Curs 9

Variabile aleatoare continue

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a.
Spunem că v.a. X este continuă (absolut continuă) dacă există o funcție $f(x) \geq 0$ cu proprietatea că

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,dx \quad , \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

↳ intervale sau reuniuni finite sau numărabile de intervale

Funcția $f(x)$ se numește densitate de repartiție

Reamintim: Dacă X era o v.a. discretă atunci pentru $A \subseteq \mathbb{R}$ aveam că

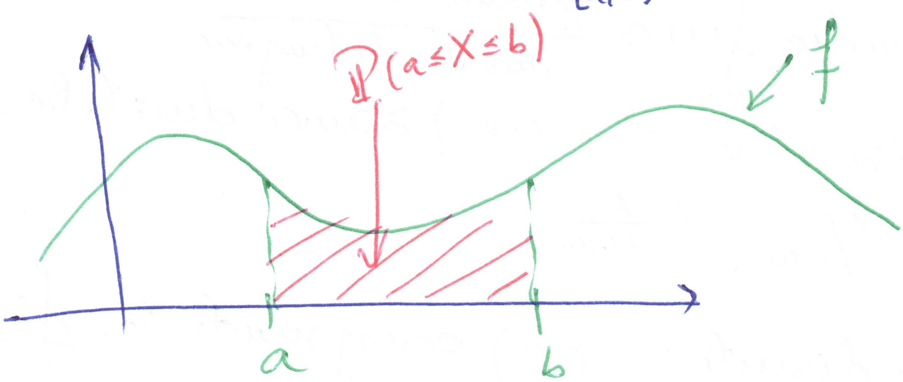
$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{\substack{\{x \mid x \in A\} \\ \in Im(X)}} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\{x \in Im X \mid x \in A\}} p_X(x)$$

↳ fct. de masă în x

În cazul discret avem $\sum$ iar în cel cont. avem $\int$.

În particular, pt $A = [a,b]$ avem (pt cazul cont.)

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$



Dacă $A = \mathbb{R}$ atunci

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

(P) Densitatea de repartiție f a unei v.a continue trebuie să satisfacă următoarele prop:

a) $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

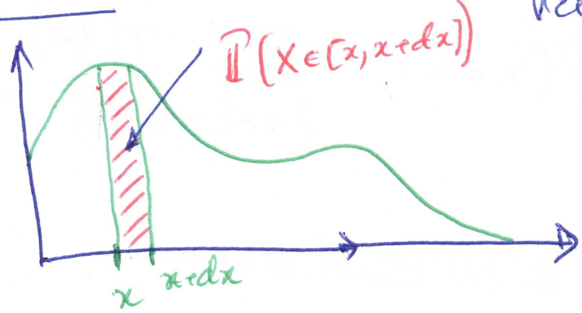
Obs: Dacă $A = \{a\}$, $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X=a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Astfel,

$$\mathbb{P}(a \le X \le b) = \mathbb{P}(a < X \le b) = \mathbb{P}(a \le X < b) = \mathbb{P}(a < X < b)$$

Interpretare: Vrem $\mathbb{P}(X \in [x, x+dx]) = \int_{[x,x+dx]} f(t)\,dt$



$$= \int_x^{x+dx} f(t)\,dt$$

Pentru dx foarte mic putem aproxima

$$\int_x^{x+dx} f(t)\,dt \simeq f(x)\,dx$$

aria dreptunghiului

Astfel putem vedea $f(x) \simeq \dfrac{\text{probabilitatea}}{\text{unitatea de lungime}}$

Dacă X este măsurat în cm (u.m.) atunci densitatea f este măsurată în $1/\text{cm}$ $\left(\frac{1}{\text{u.m.}}\right)$

Analogia cu v.a discrete: $p(x)$ corespunde la $f(x)\,dx$

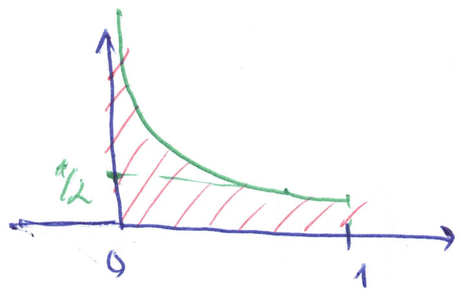
v.a discrete	v.a continue
Σ	$\int$
$p(x)$	$f(x)\,dx$

Obs: Densitatea de repartiție **nu** este o probabilitate.

Exp: (O densitate poate lua valori oricât de mari)

v.a. X cu densitatea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$$



a) $f(x) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$= \sqrt{x} \Big|_0^1 = 1$$

Funcția de rep. pt v.a. X este $F: \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Reamintim proprietățile fct de rep:

a) F este crescătoare

b) F este continuă la dreapta

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ și $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

În cazul în care v.a. X este continuă cu densitatea f avem

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{P}(X \in (-\infty, x])$

Din teorema fundamentală a analizei știm că dacă f este continuă în x_0 atunci F este derivabilă în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$

Obs. Dacă f este continuă atunci $F'(x) = f(x)$, $\forall x$

Pentru a găsi densitatea atunci când cunoaștem funcția de repartiție folosim relația $\boxed{F'(x) = f(x).}$

În caz contrar, (știm densitatea și vrem fct de repartiție), atunci

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.}$$

Exp: Considerăm o v a X cu densitatea f definită prin

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{(Logistică)}$$

Vrem să calculăm:

a) $F(x) = ?$

b) $\mathbb{P}(-2 < X < 2) = ?$

Sol: a)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt \underset{du = e^t dt}{\overset{u = e^t}{=}} \int_0^{e^x} \frac{1}{(1+u)^2}\,du$$

$$= \left(-\frac{1}{1+u}\right)\Big|_0^{e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

b)

$$\mathbb{P}(-2<X<2) = \mathbb{P}(X<2) - \mathbb{P}(X<-2)$$
$$= \mathbb{P}(X\le 2) - \mathbb{P}(X \le -2)$$
$$= F(2) - F(-2)$$

sau

$$\mathbb{P}(-2<X<2) = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx \overset{u = 1+e^x}{=} \int_{1+e^{-2}}^{1+e^2} \frac{1}{u^2}\,du$$

În general,

$$\mathbb{P}(X \in (a,b]) = F(b) - F(a) \quad , \forall a < b$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \le a) = 1 - F(a)$$
$$= \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Media și momentele v.a continue :

Reamintim că în cazul v.a. discrete, X, media era definită

i) $\mathbb{E}[X] = \sum_x x\, p_X(x)$

ii) $\mathbb{E}[X^k] = \sum_x x^k p_X(x)$ (momentul de ordin k)

iii) $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$ (media unei funcții de v.a X)

Def: Fie X o v.a continuă cu densitatea de repartiție f.

Media v.a X este definită prin

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}$$

dacă $\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx < \infty$. În caz contrar spunem că media nu există.

Obs: Se observă analogia (discret vs cont.) $\sum \to \int$ și
$p_X(x) \to f(x)dx$

În mod similar, momentul de ordin k al v.a X este

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

iar media unei funcții de v.a. X este:

$$\boxed{E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx}$$

De asemenea, varianța v.a X este

$$Var(X) = E[(X-E[X])^2]$$
$$= E[X^2] - E[X]^2 \geq 0$$

Proprietățile mediei și ale varianței de la v.a discrete rămân valabile:

a) Dacă $X \geq 0$ atunci $E[X] \geq 0$

b) Dacă $X = c$ atunci $E[X] = c$

c) Dacă $X \geq Y$ atunci $E[X] \geq E[Y]$

d) $E[aX+bY] = aE[X] + bE[Y]$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

e) $Var(X) \geq 0$

f) Dacă $X = c$ atunci $Var(X) = 0$

g) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

h) Dacă X și Y sunt independente atunci

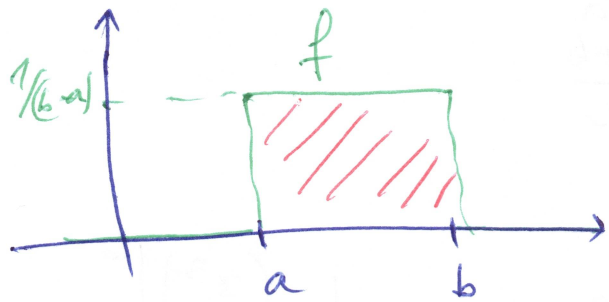
$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$ și

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Uniformă:

Def: O v.a. U este repartizată uniform pe intervalul (a,b) dacă admite densitatea de repartiție

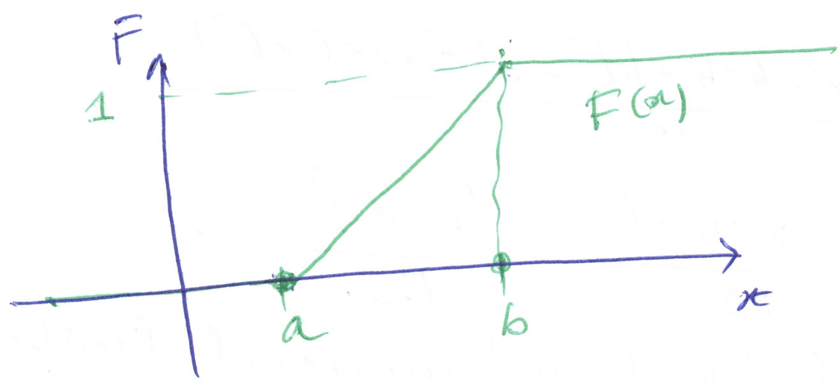
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a < x < b \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$$



Notație: $U \sim \mathcal{U}((a,b))$
$(\mathcal{U}(a,b))$

Funcția de repartiție $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \int_a^x f(t)\,dt = \frac{x-a}{b-a} & , a < x < b \\ 1 & , x \geq b \end{cases}$$

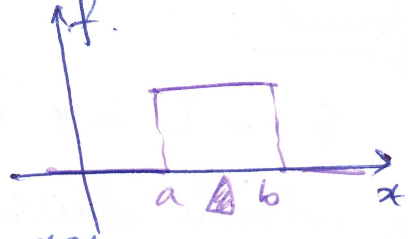


Dacă $U \sim \mathcal{U}((0,1))$ ce se întâmplă cu $V = a + (b-a)U$?

Variabila $V \sim \mathcal{U}((a,b))$

$$F_V(x) = \mathbb{P}(V \leq x) = \mathbb{P}(a + (b-a)U \leq x)$$
$$= \mathbb{P}\left(U \leq \frac{x-a}{b-a}\right) = \frac{x-a}{b-a} \text{ pt } x \in (a,b)$$

Fie $U \sim \mathcal{U}((a,b))$



$$\mathbb{E}[U] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x) \quad , \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[U] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(U) = \mathbb{E}[U^2] - \mathbb{E}[U]^2$$

$$\mathbb{E}[U^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\left.\left(\frac{x^3}{3}\right)\right|_a^b$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(U) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3(a^2+2ab+b^2)}{12}$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Obs: Putem folosi și transformarea de locație-scală

$U = a + (b-a)\tilde{U}$ cu $\tilde{U} \sim \mathcal{U}((0,1))$, $f_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

$$\mathbb{E}[\tilde{U}] = \int_0^1 x\, dx = 1/2$$

unde $\mathbb{E}[\tilde{U}^2] = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$

$$Var(\tilde{U}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$