Curs 11.

Normala standard:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$$

$X \sim N(0,1) \Rightarrow \mathbb{E}[X] = 0$ și $Var(X) = 1$.

Dacă $Z \sim N(0,1)$ atunci $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(\mu + \sigma Z \le x)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad \sigma > 0$$

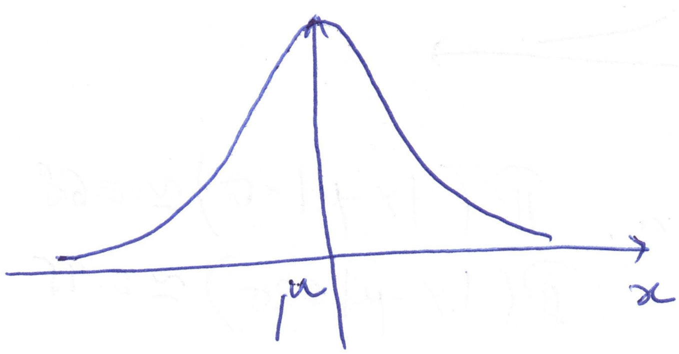
$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$$

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mu + \sigma Z] = \mu + \sigma \underbrace{\mathbb{E}[Z]}_{=0} = \mu \quad \text{- media}$$

$$Var(X) = Var(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 \underbrace{Var(Z)}_{=1} = \sigma^2 \quad \text{- varianța (dispersia)}$$



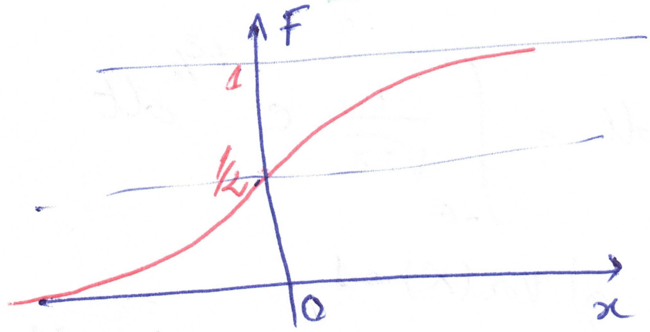
f este simetrică față de media μ

φ este simetrică față de 0

$\varphi(z) = \varphi(-z)$

Funcția de repartiție Φ a $N(0,1)$ verifică

$$\boxed{\Phi(z) = 1-\Phi(-z)}, \quad \forall z$$



$$\Phi(-z) = \int_{-\infty}^{-z}\varphi(t)\,dt \overset{\text{sch. var. } u=-t}{=} \int_{\infty}^{z}\varphi(-u)(-du) = \int_{z}^{\infty}\varphi(-u)\,du \underset{\varphi \text{ sim.}}{=} \int_{z}^{\infty}\varphi(u)\,du$$

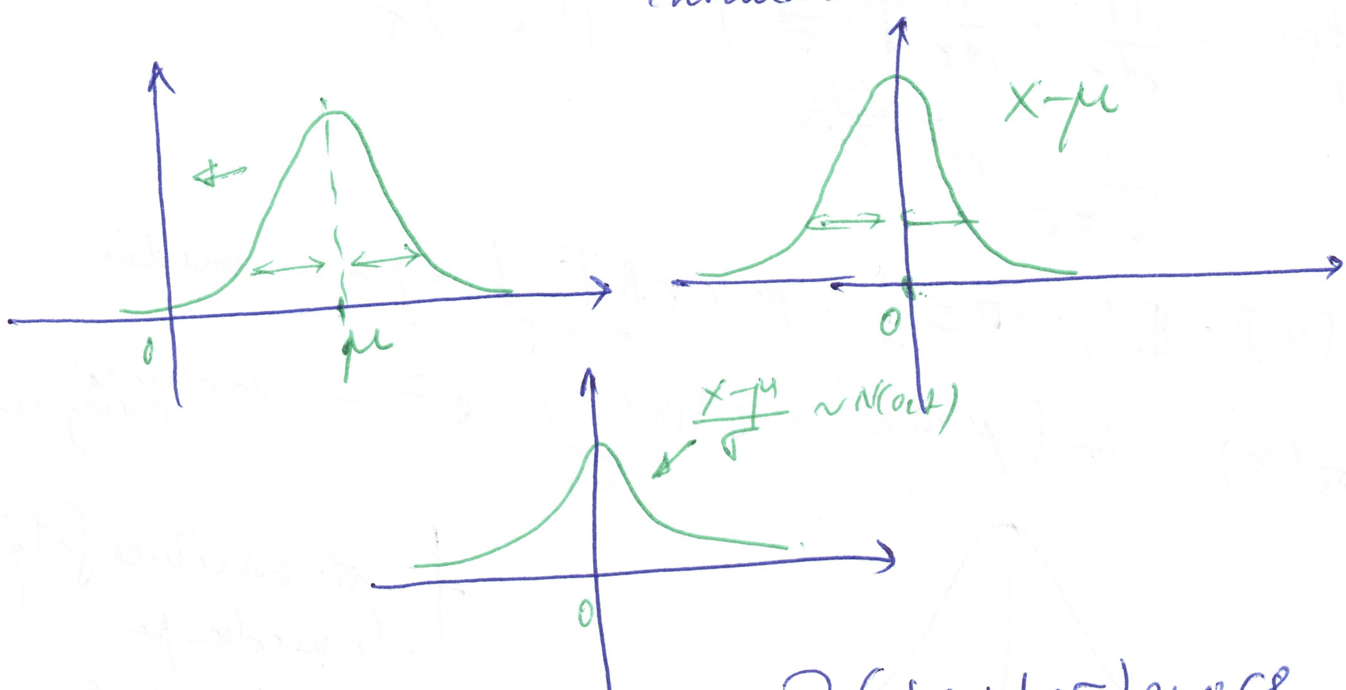
$$= 1-\int_{-\infty}^{z}\varphi(u)\,du = 1-\Phi(z)$$

Mai mult, dacă $Z \sim N(0,1)$ atunci $-Z \sim N(0,1)$

$$\mathbb{P}(-Z\le z) = \mathbb{P}(Z \ge -z) = 1-\Phi(-z) = \Phi(z) = \mathbb{P}(Z\le z)$$

Dacă $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ atunci $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

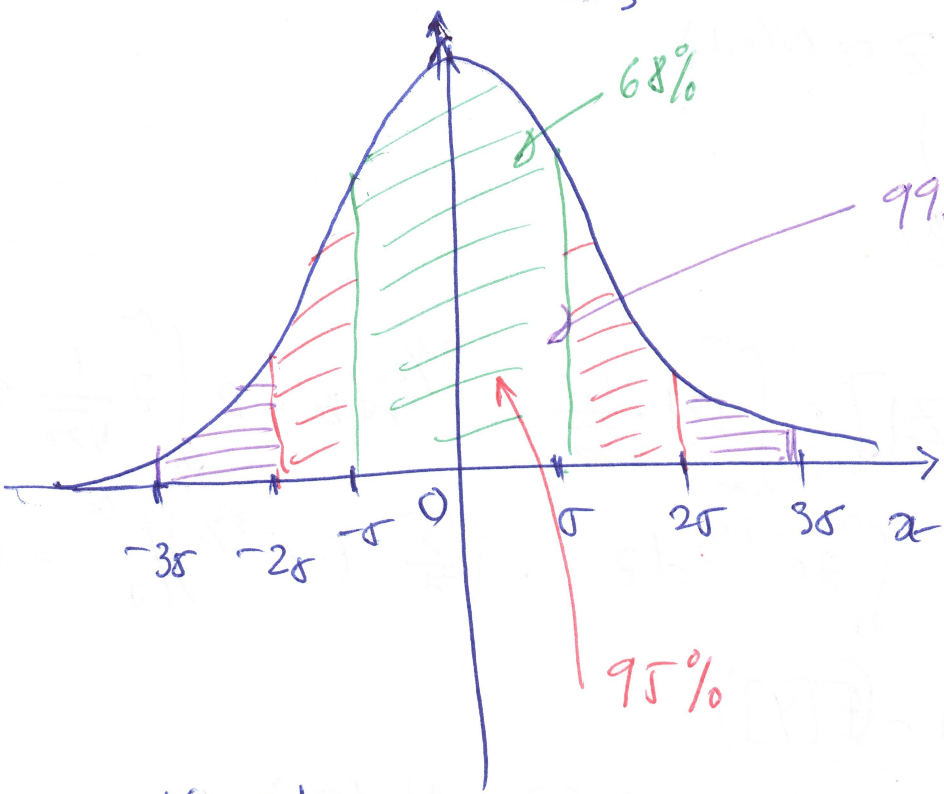
normalizare



(T) Dacă $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ atunci

$$\mathbb{P}(|X-\mu|\le\sigma) \simeq 0.68$$
$$\mathbb{P}(|X-\mu|\le 2\sigma) \simeq 0.95$$
$$\mathbb{P}(|X-\mu|\le 3\sigma) \simeq 0.997.$$

(Regula 68-95-99.7%)



Exp: $X \sim N(-1,4)$

$\mathbb{P}(|X|<3) = ?$

$\mathbb{P}(|X|<3) = \mathbb{P}(-3<X<3)$ (normalizare standardizare)

$= \mathbb{P}\left(\frac{-3-(-1)}{2} < \frac{X-(-1)}{2} < \frac{3-(-1)}{2}\right)$

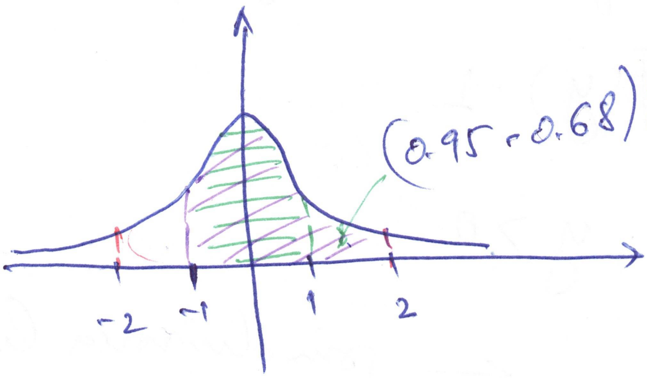
$= \mathbb{P}\left(-1 < \frac{X+1}{2} < 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-1)$

$\frac{X+1}{2} \sim N(0,1)$

Din regula 68-95-99.7% :

$\mathbb{P}\left(-1 < Z = \frac{X+1}{2} < 1\right) \simeq 0.68$

$\mathbb{P}(-2 < Z < 2) \simeq 0.95$



$(0.95-0.68)\frac{1}{2} = \frac{0.27}{2}$

$\mathbb{P}(-1<Z<2) = \mathbb{P}(-1<Z<1) + \mathbb{P}(1<Z<2)$

$\simeq 0.68 + \frac{0.27}{2} = 0.815$

Exp: $Y = |Z|$, $Z \sim N(0,1)$

a) $E[Y]$, $Var(Y)$

b) $F_Y(y)$ și $f_Y(y)$

Sol: a)

$$E[Y] = E[|Z|] = \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 2\int_0^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} z e^{-z^2/2} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-e^{-z^2/2}\right)\Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2$$

$$Y^2 = Z^2 \Rightarrow E[Y^2] = E[Z^2] = Var(Z) = 1.$$

$$\Rightarrow Var(Y) = 1 - \frac{2}{\pi}$$

b) $Y = |Z| \geq 0$

Dacă $y \leq 0 \Rightarrow P(Y \leq y) = 0$

$$y > 0 \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|Z| \leq y)$$

$$= P(-y \leq Z \leq y)$$

$$= \Phi(y) - \Phi(-y)$$

$$= \Phi(y) - (1 - \Phi(y))$$

$$= 2\Phi(y) - 1.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 2\Phi(y) - 1, & y > 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 2\varphi(y), & y > 0 \end{cases} \leftarrow \text{prin derivarea lui } F_Y$$

Repartiții comune, marginale și condiționate. Media condiționată

Două variabile aleatoare X și Y

Dacă ne uităm la repartiția lui X atunci putem calcula $\mathbb{P}(X\in A)$

Dacă le privim împreună și vrem să calculăm

$$\mathbb{P}((X,Y)\in B) \leftarrow \text{rep comună}$$

$$B \subset \mathbb{R}^2$$

rep. marginală - ne uităm doar la rep. uneia din v.a ignorând cealaltă v.a.

rep. condiționată a lui X știind $Y=y$ - rep. informația a lui X știind că $Y=y$ a fost observat

Cazul v.a discrete

Fie X și Y două v.a definite pe $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ambele discrete.

$$X,Y:\Omega\longrightarrow\mathbb{R} \qquad X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$$

$$Y(\Omega)=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$$

Numim funcția de masă a cuplului (X,Y)

$$(X,Y):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^2$$

$$(X,Y)\in\{(x_i,y_j)\mid 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\}$$

$$p_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}(X=x,Y=y) \leftarrow \text{f.d. de masă}$$

În mod similar se definește f.d. de repartiție a cuplului (X,Y)

$$F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}(X\le x, Y\le y)$$

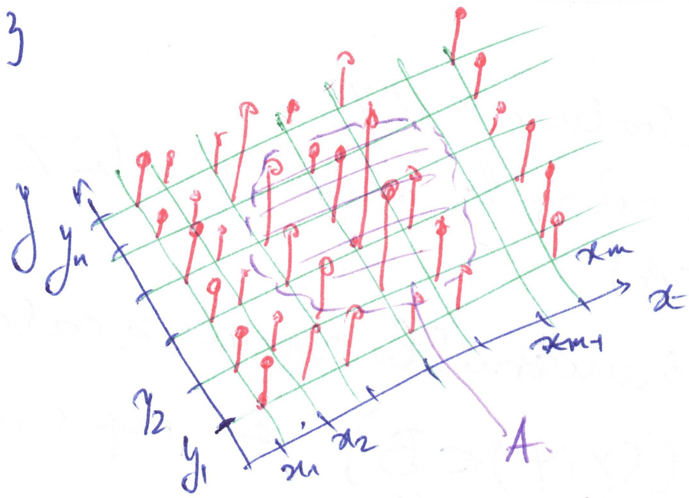
(P) Funcția de masă $p_{X,Y}(x,y)$ verifică: a) $p_{X,Y}(x,y)\ge 0$

b) $\sum_x\sum_y p_{X,Y}(x,y)=1$.

$X \in \{x_1, \dots x_m\}$

$Y \in \{y_1, \dots y_n\}$

$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$

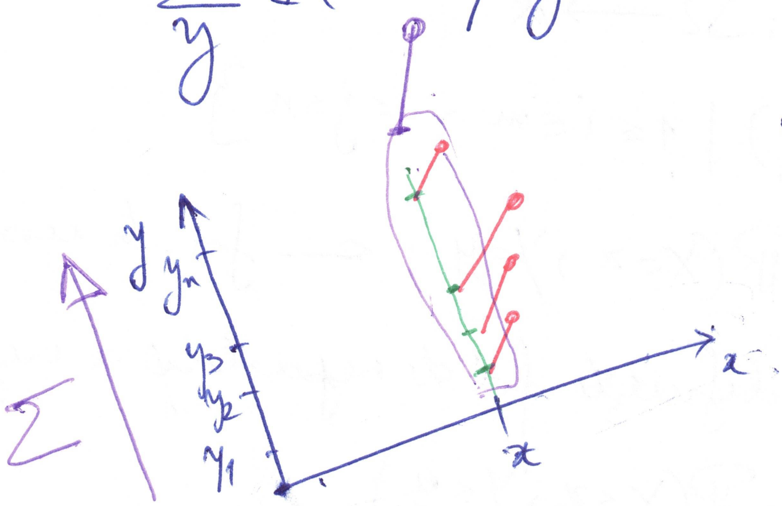


Putem calcula $\mathbb{P}((X,Y)\in A) = \sum_{(x,y)\in A} \mathbb{P}(X=x, Y=y)$, $A \subset \mathbb{R}^2$.

Def: Se numește rep marginală a lui X:

$$\mathbb{P}(X=x) = \sum_y \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=x, Y\in\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X=x, \bigcup_y \{Y=y\})$$
$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_y \{X=x\} \cap \{Y=y\}\right)$$
$$= \sum_y \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$



$\mathbb{P}(X=x) = ?$

$\mathbb{P}(Y=y) = ?$

Fie A un eveniment cu $\mathbb{P}(A)>0$. Atunci fct de masă a lui X cond. la A este

$$\boxed{P_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X=x \mid A) = \frac{\mathbb{P}(\{X=x\}\cap A)}{\mathbb{P}(A)}}$$

Cum evenimentele $\{X=x\} \cap A$ sunt disjuncte 2 câte 2 pt valori diferite ale lui x, atunci

$$\mathbb{P}(A) = \sum_x \mathbb{P}(\{X=x\} \cap A)$$

$$p_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X=x \mid A)$$

Dacă combinăm cele 2 rezultate:

$$\sum_x p_{X|A}(x) = 1$$

Exp: X este rezultatul aruncării cu zarul și A evenimentul că rezultatul este par

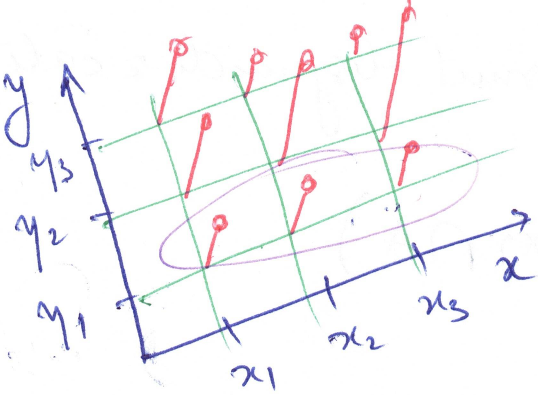
$$\begin{aligned} p_{X|A}(x) &= \mathbb{P}(X=x \mid par), \quad x \in \{1, \ldots, 6\} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X=x, par)}{\mathbb{P}(par)} \\ &= \begin{cases} 1/3, & x = 2, 4, 6 \\ 0, & \text{impar} \end{cases} \end{aligned}$$

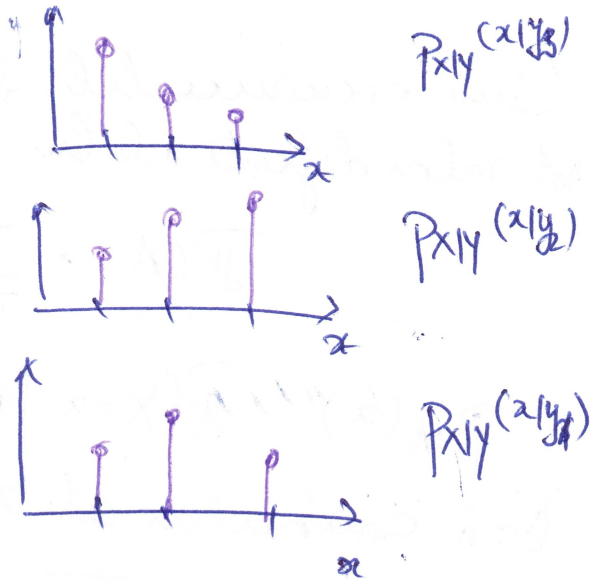
În particular, dacă avem două v.a. X și Y și considerăm că $A = \{Y=y\}$ atunci fct. de masă condiționată a lui X la $Y=y$ este:

$$p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X=x \mid Y=y) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$$

$$= \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$\boxed{p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}} \leftarrow \text{văzută ca o fct de } x \text{ cu } y \text{ fixat}$$





Se păstrează forma dar trebuie normalizată

<u>Obs</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} P_{X,Y}(x,y) &= P_Y(y)\, P_{X|Y}(x|y) \\ &= P_X(x)\, P_{Y|X}(y|x) \end{aligned}}$$

<u>Exp</u>: Prof. răspunde incorect în 25% dintre cazuri, independent de întrebare.
Pp că sunt 0, 1 sau 2 întrebări pe curs cu prob 1/3
Fie X v.a care ne dă nr. de întrebări, Y nr. de răspunsuri greșite
Vrem $\mathbb{P}(X=x, Y=y) = ?$

X\Y	0	1	2	Σ
0	1/3	0	0	1/3
1	1/4	1/12	0	1/3
2	3/16	1/8	1/48	1/3
Σ	.	.	1/48	

$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 1/3$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=1|X=1) = 1/3 \cdot 1/4 = 1/12$

$P_{X,Y}(1,1) = P_X(1) \cdot P_{Y|X}(1|1)$

$$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(X=1)\, \mathbb{P}(Y=0|X=1) = 1/3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbb{P}(X=2, Y=0) = \mathbb{P}(X=2)\,\mathbb{P}(Y=0 \mid X=2)$$
$$= 1/3 \cdot \frac{9}{16} = 3/16$$

$$\mathbb{P}(X=2, Y=1) = \mathbb{P}(X=2)\,\mathbb{P}(Y=1 \mid X=2)$$
$$= 1/3 \times C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{16} = 1/8 = 2/16$$

$$\mathbb{P}(X=2, Y=2) = \mathbb{P}(X=2)\,\mathbb{P}(Y=2 \mid X=2)$$
$$= 1/3 \times C_2^2 \, (1/4)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$$

In general,

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_j	y_n	Σ
x_1					
x_2					
x_i			$P_{X,Y}(x_i, y_j)$		$\mathbb{P}(X=x_i)$
x_m					
Σ			$\mathbb{P}(Y=y_j)$		

$$\mathbb{P}(X=x_i) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$\mathbb{P}(Y=y_j) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) = \sum_{i=1}^{m} P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$\mathbb{P}(X=x_i \mid Y=y_j) = \frac{P_{X,Y}(x_i, y_j)}{P_Y(y_j)}$$

Aplicații:

① Se consideră ecuația dr $ax+by+c=0$ unde coef. a,b,c se determină prin aruncarea a 3 zaruri. Care este probabilitatea ca dreapta obținută să treacă prin punctul $(1,-1)$?

$$1,3,3 \longrightarrow x+3y+3=0$$

Deci a, b și c sunt v.a. (indep) care descriu coef. dr

$$\underset{X_1,X_2,X_3}{a,b,c} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$d: ax+by+c=0$ trece prin $(1,-1) \Leftrightarrow a-b+c=0$

$$\mathbb{P}(a-b+c=0)=?$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a-b+c=0) &= \mathbb{P}(a+c=b) \\
&= \mathbb{P}(a+c=b,\ b\in\{1,\dots,6\}) \\
&= \mathbb{P}\Big(a+c=b,\ \bigcup_{i=1}^{6}\{b=i\}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{6}\mathbb{P}(a+c=b,\ b=i) \\
&= \sum_{i=1}^{6}\mathbb{P}(a+c=i,\ b=i) \\
&\overset{\text{indep.}}{=} \sum_{i=1}^{6}\mathbb{P}(a+c=i)\underbrace{\mathbb{P}(b=i)}_{1/6} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\mathbb{P}(a+c=i) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{i=2}^{6}\mathbb{P}(a+c=i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a+c=i) &= \mathbb{P}(a+c=i,\ a\in\{1,\dots,6\}) \\
&= \sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(a+c=i,\ a=k)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(a=k, c=i-k)$$

$$\overset{\text{indep}}{=} \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(a=k)\,\mathbb{P}(c=i-k)$$

$i \in \{2, \dots, 6\}$
$k \in \{1, \dots, i-1\}$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(a=k)\,\mathbb{P}(c=i-k)$$

$$\mathbb{P}(a-b+c=0) = \frac{1}{6} \sum_{i=2}^{6} \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{\mathbb{P}(a=k)}_{1/6}\,\underbrace{\mathbb{P}(c=i-k)}_{1/6}$$

$$= \frac{1}{6^3} \sum_{i=2}^{6} \sum_{k=1}^{i-1} 1$$

$$\sum_{i=2}^{6} \sum_{k=1}^{i-1} 1 = \sum_{i=2}^{6} (i-1) = \sum_{i=1}^{5} i = 1+2+\dots+5 = 15$$

$$\mathbb{P}(a-b+c=0) = \frac{15}{6^3}$$

(2) Probabilitatea ca o rachetă lansată spre o țintă să nu fie interceptată de un sistem de apărare antirachetă este de 2/3. Știind că racheta nu a fost interceptată, șansele de succes sunt de 75%. Presupunem că patru rachete au fost lansate de manieră indep.

a) Care este prob. ca toate cele 4 rachete să își atingă ținta? Dar prob. ca cel puțin 2 să atingă obiectivul?

b) Câte rachete trebuie lansate pt a avea cel puțin 99% șanse ca ținta să fie atinsă?

Sol: a) Fie $X_i = \begin{cases} 1, & \text{racheta } i \text{ atinge ținta} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

A - evenimentul prin care o rachetă a fost interceptată de sistemul antirachetă

$$\mathbb{P}(X_i=1) = \mathbb{P}(X_i=1|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X_i=1|A^c)\mathbb{P}(A^c)$$

formula prob. totale

$$= 0 \times \mathbb{P}(A) + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$\mathbb{P}$(toate cele 4 rachete să își atingă ținta) =

$$= \mathbb{P}(\underbrace{X_1+X_2+X_3+X_4}_{\text{nr. de rachete (din cele 4) care își ating ținta}}=4) = C_4^4\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{4-4}$$

$$= \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1, X_3=1, X_4=1) \overset{\text{indep}}{=} \mathbb{P}(X_1=1)^4 = \frac{1}{16}$$

$$X_1+X_2+X_3+X_4 \sim B(4, \tfrac{1}{2})$$

$\mathbb{P}$(cel puțin 2 să își atingă ținta) =

$$= \mathbb{P}(X_1+X_2+X_3+X_4 \geq 2)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1+X_2+X_3+X_4=0) - \mathbb{P}(X_1+X_2+X_3+X_4=1)$$

$$= 1 - C_4^0\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{4-0} - C_4^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{4-1}$$

$$= 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

Dacă $Y \sim B(n,p) \Rightarrow \mathbb{P}(Y=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

b) Determinăm n a.î.

$$\mathbb{P}(X_1+X_2+\dots+X_n \geq 1) \geq 0.99$$

$$X_1+X_2+\dots+X_n \sim B(n, \tfrac{1}{2})$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_1+X_2+\dots+X_n}\geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1+X_2+\dots+X_n=0)$$
$$= 1 - C_n^0 (1/2)^0 (1-1/2)^{n-0}$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$1 - \frac{1}{2^n} \geq 0.99 \Rightarrow 0.01 \geq \frac{1}{2^n} \Rightarrow 2^n \geq 100$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow n \geq \dfrac{\ln 100}{\ln 2} \\ n - \text{al mai mic} \end{array}\right\} \Rightarrow n = \left[\frac{\ln 100}{\ln 2}\right] = 7.$$

$$\frac{\ln 100}{\ln 2} > 6$$

(3) Să se determine const. $c \in (0,1)$ a.î.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1-c, 1+c] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$
este densitatea de rep. Să calculăm media și varianța unei v.a. cu densitatea f

Sol:
a) $f(x) \geq 0$ ✓

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[1-c,1+c]}(x)\,dx = \int_{1-c}^{1+c} \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_{1-c}^{1+c} = \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right)$$
$$\ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+c}{1-c} = e \Rightarrow \boxed{c = \frac{e-1}{1+e}}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \mathbb{1}_{[1-c,1+c]}(x)\,dx = \int_{1-c}^{1+c} dx$$
$$= 1+c-(1-c) = 2c$$

$$Var(X) = E[X^2) - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{1-c}^{1+c} x^2 \cdot 1/x \, dx = \int_{1-c}^{1+c} x \, dx$$

$$= x^2/2 \Big|_{1-c}^{1+c} = \frac{1}{2}(1+c+1-c)(1+c-1+c)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2c = 2c$$

$$Var(X) = 2c - (2c)^2 = 2c(1-2c) \quad , c = \frac{e-1}{e+1}.$$

(4) $f(x) = \dfrac{A}{e^x + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$

a) $A = ?$ a.î. f este densitate

b) Să se det. $F(x)$ și $\mathbb{P}(X \geq 0)$, $\mathbb{P}(X < 1 \mid X \geq 0)$

Sol:

a) Cum $f(x) \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \iff \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{e^x + e^{-x}} dx = 1.$$

$$\iff A = \frac{1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \overset{e^x = t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt$$

$e^x dx = dt$

$$= \operatorname{arctg}(t) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow A = 2/\pi$$

b) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{\pi} \frac{1}{e^t + e^{-t}}\,dt$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt \overset{e^t = u}{=} \frac{2}{\pi} \int_{0}^{e^x} \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(u)\Big|_0^{e^x} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(e^x)$$

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(X < 0)$$

$$= 1 - F(0) = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(1) = 1 - 1/2 = 1/2$$

$$\mathbb{P}(X < 1 \mid X \geq 0) = \frac{\mathbb{P}(X < 1, X \geq 0)}{\mathbb{P}(X \geq 0)} = \frac{\mathbb{P}(0 \leq X < 1)}{\mathbb{P}(X \geq 0)}$$

$$= \frac{F(1) - F(0)}{1/2} = \frac{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(e) - 1/2}{1/2}$$

$$= \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(e) - 1.$$

4) $$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad k > 0$$

a) Det. $\alpha = ?$ f este densitate

b) Functia de rep. și media și varianța

c) Calculați $\mathbb{P}(0 < X < 1/k) = ?$

(5) Ne interesăm la cantitatea de grâu recoltată de un agricultor într-o anumită zi. Avem următoarele date: dacă ~~nu~~ bate vântul atunci nu avem recoltă. Dacă nu bate vântul dar plouă atunci agricultorul folosește o mașină pt timp umed și în acest caz recolta va fi o v.a rep. uniform pe intervalul [4, 6] tone. Dacă nu bate vântul și nu plouă atunci recolta este o v.a rep. uniform pe [1, 9] tone. Pentru o zi tipică, probabilitatea să bată vântul este de 1/6 și dacă nu este vânt atunci prob. să plouă este de 3/10. Calculați și trasați fct de rep. a v.a. care reprezintă recolta de grâu din ziua resp. Calculați media și varianța cantității de grâu