SISTEMUL FORMAL AL CALCULULUI PROPOZIȚIONAL (L)

§1. Sintaxa calculului propozițional

Alfabetul sistemului formal al calculului propozițional este format din următoarele simboluri:

1) variabile propoziționale, notate $u, v, w, \ldots$ (eventual cu indici)

2) simboluri logice (conectori):

$\neg$: simbolul de negație (va fi citit: non)

$\rightarrow$: simbolul de implicație (va fi citit: implică)

3) parantezele $($, $)$, $[$, $]$.

Se va presupune că mulțimea V a variabilelor propoziționale este infinită.

Pornind de la aceste simboluri primitive vom construi cuvintele (asamblajele). Prin definiție, un cuvânt este un șir finit de simboluri primitive, scrise unul după altul.

Exemple: $u \rightarrow \neg v$, $\neg(u \rightarrow \neg v) \rightarrow w$, $u \rightarrow u v \neg)$

Intuiția ne spune că primele două cuvinte "au sens" pe când cel de-al treilea nu. Din mulțimea cuvintelor le vom selecta pe acelea care "au sens", noțiune precizată astfel:

Se numește enunț orice cuvânt φ ce verifică una din condițiile următoare:

(i) φ este o variabilă propozițională;

(ii) există un enunț ψ astfel încât $\varphi = \neg\psi$;

(iii) există enunțurile ψ, θ astfel încât $\varphi = \psi \rightarrow \theta$.

Observație. Definiția conceptului de enunț este dată prin inducție. Momentul inițial al definiției prin inducție este dat de condiția (i), iar trecerea "de la k la k+1" este asigurată de (ii) și (iii).

Variabilele propoziționale se vor numi enunțuri atomice sau elementare. Vom nota cu E mulțimea enunțurilor. Pentru $\varphi, \psi \in E$ introducem abrevierile:

$\varphi \vee \psi = \neg\varphi \rightarrow \psi$ (disjuncția lui φ și ψ)

$\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (conjuncția lui φ și ψ)

$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ (echivalența logică a lui φ și ψ).

Obs. In prezentarea sistemului formal al calculului propozițional am considerat negația și implicația drept conectori primitivi. Conectorii derivați $\vee$ (sau), $\wedge$ (și), $\leftrightarrow$ (echivalent) au fost introduși prin prescurtările de mai sus. Există prezentări ale sistemului formal al calculului propozițional (echivalente cu cea de mai sus) ce folosesc alți conectori primitivi.

In dezvoltarea sintaxei calculului propozițional vom urmări stabilirea unei noțiuni care să reprezinte "adevărurile formale" ale sistemului și a unei noțiuni care să spună ce este inferența sintactică.

O axiomă a sistemului formal al calculului propozițional este un enunț care are una din formele următoare:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

unde φ, ψ, χ sunt enunțuri arbitrare.

O teoremă formală (pe scurt, teoremă) este un enunț φ ce verifică una din condițiile următoare:

(T1) φ este o axiomă

(T2) Există un enunț ψ astfel încât ψ și $\psi \to \varphi$ sunt teoreme.

Condiția (T2) se scrie prescurtat: $\dfrac{\psi, \psi \to \varphi}{\varphi}$

și se numește regula de deducție modus ponens (m.p.)

Vom nota cu T mulțimea teoremelor, iar faptul că φ este o teoremă cu $\vdash \varphi$.

Definiția conceptului de teoremă formală a fost de asemenea dată prin inducție.

O demonstrație formală a unui enunț φ este un șir finit de enunțuri $\psi_1, \dots, \psi_n$ astfel încât $\psi_n = \varphi$ și pentru orice $1 \le i \le n$ se verifică una din condițiile următoare:

(1) ψ_i este o axiomă

(2) Există doi indici $k, j < i$ astfel încât $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$.

Se observă că proprietățile (1), (2) nu exprimă altceva decât condițiile (T1), (T2), deci $\vdash \varphi$ dacă și numai dacă există o demonstrație formală $\psi_1, \dots, \psi_n$ a lui φ. n se numește lungimea demonstrației formale. O teoremă poate avea demonstrații formale de lungimi diferite.

Fie Γ o mulțime de enunțuri și φ un enunț. Vom spune că enunțul φ este dedus din ipotezele Γ dacă una din condițiile următoare este verificată:

(D1) φ este o axiomă

(D2) $\varphi \in \Gamma$

(D3) Există un enunț ψ astfel încât ψ și $\psi \to \varphi$ sunt deduse din ipotezele Γ.

Condiția (D3) se mai scrie $\dfrac{\Gamma \vdash \psi, \psi \to \varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$ și se numește tot modus ponens.

Dacă φ este dedus din Γ vom nota $\Gamma \vdash \varphi$.

O Γ-demonstrație formală a lui φ este un șir de enunțuri $\psi_1, \dots, \psi_n$ astfel încât $\psi_n = \varphi$ și pentru orice $1 \le i \le n$ este verificată una din condițiile:

(1) ψ_i este o axiomă

(2) $\psi_i \in \Gamma$

(3) Există doi indici $k, j < i$ astfel încât $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$.

Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ dacă și numai dacă există o Γ-demonstrație a lui φ.

Observație

(i) $\emptyset \vdash \varphi \iff \vdash \varphi$

(ii) Dacă $\vdash \varphi$ atunci $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\Gamma \subseteq E$.

Cu aceasta descrierea sintactică a sistemului formal al calculului propozițional este încheiată. Vom nota cu L acest sistem logic. Observăm că toată prezentarea s-a desfășurat la nivel simbolic: pornind de la o mulțime de simboluri am definit enunțurile, după care am definit teoremele formale și deducția sintactică (inferența sintactică).

§2. Proprietăți sintactice ale lui L

In acest paragraf vom prezenta unele proprietăți sintactice ale lui L, cea mai importantă fiind teorema deducției. Folosind acest rezultat vom stabili cele mai semnificative teoreme formale ale lui L.

<u>Prop. 1.</u> Fie $\Gamma, \Delta \subseteq E$ şi $\varphi \in E$.

(i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$ şi $\Gamma \vdash \varphi$ atunci $\Delta \vdash \varphi$.

(ii) Dacă $\Gamma \vdash \varphi$ atunci există $\Sigma \subseteq \Gamma$ finită astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$.

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \chi$ pentru orice $\chi \in \Delta$ şi $\Delta \vdash \varphi$ atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

<u>Dem.</u> (i) Demonstrația se face prin inducție asupra conceptului $\Gamma \vdash \varphi$. Dacă $\Gamma \vdash \varphi$ atunci este verificată una din condițiile (D1)-(D3). Le vom lua pe rând

- dacă φ este o axiomă atunci $\Delta \vdash \varphi$
- dacă $\varphi \in \Gamma$ atunci $\varphi \in \Delta$, deci $\Delta \vdash \varphi$
- dacă $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$ atunci, conform ipotezei ind., $\Delta \vdash \psi$ şi $\Delta \vdash \psi \to \varphi$, deci $\Delta \vdash \varphi$.

(ii) Demonstrația se face tot prin inducție:

- dacă φ este axiomă atunci $\emptyset \vdash \varphi$ şi $\emptyset \subseteq \Gamma$ este finită;
- dacă $\varphi \in \Gamma$ atunci luăm $\Sigma = \{\varphi\}$.
- dacă $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$ atunci, conform ip. ind., există $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \Sigma$ finite astfel încât $\Sigma_1 \vdash \psi$, $\Sigma_2 \vdash \psi \to \varphi$; se ia $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ şi se aplică (i)

(iii) Exercițiu.

<u>Prop. 2.</u> Pentru orice enunț φ, $\vdash \varphi \to \varphi$ (principiul identității).

<u>Dem.</u> Următoarea listă de enunțuri este o demonstrație formală a lui $\vdash \varphi \to \varphi$.

$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	(A1)
$[\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)] \to [(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)]$	(A2)
$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	m.p.
$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	A1
$\varphi \to \varphi$	m.p.

<u>Prop. 3</u> (teorema deducției): Dacă $\Gamma \subseteq E$ și $\varphi, \psi \in E$ atunci:

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

<u>Dem.</u> ($\Rightarrow$) Se aplică Prop. 1, (i) și modus ponens

($\Leftarrow$) Prin inducție. Dacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ atunci avem cazurile

(1) <u>ψ este o axiomă</u>

Cum $\vdash \psi$ și $\psi \to (\varphi \to \psi)$, conform (A1), atunci $\vdash \varphi \to \psi$ prin m.p., deci $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(2) $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$, cu două subcazuri

(a) $\psi \in \Gamma$: din $\Gamma \vdash \psi$, $\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ se deduce $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

(b) $\psi \in \{\varphi\}$: se aplică principiul identității: $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$

(3) Există $\alpha \in E$ astfel încât $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$ și $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha \to \psi$. Aplicând ipoteza inducției rezultă $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha$ și $\Gamma \vdash \varphi \to (\alpha \to \psi)$. De asemenea

$$\Gamma \vdash (\varphi \to (\alpha \to \psi)) \to ((\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \psi)) \qquad (A2)$$

Aplicând de două ori m.p. se obține $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

<u>Observație</u>. În demonstrarea principiului identității și a teoremei deducției nu au intervenit decât axiomele (A1), (A2) și m.p.

<u>Prop. 4</u>. $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

<u>Dem.</u> Vom aplica succesiv m.p. și apoi teorema deducției

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$ th. ded.

$\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$ th. ded.

$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ th. ded.

Obs. Din Prop. 4 se deduce următoarea regulă de deducție derivată

$$(R_1) \qquad \frac{\varphi \to \psi,\ \psi \to \chi}{\varphi \to \chi}$$

Prop. 5. $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$

Dem. Aplicăm m.p. și apoi teorema deducției

$$\begin{array}{ll}
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi & \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi) & \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to \chi & \text{m.p.} \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \cancel{\quad} \psi & \cancel{\text{th. ded.}} \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \chi & \text{m.p.} \\
\{\psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to \chi & \text{th. ded.} \\
\{\varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to (\varphi \to \chi) & \text{th. ded.} \\
\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)) & \text{th. ded.}
\end{array}$$

Obs. Prop. 5 îi corespunde următoarea regulă de deducție derivată

$$(R2) \qquad \frac{\varphi \to (\psi \to \chi)}{\psi \to (\varphi \to \chi)}$$

Prop. 6 $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$

Dem

$$\begin{array}{ll}
\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi) & (A_1) \\
\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi & \\
\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi & \text{m.p.} \\
\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi) & (A_3) \\
\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi \to \psi & \text{m.p.} \\
\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi & \\
\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi & \text{m.p.} \\
\{\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \psi & \text{th. ded.} \\
\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi) & \text{th. ded.}
\end{array}$$

Prop. 7. $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

Dem. Conform Prop. 5 : $\vdash (\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)) \to (\neg\varphi \to (\varphi \to \psi))$

de unde, aplicând Prop. 6 şi m.p., $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$.

Exerciţiu. Să se demonstreze Prop. 7 în maniera Prop. 6, folosind teorema deducţiei.

Prop. 8. $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$

Dem.

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$ (A1)

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$ m.p.

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$ (A3)

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$ m.p.

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$ (A3)

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ m.p.

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ m.p.

$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ th. ded.

Prop. 9. $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

Dem.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ Prop. 8

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$

$\{\ \dots\ \} \vdash \varphi$ m.p.

$\{\ \dots\ \} \vdash \varphi \to \psi$

$\{\ \dots\ \} \vdash \psi$ m.p.

$\{\ \dots\ \} \vdash \neg\psi$

$\{\ \dots\ \} \vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg\neg\psi)$ Prop. 7

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi$ m.p. de două ori

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$ th. ded.

$\{\ \dots\ \} \vdash (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ (A3)

$\{\ \dots\ \} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ m.p.

$\{\ \dots\ \} \vdash \neg\psi$

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ th. ded.

$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ th. ded.

Prop. 10. $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

Dem.

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ (Prop. 8)

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi$

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ Th. ded.

$\{\varphi\} \vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$ (A3)

$\{\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ Th. ded.

$\{\varphi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$ m.p.

$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ th. ded.

Prop. 11. $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

Dem.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (Prop. 8)

$\{\dots\} \vdash \neg\neg\varphi$

$\{\dots\} \vdash \varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\varphi$

$\{\dots\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\dots\} \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi))$ (Prop. 6)

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ m.p. de două ori

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$ Th. ded.

$\{\dots\} \vdash (\neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi)$ (A3)

$\{\dots\} \vdash (\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi$ m.p.

$\{\dots\} \vdash \varphi \to \varphi$ (Prop. 1)

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

Prop. 12. $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$

Dem.

$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$ Th. ded.

$\{\varphi\} \vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$ (Prop. 9)

$\{\varphi\} \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$ m.p.

$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$ th. ded.

Prop. 13 $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$

Dem. Este o transcriere a Prop. 6

Prop. 14 $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$

Dem. $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$ se scrie echivalent $\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \psi)$ pt. care avem dem. formală:

$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$

$\{\psi\} \vdash \neg\varphi \to \psi$ th. ded.

$\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \psi)$ th. ded.

Prop. 15. $\vdash (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$

Dem.

$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \to \psi$

$\{\ \ldots\ \} \vdash \psi \to \chi$

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\varphi \to \chi$ (R1)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\chi \to \neg\neg\varphi$ (Prop. 9)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (Prop. 8)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\chi \to \varphi$ (R1)

$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash \varphi \to \chi$

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\chi \to \chi$ (R1)

$\{\ \ldots\ \} \vdash (\neg\chi \to \chi) \to (\neg\chi \to \neg\neg\chi)$ (Prop. 9)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\chi \to \neg\neg\chi$ m.p.

$\{\ \ldots\ \} \vdash (\neg\chi \to \neg\neg\chi) \to \neg\neg\chi$ (Prop. 11)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\neg\chi$ m.p.

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\neg\chi \to \chi$ (Prop. 8)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \chi$ m.p.

$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi\} \vdash (\neg\varphi \to \psi) \to \chi$ th. ded.

Aplicând încă de două ori th. deducției rezultă

$$\vdash (\varphi \to \chi) \to [(\psi \to \chi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \chi)]$$

Observație. Prop. 15 implică regula de deducție derivată:

(R3) $$\frac{\varphi \to \chi,\ \psi \to \chi}{\varphi \vee \psi \to \chi}$$

Prop. 16. $\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$

Dem

$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$ (Prop. 6)

$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)$ (R2)

$\vdash (\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi)$ (Prop. 9)

$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$ m.p.

$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (Prop. 8)

$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$ (R1)

Am obținut exact $\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$.

Prop. 17. $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi$

Dem.

$\vdash \neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$ (A1)

$\vdash (\neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\psi)$ (Prop. 9)

$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\psi$ m.p.

$\vdash \neg\neg\psi \to \psi$ (Prop. 8)

$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \psi$ (R1)

Ultima teoremă formală este chiar $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi$

Prop. 18. $\vdash (\chi \to \varphi) \to ((\chi \to \psi) \to (\chi \to \varphi \wedge \psi))$

Dem.

$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi, \chi\} \vdash \chi$

$\{\ \dots\ \} \vdash \chi \to \varphi$

$\{\ \dots\ \} \vdash \varphi$ m.p.

$\{\ \dots\ \} \vdash \psi$ analog

$\{\ \dots\ \} \vdash \psi \to \neg\neg\psi$ (Prop. 10)

$\{\ \dots\ \} \vdash \neg\neg\psi$ (m.p)

$\{\ \dots\ \} \vdash \varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi))$ (Prop. 7)

$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi, \chi\} \vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$ m.p. de două ori

Folosind teorema deducției de trei ori se obține

$\vdash (\chi \to \varphi) \to ((\chi \to \psi) \to (\chi \to \varphi \wedge \psi))$

care este chiar teorema formală căutată.

Obs. Prop. 18 îi este asociată următoarea regulă de deducție derivată

(R4) $\dfrac{\chi \to \varphi,\ \chi \to \psi}{\chi \to \varphi \wedge \psi}$

Prop. 19 $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$

Dem $\vdash \varphi \wedge \psi \to \chi$ (Prop. 17)

$\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$ (Prop. 16)

$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ (R4)

Prop. 20. $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$

Dem. $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi, \psi\} \vdash \psi$

$\{\varphi, \psi\} \vdash \psi \to \neg\neg\psi$ (Prop. 10)

$\{\varphi, \psi\} \vdash \neg\neg\psi$ m.p.

$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi))$ (Prop. 12)

$\{\varphi, \psi\} \vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$ m.p. de două ori

$\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$ th. ded. de două ori.

Prop. 21. $\vdash ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi)$

Dem. $\vdash \varphi \wedge \chi \to \varphi$ (Prop. 16)

$\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$ (Prop. 14)

$\vdash \varphi \wedge \chi \to \varphi \vee \psi$ (R1)

$\vdash \varphi \wedge \chi \to \chi$

$\vdash \varphi \wedge \chi \to (\varphi \vee \psi) \wedge \chi$ (R4)

$\vdash \psi \wedge \chi \to (\varphi \vee \psi) \wedge \chi$ analog

$\vdash (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \vee \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi)$ (R3)

Prop. 22. $\vdash (\chi \to \theta) \to [(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \to \theta))]$

Dem. $\{\chi \to \theta, \varphi \to (\psi \to \chi), \varphi, \psi\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$

$\{\ \dots\ \} \vdash \varphi$

$\{\ \dots\ \} \vdash \psi \to \chi$ m.p

$\{\ \dots\ \} \vdash \psi$

$\{\ \dots\ \} \vdash \chi$ m.p.

$\{\ \dots\ \} \vdash \chi \to \theta$

$\{\chi \to \theta, \varphi \to (\psi \to \chi), \varphi, \psi\} \vdash \theta$ m.p.

Se aplică apoi th. deducției de patru ori

Prop. 23 $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \wedge \psi \to \chi)$

Dem.

$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \varphi$ m.p.

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \psi$ analog

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$

$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$ m.p. de două ori

Se aplică apoi th. deducţiei de două ori.

Prop. 24. $\vdash (\varphi \wedge \psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$

Dem. $\{\varphi \wedge \psi \to \chi, \varphi, \psi\} \vdash \varphi$

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \psi$

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$ (Prop. 20)

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \varphi \wedge \psi$ m.p. de două ori

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \varphi \wedge \psi \to \chi$

$\{\varphi \wedge \psi \to \chi, \varphi, \psi\} \vdash \chi$ m.p.

Se aplică apoi th. ded. de trei ori

Prop. 25. $\vdash \varphi \vee \psi \to (\chi \to [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)])$

Dem. Conform th. deducţiei se reduce la a demonstra

$\{\varphi \vee \psi, \chi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \chi) \to (\psi \wedge \chi)$

ceea ce este totuna cu

$\{\varphi \vee \psi, \chi\} \vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\chi) \to \neg(\psi \to \neg\chi)$

Aplicând th. deducţiei se reduce la a demonstra

$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\} \vdash \neg(\psi \to \neg\chi)$

Dăm mai jos demonstraţia acestui ultim fapt.

$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\} \vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)$

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \varphi \to \neg\chi$ (Prop. 8), m.p

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \chi \to \neg\varphi$ (A3), m.p.

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \neg\varphi \to \psi$

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \chi \to \psi$ (R1)

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \chi$

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \psi$ m.p.

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \psi \to (\chi \to \neg(\psi \to \neg\chi))$ (Prop. 12)

$\{ \quad \ldots \quad \} \vdash \neg(\psi \to \neg\chi)$ m.p. de două ori

Prop. 26. $\vdash ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) \to ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$

Dem. Din Prop. 25, cu ajutorul Propozițiilor 23 și 24.

Prop. 27. Pentru orice enunțuri φ și ψ avem $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$ și $\vdash \psi \to \varphi \vee \neg\varphi$.

Dem. Pentru $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$ avem următoarea demonstrație formală

$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ (Prop. 6)

$\vdash (\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)) \to (\varphi \wedge \neg\varphi \to \psi)$ (Prop. 23)

$\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$ m.p.

Conform principiului identității, $\{\psi\} \vdash \neg\varphi \to \neg\varphi$, de unde prin teorema deducției, $\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \neg\varphi)$, adică $\vdash \psi \to \varphi \vee \neg\varphi$.

Obs. Principiul identității în forma $\vdash \neg\varphi \to \neg\varphi$ ne dă $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ (principiul terțului exclus).

Prop. 28. Fie $\Gamma \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ dacă și numai dacă există $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ astfel încât $\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i \to \varphi$.

Dem. Dacă $\Gamma \vdash \varphi$ atunci conf. Prop. 1, (ii) există $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ astfel încât

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \vdash \varphi$$

Aplicând de n-ori teorema deducției

$$\vdash \gamma_1 \to (\gamma_2 \to \dots \to (\gamma_n \to \varphi) \dots)$$

Ținând cont de Prop. 23 avem $\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i \to \varphi$. Reciproc, din $\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i \to \varphi$ cu $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$, deducem conform Prop. 24:

$$\vdash \gamma_1 \to (\gamma_2 \to \dots \to (\gamma_n \to \varphi) \dots)$$

Cu teorema deducției aplicată în sens invers obținem $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \vdash \varphi$, deci $\Gamma \vdash \varphi$.

O mulțime nevidă Σ de enunțuri se numește <u>sistem deductiv</u> dacă $\Sigma \vdash \varphi$ implică $\varphi \in \Sigma$ pentru orice enunț φ.

Lema 29. Dacă Σ este o mulțime de enunțuri atunci sunt echivalente

(a) Σ este sistem deductiv;

(b) Σ conține mulțimea teoremelor formale și $\alpha, \alpha \to \beta \in \Sigma$ implică $\beta \in \Sigma$.

Dem. (a)$\Rightarrow$(b). Dacă $\vdash \varphi$ atunci $\Sigma \vdash \varphi$, deci $\varphi \in \Sigma$. Presupunem că $\alpha, \alpha \to \beta \in \Sigma$, deci $\Sigma \vdash \alpha$, $\Sigma \vdash \alpha \to \beta$ de unde $\Sigma \vdash \beta$, conform m.p. Rezultă $\beta \in \Sigma$

(b)$\Rightarrow$(a) Σ este o mulțime nevidă. Presupunem $\Sigma \vdash \varphi$. Conform Prop. 1,(ii) există $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ astfel încât $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash \varphi$. Aplicând teorema deducției:

$$\vdash \sigma_1 \to (\ldots \to (\sigma_n \to \varphi)\ldots).$$

Cum $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ rezultă $\varphi \in \Sigma$.

Vom nota cu $D(\Sigma)$ sistemul deductiv generat de Σ, adică intersecția sistemelor deductive ce includ pe Σ. Se poate arăta că $D(\Sigma) = \{\varphi \in \Sigma \mid \Sigma \vdash \varphi\}$.

Exercițiu.

$$D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \text{există } \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma, \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \sigma_i \to \varphi\}.$$

Exercițiu: Care din următoarele enunțuri sunt teoreme formale?

$$\vdash [\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \to (\gamma \to \delta)) \to (\alpha \to (\beta \to \delta))]$$

$$\vdash [\alpha \to (\gamma \to \beta)] \to [(\alpha \to (\beta \to \delta)) \to (\alpha \to (\gamma \to (\beta \to \delta)))]$$

$$\vdash [(\delta \to \varepsilon) \to (\gamma \to (\alpha \to \beta))] \to [(\alpha \to (\delta \to \varepsilon)) \to (\delta \to (\gamma \to (\alpha \to \varepsilon)))]$$

§3 Algebra Lindenbaum-Tarski

Acest paragraf conține conține construcția unei algebre Boole asociate canonic sistemului formal L. Proprietățile sintactice ale lui L se vor reflecta în proprietăți booleene, realizându-se trecerea de la sintaxă la algebră.

Lema 1. Pentru orice enunțuri φ, ψ avem

$$\vdash \varphi \text{ și } \vdash \psi \iff \vdash \varphi \wedge \psi$$

Dem. ($\Rightarrow$) Presup. $\vdash \varphi$ și $\vdash \psi$. Cum $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$ (Prop. 20, §2) rezultă $\vdash \varphi \wedge \psi$ prin aplicarea de două ori a lui m.p.

($\Leftarrow$) Rezultă din Propozițiile 16 și 17, §2.

Se definește relația binară $\sim$ pe mulțimea E a enunțurilor lui L:

$$\varphi \sim \psi \overset{def}{\iff} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

Obs. Conform Lemei 1, $\varphi \sim \psi$ dacă și numai dacă ~~[illegible]~~ $\vdash \varphi \to \psi$ și $\vdash \psi \to \varphi$.

Lema 2. $\sim$ este o relație de echivalență pe E.

Dem. Vor trebui verificate următoarele condiții:

(1) $\vdash \alpha \to \alpha$

(2) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$

(3) $\vdash \alpha \to \beta, \vdash \beta \to \gamma \Rightarrow \vdash \alpha \to \gamma$

(1) este principiul identității, (2) rezultă din obs. precedentă, iar (3) este (R1).

Considerăm mulțimea cât $E/\sim$; $\hat{\varphi}$ va fi clasa de echivalență a lui $\varphi \in E$. Definim relația binară $\leq$ pe $E/\sim$:

$$\hat{\varphi} \leq \hat{\psi} \iff \vdash \varphi \to \psi$$

Este necesar să verificăm independența de reprezentanți:

$$\left.\begin{array}{l} \vdash \varphi \to \varphi', \vdash \varphi' \to \varphi \\ \vdash \psi \to \psi', \vdash \psi' \to \psi \end{array}\right\} \Rightarrow (\vdash \varphi \to \psi \iff \vdash \varphi' \to \psi')$$

Presup. $\vdash \varphi \to \psi$. Din $\vdash \varphi' \to \varphi$, $\vdash \varphi \to \psi$ și $\vdash \psi \to \psi'$ rezultă $\vdash \varphi' \to \psi'$ prin aplicarea regulii de deducție (R1).

Lema 3. $\leq$ este o relație de ordine pe $E/\sim$.

Dem. Este necesar să verificăm condițiile următoare

(1) $\vdash \varphi \to \varphi$

(2) $\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \varphi \Rightarrow \varphi \sim \psi$

(3) $\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \chi \Rightarrow \vdash \varphi \to \chi$

care rezultă din principiul identității și din (R1).

Prop. 4. $(E/\sim, \leq)$ este o latice distributivă în care

$\inf(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \widehat{\varphi \wedge \psi}$ și $\sup(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \widehat{\varphi \vee \psi}$.

Dem. Arătăm întâi că $\inf(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \widehat{\varphi \wedge \psi}$ ceea ce revine la a verifica condițiile următoare:

(i) $\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi$

(ii) Dacă $\vdash \chi \to \varphi$ și $\vdash \chi \to \psi$ atunci $\vdash \chi \to \varphi \wedge \psi$.

Condiția (i) rezultă din Propozițiile 16 și 17, iar (ii) din (R4).

Egalitatea $\sup(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \widehat{\varphi \vee \psi}$ revine la a proba că

(iii) $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$, $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$

(iv) Dacă $\vdash \varphi \to \chi$ și $\vdash \psi \to \chi$ atunci $\vdash \varphi \vee \psi \to \chi$

Se folosesc Propozițiile 13 și 14, §2 și (R3). Rezultă că $(E/\sim, \leq)$ este o latice în care $\hat{\varphi} \vee \hat{\psi} = \widehat{\varphi \vee \psi}$ și $\hat{\varphi} \wedge \hat{\psi} = \widehat{\varphi \wedge \psi}$ pt. orice $\varphi, \psi \in E$. Distributivitatea rezultă din Propozițiile 21 și 25, §2.

Obs. Conform Prop. 27, §2 avem $\widehat{\varphi \wedge \neg\varphi} \leq \hat{\psi} \leq \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}$ pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Atunci $\widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}$ este prim element al laticii $E/\sim$, iar $\widehat{\varphi \vee \neg\varphi}$ este ultim element.

Vom nota $0 = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}$, $1 = \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}$ (este evident că definiția nu depinde de reprezentanți).

Prop. 5. $E/\sim$ este o algebră Boole.

Dem. Conform observației precedente, $\hat{\varphi} \wedge \widehat{\neg\varphi} = 0$ și $\hat{\varphi} \vee \widehat{\neg\varphi} = 1$, deci orice element $\hat{\varphi}$ al lui $E/\sim$ admite pe $\widehat{\neg\varphi}$ drept complement: $\neg\hat{\varphi} = \widehat{\neg\varphi}$.

Algebra Boole $(E/\sim, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ poartă numele de algebra Lindenbaum-Tarski asociată sistemului formal L.

Obs. Dacă notăm $p: E \to E/\sim$ surjecția canonică ($p(\varphi) = \hat{\varphi}$ pt. orice $\varphi \in E$) atunci pt. orice $\varphi, \psi \in E$ sunt verificate condițiile următoare:

(a) $p(\varphi \vee \psi) = p(\varphi) \vee p(\psi)$;

(b) $p(\varphi \wedge \psi) = p(\varphi) \wedge p(\psi)$;

(c) $p(\neg\varphi) = \neg p(\varphi)$;

(d) $p(\varphi \to \psi) = p(\varphi) \to p(\psi)$;

(e) $p(\varphi \leftrightarrow \psi) = p(\varphi) \leftrightarrow p(\psi)$.

Egalitățile (a), (b), (c) sunt chiar definițiile operațiilor din $E/\sim$, (d) revine la a arăta că $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \to \psi)$ (exercițiu), iar (e) rezultă din (b) și (d). Cele cinci egalități de mai sus arată modul cum conectorii sunt convertiți în operații booleene.

Lema 6. Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi$ dacă și numai dacă $\hat{\varphi} = 1$.

Dem. Trebuie să demonstrăm: $\vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Presupunem $\vdash \varphi$. Cum $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi \to \varphi)$ (conform (A1)), rezultă $\vdash \varphi \vee \neg\varphi \to \varphi$; totdeauna are loc $\vdash \varphi \to \varphi \vee \neg\varphi$, deci $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Reciproc, presupunem că $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Dar $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ (principiul terțului exclus), deci prin m.p. $\vdash \varphi$.

Obs. Lema 6 oferă o metodă algebrică pentru verificarea dacă un enunț este teoremă formală.

Exemplu. Să se arate că

$\vdash [\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \to (\beta \to \delta)) \to (\alpha \to (\beta \to \delta))]$

Notând $x = \hat{\alpha}$, $y = \hat{\beta}$, $z = \hat{\gamma}$ și $s = \hat{\delta}$, conform Lemei 6, este suficient să stabilim identitatea booleană.

$$[x \to (y \to z)] \to [(x \to (z \to s)) \to (x \to (y \to s))] = 1$$

ceea ce este echivalent cu

$$x \to (y \to z) \leq (x \to (z \to s)) \to (x \to (y \to s))$$

Dar, un calcul boolean în algebra Lindenbaum-Tarski $E/\sim$ ne dă

$$\begin{aligned}(x \to (z \to s)) \to (x \to (y \to s)) &= (\bar{x} \vee \bar{z} \vee s)^{-} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee s \\ &= (x \wedge z \wedge \bar{s}) \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee s \\ &= \bar{x} \vee \bar{y} \vee z = x \to (y \to z)\end{aligned}$$

ceea ce termină verificarea.

Fie Σ o mulțime de enunțuri ale lui L. Se definește următoarea relație binară pe E:

$$\begin{aligned}\varphi \sim_{\Sigma} \psi &\iff \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \\ &\iff \Sigma \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \to \varphi.\end{aligned}$$

Procedând analog ca mai sus se poate arăta că $\sim_{\Sigma}$ este o relație de echivalență pe E și că $E/\sim$ are o structură canonică de algebră Boole (= algebra Lindenbaum-Tarski a lui Σ). Notăm cu $\varphi/_{\Sigma}$ clasa de echivalență a lui $\varphi \in E$.

Atunci

$$\varphi/_{\Sigma} \vee \psi/_{\Sigma} = (\varphi \vee \psi)/_{\Sigma}\ ;\quad \varphi/_{\Sigma} \wedge \psi/_{E} = (\varphi \wedge \psi)/_{\Sigma}\ ;\quad \neg(\varphi/_{\Sigma}) = \neg\varphi/_{\Sigma}.$$

$$\varphi/_{\Sigma} \leq \psi/_{\Sigma} \iff \Sigma \vdash \varphi \to \psi$$

$$\varphi/_{\Sigma} = 1 \iff \Sigma \vdash \varphi$$

Pentru $\Sigma = \emptyset$ obținem algebra Lindenbaum-Tarski $E/\sim$.

§4. Semantica sistemului formal L

Până acum am dezvoltat sistemul L la nivel formal, fără a atribui enunțurilor valori de adevăr. Acest lucru va fi realizat în paragraful de față prin noțiunea de interpretare.

O <u>interpretare</u> a lui L este o funcție oarecare $h: V \to L_2$.

<u>Prop. 1</u>. Pentru orice interpretare $h: V \to L_2$ există o funcție unică $\tilde{h}: E \to L_2$ ce satisface proprietățile următoare:

(a) $\tilde{h}(u) = h(u)$ pentru orice $u \in V$;

(b) $\tilde{h}(\neg\varphi) = \neg\tilde{h}(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$;

(c) $\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

<u>Dem</u>. Definiția lui $\tilde{h}$ se face prin inducție, urmărind clauzele (a)-(c). Demonstrarea unicității lui $\tilde{h}$ se face tot prin inducție. Fie $g: E \to L_2$ astfel încât

(a') $g(u) = h(u)$ pentru orice $u \in V$;

(b') $g(\neg\varphi) = \neg g(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$;

(c') $g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Vom arăta că pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = g(\alpha)$. Distingem trei cazuri pentru α:

- $\alpha \in V$: $g(\alpha) = h(\alpha) = \tilde{h}(\alpha)$
- $\alpha = \neg\varphi$: $g(\alpha) = \neg g(\varphi) = \neg\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\neg\alpha)$ pentru că $g(\varphi) = \tilde{h}(\varphi)$ (ip. inducției)
- $\alpha = \varphi \to \psi$: $g(\alpha) = g(\varphi) \to g(\psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\alpha)$ pt. că $g(\varphi) = \tilde{h}(\varphi)$ și $g(\psi) = \tilde{h}(\psi)$ (ip. ind.)

<u>Consecințe imediate</u>. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$:

(d) $\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$

(e) $\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$

(f) $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$.

<u>Obs</u>. Dacă $h: V \to L_2$ este o interpretare atunci există un unic morfism boolean $\bar{h}: E/\sim \to L_2$ care face comutativă următoarea diagramă.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde h"] & E/\sim \arrow[dl, "\bar h"] \\
& L_2 &
\end{tikzcd}$$

$\bar h$ este definit de $\bar h(\hat\varphi) = \tilde h(\varphi)$ pt. orice $\varphi \in E$.

Enunțul φ este <u>adevărat</u> în interpretarea $h : V \to L_2$ dacă $\tilde h(\varphi) = 1$; φ este <u>fals</u> în interpretarea h dacă $\tilde h(\varphi) = 1$. Un enunț φ este universal adevărat ($\models \varphi$) dacă este adevărat în orice interpretare.

<u>Obs</u>. Interpretarea unui enunț este valoarea este valoarea 0 sau 1 obținută atunci când tuturor variabilelor propoziționale ce intră în componența sa le atribuim valori din L_2. Un enunț universal adevărat va avea valoarea 1 pentru orice valori din L_2 luate de variabilele propoziționale ce ~~...~~ apar în φ.

<u>Prop. 2</u>. Pentru orice enunț φ, $\vdash \varphi$ implică $\models \varphi$.

<u>Dem</u>. ~~Vom~~ ~~Presupu~~ Vom arăta că dacă $\vdash \varphi$ atunci $\tilde h(\varphi) = 1$ pentru orice interpretare $h : V \to L$. Se procedează prin inducție asupra modului cum s-a definit $\vdash \varphi$.

Considerăm întâi cazul axiomelor:

(A1) φ este de forma $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

$\tilde h(\varphi) = \tilde h(\alpha) \to (\tilde h(\beta) \to \tilde h(\alpha)) = \neg \tilde h(\alpha) \vee \neg \tilde h(\beta) \vee \tilde h(\alpha) = 1$

(A2) φ este de forma $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.

Dacă notăm $x = \tilde h(\alpha)$, $y = \tilde h(\beta)$, $z = \tilde h(\gamma)$ atunci $\tilde h(\varphi) = (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ $= 1$ după cum arată o simplă verificare în L_2.

(A3) φ este de forma $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$.

Este suficient să probăm $(\bar x \to \bar y) \to (y \to x) = 1$ în L_2

Presup. acum că ~~...~~ $\vdash \varphi$ a fost obținut prin m.p. din $\vdash \psi$, $\vdash \psi \to \varphi$. Ipoteza inducției conduce la $\tilde h(\psi) = 1$ și $\tilde h(\psi \to \varphi) = 1$. Atunci

$$1 = \tilde h(\psi) \to \tilde h(\psi) = 1 \to \tilde h(\varphi) = \tilde h(\varphi)$$

și demonstrația s-a încheiat.

<u>Corolar 3</u>. Pentru orice enunț φ nu putem avea $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\varphi$.

<u>Dem</u>. Dacă ar exista un enunț φ astfel încât $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\varphi$ atunci pentru orice interpretare h am avea $\tilde{h}(\varphi)=1$ și $\neg\tilde{h}(\varphi)=\tilde{h}(\neg\varphi)=1$. Contradicție.

<u>Prop. 4</u>. Pentru orice enunț φ avem

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi.$$

<u>Dem</u>. ($\Rightarrow$) Prop. 2.

($\Leftarrow$) Presupunem că $\nvdash \varphi$ (φ nu este teoremă formală). Trecând la algebra Lindenbaum-Tarski $E/\sim$ și aplicând Lema 6, §3 rezultă $\hat{\varphi}\neq 1$. Aplicăm teorema de reprezentare a lui Stone pentru algebra Boole $E/\sim$. Atunci există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d: E/\sim \to L_2^X$. Din injectivitatea lui d rezultă $d(\hat{\varphi})\neq 1$ în L_2^X deci există $x\in X$ astfel încât $d(\hat{\varphi})(x)\neq 1$ în L_2.

Considerăm proiecția $\pi_x : L_2^X \to L_2$ definită prin $\pi_x(f)=f(x)$ pentru orice $f\in L_2^X$.

π_x este morfism boolean. Să luăm interpretarea h dată de compunerea următoarelor morfisme booleene

$$\begin{tikzcd} V\subseteq E \arrow[r, "p"] \arrow[rrr, bend right, "h"'] & E/\sim \arrow[r, "d"] & L_2^X \arrow[r, "\pi_x"] & L_2 \end{tikzcd}$$

Vom stabili că

(*) $\tilde{h}(\alpha)=d(\hat{\alpha})(x)$ pentru orice $\alpha\in E$.

Demonstrăm (*) prin inducție asupra enunțului α.

(a) $\alpha\in V$

$\tilde{h}(\alpha)=h(\alpha)=\pi_x(d(p(\alpha)))=d(\hat{\alpha})(x)$.

(b) $\alpha=\neg\beta$ și ip. ind. funcționează pt. β, deci $\tilde{h}(\beta)=d(\hat{\beta})(x)$. Atunci

$\tilde{h}(\alpha)=\neg\tilde{h}(\beta)=\neg d(\hat{\beta})(x)=(\neg d(\hat{\beta}))(x)=d(\neg\hat{\beta})(x)=d(\widehat{\neg\beta})(x)=d(\hat{\alpha})(x)$

(c) $\alpha = \beta \to \gamma$ şi ip. ind. funcţionează pt. β şi γ, deci $\tilde{h}(\beta) = d(\hat{\beta})(x)$ şi $\tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\gamma})(x)$. Atunci

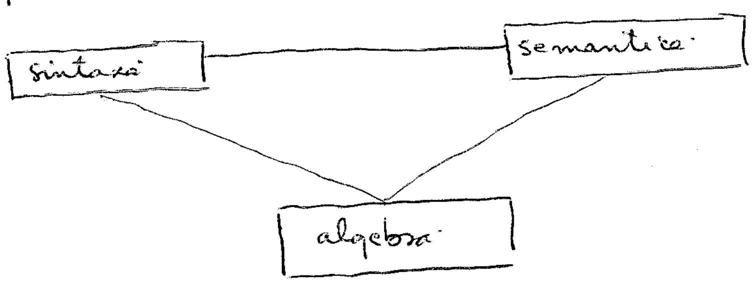
$$\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\beta) \to \tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\beta})(x) \to d(\hat{\gamma})(x) = (d(\hat{\beta}) \to d(\hat{\gamma}))(x) =$$
$$= d(\hat{\beta} \to \hat{\gamma})(x) = d(\widehat{\beta \to \gamma})(x) = d(\hat{\alpha})(x).$$

Proprietatea (*) a fost demonstrată. Aplicând (*) pentru $\alpha = \varphi$ rezultă $\tilde{h}(\varphi) = d(\hat{\varphi})(x) \neq 1$, deci $\not\models \varphi$.

Propoziţia 4 se numeşte <u>teorema de completitudine</u> a lui L.

<u>Comentarii</u> (i) Teorema de completitudine răspunde unei probleme naturale. Relativ la sistemul logic L s-au definit două tipuri de "adevăruri": teoremele formale, care sunt "adevărurile sintactice" ale lui L şi enunţurile universal adevărate, "adevăruri semantice" ale lui L. În mod natural s-a pus problema comparării acestor două tipuri de "adevăruri", iar teorema de completitudine spune că ele sunt echivalente. De asemenea, teorema de completitudine ne dă un procedeu comod de verificare a faptului că un enunţ este o teoremă formală (procedeu ce poate fi programat).

(ii) Demonstraţia prezentată mai sus este de natură algebrică. Ideea fundamentală este trecerea la algebra Lindenbaum-Tarski şi invocarea teoremei lui Stone pentru găsirea interpretării necesare în demonstraţie. Această trecere prin algebră aruncă o lumină mai completă asupra relaţiei dintre sintaxă şi semantică, care are de fapt şi un substrat algebric. Pe scurt, sistemul formal L a fost analizat din perspectiva triunghiului:



§5 Mulțimi consistente. Teorema de completitudine extinsă (tare)

In acest paragraf vom studia inferențe și vom demonstra teorema de completitudine tare. Demonstrația nu este algebrică și va utiliza ca instrument noțiunea de mulțime consistentă.

O mulțime Σ de enunțuri este *inconsistentă* dacă $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice enunț φ al lui L.

Σ este *consistentă* dacă nu este inconsistentă.

Prop. 1. Fie Σ o mulțime de enunțuri; Sunt echivalente:

(1) Σ este inconsistentă;

(2) Există $\varphi \in E$ astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$;

(3) Există $\varphi \in E$ astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg\varphi$;

(4) $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$;

(5) Există $\varphi \in E$ astfel încât $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.

Dem. (1) $\Rightarrow$ (2) Evident

(2) $\Rightarrow$ (3) Rezultă din $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi \to \varphi$ și $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi \to \neg\varphi$ și m.p. (Prop. 16 și 17, §2)

(3) $\Rightarrow$ (4) Cf. Prop. 12, §2 avem $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\psi \to \psi))$ pt. orice $\psi \in E$. Presupunând $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg\varphi$ rezultă $\Sigma \vdash \neg(\psi \to \psi)$ (aplicând de două ori m.p.)

(4) $\Rightarrow$ (5) Evident

(5) $\Rightarrow$ (1) Fie $\varphi \in E$ cu $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ și $\psi \in E$. Conform (A1),

$$\Sigma \vdash (\varphi \to \varphi) \to (\neg\psi \to (\varphi \to \varphi))$$

Dar $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$, deci $\Sigma \vdash \neg\psi \to (\varphi \to \varphi)$ prin m.p. Conform Prop. 9, §2

$$\Sigma \vdash (\neg\psi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\neg(\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\psi).$$

Aplicând de două ori m.p., $\Sigma \vdash \neg\neg\psi$. Insă $\Sigma \vdash \neg\neg\psi \to \psi$ (Prop. 8, §2), deci $\Sigma \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in E$. Atunci Σ este inconsistentă.

Prop. 2. Dacă $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$ atunci $\Sigma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă dacă și numai dacă $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Dem. Dacă $\Sigma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă atunci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, deci, prin teorema deducției, $\Sigma \vdash \varphi \to \neg\varphi$. Aplicând Prop. 11, §2 și m.p. rezultă $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Reciproc, presup. că $\Sigma \vdash \neg\varphi$, de unde $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ și $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$. Conf. Prop. 5, §2 avem $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$, de unde prin m.p. $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in E$.

Cor. 3. $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă $\Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$

Dem. Se folosește faptul că: $\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \neg\neg\varphi$.

Exemplu. $\emptyset$ este o mulțime consistentă (cf. Corolarului 3, §4), iar E este inconsistentă.

Obs. Dacă Σ este consistentă atunci sistemul deductiv $D(\Sigma)$ generat de Σ este consistent.

O mulțime consistentă Δ este maximal consistentă dacă pentru orice mulțime consistentă Σ avem: $\Delta \subseteq \Sigma$ implică $\Delta = \Sigma$.

Prop. 4. Pt. orice mulțime consistentă Σ există o mulțime maximal consistentă Δ astfel încât $\Sigma \subseteq \Delta$.

Dem. Fie familia de mulțimi $\mathcal{A} = \{\Gamma \subseteq E \mid \Gamma$ consistentă și $\Sigma \subseteq \Gamma\}$.
Evident că $\Sigma \in \mathcal{A}$. Vom arăta că $(\mathcal{A}, \subseteq)$ este inductiv ordonată. Fie $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ o familie total ordonată de mulțimi din $\mathcal{A}$: pt. orice $i, j \in I$, $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ sau $\Gamma_j \subseteq \Gamma_i$.
Vom arăta că $\Gamma_0 = \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$ este un majorant al familiei $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$. In primul rând trebuie demonstrat că $\Gamma_0 \in \mathcal{A}$.

Presup. prin absurd că Γ_0 este inconsistentă deci există $\varphi \in E$ astfel încât $\Gamma_0 \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.
Conform Prop. 1, (ii), §2 există o mulțime finită $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \Gamma_0$ astfel încât $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \vdash \varphi$. Observam că există indicii $i_1, \dots, i_n \in I$ astfel încât $\psi_1 \in \Gamma_{i_1}, \dots, \psi_n \in \Gamma_{i_n}$. Cum $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ este total ordonată va exista $k \in \{i_1, \dots, i_n\}$ astfel încît toți $\Gamma_{i_1}, \dots, \Gamma_{i_n}$ sunt incluși în Γ_k. Atunci $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \Gamma_k$ deci $\Gamma_k \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.
Aceasta contrazice consistența lui Γ_k, deci Γ_0 este consistentă. Cum $\Sigma \subseteq \Gamma_0$, rezultă că $\Gamma_0 \in \mathcal{A}$. Este evident că Γ_0 este majorant al familiei $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$.

Aplicarea axiomei lui Zorn asigură existența unui element maximal Δ al lui $(\mathcal{A}, \subseteq)$ deci a unei mulțimi maximal consistente Δ ce include pe Σ.

Obs. Se va observa o asemănare în demonstrația acestei propoziții și demonstrația unui rezultat de la algebre Boole: orice filtru propriu se scufundă într-un ultrafiltru.

<u>Prop. 5</u>. Orice mulţime maximal consistentă Δ are următoarele proprietăţi:

(i) Δ este sistem deductiv ($\Delta \vdash \psi \Rightarrow \psi \in \Delta$);

(ii) Dacă $\varphi \vee \psi \in \Delta$ atunci $\varphi \in \Delta$ sau $\psi \in \Delta$;

(iii) Pentru orice $\psi \in E$, $\psi \in \Delta$ sau $\neg\psi \in \Delta$;

(iv) Pentru orice $\psi, \chi \in E$ are loc echivalenţa:

$$\psi \to \chi \in \Delta \iff \neg\psi \in \Delta \text{ sau } \chi \in \Delta.$$

~~Dem. (i) Presup. prin abs. că există $\varphi, \psi \in \Delta$ astfel încât $\varphi \vee \psi \in \Delta$, $\varphi \notin \Delta$ şi $\psi \notin \Delta$.~~
~~Ca mai sus se deduce $\Delta \cup \{\varphi\}$ şi $\Delta \cup \{\psi\}$ sunt inconsistente, deci~~

<u>Dem.</u> (i) Presup. prin absurd că există $\psi \in E$ astfel încât $\Delta \vdash \psi$ şi $\psi \notin \Delta$. Atunci $\Delta \subsetneq \Delta \cup \{\psi\}$, de unde, conform maximalităţii lui Δ, rezultă că $\Delta \cup \{\psi\}$ este inconsistentă. Aplicând Prop. 2 rezultă $\Delta \vdash \neg\psi$, ceea ce contrazice consistenţa lui Δ.

(ii) Presup. prin absurd că există $\varphi, \psi \in \Delta$ astfel încât $\varphi \vee \psi \in \Delta$, $\varphi \notin \Delta$ şi $\psi \notin \Delta$. Ca mai sus se deduce că $\Delta \cup \{\varphi\}$, $\Delta \cup \{\psi\}$ sunt inconsistente, deci $\Delta \vdash \neg\varphi$ şi $\Delta \vdash \neg\psi$ (cf. Prop. 2). Conform Prop. 12, §2 avem $\vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg(\neg\varphi \to \psi))$, de unde, prin m.p., $\Delta \vdash \neg(\neg\varphi \to \psi)$. Această ultimă proprietate spune că $\Delta \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$, ceea ce contrazice consistenţa lui Δ.

(iii) Rezultă din (ii) şi din $\vdash \psi \vee \neg\psi$;

(iv) Rezultă din (iii) şi din: $\vdash \varphi \to \psi \iff \vdash \neg\varphi \vee \psi$

O interpretare $h: V \to L_2$ este un <u>model</u> al lui $\Sigma \subseteq E$ dacă $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pt. orice $\sigma \in \Sigma$. Notăm cu $h \models \Sigma$ faptul că h este un model al lui Σ.

<u>Prop. 6</u>. Orice mulţime consistentă Σ admite un model.

<u>Dem.</u> Fie Δ o mulţime maximal consistentă astfel încât $\Sigma \subseteq \Delta$. Considerăm interpretarea h definită prin $h(v) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v \in \Delta \\ 0, & \text{dacă } v \notin \Delta, \end{cases}$ pentru orice $v \in V$.

Pentru orice $\varphi \in E$ avem echivalenţa

(*) $\tilde{h}(\varphi) = 1 \iff \varphi \in \Delta$.

Dem. lui (*) se face prin inducţie relativ la φ.

(a) Dacă $\varphi \in V$, (*) este chiar definiţia lui h.

(b) Presup. $\varphi = \neg\alpha$. Folosind ip. inducţiei şi Prop. 5, (iii):

$\tilde{h}(\varphi) = 1 \iff \tilde{h}(\alpha) = 0 \iff \alpha \notin \Delta \iff \varphi \in \Delta$.

(e) Presupunem $\varphi = \alpha \to \beta$. Din ip. inducției și Prop. 5, (iii) și (iv)

$$\tilde{h}(\varphi) = 1 \iff \tilde{h}(\alpha) \to \tilde{h}(\beta) = 1$$
$$\iff \tilde{h}(\alpha) = 0 \text{ sau } \tilde{h}(\beta) = 0 \qquad (\text{suntem în } L_2)$$
$$\iff \alpha \notin \Delta \text{ sau } \beta \in \Delta$$
$$\iff \neg\alpha \in \Delta \text{ sau } \beta \in \Delta$$
$$\iff \alpha \to \beta \in \Delta$$
$$\iff \varphi \in \Delta.$$

Folosind (*) și $\Sigma \subseteq \Delta$ rezultă că $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$.

Dacă $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$ atunci spunem că φ se deduce semantic din ipotezele Σ ($\Sigma \models \varphi$) dacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$ pentru orice model h al lui Σ.

Teorema de completitudine extinsă. Pentru orice $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$ avem echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \iff \Sigma \models \varphi.$$

Dem. ($\Rightarrow$) Prin ind. asupra modului de definiție al noțiunii $\Sigma \vdash \varphi$.

($\Leftarrow$) Dacă $\Sigma \nvdash \varphi$ atunci $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ este consistentă (Corolar 3). Aplicând Prop. 5, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ admite un model h. Atunci h este un model al lui Σ și $\tilde{h}(\varphi) = 0$, deci $\Sigma \not\models \varphi$.

Obs. Teorema de completitudine extinsă stabilește echivalența între inferența sintactică și cea semantică. Pt. $\Sigma = \emptyset$ se obține teorema de completitudine demonstrată în §3: $\vdash \varphi \iff \models \varphi$.

Exercițiu. Folosind algebra Lindenbaum-Tarski E/Δ asociată unei mulțimi $\Delta \subseteq E$ și aplicând teorema lui Stone acestei algebre Boole să se dea o demonstrație algebrică teoremei de completitudine extinsă (vezi demonstrația din §3).

§6: De la teorema de completitudine la teorema lui Stone

Am văzut că teorema de completitudine extinsă poate fi dedusă folosind teorema lui Stone. Vom da acum o demonstrație teoremei de reprezentare a lui Stone folosind teorema de completitudine extinsă:

Teorema lui Stone. Pentru orice algebră Boole B există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d: B \to L_2^X$.

Dem. (a) Considerăm sistemul formal al calculului propozițional L în care mulțimea V a variabilelor este B. E este mulțimea enunțurilor, $E/\sim$ este algebra Lindenbaum-Tarski asociată și $p: E \to E/\sim$ surjecția canonică. Se poate arăta (imitând demonstr. Prop. 1, §4) că există un morfism boolean surjectiv $f: E/\sim \to B$ astfel încât următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "p|_B"] \arrow[dr, "1_B"'] & E/\sim \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Atunci $F = f^{-1}(1) = \{\hat{\varphi} \mid f(\hat{\varphi}) = 1\}$ este un filtru propriu în $E/\sim$ și avem un izomorfism boolean $\lambda: (E/\sim)/_F \longrightarrow B$ $(: \lambda(\hat{\varphi}/_F) = f(\hat{\varphi})$ pt. orice $\varphi \in E)$

(b) Fie F un filtru propriu în $E/\sim$ (eventual cel de la (a)) și $\Delta = p^{-1}(F)$. Δ este un sistem deductiv $\underbrace{\text{, în } L}_{\text{consistent}}$ și pentru orice $\varphi, \psi \in E$ au loc echivalențele:

$\hat{\varphi}/_F = \hat{\psi}/_F \Leftrightarrow \hat{\varphi} \leftrightarrow \hat{\psi} \in F \Leftrightarrow \widehat{\varphi \leftrightarrow \psi} \in F \Leftrightarrow \varphi \leftrightarrow \psi \in \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \varphi/_\Delta = \psi/_\Delta$,

unde $\varphi/_\Delta$ este clasa de echivalență a lui φ în raport cu $\sim_\Delta$. Dacă $E/_\Delta = E/\sim_\Delta$ este algebra Lindenbaum-Tarski asociată lui Δ atunci echivalențele de mai sus spun că funcția $\Phi: (E/\sim)/_F \longrightarrow E/_\Delta$ definită prin: $\Phi(\hat{\varphi}/_F) = \varphi/_\Delta$ pentru orice $\varphi \in E$, este un izomorfism boolean.

(c) Presupunem că Δ este o mulțime consistentă (eventual cea de la punctul (b)) și X este mulțimea modelelor lui Δ:

$X = \{h: V \to L_2 \mid h \models \Delta\}$.

Conform teoremei de completitudine extinsă (presupusă anterior demonstrată) $X \neq \emptyset$. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$ avem echivalențele:

$$\begin{aligned}
\varphi/_{\Delta} = \psi/_{\Delta} &\iff \Delta \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \\
&\iff \Delta \models \varphi \leftrightarrow \psi \\
&\iff \tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \text{ pt. orice } h \in X \\
&\iff \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1 \text{ pt. orice } h \in X \\
&\iff \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) \text{ pt. orice } h \in X.
\end{aligned}$$

Definim funcția $\lambda : E/_{\Delta} \to L_2^X$ prin $\lambda(\varphi/_{\Delta})(h) = \tilde{h}(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$ și $h \in X$. Echivalențele de mai sus arată că funcția λ este bine definită și că ea este injectivă. Este ușor de văzut că λ este morfism boolean. În consecință, λ este un morfism boolean injectiv.

Asamblând pașii (a), (b), (c) vom obține teorema lui Stone. Considerăm compunerea morfismelor booleene (toate injective) de la acești trei pași:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\sim"] \arrow[rrr, bend right, "d"'] & (E/\sim)/_F \arrow[r, hook, "\Phi"] & E/_{\Delta} \arrow[r, hook, "\lambda"] & L_2^X
\end{tikzcd}$$

Am obținut un morfism boolean injectiv $d : B \hookrightarrow L_2^X$.

<u>Obs</u>. În demonstrația teoremei lui Stone și cea a teoremei de completitudine extinsă s-a folosit axioma lui Zorn. Într-o axiomatizare a teoriei mulțimilor fără axioma lui Zorn enunțurile celor două teoreme apar ca proprietăți echivalente.