SISTEMUL FORMAL AL CALCULULUI CU PREDICATE

§1. Structură și limbaj

Incepem cu câteva exemple de structuri.

Ex. 1. O latice se poate defini în două moduri.

(i) ca o structură parțial ordonată $(L, \leq)$ în care există $\sup(a,b)$ și $\inf(a,b)$ pentru orice $a, b \in L$;

(ii) ca o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$ în care $\vee, \wedge$ sunt două operații binare (pe L) asociative, comutative, idempotente și care verifică proprietatea de absorbție.

Ex. 2. laticile cu prim și ultim element: $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, cu $0, 1$ constante

Ex. 3. grafurile: un graf are forma $G = (X, R)$, unde X este mulțimea nodurilor, iar R o relație binară pe X ce definește arcele: $x \to y$ dacă xRy.

Ex. 4. un inel unitar este de forma $(A, +, \cdot, 0, 1)$ în care $+, \cdot$ sunt operații binare, iar $0, 1$ sunt constante.

Se observă că la aceste structuri apare o mulțime de bază (= universul structurii) împreună cu operații, relații sau constante. Pornind de la această observație se degajă noțiunea generală de structură de ordinul I.

O structură de ordinul I este de forma $\mathcal{A} = \langle A, \{f_i\}_{i \in I}, \{R_j\}_{j \in J}, \{c_k\}_{k \in K} \rangle$, unde:

- A este o mulțime nevidă numită universul structurii
- $f_i : A^{n_i} \to A$ este o operație n_i-ară pt. orice $i \in I$ ($n_i \geq 1$ = ordinul lui f_i)
- $R_j \subseteq A^{m_j}$ este o relație m_j-ară pe A pt. orice $j \in J$ ($m_j \geq 1$ = ordinul lui R_j)
- $c_k \in A$ este o constantă pt. orice $k \in K$.

O structură de același tip cu $\mathcal{A}$ are forma:

$$\mathcal{B} = \langle B, \{f'_i\}_{i \in I}, \{R'_j\}_{j \in J}, \{c_k\} \rangle$$

unde $f'_i : B^{n_i} \to B$, $R'_j \subseteq B^{m_j}$ și $c'_k \in B$ este o constantă pt. orice $i \in I, j \in J$ și $k \in K$.

Tipul structurilor $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ este

$$\tau = \langle \{n_i\}_{i \in I}; \{m_j\}_{j \in J}; \{0\}_{k \in K} \rangle.$$

Structura $\mathcal{A}$ de mai sus va fi notată de acum înainte

$$\mathcal{A} = \langle A, \{f_i^{\mathcal{A}}\}_{i\in I}, \{R_j^{\mathcal{A}}\}_{j\in J}, \{c_k^{\mathcal{A}}\}_{k\in K} \rangle.$$

Observaţie. (1) In forma (i) o latice este o structură de tipul $\langle \emptyset; 2; \emptyset \rangle$, iar în forma (ii) de tipul $\langle 2,2; \emptyset; \emptyset \rangle$.

(2) laticile cu prim şi ultim element au tipul $\langle 2,2; \emptyset; 0,0 \rangle$.

(3) grafurile sunt de tipul $\langle \emptyset; 2; \emptyset \rangle$

(4) inelele unitare au tipul $\langle 2,2; \emptyset; 0,0 \rangle$.

Vom considera acum şi alte exemple de structuri.

Ex. 5. spaţiile vectoriale peste un corp K. Un spaţiu vectorial peste K este o structură de forma $(E, +, 0, \cdot)$ unde + este o operaţie (internă) pe E, 0 este o constantă, iar $\cdot$ este o operaţie externă $\cdot : K \times E \to E$ $((\alpha, x) \in K \times E \mapsto \alpha \cdot x \in E)$.
(nu am amintit axiomele spaţiului vectorial!).

Ex. 6. spaţiile metrice. Un spaţiu metric este o pereche (X, d), unde $X \neq \emptyset$ şi $d: X^2 \to R_+$ astfel încât:

- $d(x,z) = 0 \iff x = 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Ex. 7. spaţiile topologice. Un spaţiu topologic este o pereche $(X, \mathcal{D})$ unde $X \neq \emptyset$ şi $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ astfel încât

- $\emptyset, X \in \mathcal{D}$
- $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{D}$
- $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}$.

Observaţie. Exemplele (1)-(4) se încadrează în definiţia structurilor de ord. I, în timp ce (5)-(6) nu mai furnizează structuri de ord. I. In exemplele (5), (6) avem operaţii externe, iar în (7) $\mathcal{D}$ este o relaţie unară pe $\mathcal{P}(X)$.

(5), (6) conduc la ideea de structură multisortată, iar (7) la ideea de structură de ord. II.

TOATE STRUCTURILE CONSIDERATE DE NOI VOR FI DE ORD. I

Fiecărei clase de structuri de un tip fixat îi vom asocia un limbaj de ordinul I în care să poată fi exprimate (la nivel simbolic) proprietăți ale structurilor considerate.

Fie structurile de tipul considerat mai sus. Alfabetul limbajului de ord. I L asociat acestor structuri este format din următoarele simboluri primitive:

(1) o mulțime infinită de variabile : $x, y, z, v, w, \dots$ (V = mulțimea variabilelor)

(2) simboluri de operații : f_i, pt. orice $i \in I$ (lui f_i îi este atașat numărul natural n_i numit ordinul lui f_i)

(3) simboluri de relații (predicate) : R_j, pt. orice $j \in J$ (lui R_j îi este atașat ordinul său m_j)

(4) simboluri de constante : c_k, pt. orice $k \in K$.

(5) simbolul de egalitate: $=$

(6) conectorii : $\rightarrow, \neg$

(7) cuantificatorul universal : $\forall$

(8) paranteze : (,), [,].

Pentru comoditate vom spune (uneori):

- operații: în loc de simboluri de operații
- relații : în loc de simboluri de relații
- constante: în loc de simboluri de constante.

Mulțimea termenilor lui L se definește prin inducție:

(a) variabilele și simbolurile de constante sunt termeni

(b) dacă f este un simbol de operație n-ară și $t_1, \dots, t_n$ sunt termeni atunci $f(t_1, \dots, t_n)$ este termen.

Formulele atomice ale lui L sunt definite de

(a) dacă t_1, t_2 sunt termeni atunci $t_1 = t_2$ este o formulă atomică

(b) dacă R este un predicat n-ar și $t_1, \dots, t_n$ sunt termeni atunci $R(t_1, \dots, t_n)$ este o formulă atomică.

Formulele lui L sunt definite prin inducție

(1) formulele atomice sunt formule

(2) dacă φ este formulă atunci $\neg\varphi$ este formulă

(3) dacă φ, ψ sunt formule atunci $\varphi \to \psi$ este formulă

(4) dacă φ este formulă și x este variabilă atunci $\forall x \varphi$ este formulă.

Formule derivate :
$\varphi \vee \psi$: pt. $\neg\varphi \to \psi$
$\varphi \wedge \psi$: pt. $\neg(\varphi \to \neg\psi)$
$\varphi \leftrightarrow \psi$: pt. $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
$\exists x \varphi$: pt. $\neg\forall x \neg\varphi$

Ex. 8. Revenim la Ex. 1, (i). In acest caz limbajul asociat are un singur predicat binar $<$, iar o structură are forma $\mathcal{A} = \langle A, \leq^{\mathcal{A}} \rangle$. Termenii sunt dați numai de variabile, iar formulele atomice sunt de forma : $x = y$, $x \leq y, \ldots$

In cazul Ex. 1, (ii) limbajul are două simboluri de operații binare $\vee, \wedge$, iar o structură este de forma $\mathcal{A} = \langle A, \vee^{\mathcal{A}}, \wedge^{\mathcal{A}} \rangle$.

Termenii sunt de forma :

- $x, y, z, \ldots$ (variabilele)
- $x \vee y$, $x \wedge y, \ldots$ $(x \vee y) \vee z, \ldots$, $(x \wedge y) \wedge z, \ldots$
- $(x \vee y) \wedge z, \ldots$, $(x \wedge y) \vee z, \ldots$

....

Exemplificări formulele atomice : $x = y$
: $x \vee y = z$, $x \wedge y = z$
: $(x \vee y) \vee z = ((x \wedge z) \vee z) \wedge y$, etc.

Vom defini acum prin inducție:

$FV(t)$ = mulțimea variabilelor termenului t.

$FV(\varphi)$ = mulțimea variabilelor libere ale formulei φ.

$FV(t)$ este introdusă prin:

- dacă t este variabila x atunci $FV(t) = \{x\}$
- dacă t este constanta c atunci $FV(t) = \emptyset$
- dacă $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ atunci $FV(t) = \bigcup_{i=1}^{m} FV(t_i)$.

Obs. Când scriem $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ a nu se confunde $=$ cu simbolul de egalitate (notat tot $=$ pt. a nu complica redactarea).

$FV(\varphi)$ este definită de

- dacă φ este $t_1 = t_2$ atunci $FV(\varphi) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$
- dacă φ este $R(t_1, \dots, t_m)$ atunci $FV(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{m} FV(t_i)$
- dacă φ este $\neg\psi$ atunci $FV(\varphi) = FV(\psi)$
- dacă φ este $\alpha \to \beta$ atunci $FV(\varphi) = FV(\alpha) \cup FV(\beta)$
- dacă φ este $\forall x \psi$ atunci $FV(\varphi) = FV(\psi) - \{x\}$.

<u>Consecințe imediate</u>:

- dacă φ este $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ atunci $FV(\varphi) = FV(\alpha) \cup FV(\beta)$
- dacă φ este $\exists x \psi$ atunci $FV(\varphi) = FV(\psi) - \{x\}$.

Dacă $x \in FV(\varphi)$ atunci x se va numi <u>variabilă liberă</u> a lui φ; în caz contrar, x este o <u>variabilă legată</u>. O formulă fără variabile libere se va numi <u>enunț</u>.

<u>Observație</u>. Există cazuri când o variabilă are unele apariții libere, iar altele legate. Fie $\varphi(x, y, u)$ formula

$$(\forall x\,(x \cdot y = y + u)) \to (\exists y\,(x \cdot y \leq y + u))$$

Pt. a înlătura excesul de paranteze vom scrie această formulă

$$\forall x\,(x \cdot y = y + u) \to \exists y\,(x \cdot y \leq y + u)$$

Prima subformulă $\forall x(x \cdot y = y + u)$ conține pe x ca variabilă legată, în timp ce a doua subformulă $\exists y\,(x \cdot y \leq y + u)$ conține pe x ca variabilă liberă. În $\varphi(x, y, u)$ x este <u>variabilă liberă</u>.

Dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ atunci vom nota $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Fie φ o formulă, x o variabilă astfel încât $\varphi(x)$ și t un termen. Formula $\varphi(t)$ obținută din φ prin <u>substituția lui x cu t</u> se definește astfel:

- dacă y este o variabilă a lui t se înlocuiește y cu o variabilă v ce nu apare în $\varphi(x)$ sau în t în toate aparițiile <u>legate</u> ale lui y în φ.
- se înlocuiește apoi x cu t.

<u>Ex. 9</u>. Fie $\varphi(x)$ formula $\exists y\,(x = y)$ și t termenul $y + z$. Atunci

- $\exists y\,(x = y) \rightsquigarrow \exists v\,(x = v)$
- $\varphi(t)$ va fi $\exists v\,(y + z = v)$.

Proprietățile structurilor ce se pot exprima în limbajul L se numesc <u>proprietăți de ordinul I</u>.

<u>Ex. 10.</u> Fie L un limbaj cu un singur predicat binar R. Structurile sunt de forma $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}} \rangle$, cu $R^{\mathcal{A}}$ relație binară pe A. Următoarele proprietăți sunt de ordinul I:

(a) R este <u>reflexivă</u> : $\forall x\, R(x,x)$

(b) R este <u>simetrică</u> : $\forall x \forall y\, (R(x,y) \leftrightarrow R(y,x))$

(c) R este <u>antisimetrică</u> : $\forall x \forall y\, (R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y)$

(d) R este <u>tranzitivă</u> : $\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$

(e) R este <u>relație de echivalență</u> :

$$\forall x\, R(x,x) \wedge \forall x \forall y\, (R(x,y) \leftrightarrow R(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$$

(f) <u>R este relație de ordine parțială</u>:

$$\forall x\, R(x,y) \wedge \forall x \forall y\, (R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y) \wedge \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \quad : \alpha$$

(g) <u>R este o relație de ordine totală</u> (= $\mathcal{A}$ este lanț)

Notând cu α enunțul de la (f): $\alpha \wedge \forall x \forall y\, (x R y \vee y R x)$

(h) <u>$\mathcal{A}$ este o latice</u>

Considerăm enunțurile:

$\beta_1 : \forall x \forall y \exists z\, [(x R z \wedge y R z) \wedge \forall u\, [(x R u \wedge y R u) \rightarrow z R u]]$

$\beta_2 : \forall x \forall y \exists z\, [(z R x \wedge z R y) \wedge \forall u\, [(u R x \wedge u R y) \rightarrow u R z]]$

β_1 exprimă faptul că orice pereche de elemente admite supremum, iar β_2 că orice pereche de elemente admite infimum.

Atunci proprietatea de a fi latice este dată de enunțul : $\alpha \wedge \beta_1 \wedge \beta_2$

(i) <u>$\mathcal{A}$ este o latice cu prim element</u> :

$$\alpha \wedge \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \exists x \forall y\, x R y$$

(j) <u>$\mathcal{A}$ este o latice cu ultim element</u>

$$\alpha \wedge \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \exists x \forall y\, y R x.$$

(k) <u>Orice lanț este o latice</u>

$$\alpha \wedge \forall x \forall y\, (x R y \vee y R x) \rightarrow (\alpha \wedge \beta_1 \wedge \beta_2)$$

(l) <u>într-o latice cu 0 și 1 orice element este complementat</u> (prop. de ord. I falsă)

$$(\alpha \wedge \beta_1 \wedge \beta_2) \rightarrow \forall x \exists y\, [(x \vee y = 1) \wedge (x \wedge y = 0)]$$

Întrebare : Ce este în neregulă la exemplul (l) ?

§2. Semantica calculului cu predicate

Fie $\mathcal{A}$ o structură corespunzătoare limbajului L. Dacă f (resp. R, resp. c) este un simbol de operație (resp. un simbol de relație, resp. un simbol de constantă) atunci vom nota cu $f^{\mathcal{A}}$ resp. $R^{\mathcal{A}}$, resp. $c^{\mathcal{A}}$) operația (resp. relația, resp. constanta) corespunzătoare din $\mathcal{A}$.

O <u>interpretare</u> (sau <u>evaluare</u>) a lui L în $\mathcal{A}$ este o funcție $s: V \to A$.

Pentru orice termen t și pt. orice interpretare s definim prin inducție elementul $t^{\mathcal{A}}(s) \in A$:

- dacă t este variabila v atunci $t^{\mathcal{A}}(s) = s(v)$;
- dacă t este constanta c atunci $t^{\mathcal{A}}(s) = c^{\mathcal{A}}$;
- dacă $t = f(t_1, \dots, t_n)$ atunci $t^{\mathcal{A}}(s) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(s), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(s))$.

Pt. orice formulă φ și pt. orice interpretare s vom defini:

$$\|\varphi(s)\| = \|\varphi(s)\|_{\mathcal{A}} \in L_2 = \{0, 1\}.$$

Pt. <u>formule atomice</u>:

- dacă φ este $t_1 = t_2$: $\|\varphi(s)\| = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t_1^{\mathcal{A}}(s) = t_2^{\mathcal{A}}(s) \\ 0, & \text{dacă } t_1^{\mathcal{A}}(s) \neq t_2^{\mathcal{A}}(s) \end{cases}$

- dacă φ este $R(t_1, \dots, t_m)$:
$$\|\varphi(s)\| = 1 \iff (t_1^{\mathcal{A}}(s), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(s)) \in R^{\mathcal{A}}.$$

Pt. <u>formule oarecare</u> prin inducție:

- pt. formule atomice a fost definit
- dacă $\varphi = \neg\psi$: $\|\varphi(s)\| = \neg\|\psi(s)\|$
- dacă φ este $\alpha \to \beta$: $\|\varphi(s)\| = \|\alpha(s)\| \to \|\beta(s)\|$
- dacă φ este $\forall x \psi$: $\|\varphi(s)\| = \bigwedge_{a \in A} \|\psi(s[{}^x_a])\|$

unde $s[{}^x_a]: V \to L_2$ este interpretarea definită de

$$s[{}^x_a](v) = \begin{cases} a, & \text{dacă } v = x \\ s(v), & \text{dacă } v \neq x. \end{cases}$$

<u>Consecințe imediate</u>

- dacă $\varphi = \alpha \vee \beta$: $\|\varphi(s)\| = \|\alpha(s)\| \vee \|\beta(s)\|$
- dacă $\varphi = \alpha \wedge \beta$: $\|\varphi(s)\| = \|\alpha(s)\| \wedge \|\beta(s)\|$
- dacă $\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$: $\|\varphi(s)\| = \|\alpha(s)\| \leftrightarrow \|\beta(s)\|$
- dacă $\varphi = \exists x \psi$: $\|\varphi(s)\| = \bigvee_{a \in A} \|\psi(s[{}^x_a])\|$.

Lema 1. Fie s_1, s_2 două interpretări. Pt. orice termen t avem

$$s_1|_{FV(t)} = s_2|_{FV(t)} \Rightarrow t^{\mathcal{A}}(s_1) = t^{\mathcal{A}}(s_2).$$

Dem. Prin inducție, după modul de definire al termenului t.

- dacă t este variabilă sau constantă atunci este imediat
- dacă $t = f(t_1, \dots, t_m)$ atunci

$$FV(t) = \bigcup_{i=1}^{m} FV(t_i),\ s_1|_{FV(t)} = s_2|_{FV(t)} \Rightarrow s_1|_{FV(t_i)} = s_2|_{FV(t_i)},\ i = 1, \dots, m$$

$$\Rightarrow t_i^{\mathcal{A}}(s_1) = t_i^{\mathcal{A}}(s_2),\ i = 1, \dots, m \qquad \text{(ip. inducției)}$$

$$\Rightarrow t^{\mathcal{A}}(s) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(s_1), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(s_1))$$

$$= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(s_2), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(s_2)) = t^{\mathcal{A}}(s_2).$$

Propoziția 2. Pt. orice formulă φ și pt. orice interpretări s_1, s_2 avem

$$s_1|_{FV(\varphi)} = s_2|_{FV(\varphi)} \Rightarrow \|\varphi(s_1)\| = \|\varphi(s_2)\|.$$

Dem. Prin inducție după φ.

- φ este de forma $t_1 = t_2$.

Atunci $FV(\varphi) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$

$$s_1|_{FV(\varphi)} = s_2|_{FV(\varphi)} \Rightarrow s_1|_{FV(t_j)} = s_2|_{FV(t_j)},\ j = 1, 2$$

$$\Rightarrow t_j^{\mathcal{A}}(s_1) = t_j^{\mathcal{A}}(s_2),\ j = 1, 2 \qquad \text{(cf. Lemei 1)}$$

Rezultă

$$\|\varphi(s_1)\| = 1 \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}(s_1) = t_2^{\mathcal{A}}(s_1) \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}(s_2) = t_2^{\mathcal{A}}(s_2) \Leftrightarrow \|\varphi(s_2)\| = 1$$

de unde $\|\varphi(s_1)\| = \|\varphi(s_2)\|$.

- φ este $R_i(t_1, \dots, t_m)$

$FV(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{m} FV(t_i)$, deci

$$s_1|_{FV(\varphi)} = s_2|_{FV(\varphi)} \Rightarrow s_1|_{FV(t_i)} = s_2|_{FV(t_i)},\ i = 1, \dots, m$$

$$\Rightarrow t_i^{\mathcal{A}}(s_1) = t_i^{\mathcal{A}}(s_2),\ i = 1, \dots, m$$

Rezultă

$$\|\varphi(s_1)\| = 1 \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}(s_1), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(s_1)) \in R^{\mathcal{A}}$$

$$\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}(s_2), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(s_2)) \in R^{\mathcal{A}}$$

$$\Leftrightarrow \|\varphi(s_2)\| = 1.$$

- $\varphi = \alpha \to \beta$

$FV(\varphi) = FV(\alpha) \cup FV(\beta)$

$s_1|_{FV(\varphi)} = s_2|_{FV(\varphi)} \Rightarrow s_1|_{FV(\alpha)} = s_2|_{FV(\alpha)},\ s_1|_{FV(\beta)} = s_2|_{FV(\beta)}$

$\Rightarrow \|\alpha(s_1)\| = \|\alpha(s_2)\|,\ \|\beta(s_1)\| = \|\beta(s_2)\|$ (ip. ind.)

$\Rightarrow \|\varphi(s_1)\| = \|\varphi(s_2)\|.$

- $\varphi = \neg\psi$: analog

- φ este $\forall x \psi$

Avem $FV(\varphi) = FV(\psi) - \{x\}$. Fie $a \in A$.

Dacă $s_1|_{FV(\varphi)} = s_2|_{FV(\varphi)}$ atunci $s_1\left[\begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix}\right]|_{FV(\psi)} = s_2\left[\begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix}\right]|_{FV(\psi)}$. Cf. ipotezei inducției,

$\|\psi(s_1\left[\begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix}\right])\| = \|\psi(s_2\left[\begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix}\right])\|$, deci

$\|\varphi(s_1)\| = \bigwedge_{a\in A} \|\psi(s_1\left[\begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix}\right])\| = \bigwedge_{a\in A} \|\psi(s_2\left[\begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix}\right])\| = \|\varphi(s_2)\|.$ □

Dacă $\{x_1, \dots, x_n\}$ conține variabilele ce apar într-un termen t atunci notăm $t(x_1, \dots, x_n)$. Reamintim și $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ înseamnă că $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

<u>Obs</u>. Fie $t(x_1, \dots, x_n)$ un termen, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ o formulă și $a_1, \dots, a_n \in A$. Definim

$t^A(a_1, \dots, a_n) = t^A(s) \in A$

$\|\varphi(a_1, \dots, a_n)\| = \|\varphi(s)\| \in L_2$

unde $s: V \to A$ este o interpretare ce verifică $s(x_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$. Cf. Lemei 1 și Prop. 2 definiția lui $t^A(a_1, \dots, a_n)$ și $\|\varphi(a_1, \dots, a_n)\|$ este corectă (= depinde numai de condițiile $s(x_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$).

<u>Notație</u> $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \|\varphi(a_1, \dots, a_n)\| = 1.$

Folosind această notație transcriem unele proprietăți din definiția $\|\cdot\|$.

- dacă $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ este $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n)$ atunci

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Longleftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n).$

- dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este $R(t_1(x_1,\dots,x_n),\dots,t_m(x_1,\dots,x_n))$ atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n),\dots,t_m^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n)) \in R^{\mathcal{A}}$$

- dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este $\neg\psi(x_1,\dots,x_n)$ atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \psi[a_1,\dots,a_n].$$

- dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este $\alpha(x_1,\dots,x_n) \rightarrow \beta(x_1,\dots,x_n)$ atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow [\mathcal{A} \models \alpha[a_1,\dots,a_n] \Rightarrow \mathcal{A} \models \beta[a_1,\dots,a_n]]$$

- dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este $\alpha(x_1,\dots,x_n) \vee \beta(x_1,\dots,x_n)$ atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha[a_1,\dots,a_n] \text{ sau } \mathcal{A} \models \beta[a_1,\dots,a_n]$$

- dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este $\alpha(x_1,\dots,x_n) \wedge \beta(x_1,\dots,x_n)$ atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha[a_1,\dots,a_n] \text{ și } \mathcal{A} \models \beta[a_1,\dots,a_n]$$

- dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este $\alpha(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \beta(x_1,\dots,x_n)$ atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow [\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \beta[a_1,\dots,a_n]]$$

- dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este $\forall x\, \psi(x, x_1,\dots,x_n)$ atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow \text{pt. orice } a \in A,\ \mathcal{A} \models \psi[a, a_1,\dots,a_n]$$

- dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este $\exists x\, \psi(x, x_1,\dots,x_n)$ atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow \text{există } a \in A,\ \mathcal{A} \models \psi[a, a_1,\dots,a_n]$$

<u>Observație</u>. Dacă φ este un enunț, atunci $\|\varphi(s)\|$ nu depinde de interpretarea s; în acest caz notăm $\|\varphi\| = \|\varphi(s)\|$. De asemenea; $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \|\varphi\| = 1$.

Dacă $\mathcal{A} \models \varphi$ spunem că enunțul φ este <u>adevărat</u> în $\mathcal{A}$ sau că $\mathcal{A}$ este <u>model</u> pt. φ.

Dacă Γ este o mulțime de enunțuri atunci spunem că $\mathcal{A}$ este <u>model al lui Γ</u> dacă $\mathcal{A}$ este model pt. orice $\varphi \in \Gamma$ (notăm $\mathcal{A} \models \Gamma$).

Dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este o formulă atunci $\mathcal{A}$ este <u>model</u> al lui $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ ($\mathcal{A} \models \varphi(x_1,\dots,x_n)$) dacă $\mathcal{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_n\, \varphi(x_1,\dots,x_n)$. Dacă Σ este o mulțime de formule atunci $\mathcal{A}$ este model al lui Σ ($\mathcal{A} \models \Sigma$) dacă $\mathcal{A}$ este model pt. fiecare $\varphi \in \Sigma$.

<u>Convenție</u>! Pt. orice structură $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \emptyset$.

Fie C o mulțime de constante noi (distincte de constantele lui L). Considerăm limbajul $L(C)$ obținut din L prin adăugarea constantelor din C. O structură a lui $L(C)$ este de forma $(\mathcal{A}, a_c)_{c\in C}$, unde $\mathcal{A}$ este o structură coresp. lui $\mathcal{A}$ și $a_c \in A$ pt. orice $c \in C$ (a_c este interpretarea constantei $c \in C$). Dacă $C = \{c_1,\dots,c_n\}$ atunci o structură pt. $L(c_1,\dots,c_n)$ va fi de forma $(\mathcal{A}, a_1,\dots,a_n)$ cu a_i = interpretarea lui c_i, $i=1,\dots,n$.

Lema 3. Pt. orice termen $t(x_1,\dots,x_n)$ al lui L și pt. orice $a_1,\dots,a_n \in A$,

$$t(c_1,\dots,c_n)^{(\mathcal{A}, a_1,\dots,a_n)} = t^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n)$$

Dem. Prin inducție asupra lui t:

- t este x: $\quad t(c)^{(\mathcal{A},a)} = a = t^{\mathcal{A}}(a)$
- t este o constantă d din L: $\quad t(c)^{(\mathcal{A},a)} = d^{\mathcal{A}} = t^{\mathcal{A}}(a)$
- t este $f(t_1(x_1,\dots,x_n),\dots,t_m(x_1,\dots,x_n))$

$$\begin{aligned}
t(c_1,\dots,c_n)^{(\mathcal{A}, a_1,\dots,a_n)} &= f(t_1(c_1,\dots,c_n),\dots,t_m(c_1,\dots,c_n)) \\
&= f^{(\mathcal{A},a_1,\dots,a_n)}\left(t_1(c_1,\dots,c_n)^{(\mathcal{A},a_1,\dots,a_n)},\dots,t_m(c_1,\dots,c_n)^{(\mathcal{A},a_1,\dots,a_n)}\right) \\
&= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n),\dots,t_m^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n)) \\
&= t^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n)
\end{aligned}$$

ipoteza inducției fiind: $t_j(c_1,\dots,c_n)^{(\mathcal{A},a_1,\dots,a_n)} = t_j^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n)$, $j=1,\dots,m$.

Prop. 4. Pt. orice formulă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ a lui L și pt. orice $a_1,\dots,a_n \in A$:

$$(\mathcal{A}, a_1,\dots,a_n) \models \varphi(c_1,\dots,c_n) \iff \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n].$$

Dem. Prin inducție după φ:

- φ este $t_1(x_1,\dots,x_n) = t_2(x_1,\dots,x_n)$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}, a_1,\dots,a_n) \models \varphi(c_1,\dots,c_n) &\iff t_1(c_1,\dots,c_n)^{(\mathcal{A},a_1,\dots,a_n)} = t_2(c_1,\dots,c_n)^{(\mathcal{A},a_1,\dots,a_n)} \\
&\iff t_1^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n) = t_2^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n) \\
&\iff \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]
\end{aligned}$$

- φ este $R(t_1(x_1,\dots,x_n),\dots,t_m(x_1,\dots,x_n))$

$(\mathcal{A}, a_1,\dots,a_n) \models \varphi(c_1,\dots,c_n) \iff$

$\iff (t_1(c_1,\dots,c_n)^{(\mathcal{A},a_1,\dots,a_n)},\dots,t_m(c_1,\dots,c_n)^{(\mathcal{A},a_1,\dots,a_n)}) \in R^{(\mathcal{A},a_1,\dots,a_n)}$

$\iff (t_1^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n),\dots,t_m^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n)) \in R^{\mathcal{A}}$

$\iff \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$.

- $\varphi = \neg\alpha$
- $\varphi = \alpha \to \beta$ (exercițiu, folosind inducție)
- $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ este $\forall x \psi(x, x_1, \dots, x_m)$

Ipoteza inducției: pt. orice constante $c, c_1, \dots, c_m$ și pt. orice $a, a_1, \dots, a_m \in A$:

$$(\mathcal{A}, a, a_1, \dots, a_m) \models \psi(c, c_1, \dots, c_m) \iff \mathcal{A} \models \psi[a, a_1, \dots, a_m].$$

Atunci

$(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_m) \models \varphi(c_1, \dots, c_m) \iff$

$\iff$ pt. orice $a \in A$, $(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_m) \models \psi(x, c_1, \dots, c_m)[a]$

$\iff$ pt. orice $a \in A$, $(\mathcal{A}, a, a_1, \dots, a_m) \models \psi(c, c_1, \dots, c_m)$ (ip. ind).

$\iff$ pt. orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[a, a_1, \dots, a_m]$ (ip. ind)

$\iff$ $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_m]$

Fie $\mathcal{A}$ o structură și $C = \{c_a \mid a \in A\}$ cu $c_a \neq c_b$ pt. $a \neq b$. O structură pt. $L(C)$ este de forma $(\mathcal{B}, b_a)_{a \in A}$ cu $b_a \in B$, pt. orice $a \in A$. În particular, $(\mathcal{A}, a)_{a \in A}$ este o structură pt. $L(C)$.

Vom identifica constanta c_a cu a, deci pe C cu A. Atunci limbajul $L(C)$ se va nota cu $L(A)$. Cf. Prop. 4, pt. $\varphi(x_1, \dots, x_m) \in L$ și $a_1, \dots, a_m \in A$ avem

$$(\mathcal{A}, a)_{a \in A} \models \varphi(c_{a_1}, \dots, c_{a_m}) \iff \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_m].$$

Cu identificarea $c_a \leftrightarrow a$ echivalența se scrie

$$(\mathcal{A}, a)_{a \in A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m) \iff \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_m]$$

Cf. acestei echivalențe, este <u>natural</u> să scriem $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$ în loc de $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_m]$ sau de echivalentul său $(\mathcal{A}, a)_{a \in A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$

Enunţul φ este <u>universal adevărat</u> ($\models \varphi$) dacă $\mathcal{A} \models \varphi$ pt. orice structură $\mathcal{A}$ (= de un tip fixat). Formula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este <u>universal adevărată</u> dacă $\forall x_1 \dots \forall x_n\, \varphi(x_1,\dots,x_n)$ este universal adevărat.

<u>Ex. 1.</u> Fie L <u>limbajul egalităţii</u>: fără operaţii, predicate şi constante. Structurile corespunzătoare sunt exact mulţimile.

- pt. $n \geq 1$ considerăm enunţul σ_n definit de

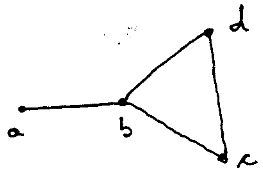
$$\exists x_1 \dots \exists x_n \left[\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg (x_i = x_j) \wedge \forall y \left(\bigvee_{i=1}^{n} y = x_i \right) \right]$$

Atunci pt. orice mulţime A:

$A \models \sigma_n \iff$ cardinalul lui A este n ($|A| = n$)

- A are cel mult n elemente $\iff A \models \bigvee_{k=1}^{n} \sigma_k$
- A are cel puţin n element $\iff A \models \neg \bigvee_{k=1}^{n-1} \sigma_k$ ($n \geq 2$).

<u>Ex. 2.</u> Fie L <u>limbajul teoriei grafurilor</u>: cu un singur predicat binar R. Fie următorul graf simetric $G = (X, R)$:



$X = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (b,d), (d,b), (c,d), (d,c)\}$.

Vrem să vedem dacă $G \models \forall x \exists y \forall z \, (R(x,z) \vee R(y,z))$.

Aceasta este echivalent cu a arăta că următoarele patru afirmaţii sunt adevărate:

(1) $G \models \exists y \forall z \, (R(a,z) \vee R(y,z))$

(2) $G \models \exists y \forall z \, (R(b,z) \vee R(y,z))$

(3) $G \models \exists y \forall z \, (R(c,z) \vee R(y,z))$

(4) $G \models \exists y \forall z \, (R(d,z) \vee R(y,z))$

Analizăm (1); are loc dacă cel puţin una din următoarele afirmaţii este adevărată

(1_a) $G \models \forall z \, (R(a,z) \vee R(a,z))$

(1_b) $G \models \forall z \, (R(a,z) \vee R(b,z))$

(1_c) $G \models \forall z \, (R(a,z) \vee R(c,z))$

(1_d) $G \models \forall z \, (R(a,z) \vee R(d,z))$.

De ex., (1_b) are loc dacă următoarele patru afirmaţii sunt adevărate

(1_{ba}) $\quad G \models R(a,a) \vee R(b,a)$

(1_{bb}) $\quad G \models R(a,b) \vee R(b,b)$

(1_{bc}) $\quad G \models R(a,c) \vee R(b,c)$

(1_{bd}) $\quad G \models R(a,d) \vee R(b,d)$.

Se observă că toate aceste afirmații sunt adevărate.

Ex. 3. Fie $G = (X, R)$ un graf simetric. Pt. $x \in X$, gradul lui x este

$$deg(x) = |\{y \in X \mid x R y\}|$$

Pt. orice $n \geq 1$ notăm cu $\varphi_n(x)$ următoarea formulă

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \left[\bigwedge_{i=1}^{n} x R x_i \ \wedge \ \forall y \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \neg (y = x_i) \rightarrow \neg R(x,y) \right) \right]$$

$\varphi_n(x)$ exprimă faptul că "x are gradul n".

gradul lui x este cel mult n : $\bigvee_{k=1}^{n} \varphi_k(x)$

gradul lui x este cel puțin $n+2$: $\neg \bigvee_{i=1}^{n+1} \varphi_i(x)$

- există un x astfel încât gradul său să fie mai mare ca 5 și mai mic ca 8 :

$$\exists x \left(\varphi_6(x) \vee \varphi_7(x) \right)$$

Ex. 4. Un monoid este o structură de forma $\mathcal{A} = (A, +, 0)$ unde $+$ este o operație binară asociativă și 0 este element neutru.

Limbajul monoizilor va avea un simbol de operație binară $+$ și o constantă 0.

$\mathcal{A}$ monoid $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \models \forall x \forall y \forall z \left[x + (y+z) = (x+y) + z \right] \wedge \forall x \left(x + 0 = 0 + x = x \right)$

Ordinul unui element $a \in A$ este cel mai mic n astfel încât $na = 0$; dacă nu există un asemenea n, ordinul lui $a = \infty$.

Formula $ord_n(x)$: $\quad \neg(x = 0) \wedge \neg(2x = 0) \wedge \ldots \wedge \neg\left((n-1)x = 0\right) \wedge (nx = 0)$

exprimă faptul că ordinul lui x este n.

Observăm că "ordinul lui x este finit" nu este proprietate de ordinul I. Ea s-ar putea exprima ca o "disjuncție infinită" : $\bigvee_{n=1}^{\infty} ord_n(x)$. O asemenea formulă ar presupune un limbaj ce admite disjuncții și conjuncții infinite.

Fie Σ o mulțime de formule și φ o formulă a lui L. Spunem că φ se <u>deduce semantic</u> din ipotezele Σ dacă φ este adevărată în orice model $\mathcal{A}$ al lui Σ:

$$\mathcal{A} \models \Sigma \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi.$$

<u>Obs</u>. Cum $\mathcal{A} \models \emptyset$ pt. orice structură $\mathcal{A}$ (= prin convenție) rezultă că: $\emptyset \models \varphi \iff \models \varphi$.

<u>Obs</u>. $\Sigma \subseteq \Delta$, $\Sigma \models \varphi \Rightarrow \Delta \models \varphi$.

<u>Prop. 3</u>.
$$\frac{\Sigma \models \varphi(x_1,\dots,x_n), \quad \Sigma \models \varphi(x_1,\dots,x_n) \to \psi(x_1,\dots,x_n)}{\Sigma \models \psi(x_1,\dots,x_n)}$$

Ceea ce este deasupra liniei atrage după sine ceea ce este dedesubtul ei.

<u>Dem</u>. Fie $\mathcal{A} \models \Sigma$. Cf. ipotezei

$\mathcal{A} \models \varphi(x_1,\dots,x_n)$, $\mathcal{A} \models \varphi(x_1,\dots,x_n) \to \psi(x_1,\dots,x_n)$

Fie $a_1,\dots,a_n \in A$. Atunci $\mathcal{A} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ și $\mathcal{A} \models \varphi(a_1,\dots,a_n) \to \psi(a_1,\dots,a_n)$, deci $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\dots,a_n)$. Am demonstrat că $\mathcal{A} \models \psi(x_1,\dots,x_n)$.

<u>Prop. 4</u>.
$$\frac{\Sigma \models \varphi(x_1,\dots,x_n)}{\Sigma \models \forall x_1 \dots \forall x_n\, \varphi(x_1,\dots,x_n)}$$

<u>Prop. 5</u> (th. deducției semantice). Fie Σ o mulțime de formule, φ un enunț și ψ o formulă.

$$\Sigma \models \varphi \to \psi \iff \Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi.$$

<u>Dem</u>. ($\Rightarrow$) Din $\Sigma \models \varphi \to \psi$ avem $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \varphi \to \psi$. Cum $\Sigma \models \varphi$, rezultă $\Sigma \models \psi$ (cf. Prop. 3)

($\Leftarrow$) Vom presupune $\psi = \psi(x_1,\dots,x_n)$. Trebuie să arătăm că

$$\mathcal{A} \models \Sigma \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi \to \psi(x_1,\dots,x_n).$$

Fie $\mathcal{A} \models \Sigma$. Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \models \varphi \to \psi(x_1,\dots,x_n)$, adică

$\mathcal{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi \to \psi(x_1,\dots,x_n))$.

Fie $a_1,\dots,a_n \in A$; arătăm că $\mathcal{A} \models \varphi \to \psi(a_1,\dots,a_n)$.

Aceasta este echivalent cu

$\mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1,\dots,a_n)$.

Presupunem $\mathcal{A} \models \varphi$, de unde $\mathcal{A} \models \Sigma \cup \{\varphi\}$. Cf. ipotezei, $\mathcal{A} \models \psi(x_1,\dots,x_n)$, deci $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\dots,a_n)$.

<u>Obs</u>. Implicația $\Rightarrow$ este adevărată pt. cazul când φ este o formulă arbitrară.

Implicația $\Leftarrow$ nu este adevărată în general.

$\emptyset \cup \{x=y\} \models x=z$: pt. că $\mathcal{A} \models x=y \Rightarrow \mathcal{A} \models x=z$.

Nu avem însă $\emptyset \models x = y \rightarrow x = z$. Într-adevăr, dacă ar fi așa am avea

$\mathcal{A} \models x = y \Rightarrow x = z$ pt. orice structură $\mathcal{A}$. Atunci $\mathcal{A} \models \forall x \forall y \forall z\,(x = y \rightarrow x = z)$ ceea ce nu este adevărat.

Exercițiul 1.

(1) $$\frac{\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi}{\Sigma \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi}$$

(2) $$\frac{\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi}{\Sigma \models \exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi}$$

(3) $$\frac{\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi}{\Sigma \models \forall x \varphi \leftrightarrow \forall x \psi}$$

(4) $$\frac{\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi}{\Sigma \models \exists x \varphi \leftrightarrow \exists x \psi}$$

Exercițiul 2. Fie $C_S(\Sigma) = \{\varphi \mid \varphi \text{ formulă}, \Sigma \models \varphi\}$. Atunci, pt. orice formulă α:

$\Sigma \models \alpha \iff C_S(\Sigma) \models \alpha$.

§3. Exemple de enunțuri universal adevărate

In acest paragraf vom prezenta o listă de enunțuri universal adevărate, precum și unele enunțuri ce nu sunt universal adevărate. Interpretările vor fi luate într-o structură $\mathcal{A}$ (oarecare, dar fixată)

① $\boxed{\models \forall x(\varphi(x)\to\psi(x))\to(\forall x\,\varphi(x)\to\forall x\,\psi(x))}$

Următoarele afirmații sunt echivalente:

- $\|\forall x(\varphi(x)\to\psi(x))\to(\forall x\,\varphi(x)\to\forall x\psi(x))\|=1$
- $\|\forall x(\varphi(x)\to\psi(x))\|\to(\|\forall x\varphi(x)\|\to\|\forall x\,\psi(x)\|)=1$
- $\|\forall x(\varphi(x)\to\psi(x))\|\leq\|\forall x\varphi(x)\|\to\|\forall x\,\psi(x)\|$
- $\|\forall x(\varphi(x)\to\psi(x)\|\wedge\|\forall x\varphi(x)\|\leq\|\forall x\,\psi(x)\|$
- $\bigwedge\limits_{a\in A}\|\varphi(a)\to\psi(a)\|\wedge\bigwedge\limits_{a\in A}\|\varphi(a)\|\leq\bigwedge\limits_{a\in A}\|\psi(a)\|$
- $\bigwedge\limits_{a\in A}(\|\varphi(a)\|\wedge(\|\varphi(a)\|\to\|\psi(a)\|))\leq\bigwedge\limits_{a\in A}\|\psi(a)\|$.

Pt. a stabili această ultimă inegalitate este suficient să arătăm că pt. orice $a\in A$ avem

$$\|\varphi(a)\|\wedge(\|\varphi(a)\|\to\|\psi(a)\|)\leq\|\psi(a)\|.$$

Ori, în orice algebră Boole avem: $\alpha\wedge(\alpha\to\beta)=\alpha\wedge\beta\leq\beta$.

② $\boxed{\not\models(\forall x\,\varphi(x)\to\forall x\psi(x))\to\forall x(\varphi(x)\to\psi(x))}$

Considerăm un limbaj cu un singur predicat $<$ și cu două constante $2, 3$.

Fie structura corespunzătoare $\mathcal{A}=\langle\{1,2,\dots,n,\dots\},<\rangle$ și formulele

$\varphi(x):\quad x=2$

$\psi(x):\quad x\geqslant 3$ $\qquad$ [$x\geqslant 3$ este abrevierea lui $\neg(x<3)$]

Considerând interpretări în structura $\mathcal{A}$ menționată avem:

$\|\forall x\;\varphi(x)\to\forall x\,\psi(x)\|=\|\forall x\varphi(x)\|\to\|\forall x\psi(x)\|=$

$$=\left(\bigwedge_{n=1}^{\infty}\|n=2\|\right)\to\left(\bigwedge_{n=1}^{\infty}\|n\geqslant 3\|\right)=0\to 0=1$$

$$\|\forall x(\varphi(x)\to\psi(x))\|=\bigwedge_{n=1}^{\infty}\|n=2\to n\geqslant 3\|=\bigwedge_{n=1}^{\infty}(\|n=2\|\to\|n\geqslant 3\|)=0.$$

Rezultă

$\|(\forall x\;\varphi(x)\to\forall x\,\psi(x))\to\forall x\,(\varphi(x)\to\psi(x))\|=$

$=\|\forall x\varphi(x)\to\forall x\psi(x)\|\to\|\forall x(\varphi(x)\to\psi(x))\|=1\to 0=0$

(3) $\boxed{\models (\forall x\, \varphi(x) \to \forall x\, \psi(x)) \to \exists x\, (\varphi(x) \to \psi(x))}$

Este echivalent cu a demonstra

$$\left(\bigwedge_{a\in A} \|\varphi(a)\|\right) \to \left(\bigwedge_{b\in A} \|\psi(b)\|\right) \leq \bigvee_{a\in A} (\|\varphi(a)\| \to \|\psi(a)\|)$$

ceea ce este echivalent cu

$$\left(\bigvee_{a\in A} \neg\|\varphi(a)\|\right) \vee \bigwedge_{b\in A} \|\psi(b)\| \leq \bigvee_{a\in A} (\neg\|\varphi(a)\| \vee \|\psi(a)\|)$$

ceea ce este echivalent cu

$$\bigvee_{a\in A} \left[\neg\|\varphi(a)\| \vee \bigwedge_{b\in A} \|\psi(b)\|\right] \leq \bigvee_{a\in A} (\neg\|\varphi(a)\| \vee \|\psi(a)\|)$$

Această din urmă inegalitate este evidentă.

(4) $\boxed{\not\models \exists x\, (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\, \varphi(x) \to \forall x\, \psi(x))}$

Considerăm limbajul cu un singur predicat binar $<$ și cu constantele $1, 2$.

Luăm tot structura $\mathcal{A} = \langle \{1, 2, \dots, n, \dots\}, <, 1, 2 \rangle$ și formulele

$\varphi(x) : x \geq 1$

$\psi(x) : x = 2$

$$\|\exists x\, (\varphi(x) \to \psi(x))\| = \bigvee_{n\geq 1} (\|n \geq 1\| \to \|n = 2\|) = 1$$

$$\|\forall x\, \varphi(x)\| = \bigwedge_{n} \|n \geq 1\| = 1 \quad ; \quad \|\forall x\, \psi(x)\| = \bigwedge_{n} \|n = 2\| = 0$$

$$\|\forall x\, \varphi(x) \to \forall x\, \psi(x)\| = \|\forall x\, \varphi(x)\| \to \|\forall x\, \psi(x)\| = 1 \to 0 = 0$$

$$\|\exists x\, (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\, \varphi(x) \to \forall x\, \psi(x))\| =$$

$$= \|\exists x\, (\varphi(x) \to \psi(x))\| \to \|\forall x\, \varphi(x) \to \forall x\, \psi(x)\| = 1 \to 0 = 0.$$

(5) $\boxed{\models (\exists x\, \varphi(x) \to \exists x\, \psi(x)) \to \exists x\, (\varphi(x) \to \psi(x))}$

$$\|\exists x\, \varphi(x) \to \exists x\, \psi(x)\| = \left(\bigvee_{a\in A} \|\varphi(a)\|\right) \to \left(\bigvee_{b\in A} \|\psi(b)\|\right) =$$

$$= \left(\bigwedge_{a\in A} \neg\|\varphi(a)\|\right) \vee \bigvee_{b\in A} \|\psi(b)\| = \bigvee_{b\in A} \left[\left(\bigwedge_{a\in A} \neg\|\varphi(a)\|\right) \vee \|\psi(b)\|\right] \leq$$

$$\leq \bigvee_{b\in A} (\neg\|\varphi(b)\| \vee \|\psi(b)\|) = \|\exists x\, (\varphi(x) \to \psi(x))\|.$$

(6) $\boxed{\not\models \exists x\, (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\exists x\, \varphi(x) \to \exists x\, \psi(x))}$

Considerăm limbajul ce are o operație binară +, un predicat binar < și o constantă 1.

Structura este $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}^*, +, <, 1 \rangle$ iar formulele :

$\varphi(x)$: $\exists y (x = y + y)$: x este par

$\psi(x)$: $x < 1$.

$$\| \exists x (\varphi(x) \to \psi(x)) \| = \bigvee_{n} (\neg \| n \text{ este par} \| \vee \| n < 1 \|) = 1$$

$$\| \exists x \varphi(x) \to \exists x \psi(x) \| = \| \exists x (x \text{ este par}) \| \to \| \exists x (x < 1) \| = 1 \to 0 = 0$$

$$\| \exists x (\varphi(x) \to \psi(x)) \| \to \| \exists x \varphi(x) \to \exists x \psi(x) \| = 1 \to 0 = 0.$$

(7) $\boxed{\models \exists x (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to (\forall x \varphi(x) \to \exists x \psi(x))}$

Următoarele afirmații sunt echivalente :

- $\| \exists x (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to (\forall x \varphi(x) \to \exists x \psi(x)) \| = 1$
- $\| \exists x (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \| \leq \| \forall x \varphi(x) \| \to \| \exists x \psi(x) \|$
- $\| \forall x \varphi(x) \| \wedge \| \exists x (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \| \leq \| \exists x \psi(x) \|$

Demonstrăm ultima inegalitate :

$$\| \forall x \varphi(x) \| \wedge \| \exists x (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \| = \bigwedge_{a \in A} \| \varphi(a) \| \wedge \left[\bigvee_{b \in A} (\| \varphi(b) \| \leftrightarrow \| \psi(b) \|) \right] =$$

$$= \bigvee_{b \in A} \left[\left(\bigwedge_{a \in A} \| \varphi(a) \| \right) \wedge (\| \varphi(b) \| \leftrightarrow \| \psi(b) \|) \right] \leq$$

$$\leq \bigvee_{b \in A} \left[\| \varphi(b) \| \wedge (\| \varphi(b) \| \to \| \psi(b) \|) \right] = \bigvee_{b \in A} (\| \varphi(b) \| \wedge \| \psi(b) \|) \leq$$

$$\leq \bigvee_{b \in A} \| \psi(b) \| = \| \exists x \psi(x) \|.$$

(8) $\boxed{\not\models (\forall x \varphi(x) \to \exists x \psi(x)) \to \exists x (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))}$

Fie L limbajul egalității îmbogățit cu constantele 1, 2 și $\mathcal{A} = \mathbb{N}$. Considerăm formulele :

$\varphi(x)$: $x = 1$

$\psi(x)$: $x = 2$

$$\| \forall x (x = 1) \to \exists x (x = 2) \| = \| \forall x (x = 1) \| \to \| \exists x (x = 2) \| = 0 \to 1 = 1$$

$$\| \exists x (x = 1 \leftrightarrow x = 2) \| = 0$$

(9) $\boxed{\models (\forall x\, \varphi(x) \vee \forall x\, \psi(x)) \to \forall x\, (\varphi(x) \vee \psi(x))}$

$$\| \forall x\, \varphi(x) \vee \forall x\, \psi(x) \| = \| \forall x\, \varphi(x) \| \vee \| \forall x\, \psi(x) \| =$$

$$= \Big(\bigwedge_{a \in A} \| \varphi(a) \| \Big) \vee \Big(\bigwedge_{b \in A} \| \psi(b) \| \Big) = \bigwedge_{a, b \in A} \big(\| \varphi(a) \| \vee \| \psi(b) \| \big) \leq$$

$$\leq \bigwedge_{a \in A} \big(\| \varphi(a) \| \vee \| \psi(a) \| \big) = \| \forall x\, (\varphi(x) \vee \psi(x)) \|.$$

(10) $\boxed{\not\models \forall x\, (\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\forall x\, \varphi(x) \vee \forall x\, \psi(x))}$

Se consideră un limbaj cu o operație binară $+$. $\mathcal{A}$ este $(\mathbb{N}, +)$. Se consideră formulele

$\varphi(x)$: $x = 2x$ (2x este termenul $x + x$)

$\psi(x)$: $\neg (x = 2x)$

$$\| \forall x\, [(x = 2x) \vee (x \neq 2x)] \| = 1$$

$$\| \forall x\, (x = 2x) \| = 0, \quad \| \forall x\, (x \neq 2x) \| = 0$$

Deci

$$\| \forall x\, [(x = 2x) \vee (x \neq 2x)] \to [\forall x\, (x = 2x) \vee \forall x\, (x \neq 2x)] \| = 1 \to (0 \vee 0) = 1 \to 0 = 0.$$

(11) $\boxed{\models \forall x\, (\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\exists x\, \varphi(x) \vee \forall x\, \psi(x))}$

$$\| \forall x\, (\varphi(x) \vee \psi(x)) \| = \bigwedge_{a \in A} (\| \varphi(a) \| \wedge \| \psi(a) \| \leq \bigwedge_{a \in A} \Big[\bigvee_{b \in A} (\| \varphi(b) \| \wedge \| \psi(a) \|) \Big] =$$

$$= \bigwedge_{a \in A} \Big[\Big(\bigvee_{b \in A} \| \varphi(b) \| \Big) \wedge \| \psi(a) \| \Big] = \Big(\bigvee_{b \in A} \| \varphi(b) \| \Big) \vee \Big(\bigwedge_{a \in A} \| \psi(a) \| \Big) =$$

$$= \| \exists x\, \varphi(x) \| \vee \| \forall x\, \psi(x) \| = \| \exists x\, \varphi(x) \vee \forall x\, \psi(x) \|.$$

(12) $\boxed{\not\models \exists x\, \varphi(x) \vee \forall x\, \psi(x) \to \forall x\, (\varphi(x) \vee \psi(x))}$

Luăm un limbaj cu un predicat binar $<$ și cu două constante $2, 3$. $\mathcal{A}$ va fi $\langle \mathbb{N}, <, 2, 3 \rangle$.

$$\| \exists x\, (x = 2) \vee \forall x\, (x < 3) \| = \| \exists x\, (x = 2) \| \vee \| \forall x\, (x < 3) \| = 1 \vee 0 = 1$$

$$\| \forall x\, [(x = 2) \vee (x < 3)] \| = 0$$

Rezultă

$$\not\models \big(\exists x\, (x = 2) \vee \forall x\, (x < 3) \big) \to \forall x\, \big((x = 2) \vee (x < 3) \big)$$

(13) $\models \exists x\, (\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x\, \varphi(x) \vee \exists x\, \psi(x))$

(14) $\boxed{\models \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to (\exists x \varphi(x) \wedge \exists x \psi(x))}$

(15) $\boxed{\not\models (\exists x \varphi(x) \wedge \exists x \psi(x)) \to \exists x (\varphi(x) \wedge \psi(x))}$

$$\not\models (\exists x(x=2) \wedge \exists x(x=3)) \to \exists x((x=2) \wedge (x=3))$$

(se ia limbajul egalității îmbogățit cu două constante 2, 3 și $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, 2, 3 \rangle$).

(16) $\boxed{\models \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \forall x \varphi(x) \wedge \exists x \psi(x)}$

Revine la inegalitatea

$$\bigwedge_{a \in A} (\|\varphi(a)\| \wedge \|\psi(a)\|) \leq \left(\bigwedge_{a \in A} \|\varphi(a)\|\right) \wedge \left(\bigvee_{b \in A} \|\psi(b)\|\right) = \bigwedge_{a \in A} \left(\|\varphi(a)\| \wedge \bigvee_{b \in A} \|\psi(b)\|\right).$$

(17) $\boxed{\not\models (\forall x \varphi(x) \wedge \exists x \psi(x)) \to \forall x (\varphi(x) \wedge \psi(x))}$

Se consideră un limbaj cu un predicat binar $<$ și cu constantele 2, 3.

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}^*, <, 2, 3 \rangle$

$$\not\models (\forall x (x \geq 1) \wedge \exists x (x=2)) \to \forall x [(x \geq 1) \wedge (x=2)]$$

(18) $\boxed{\models \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x \varphi(x) \wedge \forall x \psi(x))}$

(19) $\boxed{\models \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m [\varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi(y_1, \ldots, y_m)] \leftrightarrow [\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \forall y_1 \ldots \forall y_m \psi(y_1, \ldots, y_m)]}$

(20) $\boxed{\models \exists x_1 \ldots \exists x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m [\varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi(y_1, \ldots, y_m)] \leftrightarrow [\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \exists y_1 \ldots \exists y_m \psi(y_1, \ldots, y_m)]}$

(21) $\boxed{\models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m [\varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi(y_1, \ldots, y_m)] \leftrightarrow [\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \exists y_1 \ldots \exists y_m \psi(y_1, \ldots, y_m)]}$

(22) $\boxed{\models \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m [\varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi(y_1, \ldots, y_m)] \leftrightarrow [\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \forall y_1 \ldots \forall y_m \psi(y_1, \ldots, y_m)]}$

§4. Sintaxa calculului cu predicate

In §1, unei clase de structuri de acelaşi tip i s-a asociat un limbaj formal L. Formulele lui L sunt expresia simbolică a proprietăţilor de ordinul I ale structurilor considerate.

Vom construi în continuare mecanismul inferenţial al limbajului L: axiome, reguli de deducţie, teoreme formale şi deducţie formală.

Axiomele calculului cu predicate sunt:

A0: axiomele calculului propoziţional

A1: $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$, dacă $x \notin FV(\varphi)$

A2: $\forall x\, \varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \to \varphi(t, y_1, \ldots, y_n)$, t = termen

A3: $x = x$

A4: $x = y \to (t(v_1 \ldots x \ldots v_n) = t(v_1 \ldots y \ldots v_n))$

A5: $x = y \to (\varphi(v_1 \ldots x \ldots v_n) \to \varphi(v_1 \ldots y \ldots v_n))$

(A3)-(A5) se numesc axiomele egalităţii.

Calculul cu predicate are două reguli de deducţie:

$$\frac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta} \quad : \text{m.p.}$$

$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi} \quad : \text{generalizarea (G)}$$

Teoremele formale ale lui L se definesc prin inducţie

- axiomele sunt teoreme formale
- dacă $\alpha, \alpha \to \beta$ sunt teoreme formale atunci β este teoremă formală (m.p.)
- dacă φ este teoremă formală atunci $\forall x \varphi$ este teoremă formală (G)

Aşadar teoremele formale se obţin plecând de la axiome şi aplicând de un număr finit de ori m.p sau G.

Notaţie $\vdash \varphi$: formula φ este teoremă formală.

Pt. comoditate vom spune teoremă în loc de teoremă formală.

O demonstraţie formală este un şir de formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ astfel încât pt. orice $1 \le i \le n$ avem una din situaţiile:

- φ_i este axiomă
- există $j, k < i$ astfel încât $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i$
- există $j < i$ astfel încât $\varphi_i = \forall x \varphi_j$.

Spunem în acest caz că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o demonstraţie formală a lui φ_n.

Este evident că

$\vdash \varphi \iff \varphi$ admite o demonstrație formală

Obs. Axiomele calculului propozițional și regula de deducție modus ponens sunt prezente și la calculul cu predicate. Atunci orice teoremă formală a calculului propozițional va fi și teoremă formală a calculului cu predicate.

Prop. 1. $\vdash \forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall y \forall x\, \varphi(x,y)$

Dem. Scriem demonstrația formală a formulei de mai sus:

$\vdash \forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall y\, \varphi(x,y)$	(A2)
$\vdash \forall y\, \varphi(x,y) \to \varphi(x,y)$	(A2)
$\vdash \forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \varphi(x,y)$	calc. prop.
$\vdash \forall x\, (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \varphi(x,y))$	(G)
$\vdash \forall x\, (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \varphi(x,y)) \to (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall x\, \varphi(x,y))$	(A1)
$\vdash \forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall x\, \varphi(x,y)$	m.p.
$\vdash \forall y\, (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall x\, \varphi(x,y))$	(G)
$\vdash \forall y\, (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall x\, \varphi(x,y)) \to (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall y \forall x\, \varphi(x,y))$	(A1)
$\vdash \forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall y \forall x\, \varphi(x,y)$	m.p.

Prop. 2. $\vdash \forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$

Dem.

1)	$\vdash \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, (\varphi \to \psi) \to \forall x\, \varphi$	calc. prop.
2)	$\vdash \forall x\, \varphi \to \varphi$	(A2)
3)	$\vdash \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, (\varphi \to \psi) \to \varphi$	calc. prop.
4)	$\vdash \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$	analog cu (3)
5)	$\vdash \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, (\varphi \to \psi) \to \psi$	(3), (4) + calc. prop.
6)	$\vdash \forall x\, [\forall x\, \varphi \wedge \forall x\, (\varphi \to \psi) \to \psi]$	(G)
7)	$\vdash \forall x\, [\forall x\, \varphi \wedge \forall x\, (\varphi \to \psi) \to \psi] \to [\forall x\, \varphi \wedge \forall x\, (\varphi \to \psi) \to \forall x\, \psi]$	(A1)
8)	$\vdash \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, (\varphi \to \psi) \to \forall x\, \psi$	(m.p.), (6), (7)
9)	$\vdash [\forall x\, \varphi \wedge \forall x\, (\varphi \to \psi) \to \forall x\, \psi] \to [\forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)]$	calc. prop.
10)	$\vdash \forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$	

Prop. 3 $\vdash \forall x\, \varphi \leftrightarrow \neg \exists x \neg \varphi$

Dem. $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ calc. prop.

$\vdash \forall x(\varphi \to \neg\neg\varphi)$ (G)

$\vdash \forall x(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\neg\neg\varphi)$ Prop. 2

$\vdash \forall x\varphi \to \forall x\neg\neg\varphi$ m.p.

$\vdash \forall x\neg\neg\varphi \to \forall x\varphi$ analog

$\vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\neg\varphi$ din ultimele două

$\vdash \forall x\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\forall x\neg\neg\varphi$ calc. prop.

$\vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \neg\neg\forall x\neg\neg\varphi$ din ultimele două

Prin definiție, $\neg\exists x\neg\varphi$ este chiar $\neg\neg\forall x\neg\neg\varphi$.

Prop. 5. $\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$

Dem. $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi)$ calc. prop.

$\vdash \forall x[(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi)]$ (G)

$\vdash \forall x[(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi)] \to [\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)]$ Prop. 2

$\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$ m.p.

$\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ Prop. 2

$\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ m.p.

$\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\psi \to \forall x\varphi)$ analog

$\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi) \wedge (\forall x\psi \to \forall x\varphi)$ din ultimele două

care este exact ce trebuia demonstrat

Prop. 6. $\vdash (\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$, dacă $x \notin FV(\varphi)$

Dem.

$\vdash (\varphi \to \forall x\psi) \wedge \varphi \to \forall x\psi$: calc. prop.

$\vdash \forall x\psi \to \psi$ (A2)

$\vdash (\varphi \to \forall x\psi) \wedge \varphi \to \psi$ m.p.

$\vdash (\varphi \to \forall x\psi) \to (\varphi \to \psi)$ calc. prop.

$\vdash \forall x[(\varphi \to \forall x\psi) \to (\varphi \to \psi)]$ (G)

$\vdash \forall x[(\varphi \to \forall x\psi) \to (\varphi \to \psi)] \to [(\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)]$ (A1)

$\vdash (\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$ m.p.

Prop. 7 $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \to \psi)$, dacă $x \notin FV(\psi)$

Dem

(1) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ calc. prop.

(2) $\vdash \forall x[(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)]$ (G)

(3) $\vdash \forall x[(\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\neg\varphi)]\to[\forall x(\varphi\to\psi)\to\forall x(\neg\psi\to\neg\varphi)]$ Prop. 2

(4) $\vdash \forall x(\varphi\to\psi)\to\forall x(\neg\psi\to\neg\varphi)$ m. p.

(5) $\vdash \forall x(\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\neg\psi\to\forall x\neg\varphi)$ (A_1)

(6) $\vdash \forall x(\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\forall x\neg\varphi)$ din (4),(5), calc. prop.

(7) $\vdash (\neg\psi\to\forall x\neg\varphi)\to(\neg\forall x\neg\varphi\to\neg\neg\psi)$ calc. prop.

(8) $\vdash \forall x(\varphi\to\psi)\to(\neg\forall x\neg\varphi\to\neg\neg\psi)$ din (6),(7)

(9) $\vdash \forall x(\varphi\to\psi)\wedge\exists x\varphi\to\neg\neg\psi$ din (8)

(10) $\vdash \neg\neg\psi\to\psi$

(11) $\vdash \forall x(\varphi\to\psi)\wedge\exists x\varphi\to\psi$ din (10)

(12) $\vdash \forall x(\varphi\to\psi)\to(\exists x\varphi\to\psi)$ din (11)

(13) $\vdash (\exists x\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\forall x\neg\varphi)$ cal. prop + def. lui $\exists x\varphi$

(14) $\vdash (\exists x\varphi\to\psi)\wedge\neg\psi\to\forall x\neg\varphi$ calc. prop.

(15) $\vdash \forall x\neg\varphi\to\neg\varphi$ (A_2)

(16) $\vdash (\exists x\varphi\to\psi)\wedge\neg\psi\to\neg\varphi$ calc. prop.

(17) $\vdash (\exists x\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\neg\varphi)$ calc. prop.

(18) $\vdash (\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\varphi\to\psi)$

(19) $\vdash (\exists x\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\psi)$ din (17), (18)

(20) $\vdash \forall x[(\exists x\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\psi)]\to[(\exists x\varphi\to\psi)\to\forall x(\varphi\to\psi)]$ (A_1)

(21) $\vdash \forall x[(\exists x\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\psi)]$ din (19), prin (G)

(22) $\vdash (\exists x\varphi\to\psi)\to\forall x(\varphi\to\psi)$ m. p.

Din (12), (22) rezultă Prop. 7

<u>Corolar 8</u> $\vdash \forall x(\varphi\to\exists x\psi)\leftrightarrow(\exists x\varphi\to\exists x\psi)$

$\vdash \forall x(\varphi\to\forall x\psi)\leftrightarrow(\exists x\varphi\to\forall x\psi)$

<u>Dem.</u> Din Prop. 8, pt. că x nu apare liberă în $\exists x\psi$ și $\forall x\psi$.

Prop. 9. $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi)$

Dem.

(1)	$\vdash \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \to \forall x \varphi$	calc. prop.
(2)	$\vdash \forall x \varphi \to \varphi$	(A2)
(3)	$\vdash \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \to \varphi$	(1), (2)
(4)	$\vdash \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \to \psi$	analog
(5)	$\vdash \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \to \varphi \wedge \psi$	calc. prop.
(6)	$\vdash \forall x [\forall x \varphi \wedge \forall x \psi \to \varphi \wedge \psi]$	(G)
(7)	$\vdash \forall x [\forall x \varphi \wedge \forall x \psi \to \varphi \wedge \psi] \to [\forall x \varphi \wedge \forall x \psi \to \forall x(\varphi \wedge \psi)]$	(A1)
(8)	$\vdash \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \to \forall x(\varphi \wedge \psi)$	m. p.
(9)	$\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge \psi$	calc. prop.
(10)	$\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$	
(11)	$\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	din (9), (10)
(12)	$\vdash \forall x [\forall x(\varphi \wedge \psi) \to \varphi]$	(G)
(13)	$\vdash \forall x [\forall x(\varphi \wedge \psi) \to \varphi] \to (\forall x(\varphi \wedge \psi) \to \forall x \varphi]$	(A1)
(14)	$\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \to \forall x \varphi$	m. p.
(15)	$\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \to \forall x \psi$	analog
(16)	$\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \to (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi)$	(14), (15)

Din (8), (16) rezultă Prop. 9.

Prop. 9 $\vdash \varphi(t) \to \exists x \varphi(x)$

Dem.

$\vdash \forall x \neg \varphi(x) \to \neg \varphi(t)$: A2

$\vdash \neg\neg \varphi(t) \to \neg \forall x \neg \varphi(x)$: calc. prop.

$\vdash \varphi(t) \to \neg\neg \varphi(t)$: calc. prop

$\vdash \varphi(t) \to \neg \forall x \neg \varphi(t)$: calc. prop.

Prop. 10 (i) $\vdash x = y \to y = x$

(ii) $\vdash (x = y) \wedge (y = z) \to x = z$

(iii) $\vdash x = y \to (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y))$

Dem. (i)

$\vdash x = y \to (x = z \to y = z)$: A5

$\vdash x = z \to (x = y \to y = z)$: calc. prop.

$\vdash x = x \to (x = y \to y = x)$: luând mai sus $z = x$

$\vdash x = x$: A3

$\vdash x = y \to y = x$: m. p.

(ii)

$\vdash x = y \to y = x$ (i)

$\vdash y = x \to (y = z \to x = z)$ (A3)

$\vdash x = y \to (y = z \to x = z)$ calc. prop.

$\vdash (x = y) \wedge (y = z) \to x = z$ calc. prop.

(iii)

$\vdash x = y \to y = x$ (i)

$\vdash y = x \to (\varphi(y) \to \varphi(x))$ (A5)

$\vdash x = y \to (\varphi(y) \to \varphi(x))$ calc. prop.

$\vdash x = y \to (\varphi(x) \to \varphi(y))$ A5

$\vdash x = y \to [(\varphi(x) \to \varphi(y)) \wedge (\varphi(y) \to \varphi(x))]$ calc. prop.

Prop. 10. $\vdash \forall x\, \varphi(x) \to \exists x\, \varphi(x)$

Dem. $\vdash \forall x\, \varphi(x) \to \varphi(x)$: A3

$\vdash \varphi(x) \to \exists x\, \varphi(x)$: Prop. 9

$\vdash \forall x\, \varphi(x) \to \exists x\, \varphi(x)$: calc. prop.

Prop. 11. $\vdash \forall x \exists y\, (x = y)$

Dem. $\vdash x = y \to \exists y\, (x = y)$: Prop. 9

$\vdash x = x \to \exists y\, (x = y)$: punând în loc de y termenul x.

$\vdash x = x$: A3

$\vdash \exists y\, (x = y)$: m. p.

Prop. 12. $\vdash \forall x \forall y \exists z\, [(x = z) \wedge (z = y)]$

Dem. $\vdash (x = z) \wedge (z = y) \to \exists z\, [(x = z) \wedge (z = y)]$: Prop. 9

$\vdash (z = z) \wedge (z = z) \to \exists z\, [(x = z) \wedge (z = y)]$: luăm termenul z

$\vdash (z = z) \wedge (z = z)$

$\vdash \exists z\, [(x = z) \wedge (z = y)]$

Prop. 13. $\dfrac{\varphi \to \psi}{\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi}$

Dem. Din Prop. 2.

Prop. 14. $\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \exists x\psi}$

Dem. $\vdash \varphi \to \psi$

$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$: calc. prop.

$\vdash \forall x\neg\psi \to \forall x\neg\varphi$: Prop. 13

$\vdash \neg\forall x\neg\varphi \to \neg\forall x\neg\psi$: calc. prop.

Ultima este chiar $\vdash \exists x\varphi \to \exists x\psi$.

Fie Σ o mulțime de formule și φ o formulă. Spunem că φ se deduce (sintactic) din ipotezele Σ dacă una din următoarele clauze este verificată

(a) φ este axiomă

(b) $\varphi \in \Sigma$

(c) există o formulă ψ astfel încît $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ $\left(\dfrac{\Sigma \vdash \psi, \psi \to \varphi}{\Sigma \vdash \varphi} \quad m.p. \right)$

(d) există ψ astfel încît $\Sigma \vdash \psi$ și $\varphi = \forall x\psi$ $\left(\dfrac{\Sigma \vdash \psi}{\Sigma \vdash \forall x\psi} \quad (G) \right)$

Obs. $\emptyset \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi$

Dacă $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ este o formulă atunci $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ se numește închiderea sa universală.

Prop. 15. $\Sigma \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Dem. ($\Rightarrow$) Se aplică (G) de n ori

($\Leftarrow$) $\Sigma \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \to \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$

$\Sigma \vdash \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \to \forall x_3 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$

. . . .

$\Sigma \vdash \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \to \varphi(x_1, \dots, x_n)$

Conf. calc. prop. rezultă $\Sigma \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \to \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Atunci

$\Sigma \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$: prin ipoteză

$\Sigma \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \to \varphi(x_1, \dots, x_n)$: mai sus

$\Sigma \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n)$: m. p.

Prop. 16. (a) $\Sigma \vdash \varphi$, $\Sigma \subseteq \Delta \Rightarrow \Delta \vdash \varphi$

(b) $\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow$ există $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finită, $\Sigma_0 \vdash \varphi$

Dem. Prin inducție după φ.

Prop. 17 (th. deducției). Fie Σ o mulțime de formule, φ enunț, și ψ formulă.

$\Sigma \vdash \varphi \to \psi \Longleftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Dem. ($\Rightarrow$): Aplicînd Prop. 16, (a) și m. p.

($\Leftarrow$) Prin inducție asupra modului cum este definit $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Totul decurge ca în cazul calculului propozițional, adăugându-se situația: $\psi = \forall x \alpha$, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$.

$$\begin{aligned}
\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha &\Rightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \alpha && : \text{ip. ind.}\\
&\Rightarrow \Sigma \vdash \forall x(\varphi \to \alpha) && : (G)\\
&\Rightarrow \Sigma \vdash \forall x(\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \forall x \alpha) && : (A_4),\ \varphi \text{ fiind enunț}\\
&\Rightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \forall x \alpha && : \text{m.p.}\\
&\Rightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \psi
\end{aligned}$$

O mulțime Σ de formule se numește <u>inconsistentă</u> dacă $\Sigma \vdash \varphi$ pt. orice formulă φ. În caz contrar, Σ se numește <u>consistentă</u>.

<u>Prop. 18</u>. Sunt echivalente următoarele afirmații:

(1) Σ este inconsistentă

(2) Există o formulă φ astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$

(3) Există o formulă φ astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg\varphi$

(4) Pt. orice formulă φ, $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$

(5) Există o formulă φ, $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.

<u>Prop. 19</u>. (a) $\Sigma \cup \{\varphi\}$ inconsistentă $\Leftrightarrow \Sigma \vdash \neg\varphi$

(b) $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ inconsistentă $\Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$.

O mulțime Δ se numește <u>maximal consistentă</u> dacă este un element maximal în mulțimea părților consistente ale lui L (ordonată de incluziune).

<u>Prop. 20</u>. Orice mulțime consistentă se scufundă într-o mulțime maximal consistentă.

<u>Prop. 21</u>. Fie Σ maximal consistentă.

(1) $\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma$;

(2) $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \psi$

(3) Pt. orice formulă φ, avem $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

<u>Obs</u>. Pt. orice Σ avem: $\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \psi$.

<u>Prop. 22</u>. Dacă Σ este consistentă atunci sunt echivalente:

(1) Σ este maximal consistentă

(2) Pt. orice φ, ψ, $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \psi$

(3) Pt. orice φ, $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

5. Algebra Lindenbaum-Tarski a calculului cu predicate

Fie Form(L) mulțimea formulelor lui L. Următoarea relație binară ~ pe Form(L):

$$\varphi \sim \psi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$
$$\iff \begin{cases} \vdash \varphi \to \psi \\ \vdash \psi \to \varphi \end{cases}$$

este o relație de echivalență (exact ca la calculul propozițional). Fie $B = Form(L)/\sim$ mulțimea cât; pt. $\varphi \in Form(L)$ notăm cu $\hat{\varphi}$ clasa sa de echivalență. Notând

$$\hat{\varphi} \vee \hat{\psi} = \widehat{\varphi \vee \psi}\ ;\ \hat{\varphi} \wedge \hat{\psi} = \widehat{\varphi \wedge \psi}\ ;\ \neg \hat{\varphi} = \widehat{\neg \varphi}$$

$$0 = \widehat{\varphi \wedge \neg \varphi}\ ;\ 1 = \widehat{\varphi \vee \neg \varphi} \quad \text{(definiție nu depinde de } \varphi)$$

$(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ are o structură de algebră Boole: alg. Lindenbaum-Tarski a lui L.

De la calculul prop. mai amintim

- $\vdash \varphi \to \psi \iff \hat{\varphi} \leq \hat{\psi}$
- $\vdash \varphi \iff \hat{\varphi} = 1$.

Considerăm funcția surjectivă $p : Form(L) \to B$, $p(\varphi) = \hat{\varphi}$ pt. orice $\varphi \in Form(L)$. Funcția p are proprietățile următoare:

- $p(\varphi \vee \psi) = p(\varphi) \vee p(\psi)$; $p(\varphi \wedge \psi) = p(\varphi) \wedge p(\psi)$; $p(\neg \varphi) = \neg p(\varphi)$
- $p(\varphi \to \psi) = p(\varphi) \to p(\psi)$; $p(\varphi \leftrightarrow \psi) = p(\varphi) \leftrightarrow p(\psi)$
- $p(\varphi) \leq p(\psi) \iff \vdash \varphi \to \psi$;
- $p(\varphi) = 1 \iff \vdash \varphi$.

Funcția p duce operațiile logice în operații booleene. În mod natural se pune problema care este comportarea funcției p față de cuantificatori.

Prop. 1. $\widehat{\forall x \varphi} = \bigwedge_{v \in V} \widehat{\varphi(v)}$; $\widehat{\exists x \varphi} = \bigvee_{v \in V} \widehat{\varphi(v)}$.

Dem. A proba prima formulă este echivalent cu

(a) $\widehat{\forall x \varphi} \leq \widehat{\varphi(v)}$, pt. orice $v \in V$;

(b) dacă $\hat{\psi} \leq \widehat{\varphi(v)}$ pt. orice $v \in V$ atunci $\hat{\psi} \leq \widehat{\forall x \varphi}$.

Prima relație rezultă folosind axioma (A_2): $\vdash \forall x \varphi \to \varphi(v)$ pt. orice $v \in V$.

(b) Presup. $\hat{\psi} \leq \widehat{\varphi(v)}$, $v \in V$, deci $\vdash \psi \to \varphi(v)$, $v \in V$. Alegem o variabilă v ce nu apare în ψ sau $\forall x \varphi(x)$.

$\vdash \psi \to \varphi(v)$

$\vdash \forall v(\psi \to \varphi(v))$ (G)

$\vdash \forall v(\psi \to \varphi(v)) \to (\psi \to \forall v\varphi(v))$ (A1)

i) $\vdash \psi \to \forall v \varphi(v)$ m.p.

De asemenea

$\vdash \forall v \varphi(v) \to \varphi(x)$ (A2)

$\vdash \forall x [\forall v \varphi(v) \to \varphi(x)]$ (G)

$\vdash \forall x[\forall v \varphi(v) \to \varphi(x)] \to (\forall v \varphi(v) \to \forall x \varphi(x))$ (A1)

(ii) $\vdash \forall v \varphi(v) \to \forall x \varphi(x)$ m.p.

Din (i), (ii) rezultă $\vdash \psi \to \forall x \varphi(x)$, adică $\hat{\psi} \leq \widehat{\forall x \varphi(x)}$ [$\forall x \varphi(x)$ este φ]

A doua relație rezultă din prima folosind egalitățile lui de Morgan:

$$\widehat{\exists x \varphi} = \neg \widehat{\forall x \neg \varphi} = \neg \widehat{\forall x \neg \varphi} = \neg \bigwedge_{v \in V} \widehat{\neg\varphi(v)} = \bigvee_{v \in V} \widehat{\varphi(v)}.$$

<u>Obs</u>. Folosind funcția p egalitățile din prop. precedentă se scriu:

$$p(\forall x \varphi) = \bigwedge_{v \in V} p(\varphi(v)) \; ; \; p(\exists x \varphi) = \bigvee_{v \in V} p(\varphi(v)).$$

Notăm cu $Sent(L)$ mulțimea enunțurilor lui L. Atunci

$$Sent(L)/\sim \; = \{\hat{\varphi} \mid \varphi \in Sent(L)\}$$

este o <u>subalgebră Boole</u> a lui $B = Form(L)/\sim$.

O submulțime Σ a lui $Form(L)$ se numește <u>teorie</u> a lui L.

Fie Σ o teorie a lui L. Considerăm relația binară $\sim_\Sigma$ pe $Form(L)$:

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \iff \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$
$$\iff \Sigma \vdash \varphi \to \psi, \; \Sigma \vdash \psi \to \varphi$$

$\sim_\Sigma$ este o relație de echivalență. Fie $B_\Sigma = Form(L)/\sim_\Sigma$; notăm $\varphi/_\Sigma$ clasa de echivalență a lui $\varphi \in Form(L)$. B_Σ devine algebră Boole față de operațiile:

$$\varphi/_\Sigma \vee \psi/_\Sigma = (\varphi \vee \psi)/_\Sigma \; ; \; \varphi/_\Sigma \wedge \psi/_\Sigma = (\varphi \wedge \psi)/_\Sigma \; ;$$

$$\neg(\varphi/_\Sigma) = (\neg\varphi)/_\Sigma \; ; \; 1 = (\varphi \vee \neg\varphi)/_\Sigma \; ; \; 0 = (\varphi \wedge \neg\varphi)/_\Sigma .$$

B_Σ se numește algebra Lindenbaum-Tarski a teoriei Σ.

<u>Obs</u>. $B = B_\emptyset$

Fie $(A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ o algebră Boole. Un <u>cuantificator existențial</u> pe A este o funcție $\exists: A \to A$ astfel încât

- $\exists(0) = 0$;
- $a \leq \exists(a)$;
- $\exists(a \wedge \exists(b)) = \exists(a) \wedge \exists(b)$.

Un <u>cuantificator universal</u> pe A este o funcție $\forall: A \to A$ astfel încât

- $\forall(1) = 1$;
- $\forall(a) \leq a$;
- $\forall(a \vee \forall(b)) = \forall(a) \vee \forall(b)$.

Dacă $\exists$ este un cuantificator existențial atunci $\forall(a) = \neg\exists(\neg a)$ definește un cuantificator universal; dacă $\forall$ este un cuantificator universal atunci $\exists(a) = \neg\forall(\neg a)$ definește un cuantificator existențial.

O <u>algebră monadică</u> este o structură $(A, \exists)$ unde A = alg. Boole și $\exists$ este un cuantificator existențial pe A.

Considerăm alg. Boole $B = Form(L)/\sim$ și x o variabilă. Notăm $\exists_x : B \to B$ funcție

$$\exists_x(\hat{\varphi}) = \widehat{\exists x \varphi} \quad \text{pt. orice } \varphi \in Form(L).$$

<u>Obs.</u> Funcția $\exists_x$ este bine definită: $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \vdash \exists x\varphi \leftrightarrow \exists x\psi$.

<u>Prop. 2.</u> $\exists_x$ este un cuantificator existențial pe B.

<u>Dem.</u> Cele trei relații

- $\exists_x(0) = 0$
- $\hat{\varphi} \leq \exists_x(\hat{\varphi})$
- $\exists_x(\hat{\varphi} \wedge \exists_x(\hat{\psi})) = \exists_x(\hat{\varphi}) \wedge \exists_x(\hat{\psi})$

sunt echivalente cu

- $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (putem lua pe φ = enunț)
- $\vdash \varphi \to \exists x\varphi$
- $\vdash \exists x(\varphi \wedge \exists x\psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$

<u>Obs.</u> Cuantificatorul universal $\forall_x$ asociat lui $\exists_x$ este: $\forall_x(\hat{\varphi}) = \widehat{\forall x\varphi}$.

Fie I o mulțime nevidă. Se numește <u>I-algebră cilindrică</u> o structură

$$\langle A, \{\exists_i : i \in I\}, E: I^2 \to A \rangle$$

unde:

A = algebră Boole

- $\exists_i$ este cuantificator existențial pe A pt. orice $i \in I$;
- $E : I^2 \to A$ se numește <u>egalitate</u> pe A

astfel încît următoarele condiții sunt îndeplinite:

(C1) $\exists_i \circ \exists_j = \exists_j \circ \exists_i$ pt. orice $i, j \in I$;

(C2) $E(i,i) = 1$, $i \in I$;

(C3) $E(i,j) = \exists_k [E(i,k) \wedge E(k,j)]$, pt. $k \neq i, j$;

(C4) $\exists_i [E(i,j) \wedge a] \wedge \exists_i [E(i,j) \wedge \neg a] = 0$, pt. $i \neq j$.

<u>Ex. 1</u>. Fie $E_0 : V \to B$ dată de $E_0(x,y) = \widehat{(x = y)}$ pt. orice $x, y \in V$.

$\langle B, \{\exists_x : x \in V\}, E_0 \rangle$ este o V-algebră cilindrică.

<u>Ex. 2</u>. Fie X, I două mulțimi nevide și $F(X^I, L_2)$ mulțimea funcțiilor $p : X^I \to L_2$.

Pt. $i \in I$ și $p : X^I \to L_2$ definim $\exists_i(p) : X^I \to L_2$ prin

$\exists_i(p)(x) = \bigvee \{ p(y) \mid y \in X^I, y|_{I - \{i\}} = x|_{I-\{i\}} \}$, pt. orice $x \in X^I$.

In felul acesta obținem o funcție $\exists_i : F(X^I, L_2) \to F(X^I, L_2)$. $\exists_i$ este un cuantificator existențial pe alg. Boole $F(X^I, L_2)$.

De asemenea, definim $E_0(i,j) : X^I \to L_2$ prin

$$E_0(i,j)(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x_i = x_j \\ 0, & \text{dacă } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Se obține o funcție $E : I^2 \to F(X^I, L_2) : (i,j) \mapsto E_0(i,j)$.

$\langle F(X^I, L_2), \{\exists_i : i \in I\}, E_0 \rangle$ este o I-algebră cilindrică.

<u>Obs</u>. Algebrele Boole sunt structurile algebrice ale calculului propozițional. Algebrele cilindrice constituie structurile corsp. calculului cu predicate.

§6. Teorema de completitudine. Modele Henkin

Fie L un limbaj de ordinul I. Cardinalul lui L este: $|L| = |Form(L)| = |Sent(L)|$.

Obs. Presupunem că V este numărabilă și că mulțimile de operații, de relații și de constante sunt cel mult numărabile. Atunci $|L| = |Form(L)| = |Sent(L)| = \omega$, unde ω = cardinalul mulțimilor numărabile. Spunem că L este limbaj numărabil.

Fie C o mulțime de constante noi și L(C) limbajul extins.

Obs. Dacă $|L| = |C|$ atunci $|L(C)| = |L| = |C|$.

Lema 1. Fie $\varphi(x)$ o formulă în L, c o constantă din C și $\varphi(c)$ enunțul din L(C) obținut prin înlocuirea lui x cu c. Atunci, pt. orice teorie T a lui L avem:

$$T \vdash \varphi(c) \text{ în } L(C) \Leftrightarrow T \vdash \forall x\, \varphi(x) \text{ în } L.$$

Dem. ($\Rightarrow$). Dacă $\alpha_1(c), \ldots, \alpha_n(c) = \varphi(c)$ este o demonstrație formală a lui $\varphi(c)$ din T în L(C) atunci $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ este o demonstrație formală a lui $\varphi(x)$ din T în L.

Atunci $T \vdash \varphi(x)$ în L, deci $T \vdash \forall x\, \varphi(x)$.

($\Leftarrow$) Dacă $T \vdash \forall x\, \varphi(x)$ în L atunci $T \vdash \forall x\, \varphi(x)$ în L(C). Cum $\vdash \forall x\, \varphi(x) \to \varphi(c)$ rezultă $T \vdash \varphi(c)$ în L(C).

Lema 2. Dacă T este o teorie consistentă în L atunci T este consistentă și în L(C).

Dem. Pres. că T nu este consistentă în L(C) deci există $\varphi(c_1, \ldots, c_n) \in L(C)$ astfel încît $T \vdash \varphi(c_1, \ldots, c_n) \wedge \neg\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ $(c_1, \ldots, c_n \in C)$. Cf. Lemei 1, $T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n))$, deci $T \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ în L, ceea ce contrazice consistența lui T.

O teorie închisă este formată numai din enunțuri.

In continuare vom considera numai teorii închise

Fie T o teorie consistentă în L(C). T se numește teorie Henkin dacă pt. orice formulă $\varphi(x)$ a lui L(C) cu cel mult o variabilă liberă x există $c \in C$ astfel încît

$$T \vdash \exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c).$$

Obs. Implicația $T \vdash \varphi(c) \to \exists x\, \varphi(x)$ are loc întotdeauna.

Lema 3. Fie L și C astfel încît $|L| = |C|$. Dacă T este o teorie consistentă în L atunci există o teorie Henkin $\overline{T}$ în $L(C)$ cu $T \subseteq \overline{T}$.

Dem. Vom face demonstrație numai pt. limbaje numărabile : $|L| = |C| = |L(C)| = \omega$.

Fie $C = (c_n)_{n<\omega}$ o enumerare a lui C cu $n \neq m \Rightarrow c_n \neq c_m$.

Fie $(\varphi_n(x_n))_{n<\omega}$ o enumerare a formulelor lui $L(C)$ cu cel mult o variabilă liberă.

Construim prin inducție

- un șir de teorii $(T_n)_{n<\omega}$ ale lui $L(C)$ cu $T_0 = T$
- un șir de constante din C : $(e_n)_{n<\omega}$

cu proprietățile

(i) T_n este consistentă în $L(C)$

(ii) $T_{n+1} = T_n \cup \{\exists x_n \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(e_n)\}$

unde e_n este o constantă din C ce nu apare în T_n și

$$x_n = \begin{cases} \text{variabila liberă a lui } \varphi_n & \text{, dacă există} \\ \text{orice variabilă} & \text{, dacă } \varphi_n \text{ nu are var. libere.} \end{cases}$$

Vom lua definiția prin recurență a teoriilor T_n ca fiind date de (ii). Rămîne să arătăm că dacă T_n este consistentă atunci și T_{n+1} este consistentă.

Presup. prin absurd că $T_n \cup \{\exists x_n \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(e_n)\}$ este inconsistentă în $L(C)$ deci

$$T_n \vdash \neg(\exists x_n \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(e_n))$$

Atunci $T_n \vdash \exists x_n \varphi_n(x_n) \wedge \neg\varphi_n(e_n)$, deci $T_n \vdash \exists x_n \varphi_n(x_n)$ și $T_n \vdash \neg\varphi_n(e_n)$.

Lema 1 $\Rightarrow$ $T_n \vdash \forall x_n \neg\varphi_n(x_n) \Rightarrow T_n \vdash \neg\exists x_n \varphi_n(x_n)$. Contrazice că T_n este consistentă.

Construcția prin inducție s-a terminat. Fie $\overline{T} = \bigcup_{n<\omega} T_n$. Se verifică ușor că $\overline{T}$ este consistentă. Să arătăm că $\overline{T}$ este teorie Henkin.

Fie $\varphi(x) \in L(C)$ cu cel mult o var. liberă x, deci ex. n cu $\varphi(x) = \varphi_n(x_n)$.

$\exists x\, \varphi(x) \to \varphi(e_n) = \exists x_n \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(e_n) \in T_{n+1} \subseteq \overline{T}$.

Atunci $\overline{T} \vdash \exists x\, \varphi(x) \to \varphi(e_n)$ și $\overline{T}$ este o teorie Henkin.

Lema 4. $T \subseteq T'$, T = teorie Henkin, T' consistentă $\Rightarrow$ T' e teorie Henkin

Dem. Direct din definiție.

Fie Σ o teorie maximal consistentă care este și teorie Henkin în limbajul $L(C)$.

Nu facem nicio restricție asupra cardinalului lui L și al lui C (avem evident însă $|L| = |C|$)

Pe mulțimea C considerăm relația binară:

$$c \approx d \iff (c = d) \in \Sigma$$
$$\iff \Sigma \vdash c = d.$$

$\vdash \bigwedge_{i=1}^{m} x_i = y_i \to (t(x_1,\dots,x_m) = t(y_1,\dots,y_m))$

$\vdash \bigwedge_{i=1}^{m} x_i = y_i \to (\varphi(x_1,\dots,x_m) \leftrightarrow \varphi(y_1,\dots,y_m))$

__Lema 5.__ $\approx$ este o relație de echivalență.

__Dem.__ • $c \approx c$: $\Sigma \vdash c = c$

• $c \approx d \Rightarrow d \approx c$

$$\left.\begin{array}{l} c \approx d \Rightarrow \Sigma \vdash c = d \\ \qquad \vdash c = d \to d = c \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \vdash d = c \Rightarrow d \approx c.$$

• $c \approx d,\ d \approx e \Rightarrow c \approx e$

$$\left.\begin{array}{l} c \approx d \\ d \approx e \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash c = d \\ \Sigma \vdash d = e \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash (c = d) \wedge (d = e) \\ \quad \vdash (c = d) \wedge (d = e) \to c = e \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \vdash c = e \Rightarrow c \approx e.$$

Vom considera mulțimea cât $A = C/\sim$; $\tilde{c}$ va fi clasa de echivalență a lui $c \in C$.

__Lema 6.__ Fie $t(x_1,\dots,x_m)$ un termen al lui L și $c_1,\dots,c_m \in C$. Atunci $\vdash \exists x(t(c_1,\dots,c_m) =$

__Dem.__ Fie $\varphi(x)$ formula din $L(C)$: $t(c_1,\dots,c_m) = x$

$\vdash \varphi(t(c_1,\dots,c_m)) \to \exists x\, \varphi(x)$

$\vdash t(c_1,\dots,c_m) = t(c_1,\dots,c_m) \vdash \exists x(t(c_1,\dots,c_m) = x)$

$\vdash t(c_1,\dots,c_m) = t(c_1,\dots,c_m)$

$\vdash \exists x(t(c_1,\dots,c_m) = x)$.

__Lema 7.__ Fie un termen $t(x_1,\dots,x_m) \in L$ și $c_1,\dots,c_m \in C$. Atunci există $d \in C$ astfel încât

$$\Sigma \vdash t(c_1,\dots,c_m) = d.$$

__Dem.__ cf. Lemei 6, $\vdash \exists x(t(c_1,\dots,c_m) = x)$

Σ este o teorie Henkin, deci există $d \in C$ astfel încât

$$\Sigma \vdash \exists x(t(c_1,\dots,c_m) = x) \to (t(c_1,\dots,c_m) = d)$$

$$\Sigma \vdash t(c_1,\dots,c_m) = d.$$

__Vom organiza acum pe A ca o structură pt. L.__

- Fie f un simbol de operație n-ară. Definim operație n-ară f^A pe A:

$$f^A(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n) = \tilde{d} \Leftrightarrow \Sigma \vdash f(c_1, \dots, c_n) = d.$$

Pt. orice $c_1, \dots, c_n \in C$ există $d \in C$ astfel încît $\Sigma \vdash f(c_1, \dots, c_n) = d$ (cf. Lema 7).

<u>Lema 8</u>. f^A este bine definită.

<u>Dem</u>. Trebuie să arătam că

$$\left.\begin{array}{l} c_i \approx d_i,\ i = 1, \dots, n \\ c \approx d \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\Sigma \vdash f(c_1, \dots, c_n) = c \Leftrightarrow \Sigma \vdash f(d_1, \dots, d_n) = d \right)$$

Anume vom arăta că

$$\left.\begin{array}{l} c_i \approx d_i,\ i = 1, \dots, n \\ c \approx d \\ \Sigma \vdash f(c_1, \dots, c_n) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \vdash f(d_1, \dots, d_n) = d.$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash c_i = d_i,\ i = 1, \dots, n \\ \Sigma \vdash c = d \\ \Sigma \vdash f(c_1, \dots, c_n) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \vdash \left(f(c_1, \dots, c_n) = c\right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (c_i = d_i) \wedge (c = d)$$

Dar $\vdash (f(c_1, \dots, c_n) = c) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (c_i = d_i) \wedge (c = d) \to \left(f(d_1, \dots, d_n) = d\right)$, deci, prin m. p.:

$$\Sigma \vdash f(d_1, \dots, d_n) = d.$$

- Fie R un simbol de relație n-ară. Definim relație n-ară R^A pe A:

$$R^A = \{(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n) \mid \Sigma \vdash R(c_1, \dots, c_n)\}$$

<u>Lema 9</u>. R^A este bine definită.

<u>Dem</u>. Trebuie să arătam că

$$c_i \sim d_i,\ i = 1, \dots, n \Rightarrow [R(c_1, \dots, c_n) \in \Sigma \Leftrightarrow R(d_1, \dots, d_n) \in \Sigma].$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash c_i = d_i,\ i = 1, \dots, n \\ \Sigma \vdash R(c_1, \dots, c_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \vdash R(c_1, \dots, c_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (c_i = d_i)$$

Dar $\vdash R(c_1, \dots, c_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (c_i = d_i) \to R(d_1, \dots, d_n)$, deci, prin m. p., $\Sigma \vdash R(d_1, \dots, d_n)$.

- Fie d o constantă a lui L. Cf. Lemei 7, ex. $c \in C$ cu $\Sigma \vdash d = c$.

Definim $d^A = \tilde{c} \Leftrightarrow (d = c) \in \Sigma$.

<u>Lema 10</u>. Definiția lui d^A este corectă.

<u>Dem</u>. Dacă $c_1, c_2 \in C$, $\Sigma \vdash d = c_1$, $\Sigma \vdash d = c_2$ atunci $\Sigma \vdash (d = c_1) \wedge (d = c_2)$. Cum $\vdash (d = c_1) \wedge (d = c_2) \to c_1 = c_2$ rezultă $\Sigma \vdash c_1 = c_2$, deci $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$.

- Dacă $c \in C$ atunci punem $c^{\mathcal{A}} = \tilde{c}$.

In acest fel am obținut o structură $\mathcal{A}$ a limbajului $L(C)$.

<u>Lema 11.</u> Dacă $t(x_1, \ldots, x_n)$ este un termen și $c, c_1, \ldots, c_n \in C$ atunci

$$t^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m) = \tilde{c} \iff \Sigma \vdash t(c_1, \ldots, c_m) = c.$$

<u>Dem.</u> Prin inducție după modul de formare al termenului t.

Arătăm numai pasul inducției. Fie $t = f(t_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_m))$ și pres. că echivalența are loc pt. termenii $t_1, \ldots, t_m$. Cf. lemei 7 există $d_1, \ldots, d_m \in C$, $\Sigma \vdash t_i(c_1, \ldots, c_m) = d_i$ pt. $i = 1, \ldots, m$. Din ip. inducției, $t_i^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m) = \tilde{d}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Atunci

$$\begin{aligned}
t^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m) = \tilde{c} &\iff f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m)) = \tilde{c} \\
&\iff f^{\mathcal{A}}(\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_m) = \tilde{c} \\
&\iff \Sigma \vdash f(d_1, \ldots, d_m) = c && : \text{cf. definiției lui } f^{\mathcal{A}} \\
&\iff \Sigma \vdash f(t_1(c_1, \ldots, c_m), \ldots, t_m(c_1, \ldots, c_m)) = c && (\alpha) \\
&\iff \Sigma \vdash t(c_1, \ldots, c_n) = c
\end{aligned}$$

(α) rezultă astfel:

$\Sigma \vdash t_i(c_1, \ldots, c_n) = d_i$, $i = 1, \ldots, m$ implică

$\Sigma \vdash f(t_1(c_1, \ldots, c_n), \ldots, t_m(c_1, \ldots, c_n)) = c \iff \Sigma \vdash f(d_1, \ldots, d_n) = c$.

<u>Prop. 12.</u> Pt. orice formulă $\varphi(x_1, \ldots, x_m) \in L$ și pt. orice $c_1, \ldots, c_m \in C$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \varphi[\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m] &\iff \varphi(c_1, \ldots, c_m) \in \Sigma \\
&\iff \Sigma \vdash \varphi(c_1, \ldots, c_m).
\end{aligned}$$

<u>Dem.</u> După modul de formare al formulei φ.

- <u>φ este de forma $t_1(x_1, \ldots, x_m) = t_2(x_1, \ldots, x_m)$:</u>

Cf. Lemei 7 există $d_i \in C$ cu $\Sigma \vdash t_i(c_1, \ldots, c_n) = d_i$, $i = 1, 2$. Aplicând Lema 11, $d_i^{\mathcal{A}} = t_i^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m)$, $i = 1, 2$. In acest caz:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \varphi[\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m] &\iff t_1^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m) = t_2^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m) \\
&\iff d_1^{\mathcal{A}} = d_2^{\mathcal{A}} \\
&\iff \Sigma \vdash d_1 = d_2 \\
&\iff \Sigma \vdash t_1(c_1, \ldots, c_m) = t_2(c_1, \ldots, c_n).
\end{aligned}$$

Ultima echivalență rezultă din $\Sigma \vdash d_i = t_i(c_1, \ldots, c_n)$, $i = 1, 2$ și din axiomele egalității.

• φ este de forma $R(t_1,\dots,t_m)$ cu $t_i = t_i(x_1,\dots,x_m)$, $i=1,\dots,m$.

cf. Lemei 7 există $d_1,\dots,d_m \in C$ cu $\Sigma \vdash t_i(c_1,\dots,c_m) = d_i$, $i=1,\dots,m$. Aplicând Lema 11, $\tilde{d_i} = t_i^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m)$, $i=1,\dots,m$. Atunci

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \varphi[\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m] &\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m),\dots,t_m^{\mathcal{A}}(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m)) \in R^{\mathcal{A}} \\
&\Leftrightarrow (\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_m) \in R^{\mathcal{A}} \\
&\Leftrightarrow R(d_1,\dots,d_m) \in \Sigma \qquad : \text{cf. definiției lui } R^{\mathcal{A}} \\
&\Leftrightarrow R(t_1(c_1,\dots,c_m),\dots,t_m(c_1,\dots,c_m)) \in \Sigma \qquad (\Sigma \vdash t_i(c_1,\dots,c_m) = d_i, i=1,\dots,m) \\
&\Leftrightarrow \varphi(c_1,\dots,c_m) \in \Sigma.
\end{aligned}$$

• φ este de forma $\neg\psi(x_1,\dots,x_m)$

ipoteza inducției: $\mathcal{A} \models \psi[\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m] \Leftrightarrow \psi(c_1,\dots,c_m) \in \Sigma$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \varphi[\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m] &\Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \psi[\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m] \\
&\Leftrightarrow \psi(c_1,\dots,c_m) \notin \Sigma \\
&\Leftrightarrow \neg\psi(c_1,\dots,c_m) \in \Sigma \qquad (\Sigma = \text{maximal consistentă}) \\
&\Leftrightarrow \varphi(c_1,\dots,c_m) \in \Sigma
\end{aligned}$$

• φ este de forma $\psi_1 \vee \psi_2$: exercițiu!

• $\varphi(x_1,\dots,x_m)$ este $\exists x\, \psi(x,x_1,\dots,x_m)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \varphi[\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m] &\Leftrightarrow \text{ex. } \tilde{c} \in A,\ \mathcal{A} \models \psi[\tilde{c},\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m] \\
&\Leftrightarrow \text{ex. } c \in C,\ \psi(c,c_1,\dots,c_m) \in \Sigma \qquad : \text{ip. inducției} \\
&\Leftrightarrow \Sigma \vdash \exists x\, \psi(x,c_1,\dots,c_m) \qquad : \Sigma = \text{teorie Henkin} \\
&\Leftrightarrow \varphi(c_1,\dots,c_m) \in \Sigma.
\end{aligned}$$

Obs. cf. Prop. 12, pt. orice enunț $\varphi \in L(C)$: $\boxed{\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma}$

Atunci $\mathcal{A} \models \Sigma$.

$\mathcal{A}$ se numește modelul Henkin asociat teoriei Σ. Îl vom mai nota și $\mathcal{A}_\Sigma$.

Teorema 13. Dacă T este o teorie consistentă atunci ea admite un model.

Dem. Fie T o teorie consistentă a lui L. Fie C o mulțime de constante noi cu $|C| = |L|$. Cf. Lemei 3, există o teorie Henkin $\overline{T}$ astfel încît $T \subseteq \overline{T}$. Fie Σ o teorie maximal consistentă a lui $L(C)$ cu $\overline{T} \subseteq \Sigma$. Σ este o teorie Henkin (Lema 4).

Considerăm modelul Henkin $\mathcal{A}$ asociat lui Σ. Cf. Prop. 12, pt. orice $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in L$ și $c_1, \dots, c_n \in C$:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n] \iff \varphi(c_1, \dots, c_n) \in \Sigma.$$

Cum $T \subseteq \Sigma$ rezultă de aici că $\mathcal{A} \models T$.

Prop. 14 (teorema de completitudine extinsă). Pt. orice teorie Σ și φ:

$$\Sigma \vdash \varphi \iff \Sigma \models \varphi.$$

Dem. ($\Rightarrow$). Prin inducție, în raport cu definiția noțiunii "$\Sigma \vdash \varphi$".
($\Leftarrow$). Presup. $\Sigma \nvdash \varphi$, deci $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ este consistentă. Fie $\mathcal{A} \models \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$; atunci $\mathcal{A} \models \Sigma$ și $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Rezultă $\Sigma \not\models \varphi$.

Cor. 15 (teorema de completitudine). $\vdash \varphi \iff \models \varphi$.

Dem. Luăm $\Sigma = \emptyset$.

Obs. Dacă o teorie admite un model atunci ea este consistentă.

Obs. Dacă Σ este o teorie Henkin și $\mathcal{A}_\Sigma$ este modelul său Henkin atunci

$$|A_\Sigma| \leq |C| = |L(C)| = |L|.$$

Cor. 16 (Th. Löwenheim-Skolem). Orice teorie consistentă T într-un limbaj numărabil admite un model cel mult numărabil.

Dem. Din Th. 13 și din observația precedentă.

Cor. 17. (Th. de compacitate). O teorie T admite un model dacă și numai dacă orice parte finită a sa admite un model.

Dem. Se aplică Th. 13 plus observația că: T este consistentă $\iff$ orice parte finită a sa este consistentă.

Cor. 18. Dacă T are modele finite suficient de mari atunci T admite un model infinit.

Dem. Fie o mulțime numărabilă de constante noi $C = \{c_n ; n < \omega\}$. Considerăm teoria lui $L(C)$:

$$\Sigma = T \cup \{\neg(c_n = c_m) \mid n < m < \omega\}.$$

Orice submulțime finită Σ' a lui Σ are un număr finit de constante din C, și fie ele conținute în $\{c_0, \dots, c_m\}$. Fie $\mathcal{A}' \models T$ cu $|A'| \geq m+1$. Atunci există $a_0, \dots, a_m \in A'$ distincte, deci $(\mathcal{A}', a_0, \dots, a_m) \models \Sigma'$. Punând $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$ arbitrare este evident că

$$(\mathcal{A}', a_0, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots) \models \Sigma'.$$

Cf. th. de compacitate Σ admite un model

$$(\mathcal{B}, b_0, \dots, b_n, \dots) \models \Sigma \quad , \text{cu } (b_n) \text{ distincte două câte două.}$$

Deci $\mathcal{B} \models T$ și $|B| \geq \omega$.

§7. Cum se stabilește dacă o formulă este teoremă formală

Există trei moduri în care putem stabili că o formulă este teoremă formală

- pe cale sintactică : construind o demonstrație formală a formulei.
- pe cale algebrică : prin trecere la algebra Lindenbaum-Tarski ($\vdash \varphi \iff \hat{\varphi} = 1$)
- pe cale semantică : calculând $\|\varphi\|$ într-o structură $\mathcal{A}$.

Vom exemplifica pe câteva cazuri

① Care din următoarele enunțuri este teoremă formală ?

(a) $\exists x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall y \exists x\, \varphi(x,y)$

(b) $\forall y \exists x\, \varphi(x,y) \to \exists x \forall y\, \varphi(x,y)$

Soluție (a) Vom arăta că avem o teoremă formală.

sintactic

$\vdash \forall y\, \varphi(x,y) \to \varphi(x,y)$: axiomă

$\vdash \exists x \forall y\, \varphi(x,y) \to \exists x\, \varphi(x,y)$: $\dfrac{\alpha \to \beta}{\exists x \alpha \to \exists x \beta}$

$\vdash \forall y\, [\exists x \forall y\, \varphi(x,y) \to \exists x\, \varphi(x,y)]$: G

$\vdash \forall y\, [\exists x \forall y\, \varphi(x,y) \to \exists x\, \varphi(x,y)] \to [\exists x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall y \exists x\, \varphi(x,y)]$: axiomă

$\vdash \exists x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall y \exists x\, \varphi(x,y)$

algebric. $p(\exists x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall y \exists x\, \varphi(x,y)) = p(\exists x \forall y\, \varphi(x,y)) \to p(\forall y \exists x\, \varphi(x,y)) =$

$$= \Big[\bigvee_{u \in V} \bigwedge_{v \in V} p(\varphi(u,v))\Big] \to \Big[\bigwedge_{w \in V} \bigvee_{z \in V} p(\varphi(w,z))\Big] =$$

$$= \bigwedge_{u} \Big[\Big(\bigwedge_{v} p(\varphi(u,v))\Big) \to \bigwedge_{w} \bigvee_{z} p(\varphi(w,z))\Big] =$$

$$= \bigwedge_{u} \bigwedge_{w} \Big[\Big(\bigwedge_{v} p(\varphi(u,v))\Big) \to \Big(\bigvee_{z} p(\varphi(w,z))\Big] =$$

$$= \bigwedge_{u,w} \Big[\Big(\neg \bigwedge_{v} p(\varphi(u,v))\Big) \vee \bigvee_{z} p(\varphi(w,z))\Big] =$$

$$= \bigwedge_{u,w} \Big[\bigvee_{v} \neg p(\varphi(u,v)) \vee \bigvee_{z} p(\varphi(w,z))\Big] =$$

$$= \bigwedge_{u,w} \bigvee_{v,z} \underbrace{\big[\neg p(\varphi(u,v)) \vee p(\varphi(w,z))\big]}_{=1} = 1.$$

semantic. Fie $\mathcal{A}$ o structură în care calculăm $\|\cdot\|$.

$$\| \exists x \forall y \varphi(x,y) \to \forall y \exists x \varphi(x,y) \| = \| \exists x \forall y \varphi(x,y) \| \to \| \forall y \exists x \varphi(x,y) \| = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\| \exists x \forall y \varphi(x,y) \| \leq \| \forall y \exists x \varphi(x,y) \|$$

$$\Updownarrow$$

$$\bigvee_{a \in A} \bigwedge_{b \in A} \| \varphi(a,b) \| \leq \bigwedge_{c \in A} \bigvee_{d \in A} \| \varphi(c,d) \|$$

$$\Updownarrow$$

$$\bigwedge_{b \in A} \| \varphi(a,b) \| \leq \bigvee_{d \in A} \| \varphi(c,d) \| \text{ pt. orice } a, c \in A.$$

Ultima inegalitate este evidentă.

(b) Fie L limbajul egalității, $\mathcal{A}$ structura $A = \{\alpha, \beta\}$ cu $\alpha \neq \beta$ și $\varphi(x,y)$ formula: $x = y$.

$$\| \forall x \exists y (x = y) \| = \bigwedge_{a \in A} \bigvee_{b \in B} \| a = b \| =$$

$$= (\| \alpha = \alpha \| \vee \| \alpha = \beta \|) \wedge (\| \beta = \alpha \| \vee \| \beta = \beta \|) = (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) = 1.$$

$$\| \exists x \forall y \varphi(x,y) \| = \bigvee_{a \in A} \bigwedge_{b \in B} \| a = b \| =$$

$$= (\| \alpha = \alpha \| \wedge \| \alpha = \beta \|) \vee (\| \beta = \alpha \| \wedge \| \beta = \beta \|) = (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0.$$

Atunci

$$\| \forall x \exists y (x = y) \to \exists x \forall y \varphi(x,y) \| = \| \forall x \exists y (x = y) \| \to \| \exists x \forall y (x = y) \| = 1 \to 0 = 0.$$

Rezultă că (b) <u>nu este</u> teoremă formală.

(2) Care din următoarele enunțuri este teoremă formală?

(a) $\forall z \exists x \forall y \varphi(x,y,z) \to \forall y \forall z \exists x \varphi(x,y,z)$

(b) $\forall y \forall z \exists x \varphi(x,y,z) \to \forall z \exists x \forall y \varphi(x,y,z)$.

<u>Soluție</u> (a) Demonstrăm că este teoremă formală.

• <u>sintactic</u>

$\vdash \forall y \varphi(x,y,z) \to \varphi(x,y,z)$: axiomă

$\vdash \exists x \forall y \varphi(x,y,z) \to \exists x \varphi(x,y,z)$: $\dfrac{\alpha \to \beta}{\exists x \alpha \to \exists x \beta}$

$\vdash \forall z \exists x \forall y \varphi(x,y,z) \to \forall z \exists x \varphi(x,y,z)$: $\dfrac{\alpha \to \beta}{\forall x \alpha \to \forall x \beta}$

$\vdash \forall y\, [\forall z\, \exists x\, \forall y\, \varphi(x,y,z) \to \forall z\, \exists x\, \varphi(x,y,z)]$ (G)

$\vdash \forall y\, [\forall z\, \exists x\, \forall y\, \varphi(x,y,z) \to \forall z\, \exists x\, \varphi(x,y,z)]$

$\to [\forall z\, \exists x\, \forall y\, \varphi(x,y,z) \to \forall y\, \forall z\, \exists x\, \varphi(x,y,z)]$ axiomă

$\vdash \forall z\, \exists x\, \forall y\, \varphi(x,y,z) \to \forall y\, \forall z\, \exists x\, \varphi(x,y,z)$ m.p.

<u>algebric</u>. $p(\forall z\, \exists x\, \forall y\, \varphi(x,y,z) \to \forall y\, \forall z\, \exists x\, \varphi(x,y,z)) =$

$= p(\forall z\, \exists x\, \forall y\, \varphi(x,y,z)) \to p(\forall y\, \forall z\, \exists x\, \varphi(x,y,z)) =$

$$= \Big[\bigwedge_{w} \bigvee_{u} \bigwedge_{v} p(\varphi(u,v,w))\Big] \to \Big[\bigwedge_{v'} \bigwedge_{w'} \bigvee_{u'} p(\varphi(u',v',w'))\Big]$$

$$= \bigwedge_{v',w'} \Big[\Big(\bigwedge_{w} \bigvee_{u} \bigwedge_{v} p(\varphi(u,v,w))\Big) \to \bigvee_{u'} p(\varphi(u',v',w'))\Big] = \ldots = 1.$$

<u>semantic</u>. $\| \forall z\, \exists x\, \forall y\, \varphi(x,y,z) \to \forall y\, \forall z\, \exists x\, \varphi(x,y,z) \| =$

$= \| \forall z\, \exists x\, \forall y\, \varphi(x,y,z) \| \to \| \forall y\, \forall z\, \exists x\, \varphi(x,y,z) \| =$

$$= \Big(\bigwedge_{c \in A} \bigvee_{a \in A} \bigwedge_{b \in A} \| \varphi(a,b,c) \|\Big) \to \Big(\bigwedge_{b' \in A} \bigwedge_{c' \in A} \bigvee_{a' \in A} \| \varphi(a',b',c') \|\Big).$$

Trebuie să arătăm că

$$\bigwedge_{c} \bigvee_{a} \bigwedge_{b} \| \varphi(a,b,c) \| \le \bigwedge_{b'} \bigwedge_{c'} \bigvee_{a'} \| \varphi(a',b',c') \|$$

ceea ce este echivalent cu

$$\bigwedge_{c} \bigvee_{a} \bigwedge_{b} \| \varphi(a,b,c) \| \le \bigvee_{a'} \| \varphi(a',b',c') \| \text{ pt. orice } b', c' \in A.$$

Această ultimă inegalitate este ușor de probat.

(b) Considerăm un limbaj cu un singur predicat n-ar $+$, $\varphi(x,y,z)$ este $x+y=z$, și $A = \langle \mathbb{N}, + \rangle$

$\| \forall y \, \forall z \, \exists x \, \varphi(x,y,z) \to \forall z \, \exists x \, \forall y \, \varphi(x,y,z) \| =$

$= \| \forall y \, \forall z \, \exists x \, \varphi(x,y,z) \| \to \| \forall z \, \exists x \, \forall y \, \varphi(x,y,z) \|.$

$\| \forall y \, \forall z \, \exists x \, \varphi(x,y,z) \| = \bigwedge_{n,p \in \mathbb{N}} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \| m+p=n \| = 1$

$\| \forall z \, \exists x \, \forall y \, \varphi(x,y,z) \| = \bigwedge_{p} \bigvee_{n} \bigwedge_{m} \| m+p=n \|.$

Facem $p=0$ și calculăm termenul corespunzător din intersecție "după p":

$\bigvee_{n} \bigwedge_{m} \| m+0=n \| = \bigvee_{n} \bigwedge_{m} \| m=n \| = 0$

deoarece pt. orice n, $\bigwedge_{m} \| m=n \| = 0$.

Avem $1 \to 0 = 0$, deci acest al doilea enunț <u>nu</u> este teoremă formală.

<u>Exercițiu</u>. Fie $Q_1, Q_2, Q_3 \in \{\exists, \forall\}$ și τ o permutare a $\{1,2,3\}$. Să se determine care din enunțurile

$Q_1 x \, Q_2 y \, Q_3 z \, \varphi(x,y,z) \to Q_{\tau(1)} x \, Q_{\tau(2)} y \, Q_{\tau(3)} z \, \varphi(x,y,z)$

este teoremă formală.