Nicolae Cotfas   Liviu Adrian Cotfas

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

EDITURA UNIVERSITĂŢII DIN BUCUREŞTI

Introducere

Analiza matematică este o componentă esenţială a aparatului matematic implicat în modelele teoretice utilizate în fizică. Nu este posibilă o descriere adecvată sistemelor fizice şi înţelegerea proceselor care au loc fără cunoaşterea analizei matematice.

Pentru a uşura înţelegerea, noţiunile şi rezultatele noi sunt prezentate ca extinderi ale unora studiate anterior. In general, punctul de plecare ales este un rezumat concis al unor noţiuni şi rezultate studiate în liceu sau exemple concrete adecvate.

Cartea se bazează pe cursul predat timp de mai mulţi ani de primul autor la Facultatea de Fizică, Universitatea Bucureşti. Noţiunile si rezultatele teoretice au fost amplu ilustrate de al doilea autor prin inserarea unor exerciţii şi a unor aplicaţii bazate pe programul MATHEMATICA.

Bucureşti, 2010

Nicolae Cotfas
Liviu Adrian Cotfas

Cuprins

Capitolul 1

Mulţimi şi funcţii

1.1 Mulţimi

1.1.1 Noţiunea de *mulţime* are un rol fundamental în analiză. Vom utiliza notaţia

$$x \in A$$

citită x *aparţine lui* A, pentru a indica faptul că x este element al mulţimii A şi

$$x \notin A$$

pentru a indica contrariul. Spunem că A este *submulţime* a lui B şi scriem

$$A \subseteq B$$

dacă fiecare element al lui A aparţine lui B. In caz contrar scriem

$$A \not\subseteq B.$$

Două mulţimi sunt numite *egale* dacă sunt formate din aceleaşi elemente

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subseteq B \quad \text{si} \quad B \subseteq A.$$

Mulţimea care nu contine niciun element, numită *mulţimea vidă*, este notată cu $\emptyset$.

1.1.2 Mulţimea tuturor submulţimilor (părţilor) mulţimii $A = \{1, 2, 3\}$ este

$$\mathcal{P}(A) = \{\, \emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{2,3\},\ \{1,3\},\ \{1,2,3\}\, \}.$$

Deoarece o mulţime M cu n elemente are C_n^k submulţimi cu k elemente rezultă că $\mathcal{P}(M)$ are $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ elemente.

1.1.3 Definiţie (Operaţii cu mulţimi).

Reuniunea	$A \cup B = \{\ x \mid x \in A \ \ sau \ \ x \in B\ \}$
Intersectia	$A \cap B = \{\ x \mid x \in A \ \ si \ \ x \in B\ \}$
Diferenta	$A - B = \{\ x \mid x \in A \ \ si \ \ x \notin B\ \}$
Produsul cartezian	$A \times B = \{\ (x,y) \mid x \in A \ \ si \ \ y \in B\ \}.$

Figura 1.1

1.1.4 Exemplu. Fie $A = \{1,2,3\}$ şi $B = \{3,5\}$. Avem

$$A \cup B = \{1,2,3,5\} \qquad A - B = \{1,2\}$$

$$A \cap B = \{3\} \qquad A \times B = \{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3),(3,5)\}.$$

Figura 1.2

1.1.5 Exerciţiu. Să se arate că relaţiile

$$A \cup A = A \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap A = A \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A - A = \emptyset \qquad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \qquad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

au loc oricare ar fi mulţimile A, B, C.

1.2 Funcţii

1.2.1 Definiţie. Prin *funcţie* (sau *aplicaţie*) se înţelege un ansmblu

$$f : E \longrightarrow F$$

format din două mulţimi

$$\begin{aligned} &E = \text{domeniul de definiţie al funcţiei,} \\ &F = \text{mulţimea în care funcţia ia valori} \end{aligned}$$

şi o lege de corespondenţă

$$E \longrightarrow F : \ x \mapsto f(x)$$

prin care fiecărui element din E i se asociază un unic element din F.

Figura 1.3

In figura 1.3 sunt reprezentate toate funcţiile de forma $f : \{0, 1\} \to \{2, \sqrt{3}\}$. Dacă E are n elemente şi F are k elemente atunci numărul total de funcţii $f : E \to F$ este k^n.

1.2.2 Definiţie. Fie $f : E \longrightarrow F$ o funcţie şi $A \subseteq E, \ D \subseteq F$ submulţimi. Mulţimea

$$f(A) = \{ \, f(x) \mid x \in A \, \}$$

se numeste *imaginea* (directă) a lui A prin f, iar mulţimea

$$f^{-1}(D) = \{ \, x \in E \mid f(x) \in D \, \}$$

se numeşte *imaginea reciprocă* (sau inversă) a lui D prin f.

1.2.3 Exerciţiu. Dacă $f : E \longrightarrow F$ este funcţie atunci

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \qquad f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) \qquad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

oricare ar fi submulţimile $A, B \subseteq E$ şi $C, D \subseteq F$.

1.2.4 Definiţie. Funcţia $f : E \longrightarrow F$ este numită *injectivă* dacă la elemente diferite din E corespund elemente diferite în F, adică dacă are loc relaţia

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y)$$

echivalentă cu

$$f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

1.2.5 Exemplu. Funcţia $f : [0, \infty) \longrightarrow [3, \infty)$, $f(x)=2x+3$ este injectivă deoarece

$$f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad 2x + 3 = 2y + 3 \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

1.2.6 Definiţie. Funcţia $f : E \longrightarrow F$ este numită *surjectivă* dacă $f(E) = F$, adică dacă oricare ar fi $y \in F$ există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$.

1.2.7 Exemplu. Pentru a analiza surjectivitatea funcţiei $f : [0, \infty) \longrightarrow [3, \infty)$, $f(x)=2x+3$ avem de verificat daca pentru $y \in [3, \infty)$ ales arbitrar există $x \in [0, \infty)$ cu $f(x) = y$, adică astfel încât $2x + 3 = y$. Se constată că un astfel de element există şi el este $x = (y - 3)/2$. Funcţia f este surjectivă.

1.2.8 Definiţie. Funcţia f este numită *bijectivă* dacă este injectivă şi surjectivă.

Figura 1.4

1.2.9 Definiţie. Fie $f : E \rightarrow F$ şi $g : G \rightarrow H$ două funcţii astfel încât $F \subseteq G$. Funcţia

$$g \circ f : E \longrightarrow H, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

se numeşte *funcţia compusă* a funcţiilor g şi f.

1.2.10 Propoziţie. Dacă $f : E \longrightarrow F$, $g : G \longrightarrow H$ şi $h : K \longrightarrow L$ sunt trei funcţii astfel încât $F \subseteq G$ şi $H \subseteq K$ atunci $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Demonstraţie. Oricare ar fi $x \in E$ avem

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

1.2.11 Dacă funcţia $f : E \longrightarrow F$ este bijectivă atunci pentru fiecare $y \in F$ există un unic element $x \in E$ astfel încât $f(x) = y$. Rezultă existenţa unei funcţii

$$f^{-1} : F \longrightarrow E : \ y \mapsto x$$

numită *inversa* lui f, astfel încât

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{si} \qquad f(f^{-1}(y)) = y$$

oricare ar fi $x \in E$ şi $y \in F$, adică astfel încât

$$f^{-1} \circ f = I_E \qquad \text{si} \qquad f \circ f^{-1} = I_F$$

unde $I_E : E \longrightarrow E$, $I_E(x) = x$ şi $I_F : F \longrightarrow F$, $I_F(y) = y$.

1.2.12 Exemple (inverse ale unor funcţii bijective).

$f : [0, \infty) \to [3, \infty)$, $f(x) = 2x+3$	are inversa	$f^{-1} : [3, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$
$[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : x \mapsto x^2$	are inversa	$[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : x \mapsto \sqrt{x}$
$\mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty) : x \mapsto \mathrm{e}^x$	are inversa	$(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$
$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1] : x \mapsto \sin x$	are inversa	$[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : x \mapsto \arcsin x$
$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] : x \mapsto \cos x$	are inversa	$[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] : x \mapsto \arccos x$
$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow (-\infty, \infty) : x \mapsto \mathrm{tg}\, x$	are inversa	$(-\infty, \infty) \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) : x \mapsto \mathrm{arctg}\, x$.

1.3 Mulţimi de numere

1.3.1 Ecuaţia $2 + x = 1$ nu admite soluţie în *mulţimea numerelor naturale*

$$\mathbb{N} = \{\ 0, 1, 2, 3, \dots\ \}$$

dar admite soluţia $x = -1$ în mulţimea *numerelor întregi*

$$\mathbb{Z} = \{\ \dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ \}$$

care este o extensie a lui $\mathbb{N}$ obţinută prin adăugarea întregilor negativi $-1,\ -2,\ -3,\ \dots$

1.3.2 Ecuaţia $2x=1$, fără soluţie în $\mathbb{Z}$, are soluţie în mulţimea *numerelor raţionale*

$$\mathbb{Q}=\left\{ \left. \frac{n}{k} \ \right| \ n\in\mathbb{Z},\ k\in\{1,2,3,\ldots\} \right\} / \sim$$

formată din clase de fracţii echivalente

$$\frac{n}{k}\sim\frac{n'}{k'} \qquad \text{daca} \qquad n\,k'=n'\,k.$$

Soluţia ecuaţiei considerate este numărul raţional care se poate reprezenta folosind oricare dintre fracţiile echivalente

$$\frac{1}{2}\sim\frac{2}{4}\sim\frac{3}{6}\sim\frac{4}{8}\sim\cdots$$

Fiecare număr întreg n se identifică cu numărul raţional pentru care fracţia $\frac{n}{1}$ este reprezentant. Mulţimea numerelor raţionale devine în acest fel o extensie a mulţimii numerelor întregi $\mathbb{Z}$.

1.3.3 In afară de reprezentarea sub formă de fracţie, pentru fiecare număr raţional se utilizează reprezentarea sub formă de fracţie zecimală obţinută prin efectuarea împărţirii numărătorului la numitor. De exemplu,

$$\frac{1}{2}=0.5000...=0.5 \qquad \frac{2}{3}=0.666...=0.(6) \qquad \frac{2}{15}=0.1333...=0.1(3)\ .$$

Deoarece în cazul numărului $\frac{n}{k}$ pe parcursul efectuării împărţirii lui n la k singurele resturi posibile sunt $0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$ rezultă că în cazul reprezentării unui număr raţional sub formă de fracţie zecimală pot apare doar fracţiile zecimale finite, cele periodice şi cele periodice mixte. Se poate constata că, de exemplu, fracţiile 0.5 şi 0.4(9) reprezintă acelaşi număr raţional

$$0.4(9)=\frac{49-4}{90}=\frac{1}{2}=0.5\ .$$

Pentru ca reprezentarea numerelor raţionale sub formă de fracţie zecimală să fie unică este suficient sa eliminăm fracţiile zecimale cu perioada 9.

1.3.4 Propoziţie. *Ecuaţia* $x^2=2$ *nu admite soluţie* în $\mathbb{Q}$.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că există $\frac{n}{k}\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{n^2}{k^2}=2$. Putem admite că fracţia $\frac{n}{k}$ este ireductibilă deoarece în caz contrar o putem înlocui cu fracţia rezultată în urma simplificării cu cel mai mare divizor comun al lui n şi k. Din relaţia $\frac{n^2}{k^2}=2$ scrisă sub forma $n^2=2k^2$ rezultă că n trebuie să fie divizibil cu 2. Punând $n=2m$ în $n^2=2k^2$ se obţine relaţia $2m^2=k^2$ din care rezultă că k trebuie să fie divizibil cu 2, ceea ce este in contradicţie cu ireductibilitatea fracţiei $\frac{n}{k}$. Rămâne că nu există $\frac{n}{k}\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{n^2}{k^2}=2$.

1.3.5 Prin *axă a numerelor* se înţelege o dreaptă pe care s-a fixat un punct (numit origine), o unitate de măsură şi un sens (numit sensul pozitiv). Fiecărui număr raţional îi corespunde în mod natural un punct pe axa numerelor. Din propoziţia anterioară rezultă ca punctele situate pe axa numerelor la o distanţă faţă de origine egală cu diagonala unui pătrat de latură 1 nu corespund unor numere raţionale. După reprezentarea pe axă a tuturor numerelor raţionale rămân poziţii neocupate.

1.3.6 Ecuaţia $x^2=2$ admite soluţiile $x=\pm\sqrt{2}$ în *mulţimea numerelor reale*

$$\mathbb{R}=\left\{\ n.a_1a_2a_3...\ \left|\ \begin{array}{r} n\in\mathbb{Z}\ \text{ si nu exista k astfel incat} \\ a_j=9 \text{ oricare ar fi } j\geq k \end{array}\right.\right\}$$

care este o extindere a mulţimii numerelor raţionale $\mathbb{Q}$. Fiecărui număr real îi corespunde în mod natural un punct pe axa numerelor. După reprezentarea tuturor numerelor reale nu mai rămân poziţii libere pe axa numerelor.

1.3.7 Fie M o submulţime a lui $\mathbb{R}$. Pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$ definim

$$aM+b=\{\ ax+b\ |\ x\in M\ \}.$$

De exemplu,

$$2\mathbb{Z}+1=\{\ 2n+1\ |\ n\in\mathbb{Z}\},\qquad \frac{\pi}{2}+2\mathbb{Z}\pi=\left\{\ \frac{\pi}{2}+2n\pi\ \middle|\ n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

1.3.8 Definiţie. Fie M o submulţime a lui $\mathbb{R}$.
$\min M$ = *cel mai mic element* al lui M, adică elementul $a\in M$ cu $a\leq x$, $\forall x\in M$.
$\max M$ = *cel mai mare element* al lui M, adică elementul $a\in M$ cu $a\geq x$, $\forall x\in M$.
Minorant al lui M= element $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $a\leq x$, $\forall x\in M$.
Majorant al lui M= element $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $a\geq x$, $\forall x\in M$.
$\inf M$ = cel mai mare minorant al lui M, numit *infimumul* lui M.
$\sup M$ = cel mai mic majorant al lui M, numit *supremumul* lui M.
M este *mulţime minorată* = M admite cel puţin un minorant.
M este *mulţime majorată* = M admite cel puţin un majorant.

1.3.9 Exemplu. Avem: $\min[0,1)=\inf[0,1)=0$, $\max[0,1)$ nu există, $\sup[0,1)=1$.

1.3.10 Relaţia de ordine $\leq$ şi operaţiile de adunare şi înmulţire se extind în mod natural de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{R}$. Se poate arăta că $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ este un corp comutativ total ordonat în care pentru orice mulţime majorată M există $\sup M$, adică

1) $(x+y)+z = x+(y+z)$, oricare ar fi $x,y,z \in \mathbb{R}$
2) $0+x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$
3) pentru orice $x\in\mathbb{R}$ exista $-x\in\mathbb{R}$ astfel incat $x+(-x)=0$
4) $x+y = y+x$, oricare ar fi $x,y \in \mathbb{R}$
5) $(xy)z = x(yz)$, oricare ar fi $x,y,z \in \mathbb{R}$
6) $1x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$
7) pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ exista $x^{-1}\in\mathbb{R}$ astfel incat $xx^{-1} = 1$
8) $xy = yx$, oricare ar fi $x,y \in \mathbb{R}$
9) $x(y+z) = xy+xz$, oricare ar fi $x,y,z \in \mathbb{R}$
10) oricare ar fi $x,y \in \mathbb{R}$ avem fie $x \leq y$ fie $y \leq x$
11) $x \leq x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$
12) $\left.\begin{array}{l} x \leq y \\ y \leq x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = y$
13) $\left.\begin{array}{l} x \leq y \\ y \leq z \end{array}\right\} \Longrightarrow x \leq z$
14) $x \leq y \Longrightarrow x+z \leq y+z$, oricare ar fi $z \in \mathbb{R}$
15) $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \leq xy$
16) pentru orice multime majorata $M \subseteq \mathbb{R}$ exista $\sup M$.

Toate proprietăţile referitoare la numere reale se pot deduce din 1)-16).

1.3.11 Ecuaţia de gradul al doilea

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a \neq 0)$$

admite în cazul $\Delta = b^2-4ac \geq 0$ soluţiile reale

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

In cazul $\Delta = b^2-4ac < 0$ ecuaţia considerată nu admite rădacini reale.

1.3.12 Admiţând că există un "număr imaginar" i astfel încât $\mathrm{i}^2 = -1$ ecuaţia

$$ax^2+bx+c=0$$

admite în cazul $\Delta = b^2-4ac < 0$ soluţiile

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

în *mulţimea numerelor complexe*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathrm{i} = \{ z = x+y\mathrm{i} \mid x,y \in \mathbb{R} \}.$$

1.3.13 Mulţimea $\mathbb{C}$ reprezintă o extindere a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$, fiecare număr real x putând fi identificat în mod natural cu numărul complex $x+0\mathrm{i}$. Avem astfel relaţia (a se vedea figura 1.5)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Figura 1.5

1.3.14 In cazul numerelor reale este utilă introducerea simbolurilor ∞ şi $-\infty$ cu proprietăţi binecunoscute din matematica de liceu şi considerarea *dreptei reale încheiate*

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Este utilă extinderea noţiunilor de infimum şi supremum:

$$\inf M = \begin{cases} \text{cel mai mare minorant} & \text{daca } M \text{ este minorata} \\ -\infty & \text{daca } M \text{ nu este minorata} \end{cases}$$

$$\sup M = \begin{cases} \text{cel mai mic majorant} & \text{daca } M \text{ este majorata} \\ \infty & \text{daca } M \text{ nu este majorata} \end{cases}$$

In cazul planului complex se obţin avantaje similare prin adaugarea, de această dată, a unui singur punct "de la infinit" adică prin considerarea *planului complex extins*

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

1.3.15 Definiţie. Spunem despre o mulţime M că este *numărabilă* dacă există o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$.

1.3.16 O mulţime este numărabilă dacă şi numai dacă poate fi scrisă sub forma unui şir. Mulţimea numerelor întregi este numărabilă deoarece se poate scrie sub forma

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, ...\}.$$

Mulţimea $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă deoarece poate fi ordonată în felul următor

$$\begin{array}{cccccc}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & (0,4) & \dots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \dots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \dots \\
(3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \dots \\
(4,0) & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Se poate arăta că mulţimile de forma $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$ şi $\mathbb{Q}^n$ sunt numărabile.

1.3.17 Mulţimea $\mathbb{Q}_+$ a numerelor raţionale pozitive este numărabilă. Alegând pentru fiecare număr fractia ireductibilă corespunzătoare formăm un şir punând mai întâi fracţiile cu suma dintre numărător şi numitor egală cu 1, apoi cele pentru care suma este 2, apoi cele pentru care suma este 3, etc. Rezultă imediat că mulţimea $\mathbb{Q}$ a tuturor numerelor raţionale este şi ea numărabilă.

1.3.18 Intervalul $[0,1) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1 \,\}$ nu este mulţime numărabilă. Dacă ar fi numărabilă elementele acestei mulţimi ar putea fi aşezate sub forma unui şir

$$\begin{array}{l}
0.a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \dots \\
0.a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \dots \\
0.a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \dots \\
0.a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44} \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Se constată însă că acest şir nu conţine toate elementele lui $[0,1)$. El nu conţine numărul $0.a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \dots$ ale cărui cifre sunt astfel încât $a_1 \neq a_{11}$, $a_2 \neq a_{22}$, $a_3 \neq a_{33}$, ...

1.3.19 Definiţie. Spunem despre o mulţime M că are *puterea continuului* dacă există o funcţie bijectivă $f : [0,1) \longrightarrow M$.

1.3.20 Mulţimea $[0,1)^2 = [0,1) \times [0,1) = \{\, (x,y) \mid x, y \in [0,1) \,\}$ are puterea continuului deoarece funcţia $[0,1) \longrightarrow [0,1)^2 : 0.a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \dots \mapsto (0.a_1\, a_3\, a_5 \dots,\, 0.a_2\, a_4\, a_6 \dots)$ este bijectivă. Mulţimea $[1,\infty)$ are puterea continuului deoarece funcţia $[0,1) \to [1,\infty) :$ $x \mapsto 1/(1-x)$ este bijectivă. Se poate arăta că mulţimile $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ şi în general $\mathbb{R}^n$ au puterea continuului.

Capitolul 2

Şiruri şi serii

2.1 Şiruri de numere reale

2.1.1 Teoremă. *Dacă* $x, y \in \mathbb{R}$ *şi* $x > 0$ *atunci există* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $nx \geq y$.

Demonstraţie. Presupunând contrariul, adică $nx < y$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, rezultă că mulţimea $M = \{\, nx \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ este majorată şi deci există un cel mai mic majorant $\alpha = \sup M$. In particular, α este un majorant al mulţimii M, adică $nx \leq \alpha$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, $\alpha - x$ nu este majorant al lui M şi prin urmare trebuie să existe $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $kx > \alpha - x$, adică astfel încât $(k+1)x > \alpha$. Acest lucru este însă în contradicţie cu faptul că α este majorant al lui M.

2.1.2 Propoziţie. *Dacă* $a \in \mathbb{R}$ *şi dacă* $0 \leq a \leq \varepsilon$ *oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *atunci* $a = 0$.

Demonstraţie. Presupunem că $a > 0$. Conform teoremei anterioare, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $na > 1$, adică astfel încât $a > \frac{1}{n}$, ceea ce este în contradicţie cu faptul că $a \leq \varepsilon$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$.

2.1.3 Definiţie. Aplicaţia *modul* pe $\mathbb{R}$ este

$$| \; | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{daca} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{daca} \quad x < 0. \end{cases}$$

2.1.4 Propoziţie. Aplicaţia modul $|\ |:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ are următoarele proprietăţi:

$$\begin{array}{ll} a) & |x|\geq 0 \quad \text{si} \\ & |x|=0 \iff x=0 \\ b) & |xy|=|x|\,|y|, \quad \text{oricare ar fi } \ x,y\in\mathbb{R} \\ c) & |x+y|\leq|x|+|y|, \quad \text{oricare ar fi } \ x,y\in\mathbb{R}. \end{array}$$

Demonstraţie. Proprietăţile menţionate rezultă direct din definiţie.

2.1.5 Exerciţiu. Să se arate că $\;|\,|x|-|y|\,|\leq|x-y|,\;$ oricare ar fi $\;x,y\in\mathbb{R}$.

Rezolvare. Utilizând relaţia c), numită ingalitatea triunghiului, obţinem inegalităţile

$$|x|=|x-y+y|\leq|x-y|+|y|,\qquad |y|=|y-x+x|\leq|x-y|+|x|$$

din care rezultă relaţia $-|x-y|\leq|x|-|y|\leq|x-y|$ echivalentă cu $|\,|x|-|y|\,|\leq|x-y|$.

2.1.6 Interpretări geometrice:

$$\begin{array}{rcl} |x| & = & \text{distanta pe axa numerelor dintre } x \text{ si } 0 \\ |x-y| & = & \text{distanta pe axa numerelor dintre } x \text{ si } y. \end{array}$$

2.1.7 Aplicaţia

$$d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,,\qquad d(x,y)=|x-y|$$

are proprietăţile

$$\begin{array}{ll} a) & d(x,y)\geq 0 \quad \text{si} \\ & d(x,y)=0 \iff x=y \\ b) & d(x,y)=d(y,x), \quad \text{oricare ar fi } \ x,y\in\mathbb{R} \\ c) & d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y), \quad \text{oricare ar fi } \ x,y,z\in\mathbb{R}. \end{array}$$

2.1.8 Definiţie. Spunem că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din $\mathbb{R}$ este *convergent* cu limita a şi scriem

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \qquad \text{sau} \qquad x_n\to a$$

dacă oricare ar fi $\varepsilon>0$ există $\;n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $\;|x_n-a|<\varepsilon,\;$ oricare ar fi $n\geq n_\varepsilon$.

2.1.9 MATHEMATICA: `Limit[x[n], n -> Infinity]`

```
In[1]:=Limit[1/n, n -> Infinity]         ↦  Out[1]=0
In[2]:=Limit[n/(n+1), n -> Infinity]     ↦  Out[2]=1
In[3]:=Limit[n^(1/n), n -> Infinity]     ↦  Out[3]=1
In[4]:=Limit[(1+1/n)^n, n -> Infinity]   ↦  Out[4]=e.
```

2.1.10 Propoziţie. *Limita unui şir convergent de numere reale este unică*

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} x_n = a\\ \lim_{n\to\infty} x_n = b\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad a = b.$$

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $a \neq b$ şi notăm $\varepsilon = |a-b|/2$. Din definiţia precedentă rezultă că există $n_\varepsilon, n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - a| < \varepsilon$ pentru $n \geq n_\varepsilon$ şi $|x_n - b| < \varepsilon$ pentru $n \geq n'_\varepsilon$. In particular, notând $m = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$ trebuie ca $|a-b| = |a - x_m + x_m - b| \leq |x_m - a| + |x_m - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|$, ceea ce este imposibil. Ramâne că $a = b$.

2.1.11 Definiţie.
Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din $\mathbb{R}$ este numit *crescător* dacă $x_n \leq x_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din $\mathbb{R}$ este numit *descrescător* dacă $x_n \geq x_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2.1.12 Propoziţie.
Un sir $(x_n)_{n\geq 0}$ *crescator si majorat este convergent si* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
Un sir $(x_n)_{n\geq 0}$ *descrescator si minorat este convergent si* $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi $a = \sup_{n\geq 0} x_n$. Deoarece a este cel mai mic majorant rezultă că $a - \varepsilon$ nu este majorant pentru mulţimea termenilor şirului şi prin urmare există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$. Şirul fiind crescător rezultă că avem $a - \varepsilon < x_n \leq a$, adică $|x_n - a| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$.

2.1.13 Definiţie.
Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din $\mathbb{R}$ este numit *mărginit* dacă există $r > 0$ astfel încât $|x_n| \leq r$, $\forall n$.

2.1.14 Propoziţie. *Orice şir convergent de numere reale este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Pentru $\varepsilon = 1$ există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - a| < 1$ oricare ar fi $n \geq n_1$. Deoarece $|x_n - a| < 1 \implies |x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$ alegând $r = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n_1-1}|, 1 + |a|\}$ avem $|x_n| \leq r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2.1.15 Definiţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi fie $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ un şir strict crescător de numere naturale. Şirul $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ este numit *subşir* al lui $(x_n)_{n\geq 0}$.

2.1.16 Propoziţie. *Orice subşir* (x_{n_k}) *al unui şir convergent* (x_n) *este convergent şi*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Demonstraţie. Fie $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Pentru $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - a| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. Având în vedere că $n_k > k$ rezultă că relaţia $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ are loc pentru orice $k > n_\varepsilon$.

2.1.17 Teoremă.
Daca $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ...$ *este un sir de intervale atunci* $\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Daca in plus $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ *atunci* $\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n]$ *contine un singur element.*

Demonstraţie. Deoarece $a_n \leq b_k$, oricare ar fi $n, k \in \mathbb{N}$, rezultă că există

$$\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} b_k = \beta \qquad si \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n] = [\alpha, \beta].$$

Din relaţia $[\alpha, \beta] \subset [a_n, b_n]$ rezultă că $0 \leq \beta - \alpha \leq b_n - a_n$. In cazul în care $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ obţinem că $\alpha = \beta$ şi deci $[\alpha, \beta] = \{\alpha\}$.

2.1.18 Teoremă (Cesaro). *Orice şir mărginit din* $\mathbb{R}$ *conţine un subşir convergent.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir mărginit şi $r > 0$ astfel încât $|x_n| \leq r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Notăm $a_0 = -r$ şi $b_0 = r$. Cel puţin unul dintre intervalele $[a_0, (a_0 + b_0)/2]$ şi $[(a_0 + b_0)/2, b_0]$ conţine un număr infinit de termeni ai şirului. Alegem un astfel de interval, îl notăm cu $[a_1, b_1]$ şi alegem un termen x_{n_1} al şirului aparţinând lui $[a_1, b_1]$. Cel puţin unul dintre intervalele $[a_1, (a_1 + b_1)/2]$ şi $[(a_1 + b_1)/2, b_1]$ conţine un număr infinit de termeni ai şirului. Alegem un astfel de interval, îl notăm cu $[a_2, b_2]$ şi alegem un termen x_{n_2} al şirului aparţinând lui $[a_2, b_2]$. Continuând acest proces generăm un şir descrescător de intervale

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \qquad cu \qquad b_n - a_n = \frac{r}{2^{n-1}}$$

şi un subşir (x_{n_k}) cu $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$. Conform teoremei anterioare însă

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} a_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} b_k = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

2.1.19 Definiţie. Un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ este numit *şir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_n - x_k| < \varepsilon \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n \geq n_\varepsilon \\ k \geq n_\varepsilon. \end{array}$$

2.1.20 Propoziţie. *Orice şir Cauchy de numere reale este mărginit.*

Demonstraţie. Pentru $\varepsilon = 1$ există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_1$ şi orice $k \geq n_1$ avem $|x_n - x_k| < 1$. In particular, pentru orice $n \geq n_1$ are loc relaţia $|x_n - x_{n_1}| < 1$ şi consecinţa ei directă $|x_n| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1}| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|$. Alegând $r = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n_1-1}|, 1+|x_{n_1}|\}$ avem $|x_n| \leq r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2.1.21 Propoziţie. *Orice şir convergent de numere reale este şir Cauchy.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, oricare ar fi $n > n_\varepsilon$. Pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $k \geq n_\varepsilon$ avem

$$|x_n - x_k| = |x_n - a + a - x_k| \leq |x_n - a| + |x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2.1.22 Propoziţie. *Un şir Cauchy care conţine un şir convergent este convergent.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir Cauchy care conţine un subşir convergent $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ şi fie $a = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ oricare ar fi $n, m \geq n'_\varepsilon$ şi există $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ oricare ar fi $k \geq n''_\varepsilon$. Deoarece $n_k > k$, alegând $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_{n_\varepsilon}} + x_{n_{n_\varepsilon}} - a| \leq |x_n - x_{n_{n_\varepsilon}}| + |x_{n_{n_\varepsilon}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2.1.23 Teorema. *Un şir din $\mathbb{R}$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.*

Demonstraţie. Am arătat că orice şir Cauchy este mărginit şi că orice şir mărginit de numere reale conţine un subşir convergent. Conform propoziţiei anterioare, un şir Cauchy care conţine un subşir convergent este convergent.

2.1.24 Spunem despre un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ că *are limită* dacă este convergent sau dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ori $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

2.1.25 Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere reale atunci:

$a)$ Sirul descrescator $\left(\sup\limits_{k\geq n} x_k\right)_{n\geq 0}$ are limita si $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_k$

$b)$ Sirul crescator $\left(\inf\limits_{k\geq n} x_k\right)_{n\geq 0}$ are limita si $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} x_k$.

2.1.26 Definiţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.

Prin *limita superioara* a sirului $(x_n)_{n\geq 0}$ se intelege limita $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_k$.
Prin *limita inferioara* a sirului $(x_n)_{n\geq 0}$ se intelege limita $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} x_k$.

2.1.27 Limita $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ nu există, dar

$$\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1 \qquad \liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1.$$

2.1.28 Se poate arăta că:

$$(x_n)_{n\geq 0} \text{ are limita} \quad\Longleftrightarrow\quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

şi în acest caz,

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

2.1.29 Definiţie. Spunem despre o mulţime $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}$ că este *mărginită* dacă există $r>0$ astfel încât $\mathcal{M}\subset[-r,r]$.

2.1.30 Propoziţie. *Dacă mulţimea $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}$ este mărginită atunci în $\mathcal{A}$ există şiruri $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ şi $(\beta_n)_{n\geq 1}$ astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \inf\mathcal{M} \qquad \lim_{n\to\infty}\beta_n = \sup\mathcal{M}.$$

Demonstraţie. Numărul $\inf\mathcal{M}$ este cel mai mare minorant al mulţimii $\mathcal{M}$. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ numărul $\inf\mathcal{M}+\frac{1}{n}$ nu este minorant al mulţimii $\mathcal{M}$. Rezultă că există un element $\alpha_n\in\mathcal{M}$ astfel încât $\inf\mathcal{M}\leq\alpha_n<\inf\mathcal{M}+\frac{1}{n}$, adică $0\leq\alpha_n-\inf\mathcal{M}<\frac{1}{n}$. Numărul $\sup\mathcal{M}$ este cel mai mic majorant al mulţimii $\mathcal{M}$. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ numărul $\sup\mathcal{M}-\frac{1}{n}$ nu este majorant al mulţimii $\mathcal{M}$. Rezultă că există un element $\beta_n\in\mathcal{M}$ astfel încât $\sup\mathcal{M}-\frac{1}{n}<\beta_n\leq\sup\mathcal{M}$, adică astfel încât $0\leq\sup\mathcal{M}-\beta_n<\frac{1}{n}$.

2.2 Şiruri de elemente din $\mathbb{R}^2$

2.2.1 In secţiunea anterioară am prezentat noţiuni şi rezultate referitoare la şiruri de elemente din $\mathbb{R}$. Unele dintre aceste noţiuni pot fi extinse pentru a deveni aplicabile şirurilor de elemente din spaţii mult mai generale. Noţiunile de şir convergent, şir mărginit şi de şir Cauchy se definesc cu ajutorul funcţiei modul

$$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:\ x\mapsto|x|$$

Este important de remarcat faptul că demonstraţiile rezultatelor prezentate nu se bazează direct pe definiţia modulului. Ele au fost deduse utilizând doar proprietăţile

$$\begin{array}{ll} a) & |x| \geq 0 \quad \text{si} \\ & |x| = 0 \iff x = 0 \\ b) & |\alpha x| = |\alpha|\,|x|, \quad \text{oricare ar fi } \alpha, x \in \mathbb{R} \\ c) & |x + x'| \leq |x| + |x'|, \quad \text{oricare ar fi } x, x' \in \mathbb{R}. \end{array}$$

2.2.2 Propoziţie. *Spaţiul*

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\,\}$$

considerat împreună cu adunarea şi înmulţirea cu numere reale

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \qquad\qquad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

este spaţiu vectorial, iar aplicaţia

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \ (x, y) \mapsto \| (x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

are proprietăţi similare cu ale modulului:

$$\begin{array}{ll} a) & \| (x, y) \| \geq 0 \quad \textit{si} \\ & \| (x, y) \| = 0 \iff (x, y) = (0, 0) \\ b) & \| \alpha(x, y) \| = |\alpha| \ \| (x, y) \|, \quad \textit{oricare ar fi } \alpha \in \mathbb{R},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ c) & \| (x, y) + (x', y') \| \leq \| (x, y) \| + \| (x', y') \|, \quad \textit{oricare ar fi } (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Demonstraţie. a) Avem $\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$, iar $\sqrt{x^2+y^2} = 0$ dacă şi numai dacă $x = y = 0$.
b) Avem $\| \alpha(x, y) \| = \| (\alpha x, \alpha y) \| = \sqrt{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{x^2 + y^2} = |\alpha| \ \| (x, y) \|$.
c) Relaţia se mai scrie $\sqrt{(x+x')^2+(y + y')^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}$ şi este echivalentă cu inegalitatea $xx' + yy' \leq \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2}$ obţinută prin ridicare la pătrat. In cazul $xx+yy' \leq 0$ inegalitatea este adevărată. Dacă $xx+yy' \geq 0$, ridicând la pătrat obţinem inegalitatea evident adevărată $(xy' - x'y)^2 \geq 0$.

Figura 2.1

2.2.3 Interpretări geometrice:

$$\begin{aligned}\|(x,y)\| &= \text{distanta dintre punctele } (x,y) \text{ si } (0,0)\\ \|(x,y)-(x',y')\| &= \text{distanta dintre punctele } (x,y) \text{ si } (x',y').\end{aligned}$$

2.2.4 Aplicaţia

$$d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\qquad d((x,y),(x',y'))=\|(x,y)-(x',y')\|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

are proprietăţile

$$\begin{array}{ll} a) & d((x,y),(x',y'))\geq 0 \ \text{ si}\\ & d((x,y),(x',y'))=0 \iff (x,y)=(x',y')\\ b) & d((x,y),(x',y'))=d((x',y'),(x,y)), \quad \text{oricare ar fi } (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2\\ c) & d((x,y),(x',y'))\leq d((x,y),(x'',y''))+d((x'',y''),(x',y')),\\ & \qquad\qquad \text{oricare ar fi } (x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2.\end{array}$$

2.2.5 Definiţie. Spunem că şirul (x_n,y_n) este *convergent* cu limita (a,b) şi scriem $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(a,b)$ dacă oricare ar fi $\varepsilon>0$ există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$\|(x_n,y_n)-(a,b)\|<\varepsilon,\qquad \text{oricare ar fi } n\geq n_\varepsilon.$$

2.2.6 Definiţie. Şirul $(x_n,y_n)_{n\geq 0}$ este numit *mărginit* dacă există $r>0$ astfel încât

$$\|(x_n,y_n)\|\leq r,\qquad \text{oricare ar fi } n\in\mathbb{N}.$$

2.2.7 Propoziţie. *Orice şir convergent din* $\mathbb{R}^2$ *este mărginit.*

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 23-**14**.

2.2.8 Definiţie. Un şir $(x_n,y_n)_{n\geq 0}$ din $\mathbb{R}^2$ este numit *şir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$\|(x_n,y_n)-(x_k,y_k)\|<\varepsilon \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon\\ k\geq n_\varepsilon.\end{array}$$

2.2.9 Propoziţie. *Orice şir Cauchy din* $\mathbb{R}^2$ *este şir mărginit.*

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 24-**20**.

2.2.10 Propoziţie. *Orice şir convergent din* $\mathbb{R}^2$ *este şir Cauchy.*

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 25-**21**.

2.2.11 Propoziţie. *Oricare ar fi* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *are loc relaţia*

$$\left.\begin{array}{c}|x|\\ |y|\end{array}\right\} \leq \|\,(x,y)\,\| \leq |x|+|y|\,.$$

Demonstraţie. Relaţia $\|\,(x,y)\,\| \leq |x|+|y|$ este echivalentă cu inegalitatea $0 \leq |x|\;|y|$ rezultată prin ridicare la pătrat şi

$$\|\,(x,y)\,\| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \qquad \|\,(x,y)\,\| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|.$$

2.2.12 Teoremă.

$$a) \qquad (x_n,y_n)\ \textit{este sir marginit} \iff \begin{cases}(x_n)\ \textit{este sir marginit si}\\ (y_n)\ \textit{este sir marginit}\end{cases}$$

$$b) \qquad (x_n,y_n)\ \textit{este sir Cauchy} \iff \begin{cases}(x_n)\ \textit{este sir Cauchy si}\\ (y_n)\ \textit{este sir Cauchy}\end{cases}$$

$$c) \quad (x_n,y_n)\ \textit{este sir convergent} \iff \begin{cases}(x_n)\ \textit{este sir convergent si}\\ (y_n)\ \textit{este sir convergent}\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (a,b) \iff \begin{cases}\lim_{n\to\infty} x_n = a\ \ \textit{si}\\ \lim_{n\to\infty} y_n = b\,.\end{cases}$$

Demonstraţie. Afirmaţiile rezultă din relaţiile (a se vedea propoziţia anterioară)

$$a) \qquad \left.\begin{array}{c}|x_n|\\ |y_n|\end{array}\right\} \leq \|\,(x_n,y_n)\,\| \leq |x_n|+|y_n|$$

$$b) \qquad \left.\begin{array}{c}|x_n-x_k|\\ |y_n-y_k|\end{array}\right\} \leq \|\,(x_n,y_n)-(x_k,y_k)\,\| \leq |x_n-x_k|+|y_n-y_k|$$

$$c) \qquad \left.\begin{array}{c}|x_n-a|\\ |y_n-b|\end{array}\right\} \leq \|\,(x_n,y_n)-(a,b)\,\| \leq |x_n-a|+|y_n-b|\,.$$

2.2.13 Teoremă. *Şirul* (x_n,y_n) *este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din teorema precedentă ţinând seama de faptul că şirurile de numere reale (x_n) şi (y_n) sunt convergente dacă şi numai dacă sunt şiruri Cauchy.

2.3 Spaţii normate

2.3.1 Definiţie. Prin *normă* pe un spaţiu vectorial real E se înţelege o aplicaţie

$$\|\ \|: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu proprietăţile

$$\begin{array}{ll} a) & \|x\| \geq 0 \quad \text{si} \\ & \|x\| = 0 \iff x = 0 \\ b) & \|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|, \quad \text{oricare ar fi } \alpha \in \mathbb{R},\ x \in E \\ c) & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \text{oricare ar fi } x, y \in E. \end{array}$$

Un *spaţiu normat* este un spaţiu vectorial E considerat împreună cu o normă fixată.

2.3.2 Exemple.

a) Aplicaţia modul $|\ |: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este normă pe spaţiul vectorial unidimensional $\mathbb{R}$, iar $(\mathbb{R}, |\ |)$ este spaţiu normat.

b) Aplicaţia $\|\ \|: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ este normă pe spaţiul vectorial bidimensional $\mathbb{R}^2$, iar $(\mathbb{R}^2, \|\ \|)$ este spaţiu normat.

c) Aplicaţia $\|\ \|: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ este normă pe spaţiul vectorial n-dimensional $\mathbb{R}^n$, iar $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ este spaţiu normat.

2.3.3 Exerciţiu. Să se arate că aplicaţiile

$$\|\ \|_1: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_1, x_2, .., x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$\|\ \|_\infty: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_1, x_2, .., x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$$

sunt norme pe spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

2.3.4 Exerciţiu. Mulţimea $C([0,1])$ a tuturor funcţiilor continue $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ considerată împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari

$$C([0,1]) \times C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]) : (\varphi, \psi) \mapsto \varphi + \psi, \ \text{unde} \ (\varphi+\psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

$$\mathbb{R} \times C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]) : (\alpha, \varphi) \mapsto \alpha\varphi, \ \text{unde} \ (\alpha\varphi)(x) = \alpha\ \varphi(x)$$

este spaţiu vectorial, iar aplicaţia

$$\|\ \|_\infty: C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \|\varphi\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$$

este normă.

2.3.5 Propoziţie *Dacă* $(E_1, \| \|_1)$ *şi* $(E_2, \| \|_2)$ *sunt spaţii normate atunci aplicaţia*

$$\| \|: E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \| (x_1, x_2) \| = \sqrt{\| x_1 \|_1^2 + \| x_2 \|_2^2}$$

este o normă pe spaţiul vectorial $E_1 \times E_2$ *şi*

$$\left. \begin{array}{l} \| x_1 \|_1 \\ \| x_2 \|_2 \end{array} \right\} \leq \| (x_1, x_2) \| \leq \| x_1 \|_1 + \| x_2 \|_2 \, .$$

Demonstraţie. Avem $\| (x_1, x_2) \| \geq 0$ şi $\| (x_1, x_2) \| = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$

$$\| \alpha(x_1, x_2) \| = |\alpha| \; \| (x_1, x_2) \|.$$

$$\begin{aligned} \| (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \| &= \sqrt{\| x_1 + y_1 \|_1^2 + \| x_2 + y_2 \|_2^2} \\ &\leq \sqrt{(\| x_1 \|_1 + \| y_1 \|_1)^2 + (\| x_2 \|_2 + \| y_2 \|_2)^2}. \end{aligned}$$

Relaţia

$$\sqrt{(\| x_1 \|_1 + \| y_1 \|_1)^2 + (\| x_2 \|_2 + \| y_2 \|_2)^2} \leq \sqrt{\| x_1 \|_1^2 + \| x_2 \|_2^2} + \sqrt{\| y_1 \|_1^2 + \| y_2 \|_2^2}$$

fiind echivalentă cu relaţia

$$\| x_1 \|_1 \| y_1 \|_1 + \| x_2 \|_2 \| y_2 \|_2 \leq \sqrt{\| x_1 \|_1^2 + \| x_2 \|_2^2} \sqrt{\| y_1 \|_1^2 + \| y_2 \|_2^2}$$

echivalentă cu

$$0 \leq (\| x_2 \|_2 \| y_1 \|_1 - \| x_1 \|_1 \| y_2 \|_2)^2$$

avem $\| (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \| \leq \| (x_1, x_2) \| + \| (y_1, y_2) \|$.

2.3.6 Spaţiul $\mathbb{R}^n$ poate fi privit ca fiind produsul direct a n spaţii normate $(\mathbb{R}, | \, |)$.

2.4 Spaţii metrice

2.4.1 Definiţie. Prin *distanţă* pe o mulţime nevidă M se înţelege o aplicaţie

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu proprietăţile

$$\begin{array}{ll} a) & d(x,y) \geq 0 \quad \text{si} \\ & d(x,y) = 0 \iff x = y \\ b) & d(x,y) = d(y,x), \quad \text{oricare ar fi } \; x, y \in M \\ c) & d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad \text{oricare ar fi } \; x, y, z \in M. \end{array}$$

Un *spaţiu metric* este o mulţime nevidă considerată împreună cu o distanţă fixată.

2.4.2 Teoremă. *Orice spaţiu normat are o structură naturală de spaţiu metric. Dacă* $(E, \|\ \|)$ *este spaţiu normat atunci* (E, d)*, unde*

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d(x, y) = \| x - y \|$$

este spaţiu metric.

Demonstraţie. Avem

$$d(x, y) = \| x - y \| \geq 0 \quad si \quad d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ \| x - y \| = 0 \ \Leftrightarrow \ x - y = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$$

$$d(x, y) = \| x - y \| = \| (-1)(y - x) \| = |-1| \ \| y - x \| = \| y - x \| = d(y, x)$$

$$d(x, y) = \| x - y \| = \| x - z + z - y \| \leq \| x - z \| + \| z - y \| = d(x, z) + d(z, y).$$

2.4.3 Exemple. Spaţiilor normate prezentate mai sus le corespund spaţiile metrice:

$$\begin{array}{lll}
(\mathbb{R}, d) & \text{unde} & d(x, y) = |x - y| \\
(\mathbb{R}^2, d) & \text{unde} & d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\
(\mathbb{R}^n, d) & \text{unde} & d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} \\
(\mathbb{R}^n, d_1) & \text{unde} & d_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \\
(\mathbb{R}^n, d_\infty) & \text{unde} & d_\infty(x, y) = \max_{k=1}^n |x_k - y_k| \\
(C([0, 1]), d_\infty) & \text{unde} & d_\infty(\varphi, \psi) = \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x) - \psi(x)| .
\end{array}$$

2.5 Spaţii prehilbertiene

2.5.1 Definiţie. Un *produs scalar* pe un spaţiu vectorial real H este o aplicaţie

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{R} : \ (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

cu proprietăţile

a) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si $x, y, z \in H$
b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, oricare ar fi $x, y \in H$
c) $\langle x, x \rangle \geq 0$ si
$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

Un *spaţiu prehilbertian* este un spaţiu considerat împreună cu un produs scalar fixat.

2.5.2 Din definiţia produsului scalar se deduce imediat că

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad \text{oricare ar fi } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ si } x, y, z \in H.$$

2.5.3 Exemple. a) Aplicaţia

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}: \ (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle, \qquad \langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \ y_k \tag{2.1}$$

este produs scalar pe $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Aplicaţia

$$C([0,1]) \times C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}: \ (\varphi,\psi) \mapsto \langle \varphi,\psi\rangle, \qquad \langle \varphi,\psi\rangle = \int_0^1 \varphi(x)\,\psi(x)\,dx \tag{2.2}$$

este produs scalar pe spaţiul $C([0,1])$ al tuturor funcţiilor continue $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$.

2.5.4 Se ştie că în cazul în care a, b, c sunt numere reale cu $a \neq 0$, relaţia

$$at^2 + bt + c \geq 0, \qquad \text{oricare ar fi} \ \ t \in \mathbb{R}$$

are loc dacă şi numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ şi $a > 0$.

2.5.5 Propoziţie. *Dacă* $H \times H \longrightarrow \mathbb{R}: \ (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ *este produs scalar atunci*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\ \sqrt{\langle y,y\rangle}, \quad \textit{oricare ar fi} \ \ x, y \in H. \tag{2.3}$$

Demonstraţie. In cazul $x=0$ inegalitatea este satisfăcută deoarece $\langle x,y\rangle = \langle x,x\rangle = 0$. In cazul $x \neq 0$, relaţia

$$\langle x,x\rangle t^2 + 2\langle x,y\rangle t + \langle y,y\rangle = \langle tx+y, tx+y\rangle \geq 0$$

adevărată oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$, conduce la $4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$.

2.5.6 Teoremă. *Orice spaţiu prehilbertian are o structură naturală de spaţiu normat. Dacă* $H \times H \longrightarrow \mathbb{R}: \ (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ *este produs scalar atunci aplicaţia*

$$H \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \| x \|, \qquad \| x \| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

este normă.

Demonstraţie. Avem

a) $\| x \| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \geq 0 \qquad$ si $\qquad \| x \| = 0 \ \Leftrightarrow \ \langle x,x\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0.$

b) $\| \alpha x \| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x,x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\alpha| \ \| x \|$

c) $\| x+y \|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leq \| x \|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \| y \|^2$
$\leq \| x \|^2 + 2 \, \| x \| \, \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2.$

2.5.7 Inegalitatea (2.3), numită *inegalitatea Cauchy*, se mai poate scrie

$$|\langle x,y\rangle| \leq \| x \| \, \| y \|, \quad \text{oricare ar fi} \quad x,y \in H.$$

2.5.8 In cazul spaţiului $\mathbb{R}^n$ inegalitatea Cauchy devine

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

adică

$$|x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Figura 2.2

2.5.9 Orice spaţiu normat are o structură naturală de spaţiu metric şi orice spaţiu prehilbertian are o structură naturală de spaţiu normat (a se vedea Fig. 2.2)

$$\| \ \| \ \text{ este norma} \quad \Longrightarrow \quad d(x,y) = \| x - y \| \ \text{ defineste o distanta}$$

$$\langle\, ,\, \rangle \text{ este produs scalar} \quad \Longrightarrow \quad \| x \| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \ \text{ defineste o norma.}$$

2.5.10 Plecând de la produsele scalare (2.1) şi (2.2) obţinem spaţiile normate

$$(\mathbb{R}^n, \| \ \|) \qquad \text{unde} \quad \| \, x \, \| = \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

$$(C([0,1]), \| \ \|) \quad \text{unde} \quad \| \, \varphi \, \| = \sqrt{\textstyle\int_0^1 (\varphi(x))^2 dx}$$

şi spaţiile metrice corespunzătoare

$$(\mathbb{R}^n, d) \qquad \text{unde} \quad d(x,y) = \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

$$(C([0,1]), d) \quad \text{unde} \quad d(\varphi,\psi) = \sqrt{\textstyle\int_0^1 (\varphi(x) - \psi(x))^2 dx}.$$

2.5.11 Izomorfismul liniar $\mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{kn}$,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \mapsto (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}, ..., x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn})$$

permite identificarea lui $\mathbb{R}^{kn}$ cu spaţiul vectorial al matricelor cu k linii şi n coloane

$$\mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aplicaţiile

$$\| \;\|\colon \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \left\| \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2}$$

$$\| \;\|_1\colon \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \left\| \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} |x_{ij}|$$

$$\| \;\|_\infty\colon \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \left\| \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max_{i=1}^{k}\max_{j=1}^{n} |x_{ij}|$$

sunt norme pe $\mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R})$, iar

$$d\left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k1} & \cdots & y_{kn} \end{pmatrix} \right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - y_{ij})^2}$$

$$d_1\left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k1} & \cdots & y_{kn} \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} |x_{ij} - y_{ij}|$$

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{k1} & \cdots & x_{kn}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{k1} & \cdots & y_{kn}\end{pmatrix}\right) = \max_{i=1}^{k}\max_{j=1}^{n}|x_{ij}-y_{ij}|$$

distanţele asociate. Norma $\| \ \|$ este norma asociată produsului scalar

$$\langle , \rangle : \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{k1} & \cdots & x_{kn}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{k1} & \cdots & y_{kn}\end{pmatrix}\right\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, y_{ij}.$$

2.6 Şiruri în spaţii metrice

2.6.1 Definiţie. Spunem că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din spaţiul metric (S,d) este *convergent* cu limita a şi scriem $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ dacă

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$$

adică dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$d(x_n, a) < \varepsilon, \qquad \text{oricare ar fi } n \geq n_\varepsilon.$$

2.6.2 In cazul unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ dintr-un spaţiu normat avem $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ dacă

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - a \| = 0$$

adică dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\| x_n - a \| < \varepsilon, \qquad \text{oricare ar fi } n \geq n_\varepsilon.$$

2.6.3 Propoziţie. *Intr-un spaţiu metric, limita unui şir convergent este unică*

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim_{n\to\infty} x_n = b \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad a = b.$$

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 23-**10**.

2.6.4 Propoziţie. *Orice subşir* (x_{n_k}) *al unui şir convergent* (x_n) *este convergent şi*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 23-**16**.

2.6.5 Definiţie. Şirul (x_n) din spaţiul metric (S,d) este numit *şir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $n_\varepsilon>0$ astfel încât

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon \qquad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon \\ m\geq n_\varepsilon. \end{array}$$

adică astfel încât

$$d(x_{n+k},x_n)<\varepsilon \qquad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon \\ k\in\mathbb{N}. \end{array}$$

2.6.6 Propoziţie. *Intr-un spaţiu metric, orice şir convergent este şir Cauchy.*

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 25-**21**.

2.6.7 Se poate arăta că în spaţiul normat $(C([0,1]),\|\ \|)$ cu $\|\varphi\|=\sqrt{\int_0^1(\varphi(x))^2dx}$, şirul de funcţii (φ_n), unde $\varphi_n(x)=x^n$, este şir Cauchy neconvergent în $C([0,1])$.

2.6.8 Definiţie. Un spaţiu metric cu proprietatea că orice şir Cauchy este convergent este numit *spaţiu complet.* Spaţiile normate complete se numesc *spaţiu Banach* iar spaţiile prehilbertiene complete sunt numite *spaţii Hilbert.*

2.6.9 Definiţie. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din spaţiul metric (S,d) este numit *mărginit* dacă există $a\in S$ şi $r>0$ astfel încât $d(a,x_n)\leq r$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

2.6.10 Propoziţie. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din spaţiul normat $(E,\|\ \|)$ este *mărginit* dacă şi numai dacă există $r>0$ astfel încât $\|x_n\|\leq r$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Demonstraţie. Dacă $\|x_n-a\|\leq r$ oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, atunci

$$\|x_n\|=\|x_n-a+a\|\leq\|x_n-a\|+\|a\|\leq r+\|a\|, \quad \text{oricare ar fi} \ n\in\mathbb{N}.$$

2.6.11 Propoziţie. *Intr-un spaţiu metric, orice şir convergent este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent şi $a=\lim_{n\to\infty}x_n$. Pentru $\varepsilon=1$ există $n_1\in\mathbb{N}$ astfel încât $d(a,x_n)<1$, oricare ar fi $n\geq n_1$. Alegând

$$r=\max\{1,\ d(a,x_0),\ d(a,x_1),\ \ldots\ d(a,x_{n_1-1})\}$$

avem $d(a,x_n)\leq r$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

2.6.12 Propoziţie. *Intr-un spaţiu metric, orice şir Cauchy este mărginit.*

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 24-**20**.

2.6.13 In cazul spaţiilor $\mathbb{R}^n$, dacă nu se indică o altă normă, vom subînţelege că structura de spaţiu normat considerată este cea definită de *norma uzuală*

$$\| \,\|: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}: \ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto \| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Ea este norma asociată *produsului scalar uzual*

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$$

adică

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şi defineşte *distanţa uzuală*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Spaţiile $\mathbb{R}^n$ sunt spaţii Hilbert. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$ avem (a se vedea pag. 29-**11**)

$$\left.\begin{array}{l} |x_1| \\ |x_2| \\ ..... \\ |x_n| \end{array}\right\} \leq \| x \| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|.$$

2.7 Serii de numere reale

2.7.1 Definiţie. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale. Seria

$$\sum_{n \geq 0} x_n$$

este numită *convergentă* (C) dacă şirul sumelor parţiale $(s_k)_{k \geq 0}$,

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$$

este convergent. Limita acestui şir este numită *suma seriei* şi scriem

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} x_n = \lim_{k \to \infty} (x_0 + x_1 + \cdots + x_k).$$

O serie care nu este convergentă este numită *divergentă* (D).

2.7.2 Exemplu. Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ este convergentă deoarece

$$s_k=\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

şi suma ei este $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$.

2.7.3 MATHEMATICA: `NSum[a[n], {n, m, k}]` , `Sum[a[n], {n, m, Infinity}]`

`In[1]:=NSum[1/2^n, {n, 0, 15}]` $\mapsto$ Out[1]=1.99997

`In[2]:=Sum[1/2^n, {n, 0, Infinity}]` $\mapsto$ Out[2]=2.

2.7.4 Exerciţiu. *Seria geometrică* reală $\sum_{n\geq 0}q^n$ este convergentă dacă şi numai dacă $q\in(-1,1)$. Suma ei este $\sum_{n=0}^{\infty}x_n=\frac{1}{1-q}$, adică avem

$$1+q+q^2+q^3+\cdots=\frac{1}{1-q}\qquad \text{daca}\quad q\in(-1,1).$$

Rezolvare. Şirul sumelor parţiale este convergent dacă şi numai dacă $q\in(-1,1)$ şi

$$\sum_{n=0}^{\infty}x_n=\lim_{k\to\infty}(1+q+\cdots+q^k)=\lim_{k\to\infty}\frac{1-q^{k+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}.$$

2.7.5 MATHEMATICA: `Sum[a[n], {n, m, k}]` , `Sum[a[n], {n, m, Infinity}]`

`In[1]:=Sum[q^n, {n, 0, k}]` $\mapsto$ Out[1]=$\frac{-1+q^{1+k}}{-1+q}$

`In[2]:=Sum[q^n, {n, 0, Infinity}]` $\mapsto$ Out[2]=$\frac{1}{1-q}$.

2.7.6 Propoziţie. *Dacă seria* $\sum_{n\geq 0}x_n$ *este convergentă atunci* $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

Demonstraţie. Fie s suma seriei, adică $s=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}x_k$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}x_k-\sum_{k=0}^{n-1}x_k\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x_k-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}x_k=s-s=0.$$

2.7.7 Propoziţie.

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n\geq 0}x_n \ \textit{convergenta}\\ \sum_{n\geq 0}y_n \ \textit{convergenta}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sum_{n\geq 0}(x_n+y_n)\ \textit{convergenta si}\\ \sum_{n=0}^{\infty}(x_n+y_n)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n+\sum_{n=0}^{\infty}y_n\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\in\mathbb{R}\\ \sum_{n\geq 0}x_n \ \textit{convergenta}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sum_{n\geq 0}\alpha\, x_n\ \textit{convergenta si}\\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha\, x_n=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}x_n.\end{array}\right.$$

Demonstraţie. Avem

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n+y_n)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(x_n+y_n)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}x_n+\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}y_n=\sum_{n=0}^{\infty}x_n+\sum_{n=0}^{\infty}y_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\, x_n=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\alpha\, x_k=\alpha\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}x_n.$$

2.7.8 Propoziţie.

$$\textit{Seriile} \ \sum_{n\geq 0} x_n \ \ \textit{si} \ \sum_{n\geq n_0} x_n \ \ \textit{au aceeasi natura}, \ \ \textit{oricare ar fi} \ \ n_0 > 0.$$

Demonstraţie. Şirurile $(s_k)_{k\geq 0}$ şi $(\tilde{s}_k)_{k\geq n_0}$, unde

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n, \qquad \tilde{s}_k = \sum_{n=n_0}^{k} x_n = s_k - \sum_{n=0}^{n_0-1} x_n$$

sunt fie ambele convergente, fie ambele divergente.

2.7.9 Exerciţiu. Fie seriile de numere reale $\sum_{n\geq 0} x_n$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$. Dacă, cu excepţia unui număr finit de termeni, avem $x_n = y_n$ atunci seriile au aceeaşi natură.

2.7.10 Teoremă (Criteriul lui Cauchy). *Seria* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}| < \varepsilon \qquad \textit{oricare ar fi} \ \begin{array}{l} n \geq n_\varepsilon \\ k \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}. \end{array}$$

Demonstraţie. Prin definiţie, seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale $(s_k)_{k\geq 0}$ este convergent. Pe de altă parte, şirul $(s_k)_{k\geq 0}$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy, adică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon$ oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ şi oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Insă $|s_{n+k} - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}|$.

2.7.11 Teoremă (Criteriul lui Abel).
Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ *este un şir descrescător cu* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *şi dacă*
$(x_n)_{n\geq 0}$ *este un şir astfel încât există* $M > 0$ *cu*

$$|x_0 + x_1 + \cdots + x_n| \leq M, \qquad \textit{oricare ar fi} \ \ n \in \mathbb{N}$$

atunci seria $\sum_{n\geq 0} a_n\, x_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Notând $s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$ avem $x_n = s_n - s_{n-1}$ pentru orice $n > 0$. Deoarece

$$\begin{aligned} & |a_{n+1}x_{n+1} + \cdots + a_{n+k}x_{n+k}| = |a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \cdots + a_{n+k}(s_{n+k} - s_{n+k-1})| \\ & = |-a_{n+1}s_n + (a_{n+1} - a_{n+2})s_{n+1} + \cdots + (a_{n+k-1} - a_{n+k})s_{n+k-1} + a_{n+k}s_{n+k}| \\ & \leq a_{n+1}|s_n| + (a_{n+1} - a_{n+2})|s_{n+1}| + \cdots + (a_{n+k-1} - a_{n+k})|s_{n+k-1}| + a_{n+k}|s_{n+k}| \\ & \leq (a_{n+1} + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+k-1} - a_{n+k}) + a_{n+k})M = 2a_{n+1}M \end{aligned}$$

şi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pentru $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_{n+1}x_{n+1} + \cdots + a_{n+k}x_{n+k}| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ şi oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

2.7.12 Teorema (Criteriul lui Leibniz).

Daca (a_n) *este sir descrescator cu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *atunci* $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ *este convergenta.*

Demonstraţie. Alegem $x_n = (-1)^n$ şi utilizăm criteriul lui Abel.

2.7.13 MATHEMATICA: `Sum[a[n], {n, m, Infinity}]` , `NSum[a[n], {n, m, Infinity}]`

`Sum[(-1)^n/n, {n, 1, Infinity}]`	$\mapsto$	Out[1]=$-$Log[2]
`Sum[(-1)^n/n^2, {n, 1, Infinity}]`	$\mapsto$	Out[2]=$-\frac{\pi^2}{12}$
`NSum[(-1)^n/n^3, {n, 1, Infinity}]`	$\mapsto$	Out[2]=-0.901543.

2.7.14 Definiţie.

Spunem ca seria $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ este *absolut convergenta* daca seria $\sum\limits_{n\geq 0} |x_n|$ este convergenta.

2.7.15 Teorema *Orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă.*

Demonstraţie. Utilizăm criteriul lui Cauchy. Dacă seria $\sum_{n\geq 0}|x_n|$ este convergentă atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ şi oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Insă

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+k}|$$

şi prin urmare $|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+k}| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ şi $k \in \mathbb{N}^*$.

2.7.16 Exemplu. Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă conform criteriului lui Leibniz. Ea nu este absolut convergentă deoarece $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă (pag. 42-**22**).

2.7.17 Definiţie.

Spunem că $\sum_{n\geq 0} x_n$ este *serie cu termeni pozitivi* dacă $x_n \geq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2.7.18 Propoziţie. *O serie cu termeni pozitivi* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale* $\left(\sum_{n=0}^{k} x_n\right)_{k\geq 0}$ *este mărginit.*

Demonstraţie. In cazul unei serii cu termeni pozitivi, şirul sumelor parţiale este crescător. Un şir crescător este convergent dacă şi numai dacă este mărginit.

2.7.19 Teoremă (Criteriul comparaţiei). *Fie* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *şi* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *două serii cu termeni pozitivi. Dacă există* $n_0 \geq 0$ *astfel încât* $x_n \leq y_n$, *oricare ar fi* $n \geq n_0$, *atunci*

a) $\sum_{n\geq 0} y_n$ *convergenta* $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} x_n$ *convergenta*

b) $\sum_{n\geq 0} x_n$ *divergenta* $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} y_n$ *divergenta.*

Demonstraţie. Seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ are aceeaşi natură cu $\sum_{n\geq n_0} x_n$ şi seria $\sum_{n\geq 0} y_n$ are aceeaşi natură cu $\sum_{n\geq n_0} y_n$. Deoarece $0 \leq \sum_{n=n_0}^{k} x_n \leq \sum_{n=n_0}^{k} y_n$ rezultă că

$$\left(\sum_{n=n_0}^{k} y_n\right)_{k\geq n_0} \text{ sir marginit } \Longrightarrow \left(\sum_{n=n_0}^{k} x_n\right)_{k\geq n_0} \text{ sir marginit}$$

$$\left(\sum_{n=n_0}^{k} x_n\right)_{k\geq n_0} \text{ sir nemarginit } \Longrightarrow \left(\sum_{n=n_0}^{k} y_n\right)_{k\geq n_0} \text{ sir nemarginit.}$$

2.7.20 Teoremă (Comparaţie prin trecere la limită).
Dacă seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} x_n$ *şi* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *sunt astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in (0, \infty)$$

atunci ele au aceeaşi natură (sunt ambele convergente sau ambele divergente).

Demonstraţie. Există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{x_n}{y_n} \in \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right)$, adică

$$\frac{l}{2}\, y_n \leq x_n \leq \frac{3l}{2}\, y_n, \qquad \text{oricare ar fi} \quad n \geq n_0$$

ceea ce permite utilizarea criteriului comparaţiei .

Figura 2.3

2.7.21 Teoremă. *Fie* $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ *o funcţie continuă şi descrescătoare. Seria* $\sum_{n\geq 1} f(n)$ *este convergentă dacă şi numai dacă şirul* $\left(\int_1^n f(x)\, dx\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit.*

Demonstraţie. Utilizând relaţia $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k)$ (a se vedea figura 2.3) şi $\int_1^n f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)dx$ obţinem

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1).$$

2.7.22 Teoremă (Seria armonică generalizată).

$$\textit{Seria} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \textit{este convergenta daca si numai daca} \quad \alpha > 1.$$

Demonstraţie. Dacă $\alpha \le 0$ seria este divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\neq 0$. In cazul $\alpha>0$ funcţia $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ este continuă şi descrescătoare. Deoarece

$$\int_1^n f(x)\,dx=\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}dx=\begin{cases}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^n=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha} & \text{daca}\quad \alpha\neq 1\\ (\ln x)|_1^n=\ln n & \text{daca}\quad \alpha=1\end{cases}$$

şirul $(\int_1^n f(x)\,dx)_{n\ge 1}$ este mărginit dacă şi numai dacă $\alpha>1$.

2.7.23 MATHEMATICA: `Sum[a[n], {n, m, Infinity}]` , `NSum[a[n], {n, m, Infinity}]`

`In[1]:= Sum[1/n^2, {n, 1, Infinity}]` $\mapsto$ Out[1]=$\frac{\pi^2}{6}$

`In[2]:= NSum[1/n^Sqrt[2], {n, 1, Infinity}]` $\mapsto$ Out[2]=3.02074.

2.7.24 Exerciţiu. Să se arate că seria $\sum_{n\ge1}\frac{1+\sqrt{n}}{1+n^2}$ este convergentă .

Rezolvare 1.
Convergenţa rezultă din $\frac{1+\sqrt{n}}{1+n^2}\le\frac{2\sqrt{n}}{1+n^2}\le\frac{2\sqrt{n}}{n^2}=\frac{2}{n^{3/2}}$ şi din convergenţa seriei $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^{3/2}}$.

Rezolvare 2.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\sqrt{n}}{1+n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}}=1$ seria $\sum\limits_{n\ge1}\frac{1+\sqrt{n}}{1+n^2}$ are aceeasi natura cu $\sum\limits_{n\ge1}\frac{1}{n^{3/2}}$.

2.7.25 MATHEMATICA: `NSum[a[n], {n, m, k}]` , `NSum[a[n], {n, m, Infinity}]`

`In[1]:= NSum[(1+Sqrt[n])/(1+n^2), {n, 1, 100}]` $\mapsto$ Out[1]=2.87338

`In[2]:= NSum[(1+Sqrt[n])/(1+n^2), {n, 1, 1000}]` $\mapsto$ Out[2]=3.0186

`In[3]:= NSum[(1+Sqrt[n])/(1+n^2), {n, 1, 10000}]` $\mapsto$ Out[3]=3.06273

`In[4]:= NSum[(1+Sqrt[n])/(1+n^2), {n, 1, 100000}]` $\mapsto$ Out[4]=3.07649

`In[5]:= NSum[(1+Sqrt[n])/(1+n^2), {n, 1, Infinity}]` $\mapsto$ Out[5]=3.08283.

2.7.26 Teoremă (Criteriul rădăcinii).
Dacă seria cu termeni pozitivi $\sum_{n\ge0}x_n$ *este astfel încât există* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ *atunci:*

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}<1 \implies \sum_{n\ge0}x_n$ *este convergentă*
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}>1 \implies \sum_{n\ge0}x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Fie $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$. In cazul $l<1$ există $\varepsilon>0$ astfel încât $l+\varepsilon<1$. Deoarece $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$, există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{x_n}\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$, oricare ar fi $n\ge n_\varepsilon$. In particular, avem $\sqrt[n]{x_n}<l+\varepsilon$, adică $x_n<(l+\varepsilon)^n$, oricare ar fi $n\ge n_\varepsilon$. Convergenţa seriei $\sum_{n\ge0}x_n$ rezultă din convergenţa seriei geometrice $\sum_{n\ge0}(l+\varepsilon)^n$ pe baza criteriului comparaţiei. In cazul $l>1$ există $\varepsilon>0$ astfel încât $l-\varepsilon>1$. Deoarece $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ există $n'_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{x_n}\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$, oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. In particular, avem $\sqrt[n]{x_n} > l - \varepsilon$, adică $x_n > (l-\varepsilon)^n > 1$, oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. Rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ şi prin urmare seria este divergentă.

2.7.27 Noţiunea de limita superioară permite următoarea formulare mai generală:
Teoremă (Cauchy). *Dacă* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *este serie cu termeni pozitivi atunci:*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} x_n \text{ este convergentă}$$
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} x_n \text{ este divergentă.}$$

2.7.28 Teoremă (Criteriul raportului).
Dacă seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ *cu* $x_n > 0$ *este astfel încât există* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ *atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} x_n \text{ este convergentă}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} x_n \text{ este divergentă.}$$

Demonstraţie. Fie $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. In cazul $l < 1$ există $\varepsilon > 0$ astfel încât $l+\varepsilon < 1$. Deoarece $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{x_{n+1}}{x_n} \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. In particular, avem pentru $n \geq n_\varepsilon$ relaţia $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq l+\varepsilon$ din care rezultă $x_{n_\varepsilon+1} \leq (l+\varepsilon)x_{n_\varepsilon}$, $x_{n_\varepsilon+2} \leq (l+\varepsilon)^2 x_{n_\varepsilon}$, ..., $x_{n_\varepsilon+k} \leq (l+\varepsilon)^k x_{n_\varepsilon}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Convergenţa seriei $\sum_{n\geq 0} x_n$ rezultă din convergenţa seriei geometrice $\sum_{n\geq 0}(l+\varepsilon)^n$. In cazul $l > 1$ există $\varepsilon > 0$ astfel încât $l - \varepsilon > 1$. Deoarece $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{x_{n+1}}{x_n} \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. In particular, avem pentru $n \geq n'_\varepsilon$ relaţia $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq l-\varepsilon$ din care rezultă $x_{n'_\varepsilon+1} \geq (l-\varepsilon)x_{n'_\varepsilon}$, $x_{n'_\varepsilon+2} \geq (l-\varepsilon)^2 x_{n'_\varepsilon}$, ..., $x_{n'_\varepsilon+k} \leq (l-\varepsilon)^k x_{n'_\varepsilon}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi prin urmare seria este divergentă.

2.7.29 Noţiunea de limita superioară permite următoarea formulare mai generală:
Teoremă (d'Alembert). *Dacă* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *este serie cu termeni strict pozitivi atunci:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} x_n \text{ este convergentă}$$
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} x_n \text{ este divergentă.}$$

2.7.30 Teoremă (Criteriul Raabe-Duhamel).
Dacă seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ *cu* $x_n > 0$ *este astfel încât există* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$ *atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} x_n \text{ este convergentă}$$
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} x_n \text{ este divergentă.}$$

Demonstraţie. Fie $l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$. In cazul $l > 1$ există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$l-\varepsilon > 1$, adică $l > 1+\varepsilon$. Deoarece $l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) > 1+\varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. Rezultă că relaţia $nx_n - nx_{n+1} > x_{n+1} + \varepsilon x_{n+1}$, adică $nx_n - (n+1)x_{n+1} > \varepsilon x_{n+1} > 0$ (*), are loc oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. Din relaţia (*) rezultă că şirul cu termeni pozitivi $(nx_n)_{n\geq n_\varepsilon}$ este monoton descrescător şi deci convergent. Deoarece există $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=n_\varepsilon}^{k}[nx_n-(n+1)x_{n+1}] = \lim_{k\to\infty}[n_\varepsilon x_{n_\varepsilon} - (k+1)x_{k+1}]$ seria $\sum_{n=1}^{k}[nx_n-(n+1)x_{n+1}]$ este convergentă. Din relaţia (*), pe baza criteriului comparaţiei, rezultă că $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă.
In cazul $l < 1$ există $\varepsilon > 0$ astfel încât $l+\varepsilon < 1$, adică $l < 1-\varepsilon$. Deoarece $l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) < 1-\varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. Relaţia $nx_n - nx_{n+1} < x_{n+1} - \varepsilon x_{n+1}$, adică $nx_n-(n+1)x_{n+1} < -\varepsilon x_{n+1} < 0$, are loc oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. Rezultă că şirul cu termeni pozitivi $(nx_n)_{n\geq n'_\varepsilon}$ este crescător. Există $C > 0$ astfel încât $nx_n \geq C$, adică $x_n \geq C\frac{1}{n}$, oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. Seria armonică $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ fiind divergentă, pe baza criteriului comparaţiei, rezultă că $\sum_{n\geq 0} x_n$ este divergentă.

2.8 Serii în spaţii normate

2.8.1 Definiţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir dintr-un spaţiu normat $(E, \|\;\|)$. Seria

$$\sum_{n\geq 0} x_n$$

este numită *convergentă* (C) dacă şirul sumelor parţiale $(s_k)_{k\geq 0}$, unde

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$$

este convergent. Limita acestui şir este numită *suma seriei* şi scriem

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} x_n = \lim_{k\to\infty}(x_0 + x_1 + \cdots + x_k).$$

O serie care nu este convergentă este numită *divergentă* (D).

2.8.2 Exemplu. In spaţiul normat $(\mathbb{R}^2, \|\;\|)$ cu $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, seria $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2^n}{3^n}, \frac{1}{n(n+1)}\right)$ este convergentă deoarece

$$\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{2^n}{3^n},\frac{1}{n(n+1)}\right)=\left(\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^n,\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=\left(\frac{2}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1-\frac{2}{3}},1-\frac{1}{k+1}\right)$$

si suma ei este

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{3^n},\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{2^n}{3^n},\frac{1}{n(n+1)}\right)=(2,1).$$

2.8.3 MATHEMATICA: `Sum[a[n], {n, m, Infinity}]` , `NSum[a[n], {n, m, Infinity}]`

```
In[1]:= Sum[2^n/3^n, {n, 1, Infinity}]          ↦  Out[1]=2
In[2]:= NSum[1/(n(n+1)), {n, 1, Infinity}]      ↦  Out[2]=1.
```

2.8.4 Propoziţie.
Dacă seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ *din* $(E,\|\ \|)$ *este convergentă atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstraţie. Este similară demonstraţiei prezentate la pag. 39-**6**.

2.8.5 Propoziţie. *Intr-un spaţiu normat*

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n\geq 0} x_n \textit{ convergenta}\\ \sum_{n\geq 0} y_n \textit{ convergenta}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sum_{n\geq 0}(x_n+y_n) \textit{ convergenta si}\\ \sum_{n=0}^{\infty}(x_n+y_n)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n+\sum_{n=0}^{\infty} y_n\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\in\mathbb{R}\\ \sum_{n\geq 0} x_n \textit{ convergenta}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sum_{n\geq 0}\alpha\, x_n \textit{ convergenta si}\\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha\, x_n=\alpha\sum_{n=0}^{\infty} x_n.\end{array}\right.$$

Demonstraţie. Este similară demonstraţiei prezentate la pag. 39-**7**.

2.8.6 Dacă se modifică sau elimină un număr finit de termeni ai unei serii natura seriei nu se schimbă (doar suma ei este, eventual, afectată).

2.8.7 Teoremă (Criteriul lui Cauchy). *Intr-un spatiu Banach, o serie* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon>0$ *există* $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ *astfel încât*

$$\|\, x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+k}\,\|<\varepsilon \qquad \textit{oricare ar fi}\quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon\\ k\in\mathbb{N}^*=\{1,2,3,...\}.\end{array}$$

Demonstraţie. Este similară demonstraţiei prezentate la pag. 40-**10**.

2.8.8 Definiţie.

Spunem ca seria $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ este *absolut convergenta* daca seria $\sum\limits_{n\geq 0}\|x_n\|$ este convergenta.

2.8.9 Teoremă. *Intr-un spaţiu Banach, o serie absolut convergentă este convergentă.*

Demonstraţie. Este similară demonstraţiei prezentate la pag. 41-**15**.

2.8.10 Teoremă. *Fie* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *o serie de elemente aparţinând unui spaţiu Banach. Dacă există o serie convergentă de numere reale* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *astfel încât*

$$\| x_n \| \leq a_n, \qquad oricare\ ar\ fi\ n \in \mathbb{N}$$

atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ *este absolut convergentă şi, în particular, convergentă.*

Demonstraţie. Seria $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ este convergentă conform criteriului comparaţiei.

2.9 Şiruri de funcţii

2.9.1 Definiţie. Fie A o mulţime şi $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, funcţii definite pe A. Spunem că şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ este *convergent în punctul* x_0 dacă şirul de numere reale $(f_n(x_0))_{n\geq 0}$ este convergent. In caz contrar spunem că şirul este *divergent în punctul* x_0. Mulţimea $A_c \subseteq A$ formată din toate punctele în care şirul este convergent se numeşte *mulţimea de convergenţă* a şirului.

2.9.2 Definiţie. Fie A o mulţime şi f, $f_n : A \to \mathbb{R}$ funcţii definite pe A. Spunem că şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge* (punctual) la f şi scriem $f_n \longrightarrow f$ dacă $A_c = A$ şi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \text{oricare ar fi } \ x \in A$$

adică dacă oricare ar fi $x \in A$ şi $\varepsilon > 0$ există $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \text{oricare ar fi } \ n \geq n_{\varepsilon,x}.$$

Spunem că şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniform* (în A) la f şi scriem $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \text{oricare ar fi } \begin{array}{l} n \geq n_\varepsilon \\ x \in A. \end{array}$$

2.9.3 Exemplu. Sirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$, unde $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ converge punctual la funcţia nulă $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, dar nu converge uniform. Pentru orice $x \in [0,1]$ avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2nx}{1+n^2x^2}=0.$$

Deoarece $|f_n(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n})|=1$, pentru $\varepsilon<1$ nu există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\qquad \text{oricare ar fi}\quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon\\ x\in[0,1].\end{array}$$

2.9.4 Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii $f_n:A\to\mathbb{R}$ care converge uniform în A la $f:A\to\mathbb{R}$. Oricare ar fi $B\subset A$, şirul restricţiilor $(f_n|_B)_{n\geq 0}$ converge uniform în B la $f|_B$.

2.9.5 Teoremă. *Fie A o mulţime şi f, $f_n:A\to\mathbb{R}$, unde $n\in\mathbb{N}$, funcţii definite pe A. Dacă există un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ şi*

$$|f_n(x)-f(x)|\leq a_n,\quad \textit{oricare ar fi}\quad \begin{array}{l} x\in A\\ n\in\mathbb{N}\end{array}$$

atunci şirul $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform la f, adică $f_n \xrightarrow[A]{u} f$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon>0$. Deoarece $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $|a_n|<\varepsilon$, oricare ar fi $n\geq n_\varepsilon$. Dar $|f_n(x)-f(x)|\leq a_n$ şi prin urmare

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \text{oricare ar fi}\quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon\\ x\in A.\end{array}$$

2.9.6 Exemplu. Şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$, unde $f_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin nx$, converge uniform la funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=0$ deoarece $|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{n}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ şi oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

2.9.7 Teoremă (Criteriul lui Cauchy). *Şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$, unde $f_n:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, converge uniform dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât*

$$|f_{n+k}(x)-f_n(x)|<\varepsilon,\quad \textit{oricare ar fi}\quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon\\ k\in\mathbb{N}\\ x\in A.\end{array}\tag{2.4}$$

Demonstraţie. Dacă $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, oricare ar fi $n\geq n_\varepsilon$, $x\in A$. Pentru orice $n\geq n_\varepsilon$, $k\in\mathbb{N}$ şi $x\in A$ avem

$$\begin{aligned}|f_{n+k}(x)-f_n(x)| &= |f_{n+k}(x)-f(x)+f(x)-f_n(x)|\\ &< |f_{n+k}(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Invers, admiţând că este verificată condiţia din enunţ, din (2.4) rezultă că şirul de numere reale $(f_n(x))_{n\geq 0}$ este şir Cauchy şi deci convergent, oricare ar fi $x\in A$.

Arătăm că $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, unde $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Fie $\varepsilon > 0$. Conform condiţiei din enunţ, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n \geq n'_\varepsilon \\ k \in \mathbb{N} \\ x \in A. \end{array}$$

Pentru $k \to \infty$ această relaţie devine

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n \geq n'_\varepsilon \\ x \in A. \end{array}$$

2.9.8 Teoremă. *Avem*

$$\left.\begin{array}{l} f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; \textit{sunt continue in } x_0 \in A \\ (f_n)_{n\geq 0} \;\; \textit{converge uniform la} \;\; f : A \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \textit{ este continua in } x_0.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Avem de arătat că există $\delta > 0$ astfel încât

$$\left.\begin{array}{r} x \in A \\ |x - x_0| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Deoarece $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n \geq n_\varepsilon \\ x \in A. \end{array}$$

Funcţia f_{n_ε} fiind continuă în x_0, rezultă că există $\delta > 0$ astfel încât

$$\left.\begin{array}{r} x \in A \\ |x - x_0| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pentru $x \in A$ cu $|x - x_0| < \delta$ avem

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x) + f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0) + f_{n_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| + |f_{n_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2.9.9 Dacă funcţiile $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în x_0 atunci

$$f_n \xrightarrow[A]{u} f \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right).$$

2.9.10 Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f, f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii continue. Avem*

$$f_n \xrightarrow[I]{u} f \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \tag{2.5}$$

oricare ar fi $[\alpha, \beta] \subseteq I$.

Demonstraţie. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ şi oricare ar fi $x \in I$. Pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem (vezi pag. 139-**8**)

$$\left|\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| = \left|\int_\alpha^\beta (f_n(x)-f(x))\,dx\right|$$
$$\leq \int_\alpha^\beta |f_n(x)-f(x)|\,dx < \tfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta dx = \varepsilon.$$

2.9.11 Relaţia (2.5) se mai poate scrie (limita comută cu integrala)

$$f_n \xrightarrow[I]{u} f \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx.$$

2.9.12 Teoremă. *Fie* $f,\ f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funcţii continue şi* $F,\ F_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt, \qquad F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)\,dt$$

primitivele (vezi pag. 147-**31***) care se anulează în punctul* $x_0 \in [a,b]$. *In aceste condiţii*

$$f_n \xrightarrow[[a,b]]{u} f \qquad \Longrightarrow \qquad F_n \xrightarrow[[a,b]]{u} F.$$

Demonstraţie. Dacă $f_n \xrightarrow[[a,b]]{u} f$ atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(t)-f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon \\ t\in[a,b]. \end{array}$$

Din acestă relaţie rezultă

$$|F_n(x)-F(x)| \leq \int_{x_0}^x |f_n(t)-f(t)|\,dt < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon \\ x\in[a,b]. \end{array}$$

2.9.13 Teoremă. *Fie* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funcţii derivabile cu derivată continuă. Avem*

$$\left.\begin{array}{l} exista\ \ g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\ \ si \\ x_0\in[a,b]\ astfel\ incat: \\ \quad\blacksquare\ \ f_n' \xrightarrow[[a,b]]{u} g \\ \quad\blacksquare\ \ (f_n(x_0))_{n\geq 0}\ este\ convergent \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} exista\ f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\ derivabila \\ astfel\ incat: \\ \qquad\qquad\blacksquare\ \ f_n \xrightarrow[[a,b]]{u} f \\ \qquad\qquad\blacksquare\ \ \ f' = g \end{array}\right.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = \int_{x_0}^x g(t)\,dt + l$, unde $l = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x_0) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{si} \qquad |f_n'(t)-g(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon \\ t\in[a,b]. \end{array}$$

Deoarece $f_n(x) = \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt + f_n(x_0)$ avem

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_{x_0}^x |f_n'(t)-g(t)|\,dt + |f_n(x_0) - l| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon \\ x\in[a,b]. \end{array}$$

2.9.14 Teoremă. (Prima teoremă de aproximare a lui Weierstrass).
Pentru orice funcţie continuă $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ există un şir de polinoame uniform convergent cu limita f.

Demonstraţie. A se vedea [16] ,vol. 2, pag 7.

2.10 Serii de funcţii

2.10.1 Definiţie. Fie A o mulţime şi $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, funcţii definite pe A. Spunem că seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} f_n$ este *convergentă* (C) *în punctul* x_0 din A dacă seria de numere reale $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ este convergentă. In caz contrar spunem că seria este *divergentă* (D) *în punctul* x_0. Mulţimea $A_c \subseteq A$ formată din toate punctele în care seria este convergentă se numeşte *mulţimea de convergenţă* a seriei.

2.10.2 Definiţie. Fie A o mulţime şi $f_n : A \to \mathbb{R}$ funcţii definite pe A. Spunem că seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este *convergentă* dacă $A_c = A$, adică dacă şirul sumelor parţiale (s_k),

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} f_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_k$$

este convergent. Limita acestui şir este numită *suma seriei* şi scriem

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} f_n = \lim_{k\to\infty} (f_0 + f_1 + \cdots + f_k).$$

$\sum_{n\geq 0} f_n$ este numită *uniform convergentă în* A dacă (s_k) este uniform convergent.
$\sum_{n\geq 0} f_n$ este numită *absolut convergentă* dacă seria $\sum_{n\geq 0} |f_n|$ este convergentă.

2.10.3 Dacă seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este uniform convergentă în A cu suma S şi dacă $B \subset A$ atunci seria restricţiilor $\sum_{n\geq 0} f_n|_B$ este uniform convergentă în B şi are suma $S|_B$.

2.10.4 Propoziţie.
Dacă seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} f_n$ *este convergentă atunci* $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Demonstraţie. Este similară demonstraţiei prezentate la pag. 39-**6**.

2.10.5 Teoremă (Criteriul lui Cauchy). *Seria* $\sum_{n\geq 0} f_n$*, unde* $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, converge uniform pe* A *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+k}(x)|<\varepsilon, \quad \textit{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon \\ k\in\mathbb{N} \\ x\in A. \end{array}$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din criteriul lui Cauchy pentru şiruri (pag. 48-**7**).

2.10.6 Teoremă (Criteriul lui Weierstrass).
Fie A o mulţime şi $f_n:A\longrightarrow\mathbb{R}$, unde $n\in\mathbb{N}$, funcţii definite pe A.
Dacă există o serie cu termeni pozitivi convergentă $\sum_{n\geq 0} a_n$ astfel încât

$$|f_n(x)|\leq a_n, \quad \textit{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n\in\mathbb{N} \\ x\in A \end{array}$$

atunci seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este absolut şi uniform convergentă pe A.

Demonstraţie. Utilizăm criteriul lui Cauchy. Fie $\varepsilon>0$. Deoarece $\sum_{n\geq 0} a_n$ este convergentă există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}<\varepsilon$, oricare ar fi $n\geq n_\varepsilon$ şi $k\in\mathbb{N}$, ceea ce conduce la relaţia

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+k} f_m(x)\right|\leq\sum_{m=n+1}^{n+k}|f_m(x)|\leq\sum_{m=n+1}^{n+k}a_m<\varepsilon \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} n\geq n_\varepsilon \\ k\in\mathbb{N}^* \\ x\in A. \end{array}$$

2.10.7 Exemplu. Dacă $\alpha>1$ atunci $\sum_{n\geq 0}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

2.10.8 Teoremă (Criteriul lui Dirichlet.)
Fie $a_n:A\longrightarrow[0,\infty)$ şi $f_n:A\longrightarrow\mathbb{R}$ funcţii definite pe o mulţime A. Avem

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare\ \ a_n(x)\geq a_{n+1}(x),\ \ \forall n\geq 0,\ \forall x\in A \\ \blacksquare\ \ a_n \xrightarrow[A]{u} 0 \\ \blacksquare\ \ exista\ M>0\ astfel\ incat \\ \quad |f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_n(x)|\leq M, \\ \qquad\qquad\qquad \forall n\geq 0,\ \forall x\in A \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n f_n \ este\ uniform\ convergenta.$$

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 40-**11**

2.10.9 Teoremă. *Avem*

$$\left.\begin{array}{l} f_n:A\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\ sunt\ continue\ in\ x_0\in A \\ \sum_{n\geq 0} f_n\ \ este\ uniform\ convergenta \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n\ este\ functie\ continua\ in\ x_0.$$

Demonstraţie. Consecinţă directă a teoremei prezentate la pag. 49-**8**.

2.10.10 Dacă funcţiile $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în x_0 atunci

$$\sum_{n\geq 0} f_n \quad \text{uniform convergenta} \implies \lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x) \right).$$

2.10.11 Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f, f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii continue. Avem*

$$\sum_{n\geq 0} f_n \quad uniform\ convergenta \quad \implies \int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\, dx$$

oricare ar fi $[\alpha, \beta] \subseteq I$.

Demonstraţie. Consecinţă directă a teoremei prezentate la pag. 49-**10**.

2.10.12 Teoremă. *Fie $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii derivabile cu derivată continuă. Avem*

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare\ \sum_{n\geq 0} f_n' \ \ uniform\ convergenta \\ \blacksquare\ \ exista\ \ x_0 \in [a, b]\ \ astfel\ incat \\ \quad \sum_{n\geq 0} f_n(x_0)\ este\ convergenta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \blacksquare\ \sum_{n\geq 0} f_n\ uniform\ convergenta \\ \blacksquare\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n\ este\ derivabila \\ \blacksquare\ (\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'. \end{array}\right.$$

Demonstraţie. Consecinţă directă a teoremei prezentate la pag. 50-**13**.

2.11 Serii de puteri

2.11.1 Definiţie. Prin *serie de puteri* centrată în x_0 se înţelege o serie de forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots \tag{2.6}$$

unde coeficienţii a_n sunt numere fixate.

2.11.2 Teoremă. *In cazul unei serii de puteri (2.6) există $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, numit* raza de convergenţă *a seriei, cu proprietăţile:*

- *Seria este absolut convergentă în orice punct x cu $|x - x_0| < R$.*
- *Seria este divergentă în orice punct x cu $|x - x_0| > R$.*
- *Seria este uniform convergentă în $[x_0 - r, x_0 + r]$, oricare ar fi r cu $0 < r < R$.*

Demonstraţie. Dacă seria este convergentă doar în punctul x_0 atunci $R = 0$. Dacă există $x' \neq x_0$ astfel încât $\sum_{n\geq 0} a_n (x' - x_0)^n$ este convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} a_n (x' - x_0)^n = 0$. Rezultă că există $M > 0$ astfel încât $|a_n (x' - x_0)^n| \leq M$, oricare ar fi $\in \mathbb{N}$.

Dacă x este astfel încât $|x-x_0|<|x'-x_0|$ atunci

$$|a_n(x-x_0)^n|=|a_n(x'-x_0)^n|\left|\frac{x-x_0}{x'-x_0}\right|^n\leq M\left|\frac{x-x_0}{x'-x_0}\right|^n,\quad \text{oricare ar fi } n\in\mathbb{N}.$$

Seria $\sum_{n\geq 0}|a_n(x-x_0)^n|$ este convergentă conform criteriului comparaţiei, seria geometrică $\sum_{n\geq 0}\left|\frac{x-x_0}{x'-x_0}\right|^n$ fiind convergentă. Rezultă că $\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ este absolut convergentă în orice punct x cu $|x-x_0|<|x'-x_0|$. Alegând

$$R=\sup\left\{\ |x'-x_0|\ \middle|\ \sum_{n\geq 0}a_n(x'-x_0)^n \text{ este convergenta }\right\}$$

sunt, evident, îndeplinite primele două condiţii. Dacă r este astfel încât $0<r<R$ atunci $|(x_0+r)-x_0|=r<R$ şi seria $\sum_{n\geq 0}|a_n|\,r^n$ este convergentă. Deoarece

$$|a_n(x-x_0)^n|\leq |a_n|r^n,\qquad \text{oricare ar fi }\ x\in[x_0-r,x_0+r]$$

seria $\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ este uniform convergentă în $[x_0-r,x_0+r]$ conform criteriului lui Weierstrass (pag. 52-**6**).

2.11.3

Deoarece $\sum_{n=0}^{k}(x-x_0)^n=\begin{cases}\frac{1-(x-x_0)^{k+1}}{1-(x-x_0)} & \text{daca } x\neq x_0+1\\ k+1 & \text{daca } x=x_0+1\end{cases}$

seria de puteri $\sum_{n\geq 0}(x-x_0)^n$ este $\begin{cases}\text{convergenta} & \text{daca } |x-x_0|<1\\ \text{divergenta} & \text{daca } |x-x_0|\geq 1.\end{cases}$

Seria are raza de convergenta $R=1$, iar suma ei este

$$S:(x_0-1,x_0+1)\longrightarrow\mathbb{R},\quad S(x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(x-x_0)^n=\frac{1}{1-(x-x_0)}$$

adica

$$\frac{1}{1-(x-x_0)}=1+(x-x_0)+(x-x_0)^2+\cdots+(x-x_0)^n+\cdots\quad \text{pentru }\ |x-x_0|<1.$$

2.11.4 Teoremă (Cauchy-Hadamard).

Raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ *este*

$$R=\begin{cases}0 & \text{daca} & \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty\\ \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} & \text{daca} & 0<\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty\\ \infty & \text{daca} & \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0.\end{cases}$$

Demonstraţie. Conform criteriului Cauchy (pag. 44-**27**) seria este convergentă dacă

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}<1 \qquad \text{adica} \qquad |x-x_0|<\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

şi divergentă dacă

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}>1 \qquad \text{adica} \qquad |x-x_0|>\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2.11.5 Teoremă. *Dacă şirul* $(|a_n|/|a_{n+1}|)_{n\geq 0}$ *are limită atunci raza de convergenţă a seriei de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ *este*

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Demonstraţie. Conform crit. raportului (pag. 44-**28**) seria este convergentă dacă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|}<1 \qquad \text{adica} \qquad |x-x_0|<\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

şi divergentă dacă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|}>1 \qquad \text{adica} \qquad |x-x_0|>\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

2.11.6 Raza de convergenţă a seriei $\sum_{n\geq 0}\frac{(x-1)^n}{n!}$ este $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n!}{1/(n+1)!}=\infty$.

2.11.7 Definiţie. Fie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ o serie de puteri cu raza de convergenţă R.
Functia $S:(x_0-R,x_0+R)\longrightarrow\mathbb{R}$, $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ se numeste *suma seriei.*

2.11.8 Teoremă.
Seriile $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ *şi* $\sum_{n\geq 1} na_n(x-x_0)^{n-1}$ *au aceeeaşi rază de convergenţă.*

Demonstraţie. Fie R şi R' razele de convergenţă ale celor două serii. Din relaţia

$$|x-x_0|<R' \Rightarrow \begin{cases} |a_n(x-x_0)^n|\leq R'|na_n(x-x_0)^{n-1}| \\ \sum_{n\geq 1} na_n(x-x_0)^{n-1}\ C \end{cases} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n\ C \ \Rightarrow\ |x-x_0|<R$$

rezultă $R'\leq R$. Arătăm în continuare că $|x-x_0|<R$ implică $|x-x_0|<R'$. Pentru r astfel încât $|x-x_0|<r<R$ seria $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ este convergentă şi $\lim_{n\to\infty} a_n r^n=0$. Există $M>0$ astfel încât $|a_n r^n|\leq M$ şi

$$|na_n(x-x_0)^{n-1}|=n\,|a_n|\cdot|x-x_0|^{n-1}\leq n\,\frac{M}{r^n}\,|x-x_0|^{n-1}=\frac{M}{r}\,n\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^{n-1}.$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^n}{n\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^{n-1}} = \frac{|x-x_0|}{r} < 1 \;\Rightarrow \sum_{n\geq 1} n\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^{n-1} C \Rightarrow \sum_{n\geq 1} na_n(x-x_0)^{n-1}\, C$$

şi prin urmare $|x-x_0|<R'$, ceea ce conduce la $R\leq R'$.

2.11.9 Teoremă. *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ *o serie de puteri cu raza de convergenţă* R. *Suma seriei*

$$S:(x_0-R,x_0+R)\longrightarrow\mathbb{R},\qquad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

este o funcţie indefinit derivabilă (de clasa C^∞*). Derivatele ei se pot obţine prin derivare termen cu termen*

$$\begin{array}{ll}
S':(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}, & S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^{n-1}\\
S'':(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}, & S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n(x-x_0)^{n-2}\\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
S^{(k)}:(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}, & S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)\, a_n(x-x_0)^{n-k}\\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Demonstraţie. Seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ şi seriile obţinute din ea prin derivare termen cu termen sunt uniform convergente pe orice interval $[x_0-r,x_0+r]\subset(x_0-R,x_0+R)$. Conform teoremei prezentate la pag. 53-**12** restricţia funcţiei sumă S la orice interval (x_0-r,x_0+r) cu $[x_0-r,x_0+r]\subset(x_0-R,x_0+R)$ este indefinit derivabilă şi derivatele ei se pot calcula derivând termen cu termen.

2.11.10 Plecând de la *seria geometrică* (a se vedea pag. 54-**3**, cazul $x_0=0$)

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad \text{pentru}\quad |x|<1$$

prin derivare termen cu termen, obţinem

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots \qquad \text{pentru}\quad |x|<1$$

$$\frac{2}{(1-x)^3}=2\cdot 1+3\cdot 2x+4\cdot 3x^2+\cdots+n(n-1)x^{n-2}+\cdots \qquad \text{pentru}\quad |x|<1.$$

2.11.11 Derivând termen cu termen

$$S(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad \text{pentru orice}\ \ x\in\mathbb{R}$$

obţinem relaţia

$$S'(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+\cdots=S(x) \qquad \text{pentru orice}\ \ x\in\mathbb{R}$$

din care rezultă că S este de forma $C\,\mathrm{e}^x$ cu C o constantă. Deoarece $S(0)=1$ avem

$$\mathrm{e}^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad \text{pentru orice } \ x\in\mathbb{R}.$$

2.11.12 Fie $\alpha\in\mathbb{R}$ fixat. Utilizând teorema de la pag. 55-**5** se deduce că raza de convergenţă a *seriei binomiale*

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n = 1+\alpha\,x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3+\cdots$$

este $R=1$. In acest caz, derivând termen cu termen relaţia

$$S(x)=1+\alpha\,x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n+\cdots \quad \text{pentru} \quad |x|<1$$

obţinem ecuaţia $S'(x)=\frac{\alpha}{1+x}\,S(x)$ care conduce la

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha\,x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n+\cdots \quad \text{pentru} \quad |x|<1.$$

2.11.13 Relaţii similare celor de la punctele precedente se pot obţine prin substituţie: Punând $-x$ în loc de x obţinem

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad \text{pentru} \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots \qquad \text{pentru} \qquad |x|<1.$$

$$\mathrm{e}^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad \text{pentru orice} \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Punând x^2 în loc de x obţinem

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots \qquad \text{pentru} \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \qquad \text{pentru} \qquad |x|<1.$$

$$\mathrm{e}^{x^2}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots \qquad \text{pentru orice} \qquad x\in\mathbb{R}.$$

2.11.14 Teoremă. *Fie $\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ o serie de puteri cu raza de convergenţă R. Suma seriei*

$$S:(x_0-R,x_0+R)\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[\alpha,\beta]\subset(x_0-R,x_0+R)$

$$\int_\alpha^\beta S(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_\alpha^\beta a_n(x-x_0)^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left.\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\right|_\alpha^\beta.$$

In particular, pentru orice $x\in(x_0-R,x_0+R)$ avem

$$\int_{x_0}^x S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Demonstraţie. Seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ este uniform convergentă pe orice interval $[x_0-r, x_0+r] \subset (x_0-R, x_0+R)$. Pentru un interval $[\alpha, \beta]$ dat alegem $r>0$ astfel încât $[\alpha,\beta] \subset [x_0-r, x_0+r] \subset (x_0-R, x_0+R)$ şi utilizăm teorema de la pag. 53-**11**.

2.11.15 Plecând de la relaţiile

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad \text{pentru} \quad |x|<1$$
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \quad \text{pentru} \quad |x|<1.$$

prin integrare termen cu termen obţinem

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad \text{pentru} \quad |x|<1$$
$$\text{arctg}\, x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad \text{pentru} \quad |x|<1.$$

2.12 Serii trigonometrice

2.12.1 Definiţie. Prin *serie trigonometrică* se înţelege o serie de funcţii de forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

unde coeficienţii a_n, b_n sunt numere reale fixate.

2.12.2 Definiţie. Şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$, unde $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \sin 2x, \quad f_4(x) = \cos 2x, \ \ldots$$

format din funcţii periodice cu perioada 2π, se numeşte *şirul trigonometric.*

2.12.3 Exerciţiu. Şirul trigonometric are urmatoarea proprietate de ortogonalitate

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, f_k(x)\, dx = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{daca} \quad n=k \\ 0 & \text{daca} \quad n \neq k. \end{cases} \tag{2.7}$$

Indicaţie. Calcul direct bazat pe formulele

$$\cos nx\, \cos kx = \frac{1}{2}[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x]$$
$$\sin nx\, \cos kx = \frac{1}{2}[\sin(n+k)x + \sin(n-k)x]$$
$$\sin nx\, \sin kx = \frac{1}{2}[\cos(n-k)x - \cos(n+k)x].$$

2.12.4 Definiţie. Prin *polinom trigonometric* se înţelege orice combinaţie liniară finită de termeni ai şirului trigonometric.

2.12.5 Teoremă. *Dacă seria*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,\cos nx + b_n\,\sin nx]$$

este uniform convergentă şi dacă suma ei este funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *atunci*

$$\begin{array}{lll} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx & \quad \textit{oricare ar fi} & n\in\{0,1,2,...\} \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,dx & \quad \textit{oricare ar fi} & n\in\{1,2,3,...\}. \end{array} \tag{2.8}$$

şi are loc egalitatea lui Parseval

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{2.9}$$

Demonstraţie. Fie $s_k(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k}[a_n\,\cos nx + b_n\,\sin nx]$. Deoarece

$$|s_k(x)\,\cos nx - f(x)\,\cos nx| = |\cos nx|\cdot|s_k(x)-f(x)| \leq |s_k(x)-f(x)|$$

obţinem (a se vedea pag. 49-**10**)

$$s_k \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f \implies s_k\,\cos nx \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f\,\cos nx \implies \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} s_k(x)\,\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx.$$

Dar conform proprietăţii de ortogonalitate (pag. 58-**2.7**) avem

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_k(x)\,\cos nx\,dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi a_n, \qquad \text{pentru orice } \; k\geq n.$$

Funcţia periodică f cu perioada 2π fiind limita unui şir uniform convergent de funcţii continue este continuă şi deci mărginită. La fel ca mai sus, $s_k \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f \implies s_k\,f \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f^2$ şi

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} s_k(x)\,f(x)\,dx \\ &= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{k}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\,\cos nx + b_n\,\sin nx)f(x)\,dx\right] \\ &= \lim_{k\to\infty}\pi\left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2)\right] = \pi\left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right]. \end{aligned}$$

2.12.6 Formulele (2.8) au sens pentru orice funcţie f integrabilă pe $[-\pi,\pi]$ şi permit asocierea de serii trigonometrice unei clase foarte largi de funcţii. Vom prezenta pe parcursul acestei secţiuni condiţii suficiente pentru ca o astfel de serie să fie convergentă (punctual, uniform), condiţii suficiente ca suma seriei să coincidă cu funcţia f corespunzătoare, etc. Posibilitatea reprezentării unei funcţii ca sumă a unei serii trigonometrice sau posibilitatea aproximării ei (într-un anumit sens) cu polinoame trigonometrice este foarte utilă în multe aplicaţii.

2.12.7 Definiţie. Fie I un interval astfel încât $[-\pi,\pi]\subseteq I$ şi $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe $[-\pi,\pi]$. Seria

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,\cos nx+b_n\,\sin nx] \qquad \text{unde} \qquad \begin{array}{l} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\cos nx\,dx \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\sin nx\,dx \end{array}$$

se numeşte seria *Fourier-trigonometrică* asociată lui f.

2.12.8 Exemple.
a) Seria Fourier asociată funcţiei $f:[\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R},\ \ f(x)=|x|$ este

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x.$$

b) Seria Fourier asociată funcţiei $f:[\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R},\ \ f(x)=x^2$ este

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

2.12.9

Seria Fourier asociata unei functii pare este de forma $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,\cos nx.$

Seria Fourier asociata unei functii impare este de forma $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\sin nx.$

2.12.10 Definiţie. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie definită pe intervalul închis $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Spunem că f este *continuă pe porţiuni* dacă există o diviziune

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

a intervalului $[a,b]$ astfel încât:

- restricţiile $f|_{(x_{i-1},x_i)}$ sunt continue, oricare ar fi $i\in\{1,2,\ldots,n\}$
- limitele laterale $f(x_0+),\ f(x_1-),\ f(x_1+),\ f(x_2-),\ \ldots\ ,f(x_n-)$, unde

$$f(x_i-)=\lim_{x\nearrow x_i}f(x), \qquad f(x_i+)=\lim_{x\searrow x_i}f(x)$$

există şi sunt finite.

2.12.11 Orice funcţie continuă $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe porţiuni.

2.12.12 Propoziţie. *Dacă* $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe porţiuni şi*

$$t_n:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R},\qquad t_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\,\cos kx+\beta_k\,\sin kx)$$

un polinom trigonometric de gradul n *atunci cea mai mică valoare a integralei*

$$\delta_n^2=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-t_n(x)]^2dx \tag{2.10}$$

se obţine în cazul în care α_k *şi* β_k *sunt coeficienţii Fourier (2.8) asociaţi funcţiei* f.

Demonstraţie. Utilizând relaţiile (2.7) şi (2.8) obţinem

$$\begin{aligned}\delta_n^2 &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,t_n(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}t_n^2(x)\,dx\\ &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\alpha_0\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx-2\sum_{k=1}^{n}\Big[\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\cos kxdx\\ &\qquad\textstyle+\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\sin kxdx\Big]+\pi\left[\frac{1}{2}\alpha_0^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right]\\ &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx+\pi\left[\frac{1}{2}(\alpha_0^2-2a_0\alpha_0)+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2-2\alpha_ka_k-2\beta_kb_k)\right]\\ &= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi\left[\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\\ &\qquad\textstyle+\pi\left\{\frac{1}{2}(\alpha_0-a_0)^2+\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2]\right\}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

2.12.13 Teoremă. *Dacă* $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe porţiuni şi dacă* a_n, b_n *sunt coeficienţii Fourier asociaţi funcţiei* f *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ *este convergentă şi are loc* inegalitatea lui Bessel

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

Demonstraţie. In cazul în care $\alpha_k=a_k$ şi $\beta_k=b_k$, din (2.10) şi (2.11) rezultă

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi\left[\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-t_n(x)]^2dx\ge 0$$

şi

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

2.12.14 Propoziţie. *Dacă* $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe porţiuni atunci coeficienţii Fourier* a_n, b_n *asociaţi funcţiei* f *au proprietatea*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0\,,\qquad\lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

Demonstraţie. Relaţiile rezultă din convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ şi din

$$0 \le |a_n| \le \sqrt{a_n^2+b_n^2}, \qquad 0 \le |b_n| \le \sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

2.12.15 Dacă se modifică valorile luate de o funcţie continuă pe porţiuni într-un număr finit de puncte, funcţia rezultată rămâne continuă pe porţiuni. Are sens să se pună problema dacă o funcţie $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ este sau nu continuă pe porţiuni chiar dacă există un număr finit de puncte din $[-\pi,\pi]$ în care ea nu este definită.

2.12.16 Teoremă. *Dacă $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, derivabilă exceptând eventual un număr finit de puncte, cu derivata f' continuă pe porţiuni şi astfel încât $f(-\pi)=f(\pi)$ atunci seria Fourier asociată lui f este convergentă şi suma ei este f*

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]=f(x), \qquad \textit{oricare ar fi}\ \ x\in[-\pi,\pi].$$

Demonstraţie. A se vedea [6], pag 120.

2.12.17 Fie $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe porţiuni. Dacă modificăm valorile pe care le ia f într-un număr finit de puncte din $[-\pi,\pi]$ seria Fourier asociată nu se modifică. Fără a restrânge generalitatea, vom considera doar funcţii cu proprietatea $f(-\pi)=f(\pi)$. Orice astfel de funcţie este restricţia la $[-\pi,\pi]$ a unei funcţii $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ periodice cu perioada 2π (pentru care am păstrat aceeaşi notaţie).

2.12.18 Teoremă. *Dacă $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, derivabilă în intervalele de continuitate şi cu derivata f' continuă pe porţiuni atunci seria Fourier asociată lui f este convergentă în orice punct şi*

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]=\frac{f(x-)+f(x+)}{2}, \qquad \textit{oricare ar fi}\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Demonstraţie. A se vedea [6], pag 118.

2.12.19 Dacă funcţia f este continuă în punctul x atunci $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}=f(x)$.

2.12.20 Teoremă (A doua teoremă de aproximare a lui Weierstrass).

Orice funcţie continuă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, periodică de perioadă 2π este limita unui şir uniform convergent de polinoame trigonometrice.

Demonstraţie. A se vedea [16], vol.2, pag 119.

2.12.21 Aplicaţia

$$\varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow [a, b], \qquad \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi} t$$

este bijectivă şi inversa ei este

$$\varphi^{-1} : [a, b] \longrightarrow [-\pi, \pi], \qquad \varphi^{-1}(x) = \frac{\pi}{b-a}(2x - a - b).$$

Fiecare funcţie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cu $f(a) = f(b)$ se poate prelungi prin periodicitate cu perioada $(b - a)$ până la o funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$, unde

$$f \circ \varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (f \circ \varphi)(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi} t\right)$$

este o funcţie periodică cu perioada 2π. Seria Fourier corespunzătoare lui $f \circ \varphi$ este

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt] \tag{2.12}$$

unde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi} t\right) \cos nt \, dx = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi} t\right) \sin nt \, dx = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b) dx$$

Deoarece $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ efectuând în (2.12) substituţia $t = \frac{\pi}{b-a}(2x-a-b)$ obţinem seria Fourier corespunzătoare lui f

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b) + b_n \sin \frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b)\right].$$

Capitolul 3

Elemente de topologie. Continuitate

3.1 Mulţimi deschise

3.1.1 Prin *spaţiu metric* se înţelege orice mulţime nevidă pe care s-a definit o distanţă, iar prin *spaţiu normat* orice spaţiu vectorial pe care s-a definit o normă. Noţiunea de spaţiu metric este mult mai generală decât cea de spaţiu normat şi în acelaşi timp cu o structură matematică mult mai săracă. Elementele unui spaţiu normat pot fi descrise prin utilizarea unei baze în spaţiul vectorial corespunzător. Orice spaţiu normat $(E, \| \|)$ are o structură naturală de spaţiu metric dată de distanţa

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d(x, y) = \| x - y \| .$$

Noţiunea de spaţiu metric fiind foarte generală, elementele pe care le implică sunt, în general, insuficiente pentru a permite descrierea unor sisteme fizice. Spaţiile metrice care intervin în modelele matematice utilizate în fizică sunt, în general, spaţii normate sau submulţimi ale unor spaţii normate. In general, punctul de la care se pleacă în construcţia unui model matematic este un spaţiu normat.

3.1.2 Propoziţie. *Orice submulţime nevidă a unui spaţiu normat are o structură naturală de spaţiu metric.*

Demonstraţie. Dacă $(E, \| \|)$ este spaţiu normat şi dacă $S \subseteq E$ este este o submulţime nevidă atunci (S, d), unde

$$d : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d(x,y) = \parallel x - y \parallel$$

este spaţiu metric. Demonstraţia este similară celei prezentate la pag. 32-**2**.

3.1.3 Exemplu. Sfera unitate cu centrul in origine

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \mid \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \}$$

considerată cu distanţa indusă din spaţiul normat $\mathbb{R}^3$

$$d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d((x,y,z),(x',y',z')) = \parallel (x,y,z) - (x',y',z') \parallel$$
$$= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

este spaţiu metric.

3.1.4 Orice submulţime nevidă a unui spaţiu metric are la rândul ei o structură de spaţiu metric. Dacă (S,d) este spaţiu metric şi dacă $S_0 \subset S$ este o submulţime nevidă atunci restricţia aplicaţiei d la $S_0 \times S_0$ este o distanţă pe S_0 şi deci $(S_0, d|_{S_0 \times S_0})$ este spaţiu metric.

3.1.5 Definiţie. Fie (S,d) un spaţiu metric, $x_0 \in S$ un punct fixat şi $r > 0$. Prin *sfera deschisă* de centru x_0 şi rază r se înţelege mulţimea

$$B_r(x_0) = \{ \ x \in S \ \mid \ d(x_0, x) < r \ \}.$$

Figura 3.1

3.1.6 Exemple.

a) In spaţiul normat $(\mathbb{R}, |\ |)$ avem $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

b) In $(\mathbb{R}^2, \|\ \|)$ cu $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ mulţimea $B_r(x_0, y_0)$ este un disc considerat fără circumferinţă (vezi Fig. 3.1, partea stângă).

c) In $(\mathbb{R}^2, \| \ \|)$ cu $\| (x,y) \| = |x| + |y|$ sfera deschisă $B_r(x_0, y_0)$ este formată din punctele situate în interiorul unui pătrat (vezi Fig. 3.1 , partea dreaptă).

c) In $(\mathbb{R}^2, \| \ \|)$ cu $\|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ sfera deschisă $B_r(x_0, y_0)$ este formată din punctele situate în interiorul unui pătrat (vezi Fig. 3.2, partea stângă).

d) In spaţiul $(C^0([a,b]), \| \ \|)$ al funcţiilor continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ considerat împreună cu norma $\| f \| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, sfera deschisă $B_r(f_0)$ este formată din toate funcţiile $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pentru care (vezi Fig. 3.2, partea dreaptă)

$$|f(x) - f_0(x)| < r \qquad \text{oricare ar fi} \quad x \in [a,b]$$

adică din toate funcţiile $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f_0(x) - r < f(x) < f_0(x) + r \qquad \text{oricare ar fi} \quad x \in [a,b].$$

Figura 3.2

3.1.7 Definiţie. Fie (S,d) un spaţiu metric şi $D \subseteq S$ o mulţime. Spunem despre un element $x \in D$ că este *punct interior* al mulţimii D dacă există $r_x > 0$ astfel încât $B_{r_x}(x) \subset D$ (se vedea Fig. 3.3). Mulţimea formată din toate punctele interioare ale lui D este numită *interiorul* lui D şi notată cu $\overset{\circ}{D}$.

Figura 3.3

3.1.8 Din definiţia anterioară rezultă că $\overset{\circ}{D}\subseteq D$, oricare ar fi $D\subseteq S$.

3.1.9 Definiţie. Fie (S,d) un spaţiu metric. Spunem despre o mulţime $D\subseteq S$ că este *mulţime deschisă* dacă $\overset{\circ}{D}=D$, adică dacă orice punct $x\in D$ este punct interior.

3.1.10 Exemple.

a) In cazul spaţiului normat $(\mathbb{R},|\ |)$ avem

$$\overset{\circ}{\mathbb{R}}=\mathbb{R},\qquad \overset{\circ}{\mathbb{Q}}=\emptyset,\qquad D=[0,1)\Rightarrow\overset{\circ}{D}=(0,1).$$

b) In cazul spaţiului normat $(\mathbb{R}^2,\|\ \|)$ cu $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$ avem

$$\begin{array}{lcl} D=\{(x,y)\ |\ x^2+y^2\leq 1\} & \Longrightarrow & \overset{\circ}{D}=\{(x,y)\ |\ x^2+y^2<1\} \\ D=\{(x,y)\ |\ y\geq 0\} & \Longrightarrow & \overset{\circ}{D}=\{(x,y)\ |\ y>0\}. \end{array}$$

3.1.11 Problemă. Fie (S,d) un spaţiu metric. Să se arate că:

a) Mulţimile $\emptyset$ şi S sunt mulţimi deschise.

b) Orice reuniune de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

c) Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

3.1.12 Definiţie. Fie (S,d) un spaţiu metric. Prin *vecinătate* a unui punct $x\in S$ se înţelege orice mulţime deschisă care conţine pe x.

3.2 Mulţimi închise

3.2.1 Definiţie. Fie (S,d) un spaţiu metric şi $A\subseteq S$ o mulţime. Spunem despre un element $a\in S$ că este *punct limită* al mulţimii A dacă pentru orice $r>0$ avem $B_r(a)\cap A\neq\emptyset$ (a se vedea Fig. 3.4). Mulţimea formată din toate punctele limită ale lui A este numită *inchiderea* lui A şi notată cu $\bar{A}$.

3.2.2 Exemple.

a) In cazul spaţiului normat $(\mathbb{R},|\ |)$ avem

$$\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R},\qquad \bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R},\qquad \overline{[0,1)}=[0,1],\qquad \overline{\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}}=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}.$$

b) In cazul spaţiului normat $(\mathbb{R}^2, \| \, \|)$ cu $\| (x,y) \| = \sqrt{x^2+y^2}$ avem

$$\overline{\{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$
$$\overline{\{(x,y) \mid y > 0\}} = \{(x,y) \mid y \geq 0\}.$$

Figura 3.4

3.2.3 Propoziţie. *Fie (S,d) un spaţiu metric şi $A \subseteq S$ o mulţime. Avem $a \in \bar{A}$ dacă şi numai dacă există în A un şir convergent $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Demonstraţie. Dacă $a \in \bar{A}$ atunci $B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Alegând pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ un element $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$ obţinem un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$. Invers, dacă există în A un şir convergent $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ atunci pentru orice $r > 0$ există $n_r \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in B_r(a) \cap A$, oricare ar fi $n \geq n_r$.

3.2.4 Orice punct $x \in A$ este punct limită al lui A. Oricare ar fi A avem $A \subseteq \bar{A}$.

3.2.5 Definiţie. Fie (S,d) un spaţiu metric. Spunem despre o mulţime $A \subseteq S$ că este *mulţime închisă* dacă $A = \bar{A}$, adică dacă A îşi conţine toate punctele limită.

3.2.6 Propoziţie. *Mulţimea A din spaţiul metric (S,d) este închisă dacă şi numai dacă limita oricărui şir convergent din A aparţine lui A.*

Demonstraţie. Orice element din $\bar{A}$ este limita unui şir convergent din A şi pentru orice şir convergent $(x_n)_{n\geq 0}$ din A are loc relaţia $\lim_{n\to\infty} x_n \in \bar{A}$. Avem $\bar{A} = A$ dacă şi numai dacă limita oricărui şir convergent din A aparţine lui A.

3.2.7 Teoremă. *Fie (S,d) un spaţiu metric. O mulţime $D \subseteq S$ este deschisă dacă şi numai dacă complementara ei $S-D$ este mulţime închisă.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Fie $D \subseteq S$ mulţime deschisă. Avem de arătat că $\overline{S-D} \subseteq S-D$. Fie $x \in \overline{S-D}$. Presupunând prin absurd că $x \notin S-D$ rezultă că $x \in D$ şi există $r_x > 0$ astfel încât $B_{r_x}(x) \subset D$. Dar în acest caz $B_{r_x}(x) \cap (S-D) = \emptyset$, ceea ce este în contradicţie cu $x \in \overline{S-D}$. '$\Leftarrow$" Fie $D \subseteq S$ mulţime închisă. Avem de arătat că $S-D$ este deschisă. Fie $x \in S-D$. Deoarece $\bar{D} = D$ avem $x \notin \bar{D}$ şi prin urmare există $r > 0$ astfel încât $B_r(x) \cap D = \emptyset$, adică astfel încât $B_r(x) \subseteq S-D$.

3.2.8 Exerciţiu. Orice submulţime finită a unui spaţiu metric este închisă.

Rezolvarea 1. Singurele şiruri convergente sunt cele constante, de la un rang încolo.

Rezolvarea 2. Fie (S,d) un spaţiu metric şi $A=\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset S$. Mulţimea $S-A$ este deschisă: dacă $x \in S-A$ atunci există $r_x = \min_{1 \leq n \leq k} d(x, x_n)$ cu $B_{r_x}(x) \subset S-A$.

3.2.9 Definiţie. Fie (S,d) un spaţiu metric. Spunem despre o submulţime $A \subset S$ că este *densă* în S dacă $\bar{A} = S$.

3.2.10 Dacă A este densă în S atunci orice element al lui S este limita unui şir convergent de elemente din A. Mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ este densă în spaţiul normat $(\mathbb{R}, |\ |)$. Orice număr real este limita unui şir de numere raţionale.

3.3 Limita unei funcţii într-un punct

3.3.1 In anumite aplicaţii este utilă cunoaşterea comportării unei funcţii f în vecinătatea unui punct a fără a lua în considerare valoarea pe care o ia funcţia în punctul a (în cazul în care ea este definită în a). In particular, este util să se ştie ce se întâmplă cu valorile $f(x)$ ale funcţiei când x se apropie din ce în ce mai mult de punctul a. Pentru ca problema să aibă sens este necesar ca domeniul de definiţie al lui f să conţină puncte oricât de apropiate de a, diferite de a.

3.3.2 Definiţie. Spunem despre un punct $a \in \mathbb{R}$ că este *punct de acumulare* pentru o mulţime $D \subseteq \mathbb{R}$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ avem $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (D-\{a\}) \neq \emptyset$. Prin definiţie, ∞ este punct de acumulare pentru mulţimile nemajorate, iar $-\infty$ este punct de acumulare pentru mulţimile neminorate.

3.3.3 Punctul $a=1$ este punct de acumulare pentru $D=(0,1)\cup(3,\infty)$.
Punctul $a=2$ nu este punct de acumulare pentru $D=(0,1)\cup(3,\infty)$.
Punctul $a=0$ este punct de acumulare pentru $D=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ ...\right\}$.
Punctul $a=1$ nu este punct de acumulare pentru $D=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ ...\right\}$.
Punctul $a=\sqrt{2}$ este punct de acumulare pentru $\mathbb{Q}$.

3.3.4 Definiţie. Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie şi a un punct de acumulare pentru D. Spunem că funcţia f *are limita* l *în punctul* a şi scriem

$$\lim_{x\to a} f(x)=l$$

dacă oricare ar fi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din D–$\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ avem $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$.

3.3.5 Exerciţiu. Fie funcţia

$$\mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}:\ x\mapsto \sin\frac{1}{x}.$$

Să se arate că

$$\lim_{x\to\frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{x}=1 \qquad \text{dar} \qquad \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} \qquad \text{nu exista.}$$

Rezolvare. Punctul $a=\frac{2}{\pi}$ este punct de acumulare pentru $D=\mathbb{R}-\{0\}$ şi

$$x_n\to\frac{2}{\pi} \qquad\Longrightarrow\qquad \sin\frac{1}{x_n}\to\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Punctul $a=0$ este punct de acumulare pentru $D=\mathbb{R}$–$\{0\}$. Limita nu există deoarece

$$\alpha_n=\frac{1}{n\pi}\longrightarrow 0\longleftarrow\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}=\beta_n \qquad \text{dar} \qquad \sin\frac{1}{\alpha_n}\longrightarrow 0\neq 1\longleftarrow\sin\frac{1}{\beta_n}.$$

3.3.6 MATHEMATICA: `Limit[f[x], x -> a]`

`In[1]:=Limit[Sin[1/x], x -> 2/Pi]`	$\mapsto$	Out[1]=1
`In[2]:=Limit[Sin[x]/x, x -> 0]`	$\mapsto$	Out[2]=1
`In[3]:=Limit[(1+1/x)^x, x -> Infinity]`	$\mapsto$	Out[3]=e.

3.3.7 Teoremă. *Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie şi a un punct de acumulare pentru D.*

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{r} \textit{pentru orice}\ \ \varepsilon>0\ \ \textit{exista}\ \delta>0\ \ \textit{astfel incat} \\ \left.\begin{array}{r} x\in D \\ x\neq a \\ |x-a|<\delta \end{array}\right\} \Longrightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon \end{array}\right.$$

Demonstraţie. "$\Longrightarrow$" Presupunând contrariul, există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât oricare ar fi $\delta > 0$ există $x \in D$ cu $x \neq a$, $|x-a| < \delta$ şi $|f(x)-l| \geq \varepsilon$. In particular, alegând $\delta = \frac{1}{n}$ există $x_n \in D$ cu $x_n \neq a$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ şi $|f(x_n)-l| \geq \varepsilon$. Rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ şi conform ipotezei trebuie să avem relaţia $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$, în contradicţie cu $|f(x_n)-l| \geq \varepsilon$. "$\Longleftarrow$" Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir din $D-\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Pentru a arăta că $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$ considerăm $\varepsilon > 0$ arbitrar ales. Conform ipotezei există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D$ cu $x \neq a$ şi $|x-a| < \delta$ are loc relaţia $|f(x)-l| < \varepsilon$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - a| < \delta$ şi deci $|f(x_n)-l| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$.

3.3.8 Definiţie. Fie (S,d) un spaţiu metric. Spunem despre un punct $a \in S$ că este *punct de acumulare* pentru $D \subseteq S$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ avem $B_\varepsilon(a) \cap (D - \{a\}) \neq \emptyset$.

3.3.9 Definiţie. Fie (S_1,d_1), (S_2,d_2) spaţii metrice, $f : D \subseteq S_1 \longrightarrow S_2$ o funcţie şi $a \in S_1$ punct de acumulare pentru D. Spunem că funcţia f *are limita* l *în punctul* a

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

dacă oricare ar fi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din D–$\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ avem $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Figura 3.5

3.3.10 Teoremă. *Fie $f : D \subseteq S_1 \to S_2$ o funcţie şi a punct de acumulare pentru D.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} pentru\ orice\ \ \varepsilon > 0\ \ exista\ \delta > 0\ \ astfel\ incat \\ \left.\begin{array}{r} x \in D \\ x \neq a \\ d_1(x,a) < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \ d_2(f(x), l) < \varepsilon \end{array} \right.$$

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 71-**7** .

3.3.11 In cazul spaţiilor $\mathbb{R}^n$, dacă nu se indică o altă normă, vom subînţelege că structura de spaţiu normat considerată este cea definită de *norma uzuală*

$$\| \,\|: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}: \ x=(x_1,x_2,...,x_n)\mapsto \| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Ea este norma asociată *produsului scalar uzual*

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k\, y_k$$

adică

$$||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

şi defineşte *distanţa uzuală*

$$d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d(x,y)=||x-y|| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k-y_k)^2}.$$

3.3.12 Exerciţiu. Fie funcţia

$$f:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}.$$

Să se arate că

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=\frac{1}{5} \qquad \text{si} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

Rezolvare. Punctul $(1,2)$ este punct de acumulare pentru $D=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Avem

$$(x_n,y_n)\to(1,2) \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_n\to 1\\ y_n\to 2\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad f(x_n,y_n)=\frac{x_n^3}{x_n^2+y_n^2}\to\frac{1^3}{1^2+2^2}=\frac{1}{5}.$$

Punctul $(0,0)$ este punct de acumulare pentru D. Dacă $(x_n,y_n)\to(0,0)$ atunci

$$0\leq |f(x_n,y_n)-0| = \left|\frac{x_n^3}{x_n^2+y_n^2}\right| = \frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2}\,|x_n|\leq |x_n|\to 0.$$

3.3.13 Exerciţiu. Fie funcţia

$$f:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Să se arate că nu există limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

deşi există *limitele iterate*

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 0 = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)).$$

Rezolvare. Oricare ar fi $\alpha\in\mathbb{R}$ avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n},\frac{\alpha}{n}\right)=(0,0) \quad \text{dar limita} \quad \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{\alpha}{n}\right)=\frac{\alpha}{1+\alpha^2} \quad \text{depinde de } \alpha.$$

3.3.14 Propoziţie. *Fie funcţia*

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k, \qquad f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x))$$

şi $a\in\mathbb{R}^n$ *un punct de acumulare pentru* D. *Avem*

$$\lim_{x\to a} f(x)=(l_1, l_2, ..., l_k) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f_j(x)=l_j \ \ oricare\ ar\ fi \ \ j\in\{1, 2, ..., k\}.$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din relaţia (a se vedea pag. 38-**13**)

$$\left.\begin{array}{l} |f_1(x)-l_1| \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ |f_k(x)-l_k| \end{array}\right\} \le \| \ f(x)-l \ \| \le \ |f_1(x)-l_1| + ... + |f_k(x)-l_k|.$$

3.4 Funcţii continue

3.4.1 In acest paragraf vom studia comportarea unei funcţii în vecinătatea unui punct a aparţinând domeniului de definiţie comparând valoarea funcţiei în a cu valorile luate în vecinătatea lui a.

3.4.2 Definiţie. Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie şi $a\in D$. Spunem că f *este continuă* în a dacă oricare ar fi şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ din D cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ avem $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$.

3.4.3 Teoremă. *Fie* $f:D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *o funcţie şi* $a \in D$. *Avem*

$$f\ este\ continua\ in\ a \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} pentru\ orice \ \ \varepsilon>0 \ \ exista\ \delta>0 \ \ astfel\ incat \\ \left.\begin{array}{r} x\in D \\ |x-a|<\delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \ |f(x) - f(a)|<\varepsilon \end{array}\right.$$

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 71-**7** .

3.4.4 Definiţie. Fie (S_1, d_1), (S_2, d_2) spaţii metrice, $f : D \subseteq S_1 \longrightarrow S_2$ o funcţie şi $a\in D$. Spunem că funcţia f *este continuă* în a dacă oricare ar fi şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ din D cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ avem $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$.

3.4.5 Definiţie. Spunem că funcţia $f : D \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ este *funcţie continuă* dacă este continuă în orice punct $a \in D$.

3.4.6 Punctele lui D care nu sunt puncte de acumulare se numesc *puncte izolate.* Dacă $a \in D$ este punct izolat şi dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir din D cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = a$, oricare ar fi $n \geq n_0$, ceea ce conduce la $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Astfel, o funcţie este continuă în orice punct izolat al domeniului de definiţie.

3.4.7 O funcţie f este continuă într-un punct de acumulare a aparţinând domeniului de definiţie dacă şi numai dacă f are limită în a şi $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

3.4.8 Teoremă. *Fie $f : D \subseteq S_1 \longrightarrow S_2$ o funcţie şi $a \in D$. Avem*

$$f \textit{ este continua in } a \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{pentru orice } \ \varepsilon > 0 \ \textit{ exista } \delta > 0 \ \textit{ astfel incat} \\ \left. \begin{array}{r} x \in D \\ d_1(x,a) < \delta \end{array} \right\} \ \Longrightarrow \ d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon \end{array} \right.$$

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 71-**7** .

3.4.9 Propoziţie. (Prelungirea prin continuitate). *Fie $f : D \subseteq S_1 \longrightarrow S_2$ o funcţie şi a un punct de acumulare pentru D care nu aparţine lui D. Dacă există limita*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

atunci funcţia

$$\tilde{f} : D \cup \{a\} \longrightarrow S_2, \qquad \tilde{f}(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \textit{daca} & x \in D \\ l & \textit{daca} & x = a \end{array} \right.$$

este continuă în a.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă direct din definiţia continuităţii.

3.4.10 Exemplu. Deoarece $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ funcţia

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

se poate prelungi prin continuitate, rezultând funcţia continuă

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\sin x}{x} & \text{daca} & x \neq 0 \\ 1 & \text{daca} & x = 0 \end{array} \right.$$

3.4.11 Propoziţie. *Fie* (S_1,d_1), (S_2,d_2), (S_3,d_3) *spaţii metrice şi*

$$f:D_1\subseteq S_1 \longrightarrow S_2, \qquad g:D_2\subseteq S_2 \longrightarrow S_3$$

două funcţii astfel încât $f(D_1)\subseteq D_2$. *Dacă* f *este continuă în punctul* $a\in D_1$ *şi dacă* g *este continuă în* $f(a)\in D_2$ *atunci funcţia compusă*

$$g\circ f : D_1 \longrightarrow S_3, \qquad (g\circ f)(x)=g(f(x))$$

este continuă în punctul a.

Demonstraţie. Din continuitatea lui f în a şi a lui g în $f(a)$ rezultă relaţia

$$x_n\to a \quad\Longrightarrow\quad f(x_n)\to f(a) \quad\Longrightarrow\quad (g\circ f)(x_n)=g(f(x_n))\to g(f(a))=(g\circ f)(a)$$

care arată că $g\circ f$ este continuă în a.

3.4.12 Definiţie. Fie (S_1,d_1), (S_2,d_2) spaţii metrice. Spunem că funcţia $f:D\subseteq S_1\to S_2$ este *funcţie continuă* dacă este continuă în orice punct $a\in D$.

3.4.13 Propoziţie. *Dacă* $f:S_1\longrightarrow S_2$ *este funcţie continuă atunci:*

$$D \textit{ deschisa in } S_2 \quad\Longrightarrow\quad f^{-1}(D) \textit{ deschisa in } S_1.$$

Demonstraţie. Fie $a\in f^{-1}(D)=\{x\in S_1 \mid f(x)\in D\}$. Deoarece $f(a)$ aparţine mulţimii deschise D rezultă că există $\varepsilon>0$ astfel încât $B_\varepsilon(f(a))\subset D$. Funcţia f fiind continuă în a, există $\delta>0$ astfel încât $d_1(x,a)<\delta \Longrightarrow d_2(f(x),f(a))<\varepsilon$, adică relaţia $f(B_\delta(a))\subset B_\varepsilon(f(a))$ din care rezultă $B_\delta(a)\subset f^{-1}(D)$.

3.4.14 Propoziţie. *Dacă* $(E,\|\ \|)$ *este spaţiu normat atunci aplicaţia*

$$\|\ \|: E\longrightarrow \mathbb{R}:\ x\mapsto \|x\|$$

este continuă. In particular, aplicaţia modul $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}: x\mapsto |x|$ *este continuă.*

Demonstraţie. Din definiţia normei rezultă relaţiile

$$\|x_n\|=\|x_n-a+a\|\le\|x_n-a\|+\|a\|, \qquad \|a\|=\|a-x_n+x_n\|\le\|x_n-a\|+\|x_n\|$$

care conduc la

$$-\|x_n-a\|\le\|x_n\|-\|a\|\le\|x_n-a\| \qquad \text{adica} \qquad |\,\|x_n\|-\|a\|\,|\le\|x_n-a\|$$

şi prin urmare,

$$x_n\to a \quad\Longrightarrow\quad \|x_n-a\|\to 0 \quad\Longrightarrow\quad |\,\|x_n\|-\|a\|\,|\to 0 \quad\Longrightarrow\quad \|x_n\|\to\|a\|\,.$$

3.4.15 Propoziţie. *Dacă* $(E, \|\ \|)$ *este spaţiu normat atunci aplicaţiile*

$$E \times E \longrightarrow E : \ (x, y) \mapsto x + y \qquad \mathbb{R} \times E \longrightarrow E : \ (\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

sunt continue (a se vedea pag. 31-**5**).

Demonstraţie. Dacă $(x_n, y_n) \to (a, b)$ atunci $x_n \to a,\ \ y_n \to b$ şi avem

$$0 \leq \| (x_n + y_n) - (a + b) \| \leq \| x_n - a \| + \| y_n - b \| \to 0.$$

Dacă $(\alpha_n, x_n) \to (\alpha, a)$ atunci $\alpha_n \to \alpha,\ \ x_n \to a$ şi avem

$$\begin{aligned} 0 \leq \| \alpha_n x_n - \alpha a \| &= \| (\alpha_n - \alpha)(x_n - a) + (\alpha_n - \alpha) a + \alpha (x_n - a) \| \\ &\leq |\alpha_n - \alpha| \ \| x_n - a \| + |\alpha_n - \alpha| \ \| a \| + |\alpha| \ \| x_n - a \| \to 0. \end{aligned}$$

3.4.16 Teoremă. *Orice aplicaţie liniară* $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *este continuă.*

Demonstraţie. Orice vector $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ admite în raport cu baza canonică

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), \quad \ldots \quad e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$$

reprezentarea $u = u_1\, e_1 + u_2\, e_2 + \ldots + u_n\, e_n$. Din relaţia (a se vedea pag. 34-**8**)

$$\begin{aligned} \| Ax - Aa \| &= \| A(x - a) \| = \| A((x_1 - a_1)\, e_1 + (x_2 - a_2)\, e_2 + \ldots + (x_n - a_n)\, e_n) \| \\ &\leq \| A((x_1 - a_1)\, e_1 \| + \| (x_2 - a_2)\, e_2 \| + \ldots + \| (x_n - a_n)\, e_n) \| \\ &= |x_1 - a_1| \ \| Ae_1 \| + |x_2 - a_2| \ \| Ae_2 \| + \cdots + |x_n - a_n| \ \| Ae_n \| \\ &\leq \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2} \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^n \| Ae_j \|^2} = \| x - a \| \ \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^n \| Ae_j \|^2}. \end{aligned}$$

verificată oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^n$ rezultă că $\lim_{x \to a} Ax = Aa$.

3.4.17 Propoziţie. *O funcţie*

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k, \qquad f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x))$$

este continuă într-un punct $a \in D$ *dacă şi numai dacă fiecare dintre funcţiile*

$$f_j : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad j \in \{1, 2, ..., k\}.$$

este continuă în punctul a.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din relaţia (a se vedea pag. 38-**13**)

$$\left. \begin{array}{l} |f_1(x) - f_1(a)| \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |f_k(x) - f_k(a)| \end{array} \right\} \leq \| \ f(x) - f(a) \ \| \leq \ |f_1(x) - f_1(a)| + ... + |f_k(x) - f_k(a)|.$$

3.5 Mulţimi compacte

3.5.1 Definiţie. Spunem despre o mulţime K dintr-un spaţiu metric (S,d) că este *compactă* (prin şiruri) dacă orice şir $(x_n)_{n\geq 0}$ din K conţine cel puţin un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ convergent către un element din K.

3.5.2 Exerciţiu. In spaţiul $(\mathbb{R},|\ |)$, orice interval $[a,b]$ este mulţime compactă.

Rezolvare. Orice şir $(x_n)_{n\geq 0}$ din $[a,b]$ este mărginit şi conform teoremei lui Cesaro (pag. 24-**18**) conţine un subşir convergent $(x_{n_k})_{k\geq 0}$. In plus, avem

$$a \leq x_{n_k} \leq b \quad \Longrightarrow \quad a \leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq b.$$

3.5.3 Teoremă. *Intr-un spaţiu metric, orice mulţime compactă este închisă.*

Demonstraţie. Fie (S,d) un spaţiu metric şi $K\subset S$ o mulţime compactă. Dacă $a\in\bar{K}$ atunci există in K un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Mulţimea K fiind compactă, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ conţine un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ convergent la un element din K. Dar $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n = a$ şi prin urmare $a\in K$. Rezultă că $\bar{K}\subseteq K$.

3.5.4 Definiţie. Spunem despre o mulţime A dintr-un spaţiu metric (S,d) că este *mărginită* dacă există $a\in S$ şi $r>0$ astfel încât $A\subset B_r(a)$.

3.5.5 Teoremă. *Intr-un spaţiu metric, orice mulţime compactă este mărginită.*

Demonstraţie. Fie (S,d) un spaţiu metric şi $K\subset S$ o mulţime compactă. Presupunând că K nu este mărginită există un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ în K astfel încât $d(x_n,x_k)\geq 1$ oricare ar fi $n,k\in\mathbb{N}$. El poate fi generat în modul următor: alegem $x_0\in K$, apoi $x_1\in K-B_1(x_0)$, apoi $x_2\in K-(x_0)\cup B_1(x_1))$, apoi $x_3\in K-(B_1(x_0)\cup B_1(x_1)\cup B_1(x_2))$, etc. Mulţimea nemărginită K nu este conţinută în $B_1(x_0)\cup B_1(x_1)\cup\ldots\cup B_1(x_n)$ deoarece alegând

$$r=\max\{1,\ d(x_0,x_1)+1,\ d(x_0,x_2)+1,\ldots,d(x_0,x_n)+1\}$$

avem $B_1(x_0)\cup B_1(x_1)\cup\ldots\cup B_1(x_n)\subset B_r(x_0)$. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ nu conţine niciun subşir convergent, ceea ce este in contradicţie cu ipoteza ca A este mulţime compactă.

3.5.6 Teoremă (Bolzano-Weierstrass).
In spaţiul $\mathbb{R}^m$ o mulţime este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită.

Demonstraţie. Fie $K \subset \mathbb{R}^m$ o mulţime închisă şi mărginită. Avem de arătat că orice şir $(x_n)_{n\geq 0}$ din K conţine un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ convergent în K. Mulţimea mărginită K poate fi închisă într-un paralelipiped $K \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Utilizând metoda prezentată la pag. 24-**18**, bazată pe divizări succesive ale paralelipipedului putem extrage din $(x_n)_{n\geq 0}$ un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ convergent în $\mathbb{R}^n$. Mulţimea închisă K conţine limitele tuturor şirurilor convergente cu elemente din K.

3.5.7 Fie (S_1, d_1), (S_2, d_2) spaţii metrice şi $A \subset S_1$. Spunem despre o funcţie $f : A \longrightarrow S_2$ că este *continuă* dacă este continuă în orice punct $a \in A$, adică dacă pentru orice $a \in A$ şi orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_a > 0$ astfel încât

$$\left.\begin{array}{r} x \in A \\ d_1(x, a) < \delta_a \end{array}\right\} \implies d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

3.5.8 Definiţie. Fie (S_1, d_1), (S_2, d_2) spaţii metrice şi $A \subset S_1$. Spunem despre o funcţie $f : A \longrightarrow S_2$ că este *uniform continuă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$\left.\begin{array}{r} x, y \in A \\ d_1(x, y) < \delta \end{array}\right\} \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

3.5.9 Orice funcţie unifom continuă este funcţie continuă.

3.5.10 Exerciţiu. Funcţia

$$f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

este continuă, dar nu este uniform continuă.

Rezolvare. Presupunem f uniform continuă. Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$\left.\begin{array}{r} x, y \in (0, 1) \\ |x - y| < \delta \end{array}\right\} \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon.$$

Putem alege $\delta < 1$. Deoarece δ, $\frac{\delta}{2} \in (0, 1)$ şi $\left|\delta - \frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$ trebuie ca $\left|\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta}\right| < \frac{1}{2}$ adică $\delta > 2$, în contradicţie cu alegerea $\delta < 1$.

3.5.11 Teoremă. *O funcţie continuă pe o mulţime compactă este uniform continuă.*

Demonstraţie. Fie (S_1, d_1), (S_2, d_2) spaţii metrice, $K \subset S_1$ o mulţime compactă şi $f : K \longrightarrow S_2$ o funcţie continuă. Avem de arătat că f este uniform continuă.

Presupunând contrariul, există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât pentru orice $\delta > 0$ există $x, y \in K$ cu $d_1(x,y) < \delta$ şi $d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$. In particular, pentru $\delta = \frac{1}{n}$ există x_n, $y_n \in K$ cu $d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ şi $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$. Deoarece K este mulţime compactă, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ conţine un subşir convergent $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ cu limita $a = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ aparţinând lui K. Din relaţia $0 \leq d_1(a, y_{n_k}) \leq d_1(a, x_{n_k}) + d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) < d_1(a, x_{n_k}) + \frac{1}{n_k}$ rezultă că $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = a$. Funcţia f fiind continuă în a avem $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$. Inegalitatea $d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d_2(f(x_{n_k}), f(a)) + d_2(f(a), f(y_{n_k}))$ conduce la $\lim_{k\to\infty} d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) = 0$, în contradicţie cu $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$.

3.5.12 Definiţie. Fie (S_1, d_1), (S_2, d_2) spaţii metrice şi $A \subset S_1$. Spunem despre o funcţie $f : A \longrightarrow S_2$ că este *mărginită* dacă $f(A)$ este mulţime mărginită.

3.5.13 Teoremă. *O funcţie continuă pe o mulţime compactă este mărginită.*

Demonstraţie. Presupunem că $f : K \subset S_1 \longrightarrow S_2$ nu este mărginită şi fie $b \in S_2$ fixat. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $f(K) \not\subset B_n(b)$, adică există $x_n \in K$ cu $d_2(b, f(x_n)) \geq n$. Deoarece K este mulţime compactă, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ conţine un subşir convergent $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ cu limita $a = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ aparţinând lui K. Funcţia f fiind continuă în a, avem $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a)$, adică $\lim_{k\to\infty} d_2(f(x_{n_k}, f(a)) = 0$. In particular, există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $d_2(f(x_{n_k}, f(a)) \leq 1$ oricare ar fi $k \geq N$. Relaţia

$$n_k \leq d_2(b, f(x_{n_k})) \leq d_2(b, f(a)) + d_2(f(a), f(x_{n_k})) \leq d_2(b, f(a)) + 1$$

verificată oricare ar fi $k \geq N$ arată că şirul strict crescător de numere naturale $(n_k)_{k\geq 0}$ este mărginit, ceea ce este imposibil.

3.5.14 Teoremă. *Fie (S, d) spaţiu metric. Funcţiile continue $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ transformă mulţimi compacte în mulţimi compacte.*

Demonstraţie. Fie $K \subset S$ mulţime compactă. Din teorema anterioară rezultă că $f(K)$ este mulţime mărginită. Rămâne să arătăm că $f(K)$ este închisă. Fie $(f(x_n))_{n\geq 0}$ un şir din $f(K)$ convergent în $\mathbb{R}^m$. Avem de arătat că $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ aparţine mulţimii $f(K)$. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din mulţimea compactă K conţine un subşir convergent $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ cu limita $a = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ aparţinând lui K. Deoarece f este continuă în a avem $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a)$ şi prin urmare $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ aparţine mulţimii $f(K)$.

3.5.15 Definiţie. Spunem despre o funcţie reală mărginită $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ că *îşi atinge marginile* dacă există $a, b \in A$ astfel încât $\inf_{x\in A} f(x) = f(a)$ şi $\sup_{x\in A} f(x) = f(b)$.

3.5.16 Teoremă. *O funcţie reală continuă pe o mulţime compactă şi atinge marginile.*

Demonstraţie. Fie (S, d) un spaţiu metric, $K \subset S$ o mulţime compactă şi $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie reală continuă. Conform teoremei anterioare f este mărginită şi prin urmare, există numerele reale $m = \inf_{x\in K} f(x)$ şi $M = \sup_{x\in K} f(x)$. Presupunem că nu există $a \in K$ cu $f(a) = m$. In acest caz $m < f(x)$, oricare ar fi $x \in K$ şi

$$g : K \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{f(x) - m}$$

este funcţie continuă. Conform teoremei anterioare, funcţia g este mărginită. Notând $M' = \sup_{x\in K} g(x)$ avem $g(x) \leq M'$, adică $f(x) \geq m + \frac{1}{M'}$, oricare ar fi $x \in K$. Ultima relaţie este insă în contradicţie cu faptul că m este cel mai mare minorant pentru mulţimea $\{f(x) \mid x \in K\}$. Rămâne că există $a \in K$ cu $f(a) = m$. Printr-un raţionament similar se arată că există $b \in K$ cu $f(b) = M$.

3.6 Mulţimi conexe

3.6.1 Definiţie. Spunem despre o funcţie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definită pe un interval $I \subset \mathbb{R}$ că *are proprietatea lui Darboux* dacă oricare ar fi $a, b \in I$ distincte şi oricare ar fi numărul λ între $f(a)$ şi $f(b)$ există c_λ între a şi b astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.

3.6.2 O funcţie cu proprietatea lui Darboux este o funcţie care nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare.

3.6.3 Teoremă.
Orice funcţie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă pe un interval $I \subset \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

Demonstraţie. Fie $a < b$ şi $f(a) \leq f(b)$ (cazul $f(a) \geq f(b)$ se analizează similar). Dacă $f(a) = f(b)$ atunci $\lambda = f(a)$ şi alegând $c_\lambda = a$ avem $f(c_\lambda) = \lambda$. Analizăm în continuare cazul $f(a) < \lambda < f(b)$. Mulţimea $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \lambda\}$ este nevidă şi mărginită. Arătăm că $f(\sup A) = \lambda$, adică se poate alege $c_\lambda = \sup A$. Deoarece $\lambda < f(b)$ avem $c_\lambda < b$ şi $f(y) > \lambda$, pentru orice $y \in (c_\lambda, b)$. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent din A şi $(y_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent din (c_λ, b) astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = c_\lambda = \lim_{n\to\infty} y_n$. Deoarece f este continuă în c_λ şi $f(x_n) \leq \lambda < f(y_n)$, prin trecere la limită, obţinem $f(c_\lambda) = \lambda$.

3.6.4 Propoziţie. *Orice funcţie continuă şi injectivă $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definită pe un interval I este strict monotonă.*

Demonstraţie. Presupunând că f nu este strict monotonă există $x_1 < x_2 < x_3$ în I astfel încât $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ sau $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Funcţia f ia valoarea $\lambda = \frac{1}{2}(f(x_2) + \max\{f(x_1),\ f(x_3)\})$, respectiv $\lambda = \frac{1}{2}(f(x_2) + \min\{f(x_1),\ f(x_3)\})$ atât în intervalul (x_1, x_2) cât şi în intervalul (x_2, x_3), în contradicţie cu injectivitatea ei.

3.6.5 Teoremă. *Inversa unei funcţii continue bijective $f : I \longrightarrow J$ definite pe un interval I este continuă şi strict monotonă.*

Demonstraţie. Din propoziţia anterioară rezultă că f este strict monotonă. Vom analiza cazul în are f este strict crescătoare (celălalt caz se analizează asemanător). Funcţia $f^{-1} : J \longrightarrow I$ este strict crescătoare: oricare ar fi $y_1, y_2 \in J$ există $x_1, x_2 \in I$ astfel încât $y_1 = f(x_1)$ şi $y_2 = f(x_2)$, iar $y_1 < y_2$ implică $x_1 < x_2$. Arătăm că f^{-1} este continuă într-un punct oarecare $y_0 \in J$. Considerăm cazul în care y_0 nu este extremitate a intervalului (cazul in care y_0 este extremitate se analizează asemanător). Fie $x_0 \in I$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât $f(x_0) = y_0$ şi $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$. Deoarece $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$ există $\delta > 0$ astfel încât $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_0 - \varepsilon),\ f(x_0 + \varepsilon))$ şi prin urmare $|y - y_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$.

3.6.6 Definiţie. Fie (S, d) un spaţiu metric. Spunem despre o mulţime $A \subset S$ că este *conexă* dacă în S nu există două mulţimi deschise D_1, D_2 astfel încât

$$A \subset D_1 \cup D_2, \qquad D_1 \cap A \neq \emptyset, \qquad D_2 \cap A \neq \emptyset \qquad \text{si} \qquad A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

3.6.7 Mulţimea $\{0, 1\}$ din $\mathbb{R}$ nu este conexă deoarece există, de exemplu, mulţimile deschise $D_1 = (-\infty, \frac{1}{2})$ şi $D_2 = (\frac{1}{3}, \infty)$ astfel încât

$$\{0,1\} \subset D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap \{0,1\} \neq \emptyset, \quad D_2 \cap \{0,1\} \neq \emptyset, \quad \{0,1\} \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

3.6.8 In cazul lui $\mathbb{R}$, denumirea de *interval* este utilizată pentru mulţimi de forma

$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$	$(a,\infty)=\{x \mid a<x\}$	$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$
$(a,b]=\{x \mid a<x\leq b\}$	$[a,\infty)=\{x \mid a\leq x\}$	$[a,a]=\{a\}$
$[a,b)=\{x \mid a\leq x<b\}$	$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$	$(a,a)=\emptyset$
$[a,b]=\{x \mid a\leq x\leq b\}$	$(-\infty,b]=\{x \mid x\leq b\}$	

3.6.9 Propoziţie. *O mulţime $A\subseteq\mathbb{R}$ este conexă dacă şi numai dacă este interval.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Fie $A\subseteq\mathbb{R}$ conexă nevidă. Presupunând că A nu este interval, există a,b,c astfel încât $a<c<b$, $a\in A$, $b\in A$ şi $c\notin A$. In acest caz, există mulţimile deschise $D_1=(-\infty,c)$, $D_2=(c,\infty)$ astfel încât $A\subset D_1\cup D_2$, $D_1\cap A\neq\emptyset$, $D_2\cap A\neq\emptyset$ şi $A\cap D_1\cap D_2=\emptyset$, în contradiţie cu ipoteza că A este conexă.
"$\Leftarrow$" Presupunând că A nu este conexă, există două mulţimi deschise D_1, D_2 astfel încât $A\subset D_1\cup D_2$, $D_1\cap A\neq\emptyset$, $D_2\cap A\neq\emptyset$ şi $A\cap D_1\cap D_2=\emptyset$. Funcţia

$$f:A\longrightarrow\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases}0 & \text{daca } x\in D_1\cap A\\ 1 & \text{daca } x\in D_2\cap A\end{cases}$$

este continuă în orice punct $a\in A$. Dacă $a\in D_1\cap A$ atunci există $r_a>0$ astfel încât $B_{r_a}(a)\subset D_1$. Pentru orice $\varepsilon>0$ alegând $\delta=r_a$ avem

$$\left.\begin{array}{r}x\in A\\ |x-a|<\delta\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon.$$

ceea ce arată că f este continuă în a. Cazul $a\in D_1\cap A$ se analizează similar. Conform teoremei precedente (pag. 81-**3**) funcţia f continuă pe intervalul A are proprietatea lui Darboux. Acest lucru nu este însă posibil deoarece $f(A)=\{0,1\}$.

3.6.10 Folosind limbajul obişnuit, o mulţime conexă poate fi descrisă ca fiind o mulţime "formată dintr-o singură bucată".

3.6.11 Teoremă.
Imaginea unei mulţimi conexe printr-o funcţie continuă este o mulţime conexă.

Demonstraţie. Fie (S_1,d_1), (S_2,d_2) spaţii metrice, $A\subseteq S_1$ mulţime conexă şi fie $f:A\longrightarrow S_2$ o funcţie continuă. Avem de arătat că $f(A)$ este mulţime conexă. Presupunând că $f(A)$ nu este mulţime conexă există două mulţimi deschise $\tilde{D}_1$, $\tilde{D}_2$ astfel încât $f(A)\subset\tilde{D}_1\cup\tilde{D}_2$, $\tilde{D}_1\cap f(A)\neq\emptyset$, $\tilde{D}_2\cap f(A)\neq\emptyset$ şi $f(A)\cap\tilde{D}_1\cap\tilde{D}_2=\emptyset$. Deoarece preimaginea unei mulţimi deschise printr-o aplicaţie continuă este o mulţime deschisă (a se vedea pag. 76-**13**), mulţimile $D_1=f^{-1}(\tilde{D}_1)$ şi $D_2=f^{-1}(\tilde{D}_2)$ sunt mulţimi deschise. Dar

$$\tilde{D}_1 \cap f(A) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; D_1 \cap A \neq \emptyset \qquad\qquad f(A) \subset \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \;\Rightarrow\; A \subset D_1 \cup D_2$$
$$\tilde{D}_2 \cap f(A) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; D_2 \cap A \neq \emptyset \qquad f(A) \cap \tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2 = \emptyset \;\Rightarrow\; A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

ceea ce arată că A nu este conexă, în contradicţie cu ipoteza.

3.6.12 Exemple.

a) Imaginea $\gamma([\alpha,\beta]) = \{\gamma(t) \mid t \in [\alpha,\beta]\}$ a unei funcţii continue
$$\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$$
este mulţime conexă.

b) Cercul $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ din plan este mulţime conexă deoarece este imaginea aplicaţiei continue
$$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

c) Segmentul închis $[a,b] = \{(1–t)a+tb \mid t \in [0,1]\}$ care uneşte două puncte $a,b \in \mathbb{R}^n$ este mulţime conexă deoarece este imaginea aplicaţiei continue
$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \gamma(t) = (1-t)a+tb.$$

3.6.13 Propoziţie. *Fie (S,d) un spaţiu metric, $A \subseteq S$ o mulţime conexă şi $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Dacă există $a,b \in A$ cu $f(a)\,f(b) < 0$ atunci există $c \in A$ astfel încât $f(c) = 0$.*

Demonstraţie. Mulţimea $f(A) \subset \mathbb{R}$ fiind conexă, este un interval care conţine numerele de semn diferit $f(a)$ şi $f(b)$.

3.6.14 Propoziţie. *Dacă $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă atunci*
$$f([a,b]) = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x),\ \max_{x\in[a,b]} f(x)\right].$$

Demonstraţie. Funcţia f îşi atinge marginile şi $f([a,b])$ este interval.

3.6.15 Propoziţie. *O submulţime nevidă $A \subseteq S$ a unui spaţiu metric este conexă dacă şi numai dacă orice funcţie continuă de forma $f : A \to \{0,1\}$ este constantă.*

Demonstraţie."$\Rightarrow$" Mulţimea nevidă $f(A) \subseteq \{0,1\}$ fiind conexă, singurele variante posibile sunt $f(A) = \{0\}$ şi $f(A) = \{1\}$. "$\Leftarrow$" Dacă A nu este conexă atunci există două mulţimi deschise D_1, D_2 astfel încât $A \subset D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap A \neq \emptyset$, $D_2 \cap A \neq \emptyset$ şi $A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Funcţia neconstantă

$$f : A \longrightarrow \{0,1\}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{daca} \quad x \in D_1 \cap A \\ 1 & \text{daca} \quad x \in D_2 \cap A \end{cases}$$

este continuă (a se vedea pag. 83-**9**)

3.6.16 Teoremă. *Dacă $(A_i)_{j\in J}$ este o familie de submulţimi conexe ale unui spaţiu metric şi dacă $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$ atunci mulţimea $A = \bigcup_{j\in J} A_j$ este conexă.*

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că orice funcţie continuă $f : A \longrightarrow \{0,1\}$ este constantă. Fie $a \in \bigcap_{j\in J} A_j$ fixat. Restricţia $f|_{A_j} : A \longrightarrow \{0,1\}$ a funcţiei f fiind continuă pe mulţimea conexă A_j este constantă şi prin urmare avem $f(x) = f(a)$ oricare ar fi $x \in A_j$ şi oricare ar fi $j \in J$.

3.6.17 Exemple.

a) Linia poligonală $[a,b] \cup [b,c]$ este mulţime conexă, oricare ar fi $a,b,c \in \mathbb{R}^n$.

b) Linia poligonală
$$[a^0,a^1] \cup [a^1,a^2] \cup \ldots \cup [a^{k-1},a^k]$$
este mulţime conexă, oricare ar fi punctele a^0, $a^1, \ldots, a^k \in \mathbb{R}^n$.

3.6.18 Teoremă. *O mulţime deschisă nevidă $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este conexă dacă şi numai dacă orice două puncte din A pot fi unite cu o linie poligonală conţinută în A.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Fie $a \in A$ fixat şi fie D_1 mulţimea tuturor punctelor $x \in A$ care pot fi unite cu a printr-o linie poligonală conţinută în A. Pentru fiecare $x \in D_1$ există o linie poligonală L_x care uneşte a cu x şi $r_x > 0$ astfel încât $B_{r_x}(x) \subset A$. Deoarece linia poligonală $L_x \cup [x,y]$ care uneşte a cu y este conţinută în A oricare ar fi $y \in B_{r_x}(x)$, rezultă că $B_{r_x}(x) \subset D_1$ şi prin urmare D_1 este mulţime deschisă. Mulţimea $D_2 = A - D_1$ este şi ea deschisă: dacă $x \in D_2$ atunci există $\varepsilon_x > 0$ astfel încât $B_{\varepsilon_x}(x) \subset D_2$ deoarece în caz contrar a şi x pot fi unite printr-o linie poligonală conţinută în A. Dacă $D_2 \neq \emptyset$ atunci A nu este conexă, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza. Ramane că $D_2 = \emptyset$, adică $A = D_1$. "$\Leftarrow$" Fie $a \in A$ un punct fixat şi L_x o linie poligonală conţinută în A care uneste a cu $x \in A$. Mulţimea A este conexă deoarece fiecare linie poligonală L_x este conexă, $a \in \bigcap_{x\in A} L_x$ şi $A = \bigcup_{x\in A} L_x$.

3.6.19 Definiţie. Spunem despre o submulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ că este o *mulţime stelată* dacă există un punct $a \in A$ astfel încât segmentul

$$[a,x]=\{\,(1-t)a+tx \mid t\in[0,1]\,\}$$

care uneşte a cu x este conţinut în A, oricare ar fi $x\in A$ (a se vedea figura 3.6).

Figura 3.6

3.6.20 Propoziţie. *Orice mulţime stelată din* $\mathbb{R}^n$ *este conexă.*

Demonstraţie. Fie $A\subseteq\mathbb{R}^n$ o mulţime stelată şi $a\in A$ astfel încât $[a,x]\subset A$, oricare ar fi $x\in A$. Mulţimea A este conexa deoarece $\bigcap_{x\in A}[a,x]\neq\emptyset$ şi $A=\bigcup_{x\in A}[a,x]$.

3.6.21 Definiţie. Spunem despre o submulţime $A\subseteq\mathbb{R}^n$ că este o *mulţime convexă* dacă $[x,y]\subset A$, oricare ar fi $x,y\in A$.

3.6.22 Orice mulţime convexă din $\mathbb{R}^n$ este mulţime stelată şi deci conexă.

3.6.23 Definiţie. Fie (S,d) spaţiu metric. O mulţime $D\subseteq S$ deschisă şi conexă este numită *domeniu.*

Capitolul 4

Funcţii diferenţiabile

4.1 Funcţii reale de o variabilă reală

4.1.1 Definiţie. Spunem despre un punct $a\in\mathbb{R}$ că este *punct de acumulare* pentru o mulţime $D\subseteq\mathbb{R}$ dacă oricare ar fi $\varepsilon>0$ avem $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\cap(D-\{a\})\neq\emptyset$.

4.1.2 Definiţie. Fie $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie definită pe o mulţime $D\subseteq\mathbb{R}$ şi $a\in D$ un punct de acumulare pentru D. Spunem că funcţia f este *derivabilă în* a dacă există şi este finită limita (numită *derivata* lui f în a)

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

4.1.3 Definiţie. O funcţie $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ este numită *funcţie derivabilă* dacă este derivabilă în orice punct al domeniului de definiţie D. In acest caz, funcţia

$$f':D\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto f'(x)$$

este numită *derivata* lui f.

4.1.4 In aplicaţiile uzuale, D este un interval sau o reuniune de intervale, iar a orice punct din D. In loc de $f'(a)$ şi f' se mai scrie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ şi respectiv $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ sau $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$.

4.1.5 Exemple.

a) Funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ este derivabilă în orice punct $a\in\mathbb{R}$ deoarece

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^2+x\,a+a^2)=3\,a^2.$$

In acest caz, $f'(a)=3\,a^2$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, adică avem $(x^3)'=3x^2$.

b) Funcţia $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ este derivabilă în orice punct $a\in(0,\infty)$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

In acest caz, $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$, oricare ar fi $a\in(0,\infty)$, adică avem $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4.1.6 Derivatele unor funcţii uzuale

(A se vedea `http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_function`)

Funcţia		Derivata	Domeniul	Condiţii
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=c$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n\in\mathbb{N}^*$
$f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=x^\alpha$	$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$	$(0,\infty)$	$\alpha\in\mathbb{R}$
$f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\infty)$	
$f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(0,\infty)$	$n\in 2\mathbb{N}^*$
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbb{R}^*$	$n\in 2\mathbb{N}+1$
$f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$(0,\infty)$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\ln a$	$\mathbb{R}$	$0<a\neq 1$
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}-(\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi)\to\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{tg}\,x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}-(\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi)$	
$f:\mathbb{R}-\mathbb{Z}\pi\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{ctg}\,x$	$f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}-\mathbb{Z}\pi$	
$f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\arcsin x$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	
$f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{arctg}x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{arcctg}x$	$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{sh}\,x$	$f'(x)=\mathrm{ch}\,x$	$\mathbb{R}$	
$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{ch}\,x$	$f'(x)=\mathrm{sh}\,x$	$\mathbb{R}$	

4.1.7 MATHEMATICA: `D[f[x], x]`

`In[1]:=D[f[x], x]` $\mapsto$ Out[1]=$f'[x]$ `In[5]:=D[Log[x], x` $\mapsto$ Out[5]=$\frac{1}{x}$

`In[2]:=D[x^n, x]` $\mapsto$ Out[2]=nx^{-1+n} `In[6]:=D[Sin[x], x]` $\mapsto$ Out[6]=Cos $[x]$

`In[3]:=D[1/x, x]` $\mapsto$ Out[3]=$-\frac{1}{x^2}$ `In[7]:=D[ArcSin[x], x]` $\mapsto$ Out[7]=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

`In[4]:=D[Sqrt[x], x]` $\mapsto$ Out[4]=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ `In[8]:=D[ArcTan[x], x]` $\mapsto$ Out[8]=$\frac{1}{1+x^2}$.

4.1.8 Funcţia modul $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ nu este derivabilă în $a=0$ deoarce

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1 \neq 1 = \lim_{x\searrow 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}.$$

Figura 4.1

4.1.9 Fie $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie definită pe o submulţime $D\subseteq\mathbb{R}$ şi $a\in D$ un punct de acumulare pentru D. Pentru orice $\alpha\in D$ astfel încât $\alpha\neq a$ ecuaţia dreptei care trece prin punctele $(a, f(a))$ şi $(\alpha, f(\alpha))$ este

$$\frac{x-a}{\alpha-a} = \frac{y-f(a)}{f(\alpha)-f(a)}$$

adică

$$y = \frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a}\,(x-a)+f(a).$$

Dacă funcţia f este derivabilă în a atunci dreapta de ecuaţie (a se vedea figura 4.1)

$$y = \lim_{\alpha\to a} \frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a}(x-a)+f(a)$$

adică

$$y = f'(a)\,(x-a)+f(a)$$

este tangentă la graficul funcţiei f în punctul $(a, f(a))$.

4.1.10 Teoremă. *Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.*

Demonstraţie. Dacă funcţia $f:D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ este derivabilă în $a\in D$ atunci

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))+f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a}(x-a)+f(a) = f(a).$$

4.1.11 Definiţie. Fie $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie definită pe o submulţime $D\subseteq\mathbb{R}$ şi $a\in D$ un punct de acumulare pentru $D\cap(-\infty,a)$. Spunem că funcţia f este *derivabilă la stânga* în a dacă există şi este finită limita

$$f'_s(a)=\lim_{x\nearrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

numită *derivata la stânga* a lui f în a.

4.1.12 Definiţie. Fie $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie definită pe o submulţime $D\subseteq\mathbb{R}$ şi $a\in D$ un punct de acumulare pentru $D\cap(a,\infty)$. Spunem că funcţia f este *derivabilă la dreapta* în a dacă există şi este finită limita

$$f'_d(a)=\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

numită *derivata la dreapta* a lui f în a.

4.1.13 Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie. Avem:

- f este derivabilă în a $\Longleftrightarrow$ f este derivabilă la dreapta în a
- f este derivabilă în b $\Longleftrightarrow$ f este derivabilă la stânga în b.

In primul caz avem $f'(a)=f'_d(a)$ iar în al doilea caz avem $f'(b)=f'_s(b)$.

4.1.14 Teoremă. *Fie $f,g:D\longrightarrow\mathbb{R}$ funcţii definite pe o submulţime $D\subseteq\mathbb{R}$ şi $a\in D$ un punct de acumulare pentru D. Avem:*

$$\left.\begin{array}{l}f \textit{ derivabila in } a\\ g \textit{ derivabila in } a\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}f+g \textit{ este derivabila in } a \textit{ si}\\ (f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}f \textit{ derivabila in } a\\ \lambda\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda f \textit{ este derivabila in } a \textit{ si}\\ (\lambda f)'(a)=\lambda\ f'(a)\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}f \textit{ derivabila in } a\\ g \textit{ derivabila in } a\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}f\,g \textit{ este derivabila in } a \textit{ si}\\ (f\,g)'(a)=f'(a)\,g(a)+f(a)\,g(a).\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}f \textit{ derivabila in } a\\ g \textit{ derivabila in } a\\ g(a)\neq 0\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{f}{g} \textit{ este derivabila in } a \textit{ si}\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\,g(a)-f(a)\,g'(a)}{(g(a))^2}.\end{array}\right.$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\tfrac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\tfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
\lim_{x\to a}\tfrac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(a)}{x-a} &= \lambda\lim_{x\to a}\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
\lim_{x\to a}\tfrac{(f\,g)(x)-(f\,g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}g(x)+f(a)\lim_{x\to a}\tfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
\lim_{x\to a}\tfrac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\left[\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\tfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]\tfrac{1}{g(x)\,g(a)}.
\end{aligned}$$

4.1.15 Dacă $f,g:D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile atunci

$$(f+g)'=g'+g' \qquad (\lambda f)'=\lambda f' \qquad (f\,g)'=f'\,g+f\,g'.$$

Dacă în plus $g(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in D$, atunci

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\,g-f\,g'}{g^2}.$$

4.1.16 MATHEMATICA: `D[f[x], x]`

`In[1]:=D[f[x]+g[x], x]`	$\mapsto$	Out[1]=$f'[x]+g'[x]$
`In[2]:=D[a f[x], x]`	$\mapsto$	Out[2]=$a\,f'[x]$
`In[3]:=D[f[x] g[x], x]`	$\mapsto$	Out[3]=$f'[x]\,g[x]+f[x]\,g'[x]$
`In[4]:=D[f[x]/g[x], x]`	$\mapsto$	Out[4]=$\frac{f'[x]}{g[x]}-\frac{f[x]\,g'[x]}{g[x]^2}$.

4.1.17 Avem

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

4.1.18 Teoremă. *Fie* $I\xrightarrow{f}J\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ *funcţii definite pe intervalele* I, J *şi* $a\in I$. *Avem*

$$\left.\begin{array}{l} f \textit{ derivabila in } a\\ g \textit{ derivabila in } f(a)\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} g\circ f\ \textit{ este derivabila in } a\ \textit{ si}\\ (g\circ f)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a).\end{array}\right.$$

Demonstraţie. Funcţia

$$h:J\longrightarrow\mathbb{R}\qquad h(y)=\begin{cases}\frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} & \text{daca}\quad y\neq f(a)\\ g'(f(a)) & \text{daca}\quad y=f(a)\end{cases}$$

este continuă în $f(a)$ deoarece

$$\lim_{y\to f(a)}h(y)=\lim_{y\to f(a)}\frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}=g'(f(a))=h(f(a)).$$

Trecând la limită în relaţia

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=h(f(x))\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

adevărată pentru orice $x \neq a$, obţinem

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(a) &= \lim_{x\to a} \tfrac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} h(f(x))\, \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} h(f(x))\, \lim_{x\to a} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(f(a))\cdot f'(a).\end{aligned}$$

4.1.19 Dacă $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile atunci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(f(x)) = g'(f(x))\cdot f'(x) \qquad \text{adica} \qquad (g\circ f)' = (g'\circ f)\cdot f'.$$

4.1.20 Exemple.

$$(\sin x^2)' = 2\,x\,\cos x^2 \qquad \left(\mathrm{e}^{\sin x^2}\right)' = 2\,\mathrm{e}^{\sin x^2} x\,\cos x^2$$

$$(\sin^2 x)' = 2\cos x\,\sin x \qquad \left(\mathrm{e}^{\sin^2 x}\right)' = 2\,\mathrm{e}^{\sin^2 x}\cos x\,\sin x.$$

4.1.21 MATHEMATICA: `D[f[x], x]`

`In[1]:=D[g[f[x]], x]`	$\mapsto$	Out[1]=$g'[f[x]]\, f'[x]$
`In[2]:=D[Sin[x^2], x]`	$\mapsto$	Out[2]=$2\,x\,\mathrm{Cos}[x^2]$
`In[3]:=D[(Sin[x])^2, x]`	$\mapsto$	Out[3]=$2\,\mathrm{Cos}[x]\ \mathrm{Sin}[x]$
`In[4]:=D[Exp[Sin[x^2]], x]`	$\mapsto$	Out[4]=$2\,\mathrm{e}^{\mathrm{Sin}[x^2]}\,x\,\mathrm{Cos}[x^2]$
`In[5]:=D[Exp[(Sin[x])^2], x]`	$\mapsto$	Out[5]=$2\,\mathrm{e}^{\mathrm{Sin}[x]^2}\,\mathrm{Cos}[x]\ \mathrm{Sin}[x]$.

4.1.22 Definiţie. Fie $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie definită pe o mulţime $D \subseteq \mathbb{R}$ şi fie $a \in D$.

- Spunem că a este *punct de minim local* al lui f dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât
$$f(a) \leq f(x), \qquad \text{oricare ar fi } \; x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\cap D.$$
- Spunem că a este *punct de maxim local* al lui f dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât
$$f(a) \geq f(x), \qquad \text{oricare ar fi } \; x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\cap D.$$
- Spunem că a este *punct de minim global* al lui f dacă
$$f(a) \leq f(x), \qquad \text{oricare ar fi } \; x \in D.$$
- Spunem că a este *punct de maxim global* al lui f dacă
$$f(a) \geq f(x), \qquad \text{oricare ar fi } \; x \in D.$$
- Spunem că a este *punct de extrem* local (global) al lui f dacă este punct de maxim local (respectiv, global) sau punct de minim local (respectiv, global).

4.1.23 Teoremă (Fermat). *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie şi* $a \in D$ *un punct de extrem local al lui* f. *Dacă* $a \in \overset{\circ}{D}$ *şi* f *este derivabilă în* a *atunci* $f'(a) = 0$.

Demonstraţie. Dacă a este punct de maxim local atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset D$ şi $f(a) \geq f(x)$, oricare ar fi $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Rezultă relaţia

$$0 \leq \lim_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

care conduce la $f'(a) = 0$. Cazul punctului de minim local se tratează similar.

4.1.24 Teoremă (Rolle). *Fie* $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă cu* $f(\alpha) = f(\beta)$. *Dacă* f *este derivabilă pe intervalul* $(\alpha, \beta) \neq \emptyset$ *atunci există* $\xi \in (\alpha, \beta)$ *astfel încât* $f'(\xi) = 0$.

Demonstraţie. Funcţia f este mărginită şi îşi atinge marginile în $[\alpha, \beta]$ (a se vedea pag. 81-**16**). Cel puţin una dintre margini este atinsă într-un punct ξ aparţinând intervalului deschis (α, β). Conform teoremei lui Fermat avem $f'(\xi) = 0$.

4.1.25 Teoremă (Lagrange). *Dacă funcţia continuă* $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *este derivabilă pe intervalul* $(\alpha, \beta) \neq \emptyset$ *atunci există* $\xi \in (\alpha, \beta)$ *astfel încât* $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)\, f'(\xi)$.

Demonstraţie. $F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\alpha-\beta} x$ verifică condiţiile din teorema lui Rolle. Există $\xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $F'(\xi) = 0$, adică $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)\, f'(\xi)$.

4.1.26 Teorema lui Lagrange mai este numită *teorema creşterilor finite*.

4.1.27 Teoremă (Darboux). *Dacă funcţia* $f : I \to \mathbb{R}$ *definită pe un interval* $I \subseteq \mathbb{R}$ *este derivabilă atunci derivata ei* $f' : I \to \mathbb{R}$ *are proprietatea lui Darboux* (pag. 81-**1**).

Demostraţie. Fie $\alpha, \beta \in I$ astfel încât $\alpha < \beta$. Avem de arătat că oricare ar fi λ între $f'(\alpha)$ şi $f'(\beta)$ există $\xi \in [\alpha, \beta]$ astfel încât $f'(\xi) = \lambda$. Dacă $f'(\alpha) = f'(\beta)$ atunci $\lambda = f'(\alpha)$. Analizăm în continuare cazul $f'(\alpha) < \lambda < f'(\beta)$. Funcţia $F : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - \lambda x$ fiind derivabilă şi prin urmare continuă îşi atinge marginea inferioară $m = \inf_{x \in [\alpha, \beta]} F(x)$ într-un punct $\xi \in [\alpha, \beta]$. Arătăm că $F(\alpha) \neq m \neq F(\beta)$. Deoarece $F'(\alpha) < 0 < F'(\beta)$ există $\varepsilon > 0$ astfel încât $F'(\alpha) + \varepsilon < 0 < F'(\beta) - \varepsilon$. Din

$$F'(\alpha) = \lim_{x \searrow \alpha} \frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} \qquad\qquad F'(\beta) = \lim_{x \nearrow \beta} \frac{F(x) - F(\beta)}{x - \beta}$$

rezultă că există $\delta > 0$ astfel încât

$$x \in (\alpha, \alpha+\delta) \implies F'(\alpha) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} < F'(\alpha) + \varepsilon < 0 \implies F(x) < F(\alpha)$$

şi

$$x\in(\beta-\delta,\beta) \implies 0<F'(\beta)-\varepsilon<\frac{F(x)-F(\beta)}{x-\beta}<F'(\beta)+\varepsilon \implies F(x)<F(\beta).$$

Rezultă că $\xi\in(\alpha,\beta)$ şi conform teoremei lui Fermat avem $F'(\xi)=0$, adică $f'(\xi)=\lambda$. In cazul $f'(\beta)<\lambda<f'(\alpha)$ se poate face un raţionament similar.

4.1.28 Dacă derivata unei funcţii derivabile $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ definite pe un interval $I\subseteq\mathbb{R}$ nu se anulează atunci ea păstrează acelaşi semn pe I.

4.2 Funcţii vectoriale de o variabilă reală

4.2.1 Prin *funcţie vectorială* de o variabilă reală se înţelege o funcţie de forma

$$f:D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^k, \qquad f(t)=(f_1(t),f_2(t),\dots,f_k(t))$$

unde $k>1$. Funcţiile $f_1,f_2,...,f_k:D\longrightarrow\mathbb{R}$ se numesc componentele lui f.

4.2.2 Definiţie. Fie $f:D\longrightarrow\mathbb{R}^k$ o funcţie definită pe o submulţime $D\subseteq\mathbb{R}$ şi $a\in D$ un punct de acumulare pentru D. Spunem că funcţia f este *derivabilă în* a dacă există în $\mathbb{R}^k$ limita (numită *derivata* lui f în a)

$$f'(a)=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}.$$

Funcţia $f:D\longrightarrow\mathbb{R}^k$ este numită *funcţie derivabilă* dacă este derivabilă în orice punct $t\in D$. In acest caz, funcţia $f':D\longrightarrow\mathbb{R}^k:t\mapsto f'(t)$ este numită *derivata* lui f.

4.2.3 Propoziţie. *Fie $D\subseteq\mathbb{R}$ şi $a\in D$ un punct de acumulare pentru D. O funcţie*

$$f:D\longrightarrow\mathbb{R}^k, \qquad f(t)=(f_1(t),f_2(t),\dots,f_k(t))$$

este derivabilă în a dacă şi numai dacă fiecare dintre funcţiile

$$f_1,f_2,...,f_k:D\longrightarrow\mathbb{R}$$

este derivabilă în a şi $f'(a)=(f_1'(a),f_2'(a),\dots,f_k'(a))$.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din propoziţia prezentată la pag. 74-**14** şi

$$f'(a)=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\left(\lim_{t\to a}\frac{f_1(t)-f_1(a)}{t-a},\ \dots,\ \lim_{t\to a}\frac{f_k(t)-f_k(a)}{t-a}\right).$$

4.2.4 Exemple.

1) Funcţia (al cărei grafic este cercul de rază 1 cu centrul în $(0,0)$)

$$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

este o funcţie derivabilă cu derivata

$$\gamma' : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

2) Funcţia (al cărei grafic este segmentul care uneşte $a=(a_1,a_2)$ cu $b=(b_1,b_2)$)

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t)=(1-t)a+tb = (a_1+t(b_1-a_1), a_2+t(b_2-a_2))$$

este o funcţie derivabilă cu derivata

$$\gamma' : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma'(t)=(b_1-a_1, b_2-a_2).$$

3) Funcţia

$$f : [0,1) \cup (1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(t) = \left(\sqrt{t}, \ln t, \frac{1}{t-1}\right)$$

este derivabilă în orice punct $t \in (0,1) \cup (1,\infty)$ şi derivata ei este

$$f' : (0,1) \cup (1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{t}, \frac{-1}{(t-1)^2}\right).$$

4.2.5 Cu ajutorul vectorilor bazei canonice

$$e_1=(1,0,...,0), \quad e_2=(0,1,0,...,0), \quad \ldots \quad e_k=(0,0,...,0,1)$$

putem scrie orice funcţie $f:D\longrightarrow\mathbb{R}^k$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_k(t))$ sub forma

$$f(t) = f_1(t)\, e_1 + f_2(t)\, e_2 + \cdots + f_k(t)\, e_k$$

şi avem

$$f'(t) = f_1'(t)\, e_1 + f_2'(t)\, e_2 + \cdots + f_k'(t)\, e_k.$$

4.2.6 Exerciţiu.

a) Dacă funcţiile $\varphi:(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}$ şi $f:(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}^k$ sunt derivabile atunci

$$\varphi f:(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}^k, \quad (\varphi f)(t)=\varphi(t)\, f(t)=(\varphi(t)\, f_1(t),\, \varphi(t)\, f_2(t),\, \ldots,\, \varphi(t)\, f_k(t))$$

este derivabilă şi

$$(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'.$$

b) Dacă funcţiile $f, g:(\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ sunt derivabile atunci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f, g\rangle = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$$

c) Dacă funcţia derivabilă $f:(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}^k$ este astfel încât $\| f \|= const$ atunci

$$\langle f', f\rangle = f_1' f + f_2' f_2 + ... + f_k' f_k = 0.$$

Rezolvare (cazul $k=2$). Avem

a) $(\varphi f)'=((\varphi f_1)',\, (\varphi f_2)') = (\varphi' f_1 + \varphi f_1',\, \varphi' f_2 + \varphi f_2') = \varphi' f + \varphi f'$

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f, g\rangle = (f_1\, g_1 + f_2\, g_2)' = f_1' g_1 + f_1 g_1' + f_2' g_2 + f_2 g_2' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$

c) $\| f \|= const \implies \langle f, f\rangle = const \implies \langle f', f\rangle + \langle f, f'\rangle = 0 \implies 2\langle f', f\rangle = 0.$

4.2.7 Exerciţiu. Dacă funcţia

$$f:(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})\equiv\mathbb{R}^4, \qquad f(t)=\begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t)\\ f_{21}(t) & f_{22}(t)\end{pmatrix}$$

este derivabilă atunci aplicaţia

$$\det f:(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad \det f(t)=\begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t)\\ f_{21}(t) & f_{22}(t)\end{vmatrix}$$

este derivabilă şi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t)\\ f_{21}(t) & f_{22}(t)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11}'(t) & f_{12}'(t)\\ f_{21}(t) & f_{22}(t)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t)\\ f_{21}'(t) & f_{22}'(t)\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_{11}'(t) & f_{12}(t)\\ f_{21}'(t) & f_{22}(t)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}'(t)\\ f_{21}(t) & f_{22}'(t)\end{vmatrix}.$$

4.2.8 Fie $\gamma:D\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))$, o funcţie definită pe o submulţime $D\subseteq\mathbb{R}$ şi $a\in D$ un punct de acumulare pentru D. Pentru orice $\alpha\in D-\{a\}$ ecuaţia dreptei care trece prin punctele $(\gamma_1(a),\gamma_2(a),\gamma_3(a))$ şi $(\gamma_1(\alpha),\gamma_2(\alpha),\gamma_3(\alpha))$ este

$$\frac{x_1-\gamma_1(a)}{\gamma_1(\alpha)-\gamma_1(a)}=\frac{x_2-\gamma_2(a)}{\gamma_2(\alpha)-\gamma_2(a)}=\frac{x_3-\gamma_3(a)}{\gamma_3(\alpha)-\gamma_3(a)}$$

şi este echivalentă cu

$$\frac{x_1-\gamma_1(a)}{\frac{\gamma_1(\alpha)-\gamma_1(a)}{\alpha-a}}=\frac{x_2-\gamma_2(a)}{\frac{\gamma_2(\alpha)-\gamma_2(a)}{\alpha-a}}=\frac{x_3-\gamma_3(a)}{\frac{\gamma_3(\alpha)-\gamma_3(a)}{\alpha-a}}.$$

Dacă funcţia f este derivabilă în a atunci dreapta de ecuaţie

$$\frac{x_1-\gamma_1(a)}{\gamma_1'(a)}=\frac{x_2-\gamma_2(a)}{\gamma_2'(a)}=\frac{x_3-\gamma_3(a)}{\gamma_3'(a)}$$

este tangentă la imaginea funcţiei f în punctul $(\gamma_1(a),\gamma_2(a),\gamma_3(a))$. Această dreaptă coincide cu imaginea aplicaţiei

$$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3:\ t\mapsto(\gamma_1(a),\gamma_2(a),\gamma_3(a))+t(\gamma_1'(a),\gamma_2'(a),\gamma_3'(a))$$

adică admite reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1(a) + t\,\gamma_1'(a) \\ x_2 = \gamma_2(a) + t\,\gamma_2'(a) \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ x_3 = \gamma_3(a) + t\,\gamma_3'(a). \end{cases}$$

4.2.9 Propoziţie. *Dacă* $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ *sunt funcţii derivabile atunci*

$$g(f(x)) = (g_1(f(x)),\, g_2(f(x)),\, \dots,\, g_k(f(x)))$$

şi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(f(x)) = (g_1'(f(x)),\, g_2'(f(x)),\, \dots, g_k'(f(x))) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(f(x)) &= \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g_1(f(x)),\, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g_2(f(x)),\, \dots,\, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g_k(f(x))\right) \\ &= (g_1'(f(x)) \cdot f'(x),\, g_2'(f(x)) \cdot f'(x),\, \dots,\, g_k'(f(x)) \cdot f'(x)) \\ &= (g_1'(f(x)),\, g_2'(f(x)),\, \dots, g_k'(f(x))) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

4.3 Funcţii diferenţiabile

4.3.1 Prin *funcţie reală de mai multe variabile* se înţelege o funcţie de forma

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad (\text{unde } n > 1)$$

iar prin *funcţie vectorială de mai multe variabile* o funcţie de forma

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \qquad\qquad (\text{unde } n > 1,\ k > 1).$$

4.3.2 Definiţie. Fie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că f este *derivabilă* în punctul $a \in I$ dacă există şi este finită limita

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{4.1}$$

numită *derivata* funcţiei f în punctul a.

4.3.3 Definiţia anterioară nu poate fi extinsă direct la funcţiile de două variabile

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

deoarece relaţia

$$f'(a_1,a_2)=\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}\frac{f(x_1,x_2)-f(a_1,a_2)}{(x_1,x_2)-(a_1,a_2)}$$

este fără sens, împărţirea cu vectorul $(x_1-a_1,x_2-a_2)=(x_1,x_2)-(a_1,a_2)$ nefiind definită. Vom arăta că relaţia (4.1) poate fi pusă sub o formă care să permită extinderea ei la funcţii de mai multe variabile.

4.3.4 Relaţia (4.1) este echivalentă cu relaţia

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|=0$$

adică

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)-f'(a)\cdot(x-a)|}{|x-a|}=0.$$

4.3.5 Dacă $A:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ este o aplicaţie liniară atunci

$$Au=A(u\cdot 1)=u\cdot A(1)=\lambda\, u$$

unde $\lambda=A(1)$. Astfel orice aplicaţie liniară $A:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ este de forma $Au=\lambda u$.

4.3.6 Unei funcţii $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ derivabile în $a\in I$ i se asociază aplicaţia liniară

$$A:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad Au=f'(a)\,u$$

numită *diferenţiala* lui f în punctul a şi notată cu $df(a)$, adică aplicaţia liniară

$$df(a):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad df(a)\,u=f'(a)\,u.$$

4.3.7 Definiţie. Spunem că funcţia $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ definită pe un interval $I\subseteq\mathbb{R}$ este *diferenţiabilă* în $a\in I$ dacă există o aplicaţie liniară $A:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)-A(x-a)|}{|x-a|}=0. \tag{4.2}$$

Aplicaţia A este numită *diferenţiala* funcţiei f în punctul a şi se notează cu $df(a)$.

4.3.8 Propoziţie. *Fie $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie definită pe un interval I şi $a\in I$. Avem:*

$$f\ \ este\ derivabila\ in\ a\quad\Longleftrightarrow\quad f\ \ este\ diferentiabila\ in\ a.$$

4.3.9 Definiţie. Fie $f:D\longrightarrow\mathbb{R}^k$ o funcţie definită pe o mulţime $D\subseteq\mathbb{R}^n$ şi $a\in\overset{\circ}{D}$. Spunem că f este *diferenţiabilă* în a dacă există o aplicaţie liniară

$$A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^k$$

astfel încât

$$\lim_{x\to a}\frac{\| f(x)-f(a)-A(x-a)\|}{\| x-a\|}=0. \tag{4.3}$$

Aplicaţia A este numită *diferenţiala* funcţiei f în punctul a şi se notează cu $df(a)$.

4.3.10 Teoremă. *Dacă funcţia $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^k$ definită pe o mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este diferenţiabilă în punctul $a \in \overset{\circ}{D}$ atunci ea este continuă în a.*

Demonstraţie. Obţinem că $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ trecând la limită în relaţia

$$\begin{aligned} 0 \leq \| f(x)-f(a) \| &= \| f(x)-f(a)-A(x-a)+A(x-a) \| \\ &\leq \| f(x)-f(a)-A(x-a) \| + \| A(x-a) \| \\ &= \tfrac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|}{\|x-a\|}\ \| x-a \| + \| A(x-a) \| \end{aligned}$$

deoarece aplicaţia liniară $A:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ este continuă (a se vedea pag. 77-**16**).

4.3.11 Dacă $A:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ este o aplicaţie liniară atunci

$$Au = A(u\cdot 1) = u\cdot A(1) = u\,(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k) = (\lambda_1\, u, \lambda_2\, u, \ldots, \lambda_k\, u)$$

unde $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k) = A(1)$. Astfel orice aplicaţie liniară $A:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ este de forma

$$Au = (\lambda_1\, u, \lambda_2\, u, \ldots, \lambda_k\, u).$$

4.3.12 Conform definiţiei, o funcţie $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$ definită pe un interval I este diferenţiabilă în $a \in I$ dacă există o aplicaţie liniară

$$A:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k, \qquad Au = (\lambda_1\, u, \lambda_2\, u, \ldots, \lambda_k\, u)$$

astfel încât

$$\lim_{x\to a}\frac{\| f(x)-f(a)-A(x-a)\|}{|x-a|}=0. \tag{4.4}$$

4.3.13 Propoziţie. *Fie $f:I \longrightarrow \mathbb{R}^k$ o funcţie definită pe un interval I şi $a \in I$. Avem:*

$$f \ \textit{este derivabila in } a \quad \Longleftrightarrow \quad f \ \textit{este diferentiabila in } a.$$

Demonstraţie (cazul $k=2$). Relaţia (4.4), care în acest caz devine

$$\lim_{x\to a}\frac{\| (f_1(x),f_2(x))-(f_1(a),f_2(a))-(\lambda_1(x-a),\lambda_2(x-a))\|}{|x-a|}=0$$

este echivalentă cu

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a}, \frac{f_2(x)-f_2(a)}{x-a}\right) = (\lambda_1,\lambda_2).$$

adică $(\lambda_1,\lambda_2) = (f_1'(a), f_2'(a))$.

4.3.14 Dacă funcţia $f:I\longrightarrow\mathbb{R}^k$, $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_k(x))$ este derivabilă într-un punct $a\in I$ atunci diferenţiala lui f în a este

$$df(a):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^k,\qquad df(a)\,u=(f_1'(a)\,u,f_2'(a)\,u,\dots,f_k'(a)\,u)$$

adică aplicaţia liniară a cărei matrice în raport cu bazele canonice este

$$df(a)=\left(\begin{array}{c} f_1'(a)\\ f_2'(a)\\ \vdots\\ f_k'(a)\end{array}\right).$$

4.4 Funcţii reale de mai multe variabile

4.4.1 Orice vector $u=(u_1,u_2,...,u_n)\in\mathbb{R}^n$ admite în raport cu baza canonică

$$e_1=(1,0,...,0),\quad e_2=(0,1,0,...,0),\quad \dots\quad e_n=(0,0,...,0,1)$$

reprezentarea $u=u_1\,e_1+u_2\,e_2+\ldots+u_n\,e_n$. Dacă $A:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ este aplicaţie liniară atunci

$$A(u_1,u_2,...,u_n)=A(u_1\,e_1+u_2\,e_2+\ldots+u_n\,e_n)=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n$$

unde $\lambda_1=Ae_1$, ..., $\lambda_n=Ae_n$. Astfel orice aplicaţie liniară $A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ este de forma

$$A(u_1,u_2,...,u_n)=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n.$$

4.4.2 Conform definiţiei, o funcţie $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ definită pe o mulţime $D\subseteq\mathbb{R}^n$ este diferenţiabilă într-un punct $a\in\overset{\circ}{D}$ dacă există o aplicaţie liniară

$$A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},\qquad A(u_1,u_2,...,u_n)=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n$$

astfel încât

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)-A(x-a)|}{\parallel x-a\parallel}=0.\tag{4.5}$$

In particular, pentru x de forma $x=a+t\,e_j$ avem relaţia

$$\lim_{t\to 0}\frac{|f(a+t\,e_j)-f(a)-A(t\,e_j)|}{\parallel t\,e_j\parallel}=0$$

echivalentă cu

$$\lambda_j=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\,e_j)-f(a)}{t}.$$

4.4.3 Definiţie. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie definită pe o mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Spunem că f este *derivabilă parţial* în raport cu variabila x_j în punctul $a \in \overset{\circ}{D}$ dacă există şi este finită limita (numită *derivata parţială* a lui f în raport cu x_j în a)

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\,e_j) - f(a)}{t}. \tag{4.6}$$

4.4.4 Pentru a putea defini derivata parţială a lui f în raport cu x_j în a nu este necesar ca a să fie punct interior al mulţimii D. Este suficient ca D să conţină un segment de dreaptă paralel cu axa Ox_j care trece prin a.

4.4.5 Propoziţie. *Dacă $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definită pe $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este diferenţiabilă în $a \in \overset{\circ}{D}$ atunci ea este dervabilă parţial în a şi diferenţiala ei în a este aplicaţia*

$$df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad df(a)(u_1, u_2, ..., u_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\, u_n$$

adică aplicaţia liniară $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a cărei matrice în raport cu bazele canonice este

$$df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

4.4.6 In cazul unei funcţii de două variabile $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ relaţia (4.6) devine

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2+t) - f(a_1, a_2)}{t}$$

sau în notaţii alternative

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{x\to a_1} \frac{f(x, a_2) - f(a_1, a_2)}{x - a_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim_{y\to a_2} \frac{f(a_1, y) - f(a_1, a_2)}{y - a_2}.$$

4.4.7 Definiţie. Spunem că funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ definită pe o mulţime deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este o funcţie *derivabilă parţial în raport cu x_j* dacă $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ există oricare ar fi $a \in D$. In acest caz, funcţia

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R} : a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

se numeşte *derivata parţială a lui f în raport cu x_j*.

4.4.8 Exemplu. Funcţia $f:\{(x,y)\,|\,y\neq 0\}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{x}{y}$ este derivabilă parţial

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\{(x,y)\mid y\neq 0\}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}:\{(x,y)\mid y\neq 0\}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{x}{y^2}.$$

4.4.9 MATHEMATICA: `D[f[x,y], x]`, `D[f[x,y], y]`

`In[1]:=D[f[x,y], x]` $\mapsto$ Out[1]=$f^{(1,0)}[x,y]$

`In[2]:=D[f[x,y], y]` $\mapsto$ Out[2]=$f^{(0,1)}[x,y]$

`In[3]:=D[x/y, x]` $\mapsto$ Out[3]=$\frac{1}{y}$

`In[4]:=D[x/y, y]` $\mapsto$ Out[4]=$-\frac{x}{y^2}$.

4.4.10 Pentru ca o funcţie $f:D\rightarrow\mathbb{R}$ definită pe o mulţime $D\subseteq\mathbb{R}^n$ să fie diferenţiabilă într-un punct $a\in\overset{\circ}{D}$ nu este suficient ca ea să fie derivabilă parţial în a. Funcţia

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\qquad f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{daca}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{daca}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

necontinuă în $(0,0)$ (a se vedea pag. 73-**13**) este derivabilă parţial în $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0.$$

Nefiind continuă în $(0,0)$, f nu este diferenţiabilă în $(0,0)$ (a se vedea pag. 99-**10**).

4.4.11 Teoremă. *Fie $f:D\rightarrow\mathbb{R}$ o funcţie definită pe o mulţime $D\subseteq\mathbb{R}^n$ şi fie $a\in\overset{\circ}{D}$. Dacă f este derivabilă parţial într-o vecinătate a lui a şi dacă derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ sunt continue în a atunci f este diferenţiabilă în a.*

Demonstraţie (Cazul $n=2$). Conform ipotezei, există $r>0$ astfel încât $B_r(a)\subset D$ şi f este derivabilă parţial în $B_r(a)$. Fie $(x_k,y_k)_{k\geq 0}$ un şir convergent din $B_r(a)$ cu $\lim_{k\to\infty}(x_k,y_k)=(a_1,a_2)$. Avem de arătat că

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|f(x_k,y_k)-f(a_1,a_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\,(x_k-a_1)-\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\,(y_k-a_2)\right|}{\sqrt{(x_k-a_1)^2+(y_k-a_2)^2}}=0. \qquad (4.7)$$

Conform teoremei lui Lagrange există ξ_k între x_k şi a_1 şi η_k între y_k şi a_2 astfel încât

$$\begin{aligned}f(x_k,y_k)-f(a_1,a_2)&=f(x_k,y_k)-f(a_1,y_k)+f(a_1,y_k)-f(a_1,a_2)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k,y_k)\;(x_k-a_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,\eta_k)\;(y_k-a_2).\end{aligned}$$

Relaţia (4.7) se obţine trecând la limită în

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\left|f(x_k,y_k)-f(a_1,a_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\,(x_k-a_1)-\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\,(y_k-a_2)\right|}{\sqrt{(x_k-a_1)^2+(y_k-a_2)^2}}\\
&\leq \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k,y_k)\,(x_k-a_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,\eta_k)\,(y_k-a_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\,(x_k-a_1)-\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\,(y_k-a_2)\right|}{\sqrt{(x_k-a_1)^2+(y_k-a_2)^2}}\\
&\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k,y_k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\right| \frac{|x_k-a_1|}{\sqrt{(x_k-a_1)^2+(y_k-a_2)^2}}\\
&\quad+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,\eta_k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right| \frac{|y_k-a_2|}{\sqrt{(x_k-a_1)^2+(y_k-a_2)^2}}\\
&\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k,y_k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,\eta_k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right|.
\end{aligned}$$

4.4.12 Definiţie. Fie $f:D\rightarrow\mathbb{R}$ o funcţie definită pe o mulţime deschisă $D\subseteq\mathbb{R}^n$.

Spunem că f este o *funcţie de clasă* C^1 în D şi scriem

$$f\in C^1(D)$$

dacă este derivabilă parţial şi $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ sunt continue în orice punct din D.

4.4.13 (*Derivarea funcţiilor compuse*). Ştim că:

a) Dacă $I\xrightarrow{f}J\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile atunci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(f(t)) = g'(f(t))\cdot f'(t).$$

b) Dacă $I\xrightarrow{f}J\xrightarrow{g}\mathbb{R}^k$ sunt funcţii derivabile atunci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_1(f(t)),\, g_2(f(t)),\, \dots\,,\, g_k(f(t)))=(g_1'(f(t)),\, g_2'(f(t)),\, ...,g_k'(f(t)))\cdot f'(t)$$

adică matriceal

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} g_1(f(t))\\ \vdots\\ g_k(f(t))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_1'(f(t))\\ \vdots\\ g_k'(f(t))\end{pmatrix}\cdot f'(t).$$

Se poate arăta că:

c) Dacă $I\xrightarrow{f}\mathbb{R}^n\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ sunt funcţii diferenţiabile atunci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(f_1(t),...,f_n(t))=\frac{\partial g}{\partial x_1}(f_1(t),...,f_n(t))\cdot f_1'(t)+\,...\,+\frac{\partial g}{\partial x_n}(f_1(t),...,f_n(t))\cdot f_n'(t)$$

adică matriceal

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(f(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t)) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(f(t))\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1'(t)\\ \vdots\\ f_n'(t)\end{pmatrix}.$$

d) Dacă $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcţii diferenţiabile atunci

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g(f(x_1,...,x_n)) = g'(f(x_1,...,x_n))\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,...,x_n).$$

e) Dacă $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcţii diferenţiabile atunci

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g(f_1(x),...,f_k(x)) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f_1(x),...,f_k(x))\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

adică matriceal

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1} g(f(x))\ ...\ \tfrac{\partial}{\partial x_n} g(f(x))\right) = \left(\tfrac{\partial g}{\partial y_1}(f(x))\ ...\ \tfrac{\partial g}{\partial y_k}(f(x))\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & ... & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

4.4.14 MATHEMATICA: `D[g[f[t],h[t]], t]`, `D[g[f[x,y]], x]`, `D[g[f[x,y],h[x,y]], x]`

`In[1]:=D[g[f[t],h[t]], t]` $\mapsto$ Out[1]=$h'[t]\ g^{(0,1)}[f[t],h[t]]+f'[t]\ g^{(1,0)}[f[t],h[t]]$

`In[2]:=D[g[f[x,y]], x]` $\mapsto$ Out[2]=$g'[f[x,y]]\ f^{(1,0)}[x,y]$

`In[3]:=D[g[f[x,y]], y]` $\mapsto$ Out[3]=$g'[f[x,y]]\ f^{(0,1)}[x,y]$

`In[4]:=D[g[f[x,y],h[x,y]], x]` $\mapsto$ Out[4]=$f^{(1,0)}[x,y]\ g^{(1,0)}[f[x,y],h[x,y]]$
$+g^{(0,1)}[f[x,y],h[x,y]]\ h^{(1,0)}[x,y]$

`In[5]:=D[g[f[x,y],h[x,y]], y]` $\mapsto$ Out[5]=$f^{(0,1)}[x,y]\ g^{(1,0)}[f[x,y],h[x,y]]$
$+g^{(0,1)}[f[x,y],h[x,y]]\ h^{(0,1)}[x,y]$

4.4.15 Exemple. a) Dacă $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă atunci

$$\tfrac{\partial}{\partial x} g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = g'(\sqrt{x^2+y^2})\ \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\tfrac{\partial}{\partial y} g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = g'(\sqrt{x^2+y^2})\ \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

b) Dacă $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (u,v) \mapsto g(u,v)$ este diferenţiabilă atunci

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(\sqrt{t}, \mathrm{e}^{t^2}) = \tfrac{\partial g}{\partial u}(\sqrt{t}, \mathrm{e}^{t^2})\ \tfrac{1}{2\sqrt{t}} + \tfrac{\partial g}{\partial v}(\sqrt{t}, \mathrm{e}^{t^2})\ 2t\mathrm{e}^{t}$$
$$\tfrac{\partial}{\partial x} g\left(\tfrac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right) = \tfrac{\partial g}{\partial u}\left(\tfrac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right)\ \tfrac{1}{y} + \tfrac{\partial g}{\partial v}\left(\tfrac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right)\ \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\tfrac{\partial}{\partial y} g\left(\tfrac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right) = \tfrac{\partial g}{\partial u}\left(\tfrac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right)\ \tfrac{-x}{y^2} + \tfrac{\partial g}{\partial v}\left(\tfrac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right)\ \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

4.4.16 MATHEMATICA: `D[g[f[t],h[t]], t]`, `D[g[f[x,y]], x]`, `D[g[f[x,y],h[x,y]], x]`

`In[1]:=D[g[Sqrt[x^2+y^2]], x]` $\mapsto$ Out[1]=$\frac{x\ \ g'[\sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}}$

`In[2]:=D[g[Sqrt[x^2+y^2]], y]` $\mapsto$ Out[2]=$\frac{y\ \ g'[\sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}}$

`In[3]:=D[g[Sqrt[t],Exp[t^2]], t]` $\mapsto$ Out[3]=$2\mathrm{e}^t\, t\ \ g^{(0,1)}[\sqrt{t},\mathrm{e}^{t^2}]+\frac{g^{(1,0)}[\sqrt{t},\mathrm{e}^{t^2}]}{2\sqrt{t}}$

`In[4]:=D[g[x/y, Sqrt[x^2+y^2]], x], x]` $\mapsto$ Out[4]=$\frac{x\ \ g^{(0,1)}[\frac{x}{y},\sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{g^{(1,0)}[\frac{x}{y},\sqrt{x^2+y^2}]}{y}$

`In[5]:=D[g[x/y, Sqrt[x^2+y^2]], y]` $\mapsto$ Out[5]=$\frac{y\ \ g^{(0,1)}[\frac{x}{y},\sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x\ \ g^{(1,0)}[\frac{x}{y},\sqrt{x^2+y^2}]}{y^2}$

4.4.17 Definiţie. Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ o funcţie, $a\in\overset{\circ}{D}$, $r>0$ astfel încât $B_r(a)\subset D$ şi $w\in\mathbb{R}^n$ cu $\|w\|=1$. Spunem că f este *derivabilă în a după versorul w* dacă funcţia

$$\varphi:(-r,r)\longrightarrow\mathbb{R},\qquad \varphi(t)=f(a+tw)$$

este derivabilă în punctul $t=0$. Numărul

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w}(a)=\varphi'(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(a+tw)\Big|_{t=0}$$

se numeşte *derivata lui f după versorul w în a*.

Figura 4.2

4.4.18 Dacă $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este diferenţiabilă în $a\in\overset{\circ}{D}$ şi $w\in\mathbb{R}^n$, $\|w\|=1$ atunci

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w}(a)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(a+tw)\Big|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,w_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,w_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,w_n.$$

In particular, derivatele parţiale corespund derivatelor după vectorii bazei canonice

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(a+te_j)\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}e_j}(a).$$

4.4.19 O aplicaţie liniară $A:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în orice punct $a\in\mathbb{R}^n$ şi diferenţiala ei este chiar A, adică $dA(a)=A$. In particular, funcţiile coordonate

$$\begin{array}{ll} x_1:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, & x_1(u_1,u_2,...,u_n)=u_1 \\ x_2:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, & x_2(u_1,u_2,...,u_n)=u_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_n:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, & x_n(u_1,u_2,...,u_n)=u_n \end{array}$$

fiind liniare avem $dx_1(a)=x_1$, $dx_2(a)=x_2$, ... , $dx_n(a)=x_n$, adică

$$dx_1(a)(u_1,u_2,...,u_n)=u_1,\quad dx_2(a)(u_1,u_2,...,u_n)=u_2,\quad \dots,\quad dx_n(a)(u_1,u_2,...,u_n)=u_n$$

şi relaţia (a se vedea pag. 101-**5**)

$$df(a)(u_1,u_2,...,u_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,u_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,u_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,u_n$$

se mai poate scrie

$$df(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\;dx_1(a)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\;dx_2(a)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\;dx_n(a)$$

sau

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n.$$

4.4.20 Ultima relaţie poate fi scrisă simbolic sub forma

$$df=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\,dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\right)f$$

şi sugerează introducerea *operatorului de diferenţiere*

$$d=\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\,dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\,dx_k.$$

4.4.21 In notaţii alternative, în cazurile $n=2$ şi $n=3$ avem

$$\begin{array}{ll} df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy & \qquad d=\frac{\partial}{\partial x}\,dx+\frac{\partial}{\partial y}\,dy \\ df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\,dz & \qquad d=\frac{\partial}{\partial x}\,dx+\frac{\partial}{\partial y}\,dy+\frac{\partial}{\partial z}\,dz. \end{array}$$

4.5 Funcţii vectoriale de mai multe variabile

4.5.1 Dacă $A:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^k$ este aplicaţie liniară atunci

$$\begin{aligned} A(u_1,u_2,...,u_n) &= A(\,u_1(1,0,...,0)+u_2(0,1,0,...,0)+\cdots+u_n(0,...,0,1)\,) \\ &= u_1\,A(1,0,...,0)+u_2\,A(0,1,0,...,0)+\cdots+u_n\,A(0,...,0,1) \\ &= (\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\cdots+\alpha_{1n}u_n,\ldots,\alpha_{k1}u_1+\alpha_{k2}u_2+\cdots+\alpha_{kn}u_n) \end{aligned}$$

unde $A(1,0,...,0)=(\alpha_{11},\alpha_{21},...,\alpha_{k1})$, ... , $A(0,...,0,1)=(\alpha_{1n},\alpha_{2n},...,\alpha_{kn})$. Dacă în loc de vectori linie utilizăm vectori coloană relaţia anterioară devine

$$A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\cdots+\alpha_{1n}u_n \\ \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\cdots+\alpha_{2n}u_n \\ \vdots \\ \alpha_{k1}u_1+\alpha_{k2}u_2+\cdots+\alpha_{kn}u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Matricea

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$$

este matricea asociată aplicaţiei liniare A în raport cu bazele canonice în $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^k$.

4.5.2 Conform definiţiei, o funcţie $f:D\longrightarrow\mathbb{R}^k$,

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(f_1(x_1,x_2,...,x_n),f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_k(x_1,x_2,...,x_n))$$

definită pe o mulţime $D\subseteq\mathbb{R}^n$ este diferenţiabilă în $a\in\overset{\circ}{D}$ dacă există o aplicaţie liniară

$$A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^k,\qquad A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

astfel încât

$$\lim_{x\to a}\frac{\|\,f(x)-f(a)-A(x-a)\,\|}{\|\,x-a\,\|}=0. \tag{4.8}$$

4.5.3 Propoziţie. *Funcţia* $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^k$, $f(x)=(f_1(x),...,f_k(x))$, *este diferenţiabilă în* $a\in\overset{\circ}{D}$ *dacă şi numai dacă toate funcţiile* f_1, f_2, ..., f_k *sunt diferenţiabile în* a *şi avem*

$$\alpha_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a), \qquad \textit{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} i\in\{1,2,...,k\} \\ j\in\{1,2,...,n\} \end{array}$$

adică diferenţiala lui f în a este aplicaţia liniară

$$df(a):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^k$$

a cărei matrice în raport cu bazele canonice este matricea Jacobi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)=\frac{\partial(f_1,f_2,...,f_k)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}(a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

In cazul $n=k$, determinantul

$$\frac{D(f_1,f_2,...,f_k)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}(a)=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}$$

este numit *jacobianul* lui f în a.

4.5.4 Orice aplicaţie de clasă C^1

$$S:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}^3, \qquad S(u,v)=(S_1(u,v),S_2(u,v),S_3(u,v))$$

cu proprietatea

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial S_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial S_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial S_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}=2, \qquad \text{oricare ar fi} \quad (u,v)\in D$$

este o parametrizare a unei suprafeţe $S\subset\mathbb{R}^3$. Pentru orice $(u_0,v_0)\in[a,b]\times[c,d]$ fixat, aplicaţiile

$$\gamma_u:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3, \qquad \gamma_u(t)=S(t,v_0)=(S_1(t,v_0),S_2(t,v_0),S_3(t,v_0))$$

$$\gamma_v:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}^3, \qquad \gamma_v(t)=S(u_0,t)=(S_1(u_0,t),S_2(u_0,t),S_3(u_0,t))$$

reprezintă drumuri pe suprafaţa S. Ele trec prin punctul $S(u_0,v_0)$ şi vectorii tangenţi

$$\vec{\tau}_u(u_0,v_0)=\frac{d}{dt}\gamma_u(u_0)=\left(\frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0),\ \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0),\ \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0)\right)$$

$$\vec{\tau}_v(u_0,v_0)=\frac{d}{dt}\gamma_v(v_0)=\left(\frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0),\ \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0),\ \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$$

Figura 4.3

determină planul tangent la S în $S(u_0, v_0)$. In particular, produsul lor vectorial

$$\vec{N}(u_0,v_0) = \vec{\tau}_u(u_0,v_0) \times \vec{\tau}_v(u_0,v_0) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} \vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} \vec{\mathbf{k}}$$

cu coordonatele $(A(u_0, v_0), B(u_0, v_0), C(u_0, v_0))$ definite prin relaţiile

$$A(u_0,v_0) = \frac{D(S_2,S_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0), \ \ B(u_0,v_0) = \frac{D(S_3,S_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0), \ \ C(u_0,v_0) = \frac{D(S_1,S_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)$$

este un vector perpendicular pe planul tangent la suprafaţa S în punctul $S(u_0, v_0)$.

Figura 4.4

4.5.5 Exemplu. Aplicaţia $S:[0,\pi]\times[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} S(\theta,\varphi) &= (S_1(\theta,\varphi),S_2(\theta,\varphi),S_3(\theta,\varphi)) \\ &= (x_0+R\sin\theta\,\cos\varphi,\; y_0+R\sin\theta\,\sin\varphi,\; z_0+R\cos\theta) \end{aligned}$$

reprezintă o parametrizare a sferei de rază R şi centru (x_0,y_0,z_0).

4.5.6 Ştim că tangenta la graficul unui drum de clasă C^1

$$\gamma:D\longrightarrow\mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))$$

într-un punct $\gamma(t_0)$ cu $\gamma'(t_0)\neq 0$ este imaginea aplicaţiei

$$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3:\ \alpha\mapsto\gamma(t_0)+\alpha\,\gamma'(t_0)$$

adică

$$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3:\ \alpha\mapsto(\gamma_1(t_0),\gamma_2(t_0),\gamma_3(t_0))+\alpha(\gamma_1'(t_0),\gamma_2'(t_0),\gamma_3'(t_0))$$

şi admite reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x=\gamma_1(t_0)+\gamma_1'(t_0)\,\alpha \\ y=\gamma_2(t_0)+\gamma_2'(t_0)\,\alpha \\ z=\gamma_3(t_0)+\gamma_3'(t_0)\,\alpha. \end{cases} \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

Planul tangent la o suprafaţă

$$S:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}^3, \qquad S(u,v)=(S_1(u,v),S_2(u,v),S_3(u,v))$$

într-un punct $S(u_0,v_0)$ coincide cu imaginea aplicaţiei

$$\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3:\ (\alpha,\beta)\mapsto S(u_0,v_0)+dS(u_0,v_0)\,(\alpha,\beta)$$

adică

$$\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3:\ \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}S_1(u_0,v_0)\\ S_2(u_0,v_0)\\ S_3(u_0,v_0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

şi admite reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x=S_1(u_0,v_0)+\frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0)\,\alpha+\frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0)\,\beta \\ y=S_2(u_0,v_0)+\frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0)\,\alpha+\frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0)\,\beta \\ z=S_3(u_0,v_0)+\frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0)\,\alpha+\frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0)\,\beta. \end{cases}$$

Eliminând parametrii α şi β rezultă ecuaţia planului tangent în $S(u_0,v_0)$

$$A(u_0,v_0)\,(x-S_1(u_0,v_0))+B(u_0,v_0)\,(y-S_2(u_0,v_0))+C(u_0,v_0)\,(z-S_3(u_0,v_0))=0.$$

4.6 Derivate parţiale de ordin superior

4.6.1 Definiţie. Fie $f:D\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă în vecinătatea $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\cap D$ a unui punct $a\in D$. Spunem că f este *derivabilă de două ori în* a dacă

$$f' : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap D \longrightarrow \mathbb{R}$$

este derivabilă în a. Numărul

$$f''(a) = (f')'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$$

se numeşte *derivata a doua a lui* f *în* a.

4.6.2 Definiţie. Fie $f:D\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă. Spunem că f este o *funcţie derivabilă de două ori* dacă f' este derivabilă în orice punct din D. In acest caz, aplicaţia $D\longrightarrow\mathbb{R} : a\mapsto f''(a)$ se numeşte *derivata a doua* a lui f şi se notează cu f''.

4.6.3 In unele situaţii este avantajoasă utilizarea notaţiilor alternative

$$f^{(0)}=f, \qquad f^{(1)}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=f', \qquad f^{(2)}=\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}=f'' \qquad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}=f^{(n)}.$$

4.6.4 Definiţie. Fie $f:D\subseteq \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de n–1 ori şi $a\in D$. Spunem că f este *derivabilă de* n *ori în* a dacă $f^{(n-1)}:D\longrightarrow\mathbb{R}$ este derivabilă în a. Numărul

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

se numeşte *derivata de ordinul* n *a lui* f *în* a.

4.6.5 Definiţie.

- Spunem că $f:D\subseteq \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ este o *funcţie de clasă* C^n în D şi scriem
$$f \in C^n(D)$$
dacă f este derivabilă de n ori şi $f^{(n)}:D\longrightarrow\mathbb{R}$ este continuă.
- Spunem că $f:D\subseteq \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ este o *funcţie de clasă* C^∞ în D şi scriem
$$f \in C^\infty(D)$$
dacă f este *indefinit derivabilă*, adică este derivabilă de n ori, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

4.6.6 Exemple.

$$(x^k)' = k\, x^{k-1} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (\sin x)' = \cos x$$

$$(x^k)'' = k(k-1)\, x^{k-2} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)'' = \frac{2}{x^3} \qquad (\sin x)'' = -\sin x$$

$$(x^k)^{(3)} = k(k-1)(k-2)\, x^{k-3} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)^{(3)} = -\frac{6}{x^4} \qquad (\sin x)^{(3)} = -\cos x$$

4.6.7 MATHEMATICA: `D[f[x], {x,n}]`

`In[1]:=D[1/x, x]`	$\mapsto$	Out[1]=$-\frac{1}{x^2}$	`In[4]:=D[Sin[x], x]`	$\mapsto$	Out[4]=Cos[x]
`In[2]:=D[1/x, {x,2}]`	$\mapsto$	Out[2]=$\frac{2}{x^3}$	`In[5]:=D[Sin[x], {x,2}]`	$\mapsto$	Out[5]=$-$Sin[x]
`In[3]:=D[1/x, {x,3}]`	$\mapsto$	Out[3]=$-\frac{6}{x^4}$	`In[6]:=D[Sin[x], {x,3}]`	$\mapsto$	Out[6]=$-$Cos[x]

4.6.8 Propoziţie. *Dacă funcţiile $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile de n ori şi $\lambda \in \mathbb{R}$ atunci funcţiile $f+g$, λf şi fg sunt derivabile de n ori şi*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)}+g^{(n)}, \qquad (\lambda f)^{(n)} = \lambda\, f^{(n)}, \qquad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, f^{(n-k)}\, g^{(k)}$$

adică

$$(fg)^{(n)} = \mathrm{C}_n^0\, f^{(n)}\, g^{(0)} + \mathrm{C}_n^1\, f^{(n-1)}\, g^{(1)} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}\, f^{(1)}\, g^{(n-1)} + \mathrm{C}_n^n\, f^{(0)}\, g^{(n)}.$$

4.6.9 MATHEMATICA: `D[f[x], {x,n}]`

`In[1]:=D[f[x] g[x], x]`	$\mapsto$	Out[1]=$g[x]\, f'[x]+f[x]\, g'[x]$
`In[2]:=D[f[x] g[x], {x,2}]`	$\mapsto$	Out[2]=$2\, f'[x]\, g'[x]+g[x]\, f''[x]+f[x]\, g''[x]$
`In[3]:=D[f[x] g[x], {x,3}]`	$\mapsto$	Out[3]=$3\, g'[x]\, f''[x]+3\, f'[x]\, g''[x]+g[x]\, f^{(3)}[x]+f[x]\, g^{(3)}[x]$

4.6.10 Exemple.

$$(x\, f(x))^{(n)} = \mathrm{C}_n^{n-1}\, f^{(n-1)}(x) + \mathrm{C}_n^n\, x\, f^{(n)}(x) = n\, f^{(n-1)}(x) + x\, f^{(n)}(x)$$

$$\begin{aligned}(x^2 f(x))^{(n)} &= 2\mathrm{C}_n^{n-2} f^{(n-2)}(x) + 2\mathrm{C}_n^{n-1} x f^{(n-1)}(x) + \mathrm{C}_n^n x^2 f^{(n)}(x)\\ &= n(n-1) f^{(n-1)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + x^2 f^{(n)}(x).\end{aligned}$$

4.6.11 MATHEMATICA: `D[x^k f[x], {x,n}]`

`In[1]:=D[x^2 f[x] , x]`	$\mapsto$	Out[1]=$2x\, f[x]+x^2\, f'[x]$
`In[2]:=D[x^2 f[x], {x,2}]`	$\mapsto$	Out[2]=$2\, f[x]+4x\, f'[x]+x^2\, f''[x]$
`In[3]:=D[x^2 f[x], {x,3}]`	$\mapsto$	Out[3]=$6\, f'[x]+6x\, f''[x]+x^2\, f^{(3)}[x]$

4.6.12 Definiţie. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie definită pe o mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ derivabilă parţial într-o vecinătate $B_r(a) \subset D$ a unui punct $a \in \overset{\circ}{D}$. Dacă derivatele parţiale

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : B_r(a) \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt derivabile parţial în a, derivatele lor parţiale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(a)$$

se numesc *derivatele parţiale de ordinul al doilea* ale lui f în a.

4.6.13 Derivatele parţiale de ordin mai înalt se pot defini asemanător

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}(a)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)(a),\quad \text{etc.}$$

4.6.14 In cazul unei funcţii $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ se pot defini derivatele de ordinul doi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

4.6.15 Exemplu. Funcţia $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ admite derivate parţiale de orice ordin şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{e}^{x^2+y^2}=2\mathrm{e}^{x^2+y^2}+4x^2\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{e}^{x^2+y^2}=2\mathrm{e}^{x^2+y^2}+4y^2\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\mathrm{e}^{x^2+y^2}=4xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\mathrm{e}^{x^2+y^2}=4xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}.$$

4.6.16 MATHEMATICA: `D[f[x,y], {x,2}]` `D[f[x,y], x,y]`

`In[1]:=D[Exp[x^2 + y^2], {x, 2}]` $\mapsto$ Out[1]=$2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}+4\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,x^2$

`In[2]:=D[Exp[x^2 + y^2], {y, 2}]` $\mapsto$ Out[2]=$2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}+4\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,y^2$

`In[3]:=D[Exp[x^2 + y^2], x, y]` $\mapsto$ Out[3]=$4\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,x\,y$

`In[4]:=D[Exp[x^2 + y^2], y, x]` $\mapsto$ Out[4]=$4\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,x\,y$

4.6.17 Funcţia

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\qquad f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x_2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{daca}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{daca}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

este derivabilă parţial şi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{daca}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{daca}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{daca}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{daca}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

In punctul $(0,0)$ derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea au valori diferite

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=-1.$$

4.6.18 Teoremă (Schwarz) *Dacă funcţia* $f:D\subseteq \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *are derivate parţiale mixte de ordinul doi* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ *într-o vecinătate* $(a_1-r,a_1+r)\times(a_2-r,a_2+r)$ *a unui punct* $(a_1,a_2)\in\overset{\circ}{D}$ *şi dacă ele sunt continue în* (a_1,a_2) *atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a_1,a_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a_1,a_2).$$

Demonstraţie. Fie $(x_n,y_n)_{n\geq 0}$ un şir din $B_r(a)$ cu $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(a_1,a_2)$ şi $(x_n,y_n)\neq(a_1,a_2)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Funcţiile

$$\varphi_n:(a_1-r,a_1+r)\longrightarrow\mathbb{R},\qquad \varphi_n(x)=f(x,y_n)-f(x,a_2)$$

$$\psi_n:(a_2-r,a_2+r)\longrightarrow\mathbb{R},\qquad \psi_n(y)=f(x_n,y)-f(a_1,y)$$

verifică condiţiile din teorema lui Lagrange (pag. 93-**25**) şi relaţia

$$\varphi_n(x_n)-\varphi_n(a_1)=\psi_n(y_n)-\psi_n(a_2).$$

Rezultă că există α_n între x_n şi a_1 şi există β_n între y_n şi a_2 astfel încât

$$\varphi_n'(\alpha_n)(x_n-a_1)=\psi_n'(\beta_n)(y_n-a_2)$$

adică

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_n,y_n)-\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_n,a_2)\right)(x_n-a_1)=\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_n,\beta_n)-\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,\beta_n)\right)(y_n-a_2).$$

Din teorema lui Lagrange rezultă că există ξ_n între x_n şi a_1 şi η_n între y_n şi a_2 încât

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(\alpha_n,\eta_n)\,(y_n-a_2)(x_n-a_1)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(\xi_n,\beta_n)\,(x_n-a_1)(y_n-a_2)$$

adică

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(\alpha_n,\eta_n)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(\xi_n,\beta_n).$$

Derivatele parţiale mixte fiind continue în $(0,0)$, din relaţia anterioară rezultă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a_1,a_2)=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(\alpha_n,\eta_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(\xi_n,\beta_n)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a_1,a_2).$$

4.6.19 Definiţie. Spunem că $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ că este *funcţie de clasă* C^k şi scriem

$$f\in C^k(D)$$

dacă toate derivatele parţiale de ordin mai mic sau egal cu k există şi sunt continue în orice punct din D.

Prin $f\in C^0(D)$ se înţelege că f este funcţie continuă.

Spunem că $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ că este *funcţie de clasă* C^∞ şi scriem

$$f\in C^\infty(D)$$

dacă $f\in C^k(D)$, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$.

4.6.20 Dacă $D\subseteq\mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi $f\in C^2(D)$ atunci
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_j}(a)$$
oricare ar fi $a\in D$ şi $j,k\in\{1,2,...,n\}$. Demonstraţia este similară celei de mai sus.

4.6.21 Dacă $D\subseteq\mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă şi $f\in C^3(D)$ atunci
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z\,\partial x},\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x},\quad \text{etc.}$$

4.6.22 (*Derivate de ordin superior ale funcţiilor compuse*).

a) Dacă $I\xrightarrow{f}J\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ sunt derivabile de două ori atunci
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}g(f(t))=g'(f(t))\;f''(t)+g''(f(t))\;f'^2(t).$$

b) Dacă $I\xrightarrow{(\varphi,\psi)}\mathbb{R}^2\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^2 atunci
$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}g(\varphi(t),\psi(t))=&\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\varphi(t),\psi(t))\,(\varphi'(t))^2+\tfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)\,\psi'(t)\\&+\tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\varphi(t),\psi(t))\,(\psi'(t))^2+\tfrac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi''(t))+\tfrac{\partial g}{\partial y}(\varphi(t),\psi(t))\,\psi''(t)).\end{aligned}$$

c) Dacă $\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^2 atunci
$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial^2}{\partial u^2}g(f(u,v))=g''(f(u,v))\left(\tfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right)^2+g'(f(u,v))\,\tfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)\\&\tfrac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}g(f(u,v))=g''(f(u,v))\,\tfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)\,\tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)+g'(f(u,v))\,\tfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}(u,v)\\&\tfrac{\partial^2}{\partial v^2}g(f(u,v))=g''(f(u,v))\left(\tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)^2+g'(f(u,v))\,\tfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v).\end{aligned}$$

e) Dacă $\mathbb{R}^2\xrightarrow{(\varphi,\psi)}\mathbb{R}^2\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^2 atunci
$$\begin{aligned}\tfrac{\partial^2}{\partial u^2}g(\varphi(u,v),\psi(u,v))=&\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\right)^2\\&+2\tfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,\tfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\,\tfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\\&+\tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v)\right)^2\\&+\tfrac{\partial g}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(u,v)\\&+\tfrac{\partial g}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,\tfrac{\partial^2\psi}{\partial u^2}(u,v).\end{aligned}$$

4.6.23 MATHEMATICA: `D[g[f[x,y]], {x,2}]`   `D[g[f[x,y],h[x,y]], x,y]`

```
In[1]:=D[g[f[t]], {t,2}]               ↦ Out[1]=g'[f[t]] f''[t]+f'[t]^2 g''[f[t]]
In[2]:=D[g[f[t], h[t]], {t,2}]          ↦ Out[2]=h''[t] g^(0,1)[f[t],h[t]]+f''[t] g^(1,0)[f[t],h[t]]
                                             +h'[t](h'[t] g^(0,2)[f[t],h[t]]+f'[t] g^(1,1)[f[t],h[t]])
                                             +f'[t](h'[t] g^(1,1)[f[t],h[t]]+f'[t] g^(2,0)[f[t],h[t]])
In[3]:=D[g[f[u,v]], {u,2}]             ↦ Out[3]=g''[f[u,v]] f^(1,0)[u,v]^2+g'[f[u,v]] f^(2,0)[u,v]
In[4]:=D[g[f[u,v]],  u,v]              ↦ Out[4]=g''[f[u,v]] f^(0,1)[u,v] f^(1,0)[u,v]+g'[f[u,v]] f^(1,1)[u,v]
In[5]:=D[g[f[u,v]], {v,2}]             ↦ Out[5]=g''[f[u,v]] f^(0,1)[u,v]^2+g'[f[u,v]] f^(0,2)[u,v]
In[6]:=D[g[f[u,v],h[u,v]],{u,2}]       ↦ Out[6]=h^(1,0)[u,v] (g^(0,2)[f[u,v],h[u,v]] h^(1,0)[u,v]
                                             +f^(1,0)[u,v] g^(1,1)[f[u,v],h[u,v]])
                                             +g^(1,0)[f[u,v],h[u,v]] f^(2,0)[u,v]
                                             +f^(1,0)[u,v](h^(1,0)[u,v] g^(1,1)[f[u,v],h[u,v]]
                                             +f^(1,0)[u,v] g^(2,0)[f[u,v],h[u,v]])
                                             +g^(0,1)[f[u,v],h[u,v]] h^(2,0)[u,v]
```

4.7 Diferenţiale de ordin superior

4.7.1 Propoziţie. *Dacă* $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *este differenţiabilă în a atunci*

$$df(a)u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(a+tu)|_{t=0}.$$

Demonstraţie. Ştim că (a se vedea pag. 101-**5**)

$$df(a)(u_1,u_2,...,u_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,u_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,u_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,u_n$$

Pe e altă parte, ţinând seama de derivarea funcţiilor compuse (pag. 103-**13**), avem

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(a_1+tu_1,...,a_n+tu_n)=\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a+tu)\,\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_1+tu_1)+\cdots+\tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a+tu)\,\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_n+tu_n)$$

şi prin urmare,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(a+tu)|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,u_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,u_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,u_n.$$

4.7.2 Dacă funcţia continuă $f:[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ este derivabilă în intervalul $(\alpha,\beta)\neq\emptyset$ atunci există $\xi\in(\alpha,\beta)$ astfel încât (a se vedea teorema lui Lagrange (pag. 93-**25**))

$$f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)\;(\beta-\alpha)$$

adică astfel încât

$$f(\beta)=f(\alpha)+df(\xi)\;(\beta-\alpha).$$

4.7.3 Teoremă. *Dacă* $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ *este o funcţie diferenţiabilă definită pe o mulţime deschisă* $D\subset\mathbb{R}^n$ *atunci oricare ar fi punctele* $a, x\in D$ *există* ξ *aparţinând segmentului* $[a,x]=\{a+t(x-a)\ |\ t\in[0,1]\}$ *astfel încât*

$$f(x) = f(a) + df(\xi)\ (x-a).$$

Demonstraţie. Funcţia continuă $\varphi:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R},\ \ \varphi(t)=f(a+t(x-a))$ este derivabilă în intervalul $(0,1)$. Conform teoremei lui Lagrange există $t_0\in(0,1)$ astfel încât

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t_0)$$

adică

$$f(x)-f(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+t_0(x-a))\,(x_1-a_1)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+t_0(x-a))\,(x_n-a_n).$$

Punând $\xi=a+t_0(x-a)$, ultima relaţie devine

$$f(x)-f(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)\,(x_1-a_1)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi)\,(x_n-a_n)=df(\xi)\ (x-a).$$

4.7.4 Definiţie. Fie $D\subseteq\mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f\in C^k(D)$. Prin *diferenţiala de ordinul* k a lui f în punctul $a\in D$ se înţelege aplicaţia

$$d^kf(a):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},\qquad d^kf(a)\,(u)=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}f(a+tu)|_{t=0}.$$

4.7.5 Dacă $D\subseteq\mathbb{R}^2$ este mulţime deschisă şi $f\in C^3(D)$ atunci (vezi pag. 106-**21**)

$$df(a):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad df(a)\,u=\tfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,u_1+\tfrac{\partial f}{\partial y}(a)\,u_2$$

$$d^2f(a):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad d^2f(a)\,u=\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\,u_1^2+2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)\,u_1\,u_2+\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\,u_2^2$$

$$d^3f(a):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad d^3f(a)\,u=\tfrac{\partial^3 f}{\partial x^2}(a)\,u_1^3+3\tfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a)\,u_1^2\,u_2+3\tfrac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}(a)\,u_1\,u_2^2+\tfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)\,u_2^3$$

oricare ar fi $a\in D$ şi $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$, adică formal avem

$$df=\tfrac{\partial f}{\partial x}\,dx+\tfrac{\partial f}{\partial y}\,dy=\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\,dx+\tfrac{\partial}{\partial y}\,dy\right)f$$

$$d^2f=\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2+2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,dx\,dy+\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2=\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\,dx+\tfrac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2f$$

$$d^3f=\tfrac{\partial^3 f}{\partial x^2}\,dx^3+3\tfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\,dx^2\,dy+3\tfrac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2+\tfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,dy^3=\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\,dx+\tfrac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^3f.$$

4.7.6 Se poate arăta că în cazul unei funcţii $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ de clasă C^k avem

$$d^kf=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\,dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\right)^kf.$$

4.7.7 Deoarece

$$(\alpha_1+\alpha_2)^k=\sum_{j=0}^{k} C_k^j\,\alpha_1^{k-j}\,\alpha_2^j=\sum_{j_1+j_2=k}\frac{k!}{j_1!\,j_2!}\,\alpha_1^{j_1}\,\alpha_2^{j_2}$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^k=\sum_{j_1+j_2+j_3=k}\frac{k!}{j_1!\,j_2!\,j_3!}\,\alpha_1^{j_1}\,\alpha_2^{j_2}\,\alpha_3^{j_3}$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)^k=\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=k}\frac{k!}{j_1!\,j_2!\ldots j_n!}\,\alpha_1^{j_1}\,\alpha_2^{j_2}\cdots\alpha_n^{j_n}$$

în cazul unei funcţii $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ de clasă C^k avem

$$d^kf(a)\,(u)=\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=k}\frac{k!}{j_1!\,j_2!\ldots j_n!}\,\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1}\,\partial x_2^{j_2}\ldots\partial x_n^{j_n}}(a)\,u_1^{j_1}\,u_2^{j_2}\cdots u_n^{j_n}.$$

4.8 Dezvoltări Taylor

4.8.1 Definiţie Spunem despre o funcţie $f:D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ că este *de clasă* C^k şi scriem $f\in C^k(D)$ dacă f este derivabilă de k ori în orice punct $a\in D$ şi aplicaţia $f^{(k)}:D\longrightarrow\mathbb{R}$ este continuă.

4.8.2 Teoremă (Taylor). *Dacă $f:(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^{k+1} atunci pentru orice $a,x\in(\alpha,\beta)$ cu $x\neq a$ există ξ între a şi x astfel încât*

$$f(x)=f(a)+\tfrac{f'(a)}{1!}(x-a)+\tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\tfrac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}.$$

Demonstraţie. In cazul $a<x$, funcţia continuă $h:[a,x]\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$h(t)=f(x)-f(t)-\tfrac{f'(t)}{1!}(x-t)-\tfrac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\cdots-\tfrac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k-\tfrac{\delta}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}$$

cu constanta δ alesă astfel încât $h(a)=0$, este derivabilă pe intervalul (a,x) şi $h(x)=0$. Conform teoremei lui Rolle există ξ între a şi x astfel încât $h'(\xi)=0$, adică

$$-f'(\xi)-\tfrac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi)+\tfrac{f'(\xi)}{1!}-\tfrac{f^{(3)}(\xi)}{2!}(x-\xi)^2+\tfrac{f''(\xi)}{2!}\,2(x-\xi)-\cdots$$
$$-\tfrac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k+\tfrac{f^{(k)}(\xi)}{k!}\,k(x-\xi)^{k-1}+\tfrac{\delta}{(k+1)!}(k+1)(x-\xi)^k=0.$$

După reducerea termenilor rămâne $\delta=f^{(k+1)}(\xi)$. Cazul $a>x$ este similar.

4.8.3 Teoremă (Taylor). *Dacă funcţia* $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *că este* de clasă C^{k+1} *într-o vecinătate* $B_r(a) \subset D$ *a unui punct* $a \in \overset{\circ}{D}$ *atunci pentru orice* $x \in B_r(a)$ *există pe segmentul care uneşte* a *cu* x *un punct* c *astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \tfrac{1}{1!}\, df(a)\,(x-a) + \tfrac{1}{2!}\, d^2 f(a)\,(x-a) + \cdots \\ + \tfrac{1}{k!}\, d^k f(a)\,(x-a) + \tfrac{1}{(k+1)!}\, d^{k+1} f(c)\,(x-a). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Demonstraţie. Dacă $x \in B_r(a)$ atunci $\| x-a \| < r$. Aplicaţia

$$F : \left(-\tfrac{r}{\|x-a\|}, \tfrac{r}{\|x-a\|}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(t) = f(a+t(x-a))$$

este de clasă C^k. Conform teoremei precedente există $\xi \in (0,1)$ astfel încât

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

adică

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \tfrac{1}{1!}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a+t(x-a))|_{t=0} + \tfrac{1}{2!}\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(a+t(x-a))|_{t=0} + \cdots \\ + \tfrac{1}{k!}\tfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(a+t(x-a))|_{t=0} + \tfrac{1}{(k+1)!}\tfrac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}} f(a+t(x-a))|_{t=\xi}. \end{aligned}$$

Ultima relaţie coincide pentru $c = a + \xi(x-a)$ cu (4.9) deoarece

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}} f(a+t(x-a))|_{t=\xi} = \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}} f(a+\xi(x-a)+t(x-a))|_{t=0} = d^{k+1} f(c)\,(x-a).$$

4.8.4 In cazul unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 relaţia (4.9) devine

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a_1,a_2) + \tfrac{1}{1!}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2)\right) \\ + \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1,c_2)(x-a_1)^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(c_1,c_2)(x-a_1)(y-a_2) + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1,c_2)(y-a_2)^2\right) \end{aligned}$$

iar în cazul unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 relaţia (4.9) devine

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = f(a_1,a_2,a_3) \\ + \tfrac{1}{1!}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2,a_3)(x-a_1) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2,a_3)(y-a_2) + \tfrac{\partial f}{\partial z}(a_1,a_2,a_3)(z-a_3)\right) \\ + \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1,c_2,c_3)(x-a_1)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1,c_2,c_3)(y-a_2)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(c_1,c_2,c_3)(z-a_3)^2\right. \\ + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(c_1,c_2,c_3)(x-a_1)(y-a_2) + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(c_1,c_2,c_3)(y-a_2)(z-a_3) \\ \left. + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(c_1,c_2,c_3)(z-a_3)(x-a_1)\right). \end{aligned}$$

4.9 Extremele funcţiilor de mai multe variabile

4.9.1 Propoziţie. *Fie* $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă definită pe un interval* $I \subseteq \mathbb{R}$.
Avem: a) Dacă $f' > 0$ *atunci funcţia* f *este strict crescătoare.*
b) Dacă $f' < 0$ *atunci funcţia* f *este strict descrescătoare.*

Demonstraţie. Utilizăm teorema lui Lagrange (pag. 93-**25**). Pentru orice $x, y \in I$ există ξ între x şi y astfel încât $f(x) - f(y) = f'(\xi)\,(x-y)$. Dacă $f' > 0$ atunci: $x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y)$. Dacă $f' < 0$ atunci: $x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y)$.

4.9.2 Definiţie. Fie $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie definită pe o mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ şi fie $a \in D$.

- Spunem că a este *punct de minim local* al lui f dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât
$$f(a) \leq f(x), \qquad \text{oricare ar fi } \; x \in B_\varepsilon(a) \cap D.$$
- Spunem că a este *punct de maxim local* al lui f dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât
$$f(a) \geq f(x), \qquad \text{oricare ar fi } \; x \in B_\varepsilon(a) \cap D.$$
- Spunem că a este *punct de minim global* al lui f dacă
$$f(a) \leq f(x), \qquad \text{oricare ar fi } \; x \in D.$$
- Spunem că a este *punct de maxim global* al lui f dacă
$$f(a) \geq f(x), \qquad \text{oricare ar fi } \; x \in D.$$
- Spunem că a este *punct de extrem* local (global) al lui f dacă este punct de maxim local (respectiv, global) sau punct de minim local (respectiv, global).

4.9.3 Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $a \in D$ un punct de extrem local al lui f. Dacă $a \in \overset{\circ}{D}$ şi f este derivabilă în a atunci ştim că $f'(a) = 0$ (a se vedea pag. 93-**23**).

4.9.4 Definiţie. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie şi $a \in \overset{\circ}{D}$ un punct în care f este diferenţiabilă . Spunem că a este *punct staţionar* (sau *punct critic*) al lui f dacă
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0, \qquad \text{oricare ar fi } \; j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

4.9.5 Teoremă. *Fie* $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie. Orice punct de extrem local din interiorul lui* D *în care funcţia este diferenţiabilă este punct staţionar.*

Demonstraţie (Cazul $n=2$). Fie $a \in \overset{\circ}{D}$ un punct de extrem în care f este diferenţiabilă şi $r>0$ cu $B_r(a)\subset D$. Deoarece a_1 este punct de extrem pentru funcţia derivabilă

$$\varphi_1 : (a_1-r, a_1+r) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi_1(t) = f(t,a_2)$$

din teorema lui Fermat (a se vedea pag. 93-**23**) rezultă că $\varphi_1'(a_1)=0$ şi avem

$$\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \lim_{t\to a_1} \tfrac{f(t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t-a_1} = \lim_{t\to a_1} \tfrac{\varphi_1(t)-\varphi_1(a_1)}{t-a_1} = \varphi_1'(a_1)=0.$$

Similar, a_2 fiind punct de extrem pentru funcţia derivabilă

$$\varphi_2 : (a_2-r, a_2+r) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi_1(t) = f(a_1,t)$$

din teorema lui Fermat rezultă

$$\tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \lim_{t\to a_2} \tfrac{f(a_1,t)-f(a_1,a_2)}{t-a_2} = \lim_{t\to a_2} \tfrac{\varphi_2(t)-\varphi_2(a_2)}{t-a_2} = \varphi_2'(a_2)=0.$$

4.9.6 Propoziţie. *Fie* $f:D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* C^2 *într-o vecinătate* $(a-r,a+r)\subset D$ *a unui punct staţionar* $a\in\overset{\circ}{D}$. *Avem:*

- *Daca* $f''(a)<0$ *atunci* a *este punct de maxim.*
- *Daca* $f''(a)>0$ *atunci* a *este punct de minim.*

Demonstraţie. In cazul $f''(a)\neq 0$ derivata a doua f'' pastrează acelaşi semn pe o vecinătate $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset(a-r,a+r)$ a lui a. Pentru orice $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ există ξ între a şi x astfel încât

$$f(x)-f(a) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2.$$

4.9.7 Teoremă. *Fie* $f:D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* C^k *într-o vecinătate* $(a-r,a+r)\subset D$ *a unui punct* $a\in\overset{\circ}{D}$ *cu proprietăţile*

$$f'(a)=0, \quad f''(a)=0, \quad \dots\ , \quad f^{(k-1)}(a)=0, \quad f^{(k)}(a)\neq 0$$

Avem:

- *Daca* k *este par atunci* a *este punct de extrem* :
  - *Daca* $f^{(k)}(a)<0$ *atunci* a *este punct de maxim.*
  - *Daca* $f^{(k)}(a)>0$ *atunci* a *este punct de minim.*
- *Daca* k *este impar atunci* a *nu este punct de extrem.*

Demonstraţie. Derivata $f^{(k)}$ pastrează acelaşi semn pe o vecinătate $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset(a-r,a+r)$ a lui a. Pentru orice $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ există ξ între a şi x astfel încât

$$f(x)-f(a) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-a)^k.$$

Dacă k este impar atunci $(x-a)^k<0$ pentru $x<a$ şi $(x-a)^k>0$ pentru $x>a$.

4.9.8 Dacă funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 într-o vecinătate $B_r(a)$ a unui punct staţionar $a \in \overset{\circ}{D}$ atunci pentru orice $x \in B_r(a)$ există c pe segmentul care uneşte a cu x astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!}\, d^2(f)(c)\,(x-a).$$

4.9.9 Dacă funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 într-o vecinătate $B_r(a) \subset D$ a unui punct $a \in \overset{\circ}{D}$ atunci

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(u,v) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial f^2}{\partial x_j\, \partial x_k}(a)\, u_j\, v_k$$

este o formă biliniară simetrică. Forma pătratică asociată este diferenţiala de ordinul doi

$$d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d^2 f(a)\,(u) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial f^2}{\partial x_j\, \partial x_k}(a)\, u_j\, u_k.$$

Matricea acestei forme pătratice în raport cu baza canonică este matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^2}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial f^2}{\partial x_1\, \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x_1\, \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_2\, \partial x_1}(a) & \frac{\partial f^2}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x_2\, \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_n\, \partial x_1}(a) & \frac{\partial f^2}{\partial x_n\, \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

numită *hessiana* lui f în a (după numele matematicianului O. Hesse, 1811-1874).

4.9.10 Definiţie. Spunem despre o formă patratică

$$Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad Q(u) = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, u_j\, u_k$$

că este *pozitiv definită* (respectiv, *negativ definită*) dacă

$$Q(u) > 0 \quad (\text{respectiv,} \quad Q(u) < 0), \qquad \text{oricare ar fi} \quad u \in \mathbb{R}^n,\ u \neq 0.$$

4.9.11 Matricea formei patratice Q

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

fiind reală şi simetrică, valorile ei proprii sunt reale. Ele sunt rădacinile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} g_{11}-\lambda & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22}-\lambda & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Forma pătratică Q este pozitiv (respectiv, negativ) definită dacă are toate valorile proprii strict pozitive (respectiv, negative).

4.9.12 Exemple.

a) Forma pătratică $Q:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(u_1,u_2)=\alpha u_1^2+2\beta u_1 u_2+\gamma u_2^2$ cu matricea asociată

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

este pozitiv (respectiv, negativ) definită dacă valorile proprii

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha+\gamma \pm \sqrt{\alpha^2+4\beta^2-2\alpha\gamma+\gamma^2}}{2}$$

sunt pozitive (respectiv, negative).

b) Forma pătratică $Q:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(u_1,u_2,u_3)=2u_1u_2+2u_2u_3+2u_3u_1$ nu este nici pozitiv definită, nici negativ definită deoarece matricea asociată

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

are valorile proprii $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ şi $\lambda_3 = -1$.

4.9.13 MATHEMATICA: `Eigenvalues[{{a, b}, {b, c}}`

`In[1]:=Eigenvalues[{{a, b}, {b, c}}]`

Out[1]= $\left\{ \frac{1}{2}\left(a+c-\sqrt{a^2+4b^2-2ac+c^2}\right),\ \frac{1}{2}\left(a+c+\sqrt{a^2+4b^2-2ac+c^2}\right) \right\}$

`In[2]:=Eigenvalues[{{0, 1, 1}, {1, 0, 1}, {1, 1, 0}}]`

Out[2]={2,−1,−1}

4.9.14 Teoremă. *Fie $f:D\subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 într-o vecinătate $B_r(a)$ a unui punct staţionar $a \in \mathring{D}$. Avem:*

- *Daca* $d^2f(a)$ *este pozitiv definita atunci* a *este punct de minim.*
- *Daca* $d^2f(a)$ *este negativ definita atunci* a *este punct de maxim.*
- *Daca* $d^2f(a) \neq 0$ *nu este nici pozitiv nici negativ definita atunci* a *nu este punct de extrem.*

Demonstraţie. Dacă $d^2f(a)$ este pozitiv definită atunci avem

$$m = \min_{\|u\|=1} \frac{1}{2!} d^2f(a)\,(u) > 0$$

deoarece funcţia continuă $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : u \mapsto d^2f(a)\,(u)$ este mărginită pe mulţimea compactă $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \ \| u \| = 1\}$ şi îşi atinge marginile. Pentru orice punct $x \in B_r(a)$ există un punct c pe segmentul ce uneşte a cu x astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!}\, d^2f(c)\,(x-a) = \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(c)\,(x_j - a_j)(x_k - a_k).$$

Ultima relaţie se poate scrie sub forma

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!}\, d^2f(a) \left(\frac{x-a}{\| x-a \|} \right) \| x-a \|^2 + \omega(x-a)\ \| x-a \|^2$$

unde

$$\omega(x-a) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(c) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(a) \right) \frac{(x_j - a_j)(x_k - a_k)}{\| x-a \|^2}.$$

Deoarece funcţia f este de clasă C^2 în $B_r(a)$ şi

$$|\omega(x-a)| \leq \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(c) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(a) \right|$$

există $\varepsilon \in (0, r)$ astfel încât pentru $x \in B_\varepsilon(a)$ avem $|\omega(x-a)| \leq \frac{m}{2}$ şi prin urmare

$$f(x) - f(a) = \left[\frac{1}{2!}\, d^2f(a) \left(\frac{x-a}{\| x-a \|} \right) + \omega(x-a) \right] \| x-a \|^2 \geq \left[m - \frac{m}{2} \right] \| x-a \|^2 \geq 0.$$

Celelalte afirmaţii pot fi justificate asemănător.

4.9.15 Pentru a obţine informaţii privind punctele de extrem ale unei funcţii de clasă C^2 $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ determinăm punctele staţionare (critice) rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0. \end{cases}$$

Apoi pentru fiecare punct staţionar a găsit studiem forma pătratică $d^2f(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Matricea asociată acestei forme în raport cu o bază a lui $\mathbb{R}^n$ depinde de baza aleasă.

4.9.16 Teoremă (Jacobi). *Fie* $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *o formă pătratică şi fie*

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea ei în raport cu o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., , e_n\}$ *a spaţiului* $\mathbb{R}^n$. *Dacă*

$$\Delta_1 = g_{11} \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

....

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

atunci există o bază $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, ..., , e'_n\}$ *în raport cu care* Q *are expresia*

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} {x'_1}^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} {x'_2}^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} {x'_n}^2$$

unde $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + \cdots + x'_ne'_n$.

4.9.17 Dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ... , $\Delta_n > 0$ atunci Q este pozitiv definită .
Dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, ... , $(-1)^n\Delta_n > 0$ atunci Q este negativ definită.

4.9.18 Propoziţie. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie diferenţiabilă şi* $a \in D$ *un punct staţionar. Dacă* f *este de clasă* C^2 *într-o vecinătate* $B_r(a)$ *a lui* a *atunci:*

- *Daca* $\Delta_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a)\right)^2 > 0$ *atunci* a *este punct de extrem* :
  - *Daca* $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ *atunci* a *este punct de minim*
  - *Daca* $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ *atunci* a *este punct de maxim*
- *Daca* $\Delta_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a)\right)^2 < 0$ *atunci* a *nu este punct de extrem.*

Demonstraţie. Utilizăm teorema lui Jacobi. Matricea formei patratice $d^2 f(a)$ în raport cu baza canonică $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1)\}$ este

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}.$$

4.9.19 Propoziţia nu oferă informaţii despre punctele de extrem în cazul $\Delta_2 = 0$.

4.9.20 Exerciţiu. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy + 1.$$

Rezolvarea 1. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = 3a_1^2 + 3a_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = -3a_2^2 + 3a_1 = 0 \end{cases}$$

obţinem punctele staţionare $(0, 0)$ şi $(1, -1)$. Punctul $a = (0, 0)$ nu este punct de extrem deoarece matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

are valorile proprii $\lambda_{1,2} = \pm 3$. Punctul $a = (1, -1)$ este punct de minim deoarece

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(1,-1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(1,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

are valorile proprii $\lambda_1 = 3$ şi $\lambda_2 = 9$.

Rezolvarea 2. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = 3a_1^2 + 3a_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = -3a_2^2 + 3a_1 = 0 \end{cases}$$

obţinem punctele staţionare $(0, 0)$ şi $(1, -1)$. Punctul $a = (0, 0)$ nu este punct de extrem deoarece

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)\right)^2 = -9 < 0.$$

Punctul $a = (1, -1)$ este punct de minim deoarece

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(1,-1)\right)^2 = 27 > 0 \quad \text{si} \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 6 > 0.$$

4.10 Teorema funcţiilor implicite

4.10.1 Fie funcţia $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ \ F(x,y)=x^2+y^2-1$. Mulţimea

$$C=\{\,(x,y)\mid F(x,y)=0\,\}=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2=1\,\}$$

nu reprezintă graficul unei funcţii de forma $f:(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}$ deoarece la anumite valori ale lui x corespund două valori ale lui y

$$x^2+y^2-1=0 \quad\Longrightarrow\quad y=\pm\sqrt{1-x^2}, \qquad \text{oricare ar fi}\ \ x\in[-1,1].$$

Totuşi, pentru orice punct $(a,b)\in C$ diferit de punctele $(1,0)$ şi $(-1,0)$ există $\varepsilon>0$, $\delta>0$ astfel încât $((a-\varepsilon,a+\varepsilon)\times(b-\delta,b+\delta))\cap C$ este graficul unei funcţii $f:(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\longrightarrow(b-\delta,b+\delta)$ cu proprietăţile $f(a)=b$ şi $F(x,f(x))=0$ (a se vedea figura 4.5). Spunem că f este o *funcţie definită implicit* de ecuaţia $F(x,y)=0$.

Figura 4.5

4.10.2 Punctele în jurul carora o curbă de forma $\{(x,y)\mid F(x,y)=0\,\}$ definită de o funcţie $F:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clasă C^1 nu reprezintă graficul unei funcţii $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ sunt cele în care tangenta la curbă este paralelă cu Oy (normala paralela cu Ox).

4.10.3 Fie $F:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi $(a,b)\in D$ astfel încât $F(a,b)=0$ şi $dF(a,b)\neq 0$. Dacă $(-\varepsilon,\varepsilon)\to D:t\mapsto(\varphi(t),\psi(t))$ este un drum de clasă C^1 astfel încât

$$(\varphi(0),\psi(0))=(a,b) \qquad \text{si} \qquad F(\varphi(t),\psi(t))=0, \quad \text{oricare ar fi}\ \ t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

atunci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t),\psi(t))\bigg|_{t=0}=0$$

adică avem relaţia

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\ \varphi'(0)+\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\ \psi'(0)=0$$

care se mai poate scrie

$$\left\langle\left(\frac{\partial F}{\partial x}(a,b),\ \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right),(\varphi'(0),\psi'(0))\right\rangle=0.$$

Din ultima relaţie rezultă că vectorul $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(a,b),\ \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)$ este perpendicular pe tangenta la $\{(x,y)|F(x,y)=0\}$. Este paralel cu Ox dacă şi numai dacă $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)=0$.

4.10.4 Teoremă. *Fie $D\subseteq\mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi $F:D\rightarrow\mathbb{R}$ funcţie de clasă C^1. Dacă $(a,b)\in D$ este astfel încât*

$$F(a,b)=0 \qquad si \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$$

atunci există $\varepsilon>0$, $\delta>0$ astfel încât $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\times(b-\delta,b+\delta)\subset D$ şi există o funcţie $f:(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\longrightarrow(b-\delta,b+\delta)$ cu proprietăţile:

1) $f(a)=b$

2) $F(x,f(x))=0,$ *oricare ar fi* $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

3) funcţia f este de clasă C^1 şi

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}.$$

Demonstraţie. Considerăm cazul $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)>0$. Funcţia f fiind de clasă C^1 în D, există $r>0$, $\delta>0$ astfel încât $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)>0$, oricare ar fi $(x,y)\in(a-r,a+r)\times[b-\delta,b+\delta]$. Deoarece $\frac{\partial F}{\partial y}(a,y)>0$ şi $F(a,b)=0$ rezultă că $F(a,b-\delta)<0$ şi $F(a,b+\delta)>0$. Funcţia F fiind continuă, rezultă că există $\varepsilon\in(0,r)$ astfel încât $F(x,b-\delta)<0$ şi $F(x,b+\delta)>0$ oricare ar fi $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. Pentru orice $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ funcţia continuă

$$[b-\delta,b+\delta]\longrightarrow\mathbb{R}:y\mapsto F(x,y)$$

este crescătoare şi $F(x,b-\delta)<0$ şi $F(x,b+\delta)>0$. Rezultă că există $y_x\in(b-\delta,b+\delta)$ astfel încât $F(x,y_x)=0$. Funcţia

$$f:(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\longrightarrow(b-\delta,b+\delta), \qquad f(x)=y_x$$

îndeplineşte condiţiile $f(a)=b$ şi $F(x,f(x))=0$, oricare ar fi $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. Fie $x_0\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ fixat. Oricare ar fi $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ diferit de x_0 există (ξ,η) pe segmentul ce uneşte $(x_0,f(x_0))$ cu $(x,f(x))$ astfel încât (a se vedea pag. 117-**3**)

$$F(x,f(x))-F(x_0,f(x_0))=\frac{\partial F}{\partial x}(\xi,\eta)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(\xi,\eta)(f(x)-f(x_0)).$$

Deoarece $F(x,f(x)) = F(x_0,f(x_0)) = 0$ obţinem

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\xi,\eta)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi,\eta)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,f(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,f(x_0))}.$$

Cazul $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0$ poate fi analizat asemănător.

4.10.5 Teoremă. *Fie* $F: D\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k : (x,y)\mapsto F(x,y)$ *o funcţie de clasă* C^1 *definită pe o mulţime deschisă D. Dacă* $(a,b)\in D$ *este astfel încât*

$$F(a,b)=0 \qquad si \qquad \frac{D(F_1,F_2,...,F_k)}{D(y_1,y_2,...,y_k)}(a,b)\neq 0$$

atunci există $\varepsilon>0$, $\delta>0$ *astfel încât* $B_\varepsilon(a)\times B_\delta(b)\subset D$ *şi există o funcţie* $f: B_\varepsilon(a)\longrightarrow B_\delta(b)$ *cu proprietăţile:*

1) $f(a)=b$

2) $F(x,f(x))=0$, *oricare ar fi* $x\in B_\varepsilon(a)$

3) funcţia f *este de clasă* C^1 *şi*

$$\frac{\partial(f_1,...,f_k)}{\partial(x_1,...,x_n)}(x) = -\left(\frac{\partial(F_1,...,F_k)}{\partial(y_1,...,y_k)}(x,f(x))\right)^{-1} \frac{\partial(F_1,...,F_k)}{\partial(x_1,...,x_n)}(x,f(x)).$$

4.10.6 In cazul $n = k = 2$ relaţia anterioară devine

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x,f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x,f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x,f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x,f(x))\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x,f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x,f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x,f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x,f(x))\end{pmatrix}$$

şi este echivalentă cu

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x,f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x,f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_i}(x,f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x,f(x))\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x,f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x,f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x,f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x,f(x))\end{vmatrix}} = -\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(x_i,y_2)}(x,f(x))}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(y_1,y_2)}(x,f(x))}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x,f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x,f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x,f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial x_i}(x,f(x))\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x,f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x,f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x,f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x,f(x))\end{vmatrix}} = -\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(y_1,x_i)}(x,f(x))}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(y_1,y_2)}(x,f(x))}.$$

4.11 Teorema de inversiune locală

4.11.1 Teoremă. *Dacă funcţia continuă şi bijectivă $f:I\to J$ definită pe un interval I este derivabilă în $a\in I$ şi dacă $f'(a)\neq 0$ atunci funcţia inversă $f^{-1}:J\longrightarrow I$ este derivabilă în punctul $b=f(a)$ şi*

$$(f^{-1})'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}\qquad \textit{adica}\qquad (f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demonstraţie. Funcţia f^{-1} fiind continuă (a se vedea pag. 82-**5**) avem

$$\begin{aligned}\lim_{y\to b}\tfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} &= \lim_{y\to b}\tfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(b))}\\ &= \lim_{y\to b}\tfrac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}}=\tfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}.\end{aligned}$$

4.11.2 Fie $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă definită pe un interval I cu $f'(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in I$. Funcţia f' având proprietatea lui Darboux (pag. 93-**27**) păstrează semn constant pe I şi prin urmare, f este strict monotonă. Funcţia $f:I\longrightarrow f(I)$ este bijectivă şi pentru orice $y\in f(I)$ avem

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

4.11.3 Dacă funcţia bijectivă $f:I\to J$ şi inversa ei sunt derivabile atunci

$$f^{-1}(f(x))=x \qquad \overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\Longrightarrow}\qquad (f^{-1})'(f(x))\,f'(x)=1$$

oricare ar fi $x\in I$. Din această relaţie rezultă

$$(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}\qquad \text{daca}\quad f'(x)\neq 0.$$

4.11.4 Exemple.

a) Inversa funcţiei bijective $\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ este $\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ şi

$$\arcsin(\sin x)=x \qquad \overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\Longrightarrow}\qquad (\arcsin)'(\sin x)\,\cos x=1.$$

Pentru orice $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ avem

$$(\arcsin)'(\sin x)=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\qquad \text{adica}\qquad (\arcsin t)'=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

b) Inversa funcţiei bijective $\mathrm{tg}:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\longrightarrow\mathbb{R}$ este $\mathrm{arctg}:\mathbb{R}\longrightarrow(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ şi

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)=x \qquad \stackrel{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\Longrightarrow} \qquad (\mathrm{arctg})'(\mathrm{tg}\,x)\,\frac{1}{\cos^2 x}=1$$

relaţie din care rezultă

$$(\mathrm{arctg})'(\mathrm{tg}\,x)=\cos^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} \qquad \text{adica} \qquad (\mathrm{arctg}\,t)'=\frac{1}{1+t^2}.$$

c) Inversa funcţiei bijective $\mathbb{R}\longrightarrow(0,\infty):x\mapsto \mathrm{e}^x$ este $\ln:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ şi

$$\ln(\mathrm{e}^x)=x \qquad \stackrel{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\Longrightarrow} \qquad (\ln)'(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^x=1$$

relaţie din care rezultă

$$(\ln)'(\mathrm{e}^x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x} \qquad \text{adica} \qquad (\ln t)'=\frac{1}{t}.$$

4.11.5 Teoremă. *Fie $f:D\to\mathbb{R}^n:x\mapsto(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x))$ o funcţie de clasă C^1 definită pe o mulţime deschisă $D\subseteq\mathbb{R}^n$. Dacă $a\in D$ este astfel încât*

$$\frac{D(f_1,f_2,...,f_n)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}(a)=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a)\end{vmatrix}\neq 0$$

atunci există $\varepsilon>0$ şi o funcţie $g:B_\varepsilon(f(a))\longrightarrow D$ astfel încât

1) $g(f(a))=a$

2) $f(g(y))=y,$ *oricare ar fi* $y\in B_\varepsilon(f(a))$

3) funcţia g este de clasă C^1 şi

$$\frac{\partial(g_1,g_2,...,g_n)}{\partial(y_1,y_2,...,y_n)}(y)=\left(\frac{\partial(f_1,f_2,...,f_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}(g(y))\right)^{-1}.$$

Demonstraţie. Funcţia $F:D\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $F(x,y)=f(x)-y$ este de clasă C^1 şi

$$F(a,f(a))=0, \qquad \det\frac{\partial(F_1,F_2,...,F_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}(a,f(a))=\frac{D(f_1,f_2,...,f_n)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}(a)\neq 0.$$

Conform teoremei funcţiilor implicite există $\delta>0$ şi $g:B_\delta(f(a))\longrightarrow D$ astfel încât:

1) $g(f(a))=a$

2) $F(g(y),y)=f(g(y))-y=0,$ oricare ar fi $y\in B_\delta(f(a))$

3) funcţia g este de clasă C^1 şi

$$\frac{\partial(g_1,...,g_n)}{\partial(y_1,...,y_n)}(y)=-\left(\frac{\partial(F_1,...,F_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}(g(y),y)\right)^{-1}\frac{\partial(F_1,...,F_n)}{\partial(y_1,...,y_n)}(g(y),y).$$

4.11.6 Definiţie. O funcţie $f:D \longrightarrow U$ de clasă C^1 între două mulţimi deschise D şi U din $\mathbb{R}^n$ se numeşte *difeomorfism* dacă este bijectivă şi inversa ei $f^{-1} : U \longrightarrow D$ este de clasă C^1.

4.11.7 Se poate arăta ([13], pag. 220) că o funcţie bijectivă $f:D\rightarrow U$ de clasă C^1 între două mulţimi deschise D şi U din $\mathbb{R}^n$ este difeomorfism dacă şi numai dacă f^{-1} este continuă şi

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \text{oricare ar fi} \quad a\in D.$$

Capitolul 5

Primitive şi integrale simple

5.1 Primitive

5.1.1 Propoziţie. *Fie* $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă definită pe un interval* $I \subseteq \mathbb{R}$. *Dacă* $f' = 0$ *atunci* f *este funcţie constantă.*

Demonstraţie. Utilizăm teorema lui Lagrange (pag. 93-**25**). Pentru orice $x, y \in I$ există ξ între x şi y astfel încât $f(x) - f(y) = f'(\xi)\,(x - y)$, adică avem $f(x) - f(y) = 0$.

5.1.2 Fie $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcţii derivabile definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Dacă $f' = g'$ atunci $g - f = const$, adică există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$g(x) = f(x) + c, \quad \text{oricare ar fi } \ x \in I.$$

5.1.3 Definiţie. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Prin *primitivă* a lui f se înţelege o funcţie derivabilă $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$F'(x) = f(x), \ \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

5.1.4 Dacă $F_1, F_2: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt două primitive ale unei funcţii $f: I \to \mathbb{R}$ definite pe un interval atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1 = F_2 + c$.

5.1.5 Mulţimea primitivelor unei funcţii $f: I \to \mathbb{R}$ se notează cu $\int f(x)dx$, adică

$$\int f(x)dx = \{\ F: I \to \mathbb{R} \ \mid \ F \text{ este primitiva a lui } \ f\ \}.$$

Vom nota cu $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor constante definite pe intervalul considerat.

5.1.6 Primitivele unor funcţii uzuale $f : I \to \mathbb{R}$

(I este un interval inclus în domeniul maxim de derivabilitate al primitivelor)

Funcţia	Mulţimea primitivelor	Intervalul	Condiţii
$f(x) = 1$	$\int dx = x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$f(x) = x^\alpha$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + \mathcal{C}$	$I \subseteq (0, \infty)$	$\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$	
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}\, a^x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$0 < a \neq 1$
$f(x) = \sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \mathrm{tg}\, x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$	
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\mathrm{ctg}\, x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$	
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$I \subseteq (-a, a)$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - [-a, a]$	$a > 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$	$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a}\, \mathrm{arctg}\, \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a}\right\rvert + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - \{\pm a\}$	$a \neq 0$
$f(x) = \mathrm{sh}\, x$	$\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \mathrm{ch}\, x$	$\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	

5.1.7 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], x]`

`In[1]:=Integrate[f[x], x]`	$\mapsto$	Out[1]= $\int f(x)\, dx$
`In[2]:=Integrate[x^a, x]`	$\mapsto$	Out[2]= $\frac{x^{1+a}}{1+a}$
`In[3]:=Integrate[a^x, x]`	$\mapsto$	Out[3]= $\frac{a^x}{\mathrm{Log}\,[a]}$
`In[4]:=Integrate[1/Sqrt[x^2+a^2], x]`	$\mapsto$	Out[4]= $\mathrm{Log}\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]$

5.1.8 Teoremă. *Dacă funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ definite pe un interval I admit primitive şi $\lambda \in \mathbb{R}^*$ atunci funcţiile $f + g$ şi λf admit primitive şi*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

Demonstraţie. Dacă $F \in \int f(x)dx$ şi $G \in \int g(x)dx$ atunci $(F+G)' = f + g,\ (\lambda F)' = \lambda f$.

5.1.9 Teoremă. *Dacă $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I atunci are proprietatea lui Darboux pe I.*

Demonstraţie. Dacă f admite primitive atunci există $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f = F'$. Dar derivata unei funcţii pe un interval are proprietatea lui Darboux (pag. 93-**27**).

5.1.10 Teoremă. *O funcţie continuă definită pe un interval admite primitive.*

Demonstraţie. A se vedea pag. 145-**25**.

5.1.11 Teoremă (Integrarea prin părţi). *Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1 definite pe un interval I atunci funcţiile $f'\,g$ şi $f\,g'$ admit primitive şi*

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Demonstraţie. Funcţiile $f'\,g$ şi $f\,g'$ fiind continue, admit primitive şi

$$f(x)\,g(x) + \mathcal{C} = \int (f\cdot g)'(x)dx = \int f'(x)\,g(x)dx + \int f(x)\,g'(x)dx.$$

5.1.12 Exerciţiu. Să se calculeze integralele

$$\int x\mathrm{e}^x dx, \qquad \int \ln x\, dx, \qquad \int \sqrt{4-x^2}\, dx.$$

Rezolvare. Avem

$\int x\mathrm{e}^x dx = \int x(\mathrm{e}^x)' dx = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x dx = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \mathcal{C}$

$\int \ln x\, dx = \int x' \ln x\, dx = x\ln x - \int x\,(\ln x)' dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + \mathcal{C}$

$\int \sqrt{4-x^2}\, dx = \int \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 4\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int x\, \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = 4 \text{ arcsin } \frac{x}{2} + \int x(\sqrt{4-x^2})' dx$

$= 4 \text{ arcsin } \frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} dx.$

Din ultima relaţie rezultă $\int \sqrt{4-x^2}\, dx = 2 \text{ arcsin } \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \mathcal{C}.$

5.1.13 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], x]`

`In[1]:=Integrate[x Exp[x], x]`	$\mapsto$	Out[1]=$\mathrm{e}^x(-1+x)$
`In[2]:=Integrate[Log[x], x]`	$\mapsto$	Out[2]=$-x+x\,\mathrm{Log}\,[x]$
`In[3]:=Integrate[Sqrt[4-x^2], x]`	$\mapsto$	Out[3]=$\frac{1}{2}\,x\,\sqrt{4-x^2}+2\,\mathrm{ArcSin}\left[\frac{x}{2}\right]$

5.1.14 Teoremă (Schimbarea de variabilă). *Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervale şi $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă $\varphi : I \longrightarrow J$ este derivabilă şi F este o primitivă a lui f atunci $I \to \mathbb{R} : x \mapsto (F\circ\varphi)(x) = F(\varphi(x))$ este o primitivă a funcţiei $I \to \mathbb{R} : x \mapsto f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$, adică*

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \left(\int f(t)\,dt\right)\circ\varphi.$$

Demonstraţie. Avem $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$

5.1.15 Exerciţiu. Să se calculeze integralele

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}, \qquad \int \sqrt{-x^2+6x-5}\,dx$$

Rezolvare. Avem (a se vedea exerciţiul anterior)

$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'dx = 2\left(\int \mathrm{e}^t dt\right)_{t=\sqrt{x}} = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathcal{C}.$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = 2\int \frac{1}{(\sqrt{x+1})^2-1}\,(\sqrt{x+1})'dx = \left(\int \frac{dt}{t^2-1}\right)_{t=\sqrt{x+1}} = \ln \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} + \mathcal{C}.$

$\int \sqrt{-x^2+6x-5}\,dx = \int \sqrt{4-(x-3)^2}\,(x-3)'dx$

$= \left(\int\sqrt{4-t^2}dt\right)_{t=x-3} = 2\,\arcsin\frac{x-3}{2} + \frac{x-3}{2}\sqrt{-x^2+6x-5} + \mathcal{C}.$

5.1.16 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], x]`

`In[1]:=Integrate[Exp[Sqrt[x]]/Sqrt[x], x]` $\mapsto$ Out[1]= $2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

`In[2]:=Integrate[1/(x Sqrt[x+1]), x]` $\mapsto$ Out[2]= $\mathrm{Log}\left[-1+\sqrt{1+x}\right]-\mathrm{Log}\left[1+\sqrt{1+x}\right]$

`In[3]:=Integrate[Sqrt[-x^2+6x-5], x]` $\mapsto$ Out[3]= $\frac{1}{2}(-3+x)\sqrt{-5+6x-x^2}+2\,\mathrm{ArcSin}\left[\frac{1}{2}(-3+x)\right]$

5.1.17 Teoremă *Fie I, J intervale şi $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, unde f este o funcţie continuă şi u este o funcţie de clasă C^1 bijectivă cu $u'(t)\neq 0$ oricare ar fi $t\in I$. Dacă G este o primitivă a funcţiei $I \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(u(t))\,u'(t)$ atunci $J \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto G(u^{-1}(x))$ este o primitivă a lui f, adică*

$$\int f(x)dx = G\circ u^{-1} + \mathcal{C}.$$

Demonstraţie. Utilizând teorema de derivare a funcţiei inverse (pag. 130-**1**) obţinem

$$(G\circ u^{-1})'(x) = G'(u^{-1}(x))\,(u^{-1})'(x) = f(u(u^{-1}(x)))\,u'(u^{-1}(x))\,\frac{1}{u'(u^{-1}(x))} = f(x).$$

5.1.18 Exerciţiu. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei

$$f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

Rezolvare. Funcţia $u : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$, $u(t) = t^2$ este bijectivă şi $u^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Deoarece

$$\int f(u(t))\,u'(t)\,dt = \int \frac{2t^2}{1+t}dt = 2\int \frac{(t^2-1)+1}{1+t}dt = t^2 - 2t + 2\ln(1+t) + \mathcal{C}$$

avem

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left(\int f(u(t))\,u'(t)\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + \mathcal{C}.$$

5.1.19 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], x]`

`In[1]:=Integrate[Sqrt[x]/(1+Sqrt[x]), x]` $\mapsto$ Out[1]= $-2\sqrt{x}+x+2\,\mathrm{Log}\left[1+\sqrt{x}\right]$

5.2 Integrala definită

5.2.1 Definiţie. Fie $[a,b]\subset\mathbb{R}$ un interval închis şi mărginit. Prin *diviziune* a intervalului $[a,b]$ se înţelege un sistem de puncte $\delta=\{x_0,\,x_1,\,\dots,x_n\}$ astfel încât

$$a=x_0<x_1<x_2<\,\dots\,<x_{n-1}<x_n=b.$$

Lungimea celui mai mare dintre intervalele $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\dots$, $[x_{n-1},x_n]$, adică

$$||\delta||=\max_{i=\overline{1,n}}\,(x_i-x_{i-1})$$

este numită *norma diviziunii* δ.

5.2.2 Exemplu. Punctele

$$x_0=a,\quad x_1=a+\frac{b-a}{n},\quad x_2=a+2\frac{b-a}{n},\quad \dots\quad,\ x_{n-1}=a+(n-1)\frac{b-a}{n},\quad x_n=b$$

formează o diviziune (echidistantă) δ cu norma $||\delta||=\frac{b-a}{n}$.

5.2.3 Definiţie. Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie, $\delta=\{x_0,\,x_1,\,\dots,x_n\}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ şi $\{\xi_i\}_{i=\overline{1,n}}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii cu

$$\xi_1\in[x_0,x_1],\qquad \xi_2\in[x_1,x_2],\quad \dots\quad \xi_n\in[x_{n-1},x_n].$$

Prin *sumă Riemann* asociată funcţiei f, diviziunii δ şi sistemului de puncte intermediare $\{\xi_i\}_{i=\overline{1,n}}$ se înţelege numărul

$$\sigma_\delta(f,\{\xi_i\})=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1}).$$

Figura 5.1

In cazul în care $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[a,b]$, numărul $\sigma_\delta(f,\{\xi_i\})$ reprezintă suma ariilor unor dreptunghiuri. Ea aproximează aria de sub grafic (a se vedea figura 5.1).

5.2.4 Definiţie. Spunem că funcţia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este *integrabilă* (Riemann) pe $[a,b]$ dacă există un număr $I_f\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon>0$ există $\nu>0$ astfel încât relaţia

$$|\sigma_\delta(f,\{\xi_i\})-I_f|<\varepsilon$$

are loc pentru orice diviziune δ cu $||\delta||<\nu$ şi pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare $\{\xi_i\}_{i=\overline{1,n}}$. Numărul I_f se numeşte *integrala* funcţiei f pe $[a,b]$ şi se utilizează pentru el notaţia $\int_a^b f(x)\,dx$.

5.2.5 Teoremă. *Funcţia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este integrabilă (Riemann) pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă există un număr $I\in\mathbb{R}$ astfel încât pentru orice şir de diviziuni $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $\lim_{n\to\infty}||\delta_n||=0$ şi pentru orice alegere a sistemelor de puncte intermediare asociate $\{\xi_i^n\}$ avem*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{\delta_n}(f,\{\xi_i^n\})=I.$$

In cazul în care f este integrabilă avem $I=\int_a^b f(x)\,dx$.

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Arătăm că pentru orice şir $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $\lim_{n\to\infty}||\delta_n||=0$ avem $\lim_{n\to\infty}\sigma_{\delta_n}(f,\{\xi_i^n\})=I_f$, oricare ar fi $\{\xi_i^n\}$. Fie $\varepsilon>0$. Conform ipotezei există $\nu>0$ astfel încât $|\sigma_\delta(f,\{\xi_i\})-I_f|<\varepsilon$ pentru orice diviziune δ cu $||\delta||<\nu$ şi orice $\{\xi_i\}_{i=\overline{1,n}}$. Deoarece $\lim_{n\to\infty}||\delta_n||=0$, există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $||\delta_n||<\nu$ pentru $n\geq n_\varepsilon$. Rezultă $|\sigma_{\delta_n}(f,\{\xi_i^n\})-I_f|<\varepsilon$, oricare ar fi $n\geq n_\varepsilon$. "$\Leftarrow$" Arătăm prin reducere la absurd că f este integrabilă şi $I_f=I$. Presupunând că $\int_a^b f(x)\,dx\neq I$, există $\varepsilon_0>0$ astfel încât pentru orice $\nu>0$ există o diviziune δ_ν şi un sistem de puncte intermediare $\{\xi_i^\nu\}$ cu $|\sigma_{\delta_\nu}(f,\{\xi_i^\nu\})-I|\geq\varepsilon_0$. In particular, alegând $\nu=\frac{1}{n}$ cu $n\in\mathbb{N}^*$ obţinem un şir de diviziuni $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $||\delta_n||<\frac{1}{n}$ şi $|\sigma_{\delta_n}(f,\{\xi_i^n\})-I|\geq\varepsilon_0$ pentru anumite sisteme de puncte $\{\xi_i^n\}$. Rezultă că $\lim_{n\to\infty}\sigma_{\delta_n}(f,\{\xi_i^n\})\neq I$ deşi $\lim_{n\to\infty}||\delta_n||=0$, în contradicţie cu ipoteza.

5.2.6 Propoziţie.

a) Dacă $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este integrabilă şi $\alpha\in\mathbb{R}$ atunci funcţia αf este integrabilă şi

$$\int_a^b(\alpha f)(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx.$$

b) Dacă $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sunt integrabile atunci funcţiile* $f \pm g$ *sunt integrabile şi*

$$\int_a^b (f \pm g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$$

Demonstraţie. Pentru orice $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ cu $\lim_{n\to\infty} ||\delta_n|| = 0$ şi orice $\{\xi_i^n\}$ avem

$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\delta_n}(\alpha f, \{\xi_i^n\}) = \alpha \lim_{n\to\infty} \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.$

$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\delta_n}(f \pm g, \{\xi_i^n\}) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\})$

$\pm \lim_{n\to\infty} \sigma_{\delta_n}(g, \{\xi_i^n\}) = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$

5.2.7 Se poate arăta că:

1) Dacă $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile atunci fg este funcţie integrabilă.

2) Dacă $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă atunci $|f| : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.

5.2.8 Propoziţie.

a) Dacă $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *este integrabilă şi* $f(x) \geq 0$ *oricare ar fi* $x \in [a,b]$ *atunci*

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

b) Dacă $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sunt integrabile şi* $f(x) \leq g(x)$ *oricare ar fi* $x \in [a,b]$ *atunci*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

c) Dacă funcţiile $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *şi* $|f| : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sunt integrabile atunci*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Demonstraţie. a) Fie $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} = (\{x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\})_{n=1}^{\infty}$ un şir de diviziuni astfel încât $\lim_{n\to\infty} ||\delta_n|| = 0$ şi $\{\xi_i^n\}$ puncte intermediare $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$. Avem

$$\sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n)\,(x_i^n - x_{i-1}^n) \geq 0 \implies \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) \geq 0.$$

b) Utilizând a) obţinem

$$f \leq g \implies g - f \geq 0 \implies \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b (g-f)(x)\, dx \geq 0.$$

c) Avem

$$-|f| \leq f \leq |f| \implies -\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

5.2.9 Definiţie. Spunem că $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este *mărginită* dacă există $M \in \mathbb{R}$ încât

$$|f(x)| \leq M, \qquad \text{oricare ar fi} \quad x \in [a,b].$$

In caz contrar spunem că f este *nemărginită*.

5.2.10 Propoziţie. *Dacă funcţia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este nemărginită atunci există un şir $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ în $[a,b]$ astfel încât*

$$\lim_{k\to\infty} f(\alpha_k)=-\infty \qquad \textit{sau} \qquad \lim_{k\to\infty} f(\alpha_k)=\infty.$$

Demonstraţie. Oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$ există $x_n\in[a,b]$ astfel încât $|f(x_n)|\geq n$. Cel puţin una dintre mulţimile $\{x_n\ |n\in\mathbb{N},\ \ f(x_n)\geq n\}$ şi $\{x_n\ |n\in\mathbb{N},\ \ f(x_n)\leq -n\}$ este infinită şi elementele ei corespund unui subşir $(\alpha_k)_{n\geq 0}$ al lui $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $\lim_{k\to\infty} f(\alpha_k)=\pm\infty$.

5.2.11 Teoremă. *Dacă funcţia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este integrabilă atunci este mărginită.*

Demonstraţie. Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie nemărginită superior şi $\delta=\{x_0,\,x_1,\,\dots,x_m\}$ o diviziune a lui $[a,b]$. Există un şir $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ în $[a,b]$ astfel încât $\lim_{k\to\infty} f(\alpha_k)=\infty$. Cel puţin unul dintre intervalele $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ... , $[x_{n-1},x_n]$ conţine un număr infinit de termeni ai şirului $(\alpha_k)_{n\geq 0}$. Fie $[x_{j-1},x_j]$ un astfel de interval. Există un şir $(\xi_j^n)_{n\geq 0}$ în $[x_{j-1},x_j]$ cu $\lim_{n\to\infty} f(\xi_j^n)(x_j-x_{j-1})=\infty$. Valoarea unei sume Riemann $\sigma_\delta(f,\{\xi_i\})=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})$ asociate diviziunii δ poate fi făcută oricât de mare modificând convenabil alegerea lui ξ_j. O relaţie de tipul $|\sigma_\delta(f,\{\xi_i\})-I_f|<\varepsilon$ nu poate avea loc pentru orice alegere a punctelor intermediare $\{\xi_i\}$.

5.2.12 Propoziţie. *Dacă $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă atunci*

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

unde $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ şi $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

Demonstraţie. Funcţia integrabilă f fiind mărginită, există marginile m şi M cu

$$m\leq f(x)\leq M, \qquad \text{oricare ar fi}\ \ x\in[a,b].$$

şi prin urmare (a se vedea pag. 139-**8**)

$$m(b-a)=\int_a^b m\,dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b M\,dx=M(b-a).$$

5.2.13 Definiţie. Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi $\delta=\{x_0,\,x_1,\,\dots,x_n\}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Sumele (a se vedea figura 5.2)

$$s_\delta(f)=\sum_{i=1}^n m_i\,(x_i-x_{i-1}) \qquad \text{unde} \qquad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

şi

$$S_\delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{unde} \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

se numesc *suma Darboux inferioară* şi respectiv, *suma Darboux superioară*.

Figura 5.2

5.2.14 Propoziţie. *Dacă* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *este o funcţie mărginită şi* δ *o diviziune a intervalului* $[a,b]$ *atunci* $s_\delta(f)\le\sigma_\delta(f,\{\xi_i\})\le S_\delta(f)$, *oricare ar fi punctele* $\{\xi_i\}$.

Demonstraţie. Dacă $\delta=\{x_0,\,\dots,x_n\}$ avem $m_i\le f(\xi_i)\le M_i$ pentru orice $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$.

5.2.15 Propoziţie. *Dacă* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *este o funcţie mărginită şi* δ *o diviziune fixată atunci*

$$s_\delta(f)=\inf_{\{\xi_i\}}\sigma_\delta(f,\{\xi_i\}) \qquad\qquad S_\delta(f)=\sup_{\{\xi_i\}}\sigma_\delta(f,\{\xi_i\})$$

unde marginea inferioară şi cea superioară se consideră pentru toate alegerile posibile ale punctelor intermediere ξ_i.

Demonstraţie. Fie $\delta=\{x_0,\,x_1,\,\dots,x_n\}$ şi $\varepsilon>0$. Alegând pentru fiecare $i\in\{1,2,...,n\}$ un punct ξ_i cu $f(\xi_i)-m_i<\frac{\varepsilon}{b-a}$ (a se vedea pag. 26-**30**) avem

$$\sigma_\delta(f,\{\xi_i\})-s_\delta(f)=\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)-m_i)\,(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\varepsilon$$

adică $s_\delta(f)\le\sigma_\delta(f,\{\xi_i\})<s_\delta(f)+\varepsilon$. A doua relaţie se poate dovedi similar.

5.2.16 Teoremă. *Dacă $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă atunci pentru orice şir de diviziuni $(\delta_n)_{n\geq 0}$ ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim_{n\to\infty} \| \delta_n \| = 0$ avem*

$$\lim_{n\to\infty} s_{\delta_n}(f) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_{\delta_n}(f).$$

Demonstraţie. Fie $I_f = \int_a^b f(x)dx$ şi $\varepsilon > 0$. Funcţia f fiind integrabilă, există $\nu > 0$ astfel încât pentru orice diviziune δ cu $\| \delta \| \leq \nu$ avem $|\sigma_\delta(f, \{\xi_i\}) - I_f| < \varepsilon$ pentru orice alegere a punctelor ξ_i. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \| \delta_n \| = 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\| \delta_n \| < \nu$ şi prin urmare $|\sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i\}) - I_f| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice alegere a punctelor ξ_i. Ţinând seama de rezultatul prezentat la pag. 26-**30** şi propoziţia anterioară deducem că $|s_{\delta_n}(f) - I_f| \leq \varepsilon$ şi $|S_{\delta_n}(f) - I_f| \leq \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

5.2.17 Propoziţie. *Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi $\delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\delta' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_m\}$ două diviziuni ale intervalului $[a, b]$. Dacă $\delta \subset \delta'$, atunci*

$$s_\delta(f) \leq s_{\delta'}(f) \leq S_{\delta'}(f) \leq S_\delta(f)$$

Demonstraţie. Diviziunea δ' se obţine din δ prin adăugarea de noi puncte de diviziune. Este suficient să analizăm cazul în care δ' conţine un singur punct suplimentar $y \in (x_{j-1}, x_j)$, adică $\delta' = \delta \cup \{y\} = \{x_0, \ldots, x_{j-1}, y, x_j, \ldots, x_n\}$. Avem

$$\begin{aligned} s_\delta(f) &= \textstyle\sum_{i\neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \textstyle\sum_{i\neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(y - x_{j-1}) + m_j(x_j - y) \\ &\leq \textstyle\sum_{i\neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) + \inf_{x\in[x_{i-1}, y]} f(x)\ (y - x_{j-1}) \\ &\qquad + \inf_{x\in[y, x_i]} f(x)\ (x_j - y) = s_{\delta'}(f). \end{aligned}$$

Inegalitatea $S_{\delta'}(f) \leq S_\delta(f)$ se poate obţine asemănător.

5.2.18 Propoziţie. *Dacă $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită atunci*

$$m(b - a) \leq s_\delta(f) \leq S_{\delta'}(f) \leq M(b - a) \tag{5.1}$$

unde $m = inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = sup_{x\in[a,b]} f(x)$, oricare ar fi diviziunile δ şi δ'.

Demonstraţie. Fie $\delta_0 = \{a, b\}$ şi $\tilde{\delta} = \delta \cup \delta'$. Deoarece $\delta_0 \subset \delta \subset \tilde{\delta}$ şi $\delta_0 \subset \delta' \subset \tilde{\delta}$ avem

$$s_{\delta_0}(f) \leq s_\delta(f) \leq s_{\tilde{\delta}}(f) \leq S_{\tilde{\delta}}(f) \leq S_{\delta'}(f) \leq S_{\delta_0}(f).$$

5.2.19 Din relaţia (5.1) rezultă

$$m(b-a) \leq \sup_\delta s_\delta(f) \leq \inf_\delta S_\delta(f) \leq M(b-a).$$

Numerele

$$\underline{I} = \sup_{\delta} s_\delta(f) \qquad \bar{I} = \inf_{\delta} S_\delta(f)$$

se numesc *integrala Darboux inferioară* şi respectiv, *integrala Darboux superioară.* Pentru orice diviziune δ are loc relaţia

$$s_\delta(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_\delta(f).$$

5.2.20 Lemă *Dacă $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită astfel încât pentru orice şir de diviziuni $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $\lim_{n\to\infty} ||\delta_n|| = 0$ avem*

$$\lim_{n\to\infty} (S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f)) = 0$$

atunci există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice şir $\delta_1 \subset \delta_2 \subset ...$ cu $\lim_{n\to\infty} ||\delta_n|| = 0$ avem

$$\lim_{n\to\infty} s_{\delta_n}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{\delta_n}(f) = I.$$

Demonstraţie. Dacă $\delta_1 \subset \delta_2 \subset ...$ atunci $s_{\delta_1}(f) \leq s_{\delta_2}(f) \leq ...$ şi $S_{\delta_1}(f) \geq S_{\delta_2}(f) \geq ...$. Orice şir monoton şi mărginit de numere reale fiind convergent, există $I \in \mathbb{R}$ cu

$$\lim_{n\to\infty} s_{\delta_n}(f) = I = \lim_{n\to\infty} S_{\delta_n}(f).$$

Dacă $\delta'_1 \subset \delta'_2 \subset ...$ este un alt sir de diviziuni cu $\lim_{n\to\infty} ||\delta'_n|| = 0$ există $I' \in \mathbb{R}$ cu

$$\lim_{n\to\infty} s_{\delta'_n}(f) = I' = \lim_{n\to\infty} S_{\delta'_n}(f).$$

Deoarece $(\delta_n \cup \delta'_n)_{n\geq 1}$ are proprietăţile $\delta_1 \cup \delta'_1 \subset \delta_2 \cup \delta'_2 \subset ...$, $\lim_{n\to\infty} ||\delta_n \cup \delta'_n|| = 0$ şi

$$s_{\delta_n}(f) \leq s_{\delta_n \cup \delta'_n}(f) \leq S_{\delta_n}(f) \qquad s_{\delta'_n}(f) \leq s_{\delta_n \cup \delta'_n}(f) \leq S_{\delta'_n}(f)$$

rezultă $I' = I$. In particular, avem $s_{\delta_n}(f) \leq I \leq S_{\delta_n}(f)$ pentru orice $n \geq 1$.

5.2.21 Teoremă (Criteriul lui Darboux). *Funcţia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă dacă şi numai dacă este mărginită şi pentru orice şir de diviziuni $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $\lim_{n\to\infty} ||\delta_n|| = 0$ avem*

$$\lim_{n\to\infty} (S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f)) = 0.$$

In cazul în care f este integrabilă

$$\lim_{n\to\infty} s_{\delta_n}(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_{\delta_n}(f)\,.$$

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" A se vedea pag. 142-**16**. "$\Leftarrow$" Utilizăm lema precedentă. Fie $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ un şir de diviziuni cu $\lim_{n\to\infty} ||\delta_n|| = 0$ şi fie $\tilde{\delta}_n = \bigcup_{k=1}^n \delta_k$ pentru orice $n \geq 1$. Deoarece $\tilde{\delta}_1 \subset \tilde{\delta}_2 \subset ...$, $\lim_{n\to\infty} ||\tilde{\delta}_n|| = 0$ şi $s_{\delta_n}(f) \leq s_{\tilde{\delta}_n}(f) \leq I \leq S_{\tilde{\delta}_n}(f) \leq S_{\delta_n}(f)$ avem

$$0 \le S_{\delta_n}(f)-I \le S_{\delta_n}(f)-s_{\delta_n}(f) \qquad 0 \le I-s_{\delta_n}(f) \le S_{\delta_n}(f)-s_{\delta_n}(f).$$

Rezultă $\lim_{n\to\infty} S_{\delta_n}(f) = \lim_{n\to\infty} s_{\delta_n}(f) = I$. Dar $s_{\delta_n}(f) \le \sigma_{\delta_n}(f,\{\xi_i\}) \le S_{\delta_n}(f)$ şi prin urmare $\lim_{n\to\infty} \sigma_{\delta_n}(f,\{\xi_i\}) = I$.

5.2.22 Teoremă *Dacă $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este funcţie integrabilă şi $c\in(a,b)$, atunci restricţiile funcţiei f la intervalele $[a,c]$ şi $[c,b]$ sunt integrabile şi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Demonstraţie. Utilizăm criteriul lui Darboux. Fie $(\delta_n')_{n=1}^\infty$ un şir de diviziuni ale intervalului $[a,c]$ cu $\lim_{n\to\infty}||\delta_n'||=0$, $s_{\delta_n'}(f)$, $S_{\delta_n'}(f)$ sumele Darboux corespunzătoare restricţiei $f|_{[a,c]}$ şi fie $(\delta_n'')_{n=1}^\infty$ un şir de diviziuni ale intervalului $[c,b]$ cu $\lim_{n\to\infty}||\delta_n''||=0$, $s_{\delta_n''}(f)$, $S_{\delta_n''}(f)$ sumele Darboux corespunzătoare restricţiei $f|_{[c,b]}$. Şirul $(\delta_n)_{n=1}^\infty$, unde $\delta_n=\delta_n'\cup\delta_n''$, fiind un şir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu $\lim_{n\to\infty}||\delta_n||=0$ avem $\lim_{n\to\infty}(S_{\delta_n}(f)-s_{\delta_n}(f))=0$. Din

$$S_{\delta_n'}(f)-s_{\delta_n'}(f)+S_{\delta_n''}(f)-s_{\delta_n''}(f) = S_{\delta_n}(f)-s_{\delta_n}(f)$$

rezultă relaţiile

$$0\le S_{\delta_n'}(f)-s_{\delta_n'}(f)\le S_{\delta_n}(f)-s_{\delta_n}(f) \qquad 0\le S_{\delta_n''}(f)-s_{\delta_n''}(f)\le S_{\delta_n}(f)-s_{\delta_n}(f)$$

care conduc la $\lim_{n\to\infty}\left(S_{\delta_n'}(f)-s_{\delta_n'}(f)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(S_{\delta_n''}(f)-s_{\delta_n''}(f)\right)=0$, relaţie din care rezultă că funcţiile $f|_{[a,c]}$ şi $f|_{[c,b]}$ sunt integrabile. Egalitatea din enunţ se obţine din $S_{\delta_n}(f)=S_{\delta_n'}(f)+S_{\delta_n''}(f)$ prin trecere la limită.

5.2.23 Teoremă *Dacă pentru $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ există $c\in(a,b)$ astfel încât restricţiile funcţiei f la $[a,c]$ şi $[c,b]$ sunt integrabile, atunci funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$.*

Demonstraţie. Utilizăm criteriul lui Darboux. Funcţia f este mărginită. Fie $(\delta_n)_{n=0}^\infty$ un şir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu $\lim_{n\to\infty}||\delta_n||=0$ şi fie $\tilde{\delta}_n=\delta_n\cup\{c\}$. Şirul $(\tilde{\delta}_n')_{n=0}^\infty$, unde $\tilde{\delta}_n'=\tilde{\delta}_n\cap[a,c]$, este o diviziune a intervalului $[a,c]$ iar şirul $(\tilde{\delta}_n'')_{n=0}^\infty$, unde $\tilde{\delta}_n''=\tilde{\delta}_n\cap[c,b]$, este o diviziune a intervalului $[c,b]$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} s_{\tilde{\delta}_n'}(f)=\int_a^c f(x)dx=\lim_{n\to\infty} S_{\tilde{\delta}_n'}(f) \qquad \lim_{n\to\infty} s_{\tilde{\delta}_n''}(f)=\int_c^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty} S_{\tilde{\delta}_n''}(f).$$

Deoarece $s_{\tilde{\delta}_n}(f)=s_{\tilde{\delta}_n'}(f)+s_{\tilde{\delta}_n''}(f)$ şi $S_{\tilde{\delta}_n}(f)=S_{\tilde{\delta}_n'}(f)+S_{\tilde{\delta}_n''}(f)$ avem

$$\lim_{n\to\infty} s_{\tilde{\delta}_n}(f)=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty} S_{\tilde{\delta}_n}(f)$$

şi prin urmare, $\lim_{n\to\infty}(S_{\tilde{\delta}_n}(f)-s_{\tilde{\delta}_n}(f))=0$. Notând $M=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ avem

$$|s_{\tilde{\delta}_n}(f)-s_{\delta_n}(f)|\leq 2M\ \|\delta_n\| \qquad |S_{\tilde{\delta}_n}(f)-S_{\delta_n}(f)|\leq 2M\ \|\delta_n\|\ .$$

Rezultă relaţiile $\lim_{n\to\infty}s_{\delta_n}(f)=\lim_{n\to\infty}s_{\tilde{\delta}_n}(f)$ şi $\lim_{n\to\infty}S_{\delta_n}(f)=\lim_{n\to\infty}S_{\tilde{\delta}_n}(f)$ care conduc la $\lim_{n\to\infty}(S_{\delta_n}(f)-s_{\delta_n}(f))=0$.

5.2.24 Teoremă. *Orice funcţie monotonă $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este integrabilă.*

Demonstraţie. Utilizăm criteriul lui Darboux. Fie $(\delta_n)_{n=0}^{\infty}$, unde $\delta_n=\{x_0^n,\ \ldots\ ,x_{k_n}^n\}$, un şir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu $\lim_{n\to\infty}||\delta_n||=0$. Dacă f este crescătoare atunci este mărginită şi avem relaţia

$$\begin{aligned}0\leq S_{\delta_n}(f)-s_{\delta_n}(f)&=\textstyle\sum_{i=1}^{k_n}(f(x_i^n)-f(x_{i-1}^n))(x_i^n-x_{i-1}^n)\\ &\leq\|\delta_n\|\textstyle\sum_{i=1}^{k_n}(f(x_i^n)-f(x_{i-1}^n))=\|\delta_n\|\ (f(b)-f(a))\end{aligned}$$

din care rezultă $\lim_{n\to\infty}(S_{\delta_n}(f)-s_{\delta_n}(f))=0$.

5.2.25 Teoremă. *Orice funcţie continuă $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este integrabilă.*

Demonstraţie. Utilizăm criteriul lui Darboux. Fie $(\delta_n)_{n=0}^{\infty}$, unde $\delta_n=\{x_0^n,\ \ldots\ ,x_{k_n}^n\}$, un şir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu $\lim_{n\to\infty}\|\ \delta_n\ \|=0$ şi fie $\varepsilon>0$. Funcţia f fiind continuă pe mulţimea compactă $[a,b]$ este uniform continuă (a se vedea pag. 79-**11**). Există $\eta>0$ astfel încât $|x-x'|<\eta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. Deoarece $\lim_{n\to\infty}\|\ \delta_n\ \|=0$ există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $\|\ \delta_n\ \|<\eta$ pentru $n\geq n_\varepsilon$. Funcţia f îşi atinge extremele pe fiecare interval $[x_{i-1}^n,x_i^n]$. Dacă $n\geq n_\varepsilon$ atunci

$$\begin{aligned}0\leq S_{\delta_n}(f)-s_{\delta_n}(f)&=\textstyle\sum_{i=1}^{k_n}\left(\max_{x\in[x_{i-1}^n,x_i^n]}f(x)-\min_{x\in[x_{i-1}^n,x_i^n]}f(x)\right)(x_i^n-x_{i-1}^n)\\ &\leq\tfrac{\varepsilon}{b-a}\textstyle\sum_{i=1}^{k_n}(x_i^n-x_{i-1}^n)=\tfrac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a)=\varepsilon\end{aligned}$$

şi prin urmare $\lim_{n\to\infty}(S_{\delta_n}(f)-s_{\delta_n}(f))=0$.

5.2.26 Propoziţie. *Dacă $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este continuă pe (a,b) şi limitele laterale*

$$l_a=\lim_{x\searrow a}f(x)\,,\qquad l_b=\lim_{x\nearrow b}f(x)$$

există şi sunt finite atunci f este integrabilă pe $[a,b]$.

Demonstraţie. Funcţia f este integrabilă deoarece este suma a trei funcţii integrabile

$$f=\tilde{f}+g+h$$

unde $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este funcţia continuă

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} l_a & \text{daca} \quad x=a\\ f(x) & \text{daca} \quad x\in(a,b)\\ l_b & \text{daca} \quad x=b\end{cases}$$

iar $g,h:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ sunt funcţiile monotone

$$g(x)=\begin{cases} f(a)-l_a & \text{daca} \quad x=a\\ 0 & \text{daca} \quad x\in(a,b]\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 0 & \text{daca} \quad x\in[a,b)\\ f(b)-l_b & \text{daca} \quad x=b.\end{cases}$$

5.2.27 Definiţie. Un punct $c\in(a,b)$ în care funcţia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este discontinuă este numit *punct de discontinuitate de prima speţă* dacă limitele laterale $\lim_{x\nearrow c}f(x)$, $\lim_{x\searrow c}f(x)$ există şi sunt finite.

5.2.28 Teoremă. *O funcţie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continuă cu excepţia unui număr finit de puncte unde are discontinuităţi de prima speţă este integrabilă.*

Demonstraţie (Cazul a două puncte de discontinuitate). Fie x_1, x_2 punctele de discontinuitate, $a<x_1<x_2<b$. Conform propoziţiei anterioare f este integrabilă pe $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$ şi $[x_2,b]$. Funcţia f fiind integrabilă pe $[a,x_1]$ şi $[x_1,x_2]$ este integrabilă pe $[a,x_2]$ (a se vedea pag. 144-**23**). Similar, f fiind integrabilă pe $[a,x_2]$ şi $[x_2,b]$ este integrabilă pe $[a,b]$ (a se vedea pag. 144-**23**).

5.2.29 Dacă $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este integrabilă şi dacă $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este o funcţie care diferă de f într-un număr finit de puncte atunci se poate arăta că g este integrabilă şi

$$\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

5.2.30 Teoremă (Teorema de medie).

Dacă $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este continuă atunci există $\xi\in[a,b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)\,(b-a).$$

Demonstraţie. Funcţia f fiind continuă pe $[a,b]$, este mărginită şi îşi atinge marginile, adică există $u,v\in[a,b]$ astfel încât

$$m=\min_{x\in[a,b]}f(x)=f(u) \qquad M=\max_{x\in[a,b]}f(x)=f(v).$$

Relaţia (a se vedea pag. 140-**12**)

$$m\,(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M\,(b-a)$$

se mai poate scrie

$$f(u) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le f(v).$$

Funcţia continuă f având proprietatea lui Darboux, există ξ între u şi v astfel încât

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

5.2.31 Teoremă (Primitivele unei funcţii continue definite pe un interval).
Dacă $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este continuă atunci pentru orice $c\in[a,b]$ funcţia

$$F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\qquad F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$$

este o primitivă a lui f

$$F'(x)=f(x),\quad oricare\ ar\ fi\quad x\in[a,b]$$

adică avem

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt=f(x),\quad oricare\ ar\ fi\quad x\in[a,b].$$

Demonstraţie. Fie $x_0\in[a,b]$. Conform definiţiei derivatei

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_c^x f(t)\,dt-\int_c^{x_0}f(t)\,dt}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x-x_0}.$$

Pentru fiecare $x\neq x_0$ există conform teoremei de medie ξ_x între x_0 şi x astfel încât

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt=f(\xi_x)\,(x-x_0)$$

şi prin urmare

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(\xi_x)\,(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f(\xi_x)=f(x_0).$$

5.2.32 Teoremă (Formula Leibniz-Newton).
Dacă funcţia integrabilă $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ admite primitive atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a)$$

unde $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ este o primitivă arbitrară a lui f.

Demonstraţie. Fie $\delta_n=\{x_0^n,\,x_1^n,\,\dots,x_{k_n}^n\}$ un şir de diviziuni cu $\lim_{n\to\infty}||\delta_n||=0$. Conform teoremei lui Lagrange (pag. 93-**25**) există $\xi_i^n\in(x_{i-1}^n,x_i^n)$ astfel încât

$$F(x_i^n)-F(x_{i-1}^n)=F'(\xi_i^n)\,(x_i^n-x_{i-1}^n)=f(\xi_i^n)\,(x_i^n-x_{i-1}^n).$$

Utilizând ξ_i^n drept puncte intermediare pentru sumele Riemann obţinem

$$\sigma_{\delta_n}(f,\{\xi_i^n\}) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n)\,(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{k_n}(F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)) = F(b) - F(a)$$

şi prin urmare (a se vedea pag. 138-**5**)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\delta_n}(f,\{\xi_i^n\}) = F(b) - F(a).$$

5.2.33 Teoremă (Formula de integrare prin părţi).

Dacă funcţiile $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt de clasă C^1 pe intervalul I atunci

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

oricare ar fi $a, b \in I$.

Demonstraţie. Utilizând formula Leibniz-Newton obţinem

$$\begin{aligned} f(x)\,g(x)\big|_a^b &= \int_a^b (f\cdot g)'(x)\,dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx \\ &= \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

5.2.34 Exerciţiu. Să se calculeze integralele

$$\int_0^\pi x\,\cos x\,dx \qquad \int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,dx \qquad \int_0^{\pi/4} x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx.$$

Rezolvare. Utilizând integrarea prin părţi obţinem

$$\int_0^\pi x\,\cos x\,dx = \int_0^\pi x\,(\sin x)'\,dx = x\,(\sin x)\big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = \cos x\big|_0^\pi = -1-1 = -2$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,dx &= \int_0^1 x^2\,(\mathrm{e}^x)'\,dx = x^2\,\mathrm{e}^x\big|_0^1 - 2\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e} - 2\int_0^1 x\,(\mathrm{e}^x)'\,dx \\ &= \mathrm{e} - 2x\,\mathrm{e}^x\big|_0^1 + 2\int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx = -\mathrm{e} + 2\,\mathrm{e}^x\big|_0^1 = \mathrm{e} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx &= \int_0^{\pi/4} x\,(\mathrm{tg}^2 x + 1)\,dx - \int_0^{\pi/4} x\,dx = \int_0^{\pi/4} x\,(\mathrm{tg}\,x)'\,dx - \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi/4} \\ &= x\,\mathrm{tg}\,x\big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}\,x\,dx - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + (\ln|\cos x|)\big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

5.2.35 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], {x, a, b}]` `NIntegrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=Integrate[x Cos[x], {x, 0, Pi}]` $\longmapsto$ Out[1]=−2

`In[2]:=Integrate[x^2 Exp[x], {x, 0, 1}]` $\longmapsto$ Out[2]=−2+e

`In[3]:=Integrate[x Tan[x]^2, {x, 0, Pi/4}]` $\longmapsto$ Out[3]=$\frac{1}{32}\left(8\pi-\pi^2-16\,\mathrm{Log}[2]\right)$

`In[4]:=NIntegrate[Sin[Sin[x]], {x, 0, 2}]` $\longmapsto$ Out[4]=1.24706

5.2.36 Teoremă (Prima metodă de schimbare de variabilă).

Fie funcţiile $[a,b] \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, *unde* $J \subset \mathbb{R}$ *este un interval.*

Dacă f *este continuă şi* φ *este derivabilă cu derivata continuă atunci*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Demonstraţie. Dacă $F' = f$ atunci $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ şi

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = (F \circ \varphi)(t)|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

5.2.37 Exerciţiu. Să se calculeze integralele

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt \qquad \int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt \qquad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x+\sqrt{x}}\,dx.$$

Rezolvare. Utilizând schimbarea de variabilă obţinem

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt = 2\int_1^4 e^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})'\,dt = 2\int_1^2 e^x\,dx = 2e^x|_1^2 = 2(e^2 - e)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt = 2\int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\,(\sqrt{t})'\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{x+1}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,dx$$

$$= 2(x - \ln(1+x))|_1^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2 + \ln 4 - 2\ln(1+\sqrt{2})$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t + \sin t}\,(\sin^2 t)'\,dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t + 1}\,dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin t)\,dt$$

$$= 2(t + \cos t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}.$$

5.2.38 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=Integrate[Exp[Sqrt[t]]/Sqrt[t], {t, 1, 4}]` $\mapsto$ Out[1]=$2(-1+e)\,e$

`In[2]:=Integrate[1/(1 + Sqrt[t]), {t, 1, 2}]` $\mapsto$ Out[2]=$-2+2\sqrt{2}+\mathrm{Log}[4]-2\,\mathrm{Log}[1+\sqrt{2}]$

`In[3]:=Integrate[Sqrt[1-x]/(x+Sqrt[x]), {x, 1/2, 1}]` $\mapsto$ Out[3]=$\frac{1}{2}(-2\sqrt{2}+\pi)$

5.2.39 Teoremă (A doua metodă de schimbare de variabilă).

Fie $[a,b] \xrightarrow{u} [c,d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *două funcţii. Dacă* f *este continuă,* u *este bijectivă,* u *şi* u^{-1} *sunt derivabile cu derivate continue atunci*

$$\int_a^b f(u(t))\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\;(u^{-1})'(x)\,dx.$$

Demonstraţie. Funcţia $f \circ u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă şi deci admite primitive. Dacă $P' = f \circ u$, adică $P'(t) = f(u(t))$, atunci $P \circ u^{-1}$ este o primitivă a funcţiei $f \cdot (u^{-1})'$

$$(P \circ u^{-1})'(x) = P'(u^{-1}(x))\;(u^{-1})'(x) = f(u(u^{-1}(x)))\;(u^{-1})'(x) = f(x)\;(u^{-1})'(x)$$

şi prin urmare

$$\int_a^b f(u(t))\,dt = P(t)|_a^b = P(b)-P(a) = P\circ u^{-1}(x)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\ (u^{-1})'(x)\,dx.$$

5.2.40 Exerciţiu. Să se calculeze integrala

$$\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{t}}\,dt$$

Rezolvare. Aplicaţia $u:[1,4]\to[2,3]$, $u(t)=1+\sqrt{t}$ este bijectivă, $u^{-1}(x)=(1-x)^2$ şi

$$\textstyle\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{t}}\,dt = 2\int_2^3 \sqrt{x}\,(x-1)\,dx = 2\int_2^3 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{8}{15}\left(6\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

5.2.41 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=Integrate[Sqrt[1+Sqrt[t]], {t, 1, 4}]` $\mapsto$ Out[1]= $-\frac{8}{15}\left(\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right)$

5.3 Integrale improprii

5.3.1 In cazul integralelor definite considerate in liceu intervalul de integrare era mărginit şi se ştie că pentru ca o funcţie să fie integrabilă trebuie să fie mărginită. Vom arăta că noţiunea de integrală se poate extinde pentru a include şi cazul în care intervalul de integrare este nemărginit şi/sau funcţia integrată este nemărginită.

5.3.2 In cazul unei serii definim

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty}\sum_{n=m}^{k} a_n\,, \qquad \sum_{n=-\infty}^{k} := \lim_{m\to-\infty}\sum_{n=m}^{k} a_n$$

dacă limita există şi este finită, adică dacă seria este *convergentă* . Prin analogie definim *integralele improprii* (de prima speţă)

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

dacă limita există şi este finită, adică dacă integrala improprie este *convergentă* (C). O integrală improprie neconvergentă este numită *divergentă* (D). Prin analogie cu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \lim_{\substack{m\to-\infty\\ k\to\infty}}\sum_{n=m}^{k} a_n \qquad \text{definim} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$$

în cazul în care limita există şi este finită, adică integrala improprie este *convergentă*.

5.3.3 Exemplu (a se vedea figura 5.3)

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(-\mathrm{e}^{-x})|_0^b = \lim_{b\to\infty}(-\mathrm{e}^{-b}+1) = 1.$$

Figura 5.3

5.3.4 Exemplu (a se vedea figura 5.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Figura 5.4

5.3.5 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=Integrate[Exp[-x], {x, 0, Infinity}]` $\mapsto$ Out[1]=1

`In[2]:=Integrate[1/(1+x^2), {x, -Infinity, Infinity}]` $\mapsto$ Out[2]=π

5.3.6 Ştim că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} \quad \text{este} \quad \begin{cases} \text{convergenta} & \text{daca} \quad \lambda > 1 \\ \text{divergenta} & \text{daca} \quad \lambda \leq 1\,. \end{cases}$$

Fie $a > 0$ fixat. Deoarece pentru $\lambda \neq 1$

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^\lambda}\, dx = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{b^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \begin{cases} \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1} & \text{daca} \quad \lambda > 1 \\ \infty & \text{daca} \quad \lambda < 1\,. \end{cases}$$

şi

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln a) = \infty$$

rezultă că *integrala improprie*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\lambda}\,dx \quad \textit{este} \quad \begin{cases} \textit{convergenta} & \textit{daca} \quad \lambda > 1 \\ \textit{divergenta} & \textit{daca} \quad \lambda \le 1\,. \end{cases}$$

5.3.7 MATHEMATICA: `NIntegrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=NIntegrate[1/x^2, {x, 1, Infinity}]` $\mapsto$ Out[1]=1

5.3.8 O serie $\sum_{k=0}^\infty a_k$ este numită absolut convergentă dacă seria $\sum_{k=0}^\infty |a_k|$ este convergentă. Se ştie că orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă şi că, în general, este mai uşor de studiat absolut convergenţa unei serii decât direct convergenţa ei. Spunem că integrala improprie

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

este *absolut convergenta* (AC) dacă integrala

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

este convergentă.

5.3.9 Teoremă *Orice integrală improprie absolut convergentă este convergentă.*

5.3.10 *Criteriul comparaţiei.* Dacă pentru seriile $\sum_{n=0}^\infty a_n$ şi $\sum_{n=0}^\infty b_n$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $0 \le a_n \le b_n$ oricare ar fi $n \ge n_0$ atunci

$$\sum_{n=0}^\infty b_n \text{ C} \implies \sum_{n=0}^\infty a_n \text{ C} \qquad\qquad \sum_{n=0}^\infty a_n \text{ D} \implies \sum_{n=0}^\infty b_n \text{ D.}$$

Similar, dacă pentru funcţiile continue $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ există $b \ge a$ astfel încât $0 \le f(x) \le g(x)$, oricare ar fi $x \in [b,\infty)$ atunci

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ C} \implies \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ C} \qquad\qquad \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ D} \implies \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ D.}$$

5.3.11 Exerciţiu. Să se arate că integrala

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}dx$$

este convergentă.

Rezolvare. Convergenţa integralei rezultă din relaţia $\mathrm{e}^{-x^2} \le \mathrm{e}^{-x}$ care are loc oricare ar fi $x \in [1,\infty)$ şi din convergenţa integralei $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x}dx$.

5.3.12 Exerciţiu. Să se arate că integrala

$$\int_a^\infty x^\lambda \, \mathrm{e}^{-x} \, dx$$

unde $a > 0$, este convergentă oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Fie n un număr natural astfel încât $n > \lambda+1$. Afirmaţia rezultă din relaţia

$$x^\lambda \, \mathrm{e}^{-x} = \frac{x^\lambda}{\mathrm{e}^x} = \frac{x^\lambda}{1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n} < \frac{x^\lambda}{\frac{1}{n!}x^n} = \frac{n!}{x^{n-\lambda}}$$

adevărată oricare ar fi $x > 0$ şi din convergenţa integralei $\int_a^\infty \frac{1}{x^{n-\lambda}} \, dx$.

5.3.13 Exerciţiu. Fie $P(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n$, $Q(x) = \beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \cdots + \beta_m$ polinoame cu coeficienţi reali şi fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $Q(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \geq a$. Integrala improprie

$$\int_a^\infty \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n}{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \cdots + \beta_m} \, dx \qquad \text{este convergenta daca } \ m > n+1.$$

Rezolvare. Funcţia $f(x) = x^{m-n} \frac{P(x)}{Q(x)}$ este mărginită deoarece $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$. Rezultă că există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$ oricare ar fi $x \in [a, \infty)$ şi prin urmare

$$\left| \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n}{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \cdots + \beta_m} \right| \leq M \, \frac{1}{x^{m-n}}.$$

5.3.14 Teoremă. *Dacă funcţiile continue* $f, g : [a, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ *sunt astfel încât limita* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *este finită şi nenulă atunci integralele improprii*

$$\int_a^\infty f(x) \, dx \qquad \text{si} \qquad \int_a^\infty g(x) \, dx$$

au aceeşi natură (sunt ambele convergente sau ambele divergente).

Demonstraţie. Fie $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$. Din definiţia limitei rezultă că există $b > a$ astfel încât

$$\frac{1}{2}\lambda < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}\lambda, \qquad \text{oricare ar fi } \ x \in (b, \infty)$$

adică

$$\frac{1}{2}\lambda \, g(x) < f(x) < \frac{3}{2}\lambda \, g(x), \qquad \text{oricare ar fi } \ x \in (b, \infty)$$

ceea ce arată că integralele $\int_b^\infty f(x) \, dx$ şi $\int_b^\infty g(x) \, dx$ au aceeaşi natură. Dar

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^\infty f(x) \, dx \qquad \text{si} \qquad \int_a^\infty g(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx + \int_b^\infty g(x) \, dx.$$

5.3.15 Funcţia

$$f:(0,1]\longrightarrow\mathbb{R}\,,\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

nu este integrabilă pe $[0,1]$ deoarece nu este mărginită

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$$

dar (a se vedea figura 5.5)

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{a\to 0}2\sqrt{x}|_a^1=\lim_{a\to 0}2(1-\sqrt{a})=2.$$

Figura 5.5

5.3.16 Definiţie. Fie $f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în vecinătatea lui a, integrabilă pe $[c,b]$ oricare ar fi $c\in(a,b)$. Dacă limita există şi este finită, definim

$$\int_a^b f(x)\,dx:=\lim_{c\to a}\int_c^b f(x)\,dx$$

şi spunem că integrala este *convergentă*. In caz contrar spunem ca integrala este *divergentă*. Similar, pentru $f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ nemarginită în vecinătatea lui b, integrabilă pe $[a,c]$ oricare ar fi $c\in(a,b)$ definim în caz de convergenţă

$$\int_a^b f(x)\,dx:=\lim_{c\to b}\int_a^c f(x)\,dx.$$

5.3.17 Exerciţiu. Să se arate că

$$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^\lambda}\,dx\quad este\quad\begin{cases} convergenta & daca\quad \lambda<1\\ divergenta & daca\quad \lambda\geq 1\end{cases}$$

şi

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\lambda}\, dx \quad \textit{este} \quad \begin{cases} \textit{convergenta} & \textit{daca} \quad \lambda < 1 \\ \textit{divergenta} & \textit{daca} \quad \lambda \geq 1\,. \end{cases}$$

Rezolvare. Avem

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)}\, dx = \lim_{c\to a} \int_c^b \frac{1}{(x-a)}\, dx = \lim_{c\to a} \ln(x-a)|_c^b = \lim_{c\to a} \ln\frac{b-a}{c-a} = \infty$$

şi

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda}\, dx = \frac{1}{1-\lambda} \lim_{c\to a} [(b-a)^{1-\lambda} - (c-a)^{1-\lambda}] = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} & \textit{daca} \quad \lambda < 1 \\ \infty & \textit{daca} \quad \lambda > 1 \end{cases}$$

în cazul $\lambda \neq 1$.

5.3.18 *Criteriul comparaţiei.* Dacă funcţiile continue $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ sunt astfel încât $0 \leq f(x) \leq g(x)$, oricare ar fi $x \in (a,b]$ atunci

$$\int_a^b g(x)\, dx \text{ C} \implies \int_a^b f(x)\, dx \text{ C} \qquad\qquad \int_a^b f(x)\, dx \text{ D} \implies \int_a^b g(x)\, dx \text{ D}.$$

5.3.19 Exerciţiu. Să se studieze convergenţa integralei

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Rezolvare. Funcţia continuă $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x/\sqrt{1+x}$ este mărginită pe $[0,1]$. Rezultă că există $M > 0$ astfel încât $f(x) \leq M$, oricare ar fi $x \in [0,1]$. Integrala din exerciţiu este convergentă deoarece

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{M}{(1-x)^{1/2}}$$

şi integrala $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/2}}\, dx$ este convergentă.

5.3.20 MATHEMATICA: `NIntegrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=NIntegrate[Exp[x]/Sqrt[1 - x^2], {x, 0, 1}]` $\mapsto$ Out[1]=3.10438

5.3.21 Exerciţiu. Să se studieze convergenţa integralei

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Rezolvare. In acest caz atât intervalul de integrare cât şi funcţia de integrat sunt nemărginite. Integrala este convergentă deoarece este o sumă de integrale convergente

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx + \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

5.3.22 MATHEMATICA: `NIntegrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=NIntegrate[Exp[-x]/Sqrt[x], {x, 0, Infinity}]` $\mapsto$ Out[1]=1.77245

5.4 Integrale în sensul valorii principale

5.4.1 Dacă $a < 0 < b$ atunci integrala improprie
$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$$
nu este convergentă. Funcţia este nemărginită în jurul lui 0 şi limita
$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \delta \to 0}} \left[\int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_\delta^b \frac{1}{x}\,dx\right] = \ln\left|\frac{b}{a}\right| + \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \delta \to 0}} \ln\frac{\varepsilon}{\delta}$$
nu există. Considerând însă o trecere la limită mai puţin restrictivă (cazul $\varepsilon = \delta$)
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_\varepsilon^b \frac{1}{x}\,dx\right] = \ln\left|\frac{b}{a}\right|.$$
Spunem că integrala este *convergentă în sensul valorii principale* şi scriem
$$\text{v.p.}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_\varepsilon^b \frac{1}{x}\,dx\right] = \ln\left|\frac{b}{a}\right|.$$

5.4.2 Integrala improprie
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1}\,dx$$
unde n un număr natural, nu este convergentă deoarece limita
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1}\,dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \left.\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right|_a^b = \frac{1}{2n+2} \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} [b^{2n+2} - a^{2n+2}]$$
nu există. Există însă limita mai puţin restrictivă
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} x^{2n+1}\,dx = 0.$$
Spunem că integrala este *convergentă în sensul valorii principale* şi scriem
$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} x^{2n+1}\,dx = 0.$$

5.5 Integrale cu parametru

5.5.1 Teoremă. *Dacă funcţia*

$$F : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

este continuă atunci funcţia

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(t) = \int_c^d F(t,x)\,dx$$

definită cu ajutorul unei integrale cu parametru este continuă, adică avem

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0) \tag{5.2}$$

oricare ar fi $t_0 \in [a,b]$.

Demonstraţie. Fie $t_0 \in [a,b]$ arbitrar şi $\varepsilon > 0$. Funcţia F fiind continuă pe mulţimea compactă $[a,b] \times [c,d]$ este uniform continuă (a se vedea pag. 79-**11**). Rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel incât

$$||(t,x) - (t',x')|| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |F(t,x) - F(t',x')| < \varepsilon\,.$$

Deoarece

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &= \left|\int_c^d F(t,x)dx - \int_c^d F(t_0,x)dx\right| \\ &= \left|\int_c^d [F(t,x) - F(t_0,x)]dx\right| \leq \int_c^d |F(t,x) - F(t_0,x)|dx \end{aligned}$$

şi $||(t,x) - (t_0,x)|| = \sqrt{(t-t_0)^2 + (x-x)^2} = |t-t_0|$ are loc relaţia

$$|t - t_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon(d-c)$$

care arată că funcţia f este continuă în punctul t_0.

5.5.2 Relaţia (5.2) se mai poate scrie

$$\lim_{t\to t_0} \int_c^d F(t,x)\,dx = \int_c^d [\lim_{t\to t_0} F(t,x)]\,dx.$$

Teorema precedentă prezintă condiţii suficiente ca limita să comute cu integrala.

5.5.3 Teoremă. *Dacă funcţia continuă*

$$F : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R} : \ (t,x) \mapsto F(t,x)$$

este derivabilă partial în raport cu t şi

$$\frac{\partial F}{\partial t} : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

este continuă atunci funcţia

$$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\qquad f(t)=\int_c^d F(t,x)\,dx$$

este derivabilă în (a,b)*, are derivata continuă şi*

$$f'(t)=\int_c^d \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,dx. \tag{5.3}$$

Demonstraţie. Fie $t_0\in[a,b]$ arbitrar. Funcţia $\Phi:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$\Phi(t,x)=\begin{cases}\frac{F(t,x)-F(t_0,x)}{t-t_0} & \text{daca}\quad t\neq t_0\\ \frac{\partial F}{\partial t}(t_0,x) & \text{daca}\quad t=t_0\end{cases}$$

este continuă. Din teorema precedentă rezultă că funcţia

$$\varphi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\qquad \varphi(t)=\int_c^d \Phi(t,x)\,dx$$

este continuă şi prin urmare $\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\varphi(t_0)$, adică avem relaţia

$$\lim_{t\to t_0}\int_c^d \frac{F(t,x)-F(t_0,x)}{t-t_0}dx=\int_c^d \frac{\partial F}{\partial t}(t_0,x)dx.$$

Dar

$$f'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\int_c^d \frac{F(t,x)-F(t_0,x)}{t-t_0}dx.$$

Continuitatea lui f' rezultă pe baza teoremei precedente din continuitatea lui Φ.

5.5.4 Regula lui Leibniz de derivare a integralelor cu parametru se mai scrie

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_c^d F(t,x)\,dx=\int_c^d \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,dx\,.$$

Teorema prezintă condiţii suficiente pentru ca derivata să comute cu integrala.

5.5.5 Teoremă *(Leibniz). Dacă funcţia continuă*

$$F:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$$

este derivabilă partial în raport cu t*,*

$$\frac{\partial F}{\partial t}:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$$

este continuă şi dacă

$$\varphi:[a,b]\longrightarrow[c,d]\,,\qquad \psi:[a,b]\longrightarrow[c,d]$$

sunt două funcţii derivabile pe (a,b) *atunci funcţia*

$$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\qquad f(t)=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} F(t,x)\,dx$$

este derivabilă în (a,b) *şi*

$$f'(t)=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)}\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,dx+F(t,\psi(t))\,\psi'(t)-F(t,\varphi(t))\,\varphi'(t). \tag{5.4}$$

Figura 5.6

Demonstraţie. Ştim că în cazul unei funcţii continue $g:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ avem

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}g(t)dt=g(x)$$

oricare ar fi $x_0\in[\alpha,\beta]$ fixat. Funcţia de trei variabile $\Phi:[a,b]\times[c,d]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$\Phi(t,y,z)=\int_{y}^{z}F(t,x)dx=\int_{t_0}^{z}F(t,x)dx-\int_{t_0}^{y}F(t,x)dx$$

unde $t_0\in(a,b)$ este un punct fixat, admite derivate parţiale continue

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y,z)=\int_{y}^{z}\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)dx\,,\qquad \frac{\partial}{\partial y}\Phi(t,y,z)=-F(t,y)\,,\qquad \frac{\partial}{\partial z}\Phi(t,y,z)=F(t,z)$$

şi prin urmare este diferenţiabilă în $[a,b]\times(c,d)\times(c,d)$. Deoarece

$$f(t)=\Phi(t,\phi(t),\psi(t))$$

din formula de derivare a funcţiilor compuse rezultă

$$\begin{aligned} f'(t) &= \tfrac{\partial\Phi}{\partial t}(t,\phi(t),\psi(t))+\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}(t,\phi(t),\psi(t))\,\phi'(t)+\tfrac{\partial\Phi}{\partial z}(t,\phi(t),\psi(t))\psi'(t)\\ &= \textstyle\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)}\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,dx+F(t,\psi(t))\,\psi'(t)-F(t,\varphi(t))\,\varphi'(t). \end{aligned}$$

5.5.6 Regula generală (Leibniz) de derivare a integralelor cu parametru se mai scrie

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)}F(t,x)\,dx=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)}\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,dx+F(t,\psi(t))\,\psi'(t)-F(t,\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

5.5.7 Definiţie. Fie $F : [a,b]\times[c,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Spunem că integrala

$$\int_c^\infty F(t,x)dx = \lim_{d\to\infty}\int_c^d F(t,x)dx$$

este *uniform convergentă* în $[a,b]$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t,x)dx\right| < \varepsilon \qquad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{c} t\in[a,b] \\ [\alpha,\beta]\subset[M,\infty). \end{array}$$

5.5.8 Exerciţiu. Să se arate că dacă $c > 0$ integrala improprie

$$\int_c^\infty \frac{\sin x}{t^2+x^2}dx$$

este uniform convergentă în $[a,b]$, oricare ar fi intervalul $[a,b]$.

Rezolvare. Afirmaţia rezultă din relaţia

$$\left|\frac{\sin x}{t^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

şi din convergenţa integralei improprii $\int_c^\infty \frac{1}{x^2}dx$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_M^\infty \frac{1}{x^2}dx < \varepsilon$. Dacă $[\alpha,\beta] \subset [M,\infty)$ atunci

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{\sin x}{t^2+x^2}dx\right| \leq \int_\alpha^\beta \left|\frac{\sin x}{t^2+x^2}\right| dx \leq \int_M^\infty \frac{1}{x^2}dx < \varepsilon.$$

5.5.9 Teoremă. *Dacă funcţia* $F : [a,b]\times[c,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *este continuă şi dacă integrala*

$$\int_c^\infty F(t,x)dx = \lim_{d\to\infty}\int_c^d F(t,x)dx$$

este uniform convergentă atunci funcţia

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(t) = \int_c^\infty F(t,x)\,dx$$

este continuă si prin urmare

$$\lim_{t\to t_0}\int_c^\infty F(t,x)\,dx = \int_c^\infty [\lim_{t\to t_0} F(t,x)]\,dx\,, \qquad oricare\ ar\ fi\ \ t_0 \in [a,b].$$

5.5.10 Teoremă. *Dacă funcţia continuă* $F : [a,b] \times [c,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *este derivabilă parţial în raport cu* t

$$\frac{\partial F}{\partial t} : [a,b] \times [c,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

este continuă, integrala improprie

$$\int_c^\infty F(t,x)dx \qquad \text{este convergenta pentru} \ \ t \in (a,b)$$

şi integrala improprie

$$\int_c^\infty \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)dx \qquad \textit{este uniform convergenta pentru} \ \ t\in(a,b)$$

atunci funcţia

$$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad f(t)=\int_c^\infty F(t,x)\,dx$$

este derivabilă în (a,b) *şi*

$$f'(t)=\int_c^\infty \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,dx \tag{5.5}$$

adică

$$\frac{d}{dt}\int_c^\infty F(t,x)\,dx=\int_c^\infty \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,dx\,.$$

5.6 Funcţia Γ a lui Euler

5.6.1 Exerciţiu. Să se arate că integrala improprie

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,dt$$

este convergentă oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

Rezolvare. Fie $x>0$ şi $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $n>x$. Deoarece (a se vedea pag. 56-**11**)

$$0<\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}=\frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t}\le\begin{cases} t^{x-1} & \text{pentru orice} \quad t\in(0,1]\\ \frac{n!}{t^{n-x+1}} & \text{pentru orice} \quad t\in[1,\infty)\end{cases}$$

şi integralele

$$\int_0^1 t^{x-1}\,dt=\frac{1}{x} \qquad\qquad \int_1^\infty \frac{dt}{t^{n-x+1}}$$

sunt convergente rezultă că integrala

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,dt=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,dt+\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,dt$$

este convergentă oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

5.6.2 Se poate arăta că funcţia definită cu ajutorul unei integrale cu parametru

$$\Gamma:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}\,, \qquad \Gamma(x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,dt$$

este o funcţie continuă.

5.6.3 Teoremă. *Avem*

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x) \qquad \textit{oricare ar fi} \;\; x\in(0,\infty)$$
$$\Gamma(n+1)=n! \qquad \textit{oricare ar fi} \;\; n\in\{0,1,2,\ldots\}.$$

Demonstraţie. Integrând prin părţi obţinem

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^x\,dt=-\int_0^\infty (e^{-t})'\,t^x\,dt=-e^{-t}\,t^x\Big|_0^\infty+x\int_0^\infty (e^{-t})\,t^{x-1}\,dt=x\,\Gamma(x).$$

Avem

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=1 \qquad \text{si} \qquad \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\ldots=n!$$

5.6.4 Se poate arăta că

$$\Gamma(x)\;\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)} \qquad \text{oricare ar fi} \;\; x\in(0,1).$$

5.6.5 Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ avem

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)...(x+n-1)}.$$

5.6.6 Definiţie. Funcţia $\Gamma:\mathbb{R}-\{0,-1,-2,...\}\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$\Gamma(x)=\begin{cases} \int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt & \textit{daca} \;\; x>0 \\ \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)...(x+n-1)} & \textit{daca} \;\; x>-n \;\; \textit{pentru} \;\; n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

se numeşte *funcţia gamma a lui Euler.*

5.6.7 Graficul funcţiei Γ se poate obtine utilizând **MATHEMATICA:**

```
In[1]:=Plot[Gamma[x], {x, -3, 3}]
```

şi este prezentat în figura 5.7.

Figura 5.7

Capitolul 6

Integrale curbilinii

6.1 Integrala curbilinie de primul tip

6.1.1 Definiţie. Prin *drum de clasă* C^1 în $\mathbb{R}^2$ se înţelege o aplicaţie de forma

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \ t \mapsto \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$$

cu $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii derivabile şi cu derivată continuă.
Drumul γ este numit *drum închis* dacă $\gamma(a)=\gamma(b)$, adică $\varphi(a)=\varphi(b)$ şi $\psi(a)=\psi(b)$.

Figura 6.1

6.1.2 Exemple.
a) Fie (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ puncte fixate. Aplicaţia

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{aligned} \gamma(t) &= (1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1) \\ &= (\,(1-t)x_0 + tx_1,\ (1-t)y_0 + ty_1\,) \\ &= (\,x_0 + t(x_1-x_0),\ y_0 + t(y_1-y_0)\,) \end{aligned}$$

este drum de clasă C^1. Imaginea lui este segmentul ce uneşte (x_0, y_0) cu (x_1, y_1).
b) Fie $r \in (0, \infty)$ şi fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punct fixat. Aplicaţia

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{aligned}\gamma(t) &= (x_0, y_0) + r(\cos t, \sin t) \\ &= (x_0 + r\ \cos t,\ y_0 + r\ \sin t)\end{aligned}$$

este drum de clasă C^1. Imaginea lui este cercul de rază r cu centrul în (x_0, y_0).

c) Fie $a, b \in (0, \infty)$. Aplicaţia

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (a\ \cos t,\ b\ \sin t)$$

este drum de clasă C^1. Imaginea lui este elipsa $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

6.1.3 Definiţie. Spunem că drumurile $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ şi $\gamma_0 : [a_0, b_0] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clasă C^1 sunt *echivalente* dacă există o aplicaţie $\chi : [a_0, b_0] \longrightarrow [a, b]$ bijectivă, derivabilă şi cu $\chi'(t) \neq 0$ oricare ar fi $t \in [a_0, b_0]$ astfel încât

$$\gamma_0(t) = \gamma(\chi(t)), \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in [a_0, b_0].$$

Relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea tuturor drumurilor de clasă C^1 care permite împărţirea ei în clase. Fiecare clasă de drumuri echivalente este numită *curbă*. Despre drumurile aparţinând unei curbe spunem că sunt reprezentanţi sau *parametrizări* ale curbei.

6.1.4 Exemplu. Drumul $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ este echivalent cu

$$\gamma_0 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma_0(t) = \gamma(\,(1-t)a + tb\,).$$

6.1.5 Fie $(\delta_n)_{n \geq 1}$ un şir de diviziuni

$$\delta_n = \{t_i^n\}_{i=\overline{0,k_n}} \qquad a = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \ \dots\ < t_{k_n-1}^n < t_{k_n}^n = b$$

cu $\lim_{n\to\infty} ||\delta_n|| = 0$. Un drum de clasă C^1 de forma

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t,\ \psi(t))$$

poate fi aproximat cu drumul poligonal γ_n cu vârfurile

$$\gamma(a) = \gamma(t_0^n), \quad \gamma(t_1^n), \quad \gamma(t_2^n), \quad \dots \quad, \gamma(t_{k_n-1}^n), \quad \gamma(b) = \gamma(t_{k_n}^n)$$

alegând n suficient de mare. Lungimea drumului poligonal γ_n este

$$l(\gamma_n) = \sum_{i=1}^{k_n} \sqrt{(t_i^n - t_{i-1}^n)^2 + (\psi(t_i^n) - \psi(t_{i-1}^n))^2}.$$

Deoarece, din teorema creşterilor finite rezultă că există $\xi_i^n \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$ cu

$$\psi(t_i^n) - \psi(t_{i-1}^n) = \psi'(\xi_i^n)\,(t_i - t_{i-1})$$

lungimea lui γ_n se poate scrie sub forma sumei Riemann

$$l(\gamma_n) = \sum_{i=1}^{k_n} \sqrt{1 + (\psi'(\xi_i^n))^2}\,(t_i^n - t_{i-1}^n)$$

corespunzătoare funcţiei $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt{1 + (\psi'(t))^2}$ şi prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} l(\gamma_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \sqrt{1 + (\psi'(\xi_i^n))^2}\,(t_i^n - t_{i-1}^n) = \int_a^b \sqrt{1 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

In cazul unui drum de clasă C^1 oarecare $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ se poate arăta că limita lungimilor drumurilor poligonale corespunzătoare este

$$\int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

Figura 6.2

6.1.6 Definiţie. Prin *lungimea* drumului de clasă C^1

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$$

se înţelege numărul

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

6.1.7 Exemplu. In cazul drumului circular

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (x_0 + r\,\cos t,\ y_0 + r\,\sin t)$$

avem $\varphi(t) = x_0 + r\,\cos t$, $\psi(t) = y_0 + r\,\sin t$ şi

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\,\sin t)^2 + (r\,\cos t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

6.1.8 Pentru a aproxima masa unui fir material descris de un drum de clasă C^1

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\varphi(t),\ \psi(t))$$

plecând de la densitatea firului (de exemplu, în g/cm) descrisă de o funcţie continuă

$$\varrho : \{\ (\varphi(t),\ \psi(t))\ |\ \ t \in [a, b]\ \} \longrightarrow \mathbb{R}$$

putem considera partiţii ale firului corespunzătoare unor diviziuni $\delta_n = \{t_0^n, t_1^n, ..., t_{k_n}^n\}$

$$\gamma(a) = \gamma(t_0^n), \quad \gamma(t_1^n), \quad \gamma(t_2^n), \quad \ldots \quad, \gamma(t_{k_n-1}^n), \quad \gamma(b) = \gamma(t_{k_n}^n)$$

şi aproxima pe fiecare segment $\gamma(t_{i-1}^n)$, $\gamma(t_i^n)$ densitatea cu o valoare intermediară $\varrho(\varphi(c_i^n), \psi(c_i^n))$, unde $c_i^n \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$. Se poate arăta că dacă $\lim_{n\to\infty} \| \delta_n \| = 0$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \varrho(\varphi(c_i^n), \psi(c_i^n)) \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$$

$$= \int_a^b \varrho(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

6.1.9 Definiţie. Fie un drum de clasă C^1

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\varphi(t),\ \psi(t))$$

şi o funcţie continuă (câmp scalar) definită pe imaginea drumului

$$f : \{\ (\varphi(t),\ \psi(t))\ |\ \ t \in [a, b]\ \} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Prin *integrala curbilinie* a lui f de-a lungul drumului γ se înţelege numărul

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

6.1.10 Exemplu. In cazul drumului $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^2)$ avem

$$\int_\gamma x\,ds = \int_0^1 t\sqrt{1 + 4t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1 + 4\theta}\,d\theta = \frac{1}{12}(1 + 4\theta)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1).$$

6.1.11 Propoziţie. *Dacă drumurile de clasă* C^1 $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *şi* $\gamma_0 : [a_0, b_0] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *sunt echivalente şi dacă* $f : \{\, \gamma(t) \mid t \in [a,b] \,\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă atunci*

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{\gamma_0} f\, ds.$$

Demonstraţie. Conform ipotezei, există o aplicaţie $\chi : [a_0, b_0] \longrightarrow [a,b]$ bijectivă, derivabilă şi cu $\chi'(t) \neq 0$ oricare ar fi $t \in [a_0, b_0]$ încât

$$\gamma_0(t) = \gamma(\chi(t)), \qquad \text{oricare ar fi } \; t \in [a_0, b_0].$$

Notând $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $\varphi_0(t) = \varphi(\chi(t))$ şi $\psi_0(t) = \psi(\chi(t))$ avem

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_0} f\, ds &= \int_{a_0}^{b_0} f(\varphi_0(t), \psi_0(t)) \sqrt{(\varphi_0'(t))^2 + (\psi_0'(t))^2}\, dt \\
&= \int_{a_0}^{b_0} f(\varphi(\chi(t)), \psi(\chi(t))) \sqrt{(\varphi'(\chi(t)))^2 + (\psi'(\chi(t)))^2}\, |\chi'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b f(\varphi(\theta), \psi(\theta)) \sqrt{(\varphi'(\theta))^2 + (\psi'(\theta))^2}\, d\theta = \int_\gamma f\, ds.
\end{aligned}$$

6.1.12 Fiecare curbă este o clasă de drumuri echivalente. Putem defini integrala unei funcţii de-a lungul unei curbe folosind o parametrizare particulară a curbei pentru că valoarea integralei nu depinde de parametrizarea aleasă.

6.1.13 Definiţie. Prin *lungimea* drumului în $\mathbb{R}^3$

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = (\gamma_1(t),\, \gamma_2(t),\, \gamma_3(t))$$

se înţelege numărul

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + (\gamma_3'(t))^2}\, dt.$$

Figura 6.3

6.1.14 Definiţie. Fie un drum de clasă C^1 in $\mathbb{R}^3$

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = (\gamma_1(t),\, \gamma_2(t),\, \gamma_3(t))$$

şi o funcţie continuă (câmp scalar) definită pe imaginea $\gamma([a,b])$ a drumului

$$f : \{\, (\gamma_1(t),\, \gamma_2(t),\, \gamma_3(t)) \mid\ t \in [a,b] \,\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Prin *integrala curbilinie* a lui f de-a lungul drumului γ se înţelege numărul

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + (\gamma_3'(t))^2}\, dt.$$

6.2 Integrala curbilinie de al doilea tip

6.2.1 Definiţie. Fie un drum de clasă C^1

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\varphi(t),\, \psi(t))$$

şi o funcţie continuă (câmp vectorial) definită pe imaginea drumului

$$\vec{F} : \{\, (\varphi(t),\, \psi(t)) \mid\ t \in [a,b] \,\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

Prin *integrala curbilinie* a lui $\vec{F}$ de-a lungul drumului γ se înţelege numărul

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)]\, dt.$$

Folosind o notaţie alternativă, ultima relaţie se mai scrie

$$\int_\gamma P\, dx + Q\, dy = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)]\, dt.$$

Figura 6.4

6.2.2 Exemplu. In cazul drumului $\gamma:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(1+\cos t, 1+\sin t)$ avem

$$\int_\gamma y^2\,dx - x^2\,dy = -\int_0^{2\pi}(2+\sin t+\cos t+\sin^3 t+\cos^3 t)\,dt = -4\pi.$$

6.2.3 Integrala curbilinie de al doilea tip permite calculul *lucrului mecanic* efectuat de o forţă în deplasarea ei de-a lungul unui drum.

6.2.4 Definiţie. Spunem că drumurile $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ şi $\gamma_0:[a_0,b_0]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ de clasă C^1 sunt *echivalente cu păstrarea sensului* dacă există o aplicaţie $\chi:[a_0,b_0]\longrightarrow[a,b]$ bijectivă, derivabilă şi cu $\chi'(t)>0$ oricare ar fi $t\in[a_0,b_0]$ încât

$$\gamma_0(t)=\gamma(\chi(t)),\qquad \text{oricare ar fi }\ t\in[a_0,b_0].$$

6.2.5 Propoziţie. *Dacă drumurile de clasă C^1 $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ şi $\gamma_0:[a_0,b_0]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ sunt echivalente cu păstrarea sensului şi dacă*

$$\vec{F}:\{\,\gamma(t)\ |\ \ t\in[a,b]\,\}\longrightarrow\mathbb{R}^2,\qquad \vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

este o funcţie continuă atunci

$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy=\int_{\gamma_0}P\,dx+Q\,dy.$$

Demonstraţie. Conform ipotezei, există o aplicaţie $\chi:[a_0,b_0]\longrightarrow[a,b]$ bijectivă, derivabilă şi cu $\chi'(t)>0$ oricare ar fi $t\in[a_0,b_0]$ încât

$$\gamma_0(t)=\gamma(\chi(t)),\qquad \text{oricare ar fi }\ t\in[a_0,b_0].$$

Notând $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$, $\varphi_0(t)=\varphi(\chi(t))$ şi $\psi_0(t)=\psi(\chi(t))$ avem

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\gamma_0}P\,dx+Q\,dy &= \int_{a_0}^{b_0}[P(\varphi_0(t),\psi_0(t))\,\varphi_0'(t)+Q(\varphi_0(t),\psi_0(t))\,\psi_0'(t)]\ dt\\ &=\int_{a_0}^{b_0}[P(\varphi(\chi(t)),\psi(\chi(t)))\ \varphi'(\chi(t))+Q(\varphi(\chi(t)),\psi(\chi(t)))\ \psi'(\chi(t))]\ \chi'(t)dt\\ &=\int_a^b[P(\varphi(\theta),\psi(\theta))\,\varphi'(\theta)+Q(\varphi(\theta),\psi(\theta))\,\psi'(\theta)]\ d\theta=\textstyle\int_\gamma P\,dx+Q\,dy.\end{aligned}$$

6.2.6 Propoziţie. *Dacă $\gamma:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$ este un drum de clasă C^1,*

$$\tilde{\gamma}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2,\quad \tilde{\gamma}(t)=(\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t))=(\varphi(a+b-t),\psi(a+b-t))=\gamma(a+b-t)$$

este opusul *lui γ (adică drumul γ parcurs în sens invers) şi*

$$\vec{F}:\{\,\gamma(t)\ |\ \ t\in[a,b]\,\}\longrightarrow\mathbb{R}^2,\qquad \vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

o funcţie continuă atunci

$$\int_{\tilde{\gamma}} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy.$$

Demonstraţie. Utilizând schimbarea de variabilă $\theta = a + b - t$ obţinem

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\tilde{\gamma}} P\,dx + Q\,dy &= \textstyle\int_a^b [P(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t))\,\tilde{\varphi}'(t) + Q(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t))\,\tilde{\psi}'(t)]\,dt \\ &= \textstyle\int_b^a [P(\varphi(\theta), \psi(\theta))\,\varphi'(\theta) + Q(\varphi(\theta), \psi(\theta))\,\psi'(\theta)]\,d\theta \\ &= -\textstyle\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy.\end{aligned}$$

6.2.7 Definiţie. Fie un drum de clasă C^1 în $\mathbb{R}^3$

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t),\ \gamma_3(t))$$

şi o funcţie continuă (câmp vectorial) definită pe imaginea drumului

$$\vec{F} : \gamma([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

Prin *integrala curbilinie* a lui $\vec{F}$ de-a lungul drumului γ se înţelege numărul

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_a^b [P(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\,\gamma_2'(t) + R(\gamma(t))\,\gamma_3'(t)]\,dt.$$

Folosind o notaţie alternativă, ultima relaţie se mai scrie

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b [P(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\,\gamma_2'(t) + R(\gamma(t))\,\gamma_3'(t)]\,dt.$$

Capitolul 7

Integrale duble

7.1 Definiţie şi proprietăţi

7.1.1 Definiţie. Fie dreptunghiul $A=[a,b]\times[c,d]=\{\,(x,y)\mid a\leq x\leq b,\ \ c\leq y\leq d\,\}$. Plecând de la o diviziune a intervalului $[a,b]$

$$\delta=\{x_i\}_{i=\overline{0,n}}\qquad\qquad a=x_0<x_1<x_2<\ \dots\ <x_{n-1}<x_n=b$$

şi o diviziune a intervalului $[c,d]$

$$\tilde{\delta}=\{y_j\}_{j=\overline{0,k}}\qquad\qquad c=y_0<y_1<y_2<\ \dots\ <y_{k-1}<y_k=d$$

obţinem o *diviziune a dreptunghiului* A

$$\Delta=\{A_{ij}\}_{\substack{i\,=\,\overline{1,\,n}\\ j\,=\,\overline{1,\,k}}}\qquad\qquad A_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j].$$

Diametrul celui mai mare dintre dreptunghiurile diviziunii

$$||\Delta||=\max_{\substack{1\,\leq\,i\,\leq\,n\\ 1\,\leq\,j\,\leq\,k}}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_j-y_{j-1})^2}$$

se numeşte *norma diviziunii* Δ.

7.1.2 Definiţie. Fie $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie definită pe dreptunghiul $A=[a,b]\times[c,d]$, $\Delta=\{A_{ij}\}_{\substack{i\,=\,\overline{1,\,n}\\ j\,=\,\overline{1,\,k}}}$ o diviziune a lui A şi fie $\{(\xi_{ij},\eta_{ij})\}_{\substack{i\,=\,\overline{1,\,n}\\ j\,=\,\overline{1,\,k}}}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii, adică astfel încât $(\xi_{ij},\eta_{ij})\in A_{ij}$, oricare ar fi i, j. Prin *sumă Riemann* asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $\{(\xi_{ij},\eta_{ij})\}$ se înţelege numărul

$$\sigma_\delta(f, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,(x_i - x_{i-1})\,(y_j - y_{j-1}).$$

Figura 7.1

In cazul în care $f(x, y) \geq 0$ pentru orice $(x, y) \in A$, numărul $\sigma_\Delta(f, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\})$ reprezintă suma volumelor unor prisme (a se vedea figura 7.1).

7.1.3 Definiţie. Spunem că funcţia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este *integrabilă* (Riemann) pe A dacă există un număr $I_f \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\nu > 0$ astfel încât relaţia

$$|\sigma_\delta(f, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}) - I_f| < \varepsilon$$

are loc pentru orice diviziune Δ cu $||\Delta|| < \nu$ şi pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare $\{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}$. Numărul I_f se numeşte *integrala* funcţiei f pe A şi se utilizează pentru el notaţia $\iint_A f(x, y)\,dx\,dy$.

7.1.4 Teoremă. Funcţia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă (Riemann) pe A dacă şi numai dacă există un număr $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ cu $\lim_{n\to\infty} ||\Delta_n|| = 0$ şi pentru orice alegere a sistemelor de puncte intermediare asociate $\{(\xi_{ij}^n, \eta_{ij}^n)\}$ avem

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\delta(f, \{(\xi_{ij}^n, \eta_{ij}^n)\}) = I.$$

In cazul în care f este integrabilă avem $I = \iint_A f(x, y)\,dx\,dy$.

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 138-**5**).

7.1.5 Propoziţie.
a) Dacă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *este integrabilă şi* $\alpha \in \mathbb{R}$ *atunci funcţia* αf *este integrabilă şi*

$$\iint_A (\alpha f)(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_A f(x,y)\,dx\,dy.$$

b) Dacă $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *sunt integrabile atunci funcţiile* $f \pm g$ *sunt integrabile şi*

$$\iint_A (f \pm g)(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy \pm \iint_A g(x,y)\,dx\,dy.$$

Demonstraţie. Similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 139-**6**).

7.1.6 Se poate arăta că:

1) O funcţie integrabilă pe A este integrabilă pe orice dreptunghi $B \subset A$;

2) Dacă $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile atunci fg este funcţie integrabilă;

3) Dacă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă atunci $|f| : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.

7.1.7 Propoziţie.
a) Dacă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *este integrabilă şi* $f(x,y) \geq 0$ *oricare ar fi* $(x,y) \in A$ *atunci*

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \geq 0.$$

b) Dacă $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *sunt integrabile şi* $f(x,y) \leq g(x,y))$ *oricare ar fi* $(x,y) \in A$ *atunci*

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_A g(x,y)\,dx\,dy.$$

c) Dacă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *este integrabilă atunci*

$$\left| \iint_A f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_A |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 139-**8**).

7.1.8 Definiţie. Spunem că $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este *mărginită* dacă există $M \in \mathbb{R}$ încât

$$|f(x,y)| \leq M, \qquad \text{oricare ar fi} \quad (x,y) \in A.$$

In caz contrar spunem că f este *nemărginită*.

7.1.9 Teoremă. *Dacă funcţia* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *este integrabilă atunci este mărginită.*

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 140-**11**).

7.1.10 Definiţie. Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi $\Delta = \{A_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,k}}}$ o diviziune a dreptunghiului A. Sumele (a se vedea figura 7.2)

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\,(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \qquad \text{unde} \qquad m_{ij} = \inf_{(x,y)\in A_{ij}} f(x.y)$$

şi

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\,(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \qquad \text{unde} \qquad M_{ij} = \sup_{(x,y)\in A_{ij}} f(x.y)$$

se numesc *suma Darboux inferioară* şi respectiv, *suma Darboux superioară.*

Figura 7.2

7.1.11 Definiţie. Fie dreptunghiul $A = [a, b] \times [c, d]$ şi diviziunile

$$\Delta = \{A_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,k}}} \qquad\qquad \Delta' = \{A'_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,n'}\\ j=\overline{1,k'}}}$$

obţinute plecând de la diviziunile $\delta = \{x_i\}_{i=\overline{0,n}}$, $\delta' = \{x'_i\}_{i=\overline{0,n'}}$ ale lui $[a, b]$ şi de la diviziunile $\tilde{\delta} = \{y_j\}_{j=\overline{0,k}}$, $\tilde{\delta}' = \{y'_j\}_{j=\overline{0,k'}}$ ale lui $[c, d]$, adică

$$A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\,, \qquad\qquad A'_{ij} = [x'_{i-1}, x'_i] \times [y'_{j-1}, y'_j].$$

Spunem că diviziunea Δ este mai fină decât Δ' dacă $\delta \subset \delta'$ şi $\tilde{\delta} \subset \tilde{\delta}'$.

7.1.12 Propoziţie. *Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi Δ, Δ' două diviziuni ale dreptunghiului A. Dacă Δ este mai fină decât Δ', atunci*

$$s_\Delta(f) \le s_{\Delta'}(f) \qquad si \qquad S_{\Delta'}(f) \le S_\Delta(f)$$

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 142-**17**).

7.1.13 Propoziţie. *Dacă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită atunci*

$$s_\Delta(f) \leq S_{\Delta'}(f)$$

oricare ar fi diviziunile Δ şi Δ'.

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 142-**18**).

7.1.14 Teoremă (Criteriul lui Darboux). *Funcţia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă dacă şi numai dacă este mărginită şi pentru orice şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $\lim_{n\to\infty} ||\Delta_n|| = 0$ avem*

$$\lim_{n\to\infty} (S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)) = 0.$$

In cazul în care f este integrabilă avem

$$\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}(f) = \iint_A f(x,y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}(f).$$

Demonstraţie. Este similară celei prezentate la pag. 143-**21**.

7.1.15 Teoremă. *Dacă funcţia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definită pe dreptunghiul $A = [a,b]\times[c,d]$ este integrabilă, există integrala*

$$\int_c^d f(x,y)\, dy \qquad \text{oricare ar fi} \quad x \in [a,b]$$

şi dacă funcţia

$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad F(x) = \int_c^d f(x,y)\, dy$$

este integrabilă pe $[a,b]$ atunci

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Demonstraţie. Pentru orice diviziune Δ, cu notaţiile de mai sus avem relaţiile

$$m_{ij} \leq f(x,y) \leq M_{ij}\,, \qquad \forall (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

din care rezultă pentru orice i, j

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\, dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1})\,, \qquad \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Existenţa integralelor $\int_c^d f(x,y)\, dy$ implică existenţa integralelor $\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\, dy$ şi

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d f(x,y)\, dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1})\,, \qquad \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Funcţia F fiind integrabilă pe $[a,b]$ obţinem relaţiile

$$(x_i-x_{i-1})\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j-y_{j-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \leq (x_i-x_{i-1})\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j-y_{j-1})$$

din care prin sumare

$$s_\Delta(f) \leq \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \leq S_\Delta(f).$$

Alegând un şir de diviziuni $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$ cu $\lim_{n\to\infty}||\Delta_n||=0$, din

$$s_{\Delta_n}(f) \leq \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \leq S_{\Delta_n}(f)$$

obţinem prin trecere la limită relaţia cerută.

7.1.16 Teoremă. *Orice funcţie continuă $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.*

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 145-**25**).

7.1.17 Exerciţiu. Fie $A=[1,3]\times[0,2]$. Calculaţi

$$\iint_A (2xy+1)\,dx\,dy.$$

Rezolvare. Funcţia continuă $f:[1,3]\times[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x,y)=2xy+1$ este integrabilă şi

$$\begin{aligned}\iint_A(2xy+1)\,dx\,dy &= \int_1^3\left(\int_0^2(2xy+1)\,dy\right)dx = \int_1^3(xy^2+y)|_0^2\,dx\\ &= \int_1^3(4x+2)dx = (2x^2+2x)|_1^3 = 20.\end{aligned}$$

7.1.18 MATHEMATICA: `Integrate[f[x,y], {x, a, b}, {y, c, d}]`

`In[1]:=Integrate[2 x y +1, {x, 1, 3}, {y, 0, 2}]` $\mapsto$ Out[1]=20

7.1.19 Definiţie. Spunem despre o mulţime $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^2$ că are *aria nulă* dacă pentru orice $\varepsilon>0$ mulţimea $\mathcal{S}$ poate fi acoperită cu o familie de dreptunghiuri având suma ariilor mai mică decât ε.

7.1.20 Exerciţiu.
a) Orice mulţime numărabilă $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^\infty$ are aria nulă.
b) Imaginea unui drum de clasă C^1, adică a unei aplicaţii

$$\gamma:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t)=(\varphi(t),\psi(t))$$

cu φ, ψ derivabile şi cu derivată continuă, are aria nulă.
c) Circumferinţa $\mathcal{S}=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ are arie nulă.

Rezolvare. a) Alegând pentru fiecare punct (x_n, y_n) un pătrat cu latura mai mică decât $\sqrt{\varepsilon/2^n}$, suma ariilor va fi mai mică decât

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \varepsilon \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \varepsilon.$$

b) Funcţiile $\varphi', \psi' : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ fiind continue rezultă că există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\varphi'(t)| \le M$ şi $|\psi'(t)| \le M$, oricare ar fi $t \in [\alpha, \beta]$. Pentru orice $n > 1$, punctele

$$t_0 = \alpha\,, \quad t_1 = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}\,, \quad t_2 = \alpha + 2\frac{\beta-\alpha}{n}\,, \quad \dots \quad t_{n-1} = \alpha + (n-1)\frac{\beta-\alpha}{n}\,, \quad t_n = \beta$$

determină o diviziune echidistantă a intervalului $[\alpha, \beta]$. Conform teoremei creşterilor finite (Lagrange), pentru orice $t \in [t_{i-1}, t_i]$ există c_i, $d_i \in [t, t_i]$ astfel încât

$$\begin{aligned} ||\gamma(t_i) - \gamma(t)|| &= \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t))^2 + (\varphi(t_i) - \varphi(t))^2} \\ &= \sqrt{(\varphi'(c_i))^2 + (\psi'(d_i))^2}\,(t_i - t) \le \tfrac{\sqrt{2}M(\beta-\alpha)}{n}. \end{aligned}$$

Pătratele de latură $2\sqrt{2}M(\beta - \alpha)/n$ centrate în $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$, ... , $\gamma(t_n)$ acoperă imaginea drumului γ şi suma ariilor lor este $8M^2(\beta - \alpha)^2/n$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ dat se poate alege $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $8M^2(\beta - \alpha)^2/n < \varepsilon$.
c) Circumferinţa $\mathcal{S}$ este imaginea drumului $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \ \ \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Figura 7.3

7.1.21 Se poate arăta că orice funcţie $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă cu excepţia imaginilor unui număr finit de drumuri de clasă C^1

$$\gamma_i : [\alpha_i, \beta_i] \longrightarrow [a, b] \times [c, d]\,, \qquad i \in \{1, 2, ..., k\}$$

este integrabilă.

7.1.22 Fie D un domeniu mărginit, cu frontiera formată dintr-un număr finit de drumuri de clasă C^1 şi

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

o funcţie continuă. Funcţia

$$\tilde{f} : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{daca} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{daca} \quad (x,y) \notin D \end{cases}$$

definită pe dreptunghiul $A = [a,b]\times[c,d]$ care include pe D este integrabilă. Numărul

$$\iint_A \tilde{f}(x,y)\, dx\, dy$$

nu depinde de alegerea dreptunghiului A conţinând D şi prin definiţie

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_A \tilde{f}(x,y)\, dx\, dy.$$

Figura 7.4

7.1.23 Definiţie. Prin *domeniu simplu în raport cu Ox* se înţelege un domeniu de forma (a se vedea figura 7.4)

$$D = \{\, (x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \,\}$$

unde φ, $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, de clasă C^1 în (a,b). Analog, prin *domeniu simplu în raport cu Oy* se înţelege un domeniu de forma

$$D = \{\, (x,y) \mid c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y) \,\}$$

unde φ, $\psi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, de clasă C^1 în (c,d).

7.1.24 Propoziţie.
a) Dacă funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definită pe domeniul simplu în raport cu Ox

$$D = \{ (x,y) \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$

este continuă atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

b) Dacă funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definită pe domeniul simplu în raport cu Oy

$$D = \{ (x,y) \mid c \leq y \leq d,\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$$

este continuă atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Demonstraţie. a) Fie intervalul $[c,d]$ astfel încât $D \subset [a,b] \times [c,d]$ şi

$$\tilde{f} : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{daca} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{daca} \quad (x,y) \notin D\,. \end{cases}$$

Avem

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \ &= \textstyle\int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^{\varphi(x)} \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx \\ &\quad \textstyle+ \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{d} \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx. \end{aligned}$$

7.1.25 In loc de

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad \text{se mai scrie} \quad \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

7.1.26 Exerciţiu. Să se calculeze integrala dublă

$$\iint_D y\,dx\,dy$$

unde $D = \{\ (x,y) \mid\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\ \}$.

Rezolvare. Funcţia considerată $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$ este integrabilă deoarece este continuă şi D are frontiera formată din imaginile a două drumuri de clasă C^1

$$\gamma_1 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \gamma_1(t) = (t,0) \qquad \text{si} \qquad \gamma_2 : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t).$$

Domeniul D fiind simplu în raport cu Ox,

$$D=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ -1\leq x\leq 1,\ \ 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2}\ \right\}$$

obţinem

$$\iint_D y\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\,dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}y^2\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{2}{3}.$$

Deoarece domeniul D este simplu şi în raport cu Oy

$$D=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0\leq y\leq 1,\ \ -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq \sqrt{1-y^2}\ \right\}.$$

o variantă alternativă de calcul este

$$\iint_D y\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}y\,dx=2\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{2}{3}.$$

7.1.27 MATHEMATICA: `Integrate[f[x,y], {x, a, b}, {y, c, d}]`

`In[1]:=Integrate[y, {x, -1, 1}, {y, 0, Sqrt[1-x^2]}]` $\mapsto$ Out[1]=$\frac{2}{3}$

`In[2]:=Integrate[y, {y, 0, 1}, {x, -Sqrt[1-y^2], Sqrt[1-y^2]}]` $\mapsto$ Out[2]=$\frac{2}{3}$

7.2 Schimbări de variabile

7.2.1 In cazul integralei simple avem

$$\int_a^b dx=b-a=\text{lungimea intervalului }[a,b]$$

iar în cazul unui domeniu simplu $D=\{\ (x,y)\ |\ a\leq x\leq b,\ \varphi(x)\leq y\leq\psi(x)\ \}$

$$\iint_D dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}dy\right)dx=\int_a^b(\psi(x)-\varphi(x))\,dx=\text{aria domeniului }D.$$

In general, dacă funcţia $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ este integrabilă atunci $\iint_D dx\,dy$ este aria lui D.

7.2.2 Plecând de la produsul scalar a doi vectori nenuli calculat în două feluri

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle=x_1\,x_2+y_1\,y_2=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2}\,\cos\alpha$$

putem deduce sinusul unghiului format de ei

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{(x_1\,x_2+y_1\,y_2)^2}{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}}=\frac{|x_1\,y_2-x_2\,y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

şi apoi aria paralelogramului determinat de cei doi vectori

$$aria = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,\sin\alpha = \left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right|.$$

Figura 7.5

7.2.3 Prin transformarea liniară (a se vedea figura 7.5)

$$T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\ (u,v) \mapsto (x(u,v),\, y(u,v)) = (\alpha\, u + \beta\, v,\, \gamma\, u + \delta\, v)$$

dreptunghiului $A = [a,b]\times[c,d]$ îi corespunde paralelogramul $T(A)$ cu vârfurile

$$(\alpha\, a{+}\beta\, c,\ \gamma\, a{+}\delta\, c), \qquad (\alpha\, b{+}\beta\, c,\ \gamma\, b{+}\delta\, c),$$
$$(\alpha\, a{+}\beta\, d,\ \gamma\, a{+}\delta\, d), \qquad (\alpha\, b{+}\beta\, d,\ \gamma\, b{+}\delta\, d)$$

şi

$$\begin{aligned}\textstyle\iint_{T(A)} dx\,dy \ &= aria(T(A)) = \left|\det\begin{pmatrix} \alpha(b-a) & \beta(b-a) \\ \gamma(d-c) & \delta(d-c) \end{pmatrix}\right| \\ &= |\det T|\,(b-a)(d-c) = |\det T| \textstyle\iint_A du\,dv = \iint_A |\det T| du\,dv.\end{aligned}$$

Pe de altă parte, transformarea T fiind liniară, avem

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \det T$$

şi prin urmare putem scrie

$$\iint_{T(A)} dx\,dy = \iint_A \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv.$$

7.2.4 Se ştie că orice funcţie continuă definită pe un interval are proprietatea lui Darboux şi prin urmare, pentru a fi injectivă trebuie să fie monotonă. Fie aplicaţiile

$$[\alpha,\beta] \xrightarrow{\varphi} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

cu f continuă iar φ injectivă, derivabilă şi cu derivata continuă. Deoarece

$$\varphi([\alpha,\beta]) = \begin{cases} [\varphi(\alpha),\varphi(\beta)] & \text{daca} \ \ \varphi \ \ \text{este crescatoare} \\ \\ [\varphi(\beta),\varphi(\alpha)] & \text{daca} \ \ \varphi \ \ \text{este descrescatoare} \end{cases}$$

formula de schimbare de variabilă

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

se mai poate scrie

$$\int\limits_{\varphi([\alpha,\beta])} f(x)\,dx = \int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(t))\ |\varphi'(t)|\ dt.$$

Figura 7.6

7.2.5 Teoremă (Formula de schimbare de variabile). *Fie $D\subset\mathbb{R}^2$ un domeniu compact cu frontiera formată dintr-un număr finit de drumuri de clasă C^1 şi fie*

$$T : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad T(u,v) = (\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

o aplicaţie injectivă, de clasă C^1 cu proprietatea că

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \\ \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \neq 0\,, \qquad \textit{oricare ar fi} \ \ (u,v)\in D.$$

Dacă $f : T(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă atunci

$$\iint_{T(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right|\,du\,dv.$$

7.2.6 Exerciţiu. Să se calculeze integrala dublă

$$\iint_D y\,dx\,dy \qquad \text{unde } D = \{\ (x,y)\ |\ \ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\ \}$$

Rezolvare. Alegem $A = [0,1] \times [0,\pi]$ şi utilizăm coordonate polare. Aplicaţia

$$T : A \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\ (r,\theta) \mapsto (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\,\cos\theta,\ r\,\sin\theta)$$

este injectivă , $T(A) = D$ şi

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\sin\theta \\ \sin\theta & r\,\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Utilizând formula de schimbare de variabile obţinem

$$\iint\limits_{T(A)} y\,dx\,dy = \iint\limits_{A} r\,\sin\theta \left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = \int_0^1 dr \int_0^\pi r^2\,\sin\theta\,d\theta = 2\int_0^1 r^2\,dr = \frac{2}{3}.$$

Figura 7.7

7.2.7 Exerciţiu. Să se calculeze integrala dublă

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy \qquad \text{unde } D = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ \ x>0,\ \ 1 \le xy \le 2,\ \ 1 \le \frac{y}{x} \le 2\ \right\}$$

Rezolvare. Alegând $A = [1,2] \times [1,2]$ şi transformarea bijectivă

$$T : A \longrightarrow D :\ (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v)) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)$$

cu jacobianul

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

obţinem

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy = \iint\limits_{T(A)} x\,dx\,dy = \iint\limits_A \sqrt{\frac{u}{v}} \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{v}\sqrt{\frac{u}{v}}\,dv = \frac{1}{3}(5\sqrt{2}-6).$$

7.3 Formula lui Green

7.3.1 Definiţie. Prin *drum de clasă C^1 pe porţiuni* se înţelege o aplicaţie continuă

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$$

cu $\gamma' = (\varphi', \psi')$ continuă pe porţiuni.

7.3.2 Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact a cărui frontieră este imaginea unui drum de clasă C^1 pe porţiuni şi fie $\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ o funcţie continuă. Vom utiliza notaţia

$$\int_{\partial D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

pentru integrala curbilinie a lui $\vec{F}$ de-a lungul frontierei lui D parcurse în sens direct (cu domeniul în stânga).

Figura 7.8

7.3.3 Teoremă (Formula lui Green) *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact, simplu în raport cu ambele axe şi a cărui frontieră este imaginea unui drum de clasă C^1 pe porţiuni. Dacă funcţia continuă*

$$\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

este astfel încât există $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue pe D atunci

$$\int_{\partial D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dx\,dy.$$

Demonstraţie. Domeniul D fiind simplu în raport cu axa Ox, există un interval $[a,b]$ şi funcţiile continue $\varphi,\psi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, de clasă C^1 în (a,b) astfel încât

$$D=\{\,(x,y)\mid\ a\le x\le b,\ \ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\,\}.$$

Frontiera lui D parcursă în sens direct se compune din drumurile

$$\begin{aligned}
&\gamma_1:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2, && \gamma_1(t)=(t,\varphi(t))\\
&\gamma_2:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2, && \gamma_2(t)=(b,\,(1-t)\varphi(b)+t\,\psi(b))\\
&\gamma_3:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2, && \gamma_3(t)=(a+b-t,\psi(a+b-t))\\
&\gamma_4:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2, && \gamma_4(t)=(a,\,(1-t)\psi(a)+t\,\varphi(a)).
\end{aligned}$$

Prin calcul direct obţinem

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{\partial D}P(x,y)\,dx &= \textstyle\int_{\gamma_1}P(x,y)\,dx+\int_{\gamma_2}P(x,y)\,dx+\int_{\gamma_3}P(x,y)\,dx+\int_{\gamma_4}P(x,y)\,dx\\
&= \textstyle\int_a^b P(t,\varphi(t))\,dt+0+\int_a^b P(a+b-t,\psi(a+b-t))(-1)dt+0\\
&= \textstyle\int_a^b[P(t,\varphi(t))-P(t,\psi(t))]dt.
\end{aligned}$$

Deoarece

$$\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy=\int_a^b[P(t,\psi(t))-P(t,\varphi(t))]dt$$

rezultă că

$$\int_{\partial D}P(x,y)\,dx=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy.$$

Plecând de la faptul că domeniul D este simplu în raport cu Oy se obţine relaţia

$$\int_{\partial D}Q(x,y)\,dy=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy.$$

care adunată cu precedenta conduce la formula lui Green.

7.3.4 Formula lui Green se poate extinde la domenii care se pot descompune in domenii de tipul celui din enunţul teoremei. Relaţia

$$\int_{\partial D}x\,dy-y\,dx=2\iint_D dx\,dy$$

bazată pe formula lui Green poate fi utilizată pentru calculul ariei unui domeniu

$$aria(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}x\,dy-y\,dx.$$

7.3.5 Exerciţiu. Să se afle aria domeniului D limitat de elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Rezolvare. Utilizând pentru ∂D parametrizarea

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (a\,\cos t,\, b\,\sin t)$$

obţinem

$$aria(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[ab\,\cos^2 t + ab\,\sin^2 t]\,dt = ab\pi.$$

7.3.6 Exerciţiu. Să se calculeze

$$\int_{\partial D} y^2\,dx + x^2\,dy \qquad \text{unde} \quad D = \{\,(x, y)\mid\ x^2 + y^2 \leq 1,\ \ y \geq 0\,\}$$

Rezolvare. Utilizând formula lui Green şi apoi coordonate polare obţinem

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\partial D} y^2\,dx + x^2\,dy &= 2\textstyle\iint_D (x - y)\,dx\,dy = 2\int_0^\pi d\theta \int_0^1 (r\,\cos\theta - r\,\sin\theta) r\,dr\\ &= 2\textstyle\int_0^\pi (\cos\theta - \sin\theta) d\theta \int_0^1 r^2\,dr = \frac{2}{3}(\sin\theta + \cos\theta)|_0^\pi = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

7.4 Integrale curbilinii în plan independente de drum

7.4.1 Orice drum $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ este echivalent cu drumul

$$\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma_1(t) = \gamma((1 - t)a + tb).$$

Fără a restrânge generalitatea, putem utiliza doar drumuri definite pe $[0, 1]$.

Figura 7.9

7.4.2 Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu şi $\gamma_0,\, \gamma : [0, 1] \longrightarrow D$ două drumuri de clasă C^1 din D cu aceleaşi extremităţi, adică astfel încât $\gamma_0(0) = \gamma(0)$ şi $\gamma_0(1) = \gamma(1)$.

Spunem că drumul γ se poate *deforma continuu* în γ_0 fără a ieşi din D dacă există o aplicaţie continuă $g : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow D$ astfel încât:

1) $g(t,0) = \gamma_0(t)$, oricare ar fi $t \in [0,1]$

2) $g(t,1) = \gamma(t)$, oricare ar fi $t \in [0,1]$

3) $g(0,s) = \gamma_0(0)$, oricare ar fi $s \in [0,1]$

4) $g(1,s) = \gamma_0(1)$, oricare ar fi $s \in [0,1]$.

7.4.3 Definiţie. Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ cu proprietatea că orice două drumuri din D cu aceleaşi extremitâti se pot deforma continuu unul în altul fără a ieşi din D este numit *domeniu simplu conex*. Intuitiv, D este un domeniu "fără găuri".

7.4.4 Teoremă. *Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu simplu conex şi*

$$\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

este o aplicaţie de clasă C^1 atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Oricare ar fi drumul închis de clasă C^1 pe porţiuni $\gamma[a,b] \longrightarrow D$ avem

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

b) Dacă γ_0 şi γ_1 sunt două drumuri din D cu aceleaşi extremităţi atunci

$$\int_{\gamma_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\gamma_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

c) Există o funcţie $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 astfel încât

$$P(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y), \qquad Q(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)$$

oricare ar fi $(x,y) \in D$.

d) Are loc relaţia

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \qquad oricare\ ar\ fi\ \ (x,y) \in D.$$

Demonstraţie."a)⇒b)" Fie două drumuri de clasa C^1 cu aceleaşi extremităţi

$$\gamma_0,\ \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow D, \qquad \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1).$$

Compunând γ_0 cu opusul drumului γ_1 (a se vedea pag. 169-**6**) rezultă drumul închis

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow D, \qquad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{daca} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_1(2-2t) & \text{daca} \quad t \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

şi avem

$$\int_{\gamma_0} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy-\int_{\gamma_1} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{\gamma} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0.$$

"b)⇒c)" Fie $(x_0,y_0)\in D$ un punct fixat şi fie

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

unde

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{\gamma_{(x,y)}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

şi $\gamma_{(x,y)} : [0,1]\longrightarrow D$ este un drum arbitrar cu $\gamma_{(x,y)}(0)=(x_0,y_0)$ şi $\gamma_{(x,y)}(1)=(x,y)$.

Figura 7.10

Calculând $\Phi(x+h,y)$ cu ajutorul drumului rezultat compunând $\gamma_{(x,y)}$ cu drumul liniar $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$, $\gamma(t)=(x+th,y)$ obţinem (a se vedea figura 7.10)

$$\Phi(x+h,y)-\Phi(x,y)=\int_{\gamma} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{x}^{x+h} P(t,y)\,dt.$$

Conform teoremei de medie (pag. 146-**30**) există ξ între x şi $x+h$ astfel încât

$$\int_{x}^{x+h} P(t,y)\,dt=h\,P(\xi,y)$$

şi prin urmare

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h,y)-\Phi(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}P(\xi,y)=P(x,y).$$

Similar se arată că $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)$. Din $P,Q\in C^1(D)$ rezultă $\Phi\in C^2(D)$.

"c)⇒d)" Utilizăm teorema lui Schwarz (pag. 114-**18**). Deoarece $\Phi\in C^2(D)$ avem

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \quad \text{oricare ar fi } \ (x,y)\in D.$$

"d)⇒a)" Utilizăm formula lui Green. Fie $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$ un drum închis de clasă C^1 şi fie D_γ domeniul a cărui frontieră este γ . Deoarece $D_\gamma \subset D$ avem

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{D_\gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0.$$

7.5 Integrale duble improprii

7.5.1 Pe parcursul acestei secţiuni vom considera doar domenii ale planului cu proprietatea că orice parte finită a frontierei este imaginea unui drum de clasă C^1 sau o reuniune finită de astfel de imagini.

7.5.2 Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu nemărginit şi fie $(D_n)_{n\geq 1}$ un şir de domenii compacte conţinute în D. Spunem că şirul $(D_n)_{n\geq 1}$ *epuizează* pe D dacă pentru orice mulţime compactă $K \subset D$ există $n_K \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$K \subset D_n\,, \qquad \text{oricare ar fi} \;\; n \geq n_K.$$

Şirul $(D_n)_{n\geq 1}$ este numit *crescător* dacă $D_n \subseteq D_{n+1}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

7.5.3 Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu nemărginit şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice domeniu compact $K \subset D$. Spunem că funcţia f este *integrabilă* dacă pentru orice şir crescător $(D_n)_{n\geq 1}$ care epuizează pe D şirul

$$\left(\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy \right)_{n\geq 1}$$

este convergent şi dacă limita lui nu depinde de şirul $(D_n)_{n\geq 1}$ ales. Valoarea acestei limite este numită integrala lui f pe D şi se utilizeză notaţia

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

7.5.4 Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu nemărginit şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice domeniu compact $K \subset D$. Dacă*

$$f(x,y) \geq 0\,, \qquad \textit{oricare ar fi} \;\; (x,y) \in D$$

şi dacă există şir crescător $(D_n)_{n\geq 1}$ care epuizează pe D pentru care şirul

$$\left(\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy \right)_{n\geq 1}$$

este mărginit atunci f este integrabilă.

Demonstraţie. Fie $M > 0$ astfel încât

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy \le M\,, \qquad \text{oricare ar fi} \ \ n \ge 1$$

şi fie $(D'_m)_{m\ge1}$ un alt şir crescător care epuizează pe D. Oricare ar fi $m \ge 1$ există $m' \ge 1$ astfel încât $D'_m \subset D_{m'}$ şi avem

$$\iint_{D'_m} f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_{D_{m'}} f(x,y)\,dx\,dy \le M$$

ceea ce arată că şirul

$$\left(\iint_{D'_n} f(x,y)\,dx\,dy\right)_{n\ge1}$$

este mărginit. Şirurile crescătoare şi mărginite fiind convergente, există limitele

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{si} \qquad \lim_{m\to\infty}\iint_{D'_m} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Plecând de la $(D_n)_{n\ge1}$ şi $(D'_m)_{m\ge1}$ generăm un şir crescător care epuizează pe D de forma $D_1 \subseteq D'_{m_1} \subseteq D_{n_1} \subseteq D'_{m_2} \subseteq D_{n_2} \subseteq D'_{m_3} \subseteq ...$ Deoarece şirul crescător şi mărginit

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_{D'_{m_1}} f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_{D_{n_1}} f(x,y)\,dx\,dy \le \dots$$

este convergent şi orice subşir al lui are aceeaşi limită. In particular, avem relaţia

$$\lim_{k\to\infty}\iint_{D_{n_k}} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty}\iint_{D'_{m_k}} f(x,y)\,dx\,dy$$

din care rezultă independenţa limitei de şirul ales

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{m\to\infty}\iint_{D'_m} f(x,y)\,dx\,dy.$$

7.5.5 Exerciţiu. Arătaţi că

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi \qquad \text{si} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Rezolvare. In acest caz $D = \mathbb{R}^2$ şi $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} > 0$. Şirul de discuri

$$(D_n)_{n\ge1} \qquad \text{unde} \qquad D_n = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ |\ \ x^2+y^2 \le n\,\}$$

este crescător şi epuizează $\mathbb{R}^2$. Utilizând schimbarea de variabile

$$A_n \longrightarrow D_n : \ (r,\theta) \mapsto (r\,\cos\theta,\ r\,\sin\theta)$$

(coordonate polare) unde $A_n = [0,n] \times [0,2\pi]$, obţinem

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy &= \iint_{A_n} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^n dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,d\theta \\ &= 2\pi \int_0^n e^{-r^2} r\,dr = \pi(1-e^{-n^2})\end{aligned}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi.$$

Alegând însă un alt şir crescător care epuizează $\mathbb{R}^2$ şi anume

$$(D'_n)_{n\geq 1} \qquad \text{unde} \qquad D'_n = [-n,n]\times[-n,n]$$

obţinem relaţia

$$\iint_{D'_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-n}^{n} dx \int_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2} dy = \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2} dx\right)^2$$

din care rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\iint_{D'_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy} = \sqrt{\pi}.$$

Figura 7.11

Capitolul 8

Integrale de suprafaţă

8.1 Integrala de suprafaţă de primul tip

8.1.1 Noţiunea de suprafaţă este un analog bidimensional al noţiunii de curbă. O curbă este o clasă de drumuri echivalente, numite parametrizări ale curbei. Similar, o suprafaţă se poate defini ca fiind o clasă de pânze netede echivalente.

8.1.2 Definiţie. Prin *pânză netedă* în $\mathbb{R}^3$ se înţelege o aplicaţie de clasă C^1

$$S : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad S(u,v) = (S_1(u,v), S_2(u,v), S_3(u,v))$$

definită pe un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ cu proprietatea că

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial S_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial S_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial S_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = 2, \qquad \text{oricare ar fi} \quad (u,v) \in D$$

8.1.3 Exemplu. Pânza netedă $S : [0,\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} S(\theta,\varphi) &= (S_1(\theta,\varphi), S_2(\theta,\varphi), S_3(\theta,\varphi)) \\ &= (x_0 + R\sin\theta\,\cos\varphi,\ y_0 + R\sin\theta\,\sin\varphi,\ z_0 + R\cos\theta) \end{aligned}$$

reprezintă o parametrizare a sferei de rază R şi centru (x_0, y_0, z_0).

8.1.4 Fie $S:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $S(u,v)=(S_1(u,v),S_2(u,v),S_3(u,v))$ o pânză netedă. Ea este o parametrizare a unei suprafeţe S. Pentru $(u_0,v_0)\in[a,b]\times[c,d]$ fixat,

$$\gamma_u:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3,\qquad \gamma_u(t)=S(t,v_0)=(S_1(t,v_0),S_2(t,v_0),S_3(t,v_0))$$

$$\gamma_v:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}^3,\qquad \gamma_v(t)=S(u_0,t)=(S_1(u_0,t),S_2(u_0,t),S_3(u_0,t))$$

reprezintă drumuri pe suprafaţa S. Ele trec prin punctul $S(u_0,v_0)$ şi vectorii tangenţi

$$\vec{\tau}_u(u_0,v_0)=\tfrac{d}{dt}\gamma_u(u_0)=\left(\tfrac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0),\ \tfrac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0),\ \tfrac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0)\right)$$

$$\vec{\tau}_v(u_0,v_0)=\tfrac{d}{dt}\gamma_v(v_0)=\left(\tfrac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0),\ \tfrac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0),\ \tfrac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$$

determină planul tangent la S în $S(u_0,v_0)$. In particular, produsul lor vectorial

$$\vec{N}(u_0,v_0)=\vec{\tau}_u(u_0,v_0)\times\vec{\tau}_v(u_0,v_0)=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0)\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0)\end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}}+\begin{vmatrix}\frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0)\end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}}+\begin{vmatrix}\frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0,v_0)\end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}}$$

cu coordonatele $(A(u_0,v_0),B(u_0,v_0),C(u_0,v_0))$ definite prin relaţiile

$$A(u_0,v_0)=\tfrac{D(S_2,S_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0),\ \ B(u_0,v_0)=\tfrac{D(S_3,S_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0),\ \ C(u_0,v_0)=\tfrac{D(S_1,S_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)$$

este un vector perpendicular pe planul tangent la suprafaţa S în punctul $S(u_0,v_0)$.

Figura 8.1

8.1.5 Fiecărei diviziuni

$$\Delta = \{[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]\}_{\substack{i=\overline{0,n-1} \\ j=\overline{0,k-1}}}$$

a dreptunghiului $[a, b] \times [c, d]$ obţinute plecând de la o diviziune

$$\delta = \{u_i\}_{i=\overline{0,n-1}}, \qquad a = u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-1} < u_n = b$$

a intervalului $[a, b]$ şi o diviziune

$$\tilde{\delta} = \{v_j\}_{j=\overline{0,k-1}}, \qquad c = v_0 < v_1 < \cdots < v_{k-1} < v_n = d$$

a intervalului $[c, d]$, îi corespunde o partiţie a suprafeţei S. In cazul în care norma diviziunii este 'suficient de mică'

$$\begin{aligned} S(u_{i+1}, v_j) &= (S_1(u_{i+1}, v_j), S_2(u_{i+1}, v_j), S_3(u_{i+1}, v_j)) \\ &\approx \Big(S_1(u_i, v_j) + \tfrac{\partial S_1}{\partial u}(u_i, v_j)\,(u_{i+1} - u_i),\ S_2(u_i, v_j) + \tfrac{\partial S_2}{\partial u}(u_i, v_j)\,(u_{i+1} - u_i), \\ &\quad S_3(u_i, v_j) + \tfrac{\partial S_3}{\partial u}(u_i, v_j)\,(u_{i+1} - u_i) \Big) = S(u_i, v_j) + \vec{\tau}_u(u_i, v_j)\,(u_{i+1} - u_i) \end{aligned}$$

adică

$$S(u_{i+1}, v_j) - S(u_i, v_j) \approx \vec{\tau}_u(u_i, v_j)\,(u_{i+1} - u_i)$$

şi similar

$$S(u_i, v_{j+1}) - S(u_i, v_j) \approx \vec{\tau}_v(u_i, v_j)\,(v_{j+1} - v_j).$$

Figura 8.2

Rezultă că aria porţiunii de suprafaţă $S([u_i,u_{i+1}]\times[v_j,v_{j+1}])$ poate fi aproximată cu

$$\begin{aligned}
&||\vec{\tau}_u(u_i,v_j)\times\vec{\tau}_v(u_i,v_j)||\,(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j)\\
&\qquad=||(A(u_i,v_j),B(u_i,v_j),C(u_i,v_j))||\,(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j)\\
&\qquad=\sqrt{A^2(u_i,v_j)+B^2(u_i,v_j)+C^2(u_i,v_j)}\,(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j).
\end{aligned}$$

iar aria suprafeţei cu

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sqrt{A^2(u_i,v_j)+B^2(u_i,v_j)+C^2(u_i,v_j)}\,(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j).$$

Acest rezultat sugerează următoarea definiţie.

8.1.6 Definiţie. Prin *aria suprafeţei* $S:D\longrightarrow\mathbb{R}^3$ se înţelege numărul

$$\mathrm{aria}(S)=\iint_D\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\,du\,dv$$

notaţiile fiind cele prezentate la pag. 194-**4**.

8.1.7 Dacă unghiul dintre vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ are măsura α atunci

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=||a||\cdot||b||\,\cos\alpha\,,\qquad ||\vec{a}\times\vec{b}||=||a||\cdot||b||\,\sin\alpha$$

şi are loc relaţia

$$||\vec{a}\times\vec{b}||^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=||\vec{a}||^2\;||\vec{b}||^2.$$

Notând

$$E(u,v)=||\vec{\tau}_u(u,v)||^2,\qquad F(u,v)=\vec{\tau}_u(u,v)\cdot\vec{\tau}_u(u,v)\,,\qquad G(u,v)=||\vec{\tau}_v(u,v)||^2$$

din

$$||\vec{\tau}_u(u,v)\times\vec{\tau}_v(u,v)||^2+(\vec{\tau}_u(u,v)\cdot\vec{\tau}_v(u,v))^2=||\vec{\tau}_u(u,v)||^2\;||\vec{\tau}_v(u,v)||^2$$

rezultă relaţia

$$A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)=||\vec{\tau}_u(u,v)\times\vec{\tau}_v(u,v)||^2=E(u,v)\,G(u,v)-F^2(u,v)$$

adică avem

$$\mathrm{aria}(S)=\iint_D\sqrt{E(u,v)\,G(u,v)-F^2(u,v)}\,du\,dv.$$

8.1.8 Exemplu. În cazul sferei $S:[0,\pi]\times[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
S(\theta,\varphi)\;&=(S_1(\theta,\varphi),S_2(\theta,\varphi),S_3(\theta,\varphi))\\
&=(x_0+R\sin\theta\,\cos\varphi,\;y_0+R\sin\theta\,\sin\varphi,\;z_0+R\cos\theta)
\end{aligned}$$

avem

$$\vec{r}_\theta(\theta,\varphi) = (R\cos\theta\,\cos\varphi,\; R\cos\theta\,\sin\varphi,\; -R\sin\theta)$$

$$\vec{r}_\varphi(\theta,\varphi) = (-R\sin\theta\,\sin\varphi,\; R\sin\theta\,\cos\varphi,\; 0)$$

şi

$$E(\theta,\varphi) = R^2, \qquad F(\theta,\varphi) = 0\,, \qquad G(\theta,\varphi) = R^2\sin^2\theta$$

Rezultă că

$$\text{aria}(S) = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} R^2\sin\theta\, d\varphi = R^2\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2.$$

8.1.9 In cazul unei pânze materiale $S:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ cu densitatea (de exemplu, în g/cm^2) descrisă de o funcţie continuă $\varrho:\{S(u,v)\,|\,(u,v)\in[a,b]\times[c,d]\,\}\longrightarrow\mathbb{R}$, masa pânzei poate fi aproximată folosind o diviziune Δ suficient de fină cu ajutorul sumei

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}\varrho(S(u_i,v_j))\sqrt{A^2(u_i,v_j)+B^2(u_i,v_j)+C^2(u_i,v_j)}\,(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j).$$

Figura 8.3

8.1.10 Definiţie. Fie $S : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o pânză netedă şi $f : \{S(u,v)\mid(u,v)\in D\}\longrightarrow\mathbb{R}$ o aplicaţie continuă. Prin *integrala funcţiei f pe suprafaţa S* se înţelege integrala

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma &= \iint_D f(S(u,v))\,\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\,du\,dv\\ &= \iint_D f(S(u,v))\,\sqrt{E(u,v)\,G(u,v)-F^2(u,v)}\,du\,dv.\end{aligned}$$

8.1.11 Definiţie. Spunem că pânzele netede $S : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ şi $\tilde{S} : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sunt *echivalente* dacă există o bijecţie $D\longrightarrow\tilde{D} :\ (u,v)\mapsto(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ de clasă C^1 cu

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\neq 0 \qquad \text{si} \qquad S(u,v)=\tilde{S}(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

oricare ar fi $(u,v)\in D$.

8.1.12 Relaţia definită este o relaţie de echivalenţă care permite împărţirea mulţimii tuturor pânzelor netede în clase de echivalenţă. Clasele de echivalenţă rezultate sunt numite *suprafeţe*. Pânzele corespunzătoare unei suprafeţe sunt numite *parametrizări*. Se poate arăta ca integrala unei funcţii f definite pe o suprafaţă nu depinde de parametrizarea aleasă, adică în cazul în care S şi $\tilde{S}$ sunt echivalente avem

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{\tilde{S}} f(x,y,z)\,d\sigma.$$

8.2 Integrala de suprafaţă de al doilea tip

8.2.1 Fie $S:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ o pânză netedă traversată de un fluid cu viteza la nivelul suprafeţei descrisă de câmpul vectorial $\vec{V}:S([a,b]\times[c,d])\longrightarrow\mathbb{R}^3$. Vectorul

$$\vec{\nu}(u,v)=(\nu_1(u,v),\nu_2(u,v),\nu_3(u,v))=\frac{(A(u,v),B(u,v),C(u,v))}{\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}}$$

reprezintă *versorul normalei* la suprafaţa S în punctul $S(u,v)$. Cantitatea de fluid care traverseaza suprafaţa S în unitatea de timp (fluxul) se poate aproxima alegând o diviziune Δ a dreptunghiului $[a,b]\times[c,d]$ cu norma suficient de mică prin suma

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}\vec{V}(S(u_i,v_j))\cdot\vec{\nu}(u_i,v_j)\sqrt{A^2(u_i,v_j)+B^2(u_i,v_j)+C^2(u_i,v_j)}(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j).$$

Figura 8.4

8.2.2 Definiţie. Fie $S : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o pânză netedă şi un câmp vectorial continuu

$$\vec{F} : S(D) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Integrala de suprafaţă a câmpului vectorial $\vec{F}$ *pe suprafaţa* S, notată cu

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma \qquad \text{sau} \qquad \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

se defineşte prin relaţia

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iint\limits_D [P(S(u,v))\,A(u,v) + Q(S(u,v))\,B(u,v) + R(S(u,v))\,C(u,v)]\,du\,dv.$$

8.2.3 Definiţie. Spunem că pânzele netede $S : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ şi $\tilde{S} : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sunt *echivalente cu păstrarea* (respectiv, *schimbarea) orientării* dacă există

$$D \longrightarrow \tilde{D} : \ (u,v) \mapsto (\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

bijectivă de clasă C^1 cu

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v) > 0, \qquad \left(\text{respectiv, } \ \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v) < 0\right)$$

şi

$$S(u,v) = \tilde{S}(\varphi(u,v), \psi(u,v)), \qquad \text{oricare ar fi } \ (u,v) \in D.$$

8.2.4 Propoziţie. *Dacă pânzele* $S : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *şi* $\tilde{S} : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *sunt echivalente cu păstrarea (respectiv, schimbarea) orientării şi* $\vec{F} : S(D) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *este continuă atunci*

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iint_{\tilde{S}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma \qquad \left(\text{respectiv } \ \iint_S \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = -\iint_{\tilde{S}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma\right).$$

8.3 Formula lui Stokes

8.3.1 Definiţie. Prin *rotorul* câmpului vectorial de clasă C^1

$$\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

definit pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se înţelege câmpul vectorial

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \mathrm{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

8.3.2 Formal, rot $\vec{F}$ este produsul vectorial dintre operatorul $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ şi $\vec{F}$

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{i}}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{k}}=\mathrm{rot}\,\vec{F}.$$

8.3.3 Lemă *Fie $D\subset\mathbb{R}^2$ un domeniu pentru care are loc formula lui Green şi*

$$S:D\longrightarrow\mathbb{R}^3,\qquad S(x,y)=(x,y,h(x,y))$$

o suprafaţă mărginită de curba ∂S. Dacă $\vec{F}$ este un câmp de clasă C^1 de forma

$$\vec{F}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3,\qquad \vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),0,0)$$

definit pe un domeniu Ω ce include suprafaţa S atunci

$$\int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma.$$

Demonstraţie. Fie $[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2:t\mapsto(\varphi(t),\psi(t))$ un drum de clasă C^1 pe porţiuni a cărui imagine coincide cu frontiera lui D. Marginea (bordul) suprafeţei S coincide cu imaginea drumului $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ \gamma(t)=S(\varphi(t),\psi(t))=(\varphi(t),\psi(t),h(\varphi(t),\psi(t)))$. Deoarece

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\left(0,\frac{\partial P}{\partial z},-\frac{\partial P}{\partial y}\right),\qquad (A,B,C)=\left(-\frac{\partial h}{\partial u},-\frac{\partial h}{\partial v},0\right)$$

utilizând formula lui Green obţinem

$$\begin{aligned}\int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\gamma P\,dx &=\int_a^b P(\varphi(t),\psi(t),h(\varphi(t),\psi(t)))\,\varphi'(t)\,dt=\int_{\partial D}P(u,v,h(u,v))\,du\\ &=-\iint_D\frac{\partial}{\partial v}P(u,v,h(u,v))\,du\,dv=\iint_S\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma.\end{aligned}$$

8.3.4 Teoremă (Formula lui Stokes) *Dacă S este o suprafaţă astfel încât orice paralelă dusă la axele de coordonate întâlneşte S în cel mult un punct şi dacă*

$$\vec{F}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3,\qquad \vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

este un câmp vectorial de clasă C^1 definit pe un domeniu Ω ce include S atunci

$$\int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma.$$

Demonstraţie. Se utilizeaza lema plecând de la descompunerea

$$(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))=(P(x,y,z),0,0)+(0,Q(x,y,z),0)+(0,0,R(x,y,z)).$$

8.3.5 Formula lui Stokes se poate extinde la suprafeţe care pot fi descompuse în unele de tipul celor din teoremă. In notaţii alternative formula devine

$$\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

8.4 Integrale curbilinii în spaţiu independente de drum

8.4.1 Teoremă. *Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu simplu conex şi*

$$\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

este o aplicaţie de clasă C^1 atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Oricare ar fi drumul închis de clasă C^1 pe porţiuni $\gamma[a, b] \longrightarrow \Omega$ avem

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

b) Dacă γ_0 şi γ sunt două drumuri din Ω cu aceleaşi extremităţi atunci

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\gamma_0} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

c) Există o funcţie $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 astfel încât în Ω

$$P(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, z), \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, z), \quad R(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z).$$

d) Au loc în Ω relaţiile

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Demonstraţie. Este similară cu demonstraţia prezentată la pag. 187-**4**. In loc de formula lui Green se utilizează formula lui Stokes.

Capitolul 9

Integrale triple

9.1 Definiţie şi proprietăţi

9.1.1 Integralele triple pot fi definite şi studiate bazându-ne pe analogia cu integralele duble. Vom prezenta doar cateva definiţii şi rezultate.

9.1.2 Definiţie. Fie paralelipipedul $A = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$. Plecând de la o diviziune a intervalului $[a, a']$

$$\delta = \{x_i\}_{i=\overline{0,n}} \qquad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = a'$$

o diviziune a intervalului $[b, b']$

$$\delta' = \{y_j\}_{j=\overline{0,m}} \qquad b = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b'$$

şi o diviziune a intervalului $[c, c']$

$$\delta'' = \{z_k\}_{k=\overline{0,p}} \qquad c = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_{p-1} < z_p = c'$$

obţinem o *diviziune*

$$\Delta = \{A_{ijk}\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}\\ k=\overline{1,p}}} \qquad A_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [x_{k-1}, z_k]$$

a paralelipipedului A cu *norma*

$$||\Delta|| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n\\ 1 \leq j \leq m\\ 1 \leq k \leq p}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}.$$

9.1.3 Definiţie. Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie definită pe paralelipipedul A, $\Delta = \{A_{ijk}\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}\\ k=\overline{1,p}}}$ o diviziune a lui A şi fie $\{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}\\ k=\overline{1,p}}}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii, adică astfel încât $(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk}) \in A_{ijk}$, oricare ar fi i, j, k. Prin *sumă Riemann* asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $\{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})\}$ se înţelege numărul

$$\sigma_\Delta(f, \{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})\}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

9.1.4 Definiţie. Spunem că funcţia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este *integrabilă* (Riemann) pe A dacă există un număr $I_f \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\nu > 0$ astfel încât relaţia

$$|\sigma_\Delta(f, \{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})\}) - I_f| < \varepsilon$$

are loc pentru orice diviziune Δ cu $||\Delta|| < \nu$ şi pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare $\{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})\}$. Numărul I_f se numeşte *integrala* funcţiei f pe A şi se utilizează pentru el notaţia $\iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ sau $\iiint_A f\, dv$.

9.1.5 Teoremă. *Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe A dacă şi numai dacă există un număr $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ cu $\lim_{n\to\infty} ||\Delta_n|| = 0$ şi pentru orice alegere a sistemelor de puncte intermediare asociate $\{(\xi^n_{ijk}, \eta^n_{ijk}, \zeta^n_{ijk})\}$*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\Delta(f, \{(\xi^n_{ijk}, \eta^n_{ijk}, \zeta^n_{ijk})\}) = I.$$

In cazul în care f este integrabilă avem $I = \iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 138-**5**).

9.1.6 Propoziţie.

a) Dacă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă şi $\alpha \in \mathbb{R}$ atunci funcţia αf este integrabilă şi

$$\iiint_A (\alpha f)(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \alpha \iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

b) Dacă $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile atunci funcţiile $f \pm g$ sunt integrabile şi

$$\iiint_A (f \pm g)(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \pm \iiint_A g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 139-**6**).

9.1.7 Propoziţie.
a) Dacă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *este integrabilă şi* $f(x,y,z) \geq 0$ *oricare ar fi* $(x,y,z) \in A$ *atunci*

$$\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \geq 0.$$

b) Dacă $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *sunt integrabile şi* $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ *oricare ar fi* $(x,y,z) \in A$ *atunci*

$$\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \leq \iiint_A g(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

c) Dacă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *este integrabilă atunci*

$$\left| \iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \right| \leq \iiint_A |f(x,y,z)|\, dx\, dy\, dz.$$

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 139-**8**).

9.1.8 Teoremă. *Dacă funcţia* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *este integrabilă atunci este mărginită.*

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 140-**11**).

9.1.9 Teoremă. *Fie paralelipipedul* $A = [a,a'] \times [b,b'] \times [c,c']$. *Dacă* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *este integrabilă, funcţia*

$$[b,b'] \times [c,c'] \longrightarrow \mathbb{R} : \ (y,z) \mapsto f(x,y,z)$$

este integrabilă pe dreptunghiul $D = [b,b'] \times [c,c']$ *oricare ar fi* $x \in [a,b]$ *şi dacă funcţia*

$$[a,a'] \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \mapsto \iint_D f(x,y,z)\, dy\, dz$$

este integrabilă pe $[a,b]$ *atunci*

$$\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\iint_D f(x,y,z)\, dy\, dz \right) dx.$$

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei duble (pag. 175-**15**).

9.1.10 Teoremă. *Orice funcţie continuă* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *este integrabilă.*

Demonstraţie. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 145-**25**).

9.1.11 Definiţie. Spunem despre o mulţime $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ că are *volum nul* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ mulţimea $\mathcal{V}$ poate fi acoperită cu o familie de paralelipipede având suma volumelor mai mică decât ε.

9.1.12 Imaginea unei unei pânze netede are volum nul şi se poate arăta că orice funcţie $f:[a,a']\times[b,b']\times[c,c']\longrightarrow\mathbb{R}$ continuă cu excepţia imaginilor unui număr finit de pânze netede este integrabilă.

9.1.13 Dacă $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ este o funcţie continuă definită pe un domeniu mărginit Ω cu frontiera formată dintr-un număr finit de pânze netede atunci funcţia

$$\tilde{f}:[a,a']\times[b,b']\times[c,c']\longrightarrow\mathbb{R}\,,\qquad \tilde{f}(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z) & \text{daca} \quad (x,y,z)\in\Omega \\ 0 & \text{daca} \quad (x,y,z)\not\in\Omega \end{cases}$$

definită pe paralelipipedul $A=[a,a']\times[b,b']\times[c,c']$ care include pe Ω este integrabilă. Valoarea integralei

$$\iiint_A \tilde{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

nu depinde de alegerea paralelipipedului A conţinând Ω şi prin definiţie

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_A \tilde{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

9.1.14 Definiţie. Prin domeniu *simplu* în raport cu xOy se înţelege un domeniu

$$\Omega=\{\,(x,y,z)\ |\ (x,y)\in D,\ \varphi(x,y)\leq z\leq\psi(x,y)\ \}$$

unde $D\subset\mathbb{R}^2$ este un domeniu compact cu frontiera formată dintr-un număr finit de drumuri de clasă C^1, iar φ, $\psi:D\longrightarrow\mathbb{R}$ sunt funcţii continue, de clasă C^1 în $\overset{\circ}{D}$.

9.1.15 Propoziţie.
Dacă funcţia $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ definită pe domeniul simplu în raport cu planul xOy

$$\Omega=\{\,(x,y,z)\ |\ (x,y)\in D,\ \varphi(x,y)\leq z\leq\psi(x,y)\ \}$$

este continuă atunci

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_D\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy.$$

9.1.16 Teoremă (Formula de schimbare de variabilă). *Fie $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ un domeniu compact cu frontiera formată dintr-un număr finit de imagini de pânze netede şi fie*

$$T:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3,\qquad T(u,v,w)=(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))$$

o aplicaţie injectivă, de clasă C^1 cu proprietatea că

$$\frac{D(\varphi,\psi,\chi)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial\varphi}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial\psi}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial\chi}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial\chi}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial\chi}{\partial w}(u,v,w) \end{vmatrix} \neq 0\,, \qquad \forall (u,v,w)\in\Omega.$$

Dacă $f : T(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă atunci

$$\iiint\limits_{T(\Omega)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)) \left|\frac{D(\varphi,\psi,\chi)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

9.2 Formula Gauss-Ostrogradski

9.2.1 Definiţie. Prin *divergenţa* câmpului vectorial de clasă C^1

$$\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

definit pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se înţelege câmpul scalar

$$\mathrm{div}\,\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

9.2.2 Formal, div $\vec{F}$ este produsul scalar dintre operatorul $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ şi $\vec{F}$

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{F}.$$

9.2.3 Lemă. *Dacă $\Omega = \{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ \varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y)\}$ este un domeniu simplu în raport cu xOy şi dacă $\vec{F}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 de forma*

$$\vec{F} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \vec{F}(x,y,z) = (0,0,R(x,y,z))$$

atunci are loc relaţia

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\ d\sigma = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\,\vec{F}\ dv.$$

unde $\vec{\nu}$ este versorul normalei exterioare.

Demonstraţie. Pe faţa $\{(x,y,\psi(x,y)) \mid (x,y)\in D\}$ avem

$$\vec{\nu}(x,y) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}, -\frac{\partial\psi}{\partial y}, 1\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

iar pe faţa $\{(x,y,\varphi(x,y)) \mid (x,y)\in D\}$ normala exterioară este

$$\vec{\nu}(x,y) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, -1\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

Deoarece pe restul frontierei lui Ω versorul $\vec{\nu}$ este perpendicular pe Oz avem

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\; d\sigma = \iint_D [R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))]\, dx\, dy.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\; dv &= \iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\, dz\right) dx\, dy \\ &= \iint_D [R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))]\, dx\, dy. \end{aligned}$$

9.2.4 Teoremă. (Formula Gauss-Ostrogradski) *Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu simplu in raport cu cele trei plane de coordonate şi dacă*

$$\vec{F} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

este un câmp vectorial de clasă C^1 atunci are loc relaţia

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\; d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\; dv.$$

unde $\vec{\nu}$ este versorul normalei exterioare.

Demonstraţie. Se utilizeaza lema plecând de la descompunerea

$$(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) = (P(x,y,z),0,0) + (0,Q(x,y,z),0) + (0,0,R(x,y,z)).$$

9.2.5 Formula Gauss-Ostrogradski (numită şi formula *flux-divergenţă*) se poate extinde la domenii care pot fi descompuse în unele de tipul celor din teoremă. In notaţii alternative formula devine

$$\iint_{\partial\Omega} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dz\, dx = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\, dv.$$

Capitolul 10

Elemente de analiză complexă

10.1 Numere complexe

10.1.1 Mulţimea numerelor complexe

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathrm{i} = \{ z = x + y\mathrm{i} \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

considerată împreună cu operaţiile de adunare

$$(x + y\mathrm{i}) + (x' + y'\mathrm{i}) = (x + x') + (y + y')\mathrm{i}$$

şi de înmulţire cu un număr real

$$\alpha(x + y\mathrm{i}) = \alpha x + \alpha y\mathrm{i}$$

este spaţiu vectorial real de dimensiune 2. Scrierea unui număr complex sub forma $z = x + y\mathrm{i}$ reprezintă dezvoltarea lui în raport cu baza $\{1, \mathrm{i}\}$. Aplicaţia

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x + y\mathrm{i}$$

este un izomorfism care permite identificarea celor două spaţii vectoriale şi conduce la o reprezentare geometrică naturală a numerelor complexe în plan (*planul complex*).

10.1.2 Relaţia $\mathrm{i}^2 = -1$ permite definirea unei operaţii suplimentare pe $\mathbb{C}$

$$(x + y\mathrm{i})(x' + y'\mathrm{i}) = (xx' - yy') + (xy' + yx')\mathrm{i}.$$

numită *înmulţirea numerelor complexe.* Mulţimea $\mathbb{C}$ considerată împreuna cu operaţiile de adunare şi înmulţire a numerelor complexe este corp comutativ. In particular, fiecare număr complex nenul admite un invers

$$(x+y\mathrm{i})^{-1} = \frac{1}{x+y\mathrm{i}} = \frac{x-y\mathrm{i}}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}.$$

10.1.3 Definiţie. Fie $z = x + y\mathrm{i}$ un număr complex.

Numărul $\mathfrak{Re}\, z = x$ se numeşte *partea reală* a lui z.

Numărul $\mathfrak{Im}\, z = y$ se numeşte *partea imaginară* a lui z.

Numărul $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$ se numeşte *conjugatul* lui z.

Numărul $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ se numeşte *modulul* lui z.

10.1.4 MATHEMATICA

In[1]:=**I**	$\longmapsto$	Out[1]= i	In[5]:=**Re**[**3+4 I**]	$\longmapsto$	Out[5]=3
In[2]:=**Sqrt**[**−4**]	$\longmapsto$	Out[2]=2 i	In[6]:=**Im**[**3+4 I**]	$\longmapsto$	Out[6]=4
In[3]:=(**3+2 I**)^**2**	$\longmapsto$	Out[3]=5+12 i	In[7]:=**Abs**[**3+4 I**]	$\longmapsto$	Out[7]=5
In[4]:=(**3+2 I**)/(**5−I**)	$\longmapsto$	Out[4]=$\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$	In[8]:=**Conjugate**[**3+4 I**]	$\longmapsto$	Out[8]=3−4 i.

10.1.5 Propoziţie. *Relaţiile*

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1\, z_2} = \bar{z}_1\, \bar{z}_2 \qquad \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

$$|\bar{z}| = |z| \qquad |z|^2 = z\,\bar{z} \qquad \overline{(\bar{z})} = z$$

$$\mathfrak{Re}\, z = \tfrac{z+\bar{z}}{2} \qquad \mathfrak{Im}\, z = \tfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}} \qquad z = \mathfrak{Re}\, z + \mathrm{i}\, \mathfrak{Im}\, z.$$

au loc oricare ar fi numerele complexe z_1, z_2 şi z.

Demonstraţie. Relaţiile rezultă direct din definiţie (pag. 210-**3**).

10.1.6 Oricare ar fi φ şi ψ avem

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi)$$
$$+\mathrm{i}(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi) = \cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi).$$

Utilizând notaţia lui Euler

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

relaţia anterioară devine

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}.$$

10.1.7 Observaţie. Pentru orice număr nenul $z = x + y\mathrm{i}$ există $\arg z \in (-\pi, \pi]$ încât

$$z = |z|(\cos(\arg z) + \mathrm{i}\sin(\arg z)) = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}.$$

Figura 10.1

Numărul $\arg z$, numit *argumentul principal* al lui $z = x + y\mathrm{i}$, este

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{daca} \quad x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{daca} \quad x < 0, \quad y > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{daca} \quad x < 0, \quad y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{daca} \quad x = 0, \quad y > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{daca} \quad x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

10.1.8 Propoziţie. *Oricare ar fi numărul complex $z = x + y\mathrm{i}$ avem*

$$\left.\begin{array}{c} |x| \\ \\ |y| \end{array}\right\} \leq |x + y\mathrm{i}| \leq |x| + |y|$$

adică

$$\left.\begin{array}{c} |\mathfrak{Re}\, z| \\ \\ |\mathfrak{Im}\, z| \end{array}\right\} \leq |z| \leq |\mathfrak{Re}\, z| + |\mathfrak{Im}\, z|.$$

Demonstraţie. Avem

$$|x + y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \qquad |x + y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$$

iar relaţia

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$$

este echivalentă cu relaţia evident adevărată

$$x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2.$$

10.1.9 Propoziţie. *Aplicaţia modul*

$$| \ | : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad |z| = |x + y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

este o normă pe spaţiul vectorial real $\mathbb{C}$*, iar*

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

este distanţa asociată.

Demonstraţie. Oricare ar fi numărul complex $z = x + y\mathrm{i}$ avem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

şi

$$|z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0.$$

Dacă α este număr real atunci

$$|\alpha z| = |(\alpha x) + (\alpha y)\mathrm{i}| = \sqrt{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2} = \sqrt{\alpha^2(x^2 + y^2)} = |\alpha| \, |z|.$$

Oricare ar fi numerele $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ şi $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ avem relaţia

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \, \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \, z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathfrak{Re}\,(z_1 \, \bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\mathfrak{Re}\,(z_1 \, \bar{z}_2)| \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \, \bar{z}_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

din care rezultă că

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

10.1.10 Dacă considerăm $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu norma uzuală

$$|| \ || : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad ||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

atunci

$$||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + y\mathrm{i}|$$

ceea ce arată că aplicaţia liniară

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} : \ (x, y) \mapsto x + y\mathrm{i}$$

este un izomorfism de spaţii vectoriale normate care permite identificarea spaţiilor normate $(\mathbb{R}^2, || \ ||)$ şi $(\mathbb{C}, | \ |)$. Dacă se are în vedere doar structura de spaţiu vectorial normat, spaţiile $(\mathbb{R}^2, || \ ||)$ şi $(\mathbb{C}, | \ |)$ diferă doar prin notaţiile utilizate. Distanţa

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

dintre două numere $z_1 = x_1 + y_1 \mathrm{i}$ şi $z_2 = x_2 + y_2 \mathrm{i}$ în planul complex corespunde distanţei dintre punctele corespunzătoare din planul euclidian (a se vedea figura 10.2)

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Figura 10.2

10.1.11

$$|z_1 - z_2| = \text{ distanta in planul complex intre } z_1 \text{ si } z_2.$$

$$|z| = |z - 0| = \text{ distanta in planul complex intre } z \text{ si origine.}$$

Fie $a \in \mathbb{C}$ fixat şi $r > 0$. Mulţimea

$$B_r(a) = \{\ z \mid \ |z - a| < r\ \}$$

se numeşte *discul* (deschis) de centru a şi rază r (a se vedea figura 10.3).

Figura 10.3

10.1.12 Definiţie. Spunem că o mulţime $M \subset \mathbb{C}$ este *mărginită* dacă există $a \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$ astfel încât $M \subseteq B_r(a)$.

10.1.13 Exerciţiu. Mulţimea M este mărginită dacă şi numai dacă există $r > 0$ astfel încât $|z| \leq r$, oricare ar fi $z \in M$.

Figura 10.4

10.1.14 Definiţie. O mulţime $D \subseteq \mathbb{C}$ este numită *mulţime deschisă* dacă oricare ar fi $a \in D$ există $r > 0$ astfel încât $B_r(a) \subset D$. Spunem că despre o mulţime $F \subseteq \mathbb{C}$ că este *închisă* dacă mulţimea $\mathbb{C} - F$ este deschisă.

10.1.15 Exemple.

a) Discul $B_1(0)$ este mulţime deschisă.

b) Semiplanul $\{ \ z \ | \ \ \mathfrak{Im}\ z > 0 \ \}$ este mulţime deschisă.

c) Orice mulţime finită $F \subseteq \mathbb{C}$ este o mulţime închisă.

d) Semiplanul $\{ \ z \ | \ \ \mathfrak{Re}\ z \geq 0 \ \}$ este mulţime închisă.

10.1.16 Definiţie. O mulţime $K \subseteq \mathbb{C}$ este numită *mulţime compactă* dacă este închisă şi mărginită.

10.1.17 Exerciţiu. Să se arate că relaţiile

a) $\quad |z_1\, z_2| = |z_1|\, |z_2|$

b) $\quad |\,|z_1| - |z_2|\,| \leq |z_1 - z_2|$

c) $\quad |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2$

au loc oricare ar fi numerele complexe z_1 şi z_2.

Rezolvare. a) Avem

$$(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).$$

b) Din

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|, \qquad |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|$$

rezultă relaţia

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

echivalentă cu

$$|\,|z_1| - |z_2|\,| \leq |z_1 - z_2|.$$

c) Prin calcul direct obţinem

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2.$$

10.2 Şiruri de numere complexe

10.2.1 Definiţie. Spunem că şirul $(z_n)_{n\geq 0}$ este *convergent* la a şi scriem

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0.$$

10.2.2 Din relaţia

$$\left.\begin{array}{l} |x_n - \alpha| \\ \\ |y_n - \beta| \end{array}\right\} \leq |(x_n + y_n\mathrm{i}) - (\alpha + \beta\mathrm{i})| \leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n\mathrm{i}) = \alpha + \beta\mathrm{i} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \\ \\ \lim_{n\to\infty} y_n = \beta. \end{array}\right.$$

adică şirul de numere complexe $(z_n)_{n\geq 0}$ este convergent dacă şi numai dacă şirurile de numere reale $(\mathfrak{Re}\, z_n)_{n\geq 0}$ şi $(\mathfrak{Im}\, z_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente şi

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{Re}\, z_n + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathfrak{Im}\, z_n.$$

10.2.3 Definiţie. Un şir $(z_n)_{n\geq 0}$ este *mărginit* dacă există $r>0$ astfel încât

$$|z_n| \leq r, \qquad \text{oricare ar fi } n \geq 0.$$

10.2.4 Din relaţia

$$\left.\begin{array}{l} |x_n| \\ \\ |y_n| \end{array}\right\} \leq |x_n + y_n\mathrm{i}| \leq |x_n| + |y_n|$$

rezultă că şirul de numere complexe $(z_n)_{n\geq 0}$ este mărginit dacă şi numai dacă şirurile de numere reale $(\mathfrak{Re}\, z_n)_{n\geq 0}$ şi $(\mathfrak{Im}\, z_n)_{n\geq 0}$ sunt mărginite.

10.2.5 Definiţie. Spunem că şirul de numere complexe $(z_n)_{n\geq 0}$ are *limita infinită*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty.$$

10.3 Functii complexe de variabilă complexă

10.3.1 Prin *funcţie complexă* se înţelege orice funcţie cu valori complexe.

10.3.2 Definiţie. Spunem că funcţia reală de variabilă reală

$$f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

este *derivabilă* în punctul $t_0 \in (a,b)$ dacă există şi este finită limita

$$f'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

numită *derivata* funcţiei f în punctul t_0.

10.3.3 Definiţia anterioară nu poate fi extinsă direct la funcţiile de două variabile

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

deoarece relaţia

$$f'(x_0, y_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{(x,y) - (x_0,y_0)}$$

este fără sens, împărţirea cu vectorul $(x-x_0, y-y_0) = (x,y) - (x_0, y_0)$ nefiind definită. Posibilitatea împărţirii cu un număr complex nenul permite insă definirea derivabilităţii unei funcţii de variabilă complexă urmând direct analogia cu cazul real.

10.3.4 Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. Spunem că funcţia complexă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este $\mathbb{C}$-*derivabilă* (sau *olomorfă*) în punctul $z_0 \in D$ dacă există şi este finită limita

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

numită *derivata* funcţiei f în punctul z_0. In loc de $f'(z_0)$ scriem uneori $\frac{df}{dz}(z_0)$.

10.3.5 Exemplu. Funcţia

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^3$$

este $\mathbb{C}$-derivabilă în orice punct $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z^2 + z_0 z + z_0^2) = 3z_0^2$$

şi $f'(z) = 3z^2$, adică avem

$$(z^3)' = 3z^2.$$

10.3.6 Funcţia

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \bar{z}$$

nu este $\mathbb{C}$-derivabilă în $z_0 = 1$ deoarece limita

$$\lim_{z \to 1} \frac{\bar{z} - 1}{z - 1}$$

nu există. Alegând şirul $z_n = \frac{n}{n+1}$ cu $\lim_{n \to \infty} z_n = 1$ obţinem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{z}_n - 1}{z_n - 1} = 1$$

dar alegând şirul $z_n = 1 + \frac{1}{n+1}\mathrm{i}$ cu $\lim_{n \to \infty} z_n = 1$ obţinem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{z}_n - 1}{z_n - 1} = -1.$$

10.3.7 Bazându-ne pe identificarea lui $\mathbb{C}$ cu $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \ x + y\mathrm{i} \mapsto (x, y)$$

putem descrie orice funcţie complexă de o variabilă complexă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu ajutorul a două funcţii reale de câte două variabile reale

$$f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)\,\mathrm{i}$$

unde

$$u = \mathfrak{Re}\ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{este partea reala a lui } f$$

$$v = \mathfrak{Im}\ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{este partea imaginara a lui } f.$$

10.3.8 Exemple. a) In cazul funcţiei

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \bar{z}$$

avem

$$f(x + y\mathrm{i}) = x - y\mathrm{i}$$

adică

$$u(x, y) = x, \qquad v(x, y) = -y.$$

b) In cazul funcţiei

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^2$$

avem

$$f(x + y\mathrm{i}) = (x + y\mathrm{i})^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\mathrm{i}$$

şi prin urmare

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

10.3.9 Conform definiţiei, funcţia

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)\,\mathrm{i}$$

este $\mathbb{C}$-derivabilă în $z_0 = x_0 + y_0\mathrm{i}$ dacă şi numai dacă există şi este finită limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Pentru ca

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \alpha + \beta\mathrm{i}$$

este necesar ca

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \alpha + \beta\mathrm{i}, \qquad \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + t\mathrm{i}) - f(z_0)}{t\mathrm{i}} = \alpha + \beta\mathrm{i}$$

adică să aibă loc relaţiile

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t}\mathrm{i} = \alpha + \beta\mathrm{i}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{t\mathrm{i}} + \lim_{t \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{t\mathrm{i}}\mathrm{i} = \alpha + \beta\mathrm{i}$$

echivalente cu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\alpha=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=\beta=-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

In particular, dacă f este $\mathbb{C}$-derivabilă în $z_0=x_0+y_0\mathrm{i}$ atunci

$$f'(x_0+y_0\mathrm{i})=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{i}.$$

10.3.10 Teoremă (Cauchy-Riemann) *Funcţia*

$$f:D\longrightarrow\mathbb{C},\qquad f(x+yi)=u(x,y)+v(x,y)\,\mathrm{i}$$

definită pe mulţimea deschisă $D\subseteq\mathbb{C}$ *este* $\mathbb{C}$*-derivabilă în punctul* $z_0=x_0+y_0\mathrm{i}\in D$ *dacă şi numai dacă funcţiile reale*

$$u:D\longrightarrow\mathbb{R},\qquad v:D\longrightarrow\mathbb{R}$$

sunt $\mathbb{R}$*-diferenţiabile în* (x_0,y_0) *şi verifică relaţiile Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

In aceste condiţii

$$f'(x_0+y_0\mathrm{i})=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{i}.$$

Demonstraţie. A se vedea [7].

10.3.11 Definiţie. Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ o mulţime deschisă. Spunem că funcţia

$$f:D\longrightarrow\mathbb{C}$$

este $\mathbb{C}$-*derivabilă* (sau *olomorfă*) dacă este $\mathbb{C}$-derivabilă în orice punct din D.

10.3.12 Exerciţiu. Să se arate ca funcţia

$$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad f(z)=z^2$$

este olomorfă şi să se determine $f'(z)$.

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Avem

$$f(x+y\mathrm{i})=(x+y\mathrm{i})^2=(x^2-y^2)+2xy\mathrm{i}$$

şi prin urmare

$$u(x,y)=x^2-y^2,\qquad v(x,y)=2xy.$$

Funcţiile u şi v sunt $\mathbb{R}$-diferenţiabile în orice punct şi

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Derivata lui f este

$$f'(x+y\mathrm{i}) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{i} = 2x + 2y\mathrm{i}$$

adică, $f'(z) = 2z$.

10.3.13 Exerciţiu. Să se arate ca funcţia

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \bar{z}$$

nu este $\mathbb{C}$-derivabilă în niciun punct.

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Avem

$$f(x+y\mathrm{i}) = x - y\mathrm{i}$$

adică

$$u(x,y) = x, \qquad v(x,y) = -y.$$

In acest caz relaţiile Cauchy-Riemann nu sunt verificate în niciun punct deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -1.$$

10.3.14 Definiţie. Funcţia

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \mathrm{e}^z$$

unde

$$\mathrm{e}^{x+y\mathrm{i}} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{y\mathrm{i}} = \mathrm{e}^x\,(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y) = \mathrm{e}^x\,\cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x\,\sin y$$

este numită *funcţia exponenţială* (complexă).

10.3.15 Funcţia exponenţială este o funcţie periodică cu perioada $2\pi\mathrm{i}$

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$$

şi

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}$$

oricare ar fi $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.

10.3.16 Exerciţiu. Să se arate ca funcţia exponenţială

$$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad f(z)=\mathrm{e}^z$$

este olomorfă şi

$$(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z.$$

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Din relaţia

$$f(x+y\mathrm{i})=\mathrm{e}^x\,\cos y+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^x\,\sin y$$

rezultă că $u(x,y)=\mathrm{e}^x\,\cos y$ şi $v(x,y)=\mathrm{e}^x\,\sin y$. Funcţiile reale u şi v sunt $\mathbb{R}$-diferenţiabile în orice punct şi

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\mathrm{e}^x\,\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\mathrm{e}^x\,\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Derivata lui f este

$$f'(z)=f'(x+y\mathrm{i})=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{i}=\mathrm{e}^x\,\cos y+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^x\,\sin y=\mathrm{e}^z.$$

10.3.17 a) Dacă funcţiile $f,g:D\longrightarrow\mathbb{C}$ sunt olomorfe atunci

$$(\alpha f\pm\beta g)'=\alpha\,f'+\beta\,g'\qquad\qquad (fg)'=f'g+fg'$$

oricare ar fi $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Dacă în plus $g(z)\neq 0$, oricare ar fi $z\in D$, atunci

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

b) Dacă funcţiile $D\xrightarrow{f}\mathbb{C}\xrightarrow{g}\mathbb{C}$ sunt olomorfe atunci

$$\frac{d}{dz}(g(f(z))=g'(f(z))\,f'(z).$$

10.3.18 Exerciţiu. Funcţiile complexe

$$\cos:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \cos z=\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\sin:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \sin z=\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{ch}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \mathrm{ch}\,z=\tfrac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{sh}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \mathrm{sh}\,z=\tfrac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2}$$

sunt olomorfe şi

$$(\cos z)'=-\sin z\qquad\qquad (\sin z)'=\cos z$$

$$(\mathrm{ch}\,z)'=\mathrm{sh}\,z\qquad\qquad (\mathrm{sh}\,z)'=\mathrm{ch}\,z.$$

Rezolvare. Calcul direct.

10.3.19 Funcţia exponenţială reală

$$\mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty): \ x \mapsto \mathrm{e}^x$$

este bijectivă. Inversa ei este funcţia logaritm natural

$$(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}: \ x \mapsto \ln x.$$

Avem

$$x = \mathrm{e}^{\ln x}$$

oricare ar fi $x \in (0,\infty)$. In cazul complex, putem obţine o relaţie oarecum similară

$$z = |z|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z} = \mathrm{e}^{\ln|z|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z} = \mathrm{e}^{\ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)}$$

adevărată oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

10.3.20 Definiţie. Fie mulţimea

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} - \{\ z \ |\ \ \mathfrak{Im}\ z = 0,\ \mathfrak{Re}\ z \leq 0\ \}.$$

Funcţiile

$$\log_k : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \log_k z = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)$$

depinzând de parametrul $k \in \mathbb{Z}$ sunt numite *ramuri uniforme ale funcţiei logaritmice.*

10.3.21 Exerciţiu. Să se determine funcţia olomorfă

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

care îndeplineşte condiţiile

$$\mathfrak{Im}\, f(x,y) = 2xy + y, \qquad f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}.$$

Rezolvare. Căutând funcţia f de forma

$$f(x + y\mathrm{i}) = u(x,y) + (2xy + y)\mathrm{i}$$

din teorema Cauchy-Riemann deducem relaţiile

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x + 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y$$

din care rezultă că $u(x,y) = x^2 - y^2 + x + c$, unde c este o constantă. Impunând condiţia suplimentară $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ obţinem

$$f(x + y\mathrm{i}) = x^2 - y^2 + x + 1 + (2xy + y)\mathrm{i} = (x + y\mathrm{i})^2 + (x + y\mathrm{i}) + 1$$

adică $f(z) = z^2 + z + 1$.

10.4 Integrala complexă

10.4.1 Propoziţie. *Fie* $D \subseteq \mathbb{C}$. *Aplicaţia*

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D, \qquad \gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{i}$$

este continuă dacă şi numai dacă aplicaţiile reale

$$\varphi = \mathfrak{Re}\,\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \psi = \mathfrak{Im}\,\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt continue.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din relaţia

$$\left.\begin{array}{l} |\varphi(t)-\varphi(t_0)| \\ \\ |\psi(t)-\psi(t_0)| \end{array}\right\} \leq |\gamma(t)-\gamma(t_0)| \leq |\varphi(t)-\varphi(t_0)| + |\psi(t)-\psi(t_0)|.$$

10.4.2 Definiţie. Spunem că aplicaţia

$$\gamma : (a,b) \longrightarrow D$$

este *derivabilă* în punctul $t_0 \in (a,b)$ dacă există şi este finită limita

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}.$$

Spunem că γ este *aplicaţie derivabilă* dacă este derivabilă în orice punct $t_0 \in (a,b)$.

10.4.3 In cazul unei aplicaţii

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

prin $\gamma'(a)$ şi $\gamma'(b)$ vom înţelege derivatele laterale

$$\gamma'(a) = \lim_{t \searrow a} \frac{\gamma(t)-\gamma(a)}{t-a}, \qquad \gamma'(b) = \lim_{t \nearrow b} \frac{\gamma(t)-\gamma(b)}{t-b}.$$

10.4.4 Propoziţie. *Aplicaţia*

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D, \qquad \gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{i}$$

este derivabilă dacă şi numai dacă aplicaţiile reale

$$\varphi = \mathfrak{Re}\,\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \psi = \mathfrak{Im}\,\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt derivabile şi

$$\gamma'(t) = \varphi'(t) + \psi'(t)\,\mathrm{i}.$$

Demonstraţie. Avem

$$\gamma'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}+\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}\,\mathrm{i}.$$

10.4.5 Definiţie. Fie $D\subseteq\mathbb{C}$. Un *drum de clasă* C^1 în D este o aplicaţie derivabilă

$$\gamma:[a,b]\longrightarrow D$$

cu derivata $\gamma':[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ continuă.

10.4.6 Exemple.

a) Oricare ar fi $z\in\mathbb{C}$ aplicaţia constantă

$$\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \gamma(t)=z$$

este drum de clasă C^1 în $\mathbb{C}$ (numit *drum punctual*).

b) Oricare ar fi numerele complexe z_1 şi z_2 aplicaţia

$$\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \gamma(t)=(1-t)\,z_1+t\,z_2$$

este drum de clasă C^1 în $\mathbb{C}$ (*drumul liniar* ce leagă z_1 cu z_2).

c) Oricare ar fi $z_0=x_0+y_0\mathrm{i}\in\mathbb{C}$ şi $r>0$ aplicaţia

$$\gamma:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \gamma(t)=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}=x_0+r\cos t+(y_0+r\sin t)\mathrm{i}$$

este drum de clasă C^1 în $\mathbb{C}$ (numit *drum circular* de rază r şi centru z_0).

Figura 10.5

10.4.7 Definiţie. Fie $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ o funcţie continuă şi fie $\gamma:[a,b]\longrightarrow D$ un drum de clasă C^1 în D. Prin *integrala complexă* a funcţiei f de-a lungul drumului γ (a se vedea figura 10.5) se înţelege numărul

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

10.4.8 Exercițiu. Fie funcția

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z}$$

unde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ şi drumul de clasă C^1

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*, \qquad \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\,\sin t.$$

Să se calculeze

$$\int_\gamma f(z)dz.$$

Rezolvare. Deoarece $f(\gamma(t)) = \frac{1}{\gamma(t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ şi $\gamma'(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ obţinem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt = 2\pi\mathrm{i}.$$

10.4.9 In cazul unui drum punctual $\gamma(t) = z$ avem $\gamma'(t) = 0$ şi prin urmare

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

oricare ar fi funcţia f.

10.4.10 Dacă $f(x+y\mathrm{i}) = u(x,y) + v(x,y)\mathrm{i}$ şi $\gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{i}$ atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b [u(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t) - v(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)]\,dt$$
$$+\mathrm{i}\int_a^b [u(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t) + v(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)]\,dt.$$

10.4.11 Exercițiu. Calculați

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz$$

unde γ este drumul liniar ce leagă $z_1 = 1$ cu $z_2 = \mathrm{i}$.

Rezolvare. Deoarece

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = (1-t)1 + t\mathrm{i}$$

avem relaţiile $f(\gamma(t)) = \overline{\gamma(t)} = 1 - t - t\mathrm{i}$ şi $\gamma'(t) = -1 + \mathrm{i}$ din care rezultă

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^1 (1-t-t\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})dt = \int_0^1 (-1+2t)dt + \mathrm{i}\int_0^1 dt = \mathrm{i}.$$

10.4.12 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulțime. Spunem că drumurile de clasă C^1

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D \qquad si \qquad \gamma_1 : [a_1,b_1] \longrightarrow D$$

sunt *echivalente* dacă există o aplicație bijectivă derivabilă strict crescătoare

$$\chi : [a_1, b_1] \longrightarrow [a, b]$$

astfel încât

$$\gamma_1(s) = \gamma(\chi(s)), \qquad \text{oricare ar fi } \ s \in [a_1, b_1].$$

10.4.13 Relaţia definită este o relaţie de echivalenţă care permite împărţirea mulţimii drumurilor în clase de echivalenţă. Fiecare clasă de echivalenţă corespunde unei *curbe*, elementele clasei fiind numite *parametrizări* ale curbei considerate.

10.4.14 Propoziţie. *Dacă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcţie continuă şi dacă drumurile de clasă C^1

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D, \qquad \gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow D$$

sunt echivalente atunci

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

adică valoarea integralei depinde de curba aleasă şi nu de parametrizarea utilizată.

Demonstraţie. Folosind metoda schimbării de variabilă obţinem

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\gamma_1} f(z)\, dz &= \textstyle\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s))\, \gamma_1'(s)\, ds \\ &= \textstyle\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\chi(s)))\, \gamma'(\chi(s))\, \chi'(s)\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma f(z)\, dz.\end{aligned}$$

10.4.15 Orice drum

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este echivalent cu un drum definit pe $[0, 1]$ şi anume

$$\gamma_0 : [0, 1] \longrightarrow D, \qquad \gamma_0(t) = \gamma((1-t)a + tb).$$

10.4.16 Definiţie. Fie $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ un drum de clasă C^1. Drumul

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \longrightarrow D, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$$

se numeşte *inversul* drumului γ.

10.4.17 Propoziţie. *Dacă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcţie continuă şi

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

un drum de clasă C^1 în D atunci

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz.$$

Demonstraţie. Utilizând schimbarea de variabilă $s = a + b - t$ obţinem

$$\textstyle\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \int_a^b f(\tilde{\gamma}(t))\, \tilde{\gamma}'(t)\, dt = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\, \gamma'(a+b-t)\, dt$$

$$\textstyle= \int_b^a f(\gamma(s))\, \gamma'(s)\, ds = -\int_{\gamma} f(z)\, dz.$$

10.4.18 Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Prin *drum de clasă C^1 pe portiuni* în D se înţelege o aplicaţie continuă

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

cu proprietatea că există o diviziune $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ astfel încât

1) restricţiile $\gamma|_{(t_{i-1},t_i)}$ sunt derivabile oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

2) există şi sunt finite limitele

$$\lim_{t \searrow a} \gamma'(t), \qquad \lim_{t \searrow t_j} \gamma'(t), \qquad \lim_{t \nearrow t_j} \gamma'(t), \qquad \lim_{t \searrow b} \gamma'(t)$$

oricare ar fi $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

10.4.19 Drumul considerat este format din drumurile de clasă C^1

$$\gamma_1 : [t_0, t_1] \longrightarrow D, \qquad \gamma_1 = \gamma|_{[t_0,t_1]}$$

$$\gamma_2 : [t_1, t_2] \longrightarrow D, \qquad \gamma_2 = \gamma|_{[t_1,t_2]}$$

....

$$\gamma_n : [t_{n-1}, t_n] \longrightarrow D, \qquad \gamma_n = \gamma|_{[t_{n-1},t_n]}$$

şi pentru orice funcţie continuă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definim *integrala complexă* a funcţiei f de-a lungul drumului γ ca fiind

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt.$$

Toate drumurile pe care le vom considera în continuare vor fi drumuri de clasă C^1 pe porţiuni şi le numim simplu drumuri.

Figura 10.6

10.4.20 Exemplu. Aplicaţia (a se vedea figura 10.6)

$$\gamma : [0,2] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\pi i t} & \text{daca} \quad t \in [0,1] \\ 2t-3 & \text{daca} \quad t \in (1,2] \end{cases}$$

este drum de clasă C^1 pe porţiuni în $\mathbb{C}$ şi pentru orice funcţie continuă

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

avem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t})\, \pi \mathrm{i} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t} dt + \int_1^2 f(2t-3)\, 2dt.$$

10.4.21 Definiţie. Spunem că funcţia

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe o mulţime deschisă D *admite primitivă* în D dacă există

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

funcţie olomorfă cu proprietatea

$$g'(z) = f(z), \qquad \text{oricare ar fi} \ \ z \in D.$$

10.4.22 Exemple.

a) Dacă $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ atunci funcţia

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^k = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{k \text{ ori}}$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

deoarece

$$\left(\frac{z^{k+1}}{k+1}\right)' = z^k, \qquad \text{oricare ar fi} \quad z \in \mathbb{C}.$$

b) Dacă $k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ atunci funcţia

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^{-k} = \frac{1}{z^k}$$

admite în $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ primitiva

$$g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{z^{1-k}}{1-k} = -\frac{1}{(k-1)z^{k-1}}$$

deoarece

$$\left(\frac{z^{1-k}}{1-k}\right)' = z^{-k}, \qquad \text{oricare ar fi} \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

c) Funcţia exponenţială

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \mathrm{e}^z$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) = \mathrm{e}^z$$

deoarece

$$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z, \qquad \text{oricare ar fi} \quad z \in \mathbb{C}.$$

d) Funcţia

$$\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \cos z$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) = \sin z$$

deoarece

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad \text{oricare ar fi} \quad z \in \mathbb{C}.$$

e) Funcţia

$$\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \sin z$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) = -\cos z$$

deoarece

$$(-\cos z)' = \sin z, \qquad \text{oricare ar fi} \quad z \in \mathbb{C}.$$

10.4.23 Propoziţie. *Dacă funcţia continuă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite în D o primitivă

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

şi dacă

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

este un drum conţinut în D atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = g(z)|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Demonstraţie. Utilizând formula de schimbare de variabilă obţinem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_a^b g'(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} g(\gamma(t))\, dt = g(\gamma(t))|_{t=a}^{t=b} = g(z)|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)}.$$

10.4.24 Din propoziţia anterioară rezultă că în cazul în care funcţia

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite primitivă în D, integrala pe un drum

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

conţinut în D depinde doar de capetele $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ ale drumului. Dacă

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D, \qquad \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow D$$

sunt două drumuri în D astfel încât $\gamma(a)=\gamma_1(a)$ şi $\gamma(b)=\gamma_1(b)$ atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

10.4.25 Exerciţiu. Să se calculeze integralele

$$\int_\gamma z^3\,dz, \qquad \int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz, \qquad \int_\gamma \mathrm{e}^z\,dz, \qquad \int_\gamma (2z^3+\frac{5}{z^2}-\mathrm{e}^z)\,dz$$

γ fiind un drum în $\mathbb{C}^*$ cu originea $z_1=1$ şi extremitatea $z_2=\mathrm{i}$ (a se vedea figura 10.7).

Figura 10.7

Rezolvare. Fie $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}^*$ un drum cu originea $z_1=1$ şi extremitatea $z_2=\mathrm{i}$, adică astfel încât $\gamma(a)=1$ şi $\gamma(b)=\mathrm{i}$. Avem

$$\int_\gamma z^3\,dz = \left.\frac{z^4}{4}\right|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = \left.\frac{z^4}{4}\right|_{z=1}^{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}^4}{4}-\frac{1^4}{4}=0,$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz = -\left.\frac{1}{z}\right|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = -\left.\frac{1}{z}\right|_{z=1}^{z=\mathrm{i}} = -\frac{1}{\mathrm{i}}+1=1+\mathrm{i},$$

$$\int_\gamma \mathrm{e}^z\,dz = \mathrm{e}^z|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = \mathrm{e}^z|_{z=1}^{z=\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}}-\mathrm{e}=\cos 1+\mathrm{i}\sin 1-\mathrm{e},$$

$$\begin{aligned}\textstyle\int_\gamma (2z^3+\frac{5}{z^2}-\mathrm{e}^z)\,dz &= \textstyle 2\int_\gamma z^3\,dz+5\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz-\int_\gamma \mathrm{e}^z\,dz\\ &=5+\mathrm{e}-\cos 1+(5-\sin 1)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

10.4.26 Definiţie. Spunem că γ este *drum închis* dacă

$$\gamma(a)=\gamma(b)$$

adică *originea* $\gamma(a)$ şi *extremitatea* $\gamma(b)$ coincid.

10.4.27 Propoziţie. *Dacă funcţia continuă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite în D *o primitivă*

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

şi dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este un drum închis conţinut în D *atunci*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Demonstraţie. Deoarece $\gamma(a) = \gamma(b)$ avem

$$\int_\gamma f(z)dz = g(z)|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0.$$

10.4.28 Exerciţiu. Fie drumul circular

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t.$$

a) Să se arate că dacă $k \in \mathbb{Z} - \{-1\} = \{\ldots, -3, -2, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ atunci

$$\int_\gamma z^k \, dz = 0$$

dar

$$\int_\gamma z^{-1} \, dz = \int_\gamma \frac{1}{z} \, dz = 2\pi\mathrm{i}.$$

b) Să se arate că

$$\int_\gamma \left(\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 \, z + a_2 \, z^2 \right) dz = 2\pi\mathrm{i} a_{-1}$$

oricare ar fi numerele $a_{-2}, \ a_{-1}, \ a_0, \ a_1, \ a_2 \in \mathbb{C}$.

Rezolvare. a) Drumul γ este conţinut în mulţimea deschisă $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ şi funcţia

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^k$$

admite în $\mathbb{C}^*$ primitiva

$$g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{Z} - \{-1\}$.

b) Utilizând direct definiţia integralei complexe obţinem

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \, \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \, \mathrm{i} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, dt = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\mathrm{i}.$$

10.4.29 Din exerciţiul anterior rezultă că funcţia olomorfă

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z}$$

nu admite primitivă în $\mathbb{C}^*$.

10.4.30 Exerciţiu. Fie drumul circular

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

a) Să se arate că dacă $k \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ atunci

$$\int_\gamma (z - z_0)^k \, dz = 0$$

dar

$$\int_\gamma (z - z_0)^{-1} \, dz = \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, dz = 2\pi\mathrm{i}.$$

b) Să se arate că

$$\int_\gamma \left(\frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 \right) dz = 2\pi\mathrm{i} a_{-1}$$

oricare ar fi numerele $a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{C}$.

Rezolvare. a) Drumul γ este conţinut în mulţimea deschisă $\mathbb{C} - \{z_0\}$ şi funcţia

$$f : \mathbb{C} - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = (z - z_0)^k$$

admite în $\mathbb{C}^*$ primitiva

$$g : \mathbb{C} - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k + 1}$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{Z} - \{-1\}$.

b) Utilizând direct definiţia integralei complexe obţinem

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \, \mathrm{i} \, r \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, dt = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\mathrm{i}.$$

10.4.31 Din exerciţiul anterior rezultă că funcţia olomorfă

$$f : \mathbb{C} - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = (z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z - z_0}$$

nu admite primitivă în $\mathbb{C} - \{z_0\}$.

10.4.32 Definiţie. Spunem că mulţimea $D \subseteq \mathbb{C}$ este *conexă* (prin drumuri) dacă oricare ar fi punctele z_1, z_2 din D există un drum conţinut în D cu originea z_1 şi extremitatea z_2. O mulţime deschisă şi conexă este numită *domeniu*.

Figura 10.8

10.4.33 Exemplu. Mulţimea $B_1(0) \cup B_1(-1+\mathrm{i}\sqrt{2})$ este domeniu dar $B_1(0) \cup B_1(2+\mathrm{i})$ nu este domeniu (a se vedea figura 10.8).

10.4.34 Ştim că orice drum $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ este echivalent cu drumul

$$[0,1] \longrightarrow D : \ t \mapsto \gamma((1-t)a+tb).$$

Fără a reduce generalitatea, putem utiliza doar drumuri definite pe intervalul $[0,1]$.

Figura 10.9

10.4.35 Definiţie. Spunem că drumurile cu aceleaşi extremităţi γ_0 şi γ_1 sunt *omotope în* domeniul D dacă sunt conţinute în D şi se pot deforma continuu unul în celălalt fără a ieşi din D, adică dacă există o aplicaţie continuă

$$h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow D : (s,t) \mapsto h(s,t)$$

astfel încât urmatoarele condiţii să fie îndeplinite

a) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, oricare ar fi $t \in [0,1]$,

b) $h(1,t) = \gamma_1(t)$, oricare ar fi $t \in [0,1]$,

c) $h(s,0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, oricare ar fi $s \in [0,1]$,

d) $h(s,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, oricare ar fi $s \in [0,1]$.

10.4.36 Exemplu. Drumurile $\gamma_0,\ \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma_0(t) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}$$

sunt omotope în $D = \mathbb{C} - \bar{B}_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2})$. In acest caz putem alege (a se vedea figura 10.10)

$$h(s,t) = (1-s)\,\gamma_0(t) + s\,\gamma_1(t).$$

Figura 10.10

10.4.37 In continuare, pentru a decide dacă două drumuri sunt omotope în raport cu anumit domeniu ne vom rezuma la a analiza vizual figura (!).

10.4.38 Exemplu. Drumul circular

$$\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_0(t) = 3\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t} = 3\cos 2\pi t + 3\mathrm{i}\sin 2\pi t$$

este omotop în $\mathbb{C}^*$ cu drumul eliptic

$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_1(t) = 3\cos 2\pi t + \mathrm{i}\sin 2\pi t$$

dar cele două drumuri nu sunt omotope în $D = \mathbb{C} - \{2\mathrm{i}\}$ (a se vedea figura 10.11).

Figura 10.11

10.4.39 Exemplu. Drumurile $\gamma_0,\ \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma_0(t) = 1 - 2t, \qquad \gamma_1(t) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}$$

sunt omotope în $\mathbb{C}$, dar nu sunt omotope în $\mathbb{C} - \{\frac{1}{2}\mathrm{i}\}$ (a se vedea figura 10.12).

Figura 10.12

10.4.40 Definiţie. Spunem că drumul închis

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

este *omotop cu zero în* D dacă el este omotop în D cu drumul punctual

$$[a,b] \longrightarrow D : \ t \mapsto \gamma(a).$$

Figura 10.13

10.4.41 Exemplu. Drumul circular

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$$

este omotop cu zero în $D = \mathbb{C} - \{2\mathrm{i}\}$, dar nu este omotop cu zero în $\mathbb{C}^*$.

Figura 10.14

10.4.42 Teoremă (Cauchy) *Dacă* $D \subseteq \mathbb{C}$ *este o mulţime deschisă,*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcţie olomorfă şi

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

este un drum închis omotop cu zero în D *atunci*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

O demonstraţie poate fi găsită în [7].

10.4.43 Propoziţie. *Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă,*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcţie olomorfă şi

$$\gamma_0 : [a,b] \longrightarrow D, \qquad \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow D$$

sunt două drumuri omotope în D atunci

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz. \tag{10.1}$$

Figura 10.15

Demonstraţie. Drumul obţinut compunând γ_0 cu inversul $\tilde{\gamma}_1$ al drumului γ_1 este un drum închis omotop cu zero în D. Utilizând teorema Cauchy obţinem relaţia

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z)\,dz = 0.$$

echivalentă cu (10.1).

10.4.44 Fie k un număr întreg pozitiv. Drumul

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = z_0 + \mathrm{e}^{2k\pi i t}$$

se roteşte de k ori în jurul lui z_0 în sens direct şi

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = k.$$

Drumul

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = z_0 + \mathrm{e}^{-2k\pi \mathrm{i} t}$$

se roteşte de k ori în jurul lui z_0 în sens invers şi

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = -k.$$

Figura 10.16

Drumul γ din figura 10.16 este omotop în $\mathbb{C}-\{z_0\}$ cu drumul

$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_1(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i} t}$$

şi prin urmare

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2.$$

In general, dacă γ este un drum închis care nu trece prin z_0 numărul

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz$$

numit *indexul* lui γ faţă de z_0, ne arată de câte ori se roteşte γ în jurul lui z_0. O demonstraţie poate fi găsită în [7].

10.4.45 Teoremă. (Formulele lui Cauchy) *Orice funcţie olomorfă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe o mulţime deschisă D este nelimitat derivabilă şi oricare ar fi drumul

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow D$$

omotop cu zero în D are loc formula

$$n(\gamma, z)\, f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi orice $z \in D - \{\ \gamma(t)\ |\ \ t \in [0,1]\ \}$.
O demonstraţie poate fi găsită în [7].

Figura 10.17

10.5 Serii Laurent

10.5.1 Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulţime şi

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

funcţii definite pe D. Spunem că seria de funcţii complexe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

este *convergentă* (*uniform convergentă*) dacă şirul sumelor parţiale $(s_k)_{k\geq 0}$, unde

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} f_n$$

este convergent (respectiv, uniform convergent). Limita acestui şir

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} f_n = \lim_{k\to\infty} (f_0 + f_1 + \cdots f_k)$$

se numeşte *suma seriei.* Spunem că seria considerată este *absolut convergentă* dacă seria de funcţii reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$$

este convergentă.

10.5.2 Propoziţie. *Dacă z este astfel încât $|z| < 1$ atunci seria geometrică*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

este convergentă şi suma ei este $\frac{1}{1-z}$, adică

$$|z| < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Demonstraţie. Dacă $|z| < 1$ atunci

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} z^n = \lim_{k\to\infty} (1 + z + z^2 + \cdots + z^k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} = \frac{1}{1-z}.$$

10.5.3 Teoremă. (Weierstrass) *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulţime şi*

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

funcţii definite pe D. Dacă există o serie convergentă de numere reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$$

astfel încât

$$|f_n(z)| \le \alpha_n, \qquad \textit{oricare ar fi} \;\; z \in D,\; n \in \mathbb{N}$$

atunci seria de funcţii complexe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

este absolut şi uniform convergentă.

10.5.4 Definiţie. Prin *serie de puteri* în jurul lui z_0 se înţelege o serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cu coeficienţii a_0, a_1, a_2 ,... numere complexe. Ea mai poate fi scrisă şi sub forma

$$a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \ .$$

10.5.5 Orice serie de puteri este o serie de funcţii

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

în care funcţiile f_n au forma particulară

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f_n(z) = a_n (z - z_0)^n.$$

10.5.6 Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

funcţii definite pe D. Spunem că şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniform pe compacte* la f dacă oricare ar fi mulţimea compactă $K \subset D$, şirul restricţiilor $(f_n|_K)$ converge uniform la $f|_K$.

10.5.7 Teoremă (Weierstrass). *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

funcţii definite pe D. Dacă funcţiile f_n sunt olomorfe şi dacă şirul $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform pe compacte la f atunci f este funcţie olomorfă şi

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}, \qquad oricare\ ar\ fi\ k \in \mathbb{N}.$$

O demonstraţie poate fi găsită în [7].

10.5.8 Teoremă (Weierstrass). *Dacă seria de funcţii olomorfe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

converge uniform pe compacte în mulţimea deschisă D atunci suma ei

$$S : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

este o funcţie olomorfă şi

$$S^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}, \qquad \textit{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă direct din teorema precedentă.

10.5.9 Teoremă (Abel). *Dacă seria de puteri*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n$$

este convergentă pentru $z = z_1 \neq z_0$ atunci ea este convergentă în discul

$$\{ \ z \mid |z - z_0| < |z_1 - z_0| \ \}$$

de centru z_0 şi rază $|z_1 - z_0|$.

Demonstraţie. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ fiind convergentă avem

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_1 - z_0)^n = 0$$

şi prin urmare există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|a_n \, (z_1 - z_0)^n| < 1, \qquad \text{oricare ar fi } \ n \geq n_0$$

adică

$$|a_n| < \frac{1}{|z_1 - z_0|^n}, \qquad \text{oricare ar fi } \ n \geq n_0.$$

Din relaţia

$$|a_n \, (z - z_0)^n| < \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n, \qquad \text{oricare ar fi } \ n \geq n_0$$

şi convergenţa seriei geometrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n$$

pentru $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ rezultă conform criteriului comparaţiei convergenţa seriei $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \, (z - z_0)^n|$. Spaţiul normat $(\mathbb{C}, |\ |)$ fiind complet, orice serie absolut convergentă este convergentă.

10.5.10 Fie seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n.$$

Pentru z astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} < 1$$

adică astfel încât

$$|z-z_0| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

seria considerată este absolut convergentă conform criteriului rădăcinii.

10.5.11 Teoremă (Cauchy-Hadamard). *In cazul unei serii de puteri*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$$

există

$$R = \begin{cases} 0 & \textit{daca} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \textit{daca} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \not\in \{0,\infty\} \\ \infty & \textit{daca} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

(numit raza de convergenţă*) astfel încât :*

a) In discul (numit disc de convergenţă*)*

$$B_R(z_0) = \{\ z \mid \ |z-z_0| < R\,\}$$

seria converge absolut şi uniform pe compacte.

b) In $\mathbb{C} - \bar{B}_R(z_0) = \{\ z \mid \ |z-z_0| > R\,\}$ *seria este divergentă.*

c) Suma seriei

$$S : B_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$$

este funcţie olomorfă.

d) Seria derivată este o serie de puteri cu aceeaşi rază de convergenţă şi

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}, \qquad \textit{oricare ar fi } k \in B_R(z_0).$$

O demonstraţie poate fi găsită în [7].

10.5.12 Se poate arăta că dacă există limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

atunci

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

10.5.13 Exemple.

a) Raza de convergenţă a seriei geometrice
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$
este $R=1$ deoarece în acest caz $a_n=1$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

b) Raza de convergenţă a seriei
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$
este $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n!}{1/(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$.

10.5.14 Admiţând că f este suma unei serii de puteri în jurul lui z_0
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$$
cu raza de convergenţă nenulă, din teorema Cauchy-Hadamard rezultă relaţia
$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\,(z-z_0)^n]^{(k)},\qquad \text{oricare ar fi}\ \ k\in\mathbb{N}$$
care conduce la
$$a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

10.5.15 Teoremă (Dezvoltarea în serie Taylor) *Dacă funcţia*
$$f:B_r(z_0)\longrightarrow\mathbb{C}$$
este olomorfă în discul $B_r(z_0)$ şi R este raza de convergenţă a seriei Taylor asociate
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n$$
atunci $R\geq r$ şi
$$\begin{aligned}f(z)&=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n\\&=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}\,(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}\,(z-z_0)^2+\cdots\end{aligned}$$
oricare ar fi $z\in B_r(z_0)$.

O demonstraţie poate fi găsită în [7].

10.5.16 Exemplu. Din teorema dezvoltarii în serie Taylor rezultă dezvoltările

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad \text{pentru} \quad |z| < 1$$

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \qquad \text{pentru orice} \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \qquad \text{pentru orice} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Din aceste dezvoltări, prin substituţie şi/sau derivare putem obţine alte dezvoltări

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \cdots \qquad \text{pentru} \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots \qquad \text{pentru} \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^{n-1} z^{n-1} = 1 - 2z + 3z^2 - \cdots \qquad \text{pentru} \quad |z| < 1$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \qquad \text{pentru orice} \quad z \in \mathbb{C}.$$

10.5.17 MATHEMATICA: `Series[f[z], {z, z0, n}]`

In[1]:=`Series[1/(1-z), {z, 0, 5}]` $\mapsto$ Out[1]=$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+O[z]^6$
In[2]:=`Series[Exp[z], {z, 0, 6}]` $\mapsto$ Out[2]=$1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\frac{z^5}{120}+\frac{z^6}{720}+O[z]^7$
In[3]:=`Series[Exp[z], {z, 1, 3}]` $\mapsto$ Out[3]=$\mathrm{e}+\mathrm{e}(z-1)+\frac{1}{2}\mathrm{e}(z-1)^2+\frac{1}{6}\mathrm{e}(z-1)^3+O[z-1]^4$
In[4]:=`Series[Exp[z], {z, I, 3}]` $\mapsto$ Out[4]=$\mathrm{e}^{\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})^2+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})^3+O[z-\mathrm{i}]^4$
In[5]:=`Series[Cos[z], {z, 0, 6}]` $\mapsto$ Out[5]=$1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{720}+O[z]^7$

10.5.18 Definiţie. Prin *serie Laurent* în jurul lui z_0 se înţelege o serie de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$$

cu coeficienţii a_n numere complexe. Ea mai poate fi scrisă şi sub forma

$$\cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1\,(z-z_0) + a_2\,(z-z_0)^2 + \cdots \ .$$

10.5.19 Teoremă (Coroana de convergenţă). *Fie seria Laurent* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$,

$$r = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

şi

$$R = \begin{cases} 0 & daca \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & daca \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \not\in \{0, \infty\} \\ \infty & daca \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Dacă $r < R$ atunci:

a) In coroana circulară (numită coroana de convergenţă*)*

$$\{\ z \mid \ r < |z - z_0| < R\ \}$$

seria Laurent converge absolut şi uniform pe compacte.

b) Seria Laurent diverge în $\{\ z \mid \ |z - z_0| < r\ \} \cup \{\ z \mid \ |z - z_0| > R\ \}$.

c) Suma seriei Laurent $S : D \longrightarrow \mathtt{C}$,

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

este funcţie olomorfă.

O demonstraţie poate fi găsită în [7].

Figura 10.18

10.5.20 Teoremă (Dezvoltarea în serie Laurent). *Dacă funcţia*

$$f : D = \{\ z \mid \ r < |z - z_0| < R\ \} \longrightarrow \mathtt{C}$$

definită pe coroana D este olomorfă atunci există o unică serie Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$$

cu coroana de convergenţă incluzând pe D şi astfel încât

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n \qquad \textit{oricare ar fi} \ \ z\in D.$$

10.5.21 Exemple.

a) Funcţia olomorfă

$$f:D=\{\ z\ |\ \ 0<|z|<1\ \}\longrightarrow \mathtt{C}, \qquad f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui 0

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z^2}(1+z+z^2+\cdots)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots \tag{10.2}$$

b) Funcţia olomorfă

$$f:D=\{\ z\ |\ \ 0<|z-\mathrm{i}|<\infty\ \}\longrightarrow \mathtt{C}, \qquad f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})^2}$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui i

$$\begin{aligned} f(z)&=\tfrac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})^2}=\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{(z-\mathrm{i})^2}\,\mathrm{e}^{z-\mathrm{i}}=\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{(z-\mathrm{i})^2}\left(1+\tfrac{z-\mathrm{i}}{1!}+\tfrac{(z-\mathrm{i})^2}{2!}+\cdots\right)\\ &=\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{(z-\mathrm{i})^2}+\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{z-\mathrm{i}}+\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2!}+\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{3!}(z-\mathrm{i})+\cdots \end{aligned} \tag{10.3}$$

c) Funcţia olomorfă

$$f:D=\{\ z\ |\ \ 0<|z|<\infty\ \}\longrightarrow \mathtt{C}, \qquad f(z)=z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui 0

$$\begin{aligned} f(z)&=z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1+\tfrac{1}{1!}\,\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{2!}\,\tfrac{1}{z^2}+\cdots\right)\\ &=\cdots+\tfrac{1}{4!}\,\tfrac{1}{z^2}+\tfrac{1}{3!}\,\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{1!}\,z+z^2+0\,z^3+0\,z^4+\cdots \end{aligned} \tag{10.4}$$

10.5.22 Definiţie. Fie $f:D\longrightarrow \mathtt{C}$ o funcţie olomorfă definită pe mulţimea deschisă D. Spunem că punctul $z_0\in \mathtt{C}-D$ este un *punct singular izolat* al funcţiei f dacă există $r>0$ astfel încât coroana circulară $\{\ z\ |\ \ 0<|z-z_0|<r\,\}$ este conţinută în D. Coeficientul a_{-1} din dezvoltarea Laurent

$$f(z)=\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1\,(z-z_0)+a_2\,(z-z_0)^2+\cdots$$

a lui f în acestă coroană se numeşte *reziduul* lui f în punctul singular izolat z_0 şi se notează cu $\mathbf{Rez}_{z_0}f$, adică

$$\mathbf{Rez}_{z_0}f=a_{-1}.$$

10.5.23 Exemple.

a) Singurul punct singular izolat al funcţiei

$$f : D = \{\ z \mid \ 0 < |z| < 1\ \} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

este $z = 0$ şi din (10.2) rezultă că $\mathbf{Rez}_0 = 1$.

b) Singurul punct singular izolat al funcţiei

$$f : D = \{\ z \mid \ 0 < |z - \mathrm{i}| < \infty\ \} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})^2}$$

este $z = i$ şi din (10.3) rezultă că $\mathbf{Rez}_i f = \mathrm{e}^{\mathrm{i}}$.

c) Singurul punct singular izolat al funcţiei

$$f : D = \{\ z \mid \ 0 < |z| < \infty\ \} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^2\, \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$$

este $z = 0$ şi din (10.4) rezultă că $\mathbf{Rez}_0 f = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

10.5.24 MATHEMATICA: `Series[f[z], {z, a, n}]` , `Residue[f[z], {z, a}]`

`In[1]:=Series[1/(z^2(1-z)), {z, 0, 4}]` $\mapsto$ Out[1]=$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+z^4+O[z]^5$

`In[2]:=Residue[1/(z^2(1-z)), {z, 0}]` $\mapsto$ Out[2]=1

`In[3]:=Series[1/(z^2(1-z)), {z, 1, 2}]` $\mapsto$ Out[3]=$-\frac{1}{z-1}+2-3(z-1)+4(z-1)^2+O[z]^3$

`In[4]:=Residue[1/(z^2(1-z)), {z, 1}]` $\mapsto$ Out[4]=-1

`In[5]:=Series[Exp[z]/(z-I)^2, {z, I, 1}]` $\mapsto$ Out[5]=$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{(z-\mathrm{i})^2}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{z-\mathrm{i}}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})+O[z-\mathrm{i}]^2$

`In[6]:=Residue[Exp[z]/(z-I)^2, {z, I}]` $\mapsto$ Out[6]=e^{i}.

10.5.25 Definiţie. Fie D o mulţime deschisă şi

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

o funcţie olomorfă. Prin *zero multiplu de ordinul* n al lui f se înţelege un punct $z_0 \in D$ astfel încât

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \qquad si \qquad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Spunem despre un punct singular izolat z_0 al lui f că este *pol de ordinul* n dacă este zero multiplu de ordinul n pentru funcţia $\frac{1}{f}$.

10.5.26 Teoremă. *Dacă punctul singular izolat z_0 al funcţiei olomorfe $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ este pol de ordinul n atunci există $r > 0$ astfel încât coroana circulară*

$$\{\ z \mid 0 < |z - z_0| < r\,\}$$

este conţinută în D şi în această coroană f admite o dezvoltare Laurent de forma

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

10.5.27 a) Dacă z_0 este pol simplu atunci în jurul lui z_0 funcţia f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

Inmulţind cu $(z-z_0)$ obţinem relaţia

$$(z-z_0)\, f(z) = a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + a_2(z-z_0)^3 + \cdots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\, f(z).$$

b) Dacă z_0 este pol dublu atunci în jurul lui z_0 funcţia f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

Inmulţind cu $(z-z_0)^2$ şi apoi derivând obţinem relaţia

$$[(z-z_0)^2\, f(z)]' = a_{-1} + 2a_0(z-z_0) + 3a_1(z-z_0)^2 + \cdots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \lim_{z\to z_0} [(z-z_0)^2\, f(z)]'.$$

c) Dacă z_0 este pol triplu atunci în jurul lui z_0 funcţia f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

Inmulţind cu $(z-z_0)^3$ şi apoi derivând de două ori obţinem relaţia

$$[(z-z_0)^3\, f(z)]'' = 2!\, a_{-1} + 6a_0(z-z_0) + 12a_1(z-z_0)^2 + \cdots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to z_0} [(z-z_0)^3\, f(z)]''.$$

d) Dacă z_0 este pol de ordinul n atunci

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} [(z-z_0)^n\, f(z)]^{(n-1)}.$$

10.5.28 Exemplu. Funcţia

$$f : \mathtt{C}-\{0,\,1\} \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

are două puncte singulare izolate $z = 0$ şi $z = 1$. Punctul $z = 0$ este pol dublu şi

$$\mathbf{Rez}_0 f = \lim_{z\to 0}[z^2\, f(z)]' = \lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{1-z}\right]' = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(1-z)^2} = 1. \tag{10.5}$$

Punctul $z = 1$ este pol simplu şi

$$\mathbf{Rez}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)\, f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{-1}{z^2} = -1. \tag{10.6}$$

10.6 Calculul integralelor cu ajutorul reziduurilor

10.6.1 Dacă

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathtt{C}-\{z_0\}$$

este un drum închis care nu trece prin z_0 atunci

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_\gamma \left(\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1\,(z-z_0) + a_2\,(z-z_0)^2\right) dz\\ &\qquad\qquad = a_{-1}\textstyle\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi \mathrm{i} a_{-1}\, n(\gamma, z_0)\end{aligned} \tag{10.7}$$

oricare ar fi numerele $a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathtt{C}$. Punctul z_0 este punct singular izolat (pol de ordinul al doilea) pentru funcţia $f : \mathtt{C}-\{z_0\} \longrightarrow \mathtt{C}$,

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1\,(z-z_0) + a_2\,(z-z_0)^2$$

şi $\mathrm{Rez}_{z_0} f = a_{-1}$. Relaţia (10.7) se mai poate scrie

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i}\ n(\gamma, z_0)\ \mathbf{Rez}_{z_0} f.$$

10.6.2 Teoremă (Teorema reziduurilor). *Dacă $D \subseteq \mathtt{C}$ este o mulţime deschisă,*

$$f : D \longrightarrow \mathtt{C}$$

este o funcţie olomorfă , S este mulţimea punctelor singulare izolate ale lui f şi dacă

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

este un drum omotop cu zero în $\tilde{D} = D \cup S$ *atunci*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{z\in S} n(\gamma, z)\,\mathbf{Rez}_z f.$$

O demonstraţie poate fi găsită în [7].

10.6.3 Exerciţiu. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{4\,dz}{(z^2+1)(z-3)^2}$$

unde

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = 2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}.$$

Rezolvare. Considerăm $D = \mathbb{C} - \{3,\ \mathrm{i},\ -\mathrm{i}\}$ şi funcţia olomorfă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{4}{(z^2+1)(z-3)^2}.$$

Mulţimea punctelor singulare izolate ale lui f este $S = \{3,\ \mathrm{i},\ -\mathrm{i}\}$ şi drumul γ este omotop cu zero în $D \cup S = \mathbb{C}$. Conform teoremei reziduurilor avem

$$\int_\gamma \frac{4\,dz}{(z^2+1)(z-3)^2} = 2\pi\mathrm{i}\left(n(\gamma,3)\,\mathbf{Rez}_3 f + n(\gamma,\mathrm{i})\,\mathbf{Rez}_\mathrm{i} f + n(\gamma,-\mathrm{i})\,\mathbf{Rez}_{-\mathrm{i}} f\right).$$

Figura 10.19

Deoarece drumul γ (figura 10.19) se roteşte de zero ori în jurul lui 3 şi o singură dată în jurul lui i şi $-$i rezultă că

$$n(\gamma,3) = 0, \qquad n(\gamma,\mathrm{i}) = n(\gamma,-\mathrm{i}) = 1$$

şi prin urmare

$$\int_\gamma \frac{4\,dz}{(z^2+1)(z-3)^2} = 2\pi \mathrm{i}\left(\mathbf{Rez}_{\mathrm{i}}f + \mathbf{Rez}_{-\mathrm{i}}f\right).$$

Punctele singulare i şi $-$i fiind poli simpli avem

$$\mathbf{Rez}_{\mathrm{i}}f = \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{4}{(z-3)^2(z+\mathrm{i})} = \frac{4}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}-3)^2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}\mathrm{i}$$

$$\mathbf{Rez}_{-\mathrm{i}}f = \lim_{z\to-\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{4}{(z-3)^2(z-\mathrm{i})} = \frac{4}{-2\mathrm{i}(\mathrm{i}+3)^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}\mathrm{i}$$

şi

$$\int_\gamma \frac{4\,dz}{(z^2+1)(z-3)^2} = \frac{12}{25}\pi\mathrm{i}.$$

10.6.4 Exerciţiu. Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z^3}\,dz$$

unde

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad \gamma(t) = \mathrm{e}^{-4\pi\mathrm{i}t}.$$

Rezolvare. Considerăm funcţia olomorfă

$$f : \mathtt{C}^* \longrightarrow \mathtt{C}$$

definită pe mulţimea deschisă $\mathtt{C}^* = \mathtt{C} - \{0\}$. Punctul singular $z = 0$ este pol de ordinul al treilea. Pentru calculul reziduului lui f în 0 putem utiliza dezvoltarea Laurent în jurul lui 0

$$f(z) = \tfrac{\mathrm{e}^z}{z^3} = \tfrac{1}{z^3}\left(1 + \tfrac{z}{1!} + \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= \tfrac{1}{z^3} + \tfrac{1}{1!}\tfrac{1}{z^2} + \tfrac{1}{2!}\tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!}z + \cdots$$

sau relaţia

$$\mathbf{Rez}_0 f = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}(z^3\,f(z))'' = \frac{1}{2}.$$

Observând că γ se roteşte de două ori în jurul lui 0 în sens invers sau utilizând formula

$$n(\gamma,0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{dz}{z} = -2$$

obţinem

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z^3}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\,n(\gamma,0)\,\mathbf{Rez}_0 f = -2\pi\mathrm{i}.$$

10.6.5 Exerciţiu. Să se calculeze integrala

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2(1-z)}\,dz$$

unde γ este drumul din figura 10.20.

Figura 10.20

Rezolvare. Funcţia olomorfă

$$f : \mathtt{C}-\{0,1\} \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$$

are punctele singulare $z=0$ şi $z=1$. Ştim că $\mathbf{Rez}_0 f = 1$ (a se vedea relaţia (10.5))şi $\mathbf{Rez}_1 f = -1$ (a se vedea relaţia (10.6)). Deoarece drumul γ se roteşte de două ori în jurul lui 0 şi o dată în jurul lui 1, din teorema reziduurilor rezultă că

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2(1-z)}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\,(2\,\mathbf{Rez}_0 f + \mathbf{Rez}_1 f) = 2\pi\mathrm{i}.$$

10.6.6 Exerciţiu. Să se calculeze integrala

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos t}\,dt \qquad \text{unde} \quad a\in(1,\infty)$$

Rezolvare. Integrala reală cerută poate fi privită ca o integrală în planul complex şi calculată folosind teorema reziduurilor. Avem

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \frac{2}{2a+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})'\,dt \\ &= \textstyle -\mathrm{i}\int_\gamma \frac{1}{z}\,\frac{2}{2a+z+\frac{1}{z}}\,dz = -\mathrm{i}\int_\gamma \frac{2}{z^2+2az+1}dz. \end{aligned}$$

unde $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathtt{C}$, $\gamma(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Funcţia

$$f : \mathtt{C}-\{z_1,z_2\} \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad f(z)=\frac{2}{z^2+2az+1}$$

unde

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \qquad z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$$

sunt rădăcinile polinomului $z^2 + 2az + 1$, are două puncte singulare izolate (poli simpli) z_1 şi z_2.

Figura 10.21

Deoarece z_1, z_2 sunt numere reale, $-1 < z_1 < 0$ şi $z_2 < -1$ rezultă că $n(\gamma, z_1) = 1$ şi $n(\gamma, z_2) = 0$ (a se vedea figura 10.21). Conform teoremei reziduurilor

$$I = -\mathrm{i} \int_\gamma \frac{2}{z^2+2az+1} dz = 2\pi \mathbf{Rez}_{z_1} f = 2\pi \lim_{z\to z_1} (z - z_1) f(z)$$

$$= 2\pi \lim_{z\to z_1} (z - z_1) \frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{4\pi}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Figura 10.22

10.6.7 Propoziţie. *Fie $\alpha < \beta$ şi o funcţie continuă*

$$f : D \longrightarrow \mathtt{C}$$

definită pe un domeniu D ce conţine imaginile drumurilor (a se vedea figura 10.22)

$$\gamma_r : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad \gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

oricare ar fi $r > 0$. Dacă

$$\lim_{z\to\infty} z\, f(z) = 0$$

atunci

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 0.$$

Demonstraţie. Din relaţia $\lim_{z\to\infty} z\, f(z) = 0$ rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $r_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$|z| > r_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |z\, f(z)| < \varepsilon.$$

In particular, pentru $r > r_\varepsilon$ avem

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\, dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, r\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, r\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|\, dt < \varepsilon \int_\alpha^\beta dt = (\beta - \alpha)\varepsilon.$$

10.6.8 Oricare ar fi z_1, $z_2 \in \mathtt{C}$ au loc relaţiile

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|, \qquad |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_1|$$

care conduc la

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

adică la

$$|\ |z_1| - |z_2|\ | \leq |z_1 - z_2|.$$

10.6.9 Exerciţiu. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

Rezolvare. Integrala I este o integrală reală improprie. Intervalul de integrare este nemărginit dar funcţia considerată este mărginită, numitorul neanulându-se pe axa reală. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

integralele

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx, \qquad si \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

au aceeaşi natură. Ştim însă că integrala improprie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\lambda}dx$$

este convergentă pentru $\lambda > 1$. Rezultă astfel că integrala considerată

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx + \int_1^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

este convergentă.

Figura 10.23

Pentru a calcula valoarea integralei vom considera funcţia olomorfă

$$f : \mathtt{C} - \{-2\mathrm{i},\ -\mathrm{i},\ \mathrm{i},\ 2\mathrm{i}\} \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

şi drumul de integrare din figura 10.23 compus din

$$\gamma_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad \gamma_r(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

şi

$$\gamma : [-r, r] \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad \gamma(t) = t.$$

Conform teoremei reziduurilor, oricare ar fi $r > 2$ avem relaţia

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz + \int_{-r}^r f(x)dx = 2\pi\mathrm{i}\,(\mathbf{Rez}_{\mathrm{i}} f + \mathbf{Rez}_{2\mathrm{i}} f)$$

care conduce la

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi \mathrm{i}\,(\mathbf{Rez}_{\mathrm{i}} f + \mathbf{Rez}_{2\mathrm{i}} f). \tag{10.8}$$

Deoarece

$$|z\,f(z)| = \frac{|z^3|}{|z^2+1|\cdot|z^2+4|} = \frac{|z^3|}{|z^2-(-1)|\cdot|z^2-(-4)|} =\leq \frac{|z|^3}{|\,|z|^2-1|\cdot|\,|z|^2-4|}$$

avem

$$\lim_{z\to\infty} z\,f(z) = 0$$

şi în virtutea propoziţiei 7

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$

Din relaţia (10.8), ţinând seama şi de faptul că $f(-x) = f(x)$, rezultă

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \pi \mathrm{i}\,(\mathbf{Rez}_{\mathrm{i}} f + \mathbf{Rez}_{2\mathrm{i}} f).$$

Dar

$$\mathbf{Rez}_{\mathrm{i}} = \lim_{z\to \mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\,f(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{z^2}{(z+\mathrm{i})(z^2+4)} = \frac{\mathrm{i}}{6}$$

$$\mathbf{Rez}_{2\mathrm{i}} = \lim_{z\to 2\mathrm{i}}(z-2\mathrm{i})\,f(z) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}}\frac{z^2}{(z^2+1)(z+2\mathrm{i})} = -\frac{\mathrm{i}}{3}$$

şi deci

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{i}}{6}-\frac{\mathrm{i}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

10.6.10 Exerciţiu. Să se arate că

$$1 \geq \frac{\sin t}{t} \geq \frac{2}{\pi} \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Rezolvare. Funcţia

$$\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathtt{R}, \qquad \varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$$

este descrescătoare deoarece

$$\varphi'(t) = \frac{t\,\cos t - \sin t}{t^2} \leq 0.$$

10.6.11 Propoziţie (Lema lui Jordan). *Dacă funcţia continuă*

$$f : \{\ z = x + y\mathrm{i} \mid \ y \geq 0\ \} \longrightarrow \mathtt{C}$$

este astfel încât

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \tag{10.9}$$

şi

$$\gamma_r : [0,\pi] \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad \gamma_r(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

(a se vedea figura 10.24) atunci

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,dz = 0$$

Figura 10.24

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Din relaţia (10.9) rezultă că există $r_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$r > r_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| < \frac{2\varepsilon}{\pi}$$

şi

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,dz\right| &= \left|\int_0^\pi f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}r(\cos t + \mathrm{i}\sin t)}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt\right| \\
&\le \int_0^\pi |f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{e}^{-r\sin t}\,r\,dt \le \tfrac{2\varepsilon}{\pi} r \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin t}\,dt \\
&\le \tfrac{2\varepsilon}{\pi} r \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\frac{2}{\pi}t}\,dt = \tfrac{2\varepsilon}{\pi} r\, \tfrac{-\pi}{2r}\, \mathrm{e}^{-r\frac{2}{\pi}t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \varepsilon(1-\mathrm{e}^{-r}) \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Figura 10.25

10.6.12 Exerciţiu. Să se arate că

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(integrala Poisson)} \tag{10.10}$$

Rezolvare. Fie $0 < r < R$ şi drumurile (a se vedea figura 10.25)

$$\gamma_R : [0, \pi] \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad \gamma_R(t) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$
$$\gamma_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad \gamma_r(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - t)}.$$

Din teorema reziduurilor (sau teorema Cauchy) rezultă relaţia

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\, dz + \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\, dx + \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\, dz + \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\, dx = 0$$

care se mai poate scrie

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\, dz + \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\, dz + \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}\, dx = 0$$

sau

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\, dz + \int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\, dz + \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1}{z}\, dz + 2\mathrm{i} \int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx = 0$$

Utilizând relaţia

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\, dz = -\pi \mathrm{i}$$

şi notând cu g o primitivă a funcţiei $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1}{z}$ obţinem

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\, dz - \pi\mathrm{i} + (g(r) - g(-r)) + 2\mathrm{i} \int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx = 0.$$

Deoarece conform lemei lui Jordan

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} = 0$$

pentru $R \to \infty$ şi $r \to 0$ obţinem relaţia

$$2\mathrm{i} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi\mathrm{i}.$$

10.6.13 Definiţie. Fie $\varphi : \mathtt{R} \longrightarrow \mathtt{C}$. Funcţia

$$\mathcal{F}[\varphi] : \mathtt{R} \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \varphi(x) dx$$

(în cazul în care există) se numeşte *transformata Fourier* a lui φ.

10.6.14 Exerciţiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-ax^2}](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

oricare ar fi $a \in (0, \infty)$.

Rezolvare. Avem

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-ax^2}](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2+\mathrm{i}\xi x} dx = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(x-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2} dx.$$

Plecând de la integrala

$$\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-at^2} dt + \int_{r}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2} dz - \int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2} dz + \int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{-r} \mathrm{e}^{-az^2} dz = 0$$

a funcţiei

$$f : \mathtt{C} \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad f(z) = \mathrm{e}^{-az^2}$$

de-a lungul drumului dreptunghiular din figura 10.26 arătăm că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(t-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Avem

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} dt.$$

Alegând pentru drumul liniar ce uneşte r cu $r - \mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$ parametrizarea

$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad \gamma_1(t) = r - \mathrm{i}t\frac{\xi}{2a}$$

obţinem relaţia

$$\int_{r}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2} dz = \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-a\left(r-\mathrm{i}t\frac{\xi}{2a}\right)^2} (-\mathrm{i})\frac{\xi}{2a} dt = -\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\, \mathrm{e}^{-ar^2} \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}rt\xi + \frac{t^2\xi^2}{4a}} dt$$

din care rezultă

$$\lim_{r\to\infty} \int_{r}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2} dz = 0.$$

Figura 10.26

Similar se arată că

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{-r} \mathrm{e}^{-az^2}dz = 0.$$

Alegând pentru drumul liniar ce uneşte $-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$ cu $r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$ parametrizarea

$$\gamma_2 : [-r, r] \longrightarrow \mathtt{C}, \qquad \gamma_2(t) = t - \mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$$

obţinem relaţia

$$\int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2}dz = \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-a\left(t-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2}dt$$

din care rezultă

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2}dz = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(t-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2}dt.$$

Bibliografie

[1] I. Armeanu, *Analiză Funcţională*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1998.

[2] H. Cartan, *Calcul différentiel, Formes différentielles*, Herman, Paris, 1967.

[3] N. Cotfas, *Elemente de Algebra Liniara*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2009.

[4] N. Cotfas şi L. A. Cotfas, *Complemente de Matematică*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2009.

[5] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis* I, Academic Press, New York, 1960.

[6] A. Halanay, V. Olariu şi S. Turbatu, *Analiză Matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[7] P. Hamburg, P. Mocanu şi N. Negoescu, *Analiză Matematică (Funcţii complexe)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[8] S. Lang, *Analysis* I, Addison Wesley, Massachusetts, 1969.

[9] I. . Popescu, I. Armeanu, D. Blideanu, N. Cotfas şi I Şandru, *Probleme de Analiză Complexă*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1995.

[10] M. Roşculeţ, *Analiză Matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[11] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Mc. Graw-Hill, New York, 1964.

[12] L. Schwartz, *Analyse Mathématique* I, II, Hermann, Paris, 1967.

[13] O. Stănăşilă , *Analiză Matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[14] D. Ştefănescu, *Analiză Reală*, Editura Universităţii din Bucuresti, 1990.

[15] C. Timofte, *Differential Calculus*, Editura Universităţii din Bucuresti, 2009.

[16] *** *Analiză Matematică* (Universitatea din Bucureşti), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.