FAI - subiecte lucrari

1. Un sistem de m ecuatii liniare cu n necunoscute este compatibil daca:
   - ✓ determinantii caracteristici ai sistemului sunt egali cu zero
   - Rangul matricei coeficientilor este diferit de rangul matricei extinse a sistemului
   - Rangul matricei coeficientilor este mai mare decat numarul necunoscutelor
   - Determinantul matricei coeficientilor este diferit de zero

2. Un sistem omogen de m ecuatii liniare cu n necunoscute admite si soluii nenule daca:
   - ✓ Rangul matricei coeficientilor este mai mic decat numarul necunoscutelor
   - Rangul matricei coeficientilor este egal cu numarul necunoscutelor
   - Determinantul matricei coeficientilor este nul
   - Rangul matricei coeficientilor este egal cu numarul ecuatiilor sistemului

3. O matrice nenula cu m linii si n coloane, cu elemente numere reale, are rangul $r \in \mathbb{N}^*$ daca:
   - ✓ Exista in A un minor nenul de ordinul r si orice minor de ordinul r+1 din A este nul.
   - $r = max(m, n);$
   - $r > max(m, n);$
   - $r \leq min(m, n);$
   - Aplicand algoritmul lui Gauss pentru calculul rangului matricei A se vor obtine cel putin r + 1 pivoti nenuli

4. Sa se determine valoarea parametrului real m astfel incat vectorii urmatori sa fie linear dependenti si pentru valoarea gasita, relatia de dependenta dintre ei $v_1 = (1, 3, 2)$,$v_2 = (1, -2, 3)$,$v_3 = (0, 5, m)$:

- ✓$m=-1, v_1-v_2-v_3=(0,0,0)$
- $m=1, v_1-v_2+v_3=(0,0,0)$
- $m=-1, 2v_1-v_2+v_3=(0,0,0)$
- $m=0, -v_1+v_2-2v_3=(0,0,0)$

5. Sa se determine valoarea parametrului real m astfel incat vectorii urmatori sa fie linear dependenti precum si relatia de dependenta dintre ei $v_1=(1,4,5)$,$v_2=(-1,3,m)$,$v_3=(2,-1,1)$:
   - ✓$m=2, -5v_1+9v_2+7v_3=(0,0,0)$
   - $m=1, 5v_1-9v_2+7v_3=(0,0,0)$
   - $m=-2, -5v_1+9v_2-7v_3=(0,0,0)$
   - $m=0, 5v_1-9v_2-7v_3=(0,0,0)$

6. Aratati ca matricea urmatoare, A, este inversabila si calculati suma S a elementelor din linia a treia a matricei sale inverse:
   $$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$
   - ✓$S=9$
   - $S=7$
   - $S=-7$
   - $S=-2$

7. Aratati ca matricea urmatoare, A, este inversabila si calculati suma S a elementelor din linia a treia a matricei sale inverse:
   $$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$
   - ✓$S=2$
   - $S=1$
   - $S=-1$
   - $S=-2$

8. Fie matricea patratica, de ordinul 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aratati ca A este inversabila si calculati suma elementelor din linia 1 a matricei A^{-1}

- $\checkmark S = 0$
- $S = 2$
- $S = -2$
- $S = -1$

9. Aratati ca matricea urmatoare, A, este inversabila si calculati determinantul matricei sale inverse $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

- $\checkmark Det(A^{-1}) = -\frac{1}{27}$
- $Det(A^{-1}) = -27$
- $Det(A^{-1}) = 9$
- $Det(A^{-1}) = \frac{1}{27}$

10. Aratati ca matricea urmatoare, A, este inversabila si calculati determinantul matricei sale inverse $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

- $\checkmark Det(A^{-1}) = -\frac{1}{5}$
- $Det(A^{-1}) = \frac{1}{5}$
- $Det(A^{-1}) = -5$
- $Det(A^{-1}) = 5$

11. Fie A o matrice patratica de ordinul 3.
    Stiind ca Det(A) = -3, precizati care din afirmatiile urmatoare este adevarata:
    - ✓ $Det(-2A) = -12$
    - $Det(-A) = 3$
    - $Det(-3A) = 9$
    - $Det(5A) = -15$

12. Fie A o matrice patratica de ordinul 3.
    Stiind ca Det(A) = 5, precizati care din afirmatiile urmatoare este adevarata:
    - ✓ $Det(-2A) = 20$
    - $Det(-A) = -5$
    - $Det(-3A) = -45$
    - $Det(3A) = 15$

13. Sa se calculeze determinantul patratului matricei A, stiind ca:
    $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$
    - ✓ $Det(A^2) = 9$
    - $Det(A^2) = 99$
    - $Det(A^2) = 112$
    - $Det(A^2) = 79$

14. Sa se calculeze determinantul patratului matricei A, stiind ca:
    $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$
    - ✓ $Det(A^2) = 4$
    - $Det(A^2) = 76$
    - $Det(A^2) = 20$
    - $Det(A^2) = 18$

15. Sa se calculeze determinantul patratului matricei A, stiind ca:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$
   - $\checkmark Det(A^2) = 25$
   - $Det(A^2) = 9$
   - $Det(A^2) = 16$
   - $Det(A^2) = 36$

16. Sa se determine polinomul caracteristic al aplicatiei liniare f, a carei matrice A, asociata in baza canonica, este urmatoarea:
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
   - $\checkmark P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$
   - $P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$
   - $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 6$
   - $P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda - 6$

17. Sa se determine polinomul caracteristic al aplicatiei liniare f, a carei matrice A, asociata in baza canonica, este urmatoarea:
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$
   - $\checkmark P(\lambda) = \lambda^2 + 9\lambda + 14$
   - $P(\lambda) = \lambda^2 + 9\lambda - 14$
   - $P(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda - 14$
   - $P(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 14$

18. Sa se determine polinomul caracteristic al aplicatiei liniare f, a carei matrice A, asociata in baza canonica, este urmatoarea:
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\checkmark P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$
- $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$
- $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$
- $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

19. Sa se calculeze rangul matricei urmatoare: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

- $\checkmark rang(A) = 2$
- $rang(A) = 3$
- $rang(A) = 1$
- $rang(A) = 4$

20. Sa se calculeze rangul matricei urmatoare: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- $\checkmark rang(A) = 2$
- $rang(A) = 3$
- $rang(A) = 1$
- $rang(A) = 4$

21. Sa se calculeze rangul matricei urmatoare:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- $\checkmark rang(A) = 2$
- $rang(A) = 3$
- $rang(A) = 1$
- $rang(A) = 4$

22. Sa se determine parametrul real m astfel incat vectorii urmatori sa fie liniar independenti in spatiul vectorial tridimensional $\mathbb{R}^3 : v_1 = (1, 4, 5), v_2 = (2, -1, 1), v_3 = (-1, 3, m)$
    - ✓$m \in \mathbb{R} - \{2\}$
    - $m \in \mathbb{R} - \{-2\}$
    - $m \in \mathbb{R} - \{0\}$
    - Vectorii sunt linear independenti pentru orice $m \in \mathbb{R}$

23. Sa se determine parametrul real m astfel incat vectorii urmatori sa fie liniar independenti in spatiul vectorial tridimensional $\mathbb{R}^3 : v_1 = (2, 1, -3), v_2 = (-1, 2, 4), v_3 = (3, -4, m)$
    - ✓$m \in \mathbb{R} - \{-10\}$
    - $m \in \mathbb{R} - \{10\}$
    - $m \in \mathbb{R} - \{0\}$
    - Vectorii sunt linear independenti pentru orice $m \in \mathbb{R}$

24. Sa se determine parametrul real m astfel incat vectorii urmatori sa fie liniar independenti in spatiul vectorial tridimensional $\mathbb{R}^3 : v_1 = (-1, 2, 1), v_2 = (1, -2, m), v_3 = (0, 1, 1)$
    - ✓$m \in \mathbb{R} - \{-1\}$
    - $m \in \mathbb{R} - \{0\}$
    - $m \in \mathbb{R} - \{1\}$
    - Vectorii sunt linear dependenti pentru orice $m \in \mathbb{R}$

25. Calculati determinantul matricei: $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
    - ✓$Det(A) = -1$
    - $Det(A) = 1$
    - $Det(A) = -12$
    - $Det(A) = -4$

26. Calculati determinantul matricei: $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

- ✓ $Det(A) = 4$
- $Det(A) = 10$
- $Det(A) = 17$
- $Det(A) = 7$

27. Calculati determinantul matricei: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

- ✓ $Det(A) = 1$
- $Det(A) = -1$
- $Det(A) = 13$
- $Det(A) = 7$

28. Sa se calculeze suma S a elementelor matricei inverse a matricei urmatoare: $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

- ✓ $S = 3$
- $S = 5$
- $S = -2$
- $S = -3$

29. Sa se calculeze suma S a elementelor matricei inverse a matricei urmatoare: $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- ✓ $S = 2$
- $S = 5$
- $S = -2$
- $S = -3$

30. Sa se calculeze suma S a elementelor matricei inverse a matricei urmatoare: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
   - ✓ $S = -1$
   - $S = 10$
   - $S = 2$
   - $S = 3$

31. Determinati valoarea parametrul real m astfel incat vectorii urmatori : $v_1 = (1, 1, -1)$,$v_2 = (1, -1, m)$,$v_3 = (-1, 1, 1)$ sa formeze o baza in spatiul vectorial $\mathbb{R}^3$, iar pentru m=1 calculati coordonatele vectorului $u = (6, 2, -12)$ in aceasta baza.
   - ✓ $m \neq -1, u = (4, -3, -5)$
   - $m \neq -2, u = (4, 3, 5)$
   - $m \neq 1, u = (-4, 3, -5)$
   - $m = -1, u = (-4, -3, 5)$

32. Fie un sistem algebric, liniar, de n ecuatii cu n necunoscute, scris sub forma matriceala $A \cdot X = B$. Sistemul este compatibil determinat daca si numai daca:
   - ✓ $Det(A) \neq 0$
   - ✓ Matricea coeficientilor, A, este inversabila
   - Matricea coeficientilor, A, nu este inversabila
   - $rang(A) \neq rang(A, B)$
   - $rang(A) \neq rang(A, B)$, unde(A, B) este matricea extinsa a sistemului
   - Sistemul are cel putin o necunoscuta secundara.

33. Fie un sistem algebric, liniar, de m ecuatii cu n necunoscute, scris sub forma matriceala $A \cdot X = B, m \neq n$. Sistemul este compatibil daca si numai daca:
   - $rangA = rang(A, B)$, unde (A, B) este matricea extinsa a sistemului

- Exista cel putin un minor caracteristic nenul
- Sistemul nu are nici o necunoscuta secundara
- Rangul matricei extinse a sistemului este mai mare decat numarul ecuatiilor

34. Fie A o matrice patratica de ordinul n. Matricea A este inversabila daca:
    - ✓$Det(A) \neq 0$
    - ✓Exista o matrice patratica de ordinul n, notata cu A^{-1}, astfel incat $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$
    - $Det(A) = 0$
    - $Det(A) \cdot Det(A^{-1}) \neq 1$
    - Exista o matrice patratica de ordinul n, notata cu A^{-1}, astfel incat $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A \neq I_n$
    - Exista o matrice patratica de ordinul n, notata cu A^{-1}, astfel incat $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = O_{n,n}$

35. Sa se determine matricea diagonalizatoare T pentru aplicatia liniara f a carei matrice asociata A in baza canonica este:
    $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
    - ✓$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
    - $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
    - $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$
    - $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

36. Sa se determine matricea diagonalizatoare T pentru aplicatia liniara f a carei matrice asociata A in baza canonica este:

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; A=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 1 & -6\end{pmatrix}$

- ✓$T=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
- $T=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
- $T=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$
- $T=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

37. Fie operatorul liniar f definit astfel: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, f(x_1,x_2,x_3)$ $=(2x_1-3x_2+x_3, x_1+5x_2-3x_3, 5x_1+12x_2-8x_3)$
Sa se determine dimensiunile subspatiilor vectoriale Ker(f) si Im(f).
    - ✓$Dim(Ker(f))=1, Dim(Im(f))=2$
    - $Dim(Ker(f))=2, Dim(Im(f))=1$
    - $Dim(Ker(f))=2, Dim(Im(f))=2$
    - $Dim(Ker(f))=0, Dim(Im(f))=3$

38. Fie operatorul liniar f definit astfel: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, f(x_1,x_2,x_3)$ $=(x_1+x_2-x_3, x_1-x_2+x_3, 5x_1-x_2+x_3)$
Sa se determine dimensiunile subspatiilor vectoriale Ker(f) si Im(f).
    - ✓$Dim(Ker(f))=1, Dim(Im(f))=2$
    - $Dim(Ker(f))=2, Dim(Im(f))=1$
    - $Dim(Ker(f))=2, Dim(Im(f))=2$
    - $Dim(Ker(f))=0, Dim(Im(f))=3$

39. Sa se arate ca vectorii urmatori sunt linear dependenti si sa se determine relatia de dependenta dintre ei:
$v_1=(2,1,-1), v_2=(1,-1,2), v_3=(4,-1,3)$
    - ✓$v_1+2v_2-v_3=O_3$

- $v_1 - v_2 - v_3 = O_3$
- $v_1 + 2v_2 - 2v_3 = O_3$
- $v_1 + v_2 - 2v_3 = O_3$

40. Sa se arate ca vectorii urmatori sunt linear dependenti si sa se determine relatia de dependenta dintre ei:
    $v_1 = (2, -5, 3), v_2 = (3, -8, 1), v_3 = (1, -2, 5)$
    - ✓ $2v_1 - v_2 - v_3 = O_3$
    - $v_1 - v_2 - v_3 = O_3$
    - $v_1 + 2v_2 - v_3 = O_3$
    - $2v_1 + v_2 - 2v_3 = O_3$

41. Determinati dimensiunea subspatiului W generat de vectorii urmatori din
    $\mathbb{R}^3 : v_1 = (2, 1, 3), v_2 = (-1, 1, -2), v_3 = (1, 2, 1), v_4 = (2, 1, 3)$
    - ✓ $Dim(W) = 2$
    - $Dim(W) = 1$
    - $Dim(W) = 3$
    - $Dim(W) = 4$

42. Determinati dimensiunea subspatiului W generat de vectorii urmatori din
    $\mathbb{R}^3 : v_1 = (2, 1, 5), v_2 = (-3, 9, -6), v_3 = (4, 2, 10), v_4 = (-5, 1, -$
    - ✓ $Dim(W) = 2$
    - $Dim(W) = 1$
    - $Dim(W) = 3$
    - $Dim(W) = 4$

43. Sa se determine valorile proprii ale aplicatiei liniare f, a carei matrice A, asociata in baza canonica, este urmatoarea:
    $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

- ✓$\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 7$
- $\lambda_1 = -3; \lambda_2 = -7$
- $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -7$
- $\lambda_1 = -3; \lambda_2 = 7$

44. Sa se determine valorile proprii ale aplicatiei liniare f, a carei matrice A, asociata in baza canonica, este urmatoarea:
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$
    - ✓$\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -7$
    - $\lambda_1 = -2; \lambda_2 = 7$
    - $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -7$
    - $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 7$

45. Sa se determine valorile proprii ale aplicatiei liniare f, a carei matrice A, asociata in baza canonica, este urmatoarea:
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
    - ✓$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3$
    - $\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -3$
    - $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -6$
    - $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -3$

46. Stiind ca vectorii urmatori formeaza o baza in spatiul vectorial tridimensional $\mathbb{R}^3 : v_1 = (1, -4, 2)$,$v_2 = (2, 1, -1)$, $v_3 = (-2, 2, 3)$, calculati coordonatele vectorului $u = (-5, -1, 9)$ in aceasta baza.
    - ✓$u = (1, -1, 2)$
    - $u = (1, 1, 2)$
    - $u = (-1, 1, 2)$
    - $u = (1, 1, -2)$

47. Aratati ca vectorii urmatori formeaza o baza in spatiul vectorial tridimensional $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 3, 2)$,$v_2 = (1, -2, 3)$, $v_3 = (-1, 2, -2)$, calculati coordonatele vectorului $u = (0, 5, 2)$ in aceasta baza.

   - ✓$u = (1, 2, 3)$
   - $u = (1, -2, 3)$
   - $u = (0, 1, 2)$
   - $u = (1, -1, 2)$

48. Sa se determine cel mai mare divizor comun al numerelor: n_1 =11432775; n_2 =15265170

   - ✓$d = 32205$
   - $d = 161025$
   - $d = 193230$
   - $d = 483075$

49. Care este ordinul elementului $\hat{4}$ in grupul ciclic $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$

   - ✓$Ord(\hat{4}) = 4$
   - $Ord(\hat{4}) = 5$
   - $Ord(\hat{4}) = 3$
   - $Ord(\hat{4}) = 2$

50. Sa se determine elementele inversabile si caracteristica lui Euler ale monoidului $U(\mathbb{Z}_{18}^*)$

   - ✓$U(\mathbb{Z}_{18}^*) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}; \varphi(18) = 6$
   - $U(\mathbb{Z}_{18}^*) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}; \varphi(18) = 8$
   - $U(\mathbb{Z}_{18}^*) = \{1, 3, 6, 9, 12, 15\}; \varphi(18) = 8$
   - $U(\mathbb{Z}_{18}^*) = \{1, 5, 7, 9, 11, 13, 17\}; \varphi(18) = 7$

51. Teorema lui Lagrange pentru grupuri finite este:

- ✓ Ordinul oricarui subgrup al unui grup finit este divizor al ordinului grupului
- Daca p este un numar prim, atunci (p - 1) != -1(mod p)
- Orice grup finit de ordin un numar prim este grup ciclic
- Daca p este un numar prim si $a \in \mathbb{Z}$ este un numar intreg, prim cu p, atunci $a^{p-1} = \hat{1}(mod\, p)$