorelate

Exp: Fie $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{E}[X] = 0 \\ &\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^3] = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow cov(X,Y) = 0 \quad \text{dar } X \not\perp\!\!\!\perp Y$$

Prop: $Cov(X,X) = Var(X)$

$Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + cov(Y,Z)$

$cov(X, a) = 0$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$

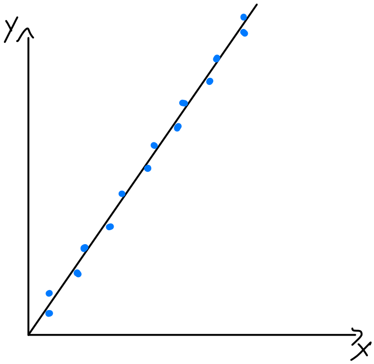
$Cov(X,Y) = cov(Y,X)$

Def (corelatie): S.n coeficient de corelație între X și Y:

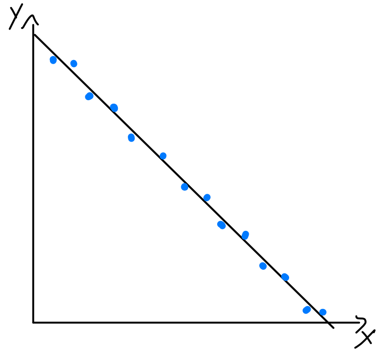
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}$$

P $\quad -1 \le \rho(X,Y) \le 1 \quad$ ← măsoară dependența liniară dintre X și Y

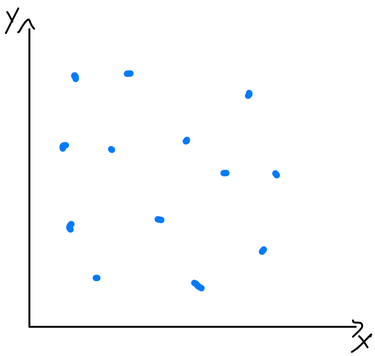
$\rho \simeq 1$



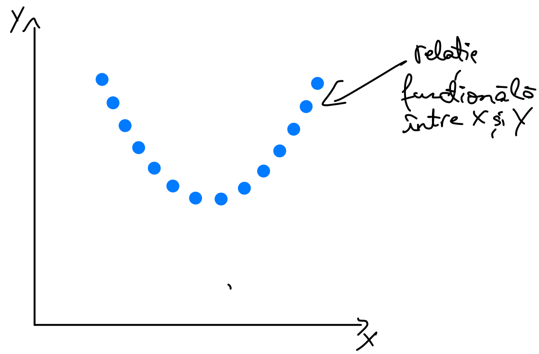
$\rho \simeq -1$



$\rho \simeq 0$



$\rho \simeq 0$



$$\langle X, Y \rangle = cov(X, Y)$$

prod scalar

$$\|X\| = \sqrt{Var(X)}$$

$\|X\|$ — norma

De ce?

$$Var(X + tY) \geq 0$$

$$\|$$

$$Var(X) + t^2 Var(Y) + 2t\, cov(X,Y) \geq 0 \quad \forall t$$

$$\Delta = 4t^2 cov^2(X,Y) - 4Var(X)Var(Y) \leq 0$$

$$|cov(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}$$

$\mathbb{E}[X] = \mu X \quad , \quad Var(X) = \sigma X$

$$\rho(X,Y) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu X}{\sigma X}\right)\left(\frac{Y-\mu Y}{\sigma Y}\right)\right]$$

Inegalități

T: Inegalitate Cauchy - Schwartz

Fie X, Y v.a. Atunci $|\mathbb{E}[XY]| \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]}$

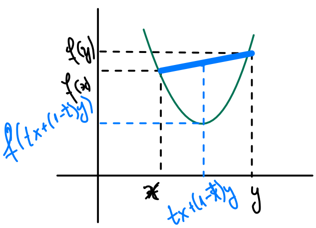
$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[\underbrace{(X-\mathbb{E}[X])}_{X}\underbrace{(Y-\mathbb{E}[Y])}_{Y}]$

T: Inegalitatea lui Jenson

Fie X o v.a și φ o funcție convexă. Atunci $\mathbb{E}[\varphi(X)] \ge \varphi(\mathbb{E}[X])$

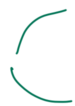
Fie X o v.a și φ o funcție concavă. Atunci $\mathbb{E}(\varphi(X)] \le \varphi(\mathbb{E}[X])$

O fct f sn convexă dacă $f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$; $\forall x, y, t \in [0,1]$



x^2, $|x|$, e^x - convexă

$\ln(x)$ concavă

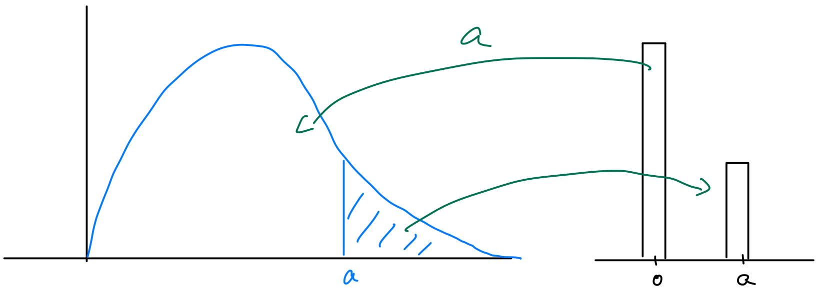


Exp: $\mathbb{E}[|X|] \ge |\mathbb{E}[X]|$ $\qquad$ $\mathbb{E}[\ln X] \le \ln \mathbb{E}[X]$

$\mathbb{E}[e^X] \ge e^{\mathbb{E}[X]}$ $\qquad$ $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] \ge \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$

Ⓟ Inegalitatea lui Markov

Fie X v.a poz , $X \geq 0$. $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$



$$Y_a = \begin{cases} 0, & X \leq a \\ a, & X > a \end{cases}$$

$\mathbb{E}[Y_a] \leq \mathbb{E}[X]$

$$\underbrace{0\, \mathbb{P}(Y_a = 0) + a\, \mathbb{P}(Y_a = a)}_{a\, \mathbb{P}(X > a)} \leq \mathbb{E}[X]$$

Ⓟ Inegalitatea Cebîșev

Fie X v.a de medie μ și $Var(X) = \sigma^2$. $\mathbb{P}(|X - \rho| \geq a) \leq \sigma^2 / a^2$

Dc? $\mathbb{P}(|X-\mu| \geq a) = \mathbb{P}((X-\mu)^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}{a^2}$

Obs: $\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}$

Ⓟ Inegalitatea lui Chernoff

Fie X v.a pozitivă, $a \in \mathbb{R}_+$, $t > 0$

$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}}$, $(\forall) t$

Exp: $Z \sim N(0,1)$ $\quad \mathbb{P}(|Z| \geq 3) \simeq 0{,}003$

marginea markov

a) Ineg Markov: $\mathbb{P}(|Z| \leq 3) \leq \dfrac{\mathbb{E}\{|Z|\}}{3} = \dfrac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{3} \simeq 0{,}27$

b) Ineg Cebîșev: $\mathbb{P}(|Z| \geq 3) = \mathbb{P}(|Z - \underbrace{0}_{\mu}| \geq 3 \cdot \underbrace{1}_{\sigma}) \leq \dfrac{1}{9} \simeq 0{,}11$

c) Ineg Chernoff: $\mathbb{P}(|Z| \geq 3) = 2\,\mathbb{P}(Z \geq 3) \leq \dfrac{2\,\mathbb{E}[e^{tZ}]}{e^{tz}}$

$$\mathbb{E}[e^{tZ}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} f(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} e^{-z^2/2}\,dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2 + tz}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2(z^2 - 2tz + t^2 - t^2)}\,dz$$

$$= e^{t^2/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z-t)^2/2}\,dz}_{=1} = e^{t^2/2}$$

$$\mathbb{P}(|Z| \geq 3) \leq \frac{2e^{t^2/2}}{e^{3t}}, \quad \forall\, t > 0$$

$$\leq 2e^{t^2/2 - 3t}$$

minimal $t = 3$

$$\mathbb{P}(|Z| \geq 3) \leq 2e^{-9/2} \simeq 0{,}022$$