Curs 6

Variabile aleatoare $\rightarrow$ v.a. discrete

$\rightarrow$ v.a continue

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\{w \mid X(w) \le x\} \in \mathcal{F}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

În general dorim să calculăm $\mathbb{P}(X \in A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\{X \in A\} \in \mathcal{F}$$
$$\{w \in \Omega \mid X(w) \in A\}$$

Exp: aruncăm o monedă (echilibrată) de două ori

$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

X - nr. de capete în ale 2 aruncări

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(TT) = 1/4$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\underset{w_1}{HT} \cup \underset{w_2}{TH}) = \mathbb{P}(HT) + \mathbb{P}(TH) = 1/2$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(HH) = 1/4$$

$$A = \{0, 1\} \Rightarrow \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 3/4$$

Def: (Repartiția unei v.a.)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. Se numește repartiția lui X probabilitatea:

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \ \forall A \in \mathcal{R}$$
$$= \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

$X^{-1}(A)$ s.n preimaginea lui A prin X

$$X^{-1}(A)=\{w\in\Omega \mid X(w)\in A\}$$

Repartiția lui X, $\underline{\mathbb{P}_X=\mathbb{P}\circ X^{-1}}$

<u>Def</u> (Funcția de repartiție)

Fie $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ c.p. și $X:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a. Se numește funcția de rep. a lui X funcția $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ definită prin

$$F(x)=\mathbb{P}(X\le x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

<u>Obs</u>: $A=(-\infty,x]$ atunci $F(x)=(\mathbb{P}\circ X^{-1})(A)$

(II) <u>Exp</u>: $\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$, $X:\Omega\to\mathbb{R}$ nr. de capete (H)

$$F(x)=\mathbb{P}(X\le x)=\begin{cases}0 & ,\ x<0\\ \mathbb{P}(X=0)=1/4 & ,\ 0\le x<1.\\ \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)=3/4 & ,\ 1\le x<2\\ 1 & ,\ 2\le x\end{cases}$$

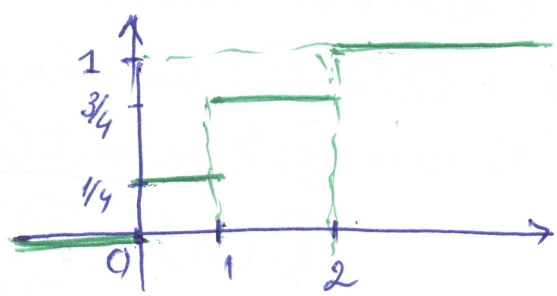
Dacă $x<0 \Rightarrow \{X\le x\}=\{w \mid \underset{\in\{0,1,2\}}{X(w)}\le x<0\}=\emptyset$

$0\le x<1 \Rightarrow \{X\le x\}=\{X=0\}$

$1\le x<2 \Rightarrow \{X\le x\}=\{X=0\}\cup\{X=1\}$

$2\le x \Rightarrow \{X\le x\}=\{X\in\{0,1,2\}\}=\Omega$

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,\ x<0\\ 1/4 & ,\ 0\le x<1\\ 3/4 & ,\ 1\le x<2\\ 1 & ,\ x\ge 2\end{cases}$$



Prop: Funcția de rep. a unei v.a X satisface următoarele prop:

a) F este crescătoare

b) F este continuă la dreapta $\left(\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0)\right)$

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ și $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Plecând de la a), b) și c) avem

d) $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \le x) = 1 - F(x)$

e) $\mathbb{P}(x < X \le y) = \mathbb{P}(X \le y) - \mathbb{P}(X \le x) = F(y) - F(x)$

f) $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \le x) - \mathbb{P}(X < x)$

$= F(x) - \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} F(y)$

Variabile aleatoare discrete

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ este discretă $\Leftrightarrow X(\Omega)$ este cel mult numărabilă

Pentru $A \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} \{x\}\right)$

$= \sum_{x \in A \cap X(\Omega)}' \mathbb{P}(X = x)$

Def: (Funcția de masă asociată unei v.a discrete) Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a discretă. Se numește f-ț de masă a lui X funcția $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)}' p_X(x)$

În particular, $A = (-\infty, x]$ avem $F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \sum_{\substack{y \le x \\ y \in X(\Omega)}} p_X(y)$

Notație: Dacă X v.a. discretă, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$

Modul în care v.a X este repartizată se mai notează:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \mathbb{P}(X=x_1) & \mathbb{P}(X=x_2) & \dots & \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

Ce proprietăți trebuie să îndeplinească f-ct de masă?

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad x \in \mathbb{R}$$

1) $p_X(x) \geq 0$ – nenegativitate

2) $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)}' p_X(x) = 1.$ (masa totală este 1)

$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$, $\{X \in \mathbb{R}\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \mathbb{R}\} = \Omega$

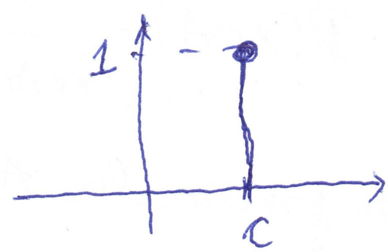
$\{X \in \mathbb{R}\} = \{X \in X(\Omega)\} = \{X \in \{x_1, x_2, \dots\}\}$ ← cel mult numărabilă

$= \{X \in \bigcup_i \{x_i\}\} = \bigcup_i \{X = x_i\}$

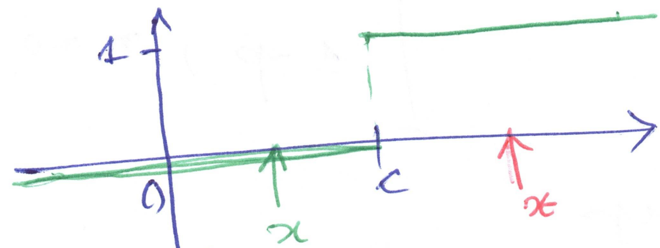
Exemple de variabile aleatoare discrete:

1) $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X = c$ (const.)

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \neq c \\ 1, & x = c \end{cases}$$



$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x < c \\ 1 & , x \ge c \end{cases}$$



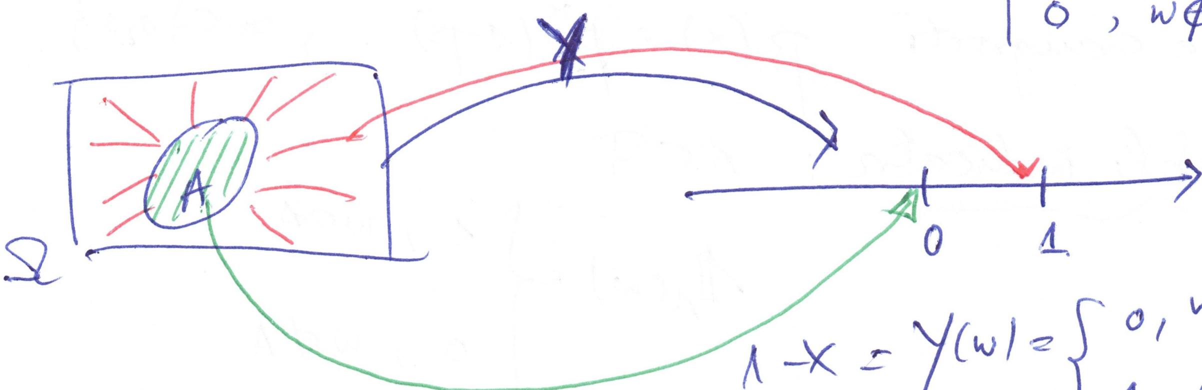
2) Variabile aleatoare Bernoulli:

Pp că avem un experiment aleator și ne interesează le realizarea sau nerealizarea unui eveniment A

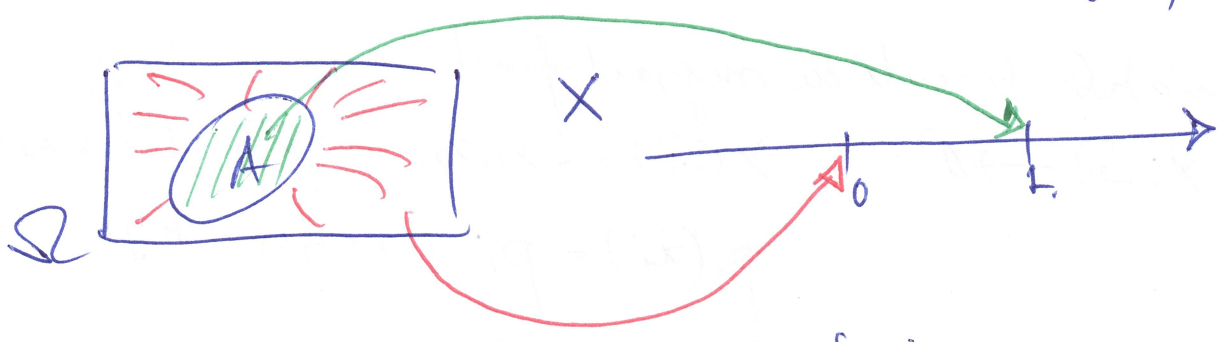
Considerăm că șansa de realizare a lui A este p $(\mathbb{P}(A) = p)$

Definim $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$X(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A. \end{cases}$$



$$1 - X = Y(w) = \begin{cases} 0, & w \in A \\ 1, & w \notin A. \end{cases}$$



Exp: aruncăm cu o monedă, $A = \{H\}$

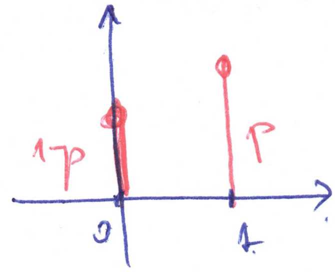
$X : \Omega \to \{0, 1\}$

$$X(w) = \begin{cases} 1 & , w = H \\ 0 & , w = T \end{cases}$$

$\Omega = \{H, T\}$

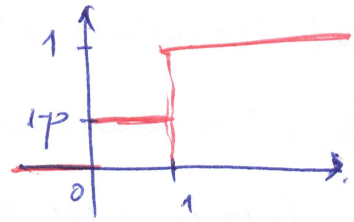
Funcția de masă:

$$p_X(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1-p, & x = 0 \end{cases}$$



Funcția de rep

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$



Dacă $x \geq 1$ at $\{X \le x\} = \{X \in \{0,1\}\} = \{X=0\} \cup \{X=1\}$

Forma compactă $p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0,1\}$

Variabile indicator: $A \in \mathcal{F}$

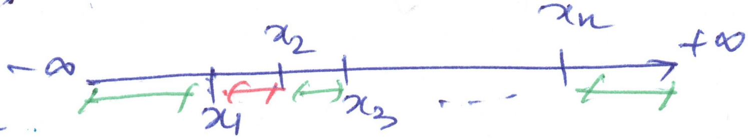
$$\mathbb{1}_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

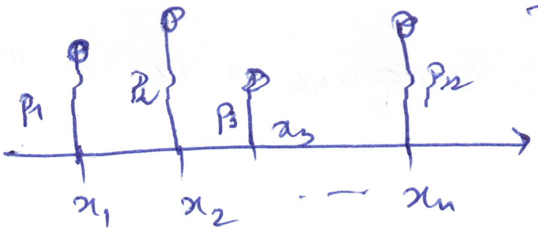
3) Variabile discrete cu suport finit

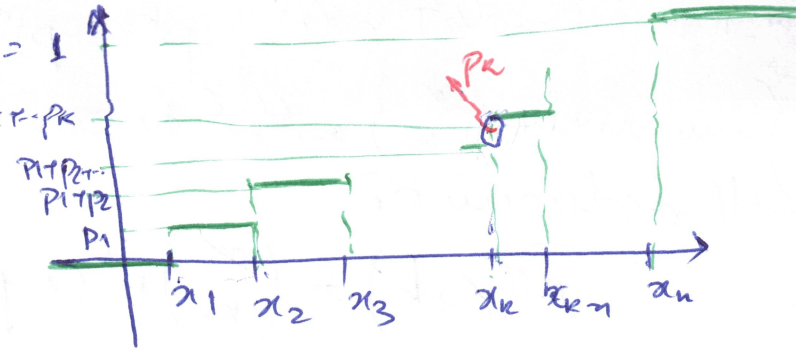
$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\quad X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $\quad$ Pp. $(x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n)$

$$p_X(x_i) = p_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \le x < x_2 \; ; \; \{X \le x\} = \{X = x_1\} \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_3 \; ; \; \{X \le x\} = \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k, & x_k \le x < x_{k+1} \\ 1, & x \geq x_n \end{cases}$$







4) V.a binomiale

$$X:\Omega \to \mathbb{R}, \quad X(\Omega) = \{0,1,\dots n\}$$

Pp că avem n experimente aleatoare independente și în realizarea fiecărui experiment ne interesează în realizarea sau nerealizarea unui eveniment A ($\mathbb{P}(A)=p$)

V.a X definită prin nr. total de realizări ale ev. A în cele n experimente este o v.a de tip binomial de parametri n,p.

Notație: $X \sim B(n,p)$

În particular, pt $n=1$ avem că X este o va Bernoulli de parametru p și notăm $B(p)$ (în loc de $B(1,p)$)

Exp: Aruncăm cu o monedă de n ori și presupunem că șansa de apariție a lui H este p. Suntem interesați în v.a

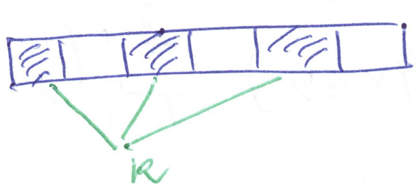
X = nr. de capete în cele n aruncări

$$\Omega = \{H,T\}^n$$

$$X \in \{0,1,2,\dots n\}$$

Vrem să calculăm $p_X(k) = \mathbb{P}(X=k)$, $k\in\{0,1,\dots n\}$

$n=6$



$(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$

$p^3(1-p)^3$

Prob. să observ o secvență specifică în care avem k valori diff și $n-k$ valori de T este $p^k(1-p)^{n-k}$

Cum avem $\binom{n}{k}$ astfel de secvențe de lungime n cu k valori diff deducem că

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k\in\{0,1,\dots n\}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\overset{\text{binomul lui Newton}}{=}(p+1-p)^n=1$$

Obs: Putem să ne gândim la v.a. $X\sim B(n,p)$ ca la o sumă de n v.a. de tip Bernoulli $B(p)$

$$X=Y_1+Y_2+\dots+Y_n$$

Y_i - este rezultatul celui de-al i-lea experiment.

Exp: Fie un bit (0 sau 1) care este transmis pe un canal bruiat și are prob. p să fie transmis incorect.

Pentru a îmbunătăți fiabilitatea comunicării transmitem bit-ul de n ori (n impar)

Pp că avem un decodor care decide care bit este corect după majoritatea de biți transmiși.

Pp că $n=5$ și $p=0.1$. Și fie X - nr. de biți transmiși cu eroare

$X\sim B(n,p)$

Care este prob. ca mesajul să fie corect?

$$\mathbb{P}(X=0\cup X=1\cup X=2)=\mathbb{P}(X\le 2)=\sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$