Vertex Cover (max 2p):

Fie X={x_1, x_2, …, x_n} o mulțime de variabile de tip bool. Numim formulă booleană peste mulțimea X o formulă CNF (conjunctive normal form) o expresie de forma $C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_m$ unde fiecare predicat (clause) C_i este o disjuncție a unui număr de variabile (e alcătuit din mai multe variabile cu simbolul ∨ - logical or - între ele).
Exemplu de astfel de expresie:
$(x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_7) \wedge (x_1 \vee x_5 \vee x_6) \wedge (x_2 \vee x_5 \vee x_7)$.

Evident că orice expresie de acest tip va fi evaluată cu ”true” dacă toate elementele lui X iau valoarea true. Ne interesează în schimb, să aflăm un număr minim de elemente din X care trebuie să aibă valoarea *true* astfel încât toată expresia să fie *true.*

Fie următorul algoritm pentru problema in forma 3CNF

Greedy-3CNF(C, X)
1: C = {C_1, . . . , C_m} mulțimea de predicate, X = {x_1, . . . , x_n} - mulțime de variabile
2: cât timp C ≠ ∅ execută
    3: Alegem aleator $C_j \in$ C.
    4: Fie x_i una dintre variabilele din C_j .
    5: $x_i \leftarrow$ true.
    6: Eliminăm din C toate predicatele ce îl conțin pe x_i .
7: return X

a) Analizați factorul de aproximare (worst case) al algoritmului (0,5 p)

- **Rezolvare**
- Fie S multimea variabilelor alese de algoritmul nostru
- Consideram un caz in care algoritmul nostru alege din fiecare predicat o variabila care nu se afla in alt predicat, astfel cazul cel mai nefavorabil pentru algoritmul nostru rezulta un cost de m $(|S| = m)$
- Insa, predicatele noaste pot sa aiba o variabila comuna pe care daca algoritmul nostru ar alege-o, costul ar fi 1.
- Spre exemplu in cazul

  $$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_m) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge x_m) \vee \cdots \vee (x_m \wedge x_{m+1} \wedge x_{m+2})$$

  Algoritmul nostru ar putea alege variabilele de pe prima pozitie pereu si ar rezulta un cost de m, insa, dar ar alege variabila x_m costul ar fi 1. Astfel $|S| \leq m \cdot \dot{O}PT$, deci algoritmul nostru este m-aproximativ

b) Modificați algoritmul de mai sus, astfel încât acesta să fie un algoritm 3-aproximativ pentru problema inițială (si justificati) (0,5p)

- **Rezolvare**

 1: C = {C_1, . . . , C_m} mulțimea de predicate, X = {x_1, . . . , x_n} - mulțime de variabile

 2: cât timp C ≠ ∅ execută

  3: Alegem aleator C_j ∈ C.

  4: Fie x_i, x_j, x_k variabilele din C_j .

  5: x_i, x_j, x_k ← true.

  6: Eliminăm din C toate predicatele ce îl conțin pe x_i, x_j, x_k

 7: return X

 Trebuie sa aratam ca algoritmul nostru este 3 aproximativ

 Fie Ssolutia problemei noastre. Stim ca S este o solutie valida, deoarece noi iteram cat timp avem predicate in C,iar la final Ceste vida

 Aratam $|S| \leq 3 \cdot OPT$:

 Fie $C_j$multimea aleasa de noi la pasul 3, stim ca aceasta multime contine 3 variabile disjuncte. Deoarece atunci cand adaugam o variabila in S toate celelalte predicate care conding unca dintre cele 3 variabile vor fi excluse din C

 $OPT \geq \left|C_j\right| = \frac{1}{3}|S|$

 $OPT \geq \frac{1}{3}|S|$

 $3OPT \geq S$

-

c) Reformulati problema de mai sus sub forma unei probleme de programare liniară (0,5p)

- **Rezolvare**
- Fie multimea $Y = \{y, y_2, ..., y_n\}$cu proprietaea ca daca $y_i = 1$atunci x_i are valoarea true si $y_i = 0$altfel.

- Trebuie sa minimizez $\sum_{x_i \in S} f(x_i) = \sum_{1 \le i \le n} f(x_i) \cdot y_i$, unde f imi face legatura dintre multimea Xsi Ydupa regula stabilita
-
- Constrangeri:
    - Pentru $\forall\, x_i,\ x_i \le 1$
    - Pentru $\forall\, C_z \in C,\ \ C_z = (x_i, x_j, x_k)$avem $x_i + x_j + x_k \le 1$

d) Dați o soluție 3-aproximativă pentru problema de programare liniara (0,5p)

- **Rezolvare:**
- Rezolv problema de programare in varianta cu numere reale si daca $y_i \ge \frac{1}{3}$atunci rotunjesc $y_i$la 1, iar $x_i$va face parte din solutie, altfel y_i va fi 0 iar $x_i$nu va face parte din solutie
- Justificare:
- Deoarece $x_i + x_j + x_k \ge 1$pentru orice predicat $C_z \in C$, ceea ce inseamna ca macar una dintre variabilele x_i, x_j, x_kau valoare $\ge \frac{1}{3}$,deci macar o variabila va fi selectata in solutie si implicit setata ca true, deci orice $C_z \in C$ va fi evaluat ca true.

$$ALG = \sum_{1 \le i \le n} f(x_i) \cdot (y_i \ge \tfrac{1}{3} ?\ 1 :\ 0) \le \sum_{1 \le i \le n} f(x_i) \cdot 3y_i \le 3 \cdot \sum_{1 \le i \le n} f(x_i) \cdot y_i \le 3 \cdot OPT$$

-Unde , $(y_i \ge \frac{1}{3} ?\ 1 :\ 0)$ se reduce la faptul ca: daca y_i este mai mare decat $\frac{1}{3}$expresia este evaluata la 1 si 0 altfel