Funcția de repartiție a unei v.a.

Fie X o v.a. și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcția sa de repartiție. Atunci:

CONVENȚIE ASE

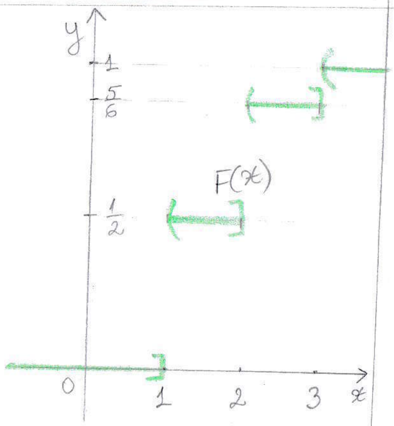
$$\boxed{F(x)=P(X<x)}$$

CAZUL DISCRET

$$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

! F e continuă la stânga

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x\le 1\\ \frac{1}{2} & , 1<x\le 2\\ \frac{5}{6} & , 2<x\le 3\\ 1 & , x>3\end{cases}$$



! $F(1)=0$

CAZUL CONTINUU

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2 & , x\in[0,2]\\ 0 & , x\notin[0,2]\end{cases}$$

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}$$

I $x\le 0$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$

II $0<x\le 2$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{x}\frac{3}{8}t^2\,dt=\frac{\cancel{3}}{8}\cdot\frac{t^3}{\cancel{3}}\Big|_0^x=\frac{x^3}{8}$

III $x>2$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{2}\frac{3}{8}t^2\,dt+\int_{2}^{x} 0\,dt=1$

CONVENȚIE UNIBUC

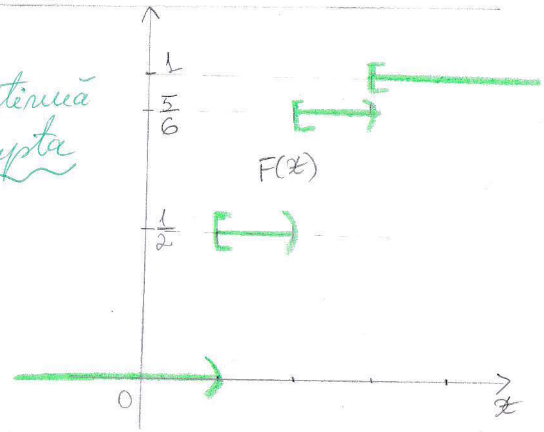
$$\boxed{F(x)=P(X\le x)}$$

CAZUL DISCRET

$$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

! F e continuă la dreapta

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2\\ \frac{5}{6}, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$



! $F(1)=\frac{1}{2}$

CAZUL CONTINUU

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & x\in[0,2]\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}$$

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}$$

I $x<0$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$

II $0\le x<2$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{x}\frac{3}{8}t^2\,dt=\frac{x^3}{8}$

III $x\ge 2$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{2}\frac{3}{8}t^2\,dt+\int_{2}^{x} 0\,dt=1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^3}{8}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{8}, & 0 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{OBS}}$: Funcția F fiind continuă, se observă că nu există diferențe în lucrul cu o convenție sau cu alta! Așadar, singura diferență se înregistrează în cazul discret.

Proprietăți

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$
2. F este crescătoare (nu neapărat strict crescătoare)
3. F este continuă la stânga.

4. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$
5. $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(X=b)$
6. $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X=a)$
7. $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) - P(X=a) + P(X=b)$

Proprietăți

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$
2. F este crescătoare (nu neapărat strict crescătoare)
3. F este continuă la dreapta

4. $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$
5. $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(X=a)$
6. $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X=b)$
7. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a) + P(X=a) - P(X=b)$

$\boxed{\text{OBS}}$: În cazul v.a. continue $P(X=x)=0$, deci proprietățile 4-7 sunt echivalente. În cazul v.a. discrete însă apar diferențe în calculul probabilității, în funcție de convenția folosită!.