Curs 15

Inegalități, Legea nr. mari și Teorema Limită Centrală

(T) (Inegalitatea Cauchy-Schwarz)

Pentru orice două v.a. X, Y cu $Var(X) < \infty$, $Var(Y) < \infty$ atunci

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}$$

Ineg. lui Jensen:

g convexă ($g'' \geq 0$): $\forall x, y$ și $\forall t \in [0,1]$

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y)$$

g concavă ($g'' \leq 0$): $\forall x, y$ și $\forall t \in [0,1]$

$$g(tx + (1-t)y) \geq tg(x) + (1-t)g(y)$$

(T) (Ineg. lui Jensen)

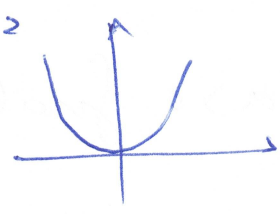
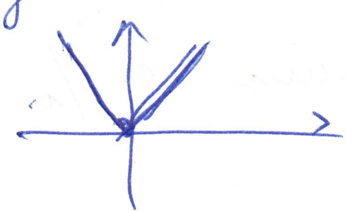
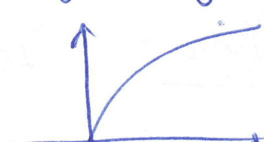
Fie X o v.a. și g o funcție. Dacă g este convexă atunci

$$\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$$

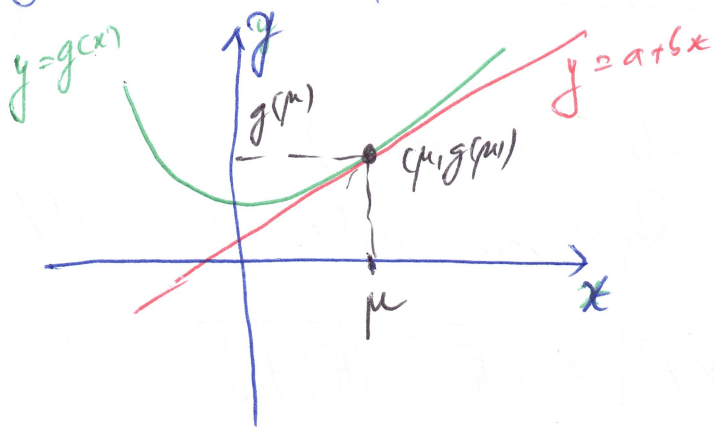
Dacă g este concavă atunci

$$\mathbb{E}[g(X)] \leq g(\mathbb{E}[X])$$

Avem egalitate dacă și numai dacă g este o fct afină, i.e. $g(x) = a + bx$.

Exp: $g(x) = x^2$  $g(x) = |x|$  $g(x) = \log(x)$ 

Dem: Dacă g este convexă și fie $\mu = \mathbb{E}[X]$ și dr. $y = a + bx$ tangentă la graficul lui g în punctul de coord. $(\mu, g(\mu))$



Atunci
$$g(x) \geq a + bx \quad , \forall x$$
și
$$g(X) \geq a + bX$$ și aplicăm media (prop. de monotonie)
$$\Rightarrow \mathbb{E}[g(X)] \geq \mathbb{E}[a + bX] = a + b\mathbb{E}[X]$$
$$= a + b\mu = g(\mu) = g(\mathbb{E}[X])$$

Să pp. că avem egalitate: $\mathbb{E}[g(X)] = g(\mathbb{E}[X])$

și $Y = g(X) - a - bX \geq 0$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X) - a - bX] = 0$ $\Big\} \Rightarrow \mathbb{P}(Y = 0) = 1.$

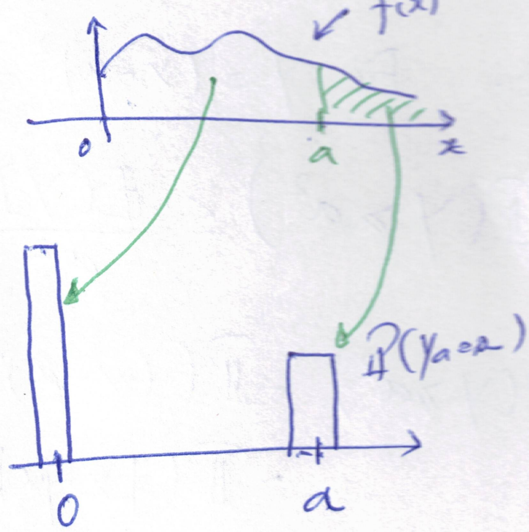
$\Rightarrow \mathbb{P}(g(X) = a + bX) = 1. \Rightarrow g$ este afină

Ⓣ (Ineg. lui Markov)

Dacă X este v.a. pozitivă $(X \geq 0)$ atunci
$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a} \quad , \forall a > 0$$

Dem: Definim v.a. Y_a, pt $a > 0$ fixat astfel

$$Y_a = \begin{cases} 0, & X < a \\ a, & X \geq a \end{cases}$$



Avem

$$Y_a \leq X$$

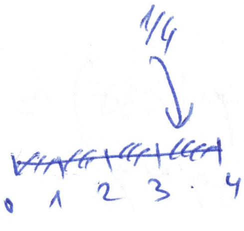
aplicăm media (prop. de monotonie)

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}[Y_a] \leq \mathbb{E}[X] \\ \quad \parallel \\ 0 \times \mathbb{P}(Y_a = 0) + a\,\mathbb{P}(Y_a = a) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq a\,\mathbb{P}(Y_a = a) = a\,\mathbb{P}(X \geq a)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Exp: $X \sim \mathcal{U}[0,4] \Rightarrow \mathbb{E}[X] = 4/2 = 2$

Ineg. lui Markov: $\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \frac{2}{1} = 2$



$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{2} = 1$$

$$\frac{1}{4} = \mathbb{P}(X \geq 3) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{3} = \frac{2}{3} = 0.66\ldots$$

$$0 = \mathbb{P}(X \geq 4) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

(T) (Ineg. Chebyshev) Cebîşev

Dacă X este o v.a. de medie μ şi varianţă σ^2, atunci

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}, \quad \forall a > 0$$

Dem: Fie $Y = (X-\mu)^2 = (X - \mathbb{E}[X])^2$. Din ineg. lui Markov

$$\mathbb{P}(Y \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a^2} = \frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}$$

$$\mathbb{P}(Y \geq a^2) = \mathbb{P}((X-\mu)^2 \geq a^2)$$
$$= \mathbb{P}(|X-\mu| \geq a) \qquad (a>0)$$

Obs: Dacă $a = k\sigma$ atunci

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(k\sigma)^2} = 1/k^2$$

Dacă $X \sim N(0,1)$ atunci

ineg. Chebyshov

$$1 \geq \mathbb{P}(|X-\mu| \geq \sigma) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(|X-\mu| < \sigma)}_{\simeq 68\%} \simeq 32\%$$

$$0.25 = 1/4 \geq \mathbb{P}(|X-\mu| \geq 2\sigma) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(|X-\mu| < 2\sigma)}_{\simeq 95\%} \simeq 5\%$$

$$= 1/9 \geq \mathbb{P}(|X-\mu| \geq 3\sigma) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(|X-\mu| < 3\sigma)}_{\simeq 99.7\%} \simeq 0.3\%$$

(T) (Ineg. Chernoff)

Pentru v.a. X și constantele $a>0$, $t>0$ avem

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}}$$

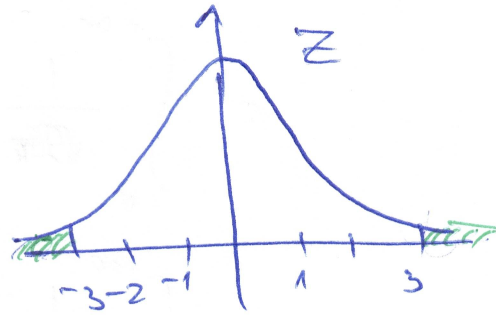
Dem: $g(x) = e^{tx}$ cresc. și bijectivă

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \overset{\text{Ineg. Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}}.$$

Exp: Fie $Z \sim N(0,1)$ și încercăm să aproximăm prob. $\mathbb{P}(|Z|>3)$ folosind ineg. lui Markov, Chebyshev și Chernoff.

a) Ineg. Markov:

$$\mathbb{P}(|Z|>3) \le \frac{\mathbb{E}[|Z|]}{3}$$



Avem $\mathbb{P}(|Z|>3) \simeq 0.003$

$$\mathbb{E}[|Z|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}}_{\text{fct pară}} dz$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z e^{-z^2/2} dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-z^2/2}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\mathbb{P}(|Z|>3) \le \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 0.27.$$

b) Ineg. Chebyshev

$$\mathbb{P}(|Z|>3) = \mathbb{P}(|Z-\overset{\mu}{0}|>3\cdot \underset{\sigma}{1}) \le \frac{1}{9} \simeq 0.11$$

c) Ineg. lui Chernoff.

$$\mathbb{P}(|Z|>3) = 2\,\mathbb{P}(Z>3) \text{ din simetria rep. normale}$$

$$\le 2\, \frac{\mathbb{E}[e^{tZ}]}{e^{3t}}$$

$$\mathbb{E}[e^{tZ}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2 + tz}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz)}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz + t^2 - t^2)}\,dz$$

densitatea unei normale $N(t,1)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2} + t^2/2}\,dz = e^{t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}}\,dz}_{=1}$$

$$= e^{t^2/2}$$

Astfel,

$$\mathbb{P}(|Z|>3) = 2\mathbb{P}(Z>3) \leq 2\frac{e^{t^2/2}}{e^{3t}} = 2e^{t^2/2 - 3t}, \quad \forall t>0$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^2/2 - 3t\right) = t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(|Z|>3) \leq 2e^{-9/2} \simeq \underline{0.022}$$

Legea nr. mari

Fie $X_1, X_2, \ldots$ un șir de v.a. iid (independente și identic distribuite) cu media $E[X_1] = \mu$ și varianța $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$

Definim $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \rightarrow$ media eșantionului $X_1, X_2, \ldots X_n$

$$E[\overline{X}_n] = E\left[\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\left(E[X_1]+E[X_2]+\ldots+E[X_n]\right)$$

$$= \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

$$Var(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$

$$\overset{indep}{=} \frac{1}{n^2}\Big(\underbrace{Var(X_1)}_{\sigma^2} + \underbrace{Var(X_2)}_{\sigma^2} + \ldots + \underbrace{Var(X_n)}_{\sigma^2}\Big) = \sigma^2/n$$

Legea nr. mari → legea slabă a nr. mari
Legea nr. mari → legea tare a nr. mari

(T) (LNM-tare) Fie $X_1, X_2, \ldots$ un șir de v.a. iid cu $E[X_1] = \mu$ și $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Atunci

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n \longrightarrow \mu) = 1,$$

i.e.

$$\overline{X}_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu, \ \forall w \in \Omega_0, \ \mathbb{P}(\Omega_0) = 1$$

Avem convergența punctuală (în sensul conv. de la fct) în toate punctele cu excepția eventual a unei mulțimi de prob. egală cu 0.

(T) (LNM - slabă)

Fie $X_1, X_2, \ldots$ șir de v.a. i.i.d. de medie μ și varianță $\sigma^2 < \infty$

Atunci $\forall \varepsilon > 0$ avem

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

<u>Dem</u>:

Ineg. lui Chebyshev:

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \ \forall \varepsilon > 0$$

Pt $n \to \infty$ avem că $\sigma^2/n\varepsilon^2 \to 0 \Rightarrow \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \to 0$

<u>Exp</u>:

Să presupunem că avem un eveniment A cu $\mathbb{P}(A) = p$.

Să considerăm n repetiții indep. ale experimentului și să notăm cu $X_i = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ - frecvența de apariție a ev. A în cele n rep. ale exp.

Din ~~...~~ LNM:

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \ \forall \varepsilon > 0$$

$\mu = \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{P}(A) = p$

Interpretarea frecv.: prob. unui ev. $\simeq$ frecvența relativă

Def: Fie $(X_n)_n$ un şir de v.a şi X o v.a. Spunem că şirul $(X_n)_n$ converge în probabilitate la X, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, dacă $\forall \varepsilon > 0$

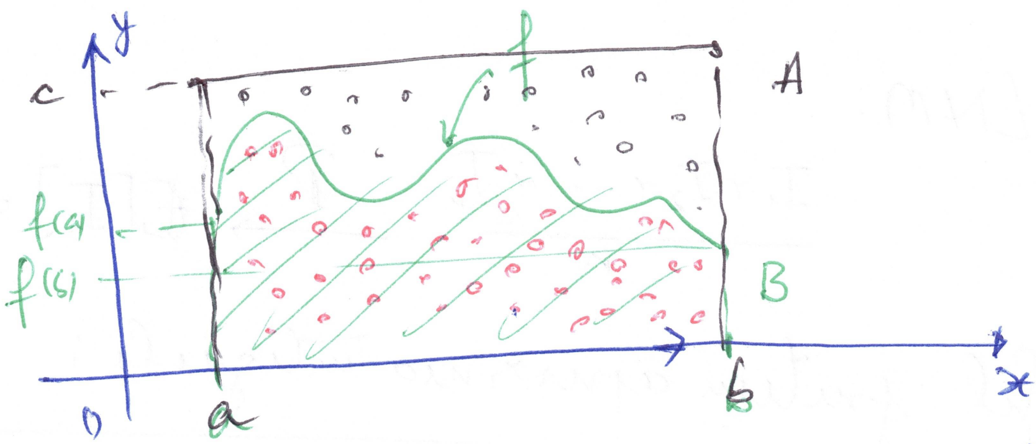
$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

În general, vom considera că v.a X este const.

LNM: $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$ (versiunea slabă)

Exp: (Integrarea de tip Monte-Carlo)

Să presupunem că avem o funcţie f şi vrem să aproximăm $\int_a^b f(x)dx$



Să presupunem că $0 \le f(x) \le c$, integrala este finită.

$A = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le c\}$

$B = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$

Idee: generăm puncte unif. uniform în A şi calculăm proporţia punctelor care au căzut în B

Fie $(X_1,Y_1), (X_2,Y_2), \dots, (X_n,Y_n) \sim \mathcal{U}(A)$ (rep. uniform pe A)

Fie $I_j = \begin{cases} 1, & (X_j,Y_j)\in B \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

Avem că densitatea $(X,Y) \sim \mathcal{U}(A)$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{c(b-a)}, & (x,y)\in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

V.a I_j sunt independente și identic rep, $I_j \sim B(p)$

unde $p = \mathbb{P}(I_j = 1)$

$$= \mathbb{P}((X_j,Y_j)\in B) = \frac{\mathcal{A}(B)}{\mathcal{A}(A)} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{c(b-a)}$$

Din LNM:

$$\frac{I_1+I_2+\dots+I_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[I_1] = p$$

Astfel putem aproxima integrala:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq c(b-a)\,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_j}$$