Curs 13

Repartiții condiționate (cazul v.a. cont.)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. cont. și A un eveniment (din $\mathcal{F}$) cu $\mathbb{P}(A) > 0$.

Definim densitatea cond. a lui X la A, funcția $f_{X|A} \geq 0$ care satisface relația

$$\mathbb{P}(X \in B \mid A) = \int_B f_{X|A}(x)\,dx, \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}$$

În particular, dacă ~~BSE~~ $B = \mathbb{R}$ atunci $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \mid A) = 1$

și

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|A}(x)\,dx = 1$$

ceea ce înseamnă că $f_{X|A}$ este o densitate de probabilitate.

În cazul special în care $A \to \{X \in A\}$ și $\mathbb{P}(X \in A) > 0$ atunci

$$\mathbb{P}(X \in B \mid X \in A) = \frac{\mathbb{P}(X \in B, X \in A)}{\mathbb{P}(X \in A)} = \frac{\mathbb{P}(X \in A \cap B)}{\mathbb{P}(X \in A)}$$

$$= \frac{\int_{A \cap B} f_X(x)\,dx}{\mathbb{P}(X \in A)} \Rightarrow$$

De altă parte avem

$$\mathbb{P}(X \in B \mid X \in A) = \int_B f_{X|\{X \in A\}}(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{X|X \in A}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\mathbb{P}(X \in A)}, & x \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}}$$

Exp (Cazul rep. uniforme)

$X \sim \mathcal{U}([a,b])$, $[c,d] \subset [a,b]$

$$f_{X|X\in[c,d]}(x) = ? \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\mathbb{P}(X\in[c,d])}, & x\in[c,d] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

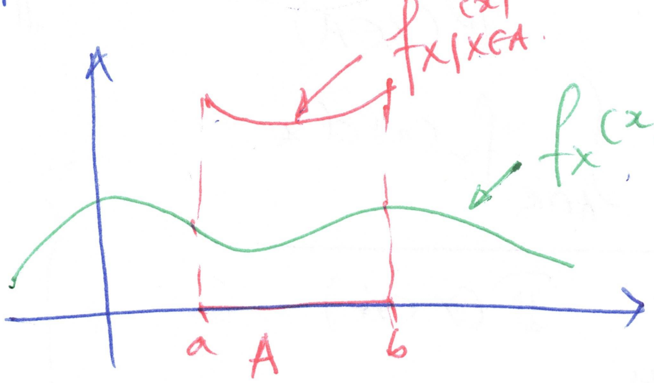
$$\mathbb{P}(X\in[c,d]) = \int_c^d f_X(x)\,dx = \frac{d-c}{b-a}$$

Astfel,

$$f_{X|X\in[c,d]}(x) = \begin{cases} \dfrac{\cancel{\frac{1}{b-a}}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}{\frac{d-c}{\cancel{b-a}}}, & x\in[c,d] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{d-c}, & x\in[c,d] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Altfel spus $X \mid X\in[c,d] \sim \mathcal{U}([c,d])$



(P) Dacă evenimentele $A_1, A_2, \ldots A_n$ formează o partiție pe Ω

atunci $$\boxed{f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|A_i}(x)\,\mathbb{P}(A_i)}$$ formula prob. totale

Pentru a verifica relația anterioară să observăm că:

$$\mathbb{P}(\underbrace{X\le x}_{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\underbrace{X\le x}_{B} \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$

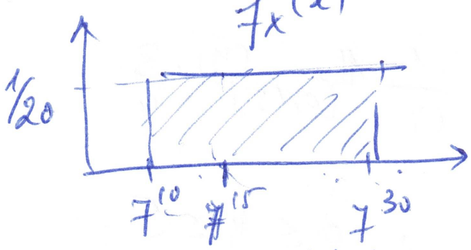
Avem:

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x} f_{X|A_i}(t)\,dt \cdot \mathbb{P}(A_i)$$

și prin derivare după x avem relația dorită.

Exp: Metroul circulă la intervale de 15 min începând cu ora 5^{00} dimineața. Presupunem că voi ajungeți în stație între ora $7^{10} - 7^{30}$, uniform pe acest interval. Ne interesează la densitatea timpului de așteptare până la sosirea primului metrou.

X – timpul de sosire al studentului $\sim \mathcal{U}([7^{10} - 7^{30}])$



Y – timpul de așteptare până la sosirea primului metrou

$$A = \{7^{10} \le X \le 7^{15}\} = \{\text{urcăm în metroul de } 7^{15}\}$$

$$B = \{7^{15} < X \le 7^{30}\} = \{\text{urcăm în metroul de } 7^{30}\}$$

$$f_Y(y) = f_{Y|A}(y)\,\mathbb{P}(A) + f_{Y|B}(y)\,\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Știind că A s-a realizat, timpul de așteptare Y este uniform pe $[0,5]$

Știind că B s-a realizat, timpul de așteptare Y este uniform pe $[0,15]$

$$f_{Y|A}(y) = \frac{1}{5}, \quad 0 \le y \le 5$$

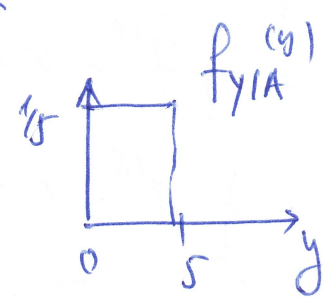
$$f_{Y|B}(y) = \frac{1}{15}, \quad 0 \le y \le 15$$

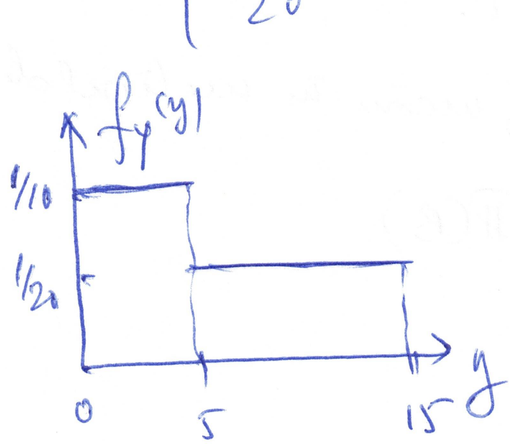
$$f_Y(y) = f_{Y|A}(y)\cdot \mathbb{P}(A) + f_{Y|B}(y)\,\mathbb{P}(B)$$

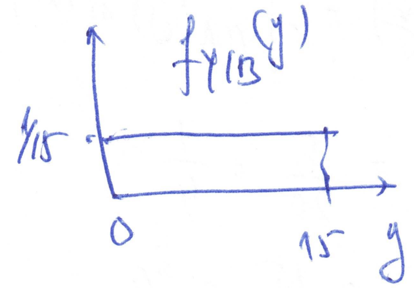
$$= \begin{cases} \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{15}\cdot\frac{3}{4}, & 0 \le y \le 5 \\ 0\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{15}\cdot\frac{3}{4}, & 5 < y \le 15 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{5}\,\mathbb{1}_{[0,5]}(y)\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{15}\,\mathbb{1}_{[0,15]}(y)\cdot\frac{3}{4}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \le y \le 5 \\ \frac{1}{20}, & 5 < y \le 15 \end{cases}$$







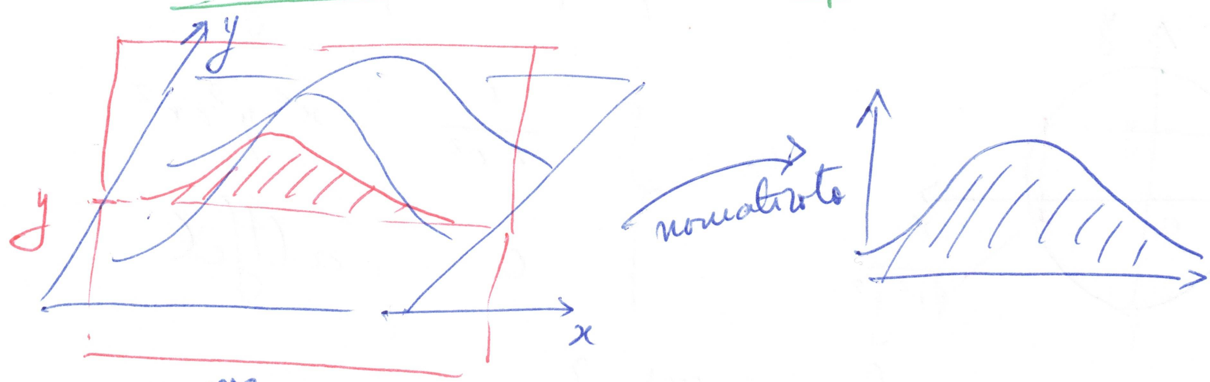
Fie X și Y sunt două v.a. cont. cu densitatea comună $f_{X,Y}(x,y)$

Pentru fiecare y a.î. $f_Y(y)>0$, definim densitatea condiționată a lui X la $Y=y$ prin

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

Discret:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

Atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx}{f_Y(y)} = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1.$$

Astfel $f_{X|Y}(x|y)$ este o densitate de probabilitate.

Avem:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y) \\ &= f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x) \end{aligned}}$$

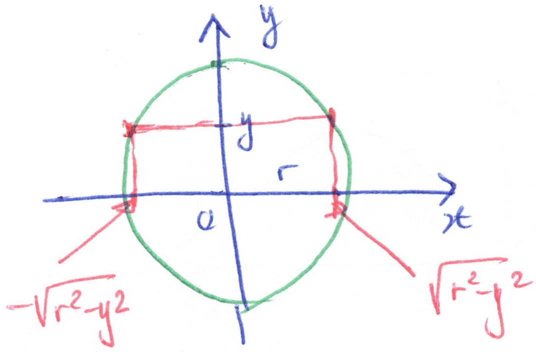
Exp (Uniforma pe disc)

Presupunem că avem un disc de rază r centrat în origine:

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le r^2\}$$

(X,Y) repartizat uniform pe D

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Aria}(D)}, & x^2+y^2 \le r^2 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$



$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2 \le r^2 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Vrem să calculăm $f_{X|Y}(x|y) = ?$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Densitatea marginală a lui Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi r^2} \mathbb{1}_D(x,y)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi r^2} \int_D dx$$

Rezolvând ec. $x^2+y^2=r^2$ pentru x avem sol $\pm\sqrt{r^2-y^2}$

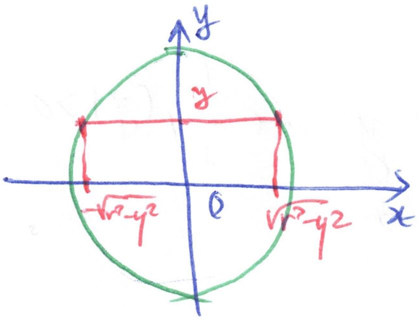
$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}, \quad -r \le y \le r$$

În mod similar, $f_X(x) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}, \quad -r \le x \le r$

X și Y nu sunt rep. uniform pe $[-r, r]$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{\pi r^2}\mathbb{1}_\Delta(x,y)}{\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}\,\mathbb{1}_{[-r,r]}(y)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}\,\mathbb{1}_{[-\sqrt{r^2-y^2},\sqrt{r^2-y^2}]}(x)$$



Astfel pentru y fixat, $f_{X|Y}$ este densitatea uniformă

Obs: Cum putem genera puncte ~~unif~~ rep. uniform pe Δ:

- generăm un punct Y cu densitatea $f_Y(y) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}$, $-r \le y \le r$
- dat fiind punctul y $(Y=y)$ generăm uniform pe intervalul $[-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}]$ un punct x
- perechea (x,y) este $\mathcal{U}(\Delta)$

Obs: Având densitatea condiționată $f_{X|Y}(x|y)$ putem calcula:

$$\boxed{\mathbb{P}(X\in A \mid Y=y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)\,dx}$$

Independența v.a. cont.:

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de prob. și X și Y două v.a. cont.
Spunem că X și Y sunt independente, și notăm $X \perp\!\!\!\perp Y$,
dacă

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad , \forall x, y}$$

Am văzut că $f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)$ ceea ce ar implica
faptul că

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)} \quad , \forall y \text{ a.î. } f_Y(y) > 0, \ \forall x$$

În mod similar,

$$\boxed{f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)} \quad , \forall x \text{ a.î. } f_X(x) > 0, \ \forall y$$

Obs: Dacă X și Y sunt indep. atunci

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B) \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R}$$

Avem:

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x)\,\mathbb{P}(Y \le y)$$
$$= F_X(x) F_Y(y)$$

(P) Dacă densitatea comună a lui X și Y se poate factoriza sub forma

$$f_{X,Y}(x,y) = g(x) h(y) \quad \forall x, y$$

atunci $X \perp\!\!\!\perp Y$.

(P) Dacă X și Y sunt indep. atunci

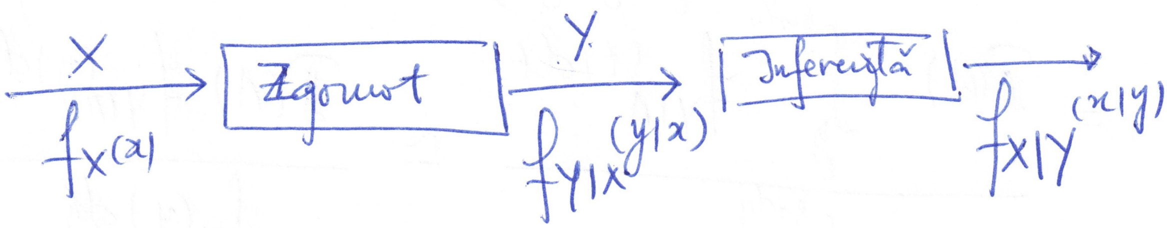
$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]\,E[h(Y)]$$

$\forall$ funcții g și h.

Particularizând: 1) $E[XY] = E[X]\,E[Y]$

2) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Formula lui Bayes:



$$\left.\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_{X|Y}(x|y)\,f_Y(y) \\ &= f_{Y|X}(y|x)\,f_X(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)\,f_X(x)}{f_Y(y)}}$$

Din integrare și ținând cont că $\int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\,f_X(x)\,dx$$

Formula lui Bayes

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)\,f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x')\,f_X(x')\,dx'}}$$

Cazul hibrid (o v.a. cont. și una discretă)

$$\{0,1\} \xrightarrow{\text{Semnal discret}} \boxed{+N(0,1)} \xrightarrow[\text{Cont.}]{Y}$$

$$\mathbb{P}(Y=y)=0$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \mid Y=y) &\simeq \mathbb{P}(A \mid Y\in[y,y+dy]) \\
&= \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(Y\in[y,y+dy] \mid A)}{\mathbb{P}(Y\in[y,y+dy])} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A)\int_y^{y+dy} f_{Y|A}(t)\,dt}{\int_y^{y+dy} f_Y(t)\,dt} \simeq \frac{\mathbb{P}(A)\,f_{Y|A}(y)\,dy}{f_Y(y)\,dy}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid Y=y) = \frac{\mathbb{P}(A)\,f_{Y|A}(y)}{f_Y(y)}}$$

$$f_Y(y) = \mathbb{P}(A)\,f_{Y|A}(y) + \mathbb{P}(A^c)\,f_{Y|A^c}(y)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid Y=y) = \frac{f_{Y|A}(y)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)\,f_{Y|A}(y) + \mathbb{P}(A^c)\,f_{Y|A^c}(y)}}$$

Să ne imaginăm că $A = \{X = x\}$ unde X este o v.a discretă

$$\boxed{\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)} = \frac{\mathbb{P}(X=x)\, f_{Y|X=x}(y)}{\mathbb{P}(X=x)\, f_{Y|X=x}(y) + \mathbb{P}(X\neq x)\, f_{Y|X\neq x}(y)}$$

$X \in \{x_1, \dots, x_n\}$

$$= \boxed{\frac{\mathbb{P}(X=x)\, f_{Y|X}(y|x)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X=x_i)\, f_{Y|X}(y|x_i)}}$$

Formula lui Bayes:

$X \backslash Y$	discret	cont.
discret	$\mathbb{P}(Y=y \mid X=x) = \frac{\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\,\mathbb{P}(Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}$	$f_{Y|X}(y|x) = \frac{\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\, f_Y(y)}{\mathbb{P}(X=x)}$
cont.	$\mathbb{P}(Y=y \mid X=x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)\,\mathbb{P}(Y=y)}{f_X(x)}$	$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)}{f_X(x)}$

Formula prob. totale:

$X \backslash Y$	discret	cont.
discret	$\mathbb{P}(X=x) = \sum_y \mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\,\mathbb{P}(Y=y)$	$\mathbb{P}(X=x) = \int \mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\, f_Y(y)\,dy$
cont.	$f_X(x) = \sum_y f_{X|Y}(x|y)\,\mathbb{P}(Y=y)$	$f_X(x) = \int f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)\,dy$