Acad. M. NICOLESCU

N. DINCULEANU

S. MARCUS

ANALIZĂ MATEMATICĂ

EDIŢIA A PATRA

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Acad. M. NICOLESCU

N. DINCULEANU

S. MARCUS

ANALIZĂ MATEMATICĂ

I

EDIȚIA A PATRA

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI – 1971

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A TREIA

Ediția a treia a volumului I al manualului de analiză matematică nu prezintă modificări structurale față de ediția precedentă. Am ținut totuși să îndreptăm pe cît posibil atît erorile și scăpările datorite autorilor, cît și erorile de tipar.

Am profitat de acest prilej ca să simplificăm prezentarea unor capitole, precum și unele demonstrații. În același timp am căutat să aplicăm mai consecvent și mai adîncit conceptul general de funcție introdus chiar la începutul manualului la studiul aplicațiilor lui R sau R^2 în R^2 sau R^3, privite ca spații vectoriale, adică la studiul așa-numitelor funcții vectoriale.

Era natural ca să dăm și în acest caz, ca și în cazul aplicațiilor numerice, o interpretare fizică derivatei întîi și derivatei a doua. În acest mod, studentul este mai bine pregătit să abordeze studiile ulterioare de geometrie sau de mecanică.

Este probabil că în această ediție se vor strecura alte erori. Vom fi recunoscători colegilor care ne vor semnala lipsurile de orice fel, ajutîndu-ne astfel să ne îmbunătățim continuu prezentarea manualului.

AUTORII

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A DOUA

Intervalul de timp foarte scurt la care această ediție urmează primei ediții nu ne-a îngăduit să reflectăm prea mult asupra tuturor îmbunătățirilor ce s-ar fi putut aduce în redactarea și prezentarea materialului din acest volum și nici nu ne-a permis să culegem observațiile făcute de cititori. Cu toate acestea, am procedat la unele modificări pe care le-am crezut absolut necesare pentru mai buna înțelegere a fenomenelor matematice prezentate. Astfel, studiul șirurilor convergente se prezintă mai sistematic dacă este precedat de studiul șirurilor care converg către zero. Am introdus în noua ediție acest studiu preliminar.

De asemenea, studiul funcțiilor integrabile Riemann a fost completat cu teorema de echivalență a lui Lebesgue. Prezentarea acestui criteriu are un interes științific deosebit: pe de o parte, cititorul capătă o informație precisă asupra structurii funcțiilor integrabile Riemann; pe de altă parte, criteriul lui Lebesgue delimitează exact domeniul de integrare cu metoda Riemann. În fapt, după ce Lebesgue, în jurul anului 1900, a obținut teorema sa de caracterizare a integrabilității în sensul lui Riemann, a trebuit să se gîndească la un alt procedeu pentru a extinde integrala Riemann; și astfel a ajuns la integrala care-i poartă numele.

Din punct de vedere metodologic, criteriul lui Lebesgue permite să se dea demonstrații mult mai simple tuturor proprietăților privind funcțiile integrabile Riemann și calculul cu aceste funcții. Aceste demonstrații figurează în ediția de față.

În afară de aceste modificări mai importante, s-au mai adus, de-a lungul întregului curs, unele mici îndreptări și modificări pe care nu le mai enumerăm aici.

Toate îndreptările, adăugirile și chiar suprimările făcute cu scopul ameliorării atît a formei cît și a conținutului nu modifică linia generală *a manualului. De aceea ne menținem rugămintea către colegii noștri de specialitate și către toți cititorii de a ne semnala erorile eventuale scăpate și de a ne trimite toate observațiile susceptibile de a contribui la o și mai bună prezentare a acestui manual.*

Decembrie, 1962 AUTORII

PREFAȚĂ LA EDIȚIA ÎNTÎI

Cartea de față reprezintă, în cea mai mare măsură a sa, fructul experienței didactice ***a autorilor*** *săi, precum și al unor repetate dezbateri, în ședințele de* ***colectiv ale*** *catedrei, asupra celor mai bune mijloace de prezentare a noțiunilor de bază ale analizei.*

Întreaga teorie a integralei, ca și teoria curbelor rectificabile, pentru a nu da decît aceste două exemple, poartă pecetea, așa cum sînt redactate aici, a discuțiilor fructuoase purtate în colectivul amintit mai sus.

În consecință, manualul de față, care are ca punct de plecare un manual mai vechi al unuia dintre autori[1]*, se deosebește în mod sensibil de acesta.*

Există, în primul rînd, o deosebire în ordonarea materiei, care a urmat, în manualul de față, în mod strict, programa analitică.

Această programă este diferită de programa din 1949, ca și de cea din 1953. Ca urmare, conținutul însuși al actualului manual este mai cuprinzător decît al vechiului manual.

În anii regimului democrat-popular a avut loc o înflorire fără precedent a cercetării matematice, care a cuprins sectoare din ce în ce mai largi ale acestei discipline. În particular, s-a creat o școală puternică de analiză funcțională și topologie, prin eforturile reunite ale catedrelor care constituie astăzi secția de analiză a Facultății de matematică și fizică a Universității din București.

---

[1] Miron Nicolescu: 1° Calcul diferențial și integral, 1949; 2° Analiză matematică, vol. II, 1953.

În dezvoltarea acestei școli, cursul de analiză matematică (calculul diferențial și integral) a jucat și va trebui să continue să joace un rol de bază. Iată de ce am considerat necesar să dăm o orientare corespunzătoare acestui curs, ținînd — bineînțeles — seama de tradiția creată și verificată prin experiența de atîția ani de la catedra de calcul diferențial și integral.

Am ținut, de asemenea, seama de locul din ce în ce mai important pe care algebra abstractă îl joacă în cercetarea matematică actuală. Metodele algebrei au pătruns astăzi în aproape toate celelalte discipline matematice. Din acest motiv, demarcarea precisă între diversele sectoare ale activității matematice devine o operație din ce în ce mai grea. O astfel de demarcare, dacă este prea net subliniată, este chiar dăunătoare ideii de unitate pe care cercetătorul începător trebuie să o capete din studiul diverselor discipline matematice.

Toți factorii enumerați mai sus și-au adus contribuția lor în înfățișarea actuală a cursului. O consecință a acestui fapt o constituie, de exemplu, punerea în acord a terminologiei utilizate în curs cu terminologia în uz în cercetarea actuală, precum și utilizarea frecventă a limbajului vectorial, care are dublu avantaj: de a simplifica prezentarea și de a înlesni drumul spre analiza funcțională.

Volumul acestui curs poate apărea prea mare față de numărul de ore atribuit analizei matematice prin programa actuală.

Am fi putut foarte bine să prezentăm acest curs ca o reproducere fidelă a lecțiilor orale, lucru care ar fi micșorat (nu prea mult, totuși) volumul acestui curs. Considerăm însă că dacă această metodă se poate susține cu argumente valabile, pentru un curs de specializare, ea devine de-a dreptul dăunătoare, în cazul unui curs fundamental. Dacă profesorul, din lipsă de timp sau pentru motive de ordin pedagogic, găsește cu cale să prezinte, într-o lecție vorbită, numai liniile generale ale unui raționament, studentul trebuie să poată găsi în manual raționamentul expus în toate detaliile. Mai mult decît atît, un adevărat manual consacrat unei materii fundamentale trebuie să poată servi studentului și după trecerea examenelor respective, ca o carte de referință, analogă unui „dicționar politehnic" pentru un inginer.

Întrucît această carte este destinată studenților, autorii sînt interesați în cea mai mare măsură să cunoască rezultatele experienței făcute cu manualul de față la celelalte instituții de învățămînt superior; ei vor primi cu recunoștință toate observațiile care vor contribui la îmbunătățirea eventualelor ediții următoare.

AUTORII

17 ian – Vec

Capitolul I

MULŢIMI ŞI FUNCŢII

§ 1. Apartenenţă, incluziune, părţile unei mulţimi

Vom adopta aşa-numitul *punct de vedere naiv* în expunerea noţiunilor din teoria mulţimilor, adică vom da noţiunilor fundamentale, mulţime, relaţie, proprietate, corespondenţă etc., înţelesul pe care-l au în limbajul obişnuit.

1. Exemple de mulţimi

Denumirile mulţime, grămadă, ansamblu, colecţie sînt sinonime. Iată cîteva exemple de mulţimi concrete:

1) Mulţimea oamenilor de pe glob.
2) Mulţimea literelor alfabetului latin.
3) Mulţimea punctelor de pe un cerc.
4) Mulţimea moleculelor dintr-un corp.
5) Mulţimea numerelor naturale* 1, 2, 3, 4, ...
6) Mulţimea numerelor 1, 3, 7.
7) Mulţimea formată numai din numărul 2.

2. Elementele unei mulţimi

Obiectele din care este alcătuită o mulţime se numesc *elemente* ale mulţimii. Elementele unei mulţimi pot fi obiecte de orice natură, fie obiecte concrete, fie obiecte ale gîndirii. Pentru studiu, problema esenţială este posibilitatea de a distinge între ele aceste obiecte.

---

* Vom presupune cunoscute numerele întregi, pentru exemplificarea noţiunilor din acest capitol. Teoria mulţimilor nu necesită însă cunoaşterea conceptului de număr, ci, dimpotrivă, construirea numerelor necesită cunoaşterea teoriei mulţimilor.

Cărţile unei biblioteci constituie la un loc o mulţime. O carte din bibliotecă este un element al mulţimii. Elementele (cărţile) acestei mulţimi pot fi deosebite între ele, fie prin conţinut, fie prin format, fie prin locul pe care îl ocupă în spaţiu.

Mulţimile şi elementele sînt notate în raţionamente prin litere (ale diverselor alfabete), prin alte simboluri grafice sau prin combinaţii de litere şi alte semne. De obicei, mulţimile se notează cu litere mari, iar elementele cu litere mici.

Pentru simplificarea limbajului se spune de cele mai multe ori „mulţimea A" sau „elementul x" în loc de „mulţimea *notată* prin litera A" sau „elementul *notat* prin litera x".

O literă poate indica fie un element *determinat*, fie un element *arbitrar*, nedeterminat, al unei mulţimi. Un element arbitrar este de asemenea numit *variabilă*, sau *argument*, sau element *generic* al mulţimii.

Dacă într-o proprietate, sau într-o relaţie relativă la elementele unei mulţimi, se înlocuieşte un element arbitrar x printr-un element determinat x_0, se spune că se dă lui x valoarea x_0.

Se spune că o proprietate sau o relaţie în care intervin elemente arbitrare este o *identitate*, dacă ea devine o propoziţie adevărată, oricare ar fi valorile date elementelor arbitrare (argumentelor).

3. Moduri de definire a mulţimilor

O mulţime se consideră definită (precizată, dată) dacă avem un criteriu după care putem deosebi elementele mulţimii de celelalte obiecte care nu fac parte din mulţime. În acest sens, o mulţime poate fi definită fie numind individual elementele sale, fie specificînd o proprietate pe care o au toate elementele sale şi pe care nu o au alte obiecte.

O mulţime definită prin enumerarea elementelor sale se notează scriind între acolade aceste elemente. De exemplu, mulţimile din exemplele 5, 6 şi 7 se notează, respectiv: $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{2\}$.

Vom face distincţie între mulţimea $\{2\}$ şi elementul 2 al acestei mulţimi.

O mulţime definită prin specificarea unei proprietăţi caracteristice P a elementelor sale se notează scriind între acolade această proprietate. De exemplu, mulţimea punctelor (x, y) din plan care aparţin cercului cu centrul în origine şi raza 1 se notează:

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

4. Relaţia de egalitate

Dacă două litere, x şi y, *reprezintă acelaşi element* al unei mulţimi E, se scrie $x = y$ şi se citeşte „x este egal cu y". Dacă x şi y *nu* reprezintă acelaşi element se scrie $x \neq y$ şi se citeşte „x nu este egal cu y" sau „x

este diferit de y". Semnul $=$ se numește *semn de egalitate*. Se verifică imediat că relația de egalitate are următoarele proprietăți*:

1) $x = x$ (egalitatea este reflexivă);

2) $x = y \Rightarrow y = x$ (egalitatea este simetrică);

3) $x = y$ și $y = z \Rightarrow x = z$ (egalitatea este tranzitivă) (x, y și z sînt elemente arbitrare ale lui E).

5. Relația de apartenență

Dacă a este un element al unei mulțimi A (mai precis, dacă litera a *reprezintă* un element al mulțimii *indicate* prin litera A), se scrie $a \in A$ și se citește „a aparține mulțimii A". Dacă b *nu* este element al mulțimii A, se scrie $b \notin A$ și se citește „b nu aparține lui A". Semnul $\in$ se numește *semn de apartenență*.

Am definit astfel *relația de apartenență* între elementele unei mulțimi și mulțimea însăși.

În loc de $a \in A$ se poate scrie $A \ni a$.

Exemple. $5 \in \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$; $3 \in \{1, 3, 7\}$; $2 \in \{2\}$; $-1 \notin \{1, 2, 3, \ldots\}$; $2 \notin \{1, 3, 7\}$; $3 \notin \{2\}$; $\{1, 3, 7\} \ni 7$; $\{1, 3, 7\} \not\ni 5$.

6. Părțile unei mulțimi

Fie E o mulțime. O proprietate P, care se referă la elementele lui E (pe care unele elemente o pot avea, iar alte elemente pot să nu o aibă), definește o mulțime formată din *acele* elemente ale lui E care *au* proprietatea P. O astfel de mulțime formată din elemente ale lui E se numește *parte* a lui E sau *submulțime* a lui E.

Proprietatea „$x = x$" este adevărată pentru toate elementele $x \in E$, este o identitate. Partea definită de această proprietate se numește *partea plină* a lui E și este formată din *toate* elementele lui E. Așadar E este o parte sau o submulțime (improprie) a sa însăși.

Dacă $a \in E$, mulțimea $\{a\}$ formată numai din elementul a este o parte a lui E. Această parte poate fi definită ca mulțimea punctelor $x \in E$ care au proprietatea $x = a$.

---

* $\Rightarrow$ este semnul *implicației logice*. De exemplu, $x = y \Rightarrow y = x$ se citește „$x=y$ implică (atrage) $y=x$", sau „dacă $x=y$, atunci $y = x$", sau încă, „din $x = y$ rezultă $y = x$". Semnul $\Rightarrow$ se poate citi, de asemenea: deci, așadar, prin urmare.

$\Leftrightarrow$ este semnul *echivalenței logice*. De exemplu, $x = y \Leftrightarrow y = x$ se citește: „$x = y$ este echivalent cu $y = x$", sau, $x = y$ dacă și numai dacă $y = x$" sau „$x = y$ atunci și numai atunci cînd $y = x$" sau încă „pentru ca $x = y$ este necesar și suficient ca $y = x$". Semnul $\Leftrightarrow$ se poate citi, de asemenea: adică, înseamnă că, este același lucru cu etc.

Dacă o submulţime A a lui E nu coincide cu E, atunci A se numeşte o submulţime *proprie* sau *strictă* a lui E.

Printre părţile lui E se consideră şi *partea vidă a lui E*, care se notează $\emptyset$ şi care nu conţine nici un element. Partea vidă poate fi definită, de exemplu, ca mulţimea elementelor $x \in E$ care au proprietatea $x \neq x$.

Părţile mulţimii E pot fi considerate ca elemente ale unei noi mulţimi, numită *mulţimea părţilor lui E*, şi notată $\mathcal{P}(E)$. Printre elementele mulţimii $\mathcal{P}(E)$ a părţilor lui E, se află părţile E, $\emptyset$ şi $\{a\}$ dacă $a \in E$. Putem deci scrie $E \in \mathcal{P}(E)$, $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$.

Dacă două părţi A şi B ale lui E sînt formate din aceleaşi elemente, se scrie $A = B$. Mai precis, $A = B$ înseamnă că literele A şi B *desemnează aceeaşi parte* a lui E (sau acelaşi element al mulţimii părţilor $\mathcal{P}(E)$).

7. Relaţia de incluziune

Fie E o mulţime, A şi B două părţi ale sale. Dacă fiecare element al lui A aparţine şi lui B, se scrie $A \subset B$ şi se citeşte „A este *conţinută* în B" sau „A este *inclusă* în B". În loc de $A \subset B$ se scrie de asemenea $B \supset A$ şi se citeşte „B conţine (sau include) pe A" (fig. 1). Dacă

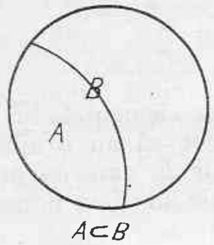


Fig. 1

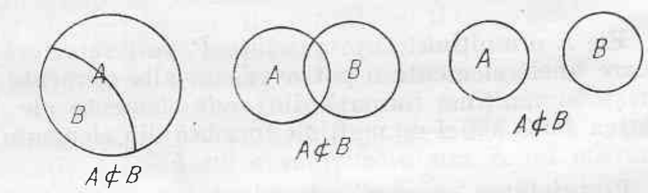


Fig. 2

A *nu este* inclusă în B, se scrie $A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$ şi se citeşte respectiv „A nu este inclusă în B" sau „B nu include pe A" (fig. 2). Vom face convenţia $\emptyset \subset A$, oricare ar fi partea A a lui E.

Am definit astfel *relaţia de incluziune* între părţile lui E (sau între elementele mulţimii părţilor $\mathcal{P}(E)$).

Se verifică imediat că relaţia de incluziune are proprietăţile următoare:

1) $A \subset A$ (este reflexivă);
2) $A \subset B$ şi $B \subset A \Rightarrow A = B$ (este antisimetrică);
3) $A \subset B$ şi $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (este tranzitivă)

(A, B şi C fiind părţi arbitrare ale lui E).

Relaţia de incluziune este o *relaţie de ordine** în mulţimea părţilor $\mathcal{P}(E)$.

Exemple $\{1, 3, 7\} \subset \{1, 3, 7\}$; $\{1, 7\} \subset \{1, 3, 7\}$; $\{1, 7\} \subset \{1, 7\}$; $\{3\} \subset \{1, 3, 7\}$; $\emptyset \subset \{3\}$; $\emptyset \subset \{3, 7\}$; $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3\}$; $\{1, 3\} \not\subset \{1, 7\}$; $\{7\} \not\subset \{1, 3\}$; $\{1\} \not\subset \emptyset$.

Două părţi A şi B sînt *comparabile* dacă sau $A \subset B$ sau $B \subset A$. De exemplu $\{1, 3\}$ şi $\{1, 3, 7\}$ sînt comparabile deoarece $\{1, 3\} \subset \{1, 3, 7\}$. Dacă nici una din părţile A şi B *nu* este inclusă în cealaltă, se spune că A şi B sînt *incomparabile*. De exemplu $\{1, 3\}$ şi $\{1, 7\}$ sînt incomparabile deoarece $\{1, 3\} \not\subset \{1, 7\}$ şi $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3\}$.

Legătura dintre relaţia de apartenenţă şi relaţia de incluziune este exprimată de următoarele proprietăţi:

1) $a \in A$ şi $A \subset B \Rightarrow a \in B$;

2) $a \in A \Leftrightarrow \{a\} \subset A$.

Observaţie. Proprietatea 2 a relaţiei de ordine (antisimetria) constituie procedeul obişnuit de demonstraţie a egalităţii a două mulţimi A şi B (sau, mai precis, literele A şi B *reprezintă aceeaşi mulţime*): se arată întîi că $x \in A \Rightarrow x \in B$ (deci $A \subset B$) şi apoi se arată că $x \in B \Rightarrow x \in A$ (deci $B \subset A$), de unde rezultă $A = B$.

§ 2. Operaţii cu mulţimile

1. Reuniunea şi intersecţia

Fie E o mulţime, A şi B două părţi ale ei.

Mulţimea elementelor care aparţin *cel puţin uneia* din mulţimile A şi B se numeşte *reuniunea* lui A şi B şi se notează $A \cup B$ (se citeşte A reunit cu B) (fig. 3). Aşadar:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Semnul $\cup$ se numeşte *semn de reuniune*.

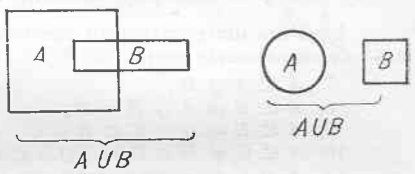


Fig. 3

Exemplu.

$\{1, 2, 5\} \cup \{-1, 0, 2\} = \{-1, 0, 1, 2, 5\}$.

* O relaţie $x \leqslant y$ definită pentru unele perechi ordonate (x, y) de elemente ale unei mulţimi M se numeşte *relaţie de ordine* dacă este *reflexivă* ($x \leqslant x$ oricare ar fi $x \in M$), *antisimetrică* ($x \leqslant y$ şi $y \leqslant x \Rightarrow x = y$) şi *tranzitivă* ($x \leqslant y$ şi $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$). Fie $x \leqslant y$ o relaţie de ordine; să definim relaţia „$x < y$" ca fiind echivalentă cu $x \leqslant y$ şi $x \neq y$". Relaţia $x < y$ este *ireflexivă* ($x < x$ nu are loc pentru nici un element $x \in M$) şi *tranzitivă* ($x < y$ şi $y < z \Rightarrow x < z$). Relaţia $x < y$ se numeşte relaţie de ordine strictă.

Reciproc, dîndu-se o relaţie de ordine strictă $x < y$ (ireflexivă şi tranzitivă), obţinem o relaţie de ordine $x \leqslant y$ reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă dacă definim „$x \leqslant y$" ca fiind echivalentă cu „$x < y$ sau $x = y$".

O relaţie de ordine între elementele unei mulţimi M defineşte pe M o *structură de ordine* sau, mai simplu, o *ordine*. Mulţimea M împreună cu o ordine definită pe ea se numeşte *mulţime ordonată*. Mulţimea M este total ordonată, dacă oricare ar fi elementele $x \neq y$ din M avem sau $x < y$, sau $y < x$.

Mulţimea elementelor care aparţin *şi lui A şi lui B* se numeşte *intersecţia* lui A şi B şi se notează $A \cap B$ (se citeşte: A intersectat cu B (fig. 4). Aşadar:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}.$$

Dacă A şi B nu au nici un element comun, atunci intersecţia lor este vidă: $A \cap B = \emptyset$. În acest caz se spune că A şi B sînt *disjuncte* (fig. 5).

Exemple. $\{1, 2, 5\} \cap \{0, 2, 5\} = \{2, 5\}$; $\{1, 2, 5\} \cap \{2, 7\} = \{2\}$; $\{1, 2, 5\} \cap \{3, 7\} = \emptyset$.

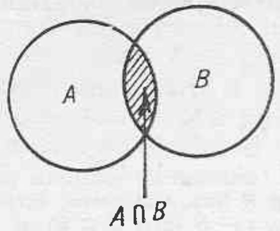


Fig. 4

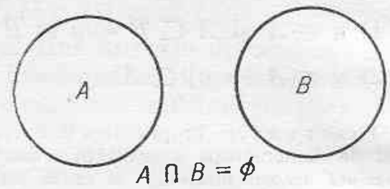


Fig. 5

Am definit astfel operaţiile de reuniune şi intersecţie, prin care fiecărei perechi (A,B) de părţi ale lui E i se asociază mulţimea $A \cup B$, respectiv $A \cap B$.

Cele două operaţii cu mulţimile au următoarele proprietăţi:

1) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$ **(idempotenţa)**,
2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ **(asociativitatea)**,
3) $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$ **(comutativitatea)**,
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **(distributivitatea)**,
5) $A \cup \emptyset = A$; $A \cap E = A$,
6) $A \cup E = E$; $A \cap \emptyset = \emptyset$

(A, B şi C fiind părţi arbitrare ale lui E).

Legătura dintre relaţia de incluziune şi operaţiile de reuniune şi intersecţie este exprimată de următoarele proprietăţi:

7) $A \subset A \cup B$; $A \cap B \subset A$,
8) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$; $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$,
9) $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$; $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$,
10) $A \subset C$ şi $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$; $C \subset A$ şi $C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$

(A, B şi C fiind părţi arbitrare ale lui E).

Se definesc în mod asemănător reuniunea şi intersecţia mai multor mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, notate respectiv

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \quad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \text{ sau } \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

2. Diferenţa. Complementara

Fie E o mulţime, A şi B două părţi ale ei. Mulţimea elementelor lui A care *nu* aparţin lui B se numeşte *diferenţa* dintre A şi B şi se notează $A - B$ (se citeşte A minus B) (fig. 6). Aşadar:

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

Diferenţa $A - B$ se obţine eliminînd din A elemente care aparţin şi lui B.

Dacă A şi B sînt disjuncte, atunci $A - B = A$; dacă $A \subset B$ atunci $A - B = \emptyset$.

Diferenţa $E - A$ se numeşte *complementara* lui A şi se notează $\complement A$. Aşadar :

$$\complement A = \{(x \mid x \in E,\ x \notin A\}.$$

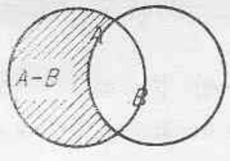


Fig. 6

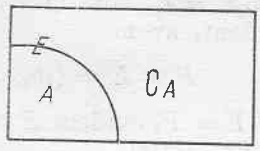


Fig. 7

Complementara lui A este formată din toate elementele lui E care nu aparţin lui A.

Următoarele proprietăţi se deduc imediat :

1) $\complement E = \emptyset$; $\complement\emptyset = E$,

2) $\complement(\complement A) = A$,

3) $A \cup \complement A = E$; $\qquad A \cap \complement A = \emptyset$,

4) $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$; $\qquad \complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B)$,

5) $A \subset B \Leftrightarrow \complement A \supset \complement B$

(A şi B fiind părţi arbitrare ale lui E).

Din proprietăţile 3 rezultă că :

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin \complement A \quad \text{şi} \quad x \in \complement A \Leftrightarrow x \notin A.$$

3. Produs cartezian

Fie E şi F două mulţimi distincte sau nu. Putem forma perechi ordonate (x, y) cu elementele celor două mulţimi, cu primul element x din E şi al doilea element y din F.

Să considerăm *toate* perechile (x, y) de acest fel. Mulţimea tuturor perechilor (x, y), considerate ca elemente, se numeşte *produsul cartezian* al lui E cu F şi se notează $E \times F$. Aşadar :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E,\ y \in F\}.$$

E şi F se numesc factorii produsului cartezian $E \times F$; E este primul factor, iar F este al doilea factor.

x şi y se numesc *coordonatele* sau *proiecţiile* elementului (x, y) ; x este prima coordonată sau prima proiecţie, iar y este a doua coordonată sau a doua proiecţie.

Exemplu. $E = \{a_1, a_2\}$, $F = \{b_1, b_2\}$, $E \times F = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$.

Se poate considera produsul cartezian $F \times E$ al lui F cu E, ale cărui elemente sînt perechile (y, x) cu $y \in F$ şi $x \in E$;

$$F \times E = \{(y, x) \mid y \in F, x \in E\}.$$

Dacă $E \neq F$, vom face distincţie între $E \times F$ şi $F \times E$. În exemplul precedent, avem:

$$F \times E = \{(b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_2, a_1), (b_2, a_2)\}.$$

Dacă $E = F$, evident $E \times F = F \times E$. În acest caz, în loc de $E \times E$ vom scrie E^2. Astfel,

$$E^2 = \{(x, y) \mid x \in E, y \in E\}.$$

Exemplu. $E = \{a_1, a_2\}$, $E^2 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$.

Două elemente (x, y) şi (x', y') ale produsului cartezian sînt egale dacă şi numai dacă $x = x'$ şi $y' = y'$.

Se poate defini produsul cartezian $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ a n mulţimi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ca fiind mulţimea tuturor grupelor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ unde $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$. Aşadar:

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n)\}.$$

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ se numesc factorii produsului cartezian, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc coordonatele sau proiecţiile elementului $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Dacă $E_1 = E_2 = \ldots = E_n$, se scrie E^n în loc de $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ factori}}$.

§ 3. Funcţii

1. Definiţia funcţiei

Fie E şi F două mulţimi distincte sau nu.

D e f i n i ţ i e. Dacă, printr-un procedeu oarecare, facem să corespundă fiecărui element $x \in E$ un element şi unul singur $y \in F$, spunem că am definit o funcţie pe E cu valori în F.

Prin *funcţie* se înţelege ansamblul format din: mulţimea E, mulţimea F şi corespondenţa $x \to y$ de la E la F.

E se numeşte *mulţimea de definiţie* (sau domeniul de definiţie) al funcţiei, iar *F* se numeşte *mulţimea în care funcţia ia valori.*

O funcţie se notează cu o literă, de exemplu f (se pot folosi şi alte litere, g, h, F, φ, Φ etc.).

Dacă f este o funcţie definită pe E cu valori în F, se spune de asemenea că f este o *aplicaţie a lui E în F.*

Vom folosi adesea notaţia $f : E \to F$ care se citeşte: funcţia f definită pe E cu valori în F, sau, aplicaţia f a lui E în F.

Dacă într-un raţionament intervin două sau mai multe funcţii, vom folosi diagrame de forma următoare:

$$\begin{tikzcd} & & G \\ E \arrow[r, "f"] & F \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"'] & \\ & & H \end{tikzcd},$$

unde printr-un grup de semne ca $E \xrightarrow{f} F$ se înţelege că f este o aplicaţie a lui E în F.

Dacă printr-o funcţie $f : E \to F$, unui element $a \in E$ îi corespunde elementul (unic) $b \in F$, se spune că b *este valoarea funcţiei f* în „punctul" a, şi se notează $f(a)$. Aşadar:

$$b = f(a).$$

Se spune, de asemenea, că b este *imaginea* lui a prin funcţia f, sau că b este *transformatul* lui a prin funcţia f, sau că, funcţia f *transformă* pe a în b.

Uneori, se foloseşte în loc de $f(a)$ *notaţia indicială* f_a.

Un element oarecare x al mulţimii de definiţie E se numeşte de asemenea *variabilă* sau *argument* al funcţiei f. Funcţia f se reprezintă de asemenea prin notaţia simbolică

$$x \to f(x),\ x \in E.$$

Se poate spune, de exemplu: fie funcţia f care fiecărui număr real x face să-i corespundă x^2; sau, fie funcţia f definită pe mulţimea numerelor reale prin corespondenţa $x \to x^2$ (sau prin egalitatea $f(x) = x^2$).

Observaţie. Trebuie făcută distincţie între funcţia f (care reprezintă corespondenţa de la E la F, în ansamblul ei) şi elementul $f(x)$ din F (care reprezintă *valoarea* funcţiei f în x). Totuşi, funcţia se notează adesea cu $f(x)$ în loc de $x \to f(x)$, ceea ce constituie un abuz de limbaj foarte frecvent şi de foarte multe ori necesar. De exemplu, funcţia exponenţială $x \to 2^x$, definită pe mulţimea numerelor reale, va fi notată, mai simplu, 2^x.

Aplicaţiile f ale unei mulţimi E într-o mulţime F sînt elementele unei mulţimi, *mulţimea aplicaţiilor lui E în F*, care se notează F^E.

Exemple. 1) Fie $E = \{u, v, w\}$ şi $F = \{a, b, c\}$. Corespondenţa indicată în figura 8 prin săgeţi defineşte o funcţie $f : E \to F$.

Avem: $f(u) = b, \quad f(v) = a, \quad f(w) = b.$

Pe acest exemplu se constată că:

a) o funcţie poate avea *valori egale* în *puncte diferite* (de exemplu, $f(u) = f(w) = b$);

b) în mulţimea F pot exista elemente care să nu fie valori ale funcţiei (de ex. c nu este valoare a funcţiei f).

2) O funcţie $f: E \to F$ este *constantă* dacă are *aceeaşi valoare*, $f(x) = a$, în toate punctele $x \in E$.

În figura 9 avem un exemplu de funcţie constantă.

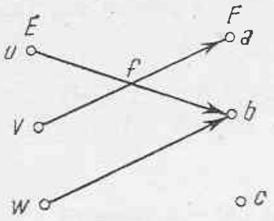


Fig. 8

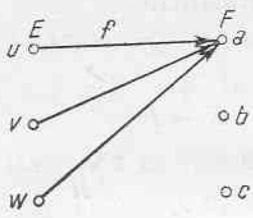


Fig. 9

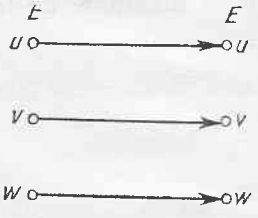


Fig. 10

Pentru fiecare element $a \in F$ se poate defini o aplicaţie constantă $f(x) \equiv a$ (şi numai una) a lui E în F. Pentru mulţimile E şi F din figura 9, putem defini trei funcţii constante: $f(x) \equiv a$, $f(x) \equiv b$ şi $f(x) \equiv c$.

3) Se numeşte *aplicaţie identică a unei mulţimi E în ea însăşi funcţia* $i: E \to E$ definită prin corespondenţa $x \to x$ (sau prin egalitatea $i(x) = x$). Aplicaţia identică a mulţimii $E = \{u, v, w\}$ în ea însăşi este reprezentată în figura 10.

2. Graficul unei funcţii

Fie funcţia $f: E \to F$. Corespondenţa $x \to f(x)$ stabilită de funcţia f se poate reprezenta prin perechi ordonate $(x, f(x))$. O astfel de pereche este un element al produsului cartezian $E \times F$, deoarece $x \in E$ şi $f(x) \in F$.

Mulţimea G a *tuturor* perechilor de forma $(x, f(x))$ cu $x \in E$ se numeşte graficul funcţiei f. Aşadar:

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

Graficul funcţiei f este o parte a produsului cartezian $E \times F$ şi este caracterizat de următoarele proprietăţi:

1) *fiecare* element $x \in E$ face parte dintr-o pereche (x, y) a graficului G_f, şi *numai* din una;

2) în fiecare pereche (x, y) a graficului, cele două coordonate x şi y verifică egalitatea $y = f(x)$; pentru orice altă pereche (x, y) care *nu* aparţine graficului, avem $x \neq f(x)$.

Egalitatea

$$y = f(x),$$

verificată de toate elementele (x, y) ale graficului şi numai de acestea, se numeşte *ecuaţia graficului funcţiei* f.

Fie acum G o submulţime a produsului cartezian $E \times F$, care are proprietatea că *fiecare* element $x \in E$ face parte dintr-o pereche $(x, y) \in G$ şi *numai* din una. Putem atunci defini o funcţie $f: E \to F$, făcînd să corespundă *fiecărui* element $x \in E$, elementul *unic* $y \in F$, pentru care $(x, y) \in G$ adică punînd $f(x) = y$ pentru fiecare pereche $(x, y) \in G$.

Mulţimea G este graficul funcţiei f astfel definite.

Exemplu. Graficul aplicaţiei identice a mulţimii E în ea însăşi este mulţimea perechilor (x, x) cu $x \in E$. Graficul aplicaţiei identice se numeşte *diagonala* produsului cartezian E^2.

Observaţii. 1° Graficul unei funcţii $f: E \to F$ coincide cu produsul cartezian $E \times F$, dacă şi numai dacă mulţimea F este formată dintr-un singur element.

2° O submulţime $K \subset E \times F$ care conţine două perechi (x, y) şi (x, y'), cu acelaşi prim element x, dar cu $y \neq y'$, nu este graficul unei funcţii, deoarece în corespondenţa stabilită de mulţimea K, lui x i se asociază două elemente *diferite*, y şi y'.

De exemplu, mulţimea punctelor (x, y) din plan, care verifică ecuaţia $x^2 + y^2 = 4$ (cercul cu centrul în origine şi raza 2) *nu* este graficul unei funcţii, deoarece pentru $x = \sqrt{2}$, există două numere *diferite*, $y = \sqrt{2}$ şi $y' = -\sqrt{2}$, care verifică această ecuaţie.

3° Din cauza corespondenţei dintre o funcţie f şi *ecuaţia* $y = f(x)$ a graficului său G_f, se foloseşte uneori, pentru funcţie, notaţia $y = f(x)$.

3. Familii. Şiruri

În anumite cazuri este util să concepem o funcţie $f: I \to E$ ca o familie de elemente din E; în acest caz, se foloseşte notaţia indicială f_i pentru valoarea funcţiei într-un punct i. Mulţimea de definiţie I se numeşte atunci *mulţimea indicilor*; orice element $i \in I$ se numeşte *indice*, iar f_i se numeşte element al familiei, cu indicele i. Elementele familiei pot coincide (dacă f nu este biunivocă).

O asemenea familie se notează:

$$(f_i)_{i \in I}.$$

De obicei, dacă pentru elementele mulţimii E se foloseşte o literă a, o familie de elemente ale lui E se notează $(a_i)_{i \in I}$.

Dacă mulţimea indicilor este mulţimea $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ a numerelor naturale, o familie $(a_n)_{n \in N}$ de elemente ale mulţimii E se numeşte *şir*. Aşadar, un şir de elemente din E este o funcţie $n \to a_n$ definită pe mulţimea N a numerelor naturale, cu valori în E.

4. Reuniuni şi intersecţii de familii

Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de părţi (distincte sau nu) ale unei mulţimi E.

Mulţimea elementelor $x \in E$ care au proprietatea că aparţin cel puţin unei mulţimi A_i din familie se numeşte reuniunea familiei şi se notează

$$\bigcup_{i \in I} A_i.$$

Mulţimea elementelor $x \in E$ care aparţin tuturor mulţimilor din familie se numeşte intersecţia familiei şi se notează

$$\bigcap_{i \in I} A_i.$$

Dacă $(A_n)_{n \in N}$ este un şir de părţi ale lui E, reuniunea şi intersecţia acestui şir se notează şi astfel:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ sau } A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

respectiv

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ sau } A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$$

Dacă $I = \emptyset$, obţinem o familie vidă de părţi ale lui E. Se face convenţia ca reuniunea familiei vide să fie $\emptyset$, iar intersecţia familiei vide să fie mulţimea E. Cu această convenţie, au loc totdeauna egalităţile

$$\complement\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \complement A_i \quad \text{şi} \quad \complement\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \complement A_i$$

oricare ar fi familia $(A_i)_{i \in I}$.

5. Restricţii şi extensiuni de funcţii

Din definiţia dată noţiunii de funcţie rezultă că două funcţii f şi g sînt egale dacă sînt definite pe aceeaşi mulţime E, au valori în aceeaşi mulţime F şi dacă stabilesc aceeaşi corespondenţă, adică dacă

$$f(x) = g(x) \text{ pentru orice } x \in E.$$

Altfel exprimat: funcţiile f şi g sînt egale dacă şi numai dacă au acelaşi grafic.

Aşadar, două funcţii f şi g sînt *diferite*, fie dacă *nu* sînt definite pe aceeaşi mulţime, fie, în cazul cînd sînt definite pe aceeaşi mulţime E, dacă au valori diferite *cel puţin* într-un punct $x_0 \in E$:

$$f(x_0) \neq g(x_0).$$

Fie funcţia $f : E \to F$ şi A o parte a lui E. Să considerăm corespondenţa $x \to f(x)$ stabilită de funcţia f *numai* pentru elementele $x \in A$. Această

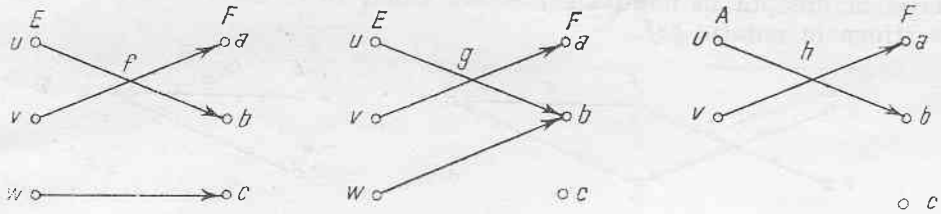


Fig. 11

corespondenţă de la A la F defineşte o aplicaţie a lui A în F, care se numeşte *restricţia funcţiei f la mulţimea A*, şi se notează, de obicei, cu f_A (sau $f \mid A$). Aşadar: funcţia $f_A : A \to F$ este definită prin egalitatea

$$f_A(x) = f(x) \quad \text{pentru } x \in A.$$

Funcţia $f : E \to F$ este, prin definiţie, o *extensiune* sau o *prelungire* la mulţimea E a funcţiei f_A. Dîndu-se o funcţie $f : E \to F$ şi o mulţime $A \subset E$, există o singură restricţie a lui f la A. Două funcţii *diferite* $f : E \to F$ şi $g : E \to F$ au însă *aceeaşi* restricţie la A dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$.

Aşadar o funcţie $h : A \to F$ are în general mai multe prelungiri la mulţimea E (funcţia h are o prelungire *unică* la E dacă şi numai dacă F este formată dintr-un singur element).

Exemplu. $E = \{u, v, w\}$, $F = \{a, b, c\}$, $A = \{u, v\}$. Funcţia h din figura 11 este restricţia funcţiilor f şi g.

6. Funcţii compuse

Fie $f : E \to F$ şi $g : F \to G$ două funcţii.

Un element oarecare $x \in E$ este transformat de funcţia f în elementul (unic) $f(x) \in F$; mai departe, elementul $f(x) \in F$ este transformat de funcţia g în elementul (unic) $g(f(x)) \in G$. În acest mod putem stabili o corespondenţă $x \to g(f(x))$ direct de la E la G:

$$\begin{array}{l} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \\ x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x)) \\ x \xrightarrow{\qquad\qquad} g(f(x)) \end{array}$$

D e f i n i ț i e. Funcția definită pe E cu valori în G prin corespondența $x \to g(f(x))$ se numește funcția compusă a funcțiilor g și f, în această ordine și se notează $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{pentru } x \in E$$

($g \circ f$ se citește g compus cu f).

Funcția compusă $g \circ f$ este definită pe mulțimea E ca și funcția f scrisă la dreapta în notația $g \circ f$ și are valori în G ca și funcția g scrisă la stînga în notația $g \circ f$.

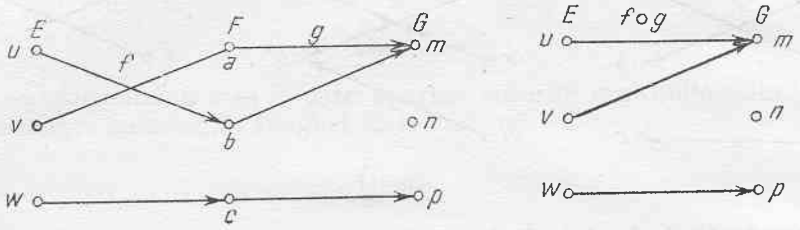


Fig. 12

Este de observat că pentru a obține funcția compusă $g \circ f$, se aplică *întîi* funcția f și *apoi* funcția g.

Exemplu (fig. 12).

Operația de compunere este asociativă:

Dacă $f: E \to F$, $g: F \to G$ și $h: G \to H$ sînt trei funcții, avem, după cum se poate ușor verifica,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

De aceea funcția definită de ambii membri se notează $h \circ g \circ f$ și se numește funcția compusă a funcțiilor h, g și f, în ordinea indicată:

$$\begin{array}{l} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{\quad h \quad} H \\ x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x)) \longleftrightarrow h(g(f(x))) \\ x \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad} h(g(f(x))). \end{array}$$

Se definește în mod analog funcția compusă a mai multor funcții.

O b s e r v a ț i i. 1° Fie $f: E \to F$ și $g: F \to G$ două funcții. În general funcția $f \circ g$ nu poate fi definită. În adevăr, un element $y \in F$ este transformat de funcția g în elementul $g(y) \in G$, și dacă $g(y) \notin E$, nu-i putem aplica funcția f.

2° Dacă $f: E \to F$ și $g: F \to E$ atunci se pot defini ambele funcții compuse: $g \circ f$ și $f \circ g$.

$$\begin{array}{l} E \xrightarrow{f} F \xleftrightarrow{g} E \\ x \longrightarrow f(x) \longleftrightarrow g(f(x)) \\ x \xrightarrow{\qquad\qquad} g(f(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{l} F \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} F \\ y \longrightarrow g(y) \longrightarrow f(g(y)) \\ y \xrightarrow{\qquad\qquad} f(g(y)). \end{array}$$

Cele două funcții compuse $g \circ f$ și $f \circ g$ sînt în general diferite, deoarece prima este definită pe E, iar a doua este definită pe F. Așadar operația de compunere a funcțiilor nu este comutativă.

Dacă $f: E \to E$ şi $g: E \to E$, atunci funcţiile $g \circ f$ şi $f \circ g$ sînt definite pe aceeaşi mulţime E. Chiar în acest caz cele două funcţii compuse sînt în general diferite, cum se constată din exemplul dat în figura 13.

3° Fie funcţia $f: E \to F$.

Dacă i este aplicaţia identică a lui E în E ($i(x) = x$ pentru $x \in E$), atunci

$$f \circ i = f.$$

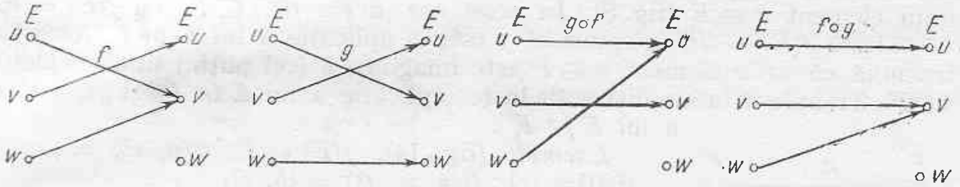


Fig. 13

În adevăr, pentru orice $x \in E$ avem $(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x)$. Funcţiile $f \circ i$ şi f sînt definite amîndouă pe mulţimea E şi stabilesc aceeaşi corespondenţă, deci sînt egale.

De asemenea, dacă j este aplicaţia identică a lui F în F ($j(y) = y$ pentru orice $y \in F$), atunci

$$j \circ f = f.$$

În adevăr, pentru orice $x \in E$ avem $f(x) \in F$ şi

$$(j \circ f)(x) = j(f(x)) = f(x).$$

Să observăm că funcţiile $i \circ f$ şi $f \circ j$ pot fi amîndouă definite dacă şi numai dacă $E = F$. În acest caz, $i = j$, deci $i \circ f = f \circ i = f$. Aplicaţia identică i a lui E în E este deci element neutru (are efect nul) pentru operaţia de compunere a funcţiilor $f: E \to E$.

4° Fie funcţiile $f: E \to F$ şi $g: G \to H$. Să notăm $E_1 = \{x | x \in E, f(x) \in G\}$. Mulţimea E_1 poate fi vidă. Dacă $E_1 \neq \emptyset$, să considerăm restricţia f_1 a lui f la E_1. Aşadar: $f_1: E_1 \to G$. Atunci putem considera funcţia compusă $g \circ f_1: E_1 \to H$. Pentru orice $x \in E_1$ avem

$$(g \circ f_1)(x) = g(f_1(x)) = g(f(x)).$$

De aceea, prin abuz de limbaj, funcţia compusă $g \circ f_1$, se notează adesea $g \circ f$.

§ 4. Aplicaţii biunivoce. Funcţii inverse

1. Imagini directe de mulţimi printr-o funcţie. Aplicaţie pe o mulţime

Fie funcţia $f: E \to F$ şi A o parte a lui E. Mulţimea valorilor luate de funcţia f pe A se numeşte *imaginea directă a lui A prin funcţia f* sau, mai simplu, imaginea lui A prin f şi se notează $f(A)$. Aşadar:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Mulţimea $f(A)$ este o parte a mulţimii F (deoarece $f(x) \in F$ pentru orice $x \in A$), şi se numeşte de asemenea transformata mulţimii A prin funcţia f.

Aşadar, $y \in f(A)$ dacă şi numai dacă există (cel puţin) un element $x \in A$, astfel ca $y = f(x)$.

Imaginea $f(E)$ a întregii mulţimi de definiţie se numeşte *mulţimea valorilor funcţiei* f.

Mulţimea valorilor, $f(E)$, poate fi diferită de mulţimea F în care funcţia ia valori, adică pot exista elemente $y \in F$ care să nu fie imaginea nici unui element $x \in E$ (fig. 8). În acest caz avem $f(E) \subset F$, cu $f(E) \neq F$.

Dacă $f(E) = F$, se spune că f este o aplicaţie a lui E **pe** F. Aceasta înseamnă că *orice* element $y \in F$ este imaginea a (cel puţin) unui element $x \in F$. Trebuie să facem distincţie între „aplicaţie a lui E *în* F" şi „aplicaţie a lui E *pe* F".

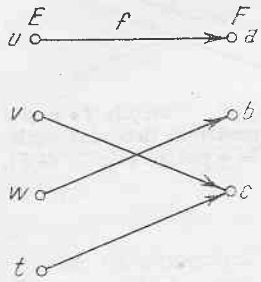


Fig. 14

Exemplu (fig. 14). $f(E) = F$; $f(\{u, v\}) = \{a, c\}$; $f(\{t\}) = \{c\}$; $f(\{v, w, t\}) = \{b, c\}$.

Din definiţia funcţiei deducem următoarele proprietăţi:

1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3) Dacă $A \subset E$ şi $A \neq \emptyset$ atunci $f(A) \neq \emptyset$.
4) Dacă $A \subset E$ este formată numai dintr-un element, $A = \{x\}$, atunci $f(A)$ este formată numai dintr-un element, $f(A) = \{f(x)\}$, adică

$$f(\{x\}) = \{f(x)\}.$$

2. Imagini reciproce de mulţimi printr-o funcţie. Aplicaţii biunivoce

Fie funcţia $f: E \to F$ şi B o parte a lui F. Mulţimea tuturor elementelor $x \in E$ ale căror imagini prin funcţia f aparţin lui B se numeşte *imagine reciprocă* (sau inversă) a lui B prin funcţia f şi se notează $\overset{-1}{f}(B)$:

$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \mid x \in E,\ f(x) \in B\};$$

$\overset{-1}{f}(B)$ este o parte a mulţimii E. Aşadar, $x \in \overset{-1}{f}(B)$ dacă şi numai dacă $f(x) \in B$.

Evident, $\overset{-1}{f}(G) = E$ şi de asemenea $\overset{-1}{f}(f(E)) = E$.

Avem:

1) $\overset{-1}{f}(A \cup B) = \overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B)$
2) $\overset{-1}{f}(A \cap B) = \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$
3) $\overset{-1}{f}(A - B) = \overset{-1}{f}(A) - \overset{-1}{f}(B)$.

Exemplu (fig. 15). $\overset{-1}{f}(\{b, c\}) = \{v, w, t\}$; $\overset{-1}{f}(\{a, b\}) = \{u, w\}$; $\overset{-1}{f}(\{c\}) = \{v, t\}$; $\overset{-1}{f}(\{d\}) = \emptyset$.

Pe acest exemplu se constată că:

a) mulţimea $B \subset F$ poate fi nevidă şi totuşi imaginea sa reciprocă $\overset{-1}{f}(B)$ poate fi vidă;

b) mulţimea $B \subset F$ poate fi formată dintr-un singur element, şi totuşi imaginea reciprocă $\overset{-1}{f}(B)$ poate fi formată din două sau mai multe elemente.

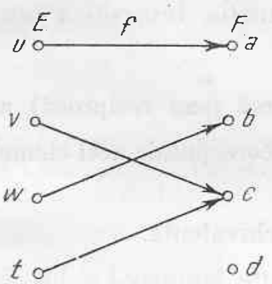


Fig. 15

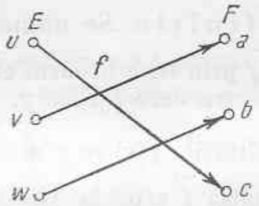


Fig. 16

Se constată uşor că: imaginea reciprocă a oricărei mulţimi nevide $B \subset F$ este de asemenea nevidă, dacă şi numai dacă $f(E) = F$, adică dacă şi numai dacă f este o aplicaţie a lui E *pe* F.

Dacă f este o aplicaţie a lui E *pe* F, atunci imaginile reciproce verifică şi ele proprietatea 1) a imaginilor directe:

Dacă $B \subset F$ şi $B \neq \emptyset$, atunci $\overset{-1}{f}(B) \neq \emptyset$.

D e f i n i ţ i e. Se spune că funcţia $f: E \to F$ este biunivocă, dacă oricare ar fi elementele $x' \neq x''$ din E, avem $f(x') \neq f(x'')$ (adică două elemente diferite din E au imagini diferite în F).

Se verifică uşor că f este biunivocă dacă şi numai dacă $f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$.

Exemplu (fig. 16).

O formulare echivalentă a definiţiei unei funcţii biunivoce este următoarea:

Funcţia $f: E \to F$ este biunivocă dacă şi numai dacă, oricare ar fi $y \in F$, imaginea reciprocă a mulţimii $\{y\}$ conţine cel mult un element (putînd fi eventual vidă). Lăsăm pe seama cititorului, ca exerciţiu, verificarea echivalenţei diferitelor formulări ale definiţiei unei funcţii biunivoce.

Dacă f este o aplicaţie *biunivocă* a lui E *pe* F, atunci imaginile reciproce au aceleaşi proprietăţi ca şi imaginile directe:

1) dacă $B \subset F$ şi $B \neq \emptyset$ atunci $\overset{-1}{f}(B) \neq \emptyset$;

2) dacă $B \subset F$ şi B este formată dintr-un singur element, $B = \{y\}$, atunci $\overset{-1}{f}(B)$ este formată numai dintr-un singur element, x, pentru care $f(x) = y$.

3. Funcţii inverse

Fie f o aplicaţie *biunivocă* a lui E *pe* F. Aceasta înseamnă că $f(E) = F$ şi $x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$, $(x', x'' \in E)$.

În acest caz, pentru *orice* element $y \in F$, există un element şi *unul singur* $x \in E$, astfel ca $f(x) = y$.

În acest mod putem stabili o corespondenţă $f(x) \to x$ de la elementele lui F la elementele lui E, care defineşte o aplicaţie *biunivocă* a lui F *pe* E, şi care se numeşte *aplicaţia reciprocă* (sau funcţia inversă) a funcţiei f şi se notează $\overset{-1}{f}$. Aşadar:

D e f i n i ţ i e. Se numeşte funcţie inversă (sau reciprocă) a funcţiei f funcţia $\overset{-1}{f}$ prin care fiecărui element $y \in F$ îi corespunde acel element (unic) $x \in E$ pentru care $f(x) = y$.

Egalităţile $f(x) = y$ şi $x = \overset{-1}{f}(y)$ sînt echivalente.

Funcţia $\overset{-1}{f}$ este la rîndul său o aplicaţie *biunivocă* a lui F pe E şi deci admite o funcţie inversă care este f. Funcţiile f şi $\overset{-1}{f}$ sînt deci inverse una alteia:

$$E \underset{\overset{-1}{f}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} F.$$

Din egalităţile echivalente $f(x) = y$ şi $x = \overset{-1}{f}(y)$, deducem

$$\overset{-1}{f}(f(x)) = x \text{ pentru orice } x \in E,$$
$$f(\overset{-1}{f}(y)) = y \text{ pentru orice } y \in F.$$

Exemplu (fig. 17). $f(u) = c, \overset{-1}{f}(c) = u$; $f(v) = a$, $\overset{-1}{f}(a) = v$; $f(w) = b$, $\overset{-1}{f}(b) = w$; $\overset{-1}{f}(f(u)) = \overset{-1}{f}(c) = u$; $\overset{-1}{f}(f(v)) = \overset{-1}{f}(a) = v$; $\overset{-1}{f}(f(w)) = \overset{-1}{f}(b) = w$; $f(\overset{-1}{f}(a)) = f(v) = a$; $f(\overset{-1}{f}(b)) = f(w) = b$; $f(\overset{-1}{f}(c)) = f(u) = c$.

O b s e r v a ţ i i. 1°. Numai aplicaţiile *biunivoce* ale lui E *pe* F admit funcţii inverse.

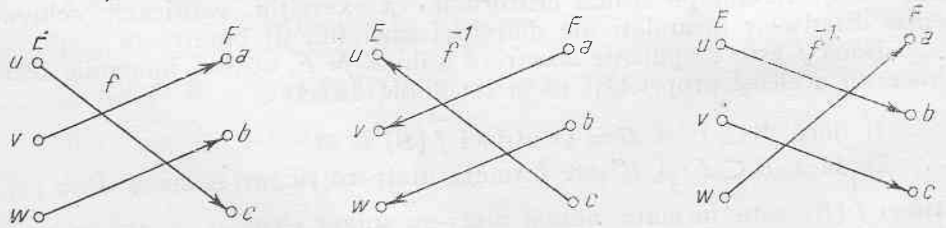


Fig. 17

Dacă funcţia $f: E \to F$ este *biunivocă* şi dacă $f(E) \neq F$, atunci se consideră f ca o aplicaţie biunivocă a lui E pe $f(E)$, şi deci admite o funcţie inversă $\overset{-1}{f}: f(E) \to E$.

2° Practic, după ce s-a verificat că $f: E \to F$ este o aplicaţie *biunivocă* a lui E pe F, funcţia inversă $\overset{-1}{f}$ se obţine rezolvînd în raport cu x ecuaţia

$$y = f(x), \qquad (x \in E,\ y \in F).$$

Pentru fiecare $y \in F$, se obţine soluţia unică în E

$$x = \overset{-1}{f}(y).$$

3° Fie $f: E \to F$ o aplicaţie *biunivocă* şi fie $\overset{-1}{f}: F \to E$ funcţia sa inversă. Dacă i este aplicaţia identică a lui E în E, ($i(x) = x$ pentru orice $x \in E$) avem

$$\overset{-1}{f} \circ f = i.$$

În adevăr $(\overset{-1}{f} \circ f)(x) = \overset{-1}{f}(f(x)) = x = i(x)$ pentru orice $x \in E$.
Dacă j este aplicaţia identică a lui F în F ($j(y) = y$ pentru orice $y \in F$), avem

$$f \circ \overset{-1}{f} = j.$$

4° O aplicaţie *biunivocă* a unei mulţimi E pe ea însăşi se numeşte *permutare*. Aplicaţia identică i a lui E în E este o permutare.

Fie $f: E \to E$ o permutare şi $\overset{-1}{f}: E \to E$ permutarea inversă. Avem:

$$\overset{-1}{f} \circ f = i \text{ şi } f \circ \overset{-1}{f} = i.$$

Aşadar mulţimea permutărilor $f: E \to E$ este grup* (necomutativ) pentru operaţia de compunere.

---

* Fie E o mulţime. O aplicaţie a produsului cartezian $E \times E$ în mulţimea E se numeşte operaţie de compunere în E. Aşadar, o operaţie de compunere în mulţimea E face să corespundă fiecărei perechi (x, y) de elemente din E, un element din E pe care-l vom nota, în general, $x \circ y$.

1) O operaţie $x \circ y$ este asociativă dacă

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \text{ oricare ar fi } x, y, z \in E.$$

2) Un element $e \in E$ se numeşte *element neutru* pentru operaţia $x \circ y$ dacă

$$e \circ x = x \circ e = x \text{ oricare ar fi } x \in E.$$

3) Dacă e este element neutru pentru operaţia $x \circ y$, se spune că un element $x \in E$ are invers (sau este inversibil) pentru această operaţie dacă există un element $y \in E$ astfel ca

$$x \circ y = y \circ x = e,$$

y se numeşte inversul lui x; y este de asemenea inversabil şi inversul său este x. Inversul lui x se notează x^{-1}. Aşadar $y = x^{-1}$, $x = y^{-1}$.

4) O operaţie $x \circ y$ este comutativă dacă

$$x \circ y = y \circ x \text{ oricare ar fi } x, y \in E.$$

§ 5. Mulţimi numărabile

1. Corespondenţa biunivocă a două mulţimi

Fie $f: E \to F$ o aplicaţie biunivocă a lui E pe F, şi fie $\overset{-1}{f}: F \to E$ funcţia sa inversă.

Se spune că funcţiile f şi $\overset{-1}{f}$ realizează o *corespondenţă biunivocă* între mulţimile E şi F, sau că E şi F sînt puse în corespondenţă biunivocă prin aceste funcţii.

Orice mulţime E poate fi pusă în corespondenţă biunivocă cu ea însăşi, de exemplu prin aplicaţia identică a lui E pe E.

Dacă două mulţimi pot fi puse în corespondenţă biunivocă prin funcţiile f şi $\overset{-1}{f}$, atunci pot exista şi alte funcţii care să le pună în corespondenţă biunivocă.

În adevăr, dacă p este o permutare oarecare a lui E şi g o permutare oarecare a lui F, funcţia compusă

$$g \circ f \circ p : E \to F$$

este de asemenea o aplicaţie biunivocă a lui E pe F, deci această aplicaţie şi aplicaţia sa reciprocă realizează de asemenea o corespondeţă biunivocă între E şi F.

Se spune că două mulţimi E şi F sînt *echivalente*, şi se scrie $E \sim F$, dacă pot fi puse în corespondenţă biunivocă (adică dacă există o aplicaţie biunivocă a lui E *pe* F).

2. Mulţimi numărabile

Se spune că o mulţime A este *numărabilă* dacă este echivalentă cu mulţimea N a numerelor naturale, adică dacă poate fi pusă în corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale.

Aşadar, mulţimea A este numărabilă dacă şi numai dacă *toate* elementele sale pot fi aşezate într-un şir

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

O mulţime E în care s-a definit o operaţie asociativă se numeşte *semigrup*. Dacă există element neutru, E se numeşte semigrup cu unitate.

Un semigrup cu unitate în care fiecare element este inversabil se numeşte *grup*.

Un semigrup sau grup în care operaţia este comutativă se numeşte semigrup, respectiv grup comutativ, sau abelian.

Pentru o operaţie comutativă, se foloseşte mai ales notaţia aditivă $x + y$; în acest caz elementul neutru este numit „zero" şi este notat 0; inversul unui element x este numit *opusul* lui x şi este notat $-x$.

Altă notaţie uzuală pentru operaţii este notaţia multiplicativă $x \cdot y$ sau xy; în acest caz elementul neutru este numit element unitate, sau „unu".

Dacă E este grup, condiţia necesară şi suficientă ca o submulţime $E' \subset E$ să fie grup, este ca $x \circ y \in E'$ şi $x^{-1} \in E'$, oricare ar fi $x, y \in E'$.

Se spune că o mulţime B este finită şi are n elemente dacă este echivalentă cu mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ a primelor n numere naturale.

Orice mulţime care *nu* este finită se numeşte mulţime *infinită*. O mulţime numărabilă este infinită.

Se spune că o mulţime este *cel mult numărabilă*, dacă estre finită sau numărabilă.

Exemple. 1) Mulţimea numerelor naturale este numărabilă (deoarece $N \sim N$).

2) Mulţimea numerelor pare

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

este numărabilă, deoarece *toate* elementele sale pot fi aşezate într-un şir. Corespondenţa biunivocă cu mulţimea numerelor naturale este $n \to 2n$.

3) Mulţimea numerelor impare

$$1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots$$

este numărabilă.

O b s e r v a ţ i e. Două mulţimi finite A şi B sînt echivalente dacă şi numai dacă au acelaşi număr de elemente.

În adevăr, fie n numărul elementelor lui A. Aceasta inseamnă $A \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\}$; dar $A \sim B$, deci $B \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, deci B are tot n elemente. Reciproc, dacă A şi B au n elemente atunci $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $B \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ deci $A \sim B$.

O mulţime *finită* nu poate fi deci echivalentă cu o submulţime strictă a sa.

Din exemplele precedente se vede că o mulţime infinită poate fi echivalentă cu o submulţime strictă a sa. Aşadar, pentru mulţimile infinite „numărul" de elemente nu mai are acelaşi înţeles ca pentru mulţimile finite.

P r o p o z i ţ i e. Reuniunea unui şir $(A_n)_{n \in N}$ de mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.

Pentru demonstraţie, vom presupune că mulţimile din şir sînt disjuncte două cîte două: $A_n \cap A_m = \emptyset$ dacă $n \neq m$. În caz contrar, dacă un element se repetă în mai multe mulţimi din şir îl menţinem numai în prima mulţime în care apare, iar în celelalte îl înlăturăm. Să aşezăm în cîte un şir elementele fiecărei mulţimi A_n:

$$\begin{array}{lllll}
A_1 : a_1^1 \longrightarrow a_2^1 & & a_3^1 \longrightarrow a_4^1 & \ldots \\
A_2 : a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \ldots\ldots\ldots & \\
A_3 : a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \ldots\ldots\ldots & \\
A_4 : a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & &
\end{array}$$

Să formăm acum şirul următor

$$a_1^1;\ a_2^1,\ a_1^2;\ a_1^3,\ a_2^2,\ a_3^1;\ a_4^1,\ a_3^2,\ a_2^3,\ a_1^4;\ldots$$

Orice ar fi mulţimea A_n şi oricare ar fi elementul său a_m^n, el face parte din acest şir; aşadar, acest şir conţine *toate* elementele reuniunii $\bigcup_{n\in N} A_n$, deci această reuniune este numărabilă.

O b s e r v a ţ i e. Se poate arăta că mulţimea numerelor *raţionale* şi mulţimea numerelor *algebrice* sînt mulţimi numărabile, şi că mulţimea numerelor reale nu este numărabilă.

§ 6. Despre negaţie

În matematică se foloseşte adesea raţionamentul „prin reducere la absurd" pentru demonstraţia unei proprietăţi P. Acest raţionament constă în faptul că, presupunînd „prin absurd" că proprietatea P nu este adevărată se trag consecinţe contradictorii.

Pentru a putea folosi în raţionamente propoziţia negativă „proprietatea P nu este adevărată", trebuie s-o transformăm într-o propoziţie echivalentă afirmativă.

Transcrierea proprietăţii „non P" într-o formulare echivalentă afirmativă se numeşte, în mod obişnuit, negarea proprietăţii P.

Dacă proprietatea P are o formulare mai lungă, negarea sa este adesea anevoioasă şi poate fi făcută incorect.

În acest paragraf se dă o regulă de negare simplă şi sigură.

Pentru aceasta vom considera mai întîi propoziţii simple, universal afirmative, sau particular afirmative.

O propoziţie simplă universal afirmativă afirmă că toate elementele unei mulţimi E au o proprietate P, şi deci se poate formula astfel:

orice $x \in E$ are proprietatea P

sau

oricare ar fi $x \in E$, x are proprietatea P.

O propoziţie simplă particular afirmativă afirmă că unele elemente ale unei mulţimi E (eventual toate elementele lui E) au o proprietate P, adică, mulţimea elementelor din E care au proprietatea P nu este vidă; o asemenea propoziţie se poate formula astfel:

există cel puţin un element $x \in E$ care are proprietatea P.

De cele mai multe ori se omite „cel puţin" dar se subînţelege totdeauna, astfel încît o propoziţie particular afirmativă se scrie

există $x \in E$ cu proprietatea P.

Observăm că, formal, cele două feluri de propoziţii se deosebesc între ele prin faptul că unele încep cu „oricare", iar altele cu „există".

Prin negare, o propoziţie simplă universal afirmativă se transformă într-una particular afirmativă, o propoziţie simplă particular afirmativă se transformă într-una universal afirmativă, iar proprietatea P se transformă în contrariul ei non P.

Să plecăm de la o propoziţie simplă universal afirmativă:

orice x din E are proprietatea P,

şi s-o negăm. Forma directă a negării este următoarea:

nu este adevărat că orice x din E are proprietatea P.

Aceasta înseamnă că există, sigur, cel puţin un element din E care nu are proprietatea P, deci care are proprietatea contrară non P; aşadar:

există $x \in E$ care are proprietatea non P.

Să plecăm acum de la o propoziţie simplă particular afirmativă:

există (cel puţin) un element $x \in E$ care are proprietatea P,

şi s-o negăm:

nu este adevărat că există un element x din E cu proprietatea P.

Aceasta înseamnă că nici un element din E nu are proprietatea P, sau:

oricare ar fi elementul $x \in E$, x nu are proprietatea P, ci proprietatea contrară, non P;

aşadar:

oricare ar fi $x \in E$, x are proprietate non P.

De aici deducem următoarea regulă practică:

prin negare, „oricare" se transformă în „există", „există" se *transformă în „oricare", iar proprietatea P în non P.*

Această regulă se păstrează pentru orice propoziţie, nu numai pentru cele simple, deoarece negarea unei propoziţii complexe se reduce la negarea succesivă a unor propoziţii simple.

Într-adevăr, o propoziţie complexă o putem scrie ca o propoziţie simplă, înlocuind o parte din ea cu P. Prin negare, P se transformă în non P şi, deci, trebuie să negăm propoziţia P; dacă P nu este simplă, o scriem ca o propoziţie simplă, înlocuind o parte din ea cu Q. Prin negare, Q se transformă în non Q, ş.a.m.d. De fiecare dată, prin negare, „există" se transformă în „oricare" şi „oricare" se transformă în „există". Pînă la urmă vom ajunge la o propoziţie simplă în care figurează proprietatea finală din propoziţia iniţială, care, prin negare, se transformă în contrariul ei.

Pentru a putea aplica această tehnică de negare unei propoziţii ea trebuie formulată cu ajutorul cuvintelor „oricare" şi „există". Aceasta se poate realiza uşor pentru fiecare propoziţie în parte, observînd dacă elementele care intervin în propoziţie sînt arbitrare sau nu. Dacă sînt arbitrare, se scrie în faţa lor „oricare ar fi", sau „pentru orice", iar dacă nu sînt arbitrare se scrie în faţa lor „există".

Va trebui să observăm de fiecare dată că:
un element despre care se afirmă că „există" depinde de (este funcţie de) elementele scrise în propoziţie înaintea sa şi despre care se afirmă că sînt arbitrare (au înainte „oricare") şi nu depinde de elementele scrise după el în propoziţie.

Ne dăm astfel seama de importanţa pe care o are ordinea în care sînt scrise cuvintele într-o propoziţie. Schimbarea ordinii cuvintelor într-o propoziţie poate să-i schimbe foarte mult înţelesul, s-o transforme într-o propoziţie *diferită* sau, uneori, chiar într-o propoziţie fără sens.

De asemenea, va trebui să observăm că după fiecare element despre care se afirmă că „există" trebuie să adaugăm expresia „cu proprietatea că" sau „astfel încît".

În logica matematică se folosesc notaţiile $\exists$ şi $\forall$ pentru „există" şi „oricare". Noi vom folosi prescurtările următoare: „or" pentru „oricare" şi „ex" pentru „există".

Capitolul II

MULŢIMI DE NUMERE REALE. FUNCŢII REALE

§ 1. Numere reale

Vom presupune cunoscute numerele reale şi proprietăţile lor, pe care le rezumăm mai jos.

Construirea numerelor reale şi demonstrarea proprietăţilor lor se fac în detaliu la cursul de aritmetică şi sînt expuse în tratatul de analiză matematică (vol. I) al academicianului Miron Nicolescu.

1. Structura algebrică a numerelor reale

Mulţimea numerelor reale va fi notată cu R.

Cu numerele reale se pot efectua două operaţii: adunarea şi înmulţirea. Operaţia de *adunare* face să corespundă fiecărei perechi (x, y) de numere reale un număr real notat cu $x + y$ şi numit *suma* lui x cu y.

Operaţia de *înmulţire* face să corespundă fiecărei perechi (x, y) de numere reale un număr real notat $x \cdot y$ sau xy şi numit *produsul* lui x cu y.

Aceste operaţii au următoarele proprietăţi:

1) $x + y = y + x$ (adunarea este comutativă);
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (adunarea este asociativă);
3) $x + 0 = x$ (0 este element neutru pentru adunare);
4) $x + (-x) = 0$ (orice număr x are un opus $-x$);

Mulţimea R a numerelor reale este, deci, *grup* comutativ pentru operaţia de adunare.

5) $xy = yx$ (înmulţirea este comutativă);
6) $(xy)z = x(yz)$ (înmulţirea este asociativă);
7) $1 \cdot x = x$ (1 este element neutru, sau element unitate pentru înmulţire);
8) Dacă $x \neq 0$, $xx^{-1} = 1$ (orice număr $x \neq 0$ are invers pentru înmulţire).

0 este singurul număr care nu are invers (pentru înmulţire).

Mulţimea numerelor *diferite de* 0 este *grup* pentru operaţia de înmulţire.

9) $x(y+z) = xy + xz$ (înmulţirea este distributivă faţă de adunare).

Aşadar, mulţimea R a numerelor reale este corp* (pentru operaţiile de adunare şi înmulţire).

Suma $x + (-y)$ dintre x şi opusul lui y se scrie , mai simplu, $x - y$ şi se numeşte *diferenţa* dintre x şi y. Operaţia de scădere se reduce astfel la aceea de adunare: $x - y = x + (-y)$.

Inversul x^{-1} al unui număr $x \neq 0$ se mai notează $\frac{1}{x}$; aşadar, $xx^{-1} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$. Produsul $x \; \frac{1}{y}$ dintre un număr x şi inversul unui număr $y \neq 0$ se mai scrie $\frac{x}{y}$ şi se numeşte *cîtul* dintre x şi y. Operaţia de împărţire $\left(\text{prin care unei perechi de numere } (x, y) \text{ cu } y \neq 0 \text{ i se asociază cîtul lor } \frac{x}{y}\right)$ se reduce astfel la aceea de înmulţire: $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.

Împărţirea cu 0 nu se poate efectua, deoarece 0 nu are invers. Nu dăm nici un înţeles împărţirii cu 0, nu o definim. Spunem că împărţirea cu 0 este o operaţie fără sens.

Din proprietăţile de mai sus rezultă încă următoarele proprietăţi:

1) Numărul 0 este singurul element neutru pentru adunare.

2) Numărul 1 este singurul element unitate pentru înmulţire.

3) Un număr real are un singur opus. Opusul lui 0 este 0.

4) Un număr real diferit de 0 are un singur invers. Inversul lui 1 este 1.

5) $x = y \Rightarrow x + z = y + z$ (şi $x - z = y - z$) oricare ar fi $z \in R$; $x + z = y + z$ (sau $x - z = y - z$) $\Rightarrow x = y$.

6) $x = y \Rightarrow xz = yz$ oricare ar fi $z \in R$; $x = y \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{z}$ oricare ar fi $z \neq 0$; dacă $z \neq 0$, atunci $xz = yz \left(\text{sau } \frac{x}{z} = \frac{y}{z}\right) \Rightarrow x = y$.

---

* Fie E o mulţime pe care s-au definit două operaţii, una notată aditiv $x + y$, şi alta notată multiplicativ xy. Mulţimea E este *inel* pentru aceste două operaţii dacă:

1) este grup *comutativ* pentru adunare;

2) este semigrup pentru înmulţire (înmulţirea este asociativă);

3) înmulţirea este distributivă faţă de adunare.

Dacă înmulţirea este comutativă, E se numeşte inel comutativ.

Dacă înmulţirea are element unitate, E se numeşte inel cu unitate.

Un inel cu unitate, E, în care fiecare element $x \neq 0$ are invers pentru înmulţire se numeşte *corp*. Dacă înmulţirea este comutativă, E se numeşte corp comutativ. Aşadar, un corp este un inel în care mulţimea elementelor diferite de 0 este *grup* pentru înmulţire.

7) $0x = 0$ oricare ar fi $x \in R$.
8) $x(y - z) = xy - xz$ (înmulţirea este distributivă faţă de scădere).
9) Ecuaţia $a + x = b$ are totdeauna o soluţie unică, $x = b - a$.
10) Dacă $a \neq 0$, ecuaţia $ax = b$ are totdeauna o soluţie unică, $x = \frac{b}{a}$.

2. Clase de numere reale

Numerele naturale sînt*:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Mulţimea numerelor naturale va fi notată cu N.

Suma $m + n$ şi produsul mn a două numere naturale m şi n sînt de asemenea numere naturale.

Opusul unui număr natural nu mai este număr natural. Inversul unui număr natural n nu mai este număr natural decît dacă $n = 1$.

Mulţimea N a numerelor naturale este semigrup comutativ pentru adunare, şi semigrup comutativ cu unitate pentru înmulţire.

Principiul inducţiei complete (sau al recurenţei). Fie P o proprietate care se referă la numerele naturale. *Dacă;*

1) *proprietatea este adevărată pentru numărul natural* 1;

2) *presupunînd proprietatea P adevărată pentru un număr natural n, rezultă că ea este adevărată şi pentru $n + 1$;*

atunci proprietatea este adevărată pentru toate numerele naturale.

Numerele întregi sînt:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Mulţimea numerelor întregi va fi notată cu Z. Avem $N \subset Z$.

Suma $p + q$ şi produsul pq a două numere întregi p şi q sînt de asemenea numere întregi.

În plus, dacă p este număr întreg, opusul său $-p$ este de asemenea număr întreg.

Aşadar, mulţimea Z a numerelor întregi este grup comutativ pentru adunare. Inversul unui număr întreg p este întreg numai dacă $p = 1$ sau $p = -1$, deci, pentru înmulţire, Z este semigrup (comutativ cu unitate).

Rezultă că mulţimea Z a numerelor întregi este *inel* (comutativ cu unitate).

Numerele raţionale se pot reprezenta sub formă de fracţie $\frac{m}{n}$, cu m şi n întregi şi $n \neq 0$.

Două asemenea fracţii $\frac{m}{n}$ şi $\frac{m'}{n'}$ reprezintă acelaşi număr raţional, dacă şi numai dacă $mn' = m'n$.

* Unii autori consideră şi pe 0 număr natural.

Mulţimea numerelor raţionale va fi notată cu Q. O fracţie $\frac{m}{n}$ (m şi n întregi şi $n \neq 0$) este *ireductibilă* dacă m şi n sînt prime între ele.

Oricare număr raţional se poate reprezenta într-un singur mod ca fracţie ireductibilă cu *numitorul număr natural.*

Un număr întreg p se poate scrie ca fracţie sub forma $\frac{p}{1}$, deci numerele întregi sînt în acelaşi timp numere raţionale: $Z \subset Q$.

Suma $r + s$ şi produsul $r\,s$ a două numere raţionale sînt de asemenea numere raţionale. În plus, dacă r este număr raţional, atunci opusul său $-r$ este număr raţional, iar dacă $r \neq 0$, inversul său $\frac{1}{r}$ este de asemenea număr raţional.

Rezultă că mulţimea Q a numerelor raţionale este corp (comutativ).

Dacă a şi b sînt numere raţionale, atunci $b - a$ şi $\frac{b}{a}$ (dacă $a \neq 0$) sînt numere raţionale, deci ecuaţiile $a + x = b$ şi $ax = b$ (dacă $a \neq 0$) au soluţii în cadrul numerelor raţionale.

Ecuaţia $x^2 = a$ nu mai are însă totdeauna soluţie raţională. De exemplu, ecuaţia $x^2 = 2$ nu are soluţie raţională. Într-adevăr:

Nu există nici un număr raţional al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Să presupunem, prin absurd, că există un număr raţional r astfel ca $r^2 = 2$. Să scriem numărul r ca fracţie ireductibilă $r = \frac{p}{q}$, unde p şi q sînt numere întregi fără nici un alt divizor comun afară de 1 şi -1. Aşadar

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \text{ sau } \frac{p^2}{q^2} = 2,$$

de unde:

$$p^2 = 2q^2.$$

Rezultă că p^2 este un număr par, deci şi p este un număr par*: $p = 2m$. Egalitatea $p^2 = 2q^2$ se scrie atunci:

$$4m^2 = 2q^2,$$

de unde

$$2m^2 = q^2.$$

Rezultă că q^2 este un număr par, deci şi q este un număr par: $q = 2n$. Aşadar, p şi q au pe 2 ca divizor comun şi am ajuns astfel la o contradicţie, presupunînd că ar exista un număr raţional r cu $r^2 = 2$.

Vom arăta mai departe că, în cadrul numerelor reale, oricare ar fi numărul natural n, şi oricare ar fi numărul real *pozitiv* a, ecuaţia $x^n = a$ are totdeauna soluţie.

---

* Dacă p ar fi impar, $p = 2m + 1$, atunci am avea $p^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$, adică şi p^2 ar fi impar.

Pe lîngă această deosebire dintre corpul numerelor raționale Q și corpul numerelor reale R, mai există și alte deosebiri, care pot fi considerate, toate, ca diverse aspecte sau diverse consecințe ale unei deosebiri fundamentale care va fi pusă în evidență mai departe*.

Numerele reale care nu sînt raționale se numesc *numere iraționale*.

Se numește *număr algebric* orice număr care este soluție a unei ecuații algebrice de forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

cu coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ numere întregi. Mulțimea numerelor algebrice este numărabilă.

Numerele reale care nu sînt algebrice se numesc *numere transcendente*. Se demonstrează că numerele e și π sînt transcendente.

3. Structura de ordine

Pe mulțimea numerelor reale se definește o relație de ordine „$x < y$" (x este mai mic decît y). În loc de $x < y$ se scrie de asemenea $y > x$ (y este mai mare decît x). Dacă x nu este mai mic decît y, se scrie $x \nless y$ sau $y \ngtr x$.

Relația „$x < y$" este o relație de ordine *totală*; aceasta înseamnă că, oricare ar fi numerele x și y, avem una și numai una din următoarele trei posibilități: sau $x < y$, sau $x = y$, sau $x > y$.

a) *Proprietățile relației* „$x < y$":

(i) $x \nless x$, oricare ar fi $x \in R$ (este ireflexivă);

(ii) $x < y \Rightarrow y > x$;

(iii) $x < y$ și $y < z \Rightarrow x < z$ (este tranzitivă);

(iu) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ (și $x - z < y - z$) oricare ar fi $z \in R$;

$$x + z < y + z \text{ (sau } x - z < y - z) \Rightarrow x < y;$$

(u) $x < y$ și $z > 0 \Rightarrow xz < yz \left(\text{și } \frac{x}{z} < \frac{y}{z}\right)$;

$$z > 0 \text{ și } xz < yz \left(\text{sau } \frac{x}{z} < \frac{y}{z}\right) \Rightarrow x < y;$$

(ui) $x < y \Rightarrow -x > -y$;

(uii) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

* Deosebirea este că R este spațiu complet (orice șir fundamental este convergent) pe cînd Q nu este spațiu complet (există șiruri Cauchy de numere raționale care n-au limită rațională).

Din (u) şi (ui) rezultă că:

$$x < y \text{ şi } z < 0 \Rightarrow xz > yz \left(\text{şi } \frac{x}{z} > \frac{y}{z}\right);$$

$$z < 0 \text{ şi } xz < yz \left(\text{sau } \frac{x}{z} < \frac{y}{z}\right) \Rightarrow x > y.$$

Numerele $x > 0$ se numesc numere *strict pozitive*.

Numerele $x < 0$ se numesc numere *strict negative*.

Orice număr natural n este strict pozitiv: $n > 0$.

Reţinem de asemenea următoarele proprietăţi*:

Între două numere reale diferite $x < y$ există cel puţin un număr raţional r şi cel puţin un număr iraţional α:

$$x < r < y, \quad x < \alpha < y.$$

Rezultă că între două numere diferite reale există oricît de multe numere raţionale şi oricît de multe numere iraţionale.

Axioma lui Arhimede: oricare ar fi numerele reale $x > 0$ şi y, există un număr natural n astfel ca $nx > y$.

În particular, luînd $x = 1$, rezultă că:

Oricare ar fi numărul real y, există un număr natural $n > y$.

Dacă $x \not> y$ (x nu este mai mare decît y), atunci sau $x = y$ sau $x < y$, ceea ce vom scrie $x \leqslant y$ (x este mai mic sau egal cu y).

Relaţia „$x \leqslant y$" este echivalentă cu relaţia „$x < y$ sau $x = y$" şi cu relaţia „$x \not> y$".

De exemplu, $2 \leqslant 3$ deoarece $2 < 3$; $2 \leqslant 2$ deoarece $2 = 2$.

Dacă $x \not< y$ (x nu este mai mic decît y), atunci sau $x = y$ sau $x > y$, ceea ce vom scrie $x \geqslant y$ (x este mai mare sau egal cu y).

Relaţia „$x \geqslant y$" este echivalentă cu relaţia „$x > y$ sau $x = y$", cu relaţia „$x \not< y$", şi cu relaţia „$y \leqslant x$".

Numerele $x \geqslant 0$ se numesc numere *pozitive*; numerele $x \leqslant 0$ se numesc *numere negative*.

Deoarece $x > 0 \Rightarrow x \geqslant 0$ şi $x < 0 \Rightarrow x \leqslant 0$ rezultă că orice număr strict pozitiv este un număr pozitiv, şi orice număr strict negativ este un număr negativ. 0 este în acelaşi timp pozitiv şi negativ, şi este singurul număr cu această proprietate.

---

* Într-o teorie constructivă a numerelor reale, aceste proprietăţi se pot demonstra în mod riguros.

b) *Proprietățile relației „$x \leq y$":*
(j) $x \leq x$ oricare ar fi $x \in R$ (este reflexivă);
(jj) $x \leq y$ și $y \leq x \Rightarrow x = y$ (este antisimetrică);
(jjj) $x \leq y$ și $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (este tranzitivă);
(jv) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (și $x - z \leq y - z$) oricare ar fi $z \in R$;
$x + z \leq y + z$ (sau $x - z \leq y - z$) $\Rightarrow x \leq y$;
(v) $x \leq y$ și $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$; $x \leq y$ și $z > 0 \Rightarrow \frac{x}{z} \leq \frac{y}{z}$;
$z > 0$ și $xz \leq yz \left(\text{sau } \frac{x}{z} \leq \frac{y}{z}\right) \Rightarrow x \leq y$;
(vj) $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$;
(vjj) $0 \leq x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} > 0$.

Din (v) și (vj) rezultă că
$x \leq y$ și $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$; $x \leq y$ și $z < 0 \Rightarrow \frac{x}{z} \geq \frac{y}{z}$;
$z < 0$ și $xz \leq yz \left(\text{sau } \frac{x}{z} \leq \frac{y}{z}\right) \Rightarrow x \geq y$.

Din proprietățile celor două relații rezultă, încă, următoarele proprietăți:

1) $x \leq y$ și $y < z \Rightarrow x < z$; $x < y$ și $y \leq z \Rightarrow x < z$;

2) $x \leq y$ și $x' \leq y' \Rightarrow x + x' \leq y + y'$;

$x < y$ și $x' \leq y' \Rightarrow x + x' < y + y'$

(adunarea inegalităților membru cu membru);

3) $0 \leq x \leq y$ și $0 \leq x' \leq y' \Rightarrow xx' \leq yy'$

(înmulțirea membru cu membru a inegalităților de numere pozitive)

Reținem de asemenea următoarea propritate (care se poate demonstra riguros):

Dacă (a_n) și (b_n) sînt două șiruri de numere raționale care au următoarele două proprietăți

1) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$;

2) **pentru orice număr $\alpha > 0$, există un număr natural n, astfel că $b_n - a_n \leq \alpha$; atunci există un număr real x_0, și numai unul astfel încît**

$$a_n \leq x_0 \leq b_n \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Observație. Condiția 2) înseamnă că $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ (v. cap. III).

Fie n numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Cel mai mare (maximul) dintre aceste numere se notează

$$\max \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ sau } \sup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

iar cel mai mic (minimul) dintre aceste numere se notează

$$\min \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ sau } \inf \{a_1, a_2, \ldots a_n\}.$$

Mai departe, aceste numere vor fi interpretate ca margini ale mulţimii $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

4. Modulul

Modulul $|x|$ al unei număr x se defineşte astfel:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ dacă } x > 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ -x \text{ dacă } x < 0 \end{cases} \text{ sau } |x| = \begin{cases} x \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ -x \text{ dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$$

sau încă, $|x| = \max \{x, -x\}$.

Proprietăţile modulului sînt următoarele:

1) $|x| \geqslant 0$; $|x| > 0$ dacă şi numai dacă $x \neq 0$;

2) $|-x| = |x|$;

3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; $|x - y| \leqslant |x| + |y|$;

4) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$; $||x| - |y|| \leqslant |x + y|$;

5) $|xy| = |x| \cdot |y|$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$. $y \neq 0$;

6) $|x| < \varepsilon$ dacă şi numai dacă $-\varepsilon < x < \varepsilon$;
$|x| \leqslant \varepsilon$ dacă şi numai dacă $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

Dacă r este număr raţional, atunci $|r|$ este de asemenea raţional; dacă p este întreg, atunci şi $|p|$ este întreg.

Se folosesc următoarele notaţii

$$x^+ = \sup(x, 0) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ dacă } x \leqslant 0 \end{cases} \quad x^- = \sup(-x, 0) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$$

x^+ se numeşte partea pozitivă a numărului x, iar x^- se numeşte partea negativă a numărului x. Se verifică fără dificultate egalităţile

$$x = x^+ - x^- \qquad x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

şi

$$|x| = x^+ + x^- \qquad x^- = \frac{1}{2}(|x| - x).$$

De asemenea, avem

$$\sup(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$\inf(x, y) = -\sup(-x, -y)$$

5. Reprezentarea numerelor reale prin puncte pe o dreaptă

Fiind dată o dreaptă d pe care s-a ales o origine O, un sens de parcurgere pozitiv şi o unitate de lungime, se stabileşte o corespondenţă biunivocă între mulţimea numerelor reale şi mulţimea punctelor de pe dreaptă. Numărul x care corespunde unui punct P se numeşte *abscisa* lui P.

Corespondenţa stabilită păstrează ordinea, adică dacă x şi y sînt abscisele a două puncte P şi Q, avem $x < y$ dacă şi numai dacă P se află la stînga lui Q (adică sensul de la P la Q este pozitiv).

Dacă P şi Q sînt două puncte de abscise, respectiv x şi y, numărul $|x - y|$ se numeşte *distanţa* dintre P şi Q.

Numărul $|x|$ reprezintă distanţa dintre P şi originea O.

În cele ce urmează numerele vor fi adesea identificate cu punctele ce le corespund.

6. Reprezentarea perechilor de numere prin puncte din plan

Fiind date două drepte perpendiculare Ox şi Oy, pe care s-a ales aceeaşi origine O, aceeaşi unitate de lungime şi cîte un sens pozitiv, se stabileşte o corespondenţă biunivocă între punctele P din plan şi perechile ordonate (x, y) de numere reale. Numerele x şi y se numesc *coordonatele* punctului P; x este abscisa lui P, iar y este ordonata lui P (fig. 18).

Datorită acestei corespondenţe biunivoce se identifică un punct P cu perechea coordonatelor sale (x, y).

În loc de „punctul P" vom spune adesea „punctul (x, y)".

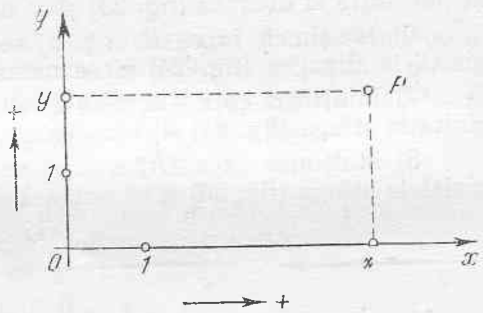


Fig. 18

7. Intervale

Fie $a \leqslant b$ două numere reale oarecare.

1) Mulţimea tuturor punctelor x care verifică inegalităţile $a < x < b$ se numeşte *interval deschis* (fig. 19) şi se notează (a, b):

$$(a, b) = \{x | x \in R, \ a < x < b\}.$$

2) Mulţimea tuturor punctelor x care verifică inegalităţile $a \leqslant x \leqslant b$ se numeşte *interval închis* sau *segment* (fig. 20) şi se notează $[a, b]$:

$$[a, b] = \{x | x \in R, \ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

3) Mulţimea

$$[a,\ b) = \{x | x \in R,\ a \leqslant x < b\}$$

se numeşte interval închis la stînga şi deschis la dreapta (fig. 21).

4) Mulţimea

$$(a,\ b] = \{x | x \in R,\ a < x \leqslant b\}$$

se numeşte interval deschis la stînga şi închis la dreapta (fig. 22).

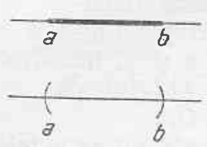


Fig. 19

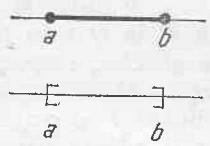


Fig. 20

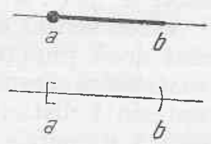


Fig. 21

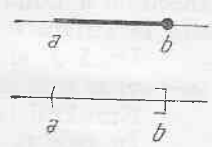


Fig. 22

Intervalele definite mai sus se numesc intervale *mărginite*; a şi b se numesc *extremităţile* intervalului: a este extremitatea stîngă, iar b este extremitatea dreaptă.

Avem $(a,\ b) \subset [a,\ b) \subset [a,\ b]$ şi $(a, b) \subset (a,\ b] \subset [a,\ b]$.

Dacă $a = b$ atunci $[a,\ a] = \{a\}$ şi $(a,\ a) = (a,\ a] = [a,\ a) = \emptyset$.

Intervalele închise $[a,\ b]$ se mai numesc intervale *compacte*.

5) Mulţimea $\{x | x \in R,\ x > a\}$ se numeşte *semidreaptă deschisă* nemărginită la dreapta (fig. 23) şi se notează $(a,\ +\infty)$.

6) Mulţimea $\{x | x \in R,\ x \geqslant a\}$ se numeşte *semidreaptă închisă* nemărginită la dreapta (fig. 24) şi se notează $[a,\ +\infty)$.

7) Mulţimea $\{x | x \in R,\ x < a\}$ se numeşte *semidreaptă deschisă* nemărginită la stînga (fig. 25) şi se notează $(-\infty,\ a)$.

8) Mulţimea $\{x | x \in R,\ x \leqslant a\}$ se numeşte *semidreaptă închisă* nemărginită la stînga (fig. 26) şi se notează $(-\infty,\ a]$.

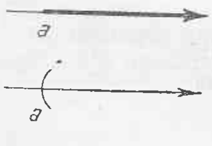


Fig. 23

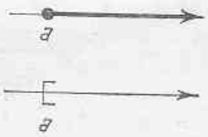


Fig. 24

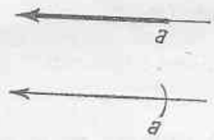


Fig. 25

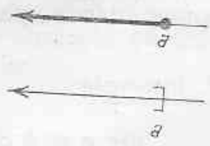


Fig. 26

Punctul a se numeşte extremitatea semidreptelor.

Dreapta întreagă R se mai notează $(-\infty,\ +\infty)$.

Semidreptele şi dreapta întreagă R se numesc *intervale nemărginite*

Mai departe (cap. IV) vor fi justificate simbolurile $-\infty$ şi $+\infty$ care apar în notaţia intervalelor nemărginite.

§ 2. Puteri întregi

1. Puteri naturale

Fie a un număr *real* şi n un număr *natural*. Vom scrie:

$$a^1 = a \text{ şi } a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ ori}} \text{ dacă } n > 1.$$

Numărul a^n se numeşte *putere*: numărul a se numeşte *baza* puterii, iar numărul n se numeşte exponentul puterii. Avem: $1^n = 1$, şi $0^n = 0$ oricare ar fi $n \in N$. Dacă $a^n = 0$ atunci $a = 0$; dacă $a > 0$ atunci $a^n > 0$ oricare ar fi $n \in N$.

Puterile cu exponent natural se numesc *puteri naturale*.

Proprietăţile puterilor naturale sînt următoarele:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

2) $(a^n)^m = a^{nm}$.

3) $(ab)^n = a^n b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $b \neq 0$.

4) Dacă $a > 1$ atunci $a^n > 1$, oricare ar fi $n \in N$.

Dacă $0 < a < 1$ atunci $0 < a^n < 1$, oricare ar fi $n \in N$.

Primele trei proprietăţi se verifică imediat, plecînd de la definiţia puterii.

Proprietatea 4) se demonstrează prin recurenţă:

Înmulţind în inegalitatea $a > 1$ cu a (care este strict pozitiv), obţinem $a^2 > a$, deci $a^2 > 1$.

Presupunînd acum inegalitatea $a^n > 1$ adevărată şi înmulţind cu a, obţinem $a^{n+1} > a$, deci $a^{n+1} > 1$. Conform principiului inducţiei complete rezultă că inegalitatea $a^n > 1$ este verificată pentru orice $n \in N$, dacă $a > 1$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $\frac{1}{a} > 1$ şi deci $\left(\frac{1}{a}\right)^n > 1$, adică $\frac{1}{a^n} > 1$ sau $a^n < 1$, oricare ar fi $n \in N$.

Din proprietăţile de mai sus se deduc încă următoarele proprietăţi:

5) Dacă $0 < a < b$ atunci $a^n < b^n$, oricare ar fi $n \in N$.

6) Dacă $n < m$ atunci: $a^n < a^m$ pentru $a > 1$,

$$a^n > a^m \text{ pentru } 0 < a < 1.$$

Într-adevăr, din $0 < a < b$ rezultă $\frac{b}{a} > 1$, deci $\left(\frac{b}{a}\right)^n > 1$ sau $\frac{b^n}{a^n} > 1$, adică $b^n > a^n$ sau $a^n < b^n$, oricare ar fi $n \in N$, ceea ce demonstrează proprietatea 5).

În cazul cînd $a > 1$, avem $a^{m-n} > 1$ (deoarece $m - n$ este natural) şi înmulţind cu a^n (care este strict pozitiv) obţinem $a^n \cdot a^{m-n} > a^n$ sau $a^m > a^n$, adică $a^n < a^m$.

Dacă însă $0 < a < 1$, atunci $a^{m-n} < 1$, şi înmulţind cu a^n obţinem $a^n \cdot a^{m-n} < a^n$, sau $a^m < a^n$ adică $a^n > a^m$. Astfel, proprietatea 6) este de asemenea demonstrată.

2. Puteri întregi

Dacă $a \neq 0$ se definește

$$a^0 = 1 \text{ și } a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Puterile lui 0 cu exponent negativ nu se definesc. Spunem că 0^0 și și 0^{-n}, $n \in N$, nu au sens.

În acest fel am definit puterile a^p ale unui număr *a diferit de* 0, cu orice exponent întreg p.

Puterile cu exponent întreg se numesc *puteri întregi*.

Proprietățile puterilor întregi sînt următoarele (ori de cîte ori exponentul este $\leqslant 0$, baza va fi presupusă *diferită de* 0):

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

2) $(a^p)^q = a^{pq}$.

3) $(ab)^p = a^p b^p$; $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

4) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

5) Dacă $a > 1$ atunci: $a^p > 1$ dacă $p > 0$.
$a^p < 1$ dacă $p < 0$.

Dacă $0 < a < 1$ atunci: $a^p < 1$ dacă $p > 0$.
$a^p > 1$ dacă $p < 0$.

Primele patru proprietăți se deduc imediat din definiția puterilor întregi și din proprietățile corespunzătoare ale puterilor naturale.

Dacă $p > 0$, p este natural și în acest caz proprietatea 5) este adevărată, ca o proprietate a puterilor naturale. Dacă $p < 0$, atunci $-p$ este natural; proprietatea 5) rezultă în acest caz din 4).

3. Inegalitatea lui Bernoulli

Oricare ar fi $a \geqslant -1$ și n natural avem:

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + na.$$

Pentru $n = 1$ avem $(1 + a)^1 = 1 + a = 1 + 1 \cdot a$, deci inegalitatea este verificată cu egalitate.

Să presupunem acum inegalitatea verificată pentru $n = p$:

$$(1 + a)^p \geqslant 1 + pa$$

și s-o demonstrăm pentru $n = p + 1$.

Deoarece $1 + a \geqslant 0$, înmulțind cu $1 + a$ în inegalitatea precedentă obținem

$$(1 + a)^p(1 + a) \geqslant (1 + pa)(1 + a)$$

sau

$$(1 + a)^{p+1} \geqslant 1 + pa + a + pa^2 = 1 + (1 + p)a + pa^2 \geqslant 1 + (1 + p)a$$

(deoarece $pa^2 > 0$).

Conform principiului inducției complete, inegalitatea este adevărată pentru orice $n \in N$.

Inegalitatea demonstrată se numește inegalitatea lui Bernoulli.

Aplicații. 1) *Dacă* $a \geqslant 2$, *atunci* $a^n \geqslant n + 1$, *oricare ar fi* $n \in N$.

Într-adevăr, să notăm $A = a - 1$; deci $A \geqslant 1$ și $a = A + 1$. Atunci:

$$a^n = (1 + A)^n \geqslant 1 + nA \geqslant 1 + n.$$

În particular, $2^n \geqslant n + 1$, $10^n \geqslant n + 1$, oricare ar fi $n \in N$.

2) *Dacă* $a > 1$, *pentru fiecare număr real* α, *există un număr natural* n *astfel ca* $a^n > \alpha$.

Să notăm $A = a - 1$, deci $A > 0$ și $a = 1 + A$.

Există un număr natural $n > \frac{\alpha}{A}$, adică astfel ca $nA > \alpha$ (deoarece $A > 0$). Atunci, pentru numărul natural n obținut avem:

$$a^n = (1 + A)^n \geqslant 1 + nA > 1 + \alpha > \alpha.$$

Rezultă că dacă $a > 1$, atunci $\frac{1}{a^n}$ poate fi făcut oricît de mic dacă se ia n suficient de mare. Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar; să notăm $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$; există atunci un număr n astfel ca $a^n > \alpha$, deci $\frac{1}{a^n} < \frac{1}{\alpha} = \varepsilon$. Să observăm că pentru orice număr $n' > n$ avem $a^{n'} > a^n$, deci $\frac{1}{a^{n'}} < \frac{1}{a^n}$ și deci $\frac{1}{a^{n'}} < \varepsilon$.

Rezultă, de asemenea, că dacă (a_n) și (b_n) sînt două șiruri de numere raționale care au următoarele două proprietăți:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$;

2) **există un număr** $l > 0$ **astfel ca** $b_n - a_n \leqslant \frac{l}{2^n}$ **pentru orice** $n \in N$,

atunci există un număr unic x_0 **astfel ca** $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ **pentru orice** $n \in N$.

Într-adevăr, dacă se dă $\alpha > 0$, există un n astfel ca $\frac{l}{2^n} < \alpha$ și deci $b_n - a_n \leqslant \alpha$ și afirmația rezultă atunci dintr-o proprietate anterioară a numerelor reeale.

§ 3. Mulţimi mărginite

1. Mulţimi majorate. Mulţimi minorate. Mulţimi mărginite

Fie A o mulţime de numere reale.

Se spune că A este majorată (sau mărginită superior) dacă există un punct b la dreapta căruia nu se mai află nici un punct din A, adică astfel încît $x \leqslant b$ pentru orice $x \in A$. Numărul b se numeşte majorant al mulţimii A.

Dacă b este un majorant al lui A şi dacă $b < b'$, atunci şi b' este un majorant al lui A.

Se spune că mulţimea A este minorată (sau mărginită inferior) dacă există un punct a la stînga căruia nu se mai află nici un punct din A, adică astfel încît $a \leqslant x$ pentru orice $x \in A$. Numărul a se numeşte minorant al mulţimii A.

Dacă a este un minorant al lui A şi $a' < a$ atunci şi a' este un minorant al lui A.

Se spune că mulţimea A este mărginită dacă este şi majorată şi minorată, adică dacă există două numere a şi b astfel încît $a \leqslant x \leqslant b$ pentru orice $x \in A$.

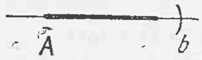


Fig. 27

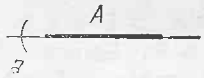


Fig. 28

O b s e r v a ţ i i. În limbajul geometric a spune că A este majorată înseamnă că există o semidreaptă nemărginită la stînga, care conţine pe A (fig. 27). De asemenea A este minorată dacă există o semidreaptă nemărginită la dreapta, care conţine pe A (fig. 28). A este mărginită dacă există un interval mărginit (închis sau nu) care conţine pe A.

P r o p o z i ţ i e. O mulţime A este mărginită dacă şi numai dacă există un număr $M > 0$ astfel ca $|x| \leqslant M$ pentru orice $x \in A$.

Dacă există $M > 0$ astfel ca $|x| \leqslant M$ pentru orice $x \in A$, atunci $-M \leqslant x \leqslant M$ pentru orice $x \in A$, adică A este conţinută în intervalul mărginit $[-M, M]$ şi deci A este mărginită. Reciproc, dacă A este mărginită există un interval mărginit (a, b) care o conţine: $a \leqslant x \leqslant b$ pentru orice $x \in A$. Să punem $M = \max(|a|, |b|)$. Atunci $b \leqslant |b| \leqslant M$ şi $-a \leqslant |a| \leqslant M$ deci $-M \leqslant -|a| \leqslant a$, adică $-M \leqslant a \leqslant b \leqslant M$, de unde $-M \leqslant x \leqslant M$ sau $|x| \leqslant M$ pentru orice $x \in A$.

Exemple. 1) Mulţimea $\{\ldots, -n, \ldots, -2, -1\}$ este majorată dar nu este minorată, deci nu este mărginită. Orice număr $b \geqslant -1$ este un majorant al ei. Numărul -1 este de asemenea un majorant şi anume *cel mai mic majorant*, şi face parte din mulţime.

2) Mulţimea $\{1, 2, \ldots, 4, \ldots\}$ este minorată dar nu este majorată, deci nu este mărginită; orice număr $a \leqslant 1$ este minorant al său. Numărul 1 este *cel mai mare minorant* şi face parte din mulţime.

3) Un interval (a, b) este o mulțime majorată și minorată, deci este mărginită. Orice număr $a' \leqslant a$ este un minorant și orice număr $b' \geqslant b$ este un majorant; a este cel mai mare minorant, iar b este cel mai mic majorant; a și b nu fac parte din mulțime.

4) Orice mulțime *finită* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este mărginită. Cel mai mic din aceste numere este un minorant, iar cel mai mare din aceste numere este un majorant al mulțimii.

2. Marginile unei mulțimi

Definiție. Un număr m se numește margine inferioară a unei mulțimi A dacă este cel mai mare minorant al mulțimii A. Se notează:

$$m = \inf A = \inf_{x \in A} x$$

(se citește „infimum" sau „inferior").

Un număr M se numește margine superioară a unei mulțimi A dacă este cel mai mic majorant al mulțimii A. Se notează:

$$M = \sup A = \sup_{x \in A} x$$

(se citește „supremum" sau „superior").

Marginile unei mulțimi, dacă există, sînt *unice*. Existența marginilor este asigurată de următoarea:

Teoremă. Orice mulțime nevidă minorată are margine inferioară și orice mulțime nevidă majorată are margine superioară.

Vom face demonstrația în cazul unei mulțimi majorate A.

Fie a nu număr care *nu este majorant* al lui A, și b un *majorant* al lui A; există deci cel puțin un punct $x \in A$ astfel ca:

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ și } b - a = l > 0$$

(punctele a și b nu aparțin neapărat lui A). În plus, putem alege numerele a și b raționale, deci l este de asemenea rațional. (În caz contrar alegem un număr rațional $a' < a$ și un număr rațional $b' > b$ și b' este majorant, iar a' nu este majorant al lui A.)

Să împărțim segmentul $[a, b]$ în două părți egale. Una din aceste părți are proprietatea că extremitatea stîngă *nu* este majorant, iar extremitatea dreaptă este majorant al lui A; să notăm cu $[a_1, b_1]$ partea care are această proprietate. Numerele a_1 și b_1 sînt raționale, există cel puțin un punct $x \in A$ astfel ca $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, iar $b_1 - a_1 = \frac{l}{2}$.

Să presupunem că am găsit două numere raționale a_n și b_n astfel ca a_n să *nu* fie majorant al lui A, iar b_n să fie majorant al lui A, și $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$.

Să împărțim segmentul $[a_n, b_n]$ în două părți egale și să notăm cu $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ partea pentru care extremitatea stîngă a_{n+1} *nu* este majorant al lui A, iar extremitatea dreaptă b_{n+1} este majorant al lui A. Numerele a_{n+1} şi b_{n+1} sînt raţionale,

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n \text{ şi } b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}}.$$

Am demonstrat astfel, prin recurenţă, că putem găsi două şiruri (a_n) şi (b_n) de numere *raţionale*, cu următoarele proprietăţi:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1$.

2) $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$ pentru oricare $n \in N$.

3) Nici un număr a_n *nu* este majorant al lui A şi orice număr b_n *este* majorant al lui A.

Din proprietăţile 1) şi 2) rezultă că există un număr real α şi unul singur astfel încît

$a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$ pentru orice $n \in N$.

Să arătăm că α este cel mai mic majorant al mulţimii A.

1) α este majorant al lui A, adică $x \leqslant \alpha$ oricare ar fi $x \in A$. Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că ar exista un punct $x_0 \in A$ cu $\alpha < x_0$. Putem alege pe n suficient de mare astfel ca $\frac{l}{2^n} < x_0 - \alpha$; atunci $b_n - a_n < x_0 - \alpha$, deci $b_n < a_n - \alpha + x_0$ şi fiindcă $a_n - \alpha \leqslant 0$, rezultă $b_n < x_0$, ceea ce contrazice faptul că b_n este majorant al lui A, conform proprietăţii 3).

2) α este cel mai mic majorant al lui A. Într-adevăr, să presupunem că ar exista un majorant $\alpha' < \alpha$ al lui A. Putem alege pe n suficient de mare astfel ca $\frac{l}{2^n} < \alpha - \alpha'$ şi atunci $b_n - a_n < \alpha - \alpha'$, de unde $-a_n < \alpha - b_n - \alpha'$ şi fiindcă $\alpha - b_n \leqslant 0$, rezultă $-a_n < -\alpha'$ sau $\alpha' < a_n$. Deoarece α' este majorant al lui A, deducem că şi a_n este majorant al lui A, ceea ce este în contradicţie cu proprietatea 3).

Urmează că α este cel mai mic majorant al lui A, adică este marginea superioară a lui A.

Se demonstrează în mod analog existenţa marginii inferioare a unei mulţimi minorate.

Corolar. Orice mulţime mărginită are margine inferioară şi margine superioară.

Într-adevăr, o mulţime mărginită este şi minorată şi majorată.

Din definiţia marginilor unei mulţimi, deducem că:

Un număr m este *marginea inferioară* a unei mulţimi A, dacă şi numai dacă verifică următoarele două condiţii:

1) $m \leqslant x$ *pentru orice* $x \in A$ (m este minorant al lui A);

2) *oricare ar fi* $\alpha > m$, *există cel puţin un punct* $x \in A$ astfel încît $x < \alpha$ (fig. 29), (nici un număr $\alpha > m$ nu este minorant al lui A, adică m este cel mai mare minorant).

De asemenea, un număr M este *marginea superioară* a unei mulțimi A dacă și numai dacă verifică următoarele două condiții:

1) $x \leqslant M$ *pentru orice* $x \in A$, (M este majorant al lui A);

2) *oricare ar fi* $\alpha < M$, *există cel puțin un punct* $x \in A$ astfel încît $\alpha < x$ (fig. 30) (nici un număr $\alpha < M$ nu este majorant al lui A, adică M este cel mai mic majorant al lui A).

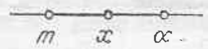


Fig. 29

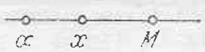


Fig. 30

Dacă A este mărginită, atunci

$\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$, pentru orice $x \in A$.

Avem $\inf A = \sup A$ dacă și numai dacă mulțimea A este formată dintr-un singur punct.

Marginile unei mulțimi pot să aparțină sau să nu aparțină mulțimii.

Exemple. $\sup\{\ldots, -n, \ldots, -2, -1\} = -1$; $\inf\{1, 2, \ldots, n, \ldots\} = 1$; $\inf\,(0, 1) = 0$ și $\sup\,(0, 1) = 1$, dar $0 \notin (0, 1)$ și $1 \notin (0, 1)$; $\inf\,[0, 1) = 0$ și $0 \in [0, 1)$, $\sup\,[0, 1) = 1$ și $1 \notin [0, 1)$.

Dacă A posedă un cel mai mic număr m, atunci

$$m = \inf A = \min A \in A.$$

Dacă A posedă un cel mai mare număr M, atunci

$$M = \sup A = \max A \in A.$$

§ 4. Structura topologică pe dreaptă

1. Vecinătățile unui punct de dreaptă

Fie x_0 un punct pe dreaptă. Vom numi *vecinătate* a lui x_0 orice mulțime V care conține un interval deschis (a, b) care conține pe x_0, adică astfel încît $x_0 \in (a, b) \subset V$. În particular, orice interval deschis (a, b) care conține pe x_0, adică astfel ca $a < x_0 < b$, este o vecinătate a lui x_0 (fig. 31).

Vecinătățile de forma

$$(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$$

Fig. 31

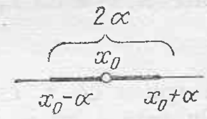


Fig. 32

cu $\alpha > 0$ se numesc *vecinătăți simetrice* ale lui x_0 (fig. 32).

Orice vecinătate V a lui x_0 conține o vecinătate simetrică a lui x_0.

Într-adevăr, fie (a, b) un interval deschis astfel ca $x_0 \in (a, b) \subset V$. Deoarece $a < x_0 < b$, avem $\alpha = \min\,(x_0 - a, b - x_0) > 0$ și $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \subset (a, b) \subset V$.

Datorită acestei observații, va fi suficient, mai departe, să considerăm numai vecinătățile de forma (a, b) sau vecinătățile simetrice ale unui punct.

Vecinătăţile punctului x_0 au următoarele proprietăţi:

1) Orice mulţime U care conţine o vecinătate V a lui x_0 este de asemenea o vecinătate a lui x_0.

2) Intersecţia a două vecinătăţi ale lui x_0 este de asemenea o vecinătate a lui x_0 (fig. 33).

3) Orice vecinătate V a lui x_0 conţine pe x_0.

4) Pentru orice vecinătate V a lui x_0 există o vecinătate $W = (a, b)$ a lui x_0, astfel încît V este vecinătatea fiecărui punct $y \in W$.

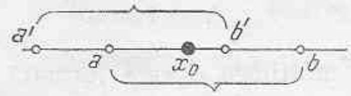


Fig. 33

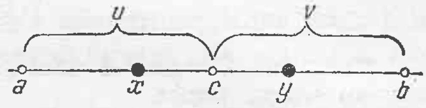


Fig. 34

Prin alegerea vecinătăţilor fiecărui punct de pe dreaptă, am definit pe dreaptă o *structură topologică* sau *o topologie**. Cu această topologie, dreapta R este un *spaţiu topologic* numit *dreapta reală*.

Hausdorff **P r o p o z i ţ i e. Oricare ar fi punctele $x \neq y$, există o vecinătate U a lui x şi o vecinătate V a lui y, fără puncte comune: $U \cap V = \emptyset$.**

Să presupunem $x < y$; există un număr c astfel ca $x < c < y$ (fig. 34); luînd $a < x$ şi $b > y$, $U = (a, c)$ este o vecinătate a lui x, $V = (c, b)$ este o vecinătate a lui y şi $U \cap V = \emptyset$.

Proprietatea enunţată în această propoziţie se exprimă spunînd că dreapta reală este un spaţiu *separat*.

2. Puncte interioare. Mulţimi deschise

Fie A o mulţime de numere.

Un punct x_0 din A *este punct interior al mulţimii A* dacă există o vecinătate (a, b) a lui x_0, conţinută în mulţimea A, adică astfel ca

$$x_0 \in (a, b) \subset A.$$

A spune că x_0 este punct interior al lui A înseamnă deci că A este o vecinătate a lui x_0. Mulţimea punctelor interioare ale mulţimii A se numeşte

* Fie E o mulţime. Dacă pentru fiecare element $x \in E$ s-a ales o mulţime de părţi $\mathcal{V}(x)$, numite *vecinătăţi* ale lui x, care îndeplinesc cele patru condiţii din text, se zice că s-a definit pe mulţimea E o *structură topologică* sau o *topologie*.

O mulţime E pe care s-a definit o structură topologică se numeşte *spaţiu topologic*, iar elementele sale se numesc puncte.

O mulţime de vecinătăţi ale lui x se numeşte *sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x*, dacă fiecare vecinătate a lui x conţine o vecinătate din sistemul fundamental.

Intervalele (a, b) care conţin un punct x de pe dreaptă formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x. De asemenea, vecinătăţile simetrice ale lui x, de forma $(x - \alpha, x + \alpha)$, sau de forma $[x - \alpha, x + \alpha]$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x.

interiorul lui A şi se notează Int A sau $\mathring{A}$. Evident, interiorul lui A este conţinut în A:

$$\mathring{A} \subset A.$$

Interiorul mulţimii vide este tot mulţimea vidă.

Mulţimea A se numeşte *mulţime deschisă* dacă este egală cu interiorul său: $A = \mathring{A}$, adică dacă toate punctele sale îi sînt interioare, sau, ceea ce este acelaşi lucru, dacă A este o vecinătate a fiecărui punct al ei. A spune că x_0 *nu* este punct interior lui A, înseamnă că nici o vecinătate a lui x_0 nu este complet conţinută în A.

Spunem că un punct $y_0 \in R$ este *punct exterior* lui A, dacă y_0 este punct interior al complementarei lui A, adică dacă există o vecinătate V a lui y_0 cu $V \subset \complement A$, sau, ceea ce este acelaşi lucru, cu $V \cap A = \emptyset$.

Exemple. 1) Mulţimea vidă $\emptyset$ este deschisă, deoarece Int $\emptyset = \emptyset$.

2) Dreapta întreagă R este deschisă. În adevăr, orice punct $x_0 \in R$ este punct interior al lui R, deoarece, luînd o vecinătate (a, b) a lui x_0, avem evident

$$x_0 \in (a, b) \subset R.$$

3) Un interval deschis (a, b) este o mulţime deschisă, deoarece orice punct $x_0 \in (a, b)$ este punct interior al intervalului. În adevăr, luînd ca vecinătate a lui x_0 chiar intervalul (a, b), avem:

$$x_0 \in (a, b) \subset (a, b).$$

4) Orice semidreaptă deschisă (nemărginită la dreapta sau la stînga) este o mulţime deschisă.

5) Un interval de forma $[a, b]$ cu $a < b$ *nu* este o mulţime deschisă, deoarece punctul a nu este punct interior al intervalului.

Într-adevăr, oricare ar fi vecinătatea (α, β) a lui a, avem $\alpha < a < \beta$, deci (α, β) nu este conţinută în $[a, b]$.

6) Intervalele $[a, b)$, $(a, b]$ cu $a < b$ şi semidreptele închise nu sînt mulţimi deschise

7) O mulţime $\{a\}$ formată dintr-un singur punct nu este deschisă.

Proprietăţile mulţimilor deschise sînt următoarele:

1) Reuniunea unei familii *oarecare* de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

2) Intersecţia unei familii *finite* de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

3) R şi $\emptyset$ sînt mulţimi deschise.

Demonstraţie

1) Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie oarecare de mulţimi deschise şi $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Fie $x_0 \in A$; există o mulţime A_i din familie care conţine pe x_0; dar A_i este deschisă, deci există o vecinătate (a, b) a lui x_0 astfel ca

$$x_0 \in (a, b) \subset A_i$$

şi cum $A_i \subset A$, avem

$$x_0 \in (a, b) \subset A,$$

adică x_0 este punct interior al lui A. Cum x_0 a fost ales arbitrar în A, rezultă că orice punct $x \in A$ este punct interior al lui A, deci A este deschisă.

2) Fie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ o familie finită de mulţimile deschise şi $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Fie $x_0 \in A$; atunci $x_0 \in A_1$, $x_0 \in A_2$, ..., $x_0 \in A_n$. Dar mulţimile A_i sînt deschise, deci x_0 este punct interior al fiecăreia; există deci intervalele deschise (a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) astfel ca:

$$x_0 \in (a_1, b_1) \subset A_1, \quad x_0 \in (a_2, b_2) \subset A_2, \ \ldots, \ x_0 \in (a_n, b_n) \subset A_n.$$

Să notăm $a = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şi $b = \min(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Atunci $a < x_0 < b$ deci (a, b) este o vecinătate a lui x_0 şi este conţinută în toate intervalele (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), deci cu atît mai mult în toate mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$, şi deci şi în intersecţia lor A:

$$x_0 \in (a, b) \subset A.$$

Aşadar x_0 este punct interior al lui A. Cum x_0 a fost ales arbitrar în A, rezultă că orice punct $x \in A$ este punct interior al lui A, deci A este deschisă.

Observaţii. 1° Intersecţia unei familii *infinite* de mulţimi deschise nu este totdeauna deschisă.

De exemplu, mulţimile $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ sînt deschise, dar intersecţia lor $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ nu este deschisă.

2° Se poate demonstra că *orice* mulţime deschisă pe dreaptă se poate pune în mod unic sub forma reuniunii unei familii cel mult numărabile de intervale deschise disjuncte două cîte două.

În adevăr, fie G o mulţime deschisă de puncte ale dreptei R şi $x_0 \in G$. Prin definiţie, există un interval $(a', b') \subset G$ care conţine punctul x_0. Dacă oricare ar fi $b' > x_0$, avem $(x_0, b') \subset G$, atunci $(x_0, \infty) \subset G$. În caz contrar, mulţimea punctelor b' pentru care $(x_0, b') \subset G$ este majorată. Vom nota cu b_0 marginea superioară a acestei mulţimi. Dacă oricare ar fi $a' < x_0$, avem $(a', x_0) \subset G$, atunci $(-\infty, x_0) \subset G$. În caz contrar, mulţimea punctelor a' pentru care $(a', x_0) \subset G$ este minorată. Fie a_0 marginea inferioară a acestei mulţimi.

Fiecărui punct $x_0 \in G$ i se poate ataşa în acest mod un interval $(a_0, b_0) \subset G$ care conţine punctul x_0, astfel încît orice interval $(a, b) \supset (a_0, b_0)$, nu mai este inclus în G.

Dacă există un punct $x_1 \in G$ astfel încît $x_1 \notin (a_0, b_0)$, atunci, raţionînd ca mai sus, găsim un interval maxim $(a_1, b_1) \subset G$, care conţine punctul x_1.

Evident $(a_0, b_0) \cap (a_1, b_1) = \emptyset$.

Astfel, o mulţime deschisă $G \subset R$ este o reuniune de intervale disjuncte două cîte două.

Rămîne să arătăm că mulţimea A a acestor intervale este cel mult numărabilă.

Într-adevăr, mulţimea A_1 a intervalelor din A, care au lungimea ≥ 1, este cel mult numărabilă (eventual vidă). Pentru fiecare număr natural $n > 1$, mulţimea A_n a intervalelor din A care au lungimea $\geq \frac{1}{n}$ şi $< \frac{1}{n-1}$ este de asemenea cel mult numărabilă (eventual vidă). Fiecare interval face parte din una din mulţimile A_n, deci $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ şi deci A este cel mult numărabilă, ca reuniune numărabilă de mulţimi cel mult numărabile (eventual unele dintre ele, vide).

3. Puncte aderente. Aderența unei mulțimi. Mulțimi închise

Fie A o mulțime de numere. Un punct $x_0 \in R$ (nu neapărat din A) se numește *punct aderent* al lui A, dacă în orice vecinătate V a lui x_0 există cel puțin un punct din A (eventual numai x_0, dacă $x_0 \in A$), adică dacă $A \cap V \neq \emptyset$.

Mulțimea punctelor aderente ale mulțimii A se numește *aderența* lui A sau *închiderea* lui A și se notează $\bar{A}$.

Orice punct $x_0 \in A$ este punct aderent al lui A, deoarece în orice vecinătate a lui x_0 se găsește cel puțin punctul x_0 din A. Așadar, mulțimea A este conținută în închiderea sa:

$$A \subset \bar{A}.$$

O mulțime poate să aibă și alte puncte aderente care să nu-i aparțină.

O mulțime A se numește *mulțime închisă* dacă este egală cu închiderea sa: $A = \bar{A}$.

A spune că $x_0 \notin \bar{A}$, înseamnă că există o vecinătate V a lui x_0 cu $V \cap A = \emptyset$, iar aceasta înseamnă că x_0 este punct exterior al lui A, adică punct interior al mulțimii $\complement A$, și reciproc. Avem așadar

$$\complement\bar{A} = \text{Int } \complement A \text{ și } \complement\text{Int A} = \overline{\complement A}.$$

Spunem că y_0 este un *punct frontieră* al unei mulțimi A, dacă este aderent și lui A și lui $\complement A$, adică dacă aparține mulțimii $\bar{A} \cap \overline{\complement A}$.

Mulțimea $\bar{A} \cap \overline{\complement A}$ a punctelor frontieră ale lui A se numește *frontiera* mulțimii A și se notează $\text{Fr}A$. Deducem de aici că $\text{Fr}A = \text{Fr}\complement A$.

A spune că $y_0 \in \text{Fr}A$ înseamnă că pentru orice vecinătate V a lui y_0 avem $V \cap A \neq \emptyset$ și $V \cap \complement A \neq \emptyset$.

Exemple. 1) Închiderea dreptei R este tot R, deoarece alte puncte care să-i fie aderente nu mai există. Dreapta R este o mulțime închisă (în același timp, ea este și o mulțime deschisă).

2) Închiderea mulțimii vide este mulțimea vidă: $\bar{\emptyset} = \emptyset$. Într-adevăr, nici un punct $x_0 \in R$ nu este aderent lui $\emptyset$, deoarece oricare ar fi vecinătatea V a lui x_0 avem $V \cap \emptyset = \emptyset$. Mulțimea vidă este deci o mulțime închisă (ea este și deschisă).

3) Închiderea unui interval închis $[a, b]$ este tot $[a, b]$, deoarece nici un alt punct dinafara intervalului nu îi este aderent. În adevăr, fie $x_0 \notin [a, b]$. Pentru a face o alegere, să presupunem că $x_0 < a$. Există o vecinătate V a lui x_0 care nu conține pe a, deci $V \cap [a, b] = \emptyset$. Un interval închis este, așadar, o mulțime închisă.

4) Închiderea unei mulțimi $\{x_0\}$ formată numai dintr-un punct este mulțimea însăși: $\{x_0\}$. În adevăr, dacă $x_1 \neq x_0$ există o vecinătate V a lui x_1 care nu conține pe x_0, deci $V \cap \{x_0\} = \emptyset$. Mulțimea formată dintr-un singur punct este deci o mulțime închisă.

5) Dacă $a < b$, avem $\overline{(a, b)} = \overline{[a, b)} = \overline{(a, b]} = [a, b]$.

Într-adevăr a este punct aderent oricăruia din intervalele (a, b), $[a, b)$ și $(a, b]$, deoarece orice vecinătate (α, β) a lui a, $\alpha < a < \beta$, conține punctele de la dreapta lui a, care se află în fiecare din aceste intervale. La fel se arată că b este punct aderent al intervalelor. Punctele care nu aparţin intervalului închis $[a, b]$ nu sînt puncte aderente ale nici unuia din aceste intervale.

6) Închiderea unei semidrepte se obţine adăugînd semidreptei extremitatea sa, care îi este punct aderent.

7) Orice număr real x este aderent mulţimii Q a numerelor raţionale : $\overline{Q} = R$. În adevăr, în orice vecinătate (a, b) a lui x există puncte raţionale.

8) Orice număr real este aderent mulţimii I a numerelor iraţionale, deci închiderea mulţimii numerelor iraţionale este toată dreapta. Într-adevăr, în orice vecinătate (a, b) a lui x se află cel puţin un număr iraţional.

9) $\overline{\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0\right\}$.

10) $\overline{\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Marginea superioară M a unei mulţimi majorate A este punct aderent al lui A.

Într-adevăr, fie $V = (\alpha, \beta)$ o vecinătate a lui M, adică $\alpha < M < \beta$. Există atunci cel puţin un punct $x \in A$ astfel ca $\alpha < x \leq M$, adică astfel ca $x \in (\alpha, \beta)$, deci $V \cap A \neq \emptyset$.

Se arată la fel că *marginea inferioară m a unei mulţimi minorate este punct aderent al acesteia.*

Rezultă că *marginile unei mulţimi mărginite sînt puncte aderente ale acesteia.*

Observaţii. 1° Dreapta întreagă R şi mulţimea vidă sînt şi închise şi deschise, şi sînt singurele mulţimi de numere reale care au această proprietate.

2° Există mulţimi care nu sînt nici închise nici deschise, de exemplu intervalele de forma $(a, b]$ sau $[a, b)$ cu $a < b$.

Legătura dintre mulţimile deschise şi cele închise este dată de următoarea

Propoziţie. O mulţime A este închisă dacă şi numai dacă complementara sa $\complement A$ este deschisă.

Să presupunem întîi că A este închisă şi să arătăm că $B = \complement A$ este deschisă, adică orice punct al său este punct interior. Fie $x_0 \in B$ oarecare ; atunci $x \notin A$ şi deoarece A este închisă, avem $A = \bar{A}$, deci $x_0 \notin \bar{A}$, adică x_0 nu este punct aderent al lui A. Există atunci cel puţin o vecinătate V a lui x_0 astfel ca $V \cap A = \emptyset$. Aceasta înseamnă că $V \subset \complement A$, adică $x_0 \in V \subset B$ şi deci x_0 este punct interior al lui B. Cum x_0 a fost ales arbitrar în B, rezultă că toate punctele lui B îi sînt puncte interioare, adică B este deschisă.

Reciproc, să presupunem că B este deschisă şi să arătăm că A este închisă, adică $A = \bar{A}$. Fie pentru aceasta x_0 un punct aderent al lui A, adică $x_0 \in \bar{A}$. Dacă x_0 ar aparţine lui B, cum B este deschisă ar exista o vecinătate V a lui x_0 conţinută în B, $V \subset B$, şi atunci $V \cap A = \emptyset$, ceea ce ar contrazice ipoteza că x_0 este punct aderent al lui A. Presupunerea că $x_0 \in B$ ne duce la contradicţie, deci $x_0 \notin B$, adică $x_0 \in A$. Cum x_0 a fost ales arbitrar în $\bar{A}$, rezultă că pentru orice $x \in \bar{A}$ avem $x \in A$, adică $\bar{A} \subset A$, şi cum avem de asemenea $A \subset \bar{A}$, rezultă $A = \bar{A}$, adică A este închisă.

Corolar. O mulţime B este deschisă dacă şi numai dacă complementara sa $\complement B$ este închisă.

În adevăr, se notează $A = \complement B$, deci $B = \complement A$ şi se aplică propoziţia precedentă.

Din proprietăţile mulţimilor deschise se deduc proprietăţile mulţimilor închise:
1) Intersecţia unei familii *oarecare* de mulţimi închise este o mulţime închisă.
2) Reuniunea unei familii *finite* de mulţimi închise este o mulţime închisă.
3) R şi $\emptyset$ sînt închise.

Demonstraţie.

1) Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie oarecare de mulţimi închise şi $A = \bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Atunci $\complement A_i$, sînt mulţimi deschise şi $\bigcup\limits_{i\in I} \complement A_i$ este tot o mulţime deschisă. Dar

$$\complement A = \complement \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \complement A_i,$$

deci $\complement A$ este deschisă, şi deci A este închisă.

2) Fie $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ o familie *finită* de mulţimi închise şi $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Atunci $\complement A_i$ sînt deschise şi $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \complement A_i$ este deschisă. Dar

$$\complement A = \complement \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \complement A_i,$$

deci $\complement A$ este deschisă şi deci A este închisă.

O b s e r v a ţ i i. 1° Reuniunea unei familii *infinite* de mulţimi închise nu mai este totdeauna o mulţime închisă. De exemplu, mulţimile $A_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $n = 1, 2, \ldots$ sînt închise dar reuniunea lor $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1]$ nu este închisă.

2° Orice mulţime finită este închisă. Într-adevăr, o mulţime finită $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este reuniunea familiei finite $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}$ de mulţimi închise (deoarece sînt formate numai din cîte un punct).

3° Se spune că o mulţime A este *densă* într-o mulţime B dacă orice punct al lui B este aderent lui A, adică dacă $B \subset \overline{A}$. De exemplu, intervalele (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ cu $a < b$ sînt dense în intervalul închis $[a, b]$.

Dacă o mulţime A este densă în R, adică dacă $\overline{A} = R$, se mai spune că A este *peste tot densă*. De exemplu, mulţimea numerelor raţionale este peste tot densă; mulţimea numerelor iraţionale este peste tot densă.

O mulţime *închisă* şi majorată A îşi conţine marginea superioară M, deoarece M este punct aderent al lui A.

De asemenea, o mulţime *închisă* şi minorată îşi conţine marginea inferioară.

O mulţime *închisă şi mărginită* îşi conţine marginea inferioară şi marginea superioară.

4. Puncte de acumulare. Teorema lui Weierstrass-Bolzano

Fie A o mulțime de numere. Un punct $x_0 \in R$ (nu neapărat din A) se numește *punct de acumulare* al lui A, dacă *orice* vecinătate V a lui x_0 conține cel puțin un punct x din A *diferit* de x_0, adică dacă $V \cap A - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Dacă $x_0 \notin A$, evident, condiția ca „x din A să fie diferit de x_0" este verificată de la sine.

Orice punct de acumulare al lui A este punct aderent al lui A, dar pot exista puncte aderente ale lui A care să nu fie puncte de acumulare ale lui A. De exemplu, dacă $A = \{x_0\}$, x_0 este punct aderent al lui A, dar nu este punct de acumulare al lui A, deoarece A nu conține nici un alt punct diferit de x_0 și deci nu poate verifica definiția punctului de acumulare.

Dacă însă x_0 este punct aderent al lui A dar *nu* aparține lui A, atunci x_0 este neapărat punct de acumulare al lui A. Într-adevăr, deoarece x_0 este punct aderent al lui A, în orice vecinătate V al lui A există cel puțin un punct x din A și deoarece $x_0 \notin A$ avem $x \neq x_0$, deci x_0 este punct de acumulare al lui A.

A spune că x_0 nu este punct de acumulare al mulțimii A, înseamnă că există o vecinătate V a lui x_0, care nu mai conține nici un alt punct din A, afară, eventual, de x_0.

P r o p o z i ț i e. Un punct x_0 este punct de acumulare al unei mulțimi A dacă și numai dacă în orice vecinătate V al lui x_0 există o infinitate de puncte din A (adică dacă mulțimea $V \cap A$ este infinită).

Este evident că dacă în orice vecinătate a lui x_0 se află o infinitate de puncte din A, cel mult unul este egal cu x_0, iar celelalte sînt diferite de x_0; așadar, în orice vecinătate a lui x_0 există puncte din A diferite de x_0, deci x_0 este punct de acumulare al lui A.

Reciproc, să presupunem că x_0 este punct de acumulare al lui A. Fie $V = (a, b)$ o vecinătate a lui x_0; să presupunem, prin absurd, că V conține un număr finit de puncte din A diferite de x_0, fie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *toate* aceste puncte. Putem găsi atunci (fig. 35) o vecinătate (α, β) a lui x_0 conținută în (a, b) și care să nu conțină nici unul din punctele $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

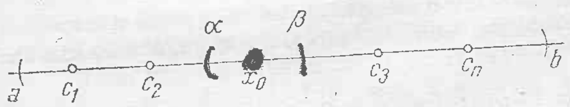


Fig. 35

Atunci (α, β) nu mai conține nici un punct din A diferit de x_0 (deoarece un asemenea punct s-ar afla în (a, b) și ar fi diferit de $c_1, c_2, \ldots, c_n$). Concluzia la care am ajuns, că (α, β) nu conține un punct din A diferit de x_0, contrazice ipoteza că x_0 este punct de acumulare.

Presupunerea că vecinătatea aleasă V conține *numai* un număr finit de puncte de A ne duce la contradicție. Așadar, V conține o infinitate de puncte din A. Propoziția este astfel demonstrată.

C o r o l a r u l 1. Dacă o mulțime A are un punct de acumulare, ea este infinită.

C o r o l a r u l 2. O mulțime finită nu are nici un punct de acumulare.

O b s e r v a ț i i. 1° Există și mulțimi infinite care nu au nici un punct de acumulare. De exemplu mulțimea N a numerelor naturale este infinită dar nu are nici un punct de acumulare.

2° Dacă o mulțime majorată A nu-și conține marginea superioară M, atunci M este punct de acumulare al lui A, deoarece M este punct aderent al lui A.

De asemenea, dacă o mulțime minorată A nu-și conține marginea inferioară m, atunci m este punct de acumulare al lui A.

Rezultă că dacă o mulțime mărginită A nu-și conține una din margini, aceasta este punct de acumulare al lui A.

Dacă mulțimea A își conține marginile, în unele cazuri marginile sînt puncte de acumulare, iar în alte cazuri nu sînt.

Exemple. 1) $\sup\,[0, 1] = 1 \in [0, 1]$, $\inf\,[0, 1] = 0 \in [0, 1]$, iar 0 și 1 sînt puncte de acumulare ale segmentului $[0, 1]$.

2) $\sup\,\{0, 1, 2\} = 2 \in \{0, 1, 2\}$ și $\inf\,\{0, 1, 2\} = 0 \in \{0, 1, 2\}$, dar 0 și 2 nu sînt puncte de acumulare ale mulțimii $\{0, 1, 2\}$, deoarece aceasta, fiind finită, nu are nici un punct de acumulare.

P r o p o z i ț i e. O mulțime A este închisă dacă și numai dacă își conține toate punctele sale de acumulare.

Dacă A este închisă, avem $A = \bar{A}$, adică A își conține toate punctele aderente; în particular își conține toate punctele de acumulare, deoarece punctele de acumulare ale lui A sînt puncte aderente ale lui A.

Reciproc, să presupunem că A își conține toate punctele de acumulare. Fie x_0 un punct aderent al lui A; să presupunem, prin absurd, că $x_0 \notin A$; atunci x_0 este punct de acumulare al lui A și deci $x_0 \in A$; am ajuns astfel la o contradicție presupunînd că $x_0 \notin A$. Rezultă că $x_0 \in A$. Cum x_0 a fost arbitrar, deducem că orice punct aderent al lui A aparține lui A, deci $\bar{A} = A$, adică A este închisă.

T e o r e m a l u i W e i e r s t r a s s - B o l z a n o. Orice mulțime mărginită și infinită are cel puțin un punct de acumulare.

Fie A o mulțime mărginită și infinită, a un minorant al lui A și b un majorant al lui A. Putem alege numerele a și b *raționale*. Fie $l = b - a > 0$; l este de asemenea rațional. Avem $A \subset [a, b]$.

Să împărțim segmentul $[a, b]$ în două părți egale. Deoarece A este infinită, cel puțin una din cele două părți conține o infinitate de puncte din A. Fie $[a_1, b_1]$ una din cele două părți care au această proprietate; a_1 și b_1 sînt raționale și $b_1 - a_1 = \frac{l}{2}$.

Să presupunem că am găsit două numere raţionale a_n şi b_n astfel ca segmentul $[a_n, b_n]$ să conţină o infinitate de puncte din A şi $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$.

Să împărţim segmentul $[a_n, b_n]$ în două părţi egale. Deoarece segmentul $[a_n, b_n]$ conţine o infinitate de puncte din A, cel puţin una din cele două părţi conţine de asemenea o infinitate de puncte din A. Să notăm cu $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ una din cele două părţi care are această proprietate. Numerele a_{n+1} şi b_{n+1} sînt raţionale, $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$ şi $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}}$.

Am demonstrat astfel prin inducţie completă că putem găsi două şiruri (a_n) şi (b_n) de numere *raţionale*, cu următoarele proprietăţi:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$.

2) $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$ pentru orice $n \in N$.

3) Segmentul $[a_n, b_n]$ conţine o infinitate de puncte din A, oricare ar fi $n \in N$.

Numerele a_n şi b_n nu aparţin neapărat mulţimii A. Din proprietăţile 1) şi 2) deducem că există un număr x_0 astfel încît $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ oricare ar fi n natural.

Să arătăm că x_0 este punct de acumulare al lui A.

Fie $V = (\alpha, \beta)$ o vecinătate a lui x_0, adică $\alpha < x_0 < \beta$. Putem alege pe n suficient de mare, astfel încît să avem

$$\alpha < a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n < \beta.$$

Dar segmentul $[a_n, b_n]$ conţine o infinitate de puncte din A; atunci vecinătatea (α, β) a lui x_0 conţine de asemenea o infinitate de puncte din A, deci x_0 este punct de acumulare al lui A.

O b s e r v a ţ i e. Punctul x nu aparţine neapărat lui A, dacă A nu este închisă.

5. Mulţimi compacte. Teorema lui Borel-Lebesgue

O mulţime C de numere reale se numeşte mulţime *compactă* dacă este *închisă* şi *mărginită*.

Exemple. 1) O mulţime finită $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este închisă şi mărginită, deci este compactă. În particular, o mulţime $\{a\}$ formată numai dintr-un punct este compactă.

2) Un interval închis şi mărginit $[a, b]$ este o mulţime compactă. Intervalele $[a, b]$ se numesc *intervale compacte*.

3) O reuniune finită $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ de intervale compacte este o mulţime compactă.

4) Intervalele (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ *nu* sînt compacte deoarece *nu* sînt închise.

5) Semidreptele şi dreapta întreagă *nu* sînt compacte deoarece *nu* sînt mărginite.

Vom spune că o familie $(B_\alpha)_{\alpha \in J}$ de mulţimi constituie o *acoperire* a unei mulţimi A, dacă orice punct $x \in A$ aparţine cel puţin uneia din mulţimile familiei, adică dacă $A \subset \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$.

Dacă familia este formată dintr-un număr finit de mulţimi, vom spune că ea constituie o *acoperire finită* a mulţimii A.

Mulţimile compacte au o proprietate importantă dată de

Teorema lui Borel-Lebesgue. Dacă C este o mulţime compactă, din orice acoperire a sa cu intervale deschise se poate extrage o acoperire finită a sa.

Fie $(I_\alpha)_{\alpha\in I}$ o acoperire a lui C formată din intervale deschise.

Dacă C este *finită*, $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, fiecare din aceste puncte este conţinut în cîte un interval din familie. Cele n intervale $I_{\alpha_1}, \ldots, I_{\alpha_n}$ constituie o acoperire finită a lui C, şi teorema este demonstrată în acest caz.

Să presupunem că C este infinită. Vom raţiona prin reducere al absurd: vom presupune că mulţimea C nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie şi vom arăta că ajungem la o contradicţie.

Deoarece C este compactă, este mărginită. Fie a şi b două numere raţionale astfel ca $a \leqslant x \leqslant b$ oricare ar fi $x \in C$, adică astfel ca $C \subset [a,b]$.

Să împărţim segmentul $[a, b]$ în două părţi egale. În acest fel am împărţit şi mulţimea C în două părţi C_1 şi C_2, şi anume C_1 este conţinută într-o jumătate a segmentului $[a, b]$, iar C_2 este conţinută în a doua jumătate a acestui segment. Avem $C = C_1 \cup C_2$. Dacă fiecare din mulţimile C_1 şi C_2 ar putea fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie, atunci şi C ar putea fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie, ceea ce ar fi în contradicţie cu presupunerea făcută. Aşadar, cel puţin una din mulţimile C_1 şi C_2 *nu* poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie. Să notăm cu $[a_1, b_1]$ una din cele două jumătăţi ale segmentului $[a, b]$ care are proprietatea că $[a_1, b_1] \cap C$ *nu* poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie. a_1 şi b_1 sînt raţionale, şi dacă notăm cu $l = b - a$, avem

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b, \qquad b_1 - a_1 = \frac{l}{2}.$$

Să presupunem că am găsit două numere raţionale a_n şi b_n astfel ca $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$ şi $[a_n, b_n] \cap C$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie.

Să împărţim segmentul $[a_n, b_n]$ în două părţi egale, prin punctul $c_n = \frac{b_n - a_n}{2}$. Cel puţin una din mulţimile $[a_n, c_n] \cap C$ sau $[c_n, b_n] \cap C$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie. Să notăm cu $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ una din cele două jumătăţi ale segmentului $[a, b]$ care are proprietatea că $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap C$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie; a_{n+1} şi b_{n+1} sînt raţionale şi avem

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n, \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}}.$$

Am demonstrat astfel, prin inducție completă, că putem construi două șiruri (a_n) și (b_n) de numere raționale, cu următoarele proprietăți:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$.

2) $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$ pentru orice $n \in N$.

3) Oricare ar fi $n \in N$, mulțimea $[a_n, b_n] \cap C$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie.

Rezultă în particular că $[a_n, b_n] \cap C$ este infinită, oricare ar fi $n \in N$. Din proprietățile 1) și 2) deducem că există un singur punct x_0 astfel ca $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ pentru orice $n \in N$; x_0 este *punct de acumulare* al mulțimii C. În adevăr, fie $V = (\alpha, \beta)$ o vecinătate a lui x_0, deci $\alpha < x_0 < \beta$. Datorită proprietății 2) putem găsi un indice n suficient de mare, astfel ca $\alpha < a_n \leqslant \leqslant x_0 \leqslant b_n < \beta$, adică astfel ca $[a_n, b_n] \subset V$. Dar $[a_n, b_n]$ conține o infinitate de puncte din C, deci V conține o infinitate de puncte din C, adică x_0 este punct de acumulare al lui C. Deoarece C este compactă, este închisă, deci $x_0 \in C$. Există atunci un interval deschis I din familie care conține pe x_0, deci care este o vecinătate a lui x_0. Datorită proprietății 2) există un număr n suficient de mare astfel ca $[a_n, b_n] \subset I$ și atunci $[a_n, b_n] \cap C \subset I$, adică mulțimea $[a_n, b_n] \cap C$ poate fi acoperită cu un *singur* interval din familie, ceea ce contrazice proprietatea 3). Am ajuns la o contradicție, și teorema este astfel demonstrată.

Se poate demonstra și o teoremă reciprocă:

Teoremă. Dacă din orice acoperire cu intervale deschise, a unei mulțimi C, se poate extrage o acoperire finită, atunci C este compactă.

Fie $y \notin C$ un punct oarecare. Să arătăm că $y \notin \bar{C}$ de unde va rezulta că C este închisă. Pentru orice punct $x \in C$ avem $x \neq y$. Există deci un interval deschis $I_x \ni x$ și un interval deschis $J_x \ni y$, fără puncte comune. (Dacă, de exemplu, $x < y$, se aleg punctele α, β, γ astfel încît $\alpha < x < \gamma < < y < \beta$ și se ia $I_x = (\alpha, \gamma)$ și $J_x = (\gamma, \beta)$). Familia de intervale deschise $(I_x)_{x \in C}$ acoperă mulțimea C. Conform ipotezei, din această acoperire se poate extrage o acoperire finită a lui C, formată din intervalele $I_{x_1}, I_{x_2}, \ldots, I_{x_n}$. Deoarece fiecare interval I_{x_i} este mărginit și $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{x_i}$, urmează în primul rînd că C este o mulțime *mărginită*. Mulțimea $J = \bigcap_{i=1}^{n} J_{x_i}$ este o vecinătate a lui y, disjunctă de fiecare interval I_{x_i}, deci $J \cap C = \emptyset$. Urmează că y este punct exterior al lui C. Din cele de mai sus deducem că dacă x este aderent lui C, atunci $x \in C$ (deoarece, în caz contrar, ca mai sus, ar rezulta că x este exterior lui C), deci C este închisă. Fiind și mărginită, C este compactă.

Observații. 1° Atît în teorema directă cît și în teorema reciprocă, se pot considera acoperiri formate din mulțimi deschise, nu neapărat din intervale deschise.

Proprietatea enunțată în teorema lui Borel-Lebegue se ia ca definiție a mulțimilor compacte în spațiile topologice generale.

2° Se poate arăta prin exemple că dacă C nu este închisă, sau nu este mărginită, există acoperiri ale lui C cu intervale deschise, din care nu se poate extrage o acoperire finită.

De asemenea, dacă mulţimile din acoperire nu sînt deschise, este posibil să nu se poată extrage o acoperire finită.

Exemple. 1) $C = (-1, 1)$. Intervalele

$$I_1 = \left(-1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right), \quad I_2 = \left(-1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right), \ldots,$$

$$I_{n-1} = \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right), \ldots$$

constituie o acoperire a lui C, dar C nu poate fi acoperită cu un număr finit din aceste intervale.

2) $C = [0, +\infty)$. Intervalele

$$I_1 = (-1, 1), \ I_2 = (0, 2), \ I_3 = (1, 3), \ldots, I_n = (n-2, n) \ldots$$

constituie o acoperire a lui C, din care nu se poate extrage o acoperire finită a lui C.

3) $C = [0, 1]$. Pentru fiecare $x \in C$ să considerăm mulţimea $B_x = \{x\}$. Familia $(B_x)_{x \in C}$ constituie o acoperire a lui C, din care nu se poate extrage o acoperire finită.

§ 5. Funcţii reale

1. Funcţii reale, funcţii de variabilă reală

Funcţiile $f: E \to F$ în care F este o mulţime de numere reale se numesc *funcţii cu valori reale* sau, mai simplu, *funcţii reale* sau *funcţii numerice*.

Scrierea $f: E \to R$ se citeşte astfel: funcţia reală f definită pe E sau funcţia numerică f definită pe E, sau funcţia f definită pe E cu valori reale sau numerice.

Funcţiile $f: E \to F$ în care E este o mulţime de numere reale se numesc *funcţii de argument real* sau *funcţii de variabilă reală*.

Dacă atît E cît şi F sînt mulţimi de numere reale, funcţiile $f: E \to F$ se numesc *funcţii reale de argument real* sau *funcţii reale de variabilă reală*. Acestea vor fi studiate în cea mai mare parte a cărţii. De aceea, cînd vom spune „funcţie" fără altă specificare, vom înţelege că este vorba de funcţie reală de variabilă reală. Printre funcţiile reale de variabilă reală se află funcţiile elementare, studiate în şcoala medie.

2. Operaţii cu funcţii reale

Fie E o mulţime oarecare, A şi B două părţi ale lui E, astfel ca $A \cap B \neq \emptyset$, f şi g două funcţii *reale* definite pe A, respectiv B:

$$f: A \to R, \qquad g: B \to R.$$

Efectuînd operaţiile algebrice obişnuite asupra valorilor funcţiilor (care sînt numere), putem stabili noi corespondenţe, care definesc funcţii noi.

Pentru a putea efectua suma $f(x) + g(x)$ şi produsul $f(x)\,g(x)$ este necesar să existe atît $f(x)$ cît şi $g(x)$, adică este necesar ca atît funcţia f cît şi funcţia g să fie definite în x; aceasta înseamnă că x trebuie să aparţină atît mulţimii A pe care este definită f cît şi mulţimii B pe care este definită g, adică $x \in A \cap B$. Pentru a putea efectua împărţirea $\frac{1}{f(x)}$, trebuie ca $x \in A$ şi $f(x) \neq 0$, deoarece împărţirea cu 0 nu are sens.

Putem astfel da următoarele definiţii:

1) *Suma $f + g$ a funcţiilor f şi g este funcţia definită pe mulţimea $A \cap B$ prin egalitatea*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in A \cap B.$$

2) *Produsul αf dintre un număr α şi funcţia f este funcţia definită pe mulţimea A (ca şi f) prin egalitatea*

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \qquad x \in A.$$

3) *Produsul fg al funcţiilor f şi g este funcţia definită pe mulţimea $A \cap B$ prin egalitatea*

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x), \qquad x \in A \cap B.$$

4) *Inversa $\frac{1}{g}$ a funcţiei g este funcţia definită pe mulţimea $B - G_0$, unde $G_0 = \{x \mid x \in B,\ g(x) = 0\}$, prin egalitatea*

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

În loc de $\frac{1}{g}$ se poate scrie de asemenea g^{-1}.

O b s e r v a ţ i e. Nu trebuie confundată inversa faţă de operaţia de înmulţire cu funcţia inversă faţă de operaţia de compunere. Pentru a evita confuziile, funcţia inversă faţă de operaţia de compunere va fi numită adesea funcţie reciprocă.

De asemenea, nu trebuie confundată notaţia g^{-1} a funcţiei inverse cu notaţia $\overset{-1}{g}$ a funcţiei reciproce.

Luînd $\alpha = -1$ în definiţia 3), deducem că:

5) *Funcţia $-f$ este definită pe mulţimea A (ca şi f) prin egalitatea*

$$(-f)(x) = -f(x), \qquad x \in A.$$

Atunci:

6) *Diferenţa $f - g = f + (-g)$ dintre funcţia f şi g este funcţia definită pe mulţimea $A \cap B$ prin egalitatea*

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \qquad x \in A \cap B.$$

Din definiţiile 3) şi 4) deducem:

7) *Cîtul* $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ *dintre funcţia f şi funcţia g este funcţia definită pe mulţimea* $A \cap B - G_0$ *prin egalitatea*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Observaţii. 1° Dacă $A \cap B = \emptyset$, funcţiile $f + g$, $f - g$, fg şi $\frac{f}{g}$ nu pot fi definite. De asemenea, dacă $G_0 = A \cap B$, adică dacă $g(x) \equiv 0$ pe $A \cap B$, funcţia $\frac{f}{g}$ nu poate fi definită.

2° Să notăm cu $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor reale definite pe părţi ale mulţimii E:

$$\mathcal{F} = \{f : A \to R \mid A \subset E\}.$$

Se verifică uşor următoarele proprietăţi ale operaţiilor definite mai sus:

1) $f + g = g + f$.

2) $(f + g) + h = f + (g + h)$.

3) Funcţia identic nulă $\theta(x) \equiv 0$ definită pe E este zero pentru adunare:

$$f + \theta = f.$$

Mulţimea $\mathcal{F}$ este deci *semigrup* comutativ cu element neutru pentru adunare. $\mathcal{F}$ nu este însă grup pentru adunare, deoarece dacă $A \neq E$, şi $f : A \to R$, avem $-f : A \to R$ şi

$$(f - f)(x) = f(x) - f(x) = 0 \text{ pentru } x \in A.$$

Funcţia $f - f$ este definită pe A şi este diferită de funcţia θ care este definită pe întreaga mulţime E. Aşadar, funcţia f nu are opus în mulţimea $\mathcal{F}$.

4) $fg = gf$.

5) $(fg)h = f(gh)$.

6) Funcţia constantă identic egală cu 1, $e(x) \equiv 1$, definită pe E, este unitate pentru înmulţire:

$$ef = f.$$

Mulţimea $\mathcal{F}$ este *semigrup* comutativ cu unitate şi pentru înmulţire.

Înmulţirea este distributivă faţă de adunare:

7) $f(g+h) = fg + fh$.

Mulţimea $\mathcal{F}$ *nu este inel* pentru cele două operaţii pentru că nu este grup pentru adunare.

3° Să considerăm acum o mulţime $A \subset E$, şi mulţimea $\mathcal{F}(A, R)$ a funcţiilor reale, definite, *toate*, pe A

$$\mathcal{F}(A, R) = \{f : A \to R\}.$$

Dacă f şi g sînt definite pe A, atunci $f + g$, $f - g$, αf şi fg sînt definite tot pe mulţimea A, deci aparţin tot mulţimii $\mathcal{F}(A, R)$.

Dacă notăm acum cu $\theta(x) \equiv 0$ funcţia identic nulă definită pe A şi cu $e(x) \equiv 1$ funcţia identic egală cu 1 definită tot pe A, avem $\theta \in \mathfrak{F}(A, R)$ şi $e \in \mathfrak{F}(A, R)$. Funcţia θ este zero pentru adunarea funcţiilor din $\mathfrak{F}(A, R)$, iar funcţia e este unitate pentru înmulţirea funcţiilor din $\mathfrak{F}(A, R)$. În plus, dacă f este definită pe A atunci $-f$ deci şi $f-f$ este definită tot pe A şi $f - f = \theta$. Rezultă că $-f$ este opusa lui f, deci $\mathfrak{F}(A, R)$ este *grup* pentru adunare, şi deci este inel pentru adunare şi înmulţire.

Iată acum proprietăţile înmulţirii cu numere:

(i) $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$.

(ii) $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$.

(iii) $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$.

(iu) $1 \cdot f = f$.

(j) $\alpha(fg) = (\alpha f)s = f(\alpha g)$.

Rezultă că mulţimea $\mathfrak{F}(A, R)$ este un *spaţiu vectorial** pentru operaţiile $f+g$ şi αf, şi este o *algebră*** pentru cele trei operaţii, $f+g$, αf, fg.

4° Produsul αf dintre numărul α şi funcţia $f: A \to R$ este egal cu produsul dintre funcţia constantă $\alpha(x) = \alpha$ definită pe A şi funcţia f.

Produsul dintre un număr şi o funcţie poate fi deci considerat un caz particular de produs a două funcţii.

3. Structura de ordine pe mulţimea funcţiilor reale

Fie E o mulţime şi $\mathfrak{F}(E, R)$ mulţimea funcţiilor reale definite pe E. Folosind ordonarea numerelor reale putem defini o structură de ordine pe mulţimea funcţiilor reale definite pe E.

Dacă f şi g sînt două funcţii reale definite pe E, vom scrie $f \leqslant g$ sau $g \geqslant f$ dacă $f(x) \leqslant g(x)$ pentru orice $x \in E$.

Dacă $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in E$ spunem că funcţia f este *pozitivă* şi scriem $f \geqslant 0$.

Dacă $f(x) \leqslant 0$ pentru orice $x \in E$, spunem că f este *negativă* şi scriem $f \leqslant 0$.

Dacă E este un spaţiu vectorial şi dacă o submulţime $E' \subset E$ este închisă faţă de adunare şi înmulţirea cu scalari:

$x + y \in E'$ şi $\alpha x \in E'$, pentru orice $x, y \in E'$ şi $\alpha \in R$, atunci E' este de asemenea un spaţiu vectorial.

---

* O mulţime E pe care s-a definit o operaţie de adunare $(x, y) \to x + y$ şi o operaţie de înmulţire cu numere $(\alpha, x) \to \alpha x$ se numeşte *spaţiu vectorial* sau *spaţiu liniar* dacă:

1) E este grup comutativ pentru adunare;

2) înmulţirea cu numere are proprietăţile (i) — (iu) din text.

Elementele unui spaţiu vectorial se numesc vectori, iar numerele se numesc scalari. Operaţia de înmulţire cu numere se numeşte atunci înmulţire cu scalari.

** O mulţime E pe care s-au definit: o adunare $(x, y) \to x + y$, o înmulţire $(x, y) \to x \cdot y$ şi o înmulţire cu numere $(\alpha, x) \to \alpha x$ se numeşte *algebră* dacă:

1) E este inel pentru adunare şi înmulţire;

2) E este spaţiu vectorial pentru adunare şi înmulţire cu numere;

3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Dacă înmulţirea $x \cdot y$ este comutativă, E se numeşte algebră comutativă; dacă înmulţirea are unitate, E se numeşte algebră cu unitate.

Dacă E este o algebră și dacă o submulțime $E' \subset E$ este închisă față de adunare, înmulțire și înmulțire cu scalari:

$x + y \in E'$, $xy \in E'$ și $\alpha x \in E'$, oricare ar fi $x, y \in E'$ și $\alpha \in R$, atunci E' este de asemenea o algebră.

Deoarece s-a arătat că $\mathcal{F}(A, R)$ este algebră, deducem că pentru a demonstra că o submulțime de funcții $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}(A, R)$ este o algebră, este suficient să arătăm că cele trei operații, efectuate asupra funcțiilor din $\mathcal{F}'$, ne conduc tot la funcții din $\mathcal{F}'$.

Se verifică ușor că „$f \leqslant g$" este o relație de ordine pe mulțimea $\mathcal{F}(E, R)$, cu următoarele proprietăți:

1) $f \leqslant f$.
2) $f \leqslant g$ și $g \leqslant f \Rightarrow f = g$.
3) $f \leqslant g$ și $g \leqslant h \Rightarrow f \leqslant h$.
4) $f \leqslant g \Rightarrow f + h \leqslant g + h$ (și $f + h \leqslant g + h \Rightarrow f \leqslant g$).
5) $f \leqslant g$ și $h \geqslant 0 \Rightarrow fh \leqslant gh$
$fh \leqslant gh$ și $h(x) > 0$ pentru orice $x \in E \Rightarrow f \leqslant g$.

Dacă $f(x) > 0$ pentru orice $x \in E$ spunem că funcția f este *strict pozitivă*, iar dacă $f(x) < 0$ pentru orice $x \in E$ spunem că funcția f este *strict negativă*.

Vom nota cu $|f|$ funcția definită pe E prin egalitatea

$$|f|\,(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) \leqslant 0 \end{cases}, \quad \text{pentru } x \in E.$$

Funcția $|f|$ va fi numită modulul funcției f.

Fie funcțiile $f, g : E \to R$. Vom nota cu sup (f, g) funcția reală definită pe E, care în fiecare punct $x \in E$ are drept valoare pe cel mai mare dintre numerele $f(x)$ și $g(x)$:

$$\sup\,(f, g)(x) = \sup\,(f(x), g(x)), \qquad x \in E.$$

Se definește de asemenea funcția inf (f, g), prin egalitatea

$$\inf\,(f, g)(x) = \inf\,(f(x), g(x)), \qquad x \in E.$$

Funcțiile sup (f, g) și inf (f, g) se numesc, respectiv, anvelopa superioară și anvelopa inferioară a funcțiilor f și g.

Mai general, dacă $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții reale definite pe E, se definesc anvelopa inferioară $\inf\limits_{i \in I} f_i$ și anvelopa superioară $\sup\limits_{i \in I} f_i$ a acestei familii, prin inegalitățile

$$\left(\inf_{i \in I} f_i\right)(x) = \inf_{i \in I} f_i(x) \text{ și } \left(\sup_{i \in I} f_i\right)(x) = \sup_{i \in I} f_i(x).$$

Funcțiile

$$f^+ = \sup\,(f, 0) \text{ și } f^- = \sup\,(-f, 0)$$

se numesc respectiv partea pozitivă și partea negativă a funcției f.

Avem

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geqslant 0 \\ 0\ , & \text{dacă } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

şi

$$f^-(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{dacă } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

Se verifică imediat următoarele egalităţi:

$$f = f^+ - f^- \qquad f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$$

$$|f| = f^+ + f^- = \sup(f, -f), \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

$$\inf(f, g) = -\sup(-f, -g)$$

4. Funcţii mărginite

Fie funcţia reală $f: E \to R$ definită pe o mulţime oarecare E şi fie $A \subset E$.

Se spune că funcţia f este *minorată* sau *mărginită inferior pe mulţimea* A dacă imaginea $f(A)$ a lui A prin funcţia f este o mulţime minorată, adică *dacă există un număr* $\alpha \in R$, *astfel încît* $\alpha \leqslant f(x)$ *pentru orice* $x \in A$. Marginea inferioară $\inf f(A)$ a mulţimii $f(A)$ se numeşte *marginea inferioară a funcţiei* f pe *mulţimea* A şi se notează $\inf\limits_{x \in A} f(x)$:

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A).$$

Numărul $m = \inf\limits_{x \in A} f(x)$ este caracterizat de următoarele două proprietăţi (care exprimă faptul că m este *cel mai mare minorant al mulţimii* $f(A)$):

1) $m \leqslant f(x)$, oricare ar fi $x \in A$;

2) dacă $m < \alpha$, există $x \in A$ astfel ca $f(x) < \alpha$.

Dacă f este minorată pe domeniul său de definiţie E, se spune, mai simplu, că este minorată, fără a mai specifica mulţimea pe care are această proprietate, iar numărul $\inf\limits_{x \in E} f(x)$ se numeşte *marginea inferioară a funcţiei* f.

Dacă f este o funcţie reală de variabilă reală, a spune că f este minorată înseamnă că graficul său se află în întregime deasupra unei drepte $y = a$ paralele cu axa Ox (fig. 36).

Se spune că funcţia f este *majorată sau mărginită superior pe mulţimea* A dacă imaginea $f(A)$ este o mulţime majorată, adică *dacă există un număr* $b \in R$, *astfel încît* $f(x) \leq b$, *oricare ar fi* $x \in A$.

Marginea superioară $\sup f(A)$ a mulţimii $f(A)$ se numeşte *marginea superioară a funcţiei* f *pe mulţimea* A şi se notează $\sup\limits_{x \in A} f(x)$:

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A).$$

Numărul $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ este caracterizat de următoarele două proprietăţi (care exprimă faptul că M este *cel mai mic majorant* al mulţimii $f(A)$):

1) $f(x) \leq M$, oricare ar fi $x \in A$;
2) dacă $\alpha < M$, există $x \in A$ astfel ca $\alpha < f(x)$.

Dacă f este majorată pe domeniul său de definiţie E, se spune, mai simplu, că f este majorată, fără a mai specifica mulţimea pe care are această proprietate, iar numărul $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ se numeşte *marginea superioară a funcţiei* f.

Dacă f este o funcţie reală de variabilă reală, a spune că este majorată înseamnă că graficul său se află în întregime sub o dreaptă $y = b$ paralelă cu axa Ox (fig. 37).

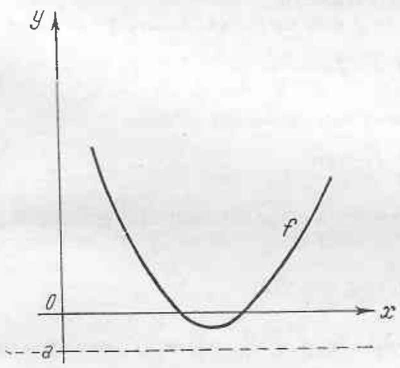


Fig. 36

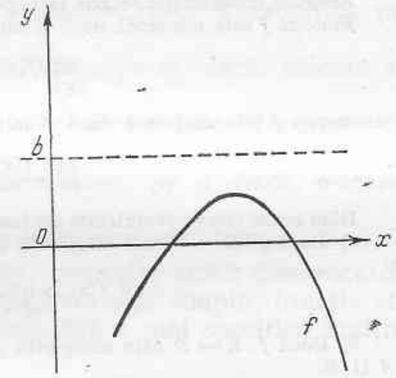


Fig. 37

Se spune că funcţia f este *mărginită* pe mulţimea A dacă este şi minorată şi majorată pe A, adică dacă mulţimea valorilor $f(A)$ este mărginită.

Aceasta înseamnă că *există două numere* a *şi* b *astfel încît să avem* $a \leq f(x) \leq b$ *pentru orice* $x \in A$.

Avem $\inf\limits_{x \in A} f(x) \leq \sup\limits_{x \in A} f(x)$; cele două margini sînt egale dacă şi numai dacă f este constantă pe A.

Dacă f este mărginită pe mulţimea de definiţie E, vom spune, mai simplu, că f este mărginită, fără altă specificare.

Dacă f este o funcţie reală de variabilă reală, a spune că f este mărginită înseamnă că graficul său se află în întregime cuprins între două drepte $y = a$ şi $y = b$ paralele cu axa Ox (fig. 38).

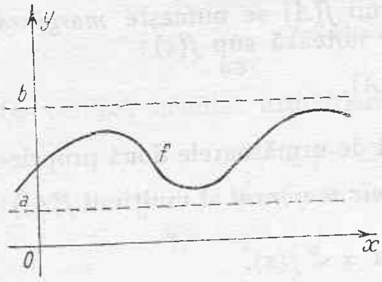


Fig. 38

P r o p o z i ţ i e. Funcţia $f : E \to R$ este mărginită, dacă şi numai dacă există un număr $M > 0$ astfel încît

$$|f(x)| \leqslant M \text{ pentru orice } x \in E.$$

În adevăr, $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$, iar $f(E)$ este mărginită dacă şi numai dacă există $M > 0$ astfel ca $|y| \leqslant M$ pentru orice $y \in f(E)$, adică $|f(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in E$.

Rezultă din această propoziţie că f este mărginită dacă şi numai dacă modulul său $|f|$ este o funcţie mărginită.

Se verifică uşor că dacă $f, g : E \to R$ sînt mărginite, funcţiile $f + g$, αf şi fg sînt mărginite, deci mulţimea $\mathfrak{M}$ (E, R) a funcţiilor reale mărginite definite pe E este o *algebră*.

O b s e r v a ţ i e. Dacă f şi g sînt minorate atunci $f + g$ este minorată şi dacă $\alpha \geqslant 0$ atunci αf este minorată. Funcţia $- f$ poate însă să nu fie minorată. Mulţimea funcţiilor minorate nu este grup pentru adunare.

Aceleaşi consideraţii se pot face pentru funcţii majorate.

Funcţia f este minorată dacă şi numai dacă $- f$ este majorată. În acest caz avem:

$$\inf_{x \in E} f(x) = - \sup_{x \in E} (- f(x)).$$

De asemenea f este majorată dacă şi numai dacă $- f$ este minorată şi avem:

$$\sup_{x \in E} f(x) = - \inf_{x \in E} (-f(x)).$$

Dăm acum cîteva proprietăţi ale funcţiilor mărginite a căror demonstraţie este imediată:

1) Dacă $f : E \to R$ este mărginită pe $A \subset E$ şi dacă $B \subset A$ atunci f este mărginită pe B şi

$$\inf_{x \in B} f(x) \geqslant \inf_{x \in A} f(x), \ \sup_{x \in B} f(x) \leqslant \sup_{x \in A} f(x).$$

2) Dacă $f : E \to R$ este mărginită pe submulţimile A şi B, atunci f este mărginită pe $A \cup B$.

3) Dacă funcţiile $f, g : E \to R$ sînt mărginite şi dacă $f \leqslant g$ atunci:

$$\inf_{x \in E} f(x) \leqslant \inf_{x \in E} g(x), \ \sup_{x \in E} f(x) \leqslant \sup_{x \in E} g(x).$$

4) Dacă funcţiile f şi $g : E \to R$ sînt mărginite, atunci

$$\inf_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geqslant \inf_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x);$$

$$\sup_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x).$$

5. Funcţii monotone

Fie $f: E \to R$ *o funcţie reală de variabilă reală* $(E \subset R)$ şi fie $A \subset E$. Spunem că funcţia f este *crescătoare pe* A, dacă, oricare ar fi $x' < x''$ din A, avem $f(x') \leqslant f(x'')$.

Spunem că funcţia f este *descrescătoare pe* A, dacă, oricare ar fi $x' < x''$ din A, avem $f(x') \geqslant f(x'')$.

Dacă funcţia f este crescătoare (respectiv descrescătoare) pe tot domeniul său de definiţie, va fi numită, mai simplu, funcţie crescătoare (respectiv descrescătoare) fără a mai specifica mulţimea pe care are loc această proprietate.

Funcţiile crescătoare şi funcţiile descrescătoare se numesc funcţii *monotone*.

O funcţie constantă este şi crescătoare şi descrescătoare. Reciproc, dacă o funcţie este şi crescătoare şi descrescătoare, atunci ea este constantă.

O b s e r v a ţ i e. O funcţie crescătoare se caracterizează prin aceea că o inegalitate dintre valorile argumentului se transformă într-o inegalitate de acelaşi sens (eventual, egalitate) între valorile funcţiei. Aşadar, o funcţie crescătoare se poate defini şi cu ajutorul următoarei implicaţii: $x' > x'' \Rightarrow f(x') \geqslant f(x'')$.

O funcţie descrescătoare transformă o inegalitate dintre valorile argumentului într-o inegalitate de sens contrar (eventual, egalitate) între valorile funcţiei. Aşadar, o funcţie descrescătoare se poate caracteriza prin: $x' > x'' \Rightarrow f(x') \leqslant f(x'')$.

Spunem că funcţia f este *strict crescătoare pe* A, dacă, oricare ar fi $x' < x''$ din A, avem $f(x') < f(x'')$.

Orice funcţie strict crescătoare este crescătoare deoarece dacă $f(x') < f(x'')$ atunci $f(x') \leqslant f(x'')$.

Spunem că funcţia f este *strict descrescătoare pe* A, dacă, oricare ar fi $x' < x''$ din A, avem $f(x') > f(x'')$.

Orice funcţie strict descrescătoare este descrescătoare.

Dacă funcţia f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe tot domeniul său de definiţie, va fi numită, mai simplu, funcţie strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) fără a mai specifica mulţimea pe care are loc această proprietate.

Funcţiile strict crescătoare şi strict descrescătoare se numesc *funcţii strict monotone*.

Orice funcţie strict monotonă este monotonă.

O b s e r v a ţ i e. Funcţia f este strict crescătoare dacă şi numai dacă $x' > x'' \Rightarrow f(x') > f(x'')$. Funcţia f este strict descrescătoare dacă şi numai dacă $x' > x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$.

Următoarele proprietăţi se verifică imediat:

1) *Dacă f şi g sînt (strict) crescătoare şi $\alpha > 0$, atunci $f + g$ şi αf sînt (strict) crescătoare.*

Aşadar mulţimea funcţiilor reale (strict) crescătoare definite pe o mulţime $E \subset R$ este un *con convex** în spaţiul vectorial $\mathcal{F}(E, R)$ al funcţiilor $f: E \to R$.

2) *Dacă f este (strict) crescătoare, atunci $-f$ este (strict) descrescătoare.*

Aşadar, mulţimea funcţiilor reale crescătoare definite pe $E \subset R$ *nu* este grup pentru adunare.

3) *Dacă $f(x) > 0$ pentru orice $x \in E$ şi dacă f este (strict) crescătoare, atunci funcţia $\frac{1}{f}$ este (strict) descrescătoare.*

Dacă în propoziţiile de mai sus se înlocuiesc cuvintele „crescător" şi „descrescător" unul cu altul, se obţin alte proprietăţi ale funcţiilor monotone.

4) Fie $f: A \to B$ şi $g: B \to R$, două funcţii şi $g \circ f: A \to R$, funcţia lor compusă.

Dacă f şi g sînt ambele (strict) crescătoare sau ambele (strict) descrescătoare, atunci funcţia compusă $g \circ f$ este (strict) crescătoare.

Dacă una din funcţiile f şi g este (strict) crescătoare şi cealaltă este (strict) descrescătoare, atunci funcţia compusă $g \circ f$ este (strict) descrescătoare.

Propoziţie. O funcţie strict monotonă este biunivocă.

În adevăr, fie $f: A \to B$ o funcţie strict monotonă, şi $x' \neq x''$ două puncte din A. Să presupunem $x' < x''$. Atunci $f(x') < f(x'')$ dacă f este strict crescătoare, sau $f(x') > f(x'')$ dacă f este strict descrescătoare, deci, în orice caz $f(x') \neq f(x'')$, adică f este biunivocă.

Urmează că funcţiile strict monotone admit funcţii inverse.

Propoziţie. Funcţia inversă a unei funcţii strict crescătoare este strict crescătoare.

Funcţia inversă a unei funcţii strict descrescătoare este strict descrescătoare.

Fie f o aplicaţie *strict crescătoare* a lui A pe B, $f(A) = B$, şi fie $\overset{-1}{f}: B \to A$ funcţia inversă. Fie $y' < y''$; să arătăm că $\overset{-1}{f}(y') < \overset{-1}{f}(y'')$. Fie x', x'' punctele din A pentru care avem

$$f(x') = y', \qquad f(x'') = y''$$

deci

$$x' = \overset{-1}{f}(y'), \qquad x'' = \overset{-1}{f}(y'').$$

A arăta că $\overset{-1}{f}(y') < \overset{-1}{f}(y'')$ revine la a arăta că $x' < x''$.

---

* Fie E un spaţiu vectorial. O mulţime $C \subset E$ se numeşte *con* (cu vîrful în origine) dacă pentru orice $x \in C$ şi orice număr $\alpha > 0$ avem $\alpha x \in C$.

Aşadar C este con dacă o dată cu un punct x, conţine întreaga semidreaptă $\{\alpha x | \alpha > 0\}$ cu vîrful în origine, care trece prin x.

Un con $C \subset E$ se numeşte *con convex* dacă

$$x + y \in C, \text{ oricare ar fi } x, y \in C$$

adică, dacă o dată cu două puncte x şi y, conţine întregul segment care le uneşte.

Să presupunem, prin absurd, că $x' \geqslant x''$. Deoarece f este strict crescătoare, avem $f(x') \geqslant f(x'')$ sau $y' \geqslant y''$, ceea ce contrazice alegerea $y' < y''$. Așadar, $y' < y'' \Rightarrow \overset{-1}{f}(y') < \overset{-1}{f}(y'')$, deci $\overset{-1}{f}$ este strict crescătoare.

În cazul cînd f este strict descrescătoare, se procedează în mod analog.

P r o p o z i ț i e. **Graficele a două funcții reale de variabilă reală, inverse una alteia, sînt simetrice față de prima bisectoare.**

Fie f o aplicație *biunivocă* a lui A pe B, și $\overset{-1}{f}$ aplicația reciprocă a lui B pe A:

$$f : A \to B$$

$$A \leftarrow B : \overset{-1}{f}.$$

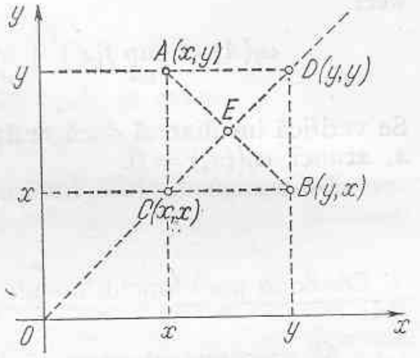


Fig. 39

Avem $y = f(x)$ dacă și numai dacă $x = \overset{-1}{f}(y)$, $x \in A$, $y \in B$.

Un punct (x, y) se află pe graficul lui $f(x \in A$, și $y = f(x))$, dacă și numai dacă punctul (y, x) se află pe graficul lui $\overset{-1}{f}(y \in B$, și $x = \overset{-1}{f}(y))$. Dar punctele $A(x, y)$ și $B(y, x)$ sînt simetrice față de prima bisectoare.

Într-adevăr (fig. 39), dacă notăm $C(x, x)$ și $D(y, y)$, punctele A, B, C, D sînt vîrfurile unui pătrat, în care CD este o diagonală (de-a lungul primei bisectoare) și AB este cealaltă diagonală. Diagonalele se taie la jumătate, în E. Avem $AE = EB$ și $AB \perp CD$, deci A și B sînt simetrice față de prima bisectoare.

6. Oscilația unei funcții pe o mulțime

Fie $f : E \to R$ o funcție definită pe o mulțime oarecare E și fie $A \subset E$. Dacă funcția f este mărginită pe mulțimea A, are o margine superioară și o margine inferioară pe această mulțime. Diferența dintre aceste margini se numește *oscilația funcției f pe mulțimea A* și se notează $\omega_f(A)$:

$$\omega_f(A) = \sup f(A) - \inf f(A).$$

Din această definiție rezultă că ω_f are următoarele proprietăți pe mulțimile pe care f este mărginită:

1) $\omega_f(A) \geqslant 0$, oricare ar fi $A \subset E$, (ω_f este pozitivă), deoarece $\sup f(A) \geqslant \inf f(A)$;

2) $\omega_f(A) \leqslant \omega_f(B)$ dacă $A \subset B$ (ω_f este crescătoare), deoarece $\sup f(A) \leqslant \sup f(B)$ și $\inf f(A) \geqslant \inf f(B)$;

3) $\omega_f(A) = \sup\limits_{\substack{x' \in A \\ x'' \in A}} (f(x') - f(x''))$.

Într-adevăr,

$$\sup f(A) = \sup_{x' \in A} f(x') \text{ şi } \inf f(A) = \inf_{x'' \in A} f(x'') = -\sup_{x'' \in A} (-f(x'')),$$

deci

$$\omega_f(A) = \sup_{x' \in A} f(x') + \sup_{x'' \in A} (-f(x'')) = \sup_{\substack{x' \in A \\ x'' \in A}} (f(x') - f(x'')).$$

Se verifică imediat că dacă mulţimea A este formată dintr-un singur punct x, atunci $\omega_f(\{x\}) = 0$.

De asemenea, dacă funcţia f este constantă pe A, atunci $\omega_f(A) = 0$.

7. Oscilaţia unei funcţii într-un punct

Să presupunem acum că $f: E \to R$ este o funcţie mărginită definită pe o mulţime de numere reale, $E \subset R$, şi fie $x \in E$. Pentru fiecare vecinătate V a lui x să considerăm oscilaţia $\omega_f(V \cap E)$ a funcţiei pe mulţimea $V \cap E$ şi să notăm

$$\omega_f(x) = \inf \omega_f(V \cap E),$$

unde marginea inferioară se ia pentru *toate* vecinătăţile V ale lui x. Numărul $\omega_f(x)$ se numeşte *oscilaţia funcţiei f în punctul x*.

Pentru definirea oscilaţiei într-un punct ne putem folosi numai de intervalele I care conţin pe x sau care au centrul în x:

$$\omega_f(x) = \inf_{I \ni x} \omega_f(I \cap E),$$

deoarece orice vecinătate V a lui x, conţine un interval cu centrul în x.

Dacă x este un punct izolat al lui E, atunci există o vecinătate V a lui x astfel încît $V \cap E = \{x\}$. În acest caz $\omega_f(V \cap E) = \omega_f(\{x\}) = 0$ şi deci $\omega_f(x) = 0$.

Oscilaţia $\omega_f(x)$ este o funcţie pozitivă, definită pentru orice x din E. Această funcţie poate fi nemărginită, deşi funcţia f de la care s-a plecat a fost presupusă mărginită. Pentru funcţiile cu oscilaţia mărginită definite pe mulţimi compacte, avem următoarea propoziţie, vare va fi folosită pentru demonstrarea criteriului de integrabilitate al lui Lebesgue.

P r o p o z i ţ i e. Să presupunem că funcţia $f: E \to R$ este definită pe o mulţime compactă E şi că oscilaţia sa $\omega_f(x)$ este mărginită, şi să notăm

$$\omega = \sup_{x \in E} \omega_f(x).$$

Atunci pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît oricare ar fi intervalul I de lungime $< \delta(\varepsilon)$, să avem $\omega_f(I \cap E) < \omega + \varepsilon$.

Prin ipoteză, avem $\omega_f(x) \leqslant \omega$, oricare ar fi $x \in E$. Fie $\varepsilon > 0$ şi $x \in E$. Deoarece

$$\omega_f(x) = \inf_{I \ni x} \omega_f(I \cap E),$$

există un interval I_x cu centrul în x, astfel încît să avem

$$\omega_f(I_x \cap E) < \omega_f(x) + \varepsilon \leqslant \omega + \varepsilon.$$

Procedînd astfel pentru fiecare $x \in E$, obţinem o familie $(I_x)_{x \in E}$ de intervale deschise, care acoperă pe E, astfel încît pentru fiecare $x \in E$ să avem

$$\omega_f(I \cap E) < \omega + \varepsilon.$$

În fiecare interval I_x să alegem un interval deschis J_x, cu centrul în x, şi cu lungimea egală cu jumătatea lungimii lui I_x. Familia de intervale deschise $(J_x)_{x \in E}$ acoperă de asemenea mulţimea compactă E. Conform teoremei lui Borel-Lebesgue, din această acoperire se poate extrage o acoperire finită a lui E:

$$J_{x_1}, J_{x_2}, \ldots, J_{x_n},$$

intervalele fiind aşezate în ordinea crescătoare a indicilor:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

Să notăm cu δ lungimea celui mai mic dintre aceste intervale. Numărul δ astfel obţinut este numărul căutat. Fie într-adevăr un interval I de lungime $< \delta$. Dacă $I \cap E = \emptyset$, atunci $\omega_f(I \cap E) = 0 < \omega + \varepsilon$. Să presupunem deci că $I \cap E \neq \emptyset$. În acest caz, intervalul I se află conţinut în întregime în reuniunea a două intervale consecutive, $J_{x_i} \cup J_{x_{i+1}}$. Presupunînd că intervalul I_{x_i} are lungime mai mare decît $I_{x_{i+1}}$, avem $J_{x_i} \cup J_{x_{i+1}} \subset I_{x_i}$, deci $I \subset I_{x_i}$ şi deci

$$\omega_f(I \cap E) \leqslant \omega_f(I_{x_i} \cap E) < \omega + \varepsilon$$

şi propoziţia este demonstrată.

Capitolul III

ŞIRURI DE NUMERE

§ 1. Generalităţi

1. Denumiri şi notaţii

Amintim că o funcţie reală $n \to a(n)$ definită pe mulţimea N a numerelor naturale se numeşte *şir de numere reale*. Pentru şiruri se obişnuieşte notaţia indicială $n \to a_n$, astfel încît un şir de numere reale este o familie $(a_n)_{n \in N}$ de numere reale, cu indici numerele naturale. Cînd nu va fi pericol de confuzie, un şir va fi notat (a_n) fără a mai specifica mulţimea indicilor, subînţelegîndu-se că aceasta este mulţimea N a numerelor naturale.

Deoarece în continuare vor fi considerate mai ales şiruri de numere reale, acestea vor fi numite, simplu, şiruri.

Să scriem explicit corespondenţa stabilită de funcţia şir:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots\ldots, & a_n, & \ldots \end{array}$$

Înlăturînd mulţimea de definiţie 1, 2, ..., n,... care se subînţelege, rămîn numai valorile funcţiei şir, în ordinea crescătoare a indicilor:

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots, \ a_n, \ldots$$

Aceasta este scrierea obişnuită a şirului, în care, aparent, nu este pus în evidenţă caracterul de funcţie al şirului. La o examinare mai atentă apare însă caracterul de funcţie al şirului, dacă asociem fiecărui indice n numărul a_n.

Numerele a_1, a_2, $a_3, \ldots$ se numesc *termenii* şirului: a_1 este primul termen, a_2 este al doilea termen etc. Se zice de asemenea că a_1 este termenul de rang 1; a_2 este termenul de rang 2 etc. Un termen a_n al şirului, în care nu se precizează numărul natural n, se numeşte în mod obişnuit *termen general* al şirului.

Atunci cînd se dă un șir concret de numere, în care indicii nu mai sînt scriși, caracterul de funcție al șirului se pune în evidență dacă asociem numărului 1 primul termen din șir, numărului 2 al doilea termen din șir etc. Doi termeni *diferiți* a_i și a_j, $(i \neq j)$, pot avea aceeași valoare.

Exemple de șiruri:

1) 1, 2, 3, 4, ...(șirul numerelor naturale).
2) 2, 4, 6, 8, ...(șirul numerelor naturale pare).
3) 1, 3, 5, 7, ...(șirul numerelor naturale impare).
4) 2, 1, 4, 3, 6, 5, ...(șir de numere naturale).
5) −1, −2, −3, −4, ...(șirul numerelor întregi strict negative).
6) 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...
7) 1, 1, 1, 1, ...
8) 0, 0, 0, 0, ...

Potrivit egalității a două funcții, două șiruri (a_n) și (b_n) sînt egale dacă și numai dacă au termenii corespunzători aceluiași indice egali:

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots,\ a_n = b_n, \ldots$$

Un șir (a_n) este *constant* dacă este o funcție constantă, adică dacă toți termenii au aceeași valoare.

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n = \ldots$$

Dacă notăm cu a valoarea comună a tuturor termenilor, un șir constant se scrie:

$$a,\ a,\ a,\ \ldots,\ a, \ldots$$

Termenii unui șir se pot reprezenta prin puncte pe dreaptă. Dacă doi sau mai mulți termeni au aceeași valoare, ei se reprezintă, evident, prin același punct pe dreaptă. De exemplu, toți termenii unui șir constant se reprezintă prin același punct.

2. Operații cu șiruri

Fie (a_n) și (b_n) două șiruri:

$$(a_n) : a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\ a_n, \ldots$$
$$(b_n) : b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots,\ b_n, \ldots$$

Din definiția operațiilor cu funcțiile se deduc operațiile cu șirurile:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) : a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, \ldots,\ a_n + b_n, \ldots$$
$$\alpha(a_n) = (\alpha a_n) : \alpha a_1,\ \alpha a_2, \ldots,\ \alpha a_n, \ldots$$
$$(a_n)(b_n) = (a_n b_n) : a_1 b_1,\ a_2 b_2 \ldots,\ a_n b_n, \ldots$$
$$\frac{1}{(a_n)} = \left(\frac{1}{a_n}\right) : \frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots \quad (\text{dacă } a_n \neq 0 \text{ pentru orice } n \in N).$$

În particular:

$$-(a_n) = (-a_n) : -a_1, \ -a_2, \ldots, \ -a_n, \ldots$$

$$(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n) : a_1 - b_1, \ a_2 - b_2, \ldots, \ a_n - b_n, \ldots$$

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right) : \ \frac{a_1}{b_1}, \ \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots, \quad \text{dacă } b_n \neq 0 \text{ pentru orice } n \in N.$$

Şirul constant 0, 0,..., 0,... este zero pentru adunarea şirurilor, iar şirul constant 1, 1, ..., 1,... este unitate pentru înmulţirea şirurilor. Mulţimea şirurilor de numere reale este o *algebră*.

3. Şiruri mărginite

Un şir (a_n) este *minorat* (sau *mărginit inferior*) dacă există un număr α astfel încît

$$\alpha \leqslant a_n \text{ pentru orice } n \in N.$$

Şirul (a_n) este *majorat* (sau *mărginit superior*) dacă există un număr β astfel încît

$$a_n \leqslant \beta \text{ pentru orice } n \in N.$$

Şirul (a_n) este *mărginit*, dacă există două numere $\alpha < \beta$, astfel încît să avem

$$\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta \text{ pentru orice } n \in N.$$

Consideraţiile din capitolul II, § 5, asupra funcţiilor mărginite, se aplică, în particular, şirurilor numerice:

Propoziţia 1. Un şir (a_n) este mărginit dacă şi numai dacă există un număr $M > 0$ astfel încît să avem

$$|a_n| \leqslant M, \textbf{ pentru orice } n \in N.$$

În cazul şirurilor însă este suficient ca inegalitatea să fie verificată numai începînd de la un anumit rang:

Propoziţia 2. Dacă există un număr $M > 0$ şi un număr n_0 astfel încît să avem

$$|a_n| \leqslant M, \textbf{ pentru } n \geqslant n_0$$

atunci şirul (a_n) este mărginit.

Într-adevăr, luînd $M' = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, M)$, avem

$$|a_n| \leqslant M', \quad \text{pentru orice } n \in N,$$

deci (a_n) este mărginit.

Se verifică fără dificultate că dacă (a_n) şi (b_n) sînt şiruri mărginite, iar $\alpha \in R$, atunci şirurile $(a_n + b_n)$, (αa_n) şi $(a_n b_n)$ sînt de asemenea mărginite, deci: *mulţimea şirurilor mărginite este o algebră*.

Algebra şirurilor mărginite se notează cu litera m.

Ca şi pentru funcţii, pentru un şir (a_n) se defineşte marginea inferioară $m = \inf\limits_{n \in N} a_n$, caracterizată de următoarele proprietăţi:

1) $m \leqslant a_n$, pentru orice n;

2) pentru orice $\alpha > m$, există un termen $a_n < \alpha$

şi marginea superioară $M = \sup\limits_{n \in N} a_n$, caracterizată de următoarele proprietăţi:

1) $a_n \leqslant M$, pentru orice n;

2) pentru orice $\alpha < M$, există un termen $a_n > \alpha$.

Exemple. 1. Orice şir constant $a, a, a, \ldots, a, \ldots$ este mărginit (putem lua $\alpha = \beta = a$, deci $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$, pentru orice $n \in N$).

2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,$ este mărginit $\left(\text{avem } 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1\right)$.

3) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ este mărginit $\left(\text{avem } -5 \leqslant -\frac{1}{n} \leqslant 7\right)$.

4) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ este mărginit (avem $|a_n| \leqslant 15$).

5) Dacă $0 < a < 1$, avem $0 < a^n < 1$ pentru orice $n \in N$, deci şirul $1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$ este mărginit. În particular, şirurile următoare sînt mărginite:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots; 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$

Şirurile care nu sînt mărginite se numesc şiruri nemărginite. Prin negarea proprietăţii de mărginire, obţinem următoarele definiţii:

Un şir (a_n) este nemărginit, dacă şi numai dacă, oricare ar fi numărul $M > 0$, există un termen a_n din şir astfel încît $|a_n| > M$.

Sau:

Un şir (a_n) este nemărginit, dacă şi numai dacă, oricare ar fi numerele $\alpha < \beta$, există un termen a_n din şir care nu se află cuprins între α şi β, deci pentru care avem sau $a_n < \alpha$, sau $\beta < a_n$.

În limbaj geometric, un şir (a_n) este nemărginit dacă în afara oricărui interval mărginit există cel puţin un termen din şir.

Un şir este nemărginit fie dacă nu este majorat, fie dacă nu este minorat, fie dacă nu este nici majorat, nici minorat.

Exemple de şiruri nemărginite. 1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ este minorat (de 0) dar nu este majorat. În adevăr, oricare ar fi $M > 0$, există un număr natural $n > M$.

2) $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ este majorat (de 0), dar nu este minorat; oricare ar fi $M > 0$, există $n > M$, deci $-n < -M$.

3) $0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, \ldots, 0{,}n, \ldots$ este minorat.

4) Dacă $a>1$, şirul $1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$ este nemărginit. În adevăr, folosind inegalitatea lui Bernoulli, am dedus că oricare ar fi $M > 0$, există un număr natural n astfel ca $a^n \geqslant M$, deci şirul nu este majorat.

În particular, şirurile

$$1, 2, 2^2, 2^3, \ldots \qquad 1, 10, 10^2, 10^3, \ldots$$

sînt nemărginite.

5) $1^k, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots$ (k natural) este nemărginit.

Într-adevăr, oricare ar fi $M>0$, există un număr natural $n > M$. Dar $k \geqslant 1$, deci $n^k \geqslant n^1$, şi deci $n^k > M$.

6) Şirul $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$ nu este nici majorat, nici minorat.

4. Şiruri monotone

Consideraţiile din capitolul II, § 5 asupra funcţiilor monotone se aplică, în particular, şirurilor numerice. Astfel:

Un şir (a_n) este *crescător* dacă

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots$$

(fiecare termen este mai mic sau egal cu cel următor).

Un şir (a_n) este *descrescător* dacă

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots$$

(fiecare termen este mai mare sau egal cu cel următor).

Şirurile crescătoare şi şirurile descrescătoare se numesc şiruri *monotone*.

Un şir (a_n) este *strict crescător* dacă

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$$

Orice şir strict crescător este crescător, deoarece, dacă $a_n < a_{n+1}$, atunci $a_n \leqslant a_{n+1}$.

Un şir (a_n) este *strict descrescător*, dacă

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$$

Orice şir strict descrescător este descrescător. Şirurile strict crescătoare şi şirurile strict descrescătoare se numesc şiruri *strict monotone*.

Orice şir strict monoton este un şir monoton.

Se verifică fără dificultate următoarele propoziţii:

1) *Dacă* (a_n) *şi* (b_n) *sînt crescătoare (respectiv strict crescătoare) şi dacă* $\alpha > 0$, *atunci şirurile* $(a_n + b_n)$ *şi* (αa_n) *sînt crescătoare (strict crescătoare).*

Aşadar mulţimea şirurilor crescătoare (respectiv strict crescătoare) este un *con* în spaţiul vectorial $\mathcal{S}$ al tuturor şirurilor.

2) *Dacă* (a_n) *este crescător (respectiv strict crescător), atunci şirul* $(-a_n)$ *este descrescător (respectiv strict descrescător).*

Aşadar, mulţimea şirurilor crescătoare nu este grup pentru adunare.

3) *Dacă* (a_n) *este un şir crescător (respectiv strict crescător) de numere* >0, *atunci şirul* $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ *este descrescător (respectiv strict descrescător).*

Dacă în proprietăţile de mai sus se înlocuiesc unul cu altul cuvintele „crescător" şi „descrescător", se obţin alte proprietăţi ale şirurilor monotone.

Exemple de şiruri monotone: 1) Orice şir constant

$$a, a, a, \ldots, a, \ldots$$

este şi crescător şi descrescător. Reciproc, dacă un şir este şir crescător şi descrescător atunci este constant.

2) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ este strict crescător.

3) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ este crescător.

4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ este strict descrescător.

5) Dacă $a>1$, şirul

$$1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$$

este strict crescător. Într-adevăr, deoarece $a > 1$ şi $n < n+1$ avem: $a^n < a^{n+1}$, oricare ar fi $n \in N$.

În particular, şirurile

$$1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots; 1, 10, 10^2, \ldots, 10^n, \ldots$$

sînt strict crescătoare.

6) Dacă $0<a<1$, şirul

$$1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$$

este strict descrescător; deoarece $0<a<1$ şi $n<n+1$ avem

$$a^n > a^{n+1} \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

În particular şirurile

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots; 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$$

sînt strict descrescătoare.

7) Şirul

$$1^k, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots (k \text{ natural})$$

este strict crescător. Într-adevăr, deoarece $n<n+1$, avem $n^k < (n+1)^k$ oricare ar fi $n \in N$.

Exemple de şiruri care nu sînt monotone. 1) $0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$

2) $0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots, 0, n, \ldots$

3) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$

5. Subşiruri

Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ un şir. Dacă

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_p < \ldots$$

este un şir *strict crescător* de numere *naturale*, şirul

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_p}, \ldots$$

se numeşte *subşir* al şirului iniţial.

Dacă $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3, \ldots$ $n_p = p, \ldots\ldots$ subșirul

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}, \ldots$$

coincide cu șirul inițial.

Exemplu. Fie șirul numerelor naturale $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Șirurile $2, 4, 6, \ldots$; $1, 3, 5, \ldots$; $1^1, 2^2, 3^3, \ldots n^n, \ldots$; $1^k, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots$; $2^k, 4^k, 6^k, \ldots$; $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots$; $1, 10, 10^2, \ldots, 10^n \ldots$ sînt subșiruri ale sale.

Observații. 1° Fie $n_1 < n_2 < \ldots n_p < \ldots$ un șir strict crescător de numere naturale. Deoarece $n_2 > n_1$, avem $n_2 > 1$, deci $n_2 \geqslant 2$.

Presupunînd că $n_p \geqslant p$, deoarece $n_{p+1} > n_p$ avem $n_{p+1} > p$, deci $n_{p+1} \geqslant p + 1$. Așadar, oricare ar fi p, avem:

$$n_p \geqslant p.$$

2° Un subșir $(a_{n_p})_{p \in N}$ al șirului $(a_n)_{n \in N}$ se obține prin *compunerea* șirului strict crescător de numere naturale $p \to n_p$ cu șirul $n \to a_n$:

$$p \to n_p \to a_{n_p}.$$

§ 2. Șiruri convergente

1. Un exemplu de șir convergent

Să considerăm șirul

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\ldots$$

în care $a_n = \frac{1}{n}$, $(n \in N)$. Ne dăm seama, foarte ușor, că termenii acestui șir *descresc necontenit, se apropie tot mai mult de zero.*

Vom încerca să cuprindem într-o formulare matematică precisă această constatare de ordin experimental.

Pentru a verifica matematic că termenii șirului precedent se apropie în adevăr de zero cînd rangul lor crește, vom proceda astfel: ne vom da un număr pozitiv ε (după voie, îl putem deci presupune oricît de mic voim) și vom verifica dacă există un rang ν începînd de la care termenii șirului să scadă toți sub ε. Pentru aceasta trebuie ca $n > \nu$ să implice

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Dar $n > \nu$ este echivalent cu $\frac{1}{n} < \frac{1}{\nu}$. Dacă deci avem:

$$\frac{1}{\nu} < \varepsilon,$$

adică:

$$\nu > \frac{1}{\varepsilon},$$

atunci cu atît mai mult vom avea $\frac{1}{n} < \varepsilon$, *pentru toţi termenii de rang mai mare decît* ν.

Inegalitatea precedentă poate fi verificată, de exemplu, dacă luăm pentru ν cel mai mic număr natural care depăşeşte pe $\frac{1}{\varepsilon}$.

După cum se vede, rangul ν depinde de ε, adică este o funcţie de ε. Îl vom scrie astfel: ν_ε.

Aşadar: *Pentru orice număr* $\varepsilon > 0$ *există un rang* ν_ε *astfel încît* $n > \nu_\varepsilon$ *să implice* $a_n < \varepsilon$.

Această propoziţie constituie constatarea, formulată în termeni matematici, a faptului intuit experimental la început, anume că termenii şirului considerat se apropie tot mai mult de numărul zero.

Dacă la fiecare termen al şirului considerat am adăuga numărul 1, am obţine un alt şir

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

cu $b_n = \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}$. Din raţionamentul făcut mai sus rezultă că: *Pentru orice număr* $\varepsilon > 0$ *există un rang* ν_ε *astfel încît* $n > \nu_\varepsilon$ *să implice*

$$0 < b_n - 1 < \varepsilon.$$

Această propoziţie constituie constatarea, matematic formulată, a faptului că termenii noului şir se apropie necontenit de numărul 1.

Propoziţiei precedente i se poate da un aspect geometric: Să considerăm vecinătatea $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ a punctului 1. Pentru $n > \nu_\varepsilon$, toţi termenii şirului (b_n) vor aparţine acestei vecinătăţi. În afară va rămîne numai un număr finit de termeni, anume termenii:

$$b_1, b_2, \ldots, b_{\nu_\varepsilon}.$$

Bineînţeles, numărul acestor termeni, care este totdeauna finit, depinde de ε.

Reciproc, să presupunem că orice vecinătate $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ a punctului 1 lasă în afară un număr finit (depinzînd de ε) de termeni. Dacă b_{ν_ε} este termenul de rang cel mai înalt lăsat afară, pentru $n > \nu_\varepsilon$ toţi termenii şirului se vor afla în intervalul $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

2. Definiţia limitei

Consideraţiile din exemplul precedent ne conduc la următoarea

Definiţie. Un număr *a* este limita unui şir (a_n) dacă orice vecinătate a lui *a* conţine toţi termenii şirului, cu excepţia unui număr finit de termeni.

Cu cît vecinătatea lui a este mai mică, cu atît se vor afla în afara sa mai mulți termeni, însă tot în număr finit.

În loc de a spune că *a este limita şirului* (a_n) se spune de asemenea că *şirul* (a_n) *are limita a*, sau că *şirul* (a_n) *este convergent (sau converge) către a*, sau încă, *şirul* (a_n) *tinde către a*. În scris:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

(Citit: limită de a_n cînd n tinde către infinit este egal cu a)
sau:

$$\lim_{n} a_n = a$$

(citit: limita de a_n este egală cu a)
sau încă:

$$a_n \to a, \qquad a_n \underset{n}{\to} a$$

(citit: a_n tinde către a).

Şirurile care au limită se numesc şiruri *convergente*.

Şirurile care nu sînt convergente vor fi numite *şiruri divergente*.

Aşadar, şirul (a_n) este divergent dacă nici un număr real nu este limita sa. Din definiția limitei unui şir, deducem, prin negare următoarea

Propoziție. Un şir (a_n) este divergent dacă şi numai dacă, oricare ar fi numărul a, există o vecinătate V a lui a, în afara căreia se află o infinitate de termeni ai şirului.

Exemple. 1) Şirul constant $a, a, a, \ldots, a, \ldots$ este convergent şi are limita a.

Într-adevăr, toți termenii şirului coincid în reprezentarea pe dreaptă în punctul a, deci orice vecinătate a lui a conține *toți* termenii şirului (fără excepție), adică a este limita şirului.

Aşadar, dacă $a_n = a$ pentru orice $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Scriem

$$\lim_{n\to\infty} a = a.$$

2) Din exemplul considerat mai sus deducem că şirul

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$ are limita 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{n} \to 0.$$

Exemple de şiruri divergente. 1) Şirul numerelor naturale $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, este divergent. Fie a un număr oarecare şi vecinătatea sa $V = \left(a - \frac{1}{4},\ a + \frac{1}{4}\right)$ de lungime $\frac{1}{2}$. Deoarece distanța dintre două numere naturale este cel puțin egală cu 1, în această vecinătate se află cel mult un număr natural, deci în afara ei se află o infinitate de numere naturale. Deducem că a nu este limita acestui şir. Cum a a fost ales arbitrar rezultă că nici un număr nu este limită a acestui şir, deci şirul nu este convergent.

2) Se demonstrează ca mai sus că şirurile

$$-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$$

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$$

sînt divergente.

3) Şirul 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1, ...este divergent.

Să arătăm întîi că 1 nu este limită a şirului. În adevăr, în afara vecinătăţii $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ a lui 1 se află o infinitate de termeni ai şirului, anume toţi termenii egali cu 0 (fig. 40). Deci 1 nu este limită a şirului.

Se arată la fel că 0 nu este limită a şirului, alegînd vecinătatea $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a lui 0.

Dacă a este un număr oarecare diferit de 0 şi de 1, putem alege o vecinătate V a sa care nu conţine nici pe 0 nici pe 1, şi în afara sa se află *toţi* termenii şirului. Deci nici a nu este limita şirului. Rezultă că şirul nu are nici o limită, adică este divergent.

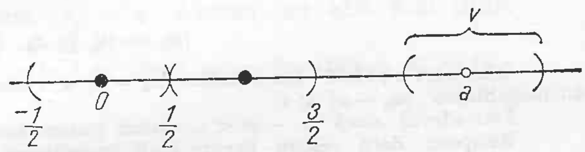


Fig. 40

O b s e r v a ţ i e. Din faptul că într-o vecinătate a lui a se află o infinitate de termeni ai şirului, nu rezultă că în afara acestei vecinătăţi se află neapărat un număr finit de termeni. De exemplu: atît în afara cît şi în interiorul vecinătăţii $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a lui 0 se află cîte o infinitate de termeni ai şirului 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...

Vom da acum o formulare echivalentă a definiţiei limitei unui şir. Reamintim că intervalele de forma $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$ sînt vecinătăţile simetrice ale lui a, şi că orice vecinătate V a lui a conţine o vecinătate simetrică a lui a (cap. II, § 4). A spune că un termen a_n se află într-o vecinătate $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ a lui a, adică $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, înseamnă $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$, adică $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, adică $|a_n - a| < \varepsilon$, iar aceasta înseamnă că distanţa dintre a_n şi a este $< \varepsilon$.

Formularea echivalentă a definiţiei limitei unui şir este dată de următoarea

T e o r e m ă. Un număr a este limita unui şir (a_n) dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel, încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$, să avem

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Să presupunem întîi că $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. După cum am remarcat mai sus, termenii a_n din şir care nu verifică inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$ se află în afara vecinătăţii $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ deci sînt în număr finit; putem găsi deci un termen a_N după care, în şir, nu se mai află nici unul dintre aceştia. Dacă notăm $N(\varepsilon) = N + 1$, atunci oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$

avem $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, adică $|a_n - a| < \varepsilon$ şi prima implicaţie a teoremei este demonstrată.

Reciproc, să presupunem verificată condiţia din enunţul teoremei. Fie V o vecinătate a lui a. După cum am remarcat mai sus, vecinătatea V *conţine* o vecinătate simetrică a lui a, de forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$. Conform presupunerii, pentru acest ε există $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $|a_n - a| < \varepsilon$, adică $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V$. În afara vecinătăţii V a lui a se află cel mult primii $N(\varepsilon) - 1$ termeni, în număr finit. Urmează că a este limita şirului (a_n) şi cu aceasta şi a doua implicaţie a teoremei este demonstrată.

Din această teoremă, deducem, prin negaţie, următoarea

Propoziţie. Şirul (a_n) este divergent dacă şi numai dacă, pentru orice număr $a \in R$, există un număr $\varepsilon_0 > 0$ (care depinde de a) cu proprietatea că oricare ar fi N, există un număr $n \geqslant N$ (n depinde de N şi de a) astfel încît să avem

$$|a_n - a| \geqslant \varepsilon_0.$$

Observaţii. 1° Inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$ din enunţul teoremei poate fi înlocuită cu inegalitatea $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$.

Într-adevăr, dacă $|a_n - a| < \varepsilon$, atunci putem scrie de asemenea $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$.

Reciproc, dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$, inegalitatea $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$ este satisfăcută pentru $n \geqslant N'(\varepsilon)$, atunci avem $|a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n \geqslant N'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ şi deci $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon) = N'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

2° Inegalitatea $n \geqslant N(\varepsilon)$ din enunţul teoremei poate fi înlocuită cu inegalitatea strictă $n > N(\varepsilon)$.

Într-adevăr, dacă $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$, atunci avem $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$.

Reciproc, dacă $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n > N'(\varepsilon)$, atunci, notînd $N(\varepsilon) = N'(\varepsilon) + 1$ avem $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$.

3° Dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $N'(\varepsilon)$ astfel ca

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geqslant N'(\varepsilon),$$

atunci, notînd $N(\varepsilon) = N'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, avem

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

În general, notînd $N(\varepsilon) = N'(\alpha\varepsilon)$, $\alpha > 0$, avem

$$|a_n - a| < \alpha\varepsilon \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

4° Dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to b$, dacă $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$, atunci pentru fiecare $\varepsilon > 0$ putem găsi acelaşi număr $N(\varepsilon)$ pentru ambele şiruri astfel ca

$$|a_n - a| < \alpha\varepsilon \text{ şi } |b_n - b| < \beta\varepsilon \text{ oricare ar fi } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Fie într-adevăr $\varepsilon > 0$; deoarece $a_n \to a$, pentru acest ε există un număr $N'(\varepsilon)$ astfel ca

$$|a_n - a| < \alpha\varepsilon \text{ pentru orice } n \geqslant N'(\varepsilon).$$

Deoarece $b_n \to b$, pentru acelaşi număr ε există un număr $N''(\varepsilon)$ astfel ca

$$|b_n - b| < \beta\varepsilon.$$

Să luăm $N(\varepsilon) = \max N'(\varepsilon), N''(\varepsilon)$; dacă $n \geqslant N(\varepsilon)$, atunci $n \geqslant N'(\varepsilon)$ şi $n \geqslant N''(\varepsilon)$, deci

$$|a_n - a| < \alpha\varepsilon \text{ şi } |b_n - b| < \beta\varepsilon \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

5° Condiţia ca ε să fie *strict pozitiv* este esenţială.

În adevăr, singurele şiruri care îndeplinesc condiţia din enunţul teoremei şi pentru $\varepsilon = 0$, sînt şirurile care verifică egalitatea $a_n = a$, începînd de la un anumit rang $N(0)$, deci care diferă de un şir constant numai printr-un număr finit de termeni.

6° Vom folosi definiţia cu vecinătăţi sau definiţia cu ε a limitei unui şir, după cum va fi mai convenabil în raţionamente.

Criteriu de convergenţă. Fie (a_n) şi (α_n) două şiruri şi $a \in R$. Dacă $|a_n - a| \leqslant |\alpha_n|$ pentru orice n şi dacă $\alpha_n \to 0$, atunci $a_n \to a$.

În adevăr, fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\alpha_n \to 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $|\alpha_n| < \varepsilon$. Atunci, cu atît mai mult $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$, deci $a_n \to a$.

În particular, dacă $|a_n| \leqslant |\alpha_n|$ şi dacă $\alpha_n \to 0$, atunci $a_n \to 0$.

3. Şiruri convergente către 0

Din teorema din numărul precedent, deducem, în particular, luînd $a = 0$,

Propoziţia 1. $a_n \to 0$ dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|a_n| < \varepsilon, \textbf{ oricare ar fi } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Prin negaţie, deducem apoi

Propoziţia 2. Pentru ca (a_n) să nu aibă limita 0 este necesar şi suficient să existe un număr $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că pentru orice număr N există $n > N$ cu $|a_n| \geqslant \varepsilon_0$.

Însemnătatea specială a şirurilor convergente către 0 rezultă din

Propoziţia 3. Avem $a_n \to a$, dacă şi numai dacă $a_n - a \to 0$.

Într-adevăr, condiţia din enunţul teoremei de la numărul precedent: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încît

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon)$$

înseamnă, în acelaşi timp, că $a_n \to a$ şi că $a_n - a \to 0$.

C o r o l a r. Avem $a_n \to a$ dacă şi numai dacă şirul (a_n) se poate scrie sub forma

$$a_n = a + \alpha_n$$

cu $\alpha_n \to 0$

Într-adevăr, notînd $\alpha_n = a_n - a$, avem $a_n = a + \alpha_n$ şi din propoziţia precedentă deducem că $a_n \to a$ dacă şi numai dacă $\alpha_n \to 0$.

Exemple de şiruri convergente către 0 se obţin cu ajutorul propoziţiei următoare

P r o p o z i ţ i a 4. Dacă (a_n) este un şir crescător şi nemărginit de numere > 0, atunci $\frac{1}{a_n} \to 0$.

Fie $\varepsilon > 0$. Să notăm $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Deoarece (a_n) este nemărginit există un termen $a_N > A$. Deoarece (a_n) este crescător, pentru orice $n \geqslant N$ avem $a_n \geqslant a_N$, deci $a_n > A$, de unde $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{A} < \varepsilon$. Notînd $N(\varepsilon) = N$, avem deci

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon),$$

deci $\frac{1}{a_n} \to 0$.

P r o p o z i ţ i a 5. Dacă $a_n \to 0$ şi dacă $a_n \neq 0$ pentru orice n, atunci şirul $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ este nemărginit.

Într-adevăr fie $M > 0$ un număr oarecare. Să notăm $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$. Deoarece $a_n \to 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $|a_n| < \varepsilon$, deci $\frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon}$, adică $\left|\frac{1}{a_n}\right| > M$, deci şirul $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ este nemărginit.

Transcriem şi criteriul de convergenţă pentru şiruri convergente către 0:

P r o p o z i ţ i a 6. Dacă $|a_n| \leqslant |\alpha_n|$ şi $\alpha_n \to 0$ atunci $a_n \to 0$.

Exemple de şiruri convergente către 0. 1) Dacă $a > 1$, şirul

$1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \ldots, \frac{1}{a^n}, \ldots$ are limita 0:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$$

deoarece şirul $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ este crescător şi nemărginit.

În particular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

2) Dacă $0 < a < 1$, şirul $1, a, a^2, \ldots, a^n$ are limita 0:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0, \quad (0 < a < 1)$$

deoarece, notînd $b = \frac{1}{a}$, avem $b > 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = 0$ şi deoarece $a^n = \frac{1}{b^n}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

3) Dacă $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots . n_p < \ldots$ este un şir de numere naturale, atunci şirul

$$\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}, \ldots, \frac{1}{n_p}, \ldots$$

are limita 0:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{n_p} = 0 \text{ sau } \frac{1}{n_p} \xrightarrow[p]{} 0.$$

Într-adevăr, un şir de numere naturale *diferite* este nemărginit, şi prin ipoteză şirul $(n_p)_{p\in N}$ este crescător.

În particular, $\lim\limits_{n} \frac{1}{2n} = 0$; $\lim\limits_{n} \frac{1}{2n+1} = 0$; $\lim\limits_{n} \frac{1}{n^k} = 0$.

4. Proprietăţile şirurilor convergente

Propoziţia 1. Un şir convergent are o singură limită (limita unui şir convergent este unică).

Fie (a_n) un şir convergent către un număr a. Dacă $a' \neq a$, există o vecinătate V a lui a şi o vecinătate V' a lui a' fără puncte comune (fig. 41). Deoarece $a_n \to a$ şi V este o vecinătate a lui a, în V se află o infinitate de termeni din şir; aceşti termeni se află în afara lui V'. Aşadar, am găsit o vecinătate V', a lui a', în afara căreia se află o infinitate de termeni ai şirului (a_n), deci a' nu este limita acestui şir. Urmează că a este singura limită a şirului (a_n).

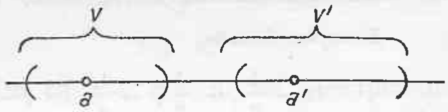


Fig. 41

Propoziţia 2. Dacă (a_n) este un şir convergent, atunci şirul $(|a_n|)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$$

(limita modulului este egală cu modulul limitei).

Să notăm $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Fie $\varepsilon > 0$. Există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Dar

$$\big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a|, \text{ pentru orice } n,$$

deci

$$\big||a_n| - |a|\big| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon)$$

deci $|a_n| \to |a|$:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$$

O b s e r v a ţ i e. Propoziţia reciprocă nu este adevărată: dacă şirul $(|a_n|)$ este convergent, nu rezultă că şirul (a_n) este convergent.

De exemplu, şirul

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

nu este convergent, iar şirul modulelor

$$1, 1, 1, 1, \ldots$$

este convergent, fiind constant.

Pentru şirurile convergente către zero este adevărată şi propoziţia reciprocă:

P r o p o z i ţ i a 3. Dacă $|a_n| \to 0$, atunci $a_n \to 0$ (şi reciproc).

În adevăr, $|a_n| \to 0$ înseamnă că: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|a_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon),$$

iar aceasta înseamnă că $a_n \to 0$.

Exemplu. Şirurile

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots \text{ şi } 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

au limita 0, deoarece şirul modulelor

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

are limita 0.

P r o p o z i ţ i a 4. Orice şir convergent este mărginit.

Fie (a_n) un şir convergent şi a limita sa. Luînd $M = |a| + 1$ avem $-M < a < M$, deci intervalul $(-M, M)$ este o vecinătate a lui a. Deoarece în afara acestei vecinătăţi se află un număr finit de termeni, există un număr N astfel încît pentru $n \geqslant N$ să avem $a_n \in (-M, M)$, adică $-M < a_n < M$, deci

$$|a_n| < M, \text{ pentru orice } n \geqslant N.$$

Urmează că şirul (a_n) este mărginit.

Din această propoziţie deducem următorul

Corolar. Orice şir nemărginit este divergent.

Propoziţia 5. Prin schimbarea ordinii termenilor unui şir convergent se obţine un şir convergent către aceeaşi limită.

În adevăr, poziţia pe dreaptă a termenilor nu depinde de rangul lor, ci numai de valoarea lor numerică.

Dacă (a_n) este un şir convergent către a şi (b_n) este un şir obţinut din (a_n) prin schimbarea ordinii termenilor, atunci în afara fiecărei vecinătăţi a lui a se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi *acelaşi* număr finit de termeni ai şirului (b_n), deci şi şirul (b_n) are tot limita a.

Propoziţia 6. Dacă la un şir convergent se adaugă sau se scoate un număr finit de termeni, şirul obţinut este convergent şi are aceeaşi limită.

În adevăr, dacă $a_n \to a$, atunci în afara fiecărei vecinătăţi a lui a se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n), iar după adăugarea sau scoaterea unui număr finit de termeni, în afara fiecărei vecinătăţi a lui a se află tot un număr finit de termeni ai şirului obţinut, deci şi acesta are limita a.

Propoziţia 7. Dacă (a_n) este un şir convergent şi dacă există n_0 astfel încît să avem

$$\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta, \text{ pentru } n \geqslant n_0$$

atunci

$$\alpha \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \beta.$$

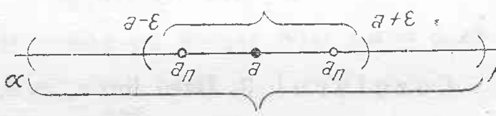


Fig. 42

Să notăm $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi să arătăm că $\alpha \leqslant a \leqslant \beta$. Să presupunem prin absurd că $a < \alpha$. Luînd $\alpha' < a$, intervalul $V = (\alpha', \alpha)$ este o vecinătate a lui a. Deoarece $a_n \to a$, avem $a_n \in (\alpha', \alpha)$, adică $a_n < \alpha$ pentru toţi termenii, cu excepţia unui număr finit dintre ei, ceea ce contrazice ipoteza $a_n \geqslant \alpha$ pentru $n \geqslant n_0$. Aşadar $\alpha \leqslant a$, şi la fel se arată că $a \leqslant \beta$.

Corolar. Dacă (a_n) este un şir convergent de termeni $\geqslant 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$.

Se ia $\alpha = 0$ în propoziţia 7.

O b s e r v a ţ i e. Dacă în propoziţiile precedente termenii şirului (a_n) verifică inegalităţi stricte, nu rezultă că limita verifică inegalităţi stricte.

De exemplu, pentru şirul $a_n = \frac{1}{n}$ avem $a_n > 0$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Propoziţia următoare exprimă o proprietate duală celei din propoziţia 7, însă pentru inegalităţi stricte.

P r o p o z i ţ i a 8. Dacă (a_n) este un şir convergent şi dacă $\alpha < \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \beta$, atunci există un număr n_0 astfel încît să avem

$$\alpha < a_n < \beta, \text{ pentru } n \geqslant n_0.$$

Într-adevăr, notînd $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, intervalul $V = (\alpha, \beta)$ este o vecinătate a lui a. Deoarece $a_n \to a$, există un număr n_0 astfel încît pentru $n \geqslant n_0$ să avem $a_n \in V$, adică $\alpha < a_n < \beta$.

C o r o l a r u l 1. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, atunci există un număr n_0 astfel încît să avem

$$a_n > 0, \text{ pentru } n \geqslant n_0.$$

Se ia $\alpha = 0$.

C o r o l a r u l 2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 0$, atunci există un număr n_0, astfel încît să avem

$$a_n < 0, \text{ pentru } n \geqslant n_0.$$

Se ia $\beta = 0$.

C o r o l a r u l 3. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci există un număr n_0 astfel încît să avem

$$a_n \neq 0, \text{ pentru } n \geqslant n_0.$$

§ 3. Operaţii cu şiruri convergente

Vom arăta că, efectuînd asupra şirurilor convergente operaţiile algebrice obişnuite (adunarea, scăderea, înmulţirea cu scalari, înmulţirea, şi, cu anumite restricţii, împărţirea) se obţin tot şiruri convergente.

1. Operaţii cu şiruri convergente către zero

Propoziţia 1. Dacă $a_n \to 0$ şi $b_n \to 0$, atunci

$$a_n + b_n \to 0$$

$$a_n b_n \to 0$$

$$\alpha a_n \to 0, \text{ pentru orice număr } \alpha \in R.$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $a_n \to 0$ şi $b_n \to 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ şi } |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Dar

$$|a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n|,$$

deci

$$|a_n + b_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon),$$

adică $a_n + b_n \to 0$.

Relaţiile $a_n b_n \to 0$ şi $\alpha a_n \to 0$ se demonstrează în mod asemănător, dar vor rezulta şi din următoarea propoziţie mai generală.

Propoziţia 2. Dacă $a_n \to 0$ şi dacă (b_n) este un şir mărginit, atunci $a_n b_n \to 0$.

Deoarece şirul (b_n) este mărginit, există un număr $M > 0$ astfel încît să avem $|b_n| \leqslant M$, pentru toţi termenii b_n, deci

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leqslant M|a_n|, \text{ pentru orice } n.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece $a_n \to 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Urmează atunci că

$$|a_n b_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon),$$

adică $a_n b_n \to 0$.

Corolarul 1. Dacă $a_n \to 0$ şi (b_n) este un şir convergent, atunci $a_n b_n \to 0$.

Într-adevăr, şirul convergent (b_n) este mărginit.

Din acest corolar rezultă în particular că dacă $a_n \to 0$ şi $b_n \to 0$, atunci $a_n b_n \to 0$ şi că dacă $a_n \to 0$, atunci $\alpha a_n \to 0$, deoarece şirul (αa_n)

poate fi considerat ca produsul dintre şirul (a_n) şi şirul constant (α) care este convergent. În acest fel, şi propoziţia 1 a fost complet demonstrată.

Corolarul 2. Dacă $a_n \to 0$, atunci $-a_n \to 0$.

Se ia $\alpha = -1$ în propoziţia 1.

Corolarul 3. Dacă $a_n \to 0$ şi $b_n \to 0$ atunci $a_n - b_n \to 0$.

Într-adevăr, $-b_n \to 0$ şi $a_n - b_n = a_n + (-b_n) \to 0$.

Prin inducţie completă deducem că suma şi produsul unui număr k de şiruri convergente către zero sînt de asemenea şiruri convergente către zero.

Observaţie. Mulţimea şirurilor convergente către 0 este o *algebră*. Această algebră se notează cu c_0. Din poziţia 2 rezultă că c_0 este un *ideal** în algebra m a şirurilor mărginite.

Mai departe se va arăta că mulţimea c a şirurilor convergente este de asemenea o algebră. Din corolarul 1 rezultă că c_0 este un ideal şi în algebra c.

2. Operaţii cu şiruri convergente

* **Propoziţia 1. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente, iar $\alpha \in R$, atunci şirurile $(a_n + b_n)$, (αa_n) şi $(a_n b_n)$ sînt convergente şi**

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

(limita sumei este egală cu suma limitelor) :

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

(limita produsului este egală cu produsul limitelor).

Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Şirurile (a_n) şi (b_n) se pot scrie sub forma

$$a_n = a + \alpha_n \text{ şi } b_n = b + \beta_n,$$

unde $\alpha_n \to 0$ şi $\beta_n \to 0$. Atunci, notînd $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$, avem

$$a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) = (a + b) + \gamma_n,$$

iar $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n \to 0$, deci $a_n + b_n \to a + b$:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

* Fie E o algebră comutativă. O submulţime $I \subset E$ se numeşte *ideal* al algebrei E dacă este o algebră şi dacă pentru orice $x \in I$ şi orice $y \in E$ avem $xy \in I$.

Avem apoi

$$\alpha a_n = \alpha a + \alpha \alpha_n$$

şi $\alpha\alpha_n \to 0$ deci $\alpha a_n \to \alpha a$:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha a = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n.$$

În sfîrşit, notînd $\delta_n = \alpha_n\beta_n + a\beta_n + b\alpha_n$, avem

$$a_nb_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n\beta_n + a\beta_n + b\alpha_n = ab + \delta_n.$$

Dar $\alpha_n\beta_n \to 0$, $a\beta_n \to 0$ şi $b\alpha_n \to 0$, deci $\delta_n = \alpha_n\beta_n + a\beta_n + b\alpha_n \to 0$ şi deci $a_nb_n \to ab$:

$$\lim_{n\to\infty} (a_nb_n) = ab = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Prin inducţie completă se demonstrează că suma şi produsul unei familii finite de şiruri convergente sînt de asemenea şiruri convergente şi limita sumei este egală cu suma limitelor, iar limita produsului este egală cu produsul limitelor.

În particular, luînd k şiruri convergente egale cu (a_n), deducem

$$\lim_{n\to\infty} (a_n^k) = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k.$$

C o r o l a r u l 1. Dacă şirul (a_n) este convergent, atunci şirul $(-a_n)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Se ia $\alpha = -1$ în propoziţia 1.

C o r o l a r u l 2. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente, atunci şirul $(a_n - b_n)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

(limita diferenţei este egală cu diferenţa limitelor).

Într-adevăr, presupunînd că $a_n \to a$ şi $b_n \to b$, avem $-b_n \to -b$ şi $a_n - b_n = a_n + (-b_n) \to a + (-b) = a - b$.

Exemple: 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{an + b}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(a + b \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a + \lim_{n\to\infty} b \frac{1}{n} =$

$$= a + b \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = a + b0 = a.$$

2) Dacă $0 < q < 1$, atunci

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} q^n.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

O b s e r v a ț i i. 1° Dacă șirurile $(a_n + b_n)$ și $(a_n b_n)$ sînt convergente, nu rezultă că șirurile (a_n) și (b_n) sînt convergente.
De exemplu, șirurile

$$1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$$

$$0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$$

nu sînt convergente, deși suma lor

$$1, 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, \ldots$$

și produsul lor

$$0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots$$

sînt convergente, fiind constante.

2° Mulțimea șirurilor convergente este o *algebră* care conține algebra c_0 a șirurilor convergente către 0. Algebra șirurilor convergente se notează cu c.

Funcția care face să corespundă fiecărui șir convergent (a_n) din c limita sa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ se numește *operația de trecere la limită**.

Egalitatea

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

arată că operația de trecere la limită este *aditivă*.

Egalitatea

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n$$

arată că operația de trecere la limită este *omogenă*. Așadar, operația de trecere la limită este *liniară*.

---

*Fie E și F două spații vectoriale (eventual algebre). O funcție $T: E \to F$ – pentru care domeniul de definiție E și mulțimea F în care ia valori sînt *spații vectoriale* – se numește *operație*.

O operație $T: E \to E$ – pentru care mulțimea de definiție și mulțimea în care ia valori, coincid – se numește, de obicei, *operator*.

O operație $T: E \to R$ – pentru care spațiul vectorial în care T ia valori, este *dreapta numerică* – se numește *funcțională*.

Fie $T \cdot E \to F$ o operație. Spunem că T este o operație *aditivă* dacă

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \text{ oricare ar fi } x, y \in E.$$

Spunem că T este o operație *omogenă* dacă

$$T(\alpha x) = \alpha T(x), \text{ oricare ar fi } x \in E \text{ și } \alpha \in R.$$

O operație aditivă și omogenă se numește operație *liniară*.

Dacă E și F sînt algebre, spunem că operația T este *multiplicativă*, dacă

$$T(xy) = T(x)\,T(y), \text{ oricare ar fi } x, y \in E.$$

Operația de trecere la limită $T(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, definită pe spațiul vectorial $E = c$ al șirurilor convergente, cu valori reale, este de fapt o funcțională. Ea este liniară și multiplicativă.

Egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

arată că operaţia de trecere la limită este *multiplicativă*.

3. Cîtul a două şiruri convergente

Reamintim că dacă un şir (α_n) are limita $\neq 0$, atunci avem $\alpha_n \neq 0$, pentru toţi termenii, cu excepţia, eventual, a unui număr finit dintre ei, pe care îi putem înlătura, fără a modifica prin aceasta limita.

De aceea în continuare vom presupune că dacă un şir are limita $\neq 0$, atunci toţi termenii săi sînt $\neq 0$, chiar dacă acest fapt nu va fi specificat.

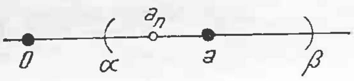


Fig. 43

Vom demonstra mai întîi următoarea

Lemă. Dacă (b_n) este un şir convergent, cu limita $\neq 0$, atunci şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este mărginit.

Să notăm $b = \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Atunci putem presupune că toţi termenii b_n sînt $\neq 0$, deci şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este definit.

Să luăm, de exemplu, $\alpha = \frac{|b|}{2} > 0$. Avem $\lim_{n\to\infty} |b_n| = |b_n| > \alpha$. Urmează că există un rang N începînd de la care avem inegalitatea $|b_n| > \alpha$. Atunci

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{\alpha}, \text{ pentru } n \geqslant N.$$

Luînd $M = \max\left(\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}, \ldots, \frac{1}{|b_N|}, \frac{1}{\alpha}\right)$,

avem

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \leqslant M, \text{ oricare ar fi } n,$$

deci şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este mărginit.

Observaţie. Dacă $b_n \to 0$, (şi $b_n \neq 0$ pentru fiecare n), atunci şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este nemărginit.

Propoziţia. Dacă şirul (b_n) este convergent şi dacă $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, atunci şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Într-adevăr, notînd $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, avem

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b} = \frac{1}{b_n}\frac{1}{b}(b - b_n).$$

Dar $b - b_n \to 0$, deci $\frac{1}{b}(b - b_n) \to 0$. Din lema precedentă rezultă că şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este mărginit, deci $\frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{b}(b - b_n) \to 0$.

Aşadar, $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \to 0$. adică $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Observaţie. Dacă $b_n \to 0$, şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ nu este convergent, deoarece este nemărginit

Propoziţia. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, atunci şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

(limita cîtului este egală cu cîtul limitelor).

Într-adevăr, putem scrie şirul cît ca un produs de şiruri

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

iar şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este convergent. Urmează atunci că şirul produs $\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$ este convergent, deci şirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este convergent.

Notînd $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Corolar. Dacă $a_n \to a \neq 0$ şi $k \in N$, atunci $a_n^{-k} \to a^{-k}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-k} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{-k}$$

Într-adevăr $a_n^k \to a^k \neq 0$, deci $\frac{1}{a_n^k} \to \frac{1}{a^k}$, adică $a_n^{-k} \to a^{-k}$.

Din acest corolar şi din observaţia care urmează propoziţia 1 deducem că dacă $a_n \to a \neq 0$, avem

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k, \text{ oricare ar fi } k \text{ întreg,}$$

iar pentru k *natural*, egalitatea este adevărată chiar dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Mai departe se va arăta că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, egalitatea rămîne adevărată pentru orice exponent real.

Observaţii. 1° Propoziţia reciprocă nu este adevărată: dacă şirul cît este convergent, nu rezultă că cele două şiruri sînt convergente. De exemplu, şirurile egale

$$1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, \ldots$$

$$1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, \ldots$$

nu sînt convergente, în timp ce şirul cît

$$1, 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, \ldots$$

este convergent, fiind constant.

2° Dacă $a_n \to a \neq 0$ şi $b_n \to 0$, şirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este nemărginit, deci nu este convergent.

Dacă $a_n \to 0$ şi $b_n \to 0$, despre şirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu se mai poate afirma nimic. Uneori este convergent, alteori este divergent. Mai mult, oricare ar fi $a \in R$, se poate găsi un şir $a_n \to 0$ şi un şir $b_n \to 0$, astfel ca $\frac{a_n}{b_n} \to a$.

Exemple:

1) $(a_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \qquad a_n \to 0$

$(b_n): a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}, \ldots, \frac{a}{n}, \ldots \qquad b_n \to 0$

$\left(\frac{b_n}{a_n}\right): a, a, a, \ldots, a, \ldots \qquad \frac{b_n}{a_n} \to a.$

2) $(a_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \qquad a_n \to 0$

$(b_n): 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots \qquad b_n \to 0$

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right): 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ crescător şi nemărginit

3) $(a_n): -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots$ $\quad a_n \to 0$

$(b\ ): 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$ $\quad b_n \to 0$

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right): -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ descrescător şi nemărginit.

4) $(a_n): 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots, \frac{1}{2n-1}, 0, \ldots$ $\quad a_n \to 0$

$(b_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}, \ldots$ $\quad b_n \to 0$

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right): 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$ nu are limită.

4. Trecerea la limită în inegalităţi

Propoziţia 1. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente şi dacă $a_n \leq b_n$ pentru orice $n \in N$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

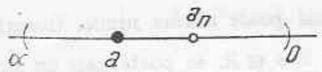


Fig. 44

Într-adevăr, şirul $(b_n - a_n)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$$

Pe de altă parte, $b_n - a_n \geq 0$ pentru orice $n \in N$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) \geq 0$.

Rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0,$$

adică:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Observaţie. Dacă $a_n < b_n$ pentru orice $n \in N$ nu putem deduce că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, ci numai că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Propoziţia următoare este şi un criteriu de convergenţă.

Propoziţia 2. Dacă $a_n \leq x_n \leq b_n$ pentru orice $n \in N$ şi dacă şirurile (a_n) şi (b_n) sînt convergente şi au aceeaşi limită, atunci şirul (x_n) este convergent şi are aceeaşi limită ca şi celelalte două şiruri.

Din inegalităţile $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ deducem $0 \leqslant x_n - a_n \leqslant b_n - a_n$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, pe baza criteriului de convergenţă rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a_n) = 0$.

Atunci

$$x_n = (x_n - a_n) + a_n,$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Observaţie. Propoziţiile de mai sus rămîn adevărate chiar dacă inegalităţile sînt verificate doar începînd de la un anumit rang. Într-adevăr, înlăturînd termenii în număr finit care nu verifică inegalităţile, obţinem noi şiruri cu aceleaşi limite, ai căror termeni verifică, toţi, inegalităţile respective.

§ 4. Şiruri fundamentale (Cauchy)

În definiţia limitei unui şir, această limită a intervenit în mod explicit. Pentru a putea verifica pe baza acestei definiţii că un şir este convergent, trebuie să avem o indicaţie asupra limitei înseşi. Pentru un număr restrîns de şiruri, ca $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ etc., intuitiv, ne dăm seama uşor că limita lor este 0. Folosind proprietăţile şirurilor, criteriul de convergenţă şi operaţiile cu şirurile convergente, din convergenţa şirurilor cunoscute putem deduce convergenţa altor şiruri.

Dacă ni se dă un şir (a_n) căruia nu-i putem aplica unul din aceste procedee, în general este foarte greu, uneori chiar imposibil, să precizăm dacă şirul este convergent. Chiar dacă ştim că este convergent, în general nu-i putem determina limita, dacă nu avem vreo indicaţie asupra ei, pentru că nu putem încerca toate numerele reale dacă verifică sau nu definiţia limitei.

Aşadar, definiţia limitei este de un folos practic atunci cînd după puţine încercări reuşim să găsim limita şirului. Importanţa teoretică a acestei definiţii este însă foarte mare, ea stă la baza analizei matematice.

1. Definiţia şirului fundamental

Cauchy a reuşit să dea o definiţie echivalentă a unui şir convergent, în care nu mai intervine limita şirului, ci numai termenii şirului.

Definiţie. Un şir (a_n) se numeşte şir fundamentual sau şir Cauchy, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $m \geqslant N(\varepsilon)$ şi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

În cele ce urmează vom arăta că noţiunile de şir fundamental şi de şir convergent sînt echivalente.

Observaţii. 1° Ca şi în definiţia limitei unui şir, inegalităţile $n \geqslant N(\varepsilon)$ pot fi înlocuite cu $n > N(\varepsilon)$; inegalităţile $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pot fi înlocuite cu $|a_m - a_n| \leqslant \varepsilon$, sau cu $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ sau cu $|a_m - a_n| < \alpha\varepsilon$, unde $\alpha > 0$.

2° Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri fundamentale, $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$, atunci pentru fiecare $\varepsilon > 0$ putem găsi acelaşi $N(\varepsilon)$ astfel ca

$$|a_m - a_n| < \alpha\varepsilon \text{ şi } |b_m - b_n| < \beta\varepsilon, \text{ oricare ar fi } m, n \geqslant N(\varepsilon).$$

Definiţia unui şir fundamental se poate enunţa în formele echivalente date de următoarele două propoziţii:

Propoziţia 1. Un şir (a_n) este fundamental dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \in N$ să avem

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Într-adevăr, dacă în definiţia de mai sus, considerăm $m > n$, avem $m = n + p$ cu $p \geqslant 1$ şi obţinem condiţia din enunţul propoziţiei. Reciproc, din condiţia enunţată în propoziţie se obţine definiţia şirului fundamental punînd $m = n + p$, deoarece dacă $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$, avem de asemenea $m > N(\varepsilon)$ (vezi obs. 1°).

Propoziţia 2. Un şir (a_n) este fundamental dacă şi numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N$ să avem

$$|a_N - a_n| < \varepsilon.$$

Din definiţia şirului fundamental rezultă condiţia din propoziţia 2, luînd $m = N = N(\varepsilon)$.

Reciproc, să presupunem verificată condiţia din enunţul propoziţiei. Fie $\varepsilon > 0$; există un număr N astfel ca $|a_N - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ oricare ar fi $n \geqslant N$.

Dacă $n, m \geqslant N$ avem deci

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_N + a_N - a_n| \leqslant |a_m - a_N| + |a_N - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Observaţii. 1° Formularea dată în propoziţia 2 se poate folosi mai uşor în raţionamentele prin reducere la absurd.

2° A spune că un şir (a_n) este fundamental revine la a afirma că diferenţa a doi termeni poate fi făcută oricît de mică, dacă rangul celor doi termeni este suficient de mare. Mai precis, dincolo de un anumit rang *care depinde de* ε, diferenţa a doi termeni este mai mică decît ε, oricît de îndepărtaţi ar fi cei doi termeni unul de altul.

2. Subşiruri convergente. Lema lui Cesàro

Propoziţia 1. Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are aceeaşi limită.

Într-adevăr, dacă $a_n \to a$, în afara oricărei vecinătăţi a lui a se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi deci, cu atît mai mult, un număr finit de termeni ai oricărui subşir al său; deci orice subşir al şirului (a_n) are limita a.

În particular, şirul obţinut dintr-un şir convergent prin suprimarea unui număr finit de termeni este convergent şi tinde către aceeaşi limită ca şirul iniţial.

Exemple. 1) Deoarece şirul $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ are limita 0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

următoarele subşiruri ale sale

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots; \qquad 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots$$

$$1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{3^k} \ldots, \frac{1}{n^k}, \ldots k \in N; \qquad 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots, \frac{1}{n^n}, \ldots$$

au de asemenea limita 0:

$$\lim_n \frac{1}{2n} = 0; \ \lim_n \frac{1}{2n-1} = 0; \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0; \ \lim_n \frac{1}{n^n} = 0.$$

2) Deoarece pentru $0 < a < 1$, şirul $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ are limita 0,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \qquad (0 < a < 1)$$

următoarele subşiruri ale sale

$$1, a^2, a^4, \ldots, a^{2n}, \ldots; \qquad a, a^3, a^5, \ldots, a^{2n-1}, \ldots$$

$$1, a^4, a^9, \ldots, a^{n^2}, \ldots; \qquad a^5, a^{10}, a^{15}, \ldots, a^{5n}, \ldots$$

au de asemenea limita 0.

Observaţie. Propoziţia reciprocă este de asemenea adevărată: dacă *orice* subşir al şirului (a_n) este convergent, atunci şirul (a_n) este de asemenea convergent, deoarece (a_n) însuşi este unul din subşiruri.

Dacă însă numai *unele* subşiruri sînt convergente, nu rezultă că şirul este convergent de exemplu, şirul 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... are subşiruri convergente cum sînt 0, 0, 0, ...; 1, 1, 1, ...; dar şirul iniţial nu este convergent.

De asemenea, şirul 0, 1, 0, 2, 0, 3, ..., 0, n, ... este divergent şi conţine subşirul convergent 0, 0, 0, ...

O condiţie suficientă pentru ca un şir să conţină subşiruri convergente este dată de

Lema lui Cesàro. Orice şir mărginit conţine un subşir convergent.

Fie (x_n) un şir mărginit. Putem găsi două numere *raţionale* a şi b astfel ca

$$a < x_n < b$$

pentru orice $n \in N$.

Să împărţim segmentul $[a, b]$ în două părţi egale, prin punctul raţional $c = \frac{b-a}{2}$. Cel puţin unul dintre cele două segmente parţiale conţine o infinitate de termeni ai şirului.

Să notăm cu $[a_1, b_1]$ unul dintre aceste segmente parţiale care conţine o infinitate de termeni ai şirului. Dacă ambele segmente parţiale au această proprietate, convenim — de exemplu — să notăm cu $[a_1, b_1]$ pe cel din stînga. Numerele a_1 şi b_1 sînt raţionale şi avem

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b \quad \text{şi} \quad b_1 - a_1 = \frac{l}{2},$$

unde am notat $l = b - a$.

Să presupunem că am găsit un segment $[a_n, b_n]$ care conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n), astfel că a_n şi b_n sînt raţionale şi

$$b_n - a_n = \frac{l}{2^n}.$$

Împărţim segmentul $[a_n, b_n]$ în două părţi egale prin punctul $c_n = \frac{b_n - a_n}{2}$, şi notăm cu $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ unul din cele două segmente parţiale care conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n). Avem:

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n \quad \text{şi} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}},$$

iar a_{n+1} şi b_{n+1} sînt raţionale.

Am demonstrat astfel prin inducţie completă că putem găsi două şiruri (a_n) şi (b_n) de numere raţionale cu următoarele proprietăţi:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$.

2) $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$ pentru orice $n \in N$.

3) Fiecare segment $[a_n, b_n]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n).

Din primele două proprietăţi deducem că există un punct x şi numai unul, astfel ca

$$a_n \leqslant x \leqslant b_n \text{ pentru orice } n \in N.$$

Să arătăm că x este limita unui subşir al şirului (x_n).
Să alegem un termen x_{n_1} al şirului (x_n) astfel ca

$$x_{n_1} \in [a_1, b_1].$$

Deoarece segmentul $[a_2, b_2]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n), putem găsi un termen x_{n_2} al şirului astfel ca

$$x_{n_2} \in [a_2, b_2] \text{ şi } n_1 < n_2.$$

Să presupunem că am ales un termen $x_{n_p} \in [a_p, b_p]$. Deoarece $[a_{p+1}, b_{p+1}]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n), putem găsi în şir un termen $x_{n_{p+1}}$ cu $n_p < n_{p+1}$ astfel ca

$$x_{n_{p+1}} \in [a_{p+1}, b_{p+1}].$$

Am demonstrat astfel, prin inducţie completă, că putem găsi un şir (x_{n_p}), $1 \leqslant p < \infty$, astfel ca

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$$

şi

$$a_p \leqslant x_{n_p} \leqslant b_p \text{ pentru orice } p \in N.$$

Aşadar, (x_{n_p}) este un subşir al şirului (x_n).
Rămîne să arătăm că subşirul (x_{n_p}) este convergent către x.
Din inegalităţile

$$a_p \leqslant x \leqslant b_p,$$
$$a_p \leqslant x_{n_p} \leqslant b_p$$

deducem:

$$| x_{n_p} - x | \leqslant b_p - a_p \leqslant \frac{l}{2^p}$$

pentru fiecare p. Şirul $\left(\frac{l}{2^p}\right)$ este convergent către 0 (deoarece şirul $\frac{2^p}{l}$ este crescător şi nemărginit). Pe baza criteriului de convergenţă deducem că

$$\lim_{n \to \infty} x_{n_p} = x$$

şi lema este demonstrată.

3. Criteriul lui Cauchy

Înainte de a enunţa criteriul lui Cauchy, vom demonstra două leme.

Lema 1. Orice şir fundamental este mărginit.

Fie (a_n) un şir fundamental. Luînd $\varepsilon = 1$, găsim un număr natural $N = N(1)$ astfel ca pentru orice $n \geqslant N$ să avem

$$|a_n - a_N| < 1$$

sau

$$-1 < a_n - a_N < 1$$

sau încă

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1.$$

Dacă notăm

$$m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, a_N - 1\},$$
$$M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, a_N + 1\},$$

atunci pentru orice n natural avem

$$m \leqslant a_n \leqslant M,$$

deci şirul (a_n) este mărginit.

Lema 2. Dacă un şir fundamental conţine un subşir convergent, atunci el este convergent.

Fie (a_n) un şir fundamental şi (a_{n_p}) un subşir al său convergent către un număr a. Să arătăm că şirul (a_n) este de asemenea convergent către a.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece (a_n) este şir fundamental, există un număr natural $N_1(\varepsilon)$ astfel ca

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru } n, m \geqslant N_1(\varepsilon).$$

Deoarece subşirul (a_{n_p}) este convergent către a, există un număr natural $N_2(\varepsilon)$ astfel ca

$$|a_{n_p} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru } p \geqslant N_2(\varepsilon).$$

Să notăm $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$. Fie $n > N(\varepsilon)$; să alegem p astfel ca $n_p > N(\varepsilon)$. Atunci $n, n_p \geqslant N_1(\varepsilon)$, deci

$$|a_n - a_{n_p}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi $n_p \geqslant N_2(\varepsilon)$, deci

$$|a_{n_p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aşadar:

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_p}| + |a_{n_p} - a| < \varepsilon.$$

Cum n a fost ales arbitrar, rezultă că pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ avem:

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

adică şirul (a_n) este convergent către a.

Criteriul lui Cauchy. Un şir (a_n) este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.

Să presupunem întîi că (a_n) este un şir convergent, şi fie a limita sa. Să arătăm atunci că (a_n) este şir fundamental.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $a_n \to a$, există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel ca pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ avem:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, pentru orice, $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ avem

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon,$$

adică (a_n) este şir fundamental.

Reciproc, să presupunem acum că (a_n) este şir fundamental şi să arătăm atunci că este convergent. Deoarece (a_n) este şir fundamental, este mărginit, deci, conform lemei lu Cesàro, conţine un subşir convergent. Conform lemei 2, şirul fundamental (a_n) este de asemenea convergent.

Observaţii. 1° Importanţa criteriului lui Cauchy constă în aceea că ne permite să precizăm dacă un şir este convergent, fără a-i cunoaşte limita.

2° Deoarece orice şir fundamental de numere reale este convergent, se spune că mulţimea numerelor reale este un *spaţiu complet*.

Mulţimea numerelor *raţionale* nu este un spaţiu complet, deoarece există şiruri fundamentale de numere *raţionale* care *nu* au limită *raţională* (adică nu sînt convergente în cadrul numerelor raţionale).

Vom construi prin recurenţă un şir fundamental (r_n) de numere raţionale care nu este convergent.

Plecăm de la numerele $a = 1$ şi $b = 2$. Avem

$$a^2 < 2 < b^2 \text{ şi } b - a = 1.$$

Considerăm apoi numerele

$$1,\ 1 + \frac{1}{10},\ 1 + \frac{2}{10},\ \ldots, 1 + \frac{9}{10},\ 2$$

şi pătratele lor

$$1^2,\ \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2,\ \left(1 + \frac{2}{10}\right)^2,\ \ldots,\ \left(1 + \frac{9}{10}\right)^2 \cdot 2^2.$$

Numărul 2 se află cuprins între două numere consecutive dintre acestea, anume

$$\left(1+\frac{4}{10}\right)^2 < 2 < \left(1+\frac{5}{10}\right)^2.$$

Notăm $r_1 = 1 + \frac{4}{10}$ şi $s_1 = 1 + \frac{5}{10}$. Avem

$$r_1^2 < 2 < s_1^2 \text{ şi } s_1 - r_1 = \frac{1}{10}.$$

Să presupunem că am găsit numerele raţionale r_n şi s_n astfel încît:

$$r_n^2 \leqslant 2 \leqslant s_n^2 \text{ şi } s_n - r_n = \frac{1}{10^n}$$

şi ne propunem să găsim două numere raţionale r_{n+1} şi s_{n+1} astfel încît:

$$r_{n+1}^2 \leqslant 2 \leqslant s_{n+1}^2 \text{ şi } s_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Pentru aceasta considerăm numerele

$$r_n, r_n + \frac{1}{10^{n+1}}, r_n + \frac{2}{10^{n+1}}, \ldots, r_n + \frac{9}{10^{n+1}}, s_n$$

şi pătratele lor

$$r_n^2, \left(r_n + \frac{1}{10^{n+1}}\right)^2, \left(r_n + \frac{2}{10^{n+1}}\right)^2, \ldots, \left(r_n + \frac{9}{10^{n+1}}\right), s_n^2.$$

Deoarece 2 se află cuprins între r_n^2 şi s_n^2, există două numere consecutive $r_n + \frac{a}{10^{n+1}}$ şi $r_n + \frac{a+1}{10^{n+1}}$, $0 \leqslant a \leqslant 9$ astfel ca $\left(r_n + \frac{a}{10^{n+1}}\right)^2 \leqslant 2 \leqslant \left(r_n + \frac{a+1}{10^{n+1}}\right)^2$.

Notînd $r_{n+1} = r_n + \frac{a}{10^{n+1}}$ şi $s_{n+1} = r_n + \frac{a+1}{10^{n+1}}$, avem $r_n \leqslant r_{n+1} < s_{n+1} \leqslant s_n$; $r_{n+1}^2 \leqslant 2 \leqslant s_{n+1}^2$ şi $s_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{10^{n+1}}$.

În acest fel, prin inducţie completă putem construi două şiruri (r_n) şi (s_n) de numere raţionale astfel încît:

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \ldots \leqslant s_2 \leqslant s_1;$$

$$r_n^2 \leqslant 2 \leqslant s_n^2 \text{ şi } s_n - r_n = \frac{1}{10^n}, \text{ pentru orice } n \in N.$$

Deoarece $s_n \leqslant 2$ şi $r_n \leqslant 2$ pentru orice $n \in N$, avem:

$$0 \leqslant 2 - r_n^2 \leqslant s_n^2 - r_n^2 = (s_n + r_n)(s_n - r_n) \leqslant 4(s_n - r_n) = \frac{4}{10^n},$$

adică:

$$|r_n^2 - 2| \leqslant \frac{4}{10^n}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{10^n} = 0$, pe baza criteriului de convergenţă deducem că $r_n^2 \to 2$.

Şirul (r_n) *nu* este convergent (către un număr raţional).

Într-adevăr, dacă ar exista un număr *raţional* r astfel ca $r_n \to r$, atunci $r_n^2 \to r^2$; dar $r_n^2 \to 2$ şi cum limita unui şir este unică, avem $r^2 = 2$, ceea ce este absurd, deoarece nu există nici un număr raţional al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Pe de altă parte, şirul (r_n) este fundamental.

Într-adevăr,

$$|r_n - r_m| = \frac{|r_n^2 - r_m^2|}{r_n + r_m} \leqslant |r_n^2 - r_m^2|,$$

deoarece $r_n + r_m \geqslant 1$. Fie $\varepsilon > 0$; deoarece (r_n^2) este convergent, este fundamental, deci există un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca

$$|r_n^2 - r_m^2| < \varepsilon \text{ pentru } n, m \geqslant N(\varepsilon).$$

Atunci, de asemenea

$$|r_n - r_m| < \varepsilon \text{ pentru } n, m \geqslant N(\varepsilon),$$

adică (r_n) este şir fundamental.

§ 5. Şiruri monotone

1. Teorema de convergenţă a şirurilor monotone

S-a arătat mai înainte că orice şir convergent este mărginit. Există însă şiruri mărginite care nu sînt convergente.

Există de asemenea şiruri monotone care nu sînt convergente, de exemplu şirul numerelor naturale. Dacă însă un şir are ambele proprietăţi, atunci el este convergent. Pentru aceasta vom demonstra mai întîi următoarea

L e m ă . Limita unui şir crescător şi convergent este mai mare decît toţi termenii şirului.

Fie (a_n) un şir crescător şi convergent şi fie a limita sa. Pentru orice n şi orice $m > n$ avem

$$a_n \leqslant a_m$$

de unde, luînd limita în partea dreaptă, obţinem

$$a_n \leqslant \lim_{m\to\infty} a_m,$$

adică

$$a_n \leqslant a$$

oricare ar fi $n \in N$.

În mod asemănător se arată că:
Limita unui şir descrescător şi convergent este mai mică decît toţi termenii şirului.

Teoremă. Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Fie (a_n) un şir monoton şi mărginit. Pentru a face o alegere să presupunem că este crescător. Vom da două demonstraţii pentru această teoremă.

Prima demonstraţie foloseşte direct lema lui Cesàro. Deoarece (a_n) este mărginit, conţine un subşir (a_{n_p}) convergent către un număr a. Se arată prin reducere la absurd că $a_n \leqslant a$ pentru orice n. Deoarece $a_{n_p} \xrightarrow[p]{} a$, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există p' astfel încît $a - a_{n_{p'}} < \varepsilon$. Luînd $N(\varepsilon) = p'$, pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ avem $a_{N(\varepsilon)} \leqslant a_n \leqslant a$, deci $|a - a_n| < \varepsilon$ şi deci $a_n \to a$.

A doua demonstraţie foloseşte criteriul lui Cauchy. Vom arăta că (a_n) este şir Cauchy, de unde va rezulta că este convergent. Să observăm mai întîi că deoarece (a_n) este şir crescător, dacă $n > m$, avem $a_n \geqslant a_m$, deci $a_n - a_m \geqslant 0$ şi deci $|a_n - a_m| = a_n - a_m$.

Deoarece (a_n) este mărginit, există un număr $M > 0$ astfel încît să avem $|a_n| \leqslant M$ pentru orice n.

Să presupunem, prin absurd, că (a_n) nu este şir Cauchy. Aceasta înseamnă (negînd propoziţia 2 de la nr. 1) că există un număr $\varepsilon_0 > 0$, cu proprietatea că *oricare ar fi* N, există un număr $n > N$ (n depinde de N) cu $|a_n - a_N| > \varepsilon_0$, adică $a_n - a_N > \varepsilon_0$.

Fie p un număr natural astfel încît să avem $p\varepsilon_0 > 2M$ (axioma lui Arhimede). Deoarece N este arbitrar, să-i dăm diferite valori:

Pentru $N = 1$, există $n_1 > 1$ cu $a_{n_1} - a_1 > \varepsilon_0$

Pentru $N = n_1$, există $n_2 > n_1$ cu $a_{n_2} - a_{n_1} > \varepsilon_0$

. . . .

Pentru $N = n_{p-1}$ există $n_p > n_{p-1}$ cu $a_{n_p} - a_{n_{p-1}} > \varepsilon_0$.

Adunînd aceste p inegalităţi membru cu membru şi reducînd termenii asemenea, deducem

$$a_{n_p} - a_1 > p\varepsilon_0.$$

Dar

$$a_{n_p} - a_1 = |a_{n_p} - a_1| \leqslant |a_{n_p}| + |a_1| \leqslant 2M,$$

deci $2M > p\varepsilon_0$, ceea ce contrazice inegalitatea $p\varepsilon_0 > 2M$, prin care a fost ales p. Aşadar, afirmaţia că (a_n) n-ar fi şir Cauchy este falsă. Urmează atunci că (a_n) este şir Cauchy, deci este convergent.

Propoziţia 1. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri de numere reale care verifică următoarele două condiţii:

1° $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$;

2° $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$,

atunci şirurile (a_n) şi (b_n) sînt convergente şi au aceeaşi limită

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Şirul (a_n) este crescător şi mărginit $(a_1 \leqslant a_n \leqslant b_2)$, deci este convergent; fie c limita sa:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Atunci

$$b_n = (b_n - a_n) + a_n$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + c = c.$$

Avem:

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n \text{ pentru orice } n \in N.$$

O b s e r v a ţ i e. Numărul c este singurul număr care verifică inegalităţile $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ pentru orice $n \in N$.

Într-adevăr, dacă $a_n \leqslant c' \leqslant b_n$ pentru orice n, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant c' \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \text{ adică, } c \leqslant c' \leqslant c,$$

de unde $c' = c$.

P r o p o z i ţ i a 2. Pentru orice număr real x există două şiruri (r_n) şi (s_n) de numere raţionale, cu următoarele proprietăţi:

1° $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n \leqslant \ldots \leqslant x \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \ldots \leqslant s_2 \leqslant s_1$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Într-adevăr, pentru fiecare număr natural n există două numere raţionale α_n şi β_n astfel ca

$$x - \frac{1}{n} < \alpha_n < x < \beta_n < x + \frac{1}{n}.$$

Pentru fiecare n natural să notăm

$$r_n = \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \; s_n = \min(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Numerele r_n şi s_n sînt raţionale şi avem

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n \leqslant \ldots \leqslant x \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \ldots \leqslant s_2 \leqslant s_1$$

$$\text{şi } x - \frac{1}{n} \leqslant r_n \leqslant x \leqslant s_n \leqslant x + \frac{1}{n}.$$

Atunci

$$|x - r_n| \leqslant \frac{1}{n}, \; |x - s_n| \leqslant \frac{1}{n}$$

şi deci, în baza criteriului de convergenţă,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x \text{ şi } \lim_{n\to\infty} s_n = x.$$

2. Numărul e

Fie şirul

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ldots$$

Vom arăta că acest şir este crescător şi mărginit, de unde va rezulta că este convergent. Pentru aceasta, pentru fiecare $n \in N$ să notăm

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

şi să dezvoltăm membrul drept după formula binomului lui Newton:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Se observă că

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}{1\cdot 2\ldots k} =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

astfel încît

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Efectuînd operaţia de scădere în fiecare paranteză, se obţine un număr > 0, deoarece $k-1 < n$ şi deci $\frac{k-1}{n} < 1$.

Aşadar, membrul drept este o sumă cu termeni strict pozitiv, şi deci această sumă, adică a_n, este mai mare decît suma primilor doi termeni $1 + 1 = 2$; deci

$$2 < a_n.$$

Pe de altă parte, în fiecare paranteză numărul obţinut este mai mic decît 1, deci

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\ldots n}.$$

Dacă în fiecare fracţie se înlocuiesc cu 2 factorii de la numitor mai mari sau egali cu 2, numitorii fracţiilor se micşorează, deci ele se măresc. Aşadar:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+2=3.$$

Aşadar, $2 < a_n < 3$ oricare ar fi $n \in N$, adică şirul (a_n) este *mărginit.*

Să arătăm acum că este crescător. Dezvoltînd termenul a_{n+1} după binomul lui Newton, obţinem

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\ldots n(n+1)}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Avem:

$$\frac{i}{n} > \frac{i}{n+1}, \text{ deci } -\frac{i}{n} < -\frac{i}{n+1}, \text{ de unde:}$$

$$1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}.$$

Aşadar, numărul din fiecare paranteză din dezvoltarea lui a_n este *mai mic* decît numărul din paranteza corespunzătoare din dezvoltarea lui a_{n+1}. Deci fiecare termen al sumei care dă pe a_n este mai mic decît termenul corespunzător al sumei care dă pe a_{n+1}. Deoarece a_{n+1} are în dezvoltarea sa un termen pozitiv (ultimul) în plus faţă de dezvoltarea lui a_n, rezultă cu atît mai mult că $a_n < a_{n+1}$ pentru fiecare $n \in N$, deci şirul (a_n) este *crescător.*

Fiind crescător şi mărginit, şirul (a_n) este convergent. Limita sa se notează cu litera e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

deoarece $2 < a_n < 3$ pentru orice $n \in N$, deducem că $2 \leqslant e \leqslant 3$.

§ 6. Proprietăţi suplimentare ale şirurilor convergente

1. Schimbarea ordinii termenilor unui şir convergent

Propoziţia 1. Dacă $a_n \to a$ şi $a_n < a$ pentru orice $n \in N$, se poate schimba ordinea termenilor astfel încît să obţinem un şir crescător (convergent către a).

În afara vecinătăţii $V_1 = (a - 1, a + 1)$ a lui a, se află un număr *finit* de termeni (eventual nici unul) şi anume la stînga lui $a - 1$. Să-i scriem în ordinea crescătoare

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n_1}.$$

Dacă mai mulţi termeni au aceeaşi valoare numerică, îi scriem unul după altul într-o ordine oarecare, de exemplu în ordinea în care apar în şirul iniţial.

În afara vecinătăţii $V_2 = \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ se află un număr finit de termeni ai şirului şi anume la stînga lui $a - \frac{1}{2}$. Printre aceştia se află şi cei deja scrişi în ordine crescătoare. Termenii nescrişi să-i aşezăm după b_{n_1} tot în ordine crescătoare.

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n_1}, b_{n_1+1}, \ldots, b_{n_2}.$$

Să presupunem că am aşezat în ordine crescătoare toţi termenii din afara vecinătăţii $V_p = \left(a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}\right)$

$$b_1, \ldots, b_{n_1}, \ldots, b_{n_p}.$$

În afara vecinătăţii $V_{p+1} = \left(a - \frac{1}{p+1}, a + \frac{1}{p+1}\right)$ şi anume la stînga ei se află un număr finit de termeni ai şirului, diferiţi de cei deja aşezaţi în ordine crescătoare; să-i scriem şi pe aceştia după b_{n_p} în ordine crescătoare

$$b_1, \ldots, b_{n_1}, \ldots, b_{n_p}, b_{n_p+1}, \ldots$$

Am demonstrat deci, prin inducţie completă, că putem forma un şir crescător cu termeni ai şirului (a_n). Acest şir este crescător şi conţine toţi termenii şirului (a_n), deci se obţine din (a_n) prin schimbarea ordinii termenilor.

Într-adevăr, fie a_{n_0} un termen oarecare al şirului (a_n).

Deoarece $a_{n_0} < a$, şi deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a - \frac{1}{p}\right) = a$, există un număr natural p_0 astfel că

$$a_{n_0} < a - \frac{1}{p_0} < a.$$

Deci a_{n_0} se află în afara vecinătăţii $V_{p_0} = \left(a - \frac{1}{p_0},\ a + \frac{1}{p_0}\right)$ şi deci la operaţia de ordin p_0, termenul a_{n_0} va apărea în şirul crescător.

Propoziţia 2. Dacă $a_n \to a$ şi $a_n > a$ pentru orice $n \in N$, se poate schimba ordinea termenilor astfel încît să obţinem un şir descrescător (convergent către a).

Avem $-a_n \to -a$ şi $-a_n < -a$; putem deci schimba ordinea termenilor şirului $(-a_n)$ ca să obţinem un şir crescător $(-b_n)$. Atunci şirul (b_n) este descrescător şi se poate obţine prin schimbarea ordinii termenilor şirului (a_n).

Propoziţia 3. Dacă $a_n \to a$ şi $a_n \neq a$ pentru orice $n \in N$ şi dacă există o infinitate de termeni la stînga lui a şi o infinitate de termeni la dreapta lui a, atunci se pot forma cu termenii şirului două şiruri (b_n) şi (c_n), primul crescător, al doilea descrescător, ambele convergente către a.

Într-adevăr, fie (a'_n) subşirul lui (a_n) format cu toţi termenii de la stînga lui a, $a'_n < a$, şi (a''_n) subşirul format cu toţi termenii de la dreapta lui a, $a < a''_n$. Deoarece $a_n \to a$, avem $a'_n \to a$ şi $a''_n \to a$.

Prin schimbarea convenabilă a termenilor şirului (a'_n) putem obţine un şir crescător $b_n \to a$, şi de asemenea, prin schimbarea ordinii termenilor şirului (a''_n) putem obţine un şir descrescător $c_n \to a$.

Propoziţia 4. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente şi au aceeaşi limită c, orice şir obţinut cu termenii celor două şiruri, într-o ordine oarecare, este convergent şi are limita c.

Într-adevăr, în afara fiecărei vecinătăţi a lui c se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi un număr finit de termeni ai şirului (b_n), deci de asemenea un număr finit ai oricărui şir (c_n) obţinut cu termenii celor două şiruri. Rezultă că şirul (c_n) are de asemenea limita a.

2. Puncte de acumulare ale unei mulţimi

Propoziţie. Un număr a este punct de acumulare al unei mulţimi A, dacă şi numai dacă există un şir a_n convergent către a, format din puncte din A diferite de a ($a_n \in A$, $a_n \neq a$, $a_n \to a$).

Dacă $a_n \in A$, $a_n \neq a$ şi $a_n \to a$, atunci în orice vecinătate a lui a se află termeni a_n din şir, deci în orice vecinătate a lui se află puncte a_n din A diferite de a. Rezultă că a este punct de acumulare al mulţimii A.

Reciproc, să presupunem că a este punct de acumulare al mulţimii A. În vecinătatea $V_1 = (a - 1, a + 1)$ se află o infinitate de puncte din A, diferite de a; fie a_1 unul dintre acestea. Avem

$$a_1 \in A, \ a_1 \neq a \text{ şi } |a_1 - a| < 1.$$

Să presupunem că am găsit un punct $a_n \in A$, $a_n \neq a$, şi $|a_n - a| < \frac{1}{n}$. În vecinătatea $V_{n+1} = \left(a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}\right)$ se află o infinitate de puncte din A, diferite de a. Fie a_{n+1} unul dintre acestea, pe care-l putem alege *diferit* de a_n. Avem

$$a_{n+1} \in A, \ a_{n+1} \neq a \text{ şi } |a_{n+1} - a| < \frac{1}{n+1}.$$

Am demonstrat prin inducţie completă că putem alege un şir (a_n) de puncte din A, diferite de a (şi diferite între ele) astfel ca

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} \text{ pentru fiecare } n \in N.$$

Pe baza criteriului de convergenţă deducem că $a_n \to a$.

Corolarul 1. Un număr a este punct aderent al mulţimii A, dacă şi numai dacă există un şir (a_n) de puncte din A, convergent către a.

Într-adevăr, dacă $a \in A$, atunci luăm $a_n = a$ pentru orice n. Dacă $a \notin A$, atunci a este punct de acumulare al lui A şi se aplică propoziţia precedentă.

Corolarul 2. O mulţime A este închisă, dacă şi numai dacă, oricare ar fi şirul convergent de puncte (distincte sau nu) din A, limita şirului aparţine de asemenea lui A.

Să presupunem întîi că A este închisă şi fie (a_n) un şir de puncte din A, convergent către un număr a. Conform corolarului 1, a este punct aderent al lui A, şi deoarece A este închisă, îşi conţine punctele aderente, deci $a \in A$.

Reciproc, să presupunem că oricare ar fi şirul convergent de puncte din A, limita sa aparţine de asemenea lui A. Deoarece orice punct aderent $a \in A$ este limita unui şir de puncte (a_n) din A, urmează că $a \in A$, deci A este închisă şi propoziţia este demonstrată.

§ 7. Puteri şi logaritmi

1. Radicali

Să considerăm ecuaţia

$$x^n = a \quad (a \geqslant 0, \text{ real}, n \text{ natural}).$$

Este uşor de văzut că dacă această ecuaţie are o *soluţie pozitivă*, ea are *numai una*, adică dacă $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ şi $x_1^n = x_2^n = a$, atunci $x_1 = x_2$. În adevăr, dacă x_1 şi x_2 ar fi două soluţii pozitive, diferite, ale acestei ecuaţii, atunci, de exemplu, $x_1 < x_2$, deci $x_1^n < x_2^n$. Dar $x_1^n = a$ şi $x_2^n = a$, deci $x_1^n = x_2^n$ şi am ajuns la o contradicţie.

Vom arăta acum că această ecuaţie are efectiv o soluţie pozitivă. Există un număr natural $m > a$; deoarece $n \geqslant 1$, avem: $m^n \geqslant m^1 = m$, deci $m^n > a$. Numărul a se află deci cuprins între două numere consecutive din următoarele numere

$$0^n < 1^n < 2^n < \ldots < m^n.$$

Fie $k \geqslant 0$ numărul întreg astfel încît

$$k^n \leqslant a < (k+1)^n.$$

Avem apoi $k < k + \frac{1}{2} < k + 1$, deci $k^n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^n < (k+1)^n$. Numărul a se află cuprins fie între k^n şi $\left(k + \frac{1}{2}\right)^n$, fie între $\left(k + \frac{1}{2}\right)^n$ şi $(k+1)^n$. Să notăm cu x_1 şi y_1 numerele consecutive dintre numerele k, $k + \frac{1}{2}$, $k + 1$, pentru care avem

$$x_1^n \leqslant a < y_1^n.$$

Avem $y_1 - x_1 = \frac{1}{2}$ şi $x_1 \geqslant 0$.

Să presupunem că am găsit două numere x_p şi y_p astfel ca:

$$x_p^n \leqslant a < y_p^n \text{ şi } y_p - x_p = \frac{1}{2^p}.$$

Să considerăm numerele $x_p < x_p + \frac{1}{2^{p+1}} < y_p$; avem: $x_p^n < \left(x_p + \frac{1}{2^{p+1}}\right)^n < y_p^n$. Numărul a este cuprins între x_p^n şi y_p^n, deci este cuprins între două puteri consecutive dintre cele trei puteri x_p^n, $\left(x_p + \frac{1}{2^{p+1}}\right)^n$, y_p^n. Să notăm cu x_{p+1} şi y_{p+1} două numere consecutive dintre numerele x_p, $x_p + \frac{1}{2^{p+1}}$, y_p, pentru care avem

$$x_{p+1}^n \leqslant a < y_{p+1}^n.$$

Avem de asemenea $x_p \leqslant x_{p+1} < y_{p+1} \leqslant y_p$ şi $y_{p+1} - x_{p+1} = \frac{1}{2^{p+1}}$.

Prin inducţie completă putem deci construi două şiruri de numere raţionale (x_p) şi (y_p) cu proprietăţile următoare:

1) $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_p \leqslant \ldots \leqslant y_p \leqslant \ldots \leqslant y_2 \leqslant y_1$.

2) $y_p - x_p = \frac{1}{2^p}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$

3) $x_p^n \leqslant a < y_p^n$, $p = 1, 2, 3, \ldots$

Din proprietăţile 1) şi 2) deducem că cele două şiruri au o limită comună x_0:

$$\lim_{p\to\infty} x_p = x_0 = \lim_{p\to\infty} y_p$$

şi $0 \leqslant x_1 \leqslant x_0$.

Atunci:

$$\lim_{p\to\infty} x_p^n = x_0^n = \lim_{p\to\infty} y_p^n.$$

Dar din proprietatea 3) deducem că

$$\lim_{p\to\infty} x_p^n \leqslant a \leqslant \lim_{p\to\infty} y_p^n,$$

adică: $x_0^n \leqslant a \leqslant x_0^n$ şi deci $x_0^n = a$, adică x_0 este o soluţie *pozitivă* a ecuaţiei $x^n = a$.

Soluţia *pozitivă unică* a ecuaţiei $x^n = a$ se notează cu $\sqrt[n]{a}$ şi se numeşte *rădăcina de ordinul n a lui a* (sau radicalul de ordin n al lui a).

2. Proprietăţile radicalilor

Deoarece $\sqrt[n]{a}$ este soluţia pozitivă a ecuaţiei $x^n = a$, avem

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \text{ şi } \sqrt[n]{a} \geqslant 0, \text{ oricare ar fi } a \geqslant 0 \text{ şi } n \in N.$$

Avem $\sqrt[n]{0} = 0$ şi $\sqrt[n]{1} = 1$, oricare ar fi $n \in N$.

Într-adevăr, 0 este soluţia pozitivă (unică) a ecuaţiei $x^n = 0$, iar 1 este soluţia pozitivă unică a ecuaţiei $x^n = 1$.

Proprietăţile radicalilor sînt următoarele ($a \geqslant 0$):

1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $\quad (n \in N)$.

2) $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$, $\quad (n \in N,\ k \in Z)$.

3) $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$, $\quad (n,\ m \in N,\ k \in Z)$.

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, $\quad (n,\ m \in N)$.

5) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\quad (n \in N)$.

6) Dacă $a > 1$, $\sqrt[n]{a} > 1$; dacă $0 < a < 1$, $\sqrt[n]{a} < 1$, $(n \in N)$.

Pentru demonstrarea proprietăţilor 2) — 5) se notează cu u şi v cei doi membri ai egalităţilor şi se arată că, pentru un anumit exponent, puterile numerelor *pozitive* u şi v sînt egale, deci $u = v$.

Pentru exemplificare să demonstrăm proprietatea 2):

Să notăm $u = \sqrt[n]{a^k}$ şi $v = (\sqrt[n]{a})^k$. Avem

$$u^n = (\sqrt[n]{a^k})^n = a^k \text{ şi } v^n = (\sqrt[n]{a})^{kn} = [(\sqrt[n]{a})^n]^k = a^k,$$

deci $u^n = v^n$, de unde $u = v$, adică $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$.

Pentru demonstrarea proprietăţii 6) raţionăm prin reducere la absurd. Să presupunem că $a > 1$ şi $\sqrt[n]{a} \leqslant 1$. Ridicînd ambii membri ai ultimei inegalităţi la puterea n obţinem $(\sqrt[n]{a})^n \leqslant 1^n$, adică $a \leqslant 1$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza $a > 1$.

La fel se arată că dacă $0 < a < 1$, atunci $\sqrt[n]{a} < 1$.

Observaţii. Am presupus, mai sus, $a \geqslant 0$. Ce se întîmplă în cazul cînd $a < 0$?

1° Dacă $a < 0$, ecuaţia $x^{2n} = a$ nu are nici o soluţie reală, deoarece $x^{2n} \geqslant 0$ oricare ar fi $x \in R$. Radicalii de ordin par ai numerelor strict negative nu au sens (în cadrul numerelor reale).

2° Dacă $a < 0$, ecuaţia $x^{2n-1} = a$ are o soluţie *negativă unică*. Într-adevăr notînd $b = -a$ avem $b > 0$, deci ecuaţia $x^{2n-1} = b$ are soluţie *pozitivă* unică, $x_0 = \sqrt[2n-1]{b}$. Atunci $(-x_0)^{2n-1} = \left(-\sqrt[2n-1]{b}\right)^{2n-1} = -\left(\sqrt[2n-1]{b}\right)^{2n-1} = -b = a$, adică $-x_0 = -\sqrt[2n-1]{-a}$ este o soluţie *negativă* a ecuaţiei $x^{2n-1} = a$.

Soluţia *negativă* unică a ecuaţiei $x^{2n-1} = a$, $a < 0$, se notează şi în acest caz cu $\sqrt[2n-1]{a}$:

$$\sqrt[2n-1]{a} = -\sqrt[2n-1]{-a}.$$

De exemplu, ecuaţia $x^3 = -27$ are soluţia $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

Radicalii numerelor strict negative nu mai posedă toate proprietăţile radicalilor numerelor pozitive. Proprietatea 3) nu mai este verificată pentru *orice* număr întreg k.

De exemplu, $\sqrt[3]{-27} = -3$, dar $\sqrt[3\cdot 2]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = 3$.

De asemenea, proprietatea 2) nu mai are loc dacă $a < 0$ şi n este par, chiar dacă şi k este par, deoarece membrul drept al egalităţii nu are sens în aceste condiţii.

Proprietăţile 2) şi 3) sînt esenţiale pentru definirea puterilor cu exponent raţional.

3. Puteri raţionale

Fie $a > 0$ un număr real şi r un număr raţional. Pentru definirea puterii a^r vom folosi faptul că r poate fi scris ca fracţie $\frac{m}{n}$ şi vom defini puterea $a^{\frac{m}{n}}$. Deoarece, însă, numărul r poate fi scris în mai multe moduri ca fracţie, pentru puterea a^r trebuie să alegem o definiţie care să fie independentă de alegerea particulară a fracţiei care-l reprezintă pe r.

Fie $\frac{m}{n}$ o fracţie cu *numitorul natural*, care reprezintă numărul raţional r:

$$r = \frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot m.$$

Din proprietăţile radicalilor deducem:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Să notăm

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Fie $\frac{m'}{n'}$ fracţia ireductibilă cu *numitorul natural* care reprezintă pe r:

$$r = \frac{m'}{n'} = m' \cdot \frac{1}{n'} = \frac{1}{n'} \cdot m'.$$

Avem:

$$a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}} = (\sqrt[n']{a})^{m'}.$$

Deoarece însă fracţia $\frac{m'}{n'}$ este ireductibilă, există un număr natural k astfel ca $m = km'$ şi $n = kn'$.

Atunci:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn']{a^{km'}} = \sqrt[n']{a^{m'}},$$

adică

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}.$$

Definim puterea a^r cu exponentul raţional r astfel:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m,$$

unde $r = \frac{m}{n}$, iar n este *natural*. Din cele de mai sus rezultă că definiţia puterii a^r este independentă de alegerea fracţiei $\frac{m}{n}$ care reprezintă pe r.

Dacă $r \geqslant 0$, atunci putem scrie $r = \frac{m}{n}$, unde m şi n sînt numere naturale. În acest caz $\sqrt[n]{0^m} = (\sqrt[n]{0})^m = 0$; putem deci pune prin definiţie $0^r = 0$. Dacă însă $r \leqslant 0$, şi dacă $r = \frac{m}{n}$ cu n natural, atunci $m \leqslant 0$ şi puterea 0^m nu mai este definită; în acest caz nu mai putem scrie $\sqrt[n]{0^m}$ sau $(\sqrt[n]{0})^m$, şi deci puterea 0^r cu $r \leqslant 0$ nu mai are sens.

Reţinem că puterea 0^r are sens numai pentru $r > 0$. Avem $1^r = 1$ oricare ar fi r raţional.

Puterile cu exponent raţional se numesc *puteri raţionale.*

4. Proprietăţile puterilor raţionale

Proprietăţile puterilor raţionale sînt următoarele (ori de cîte ori exponentul este $\leqslant 0$ se va presupune baza > 0):

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $\quad \dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

2) $(a^r)^s = a^{rs}$.

3) $(ab)^r = a^r b^r$; $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$.

4) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$.

5) Dacă $a > 1$ şi $r > 0$, atunci $a^r > 1$.

Aceste proprietăţi se demonstrează folosind definiţia puterilor raţionale şi proprietăţile corespunzătoare ale radicalilor şi ale puterilor întregi. Pentru exemplificare să demonstrăm proprietatea 1). Să scriem numerele r şi s ca fracţie cu *acelaşi* numitor natural: $r = \dfrac{p}{n}$, $s = \dfrac{q}{n}$. Avem:

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{p}{n}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^p a^q} = \sqrt[n]{a^{p+q}} = a^{\frac{p+q}{n}} = a^{r+s}.$$

Din aceste proprietăţi mai rezultă următoarele proprietăţi:

6) Dacă $0 < a < 1$ şi $r > 0$ atunci $a^r < 1$.

7) Dacă $r < 0$, atunci $a^r < 1$ pentru $a > 1$,
$a^r > 1$ pentru $0 < a < 1$.

8) Dacă $r < s$, atunci: $a^r < a^s$ pentru $a > 1$.
$a^r > a^s$ pentru $0 < a < 1$.

(Dacă baza este > 1, inegalitatea dintre exponenţi se păstrează şi pentru puteri; dacă baza este < 1, inegalitatea dintre exponenţi se inversează pentru puteri).

9) Dacă $0 < a < b$, atunci: $a^r < b^r$ pentru $r > 0$,
$a^r > b^r$ pentru $r < 0$.

(Dacă exponentul este > 0, inegalitatea dintre baze se păstrează şi pentru puteri; dacă exponentul este < 0, inegalitatea dintre baze se inversează pentru puteri.)

Demonstraţia acestor proprietăţi se face ca şi pentru puterile întregi.

5. Şiruri de puteri raţionale

Pentru a putea defini puterile cu exponent real oarecare, trebuie mai întîi să studiem şirurile de puteri raţionale.

L e m a 1. Dacă $a > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Deoarece $a > 1$ şi

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$$

avem :

$$a > a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}} > \ldots > a^{\frac{1}{n}} > \ldots$$

Şirul $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$ este descrescător şi mărginit $\left(1 < a^{\frac{1}{n}} < a\right)$. El este deci convergent. Să arătăm că limita sa este 1. Să presupunem prin absurd că 1 nu este limita şirului $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$. Aceasta înseamnă că există un număr $\varepsilon_0 > 0$, cu proprietatea că pentru oricare număr N există un număr $n > N$ astfel ca $\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| > \varepsilon_0$, sau, $\left(\text{deoarece } a^{\frac{1}{n}} > 1\right)$, $a^{\frac{1}{n}} - 1 > \varepsilon_0$, sau $a^{\frac{1}{n}} > 1 + \varepsilon_0$, sau încă $a > (1 + \varepsilon_0)^n$; atunci, în baza inegalităţii $(1 + \varepsilon_0)^n \geqslant 1 + n\varepsilon_0$ a lui Bernoulli, avem cu atît mai mult $a \geqslant 1 + n\varepsilon_0$. Deoarece $\varepsilon_0 > 0$, *există* însă un număr N astfel ca $a < N\varepsilon_0 < 1 + N\varepsilon_0$, şi deci pentru *orice* $n > N$ avem de asemenea $a < 1 + n\varepsilon_0$. Am ajuns astfel la o contradicţie.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

L e m a 2. Dacă $a > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

O b s e r v a ţ i e. Şirul $\left(a^{-\frac{1}{n}}\right)$ este *crescător* şi $a^{-\frac{1}{n}} < 1$ pentru orice $n \in N$.

L e m a 3. Dacă $a > 1$ şi (r_n) este un şir de numere raţionale convergent către 0, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ şi $a^{-\frac{1}{n}} \to 1$, există un număr natural p astfel ca (fig. 45).

Fig. 45

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{p}} < 1 < a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon.$$

Să notăm $\varepsilon' = \frac{1}{p}$ (p depinde de ε, deci ε' depinde de ε). Deoarece $r_n \to 0$, există un număr natural $N(\varepsilon) = N(\varepsilon')$ astfel ca $|r_n| < \varepsilon'$ sau $|r_n| < \frac{1}{p}$, adică

$$-\frac{1}{p} < r_n < \frac{1}{p}, \text{ dacă } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Deoarece $a > 1$, avem:

$$a^{-\frac{1}{p}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{p}} \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon)$$

şi deci:

$$1 - \varepsilon < a^{r_n} < 1 + \varepsilon, \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon),$$

adică:

$$|a^{r_n} - 1| < \varepsilon \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Aceasta înseamnă că $a^{r_n} \to 1$.

Lema 4. Dacă $a > 0$ şi (r_n) este un şir de numere raţionale convergent către 0, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$.

Pentru $a > 1$, proprietatea este enunţată în lema 3.
Pentru $a = 1$, avem $a^{r_n} = 1$, pentru orice n, deci $a^{r_n} \to 1$. Să presupunem $0 < a < 1$. Atunci $\frac{1}{a} > 1$, deci, în baza lemei 3, $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} \to 1$.

Atunci: $a = \frac{1}{\frac{1}{a}}$, deci $a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$ şi deci $a^{r_n} \to 1$.

Propoziţia 1. Dacă $a > 0$, şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, unde r_n şi r sînt numere raţionale, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r = a^{\lim\limits_{n\to\infty} r_n}.$$

Într-adevăr, $r_n - r \to 0$, deci $a^{r_n - r} \to 1$.
Atunci

$$a^{r_n} = a^{r_n - r + r} = a^{r_n - r}\, a^r,$$

deci $a^{r_n} \to 1 \cdot a^r$.

Observaţie. Dacă $a = 0$ şi $r_n > 0$, $r > 0$, atunci $a^{r_n} = 0$, $a^r = 0$, deci $a^{r_n} \to a^r$. Propoziţia 1 rămîne deci adevărată şi în cazul cînd baza este 0, dacă exponenţii sînt strict pozitivi.

Propoziţia 2. Dacă $a > 0$ şi (r_n) este un şir convergent de numere raţionale, atunci şirul (a^{r_n}) este de asemenea convergent.

Vom face demonstraţia pentru $a > 1$. Şirul (r_n) este mărginit (fiind convergent). Există deci un număr $M > 0$ astfel ca $-M \leqslant r_n \leqslant M$ pentru orice $n \in N$. Atunci $a^{r_n} \leqslant a^M$ pentru orice $n \in N$. Să punem $A = a^M > 0$.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece: $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ şi $a^{-\frac{1}{n}} \to 1$, există un număr natural p astfel ca:

$$1 - \frac{\varepsilon}{A} < a^{-\frac{1}{p}} < 1 < a^{\frac{1}{p}} < 1 + \frac{\varepsilon}{A}.$$

Să punem $\varepsilon' = \frac{1}{p}$ (p depinde de ε, deci ε' depinde de ε). Deoarece (r_n) este şir Cauchy (fiind convergent), există un număr $N(\varepsilon) = N(\varepsilon')$ astfel ca dacă $m, n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $-\varepsilon' < r_m - r_n < \varepsilon'$, adică

$$-\frac{1}{p} < r_m - r_n < \frac{1}{p}.$$

Atunci: $$a^{-\frac{1}{p}} < a^{r_m - r_n} < a^{\frac{1}{p}} \quad n, m \geqslant N(\varepsilon),$$

deci:

$$1 - \frac{\varepsilon}{A} < a^{r_m - r_n} < 1 + \frac{\varepsilon}{A} \quad n, m \geqslant N(\varepsilon),$$

adică:

$$-\frac{\varepsilon}{A} < a^{r_m - r_n} - 1 < \frac{\varepsilon}{A}$$

sau

$$|a^{r_m - r_n} - 1| < \frac{\varepsilon}{A} \quad n, m \geqslant N(\varepsilon).$$

Atunci:

$$|a^{r_m} - a^{r_n}| = |a^{r_n}(a^{r_m - r_n} - 1)| = a^{r_n}|a^{r_m - r_n} - 1| \leqslant$$
$$\leqslant a^M |a^{r_m - r_n} - 1| = A\,|a^{r_m - r_n} - 1|$$

şi deci dacă $m, n \geqslant N(\varepsilon)$, avem

$$|a^{r_m} - a^{r_n}| \leqslant A|a^{r_m - r_n} - 1| < A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon,$$

adică (a^{r_n}) este şir fundamental. În baza criteriului lui Cauchy rezultă că (a^{r_n}) este convergent.

Dacă $a = 1$, avem $1^{r_n} = 1$, deci (1^{r_n}) este şir convergent.

Dacă $0 < a < 1$, raţionamentul se face ca mai sus, ţinînd seama de faptul că inegalitatea dintre exponenţi se inversează pentru puteri, şi deoarece $a^{r_n} \leqslant a^{-M}$, se ia $A = a^{-M}$.

Propoziţia 3. Dacă $a > 0$, şi dacă (r_n) şi (s_n) sînt şiruri de numere raţionale, convergente către aceeaşi limită, atunci (a^{r_n}) şi (a^{s_n}) sînt de asemenea convergente către aceeaşi limită.

Într-adevăr, deoarece (r_n) şi (s_n) au aceeaşi limită avem: $r_n - s_n \to 0$, deci: $a^{r_n - s_n} \to 1$, adică

$$a^{r_n - s_n} - 1 \to 0.$$

Şirul (a^{s_n}) este convergent, deci este mărginit, şi deci:

$$a^{s_n}(a^{r_n - s_n} - 1) \to 0.$$

Atunci $a^{r_n} = (a^{r_n} - a^{s_n}) + a^{s_n}$ şi $a^{r_n} - a^{s_n} = a^{s_n}(a^{r_n - r_n} - 1) \to 0$, deci:

$$\lim_{x \to \infty} a^{r_n} = \lim_{n \to \infty} a^{s_n}.$$

6. Puteri reale

Fie $a > 0$. Vom defini acum puterea a^x cu exponentul x real.

Fie $x \in R$ şi (r_n) un şir de numere *raţionale* convergent către x. Şirul (a^{r_n}) este convergent către un număr α:

$$\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = \alpha.$$

Dacă (s_n) este alt şir de numere *raţionale* convergent către x, şirurile (a^{r_n}) şi (a^{s_n}) au aceeaşi limită α:

$$\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = \lim_{n \to \infty} a^{s_n} = \alpha.$$

Aşadar, limita α nu depinde de şirul particular de numere raţionale convergent către x, ci numai de x. Prin definiţie, puterea a^x se defineşte prin

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}, \ (\lim_{n\to\infty} r_n = x, \ r_n \in Q).$$

Puterile cu exponent real oarecare se numesc *puteri reale.*

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă $a = 0$ şi $x > 0$, urmînd procedeul de mai sus se defineşte $0^x = 0$. În adevăr, orice şir de numere raţionale (r_n) convergent către x are termenii strict pozitivi, $r_n > 0$, cu excepţia unui număr finit dintre ei, pe care-i putem înlătura. Atunci

$$0^{r_n} = 0, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} 0^{r_n} = 0 \text{ şi deci } 0^x = \lim_{n\to\infty} 0^{r_n} = 0.$$

2° Dacă $x = r$ este raţional, puterea a^x definită aici considerînd pe x real coincide cu puterea raţională a^r definită anterior.

În adevăr, oricare ar fi şirul de numere raţionale (r_n) convergent către r, avem

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Pe de altă parte, conform definiţiei puterii a^x avem

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Limita unui şir fiind unică, deducem $a^x = a^r$.

În particular $a^0 = 1$, $(a > 0)$, $a^1 = a$, $(a \geqslant 0)$, unde 0 şi 1 sînt considerate numere reale.

7. Proprietăţile puterilor reale

Puterile reale au aceleaşi proprietăţi ca şi puterile raţionale (ori de cîte ori exponentul este $\leqslant 0$, se consideră baza > 0).

1) $a^x a^y = a^{x+y}$; $\quad \dfrac{a^x}{b^y} = a^{x-y}$.

2) $(a^x)^y = a^{xy}$.

3) $(ab)^x = a^x b^x$; $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

4) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

5) Dacă $a > 1$ şi $x > 0$, atunci $a^x > 1$.

6) Dacă $x_n \to x$, atunci $a^{x_n} \to a^x$, $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right)$

7) Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, şi $a^{x_n} \to a^x$, atunci $x_n \to x$.

Să observăm întîi că dacă $a > 0$, atunci $a^x > 0$, oricare ar fi $x \in R$.
Într-adevăr, dacă $a > 1$, alegem un şir *crescător* de numere raţionale $r_n \to x$. Atunci (şirul a^{r_n}) este de asemenea *crescător* şi $a^{r_n} \to a^x$, deci $a^{r_n} \leqslant a^x$ pentru orice n. Dar $a^{r_n} > 0$, deci $a^x > 0$. Dacă $0 < a < 1$, alegem un şir *descrescător* de numere raţionale $r_n \to x$. Atunci şirul (a^{r_n}) este *crescător*, şi ca mai sus deducem că $a^x > 0$.
În particular, dacă $a > 1$ şi $x > 0$, putem alege un şir *crescător* (r_n) de numere raţionale strict pozitive convergent către x, $r_n > 0$, $r_n \to x$. Atunci $a^{r_n} > 1$, şi deci $a^x > 1$, şi astfel proprietatea 5) este demonstrată. Să demonstrăm acum celelalte proprietăţi.
1) Fie $r_n \to x$ şi $s_n \to y$; atunci $r_n + s_n \to x + y$, deci

$$a^{x+y} = \lim_n a^{r_n+s_n} = \lim_n (a^{r_n} \cdot a^{s_n}) = \lim_n a^{r_n} \cdot \lim_n a^{s_n} = a^x \cdot a^y.$$

3) Fie $r_n \to x$. Atunci

$$(ab)^x = \lim_{n\to\infty} (ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} \cdot b^{r_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^x \cdot b^x.$$

Deoarece $b > 0$, avem $b^x > 0$; atunci

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{r_n}}{b^{r_n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n}} = \frac{a^x}{b^x}.$$

4) Fie $r_n \to x$. Avem $-r_n \to -x$ şi $a^{-r_n} = \dfrac{1}{a^{r_n}}$, deci

$$a^{-x} = \lim_n a^{-r_n} = \lim_n \frac{1}{a^{r_n}} = \frac{1}{\lim\limits_n a^{r_n}} = \frac{1}{a^x},$$

deoarece, pentru $a > 0$, avem $a^x > 0$.

6) Fie $x_n \to x$. Pentru orice $n \in N$ avem

$$x_n - \frac{1}{n} < x_n < x_n + \frac{1}{n}.$$

Există numere *raţionale* r_n şi s_n astfel ca

$$x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < s_n < x_n + \frac{1}{n}.$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = x + 0 = x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = x + 0 = x$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Deducem atunci că $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$.

Dacă $a > 1$, avem: $a^{r_n} < a^{x_n} < a^{s_n}$,

şi deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} = a^x$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.

Dacă $a = 1$, evident $1^{x_n} = 1$, $1^x = 1$ şi $1^{x_n} \to 1^x$.

Dacă $0 < a < 1$, avem $a^{r_n} > a^{x_n} > a^{s_n}$, şi deducem iarăşi că

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x.$$

Dacă $a = 0$ şi $x > 0$, înlăturînd la nevoie un număr finit de termeni ai şirului x_n, putem presupune $x_n > 0$. În acest caz $a^{x_n} = 0$, $a^x = 0$ şi $0^{x_n} \to 0^x$.

7) Vom arăta mai întîi că dacă $a > 1$, şi $a^{y_n} \to 1$, atunci $y_n \to 0$.

Dacă, prin absurd, şirul (y_n) n-ar avea limita 0, ar exista o vecinătate $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ a lui 0, $\varepsilon_0 > 0$, în afara căreia se află o *infinitate* de termeni y_n, deci avem $y_n < -\varepsilon_0$ sau $\varepsilon_0 < y_n$ pentru o infinitate de indici. Pentru aceşti indici avem:

$$a^{y_n} < a^{-\varepsilon_0} < 1 \text{ sau } 1 < a^{\varepsilon_0} < a^{y_n},$$

adică a^{y_n} se află în afara vecinătăţii $(a^{-\varepsilon_0}, a^{\varepsilon_0})$ a lui 1, pentru o infinitate de indic deci şirul a^{y_n} nu tinde către 1, ceea ce contrazice ipoteza.

Dacă $0 < a < 1$ şi $a^{y_n} \to 1$, atunci $y_n \to 0$.

Într-adevăr $\frac{1}{a} > 1$, şi $\left(\frac{1}{a}\right)^{y_n} = \frac{1}{a^{y_n}} \to 1$, deci $y_n \to 0$.

Dacă $a > 0$ şi $a \neq 1$, şi dacă $a^{x_n} \to a^x$, atunci $x_n \to x$. Într-adevăr, deoarece $a^{x_n} \to a^x$, avem:

$$\frac{a^{x_n}}{a^x} \to 1,\ (a^x > 0), \text{ adică } a^{x_n - x} \to 1, \text{ de unde } x_n - x \to 0 \text{ şi deci } x_n \to x.$$

O b s e r v a ţ i e. Pentru $a = 0$ sau $a = 1$, proprietatea 7) nu mai este adevărată, deoarece avem $0^{x_n} = 0$ şi $0^x = 0$, deci $0^{x_n} \to 0^x$, chiar dacă şirul (x_n) nu tinde către x. De asemenea, avem $1^{x_n} = 1$ şi $1^x = 1$, deci $1^{x_n} \to 1^x$ chiar dacă şirul (x_n) nu tinde către x.

2) Să demonstrăm acum proprietatea $(a^x)^y = a^{xy}$. Să presupunem întîi $a > 1$, şi $y = t$ *raţional* şi să arătăm că $(a^x)^t = a^{xt}$.

Fie (r_n) un şir *crescător* convergent către x şi (s_n) un şir *descrescător* convergent către x. Pentru fiecare $n \in N$ avem:

$$r_n \leqslant x \leqslant s_n,$$

deci:

$$a^{r_n} \leqslant a^x \leqslant a^{s_n}.$$

Dacă $t \geqslant 0$, avem

$$(a^{r_n})^t \leqslant (a^x)^t \leqslant (a^{s_n})^t$$

sau:

$$a^{r_n t} \leqslant (a^x)^t \leqslant a^{s_n t}$$

şi deoarece $r_n t \to xt$ şi $s_n t \to xt$, avem $a^{r_n t} \to a^{xt}$ şi $a^{s_n t} \to a^{xt}$ şi deci $(a^x)^t = a^{xt}$.

Dacă $t \leqslant 0$, avem

$$(a^{r_n})^t \geqslant (a^x)^t \geqslant (a^{s_n})^t$$

şi în acelaşi mod se deduce că $(a^x)^t = a^{xt}$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $\frac{1}{a} > 1$, deci

$$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^x\right)^t = \left(\frac{1}{a}\right)^{xt} \text{ sau } \frac{1}{(a^x)^t} = \frac{1}{a^{xt}}, \text{ de unde: } (a^x)^t = a^{xt}.$$

Dacă $a = 1$, evident $a^x = 1$, $(a^x)^t = 1$, şi $a^{xt} = 1$, deci $(a^x)^t = a^{xt}$. Dacă $a = 0$, $x > 0$ şi $t > 0$, avem de asemenea $(a^x)^t = a^{xt} = 0$.

Să demonstrăm acum că $(a^x)^y = a^{xy}$.

Fie (t_n) un şir de numere raţionale convergent către y.
Avem:

$$(a^x)^{t_n} = a^{xt_n}.$$

Dar $(a^x)^{t_n} \to (a^x)^y$, iar $xt_n \to xy$, deci $a^{xt_n} \to a^{xy}$, de unde

$$(a^x)^y = \lim_n (a^x)^{t_n} = \lim_n a^{xt_n} = a^{xy}.$$

Din proprietăţile precedente ale puterilor reale se deduc încă următoarele proprietăţi:

8) Dacă $0 < a < 1$ şi $x > 0$, atunci $a^x < 1$.

9) Dacă $x < 0$, atunci $a^x < 1$ pentru $a > 1$,
$a^x > 1$ pentru $0 < a < 1$.

10) Dacă $x < y$, atunci $a^x < a^y$ pentru $a > 1$,
$a^x > a^y$ pentru $0 < a < 1$.

11) Dacă $0 < a < b$, atunci $a^x < b^x$ pentru $x > 0$.
$a^x > b^x$ pentru $x < 0$.

Demonstraţia acestor proprietăţi se face ca şi pentru puterile întregi şi raţionale.

Aplicaţie. Dacă $a \geqslant 2$, avem $a^x > x$ oricare ar fi $x \in R$.

Într-adevăr, dacă $x \leqslant 0$ avem $a^x > x$, deoarece $a^x > 0$ oricare ar fi $x \in R$. Dacă $0 < x < 1$, avem $a^0 < a^x$ şi deoarece $a^0 = 1$, deducem $a^x > 1 > x$. Fie $x \geqslant 1$, şi n un număr *natural* astfel ca $n \leqslant x \leqslant n + 1$. Atunci: $a^n \leqslant a^x < a^{n+1}$. Dar $a^n > n + 1 > x$, deci $a^x \geqslant a^n > x$, adică $a^x > x$. În particular, $e^x > x$, oricare ar fi $x \in R$.

8. Logaritmi

Să considerăm ecuaţia:

$$a^x = b$$

şi să vedem în ce caz această ecuaţie are o *soluţie unică* (pozitivă sau negativă).

Deoarece expoenentul x este real, pentru ca puterea a^x să aibă sens este necesar ca $a \geqslant 0$ (dacă $x \leqslant 0$ este necesar ca $a > 0$). Atunci, pentru a avea loc egalitatea $a^x = b$ este necesar de asemenea ca $b \geqslant 0$.

Vom elimina mai întîi mai multe cazuri:

1) Dacă $a = 0$ şi $b = 0$, ecuaţia $0^x = 0$ are ca soluţie *orice* număr real $x > 0$, deci are o infinitate de soluţii.

2) Dacă $a = 0$ şi $b > 0$, ecuaţia $0^x = b$ nu are nici o soluţie, deoarece $0^x = 0$ oricare ar fi $x > 0$.

Aşadar, dacă $a = 0$, ecuaţia $a^x = b$ *nu* are o soluţie unică, oricare ar fi $b \geqslant 0$.

3) Dacă $a > 0$ şi $b = 0$, ecuaţia $a^x = 0$ nu are nici o soluţie, deoarece $a^x > 0$, oricare ar fi $x \in R$.

Din 1) şi 3) deducem că dacă $b = 0$, ecuaţia $a^x = b$ *nu* are o soluţie unică, oricare ar fi $a \geqslant 0$.

4) Dacă $a = 1$ şi $b = 1$, ecuaţia $1^x = 1$ are ca soluţie *orice* număr real $x \in R$.

5) Dacă $a = 1$ şi $b \neq 1$, ecuaţia $1^x = b$ nu are *nici* o soluţie deoarece $1^x = 1$.

Aşadar, dacă $a = 1$, ecuaţia $a^x = b$ nu are o soluţie unică, oricare ar fi $b \geqslant 0$.

A rămas de studiat cazul cînd $a > 0$ şi $a \neq 1$, iar $b > 0$.

În acest caz, ecuaţia $a^x = b$ are o singură soluţie care poate fi pozitivă sau negativă, în particular 0.

Propoziţie. Dacă $a > 0$, $a \neq 1$ şi $b > 0$, ecuaţia $a^x = b$ are o singură soluţie.

a) Vom presupune mai întîi că $a > 1$ şi $b \geqslant 1$. Şirul (a^n) este strict crescător şi nemărginit:

$$1 < a < a^2 < a^3 < \ldots < a^n < \ldots$$

Există doi termeni consecutivi în acest şir, între care se află b.

$$a^k \leqslant b < a^{k+1} \quad (k \geqslant 0).$$

Să împărţim intervalul $[k, k+1]$ în două părţi egale prin punctul c; avem $k < c < k+1$, deci

$$a^k < a^c < a^{k+1}.$$

Să notăm cu $[x_1, y_1]$ acela din segmentele $[k, c]$ sau $[c, k+1]$, pentru care

$$a^{x_1} \leqslant b < a^{y_1}.$$

Avem

$$y_1 - x_1 = \frac{1}{2}.$$

Să presupunem că am găsit două numere $x_n < y_n$ astfel ca

$$a^{x_n} \leqslant b < a^{y_n} \text{ şi } y_n - x_n = \frac{1}{2^n}.$$

Împărţind segmentul $[x_n, y_n]$ în două părţi egale prin punctul c_n, avem $x_n < c_n < y_n$ şi

$$a^{x_n} < a^{c_n} < a^{y_n}.$$

Numărul b este cuprins între două puteri consecutive dintre acestea. Să notăm cu x_{n+1} şi y_{n+1} exponenţii celor două puteri consecutive pentru care

$$a^{x_{n+1}} \leqslant b < a^{y_{n+1}}.$$

Avem de asemenea

$$x_n \leqslant x_{n+1} < y_{n+1} \leqslant y_n \text{ şi } y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

În acest fel am demonstrat prin inducţie completă că putem găsi două şiruri (x_n) şi (y_n), astfel ca:

$$1^\circ \; x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant \ldots \leqslant y_2 \leqslant y_1.$$

$$2^\circ \; y_n - x_n = \frac{1}{2^n}, \qquad n \in N.$$

$$3^\circ \; a^{x_n} \leqslant b \leqslant a^{y_n}, \qquad n \in N.$$

Din primele două condiţii deducem că cele două şiruri au o limită comună x_0:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x_0.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n} = a^{x_0}$, şi din condiţia 3° deducem că $a^{x_0} = b$, deci x_0 este o soluţie a ecuaţiei.

Să remarcăm că dacă $b > 1$, atunci $x_0 > 0$; în adevăr, dacă am avea $x_0 \leqslant 0$, deoarece $a > 1$, ar rezulta $a^{x_0} \leqslant 1$ şi cum $b > 1$ nu am putea avea egalitatea $a^{x_0} = 1$.

Dacă $b = 1$, $x_0 = 0$ este soluţie a ecuaţiei deoarece $a^0 = 1 = b$.

b) Să presupunem acum $a > 1$ şi $0 < b < 1$. Atunci $\frac{1}{b} > 1$, deci ecuaţia $a^x = \frac{1}{b}$ are o soluţie $y_0 > 0$,

$$a^{y_0} = \frac{1}{b},$$

de unde $a^{-y_0} = b$ şi punînd $x_0 = -y_0$ avem $a^{x_0} = b$, deci $x_0 < 0$, este soluţie a ecuaţiei.

Din *a)* şi *b)* rezultă că, dacă $a > 1$ şi $b > 0$, ecuaţia $a^x = b$ are o soluţie x_0 şi anume $x_0 > 0$ dacă $b > 1$, $x_0 = 0$ dacă $b = 1$ şi $x_0 < 0$ dacă $0 < b < 1$.

c) Să presupunem $0 < a < 1$ şi $b > 0$. Atunci $\frac{1}{a} > 1$, deci ecuaţia $\left(\frac{1}{a}\right)^x = b$ are o soluţie y_0:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{y_0} = b$$

sau $\frac{1}{a^{y_0}} = b$ sau $a^{-y_0} = b$. Punînd $x_0 = -y_0$ obţinem $a^{x_0} = b$, adică x_0 este soluţie a ecuaţiei.

Am demonstrat astfel că în toate cazurile, dacă $a > 0$, $a \neq 1$ şi $b > 0$, ecuaţia a^x are o soluţie.

Rămîne de arătat că în aceste cazuri soluţia este *unică*. Dacă ar exista două numere $x_1 < x_2$ astfel ca $a^{x_1} = b$ şi $a^{x_2} = b$, am ajunge la contradicţie. Într-adevăr, dacă $a > 1$, atunci $a^{x_1} < a^{x_2}$, iar dacă $0 < a < 1$, atunci $a^{x_1} > a^{x_2}$, deci în ambele cazuri $a^{x_1} \neq a^{x_2}$, deci nu putem avea $a^{x_1} = b = a^{x_2}$.

Să observăm că ecuaţia $a^x = a$ are soluţia unică $x = 1$:

$$a^1 = a.$$

Definiţie. Fie $a > 0$, $a \neq 1$ şi $b > 0$. Numărul unic x cară verifică egalitatea $a^x = b$ se numeşte logaritmul lui b în baza a şi se noteaze $\log_a b$:

$$x = \log_a b.$$

Aşadar

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b.$$

Observaţii. Pentru ca logaritmul unui număr b într-o bază a să aibă sens, trebuie ca baza să fie *strict pozitivă şi diferită de* 1 ($a > 0$ $a \neq 1$), iar numărul b să fie *strict pozitiv* ($b > 0$).

Nu au sens logaritmii numerelor *negative*; în particular nu are sens logaritmul lui 0.

Din definiţia logaritmului $x = \log_a b$, ca soluţie a ecuaţiei $a^x = b$, rezultă

$$a^{\log_a b} = b.$$

Avem $\log_a a = 1$, deoarece $a^1 = a$, şi
$\log_a 1 = 0$, deoarece $a^0 = 1$.

De asemenea $\log_a b = \log_a c$ dacă şi numai dacă $b = c$.

9. Proprietăţile logaritmilor

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$,

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

În particular, $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$.

3) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.

4) dacă $a > 1$, atunci $\log_a x > 0$ pentru $x > 1$.
$\log_a x < 0$ pentru $0 < x < 1$,

5) $a^{\log_a x} = x$, $\log_a a^x = x$.

6) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $(x_n > 0,\ x > 0)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a x$ şi, reciproc, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a x$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Demonstraţie. Fie $u = \log_a x$ şi $v = \log_a y$, deci $a^u = x$ şi $a^v = y$. Atunci:

$$a^{u+v} = a^u \cdot a^v = x \cdot y,$$

deci

$$u + v = \log_a(x \cdot y), \text{ adică } \log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y),$$

de unde rezultă proprietatea 1). Mai departe

$$a^{u-v} = a^u \cdot a^{-v} = \frac{a^u}{a^v} = \frac{x}{y},$$

deci $u - v = \log_a \frac{x}{y}$, adică $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$,

de unde rezultă proprietate 2). Cazul particular se obţine luînd $x = 1$, deoarece $\log_a 1 = 0$.

Pentru a demonstra proprietatea 3), să punem

$$u = \log_a x, \text{ deci } a^u = x.$$

Atunci

$$a^{\alpha u} = (a^u)^\alpha = x^\alpha,$$

deci $\alpha u = \log_a x^\alpha$, adică $\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha$.

Proprietatea 4) a rezultat în cursul demonstraţiei proprietăţii precedente.

Prima proprietate de la 5) a rezultat din definiţia logaritmilor, iar partea a doua rezultă din proprietatea 3), luînd $x = a$:

$$\log_a a^\alpha = \alpha \log_a a = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Pentru demonstrarea proprietăţii 6), să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Să punem

$$u_n = \log_a x_n \text{ şi } u = \log_a x,$$

deci,

$a^{u_n} = x_n$ şi $a^u = x$. Din condiţia $x_n \to x$, adică $a^{u_n} \to a^u$ rezultă $u_n \to u$, deoarece $a > 0$ şi $a \neq 1$, adică $\log_a x_n \to \log_a x$. Reciproc, să presupunem $\log_a x_n \to \log_a x$, adică $u_n \to u$. Atunci $a^{u_n} \to a^u$, adică $x_n \to x$.

Din proprietăţile precedente rezultă încă următoarele proprietăţi:

7) Dacă $a < 1$, atunci $\log_a x < 0$ pentru $x > 1$,
$\log_a x > 0$ pentru $0 < x < 1$.

8) Dacă $a > 1$ şi $x < y$, atunci $\log_a x < \log y$.
Dacă $0 < a < 1$ şi $x < y$, atunci $\log_a x > \log_a y$.

Într-adevăr, notînd $u = \log_a x$ şi $v = \log_a y$, adică $a^u = x$ şi $a^v = y$, dacă $a > 1$, atunci $a^u < a^v$ dacă şi numai dacă $u < v$, deci $x < y$ dacă şi numai dacă $\log_a x < \log_a y$. De asemenea, dacă $0 < a < 1$, atunci $a^u < a^v$ dacă şi numai dacă $u > v$, deci $x < y$ dacă şi numai dacă $\log_a x > \log_a y$.

9) Formula de schimbare a bazei:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

$$(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ c > 0).$$

Fie $u = \log_a b$, deci $a^u = b$ şi $v = \log_b c$, deci $b^v = c$. Atunci $a^{uv} = b^v = c$, deci $uv = \log_a c$, adică

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$$

În particular, luînd $c = a$, avem $\log_a a = 1$, deci

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Logaritmii în baza e se numesc *logaritmi naturali* sau *logaritmi neperieni* (de la numele matematicianului Neper). În loc de $\log_e x$ se scrie: $\ln x$, sau $\log x$.

Deoarece $e > 1$, rezultă

$\ln x > 0$ dacă $x > 1$,
$\ln x < 0$ dacă $x < 1$,
$\ln x < \ln y$ dacă şi numai dacă $x < y$.

Logaritmii în baza 10 se numesc *logaritmi zecimali*. În loc de $\log_{10} x$ se scrie $\lg x$.

Propoziţie. Dacă $a_n \to a$, $(a_n > 0,\ a > 0)$ **şi** $\alpha_n \to \alpha$, **atunci** $a_n^{\alpha_n} \to a^{\alpha}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\alpha_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n}.$$

În adevăr, $a_n^{\alpha_n} = e^{\ln a_n^{\alpha_n}} = e^{\alpha_n \ln a_n}$.

Dar: $\alpha_n \ln a_n \to \alpha \ln a$ şi deci $e^{\alpha_n \ln a_n} \to e^{\alpha \ln a}$,

adică: $e^{\ln a_n^{\alpha_n}} \to e^{\ln a^{\alpha}}$ şi deci $a_n^{\alpha_n} \to a^{\alpha}$.

Corolar. Dacă $a_n \to a$, $(a_n > 0,\ a > 0)$, **atunci**

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\alpha} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\alpha}.$$

Observaţie. Dacă $\alpha_n > 0$ şi $\alpha > 0$, propoziţia precedentă este adevărată şi în cazul cînd $a_n \geqslant 0$ şi $a_n \to 0$.

În acest caz $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

Într-adevăr, fie $(-\varepsilon, \varepsilon)$ o vecinătate a lui 0, unde $0 < \varepsilon < 1$. Să arătăm că $a_n^{\alpha_n} \leqslant \varepsilon$, pentru toţi indicii, cu excepţia unui număr finit dintre ei.

Deoarece $\alpha_n \to \alpha$, şirul α_n este mărginit; fie $M > 0$ astfel ca $\alpha_n \leqslant M$ pentru orice n. Avem $\varepsilon^M < \varepsilon$, deoarece $0 < \varepsilon < 1$.

Deoarece $a_n \to 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît $0 \leqslant a_n < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$.

Deoarece $\alpha_n > 0$, avem

$$0 \leqslant a_n^{\alpha_n} < \varepsilon^{\alpha_n} < \varepsilon^M < \varepsilon, \quad n \geqslant N(\varepsilon_2),$$

adică $0 \leqslant a_n^{\alpha_n} < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$, de unde rezultă că $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

Dacă însă $a_n \to 0$ şi $\alpha_n \to 0$, despre şirul $(a_n^{\alpha_n})$ nu putem afirma nimic. Uneori are limită pozitivă, nulă, finită sau $+\infty$; alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi α, $0 \leqslant \alpha \leqslant +\infty$, există un şir $a_n \to 0$ şi un şir $\alpha_n \to 0$, astfel încît $a_n^{\alpha_n} \to \alpha$.

Exemple.

1) $(a_n): e^{-1}, e^{-2}, \ldots, e^{-n}, \ldots$ $\qquad a_n \to 0$

$(\alpha_n): -\alpha, -\dfrac{\alpha}{2}, \ldots, -\dfrac{\alpha}{n}, \ldots$ $\qquad \alpha_n \to 0$

$(a_n^{\alpha_n}): e^{\alpha}, e^{\alpha}, \ldots, e^{\alpha}, \ldots$ $\qquad a_n^{\alpha_n} \to e^{\alpha}$.

Dînd lui α toate valorile reale, se obţin pentru e^{α} toate valorile strict pozitive.

2) $(a_n): e^{-1}, e^{-2^2}, e^{-3^2}, \ldots, e^{-n^2}, \ldots$ $\qquad a_n \to 0$

$(\alpha_n): 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$ $\qquad \alpha_n \to 0$

$(a_n^{\alpha_n}): e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, \ldots, e^{-n}, \ldots$ $\qquad a_n^{\alpha_n} \to 0$

3) $(a_n): e^{-1}, e^{-2^2}, e^{-3^2}, \ldots, e^{-n^2}, \ldots$ $\qquad a_n \to 0$

$(\alpha_n): -1, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots, -\dfrac{1}{n}, \ldots$ $\qquad \alpha_n \to 0$

$(a_n^{\alpha_n}): e, e^2, e^3, \ldots, e^n, \ldots$ $\qquad a_n^{\alpha_n} \to +\infty$

4) $(a_n): e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, e^{-4}, \ldots$ $\qquad a_n \to 0$

$(\alpha_n): 1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \ldots$ $\qquad \alpha_n \to 0$

$(a_n^{\alpha_n}): e^{-1}, e, e^{-1}, e, \ldots$ $\qquad a_n^{\alpha_n}$ nu are limită.

Capitolul IV

DREAPTA ÎNCHEIATĂ

Necesitatea de a îngloba într-o formulare unitară unele propoziţii fundamentale ale analizei impune, după cum vom vedea mai jos, introducerea, pe lîngă numerele reale, a două simboluri, $+\infty$ şi $-\infty$, numite *numere improprii* sau *numere infinite*.

Pentru a face o deosebire, numerele reale vor fi numite uneori *numere finite*.

Mulţimea formată din toate numerele reale, împreună cu $+\infty$ şi $-\infty$, se numeşte *dreapta încheiată* şi se notează cu $\overline{R}$.

Prin *mulţime de numere* sau şir de numere vom înţelege în continuare mulţime de numere finite, respectiv *şir de numere finite*. Simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$ vor apărea doar ca limite ale unor şiruri divergente, sau ca margini ale mulţimilor nemărginite (care se pot reduce tot la limite de şiruri divergente)

§ 1. Mulţimi nemărginite

1. Mulţimi nemajorate

Ştim că orice mulţime *majorată* A are o *margine superioară* M, *care este cel mai mic majorant al mulţimii* A. În scris:

$$M = \sup A \text{ sau } M = \sup_{x\in A} x.$$

Reamintim că marginea superioară M este caracterizată de următoarele două proprietăţi:

1) $x \leqslant M$ pentru orice $x \in A$.

2) Dacă $\alpha < M$, există cel puţin un punct $x \in A$, astfel ca $\alpha < x$.

Dacă A nu este majorată vom spune că marginea sa superioară este $+\infty$ (*plus infinit*). În scris:

$$\sup A = +\infty \text{ sau } \sup_{x\in A} x = +\infty.$$

Pentru ca $+\infty$ să-şi justifice denumirea de *margine superioară*, sîntem conduşi să-i atribuim anumite proprietăţi astfel încît fie verificate proprietăţile 1) şi 2) ale marginii superioare definite anterior.

Pentru aceasta, vom pune prin definiţie

$$x < +\infty \text{ pentru orice număr real } x.$$

Atunci :

1) $x < +\infty$ pentru orice $x \in A$.

2) dacă $\alpha < +\infty$, există cel puţin un punct $x \in A$ astfel ca $\alpha < x$ (deoarece A nu este majorată).

Putem acum da următoarea formulare unitară :

Propoziţia 1. Orice mulţime A are o margine superioară M caracterizată de proprietăţile 1) şi 2). Marginea superioară M este finită dacă şi numai dacă mulţimea A este majorată.

Exemple.

1) $\sup N = +\infty$ sau $\sup\limits_{n \in N} n = +\infty$.

2) $\sup Q = +\infty$ sau $\sup\limits_{x \in Q} x = +\infty$.

3) $\sup R = +\infty$ sau $\sup\limits_{x \in R} x = +\infty$.

4) $\sup\limits_{n \in N} (2^n) = +\infty$.

Observaţie. Din inegalitatea $x < +\infty$ pentru orice $x \in R$ rezultă în particular $0 < +\infty$, ceea ce ne determină să scriem şi ∞ în loc de $+\infty$, după cum scriem, de exemplu, 5 în loc de $+5$.

2. Mulţimi neminorate

Ştim că orice mulţime *minorată* A are *o margine inferioară* m, *care este cel mai mare minorant al mulţimii* A :

$$m = \inf A \text{ sau } m = \inf_{x \in A} x.$$

Marginea inferioară m este caracterizată de următoarele două proprietăţi :

1') $m \leqslant x$ pentru orice $x \in A$;

2') dacă $m < \alpha$, există cel puţin un punct $x \in A$ astfel încît $x < \alpha$.

Dacă A nu este minorată, vom spune că marginea sa inferioară este $-\infty$ (minus infinit).

Vom pune prin definiţie

$$-\infty < x \text{ pentru orice număr real } x.$$

Atunci:

1') $-\infty < x$ pentru orice $x \in A$;

2') dacă $-\infty < \alpha$, există cel puţin un punct $x \in A$ astfel ca $x < \alpha$ (deoarece A nu este minorată).

Putem da acum următoarea formulare unitară:

P r o p o z i ţ i a 2. **Orice mulţime A are o margine inferioară m, caracterizată de proprietăţile 1') şi 2'). Marginea inferioară m este finită dacă şi numai dacă mulţimea A este minorată.**

Exemple.

1) $\inf\limits_{n \in N} (-n) = -\infty$.

2) $\inf Q = -\infty$ sau $\inf\limits_{x \in Q} x = -\infty$.

3) $\inf R = -\infty$ sau $\inf\limits_{x \in R} x = -\infty$.

4) $\inf\limits_{x>0} (\ln x) = -\infty$.

3. Mulţimi nemărginite

Ştim că orice mulţime *mărginită* A are o margine inferioară m şi o margine superioară M şi $m \leqslant M$; avem $m < M$ afară de cazul cînd $A = \{a\}$, caz în care $m = M = a$.

Din cele de mai sus rezultă că putem da următoarea formulare unitară:

P r o p o z i ţ i a 3. **Orice mulţime A are o margine inferioară m şi o margine superioară** M (finite sau infinite).

Pentru a putea afirma că $m \leqslant M$, şi în cazul cînd $m = -\infty$ şi $M = +\infty$, vom pune prin definiţie

$$-\infty < +\infty.$$

Cu această convenţie, avem totdeauna

$$\inf A \leqslant \sup A,$$

semnul egal avînd loc dacă şi numai dacă mulţimea A este formată dintr-un singur punct.

O b s e r v a ţ i e. Prin cele trei convenţii de mai sus, am extins structura de ordine la dreapta încheiată $\overline{R}$. Cu această structură de ordine, dreapta încheiată este o mulţime *total ordonată*.

Acum se justifică modul de notare a intervalelor nemărginite:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x \in R, x > a\};$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid x \in R, x \geqslant a\};$$
$$(-\infty, a) = \{x \mid x \in R, x < a\};$$
$$(-\infty, a] = \{x \mid x \in R, x \leqslant a\};$$
$$(-\infty, +\infty) = R.$$

În locul notațiilor $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ se pot folosi respectiv notațiile (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$.

4. Funcții nemărginite

Fie funcția reală $f: E \to R$ și $A \subset E$.

Dacă funcția f nu este minorată pe A, marginea sa inferioară pe A se ia, prin definiție, egală cu $-\infty$:

$$\inf_{x \in A} f(x) = -\infty.$$

Dacă funcția f nu este majorată pe A, marginea sa superioară pe A se ia, prin definiție, egală cu $+\infty$.

$$\sup_{x \in A} f(x) = +\infty.$$

Rezultă că, în toate cazurile, marginea inferioară și marginea superioară a funcției pe A sînt egale cu marginea inferioară, respectiv cu marginea superioară a mulțimii $f(A)$:

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A), \qquad \sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A).$$

Ca de obicei, cînd vom vorbi de marginile funcției fără a specifica mulțimea pe care se consideră, se subînțelege că această mulțime este domeniul de definiție E.

Avem $m = \inf\limits_{x \in E} f(x)$ dacă și numai dacă sînt îndeplinite următoarele două condiții:

1) $m \leqslant f(x)$ pentru orice $x \in E$

2) dacă $m < \alpha$, atunci există cel puțin un $x \in E$ astfel ca $f(x) < \alpha$.

Avem $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$ dacă și numai dacă sînt îndeplinite următoarele două condiții:

1) $f(x) \leqslant M$ pentru orice $x \in E$;

2) dacă $\alpha < M$, atunci există cel puțin un $x \in E$ astfel ca $\alpha < f(x)$.

Dacă funcția f este constantă, $f(x) \equiv a$, atunci

$$\inf_{x \in E} f(x) = \sup_{x \in E} f(x) = a.$$

Dacă funcţia f nu este constantă, atunci

$$-\infty \leqslant \inf_{x \in E} f(x) < \sup_{x \in E} f(x) \leqslant +\infty.$$

Funcţia f este minorată dacă şi numai dacă $\inf\limits_{x \in E} f(x)$ este finită; funcţia f este majorată dacă şi numai dacă $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ este finită. Rezultă că f este mărginită dacă şi numai dacă ambele margini ale funcţiei sînt finite.

Următoarele proprietăţi se verifică uşor:

1) Dacă $A \subset B \subset E$, atunci

$$\inf_{x \in A} f(x) \geqslant \inf_{x \in B} f(x) \qquad \sup_{x \in A} f(x) \leqslant \sup_{x \in B} f(x).$$

2) Dacă f şi g sînt două funcţii reale definite pe E şi dacă $f \leqslant g$, atunci:

$$\inf_{x \in E} f(x) \leqslant \inf_{x \in E} g(x), \qquad \sup_{x \in E} f(x) \leqslant \sup_{x \in E} g(x).$$

Deoarece un şir (x_n) este o funcţie definită pe mulţimea N a numerelor naturale, rezultă următoarele definiţii pentru marginile şirului:

$m = \inf\limits_{x \in N} x_n$ dacă şi numai dacă:

1) $m \leqslant x_n$ oricare ar fi $n \in N$;

2) dacă $m < \alpha$, atunci există un termen x_n din şir astfel ca $x_n < \alpha$.

$M = \sup\limits_{n \in N} x_n$ dacă şi numai dacă:

1) $x_n \leqslant M$ oricare ar fi $n \in N$;

2) Dacă $\alpha < M$, atunci există un termen x_n din şir astfel ca $\alpha < x_n$.

Toate proprietăţile marginilor de funcţii se păstrează, evident, şi pentru margini de şiruri.

Avem $\inf\limits_n x_n = -\infty$ dacă şi numai dacă şirul (x_n) este nemărginit inferior, şi $\sup\limits_n x_n = +\infty$ dacă şi numai dacă şirul (x_n) nu este mărginit superior.

Putem acum extinde definiţia oscilaţiei unei funcţii $f\colon E \to R$ pe o mulţime $A \subset E$. Dacă funcţia f nu este mărginită pe A (fie că nu este majorată, fie că nu este minorată), punem prin definiţie

$$\omega_f(A) = +\infty.$$

Se verifică şi în acest caz egalitatea

$$\omega_f(A) = \sup_{\substack{x' \in A \\ x'' \in A}} |f(x') - f(x'')|$$

şi proprietatea:

$$\omega_f(A) < \omega_f(B), \text{ dacă } A \subset B.$$

De asemenea, dacă pentru orice vecinătate V a unui punct $x \in E$ avem $\omega_f(V \cap E) = +\infty$, atunci se pune prin definiţie

$$\omega_f(x) = +\infty.$$

Aşadar punctele $x \in E$ pentru care oscilaţia $\omega_f(x)$ este finită sînt cele în jurul cărora f este mărginită (există o vecinătate V a lui x astfel încît f este mărginită pe $V \cap E$).

§ 2. Extinderea structurii topologice la dreapta încheiată

1. Vecinătăţile lui $+\infty$ şi $-\infty$

Am numit *vecinătăţi* ale unui punct $x \in R$ mulţimile care conţin *intervale deschise* şi mărginite de forma (a, b) cu $a < x_0 < b$.

Prin extensiune, vom numi:

vecinătăţi ale lui $+\infty$ *mulţimile care conţin intervale deschise şi nemărginite de forma* $(a, +\infty)$;

vecinătăţi ale lui $-\infty$, *mulţimile care conţin intervale deschise şi nemărginite de forma* $(-\infty, a)$.

Observaţie. Vecinătăţile lui $+\infty$ şi ale lui $-\infty$ sînt formate *numai din numere finite*, adică sînt submulţimi ale dreptei *reale* R.

Una din proprietăţile vecinătăţilor unui punct $x_0 \in R$ este aceea că x_0 aparţine fiecărei vecinătăţi ale sale. Această proprietate nu se mai păstrează pentru vecinătăţile lui $+\infty$ şi ale lui $-\infty$*.

A doua proprietate a vecinătăţilor lui x_0 (intersecţia a două vecinătăţi ale lui x_0 este de asemenea o vecinătate a lui x_0) se păstrează şi pentru vecinătăţile lui $+\infty$ şi ale lui $-\infty$. Într-adevăr, intersecţia a două semidrepte $(a, +\infty)$ şi $(b, +\infty)$ este o semidreaptă de aceeaşi formă, anume $(b, +\infty)$ dacă $a \leqslant b$; intersecţia a două semidrepte $(-\infty, a)$ şi $(-\infty, b)$ este semidreapta $(-\infty, a)$ dacă $a \leqslant b$. La fel se arată că se păstrează şi celelalte proprietăţi ale vecinătăţilor.

2. Puncte de acumulare infinite

Reamintim că un punct $x_0 \in R$ este *punct de acumulare* al unei mulţimi A, dacă fiecare vecinătate a lui x_0 conţine cel puţin un punct $x \in A$ diferit de x_0. Dacă $x_0 \notin A$, condiţia $x \neq x_0$ este verificată de la sine.

Dacă A nu este majorată, pentru orice număr $a \in R$ există cel puţin un punct $x \in A$ astfel ca $a < x$, adică astfel ca $x \in (a, +\infty)$; aceasta înseamnă că în orice vecinătate a lui $+\infty$ există cel puţin un punct $x \in A$ (evident x este diferit de $+\infty$).

* Dacă în $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ considerăm ca vecinătăţi ale lui $+\infty$ mulţimile care conţin semidrepte $(a, +\infty]$ care conţin şi pe $+\infty$, iar ca vecinătăţi ale lui $-\infty$ mulţimile care conţin semidrepte $[-\infty, a)$ care conţin şi pe $-\infty$, atunci prima proprietate a vecinătăţilor este verificată şi pentru vecinătăţile lui $+\infty$ şi ale lui $-\infty$.

Deoarece această proprietate are aceeaşi formulare ca şi proprietatea prin care se defineşte un punct de acumulare, spunem că $+\infty$ *este punct de acumulare al unei mulţimi nemajorate*.

Dacă A nu este minorată, în orice semidreaptă $(-\infty, a)$ există cel puţin un punct $x \in A$, adică în orice vecinătate a lui $-\infty$ se află cel puţin un punct $x \in A$ (evident x este diferit de $-\infty$). De aceea spunem că $-\infty$ *este punct de acumulare al unei mulţimi neminorate*.

Cu aceste denumiri, definiţia punctului de acumulare are aceeaşi formulare, fie că punctul de acumulare este finit, fie că este infinit.

De asemenea, propoziţia următoare, demonstrată iniţial pentru puncte de acumulare finite, rămîne valabilă şi pentru puncte de acumulare infinite.

Propoziţie. $x \in \overline{R}$ **este punct de acumulare al unei mulţimi** $A \subset R$ **dacă şi numai dacă în orice vecinătate a lui** x_0 **se află o infinitate de puncte din** A.

Lăsăm pe seama cititorului, ca exerciţiu, verificarea acestei propoziţii, în cazul cînd $x_0 = +\infty$ sau $x_0 = -\infty$.

Cu definiţia lui $+\infty$ şi $-\infty$ ca puncte de acumulare ale mulţimilor nemajorate, respectiv neminorate, rezultă următoarea extensiune a teoremei lui Weierstrass-Bolzano:

Orice mulţime infinită are cel puţin un punct de acumulare. Dacă mulţimea este infinită şi mărginită, mulţimea are cel puţin un punct de acumulare finit.

Observaţie. Vom continua să numim puncte aderente ale unei mulţimi A *numai punctele finite* x_0, care au proprietatea că $V \cap A \neq \emptyset$, oricare ar fi vecinătatea V a lui x_0.

Deoarece considerăm numai mulţimi de numere finite, este necesar să precizăm propoziţia următoare:

O mulţime A este închisă, dacă şi numai dacă îşi conţine toate punctele de acumulare finite.

§ 3. Şiruri cu limita $+\infty$ sau $-\infty$

Definiţia limitei unui şir convergent se extinde şi la anumite şiruri divergente.

1. Şiruri cu limită infinită

Definiţie. Spunem că $+\infty$ este limita unui şir (a_n), dacă orice vecinătate a lui $+\infty$ conţine toţi termenii şirului, cu excepţia unui număr finit dintre ei. Scriem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \lim_n a_n = +\infty \text{ sau } a_n \to +\infty.$$

Luînd vecinătăţile lui $+\infty$ de forma $(\varepsilon, +\infty)$, se obţine o formulare echivalentă, dată de următoarea

Propoziţie. Un şir (a_n) are limita $+\infty$, dacă şi numai dacă, pentru orice număr ε, rexistă un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$a_n > \varepsilon.$$

În acest enunţ *nu este* necesar ca $\varepsilon > 0$.

Corolar. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ atunci $\sup\limits_{n\in N} a_n = +\infty$.

Exemplu. Şirul numerelor naturale

$$1, 2, 3, \ldots, n \ldots$$

are limita $+\infty$

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty, \text{ sau } n \to +\infty.$$

Acest exemplu justifică în parte semnul $n \to \infty$ folosit în notaţia limitei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Justificarea acestei notaţii va fi dată în capitolul despre limite de funcţii.

Definiţie. Spunem că $-\infty$ este limita unui şir (a_n) dacă orice vecinătate a lui $-\infty$ conţine toţi termenii şirului cu excepţia unui număr finit dintre ei. Scriem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \ \lim_{n} a_n = -\infty \text{ sau } a_n \to -\infty.$$

Luînd vecinătăţile lui $-\infty$ de forma $(-\infty, \varepsilon)$, se obţine o formulare echivalentă dată de următoarea

Propoziţie. Un şir (a_n) are limită $-\infty$, dacă şi numai dacă, pentru orice număr ε, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$a_n < \varepsilon.$$

În acest enunţ *nu* este necesar ca $\varepsilon < 0$.

Corolar. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, atunci $\inf\limits_{n\in N} x_n = -\infty$.

Exemplu. Şirul

$$-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$$

are limita $-\infty$

$$\lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty \text{ sau } -n \to -\infty.$$

Observații. 1° Șirurile care au limita $+\infty$ sau $-\infty$ sînt nemărginite, deci sînt divergente. Vom continua să numim *șiruri convergente* numai șirurile care au *limita finită*.

2° Definiția limitei unui șir cu ajutorul vecinătăților are *aceeași formulare* fie că limita este finită, fie că limita este infinită.

3° Există șiruri care nu au limită, nici finită, nici infinită, cum sînt șirurile

$$0,\ 1,\ 0,\ 1, \ldots, 0,\ 1 \ldots$$

$$0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3, \ldots, 0,\ n, \ldots$$

$$1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6, \ldots$$

4° Dacă un șir este *convergent* el este *mărginit*, dar dacă este mărginit nu este neapărat convergent. Pentru șiruri cu limita infinită avem o proprietate asemănătoare:

Dacă un șir are *limita infinită* el este *nemărginit*, dar dacă este nemărginit nu are neapărat limită (infinită).

Aplicații. 1) Dacă $(p_n)_{n\in N}$ *este un șir de numere* **naturale** *cu limita* $+\infty$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$$

Să observăm mai întîi că, deoarece $p_n \to +\infty$, fiecare termen p_n din șir se repetă cel mult de un număr finit de ori. Într-adevăr, luînd $a > p_n$, în afara semidreptei $(a, +\infty)$ se află un număr *finit* de termeni, printre care și p_n și toți termenii egali cu p_n. Deoarece p_n sînt numere *naturale*, termenii $\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}$ fac parte din șirul $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$, $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots$

Dar $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, deci în afara fiecărei vecinătăți a lui e se află un număr finit de numere de forma $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, deci cu atît mai mult un număr finit de numere de forma $\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}$, și cum orice asemenea număr se repetă în șirul inițial de un număr finit de ori, rezultă că în afara fiecărei vecinătăți a lui e se află un număr finit de termeni ai șirului inițial, deci $\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} \to e$.

Exemple.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e, \text{ deoarece } n+1 \to +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e, \text{ deoarece } n^2 \to +\infty.$$

Observație. Vom folosi notația $\lim\limits_{p_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$ în loc de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$ dacă $p_n \to \infty$.

2. Criterii pentru existența limitelor infinite

Pentru şirurile cu limite infinite avem criterii simple de existenţa limitei:

1) *Dacă* $a_n \to +\infty$ *şi* $b_n \geqslant a_n$ *pentru orice* $n \in N$, *atunci* $b_n \to +\infty$.

2) *Dacă* $a_n \to -\infty$ *şi* $b_n \leqslant a_n$ *pentru orice* $n \in N$, *atunci* $b_n \to -\infty$.

Într-adevăr, dacă $a_n \to +\infty$ şi $b_n \geqslant a_n$, în afara fiecărei vecinătăţi a lui $+\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi cu atît mai mult un număr finit de termeni ai şirului (b_n) deci $b_n \to +\infty$.

Se raţionează în mod asemănător în cazul cînd $a_n \to -\infty$ şi $b_n \leqslant a_n$.

Exemple. 1) $2n > n$ şi $n \to +\infty$, deci $2n \to +\infty$.

2) dacă $a \geqslant 2$, $a^n > n$ şi $n \to +\infty$, deci $a^n \to +\infty$.

În particular $2^n \to +\infty$, $10^n \to +\infty$.

3) $-(2n+1) < -n$ şi $-n \to -\infty$, deci $-(2n+1) \to -\infty$.

3. Şiruri monotone nemărginite

Ştim că un şir monoton şi mărginit este convergent. Vom arăta acum că şirurile monotone şi nemărginite au limită infinită:

1) *Orice şir crescător şi nemărginit are limita* $+\infty$.

În adevăr, fie (a_n) un şir crescător şi nemărginit, şi fie $(a, +\infty)$ o vecinătate oarecare a lui $+\infty$. Deoarece (a_n) este nemărginit, există în şir un termen $a_N > a$, adică $a_N \in (a, +\infty)$; deoarece şirul este crescător, dacă $n \geqslant N$, avem $a_n > a_N$, deci $a_n > a$, adică $a_n \in (a, +\infty)$. În afara semidreptei $(a, +\infty)$ se află cel mult primii $N-1$ termeni, în număr finit, deci $a_n \to +\infty$.

2) *Orice şir descrescător şi nemărginit are limita* $-\infty$.

Demonstraţia se face ca mai sus.

Putem da acum următoarea formulare unitară relativă la şirurile monotone:

Orice şir monoton are limită. Limita este finită dacă şi numai dacă şirul este mărginit.

Exemple.

1) *Dacă* $a > 1$, *şirul* (a^n) *este crescător şi nemărginit, deci*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

2) *Dacă* $a > 1$, *iar* (x_n) *este crescător și nemărginit, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty.$$

În adevăr, din $x_n \leqslant x_{n+1}$ deducem $a^{x_n} \leqslant a^{x_{n+1}}$, deci șirul (a^{x_n}) este *crescător*. Dacă șirul (a^{x_n}) ar fi mărginit, el ar avea un majorant $M = a^{\alpha}$.

$$a^{x_n} \leqslant a^{\alpha} \text{ pentru orice } n \in N.$$

Rezultă $x_n \leqslant \alpha$ pentru orice $n \in N$, ceea ce contrazice ipoteza că (x_n) este nemărginit (mai precis nemajorat). Așadar (a^{x_n}) este nemărginit și, fiind și crescător, deducem

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty.$$

3) *Dacă* $a > 1$, *și* (x_n) *este crescător și nemărginit, iar* $x_n > 0$ *pentru orice* $n \in N$, *atunci*

$$\lim_{x_n\to\infty} \log_a x_n = +\infty.$$

Este evident că șirul $(\log_a x_n)$ este *crescător*.
Dacă ar fi mărginit, ar avea un majorant $M = \log_a \alpha$:

$$\log_a x_n \leqslant \log_a \alpha \text{ pentru orice } n \in N,$$

de unde $x_n \leqslant \alpha$ pentru orice $n \in N$, ceea ce contrazice ipoteza că (x_n) este nemărginit (nemajorat). Așadar, șirul $(\log_a x_n)$ este nemărginit și fiind crescător, avem $\log_a x_n \to +\infty$.

4) *Dacă* $a > 1$ *și* (x_n) *este descrescător și are limita* 0, *iar* $x_n > 0$ *pentru orice* $n \in N$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n \to -\infty.$$

Evident, șirul $(\log_a x_n)$ este *descrescător*.
Dacă ar fi mărginit, ar avea un minorant $m = \log_a \beta$ cu $\beta > 0$

$$\log_a \beta \leqslant \log_a x_n \text{ pentru orice } n \in N,$$

deci $0 < \beta \leqslant x_n$ pentru orice $n \in N$, ceea ce contrazice ipoteza că $x_n \to 0$. Așadar, șirul $(\log_a x_n)$ este *nemărginit*, și, fiind descrescător, deducem

$$\lim_{x_n\to\infty} \log_a x_n = -\infty.$$

5) *Dacă* $a > 1$, *iar* (x_n) *este descrescător și nemărginit, atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 0.$$

Este evident că șirul (a^{x_n}) este *descrescător* și *mărginit*, deoarece $0 < a^{x_n} \leqslant a^{x_1}$ pentru orice $n \in N$, deci (a^{x_n}) este convergent; fie α limita sa. Avem $0 \leqslant \alpha \leqslant a^{x_n}$ pentru orice $n \in N$. Dacă am avea $\alpha > 0$, atunci $\alpha = a^m$, și din $a^m \leqslant a^{x_n}$ deducem $m \leqslant x_n$ pentru orice $n \in N$, ceea ce contrazice ipoteza că (x_n) este nemărginit. Așadar, $\alpha = 0$, adică $a^{x_n} \to 0$.

6) *Dacă* $\alpha > 0$, iar (x_n) *este crescător şi nemărginit, atunci*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n^\alpha = +\infty.$$

În adevăr, deoarece $\alpha > 0$, din $x_n \leqslant x_{n+1}$ deducem $x_n^\alpha \leqslant x_{n+1}^\alpha$, adică (x_n^α) este crescător. Dacă ar fi majorat de un număr $M = a^\alpha$, am avea $x_n^\alpha \leqslant a^\alpha$, adică $x_n \leqslant a$ pentru orice n, ceea ce contrazice ipoteza că (x_n) este nemărginit. Aşadar, (x_n^α) este nemărginit şi fiind şi crescător avem $x_n^\alpha \to +\infty$.

7) *Dacă* $\alpha > 0$, *iar* (x_n) *este crescător şi nemărginit, atunci* $x_n^{-\alpha} \to 0$.

8) *Dacă* $\alpha > 0$, *iar* (x_n) *este descrescător şi are limita* 0, *atunci* $x_n^{-\alpha} \to +\infty$.

Pentru demonstraţie se raţionează ca mai sus.

4. Proprietăţi ale şirurilor cu limite infinite

Dacă $a_n \to +\infty$, în afara fiecărei semidrepte $(a, +\infty)$ se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi cu atît mai mult un număr finit de termeni ai oricărui subşir al său, deci:

dacă (a_n) *are limita* $+\infty$, *atunci orice subşir al şirului* (a_n) *are de asemenea limita* $+\infty$.

În mod asemănător:

dacă (a_n) *are limita* $-\infty$, *orice subşir al său are limita* $-\infty$.

Ţinînd seama şi de proprietatea corespunzătoare a şirurilor convergente, se poate da următoarea formulare unitară:

1) *Dacă un şir are limită, orice subşir al său are aceeaşi limită.*

Exemple. $\lim\limits_{n \to \infty} 2n = +\infty$; $\lim\limits_{n \to \infty} (2n - 1) = +\infty$; $\lim\limits_{n \to \infty} 2^n = +\infty$; $\lim\limits_{n \to \infty} 10^n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} n^k = +\infty$.

Raţionînd ca mai sus, propoziţia următoare rămîne valabilă şi pentru limite infinite:

2) *Dacă un şir are limită, prin adăugarea sau înlăturarea unui număr finit de termeni, obţinem un şir cu aceeaşi limită.*

Lema lui Cesàro se poate de asemenea extinde la şirurile cu limită infinită.

3) *Din orice şir se poate extrage un subşir care are limită. Dacă şirul este mărginit se poate extrage un subşir convergent.*

Într-adevăr, dacă şirul este nemajorat, pentru orice număr $p \in N$ există un termen $a_{n_p} > p$ şi deoarece $\lim\limits_{p\to\infty} p = +\infty$, rezultă $\lim\limits_{p\to\infty} a_{n_p} = +\infty$ şi $(a_{n_p})_{p\in N}$ este un subşir al şirului (a_n). Se deduce în mod asemănător că, dacă şirul este neminorat, se poate extrage un subşir cu limita $-\infty$.

4) *Prin schimbarea ordinii termenilor unui şir care are limită, se obţine un şir cu aceeaşi limită.*

Într-adevăr, dacă $a_n \to +\infty$ şi dacă (b_n) se obţine din (a_n) prin schimbarea ordinii termenilor, în afara fiecărei semidrepte $(a, +\infty)$ se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi deci *acelaşi* număr finit de termeni ai şirului (b_n), deci $b_n \to +\infty$. Se raţionează la fel în cazul cînd $a_n \to -\infty$.

Cazul cînd (a_n) este convergent a fost considerat înainte.

5) *Dacă $a_n \to +\infty$, se poate schimba ordinea termenilor astfel încît să obţinem un şir crescător cu limita $+\infty$.*

Să considerăm semidreapta $V_1 = (1, +\infty)$. În afara ei, şi anume la stînga lui 1, se află un număr finit de termeni, pe care să-i aranjăm în ordine crescătoare

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n_1}.$$

Dacă am reuşit să aranjăm în ordine crescătoare termenii din afara semidreptei $V_p = (p, +\infty)$,

$$b_1, \ldots, b_{n_1}, \ldots, b_{n_p},$$

termenii în număr finit din afara semidreptei $V_{p+1} = (p+1, +\infty)$ care apar în plus se aranjează în ordine crescătoare după b_{n_p}

$$b_1, \ldots, b_{n_2}, \ldots, b_{n_p}, b_{n_p+1}, \ldots, b_{n_{p+1}}.$$

În acest fel obţinem un şir *crescător* care conţine *toţi* termenii şirului iniţial.

Ţinînd seama de proprietatea corespunzătoare a şirurilor convergente, putem da următoarea formulare unitară.

Dacă $a_n \to a$, $(-\infty < a \leqslant +\infty)$ şi dacă $a_n < a$ pentru orice $n \in N$ se poate schimba ordinea termenilor astfel încît să obţinem un şir crescător cu limita a.

6) *Dacă $a_n \to -\infty$, se poate schimba ordinea termenilor ca să obţinem un şir descrescător cu limita $-\infty$.*

Se raţionează ca mai sus, folosind vecinătăţile $V_p = (-\infty, -p)$ ale lui $-\infty$.

Ţinînd seama şi de proprietatea corespunzătoare de la şirurile convergente, se poate da următoarea formulare unitară:

Dacă $a_n \to a$, $(-\infty \leqslant a < \infty)$ şi dacă $a < a_n$ pentru orice $n \in N$, se poate schimba ordinea termenilor ca să obţinem un şir descrescător cu limita a.

Exemple. Dacă $a > 1$ şi dacă $x_n \to +\infty$, atunci $a^{x_n} \to +\infty$. În loc de $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty$ vom scrie $\lim\limits_{x_n\to\infty} a^{x_n} = \infty$ pentru a pune în evidenţă faptul că şirul (x_n) are limita ∞.

Într-adevăr, fie (y_n) un şir *crescător* obţinut prin schimbarea ordinii termenilor şirului (x_n). Avem $y_n \to +\infty$, deci $a^{y_n} \to \infty$. Schimbînd din nou ordinea termenilor şirului (a^{y_n}), putem obţine şirul (a^{x_n}) şi deci $a^{x_n} \to +\infty$.

2) Dacă $a > 1$, şi dacă $x_n \to -\infty$, atunci $a^{x_n} \to 0$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to -\infty} a^{x_n} = 0.$$

Fie (y_n) un şir *descrescător* obţinut din (x_n) prin schimbarea ordinii termenilor. Avem $y_n \to -\infty$, deci $a^{y_n} \to 0$ şi deci $a^{x_n} \to 0$.

3) Dacă $a > 1$ şi $x_n \to +\infty$, $(x_n > 0)$, atunci $\log_a x_n \to +\infty$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to +\infty} \log_a x_n = +\infty.$$

4) Dacă $a > 1$ şi $x_n \to 0$, $(x_n > 0)$, atunci $\log_a x_n \to -\infty$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to 0} \log_a x_n = -\infty.$$

În exemplele 3 şi 4 se schimbă ordinea termenilor şirului (x_n) ca să obţinem un şir (y_n) crescător, respectiv descrescător, şi apoi se folosesc exemplele de la numărul precedent.

5) Dacă $a > 1$, şi dacă $a^{x_n} \to +\infty$, atunci $x_n \to +\infty$, iar dacă $a^{x_n} \to 0$, atunci $x_n \to -\infty$. Se pune $y_n = a^{x_n}$, deci $x_n = \log_a y_n$ şi se folosesc exemplele precedente.

6) Dacă $a > 1$ şi dacă $\log_a x_n \to +\infty$, atunci $x_n \to +\infty$, iar dacă $\log_a x_n \to -\infty$, atunci $x_n \to 0$.

Se pune $y_n = \log_a x_n$, deci $x_n = a^{y_n}$ şi se folosesc exemplele precedente.

Din exemplele de mai sus deducem pentru $a = e$

$$\lim_{x_n \to \infty} e^{x_n} = \infty; \qquad \lim_{x_n \to -\infty} e^{x_n} = 0;$$

$$\lim_{x_n \to \infty} \ln x_n = \infty; \qquad \lim_{x_n \to 0} \ln x_n = -\infty.$$

7) Dacă $\alpha > 0$ şi $x_n \to +\infty$, atunci $x_n^\alpha \to +\infty$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to +\infty} x_n^\alpha = +\infty.$$

8) Dacă $\alpha > 0$ şi $x_n \to +\infty$, atunci $x_n^{-\alpha} \to 0$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to \infty} x_n^{-\alpha} = 0.$$

9) Dacă $\alpha > 0$ şi $x_n \to 0$, $(x_n > 0)$, atunci $x_n^{-\alpha} \to \infty$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to 0} x_n^{-\alpha} = +\infty.$$

Pentru demonstraţie se schimbă ordinea termenilor şirului (x_n) ca să obţinem un şir monoton (y_n) şi apoi se folosesc proprietăţile respective ale şirurilor monotone.

7) *Dacă $a_n \to +\infty$ şi $b_n \to +\infty$, atunci orice şir format cu termenii, şirurilor (a_n) şi (b_n), într-o ordine oarecare are, limita $+\infty$.*

Într-adevăr, în afara oricărei semidrepte $(a, +\infty)$ se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi un număr finit de termeni ai şirului (b_n), deci un număr finit de termeni ai oricărui şir (c_n) format cu termenii celor două şiruri, deci $c_n \to +\infty$.

Dacă $a_n \to -\infty$ și $b_n \to -\infty$, atunci orice șir format cu termenii celor două șiruri, într-o ordine oarecare, are limita $-\infty$.

Se raționează ca mai sus.

Ținînd seama și de proprietatea corespunzătoare a șirurilor convergente, se poate da următoarea formulare unitară:

Dacă (a_n) și (b_n) au aceeași limită $x_0 \in \overline{R}$, atunci orice șir format cu termenii șirurilor (a_n) și (b_n), într-o ordine oarecare, are limita x_0.

5. Trecerea la limită în inegalități

Propoziția următoare, demonstrată la început pentru șiruri convergente, este adevărată și pentru șirurile cu limita infinită.

Dacă (a_n) și (b_n) sînt șiruri cu limită și dacă $a_n \leqslant b_n$ pentru orice $n \in N$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Într-adevăr, în toate cazurile care se pot ivi:

$a_n \to +\infty$ și $b_n \to +\infty$; $a_n \to x_0$ și $b_n \to +\infty$; $a_n \to -\infty$ și $b_n \to x_0$; $a_n \to -\infty$ și $b_n \to -\infty$ în care cel puțin una din cele două limite este infinită, inegalitatea este verificată.

Rezultă de aici că este adevărată și proprietatea următoare:

Dacă $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, iar (a_n) și (b_n) au aceeași limită $x_0 \in \overline{R}$, atunci (x_n) are limita x_0.

6. Modulul

Dacă $a_n \to +\infty$, *atunci* $|a_n| \to +\infty$.

Dacă $a_n \to -\infty$, *atunci* $|a_n| \to +\infty$.

Dacă $a_n \to +\infty$ în afara semidreptei $(0, +\infty)$ se află numai un număr finit de termeni; pentru ceilalți termeni, care se află în semidreapta $(0, +\infty)$, avem $a_n > 0$, deci $|a_n| = a_n$ și, deoarece limita unui șir nu depinde de un număr finit de termeni, avem:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Să presupunem acum că $a_n \to -\infty$ și să arătăm că $|a_n| \to +\infty$. Fie pentru aceasta $(a, +\infty)$ o vecinătate a lui $+\infty$; semidreapta $(-\infty, -a)$ este atunci o vecinătate a lui $-\infty$, deci avem $a_n < -a$ sau $|a_n| = -a_n > a$, adică $|a_n| \in (a, +\infty)$ pentru toți indicii, cu excepția unui număr finit dintre ei. Rezultă că $|a_n| \to +\infty$.

Pentru a putea afirma şi în aceste cazuri că limita modulului este egală cu modulul limitei, sîntem conduşi să punem prin definiţie.

$$|+\infty| = +\infty \text{ şi } |-\infty| = +\infty.$$

§ 4. Operaţii cu şiruri care au limită

1. Suma şirurilor care au limită

Proprietatea cunoscută: *Suma a două şiruri* **convergente** *este un şir convergent şi limita sumei este egală cu suma limitelor* se extinde, în cazul în care unul cel puţin din cele două şiruri are limita infinită, în felul următor:

I) *Dacă* $a_n \geqslant \alpha$ *şi* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to +\infty$.

II) *Dacă* $a_n \leqslant \alpha$ şi $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to -\infty$.

Într-adevăr, fie $(a, +\infty)$ o vecinătate oarecare a lui $+\infty$; atunci $(a - \alpha, +\infty)$ este de asemenea o vecinătate a lui $+\infty$. Deoarece $b_n \to +\infty$, avem $b_n \in (a - \alpha, +\infty)$, adică $b_n > a - \alpha$ pentru toţi indicii, cu excepţia unui număr finit dintre ei. Atunci

$$a_n + b_n > \alpha + a - \alpha = a,$$

adică $a_n + b_n \in (a, +\infty)$ pentru toţi indicii, cu excepţia unui număr finit dintre ei, deci $a_n + b_n \to +\infty$.
Proprietatea II) se demonstrează în mod analog.

Dacă (a_n) este convergent sau dacă $a_n \to +\infty$, atunci există α astfel ca $a_n \geqslant \alpha$, pentru orice $n \in N$. De asemenea, dacă (a_n) este convergent, sau dacă $a_n \to -\infty$, există α astfel ca $a_n \leqslant \alpha$ pentru orice $n \in N$. Din cele două proprietăţi de mai sus rezultă următoarele patru propoziţii:

1) *Dacă* $a_n \to +\infty$ *şi* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to +\infty$.

2) *Dacă* $a_n \to a$ *şi* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to +\infty$.

3) *Dacă* $a_n \to a$ *şi* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to -\infty$.

4) *Dacă* $a_n \to -\infty$ *şi* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to -\infty$.

Pentru a putea afirma şi în aceste cazuri că *limita sumei este egală cu suma limitelor*, sîntem conduşi să punem prin definiţie (notînd ∞ în loc de $+\infty$).

$\infty + \infty = \infty$

$a + \infty = \infty + a = \infty$ oricare ar fi $a \in R$;

$a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$ oricare ar fi $a \in R$;

$-\infty + (-\infty) = -\infty$.

O b s e r v a ţ i e. În cazul cînd $a_n \to +\infty$ şi $b_n \to -\infty$, despre şirul $(a_n + b_n)$ nu putem afirma nimic. Uneori şirul sumă are limită finită sau infinită, alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi $a \in R$, putem găsi un şir $a_n \to +\infty$ şi un şir $b_n \to -\infty$ astfel ca $a_n + b_n \to a$. De aceea nu se acordă nici un sens scrierii $\infty - \infty$. Spunem că operaţia $\infty - \infty$ *nu este definită*, sau că este o *operaţie fără sens*.

Exemple.

1) $(a_n): 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$
$(b_n): a-1, a-2, a-3, \ldots, a-n, \ldots$
$(a_n + b_n): a, a, a, \ldots, a, \ldots$
$a_n \to +\infty$; $b_n \to -\infty$; $a_n + b_n \to a$.

2) $(a_n): 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$
$(b_n): -1, -2, -3, -4, \ldots, -n, \ldots$
$(a_n + b_n): 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$
$a_n \to +\infty$; $b_n \to -\infty$; $a_n + b_n \to +\infty$.

3) $(a_n): 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$
$(b_n): -2, -4, -6, \ldots, -2n, \ldots$
$(a_n + b_n): -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$
$a_n \to +\infty$; $b_n \to -\infty$; $a_n + b_n \to -\infty$.

4) $(a_n): 2, 2, 4, 4, \ldots, 2n, 2n, \ldots$
$(b_n): -1, -2, -3, -4, \ldots, -2n+1, -2n, \ldots$
$(a_n + b_n): 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$
$a_n \to +\infty$; $b_n \to -\infty$; nu are limită.

Putem acum da o formulare unitară care să cuprindă atît teorema relativă la suma a două şiruri convergente, cît şi cele patru propoziţii de mai sus.

T e o r e m ă. Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limită (finită sau infinită) şi dacă suma limitelor are sens, atunci şirul sumă $(a_n + b_n)$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Cazul exceptat: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Acest caz va fi denumit mai departe „cazul $\infty - \infty$".

O b s e r v a ţ i e. Fie funcţiile $f: E \to R$ şi $g: E \to R$. Cu operaţia de adunare extinsă asupra numerelor infinite, avem următoarele relaţii:

$$\inf_{x\in E} (f(x) + g(x)) \geqslant \inf_{x\in E} f(x) + \inf_{x\in E} g(x)$$

şi:

$$\sup_{x\in E} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x).$$

Într-adevăr, dacă $m_1 = \inf\limits_{x\in E} f(x)$ şi $m_2 = \inf\limits_{x\in E} g(x)$, atunci $m_1 + m_2 \leqslant f(x) + g(x)$ pentru orice $x \in E$, deci, $m_1 + m_2 \leqslant \inf\limits_{x\in E} (f(x) + g(x))$. La fel se demonstrează şi a doua relaţie.

Pentru orice mulţime $A \subset E$ putem scrie acum egalitatea

$$\omega(A) = \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x)$$

fie că marginile sînt finite, fie că sînt infinite.

2. Produsul cu scalari al şirurilor care au limită

Ştim că dacă (b_n) este un şir convergent şi α un număr real, atunci şirul (αb_n) este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} b_n.$$

În cazul cînd şirul (b_n) are limită infinită, avem următoarele propoziţii:

I) $b_n \to +\infty$ *dacă şi numai dacă* $-b_n \to -\infty$.

Să observăm că avem $b_n > a$ dacă şi numai dacă $-b_n < -a$, deci $b_n \in (a, +\infty)$ dacă şi numai dacă $-b_n \in (-\infty, -a)$. Aşadar, în afara semidreptei $(a, +\infty)$ se află un număr finit de termeni ai şirului (b_n) dacă şi numai dacă în afara semidreptei $(-\infty, -a)$ se află numai un număr finit de termeni ai şirului $(-b_n)$. Aceasta înseamnă că $b_n \to +\infty$ dacă şi numai dacă $-b_n \to -\infty$.

Proprietatea se poate enunţa şi astfel:

$a_n \to -\infty$ *dacă şi numai dacă* $-a_n \to +\infty$.

Într-adevăr, se pune $a_n = -b_n$, deci $-a_n = b_n$ şi se aplică proprietatea de mai sus.

1) Dacă $b_n \to +\infty$ şi $\alpha > 0$, *atunci* $\alpha b_n \to +\infty$.

Să observăm că $b_n > \frac{a}{\alpha}$ dacă şi numai dacă $\alpha b_n > a$, deci $b_n \in \left(\frac{a}{\alpha}, +\infty\right)$ dacă şi numai dacă $\alpha b_n \in (a, +\infty)$.

Fie o semidreaptă oarecare $(a, +\infty)$; deoarece $b_n \to +\infty$, în afara semidreptei $\left(\frac{a}{\alpha}, +\infty\right)$ se află numai un număr finit de termeni ai şirului (b_n), deci în afara semidreptei $(a, +\infty)$ se află numai un număr finit de termeni ai şirului (αb_n) şi deci $\alpha b_n \to +\infty$.

Din proprietăţile I) şi 1) de mai sus rezultă încă următoarele proprietăţi:

2) Dacă $b_n \to -\infty$ *şi* $\alpha > 0$, *atunci* $\alpha b_n \to -\infty$.

Într-adevăr, în acest caz $-b_n \to +\infty$, deci $\alpha(-b_n) \to +\infty$ adică, $-\alpha b_n \to +\infty$ şi deci $\alpha b_n \to -\infty$.

3) *Dacă* $b_n \to +\infty$ *şi* $\alpha > 0$, *atunci* $(-\alpha)\, b_n \to -\infty$.

Într-adevăr, $(-\alpha)\, b_n = \alpha \cdot (-b_n)$, iar $-b_n \to -\infty$, deci $\alpha(-b_n) \to -\infty$, adică $(-\alpha)\, b_n \to -\infty$.

4) *Dacă* $b_n \to -\infty$ *şi* $\alpha > 0$, *atunci* $(-\alpha)\, b_n \to +\infty$.

Într-adevăr, $-b_n \to +\infty$, deci $\alpha(-b_n) \to +\infty$, sau $(-\alpha)\, b_n \to +\infty$.

O b s e r v a ţ i e. Proprietatea I) este un caz particular al proprietăţilor 3) şi 4), luînd $\alpha = -1$.

Pentru a putea scrie şi în aceste cazuri ($\alpha \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} b_n$$

sîntem conduşi să punem, pentru orice număr real $\alpha > 0$:

$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty;$$

$$\alpha(-\infty) = -\infty \cdot \alpha = -\infty;$$

$$(-\alpha)\infty = \infty(-\alpha) = -\infty;$$

$$(-\alpha)(-\infty) = -\infty(-\alpha) = +\infty.$$

Rezultă, în particular, luînd $\alpha = -1$

$$(-1)\infty = \infty(-1) = -\infty;$$

$$(-1)(-\infty) = (-\infty)(-1) = +\infty.$$

În loc de $(-1)(-\infty)$ se scrie $-(-\infty)$; deci $-(-\infty) = \infty$.

O b s e r v a ţ i e. Dacă $\alpha = 0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha b_n = 0$, oricare ar fi şirul (b_n), fie că are, fie că nu are limită. Într-adevăr, şirul (αb_n) este constant şi are toţi termenii nuli.

3. Produsul şirurilor care au limită

Ştim că produsul a două şiruri convergente este un şir convergent şi *limita produsului este egală cu produsul limitelor.*

Dacă unul cel puţin din cele două şiruri are limită infinită putem enunţa următoarele proprietăţi:

I) *Dacă* $a_n \geq \alpha > 0$ şi $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n b_n \to +\infty$.

Într-adevăr $\alpha b_n \to +\infty$ şi $a_n b_n \geq \alpha b_n$, deci $a_n b_n \to +\infty$.

II) *Dacă* $a_n \geq \alpha > 0$ *şi* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n b_n \to -\infty$.

Deoarece $b_n \to -\infty$, avem $b_n < 0$ (cu excepţia unui număr finit de indici) şi din $a_n \geq \alpha$, deducem $a_n b_n \leq \alpha b_n$; dar $\alpha b_n \to -\infty$, deci $a_n b_n \to -\infty$.

III) *Dacă* $a_n \leq -\alpha < 0$ şi $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n b_n \to -\infty$.

Punînd $\beta = -\alpha > 0$, avem $-a_n \geq \beta > 0$, deci $-a_n b_n \to +\infty$ şi deci $a_n b_n \to -\infty$.

IV) *Dacă* $a_n \leq -\alpha < 0$ şi $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n b_n \to +\infty$.

Într-adevăr $-b_n \to +\infty$, deci $\alpha(-b_n) \to +\infty$, adică: $-\alpha b_n \to +\infty$.

Să observăm că dacă $a_n \to a > 0$ sau $a_n \to +\infty$ există un număr $\alpha > 0$, astfel ca $a_n > \alpha$ pentru toţi indicii cu excepţia unui număr finit dintre ei.

De asemenea, dacă $a_n \to a < 0$ sau $a_n \to -\infty$, există un număr $\alpha > 0$ astfel ca $a_n < -\alpha$ pentru toţi indicii cu excepţia unui număr finit dintre ei. Din cele patru proprietăţi de mai sus deducem următoarele propoziţii:

1) *Dacă* $a_n \to +\infty$ *şi* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_nb_n \to +\infty$.
2) *Dacă* $a_n \to -\infty$ *şi* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_nb_n \to -\infty$.
3) *Dacă* $a_n \to -\infty$ *şi* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_nb_n \to +\infty$.
4) *Dacă* $a_n \to a > 0$ *şi* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_nb_n \to +\infty$.
5) *Dacă* $a_n \to a > 0$ *şi* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_nb_n \to -\infty$.
6) *Dacă* $a_n \to a < 0$ *şi* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_nb_n \to -\infty$.
7) *Dacă* $a_n \to a < 0$ *şi* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_nb_n \to +\infty$.

Folosind produsul dintre un număr finit $\neq 0$ şi un număr infinit, definit anterior, în ultimele patru propoziţii putem afirma că *limita produsului este egală cu produsul limitelor*.

Pentru a putea afirma şi în cazul primelor trei propoziţii că limita produsului este egală cu produsul limitelor, sîntem conduşi să punem:

$$\infty \cdot \infty = \infty; \quad \infty(-\infty) = (-\infty)\infty = -\infty; \quad (-\infty)(-\infty) = \infty.$$

O b s e r v a ţ i e. În cazul cînd $a_n \to 0$, şi $b_n \to \infty$ sau $b_n \to -\infty$, despre şirul (a_nb_n) nu putem afirma nimic. Uneori şirul produs are limită (finită sau infinită), alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi $a \in R$, putem găsi un şir $a_n \to 0$, şi un şir $b_n \to +\infty$ (sau $b_n \to -\infty$) astfel ca $a_nb_n \to a$. De aceea nu se acordă nici un sens scrierii $0 \cdot \infty$ sau $0 \cdot (-\infty)$. Spunem că operaţiile $0 \cdot \infty$ şi $0 \cdot (-\infty)$ *nu sînt definite*, sau că sînt *operaţii fără sens*.

Exemple.

1) $(a_n): a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \ldots, \frac{a}{n}, \ldots$ $\qquad a_n \to 0;$
$(b_n): 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $\qquad b_n \to +\infty;$
$(a_nb_n): a, a, a, \ldots, a, \ldots$ $\qquad a_nb_n \to a.$

2) $(a_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ $\qquad a_n \to 0;$
$(b_n): 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ $\qquad b_n \to +\infty;$
$(a_nb_n): 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $\qquad a_nb_n \to +\infty.$

3) $(a_n): -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots$ $\qquad a_n \to 0;$
$(b_n): 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ $\qquad b_n \to +\infty;$
$(a_nb_n): -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ $\qquad a_nb_n \to -\infty.$

4) $(a_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}, \ldots$ $\qquad a_n \to 0;$
$(b_n): 2, 2, 6, 4, \ldots, 4n-2, 2n, \ldots$ $\qquad b_n \to +\infty;$
$(a_nb_n): 2, 1, 2, 1, \ldots, 2, 1, \ldots$ $\qquad$ nu are limită.

Dacă în aceste 4 exemple se ia $(-b_n)$ în loc de (b_n) se obţin alte patru exemple în care primul şir are limita 0, iar al doilea şir are limita $-\infty$.

Putem da acum o formulare unitară care să cuprindă atît teorema relativă la produsul a două şiruri convergente cît şi cele şapte propoziţii de mai sus.

T e o r e m ă. Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limită (finită sau infinită) şi dacă produsul limitelor are sens, atunci şirul produs (a_nb_n) are limită şi

$$\lim_{n\to\infty} (a_nb_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Cazuri exceptate: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$;

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$

Fiecare din aceste două cazuri va fi denumit mai departe „cazul $0\cdot\infty$". De altfel, cazul $0\cdot(-\infty)$ se reduce la cazul $0\cdot\infty$, deoarece dacă $a_n\to 0$ şi $b_n\to-\infty$, atunci $-a_n\to 0$ şi $-b_n\to\infty$ şi $a_nb_n=(-a_n)(-b_n)$.

4. Cîtul şirurilor care au limită

Ştim că raportul a două şiruri convergente este un şir convergent dacă limita şirului de la numitor este diferită de 0, şi *limita raportului este egală cu raportul limitelor.*

Pentru şirurile care au limite infinite avem următoarea proprietate:

I) *Dacă* $b_n\to+\infty$, *sau dacă* $b_n\to-\infty$, *atunci* $\dfrac{1}{b_n}\to 0$.

Din ipoteză deducem că $|b_n|\to+\infty$; să arătăm că $\left|\dfrac{1}{b_n}\right|\to 0$, de unde va rezulta că $\dfrac{1}{b_n}\to 0$.

Fie (α,β) o vecinătate a lui 0, $\alpha<0<\beta$; deoarece $|b_n|\to+\infty$, avem $|b_n|\in\left(\dfrac{1}{\beta},+\infty\right)$, adică $|b_n|>\dfrac{1}{\beta}$ şi deci $\dfrac{1}{|b_n|}<\beta$, adică $\left|\dfrac{1}{b_n}\right|\in(\alpha,\beta)$, pentru toţi indicii, cu excepţia unui număr finit dintre ei. Rezultă că $\left|\dfrac{1}{b_n}\right|\to 0$ şi deci $\dfrac{1}{b_n}\to 0$.

Din această proprietate deducem următoarele propoziţii:

1) *Dacă* $a_n\to a$ *şi* $b_n\to+\infty$, *atunci* $\dfrac{a_n}{b_n}\to 0$.

2) *Dacă* $a_n\to a$ *şi* $b_n\to-\infty$, *atunci* $\dfrac{a_n}{b_n}\to 0$.

Într adevăr, în ambele cazuri $\frac{1}{b_n} \to 0$ şi

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot 0 = 0.$$

Pentru a putea afirma şi în aceste cazuri că *limita raportului este egală cu raportul limitelor*, sîntem conduşi să punem

$$\frac{a}{+\infty} = 0 \text{ şi } \frac{a}{-\infty} = 0, \text{ oricare ar fi } a \in R.$$

Observaţii. 1° Dacă ambele şiruri (a_n), (b_n) au limite infinite, despre şirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu mai putem afirma nimic. Uneori şirul cît are limită (finită sau infinită), alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi numărul $a \in R$, putem găsi două şiruri (a_n) şi (b_n) cu limite infinite astfel ca $\frac{a_n}{b_n} \to a$.

De aceea nu se acordă nici un sens scrierilor $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$; spunem că operaţiile respective *nu sînt definite*, sau că sînt *operaţii fără sens*.

Exemple.

1) $(a_n): a, 2a, 3a, \ldots, na, \ldots, (a > 0);$ $\quad a_n \to +\infty;$
$(b_n): 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $\quad b_n \to +\infty;$
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right): a, a, a, \ldots, a, \ldots$ $\quad \frac{a_n}{b_n} \to a.$

2) $(a_n): 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $\quad a_n \to +\infty;$
$(b_n): 1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$ $\quad b_n \to +\infty;$
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ $\quad \frac{a_n}{b_n} \to 0.$

3) $(a_n): 1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$ $\quad a_n \to +\infty;$
$(b_n): 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $\quad b_n \to +\infty;$
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right): 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $\quad \frac{a_n}{b_n} \to +\infty.$

4) $(a_n): 2, 2, 6, 4, \ldots, 4n-2, 2n, \ldots$ $\quad a_n \to +\infty;$
$(b_n): 1, 2, 3, 4, \ldots, 2n-1, 2n \ldots$ $\quad b_n \to +\infty;$
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right): 2, 1, 2, 1, \ldots, 2, 1, \ldots$ $\quad$ nu are limită.

Înmulţind cu -1 unul sau ambele şiruri din fiecare exemplu, se obţin alte exemple pentru cazul cînd unul sau ambele şiruri au limită $-\infty$.

Trebuie observat că dacă $a_n \to +\infty$ şi $b_n \to +\infty$, sau dacă $a_n \to -\infty$ şi $b_n \to -\infty$, şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are termenii pozitivi, cu excepţia unui număr finit dintre ei; dacă deci şirul cît are limită, această limită este *pozitivă* (finită sau $+\infty$).

Pentru un număr $a < 0$, putem găsi totdeauna un şir $a_n \to +\infty$ şi un şir $b_n \to -\infty$, astfel ca $\frac{a_n}{b_n} \to a$.

Reamintim că o altă operaţie fără sens este împărţirea cu 0.

S-a arătat că dacă $a_n \to 0$ şi $b_n \to 0$, şirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are uneori limită (finită sau infinită), alteori nu are limită.

Dacă însă $a_n \to a \neq 0$ (sau dacă $a_n \to +\infty$ sau $a_n \to -\infty$) şi $b_n \to 0$, şirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este totdeauna *nemărginit*; uneori are limita $+\infty$ sau $-\infty$, alteori nu are limită.

Putem acum da o formulare unitară relativă la limita cîtului a două şiruri:

T e o r e m ă. Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limită (finită sau infinită) şi dacă raportul limitelor are sens, atunci şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are limită şi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Cazuri exceptate:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$.

Fiecare din cele patru cazuri cuprinse aici vor fi denumite „*cazul* $\frac{\infty}{\infty}$".
De altfel, cazurile $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$ se reduc la cazul $\frac{\infty}{\infty}$; de exemplu, dacă $a_n \to +\infty$ şi $b_n \to -\infty$, atunci $-b_n \to +\infty$, iar $\frac{a_n}{b_n} = -\frac{a_n}{-b_n}$ etc.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Dacă avem şi $\lim a_n = 0$, acest caz va fi denumit mai departe „cazul $\frac{0}{0}$".

O b s e r v a ţ i e. În cazul cînd $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, avem totdeauna $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$.

Într-adevăr, $|b_n| \to 0$, şi $|b_n| > 0$ deci $\frac{1}{|b_n|} \to +\infty$; apoi $|a_n| \to |a| > 0$, deci $|a_n| \cdot \frac{1}{|b_n|} \to |a| \cdot \infty = \infty$, adică $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to \infty$. Trebuie observat însă că, deşi $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$, este posibil ca şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ să nu aibă limită.

5. Aplicaţii

1) *Dacă* $x_n \to +\infty$, *atunci* $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$. *Vom scrie*

$$\lim_{x_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Putem presupune $x_n \geqslant 1$, înlăturînd, eventual, numărul finit de termeni care nu verifică această condiţie.

Pentru fiecare termen x_n, fie p_n numărul *natural* care verifică inegalităţile

$$p_n \leqslant x_n < p_n + 1.$$

Deoarece $x_n \to +\infty$ şi $p_n + 1 \geqslant x_n$, avem $p_n + 1 \to \infty$ şi atunci avem de asemenea $p_n \to +\infty$.

Deoarece (p_n) şi $(p_n + 1)$ sînt formate din numere naturale şi au limita $+\infty$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n+1} = e.$$

Avem de asemenea $\frac{1}{p_n} \to 0$, $\frac{1}{p_n+1} \to 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right) = 1 \text{ şi } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right) = 1.$$

Atunci $\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n} = \left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n+1}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{-1}$,

deci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n+1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{-1} = e\cdot 1 = e.$$

De asemenea,

$$\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1} = \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\left(1+\frac{1}{p_n}\right),$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Din inegalităţile $p_n \leqslant x_n < p_n + 1$ deducem succesiv

$$\frac{1}{p_n+1} < \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{p_n}, \quad 1+\frac{1}{p_n+1} < 1+\frac{1}{x_n} \leqslant 1+\frac{1}{p_n},$$

$$\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{p_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1},$$

adică:

$$\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1}$$

şi, deoarece şirurile de la extremităţi au limita e, rezultă că şirul $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ are limita e.

2) *Dacă* $x_n \to -\infty$, *atunci* $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$. *Vom scrie*

$$\lim_{x_n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Să punem $y_n = -x_n$. Atunci $y_n \to +\infty$, deci $y_n - 1 \to \infty$ şi deci

$$\left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n - 1} \to e.$$

Dar

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1 - \frac{1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n - 1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n - 1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n - 1} \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right).$$

Deoarece $y_n - 1 \to +\infty$, rezultă că $\frac{1}{y_n - 1} \to 0$, deci $1 + \frac{1}{y_n - 1} \to 1$ şi deci:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n - 1} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

3) *Dacă* $x_n > 0$ *şi* $x_n \to 0$, *atunci* $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$. *Vom scrie*

$$\lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n > 0}} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.$$

Să punem $y_n = \frac{1}{x_n} > 0$; deoarece $x_n > 0$ şi $x_n \to 0$, rezultă $y_n \to \infty$ şi deci:

$$\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \to e.$$

Dar

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n}$$

şi deci:

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e.$$

4) *Dacă* $x_n < 0$, *şi* $x_n \to 0$, *atunci* $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$. *Vom scrie*

$$\lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n < 0}} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.$$

Să punem $y_n = \frac{1}{x_n}$; deoarece $x_n < 0$ şi $x_n \to 0$, avem $y_n \to -\infty$, deci:

$$\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \to e. \text{ Dar}$$

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n}$$

şi deci:

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e.$$

5) *Dacă* $x_n \to +\infty$, *atunci* $\frac{e^{x_n}}{x_n} \to +\infty$. *Vom scrie*

$$\lim_{x_n \to \infty} \frac{e^{x_n}}{x_n} = +\infty.$$

Într-adevăr, deoarece $e^x \geqslant x$ pentru orice $x \in R$, avem:

$$\frac{e^{x_n}}{x_n} = \frac{\left(e^{\frac{x_n}{2}}\right)^2}{\left(x_n^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \left(\frac{e^{\frac{x_n}{2}}}{x_n^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\frac{x_n}{2}}{\sqrt{x_n}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)(\sqrt{x_n})^2 = \left(\frac{1}{4}\right) x_n.$$

adică:

$$\frac{e^{x_n}}{x_n} \geqslant \frac{1}{4} x_n. \text{ Dar } \frac{1}{4} x_n \to +\infty,$$

deci:

$$\lim_{x_n \to \infty} \frac{e^{x_n}}{x_n} = \infty,$$

Observaţie. Raţionamentul de mai sus se aplică pentru orice bază $a \geqslant 2$, în loc de e deoarece pentru $a \geqslant 2$ avem $a^x > x$ oricare ar fi x. Se va arăta mai departe că avem:

$$\lim_{x_n \to +\infty} \frac{a^{x_n}}{x_n} = +\infty$$

oricare ar fi $a > 1$.

6) Din exemplul 5 rezultă

$$\lim_{x_n \to \infty} \frac{x_n}{e^{x_n}} = 0.$$

7) *Dacă* $x_n \to +\infty$, $x_n > 0$, *avem* $\frac{\ln x_n}{x_n} \to 0$. *Vom scrie*

$$\lim_{x_n \to \infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0.$$

Din inegalitatea $e^x \geqslant x > 0$, deducem $x \geqslant \ln x$ pentru $x > 0$. Presupunînd $x_n \geqslant 1$, avem

$$\frac{\ln x_n}{x_n} = \frac{\ln (\sqrt{x_n})^2}{x_n} = 2\frac{\ln \sqrt{x_n}}{x_n} \leqslant 2\frac{\sqrt{x_n}}{x_n} = 2\frac{1}{\sqrt{x_n}},$$

adică $\frac{\ln x_n}{x_n} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x_n}}$.

Dar $x_n \to +\infty$, deci $\sqrt{x_n} \to \infty$, şi deci $\frac{2}{\sqrt{x_n}} \to 0$.

Aplicînd criteriul de convergenţă al şiturilor deducem $\frac{\ln x_n}{x_n} \to 0$.

8) Din exemplul 7 deducem

$$\lim_{x_n \to +\infty} \frac{x_n}{\ln x_n} = +\infty.$$

Într-adevăr, presupunînd $x_n > 1$, avem $\frac{\ln x_n}{x_n} > 0$ şi $\frac{\ln x_n}{x_n} \to 0$;

deducem

$$\frac{x_n}{\ln x_n} \to +\infty.$$

9) *Dacă* $x_n \to -\infty$, *avem* $x_n \cdot e^{x_n} \to 0$. *Vom scrie*

$$\lim_{x_n \to -\infty} x_n \cdot e^{x_n} = 0.$$

Într-adevăr, să punem $x_n = -y_n$, deci $y_n \to +\infty$. Atunci

$$x_n e^{x_n} = -y_n e^{-y_n} = -\frac{y_n}{e^{y_n}} \to 0.$$

10) *Dacă* $x_n \to 0$, $x_n > 0$, *atunci* $x_n \ln x_n \to 0$, *Vom scrie*

$$\lim_{x_n \to 0} x_n \ln x_n = 0.$$

Să punem $y_n = \frac{1}{x_n}$; deoarece $x_n > 0$ şi $x_n \to 0$, avem $y_n \to +\infty$.

Atunci:

$$x_n \ln x_n = \frac{1}{y_n} \ln \frac{1}{y_n} = -\frac{\ln y_n}{y_n} \to 0.$$

6. Puteri

Pentru puteri de şiruri convergente s-a demonstrat că: dacă $a_n \to a$ şi $\alpha_n \to \alpha$, dacă a^α are sens (adică $a > 0$ pentru $\alpha \leqslant 0$, $a_n \geqslant 0$ şi $a \geqslant 0$ pentru $\alpha > 0$), atunci $a_n^{\alpha_n} \to a^\alpha$, adică

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\alpha_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n}.$$

Pentru şirurile care au limite infinite avem următoarele propoziţii:

1) *Dacă* $a_n \to \infty$ *şi* $\alpha_n \to \infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to \infty$.

2) *Dacă* $a_n \to a > 1$ *şi* $\alpha_n \to \infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to \infty$.

3) *Dacă* $a_n \to +\infty$ *şi* $\alpha_n \to -\infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

4) *Dacă* $a_n \to a > 1$ *şi* $\alpha_n \to -\infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

5) *Dacă* $a_n \to \frac{1}{a}$, $a > 1$ *şi* $\alpha_n \to +\infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

6) *Dacă* $a_n \to 0$ *şi* $\alpha_n \to +\infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

7) *Dacă* $a_n \to \frac{1}{a}$, $a > 1$ *şi* $\alpha_n \to -\infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to +\infty$.

8) *Dacă* $a_n \to +\infty$ *şi* $\alpha_n \to \alpha > 0$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to +\infty$.

9) *Dacă* $a_n \to +\infty$ *şi* $\alpha_n \to -\alpha$, $\alpha > 0$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

Într-adevăr, avem: $a_n^{\alpha_n} = e^{\ln a_n^{\alpha_n}} = e^{\alpha_n \cdot \ln a_n}$.

Să observăm că dacă $a_n \to +\infty$, atunci $\ln a_n \to +\infty$, dacă $a_n \to a > 1$, atunci $\ln a_n \to \ln a > 0$, iar dacă $a_n \to \frac{1}{a}$, $a > 1$, atunci $\ln a_n \to \ln\frac{1}{a} < 0$. De asemenea, dacă $\beta_n \to +\infty$, atunci $e^{\beta_n} \to +\infty$, iar dacă $\beta_n \to -\infty$, atunci $e^{\beta_n} \to 0$. Cu excepţia propoziţiei 6) toate celelalte se demonstrează folosind teoremele privitoare la produsul de şiruri aplicate produsului $\alpha_n \ln a_n$.

Pentru exemplificare, să demonstrăm propoziţia 9). Deoarece $a_n \to +\infty$, avem $\ln a_n \to +\infty$; şi deoarece $\alpha_n \to -\alpha < 0$, avem $\alpha_n \cdot \ln a_n \to -\infty$, deci $e^{\alpha_n \ln a_n} \to 0$, adică $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

Propoziţia 6) se demonstrează astfel: deoarece $a_n \to 0$, există un număr $a < 1$, astfel ca $a_n \leqslant a < 1$, cu excepţia unui număr finit de indici. Dar $\alpha_n \to +\infty$, şi pe baza proprietăţii 5) deducem $a^{\alpha_n} \to 0$; deoarece $a_n > 0$ (cu excepţia unui număr finit de indici), din $a_n \leqslant a$ deducem $a_n^{\alpha_n} \leqslant a^{\alpha_n} \to 0$, deci $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

Lăsăm pe seama cititorului, ca exerciţiu, demonstrarea celorlalte propoziţii.

Pentru a putea scrie şi în aceste cazuri, ca şi pentru şirurile convergente, că

$$\lim_{n\to\infty} (a_n^{\alpha_n}) = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n}$$

sîntem conduşi să punem ($a > 1$, $\alpha > 0$)

$$\infty^{\infty} = \infty;\ a^{\infty} = \infty;\ \infty^{-\infty} = 0;\ a^{-\infty} = 0;\ \left(\frac{1}{a}\right)^{\infty} = 0;$$

$$0^{\infty} = 0;\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-\infty} = \infty;\ \infty^{\alpha} = \infty;$$

O b s e r v a ţ i e. Nu se acordă nici un sens scrierilor 1^{∞}, $1^{-\infty}$ şi ∞^0 deoarece dacă $a_n \to 1$ şi $\alpha_n \to +\infty$ sau $\alpha_n \to -\infty$, respectiv dacă $a_n \to \infty$ şi $\alpha_n \to 0$, despre şirul $a_n^{\alpha_n}$ nu se poate afirma nimic. Uneori are limita finită pozitivă sau $+\infty$, alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi $a \geqslant 0$, putem găsi două şiruri $a_n \to 1$ şi $\alpha_n \to +\infty$, respectiv $a_n \to +\infty$ şi $\alpha_n \to 0$ astfel ca $a_n^{\alpha_n} \to a$. Spunem că operaţiile 1^{∞}, $1^{-\infty}$ şi ∞^0 *nu sînt definite* sau că sînt *operaţii fără sens.*

Exemple.

C a z u l 1^{∞}

1) $(a_n): e^{\alpha},\ e^{\frac{\alpha}{2}},\ \dots,\ e^{\frac{\alpha}{n}},\ \dots,\ a_n \to 1;$

$(\alpha_n): 1,\ 2,\ \dots,\ n,\ \dots\ a_n \to +\infty;$

$(a_n^{\alpha_n}): e^{\alpha},\ e^{\alpha},\ \dots,\ e^{\alpha},\ \dots a_n^{\alpha_n} \to e^{\alpha}.$

Dînd lui α *toate valorile reale,* obţinem pentru e^{α} *toate valorile strict pozitive.*

2) $(a_n): e,\ e^{\frac{1}{2}},\ e^{\frac{1}{3}},\ \dots,\ e^{\frac{1}{n}},\ \dots,\ a_n \to 1;$

$(\alpha_n): 1,\ 2^2,\ 3^2,\ \dots,\ n^2,\ \dots,\ \alpha_n \to +\infty;$

$(a_n^{\alpha_n}): e,\ e^2,\ e^3,\ \dots,\ e^n,\ \dots a_n^{\alpha_n} \to +\infty.$

3) $(a_n): e^{-1},\ e^{\frac{-1}{2}},\ \dots,\ e^{-\frac{1}{n}},\ \dots,\ a_n \to 1;$

$(\alpha_n): 1,\ 2^2,\ \dots,\ n^2,\ \dots\ b_n \to +\infty;$

$(a_n^{\alpha_n}): e^{-1}, e^{-2},\ \dots,\ e^{-n},\ \dots\ a_n^{\alpha_n} \to 0.$

4) $(a_n): e^{-1},\ e^{\frac{1}{2}},\ e^{\frac{-1}{3}},\ e^{\frac{1}{4}},\ \dots\ a_n \to 1;$

$(\alpha_n): 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\quad \alpha_n \to +\infty;$

$(a_n^{\alpha_n}): e^{-1},\ e,\ e^{-1},\ e,\ \dots$ nu are limită.

Schimbînd pe α_n în $-\alpha_n$, obţinem alte patru exemple pentru cazul $1^{-\infty}$.

C a z u l ∞^0

1) $(a_n): e,\ e^2,\ e^3,\ \dots,\ e^n,\ \dots a_n \to \infty;$

$(\alpha_n): \alpha,\ \frac{\alpha}{2},\ \frac{\alpha}{3},\ \dots,\ \frac{\alpha}{n},\ \dots\ \alpha_n \to 0;$

$(a_n^{\alpha_n}): e^{\alpha},\ e^{\alpha},\ e^{\alpha},\ \dots,\ e^{\alpha}\ \dots\ a_n^{\alpha_n} \to e^{\alpha};$

dînd lui α toate valorile reale se obţin pentru e^{α} toate valorile strict pozitive.

2) $(a_n) : e,\ e^{2^2},\ e^{3^2},\ \ldots,\ e^{n^2},\ \ldots\ a_n \to +\infty;$

$(\alpha_n) : 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\ \alpha_n \to 0;$

$(a_n^{\alpha_n}) : e,\ e^2,\ e^3,\ \ldots,\ e^n,\ \ldots,\ a_n^{\alpha_n} \to +\infty.$

3) $(a_n) : e,\ e^{2^2},\ e^{3^2},\ \ldots,\ e^{n^2},\ \ldots\ a_n \to +\infty;$

$(\alpha_n) : -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \ldots -\frac{1}{n},\ \ldots,\ \alpha_n \to 0;$

$(a_n^{\alpha_n}) : e^{-1},\ e^{-2},\ e^{-3},\ \ldots,\ e^{-n},\ \ldots\ a_n^{\alpha_n} \to 0.$

4) $(a_n) : e,\ e^2,\ e^3,\ \ldots,\ e^n,\ \ldots,\ a_n \to +\infty;$

$(\alpha_n) : -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \ldots,\ (-1)^n \frac{1}{n},\ \ldots,\ \alpha_n \to 0;$

$(a_n^{\alpha_n}) : e^{-1},\ e,\ e^{-1},\ e,\ \ldots$ nu are limită.

Reamintim că altă operaţie fără sens este 0^0. În cazul cînd $a_n \to 0$, $(a_n > 0)$ şi $\alpha_n \to 0$, despre şirul $(a_n^{\alpha_n})$ nu se poate afirma nimic. Uneori are limită finită pozitivă, sau $+\infty$, alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi $a \geqslant 0$, există un şir $a_n \to 0$ şi un şir $\alpha_n \to 0$, astfel ca $a_n^{\alpha_n} \to a$.

Putem acum da o formulare unitară care să înglobeze atît teorema privitoare la puterile şirurilor convergente, cît şi cele nouă propoziţii de mai sus.

T e o r e m ă. Dacă (a_n) şi (α_n) sînt două şiruri cu limită (finită sau infinită) şi dacă puterea $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n}$ are sens, atunci şirul $(a_n^{\alpha_n})$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\alpha_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n}.$$

Cazuri exceptate:

$a_n \to 1$ şi $\alpha_n \to +\infty$ sau $\alpha_n \to -\infty$. Fiecare dintre aceste două cazuri vor fi denumite „cazul 1^∞";

$a_n \to \infty$ şi $\alpha_n \to 0$, denumit „cazul ∞^0";

$a_n \to 0$ şi $\alpha_n \to 0$, denumit „cazul 0^0".

§ 5. Puncte limită ale unui şir

Un număr a, finit sau infinit, se numeşte punct limită al unui şir (a_n), dacă orice vecinătate a lui a conţine o infinitate de termeni ai şirului.

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă un număr se repetă într-un şir de o infinitate de ori, acest număr este punct limită al şirului.

2° Un şir poate avea *mai multe* puncte limită. De exemplu, şirul

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ \ldots$$

are două puncte limită, şi anume 0 şi 1.

3° Există şiruri care au o *infinitate* de puncte limită. De exemplu, şirul

$$1,\ 2;\ 1,\ 2,\ 3;\ 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5;\ \ldots;\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

are o mulţime numărabilă de puncte limită şi anume fiecare număr natural este punct limită al acestui şir (deoarece fiecare număr natural se repetă de o infinitate de ori). De asemenea, $+\infty$ este punct limită.

4° Există şiruri pentru care mulţimea punctelor limită este toată dreapta reală. Într-adevăr, deoarece mulţimea numerelor raţionale este numărabilă, putem aşeza *toate* numerele raţionale într-un şir:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Fie x_0 un număr *real* oarecare, (α, β) o vecinătate oarecare a lui x_0. Orice interval conţine o infinitate de numere raţionale. Deci vecinătatea (α, β) a lui x_0 conţine o infinitate de termeni ai şirului (a_n); rezultă că x_0 este punct limită al acestui şir. Cum x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că *orice* număr real este punct limită al şirului (a_n).

De asemenea, $+\infty$ şi $-\infty$ sînt puncte limită ale acestui şir.

5° Dacă a este punct limită al şirului (a_n), în afara unei vecinătăţi a lui a se pot, de asemenea afla o infinitate de termeni ai şirului.

De exemplu, pentru şirul 1, 0, 1, 0, ..., 1, 0, ... numărul 1 este punct limită al şirului. În afara vecinătăţii $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ a lui 1 se află o infinitate de termeni ai şirului, şi anume, toţi termenii nuli.

6° Există şiruri care nu au nici un punct limită finit, de exemplu şirul numelor naturale 1, 2, 3, ...

Propoziţie. Un număr a este punct limită al unui şir (a_n) dacă şi numai dacă există un subşir al acestuia care tinde către a.

Dacă există un subşir care tinde către a, atunci în fiecare vecinătate a lui se află toţi termenii subşirului, cu excepţia unui număr finit dintre ei, adică o infinitate de termeni ai şirului (a_n), deci a este punct limită al şirului (a_n).

Reciproc, fie a un punct limită al şirului (a_n). Să presupunem întîi că a este finit. În vecinătatea $V_1 = (a - 1, a + 1)$ a lui a se află o infinitate de termeni ai şirului: fie a_{n_1} unul dintre aceştia. Avem $|a_{n_1} - a| < 1$.

Să presupunem că am ales un termen a_{n_p} în vecinătatea $V_p = \left(a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}\right)$. În vecinătatea $V_{p+1} = \left(a - \frac{1}{p+1}, a + \frac{1}{p+1}\right)$ se află o infinitate de termeni ai şirului; alegem în V_{p+1} un termen $a_{n_{p+1}}$ cu $n_{p+1} > n_p$. Avem $|a_{n_{p+1}} - a| < \frac{1}{p+1}$.

Aşadar, prin inducţie completă putem alege un subşir de numere naturale $n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$, astfel ca

$$|a_{n_p} - a| < \frac{1}{p} \text{ pentru orice } p \in N;$$

$(a_{n_p})_{p\in N}$ este un subşir al şirului iniţial şi din inegalităţile precedente, folosind criteriul de convergenţă, deducem că

$$\lim_{p\to\infty} a_{n_p} = a.$$

Dacă $a = +\infty$ se aleg vecinătăţile $V_p = (p, +\infty)$ ale lui $+\infty$ şi se procedează ca mai sus. Dacă $a = -\infty$, se iau vecinătăţile $V = (-\infty, -p)$.

O b s e r v a ţ i e. Din lema lui Cesàro rezultă că un şir mărginit are cel puţin un punct limită. De asemenea, din extensiunea acestei leme rezultă că orice şir are cel puţin un punct limită.

L e m ă. Mulţimea A a punctelor limită finită ale unui şir (a_n) este închisă.

Dacă $A = \emptyset$, atunci A este închisă. Să presupunem că $A \neq \emptyset$ şi fie a un punct aderent al lui A. Fie de asemenea o vecinătate V a lui a; în această vecinătate se află cel puţin un punct $b \in A$, iar V este şi o vecinătate a lui b. Deoarece b este punct limită al şirului, în vecinătatea V al lui b se află o infinitate de termeni ai şirului. Aşadar, în orice vecinătate V a lui a se află o infinitate de termeni ai şirului, deci a este punct limită al şirului, adică $a \in A$. Deoarece mulţimea A îşi conţine toate punctele aderente, este închisă.

Din această lemă rezultă că dacă A nu este vidă, şi dacă este minorată, atunci $\inf A \in A$, iar dacă este majorată, atunci $\sup A \in A$.

P r o p o z i ţ i e. Pentru orice şir (a_n) există un cel mai mic punct limită (finit sau infinit) şi un cel mai mare punct limită (finit sau infinit).

Într-adevăr, dacă şirul (a_n) este nemajorat, atunci $+\infty$ este punct limită al şirului, deci $+\infty$ este cel mai mare punct limită al şirului.

Să presupunem că (a_n) este majorat şi fie A mulţimea punctelor sale limită *finite*. Dacă A este vidă, înseamnă că singurul punct limită al şirului este $-\infty$, deci $-\infty$ este şi cel mai mare punct limită al şirului. Dacă A nu este vidă, mulţimea A este majorată, ca şi şirul (a_n), iar $\sup A \in A$, adică $\sup A$ este punct limită, şi deci cel mai mare punct limită al şirului.

Existenţa celui mai mic punct limită al şirului se demonstrează în mod asemănător.

D e f i n i ţ i e. Fie (a_n) un şir. Cel mai mic punct limită al şirului se numeşte limita inferioară a şirului şi se notează $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ sau $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$; cel mai mare punct limită al şirului se numeşte limită superioară a şirului şi se notează $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ sau $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Cele două limite extreme ale şirului sînt caracterizate de următoarele proprietăţi:

I) $l = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ *dacă şi numai dacă, pentru orice vecinătate* (α, β) *a lui* l, *sînt îndeplinite următoarele condiţii:*

1) *mulţimea indicilor* n *pentru care* $a_n \leqslant \alpha$ *este finită sau vidă;*

2) *mulţimea indicilor* n *pentru care* $a_n \leqslant \beta$ *este infinită.*

II) $L = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate* (α, β) *a lui* L, *sînt îndeplinite următoarele condiții :*

1) *mulțimea indicilor* n *pentru care* $\beta \leqslant a_n$ *este finită sau vidă ;*

2) *mulțimea indicilor* n *pentru care* $\alpha \leqslant a_n$ *este infinită.*

Următoarea relație se verifică fără dificultate :

$$-\infty \leqslant \inf_{n\in N} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \sup_{n\in N} a_n \leqslant +\infty.$$

Propoziție. Un șir are limită dacă și numai dacă limitele sale extreme sînt egale. Dacă șirul are limită, limitele extreme și limita șirului sînt egale.

Dacă șirul (a_n) are limita a, atunci în afara oricărei vecinătăți (α, β) a lui a se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului, deci inegalitățile $a_n \leqslant \alpha$ și $\beta \leqslant a_n$ sînt verificate cel mult de un număr finit de termeni, iar inegalitățile $a_n \leqslant \beta$ și $\alpha \leqslant a_n$ sînt verificate de o infinitate de termeni ai șirului. Rezultă că

$$a = \liminf_{n\to\infty} a_n \text{ și } a = \limsup_{n\to\infty} a_n,$$

deci limitele extreme sînt egale între ele și egale cu limitele șirului.

Reciproc, să presupunem că limitele extreme sînt egale și să notăm cu a valoarea lor comună. Pentru orice vecinătate (α, β) a lui a, inegalitățile $a_n \leqslant \alpha$ și $\beta \leqslant a_n$ sînt verificate cel mult de un număr finit de indici, adică în afara vecinătății (α, β) se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului. Rezultă că a este limita șirului.

Corolar. Un șir are limită dacă și numai dacă are un singur punct limită.

Propoziție. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, **atunci**

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{și} \quad \liminf_{n\to\infty} \alpha_n a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

oricare ar fi șirul (a_n).

Să notăm $\omega = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ și $\omega' = \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n a_n$.

Există un subșir $a_{n_p} \xrightarrow[p]{} \omega$; atunci $\alpha_{n_p} \to 1$, deci $\alpha_{n_p} a_{n_p} \to \omega$ și deci ω este punct limită al șirului $(\alpha_n a_n)$, de unde rezultă că $\omega \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n a_n = \omega'$.

Există de asemenea un subșir $\alpha_{n_k} a_{n_k} \xrightarrow[k]{} \omega'$; atunci $\alpha_{n_k} \to 1$, deci

$a_{n_k} = \dfrac{\alpha_{n_k} a_{n_k}}{\alpha_{n_k}} \to \omega'$, deci ω' este punct de limită al șirului (a_n), de unde rezultă că

$$\omega' \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n = \omega.$$

Așadar, $\omega' = \omega$, adică

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

La fel se demonstrează și cealaltă egalitate.

P r o p o z i ţ i e. Dacă $a_n \leqslant b_n$ pentru orice n, atunci

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n \text{ şi } \liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Fie $\omega = \limsup_{n\to\infty} a_n$; există un subşir $a_{n_p} \to \omega$; orice subşir al şirului (a_{n_p}) are limita ω. Atunci, dacă un subşir al şirului (b_{n_p}) are limită, ea este mai mare sau egală cu ω, adică orice punct limită al şirului (b_{n_p}) este mai mare decît ω.

Cum punctele limită ale şirului (b_{n_p}) sînt şi punctele limită ale şirului (b_n), rezultă că $\omega \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Cealaltă inegalitate se demonstrează la fel.

Se demonstrează următoarele egalităţi:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in N} \sup_{p\geqslant 0} a_{n+p};$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in N} \inf_{p\geqslant 0} a_{n+p}$$

Capitolul V

LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE

§ 1. Limita unei funcții într-un punct

1. Punerea problemei

Într-unul din capitolele precedente au fost studiate limitele unor funcții particulare, anume șirurile. Un șir (a_n) are limita a (finită sau infinită) dacă pentru valori ale indicelui n suficient de mari (suficient de vecine cu $+\infty$) putem realiza ca termenii șirului să fie cît dorim de apropiați (vecini) de a.

În acest capitol va fi studiată noțiunea de limită într-un punct a unei funcții oarecare. Problema care se pune acum se poate formula astfel:

Dîndu-se o funcție reală de variabilă reală $f: E \to R$, să se cerceteze comportarea sa în jurul unui punct x_0, adică să se cerceteze ce se întîmplă cu valorile $f(x)$ ale funcției atunci cînd argumentul x se apropie din ce în ce mai mult de x_0. Se apropie și valorile funcției din ce în ce mai mult de un anumit număr l (finit sau infinit)? Altfel spus, problema care se pune este dacă pentru valorile argumentului x suficient de vecine cu x_0, putem realiza ca valorile funcției $f(x)$ să fie cît dorim de vecine cu un anumit număr l (finit sau infinit).

Problema astfel pusă necesită unele precizări. Comportarea funcției f în jurul lui x_0, se referă *nu* la valoarea funcției în x_0, ci în celelalte puncte vecine cu x_0; prin urmare, problema comportării funcției în jurul lui x_0 se poate pune chiar dacă funcția *nu* este definită în x_0. Pe de altă parte, pentru a putea studia comportarea funcției în jurul lui x_0, *trebuie să existe puncte* $x \neq x_0$ *oricît de vecine cu* x_0, în care funcția f *să fie definită*, adică x_0 trebuie să fie *punct de acumulare* pentru mulțimea E pe care este definită funcția f.

Dacă mulțimea E este *nemajorată*, ea are punctul $+\infty$ ca punct de acumulare. În acest caz se poate pune problema comportării funcției în jurul lui $+\infty$, dînd argumentului x valori din ce în ce mai vecine cu $+\infty$ (adică din ce în ce mai mari) și văzînd ce se întîmplă cu valorile funcției.

Dacă mulţimea E este *neminorată* ea are punctul $-\infty$ ca punct de acumulare. În acest caz se poate pune problema comportării funcţiei în jurul lui $-\infty$.

2. Definiţia limitei cu ajutorul vecinătăţilor

Consideraţiile precedente ne conduc la definiţia limitei unei funcţii într-un punct.

Fie funcţia $f: E \to R$, şi x_0 un *punct de acumulare* al mulţimii E (x_0 finit sau infinit).

Definiţie. Se spune că un număr l (finit sau infinit) este limita funcţiei f în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate U a lui l există o vecinătate V a lui x, astfel încît, oricare ar fi $x \neq x_0$ din $V \cap E$, să avem $f(x) \in U$.

În această definiţie, V depinde, natural, de U.

Limita funcţiei f în punctul x_0 se notează:

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$ sau, mai simplu, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

şi se citeşte

„limită de $f(x)$ cînd x tinde către x_0".

Observaţii. 1° În loc de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ vom scrie adesea „$f(x) \to l$ cînd $x \to x_0$" sau, uneori, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$. Notaţiile: $\lim f(x)$, sau $f(x) \to l$, sau $x \to x_0$ scrise separat nu au sens.

2° După cum s-a specificat la început, problema existenţei limitei funcţiei f în punctul x_0 se poate pune chiar dacă f nu este definită în x_0, adică dacă $x_0 \notin E$ (x_0 fiind însă *punct de acumulare* al lui E). În acest caz, restricţia $x \neq x_0$ din definiţia limitei este de prisos, fiind verificată de la sine (deoarece $x \in V \cap E$ şi $x_0 \notin E$).

În particular, dacă E nu este majorată, se poate lua $x_0 = +\infty$, iar dacă E nu este minorată, se poate lua $x_0 = -\infty$. În aceste cazuri condiţia $x \neq x_0$ este verificată de la sine.

Dacă însă x_0 nu este punct de acumulare al mulţimii E (adică dacă este un punct izolat al lui E sau punct exterior al lui E), definiţia limitei nu se mai poate aplica. Problema existenţei limitei funcţiei *nu are sens* într-un asemenea punct.

De exemplu, pentru funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe $E = (0, +\infty)$ nu are sens $\lim\limits_{x \to -1} \ln x$ sau $\lim\limits_{x \to -5} \ln x$, deoarece -1 şi -5 nu sînt puncte de acumulare (ci sînt puncte exterioare) ale mulţimii E.

De asemenea, pentru funcţia $f(x) = n^2$, definită pe mulţimea N a numerelor naturale, nu are sens $\lim\limits_{n \to 5} n^2$, deoarece 5 nu este punct de acumulare (ci este punct izolat) al mulţimii N.

3° Dacă f este definită în x_0, adică dacă $x_0 \in E$, (x_0 fiind punct de acumulare pentru E), funcţia f poate să aibă în punctul x_0 limită diferită de valoarea $f(x_0)$ a funcţiei în acest punct, adică putem avea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Funcţiile pentru care avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (adică

$f(x) \to f(x_0)$ cînd $x \to x_0$) se numesc funcţii *continue* în punctul x_0 şi vor fi studiate în capitolul următor.

4° Definiţia limitei unei funcţii într-un punct conţine în particular definiţia limitei unui şir.

În adevăr, un şir (a_n) este o funcţie $f(n) = a_n$ definită pe mulţimea N a numerelor naturale, care are un singur punct de acumulare, $+\infty$. Se poate considera deci limita acestei funcţii în punctul $+\infty$.

Definiţia limitei acestei funcţii în punctul $+\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n)$, este echivalentă cu definiţia anterioară a limitei şirului (a_n), $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

5° A spune că l *nu* este limita funcţiei f în punctul x_0, înseamnă că: există o vecinătate U_0 a lui l, cu proprietatea că, pentru fiecare vecinătate V a lui x_0, există un punct $x \neq x_0$ din $V \cap E$, astfel încît $f(x) \notin U_0$ (în această propoziţie, x depinde de V).

A spune că funcţia f nu are limită în punctul x_0 (sau că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nu există) înseamnă că: oricare ar fi numărul l (finit sau infinit) există o vecinătate U a lui l (U depinde de l) cu proprietatea că, pentru fiecare vecinătate V a lui x_0 putem găsi un punct $x \neq x_0$ din $V \cap E$ (x depinde atît de V cît şi de l) astfel încît $f(x) \notin U$.

6° Definiţia de mai sus a limitei se aplică pentru orice funcţie $f: E \to F$, unde E şi F sînt spaţii topologice oarecare (în acest caz x_0 este punct de acumulare al lui E, iar $l \in F$)

3. Definiţia cu ε şi δ a limitei

În definiţia cu vecinătăţi a limitei, să luăm vecinătăţile U ale lui l de forma:

$(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$, dacă l este finit;
$(\varepsilon, +\infty)$, dacă $l = +\infty$ (ε oarecare, nu neapărat > 0);
$(-\infty, \varepsilon)$, dacă $l = -\infty$ (ε oarecare, nu neapărat < 0)

şi vecinătăţile V ale lui x_0 de forma:

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ cu $\delta > 0$, dacă x_0 este finit;
$(\delta, +\infty)$, dacă $x_0 = +\infty$, (δ nu neapărat > 0);
$(-\infty, \delta)$ dacă $x_0 = -\infty$ (δ nu neapărat < 0).

A spune că $x \in V$ înseamnă:

$|x - x_0| < \delta$, dacă $x_0 =$ este finit;
$x > \delta$ dacă $x_0 = +\infty$;
$x < \delta$, dacă $x_0 = -\infty$.

A spune că $f(x) \in U$ înseamnă:

$|f(x) - l| < \varepsilon$, dacă l este finit;
$f(x) > \varepsilon$, dacă $l = +\infty$;
$f(x) < \varepsilon$, dacă $l = -\infty$.

Ţinînd seama că în enunţul definiţiei, V depinde de U, rezultă că δ depinde de ε, ceea ce se pune în evidenţă scriind $\delta(\varepsilon)$.

Ţinînd seama de faptul că în definiţia limitei putem folosi numai vecinătăţile simetrice ale punctelor finite (deoarece orice vecinătate a unui punct finit conţine o vecinătate simetrică a acestui punct) şi transcriind,

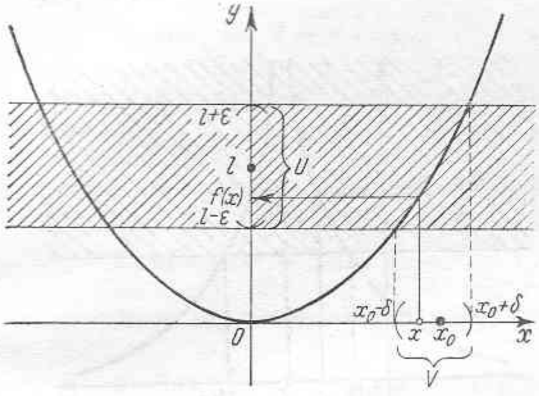


Fig. 46

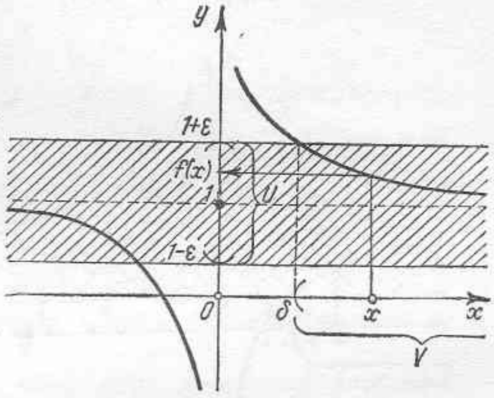


Fig. 47

cu notaţiile de mai sus, definiţia limitei, se obţin nouă definiţii particulare, după cum x_0 sau l sînt finite sau infinite. Se obţin astfel aşa-numitele „definiţii cu ε şi δ" ale limitei.

În enunţurile de mai jos, x_0 şi l sînt considerate *finite*.

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ (sau $f(x) \to l$ cînd $x \to x_0$) *înseamnă*:

pentru orice $\varepsilon > 0$, *există* $\delta > 0$, *astfel încît oricare ar fi* $x \in E$, $x \neq x_0$, *cu* $|x - x_0| < \delta$, *să avem* $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2 = l$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ (sau $f(x) \to l$ cînd $x \to +\infty$) *înseamnă*:

pentru orice $\varepsilon > 0$, *există un* δ, *astfel încît, oricare ar fi* $x \in E$, *cu* $x > \delta$ *să avem* $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1 = l$.

De aici se deduce în particular definiţia cu ε a limitei unui şir convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ (sau $f(x) \to l$ cînd $x \to -\infty$) *înseamnă*:

pentru orice $\varepsilon > 0$, *există un* δ, *astfel încît oricare ar fi* $x \in E$ *cu* $x < \delta$ *să avem* $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1 = l$.

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (sau $f(x) \to +\infty$ cînd $x \to x_0$) *înseamnă :*

pentru orice ε, *există un* $\delta > 0$, *astfel încît, oricare ar fi* $x \in E$, $x \neq x_0$, *cu* $|x - x_0| < \delta$, *să avem* $f(x) > \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x^2 - 1)^2} = +\infty$.

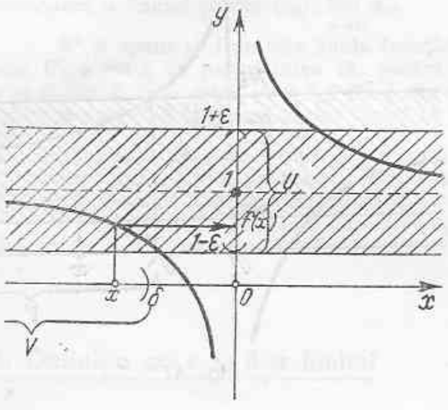


Fig. 48

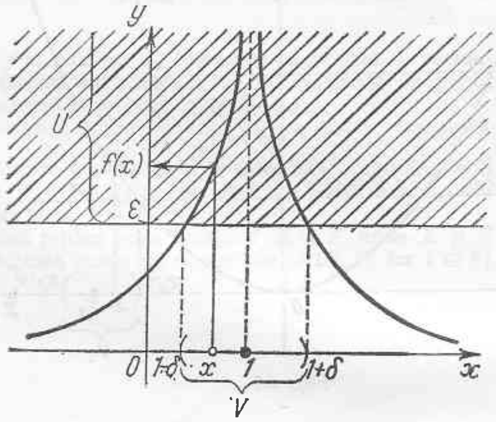


Fig. 49

5) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ (sau $f(x) \to -\infty$ cînd $x \to x_0$) *înseamnă :*

pentru orice ε, *există un* $\delta > 0$, *astfel încît, oricare ar fi* $x \in E$, $x \neq x_0$, *cu* $|x - x_0| < \delta$, *să avem* $f(x) < \varepsilon$.

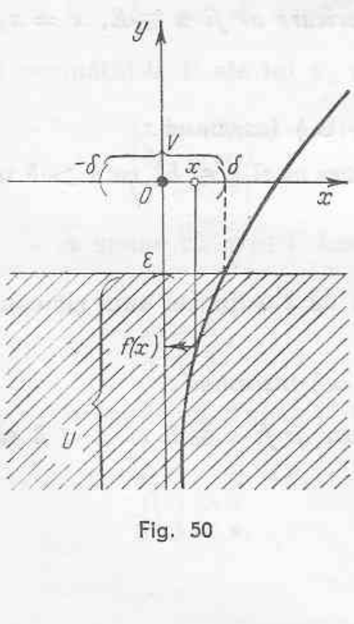


Fig. 50

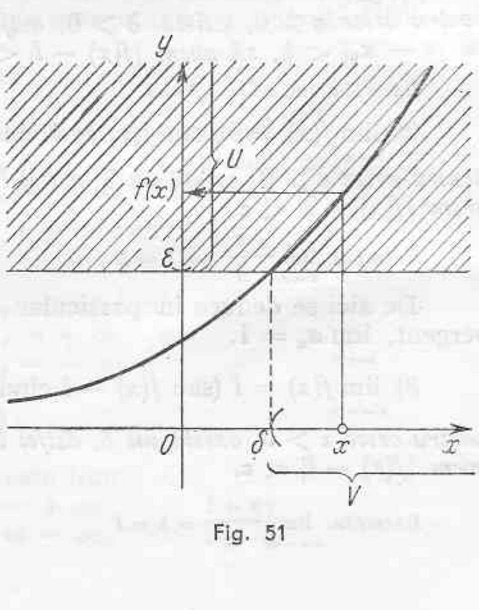


Fig. 51

Exemplu. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (sau $f(x) \to +\infty$ cînd $x \to +\infty$) *înseamnă: pentru orice* ε, *există un* δ, *astfel încît oricare ar fi* $x \in E$ *cu* $x > \delta$, *să avem* $f(x) > \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Acest caz conţine în particular şirurile cu limita $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (sau $f(x) \to -\infty$ cînd $x \to +\infty$) *înseamnă: pentru orice* ε *există un* δ, *astfel încît oricare ar fi* $x \in E$ *cu* $x > \delta$, *să avem* $f(x) < \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty$.

Acest caz conţine în particular şirurile cu limita $-\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (sau $f(x) \to +\infty$ cînd $x \to -\infty$) *înseamnă: pentru orice* ε, *există un* δ, *astfel încît oricare ar fi* $x \in E$, *cu* $x < \delta$, *să avem* $f(x) > \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (sau $f(x) \to -\infty$ cînd $x \to -\infty$) *înseamnă: pentru orice* ε, *există un* δ, *astfel încît oricare ar fi* $x \in E$ *cu* $x < \delta$, *să avem* $f(x) < \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

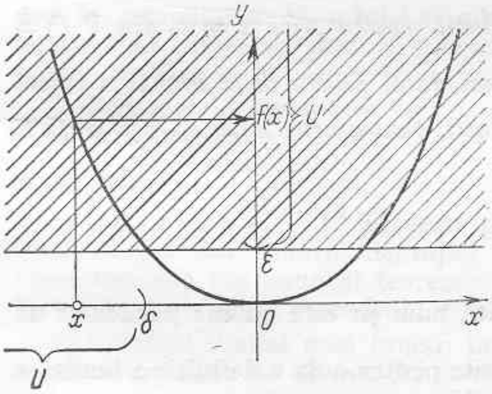


Fig. 52

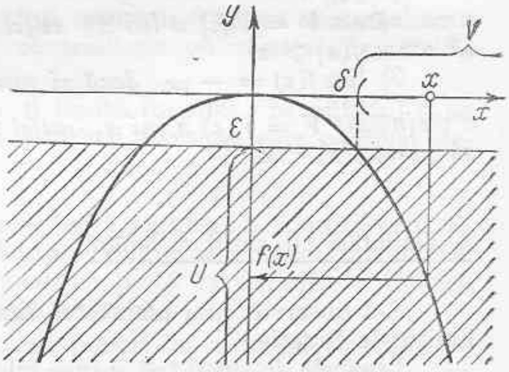


Fig. 53

Observaţii. 1° Dacă se iau numai vecinătăţile V ale lui x_0 de forma $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ sau $(\delta,\ + \infty)$ sau $(- \infty,\ \delta)$, se obţin următoarele trei definiţii (fie că l este finit, fie că este infinit):

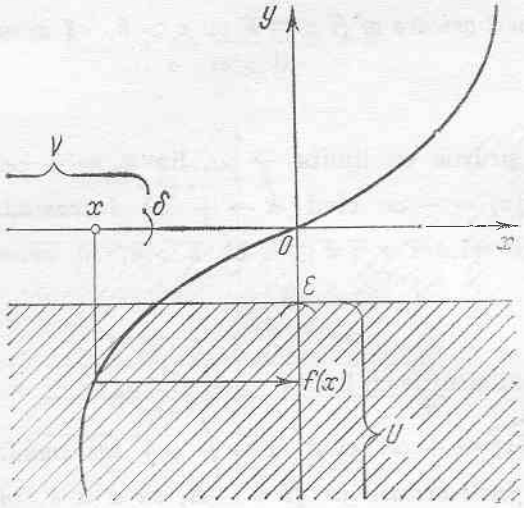


Fig. 54

1) $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, x_0 *finit, dacă şi numai dacă, pentru orice vecinătate U a lui l, există un număr $\delta > 0$ (care depinde de U) astfel încît, pentru orice $x \neq x_0$ din E cu $|x - x_0| < \delta$ să avem $f(x) \in U$.*

2) $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, *dacă şi numai dacă, pentru orice vecinătate U a lui l, există un număr $\delta = \delta(U)$, astfel încît, pentru orice $x \neq x_0$ din E cu $x > \delta$ să avem $f(x) \in U$.*

3) $l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, *dacă şi numai dacă, pentru orice vecinătate U a lui l, există un număr $\delta = \delta(U)$ astfel încît, pentru orice $x \neq x_0$ din E cu $x < \delta$ să avem $f(x) \in U$.*

2° Dacă se iau numai vecinătăţile U ale lui l de forma $(l - \varepsilon,\ l + \varepsilon)$, sau $(\varepsilon + \infty)$ sau $(- \infty,\ \varepsilon)$ se obţin alte trei definiţii (fie că x_0 este finit, fie că este infinit).

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *$l$ finit, dacă şi numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V (care depinde de ε) a lui x_0, astfel încît, pentru orice $x \neq x_0$ din $V \cap E$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.*

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = + \infty$, *dacă şi numai dacă pentru orice număr ε, există o vecinătate $V = V(\varepsilon)$ a lui x_0, astfel încît, pentru orice $x \neq x_0$ din $V \cap E$ să avem $f(x) > \varepsilon$.*

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = - \infty$, *dacă şi numai dacă, pentru orice număr ε există o vecinătate $V = V(\varepsilon)$ a lui x_0, astfel încît, pentru orice $x \neq x_0$, din $V \cap E$ să avem $f(x) < \varepsilon$.*

4. Definiţia cu şiruri a limitei

S-a observat mai înainte că limita unui şir este un caz particular de limită de funcţie.

Limitele de şiruri pot fi însă folosite pentru a da o definiţie a limitelor de funcţii, echivalentă cu cea precedentă.

T e o r e m ă. Funcţia f are limita l în punctul x_0, dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$ avem $f(x_n) \to l$.

Să presupunem că $l = \lim\limits_{x \to x_0} (x)$ şi să arătăm că este verificată condiţia din enunţul teoremei. Fie un şir oarecare $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$; să arătăm că $f(x_n) \to l$. Să alegem o vecinătate arbitrară U a lui l. Deoarece $l = \lim\limits_{x \to x_0} (x)$, există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, pentru orice $x \neq x_0$ din $V \cap E$ să avem $f(x) \in U$. Dar $x_n \to x_0$, deci avem $x_n \in V \cap E$ şi deci $f(x_n) \in U$, cu excepţia unui număr finit de indici, adică $f(x_n) \to l$.

Reciproc, să presupunem că pentru toate şirurile $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$ şirurile corespunzătoare $(f(x_n))$ au o limită comună, l, şi să arătăm că $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Să presupunem, prin absurd, că l nu este limita funcţiei f în punctul x_0. Aceasta înseamnă că: *există* o vecinătate U_0 a lui l, cu proprietatea că, *oricare* ar fi vecinătatea V a lui x_0, există un punct $x_V \neq x_0$ din $V \cap E$, astfel încît $f(x_V) \notin U_0$.

Deoarece vecinătatea V este arbitrară, putem lua un şir (V_n) de vecinătăţi ale lui x_0, de forma:

$$V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right), \quad \text{dacă } x_0 \text{ este finit}$$

$$V_n = (n, +\infty), \quad \text{dacă } x_0 = +\infty$$

$$V_n = (-\infty, -n), \quad \text{dacă } x_0 = -\infty.$$

În fiecare vecinătate V_n există un punct $x_n \neq x_0$ din E, astfel ca $f(x_n) \notin U_0$. Am obţinut astfel un şir (x_n) de puncte din E diferite de x_0, şi $x_n \to x_0$ (deoarece, $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ sau $x_n > n$ sau $x_n < -n$, după cum x_0 este finit, $x_0 = +\infty$ sau $x_0 = -\infty$). Conform ipotezei, rezultă că $f(x_n) \to l$, deci în vecinătatea U_0 a lui l se află toţi termenii $f(x_n)$ cu excepţia unui număr finit dintre ei, ceea ce este în contradicţie cu relaţia $f(x_n) \notin U_0$, oricare ar fi $n \in N$.

Deoarece presupunerea că l n-ar fi limita funcţiei f în punctul x_0 ne duce la contradicţie, rezultă că $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi teorema este complet demonstrată.

O b s e r v a ţ i i. 1° Teorema precedentă exprimă o condiţie echivalentă cu cea din enunţul definiţiei limitei cu ajutorul vecinătăţilor. De aceea condiţia din enunţul teoremei poate fi luată ca definiţie a limitei, iar enunţul definiţiei precedente devine o teoremă.

Definiţia limitei unei funcţii într-un punct, cu ajutorul şirurilor, se numeşte *definiţia lui Heine*. În continuare, va fi folosită o definiţie sau alta, după cum va fi mai convenabil.

2° Dacă din $x_n \to x_0$ rezultă $f(x_n) \to l$, am folosit adesea notaţia $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = l$ în loc de $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Notaţia limitei unei funcţii, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, se obţine, formal, din cea precedentă, dacă nu se mai scrie indicele n.

3° Notaţia „$f(x) \to l$ cînd $x \to x_0$" capătă acum o justificare, dacă prin $x \to x_0$ înţelegem un şir *arbitrar* $x_n \to x_0$, $(x_n \neq x_0)$. Anume, prin notaţia „$f(x) \to l$ cînd $x \to x_0$" trebuie să înţelegem „$f(x_n) \to l$ oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$".

4° În enunţul teoremei precedente (deci şi în definiţia lui Heine) s-a pus condiţia ca *toate* şirurile $(f(x_n))$ să aibă o limită comună, l, independentă de şirul $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$.

Este suficient să presupunem că pentru *orice* şir $x_n \to x_0$ $(x_n \in E$, $x_n \neq x_0)$ şirul $(f(x_n))$ are limită. Rezultă atunci că limita este aceeaşi pentru *toate* şirurile $(f(x_n))$, independentă de şirul $x_n \to x_0$.

Într-adevăr, dacă pentru două şiruri $x'_n \to x_0$ şi $x''_n \to x_0$ am avea $f(x'_n) \to l$ şi $f(x''_n) \to l''$ şi $l' \neq l''$, atunci şirul

$$x'_1,\ x''_1,\ x'_2,\ x''_2,\ \ldots,\ x'_n,\ x''_n,\ \ldots$$

tinde de asemenea către x_0, dar şirul valorilor funcţiei

$$f(x'_1),\ f(x''_1),\ f(x'_2),\ f(x''_2),\ \ldots,\ f(x'_n),\ f(x''_n),\ \ldots$$

nu mai are limită, deoarece dacă ar avea o limită, l, din faptul că $(f(x'_n))$ şi $(f(x''_n))$ sînt subşiruri ale celui de mai sus, ar rezulta $f(x'_n) \to l$ şi $f(x''_n) \to l$. Din unicitatea limitei unei şir am deduce atunci $l' = l$ şi $l'' = l$, deci $l' = l''$ şi am ajunge la o contradicţie.

5° Din raţionamentul precedent deducem în particular că: funcţia f nu are limită în x_0 (sau că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nu există) dacă şi numai dacă există cel puţin un şir $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$ astfel încît şirul $(f(x_n))$ să nu aibă limită.

5. Exemple

Cu definiţia lui Heine putem calcula limitele unor funcţii, folosind limitele unor şiruri cunoscute.

1) Pentru funcţia constantă $f(x) \equiv c$ definită pe R, avem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$, oricare ar fi x_0 (finit sau infinit). Scriem

$$\lim_{x\to x_0} c = c.$$

Într-adevăr, $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = \lim\limits_{x_n\to x_0} c = c$, oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$.

2) Pentru funcţia identică $f(x) = x$ definită pe R, avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$, oricare ar fi x_0 (finit sau infinit). Scriem

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

Într-adevăr $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = \lim\limits_{x_n \to x_0} x_n = x_0$, oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$.

În particular, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

3) Pentru funcţia $f(x) = x^k$, (k natural) definită pe R, avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^k$, oricare ar fi x_0 (finit sau infinit). Scriem

$$\lim_{x \to x_0} x^k = x_0^k, \text{ (sau } x^k \to x_0^k \text{ cînd } x \to x_0).$$

Într-adevăr, $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = \lim\limits_{x_n \to x_0} x_n^k = x_0^k$, oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$.

În particular, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2k} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2k+1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$.

4) Pentru funcţia $f(x) = \frac{1}{x^k}$, ($k \in N$) definită pe $R - \{0\}$, avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \frac{1}{x_0^k}$ dacă $x_0 \neq 0$ (finit sau infinit). Scriem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x_0^k}, \quad (x \neq x_0)$$

$$\left(\text{sau } \frac{1}{x^k} \to \frac{1}{x_0^k} \text{ dacă } x \to x_0 \neq 0\right).$$

În particular, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

Avem de asemenea

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty.$$

Într-adevăr, dacă $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, atunci $x_n^{2k} \to 0$ şi $x_n^{2k} > 0$, deci $\frac{1}{x_n^{2k}} \to +\infty$, adică $\lim\limits_{x_n \to 0} \frac{1}{x_n^{2k}} = +\infty$, de unde $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty$.

Funcţia $f(x) = \frac{1}{x^{2k-1}}$, ($k \in N$) nu are limită în 0.

Într-adevăr, dacă $x_n \to 0$ şi $x_n > 0$, atunci $x_n^{2k-1} \to 0$ şi $x_n^{2k-1} > 0$, deci $\frac{1}{x_n^{2k-1}} \to +\infty$; dacă $x_n \to 0$, şi $x_n < 0$, atunci $x_n^{2k-1} \to 0$, şi $x^{2k-1} < 0$, deci $\frac{1}{x_n^{2k-1}} \to -\infty$.

5) Pentru funcţia $f(x) = x^\alpha$, $(\alpha > 0)$ definită pe $[0, +\infty)$, avem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0^\alpha$, oricare ar fi x_0 (finit sau $+\infty$).

Scriem:

$$\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \text{ (sau } x^\alpha \to x_0^\alpha \text{ dacă } x \to x_0).$$

În particular, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ (sau $x^\alpha \to +\infty$ cînd $x \to +\infty$).

6) Pentru funcţia $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $(\alpha > 0)$, definită pe $(0, +\infty)$, avem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x_0^\alpha} \text{ dacă } x_0 > 0 \left(\text{sau } \frac{1}{x^\alpha} \to \frac{1}{x_0^\alpha} \text{ cînd } x \to x_0\right).$$

În particular, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0 \left(\text{sau } \frac{1}{x^\alpha} \to 0 \text{ cînd } x \to +\infty\right)$

De asemenea:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty \left(\text{sau } \frac{1}{x^\alpha} \to +\infty \text{ cînd } x \to 0\right).$$

7) Pentru funcţia $f(x) = a^x$, $(a > 0)$ definită pe R, avem

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0},\ x_0 \text{ finit}.$$

În particular, $\lim\limits_{x\to 1} a^x = a$, $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

Dacă $a > 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

Dacă $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

8) Pentru funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$, avem

$$\lim_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0,\ x_0 \text{ finit}.$$

În particular, $\lim\limits_{x\to e} \ln x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$.

De asemenea, avem

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Observaţie. Pentru toate funcţiile din exemplele precedente avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ oricare ar fi punctul x_0 din domeniul lor de definiţie. Rezultă că aceste funcţii sînt *continue* în orice punct din domeniul lor de definiţie.

9) Pentru funcţia $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ definită pe $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ avem

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Într-adevăr, $\lim\limits_{x_n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, $\lim\limits_{x_n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

§ 2. Limite laterale

1. Limite relative la submulţimi

Fie funcţia $f: E \to R$, şi o submulţime $A \subset E$; fie x_0 un punct de acumulare al lui A, deci şi al lui E. Să considerăm restricţia f_A a lui f la mulţimea A:

$$f_A(x) = f(x), \text{ pentru } x \in A.$$

Definiţie. Spunem că funcţia f are limita l în x_0, relativ la submulţimea A, dacă restricţia f_A are limita l în x_0; se notează $l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_A(x).$$

Rezultă că $l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$, dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, format din puncte $x_n \in A$, avem $f(x_n) \to l$.

Propoziţia 1. Dacă funcţia f are limita l în x_0, atunci are în x_0 aceeaşi limită, relativ la submulţimea A.

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, $x_n \in A$, atunci $x_n \in E$, şi deci $f(x_n) \to l$.

Observaţii. 1° În cazul particular al şirurilor, se deduce că, dacă şirul (a_n) are limita l, orice subşir al său are aceeaşi limită.

2° Propoziţia reciprocă nu este adevărată; funcţia f poate avea în x_0 limită relativ la submulţimea A, fără a avea limită în x_0 (relativ la E).

Exemplu. $E = [-1,\ 1],\ f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leqslant x < 0 \\ 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases};\quad A = [0,\ 1],\ f_A(x) = 1.$

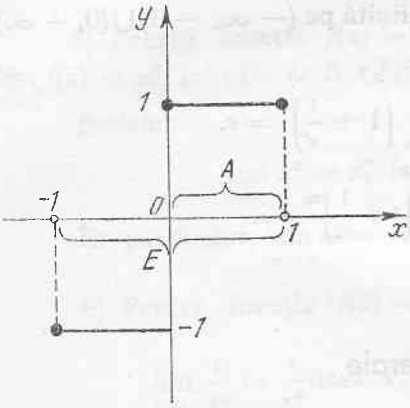


Fig. 55

Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in A}} f(x) = 1$, dar $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nu există. Într-adevăr, dacă alegem şirul (x_n) astfel:

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ (-1)^n \frac{1}{n},\ \ldots$$

atunci $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, dar şirul $(f(x))$ este

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$$

şi nu are limită.

3° Dacă submulţimea A este definită printr-o anumită proprietate P, în notaţia $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$ se poate înlocui, pentru simplificare, semnul $x \in A$, cu proprietatea P.

Exemple. Dacă $A = (a,\ b) = \{x | a < x < b\}$, vom scrie: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ a < x < b}} f(x)$.

Dacă $A = (x_0,\ +\infty) = \{x | x > x_0\}$ vom scrie $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.

Dacă $A = (-\infty,\ x_0) = \{x | x < x_0\}$ vom scrie: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ etc.

Propoziţia 2. Dacă submulţimea A este intersecţia lui E cu o vecinătate V a lui x_0, $A = V \cap E$, atunci $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$ există dacă şi numai dacă există şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; cele două limite sînt egale în acest caz.

Conform propoziţiei precedente dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, atunci există şi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$ şi sînt egale. Reciproc, să presupunem că există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = l$ şi să arătăm atunci că există şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Fie, într-adevăr, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, $x_n \in E$. Deoarece $x_n \to x_0$ avem $x_n \in V$, deci $x_n \in A = V \cap A$, cu excepţia unui număr finit de indici; deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = l$ există prin ipoteză, avem $f(x_n) \to l$, deci $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = l$, de unde $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Observaţii. 1° Din propoziţia 2) rezultă că pentru a cerceta limita funcţiei f în punctul x_0 este suficient să luăm o vecinătate V oarecare a lui x_0, aleasă după voie, şi să considerăm funcţia f definită numai pe $V \cap E$ (restricţia lui f la $V \cap E$); sau, cu alte cuvinte, este suficient ca în definiția limitei să considerăm șiruri $x_n \to x_0$, $(x_n \neq x_0)$, formate numai din puncte din $V \cap E$.

2° În cazul particular al șirurilor, vecinătățile lui $+\infty$ sînt de forma $V = (a, +\infty)$. A considera intersecția $V \cap N = (a, +\infty) \cap N$ revine la a considera numai indicii $n > a$, deci la a înlătura un număr finit de termeni ai șirului (a_n).

Propoziția 2) are în acest caz următorul enunț: șirul (a_n) are limita l, dacă și numai dacă, prin înlăturarea unui număr finit de termeni, șirul obținut are limita l.

2. Limita la stînga

Fie funcția $f: E \to R$ și x_0 un punct de acumulare al lui E. Să presupunem că x_0 este de asemenea punct de acumulare al mulțimii $A = E \cap$ $\cap (-\infty, x_0)$. Aceasta înseamnă că există șiruri $x_n \to x_0$ formate din puncte din E *de la stînga* lui x_0. A spune că $x \in A$, înseamnă că $x \in E$ și $x < x_0$. În acest caz se poate considera limita lui f în x_0, relativ la submulțimea A. Ajungem astfel la următoarea:

Definiție. Un număr l_s (finit sau infinit) se numește limita la stînga a funcției f în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate U a lui l_s există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, oricare ar fi $x < x_0$ din $V \cap E$ să avem $f(x) \in U$.

Se folosesc următoarele notații:

$$l_s = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0 - 0).$$

Observații. 1° Pentru $x_0 = +\infty$, definiția limitei în punctul $+\infty$ este echivalentă cu definiția limitei la stînga în punctul $+\infty$.

Mai general, dacă $E = (a, b)$ definiția limitei în punctul b este echivalentă cu definiția limitei la stînga în punctul b, deoarece $(a, b) \cap (-\infty, b) = (a, b)$.

În punctul a (în particular în punctul $-\infty$), definiția precedentă nu se poate aplica, deoarece $(a, b) \cap (-\infty, a) = \emptyset$. Spunem că în punctul a limita la stînga nu are sens.

2° Dacă în definițiile limitei cu ε și δ se înlocuiește condiția $x \neq x_0$ cu $x < x_0$, se obțin definiții ale limitei la stînga echivalente cu cea de mai sus.

De asemenea, dacă în definiția lui Heine se înlocuiește condiția $x_n \neq x_0$ cu $x_n < x_0$, se obține o definiție echivalentă a limitei la stînga:

Propoziția 1. Un număr l_s este limita la stînga a funcției f în punctul x_0, dacă și numai dacă, pentru orice șir $x_n \to x_0$ $(x_n \in E, x_n < x_0)$, avem $f(x_n) \to l_s$.

Observație. Pentru ca să existe limita la stînga $f(x_0 - 0)$ este necesar și suficient ca pentru orice șir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E, x_n < x_0)$ șirul $(f(x_n))$ să aibă limită. Rezultă atunci că limita este *aceeași* oricare ar fi șirul (x_n) ales.

Definiția limitei la stînga se poate formula numai cu ajutorul șirurilor crescătoare (x_n), după cum rezultă din

Propoziția 2. $l_s = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ **dacă și numai dacă, pentru orice șir crescător** $x_n \nearrow x_0$, $(x_n \in E,\ x_n < x_0)$ **avem** $f(x_n) \to l_s$.

Dacă $l_s = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$, avem $f(x_n) \to l$ pentru orice șir $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n < x_0)$, în particular pentru orice șir crescător $x_n \nearrow x_0$, $(x_n \in E,\ x_n < x_0)$.

Reciproc, să presupunem că avem $f(y_n) \to l_s$ pentru orice șir crescător $y_n \nearrow x_0$ $(y_n \in E,\ y_n < x_0)$.

Fie atunci un șir *oarecare* $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n < x_0)$. Putem schimba ordinea termenilor în șirul (x_n), astfel încît să obținem un șir crescător $y_n \nearrow x_0$ și deci $f(y_n) \to l_s$; putem schimba acum din nou ordinea termenilor în șirul $(f(y_n))$ ca să obținem șirul $(f(x_n))$ și deci $f(x_n) \to l_s$, adică $\lim\limits_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n < x_0}} f(x_n) = l_s$. Șirul (x_n) fiind ales arbitrar, rezultă că $l_s = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$.

Definiția limitei la stînga se poate de asemenea formula numai cu ajutorul șirurilor *strict crescătoare*.

Propoziția 3. $l_s = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$, **dacă și numai dacă pentru orice șir strict crescător** $x_n \nearrow x_0$ $(x_n \in E)$ **avem** $f(x_n) \to l_s$.

Evident, dacă $l_s = \lim f(x)$, avem $f(x_n) \nearrow l$ pentru orice șir

$$x_n \to x_0\ (x_n \in E,\ x_n < x_0),$$

în particular pentru orice șir strict crescător

$$x_n \nearrow x_0\ (x_n \in E).$$

Reciproc, să presupunem că pentru orice șir *strict crescător*

$$y_n \nearrow x_0\ (y_n \in E) \text{ avem } f(y_n) \to l_s.$$

Fie atunci un șir *crescător* $x_n \nearrow x_0$ $(x_n \in E,\ x_n < x_0)$. Deoarece *toți* termenii șirului (x_n) sînt *diferiți* de limita sa x_0, rezultă că *fiecare* termen din acest șir se repetă cel mult de un număr finit de ori. Putem atunci extrage un subșir (x_{n_p}) format numai din termenii *distincți* ai șirului (x_n). Evident, $x_{n_p} \underset{p}{\to} x_0$ și subșirul (x_{n_p}) este strict crescător, deoarece termenii săi sînt distincți. Atunci $f(x_{n_p}) \underset{p}{\to} l_s$. Aceasta înseamnă că orice vecinătate U al lui l_s conține toți termenii $f(x_{n_p})$ cu excepția unui număr finit dintre ei. Cum fiecare termen $f(x_n)$ este egal cu unul din termenii $f(x_{n_p})$, iar fiecare termen $f(x_n)$ se repetă de un număr finit de ori, rezultă că în afara vecinătății U a lui l_s se află un număr finit de termeni $f(x_n)$, deci $f(x_n) \to l_s$. Cum șirul crescător $x_n \nearrow x_0$ $(x_n \in E,\ x_n < x_0)$ a fost ales arbitrar, deducem că $l_s = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$.

3. Limita la dreapta

Să presupunem acum că x_0 este punct de acumulare al mulțimii $A = E \cap (x_0, +\infty)$. Aceasta înseamnă că există șiruri $x_n \to x_0$ formate din puncte din E de la dreapta lui x_0. A spune că $x \in A$ înseamnă $x \in E$

şi $x > x_0$. În acest caz se poate considera limita lui f în x_0, relativ la submulţimea A. Ajungem astfel la următoarea

D e f i n i ţ i e. Un număr l_d (finit sau infinit) este limita la dreapta a funcţiei f în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate U a lui l_d, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x > x_0$ din $V \cap E$, să avem $f(x) \in U$.

Se folosesc următoarele notaţii:

$$l = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0 + 0).$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Pentru $x_0 = -\infty$, definiţia limitei în punctul $-\infty$ este echivalentă cu definiţia limitei la dreapta în punctul $-\infty$.

Mai general, dacă $E = (a, b)$, definiţia limitei în punctul a este echivalentă cu definiţia limitei la dreapta în punctul a, deoarece $(a, b) \cap \cap (a, +\infty) = (a, b)$.

În punctul b (în particular în punctul $+\infty$), limita la dreapta nu are sens, deoarece $(a, b) \cap (b, +\infty) = \emptyset$.

2° Dacă în definiţiile limitei cu ε şi δ se înlocuieşte condiţia $x \neq x_0$ cu $x > x_0$, se obţin definiţii ale limitei la dreapta echivalente cu cea de mai sus.

De asemenea, dacă în definiţia lui Heine se înlocuieşte condiţia $x_n \neq x_0$ cu $x_n > x_0$, se obţine o definiţie echivalentă a limitei la dreapta:

P r o p o z i ţ i a 4. $l_d = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n > x_0)$, avem $f(x_n) \to l_d$.

O b s e r v a ţ i e. Pentru ca să existe limita la dreapta $f(x_0 + 0)$, este necesar şi suficient ca pentru orice şir $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n > x_0)$, şirul $(f(x_n))$ să aibă limită. Rezultă atunci că limita este *aceeaşi* oricare ar fi şirul (x_n) ales.

Definiţia limitei la dreapta se poate formula numai cu ajutorul şirurilor descrescătoare sau numai cu ajutorul şirurilor strict descrescătoare.

P r o p o z i ţ i a 5. $l_d = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ dacă şi numai dacă pentru orice şir strict descrescător $x_n \searrow x_0$ $(x_n \in E)$, avem $f(x_n) \to l_d$.

4. Calculul limitei cu ajutorul limitelor laterale

Să presupunem acum că x_0 este punct de acumulare atît pentru mulţimea $A = E \cap (-\infty, x_0)$ cît şi pentru mulţimea $B = E \cap (x_0, +\infty)$. Aceasta înseamnă că există atît şiruri $x_n \to x_0$ cu $x_n \in E$ şi $x_n < x_0$, cît şi şiruri $y_n \to x_0$ cu $y_n \in E$ şi $y_n > x_0$.

În acest caz au sens ambele limite laterale în x_0.

Legătura dintre limită şi limitele laterale este dată de

P r o p o z i ţ i a 6. **Funcţia f are limită în x_0, dacă şi numai dacă are în x_0 limite laterale egale. În acest caz**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Într-adevăr, dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, aceasta înseamnă că f are în x_0 limite relative la A şi la B egale cu l:

$$l = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ şi } l = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x) = f(x_0 + 0),$$

deci limitele laterale există şi sînt egale amîndouă cu l.

Reciproc, să presupunem că limitele laterale în punctul x_0 există şi sînt egale: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = l$.

Fie atunci U o vecinătate oarecare a lui l. Deoarece $f(x_0 - 0) = l$, există o vecinătate V_1 a lui x_0 astfel încît dacă $x \in V_1 \cap E$ şi $x < x_0$ să avem $f(x) \in U$. Deoarece $f(x_0 + 0) = l$, există o vecinătate V_2 a lui x_0, astfel încît dacă $x \in V_2 \cap E$ şi $x > x_0$, să avem $f(x) \in U$.

Să notăm $V = V_1 \cap V_2$. Avem $V \cap E \subset V_1 \cap E$ şi $V \cap E \subset V_2 \cap E$ şi V este o vecinătate a lui x_0. Fie $x \neq x_0$ un punct oarecare din $V \cap E$. Atunci $x \in V_1 \cap E$ şi $x \in V_2 \cap E$. Dacă $x < x_0$, atunci $f(x) \in U$ (deoarece $x \in V_1 \cap E$), iar dacă $x > x_0$, atunci, de asemenea, $f(x) \in U$ (deoarece $x \in V_2 \cap E$). Aşadar, oricare ar fi $x \neq x_0$ din $V \cap E$, avem $f(x) \in U$, şi deci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

C o r o l a r. **$l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dacă şi numai dacă pentru orice şir strict monoton $x_n \to x_0$ $(x_n \in E)$ avem $f(x_n) \to l$.**

O b s e r v a ţ i e. Uneori este mai uşor de calculat limitele laterale în x_0 şi din compararea lor să deducem dacă funcţia are limită în x_0.

P r o p o z i ţ i a 7. **O funcţie monotonă pe mulţimea E are limite laterale în orice punct de acumulare al mulţimii E.**

Pentru a face o alegere, să presupunem că funcţia f este crescătoare pe E. Fie x_0 un punct de acumulare de puncte ale lui E de la stînga lui x_0, şi să arătăm că $f(x_0 - 0)$ există. Pentru aceasta este suficient să folosim numai şiruri crescătoare $x_n \nearrow x_0$, $(x_n \in E)$, $x_n < x_0$.

Deoarece f este crescătoare, şirurile $(f(x_n))$ sînt de asemenea crescătoare, deci au limită (finită sau $+\infty$).

Rezultă că limita şirurilor $(f(x_n))$ este aceeaşi şi deci funcţia f are limită la stînga în x_0.

Dacă x_0 este punct de acumulare de puncte din E de la dreapta lui x_0, se folosesc şiruri strict descrescătoare $x_n \searrow x_0$, $(x_n \in E)$ şi se deduce ca mai sus că $f(x_0 + 0)$ există.

În cazul cînd f este descrescătoare, demonstrația se face în mod asemănător.

O b s e r v a ț i e . 1° Există funcții care nu au nici limită la dreapta, nici limită la stînga în unele puncte.

Exemple. 1) Funcția $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ nu are limite laterale în punctul 0.

Fie $x_n = \frac{2}{n\pi}$; avem $x_n \to 0$ și $x_n > 0$.

Dar $f(x_n) = \sin n \frac{\pi}{2}$, deci șirul $(f(x_n))$ este

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$$

și nu are limită. Așadar $f(x)$ nu are limită la dreapta în punctul 0.

Luînd șirul $x_n = -\frac{2}{n\pi}$, avem $x_n \to 0$ și $x_n < 0$.

Șirul $(f(x_n))$ este:

$$-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots$$

și nu are limită, deci f nu are limită la stînga în punctul 0.

2) Funcția lui Dirichlet definită pe R prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \text{ este rațional} \\ 0 \text{ dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

nu are limite laterale în nici un punct.

Fie $x_0 \in R$ oarecare. Există șiruri (x_n) de numere raționale și șiruri (y_n) de numere iraționale, astfel ca $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$, $x_n > x_0$, $y_n > x_0$. Atunci

$$f(x_n) = 1, \text{ deci } f(x_n) \to 1, \text{ și } f(y_n) = 0, \text{ deci } f(x_n) \to 0.$$

Rezultă că f nu are limită la dreapta în x_0.

Luînd șirurile (x_n) și (y_n) astfel ca $x_n < x_0$, $y_n < x_0$, se deduce că f nu are nici limită la stînga în x_0.

2° Pentru o funcție $f: E \to R$, despre care se știe că are limită într-un punct x_0 de acumulare al lui E, limita sa l se poate calcula folosind un singur șir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$:

$$l = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

De asemenea, dacă f are limită la stînga l_s în x_0, luînd un singur șir $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n < x_0)$ obținem $f(x_n) \to l_s$; iar dacă f are limită la dreapta l_d în x_0, luînd un singur șir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n > x_0)$ obținem $f(x_n) \to l_d$.

În particular, acest procedeu se poate aplica pentru funcțiile monotone, despre care *știm* că au limite laterale în fiecare punct de acumulare al domeniului de definiție.

Exemple. 1) Funcţia $f(x) = a^x$ este monotonă pe R; ea are deci limite în punctele $-\infty$ şi $+\infty$. Atunci:

Dacă $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{n\to-\infty} a^{-n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^n} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Dacă $0 < a < 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{n\to-\infty} a^n = +\infty.$$

2) Funcţia $f(x) = \ln x$ este monotonă pe $(0, +\infty)$; ea are deci limite în punctele 0 şi $+\infty$. Atunci:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = \lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0} \ln x = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{1}{n} = -\infty.$$

3) Funcţia $f(x) = x^\alpha$, $(\alpha > 0)$, definită pe $[0, +\infty)$, este monotonă, deci are limită în $+\infty$. Atunci:

$$\lim_{n\to+\infty} x^\alpha = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty.$$

4) Funcţia $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $(\alpha > 0)$, definită pe $(0, +\infty)$, este monotonă, deci are limite în 0 şi $+\infty$. Atunci:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

5) Fie funcţia $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ definită pe $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Avem:

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Într-adevăr, fie $x_n \to 0$, $x_n > 0$. Punînd $y_n = \frac{1}{x_n}$, avem $y_n \to +\infty$.

Atunci:

$$f(x_n) = (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \to e,$$

sau:

$$\lim_{\substack{x_n\to 0\\ x_n>0}} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e, \text{ de unde } \lim_{x\searrow x_0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Fie acum $x_n \to 0$, $x_n < 0$. Punînd $y_n = \frac{1}{x_n}$, avem $y_n \to -\infty$

$$f(x_n) = (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \to e$$

sau:

$$\lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n < 0}} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e, \text{ de unde } \lim_{x \nearrow x_0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Funcția $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, avînd limitele laterale în 0 egale cu e, rezultă că are limită în 0 egală cu e.

6) Pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in N$, definită pe $R - \{0\}$, avem:

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x^{2k}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty.$$

7) Pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x^{2k-1}}$, $k \in N$, definită pe $R - (0)$, avem:

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x^{2k-1}} = -\infty, \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^{2k-1}} = +\infty.$$

§ 3. Proprietățile limitelor de funcții

1. Proprietăți ale limitelor

În cele ce urmează vor fi studiate proprietățile limitelor. Proprietățile limitelor laterale sînt aceleași, deoarece limitele laterale sînt limite ale unor restricții de funcții.

Deoarece limita unei funcții într-un punct se poate defini cu ajutorul limitelor de șiruri, o serie de proprietăți ale limitelor de șiruri se transmit limitelor de funcții.

Fie funcția $f: E \to R$ și x_0 un punct de acumulare al lui E.

Propoziția 1. Dacă limita funcției f în punctul x_0 există, această limită este unică.

În adevăr, dacă funcția are limita l în punctul x_0, avem $f(x_n) \to l$, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$, ($x_n \in E$, $x_n \neq x_0$), iar șirurile $(f(x_n))$ au toate limita unică l.

Propoziția 2. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim_{x \to x_0} f(x)|.$$

În adevăr, dacă $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$, atunci $f(x_n) \to l$, deci $|f(x_n)| \to |l|$, adică $\lim\limits_{x_n \to x_0} |f(x_n)| = |l|$, de unde $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

Exemple. $\lim\limits_{x \to x_0} |x| = |x_0|$; $\lim\limits_{x \to -\infty} |x| = +\infty$;

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty,\ \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty,\ \text{deci}\ \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Observaţie. 1° Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, deoarece dacă $|f(x_n)| \to 0$ atunci $f(x_n) \to 0$.

2° Dacă însă $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = l > 0$ s-ar putea ca $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ să nu existe.

Exemplu. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = +\infty,$

dar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\ \text{nu există, deoarece}\ \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty\ \text{şi}\ \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Dacă însă există şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, atunci avem sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -l$, deoarece în acest caz $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\pm l| = |\lim\limits_{x \to x_0} f(x)|$.

Propoziţia 3. Dacă l este finit, avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - l] = 0$.

În adevăr, oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$ avem $f(x_n) \to l$ dacă şi numai dacă $f(x_n) - l \to 0$, adică $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = l$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x_n \to x_0} [f(x_n) - l] = 0$, de unde $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - l] = 0$.

Exemplu. Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ (x_0 finit), avem

$$\lim_{x \to x_0} [x - x_0] = 0\ (\text{sau}\ x - x_0 \to 0\ \text{cînd}\ x \to x_0).$$

Rezultă atunci că $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$ (sau $|x - x_0| \to 0$ cînd $x \to x_0$).

Propoziţia 4. Dacă funcţiile f şi g definite pe E coincid pe o vecinătate V a lui x_0 (cu excepţia lui x_0) şi dacă una dintre ele are limită în x_0, atunci şi cealaltă funcţie are limită în x_0, şi limitele sînt egale.

Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, atunci

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V \cap E}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Deoarece, conform ipotezei, avem $f(x) = g(x)$ pentru $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, rezultă că funcţia g are limită în x_0 relativ la $V \cap E$ şi

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V \cap E}} g(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V \cap E}} f(x) = l.$$

Deoarece V este o vecinătate a lui x_0, rezultă că funcţia g are limită în x_0 (relativ la E) şi

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V \cap E}} g(x) = l.$$

Propoziţia 5. Dacă funcţiile g, f şi h definite pe E au limită în x_0, şi dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pentru orice $x \in V \cap E$, $(x \neq x_0)$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} h(x).$$

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$, putem presupune că $x_n \in V$ pentru orice n, îndepărtînd, la nevoie, numărul finit de termeni dinafara lui V. Atunci

$$g(x_n) \leqslant f(x_n) \leqslant h(x_n) \text{ şi deci } \lim_{x_n \to x_0} g(x_n) \leqslant \lim_{x_n \to x_0} f(x_n) \leqslant \lim_{x_n \to x_0} h(x_n),$$

de unde:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} h(x).$$

Corolarul 1. Dacă f are limită în x_0 şi dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, pentru două numere α şi β să avem $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, oricare ar fi $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci

$$\alpha \leqslant \lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \beta.$$

Corolarul 2. Dacă f are limită în x_0 şi dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$.

Observaţie. Dacă $f(x) > 0$, $(x \in V \cap E,\ x \neq x_0)$ nu rezultă $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, ci numai $\lim_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$ (eventual $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$).

Exemplu. $|x| > 0$, pentru $x \neq 0$, dar $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

Corolarul 3. Dacă f are limită în x_0 şi dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $f(x) \leqslant 0$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant 0$.

Observaţie. Putem avea $f(x) < 0$ pentru orice $x \in E$, $x \neq x_0$, şi totuşi $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Propoziția 6. Dacă funcțiile g și h definite pe E au limite egale în x_0, și dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci funcția f are limită în x_0, egală cu limita comună a celor două funcții g și h.

Într-adevăr, fie $l = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$. Dacă $x_n \to x_0$ ($x_n \in V \cap E$, $x_n \neq x_0$), atunci $g(x_n) \leq f(x_n) \leq h(x_n)$ și deoarece $\lim\limits_{x_n \to x_0} g(x_n) = l$ și $\lim\limits_{x_n \to x_0} h(x_n) = l$, rezultă

$$\lim_{x \to x_0} f(x_n) = l, \text{ de unde } \lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

2. Proprietăți ale funcțiilor deduse din proprietățile limitelor

În propozițiile următoare se arată că, dacă limita unei funcții într-un punct are o anumită proprietate, atunci funcția are această proprietate pe o întreagă vecinătate a punctului.

Propoziția 7. Dacă funcția $f: E \to R$ are limită în x_0 și dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > \alpha$, atunci există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît să avem $f(x) > \alpha$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Fie U o vecinătate a numărului $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, cu extremitatea stîngă în α, deci de forma $U = (\alpha, \beta)$ sau $U = (\alpha, +\infty)$, după cum limita este finită sau $+\infty$. Există atunci o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in U$, adică $f(x) > \alpha$.

Corolarul 1. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $f(x) > 0$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Corolarul 2. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to x_0} f(x)| > 0$, deci există V, astfel încît pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq 0$, să avem $|f(x)| > 0$, adică $f(x) \neq 0$.

Propoziția 8. Dacă funcția $f: E \to R$ are limită în x_0, și dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \beta$, atunci există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $f(x) < \beta$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Demonstrația se face la fel ca pentru propoziția 7, luînd vecinătățile V ale lui $f(x_0)$ de forma (α, β) sau $(-\infty, \beta)$ după cum limita este finită sau $-\infty$.

C o r o l a r. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, atunci există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $f(x) < 0$, oricare ar fi $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

P r o p o z i ţ i a 9. Dacă f are limita finită în x_0 şi dacă $\alpha < \lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \beta$, atunci există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît $\alpha < f(x) < \beta$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Într-adevăr, $U = (\alpha, \beta)$ este o vecinătate a numărului $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Există atunci o vecinătate V a lui x_0 astfel ca, dacă $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in U$, adică $\alpha < f(x) < \beta$.

C o r o l a r. Dacă f are limita finită în x_0, există o vecinătate V a lui x_0, pe care funcţia este mărginită.

O b s e r v a ţ i e. Dacă f este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, nu rezultă că f are limită în x_0, chiar dacă f este monotonă. Dacă f este monotonă, are limite laterale în x_0, dar, eventual, diferite.

P r o p o z i ţ i a 10. Dacă f şi g sînt definite pe E şi au limite în punctul x_0, şi dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, atunci există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît $f(x) < g(x)$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Alegem un număr α astfel ca $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \alpha < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Există o vecinătate V_1 a lui x_0, astfel ca $f(x) < \alpha$ pentru $x \in V_1 \cap E$, $x \neq x_0$, şi o vecinătate V_2 a lui x_0, astfel ca $\alpha < g(x)$ pentru $x \in V_2 \cap E$, $x \neq x_0$. Mulţimea $V = V_1 \cap V_2$ este o vecinătate a lui x_0, şi dacă $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci $x \in V_1 \cap E$ şi $x \in V_2 \cap E$ deci $f(x) < \alpha < g(x)$, de unde $f(x) < g(x)$.

3. Criterii de existenţă a limitelor de funcţii

Pentru şiruri, criteriul lui Cauchy ne asigură de convergenţa unui şir fără a-i cunoaşte limita.

Pentru funcţii, avem un criteriu (necesar şi suficient) de existenţă a *limitei finite*, fără a cunoaşte această limită.

Fie funcţia $f: E \to R$ şi x_0 un punct de acumulare al lui E.

C r i t e r i u l l u i C a u c h y - B o l z a n o. Funcţia f are limită finită în punctul x_0 dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel, încît oricare ar fi punctele $x' \neq x_0$ şi $x'' \neq x_0$ din $V \cap E$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Să presupunem că există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ şi că l este *finit*.

Aceasta înseamnă că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ $\left(\text{adică pentru orice vecinătate } U = \left(l - \frac{\varepsilon}{2}, l + \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ a lui } l\right)$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x \neq x_0$ din $V \cap E$, să avem $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ (adică $f(x) \in U$); atunci pentru orice $x' \neq x_0$ şi $x'' \neq x_0$ din $V \cap E$ avem:

$$|f(x') - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ şi } |f(x'') - l| < \frac{\varepsilon}{2},$$

deci:

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - l| + |f(x'') - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reciproc, să presupunem că este verificată condiţia din enunţ şi să arătăm că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ există şi este finită.

Fie un şir oarecare $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$ şi un număr oarecare $\varepsilon > 0$. Conform ipotezei, există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, dacă $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$, $x', x'' \in V \cap E$ atunci $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Vecinătatea V a lui x_0 depinde de ε.

Deoarece $x_n \to x_0$, există un număr natural N (care depinde de V, deci de ε), astfel încît oricare ar fi $p \geqslant N$ să avem $x_p \in V \cap E$. Aşadar, oricare ar fi $n \geqslant N$, şi $m \geqslant N$, avem x_n, $x_m \in V \cap E$, de unde

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că $(f(x_n))$ este un şir fundamental, şi deci este convergent, conform criteriului lui Cauchy.

Am arătat astfel că oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$, şirul $(f(x_n))$ are limită finită.

Rezultă că această limită finită este independentă de şirul (x_n) ales, deci limita comună a şirurilor $(f(x_n))$ este limita funcţiei f în punctul x_0.

Aşadar, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ există şi este finită.

Criteriile care urmează dau condiţii suficiente de existenţă a limitei.

P r o p o z i ţ i a 1. Dacă f şi g sînt definite pe E, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ şi dacă există un număr finit l, şi o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $|f(x) - l| \leqslant g(x)$, pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Fie $x_n \to x_0$, $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$. Putem presupune $x_n \in V$, pentru orice n. Atunci $|f(x_n) - l| \leqslant g(x_n)$ şi deoarece $g(x_n) \to 0$, pe baza criteriului de la şiruri, deducem $f(x_n) \to l$, adică $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = l$, de unde $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

O b s e r v a ț i e. Dacă $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, atunci $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. În adevăr, notînd $g(x) = |f(x)|$, avem $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ și $|f(x) - 0| \leqslant g(x)$, deci $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Exemple. 1) Pentru funcția $f(x) = \sin x$, definită pe R, avem:

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad (x_0 \text{ finit})$$

(sau $\sin x \to \sin x_0$ cînd $x \to x_0$).

Într-adevăr:

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|,$$

deoarece $|\cos\alpha| \leqslant 1$ și $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$ oricare ar fi α (fie că α este măsurat în radiani, fie că este măsurat în grade). Deoarece $|x - x_0| \to 0$ cînd $x \to x_0$, deducem că $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

2) Pentru funcția $f(x) = \cos x$ definită pe R, avem

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \ (x_0 \text{ finit})$$

(sau $\cos x \to \cos x_0$ cînd $x \to x_0$).

În adevăr

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|,$$

deoarece $|\sin\alpha| \leqslant 1$, oricare ar fi α. Deoarece $\lim_{x\to x_0} |x - x_0| = 0$, deducem $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

O b s e r v a ț i i. 1° Pentru funcțiile $f(x) = \sin x$ și $f(x) = \cos x$ avem $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pentru orice $x_0 \in R$, deci funcțiile sin și cos sînt continue în orice punct din domeniul lor de definiție.

2° În punctele $+\infty$ și $-\infty$, funcțiile sin și cos nu au limită.

Fie $x_n = n\frac{\pi}{2} \to +\infty$. Șirul $(\sin x_n)$ este:

$$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \ldots$$

deci nu are limită. Așadar, funcția $\sin x$ nu are limită în punctul $+\infty$. Se arată la fel că nici funcția $\cos x$ nu are limită în punctul $+\infty$.

Luînd $x_n = -n\dfrac{\pi}{2} \to -\infty$, deducem că funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ nu au limită în punctul $-\infty$.

3) Pentru funcția $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ definită pe $R - \{0\}$, avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

În adevăr, pentru $x \in V = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ avem

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|$$

dacă x este măsurat în *radiani*. Pentru $x \neq 0$, avem atunci

$$\frac{1}{|\operatorname{tg} x|} < \frac{1}{x} < \frac{1}{|\sin x|}$$

sau:

$$\frac{|\cos x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|\sin x|},$$

de unde

$$|\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1.$$

Dar $\lim\limits_{x\to 0} |\cos x| = |\cos 0| = 1$ și $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. Rezultă că funcția $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$ are limită în 0, și această limită este egală cu 1:

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1.$$

Dar pentru $x \in V$, $x \neq 0$, $\sin x$ și x au același semn, deci $\dfrac{\sin x}{x} > 0$, de unde

$$\frac{\sin x}{x} = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \text{ și deci } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

4) Pentru funcția $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, definită pe $(0, +\infty)$, avem

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$$\left(\text{sau } \frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0 \text{ cînd } x \to +\infty\right).$$

Avem:

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}{x^\alpha} = \frac{2}{\alpha}\,\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{2}}}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha}\,\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{x^\alpha} = \frac{2}{\alpha}\,\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}},$$

deoarece $\ln z < z$, oricare ar fi $z > 0$. Dar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\alpha} \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}} = 0$

şi deci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$.

Se spune că funcţia logaritmică $\ln x$ creşte mai încet decît orice putere cu exponentul strict pozitiv.

P r o p o z i ţ i a 2. Dacă funcţiile f şi g sînt definite pe E, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ şi dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $f(x) \geqslant g(x)$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, $(x_n \in V \cap E,\ x_n \neq x_0)$, avem $f(x_n) \geqslant g(x_n)$ şi, deoarece $g(x_n) \to +\infty$, avem $f(x_n) \to +\infty$, adică $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = +\infty$, de unde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Exemplu. Pentru funcţia $f(x) = \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, definită pe $(0, +\infty)$,

avem:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\left(\text{sau } \frac{e^x}{x^\alpha} \to +\infty, \text{ cînd } x \to +\infty\right),$$

avem:

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2\alpha}}\right)^{2\alpha}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{2\alpha}} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2\alpha}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{2\alpha} > \left(\frac{\frac{x}{2\alpha}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{2\alpha} = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{2\alpha} x^\alpha,$$

deoarece $e^z > z$, oricare ar fi z. Dar $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{2\alpha} x^\alpha = +\infty$ şi deci $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$. Se spune că funcţia exponenţială e^x creşte mai repede decît orice putere cu exponentul strict pozitiv.

P r o p o z i ţ i a 3. Dacă funcţiile f şi g sînt definite pe E, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ şi dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $f(x) \leqslant g(x)$, pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, $(x_n \in V \cap E,\ x_n \neq x_0)$, avem $f(x_n) \leqslant g(x_n)$ şi, deoarece $g(x_n) \to -\infty$, avem $f(x_n) \to -\infty$, adică $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = -\infty$, de unde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

4. Operații cu funcțiile care au limită

Fie funcțiile $f: E \to R$ și $g: E \to R$, și x_0 un punct de acumulare al mulțimii E.

T e o r e m ă. Dacă funcțiile f și g au limite în punctul x_0 (finite sau infinite), atunci:

1) **Dacă suma limitelor are sens, funcția $f + g$ are limită în x_0 și**

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(cazul exceptat: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$).

2) **Dacă produsul limitelor are sens, funcția fg are limită în x_0 și**

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(cazul exceptat $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} | g(x) | = +\infty$).

3) **Funcția αf are limită în x_0, oricare ar fi $\alpha \in R$ și**

$$\lim_{x \to x_0} \alpha f(x) = \alpha \cdot \lim_{x \to x_0} f(x), \text{ dacă } \alpha \neq 0$$

și $\lim\limits_{x \to x_0} 0 \cdot f(x) = 0$.

4) **Dacă raportul limitelor are sens, funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

(cazuri exceptate: 1) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to x_0} | f(x) | = \lim\limits_{x \to x_0} | g(x) | = +\infty$).

5) **Dacă $f \geqslant 0$ și dacă puterea $[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ are sens, atunci funcția f^g are limită în x_0 și**

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Fie $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ și $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Fie $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$. Din ipoteză rezultă că $f(x_n) \to a$ și $g(x_n) \to b$.

Dacă $a + b$ are sens, atunci $f(x_n) + g(x_n) \to a + b$, adică

$$\lim_{x_n \to x_0} [f(x_n) + g(x_n)] = a + b, \text{ de unde } \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b =$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Celelalte puncte ale teoremei se demonstrează la fel.

Observaţii. 1° Dacă raportul limitelor are sens, înseamnă că $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, deci $g(x) \neq 0$ pe o întreagă vecinătate $V \cap E$ a lui x_0, deci raportul funcţiilor $\frac{f}{g}$ este definit cel puţin pe $V \cap E$, iar x_0 este punct de acumulare al acestei mulţimi, deci are sens $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

De asemenea, dacă $[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ are sens, atunci sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ este oarecare (finită sau infinită), sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) > 0$ (finită sau $+ \infty$).

În primul caz, avem $f(x) > 0$ pe o vecinătate $V \cap E$ a lui x_0, deci funcţia $f(x)^{g(x)}$ este definită cel puţin pe $V \cap E$, şi deci limita sa în punctul x_0 are sens.

În al doilea caz, avem $g(x) > 0$, pe o vecinătate $V \cap E$ a lui x_0, deci funcţia $f(x)^{g(x)}$ este de asemenea definită pe $V \cap E$ şi deci limita sa în x_0 are sens.

2° În cazul cînd $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, se pot face următoarele precizări:

a) Dacă $g(x) > 0$, pentru $x \neq x_0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$.

b) Dacă $g(x) < 0$, pentru $x \neq x_0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty$.

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$, atunci $g(x_n) \to 0$; dacă $g(x_n) > 0$, atunci $\frac{1}{g(x_n)} \to +\infty$, iar dacă $g(x_n) < 0$, atunci $\frac{1}{g(x_n)} \to -\infty$.

c) Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ şi $g(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{|g(x)|} = +\infty$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = 0$, şi $|g(x)| > 0$, pentru $x \neq x_0$.

Reciproc, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{|g(x)|} = 0$, deci $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$.

3° Mulţimea $\mathcal{F}(E, x_0)$ a funcţiilor definite pe E, care au limită finită în x_0, este o *algebră*, deoarece suma, produsul şi produsul cu scalari, efectuate asupra funcţiilor din această mulţime, ne conduc la funcţii care fac parte din aceeaşi mulţime.

Dacă notăm $L(f) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pentru $f \in \mathscr{F}(E, x_0)$, avem

$$L(f + g) = L(f) + L(g) \quad \text{(aditivitatea)},$$
$$L(\alpha f) = \alpha L(f) \quad \text{(omogenitatea)},$$
$$L(fg) = L(f)L(g) \quad \text{(multiplicativitatea)}.$$

Aplicaţia $L : \mathscr{F}(E, x_0) \to R$ este o funcţie liniară (aditivă şi omogenă) şi multiplicativă pe algebra $\mathscr{F}(E, x_0)$.

Din teorema de mai sus rezultă de asemenea că:

6) **Funcţia $-f$ are limită în x_0 şi**

$$\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = -\lim_{x \to x_0} f(x).$$

7) **Dacă diferenţa limitelor are sens, funcţia $f-g$ are limită în x_0 şi**

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(cazul exceptat: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm \infty$).

Pentru demonstrarea proprietăţii 6) se aplică proprietatea 3) cu $\alpha = -1$. Pentru a demonstra 7) se aplică apoi 1) şi 6).

Se demonstrează prin recurenţă că proprietăţile 1) şi 3) rămîn valabile pentru mai multe funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_n$ care au limite în x_0:

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) + \ldots + \lim_{x \to x_0} f_n(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x) \ldots \lim_{x \to x_0} f_n(x),$$

dacă suma sau produsul limitelor din membrul drept sînt definite (au sens).

În particular, din ultima egalitate se obţine:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n \quad (n \in N).$$

Corolar. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ şi dacă g este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$

Fie V o vecinătate a lui x_0 pe care g este mărginită, şi fie $M > 0$ astfel ca

$$|g(x)| \leqslant M \text{ pentru } x \in V.$$

atunci

$$|f(x)\,g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leqslant M\,|f(x)|$$

şi $\lim\limits_{x\to x_0} M\,|f(x)| = M \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, de unde

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = 0.$$

5. Exemple

1) *Pentru orice polinom $P(x)$ definit pe R, avem*

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0) \qquad (x_0 \text{ finit}).$$

(Orice polinom este o funcție continuă în punctele domeniului său de definiție.)

Într-adevăr, fie $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Toți termenii sumei au limite finite în x_0, deci suma limitelor are sens şi deci $P(x)$ are limită în x_0:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0}(a_n x^n) + \lim_{x\to x_0}(a_{n-1}x^{n-1}) + \ldots + \lim_{x\to x_0}(a_1 x) + \lim_{x\to x_0} a_0 =$$

$$= a_n x_0 + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0).$$

2) *Pentru orice polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, definit pe R, $a_n \neq 0$, avem*

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = a_n(+\infty)^n, \ \lim_{x\to-\infty} P(x) = a_n(-\infty)^n.$$

Avem, pentru $x \neq 0$,

$$P(x) = x^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right).$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^k} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^k} = 0$, $(k \in N)$, suma din paranteză are limita $a_n \neq 0$ iar $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = (+\infty)^n$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = (-\infty)^n$. Rezultă că $P(x)$ are limită în punctele $+\infty$ şi $-\infty$ şi

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0\frac{1}{x^n}\right) = (+\infty)^n \cdot a_n;$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \lim_{x\to-\infty}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0\frac{1}{x^n}\right) = (-\infty)^n \cdot a_n.$$

Aşadar, în punctele $+\infty$ şi $-\infty$, limita unui polinom este egală cu limita termenului cu gradul cel mai mare.

3) *Orice funcţie raţională* $\frac{P}{Q}$ *are limită într-un punct* x_0 *în care nu se anulează numitorul,* $Q(x_0) \neq 0$, *şi*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

(O funcţie raţională este continuă în orice punct din domeniul său de definiţie.)

Într-adevăr, deoarece $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ şi $\lim_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0) \neq 0$, rezultă:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{\lim_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

4) Fie $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

a) *Dacă* $n < m$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

b) *Dacă* $n = m$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m}$.

c) *Dacă* $n > m$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m}(+\infty)^{n-m}$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m}(-\infty)^{n-m}$.

Într-adevăr, pentru $x \neq 0$, avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n\left(a_n \quad a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0\frac{1}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_0\frac{1}{x^m}\right)} = \frac{x^n}{x^m} \cdot R(x),$$

unde

$$R(x) = \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0\frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_0\frac{1}{x^m}}.$$

Avem: $\lim_{x \to +\infty} R(x) = \lim_{x \to -\infty} R(x) = \frac{a_n}{b_m} \neq 0$.

Dacă $n < m$, avem $\frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}}$

şi deci

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^n}{x^m} = 0,$$

deci

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \cdot \frac{a^n}{b^m} = 0.$$

Dacă $n = m$, avem $\frac{x^n}{x^n} = 1$, deci, pentru $x \neq 0$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x),$$

de unde

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Dacă $n > m$, avem $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ cu $n - m > 0$, deci

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^m} = (+\infty)^{n-m} \text{ şi } \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{x^m} = (-\infty)^{n-m},$$

de unde

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^m} \lim_{x\to+\infty} R(x) = \frac{a_n}{b_m} (+\infty)^{n-m}$$

şi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{x^m} \lim_{x\to-\infty} R(x) = \frac{a_n}{b_m} (-\infty)^{n-m}.$$

5) *Fie funcţia raţională* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *definită pe* R, *şi* x_0 *o rădăcină a numitorului*, $Q(x_0) = 0$. *Dacă* p *şi* q *sînt ordinele de multiplicitate ale rădăcinii* x_0, *respectiv pentru* P *şi* Q, *avem*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x - x_0)^p P_1(x)}{(x - x_0)^q Q_1(x)},$$

unde p *şi* q *sînt numere naturale sau* 0, *iar* $P_1(x_0) \neq 0$, $Q_1(x_0) \neq 0$.

a) *Dacă* $p > q$, *avem*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

b) *Dacă* $p = q$, *avem*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}.$$

c) *Dacă* $p < q$ *şi* $q - p = 2k$, $k \in N$, *avem*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

d) *Dacă* $p < q$ *şi* $q - p = 2k - 1$, $k \in N$, *avem*

$$\lim_{x\nearrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = -\infty \cdot \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}$$

$$\lim_{x\searrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \cdot \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)},$$

deci funcţia $\frac{P}{Q}$ *nu are limită în* x_0.

Într-adevăr, dacă $p > q$, $\dfrac{(x - x_0)^p}{(x - x_0)^q} = (x - x_0)^{p-q}$,

deci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)^p}{(x - x_0)^q} = 0.$$

Dacă $q = p$, $\dfrac{(x - x_0)^p}{(x - x_0)^q} \equiv 1$.

Dacă $p < q$, avem $\dfrac{(x - x_0)^p}{(x - x_0)^q} = \dfrac{1}{(x - x_0)^{q-p}}$.

În acest caz:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{q-p}} = (-\infty)^{p-q}; \lim_{x \searrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{q-p}} = (+\infty)^{q-p},$$

deci, dacă $p - q = 2k$, limitele laterale sînt ambele egale cu $+\infty$, iar dacă $p - q = 2k - 1$ limita la stînga este $-\infty$, iar limita la dreapta este $+\infty$.

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$.

Într-adevăr, pentru $x \neq 0$, avem $\dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}$ şi deci

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

7) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Într-adevăr, pentru $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$, avem

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x},$$

deci

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \cos x = 1 \cdot \cos 0 = 1.$$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$,

deoarece pentru $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$, avem $\dfrac{x}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}}$.

9) *Pentru* $x_0 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, *k întreg, avem*

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0.$$

(Funcția tg x este continuă în orice punct din domeniul său de definiție.)

Într-adevăr, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ și $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \neq 0$,

deci

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \sin x}{\lim\limits_{x \to x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0.$$

Observații. 1° Dacă $x_0 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, funcția tg x are în x_0 limite laterale infinite, și diferite, deci nu are limită într-un asemenea punct.

De exemplu, $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$.

2° În punctele $+\infty$ și $-\infty$, funcția tg x nu are limite.

Într-adevăr, luînd $x_n = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$, avem $x_n \to +\infty$, iar șirul $(\operatorname{tg} x_n)$,

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots,\ -1,\ 1,\ \ldots$$

nu are limită, deci tg x nu are limită în punctul $+\infty$.

Luînd $x_n = -n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$, avem $x_n \to -\infty$, dar șirul $(\operatorname{tg} x_n)$ nu are limită, deci tg x nu are limită în $-\infty$.

10) *Pentru* $x_0 \neq k\pi$, *k întreg, avem:*

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0.$$

(Funcția ctg x este continuă în orice punct din domeniul său de definiție.)

Într-adevăr, $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \neq 0$,

deci:

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x_0}{\sin x_0} = \operatorname{ctg} x_0.$$

Observații. 1° Dacă $x_0 = k\pi$, funcția ctg x are în x_0 limite laterale **infinite**, dar diferite, deci nu are limită în x_0.

De exemplu, $\lim\limits_{x \nearrow 0} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \searrow 0} \operatorname{ctg} x = +\infty$.

2° În punctele $+\infty$ și $-\infty$, funcția ctg x nu are limite.

11) *Pentru funcția* $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ *definită pe* $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ *avem:*

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

6. Limitele funcţiilor compuse

Fie funcţiile $u : E \to F$; $f : F \to R$ şi funcţia compusă $f \circ u : E \to R$,

$$(f \circ u)(x) = f(u(x)), \text{ pentru } x \in E.$$

Fie x_0 un punct de acumulare al lui E şi u_0 un punct de acumulare al lui F.

Teoremă. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$, dacă $u(x) \neq u_0$ pentru $x \neq x_0$, şi dacă $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = l$, atunci funcţia compusă $f \circ u$ are limită în x_0 şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

Într-adevăr, fie $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$. Notînd $u_n = u(x_n)$ avem $u_n \neq u_0$. Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$, avem $u(x_n) \to u_0$, adică $u_n \to u_0$, $(u_n \in F$, $u_n \neq u_0)$. Deoarece $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = l$, avem $f(u_n) \to l$, adică $f(u(x_n)) \to l$, sau $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(u(x_n)) = l$, de unde $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = l$.

Observaţie. Raţionamentul de mai sus se poate schematiza astfel: dacă $x \to x_0$, atunci $u(x) \to u_0$ şi deci $f(u(x)) \to l$.

Corolarul 1. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$, dacă $u_0 \in F$ şi dacă $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} f(u(x)) = f(\lim_{x \to x_0} u(x)).$$

Corolarul 2. Dacă $x_0 \in E$, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0) = u_0$ şi dacă $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} f(u(x)) = f(u(x_0)).$$

Exemple. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\beta x} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $(\beta \neq 0)$.

Să punem $u(x) = \alpha x$, deci $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = \lim\limits_{x \to 0} \alpha x = 0$

(sau $u(x) \to 0$ cînd $x \to 0$). Atunci:

$$\frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\sin u(x)}{u(x)},$$

deci:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \to 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\alpha x} = \frac{\alpha}{\beta} \lim\limits_{u\to 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = \frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$.

3) Fie funcţia $u: E \to R$, şi x_0 un punct de acumulare al lui E. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$, şi dacă $u(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0$, atunci

$$\lim_{x\to x_0} (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e.$$

Într-adevăr

$$\lim_{x\to x_0} (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = \lim_{u\to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

4) Fie funcţiile $u, v: E \to R$, şi x_0 un punct de acumulare al lui E. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$ şi $u(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0$, şi dacă $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\, v(x) = A$ (finit sau infinit), atunci:

$$\lim_{x\to x_0} (1 + u(x))^{v(x)} = e^A.$$

Într-adevăr

$$(1 + u(x))^{v(x)} = \left[(1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{u(x)v(x)}.$$

Dacă $x \to x_0$, atunci $u(x) \to 0$, deci

$$(1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} \to e \text{ şi deci } (1 + u(x))^{v(x)} \to e^A.$$

§ 4. Funcţii continue

1. Definiţia continuităţii

În paragraful precedent s-a studiat comportarea unei funcţii f în *jurul* unui punct x_0, care este punct de acumulare pentru mulţimea E pe care este definită f. Punctul x_0 nu aparţine în mod necesar lui E, şi chiar dacă $x_0 \in E$, valoarea funcţiei în punctul x_0 nu este luată în consideraţie.

În acest paragraf se studiază comportarea funcţiei f nu numai în jurul lui x_0, dar şi în x_0, şi anume se compară valoarea funcţiei în x_0 cu valorile sale în punctele vecine cu x_0. Pentru aceasta, este necesar ca funcţia f să fie definită în x_0, adică $x_0 \in E$.

Problema care se pune acum se poate formula astfel:

Fiind dată o funcţie $f: E \to R$ şi x_0 un punct din E, să se cerceteze dacă, atunci cînd x se apropie de x_0, $f(x)$ se apropie de $f(x_0)$. Altfel spus, problema care se pune este dacă, pentru valori ale argumentului x suficient de vecine cu x_0, putem realiza ca valorile funcţiei $f(x)$ să fie cît dorim de vecine cu $f(x_0)$.

Aceste consideraţii ne conduc la următoarea

Definiţie. Se spune că o funcţie $f : E \to R$ este continuă într-un punct x_0 din E, dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x \in V \cap E$, să avem $f(x) \in U$.

În această definiţie, V depinde de U.

Dacă f este continuă în punctul $x_0 \in E$, se spune că x_0 este *punct de continuitate* al funcţiei f.

Observaţie. Definiţia continuităţii este asemănătoare cu definiţia limitei. Există însă şi deosebiri, datorite faptului că în definiţia limitei se impune condiţia $x \neq x_0$, în timp ce în definiţia continuităţii această condiţie nu se impune.

În definiţia limitei, x_0 este punct de acumulare pentru E, dar nu aparţine în mod necesar lui E.

De exemplu, dacă $E = (a, b)$, se poate considera limita funcţiei în punctele $x_0 = a$ şi $x_0 = b$, chiar dacă $a = -\infty$ sau $b = +\infty$.

În definiţia continuităţii, x_0 aparţine lui E dar nu este în mod necesar punct de acumuare pentru E, ci poate fi şi punct *izolat* al lui E.

Problema continuităţii nu are sens în punctele în care funcţia nu este definită; definiţia continuităţii nu se poate aplica în aceste puncte.

În particular, problema continuităţii nu se pune în punctele $+\infty$ şi $-\infty$, deoarece domeniul de definiţie al unei funcţii este format numai din puncte finite.

Exemple. 1) Pentru funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$, nu are sens problema continuităţii în punctul 0, sau în punctul -1.

2) Pentru funcţia $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ nu se pune problema continuităţii în punctul 0.

3) Pentru funcţia $f(x) = \operatorname{tg} x$ definită pentru $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, k întreg, nu are sens problema continuităţii în punctele $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

Definiţia continuităţii, dată mai sus, se aplică fără nici o modificare pentru funcţii $f: E \to F$, oricare ar fi spaţiile topologice E şi F.

Dată fiind asemănarea dintre definiţia limitei şi definiţia continuităţii, o serie întreagă de proprietăţi ale limitelor rămîn valabile şi pentru funcţii continue, şi cu aceleaşi demonstraţii, cu singura deosebire că nu se mai pune condiţia $x \neq x_0$.

Dăm mai întîi cîteva propoziţii care dau condiţii necesare şi suficiente de continuitate, şi al căror enunţ poate fi luat ca definiţie a continuităţii.

Propoziţia 1. Funcţia $f: E \to R$ este continuă în punctul $x_0 \in E$, dacă şi numai dacă, pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \in E$, avem $f(x_n) \to f(x_0)$.

Observaţii. 1° În această propoziţie este suficient să presupunem că pentru orice şir $x_n \to x_0$ $x_n \in E$, şirul $(f(x_n))$ are limită. Rezultă atunci că *toate* şirurile $(f(x_n))$ au *aceeaşi* limită, şi anume $f(x_0)$, oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$.

Faptul că toate şirurile $(f(x_n))$ au aceeaşi limită se demonstrează ca şi pentru limite de funcţii, fără a mai pune condiţia $x_n \neq x_0$. Faptul că această limită comună este $f(x_0)$ rezultă din faptul că, pentru şirul constant $x_n = x_0$, avem $x_n \to x_0$ şi $f(x_n) = f(x_0)$, deci $f(x_n) \to f(x_0)$.

2° Definiţia continuităţii cu ajutorul şirurilor se poate aplica numai în acele spaţii topologice, în care topologia se poate defini cu ajutorul şirurilor.

Propoziţia 2. Funcţia $f : E \to R$ este continuă în punctul $x_0 \in E$, dacă şi numai dacă, pentu orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu $|x - x_0| < \delta$, să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Pentru demonstraţie, se foloseşte definiţia continuităţii, ţinînd seama de faptul că x_0 şi $f(x_0)$ sînt *finite*, deci vecinătăţile lui $f(x_0)$ se pot lua de forma $U = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$, iar vecinătăţile lui x_0 se pot lua de forma $V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ cu $\delta > 0$. Deoarece V depinde de U, rezultă că δ depinde de ε. Condiţia $x \in V$ este echivalentă cu $|x - x_0| < \delta$, iar condiţia $f(x) \in U$ este echivalentă cu $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Observaţie. Definiţia continuităţii cu ε şi δ se aplică numai în acele spaţii topologice în care s-au definit atît operaţia de adunare (în grupuri) cît şi modulul (sau altă noţiune cu proprietăţile modulului, de exemplu norma în spaţii vectoriale).

Sînt utile şi următoarele două propoziţii, în care se dau definiţii cu vecinătăţi şi cu ε sau δ:

f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$, există un număr $\delta > 0$ (care depinde de U) astfel încît pentru orice $x \in E$ cu $|x - x_0| < \delta$ să avem $f(x) \in U$.

f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in V.$$

Propoziţia 3. O funcţie $f : E \to R$ este continuă în orice punct izolat al domeniului ei de definiţie.

Fie x_0 un punct izolat al lui E. Aceasta înseamnă că există o vecinătate V a lui x_0 astfel ca $V \cap E = \{x_0\}$. Dacă $x_n \to x_0$, $(x_n \in E)$, vecinătatea V conţine toţi termenii şirului cu excepţia unui număr finit dintre ei. Există deci un număr N, astfel încît pentru $n \geqslant N$ să avem $x_n \in V$, şi, deoarece $x_n \in E$, rezultă că $x_n \in V \cap E$, adică $x_n = x_0$. Atunci, pentru $n \geqslant N$ avem $f(x_n) = f(x_0)$ şi deci $f(x_n) \to f(x_0)$. Cum şirul $x_n \to x_0$ a fost ales arbitrar, rezultă că f este continuă în x_0.

Exemple. 1) Dacă mulţimea E este finită, $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, atunci E este formată numai din puncte izolate, deci *orice* funcţie definită pe E este continuă în *orice* punct din E.

2) Un şir (a_n) este o funcţie definită pe mulţimea N a numerelor naturale. Deoarece mulţimea N este formată numai din puncte izolate, rezultă că orice şir este o funcţie continuă în *orice* punct n din domeniul său de definiţie N.

Dacă $x_0 \in E$ este punct de acumulare pentru E, atunci are sens atît problema continuităţii în x_0, cît şi problema limitei în x_0. În acest caz, definiţia continuităţii se poate formula cu ajutorul limitei:

Propoziţia 4. O funcţie $f : E \to R$ este continuă într-un punct de acumulare $x_0 \in E$ dacă şi numai dacă funcţia are limită în x_0 egală cu $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(sau $f(x) \to f(x_0)$ cînd $x \to x_0$).

Să presupunem întîi că f este continuă în x_0. Aceasta înseamnă că pentru orice şir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E)$ avem $f(x_n) \to f(x_0)$. În particular, pentru şirurile $x_n \to x_0$, $(x_n \in E)$ cu $x \neq x_0$, avem de asemenea $f(x_n) \to f(x_0)$, deci $f(x_0)$ este limita funcţiei în punctul x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Reciproc, să presupunem că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ şi să arătăm că f este continuă în x_0. Aceasta înseamnă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta = \delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$, $x \neq x_0$, cu $|x - x_0| < \delta$, să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0$. Dar dacă $x = x_0$, atunci $|x - x_0| = 0 < \delta$ şi $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, astfel încît restricţia $x \neq x_0$ este de prisos. Conform propoziţiei 2, rezultă că f este continuă în x_0.

Observaţii. 1° Limita funcţiei în punctul x_0 poate fi infinită. Dacă însă f este continuă, această limită este $f(x_0)$, deci este finită (deoarece o funcţie are *numai* valori finite).

2°. În cazul cînd mulţimea E nu are nici un punct izolat, enunţul propoziţiei 4 poate fi luat ca definiţie a continuităţii, echivalentă cu celelalte trei definiţii, cu vecinătăţi, cu şiruri, sau cu ε şi δ.

Vom folosi una sau alta din aceste definiţii, după cum va fi mai convenabil pentru simplificarea raţionamentelor.

Pentru demonstrarea criteriului de integrabilitate al lui Lebesgue, vom folosi propoziţia următoare, din care rezultă că proprietatea de continuitate se poate defini şi cu ajutorul oscilaţiei.

Propoziţia 5. Funcţia $f : E \to R$ este continuă într-un punct $x_0 \in E$ dacă şi numai dacă oscilaţia sa în acest punct este nulă:

$$\omega_f(x_0) = 0.$$

Să presupunem întîi că f este continuă în x_0, și fie $\varepsilon > 0$. Există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, pentru orice punct $x \in V \cap E$ să avem $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pentru orice puncte $x', x'' \in V \cap E$ avem atunci

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de unde

$$\omega_f(V \cap E) = \sup_{\substack{x' \in V \cap E \\ x'' \in V \cap E}} |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon$$

și deci

$$\omega_f(x_0) = \inf_{V \ni x_0} \omega_f(V \cap E) \leqslant \varepsilon.$$

Așadar, $\omega\,(x_0) \leqslant \varepsilon$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$. Cum $\omega_f(x_0)$ este $\geqslant 0$ și independent de ε, rezultă că $\omega_f(x_0) = 0$.

Reciproc, să presupunem că $\omega_f(x_0) = 0$ și fie $\varepsilon > 0$. Deoarece

$$\omega_f(x_0) = \inf_{V \ni x_0} \omega_f(V \cap E) = 0$$

rezultă că există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît

$$\omega_f(V \cap E) < \varepsilon.$$

Deoarece $|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega_f(V \cap E)$, oricare ar fi $x', x'' \in V \cap E$, rezultă în particular că

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi } x \in V \cap E,$$

deci f este continuă în x_0, și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Definiție. Se spune că o funcție $f: E \to R$ este continuă pe o mulțime $A \subset E$, dacă este continuă în fiecare punct din A.

Dacă funcția este continuă pe tot domeniul său de definiție, se spune uneori, mai simplu, că este continuă, fără a mai specifica mulțimea pe care are această proprietate.

Continuitatea funcției f pe mulțimea A se exprimă prin una din următoarele propoziții echivalente:

1) *Oricare ar fi $x \in A$ și oricare ar fi vecinătatea U a lui $f(x)$, există o vecinătate V a lui x (V depinde și de U și de x), astfel încît pentru orice $x' \in V \cap E$ să avem $f(x') \in U$.*

2) *Oricare ar fi* $x \in A$ *şi oricare ar fi şirul* $x_n \to x$ $(x_n \in E)$ avem $f(x_n) \to f(x)$.

3) *Oricare ar fi* $x \in A$ *şi oricare ar fi numărul* $\varepsilon > 0$, *există un număr* $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, *astfel încît pentru orice punct* $x' \in E$ *cu* $|x' - x| < \delta$ *să* avem $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

Dacă A este formată numai din puncte de acumulare ale lui E, atunci se poate da o formulare echivalentă cu ajutorul limitelor:

4) *Oricare ar fi* $x \in A$ *avem* $\lim\limits_{x' \to x} f(x') = f(x)$.

O b s e r v a ţ i e. Funcţiile elementare sînt definite pe intervale sau pe reuniuni de intervale, iar acestea sînt formate *numai* din puncte de acumulare. Aşadar, pentru funcţiile elementare se poate aplica definiţia continuităţii cu ajutorul limitei.

Pentru funcţiile elementare, limita într-un punct x_0 din domeniul de definiţie se obţine înlocuind direct pe x cu x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

deci *funcţiile elementare sînt continue în orice punct din domeniul lor de definiţie.*

Exemple.

1) $f(x) \equiv c$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0).$$

2) $f(x) = x$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0).$$

3) $f(x) = x^n$, $n \in N$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n = f(x_0).$$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in N$, definită pe $R - \{0\}$. Oricare ar fi $x_0 \neq 0$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}.$$

5) Pentru polinomul $P(x)$, definit pe R, avem pentru orice $x_0 \in R$,

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

6) Pentru funcția rațională $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, și pentru orice $x_0 \in R$, pentru care $(x_0) \neq 0$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

7) $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$, definită pe $[0, +\infty]$. Oricare ar fi $x_0 \geqslant 0$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^{\alpha} = x_0^{\alpha} = f(x_0).$$

8) $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, definită pe $(0, +\infty)$. Oricare ar fi $x_0 > 0$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^{\alpha}} = \frac{1}{x_0} = f(x_0).$$

9) $f(x) = a^x$, $(a > 0)$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

10) $f(x) = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$, definită pe $(0, +\infty)$. Oricare ar fi $x_0 > 0$ avem

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0.$$

11) $f(x) = \sin x$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

12) $f(x) = \cos x$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

13) $f(x) = \operatorname{tg} x$, definită pentru $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, k întreg. Oricare ar fi $x_0 \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ avem

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0.$$

14) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, definită pentru $x \neq k\pi$, k întreg. Oricare ar fi $x_0 \neq k\pi$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0.$$

Se va arăta mai departe că și funcțiile trigonometrice inverse sînt continue pe tot domeniul lor de definiție.

2. Puncte de discontinuitate

Fie funcţia $f: E \to R$ şi $x_0 \in E$. Dacă funcţia f nu este continuă în x_0, se spune că f este *discontinuă* în x_0, iar x_0 se numeşte *punct de discontinuitate* al funcţiei. Deoarece f este continuă în punctele izolate ale lui E, un punct de discontinuitate $x_0 \in E$ este în mod necesar un punct de acumulare pentru E.

Ţinînd seama de definiţiile continuităţii, prin negaţie deducem că funcţia f este discontinuă într-un punct $x_0 \in E$, dacă şi numai dacă este verificată una din următoarele condiţii echivalente:

1) *Există o vecinătate U a lui $f(x_0)$, astfel încît, oricare ar fi vecinătatea V a lui x_0, să existe un punct $x \in V \cap E$, astfel ca $f(x) \notin U$ (x depinde de V).*

2) *Există un număr ε, astfel încît, oricare ar fi $\delta > 0$, să existe un punct $x \in E$ cu $|x - x_0| < \delta$ astfel încît $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ (x depinde de δ).*

3) *Există cel puţin un şir $x_n \to x_0$, ($x_n \in E$) astfel încît şirul $(f(x_n))$ să nu aibă limita $f(x_0)$* (eventual să nu aibă nici o limită).

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *nu există, sau* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *există dar este diferită de* $f(x_0)$.

5) *Oscilaţia funcţiei în x_0 este strict pozitivă*: $\omega_f(x_0) > 0$.

Observaţie. Discontinuitatea funcţiei f s-a definit ca o proprietate contrară continuităţii. Prin aceasta s-a dat sens discontinuităţii exact în aceleaşi puncte în care are sens şi continuitatea, adică numai în punctele domeniului de definiţie.

Dacă x_0 nu aparţine domeniului de definiţie, nu are sens să se spună nici că funcţia este continuă, nici că este discontinuă în acest punct, chiar dacă x_0 este punct de acumulare al domeniului de definiţie, şi chiar dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Rezultă că problema discontinuităţii, ca şi cea a continuităţii, nu se poate pune decît pentru punctele din domeniul de definiţie al funcţiei.

Exemple. 1) Pentru funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$ nu are sens să se spună că este continuă sau discontinuă în punctul 0, deşi funcţia are limită în acest punct ($\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = -\infty$); de asemenea nu are sens să se pună problema discontinuităţii acestei funcţii în punctul -1.

2) Pentru funcţia $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{pentru } x > 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$ definită pe $[0, +\infty)$ are sens să se pună problema continuităţii în punctul 0, deoarece funcţia este definită în 0; anume, funcţia este discontinuă în acest punct, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

3) Pentru funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ nu are sens să se spună că este discontinuă în 0.

4) Funcţia $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$ definită pe R este discontinuă în punctul 0, deoarece deşi este definită în 0 nu are limită în acest punct.

5) Pentru funcţia $f(x) = \text{tg } x$, definită pentru $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k întreg, nu are sens să se spună că este discontinuă în punctul $\frac{\pi}{2}$.

6) Pentru funcţia $f(x) = \begin{cases} \text{tg } x \text{ pentru } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 \text{ pentru } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ definită pe $(0, \pi)$, are sens să se spună că este continuă în punctul $\frac{\pi}{2}$, anume, această afirmaţie este falsă. De asemenea, are sens să se spună că ea este discontinuă în punctul $\frac{\pi}{2}$, anume, această afirmaţie este adevărată, deoarece funcţia nu are limită în $\frac{\pi}{2}$.

7) Pentru funcţia $f(x) = x$ definită pe $R - \{0\}$, nu are sens nici una din următoarele două propoziţii:

— funcţia este continuă în punctul 0;
— funcţia este discontinuă în punctul 0.

8) Pentru funcţia $f(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } x \neq 0 \\ 1 \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$ definită pe R, au sens amîndouă propoziţiile următoare:

— funcţia este continuă în punctul 0;
— funcţia este discontinuă în punctul 0.

Prima propoziţie este falsă, iar a doua este adevărată, deoarece funcţia are limită în punctul 0, anume $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, dar este diferită de $f(0) = 1$.

9) Pentru funcţia $f(x) = x$ definită pe R, au sens amîndouă propoziţiile din exemplul precedent, şi anume: prima este adevărată (f este continuă în 0), iar a doua este falsă.

Punctele de discontinuitate ale unei funcţii se împart în două categorii: puncte de discontinuitate de prima speţă şi puncte de discontinuitate de speţa a doua.

Un punct de discontinuitate x_0 al funcţiei f se numeşte *punct de discontinuitate de prima speţă*, dacă funcţia are limite laterale finite în x_0.

În cazul cînd limitele laterale sînt egale, evident, ele sînt diferite de $f(x_0)$, deoarece funcţia nu este continuă în x_0.

Dacă x_0 este extremitatea stîngă (respectiv dreaptă) a unui interval I, şi este punct de discontinuitate al funcţiei f, atunci x_0 este punct de discontinuitate de speţa întîi dacă există limita la dreapta în x_0 şi este finită (respectiv dacă există limită la stînga în x_0 şi este finită), deoarece în acest caz cealaltă limită laterală nu are sens. Evident, în acest caz $f(x_0 + 0)$ (respectiv $f(x_0 - 0)$) este diferit de $f(x_0)$, deoarece în caz contrar funcţia ar fi continuă în x_0.

Celelalte puncte de discontinuitate ale funcţiei, care nu sînt de prima speţă, se numesc *puncte de discontinuitate de speţa a doua*.

Aşadar, x_0 este punct de discontinuitate de speţa a doua pentru funcţia f, dacă cel puţin una dintre limitele laterale (în cazul cînd are sens) nu există, sau este infinită.

Exemple.

1) $f(x) = \begin{cases} x \text{ pentru } x \neq 0 \\ 1 \text{ pentru } x = 0 \end{cases}$ definită pe R.

Avem $f(0 - 0) = 0$ şi $f(0 + 0) = 0$, dar $f(0) = 1$, deci 0 este punct de discontinuitate de prima speţă.

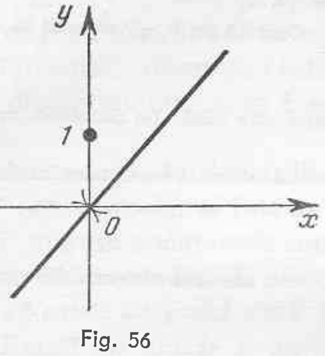


Fig. 56

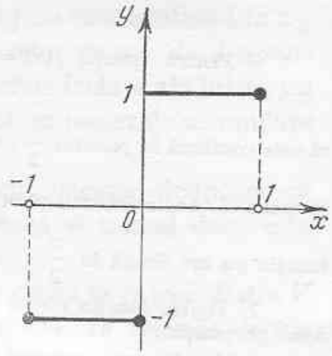


Fig. 57

2) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dacă } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 \text{ dacă } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$ definită pe $[-1, 1]$.

Avem $f(0 - 0) = -1$ şi $f(0 + 0) = 1$, deci 0 este punct de discontinuitate de prima speţă.

3) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x = -1 \\ x \text{ dacă } -1 < x < 1 \\ -1 \text{ dacă } x = 1 \end{cases}$ definită pe $[-1, 1]$.

Punctul -1 este punct de discontinuitate de prima speţă.

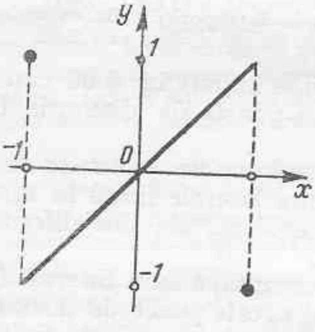


Fig. 58

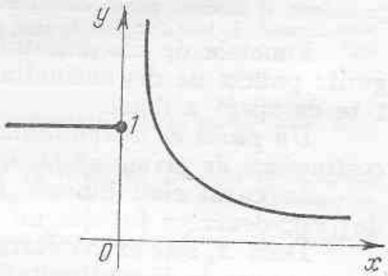


Fig. 59

Avem $f(-1 + 0) = -1$ şi $f(-1) = +1$. Aici $f(-1 - 0)$ nu are sens. Punctul 1 este punct de discontinuitate de prima speţă. Avem $f(1 - 0) = 1$ şi $f(1) = -1$. Aici $f(1 + 0)$ nu are sens.

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ dacă } x > 0 \\ 1 \text{ dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$ definită pe $(-\infty, +\infty)$.

Punctul 0 este punct de discontinuitate de speţa a doua, deoarece $f(0 - 0) = 1$, dar $f(0 + 0) = +\infty$.

5) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \text{ este raţional,} \\ 0 \text{ dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$ definită pe R.

Orice punct este punct de discontinuitate de speţa a doua, deoarece această funcţie nu are limite laterale în nici un punct.

6) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ definită pe R.

Punctul 0 este de discontinuitate de speţa a doua, deoarece $f(0 - 0)$ şi $f(0 + 0)$ nu există.

Dacă x_0 este punct interior al unui interval I şi dacă limitele laterale în x_0 există şi sînt finite, diferenţa $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ se numeşte *saltul funcţiei f în punctul* x_0.

Dacă $I = [a, b]$, şi dacă $f(a + 0)$ există şi este finit, atunci $f(a + 0) - f(a)$ se numeşte saltul funcţiei f în punctul a, iar dacă $f(b - 0)$ există şi este finit, $f(b) - f(b - 0)$ se numeşte saltul funcţiei f în punctul b.

Evident, saltul funcţiei într-un punct de continuitate este zero.

Saltul funcţiei poate fi zero şi într-un punct de discontinuitate din *interiorul* intervalului, dacă $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

Propoziţia 1. Toate punctele de discontinuitate ale unei funcţii monotone pe un interval, $f: I \to R$, sînt de prima speţă.

Se ştie că o funcţie monotonă are limite laterale în fiecare punct din domeniul său de definiţie. (Dacă extremităţile aparţin intervalului, la extremităţi numai una dintre limitele laterale are sens.)

Trebuie să arătăm că aceste limite laterale sînt finite. Să presupunem că f este crescătoare. Fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Dacă $x_1 < x < x_2$, atunci $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ şi prin trecere la limită obţinem

$$f(x_1) \leqslant \lim_{x \searrow x_1} f(x) \leqslant f(x_2), \qquad f(x_1) \leqslant \lim_{x \nearrow x_2} f(x) \leqslant f(x_2),$$

adică: $f(x_1) \leqslant f(x_1 + 0) \leqslant f(x_2)$ şi $f(x_1) \leqslant f(x_2 - 0) \leqslant f(x_2)$.

Dar $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ sînt finite, ca valori ale funcţiei. Rezultă că $f(x_1 + 0)$ şi $f(x_2 - 0)$ sînt de asemenea finite. Deoarece x_1 şi x_2 au alese fost arbitrar, rezultă că în orice punct din I funcţia are limită la stînga finită (cu excepţia extremităţii stîngi, unde această limită nu are sens) şi limita la dreapta finită (cu excepţia extremităţii drepte).

Rezultă că punctele de discontinuitate — dacă există — sînt de prima speţă.

Dacă f este descrescătoare, demonstraţia se face la fel.

Observaţie. Să presupunem că f este crescătoare pe I. Din demonstraţia propoziţiei precedente deducem că dacă $x_1 < x_2$, atunci

$$f(x_1) \leqslant f(x_1 + 0) \leqslant f(x_2 - 0) \leqslant f(x_2).$$

Într-adevăr, alegînd $\alpha \in I$ astfel ca $x_1 < \alpha < x_2$, avem:

$$f(x_1) \leqslant f(x_1 + 0) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(x_2 - 0) \leqslant f(x_2).$$

În particular, pentru orice punct x_0 din interiorul lui I avem:

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0),$$

deci saltul $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ este pozitiv. Dacă x_0 este punct de discontinuitate, acest salt este strict pozitiv şi, evident, dacă x_0 este punct de continuitate, saltul este 0.

Dacă x' şi x'' sînt două puncte de discontinuitate şi dacă $x' < x''$, atunci, pe axa Oy, intervalul $[f(x' - 0), f(x' + 0)]$ se află sub intervalul $[f(x'' - 0), f(x'' + 0)]$, putînd avea în comun o extremitate, iar cele două intervale sînt de lungime strict pozitivă.

Propoziţia 2. Mulţimea punctelor de discontinuitate ale unei funcţii monotone $f: I \to R$ este cel mult numărabilă.

Vom presupune la început că intervalul este închis şi mărginit, $I = [a, b]$ şi că f este crescătoare.

Avem: $f(a) \leqslant f(a + 0) \leqslant f(x - 0) \leqslant f(x + 0) \leqslant f(b - 0) \leqslant f(b)$, oricare ar fi $a < x < b$. Fie $\alpha > 0$ şi fie n puncte interioare $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, în care saltul funcţiei este mai mare sau egal cu α:

$$f(x_i + 0) - f(x_i - 0) \geqslant \alpha, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Avem $f(x_i + 0) \leqslant f(x_{i+1} - 0)$ sau $f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0) \geqslant 0$,

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Atunci

$$f(b) - f(a) \geqslant f(x_n + 0) - f(x_1 - 0) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i + 0) - f(x_i - 0)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0)] \geqslant \sum_{i=1}^{n} [f(x_i + 0) - f(x_i - 0)] \geqslant n\alpha,$$

de unde: $n \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{\alpha}$.

Rezultă că numărul punctelor în care saltul este mai mare decît α este finit sau eventual 0. Printre aceste puncte putem considera şi extremităţile, dacă este cazul.

Să notăm cu S_1 mulţimea punctelor în care saltul este $\geqslant 1$ şi, pentru fiecare număr natural $n \geqslant 2$, să notăm cu S_n mulţimea punctelor în care saltul este $\geqslant \frac{1}{n}$ şi $< \frac{1}{n-1}$

$$S_1 = \{x \mid x \in I, f(x + 0) - f(x - 0) \geqslant 1\},$$

$$S_n = \left\{x | x \in I, \frac{1}{n} \leqslant f(x + 0) - f(x - 0) < \frac{1}{n-1}\right\}, \; n \geqslant 2.$$

Din cele de mai sus rezultă că fiecare mulţime S_n este finită sau vidă. Reuniunea $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ este formată din toate punctele în care saltul este strict pozitiv, deci din toate punctele de discontinuitate.

Dar S este o mulţime cel mult numărabilă, fiind o reuniune numărabilă de mulţimi finite sau vide, şi teorema este demonstrată în acest caz.

Dacă f este descrescătoare, demonstraţia se face la fel.

Dacă intervalul I nu este închis și mărginit, el se poate scrie ca o reuniune numărabilă de intervale închise și mărginite I_n, care au în comun, două cîte două, cîte o extremitate:

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Dacă $I = (a, b]$, $a \geq -\infty$ luăm $I_1 = [\alpha_1, b]$, $I_2 = [\alpha_2, \alpha_1], \ldots,$ $I_n = [\alpha_n, \alpha_{n-1}], \ldots$ unde (α_n) este un șir strict descrescător, astfel ca $\alpha_n \to a$.

Dacă $I = [a, b)$, $b \leq +\infty$, luăm $I_1 = [a, \beta_1]$, $I_2 = [\beta_1, \beta_2], \ldots,$ $I_n = [\beta_{n-1}, \beta_n], \ldots,$ unde (β_n) este un șir strict crescător astfel ca $\beta_n \to b$.

Dacă $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, luăm

$$I = [\alpha_1, \beta_1],\ I_2 = [\alpha_2, \beta_2], \ldots, I_n = [\alpha_n, \beta_n], \ldots$$

unde (α_n) este strict descrescător astfel ca $\alpha_n \to a$, iar (β_n) este strict crescător astfel ca $\beta_n \to b$ și $\alpha_1 < \beta_1$.

În fiecare interval I_n, mulțimea punctelor de discontinuitate este cel mult numărabilă. Deoarece reuniunea unei familii numărabile de mulțimi numărabile este de asemenea numărabilă, rezultă că mulțimea punctelor de discontinuitate din toate intervalele (I_n) este numărabilă, și cu aceasta propoziția este complet demonstrată.

3. Continuitatea relativă la o submulțime

Fie funcția $f: E \to R$, A o submulțime a lui E și $x_0 \in A$.

Definiție. Se spune că funcția f este continuă în punctul x_0 relativ la submulțimea A, dacă restricția f_A a lui f la A este continuă în x_0.

Aceasta înseamnă că oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$, $x_n \in A$, avem $f_A(x_n) \to f_A(x_0)$.

Dar pentru $x \in A$ avem $f_A(x) = f(x)$. Așadar, a spune că funcția f este continuă în punctul x_0 relativ la submulțimea A, înseamnă că pentru orice șir $x_n \to x_0$ format din puncte din A, $x_n \in A$ să avem $f(x_n) \to f(x_0)$.

Se pot da definiții ale continuității relative la A, echivalente cu cea de mai sus, folosind vecinătățile, sau ε și δ, și punînd condiția $x \in A$ (în loc de $x \in E$).

Dacă x_0 este punct de acumulare al lui A (deci și al lui E) se poate folosi definiția continuității cu ajutorul limitei:

f este continuă în x_0 relativ la A dacă

$$\lim_{x \to x_0} f_A(x) = f(x_0), \text{ adică dacă } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0).$$

Propoziție. Dacă f este continuă în x_0 (relativ la E), atunci f este continuă în x_0 și relativ la A.

Într-adevăr, dacă f este continuă în x_0 relativ la E, pentru orice şir $x_n \to x_0$ format din puncte din E avem $f(x_n) \to f(x_0)$. În particular, deoarece $A \subset E$, pentru orice şir $x_n \to x_0$ format din puncte din A avem de asemenea $f(x_n) \to f(x_0)$, adică f este continuă în x_0 relativ la A.

Observaţie. Propoziţia reciprocă nu este adevărată. Funcţia f poate fi continuă în x_0 relativ la A, fără a fi continuă în x_0 (relativ la E).

Exemplu. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } -1 \leqslant x < 0 \\ 1 & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$ definită pe $E = [-1, 1]$, şi $A = [0,1]$;

avem $f_A(x) \equiv 1$, (pentru $x \in A$), deci f_A este continuă în 0, deci f este continuă în 0, relativ la intervalul $A = [0, 1]$. Totuşi f nu este continuă în 0, relativ la $E = [-1, 1]$, deoarece nu are limită în 0. Într-adevăr $f(0 - 0) = -1$ şi $f(0 + 0) = 1$. (Se poate folosi definiţia cu limită a continuităţii, deoarece 0 este punct de acumulare pentru E.)

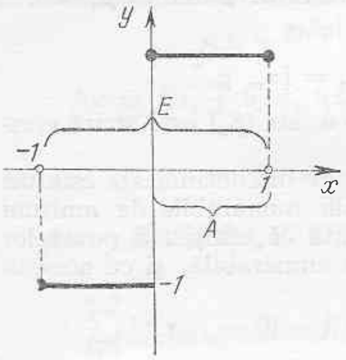


Fig. 60

În anumite cazuri este adevărată şi propoziţia reciprocă:

Propoziţie. Dacă A este intersecţia lui E cu o vecinătate V a lui x_0, $A = E \cap V$, şi dacă f este continuă în x_0 relativ la A, atunci f este continuă în x_0 (relativ la E).

Prin ipoteză, f este continuă în x_0 relativ la A, deci oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$, $x_n \in A$, avem $f(x_n) \to f(x_0)$. Dacă x_n este format din puncte din E, şi dacă $x_n \to x_0$, avem $x_n \in V$, deci $x_n \in A$ pentru toţi termenii, cu excepţia unui număr finit dintre ei, şi deci $f(x_n) \to f(x_0)$. Aşadar, oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$, $x_n \in E$, avem $f(x_n) \to f(x_0)$, adică f este continuă în x_0 relativ la E.

4. Continuitatea laterală

Fie funcţia $f: E \to R$ şi $x_0 \in E$.

Dacă luăm mulţimea $A = E \cap (-\infty, -x_0] = \{x \mid x \in E, x \leqslant x_0\}$, putem defini continuitatea lui f în x_0, relativ la submulţimea A.

Definiţie. Se spune că funcţia f este continuă la stînga în punctul x_0, dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$ format din puncte $x_n \leqslant x_0$ din E, avem $f(x_n) \to f(x_0)$.

Dacă în definiţiile continuităţii cu vecinătăţi sau cu ε şi δ, se pune condiţia ca $x \leqslant x_0$, se obţin definiţii ale continuităţii la stînga, echivalente cu cea de mai sus.

Observaţii. 1° Dacă $E = [a, b)$, orice funcţie definită pe E este continuă la stînga în a.

Într-adevăr, dacă $x_n \to a$, $x_n \leqslant a$, şi $x_n \in [a, b)$, rezultă că $x_n = a$, deci $f(x_n) = f(a)$ şi deci $f(x_n) \to f(a)$.

2° Dacă $E = (a, b]$, definiţia continuităţii în punctul b este echivalentă cu definiţia continuităţii la stînga în punctul b, deoarece condiţia $x_n \in (a, b]$ este echivalentă cu condiţia $x_n \in (a, b]$ şi $x_n \leqslant b$.

Aşadar, f este continuă în b, dacă şi numai dacă este continuă la stînga în b.

3°. Dacă x_0 este punct de acumulare al mulţimii $A = E \cap (-\infty, x_0] = \{x \mid x \in E, x \leqslant x_0\}$, atunci definiţia continuităţii la stînga în x_0 se poate formula cu ajutorul limitei la stînga în x_0: f este continuă la stînga în x_0, dacă şi numai dacă are limită la stînga în x_0, egală cu $f(x_0)$:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Dacă $E = [a, b]$, limita la stînga în a nu are sens, deci continuitatea la stînga în a nu se poate formula cu ajutorul limitei. Însă continuitatea la stînga în a este totdeauna asigurată.

Dacă luăm mulţimea $B = E \cap [x_0, +\infty) = \{x \mid x \in E, x \geqslant x_0\}$, putem defini continuitatea lui f în x_0 relativ la mulţimea B.

Definiţie. Se spune că funcţia f este continuă la dreapta în punctul x_0, dacă, pentru orice şir $x_n \to x_0$ format din puncte $x_n \geqslant x_0$ din E; avem $f(x_n) \to f(x_0)$.

Dacă în definiţiile continuităţii cu vecinătate sau cu ε şi δ se pune condiţia $x \geqslant x_0$, se obţin definiţii ale continuităţii la dreapta în x_0, echivalente cu cea de mai sus.

Observaţii. 1° Dacă $E = (a, b]$, orice funcţie definită pe E este continuă la dreapta în b. Într-adevăr, dacă $x_n \to b$, $x_n \geqslant b$ şi $x_n \in (a, b]$, atunci $x_n = b$, deci $f(x_n) = f(b)$ şi deci $f(x_n) \to f(b)$.

2° Dacă $E = [a, b)$, definiţia continuităţii în a este echivalentă cu definiţia continuităţii la dreapta în a, deoarece condiţia $x_n \in [a, b)$ este echivalentă cu condiţia $x_n \in [a, b)$ şi $x_n \geqslant a$.

Aşadar, funcţia f este continuă în a, dacă şi numai dacă este continuă la dreapta în a.

3° Dacă x_0 este punct de acumulare al mulţimii $B = E \cap [x_0, +\infty) = \{x \mid x \in E, x \geqslant x_0\}$, atunci definiţia continuităţii la dreapta în x_0 se poate formula cu ajutorul limitei la dreapta în x_0:

f este continuă la dreapta în x_0, dacă şi numai dacă are limită la dreapta în x_0, egală cu $f(x_0)$:

$$f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Dacă $E = [a, b]$, limita la dreapta în b nu are sens, deci continuitatea la dreapta în b nu se poate formula cu ajutorul limitei la dreapta. Însă continuitatea la dreapta în b este totdeauna asigurată.

Propoziţie. Funcţia $f: E \to R$ este continuă în punctul $x_0 \in E$, dacă şi numai dacă este continuă la stînga şi la dreapta în x_0.

Dacă f este continuă în x_0, atunci pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \in E$ avem $f(x_n) \to f(x_0)$. Aceasta este adevărată în particular pentru şirurile $x_n \to x_0$ cu $x_n \leqslant x_0$, deci f este continuă la stînga în x_0 şi pentru şirurile $x_n \to x_0$ cu $x_n \geqslant x_0$, deci f este continuă la dreapta în x_0.

Reciproc, să presupunem că f este continuă la dreapta şi la stînga în x_0. Aceasta înseamnă că pentru orice număr $\varepsilon > 0$, putem găsi un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît dacă $x \in E$, $x \leqslant x_0$, şi $|x - x_0| < \delta$ să avem

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (deoarece f este continuă la stînga în x_0) și dacă $x \in E$, $x \geqslant x_0$ și $|x - x_0| < \delta$ să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (deoarece f este continuă la dreapta în x_0). Așadar, oricare ar fi $x \in E$ cu $|x - x_0| < \delta$ (fie că $x \leqslant x_0$, fie că $x \geqslant x_0$), avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, adică f este continuă în x_0.

O b s e r v a ț i e. Dacă x_0 este punct de acumulare al lui E, pentru care ambele limite laterale $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 + 0)$ au sens, funcția f este continuă în x_0, dacă și numai dacă limitele laterale există și sînt egale cu $f(x_0)$:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0), \quad f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Exemple.

1) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 \text{ dacă } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$ definită pe $[0, 2]$.

$f(1 - 0) = -1$, $f(1 + 0) = 1$, $f(1) = -1$, deci $f(1 - 0) = f(1)$. Funcția este continuă la stînga în 1, dar nu este continuă la dreapta în 1, deci nu este continuă în 1.

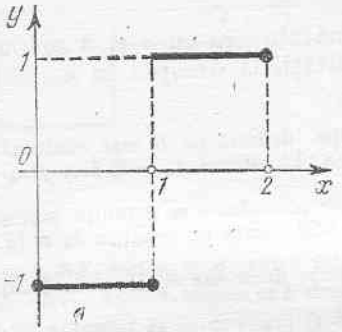


Fig. 61

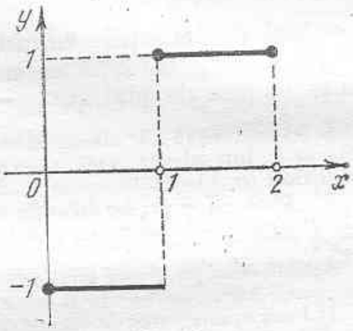


Fig. 62

2) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 \text{ dacă } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$ definită pe $[0, 2]$.

Avem $f(1 - 0) = -1$, $f(1 + 0) = 1$, $f(1) = 1$, deci $f(1 + 0) = f(1)$. Funcția este continuă la dreapta în 1, dar nu este continuă la stînga în 1, deci nu este continuă în 1.

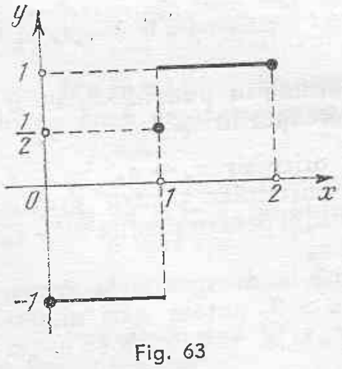


Fig. 63

3) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ 0{,}5 \text{ dacă } x = 1 \\ 1 \text{ dacă } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$ definită pe $[0, 2]$.

Avem $f(1 - 0) = -1$, $f(1 + 0) = 1$, $f(1) = 0{,}5$, deci funcția nu este continuă nici la stînga, nici la dreapta în 1.

4) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{x} \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$

Avem $f(0-0)=1$, $f(0)=1$, $f(0+0)=+\infty$. Funcția este continuă la stînga în 0, dar nu este continuă la dreapta în 0.

5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{dacă } x\neq 0,\\ 1 & \text{dacă } x=0.\end{cases}$

Funcția are limite laterale infinite în 0, deci nu este continuă nici la stînga, nici la dreapta în 0.

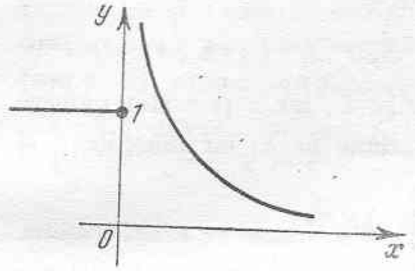


Fig. 64

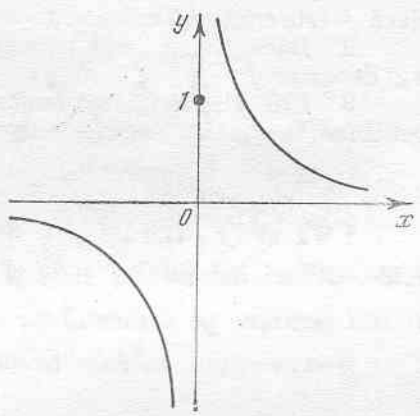


Fig. 65

§ 5. Proprietățile funcțiilor continue

1. Operații cu funcții continue

Vom arăta acum că efectuînd operațiile obișnuite asupra funcțiilor continue, se obțin tot funcții continue.

Teoremă. Dacă funcțiile f și g definite pe mulțimea E sînt continue într-un punct $x_0 \in E$, atunci:

1) $f+g$ este continuă în x_0;

2) αf este continuă în x_0, oricare ar fi $\alpha \in R$;

3) fg este continuă în x_0;

4) dacă $g(x_0)\neq 0$ $\left(\text{adică dacă } \frac{f}{g} \text{ este definită în } x_0\right)$, funcția $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0.

5) dacă $f(x_0)^{g(x_0)}$ are sens, atunci funcția f^g este continuă în x_0.

Deoarece f și g sînt continue în x_0, pentru orice șir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E)$, avem $f(x_n)\to f(x_0)$ și $g(x_n)\to g(x_0)$, deci:

1) $f(x_n)+g(x_n)\to f(x_0)+g(x_0)$, adică $f+g$ este continuă în x_0;

2) $\alpha f(x_n)\to \alpha f(x_0)$, adică αf este continuă în x_0;

3) $f(x_n)\,g(x_n)\to f(x_0)\,g(x_0)$, adică fg este continuă în x_0;

4) dacă $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$, adică $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0;

5) dacă $f(x_0)^{g(x_0)}$ are sens, $f(x_n)^{g(x_n)} \to f(x_0)^{g(x_0)}$ adică f^g este continuă în x_0.

Observaţii. 1° Luînd în proprietatea 3) $\alpha = -1$, rezultă că dacă f este continuă în x_0, atunci $-f$ este continuă în x_0.

2° Dacă f şi g sînt continue în x_0, atunci $f - g$ este continuă în x_0, deoarece $f - g = f + (-g)$.

3° Prin recurenţă se demonstrează că suma şi produsul a n funcţii continue în x_0 sînt de asemenea continue în x_0.

4° Mulţimea funcţiilor definite pe E şi continue într-un punct $x_0 \in E$ este o *algebră*.

Corolar. Dacă f şi g sînt continue pe E, iar α şi β sînt numere reale, atunci funcţiile $\alpha f + \beta g$ şi fg sînt continue pe E, iar funcţiile $\frac{f}{g}$ şi f^g sînt continue pe domeniul lor de definiţie.

Observaţie. Mulţimea funcţiilor definite pe E şi continue pe E este o *algebră*.

2. Proprietăţile locale ale funcţiilor continue

Propoziţia 1. Dacă funcţia $f: E \to R$ este continuă în $x_0 \in E$, atunci funcţia $|f|$ este continuă în x_0.

Dacă x_0 este punct izolat, atunci $|f|$ este continuă în x_0. Dacă x_0 este punct de acumulare al lui E, continuitatea lui f în x_0 înseamnă

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

de unde

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|,$$

adică $|f|$ este continuă în x_0.

Observaţie. Este posibil ca $|f|$ să fie continuă în x_0 fără ca f să fie continuă în x_0.

Exemplu. Funcţia $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \text{ este raţional} \\ -1 \text{ dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$

este discontinuă în orice punct, deoarece nu are limită în nici un punct. Funcţia $|f|$ este continuă în orice punct, deoarece este constantă, $|f(x)| \equiv 1$.

Corolarul 1. Dacă f este continuă pe E, atunci $|f|$ este continuă pe E.

Corolarul 2. Funcţia $f: E \to R$ este continuă în x_0 (sau pe E) dacă şi numai dacă f^+ şi f^- sînt continue în x_0 (sau pe E).

Într-adevăr, dacă f este continuă atunci $|f|$ este continuă și din egalitățile

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f),\ f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

rezultă că f^+ și f^- sînt continue.

Reciproc, dacă f^+ și f^- sînt continue, din egalitatea

$$f = f^+ - f^-$$

rezultă că și f este continuă.

Corolarul 3. Dacă funcțiile $f, g : E \to R$ sînt continue în x_0 (sau pe E), atunci funcțiile $\sup(f, g)$ și $\inf(f, g)$ sînt continue în x_0 sau pe E.

Într-adevăr, funcțiile $f + g$ și $f - g$ sînt continue, deci $|f - g|$ este continuă și din egalitatea

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

rezultă că $\sup(f, g)$ este continuă.

De asemenea, funcțiile $-f$ și $-g$ sînt continue, deci $\sup(-f, -g)$ este continuă și din egalitatea

$$\inf(f, g) = -\sup(-f, -g)$$

rezultă că și $\inf(f, g)$ este continuă.

Propoziția 2. Dacă funcția $f: E \to R$ este continuă într-un punct $x_0 \in E$ și dacă $\alpha < f(x_0) < \beta$, atunci există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $\alpha < f(x) < \beta$, pentru orice $x \in V \cap E$.

Mulțimea $U = (\alpha, \beta)$ este vecinătate a lui $f(x_0)$. Deoarece f este continuă în x_0, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in V \cap E$ să avem $f(x) \in U$, adică $\alpha < f(x) < \beta$.

Corolarul 1. Dacă f este continuă în x_0, atunci există o vecinătate V a lui x_0 pe care f este mărginită.

Corolarul 2. Dacă f este continuă în x_0, și dacă $f(x_0) > 0$, există o vecinătate V a lui x_0 astfel ca $f(x) > 0$ pentru orice $x \in V \cap E$.

Se aplică propoziția precedentă pentru $\alpha = 0$ și $\beta > f(x_0)$ oarecare.

Corolarul 3. Dacă f este continuă în x_0, și dacă $f(x_0) < 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $f(x) < 0$ pentru orice $x \in V \cap E$.

Se aplică propoziția precedentă pentru $\beta = 0$ și $\alpha < f(x_0)$ oarecare.

Corolarul 4. Dacă f este continuă în x_0 și dacă $f(x_0) \neq 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V \cap E$.

Într-adevăr, $|f|$ este continuă în x_0 şi $|f(x_0)| > 0$, deci există o vecinătate a lui x_0, pe care avem $|f(x)| > 0$, adică $f(x) \neq 0$.

Corolarul 5. Dacă f este continuă în x_0 şi dacă în orice vecinătate V a lui x_0 există puncte în care f are valori < 0 şi puncte în care f are valori > 0, atunci $f(x_0) = 0$.

Propoziţia 3. Dacă funcţiile f şi g definite pe E sînt continue în punctul $x_0 \in E$, şi dacă $f(x_0) < g(x_0)$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $f(x) < g(x)$ pentru orice $x \in V \cap E$.

Alegem α astfel ca $f(x_0) < \alpha < g(x_0)$. Există atunci două vecinătăţi V_1 şi V_2 ale lui x_0, astfel că dacă $x \in V_1 \cap E$ să avem $f(x) < \alpha$, iar dacă $x \in V_2 \cap E$ să avem $g(x) > \alpha$. Dar $V = V_1 \cap V_2$ este o vecinătate a lui x_0. Dacă $x \in V \cap E$, atunci $x \in V_1 \cap E$ şi $x \in V_2 \cap E$, deci $f(x) < \alpha$ şi $g(x) > \alpha$, adică $f(x) < \alpha < g(x)$, de unde $f(x) < g(x)$.

Propoziţia 4. Dacă f este continuă în x_0, atunci, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi punctele $x', x'' \in V$, să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Într-adevăr, deoarece f este continuă în x_0, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in V$ să avem

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă $x', x'' \in V$ avem atunci

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(x_0) + f(x_0) - f(x'')| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Prelungirea prin continuitate a unei funcţii

Fie o mulţime E, un punct de acumulare $x_0 \in E$ şi o funcţie f definită pe $E - \{x_0\}$. Funcţia se poate prelungi în mai multe feluri în punctul x_0, şi anume dîndu-i în punctul x_0 o valoare arbitrară. Este posibil ca nici una dintre aceste prelungiri să nu fie continuă în x_0

Dacă însă funcţia f are *limită finită* în punctul x_0, una dintre aceste prelungiri este continuă în x_0, după cum rezultă din următoarea

Propoziţie. Dacă funcţia f are limita finită y_0 în punctul x_0, funcţia $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \neq x_0 \\ y_0 & \text{dacă } x = x_0, \end{cases}$ definită pe E, este continuă în x_0.

Într-adevăr, deoarece pentru $x \neq x_0$, $x \in E$ avem $\bar{f}(x) = f(x)$, și deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, rezultă că $\bar{f}$ are limita y_0 în x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \bar{f}(x) = y_0 = \bar{f}(x_0)$$

adică $\bar{f}$ este continuă în x_0.

Funcția $\bar{f}$ se numește *prelungirea funcției f prin continuitate în punctul* x_0.

Se spune de asemenea că funcția $\bar{f}$ se obține din funcția f, prelungind-o prin continuitate în x_0.

Observație. Dacă $x_0 \in E$ este punct izolat, orice prelungire a lui f în x_0 este continuă în x_0.

Exemple. 1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ definită pe $R - \{0\}$. Avem $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, deci f se poate prelungi prin continuitate în punctul 0.

Prelungirea sa prin continuitate este

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dacă } x \neq 0, \\ 1 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

2) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ definită pe $(-1,0) \cup (0, +\infty)$. Avem

$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, deci funcția

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} (1 + x)^{\frac{1}{x}} & \text{dacă } x \neq 0 \\ e & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

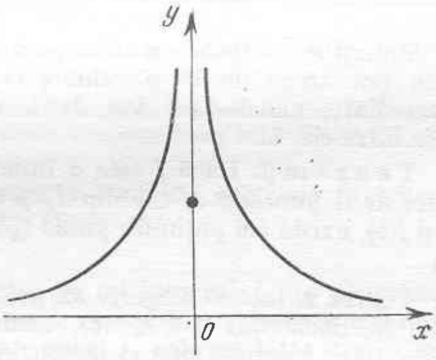


Fig. 66

definită pe $(-1, +\infty)$ este prelungirea prin continuitate a lui f în punctul 0.

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ definită pe $R - \{0\}$. Avem $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, deci funcția f nu se poate prelungi prin continuitate în punctul 0. Într-adevăr, oricare ar fi $\alpha \in R$, funcția

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{dacă } x \neq 0 \\ \alpha & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

nu este continuă în 0.

4) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ nu are limită în punctul 0, deci nu se poate prelungi prin continuitate în 0.

5) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$. Avem

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{ pentru } x \neq 0,$$

deoarece $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, deci f se poate prelungi prin continuitate în 0, şi anume:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Observaţie. După cum se va vedea mai departe (regula lui l'Hospital), problema prelungirii prin continuitate a fost, încă de la începuturile analizei matematice, o problemă care a preocupat mult pe matematicieni (Bernoulli, l'Hospital etc.). Cum însăşi noţiunea de funcţie nu era bine clarificată, se identifica o funcţie cu prelungirea sa prin continuitate. Ulterior, dezvoltarea matematicilor moderne a impus necesitatea de a distinge între ele aceste două funcţii.

4. Proprietatea lui Darboux

Funcţiile continue definite pe un *interval* au proprietatea importantă că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin *toate* valorile intermediare, adică dacă iau două valori diferite, iau toate valorile cuprinse între ele. Mai precis:

Teoremă. Dacă f este o funcţie continuă pe un interval I, atunci oricare ar fi punctele $a < b$ din I, şi oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, există cel puţin un punct c_λ între a şi b, astfel încît să avem $f(c_\lambda) = \lambda$.

Pentru a face o alegere, să presupunem că $f(a) \leqslant f(b)$. Dacă $f(a) = f(b)$ şi dacă $f(a) \leqslant \lambda \leqslant f(b)$, atunci $\lambda = f(a)$ şi luînd $c_\lambda = a$, avem $f(c_\lambda) = \lambda$, şi teorema este demonstrată în acest caz.

Să presupunem deci că $f(a) < f(b)$ şi fie λ un număr astfel ca $f(a) < \lambda < f(b)$. Să notăm cu A mulţimea punctelor dintre a şi b în care funcţia f are valori $\leqslant \lambda$:

$$A = \{x | a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant \lambda\}.$$

Avem $a \in A \subset [a,b]$, deci A este nevidă şi mărginită. Fie $c = \sup A$. Evident, $a \leqslant c \leqslant b$. Vom arăta că $f(c) = \lambda$. Într-adevăr, există un şir $x_n \to c$, format din puncte din A ($x_n \leqslant c$, eventual $x_n = c$, dacă $c \in A$). Deoarece f este continuă pe I, f este continuă în c, deci $f(x_n) \to f(c)$. Dar $f(x_n) \leqslant \lambda$ (deoarece $x_n \in A$) şi prin trecere la limită obţinem $f(c) \leqslant \lambda$.

Deoarece $f(b) > \lambda$, rezultă că $c \neq b$, şi anume $c < b$. Dacă $c < y < b$, atunci $f(y) > \lambda$ (deoarece dacă am avea $f(y) \leqslant \lambda$, atunci $y \in A$, deci $y \leqslant c = \sup A$). Fie atunci un şir $y_n \to c$, astfel ca $c < y_n < b$. Deoarece f este continuă în c, avem $f(y_n) \to f(c)$ şi, deoarece $f(y_n) > \lambda$, prin trecere la limită obţinem $f(c) \geqslant \lambda$. Din inegalităţile $f(c) \leqslant \lambda$ şi $f(c) \geqslant \lambda$, deducem $f(c) = \lambda$.

Observaţii. 1° Condiţia ca funcţia f să fie definită pe un *interval* este esenţială. Dacă funcţia continuă f este definită pe o mulţime care nu este un interval, ci, de exemplu, o reuniune de intervale disjuncte, este posibil ca funcția să ia două valori diferite, dar să nu mai ia nici o valoare intermediară.

Exemplu. Funcția $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dacă } x < 0 \\ 1 \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$ definită pe $R - \{0\}$ este continuă pe domeniul ei de definiție, ia numai valorile -1 și 1 și nu mai ia nici o valoare intermediară.

2° Proprietatea pusă în evidență în teorema precedentă nu este caracteristică funcțiilor continue. Darboux a dat un exemplu de funcție care are această proprietate și care nu este continuă în nici un punct.

Iată un exemplu simplu de funcție discontinuă într-un punct, care are proprietatea din enunțul teoremei:

Funcția $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$ definită pe R este discontinuă în punctul 0 (deoarece nu are limită în 0), și se verifică ușor că nu trece de la o valoare $f(a)$ la o valoare $f(b)$ fără a lua într-un interval (a, b) orice valoare cuprinsă între $f(a)$ și $f(b)$.

Proprietatea pusă în evidență pentru funcțiile continue în teorema precedentă se numește *proprietatea lui Darboux:*

Definiție. O funcție f definită pe un interval I are proprietatea lui Darboux, dacă, oricare ar fi punctele $a, b \in I$, $a < b$, și oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, există un punct c_λ cuprins între a și b astfel ca $f(c_\lambda) = \lambda$.

Cu această definiție, teorema precedentă se enunță astfel: *Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux.*

Se va arăta mai departe că și funcțiile derivate, definite pe un *interval*, au proprietatea lui Darboux. De aceea vom demonstra mai întîi cîteva propoziții pentru funcțiile cu proprietatea lui Darboux, care vor fi adevărate atît pentru funcțiile continue cît și pentru funcțiile derivate. În aceste propoziții funcțiile se consideră definite pe un interval I.

Propoziția 1. Fie funcția $f: I \to R$ și $a < b$ două puncte din I. Dacă f are proprietatea lui Darboux și dacă $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$ (sau dacă $f(a) > 0$ și $f(b) < 0$) atunci există cel puțin un punct cuprins între a și b în care funcția se anulează.

Pentru demonstrație, se aplică definiția precedentă pentru $\lambda = 0$.

C o r o l a r. Dacă funcţia $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux şi nu se anulează în nici un punct din I, atunci funcţia păstrează acelaşi semn pe tot intervalul I.

Într-adevăr, dacă ar exista două puncte a şi b din I în care funcţia ar avea semne diferite, de exemplu $f(a) < 0$ şi $f(b) > 0$, atunci funcţia s-ar anula cel puţin într-un punct din I cuprins între a şi b, ceea ce ar contrazice ipoteza.

O b s e r v a ţ i i. Dacă funcţia $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux şi nu se anulează pe I, pentru a vedea ce semn au *toate* valorile sale pe intervalul I este suficient să vedem semnul valorii funcţiei într-un *singur* punct din interval.

P r o p o z i ţ i a 2. O funcţia $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă transformă orice interval $J \subset I$, tot într-un interval, $f(J)$.

Să presupunem întîi că f are proprietatea lui Darboux.

Fie intervalul $J \subset I$; să notăm

$$m = \inf_{x \in J} f(x) = \inf f(J), \qquad M = \sup_{x \in J} f(x) = \sup f(J).$$

Avem $-\infty \leqslant m \leqslant M \leqslant +\infty$. Dacă f este constantă pe J atunci mulţimea $f(J)$ este formată dintr-un singur punct, deci este un interval (cu extremităţile egale) şi propoziţia este demonstrată în acest caz.

Să presupunem că f nu este constantă pe J, deci $m < M$. Să arătăm că mulţimea $f(J)$ conţine întregul interval (m, M). Fie λ un număr oarecare din intervalul (m, M), adică $m < \lambda < M$.

Deoarece $m = \inf\limits_{x \in J} f(x)$ şi $m < \lambda$ există un punct $a \in J$ astfel ca $m \leqslant f(a) < \lambda$.

Deoarece $M = \sup f(x)$ şi $\lambda < M$, există un punct $b \in J$ astfel ca $\lambda < f(b) \leqslant M$.

Aşadar, $f(a) < \lambda < f(b)$. Deoarece f are proprietatea lui Darboux, există un punct $c_\lambda \in (a, b) \subset J$ astfel ca $f(c_\lambda) = \lambda$ şi deci $\lambda \in f(J)$.

Cum λ a fost ales arbitrar în intervalul (m, M) rezultă că $(m, M) \subset$ $\subset f(J)$.

Deoarece m şi M sînt marginile mulţimii $f(J)$, această mulţime poate să mai conţină, în afară de punctele intervalului (m, M), cel mult extremităţile m şi M (dacă acestea sînt finite). Rezultă deci că $f(J)$ este un interval.

Reciproc, să presupunem că oricare ar fi intervalul $J \subset I$, imaginea sa $f(J)$ este tot un interval.

Fie atunci două puncte $a < b$ din I.

Să notăm $J = [a, b]$; atunci $f(J)$ este un interval şi avem $f(a) \in$ $\in f(J)$, $f(b) \in f(J)$; deci dacă λ se află cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, atunci $\lambda \in f(J)$, deci există un punct $c_\lambda \in [a, b]$ astfel ca $f(c_\lambda) = \lambda$, adică f are proprietatea lui Darboux, şi cu aceasta propoziţia este demonstrată.

C o r o l a r. Dacă funcția $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux, atunci $f(I)$ este interval.

O b s e r v a ț i i. 1° Afirmația reciprocă nu este în general adevărată: dacă $f(I)$ este interval, nu rezultă că f are proprietatea lui Darboux.

Exemplu. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } -1 \leqslant x < 0 \\ x \text{ dacă } \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$ definită pe $I = [-1, 1]$.

Avem $f(I) = [0,1]$, deci $f(I)$ este interval, dar f nu are proprietatea lui Darboux pe I. Într-adevăr, dacă luăm intervalul $J = [-1, 0] \subset I$ avem $f(J) = \{0, 1\}$, deci $f(J)$ nu este interval (între $f(-1) = 1$ și $f(0) = 0$, funcția nu mai ia nici o valoare intermediară pe intervalul $[-1, 0]$).

2° Intervalele se numesc mulțimi conexe* ale dreptei (adică mulțimi formate dintr-o „singură bucată"). Cu această denumire, proprietatea exprimată în propoziția precedentă se enunță astfel:

O funcție are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă transformă mulțimile conexe tot în mulțimi conexe.

În spații topologice oarecare, această proprietate se poate lua ca definiție a funcțiilor cu proprietatea lui Darboux.

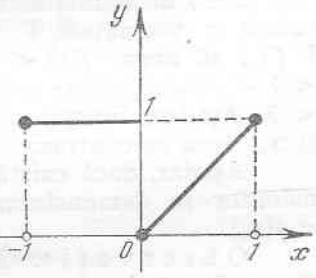


Fig. 67

Se știe că o funcție strict monotonă este biunivocă, dar că există funcții biunivoce care nu sînt strict monotone.

Pentru funcțiile definite pe un *interval* care au proprietatea lui Darboux, este adevărată și afirmația reciprocă, după cum rezultă din

P r o p o z i ț i a 3. Dacă funcția $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux și este biunivocă, atunci f este strict monotonă.

Să presupunem, prin absurd, că f nu este nici strict crescătoare, nici strict descrescătoare. Aceasta înseamnă că există trei puncte $x_1 < x_2 < x_3$ din I, astfel încît să nu avem nici $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ și nici $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$, adică $f(x_2)$ nu se află cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_3)$.

Pentru a face o alegere, să presupunem că $f(x_1) < f(x_3)$. Atunci avem:

$$\text{sau } f(x_2) < f(x_1) < f(x_3) \text{ sau } f(x_1) < f(x_3) < f(x_2).$$

(Nu putem avea $f(x_2) = f(x_1)$ sau $f(x_2) = f(x_3)$, deoarece $x_2 \neq x_1$, $x_2 \neq x_3$ și f este biunivocă.)

Deoarece f are proprietatea lui Darboux, în primul caz există un punct c_1 cuprins între x_2 și x_3 (deci $c_1 \neq x_1$), astfel ca $f(c_1) = f(x_1)$. În al

* Un spațiu topologic E este *conex* dacă nu există două mulțimi deschise, nevide și disjuncte, a căror reuniune să fie E. Se dă o definiție echivalentă a conexiunii, cu mulțimi închise, nevide și disjuncte.

doilea caz există un punct c_3 cuprins între x_1 şi x_2 (deci $c_3 \neq x_3$), astfel ca $f(c_3) = f(x_3)$.

În ambele cazuri funcţia ia aceeaşi valoare în două puncte diferite, deci nu este biunivocă, ceea ce contrazice ipoteza.

Rezultă deci că f este strict monotonă pe I.

Propoziţia 4. Dacă funcţia $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux şi dacă există una din limitele laterale într-un punct $x_0 \in I$, atunci ea este egală cu $f(x_0)$.

Să presupunem să există limita la stînga $f(x_0 - 0)$ (finită sau infinită) şi că ea este diferită de $f(x_0)$. Pentru a face o alegere, să presupunem că $f(x_0 - 0) < f(x_0)$.

Fie λ un număr astfel ca $f(x_0 - 0) < \lambda < f(x_0)$. Deoarece $f(x_0 - 0) < \lambda$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît pentru orice $x < x_0$ din $V \cap I$ să avem $f(x) < \lambda$. Fie $a \in V \cap I$ astfel ca $a < x_0$, deci $f(a) < \lambda < f(x_0)$. Oricare ar fi $x \in (a, x_0)$, $a < x < x_0$, avem $x \in V$ deci $f(x) < \lambda$. Aşadar, funcţia nu ia valoarea λ în nici un punct cuprins între a şi x_0, ceea ce contrazice ipoteza că f are proprietatea lui Darboux.

Aşadar, dacă există $f(x_0 - 0)$, atunci $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. În mod asemănător se demonstrează că dacă există $f(x_0 + 0)$, atunci $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Observaţie. Propoziţia afirmă că dacă există limita la stînga $f(x_0 - 0)$, atunci f este continuă la stînga în x_0, iar dacă există limita la dreapta $f(x_0 + 0)$, atunci f este continuă la dreapta în x_0. În particular, dacă există ambele limite laterale, funcţia este continuă în x_0.

Corolar. Dacă funcţia $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux, atunci ea nu are nici un punct de discontinuitate de prima speţă.

În adevăr, dacă există $f(x_0 - 0)$ şi $f(x_0 + 0)$, atunci avem $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$, deci x_0 nu este punct de discontinuitate.

Rezultă deci că, dacă x_0 este punct de discontinuitate, cel puţin una din limitele laterale nu există, deci x_0 este punct de discontinuitate de speţa a doua.

Observaţie. Dacă $f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0 - 0)$ *există şi este diferită de* $f(x_0)$, în particular dacă este infinită, funcţia nu are proprietatea lui Darboux.

Exemple.

1) $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} \text{ pentru } x \neq 0 \\ 0 \text{ pentru } x = 0 \end{cases}$ definită pe R.

Funcţia are proprietatea lui Darboux. În punctul 0 funcţia nu are nici limită la stîngă, nici limită la dreapta.

$$2)\ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \leqslant 0 \\ \sin \dfrac{1}{x} \quad \text{pentru } x > 0 \end{cases} \quad \text{definită pe } R.$$

Funcția are proprietatea lui Darboux. Avem $f(0-0) = 1$ și $f(0) = 1$, deci $f(0-0) = f(0)$. Funcția nu are limită la dreapta în 0.

$$3)\ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x < 0 \\ 0 \text{ pentru } x = 0 \\ \sin \dfrac{1}{x} \quad \text{pentru } x > 0 \end{cases} \quad \text{definită pe } R.$$

Avem $f(0-0) = 1$ și $f(0) = 0$, deci $f(0-0) \neq f(0)$. Rezultă că funcția nu are proprietatea lui Darboux pe R (și pe nici un interval care conține pe 0).

$$4)\ f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} \text{ dacă } x < 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \text{ dacă } x > 0 \end{cases} \quad \text{definită pe } R.$$

Avem $f(0+0) = +\infty$, deci funcția nu are proprietatea lui Darboux.

Deoarece o funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux, toate propozițiile relative la funcțiile cu proprietatea lui Darboux rămîn adevărate și pentru funcții continue pe un interval:

Corolarul 1. Dacă o funcție continuă pe un interval I ia valori de semne contrare în două puncte $a < b$ din I, atunci ea se anulează cel puțin într-un punct dintre a și b.

Corolarul 2. Dacă o funcția continuă nu se anulează pe un interval, atunci ea păstrează același semn pe acest interval.

Corolarul 3. Dacă f este continuă pe un interval I, atunci $f(I)$ este interval.

Corolarul 4. Dacă f este biunivocă și continuă pe un interval I, atunci f este strict monotonă pe I.

Observație. Dacă funcția este biunivocă și continuă pe o mulțime care nu este interval, s-ar putea ca funcția să nu fie strict monotonă pe această mulțime.

Exemplu. Funcția $f(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ x - 3 \text{ dacă } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$ definită pe $[0,1) \cup (1,2]$

este continuă și biunivocă. Funcția este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $[0, 1)$ și $(1, 2]$, dar nu este strict crescătoare pe reuniunea lor, deoarece $f(0) = 0$ și $f(2) = -1$.

A p l i c a ţ i i. Folosind proprietatea: dacă f este continuă pe un interval I, atunci $f(I)$ este interval; vom determina mulţimea valorilor unor funcţii elementare.

1) Funcţia $f(x) = x^n$, $n \in N$, definită pe $I = [0, +\infty)$ este continuă, deci $f(I)$ este interval, şi anume $f(I) = [0, +\infty)$.

Într-adevăr, $f(0) = 0$ şi $m = \inf\limits_{x \geq 0} x^n = 0$; pe de altă parte $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, deci x^n ia valori oricît de mari şi deci:
$M = \sup\limits_{x \geq 0} x^n = +\infty$. Deoarece $m = 0 \in f(I)$, rezultă că $f(I) = [0, +\infty)$.

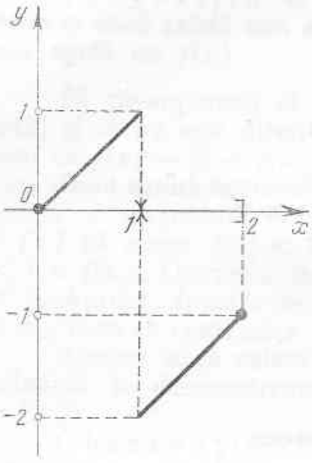


Fig. 68

2) Funcţia $f(x) = x^{2n-1}$, $n \in N$, definită pe $R = (-\infty, +\infty)$ este continuă, deci $f(R)$ este interval, şi anume $f(R) = R$.

Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n-1} = -\infty$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2n-1} = +\infty$, deci funcţia ia valori oricît de departe spre $-\infty$ şi oricît de departe spre $+\infty$. Rezultă $m = \inf\limits_{x \in R} x^{2n-1} = -\infty$ şi $M = \sup\limits_{x \in R} x^{2n-1} = +\infty$, deci $f(R) = (-\infty, +\infty) = R$.

3) Funcţia $f(x) = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ definită pe R este continuă, deci $f(R)$ este interval şi anume $f(R) = (0, +\infty)$.

Într-adevăr, dacă $a > 1$, avem

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \text{ şi } \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty,$$

deci

$$m = \inf_{x \in R} a^x = 0 \text{ şi } M = \sup_{x \in R} a^x = +\infty.$$

Deoarece funcţia a^x nu ia valoarea 0, rezultă că $f(R) = (0, +\infty)$. În cazul cînd $0 < a < 1$, se demonstrează la fel.

4) Funcţia $f(x) = \sin x$ definită pe $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este continuă pe I. Rezultă că $f(I)$ este interval, şi anume $f(I) = [-1, 1]$.

Avem $-1 \leq f(x) \leq 1$, deci $(-1, 1) \subset f(I)$. Dar $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ şi $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, deci $-1 \in f(I)$, şi $1 \in f(I)$ de unde rezultă că

$$f(I) = [-1, 1].$$

5) $f(x) = \cos x$ definită pe $I = [0, \pi]$ este continuă pe I. Rezultă că $f(I)$ este interval şi se arată ca la exemplul 4 că $f(I) = [-1, 1]$.

6) $f(x) = \operatorname{tg} x$ definită pe $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este continuă pe I. Rezultă că $f(I)$ este interval, şi anume $f(I) = R = (-\infty, +\infty)$.

Într-adevăr

$$\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty \text{ și } \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

deci

$$m = \inf_{x \in I} \operatorname{tg} x = -\infty \text{ și } M = \sup_{x \in I} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

de unde $f(I) = (-\infty, +\infty) = R$.

7) $f(x) = \operatorname{ctg} x$ definită pe $I = (0, \pi)$ este continuă pe I. Rezultă că $f(I)$ este interval și se arată ca în exemplul 6 că $f(I) = R = (-\infty, +\infty)$.

5. Rezolvarea ecuațiilor $x^n = a$ și $a^x = b$

Într-un capitol anterior s-a demonstrat existența și unicitatea soluției pozitive a ecuației $x^n = a$ ($a \geqslant 0$, n natural) și a soluției ecuației $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$). Vom da acum demonstrații mai simple ale existenței soluțiilor acestor ecuații.

1) *Ecuația* $x^n = a$, $a \geqslant 0$, $n \in N$ *are o soluție pozitivă și numai una.*

Într-adevăr, funcția $f(x) = x^n$ aplică semidreapta $I = [0, +\infty)$ pe întrega semidreaptă $[0, +\infty)$, adică $f(I) = [0, +\infty)$. Deoarece $a > 0$, avem $a \in f(I) = [0, +\infty)$, deci există un punct $x_0 \in I$ ($x_0 \geqslant 0$) astfel ca $f(x_0) = a$, adică astfel ca $x_0^n = a$. Aceasta înseamnă că x_0 este o soluție pozitivă a ecuației. Deoarece funcția x^n este strict crescătoare, este biunivocă, deci nu poate lua valoarea a decît în punctul x_0, deci x_0 este singura soluție pozitivă a acestei ecuații.

După cum se știe, soluția pozitivă x_0 a ecuației $x^n = a$ s-a notat cu $\sqrt[n]{a}$.

2) *Ecuația* $x^{2n-1} = a$, $a < 0$, $n \in N$ *are o soluție strict negativă și numai una.*

Într-adevăr, funcția $f(x) = x^{2n-1}$ aplică dreapta R pe întreaga dreaptă R, adică $f(R) = R$. Există deci un punct $x_0 \in R$, astfel că $f(x_0) = a$, adică astfel că $x_0^{2n-1} = a$. Aceasta înseamnă că x_0 este soluția ecuației $x^{2n-1} = a$. Deoarece funcția x^{2n-1} este strict crescătoare pe R, ea nu mai poate lua valoarea a în alt punct afară de x_0, deci x_0 este singura soluție a ecuației. Să observăm că dacă am avea $x_0 \geqslant 0$, atunci $x_0^{2n-1} \geqslant 0$ și deoarece $a < 0$, nu am putea avea $x_0^{2n-1} = a$. Așadar, $x_0 < 0$, adică este o soluție strict negativă a ecuației, care s-a notat $\sqrt[2n-1]{a}$.

3) *Ecuația* $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, *are o soluție reală și numai una.*

Într-adevăr, funcția $f(x) = a^x$ aplică dreapta R pe întreaga semidreaptă $(0, +\infty)$, adică $f(I) = (0, +\infty)$. Deoarece $b > 0$, avem $b \in f(I) = (0, +\infty)$, deci există $x_0 \in R$, astfel ca $a^{x_0} = b$. Faptul că x_0 este singura soluţie a acestei ecuaţii rezultă din aceea că funcţia $f(x) = a^x$ este strict monotonă pe R.

Soluţia x_0 a ecuaţiei $a^x = b$ s-a notat $\log_a b$.

6. Continuitatea funcţiilor compuse

Fie funcţiile $u: E \to F$ şi $\varphi: F \to R$.

Să considerăm funcţia compusă $f = \varphi \circ u: E \to R$, $f(x) = \varphi(u(x))$ pentru $x \in E$.

T e o r e m ă. Dacă funcţia u este continuă într-un punct $x_0 \in E$ şi dacă funcţia φ este continuă în punctul corespunzător $u_0 = u(x_0) \in F$, atunci funcţia compusă $f = \varphi \circ u$ este continuă în punctul $x_0 \in E$.

Fie $x_n \to x_0$, $x_n \in E$. Deoarece u este continuă în x_0, avem $u(x_n) \to u(x_0) = u_0$. Să notăm $u_n = u(x_n) \in F$. Deoarece $u_n \to u_0$ şi φ este continuă în u_0, avem $\varphi(u_n) \to \varphi(u_0)$, adică $\varphi(u(x_n)) \to \varphi(u(x_0))$, sau $f(x_n) \to f(x_0)$, adică f este continuă în x_0.

O b s e r v a ţ i i. Dacă $x_0 \in E$ este punct de acumulare al lui E şi $u_0 = u(x_0) \in F$ este punct de acumulare al lui F, continuitatea în x_0 şi u_0 se poate formula cu ajutorul limitelor:

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0) = u_0$ şi dacă $\lim\limits_{u \to u_0} \varphi(u) = \varphi(u_0)$, atunci:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(u(x)) = \lim_{u \to u_0} \varphi(u) = \varphi\,(\lim_{x \to x_0} u(x)).$$

C o r o l a r. Dacă u este continuă pe E şi φ este continuă pe F, atunci $f = \varphi \circ u$ este continuă pe E.

(Prin compunerea a două funcţii continue se obţine tot o funcţie continuă.)

7. Continuitatea funcţiilor inverse

Vom demonstra mai întîi următoarea

P r o p o z i ţ i e. Dacă funcţia $f: E \to R$ este monotonă şi dacă mulţimea valorilor, $f(E)$, este un interval, atunci f este continuă pe E.

Vom considera cazul cînd f este crescătoare pe E. Fie $x_0 \in E$ arbitrar şi $y_0 = f(x_0)$. Fie U o vecinătate a lui y_0. Să presupunem întîi că y_0 este punct interior al intervalului $f(E)$; există atunci un interval închis $[\alpha, \beta] \subset f(E) \cap U$ astfel ca $y_0 \in (\alpha, \beta)$ (fig. 69). Deoarece $\alpha, \beta \in f(E)$, există două puncte $\alpha', \beta' \in E$ astfel ca $\alpha = f(\alpha')$ şi $\beta = f(\beta')$. Deoarece f este crescătoare şi $\alpha < y_0 < \beta$, avem $\alpha' < x_0 < \beta'$, deci $V = (\alpha', \beta')$ este o vecinătate a lui x_0. Pentru orice $x \in V$, avem $\alpha' < x < \beta'$, deci $f(\alpha') \leq f(x) \leq f(\beta')$, adică $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, adică $f(x) \in [\alpha, \beta] \subset U$.

Rezultă, așadar, că f continuă în x_0.

Să presupunem că y_0 este extremitatea stîngă a intervalului $f(E)$, deci $y_0 \leqslant f(x)$ pentru orice $x \in E$. Deoarece f este crescătoare, pentru orice punct $x < x_0$ din E avem $f(x) \leqslant f(x_0) = y_0$, deci $f(x) = y_0$. Fie U o vecinătate a lui y_0 și β un punct din $f(E) \cap U$, astfel ca $y_0 < \beta$ (fig. 70).

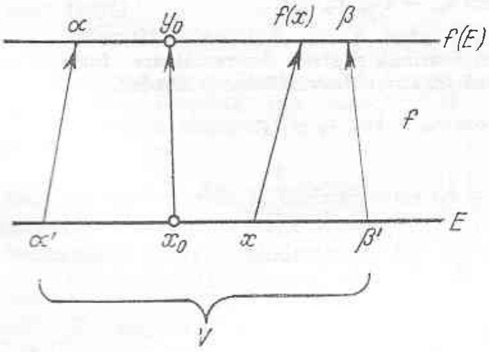


Fig. 69

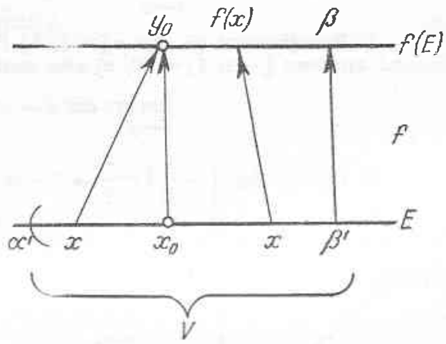


Fig. 70

Există un punct $\beta' \in E$, astfel ca $f(\beta') = \beta$. Deoarece f este crescătoare și $y_0 < f(\beta')$ avem $x_0 < \beta'$. Luînd $\alpha' < x_0$ oarecare, intervalul $V = (\alpha', \beta')$ este o vecinătate a lui x_0.

Fie $x \in V$ oarecare. Dacă $x \leqslant x_0$, atunci $f(x) = y_0$, deci $f(x) \in U$; dacă $x_0 < x < \beta'$, atunci $y_0 < f(x) < \beta$, deci $f(x) \in U$. Așadar, pentru orice $x \in V$ avem $f(x) \in U$, deci f este continuă în x_0.

Dacă y_0 este extremitatea dreaptă a intervalului $f(E)$, se raționează la fel.

Dacă f este descrescătoare, atunci $-f$ este crescătoare și $-f(E)$ este simetricul intervalului $f(E)$ față de origine și deci $-f(E)$ este interval; conform celor de mai sus, $-f$ este continuă pe E. Atunci f este de asemenea continuă pe E.

T e o r e m ă. Dacă f este o aplicație strict monotonă a unui interval I pe un interval J, atunci funcția f și inversa sa $\overset{-1}{f}$ sînt continue.

Într-adevăr, f și $\overset{-1}{f}$ sînt ambele strict monotone; deoarece $f(I) = J$ este interval, f este continuă pe I. De asemenea, $\overset{-1}{f}(J) = I$ și I este interval, deci $\overset{-1}{f}$ este continuă pe J.

C o r o l a r. Dacă $f: I \to R$ este o funcție continuă și strict monotonă definită pe intervalul I, atunci funcția sa inversă $\overset{-1}{f}: f(I) \to I$ este continuă pe $f(I)$.

Într-adevăr, $\overset{-1}{f}$ este strict monotonă și este definită pe $J = f(I)$ care este interval.

Exemple. 1) Funcţia $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ este continuă şi strict crescătoare. Rezultă că şi funcţia sa inversă $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este continuă (şi strict crescătoare). Aşadar,

$$\lim_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \ -1 \leqslant x_0 \leqslant 1.$$

2) Funcţia $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ fiind continuă şi strict descrescătoare, funcţia sa inversă $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ este continuă (şi strict descrescătoare). Aşadar,

$$\lim_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0, \ -1 \leqslant x_0 \leqslant 1.$$

3) Funcţia $\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty)$ este continuă şi strict crescătoare, deci funcţia sa inversă $\mathrm{arc\,tg} : (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este continuă (şi strict crescătoare). Aşadar,

$$\lim_{x \to x_0} \mathrm{arc\,tg}\, x = \mathrm{arc\,tg}\, x_0, \ x_0 \in R.$$

4) Funcţia $\mathrm{ctg} : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$ este continuă şi strict descrescătoare, deci funcţia sa inversă $\mathrm{arc\,ctg} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$ este continuă (şi strict descrescătoare). Aşadar,

$$\lim_{x \to x_0} \mathrm{arc\,ctg}\, x = \mathrm{arc\,ctg}\, x_0, \ x_0 \in R.$$

8. Proprietăţile funcţiilor continue pe mulţimi compacte

Fie funcţia $f : E \to R$. Reamintim că f este mărginită pe E dacă mulţimea $f(E)$ este mărginită, adică dacă există un număr $M > 0$ astfel încît, oricare ar fi $x \in E$, să avem:

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Teorema 1. O funcţie continuă pe o mulţime compactă este mărginită pe această mulţime.

Fie E o mulţime compactă şi funcţia $f : E \to R$ continuă pe această mulţime.

Să presupunem, prin absurd, că f *nu* este mărginită pe E. Aceasta înseamnă că, pentru orice număr $M > 0$, există un punct $x_M \in E$ astfel încît $|f(x_M)| > M$.

Luînd $M = n$, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, găsim un punct $x_n \in E$ astfel ca $|f(x_n)| > n$. Am obţinut astfel un şir (x_n) de puncte din E. Dar E fiind compactă, este mărginită, deci şirul (x_n) este mărginit. Conform lemei lui Cesàro, el conţine un subşir convergent, $x_{n_p} \xrightarrow[p]{} x_0$. Deoarece E este compactă, este închisă, deci o dată cu termenii șirului (x_{n_p}) conține și limita sa, $x_0 \in E$. Funcția f, fiind continuă pe E, este în particular continuă în x_0, deci deoarece $x_{n_p} \underset{p}{\to} x_0$ re ultă că $f(x_{n_p}) \underset{p}{\to} f(x_0)$ și deci $|f(x_{n_p})| \to$ $\underset{p}{\to} |f(x_0)|$. Dar din inegalitățile $|f(x_{n_p})| > n_p$, deducem că $|f(x_{n_p})| \underset{p}{\to} +\infty$, deoarece $n_p \underset{p}{\to} +\infty$. Am ajuns astfel la o contradicție (deoarece $|f(x_0)|$ este finit).

Rezultă, așadar, că f este mărginită.

Observație. Dacă mulțimea nu este compactă, este posibil ca o funcție continuă pe E să nu fie mărginită.

Exemple. 1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ definită pe $I = (0, 1)$ este continuă pe I, dar nu este mărginită. Aici, intervalul I este mărginit dar nu este închis.

2) $f(x) = x$ definită pe $I = [0, +\infty)$ este continuă pe I, dar nu este mărginită. Aici, intervalul I este închis, dar nu este mărginit.

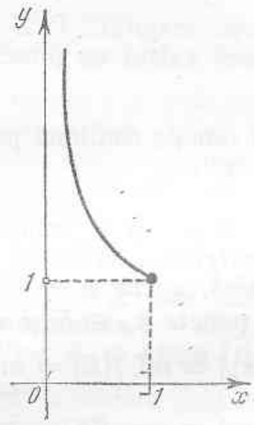


Fig. 71

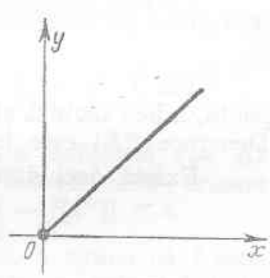


Fig. 72

Teorema 2. Dacă f este o funcție continuă pe o mulțime compactă E, atunci $f(E)$ este compactă.

Din teorema 1 rezultă că f este mărginită pe E, adică mulțimea $f(E)$ este mărginită. Rămîne de arătat că este închisă. Pentru aceasta este suficient să arătăm că, oricare ar fi șirul convergent format din puncte din $f(E)$, limita sa aparține de asemenea lui $f(E)$.

Fie $y_n \to y_0$, $y_n \in f(E)$. Pentru fiecare n, există un punct $x_n \in E$ astfel ca $f(x_n) = y_n$. Am obținut astfel un șir (x_n) de puncte din E. Se arată ca în demonstrația teoremei precedente că (x_n) conține un subșir $x_{n_p} \to x_0 \in E$. Deoarece f este continuă în x_0 deducem $f(x_{n_p}) \underset{p}{\to} f(x_0) \in f(E)$, și, deoarece $f(x_{n_p}) = y_{n_p}$, rezultă $y_{n_p} \underset{p}{\to} f(x_0)$. Dar, deoarece $y_n \to y_0$ și (y_{n_p}) este un subșir al șirului (y_n), rezultă că $y_{n_p} \underset{p}{\to} y_0$, și, cum limita unui șir este unică, deducem $y_0 = f(x_0)$, de unde $y_0 \in f(E)$, și teorema este demonstrată.

Acest rezultat se enunță prescurtat astfel: *imaginea unei mulțimi compacte printr-o funcție continuă este o mulțime compactă.*

Observație. Dacă E nu este compact, este posibil ca $f(E)$ să nu fie compact.

Exemple. 1) $f(x) = x$ definită pe $I = (0, 1)$. Avem $f(I) = (0, 1)$. Mulțimea $f(I)$ este mărginită, dar nu este închisă.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ definită pe $I = (0, 1)$. Avem $f(I) = [1, +\infty)$. Miuțimea $f(I)$ este închisă dar nu este mărginită.

C o r o l a r . Imaginea unui interval compact printr-o funcţie continuă este un interval compact.

Într-adevăr, conform proprietăţii lui Darboux, imaginea unui interval printr-o funcţie continuă este un interval. Restul corolarului rezultă din teorema precedentă.

Spunem că o funcţie minorată $f: E \to R$ îşi atinge marginea inferioară $m = \inf\limits_{x \in E} f(x)$, dacă există un punct $x_m \in E$ astfel ca $m = f(x_m)$.

Spunem că o funcţie majorată $f: E \to R$ îşi atinge marginea superioară $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, dacă există un punct $x_M \in E$ astfel ca $f(x_M) = M$.

T e o r e m a 3. O funcţie continuă pe o mulţime compactă îşi atinge marginile pe această mulţime.

Fie $f: E \to R$ continuă şi E compactă. Mulţimea $f(E)$ este compactă, adică închisă şi mărginită. Să notăm $M = \sup f(E)$ şi $m = \inf f(E)$. Deoarece $f(E)$ este închisă, avem $m \in f(E)$ şi $M \in f(E)$.

Există deci două puncte $x_m \in E$ şi $x_M \in E$ astfel ca

$$f(x_m) = \inf f(E) = \inf_{x \in E} f(x),$$

$$f(x_M) = \sup f(E) = \sup_{x \in E} f(x)$$

şi teorema este demonstrată.

O b s e r v a ţ i i. 1° Deoarece $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pentru orice $x \in E$, rezultă că $f(E) \subset [m, M]$.

2° Dacă E nu este compactă, este posibil ca f să fie mărginită fără ca să-şi atingă marginile.

Exemplu. $f(x) = x$ definită pe $E = (0, 1)$. Avem $m = \inf\limits_{x \in I} f(x) = 0$ şi $M = \sup\limits_{x \in I} f(x) = 1$, dar funcţia $f(I) = (0, 1)$, deci f nu ia în nici un punct nici valoarea $m = 0$, nici valoarea $M = 1$.

9. Funcţii uniform continue

Fie funcţia $f: E \to R$. A spune că f este continuă pe E înseamnă că pentru orice $x \in E$, f este continuă în x, adică:

Oricare ar fi $x \in E$ şi oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, astfel încît, oricare ar fi $x' \in E$ cu $|x' - x| < \delta$, să avem $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

Pentru un punct $x \in E$, fixat, corespondenţa $\varepsilon \to \delta(\varepsilon, x)$ caracterizează într-un anumit sens „gradul" de continuitate al funcţiei f în punctul x. Dacă x' este alt punct din E, și dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ avem $\delta(\varepsilon, x') \leqslant \delta(\varepsilon, x)$, am putea spune că funcția este „mai continuă” în punctul x' decît în punctul x.

Evident, în cazul a două puncte (sau al unui număr finit de puncte), putem alege totdeauna același $\delta(\varepsilon)$, și anume pe cel mai mic dintre numerele $\delta(\varepsilon, x')$ și $\delta(\varepsilon, x)$.

În cazul unei mulțimi infinite de puncte din E, nu mai este totdeauna posibil să alegem același $\delta(\varepsilon) > 0$, deoarece s-ar putea ca pentru un $\varepsilon > 0$ fixat, marginea inferioară a numerelor $\delta(\varepsilon, x)$ să fie 0. Am putea spune că, în acest caz, funcția nu este „la fel de continuă” în toate punctele.

Dacă este posibil ca pentru fiecare $\varepsilon > 0$ să găsim un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ unic, același pentru toate punctele $x \in E$ (adică δ să depindă numai de ε, dar nu și de x), atunci am putea spune că funcția este „la fel de continuă” în toate punctele din E, sau că este *uniform continuă pe* E. În acest caz, deoarece δ nu mai depinde de x, afirmația „oricare ar fi $x \in E$” trebuie să figureze după afirmația relativă la δ. Așadar:

Definiție. O funcție $f: E \to R$ este uniform continuă (pe E) dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît, oricare ar fi x' și x'' din E cu $|x' - x''| < \delta$, să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Observație. Din punct de vedere geometric, a spune că f este uniform continuă înseamnă că, dacă alegem pe axa Ox un interval I de lungime $< \delta$, imaginea sa $f(I)$ are lungimea $< \varepsilon$, *oriunde* s-ar afla I în mulțimea E.

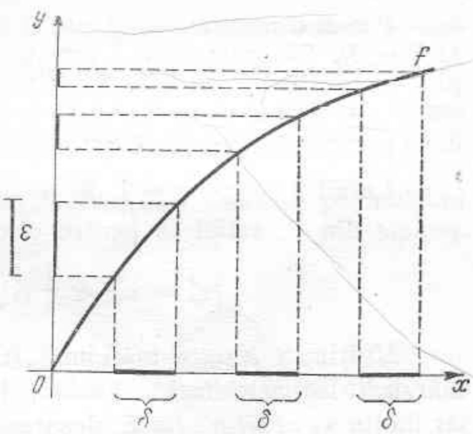


Fig. 73

Exemple. 1) Funcția constantă $f(x) \equiv c$ definită pe R este uniform continuă pe R.

Într-adevăr, $|f(x') - f(x'')| = |c - c| = 0$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ putem alege $\delta(\varepsilon) = 1$ și atunci, dacă $|x' - x''| < \delta$, avem într-adevăr $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

2) Funcția identică $f(x) = x$ definită pe R este uniform continuă pe R.

Într-adevăr, $|f(x') - f(x'')| = |x' - x''|$, deci pentru fiecare $\varepsilon > 0$ putem alege $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ și atunci, dacă $|x' - x''| < \delta$ avem într-adevăr $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

3) Funcția $f(x) = x^2$ definită pe R nu este uniform continuă pe R.

Să presupunem prin absurd că funcția ar fi uniform continuă pe R. Fie $\varepsilon > 0$; există deci $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît dacă $|x' - x''| < \delta$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Dacă alegem punctele x' și x'' astfel ca $|x' - x''| = \delta$ avem $|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = |x' - x''||x' + x''| = \delta|x' + x''|$.

Această egalitate este îndeplinită oriunde s-ar afla x' și x'' pe dreaptă.

Să luăm atunci $x' > \frac{\varepsilon}{\delta}$ și $x'' > \frac{\varepsilon}{\delta}$, $(|x' - x''| = \delta)$.

Atunci $|x' + x''| = x' + x'' > \frac{2\varepsilon}{\delta}$ şi deci

$$|x'^2 - x''^2| = \delta |x' + x''| > \delta \frac{2\varepsilon}{\delta} = 2\varepsilon,$$

adică $|f(x') - f(x'')| > 2\varepsilon$, ceea ce contrazice inegalitatea $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ obţinută mai sus.

Aşadar, $f(x) = x^2$ nu este uniform continuă pe R.

Propoziţie. Orice funcţie uniform continuă este continuă.

Această propoziţie rezultă din definiţia continuităţii uniforme luînd $x_0 = x''$ şi ţinîndu-l fixat.

Observaţii. 1° Proprietatea de continuitate are un caracter *punctual*, ea se defineşte într-un punct. Proprietatea de continuitate uniformă are un caracter *global*, ea se defineşte pe o mulţime.

2° Afirmaţia reciprocă propoziţiei precedente nu este în general adevărată: există funcţii continue care nu sînt uniform continue, de exemplu funcţia $f(x) = x^2$ definită pe R. Dacă însă domeniul de definiţie este *compact*, este adevărată şi afirmaţia reciprocă:

Teoremă. O funcţie continuă pe o mulţime compactă este uniform continuă pe această mulţime.

Fie E o mulţime *compactă* (închisă şi mărginită) şi o funcţie continuă $f: E \to R$. Să arătăm că f este uniform continuă pe E. Să presupunem, prin absurd, că f nu este uniform continuă pe E. Aceasta înseamnă că: există un număr $\varepsilon_0 > 0$, astfel încît, oricare ar fi numărul $\delta > 0$, există două puncte x'_δ şi x''_δ din E astfel încît $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ dar $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| > \varepsilon_0$.

Luînd $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, obţinem două şiruri (x'_n) şi (x''_n) de puncte din E, astfel ca pentru orice $n \in N$ să avem

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \text{ şi } |f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon_0.$$

Mulţimea E este mărginită (fiind compactă), deci şi şirul (x'_n) este mărginit. În baza lemei lui Cesàro, el conţine un subşir convergent $x'_{n_p} \xrightarrow[p]{} x_0$, iar limita x_0 *aparţine lui* E, deoarece E este închisă.

Deoarece $|x'_{n_p} - x''_{n_p}| < \frac{1}{n_p} \xrightarrow[p]{} 0$, deducem că

$$x'_{n_p} - x''_{n_p} \xrightarrow[p]{} 0,$$

$$\text{deci: } x''_{n_p} = x'_{n_p} - (x'_{n_p} - x''_{n_p}) \xrightarrow[p]{} x_0 - 0 = x_0.$$

Deoarece $x'_{n_p} \underset{p}{\rightarrow} x_0$ şi $x''_{n_p} \underset{p}{\rightarrow} x_0$, iar f este continuă în x_0 (fiind continuă pe E), deducem

$$f(x'_{n_p}) \underset{p}{\rightarrow} f(x_0) \text{ şi } f(x''_{n_p}) \underset{p}{\rightarrow} f(x_0),$$

deci:

$$f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p}) \underset{p}{\rightarrow} 0.$$

Dar din inegalităţile $|f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p})| > \varepsilon_0$, pentru orice $p \in N$, deducem că şirul $(f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p}))$ nu are limita 0, şi am ajuns astfel la o contradicţie.

Deoarece presupunerea că f n-ar fi uniform continuă ne duce la contradicţie, rezultă că f este uniform continuă şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Teorema precedentă rezultă şi ca o consecinţă imediată a propoziţiei relative la oscilaţia funcţiei (cap. II, § 5, nr.7). Într-adevăr, deoarece f este continuă, avem $\omega_f(x) = 0$ pentru orice $x \in E$, deci $\omega = \sup\limits_{x \in E} \omega_f(x) = 0$. Conform propoziţiei menţionate, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice interval I de lungime $< \delta(\varepsilon)$ să avem $\omega_f(I \cap E) < \varepsilon$. Deducem că oricare ar fi punctele $x', x'' \in E$ cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, notînd $I = [x', x'']$ avem $\omega_f(I \cap E) < \varepsilon$, deci, în particular, $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Observaţii. 1° Dacă f este continuă pe o mulţime care nu este compactă, este posibil să nu fie uniform continuă.

Exemple. 1) $f(x) = x^2$ definită pe R, este continuă, dar nu este uniform continuă. Aici mulţimea de definiţie este închisă, dar nu este mărginită.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ definită pe $(0, 1]$ este continuă, dar nu este uniform continuă — după cum se va vedea mai departe (deoarece nu este mărginită). Aici mulţimea de definiţie este mărginită, dar nu este închisă.

2° Condiţia ca E să fie compactă este suficientă, dar nu şi necesară pentru ca o funcţie continuă să fie uniform continuă. De exemplu, funcţia $f(x) = x$ definită pe R este uniform continuă.

Putem acum recapitula proprietăţile funcţiilor *continue* pe mulţimi *compacte:*

1) Sînt mărginite.
2) Îşi ating efectiv marginile.
3) Sînt uniform continue.

Spunem că o funcţie $f: E \rightarrow R$ este lipschitziană* dacă există un număr $M > 0$ astfel încît oricare ar fi punctele $x', x'' \in E$ să avem

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant M\,|x' - x''|.$$

Inegalitatea aceasta se numeşte *condiţia lui Lipschitz.*

Propoziţie. Dacă funcţia $f: E \rightarrow R$ este lipschitziană atunci ea este uniform continuă.

---

* De la numele matematicianului Lipschitz.

În adevăr, fie $\varepsilon > 0$; să luăm $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$. Atunci, dacă

$$|x' - x''| < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M},$$

avem

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

deci f este uniform continuă pe E.

Rezultă în particular că funcţiile lipschitziene sînt continue.

Observaţii. 1° Dacă f este uniform continuă pe E atunci $|f|$ este uniform continuă pe E. Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată.

2° Dacă f şi g sînt uniform continue pe E, atunci $f + g$ şi αf sînt uniform continue pe E, oricare ar fi $\alpha \in R$. Mulţimea funcţiilor uniform continue pe E este deci un spaţiu vectorial. Această mulţime nu este în general o algebră, deoarece produsul a două funcţii uniform continue poate să nu fie uniform continuu.

Exemplu. Funcţiile $f(x) = x$ şi $g(x) = x$ sînt uniform continue pe R, dar produsul lor $f(x)\,g(x) = x^2$ nu este uniform continuu pe R.

3° O funcţie f uniform continuă pe o mulţime mărginită E este mărginită pe E.

Rezultă că funcţia $f(x) = \frac{1}{x}$ nu este uniform continuă pe $(0, 1)$, deoarece nu este mărginită.

4° Dacă f şi g sînt uniform continue pe o mulţime mărginită E, atunci produsul lor fg este uniform continuu pe E.

Rezultă că mulţimea funcţiilor uniform continue pe o mulţime *mărginită* este o algebră.

5° Dacă f este uniform continuă pe E, atunci f se poate prelungi prin continuitate în orice punct de acumulare (finit) al lui E, iar funcţia prelungită este de asemenea uniform continuă.

Rezultă că dacă o funcţie nu are limită finită într-un punct de acumulare (finit) al lui E, atunci ea nu este uniform continuă pe E.

Exemplu. Funcţia $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ definită pe $(0,1)$ nu are limită în 0, deci nu este uniform continuă.

10. Funcţii semicontinue

Fie funcţie $f: E \to R$ şi $x_0 \in E$.

Spunem că funcţia f este semicontinuă inferior în punctul x_0, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon, \textit{ pentru orice } x \in V \cap E.$$

Spunem că funcţia f este semicontinuă superior în punctul x_0, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon, \textit{ pentru orice } x \in V \cap E.$$

Din această definiție rezultă că dacă în x_0 funcția are un minim, atunci este semicontinuă inferior în x_0, iar dacă în x_0 are un maxim, atunci este semicontinuă superior în x_0. O funcție este continuă în x_0, dacă și numai dacă este semicontinuă inferior și superior în x_0.

O funcție este semicontinuă inferior (respectiv superior) pe mulțimea E, dacă are această proprietate în fiecare punct din E.

Se verifică ușor că suma $f + g$ a două funcții semicontinue inferior (sau superior) este de asemenea o funcție semicontinuă inferior (sau superior). Dacă f este semicontinuă inferior, atunci $-f$ este semicontinuă superior și reciproc.

Dacă f este semicontinuă inferior (sau superior) și $\alpha \geqslant 0$, atunci αf este semicontinuă inferior (sau superior).

Mulțimea funcțiilor semicontinue inferior (sau superior) în x_0 sau pe E nu este un spațiu vectorial, dar este un con convex în spațiul vectorial al tuturor funcțiilor definite pe E. Lăsăm pe seama cititorului să verifice următoarele proprietăți:

1) Dacă $(f_i)_{i \in I}$ este o familie oarecare de funcții semicontinue inferior, atunci anvelopa superioară $\sup\limits_{i \in I} f_i$ este semicontinuă inferior (în toate punctele $x \in E$ în care $\sup\limits_{i \in I} f_i(x) < +\infty$).

2) Dacă $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ este o familie finită de funcții semicontinue inferior, atunci anvelopa inferioară $\inf\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i$ este semicontinuă inferior.

Capitolul VI

DERIVATE

§ 1. Originea geometrică şi fizică a derivatei

1. Problema tangentei

Fie f o funcţie definită pe un interval I continuă pe acest interval. Să notăm cu C graficul său:

$$C = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}.$$

Graficul funcţiei este o curbă în plan (fig. 74).

Fie x_0 un punct din I şi $M_0(x_0, f(x_0))$ punctul corespunzător de pe grafic. Să luăm un punct oarecare $x \neq x_0$ din I; pe grafic îi corespunde punctul $M(x, f(x))$.

Unind punctele M_0 şi M obţinem o dreaptă care formează unghiul α cu axa Ox.

Paralela prin M_0 la Ox taie paralela prin M la Oy în punctul N. S-a format triunghiul dreptunghic M_0NM care are cateta M_0N de lungime $x - x_0$ şi cateta MN de lungime $f(x) - f(x_0)$.

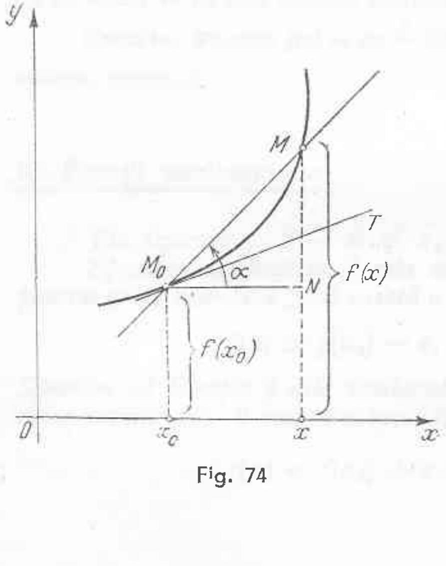


Fig. 74

Coeficientul unghiular $m = \operatorname{tg} \alpha$ al secantei M_0M este dat de egalitatea

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Luînd alt punct $x' \neq x_0$ din I, căruia îi corespunde pe grafic punctul $M'(x', f(x'))$, dreapta M_0M' are coeficientul unghiular

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$

Pentru punctele x diferite, obţinem diferite secante M_0M care au, în general, coeficienţi unghiulari diferiţi.

Dacă x se apropie de x_0, punctul M se apropie pe grafic de punctul M_0. Se apropie oare şi secanta M_0M, ca poziţie, de o dreaptă M_0T? Sau, cu alte cuvinte, se apropie şi coeficientul unghiular tg α al secantei M_0M de o valoare tg α_0?

Sîntem astfel conduşi să considerăm limita funcţiei tg α cînd $x \to x_0$, adică

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă această limită există şi este finită, spunem că graficul C admite tangentă în punctul M_0, şi anume tangenta la grafic în punctul M_0 este, prin definiţie, dreapta M_0T al cărei coeficient unghiular este

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă limita precedentă există şi este infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), vom spune de asemenea că graficul C admite tangentă în punctul M_0, şi anume tangenta la grafic în punctul M_0 este, prin definiţie, dreapta M_0T paralelă cu axa Oy (dreapta a cărei ecuaţie este $x = x_0$).

2. Problema vitezei

Să considerăm un mobil M în mişcare rectilinie şi uniformă (fig. 75). Aceasta înseamnă că traiectoria sa este o linie dreaptă şi că spaţiul este proporţional cu timpul în care este parcurs. Să alegem un punct de referinţă O, un sens pozitiv şi o unitate de lungime pe dreapta pe care se mişcă mobilul M. Să alegem de asemenea un moment de referinţă pe care să-l notăm 0.

Să notăm cu $s(0)$ abscisa mobilului în acest moment. În fiecare moment t să notăm cu $s(t)$ abscisa punctului de pe traiectorie, în care se află mobilul la momentul respectiv.

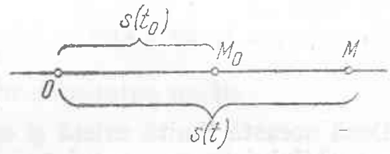


Fig. 75

Spaţiul parcurs de mobil din momentul iniţial pînă într-un moment oarecare t este $s(t) - s(0)$. Să notăm cu v raportul constant dintre spaţiu şi timpul t în care a fost parcurs:

$$\frac{s(t) - s(0)}{t} = v,$$

de unde $s(t) = vt + s(0)$.

Spaţiul parcurs între două momente oarecare $t_1 < t_2$ este $s(t_2) - s(t_1)$. Raportul dintre spaţiul $s(t_2) - s(t_1)$ şi timpul $t_2 - t_1$ în care a fost parcurs este

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{vt_2 - vt_1}{t_2 - t_1} = v.$$

Raportul constant v dintre spaţiu şi timpul în care a fost parcurs se numeşte *viteza* mobilului în mişcare rectilinie şi uniformă. În acest caz, viteza este egală (numeric) cu spaţiul parcurs în unitatea de timp.

Viteza v este aceeaşi în fiecare moment.

Să presupunem acum că mobilul M se mişcă rectiliniu, dar neuniform. Aceasta înseamnă că spaţiul nu mai este proporţional cu timpul în care a fost parcurs. Ce se înţelege în acest caz prin viteza pe care mobilul o are la un anumit moment t_0?

Să considerăm un moment oarecare $t > t_0$ şi să facem raportul dintre spaţiul $s(t) - s(t_0)$ şi timpul $t - t_0$ în care a fost parcurs:

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Acest raport îl putem considera ca o viteză medie a mobilului în intervalul de timp dintre t_0 şi t, în sensul că un alt mobil în mişcare rectilinie şi uniformă care ar avea viteza v_m ar parcurge în timpul $t - t_0$ acelaşi spaţiu $s(t) - s(t_0)$ ca şi mobilul iniţial.

Dacă alegem alt moment $t' > t_0$, obţinem viteza medie

$$v'_m = \frac{s(t') - s(t_0)}{t' - t_0},$$

care este în general diferită de v_m. Intuitiv, ne dăm seama uşor că, cu cît intervalul de timp dintre t_0 şi t este mai mic, cu atît mişcarea mobilului diferă mai puţin de o mişcare uniformă pe intervalul de timp considerat. Sîntem astfel conduşi să considerăm limita vitezei medii cînd timpul $t - t_0$ tinde către 0, adică

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Dacă această limită există şi este finită, ea este, prin definiţie, viteza $v(t_0)$ a mobilului în momentul t_0:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

3. Densitatea liniară a unei bare materiale

Să considerăm o bară materială omogenă rectilinie şi cu secţiunea constantă. Aceasta înseamnă că masa unei porţiuni din bară este proporţională cu lungimea acestei porţiuni.

Luînd în considerare numai lungimea barei şi neglijînd celelalte dimensiuni, să aşezăm bara de-a lungul unei axe Ox, cu un capăt în O, şi cu celălalt capăt în sensul pozitiv al axei (fig. 76). Pentru fiecare punct de pe bară de abscisă x, să notăm cu $m(x)$ masa porţiunii Ox.

Pentru două puncte oarecare $x_1 < x_2$ de pe bară, masa porţiunii dintre x_1 şi x_2 este $m(x_2) - m(x_1)$ iar lungimea sa este $x_2 - x_1$. Să notăm cu ρ raportul constant dintre masă şi lungime:

$$\rho = \frac{m(x_2) - m(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

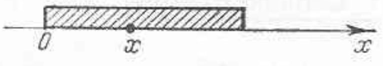


Fig. 76

Deoarece $m(0) = 0$, pentru orice punct de pe bară de abscisă x, avem

$$\rho = \frac{m(x) - m(0)}{x - 0} = \frac{m(x)}{x},$$

adică $m(x) = \rho x$.

Raportul constant ρ dintre masă şi lungime se numeşte *densitatea* barei. Densitatea este aceeaşi, ρ, în orice punct al barei.

Să presupunem acum că bara materială nu este omogenă. Aceasta înseamnă că masa unei porţiuni din bară nu mai este proporţională cu lungimea acestei porţiuni. Ce se înţelege în acest caz prin densitatea barei într-un punct x_0?

Să considerăm un punct oarecare $x > x_0$ de pe bară şi să formăm raportul dintre masa $m(x) - m(x_0)$ (a porţiunii dintre punctele x_0 şi x) şi lungimea sa $x - x_0$

$$\rho_m = \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}.$$

Acest raport îl putem considera ca o densitate medie a porţiunii dintre punctele x_0 şi x, în sensul că o bară omogenă de lungime $x - x_0$, care ar avea densitatea ρ_m, ar avea aceeaşi masă $m(x) - m(x_0)$ ca şi a porţiunii din bara neomogenă.

Dacă alegem alt punct $x' > x_0$, obţinem densitatea medie

$$\rho'_m = \frac{m(x') - m(x_0)}{x' - x_0},$$

care este în general diferită de ρ_m. Cu cît lungimea $x - x_0$ este mai mică, cu atît porţiunea din bară diferă mai puţin de o bară omogenă. Sîntem astfel conduşi să considerăm limita densităţii medii cînd lungimea $x - x_0$ tinde către 0, adică

$$\lim_{x \to x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă această limită există şi este finită, ea este, prin definiţie, densitatea $\rho(x_0)$ a barei în punctul x_0:

$$\rho(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}.$$

§ 2. Derivata

1. Definiția derivatei

Cele trei probleme diferite puse în paragraful precedent, două din fizică și una din geometrie, ca de altfel și alte probleme din fizică, ne conduc, toate, la cercetarea existenței limitei unui raport de forma $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Dată fiind importanța teoretică și practică a acestor probleme diferite, vom studia dintr-un punct de vedere unitar limita raportului considerat, independent de problema concretă din care provine.

Rezultatele obținute pe această cale se interpretează apoi pentru fiecare problemă în parte, după specificul ei.

Fie f o funcție definită pe un interval I și x_0 un punct din I. Pentru fiecare punct $x \neq x_0$ din I, să considerăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$R(x)$ este o funcție definită pentru toate punctele $x \in I$ cu excepția lui x_0, în care numitorul (ca și numărătorul) se anulează. Deși funcția $R(x)$ nu este definită în x_0, se poate pune problema existenței limitei acestei funcții în punctul x_0, deoarece x_0 este un punct de acumulare al mulțimii $I - \{x_0\}$.

Definiție. Se spune că funcția $f: I \to R$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, dacă raportul $R(x)$ are în punctul x_0 limită finită. Limita însăși se numește derivata funcției f în punctul x_0 și se notează cu $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pentru derivata $f'(x_0)$ se folosesc de asemenea notațiile

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} \text{ și } \mathrm{D}\, f(x_0).$$

Pentru a pune în evidență argumentul x, se spune adesea că $f'(x_0)$ este *derivata lui f în raport cu x în punctul x_0*. În acest caz, mai ales, se folosește notația

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} \text{ sau } f'_x(x_0).$$

Dacă limita raportului este *infinită* ($+\infty$ sau $-\infty$), ea se numește de asemenea derivata funcției f în punctul x_0 și se notează tot cu $f'(x_0)$. În acest caz nu mai spunem însă că funcția este derivabilă în x_0. Vom distinge astfel expresia „funcția f are derivată (finită sau infinită)" de expresia „funcția f este derivabilă".

Ţinînd seama de diferitele definiţii echivalente ale limitei, cu şiruri, cu vecinătăţi, sau cu ε şi δ, egalitatea

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

este echivalentă cu fiecare din propoziţiile următoare:

1) *Oricare ar fi şirul* $x_n \to x_0$, $(x_n \in I,\ x_n \neq x_0)$, avem

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0).$$

2) *Pentru orice vecinătate U a lui $f'(x_0)$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x \in V \cap I$, $x \neq x_0$, să avem*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in U.$$

3) *Dacă $f'(x_0)$ este finit: pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in I$, $x \neq x_0$, cu $|x - x_0| < \delta$, să avem*

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Din studiul problemei tangentei de la § 1, rezultă următoarea interpretare geometrică a derivatei:

Dacă funcţia f are derivată în punctul x_0, graficul său admite tangentă în punctul corespunzător $M_0(x_0, f(x_0))$; dacă derivata este finită, coeficientul unghiular $\operatorname{tg} \alpha_0$ al acestei tangente este egal cu derivata $f'(x_0)$; dacă derivata este infinită, tangenta este paralelă cu axa Oy.

Observaţii. 1° Derivabilitatea şi derivata $f'(x_0)$ sînt, respectiv, aspectul calitativ şi cel cantitativ al aceleiaşi noţiuni. Pentru a putea calcula derivata $f'(x_0)$ trebuie mai întîi să ne asigurăm că ea există, adică trebuie să ne asigurăm că funcţia este derivabilă în x_0.

2° Derivata $f'(x_0)$ este un *număr.*

3° Derivabilitatea este o noţiune cu caracter punctual şi are sens numai în punctele în care funcţia este definită. De exemplu, nu are sens problema derivabilităţii funcţiei $f(x) = \ln x$ în punctul 0 sau în punctul -1, sau a funcţiei $\operatorname{tg} x$ în punctul $\frac{\pi}{2}$, sau a funcţiei $\frac{1}{x}$ în punctul 0 etc.

4° Problema derivatei se poate pune nu numai pentru funcţii definite pe un interval, ci şi pe o mulţime oarecare E, dacă x_0 este punct de acumulare pentru E.

De exemplu, funcţia $f(x) = x$ definită numai pe mulţimea Q a numerelor *raţionale* este derivabilă în punctul 0, şi are derivata egală cu 1. Într-adevăr, pentru orice $x \in Q$, $x \neq 0$, avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} \equiv 1,$$

deci

$$f'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Totuşi, în continuare, funcţiile vor fi considerate definite pe un interval. Rezultatele obţinute sînt valabile şi pentru funcţii definite pe o reuniune de intervale.

2. Continuitatea funcţiilor derivabile

În definiţia derivatei nu s-a impus continuitatea funcţiei. Continuitatea rezultă însă din derivabilitate, aşa cum se arată în următoarea

T e o r e m ă . Dacă funcţia $f: I \to R$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, atunci f este continuă în x_0.

Într-adevăr, pentru orice $x \neq x_0$ din I avem egalitatea

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Dar, $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$, şi, conform ipotezei,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{(finit)}.$$

Rezultă atunci că f are limită în x_0 şi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0),$$

adică f este continuă în x_0.

O b s e r v a ţ i i. 1° Afirmaţia reciprocă nu este, în general, adevărată: o funcţie poate fi continuă în x_0, fără a fi derivabilă în x_0.

Mulţimea funcţiilor $f: I \to R$ derivabile într-un punct $x_0 \in I$ este conţinută în mulţimea funcţiilor continue în acest punct.

Exemplu. Funcţia $f(x) = |x|$ definită pe R este continuă pe R; în particular, este continuă în 0. Dar funcţia nu este derivabilă în 0. Într-adevăr, să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x > 0 \\ -1 & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Raportul $R(x)$ are în punctul 0 limita la stînga -1, şi limita la dreapta 1, deci nu are limită în punctul 0, adică funcţia $f(x) = |x|$ nu este derivabilă în 0.

Pe figura 77 se constată că în origine graficul funcţiei nu are tangentă.

2° Dacă f are derivată *infinită* în punctul x_0, nu rezultă că f este continuă în acest punct.

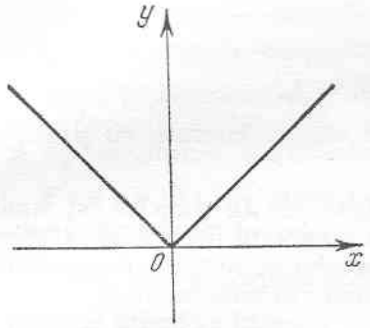


Fig. 77

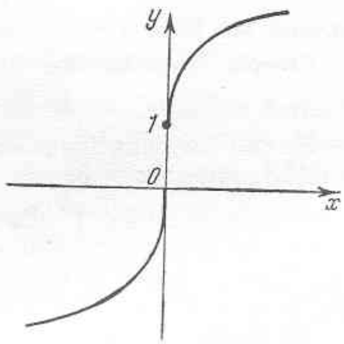


Fig. 78

Exemplu. Funcţia $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x} \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ \sqrt{-x} \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$

este discontinuă în punctul 0, totuşi are derivata $+\infty$ în acest punct.

3. Derivate laterale

Fie funcţia $f: I \to R$ şi $x_0 \in I$. Pentru $x \neq x_0$ din I să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Din exemplul precedent se constată că este posibil ca raportul $R(x)$ să nu aibă limită în x_0, dar să aibă limite laterale în x_0. Sîntem conduşi astfel la următoarea

D e f i n i ţ i e. 1) Se spune că funcţia f este derivabilă la stînga în punctul x_0, dacă raportul $R(x)$ are limită la stînga finită în x_0. Această limită se numeşte derivata la stînga a funcţiei f în x_0 şi se notează $f'_s(x_0)$:

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2) Se spune că funcţia f este derivabilă la dreapta în punctul x_0, dacă raportul $R(x)$ are limită la dreapta finită în x_0. Această limită se numeşte derivata la dreapta a funcţiei f în x_0 şi se notează $f'_d(x_0)$:

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exemplu. Pentru funcţia $f(x) = |x|$ definită pe R, avem

$$f'_s(0) = -1 \text{ şi } f'_d(0) = 1.$$

Se pot da definiţii echivalente ale derivatelor laterale, cu şiruri, cu vecinătăţi, sau cu ε şi δ.

Observaţii. 1° Dacă raportul $R(x)$ are în punctul x_0 limită la stînga infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), funcţia f nu este derivabilă la stînga în x_0. Totuşi, limita la stînga în x_0 a raportului se notează de asemenea $f'_s(x_0)$ şi se numeşte derivata la stînga a funcţiei f în punctul x_0.

De asemenea, dacă raportul $R(x)$ are în punctul x_0 limită la dreapta infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), funcţia f nu este derivabilă la dreapta în x_0. Totuşi, limita la dreapta în x_0 a raportului se notează de asemenea $f'_d(x_0)$ şi se numeşte derivata la dreapta a funcţiei f în punctul x_0.

2° Dacă intervalul este compact (închis şi mărginit), $I = [a, b]$, în punctul a nu are sens limita la stînga a raportului $R(x)$, iar în punctul b nu are sens limita la dreapta a acestui raport. De asemenea, definiţia limitei în a este echivalentă cu definiţia limitei la dreapta în a, iar definiţia limitei în b este echivalentă cu definiţia limitei la stînga în b.

Pentru derivate, aceste fapte se transpun astfel:

a) În punctul a nu are sens problema derivatei la stînga, iar definiţia derivatei în a este echivalentă cu definiţia derivatei la dreapta în a. Aşadar:

Funcţia f are derivată în punctul a dacă şi numai dacă are derivată la dreapta în a.

În acest caz $f'(a) = f'_d(a)$.

b) În punctul b nu are sens problema derivatei la dreapta, iar definiţia derivatei în b este echivalentă cu definiţia derivatei la stînga în b. Aşadar:

Funcţia f are derivată în b dacă şi numai dacă are derivată la stînga în b.

În acest caz $f'(b) = f'_s(b)$.

Dacă însă x_0 este punct interior al intervalului $[a, b]$, adică dacă $a < x_0 < b$, atunci au sens ambele derivate laterale în x_0.

Funcţia f poate avea în x_0 derivate laterale diferite.

Propoziţie. O funcţie $f: I \to R$ are derivată într-un punct interior $x_0 \in I$, dacă şi numai dacă are derivate laterale egale în x_0. În acest caz,

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0).$$

Această propoziţie rezultă din faptul că raportul $R(x)$ are limită în punctul x_0, dacă şi numai dacă are limite laterale egale în x_0.

Propoziţia conţine şi cazul în care derivatele sînt infinite. În particular dacă derivatele sînt finite, deducem că

Funcţia f este derivabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă este derivabilă la stînga şi la dreapta în x_0, şi derivatele laterale sînt egale.

Dacă în demonstraţia teoremei de continuitate a funcţiilor derivabile se consideră numai limita la stînga ($x < x_0$), sau numai limita la dreapta ($x > x_0$), se obţine următoarea

Propoziţie. Dacă f este derivabilă la stînga în x_0, atunci f este continuă la stînga în x_0.

Dacă f este derivabilă la dreapta în x_0, atunci f este continuă la dreapta în x_0.

Corolar. Dacă f este derivabilă la stînga şi la dreapta în x_0, atunci f este continuă în x_0.

Funcţia $f(x) = |x|$ definită pe R este derivabilă la stînga şi la dreapta în 0, dec este continuă în 0 (deşi nu este derivabilă în 0).

Observaţie. O funcţie poate fi continuă la stînga (sau la dreapta) într-un punct fără a fi derivabilă la stînga (respectiv la dreapta) în acest punct.

Exemplu. Funcţia $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ definită pe R este continuă în punctul 0, dar nu are derivate laterale în 0.

Într-adevăr, $\left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| \leq |x|$ şi $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, deci

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

adică f este continuă în punctul 0.

Pentru $x \neq 0$ să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin \dfrac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}.$$

Funcţia $\sin \dfrac{1}{x}$ nu are nici limită la stînga, nici limită la dreapta în 0, deci funcţia f nu are nici derivată la stînga, nici derivată la dreapta în 0.

Reluînd problema tangentei se constată că derivatele laterale au de asemenea o interpretare geometrică simplă.

Să luăm numai puncte $x \in I$ la dreapta lui x_0, $x > x_0$, şi să considerăm semidreapta M_0M, cu extremitatea în M_0. Coeficientul ei unghiular este

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

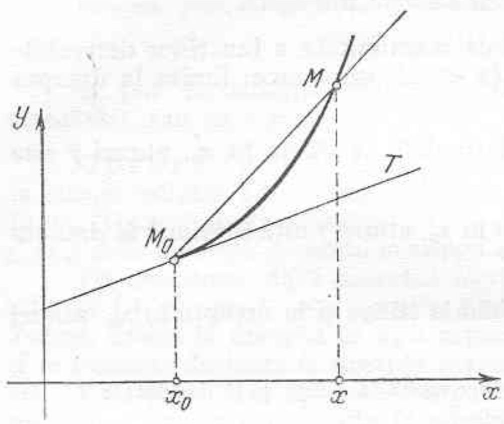


Fig. 79

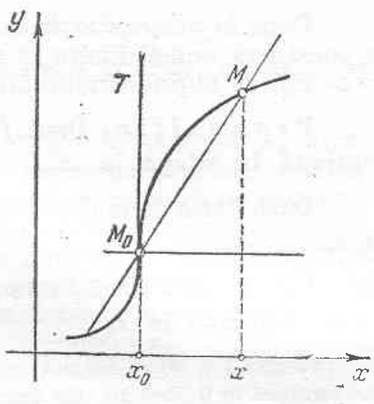


Fig. 80

Dacă acest coeficient unghiular are o limită finită tg α_0 cînd x se apropie de x_0 de la dreapta, spunem că graficul are în punctul M_0 *semitangentă la dreapta*, care este, prin definiţie, semidreapta cu extremitatea în M_0, care se află în semiplanul de la dreapta lui $M_0(x \geqslant x_0)$ şi care are coeficientul unghiular tg α_0. Aşadar: *Dacă funcţia f este derivabilă la dreapta în punctul x_0, graficul funcţiei are în punctul corespunzător M_0 $(x_0, f(x_0))$ semitangentă la dreapta, al cărei coeficient unghiular este egal cu $f'_d(x_0)$.*

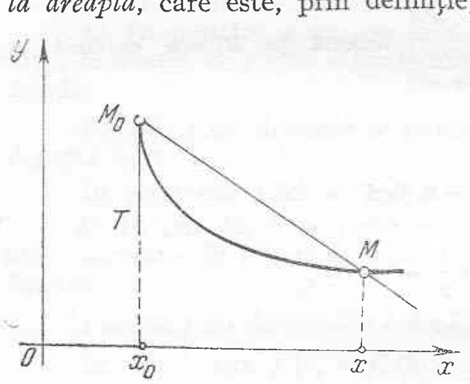


Fig. 81

Dacă $f'_d(x_0) = +\infty$, graficul admite, prin definiţie, semitangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, o semidreaptă M_0T paralelă cu axa Oy, situată deasupra punctului M_0 (fig. 80).

Dacă $f'_d(x_0) = -\infty$, graficul admite, prin definiţie, ca semitangentă la dreapta în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, semidreapta M_0T paralelă cu axa Oy, situată sub punctul M_0 (fig. 81).

Consideraţii analoge ne conduc la interpretarea geometrică a derivatei la stînga:

Dacă funcţia f este derivabilă la stînga în punctul x_0, graficul său are în punctul M_0 $(x_0, f(x_0))$ semitangentă la stînga o semidreaptă M_0T

cu coeficientul unghiular $f'_s(x_0)$, situată în semiplanul de la stînga lui M_0 $(x \leq x_0)$ (fig. 82).

Dacă $f_s(x_0) = +\infty$, graficul admite, prin definiție, ca semitangentă la stînga în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, o semidreaptă M_0T paralelă cu axa Oy, situată sub punctul M_0 (fig. 83).

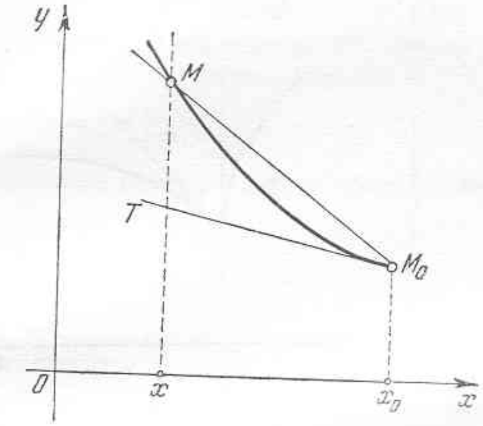


Fig. 82

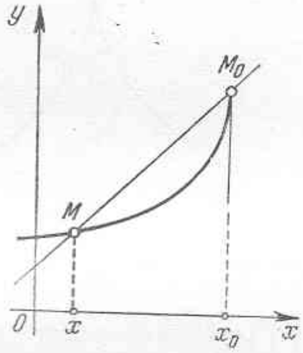


Fig. 83

Dacă $f_s(x_0) = -\infty$, graficul admite, prin definiție, ca semitangentă la stînga în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, o semidreaptă M_0T paralelă cu axa Oy, situată deasupra punctului M_0 (fig. 84).

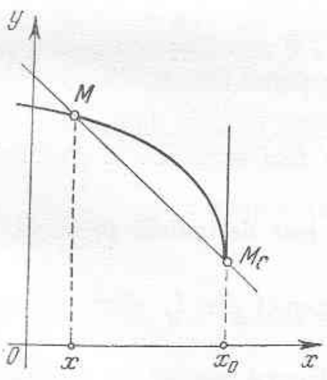


Fig. 84

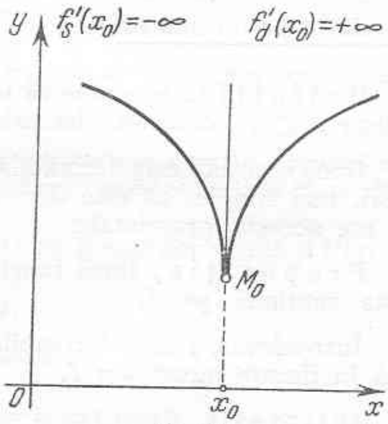


Fig. 85

Dacă funcția f are în x_0 derivate laterale egale, cele două semitangente sînt în prelungire, deci graficul are tangentă în punctul M_0.

Dacă funcția f are în x_0 derivate laterale diferite, cele două semitangente nu mai sînt în prelungire.

Dacă una dintre derivatele laterale este $+\infty$ şi cealaltă este $-\infty$ cele două semitangente sînt suprapuse (fig. 85 şi 86).

În acest caz, punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numeşte *punct de întoarcere* al graficului.

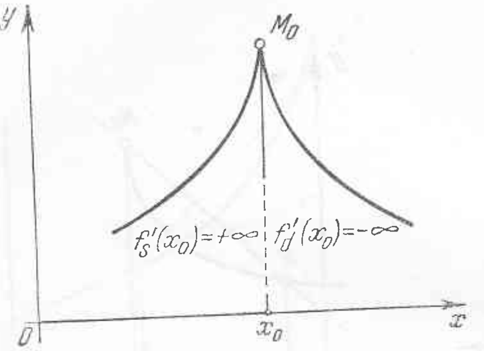


Fig. 86

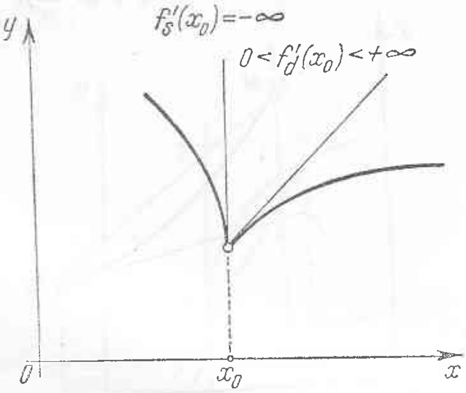


Fig. 87

Dacă funcţia f are în punctul x_0 derivate laterale diferite, şi cel puţin una din ele este *finită*, cele două semitangente laterale nu sînt nici suprapuse, nici în prelungire. În acest caz, punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numeşte *punct unghiular* al graficului (fig. 87).

4. Derivata pe un interval

D e f i n i ţ i e . Se spune că funcţia $f: I \to R$ este derivabilă pe o submulţime $A \subset I$, dacă este derivabilă în fiecare punct din A.

Dacă funcţia f este derivabilă pe tot domeniul ei de definiţie, se spune uneori, mai simplu, că este derivabilă, fără a mai specifica mulţimea pe care are această proprietate.

P r o p o z i ţ i e . Dacă funcţia $f: I \to R$ este derivabilă pe I, atunci f este continuă pe I.

Într-adevăr, f este derivabilă în fiecare punct din I, deci este continuă în fiecare punct din I.

O b s e r v a ţ i e. Există funcţii continue pe un interval care nu sînt derivabile în nici un punct din acest interval*.

Mulţimea funcţiilor derivabile pe un interval este conţinută în mulţimea funcţiilor continue pe acest interval.

---

* Un astfel de exemplu a fost dat, pentru prima oară, de K. Weierstrass. Ulterior s-au dat exemple mai simple (a se vedea M. N. Analiză mat. II, p. 353)

Fie funcţia $f: I \to R$ derivabilă pe I. Fiecărui punct $x \in I$ vom face să-i corespundă numărul $f'(x)$.

Obţinem astfel o funcţie $x \to f'(x)$ definită pe I, care se numeşte *funcţia derivată* a lui f sau, mai simplu, derivata lui f. Derivata funcţiei f se notează f'. Se folosesc de asemenea notaţiile $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ şi $\mathrm{D}f$.

Trebuie făcută distincţie între *derivata funcţiei f în punctul x*, care este un *număr*, $f'(x)$, şi *derivata* funcţiei f, care este o *funcţie*, f'. Derivata $f'(x_0)$ se mai notează adesea $(f'(x))_{x=x_0}$ sau $\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}$.

Dacă punem $y = f(x)$, se folosesc notaţiile $y' = f'(x)$ sau $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ sau încă $y'_x = f'_x(x)$.

5. Exemple de funcţii derivabile

1) Funcţia constantă $f(x) \equiv c$ definită pe R este derivabilă şi $f'(x) \equiv 0$. Scriem aceasta astfel:

$$c' = 0.$$

Într-adevăr, fie $x_0 \in R$ oarecare. Să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \qquad (x \neq x_0).$$

Atunci: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, adică $f'(x_0) = 0$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că $f'(x) = 0$, oricare ar fi $x \in R$.

O b s e r v a ţ i e. Prin notaţia c' *nu* trebuie să se înţeleagă derivata *numărului c*, ci a funcţiei constante care are în toate punctele valoarea c. Noţiunea de derivată nu se ataşează numerelor, ci numai funcţiilor.

2) Funcţia identică $f(x) = x$ definită pe R este derivabilă şi $f'(x) \equiv 1$. Scriem astfel:

$$x' = 1.$$

Într-adevăr, fie $x_0 \in R$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$ avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \equiv 1,$$

deci: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$, adică $f'(x_0) = 1$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă $f'(x) = 1$, oricare ar fi $x \in R$.

O b s e r v a ţ i e. Prin notaţia x' *nu* trebuie să se înţeleagă derivata argumentului, ci a funcţiei identice. Noţiunea de derivată nu se ataşează argumentului, ci numai funcţiilor.

3) Funcţia $f(x) = x^n$, $n \in N$, definită pe R, este derivabilă şi $f'(x) = nx^{n-1}$. Scriem:

$$(x^n)' = n\, x^{n-1}.$$

Fie $x_0 \in R$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$ avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + x\,x_0^{n-2} + x_0^{n-1}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$, $k \in N$ avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x^{n-1} + \lim_{x \to x_0} x^{n-2} \cdot x_0 + \lim_{x \to x_0} x^{n-3} \cdot x_0^2 + \ldots \lim_{x \to x_0} x \cdot x_0^{n-2} +$$

$$+ x_0^{n-1} = x_0^{n-1} + x_0^{n-2} \cdot x_0 + x_0^{n-3} \cdot x_0^2 + \ldots + x_0 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1} =$$

$$= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{n \text{ ori}} = n x_0^{n-1},$$

adică $f'(x_0) = n\, x_0^{n-1}$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă $f'(x) = nx^{n-1}$ pentru orice $x \in R$.

4) Funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ definită pe $[0, +\infty)$ este derivabilă pe semidreapta deschisă $(0, +\infty)$ şi pentru $x > 0$ avem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Scriem:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Fie $x_0 > 0$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$, $x \geqslant 0$, avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

Dar $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \neq 0$, deci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

adică $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Deoarece $x_0 > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

O b s e r v a ţ i e. În punctul 0, funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ nu este derivabilă, dar derivata sa în acest punct există şi este $+\infty$, $f'(0) = +\infty$.

Într-adevăr, pentru $x > 0$, avem

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Deoarece $\sqrt{x}>0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, adică:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty, \text{ deci } f'(0)=+\infty.$$

5) Funcţia $f(x)=\sin x$ definită pe R este derivabilă şi $f'(x)=\cos x$. Scriem

$$(\sin x)'=\cos x.$$

Fie $x_0 \in R$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$ avem

$$R(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}.$$

Dar $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{2}=0$, deci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

Pe de altă parte, funcţia $\cos\frac{x+x_0}{2}$ este continuă ca funcţie compusă a funcţiilor continue $\cos u$ şi $\frac{x+x_0}{2}$, deci

$$\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}=\cos\frac{x_0+x_0}{2}=\cos\frac{2x_0}{2}=\cos x_0.$$

Aşadar

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}=\cos x_0,$$

adică $f'(x_0)=\cos x_0$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că $f'(x)=\cos x$ oricare ar fi $x \in R$.

6) Funcţia $f(x) = \cos x$ definită pe R este derivabilă şi $f'(x) = -\sin x$. Scriem :

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Fie $x_0 \in R$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$ avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \frac{-2\sin\frac{x - x_0}{2}\sin\frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= -\frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \sin\frac{x + x_0}{2}.$$

Deoarece funcţia compusă $\sin\frac{x + x_0}{2}$ este continuă, avem

$$\lim_{x \to x_0} \sin\frac{x + x_0}{2} = \sin\frac{x_0 + x_0}{2} = \sin\frac{2x_0}{2} = \sin x_0.$$

Atunci :

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\lim_{x \to x_0}\frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \to x_0}\sin\frac{x + x_0}{2} = -\sin x_0,$$

adică $f'(x_0) = -\sin x_0$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că $f'(x) = -\sin x$, oricare ar fi $x \in R$.

7) Funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe semidreapta $(0, +\infty)$ este derivabilă şi $f'(x) = \frac{1}{x}$. Scriem :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

Fie $x_0 > 0$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$, $x > 0$, avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\ln\frac{x}{x_0}.$$

Dar: $\frac{x}{x_0} = 1 - 1 + \frac{x}{x_0} = 1 + \frac{x - x_0}{x_0}$, deci

$$R(x) = \frac{1}{x - x_0}\ln\frac{x}{x_0} = \frac{1}{x_0}\frac{x_0}{x - x_0}\ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0}\ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x - x_0}}.$$

Avem $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x_0} = 0$, deci

$$\lim_{x\to x_0}\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \lim_{u\to 0}(1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$$

şi deoarece funcţia logaritmică este continuă,

$$\lim_{x\to x_0} \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \ln \lim_{x\to x_0}\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \ln e = 1.$$

Aşadar:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{x\to x_0} \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \frac{1}{x_0},$$

adică $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Deoarece $x_0 > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Observaţie. Funcţia $f(x) = \ln x$ este derivabilă pe semidreapta $(0, +\infty)$, deci derivata sa $f'(x) = \frac{1}{x}$ este definită tot pe semidreapta $(0, +\infty)$, deşi operaţia de împărţire cu x, prin care se calculează derivata în punctul $x > 0$, are sens şi pentru $x < 0$.

Aşadar, nu trebuie confundată derivata $f'(x) = \frac{1}{x}$, care este definită pe semidreapta $(0, +\infty)$ cu funcţia elementară $h(x) = \frac{1}{x}$ al cărei domeniu maxim de definiţie este $R - \{0\}$. Funcţiile f' şi h coincid pe semidreapta $(0, +\infty)$.

§ 3. Operaţii cu funcţii derivabile

Ca şi pentru funcţiile continue, operaţiile algebrice de adunare, înmulţire şi înmulţire cu scalari, operaţia de compunere şi, cu anumite restricţii, operaţia de inversare, aplicate funcţiilor derivabile, conduc tot la funcţii derivabile.

1. Operaţii algebrice

Propoziţia 1. Dacă funcţiile f şi g definite pe un interval I sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcţia $f + g$ este derivabilă în x_0 şi

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Să notăm $h = f + g$. Pentru fiecare $x \neq x_0$ din I, avem

$$R(x) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Deoarece f şi g sînt derivabile în x_0, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Rezultă că şi raportul $R(x)$ are limită (finită) în x_0, deci funcţia h este derivabilă în x_0 şi

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0),$$

adică

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Observaţie. Propoziţia rămîne adevărată şi dacă una sau ambele derivate $f'(x_0)$ şi $g'(x_0)$ sînt infinite, dacă $f'(x_0) + g'(x_0)$ are sens (cazul exceptat este cel în care una din derivate este $+\infty$, iar cealaltă $-\infty$).

Corolar. Dacă funcţiile f şi g sînt derivabile pe un interval I, atunci $f + g$ este derivabilă pe I şi

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Se demonstrează prin recurenţă că dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt n funcţii definite pe I şi derivabile pe I (sau într-un punct $x_0 \in I$), atunci suma lor este de asemenea derivabilă pe I (respectiv în x_0) şi

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'$$

sau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i'.$$

Propoziţia 2. Dacă funcţia $f: I \to R$ este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcţia cf este derivabilă în x_0, oricare ar fi numărul c, şi

$$(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

Să notăm $h = cf$. Pentru fiecare $x \neq x_0$ din I avem

$$R(x) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Deoarece, prin ipoteză, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ rezultă că raportul $R(x)$ are limită (finită) în x_0, deci funcția h este derivabilă în x_0, și

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c f'(x_0),$$

adică $(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

Observație. Propoziția rămîne adevărată și dacă $f'(x_0)$ este infinită. În acest caz, dacă $c = 0$, avem $(cf)'(x_0) = 0$.

Corolar. Dacă funcția f este derivabilă pe I, atunci funcția cf este derivabilă pe I și

$$(cf)' = c \cdot f'.$$

Luînd în acest corolar $c = -1$, rezultă că:

Dacă f este derivabilă pe I (sau în x_0) atunci funcția $-f$ este derivabilă pe I (respectiv în x_0) și

$$(-f)' = -f'.$$

Folosind această ultimă proprietate și propoziția 1, rezultă că:

Dacă funcțiile f și g sînt derivabile pe I (sau în x_0) atunci funcția $f - g$ este derivabilă pe I (respectiv în x_0) și

$$(f - g)' = f' - g'.$$

Într-adevăr, $f - g = f + (-g)$ și deoarece g este derivabilă, $(-g)$ este de asemenea derivabilă, și deci și suma $f + (-g)$ este derivabilă. Atunci

$$(f - g)' = (f + (-g))' = f' + (-g)' = f' + (-g') = f' - g'.$$

Dacă una sau ambele derivate $f'(x_0)$ și $g'(x_0)$ sînt infinite și dacă $f'(x_0) - g'(x_0)$ are sens, atunci $f' - g'$ are derivată în x_0 și $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

Observații. 1° Mulțimea $\mathfrak{D}(I, x_0)$ a funcțiilor definite pe I și derivabile în $x_0 \in I$ este un *spațiu vectorial*. Operația de derivare în punctul x_0 face să corespundă fiecărei funcții $f \in \mathfrak{D}(I, x_0)$, numărul $f'(x_0)$, adică operația de derivare este o funcțională $L : f \to f'(x_0)$ definită pe spațiul vectorial $\mathfrak{D}(I, x_0)$. Această operație este o funcțională *liniară* (aditivă și omogenă)

$$L(f + g) = (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) = L(f) + L(g);$$

$$L(\alpha f) = (\alpha f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) = \alpha L(f).$$

2° Mulțimea $\mathfrak{D}(I)$ a funcțiilor definite și derivabile pe I este un *spațiu vectorial*. Să notăm cu $\mathfrak{D}'(I)$ mulțimea derivatelor funcțiilor din $\mathfrak{D}(I)$. Mulțimea $\mathfrak{D}'(I)$ este de asemenea un spațiu vectorial.

Operația de derivare D face să corespundă fiecărei funcții $f \in \mathfrak{D}(I)$, derivata sa $f' \in \mathfrak{D}'(I)$:

$$\mathrm{D} : f \to f' \text{ sau } \mathrm{D}f = f'.$$

Operația de derivare este o *operație liniară* definită pe spațiul vectorial $\mathscr{D}(I)$ cu valori în spațiul vectorial $\mathscr{D}'(I)$:

$$D(f + g) = Df + Dg;$$

$$D(\alpha f) = \alpha Df.$$

Exemple. 1) Funcția $f(x) = |x|$ definită pe R este derivabilă pe $R - \{0\}$ și $(|x|)' = \begin{cases} -1 \text{ dacă } x < 0 \\ 1 \text{ dacă } x > 0 \end{cases}.$

Într-adevăr, pentru $x < 0$ avem $f(x) = |x| = -x$, deci $f'(x) = (-x)' = -x' = -1$, iar pentru $x > 0$, avem $f(x) = |x| = x$, deci $f'(x) = x' = 1$.

2) $$(ax^n)' = a(x^n)' = a \cdot nx^{n-1} = na\, x^{n-1}.$$

3) Un polimon $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ definit pe R este o funcție derivabilă și

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

4) Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, funcția $f(x) = \log_a x$ definită pe $(0, +\infty)$ este derivabilă și

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Într-adevăr, dacă $x > 0$, $\ln x = \ln a \log_a x$, deci $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$ și deci $(\log_a x)' = = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$.

P r o p o z i ț i a 3. Dacă funcțiile f și g definite pe I sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcția fg este derivabilă în x_0 și

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

Să notăm $h = fg$. Pentru fiecare $x \neq x_0$ din I, avem

$$R(x) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)\, g(x) - f(x_0)\, g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x)\, g(x) - f(x_0)\, g(x) + f(x_0)\, g(x) - f(x_0)\, g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{(f(x) - f(x_0))\, g(x) + f(x_0)\,(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) +$$

$$+ f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Prin ipoteză avem $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Pe de altă parte, funcţia g fiind derivabilă în x_0, este continuă în x_0, deci $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Aşadar, toţi termenii din ultimul membru al şirului precedent de egalităţi au limite (finite) în x_0, iar $f(x_0)$ este un număr. Rezultă că şi raportul $R(x)$ are limită (finită) în x_0, adică h este derivabilă în x_0 şi

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

adică:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Corolar. Dacă funcţiile f şi g sînt derivabile pe I, atunci funcţia fg este derivabilă pe I şi

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Prin recurenţă se demonstrează că *dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt n funcţii derivabile pe I (sau în x_0) atunci produsul lor este de asemenea o funcţie derivabilă pe I (respectiv în x_0)* şi

$$(f_1 f_2 \ldots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 f_2 \ldots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \ldots f_n.$$

Pentru $n = 2$ formula a fost deja demonstrată. S-o presupunem adevărată pentru n funcţii, şi să arătăm atunci că este adevărată şi pentru $n + 1$ funcţii:

$$(f_1 f_2 \ldots f_n f_{n+1})' = (f_1 f_2 \ldots f_n)' f_{n+1} + (f_1 f_2 \ldots f_n) f_{n+1}' =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_1 f_2 \ldots f_{i-1} f_i' \cdot f_{i+1} \ldots f_n f_{n+1} + f_1 f_2 \ldots f_n f_{n+1}' =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} f_1 f_2 \ldots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \ldots f_n f_{n+1}.$$

Conform principiului inducţiei complete, formula este adevărată pentru orice n.

Dacă cele n funcţii sînt egale cu o funcţie f derivabilă pe I, deducem că funcţia f^n este derivabilă pe I şi

$$(f^n)' = nf^{n-1} f'.$$

În particular, deoarece $x' = 1$, avem

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Acest rezultat va fi obţinut de asemenea mai departe din teorema relativă la derivarea funcţiilor compuse.

Observații. 1° Mulțimea $\mathcal{D}(I, x_0)$ este o *algebră*. Operația de derivare în punctul x_0, $L(f) = f'(x_0)$ *nu* este însă multiplicativă.

2° Mulțimea $\mathcal{D}(I)$ este o algebră. Operația de derivare $D(f) = f'$ *nu* este multiplicativă.

Propoziția 4. Dacă funcțiile f și g definite pe I sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$, și dacă $g(x_0) \neq 0$, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Să notăm $h = \frac{f}{g}$. Să observăm mai întîi că funcția g este continuă în x_0 (fiind derivabilă în x_0); deoarece $g(x_0) \neq 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V \cap I$. Așadar, funcția $\frac{f}{g}$ este definită cel puțin pe intervalul $V \cap I$ care conține pe x_0. Pentru orice $x \neq x_0$ din $V \cap I$ avem

$$R(x) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)\,g(x)\,g(x_0)} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\,g(x_0)} \cdot \frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\,g(x_0)} \cdot \frac{(f(x) - f(x_0))\,g(x_0) - f(x_0)\,(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\,g(x_0)}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,g(x_0) - f(x_0)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right].$$

Deoarece g este continuă în x_0, avem $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$. Deoarece f și g sînt derivabile în x_0, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0);$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Ținînd seama de faptul că $f(x_0)$ și $g(x_0)$ sînt numere, toți termenii din ultimul membru al șirului de egalități de mai sus au limite (finite) în x_0. Rezultă că și $R(x)$ are limită (finită) în x_0, adică funcția h este derivabilă în x_0, și

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \cdot g(x_0)}\left[\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,g(x_0) -\right.$$

$$\left. - f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] = \frac{1}{(g(x_0))^2}\,[f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)],$$

adică

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Corolar. Dacă f şi g sînt derivabile pe I, atunci funcţia $\frac{f}{g}$ este derivabilă pe domeniul ei de definiţie (format din toate punctele $x \in I$ în care $g(x) \neq 0$) şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Exemple. 1) O funcţie raţională $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ este derivabilă pe tot domeniul ei de definiţie (ca raport de polinoame care sînt derivabile), adică în toate punctele x în care $Q(x) \neq 0$. Derivata se calculează după regula de derivare a cîtului, dată în propoziţia 4.

2) Funcţia $f(x) = \operatorname{tg} x$ este derivabilă pe tot domeniul său de definiţie (format din punctele $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k întreg) şi $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Scriem

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Într-adevăr, dacă $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, atunci $\cos x \neq 0$ şi $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) Funcţia $f(x) = \operatorname{ctg} x$ este derivabilă pe tot domeniul său de definiţie (format din punctele $x \neq k\pi$, k întreg) şi

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

Scriem

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Într-adevăr, dacă $x \neq k\pi$, atunci $\sin x \neq 0$ şi

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4) Funcţia $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in N$, definită pe $R - \{0\}$, este derivabilă şi

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \text{ sau } (x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

Într-adevăr, pentru $x \neq 0$, avem

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1(x^n)'}{x^{2n}} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

O b s e r v a ţ i e. Pentru orice k *întreg* avem

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Se va arăta mai departe că această formulă este adevărată pentru orice exponent *real*.

2. Derivabilitatea funcţiilor compuse

Fie funcţiile $u : I \to J$ şi $\varphi : J \to R$, I şi J fiind intervale. Să considerăm funcţia compusă $f = \varphi \circ u$ definită pentru orice $x \in I$ prin egalitatea

$$f(x) = \varphi(u(x)).$$

T e o r e m ă . Dacă funcţia u este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ şi funcţia φ este derivabilă în punctul corespunzător $y_0 = u(x_0) \in J$, atunci funcţia compusă $f = \varphi \circ u$ este derivabilă în punctul x_0 şi

$$f'(x_0) = \varphi'(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

Prin ipoteză avem

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \varphi'(y_0).$$

Să considerăm funcţia $\alpha(y)$ definită pentru $y \in J$ astfel:

$$\alpha(y) = \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \varphi'(y_0) \text{ dacă } y \neq y_0\,;\ \alpha(y_0) = 0.$$

Avem:

$$\lim_{y \to y_0} \alpha(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \varphi'(y_0) = \varphi'(y_0) - \varphi'(y_0) = 0 = \alpha(y_0),$$

deci funcţia $\alpha(y)$ este *continuă* în punctul y_0 şi are, evident, valoarea 0 în acest punct.

Din egalitatea prin care se defineşte funcţia $\alpha(y)$, deducem pentru $y \neq y_0$:

$$\varphi(y) - \varphi(y_0) = [\varphi'(y_0) + \alpha(y)]\,(y - y_0).$$

Această egalitate este adevărată şi pentru $y = y_0$, deoarece ambii membri sînt egali cu 0 în acest caz. Aşadar egalitatea este adevărată pentru orice $y \in J$.

În particular, pentru orice $x \in I$ avem $u(x) \in J$ şi deci egalitatea precedentă este adevărată, dacă o scriem pentru $u(x)$ în loc de y, oricare ar fi $x \in I$:

$$\varphi(u(x)) - \varphi(y_0) = [\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))]\,(u(x) - y_0) =$$
$$= [\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))](u(x) - u(x_0)).$$

Să observăm că funcţia u este *continuă* în punctul x_0 (fiind derivabilă în acest punct), iar funcţia $\alpha(y)$ este continuă în punctul corespunzător $y_0 = u(x_0)$. Rezultă că funcţia compusă $\alpha(u(x))$ este continuă în punctul x_0 şi deci:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(u(x)) = \alpha(u(x_0)) = \alpha(y_0) = 0.$$

Să formăm acum raportul $R(x)$ pentru funcţia $f(x) = \varphi(u(x))$. Pentru orice $x \neq x_0$, avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi(u(x)) - \varphi(u(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \frac{[\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))](u(x) - u(x_0))}{x - x_0} = [\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))]\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Termenii din ultimul membru al şirului de egalităţi au toţi limite (finite) în x_0: într-adevăr, $\varphi'(y_0)$ este număr,

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(u(x)) = 0 \text{ şi } \lim_{x\to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0).$$

Rezultă că şi raportul iniţial are limită (finită) în x_0, deci funcţia f este derivabilă în x_0 şi

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = [\varphi'(y_0) + \lim_{x\to x_0} \alpha(u(x))] \lim_{x\to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= [\varphi'(y_0) + 0]u'(x_0) = \varphi'(y_0)\cdot u'(x_0) = \varphi'(u(x_0))\cdot u'(x_0).$$

Corolar. Dacă funcţia u este derivabilă pe I şi funcţia φ este derivabilă pe J, atunci funcţia compusă $f = \varphi\circ u$ este derivabilă pe I şi

$$f'(x) = \varphi'(u(x))\cdot u'(x),\ x \in I.$$

Observaţie. Teorema precedentă rămîne valabilă şi în cazul compunerii mai multor funcţii.

Dacă în egalitatea $f(x) = \varphi(u(x))$ pentru $x \in I$, prin care se defineşte funcţia compusă $f = \varphi\circ u$, nu se mai pune în evidenţă argumentul x, se scrie

$$f = \varphi(u).$$

Atunci $f' = [\varphi(u)]'$.

Dacă în egalitatea $f'(x) = \varphi'(u(x))\cdot u'(x)$ pentru $x \in I$, nu se mai pune în evidenţă argumentul x, se scrie

$$f' = \varphi'(u)\cdot u'$$

şi deoarece $f' = [\varphi(u)]'$, obţinem egalitatea

$$[\varphi(u)]' = \varphi'(u)\cdot u'.$$

Această formulă este foarte utilă pentru calculul derivatelor funcţiilor compuse. Nu trebuie însă pierdut din vedere că în această formulă u nu este variabila independentă a funcţiei φ, ci este o funcţie derivabilă.

Semnificaţia precisă a ultimei egalităţi este dată de egalitatea următoare:

$$(\varphi \circ u)' = (\varphi' \circ u) \cdot u'.$$

Aplicînd formula de derivare a funcţiilor compuse în cazul funcţiilor elementare, se obţin următoarele reguli de derivare (în care u este o funcţie derivabilă pe un interval I sau pe o reuniune de intervale):

1) $(u^n)' = n\, u^{n-1} u'$ $\quad n$ *întreg*

(dacă $n \leqslant 0$, este necesar ca $u(x) \neq 0$ pentru $x \in I$).

2) $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\quad (u(x) > 0$ pentru $x \in I)$,

3) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

4) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

5) $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$, $\quad \left(u(x) \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right.$ pentru $\left.x \in I\right)$.

6) $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$, $\quad (u(x) \neq k\pi$ pentru $x \in I)$.

7) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $\quad (u(x) > 0$ pentru $x \in I)$.

8) $(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$, $\quad (x \neq 0)$.

Ultima regulă se obţine astfel:

$$(\ln |x|)' = \frac{(|x|)'}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{-1}{|x|} = \dfrac{1}{-|x|} = \dfrac{1}{x} & \text{dacă } x < 0, \\[2ex] \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x} & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

O b s e r v a ţ i e. Dacă punem $y = \varphi(u)$, $u = u(x)$ şi $y = f(x)$, atunci formula de derivare a funcţiei compuse $y = f(x)$ se scrie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

În această egalitate, membrul stîng se obţine din membrul drept — formal — prin simplificare cu du.

3. Derivabilitatea funcţiilor inverse

Fie f o aplicaţie *strict monotonă* a unui interval I pe un interval J:

$$f: I \to J, \quad f(I) = J.$$

Fie $\varphi = \overset{-1}{f}$ funcţia inversă a lui f:

$$\varphi : J \to I.$$

Ştim că $y = f(x)$ dacă şi numai dacă $x = \varphi(y)$, $x \in I$, $y \in J$.

Teoremă. Dacă funcţia f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ şi dacă $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia sa inversă $\varphi = \overset{-1}{f}$ este derivabilă în punctul corespunzător $y_0 = f(x_0) \in J$ şi

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Să observăm mai întîi că f şi $\overset{-1}{f}$ sînt continue, deoarece ambele sînt strict monotone şi mulţimea valorilor fiecăreia este un interval.

Prin ipoteză avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0$$

deci, pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$, avem

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0).$$

Să formăm acum raportul $R(y)$ pentru funcţia φ, $y \neq y_0$,

$$R(y) = \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0}.$$

Pentru ca să arătăm că acest raport are în punctul y_0 limita $\frac{1}{f'(x_0)}$, este suficient să arătăm că pentru orice şir $y_n \to y_0$, $y_n \in J$, $y_n \neq y_0$, avem

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Fie deci un şir oarecare $y_n \to y_0$, $y_n \in J$, $y_n \neq y_0$.

Deoarece $y \in J = f(I)$, pentru fiecare $n \in N$ există un punct $x_n \in I$ astfel ca

$$y_n = f(x_n) \text{ deci } x_n = \varphi(y_n).$$

Deoarece $y_n \neq y_0$, iar funcţia φ este strict monotonă avem

$$\varphi(y_n) \neq \varphi(y_0) \text{ adică } x_n \neq x_0, \text{ sau } x_n - x_0 \neq 0.$$

Deoarece φ este continuă în y_0 şi $y_n \to y_0$, avem

$$\varphi(y_n) \to \varphi(y_0) \text{ adică } x_n \to x_0.$$

Am obţinut astfel un şir $x_n \to x_0$, $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$ şi deci

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) \neq 0.$$

Atunci

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

(s-a împărţit şi numărătorul şi numitorul cu $x_n - x_0 \neq 0$).

Aşadar

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

deci funcţia φ este derivabilă în punctul y_0 şi

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Corolar. Dacă funcţia f este derivabilă pe I şi $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcţia sa inversă $\varphi = \overset{-1}{f}$ este derivabilă pe J şi

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ sau } \varphi'(y) \cdot f'(x) = 1,$$

unde x şi y sînt în relaţiile $y = f(x)$ şi $x = \varphi(y)$.

Interpretarea geometrică. Graficele funcţiilor f şi φ sînt simetrice faţă de prima bisectoare.

Punctul (x_0, y_0) se află pe graficul lui f, iar punctul (y_0, x_0) se află pe graficul lui φ, şi aceste două puncte sînt simetrice faţă de prima bisectoare.

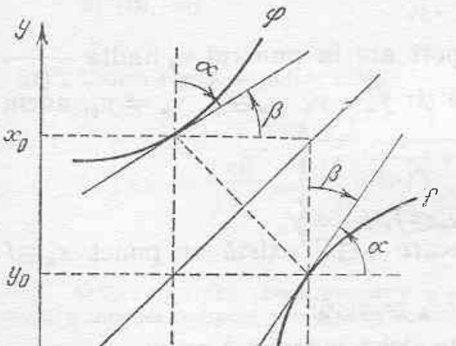


Fig. 88

Faptul că funcţia f este derivabilă în x_0 înseamnă că graficul său admite în punctul (x_0, y_0) tangentă, cu coeficientul unghiular $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.

Faptul că funcţia φ este derivabilă în y_0 înseamnă că graficul său admite în punctul (y_0, x_0) tangentă, cu coeficientul unghiular $\operatorname{tg} \beta = \varphi'(y_0)$.

Din egalitatea $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ deducem $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$, adică $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Observaţie. Dacă funcţia f are derivata nulă $f'(x_0) = 0$ într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcţia sa inversă φ nu este derivabilă în punctul corespunzător, $y_0 = f(x_0)$; ea are însă derivata infinită, şi anume $\varphi'(y_0) = +\infty$ dacă funcţia f (ca şi φ) este strict crescătoare (fig. 89), şi $\varphi'(y_0) = -\infty$ dacă funcţia f este strict descrescătoare (fig. 90).

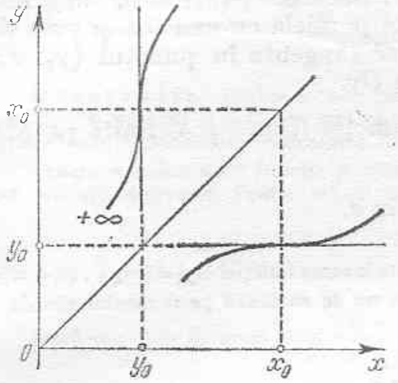


Fig. 89

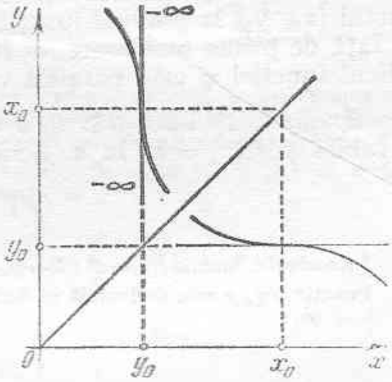


Fig. 90

Într-adevăr, dacă f este strict crescătore, atunci $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I. Cu notaţiile din teorema precedentă, dacă $y_n \to y_0$, $y \in J$, $y_n \neq y_0$, atunci

$$\frac{\varphi(y_n)-\varphi(y_0)}{y_n-y_0} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}}$$

şi deoarece $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} > 0$ şi $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \to 0$,

rezultă că

$$\frac{1}{\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}} \to +\infty$$

adică:

$$\frac{\varphi(y_n)-\varphi(y_0)}{y_n-y_0} \to +\infty,$$

de unde

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0} = +\infty.$$

Dacă f este strict descrescătoare, atunci

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I$$

şi, urmînd un raţionament asemănător cu cel precedent, deducem

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = -\infty.$$

Explicaţia geometrică este simplă: deoarece $f'(x_0) = 0$, tangenta în punctul (x_0, y_0) la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox, şi prin simetrie faţă de prima bisectoare, deducem că tangenta în punctul (y_0, x_0) la graficul funcţiei φ este paralelă cu axa Oy.

Exemple. 1) Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, funcţia $f(x) = a^x$ definită pe R este derivabilă şi $f'(x) = a^x \ln a$. Scriem.

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Într-adevăr, funcţia $f(x) = a^x : R \to (0, +\infty)$ este inversa funcţiei $\varphi(y) = \log_a y : (0, +\infty) \to R$. Funcţia $\log_a y$ este derivabilă şi derivata sa nu se anulează pe domeniul său de definiţie $(0, +\infty)$:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y \ln a}.$$

Rezultă atunci că funcţia $f(x) = a^x$ este de asemenea derivabilă pe domeniul său de definiţie R, şi

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = y \ln a$$

unde $x = \log_a y$ şi $y = a^x$, deci $f'(x) = a^x \ln a$.

În particular, pentru $a = e$, avem $\ln e = 1$, deci

$$(e^x)' = e^x.$$

Observaţie. Pentru $a = 1$, avem $f(x) = 1^x \equiv 1$, deci $f'(x) \equiv 0$, iar $\ln 1 = 0$. Formula de derivare a funcţiei exponenţiale este deci valabilă pentru orice $a > 0$.

2) Funcţia $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in R$, definită pe $(0, +\infty)$, este derivabilă şi $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Scriem:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Într-adevăr, pentru $x > 0$, avem

$$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x},$$

deci funcţia x^α este o funcţie compusă de funcţii derivabile: funcţia exponenţială e^u şi funcţia logaritmică $\alpha \ln x$. Rezultă că şi funcţia putere x^α este derivabilă, şi derivînd după regula de derivare a funcţiilor compuse, obţinem:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\ln x^\alpha} \cdot \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

În particular, pentru $\alpha = \frac{1}{n}$, deducem că funcţia $f(x) = \sqrt[n]{x}$ definită pe $(0, +\infty)$ este derivabilă şi

$$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

O b s e r v a ţ i e. Pentru $\alpha > 0$, funcţia $f(x) = x^\alpha$ este definită pe semidreapta închisă $[0, +\infty)$. În punctul $x = 0$ nu mai putem aplica procedeul anterior pentru a vedea dacă funcţia x^α este derivabilă în 0, deoarece funcţia $\ln x$ nu este definită în punctul $x = 0$.

Pentru a vedea dacă funcţia putere este derivabilă în acest caz în punctul 0, folosim direct definiţia derivatei. Pentru $x > 0$ formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^\alpha - 0^\alpha}{x - 0} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}.$$

Dacă $\alpha - 1 > 0$, avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1} = 0$, deci:

dacă $\alpha > 1$, funcţia $f(x) = x^\alpha$ este derivabilă şi în punctul 0 şi $f'(0) = 0 = \alpha\, 0^{\alpha-1}$, adică derivata se obţine în acest caz după aceeaşi regulă ca şi în punctele $x > 0$.

Dacă $\alpha - 1 < 0$ atunci $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{1-\alpha}} = +\infty$, adică $f'(0) = +\infty$, deci:

dacă $0 < \alpha < 1$, funcţia $f(x) = x^\alpha$ *nu* este derivabilă în punctul 0, dar are o derivată egală cu $+\infty$ în 0.

Dacă $\alpha = 1$, avem $f(x) = x^\alpha = x$, deci $f'(x) \equiv 1$, şi în particular $f'(0) = 1$. În acest caz, derivata $f'(0)$ *nu* se mai poate obţine din formula $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$, făcînd $\alpha = 1$ şi $x = 0$.

3) Dacă funcţiile u şi v sînt derivabile pe un interval I şi dacă $u(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcţia u^v este derivabilă pe I şi

$$(u^v)' = v\, u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

Să scriem, în adevăr,

$$u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$$

($\ln u$ are sens deoarece $u(x) > 0$ pentru orice $x \in I$).

Funcţia $e^{v \ln u}$ este o funcţie compusă de funcţii derivabile deci u^v este derivabilă şi

$$(u^v)' = (e^{v\ln u})' = e^{v \ln u}(v \ln u)' = e^{v \ln u}\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) = e^{\ln u^v}\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) =$$

$$= u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v v' \ln u + v\frac{u^v u'}{u} = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v\, u^{v-1} \cdot u'.$$

Funcţia u^v se derivează deci astfel: întîi se consideră că v este constant şi se derivează ca o putere, apoi se consideră că u este constant şi se derivează ca o exponenţială, şi se adună apoi cele două derivate.

Exemplu. $f(x) = x^x$ definită pe $(0, +\infty)$ este derivabilă şi

$$(x^x)' = x x^{x-1} x' + x^x \ln x \cdot x' = x x^{x-1} + x^x \ln x = x^x + x^x \ln x = x^x (1 + \ln x).$$

4) Funcţia $f(x) = \arcsin x$ definită pe $[-1, 1]$ este derivabilă pe intervalul deschis $(-1, 1)$ şi

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

În punctele -1 şi 1, funcţia arc sin nu este derivabilă, dar are derivată egală cu $+\infty$ în aceste puncte.

Într-adevăr, funcţia $f(x) = \arcsin x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este inversa funcţiei $\varphi(y) = \sin y : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, care este derivabilă pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi

$$\varphi'(y) = \cos y.$$

Avem:

$\varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ şi $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, deci în punctele corespunzătoare

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ şi } \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

funcţia sa inversă $f(x) = \arcsin x$ nu este derivabilă, dar are derivata $+\infty$ (fiind strict crescătoare).

În celelalte puncte $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, avem $\varphi'(y) = \cos y > 0$, deci în punctele corespunzătoare $x = \varphi(y) = \sin y$, $(-1 < x < 1)$, funcţia inversă $f(x) = \arcsin x$ este derivabilă şi

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(x)} \text{ sau } (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}.$$

Dar, deoarece pentru $\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ avem $\cos y > 0$, rezultă că

$$\cos y = \sqrt{\cos^2 y} = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

şi deci

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

5) Funcţia $f(x) = \arccos x$ definită pe $[-1, 1]$ este derivabilă pe intervalul deschis $(-1, 1)$ şi

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

În punctele -1 şi 1 funcţia arccos nu este derivabilă, dar are derivată egală cu $-\infty$ în aceste puncte.

Într-adevăr, funcţia $f(x) = \arccos x : [-1,1] \to [0, \pi)$ este inversa funcţiei $\varphi(y) = \cos y : [0, \pi) \to [-1, 1]$ care este derivabilă pe $[0, \pi]$ şi

$$\varphi'(y) = -\sin y.$$

Avem

$$\varphi'(0) = \sin 0 = 0 \text{ şi } \varphi'(\pi) = \sin \pi = 0,$$

deci în punctele corespunzătoare

$$\varphi(0) = \cos 0 = 1 \quad \text{şi} \quad \varphi(\pi) = \cos \pi = -1,$$

funcţia sa inversă $f(x) = \arccos x$ nu este derivabilă, dar are derivata $-\infty$ (fiind strict descrescătoare). În celelalte puncte $0 < y < \pi$ avem $\varphi'(y) = -\sin y < 0$, deci în punctele corespunzătoare $x = \varphi(y) = \cos y$, $(-1 < x < 1)$ funcţia inversă $f(x) = \arccos x$ este derivabilă şi

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \text{ sau } (\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y}.$$

Dar, deoarece pentru $0 < y < \pi$ avem $\sin y > 0$, rezultă că

$$\sin y = \sqrt{\sin^2 y} = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

şi deci

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

6) Funcţia $f(x) = \operatorname{arctg} x$ definită pe R este derivabilă pe domeniul său de definiţie şi

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Într-adevăr, funcţia $f(x) = \operatorname{arctg} x : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este inversa funcţiei $\varphi(y) = \operatorname{tg} y : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ care este derivabilă şi

$$\varphi'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y.$$

Deoarece $\varphi'(y) \neq 0$ pentru orice $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că funcţia inversă $f(x) = \operatorname{arctg} x$ este derivabilă pe R şi

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \text{ sau } (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y},$$

unde x şi y sînt în relaţia $x = \varphi(y) = \operatorname{tg} y$, deci

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

7) Funcţia $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ defintă pe R este derivabilă pe domeniul său de definiţie şi

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Într-adevăr, funcţia $f(x) = \operatorname{arcctg} x : R \to (0, \pi)$ este inversa funcţiei $\varphi(y) = \operatorname{ctg} y : (0, \pi) \to R$, care este derivabilă şi

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{\sin^2 y} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 y).$$

Deoarece $\varphi'(y) \neq 0$ pentru orice $y \in (0, \pi)$, rezultă că funcţia inversă $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ este derivabilă pe R şi

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{sau} \quad (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{-(1+\operatorname{ctg}^2 y)},$$

unde x şi y sînt în relaţia $x = \varphi(y) = \operatorname{ctg} y$, deci

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

8) Să punem $y = f(x)$, de unde $x = \varphi(y)$. Atunci formula de derivare a funcţiei inverse se scrie astfel:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{sau} \quad \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1.$$

În aceste egalităţi, unul din membri se obţine — formal — din celălalt prin operaţii algebrice obişnuite.

Această notaţie este adesea utilă pentru calculul derivatelor.

Să considerăm funcţiile $y = \varphi(t)$ şi $x = \psi(t)$ definite pe un interval I. Să presupunem că funcţia $x = \psi(t)$ este continuă şi strict monotonă, deci admite o funcţie inversă $t = \overset{-1}{\psi}(x)$ definită pe intervalul $J = \psi(I)$. Putem atunci considera funcţia compusă $y = \varphi(\overset{-1}{\psi}(x)) = f(x)$ definită pe J:

$$J \underset{\psi}{\overset{\overset{-1}{\psi}}{\rightleftarrows}} I \xrightarrow{\varphi} R.$$

Dacă $y = \varphi(t)$ şi $x = \psi(t)$ sînt derivabile în raport cu t pe intervalul I şi dacă derivata $\frac{dy}{dt}$ nu se anulează pe I, atunci funcţia $y = f(x)$ este derivabilă în raport cu x pe intervalul J şi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Fie $x_0 \in J$ şi $t_0 = \overset{-1}{\psi}(x_0) \in I$. Fie (x_n) un şir de puncte din J, $x_n \neq x_0$ şi $x_n \to x_0$. Pentru fiecare n să notăm $t_n = \overset{-1}{\psi}(x_n) \in I$. Avem $t_n \neq t_0$ deoarece $\overset{-1}{\psi}$ este strict monotonă, ca şi ψ. De asemenea, $t_n \to t_0$, deoarece $\overset{-1}{\psi}$ este continuă. Atunci

$$\frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{t_n - t_0} \to \varphi'(t_0), \quad \frac{\psi(t_n) - \psi(t_0)}{t_n - t_0} \to \psi'(t_0),$$

deci:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi(\overset{-1}{\psi}(x)) - \varphi(\overset{-1}{\psi}(x_0))}{x_n - x_0} = \frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{\psi(t_n) - \psi(t_0)} = \frac{\dfrac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{t_n - t_0}}{\dfrac{\psi(t_n) - \psi(t_0)}{t_n - t_0}} \to \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

Rezultă atunci că

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că

$$f'(x) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

unde $t = \overset{-1}{\psi}(x)$ sau $x = \psi(t)$, sau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

§ 4. Proprietăţi generale ale funcţiilor derivabile

1. Teorema lui Fermat

Fie funcţia $f : I \to R$ şi $x_0 \in I$.

Definiţie. Se spune că x_0 este un punct de maxim relativ (sau local) al funcţiei f, dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem

$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ pentru orice } x \in V \cap I.$$

Se spune că x_0 este un punct de minim relativ (sau local) al funcţiei f, dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem:

$$f(x_0) \leqslant f(x) \text{ pentru } x \in V \cap I.$$

Punctele de maxim şi de minim relativ ale funcţiei f se numesc *puncte de extrem* relativ (sau local) ale lui f.

Dacă x_0 este un punct de maxim (relativ) al funcţiei f, numărul $f(x_0)$ se numeşte *maxim* (relativ) *al funcţiei f*, iar punctul $(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numeşte *punct de maxim* (relativ) *al graficului*.

Dacă x_0 este un punct de minim (relativ) al funcţiei f, numărul $f(x_0)$ se numeşte *minim* (relativ) *al funcţiei f*, iar punctul $(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numeşte *punct de minim* (relativ) *al graficului*.

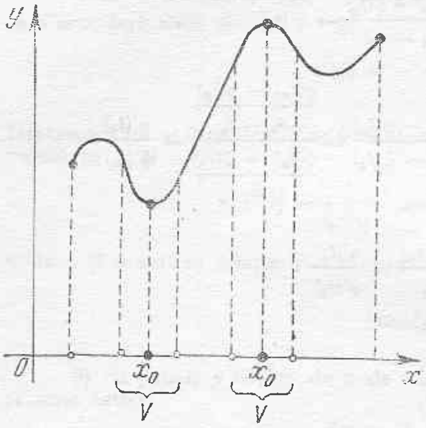


Fig. 91

Maximele şi minimele funcţiei f (adică valorile funcţiei în punctele sale de maxim sau de minim) se numesc *extreme* ale funcţiei, iar punctele de maxim sau de minim ale graficului se numesc *puncte de extrem ale graficului*.

Observaţii. 1° Un punct de maxim relativ nu este în mod necesar un punct de maxim absolut (în care funcţia are cea mai mare valoare pe întreg intervalul I).

Un punct de maxim absolut este însă în acelaşi timp şi un punct de maxim relativ.

De asemenea, un punct de minim relativ nu este în mod necesar un punct de minim absolut (în care funcţia are cea mai mică valoare pe întreg intervalul I). Un punct de minim absolut este însă şi un punct de minim relativ.

2° Este posibil ca un minim (relativ) al funcţiei să fie mai mare decît un maxim (relativ) al său.

În cele ce urmează va fi omis calificativul „relativ".

În legătură cu punctele de extrem ale unei funcţii, avem următoarea

Teoremă (Fermat). Dacă funcţia f are derivată într-un punct de extrem x_0 din interiorul intervalului I, atunci derivata sa este nulă în acest punct, $f'(x_0) = 0$.

Să presupunem că x_0 este un punct de *maxim* al funcţiei.

Aceasta înseamnă că există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem

$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ sau } f(x) - f(x_0) \leqslant 0 \text{ pentru orice } x \in V \cap I.$$

Prin ipoteză avem

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Deci pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \in V \cap I$, $x_n \neq x_0$, avem

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0).$$

În particular, luînd şirul $x_n \to x_0$, $x_n \in V \cap I$, astfel ca $x_n < x_0$, adică $x_n - x_0 < 0$, avem

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geqslant 0$$

(deoarece numitorul şi numărătorul sînt negativi) şi prin trecere la limită deducem că şi limita $f'(x_0)$ a şirului este pozitivă:

$$f'(x_0) \geqslant 0.$$

Luînd acum şirul $x_n \to x_0$, $x_n \in V \cap I$, astfel ca $x_n > x_0$, adică $x_n - x_0 > 0$, avem:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant 0$$

(deoarece numărătorul este $\leqslant 0$ şi numitorul este > 0).

Prin trecere la limită, deducem că şi limita $f'(x_0)$ a şirului este negativă

$$f'(x_0) \leqslant 0.$$

Din cele două inegalităţi obţinute, rezultă $f'(x_0) = 0$.

În cazul cînd x_0 este punct de minim, se procedează la fel, sau se observă că x_0 este un punct de maxim pentru funcţia $h = -f$, şi deci, conform primei părţi a demonstraţiei, avem $h'(x_0) = 0$, adică $f'(x_0) = 0$.

Observaţii. 1° Dacă punctul de extrem x_0 nu se află în interiorul intervalului I, ci la o extremitate a sa, este posibil ca funcţia să aibă derivată în x_0, dar derivata sa să *nu* se anuleze în acest punct.

Exemple. Funcţia $f(x) = x$ definită pe $I = [0, 1]$ are un minim în punctul 0 şi un maxim în punctul 1, dar derivata sa nu se anulează în aceste puncte. Într-adevăr, $f'(x) \equiv 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

2° Funcţia f poate avea un extrem într-un punct x_0 fără a avea derivată în acest punct.

Exemplu. Funcţia $f(x) = |x|$ are un minim în punctul 0, dar nu are derivată în acest punct.

3° Reciproca teoremei lui Fermat nu este, în general, adevărată. Derivata unei funcţii se poate anula într-un punct x_0 din interiorul intervalului, fără ca x_0 să fie punct de extrem.

Exemplu. $f(x) = x^3$ definită pe R. Avem $f'(x) = 3x^2$ şi $f'(0) = 0$, dar 0 nu este punct de extrem al acestei funcţii.

4° În teorema lui Fermat, condiţia ca domeniul de definiţie al funcţiei să fie *interval* nu este esenţială. Funcţia poate fi definită, de exemplu, şi pe o reuniune de intervale disjuncte.

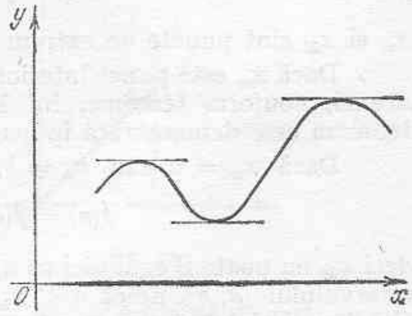


Fig. 92

Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat este următoarea:

Dacă graficul funcţiei admite tangentă într-un punct de extrem, care nu coincide cu extremităţile graficului, atunci tangenta în acest punct este paralelă cu axa Ox (fig. 92).

2. Teorema lui Rolle

Teorema lui Fermat dă condiții suficiente (dar nu și necesare) pentru ca derivata într-un punct să fie nulă.

O altă teoremă care dă condiții suficiente pentru ca derivata să se anuleze este

Teorema lui Rolle. Fie f o funcție definită pe un interval I și $a < b$ două puncte din I. Dacă:

1) funcția f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$;

2) funcția f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b);

3) $f(a) = f(b)$,

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, $a < c < b$, în care derivata se anulează, $f'(c) = 0$.

Dacă funcția f este constantă pe $[a, b]$, $f(x) \equiv \alpha$, avem $f'(x) \equiv 0$, deci, pentru *orice* punct $c \in (a, b)$ avem $f'(c) = 0$ și teorema este demonstrată în acest caz.

Să presupunem deci că funcția f nu este constantă.

Deoarece funcția f este continuă pe intervalul *compact* $[a, b]$, ea este mărginită și își atinge marginile pe acest interval. Există deci două puncte x_m și x_M în intervalul $[a, b]$, astfel încît să avem

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) \quad \text{pentru orice} \quad x \in [a, b].$$

În plus, deoarece f nu este constantă, avem

$$f(x_m) < f(x_M)$$

x_m și x_M sînt puncte de extrem ale funcției, pe intervalul $[a, b]$.

Dacă x_m este punct interior al acestui interval, adică dacă $a < x_m < b$ atunci, conform teoremei lui Fermat, avem $f'(x_m) = 0$ și luînd $c = x_m$ teorema este demonstrată în acest caz.

Dacă $x_m = a$ sau $x_m = b$, atunci

$$f(a) = f(b) = f(x_m) < f(x_M),$$

deci x_M nu poate fi egal nici cu a, nici cu b: așadar, x_M se află în interiorul intervalului $[a, b]$, adică $a < x_M < b$; conform teoremei lui Fermat, avem $f'(x_M) = 0$ și luînd $c = x_M$, teorema este demonstrată și în acest caz.

Așadar, în toate cazurile putem găsi un punct $c \in (a, b)$ astfel ca $f'(c) = 0$.

Interpretarea geometrică a teoremei lui Rolle este următoarea: Dacă graficul funcției f admite tangentă în fiecare punct (cu excepția, eventual, a extremităților) și dacă dreapta care unește extremitățile graficului este paralelă cu axa Ox, atunci există cel puţin un punct de pe grafic (care nu coincide cu extremităţile graficului) în care tangenta este de asemenea paralelă cu axa Ox (fig. 93).

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă una din cele trei condiţii ale teoremei nu este verificată, concluzia teoremei lui Rolle poate să nu mai fie adevărată.

Exemple. 1) Funcţia $f(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 \text{ dacă } x = 1 \end{cases}$

definită pe $[0, 1]$ este discontinuă numai în punctul 1, este derivabilă pe intervalul deschis $(0,1)$ şi anume $f'(x) \equiv 1$ pentru $x \in (0,1)$, şi are valori egale la capete, $f(0) = f(1) = 0$. Derivata nu se anulează în nici un punct din (a, b).

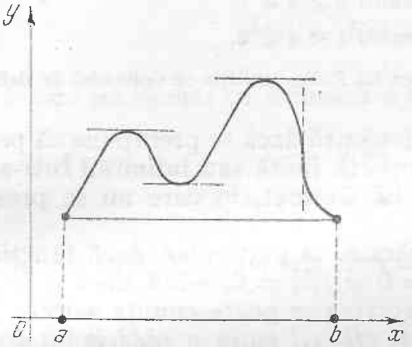


Fig. 93

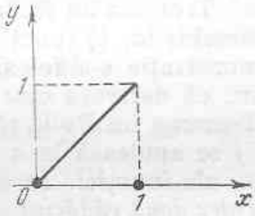


Fig. 94

2) Funcţia $f(x) = |x|$ definită pe $[-1,1]$ este continuă pe intervalul închis $[-1, 1]$, are valoari egale la capete, $f(-1) = |-1| = 1$, $f(1) = |1| = 1$ şi este derivabilă în toate

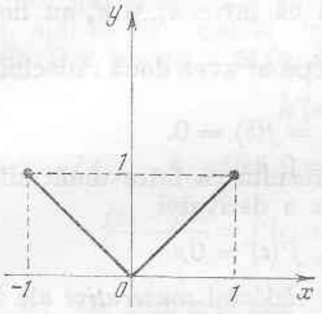


Fig. 95

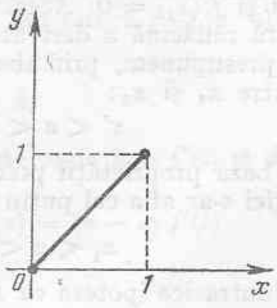


Fig. 96

punctele intervalului, cu excepţia punctului 0 în care nu este derivabilă. Derivata nu se anulează în nici un punct. Într-adevăr:

$$(|x|)' = \begin{cases} -1 \text{ dacă } x < 0. \\ 1 \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$$

3) Funcţia $f(x) = x$ definită pe $[0, 1]$ este continuă pe $[0, 1]$, derivabilă pe $[0, 1]$ şi anume $f'(x) \equiv 1$, dar nu ia valori egale la capete: $f(0) = 0, f(1) = 1$. Derivata nu se anulează în nici un punct.

2° Condiţia ca domeniul de definiţie al funcţiei să fie interval este esenţială pentru valabilitatea teoremei lui Rolle.

Exemplu. Funcţia $f(x) = \begin{cases} x \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ 2 - x \text{ pentru } 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$

definită pe mulţimea $[0, 1) \cap (1, 2]$ (care nu este interval) este continuă şi derivabilă pe tot domeniul său de definiţie şi ia valori egale la extremităţi:

$$f(0) = 0, f(2) = 2 - 2 = 0.$$

Derivata sa nu se anulează în nici un punct. Într-adevăr,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ -1 \text{ pentru } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

În toate rezultatele care folosesc teorema lui Rolle, condiţia ca domeniul de definiţie să fie *interval* va fi esenţială.

3° Teorema lui Rolle rămîne adevărată dacă se presupune că pe intervalul deschis (a, b) funcţia f are derivată finită sau infinită. Într-adevăr, în demonstraţie s-a folosit teorema lui Fermat, în care nu se presupune a priori, că derivata este finită.

Teorema lui Rolle rămîne adevărată, în particular, dacă funcţia *derivabilă* f se anulează în a şi b, $f(a) = 0$ şi $f(b) = 0$, adică dacă a şi b sînt *rădăcini* ale funcţiei. În acest caz, teorema se poate enunţa astfel:

Între două rădăcini ale funcţiei se află cel puţin o rădăcină a derivatei.

O proprietate duală este următoarea:

Între două rădăcini consecutive ale derivatei se află cel mult o rădăcină a funcţiei.

Într-adevăr, fie $x_1 < x_2$ două rădăcini consecutive ale derivatei, $f'(x_1) = 0$ şi $f'(x_2) = 0$. Aceasta înseamnă că între x_1 şi x_2 nu mai există nici o altă rădăcină a derivatei.

Să presupunem, prin absurd, că funcţia ar avea două rădăcini diferite a şi b între x_1 şi x_2:

$$x' < a < b < x_2, f(a) = f(b) = 0.$$

În baza proprietăţii precedente, ar rezulta că între rădăcinile a şi b ale funcţiei s-ar afla cel puţin o rădăcină c a derivatei

$$x_1 < a < c < b < x_2, f'(c) = 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza că x_1 şi x_2 sînt rădăcini *consecutive* ale funcţiei.

3. Teorema lui Lagrange

Vom folosi acum teorema lui Rolle pentru a demonstra o teoremă importantă, cu numeroase aplicaţii în analiză, cunoscută sub numele de *„teorema lui Lagrange"* sau *„teorema creşterilor finite"* sau încă *„prima teoremă a creşterilor finite"*.

Teorema lui Lagrange. Fie f o funcție definită pe un interval I și $a < b$ două puncte din I. Dacă:

1) f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$;

2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b),

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, $a < c < b$, astfel încît să avem

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Pentru demonstrație, se aplică teorema lui Rolle funcției ajutătoare h, definită pe I astfel

$$h(x) = f(x) - kx, \ x \in I,$$

unde k este un număr ce urmează a fi determinat astfel ca

$$h(a) = h(b);$$

$$h(a) = f(a) - ka, \ h(b) = f(b) - kb.$$

Pentru ca $h(a) = h(b)$ este necesar și suficient ca $f(a) - ka = f(b) - kb$, de unde

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pentru această valoare a lui k, funcția h verifică ipotezele teoremei lui Rolle: funcția $h(x)$ este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) ca diferență a funcțiilor $f(x)$ și kx, care sînt continue pe $[a, b]$ și derivabile pe (a, b). În plus, $h(a) = h(b)$. Există deci cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel ca $h'(c) = 0$. Dar pentru $x \in (a, b)$ avem

$$h'(x) = f'(x) - k,$$

deci $h'(c) = f'(c) - k$, adică $0 = f'(c) - k$, de unde $k = f'(c)$ și deci

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ sau } f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$$

și teorema este demonstrată.

Fiecare din ultimele două egalități poartă numele de *formula creșterilor finite* sau *formula mediei*, sau, uneori, *prima* formulă a creșterilor finite.

Interpretarea geometrică a teoremei creșterilor finite este următoarea: Dacă graficul funcției f admite tangentă în fiecare punct (cu excepția, eventual, a extremităților), există cel puțin un punct de pe grafic (care nu coincide cu extremitățile), în care tangenta este paralelă cu coarda care unește extremitățile.

Într-adevăr, coeficientul unghiular al tangentei în punctul $(c, f(c))$ este $f'(c)$, iar coeficientul unghiular al coardei AB este $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Formula creşterilor finite

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

arată că cele două drepte au coeficienţii unghiulari egali, deci sînt paralele.

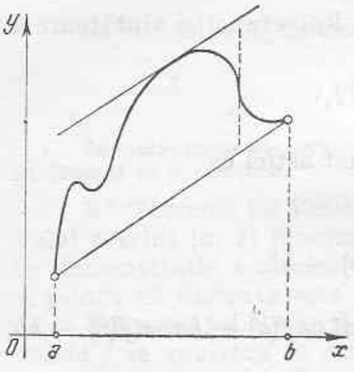


Fig. 97

O b s e r v a ţ i i. 1° Teorema lui Lagrange conţine ca un caz particular teorema lui Rolle. Într-adevăr, dacă $f(a) = f(b)$, din formula creşterilor finite obţinem $f'(c) = 0$.

2° Teorema lui Lagrange rămîne adevărată dacă se presupune că funcţia f are derivată finită sau infinită pe intervalul deschis.

3° Punctul intermediar c din formula creşterilor finite depinde atît de funcţia f cît şi de punctele a şi b. Pentru o aceeaşi funcţie f şi pentru intervalele $[a_1, b_1]$ şi $[a_2, b_2]$ diferite, obţinem, în general, puncte intermediare c_1 şi c_2 diferite, astfel ca

$$\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1}=f'(c_1) \qquad \frac{f(b_2)-f(a_2)}{b_2-a_2}=f'(c_2).$$

Pentru acelaşi interval $[a, b]$ şi pentru funcţii f_1 şi f_2 diferite, obţinem, în general, puncte intermediare c_1 şi c_2 diferite, astfel ca

$$\frac{f_1(b)-f_1(a)}{b-a}=f'_1(c_1) \qquad \frac{f_2(b)-f_2(a)}{b-a}=f'_2(c_2),$$

chiar dacă $f_1(a)=f_2(a)$ şi $f_1(b)=f_2(b)$.

4° Formula creşterilor finite se poate scrie şi sub forma

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c) \text{ sau } f(a)-f(b)=(a-b)f'(c).$$

Aşadar, în formula creşterilor finite este indiferent dacă $a < b$ sau $b < a$.

C o r o l a r. **Dacă f este derivabilă pe intervalul I, atunci pentru orice puncte a şi x din I există un punct ξ astfel ca**

$a < \xi < x$ sau $x < \xi < a$ (după cum $a < x$ sau $x < a$) şi astfel ca

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x}=f'(\xi) \text{ adică } f(a)-f(x)=(a-x)f'(\xi).$$

În adevăr, f este derivabilă pe intervalul închis cu extremităţile în a şi x (deci şi pe intervalul deschis cu aceste extremităţi), deoarece f este derivabilă pe întreg intervalul I. Rezultă atunci că f este continuă pe intervalul închis cu extremităţile în a şi x, şi deci i se poate aplica teorema creşterilor finite pe acest interval.

Dacă funcţia f şi punctul a se menţin fixate, iar punctul x este arbitrar, atunci punctul intermediar ξ depinde de x.

De exemplu, luînd un şir $x_n \to a$, $x_n \neq a$, obţinem un şir $\xi_n \to a$, $\xi_n \neq a$ astfel ca

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(\xi_n) \text{ pentru fiecare } n.$$

Faptul că $\xi_n \to a$, rezultă din inegalităţile $|\xi_n - a| < |x_n - a|$ şi din aceea că $|x_n - a| \to 0$, folosind criteriul de convergenţă a şirurilor.

4. Consecinţe ale teoremei creşterilor finite

1) Se ştie că dacă f este o funcţie constantă pe un interval I (sau pe o reuniune de intervale), atunci $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in I$. Reciproc:

Propoziţia 1. Dacă f are derivată nulă pe un interval I, atunci funcţia f este constantă pe acest interval.

Într-adevăr, să alegem un punct $a \in I$. Aplicînd teorema creşterilor finite, deducem că pentru orice punct $x \neq a$ din I există un punct $\xi \in I$ (cuprins între x şi a) astfel ca

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(\xi).$$

Dar $f'(x) \equiv 0$, deci $f'(\xi) = 0$ şi deci $f(x) - f(a) = 0$, de unde

$$f(x) = f(a) \text{ pentru orice } x \in I,$$

adică f este constantă pe I.

Observaţie. Dacă f are derivata nulă pe o mulţime care nu este interval, ci, de exemplu, o reuniune de intervale disjuncte, nu rezultă că f este constantă pe această mulţime.

Exemplu. Funcţia $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x < 0 \\ 1 & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$

definită pe $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ nu este constantă pe domeniul său de definiţie dar are derivata nulă

$$f'(x) = 0 \text{ pentru orice } x \neq 0.$$

2) Dacă f şi g sînt două funcţii derivabile pe un interval I (sau o reuniune de intervale) şi dacă diferenţa lor este constantă pe I, atunci derivatele lor sînt egale pe I.

Într-adevăr, din ipoteza $f(x) - g(x) \equiv c$, $x \in I$, deducem $f'(x) - g'(x) \equiv 0$, $x \in I$, deci

$$f'(x) = g'(x) \quad \text{pentru orice } x \in I.$$

Reciproc:

Propoziţia 2. Dacă f şi g sînt două funcţii derivabile pe un interval I, şi dacă derivatele lor sînt egale pe intervalul I, atunci diferenţa lor este constantă pe acest interval.

Să notăm $h = f - g$. Ipoteza afirmă că $f' = g'$. Rezultă că $h' = f' - g' = 0$. În baza proprietăţii 1 deducem că $h(x) = c$, adică $f(x) - g(x) = c$ pentru orice $x \in I$.

Observaţie. Dacă funcţiile f şi g au derivate egale pe o mulţime care nu este interval, nu rezultă că diferenţa lor este constantă pe această mulţime.

Exemplu. Fie funcţiile f şi g definite pe $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel:

$$f(x) = \operatorname{tg} x;$$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x + 1 & \text{pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg} x - 1 & \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Avem $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ şi $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, deci $f'(x) = g'(x)$ pentru orice $x \in A$. Dar funcţia $f - g$ nu este constantă pe A:

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Din propoziţia 2 rezultă că, dacă f este derivabilă pe un interval I, orice altă funcţie derivabilă pe I care are aceeaşi derivată f' ca şi f este de forma $f + C$ (unde C este o constantă convenabilă, care depinde de funcţia g).

Mulţimea $\{f + C\}_{C \in R}$ conţine deci *toate* funcţiile definite pe I care au derivata egală cu f'.

Funcţiile derivabile pe I care au derivata egală cu f' se numesc *primitive* ale lui f'. Primitivele sînt studiate în capitolul despre integrale.

3) Fie f o funcţie derivabilă pe un interval I (sau pe o reuniune de intervale).

Dacă f este *crescătoare*, derivata sa f' este *pozitivă*.

Dacă f este *descrescătoare*, derivata sa f' este *negativă*.

Într-adevăr, fie un punct oarecare $x \in I$.

Dacă f este crescătoare avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I$$

şi prin trecere la limită obţinem

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Dacă f este descrescătoare, avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I$$

şi prin trecere la limită obţinem

$$f'(x) \leqslant 0.$$

Observaţie. Dacă f este strict crescătoare pe I, nu rezultă că derivata f' este strict pozitivă. De asemenea, dacă f este strict descrescătoare pe I, nu rezultă că f' este strict negativă.

Exemplu. Funcţia $f(x) = x^3$, definită pe R, este strict crescătoare, dar derivata sa $f'(x) = 3x^2$ se anulează în punctul 0.

Reciproc avem însă

Propoziţia 3. Fie f o funcţie derivabilă pe un interval I. Dacă f' este strict pozitivă pe I, f este strict crescătoare pe I. Dacă f' este strict negativă pe I, f este strict descrescătoare pe I.

Fie $x_1 < x_2$ două puncte oarecare din I. Aplicînd teorema creşterilor finite pe intervalul $[x_1, x_2]$ deducem că există un punct $\xi \in (x_1, x_2)$, astfel încît să avem

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi).$$

Să observăm că $x_2 - x_1 > 0$.

Dacă f' este strict pozitivă pe I, avem $f'(\xi) > 0$, deci $(x_2 - x_1)f'(\xi) > 0$ şi deci $f(x_2) - f(x_1) > 0$ sau

$$f(x_1) < f(x_2),$$

adică f este strict crescătoare pe I.

Dacă f' este strict negativă pe I, avem $f'(\xi) < 0$, deci $(x_2 - x_1)f'(\xi) < 0$ şi deci $f(x_2) - f(x_1) < 0$, sau

$$f(x_1) > f(x_2),$$

adică f este strict descrescătoare pe I.

Observaţii. 1° Dacă f' este *pozitivă* pe I, f este *crescătoare* pe I; dacă f' este *negativă* pe I, f este *descrescătoare* pe I.

În adevăr, din demonstrația propoziției precedente deducem că dacă $f' \geqslant 0$, atunci $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, adică f este crescătoare; iar dacă $f' \leqslant 0$, atunci $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, adică f este descrescătoare.

2° *Dacă derivata f' nu se anulează pe I, atunci f este strict monotonă pe I.*

În adevăr, oricare ar fi $x_1 \neq x_2$ din I, aplicînd teorema creșterilor finite, găsim un punct ξ cuprins între x_1 și x_2 astfel ca

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\xi).$$

Dar $x_1 - x_2 \neq 0$ și $f'(\xi) \neq 0$, deci $f(x_1) \neq f(x_2)$, adică f este biunivocă pe I. Fiind și continuă pe I, rezultă că este strict monotonă.

Acest rezultat se va deduce mai departe și din proprietatea lui Darboux.

3° Propoziția 3 și observațiile precedente nu mai sînt, în general, adevărate, dacă funcția este definită pe o mulțime care nu este interval, ci, de exemplu, o reuniune de intervale.

Exemplu. Funcția $f(x) = \frac{1}{x}$, definită pe $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, este derivabilă, și $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pentru orice $x \neq 0$. Funcția $\frac{1}{x}$ este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$, dar nu este strict descrescătoare pe reuniunea lor. Într-adevăr $-1 < 1$ dar $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

4) Fie f o funcție definită pe un *interval* I și $x_0 \in I$.

P r o p o z i ț i a 4. Dacă f este derivabilă pe $I - \{x_0\}$ și dacă derivata sa f' are limită (finită sau infinită) în punctul x_0, atunci $f'(x_0)$ există și

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

Să notăm $l = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. Fie un șir oarecare $x_n \to x_0$, $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$. Aplicînd teorema creșterilor finite pe intervalele cu o extremitate în x_0 și cu cealaltă extremitate în x_n, obținem un șir de puncte intermediare $\xi_n \to x_0$, $\xi_n \in I$, $\xi_n \neq x_0$, astfel ca

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(\xi_n), \qquad n \in N.$$

Deoarece $\xi_n \to x_0$, $\xi_n \neq x_0$, rezultă că $f'(\xi_n) \to l$ și deci $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to l$. Deoarece șirul (x_n) a fost ales arbitrar astfel ca $x_n \to x_0$, $(x_n \neq x_0)$, rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l,$$

adică f are derivată (finită sau infinită) în x_0, egală cu l:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

În particular, *dacă* $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ *există și este finită atunci f este derivabilă în* x_0, *iar derivata* f' *este continuă în* x_0.

Observație. Dacă derivata f' are limită la stînga (respectiv la dreapta) în x_0, atunci există derivata la stînga $f'_s(x_0)$ (respectiv derivata la dreapta $f'_d(x_0)$) și $f'_s(x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f'(x)$ (respectiv $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f'(x)$).

5) Fie funcția $f: I \to R$

Propoziția 5. Dacă f are derivată mărginită pe intervalul I, atunci f este lipschitziană pe I, deci este uniform continuă pe I.

Fie $M > 0$ un număr astfel ca $|f'(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in I$.

Fie x' și x'' două puncte arbitrare din I. Să aplicăm teorema creșterilor finite funcției f pe intervalul cu extremitățile în x' și x'' : există un punct ξ cuprins între x' și x'' astfel ca

$$f(x') - f(x'') = f'(\xi)\,(x' - x'').$$

Atunci

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)|\,|x' - x''| \leqslant M\,|x' - x''|,$$

deci f este lipschitziană. Rezultă atunci că f este uniform continuă pe I.

Corolar. Dacă intervalul I este mărginit și dacă f are derivata mărginită pe I, atunci f este mărginită pe I.

Într-adevăr, f este uniform continuă pe intervalul mărginit I, deci f este mărginită pe I.

Acest corolar se poate enunța și în forma următoare:

Dacă f este derivabilă pe intervalul mărginit I, și dacă f este nemărginită pe I, atunci derivata f' este de asemenea nemărginită pe I.

5. Teorema lui Cauchy

O altă teoremă a cărei demonstrație folosește teorema lui Rolle este *teorema lui Cauchy*, sau *a doua teoremă a creșterilor finite*.

Teorema lui Cauchy. Fie f și g două funcții definite pe un interval I și $a < b$ două puncte din I. Dacă:

1) f și g sînt continue pe intervalul închis $[a,b]$;

2) f și g sînt derivabile pe intervalul deschis (a,b);

3) $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$,

atunci $g(a) \neq g(b)$ și există un punct $c \in (a, b)$, $a < c < b$ astfel încît să avem

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Să arătăm mai întîi că $g(a) \neq g(b)$. Dacă am avea $g(a) = g(b)$, funcţia g ar verifica ipotezele teoremei lui Rolle şi deci ar exista un punct ξ astfel ca $g'(\xi) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza 3.

Pentru demonstraţia celeilalte părţi a concluziei, se aplică teorema lui Rolle funcţiei ajutătoare h, definită pe I astfel:

$$h(x) = f(x) - k\,g(x), \quad x \in I,$$

unde k este un număr ce urmează a fi determinat astfel încît să avem $h(a) = h(b)$. Dar

$$h(a) = f(a) - kg(a), \quad h(b) = f(b) - kg(b).$$

Pentru ca $h(a) = h(b)$ este necesar şi suficient ca

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b),$$

de unde:

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Pentru această valoare a lui k, funcţia h verifică ipotezele teoremei lui Rolle: h este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b) ca diferenţă a funcţiilor f şi kg care sînt continue pe $[a, b]$ şi derivabile pe (a, b). În plus, $h(a) = h(b)$. Există deci cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel ca $h'(c) = 0$. Dar pentru $x \in (a, b)$ avem

$$h'(x) = f'(x) - kg'(x),$$

deci $h'(c) = f'(c) - kg'(c)$, adică $0 = f'(c) - kg'(c)$, de unde

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

şi deci

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

şi teorema este demonstrată.

Ultima egalitate poartă numele de „a doua formulă a creşterilor finite" sau „a doua formulă a mediei".

O b s e r v a ţ i i. 1° Teorema lui Lagrange se obţine ca un caz particular din teorema lui Cauchy, luînd $g(x) = x$, $x \in I$, într-adevăr, g este continuă şi derivabilă pe întreg intervalul I, şi $g'(x) \equiv 1$, deci derivata lui g nu se anulează în nici un punct. În particular, $g'(c) = 1$. Scriind a doua formulă a creşterilor finite, în acest caz particular, în care $g(b) = b$ şi $g(a) = a$, se obţine prima formulă a creşterilor finite.

Teorema lui Cauchy rămîne adevărată dacă se presupune că funcţiile f şi g au derivată finită sau infinită pe intervalul deschis (a, b) şi dacă în fiecare punct $t \in (a, b)$ cel puţin una din derivatele $f'(t)$ şi $g'(t)$ este finită.

2° Punctul intermediar c, din a doua formulă a creşterilor finite, depinde atît de funcţiile f şi g cît şi de punctele a şi b.

3° Amplificînd cu -1 membrul stîng al formulei a doua a creşterilor finite, se constată că ea este adevărată fie că $a < b$, fie că $a > b$.

C o r o l a r. Dacă f şi g sînt derivabile pe I, dacă g' nu se anulează pe I şi dacă $f(a) = g(a) = 0$, atunci pentru orice punct $x \in I$ există un punct ξ cuprins între a şi x ($\xi \neq a$, $\xi \neq x$), astfel încît să avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Într-adevăr, deoarece $f(a) = 0$ şi $g(a) = 0$, avem $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$. Aplicînd teorema lui Cauchy deducem că există un punct ξ cuprins între a şi x astfel ca $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ şi deci $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

6. Teorema lui Darboux

În capitolul precedent s-a arătat că funcţiile continue au proprietatea lui Darboux, dar că există şi alte funcţii care au această proprietate, fără a fi continue.

Vom arăta că funcţiile derivate au de asemenea proprietatea lui Darboux.

Să transcriem mai întîi, pentru derivate, un rezultat despre limite.

Fie f o funcţie definită pe un interval I, derivabilă într-un punct $x_0 \in I$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă $\alpha < f'(x_0) < \beta$, există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît să avem

$$\alpha < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \beta \qquad \text{pentru } x \in V \cap I.$$

În particular, dacă $f'(x_0) > 0$, atunci

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \qquad \text{pentru } x \in V \cap I,$$

iar dacă $f'(x_0) < 0$, atunci

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \qquad \text{pentru } x \in V \cap I.$$

T e o r e m a l u i D a r b o u x. Dacă f' este derivata unei funcţii derivabile f pe un interval I, atunci derivata f' are proprietatea lui Darboux pe acest interval.

Fie două puncte $a < b$ din I pentru care $f'(a) \neq f'(b)$; pentru a face o alegere, să presupunem că $f'(a) < f'(b)$. Fie de asemenea λ un număr astfel ca $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Vom arată că putem găsi un punct c_λ, astfel ca

$a < c_\lambda < b$ şi $f'(c_\lambda) = \lambda$. Pentru demonstraţie, vom aplica teorema lui Fermat funcţiei ajutătoare h, definită pe I astfel:

$$h(x) = f(x) - \lambda x \qquad x \in I.$$

Funcţia h este derivabilă pe I şi

$$h'(x) = f'(x) - \lambda, \qquad x \in I.$$

Pe de altă parte, funcţia h este continuă (fiind derivabilă) pe intervalul compact $[a, b]$, deci este mărginită şi-şi atinge marginile pe acest interval. Din inegalităţile $f'(a) < \lambda < f'(b)$, deducem $f'(a) - \lambda < 0$ şi $f'(b) - \lambda > 0$, deci

$$h'(a) < 0, \qquad h'(b) > 0.$$

Deoarece $h'(a) < 0$, există o vecinătate V a lui a astfel încît să avem

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} < 0 \qquad \text{pentru } x \in V \cap I.$$

În particular, dacă $x \in V \cap [a, b]$ atunci $x > a$, deci $x - a > 0$, de unde rezultă că $h(x) - h(a) < 0$, adică

$$h(x) < h(a) \qquad \text{pentru } x \in V \cap [a, b].$$

Aceasta înseamnă că funcţia h îşi atinge marginea inferioară pe intervalul $[a, b]$ într-un punct *diferit* de a.

Deoarece $h'(b) > 0$, există o vecinătate W a lui b astfel încît să avem

$$\frac{h(x) - h(b)}{x - b} > 0 \qquad \text{pentru } x \in W \cap I.$$

În particular, dacă $x \in W \cap [a, b]$, atunci $x < b$, deci $x - b < 0$, de unde rezultă că $h(x) - h(b) < 0$, adică

$$h(x) < h(b) \qquad \text{pentru } x \in W \cap [a, b].$$

Aceasta înseamnă că funcţia h îşi atinge marginea inferioară pe intervalul $[a, b]$ într-un punct *diferit* de b.

Din cele de mai sus rezultă că funcţia h îşi atinge *marginea inferioară* într-un punct c din *interiorul* intervalului $[a, b]$.

Dar c este un punct de *minim* (absolut) al funcţiei h, pe $[a, b]$, iar pe de altă parte h fiind derivabilă pe I este derivabilă în c. Aplicînd teorema lui Fermat, deducem că $h'(c) = 0$. Cum $h'(c) = f'(c) - \lambda$, rezultă că $f'(c) - \lambda = 0$, adică $f'(c) = \lambda$.

Luînd $c_\lambda = c$, teorema este demonstrată.

Deoarece funcţiile derivate (pe un interval) au proprietatea lui Darboux, toate propoziţiile demonstrate pentru funcţiile cu proprietatea lui Darboux rămîn adevărate pentru funcţiile derivate:

Corolarul 1. Dacă o derivată f', definită pe un interval I, are într-un punct $a \in I$ o valoare < 0 şi într-un punct $b \in I$ o valoare > 0, ea se anulează cel puţin într-un punct cuprins între a şi b.

Corolarul 2. Dacă o derivată f' definită pe un interval I nu se anulează în nici un punct din I, atunci ea păstrează același semn pe tot intervalul I (deci primitiva sa f este strict monotonă pe I).

Corolarul 3. O derivată f' nu are nici un punct de discontinuitate de prima speță.

Acest corolar rezultă și din observația după propoziția 4 de la pct. 4 (pag. 270).

Exemple. 1) Funcția $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ definită pe R nu poate fi derivata altei funcții, deoarece 0 este punct de discontinuitate de prima speță.

Observație. Funcția $g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ definită pe $R - \{0\}$ este derivata funcției $G(x) = |x|$, dar funcția g nu este definită pe un *interval*, ci pe reuniunea intervalelor disjuncte $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$. În punctul 0, ea nu este definită.

2) Funcția $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ definită pe R are în 0 o discontinuitate de speța a doua. Ea ar putea fi derivata altei funcții. Într-adevăr, funcția

$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ definită pe R este derivabilă și $F' = f$.

§ 5. Derivate de ordin superior. Formula lui Taylor

1. Derivate de ordin superior

Fie f o funcție definită pe un interval I (sau pe o reuniune de intervale) și x_0 un punct din I.

Dacă funcția f este *derivabilă pe o vecinătate* V a lui x_0, derivata sa f', definită pe V, poate fi la rîndul său derivabilă în punctul x_0.

Definiție. Dacă derivata f' este derivabilă în punctul x_0 se spune că funcția f este derivabilă de două ori în punctul x_0; derivata lui f' în x_0 se notează $f''(x_0)$ sau $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$ sau $D^2f(x_0)$ și se numește derivata a doua (sau derivata de ordinul 2) a funcției f în punctul x_0:

$$f''(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Pentru a face o deosebire, derivata $f'(x_0)$ se mai numeşte *derivata întîi* (sau de ordinul întîi) a funcţiei f în punctul x_0.

O b s e r v a ţ i e. Dacă funcţia f este derivabilă numai în punctul x_0 (sau pe o mulţime care nu are pe x_0 ca un punct de acumulare), nu se mai poate defini derivata a doua a lui f în punctul x_0. Aşadar, *dacă funcţia f este derivabilă de două ori în x_0, aceasta înseamnă că derivata întîi f' există pe o întreagă vecinătate a lui x_0.*

Dacă funcţia f este derivabilă de două ori pe intervalul I, se defineşte *derivata a doua* a funcţiei f, pe intervalul I, ca fiind *funcţia* care asociază fiecărui punct $x \in I$ numărul $f''(x)$. Derivata a doua se notează cu f'' sau $\frac{d^2f}{dx^2}$ sau D^2f:

$$f'' = (f')'; \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right); D^2f = D(Df).$$

Se definesc în mod asemănător *derivata a treia* (sau de ordinul trei) a funcţiei f, notată f''' sau $\frac{d^3f}{dx^3}$ sau D^3f, *derivata a patra* (sau de ordinul patru) a funcţiei f, notată f^{IV} sau $\frac{d^4f}{dx^4}$ sau D^4f etc.

Pentru omogenitatea limbajului, se spune că funcţia f însăşi este derivata sa de ordinul zero.

Pentru aceste derivate se folosesc de asemenea următoarele notaţii:

$$f^{(0)} = f; f^{(1)} = f'; f^{(2)} = f''; f^{(3)} = f'''.$$

Se defineşte prin recurenţă derivata de un ordin n oarecare ($n \in N$).

D e f i n i ţ i e . Dacă funcţia f este derivabilă de $n - 1$ ori pe o vecinătate V a lui x_0, şi dacă derivata $f^{(n-1)}$ este derivabilă în x_0, se spune că funcţia f este derivabilă de n ori în x_0; derivata lui $f^{(n-1)}$ în punctul x_0 se notează cu $f^{(n)}(x_0)$ sau $\frac{d^nf(x_0)}{dx^n}$ sau $D^nf(x_0)$ şi se numeşte derivata de ordinul n a funcţiei f în punctul x_0:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă funcţia f este derivabilă de n ori pe intervalul I, se defineşte derivata de ordinul n a funcţiei f, pe acest interval, ca fiind funcţia care asociază fiecărui punct $x \in I$, numărul $f^{(n)}(x)$. Derivata de ordinul n a lui f se notează $f^{(n)}$ sau $\frac{d^nf}{dx^n}$ sau D^nf:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'; \frac{d^nf}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right); D^nf = D(D^{n-1}f).$$

Se spune, de asemenea, „funcţia f admite derivată de ordinul n" sau „derivata de ordinul n a funcţiei f există" în loc de „funcţia f este derivabilă de n ori".

Observaţie. Dacă funcţia este derivabilă de n ori în punctul x_0, rezultă că derivata de ordinul $n-1$ (ca şi derivatele de ordin mai mic decît $n-1$) există nu numai în punctul x_0, ci pe o întreagă vecinătate a lui x_0.

Exemple

1) $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$;

$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$;

$P''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + 3 \cdot 2 a_3 x + 2 \cdot 1 a_2$;

$P'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \ldots + 3 \cdot 2 \cdot 1 a_3$;

$P^{(n-1)}(x) = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 a_n x = n! a_n x$;

$P^{(n)}(x) \equiv n! a_n$;

$P^{(n+1)}(x) \equiv 0$; $P^{(n+k)}(x) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots$

Un polinom $P(x)$ are derivate de orice ordin (este o funcţie indefinit derivabilă), iar derivatele sale de ordin mai mare decît gradul său sînt identic nule.

Reciproc, dacă o funcţie $P(x)$ are derivata de ordinul $n+1$ identic nulă, $P(x)$ este un polinom de grad cel mult egal cu n.

Într-adevăr, din egalitatea

$$P^{(n+1)}(x) \equiv 0$$

deducem succesiv

$P^{(n)}(x) \equiv C_n$;

$P^{(n-1)}(x) = C_n x + C_{n-1}$;

$P^{(n-2)}(x) = C_n \frac{x^2}{1 \cdot 2} + C_{n-1} x + C_{n-2}$;

$P^{(n-3)}(x) = C_n \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + C_{n-1} \frac{x^2}{2} + C_{n-2} x + C_{n-3}$;

$P'(x) = C_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_{n-1} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_2 x + C_1$;

$P(x) = C_n \frac{x^n}{n!} + C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_1 x + C_0$,

unde $C_0, C_1, \ldots, C_n$ sînt nişte numere dintre care unele pot fi nule.

2) Funcţia $f(x) = ce^x$ definită pe R are derivate de orice ordin pe R (este indefinit derivabilă)

$$f'(x) = ce^x; \; f''(x) = ce^x; \; \ldots; \; f^{(n)}(x) = ce^x.$$

3) Funcţia $f(x) = \sin x$ definită pe R este indefinit derivabilă pe R:

$f^{(0)}(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{IV}(x) = \sin x$; ...

$$f^{(4k)}(x) = \sin x; \quad f^{(4k+1)}(x) = \cos x; \quad f^{(4k+2)}(x) = -\sin x;$$
$$f^{(4k+3)}(x) = -\cos x; \quad f^{(4k+4)}(x) = \sin x.$$

4) Funcţia $f(x) = \cos x$ definită pe R este indefinit derivabilă pe R:

$$f^{(0)}(x) = \cos x; \quad f'(x) = -\sin x; \quad f''(x) = -\cos x;$$
$$f'''(x) = \sin x; \quad f^{IV}(x) = \cos x;$$
$$f^{(4k)}(x) = \cos x; \quad f^{(4k+1)}(x) = -\sin x; \quad f^{(4k+2)}(x) = -\cos x;$$
$$f^{(4k+3)}(x) = \sin x; \quad f^{(4k+4)}(x) = \cos x.$$

5) Funcţia $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ este indefinit derivabilă pe $R - \{0\}$.

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{x}; \; f'(x) = -\frac{1}{x^2}; \; f''(x) = \frac{2}{x^3}; \; f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \ldots,$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

6) Funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$ este indefinit derivabilă pe $(0, +\infty)$ şi

$$f^{(0)}(x) = \ln x; \; f'(x) = \frac{1}{x}; \; f''(x) = -\frac{1}{x^2}; \; f'''(x) = \frac{2}{x^3};$$
$$f^{IV}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \ldots, \; f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \ldots$$

2. Operaţii cu funcţii derivabile de n ori

P r o p o z i ţ i e. Fie funcţiile $f: I \to R$ şi $g: I \to R$. Dacă f şi g sînt derivabile de n ori într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcţiile $f + g$, αf (α număr real) şi fg sînt derivabile de n ori în x_0, iar dacă $g(x_0) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă de n ori în x_0.

Propoziţia a fost demonstrată pentru $n = 1$. S-o presupunem adevărată pentru n oarecare şi s-o demonstrăm presupunînd că f şi g sînt derivabile de $n + 1$ ori în x_0. Atunci f şi g sînt derivabile o dată pe o vecinătate V a lui x_0, iar derivatele f' şi g' sînt derivabile de n ori în x_0. Deoarece g este continuă în x_0 (fiind derivabilă), dacă $g(x_0) \neq 0$, rezultă că

g este diferită de zero pe o întreagă vecinătate a lui x_0, şi putem presupune că această vecinătate este V, luînd-o la nevoie mai mică. Avem următoarele formule, valabile pe vecinătatea V:

$$(f+g)'=f'+g',\ (\alpha f)'=\alpha f',\ (fg)'=f'g+fg',\ \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

Deoarece funcţiile din membrul al doilea al acestor egalităţi sînt derivabile de n ori în x_0, şi deoarece asupra lor se efectuează doar operaţiile de adunare, înmulţire cu scalari, înmulţire şi împărţire, care păstrează derivabilitatea, urmează, conform presupunerii, că funcţiile din dreapta egalităţilor, deci şi cele din stînga egalităţilor, sînd derivabile de n ori în x_0, deci funcţiile $f+g$, αf şi fg sînt derivabile de $n+1$ ori în x_0, iar dacă $g(x_0)\neq 0$, funcţia $\frac{f}{g}$ este derivabilă de $n+1$ ori în x_0.

Conform principiului inducţiei complete, propoziţia este adevărată pentru orice n.

C o r o l a r. Dacă funcţiile f şi g sînt derivabile de n ori pe I, atunci $f+g$, αf şi fg sînt derivabile de n ori pe I şi

$$(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)},\qquad (\alpha f)^{(n)}=\alpha f^{(n)};$$

$$(fg)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i f^{(n-i)}g^{(i)}=f^{(n)}g+C_n^1f^{(n-1)}g'+C_n^2f^{(n-2)}g^{(2)}+\ldots+fg^{(n)},$$

iar funcţia $\frac{f}{g}$ este derivabilă de n ori pe mulţimea sa de definiţie.

Rămîne să demonstrăm numai formulele. Demonstraţia se face prin inducţie completă. Demonstrarea primelor două formule o lăsăm pe seama cititorului, ca exerciţiu uşor.

Să demonstrăm ultima formulă. Pentru $n=1$, formula este adevărată: $(fg)'=f'g+fg'$. S-o presupunem adevărată pentru n. Atunci

$$(fg)^{(n+1)}=[(fg)^{(n)}]'=\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^i f^{(n-i)}g^{(i)}\right]'=\sum_{i=0}^{n}C_n^i[f^{(n-i+1)}g^{(i)}+f^{(n-i)}g^{(i+1)}]=$$

$$=C_n^0f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}f^{(n+1-i)}g^{(i)}[C_n^i+C_n^{i-1}]+C_n^nf^{(0)}g^{(n+1)}=$$

$$=C_{n+1}^0f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}C_{n+1}^if^{(n+1-i)}g^{(i)}+C_{n+1}^{n+1}f^{(0)}g^{(n+1)}=\sum_{i=0}^{n}C_{n+1}^if^{(n+1-i)}g^{(i)}.$$

Astfel formula este adevărată pentru orice n.

O b s e r v a ţ i e. Ultima egalitate din corolar se numeşte *formula lui Leibniz* de derivare a unui produs de două funcţii. Membrul drept al formulei aminteşte formula lui Newton de dezvoltare a binomului.

Primele două formule din corolar exprimă faptul că operaţia de derivare de n ori este *liniară*.

Propoziţie. Fie funcţiile $u: I \to J$ şi $\varphi: J \to R$. Dacă funcţia u este derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in I$ şi dacă funcţia φ este derivabilă de n ori în punctul corespunzător $y_0 = u(x_0) \in J$, atunci funcţia compusă $f = \varphi \circ u: I \to R$ este derivabilă de n ori în punctul x_0.

Pentru $n = 1$ propoziţia a fost deja demonstrată. Să presupunem că ea este adevărată pentru cazul cînd se compun două funcţii derivabile de n ori.

Să demonstrăm atunci propoziţia în cazul cînd u este derivabilă de $n + 1$ ori în x_0, iar φ este derivabilă de $n + 1$ ori în y_0. Atunci u este derivabilă de n ori într-o vecinătate U a lui x_0, iar φ este derivabilă de n ori într-o vecinătate V a lui y_0, şi putem alege vecinătatea V astfel ca $u(U) \subset V$; atunci funcţia compusă este derivabilă de n ori pe U şi avem

$$f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x) \quad \text{pentru } x \in U.$$

Dar funcţia $\varphi'(u(x))$ este derivabilă de n ori în x_0, deoarece u este derivabilă de n ori (chiar de $n + 1$ ori) în x_0, iar φ' este derivabilă de n ori în x_0; de asemenea, u' este derivabilă de n ori în x_0. Atunci şi produsul $\varphi'(u(x)) \cdot u'(x)$ este derivabil de n ori în x_0, adică $f'(x)$ este derivabilă de n ori în x_0, de unde rezultă că f este derivabilă de $n + 1$ ori în x_0.

Conform principiului inducţiei complete, propoziţia este adevărată pentru orice n.

Corolar. Dacă u este derivabilă de n ori pe I, iar φ este derivabilă de n ori pe J, atunci funcţia compusă $f = \varphi \circ u$ este derivabilă de n ori pe I.

În ceea ce priveşte derivatele de ordin superior ale funcţiei $f = \varphi \circ u$ plecăm de la derivata de ordinul 1:

$$f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x)$$

şi se derivează succesiv

$$f''(x) = \varphi''(u(x)) \cdot u'^2(x) + \varphi'(u(x)) \cdot u''(x);$$

$$f'''(x) = \varphi'''(u(x))u'^3(x) + 3\varphi''(u(x))u'(x)\, u''(x) + \varphi'(u(x))u'''(x) \text{ etc.}$$

Observaţie. Notînd $y = f(x)$ şi $y = \varphi(u)$, apoi $y'_x = f'$, $y'_u = \varphi'$ şi $u'_x = u'$, formulele precedente se scriu

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x;$$

$$y''_x = y''_u u'^2_x + y'_u u''_x;$$

$$y'''_x = y'''_u u'^3_x + 3y''_u u'_x \cdot u''_x + y'_u u'''_x$$

P r o p o z i ț i e. Fie $f: I \to J$ o funcție strict monotonă cu $f(I) = J$, și fie $\varphi: J \to I$ funcția sa inversă. Dacă f este derivabilă de n ori într-un punct $x_0 \in I$ și dacă $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă $\varphi = \overset{-1}{f}$ este derivabilă de n ori în punctul corespunzător $y_0 = f(x_0) \in J$.

Propoziția a fost demonstrată pentru $n = 1$. S-o presupunem adevărată pentru un n oarecare și s-o demonstrăm pentru cazul cînd f este derivabilă de $n + 1$ ori în x_0.

Atunci f este derivabilă de n ori, deci este derivabilă o dată într-o vecinătate U_1 a lui x_0, iar derivata f' este continuă în x_0. Deoarece $f'(x_0) \neq 0$, rezultă că există o vecinătate U a lui x_0 astfel ca $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in U$. Dacă notăm cu $V = f(U)$, funcția inversă φ este derivabilă de n ori pe V, conform presupunerii, deci este derivabilă o dată pe V și

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))} \qquad \text{pentru } y \in V.$$

Dar φ este derivabilă de n ori în y_0, iar f' este derivabilă de n ori în punctul $x_0 = \varphi(y_0)$, deci funcția compusă $f'(\varphi(y))$ este derivabilă de n ori în y_0, și de asemenea funcția $\frac{1}{f'(\varphi(y))}$ este derivabilă de n ori în y_0, adică φ' este derivabilă de n ori în y_0. Rezultă că φ este derivabilă de $n + 1$ ori în y_0.

Conform principiului inducției complete, propoziția este adevărată pentru orice n.

C o r o l a r. Dacă f este derivabilă de n ori pe I și dacă derivata f' nu se anulează pe I, atunci funcția inversă $\varphi = \overset{-1}{f}$ este derivabilă de n ori pe $J = f(I)$.

Plecînd de la egalitatea

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))}, \qquad y \in J$$

și derivînd o dată, obținem

$$\varphi''(y) = -\frac{f''(\varphi(y))\varphi'(y)}{f'^2(\varphi(y))} = -\frac{f''(\varphi(y))}{f'^3(\varphi(y))}.$$

Derivînd încă o dată, obținem

$$\varphi'''(y) = -\frac{f'''(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,f'^3(\varphi(y)) - f''(\varphi(y))\,3f'^2(\varphi(y))\,f''(\varphi(y))\,\varphi'(y)}{f'^6(\varphi(y))} =$$

$$= -\frac{[f'''(\varphi(y))\,f'(\varphi(y)) - 3f''^2(\varphi(y))]\,\varphi'(y)}{f'^4(\varphi(y))} = -\frac{f'''(\varphi(y))\,f'(\varphi(y)) - 3f''^2(\varphi(y))}{f'^5(\varphi(y))}.$$

Observaţie. Notînd $y = f(x)$ şi $x = \varphi(y)$, apoi $y'_x = f'$ şi $x'_y = \varphi'$, egalităţile de mai sus se scriu

$$x'_y = \frac{1}{y'_x};$$

$$x''_y = -\frac{y''_x}{y'^3_x};$$

$$x''' = -\frac{y'''_x y'_x - 3y''^2_x}{y'^5_x}.$$

Propoziţie. Fie funcţiile $x = \varphi(t)$ şi $y = \psi(t)$ definite pe un interval I, astfel că funcţia φ este strict monotonă şi continuă pe I, şi fie funcţia $y = f(x) = \psi(\overset{-1}{\varphi}(x))$ definită pentru $x \in \varphi(I) = J$.

Dacă funcţiile φ şi ψ sînt derivabile de n ori într-un punct $t_0 \in I$ şi dacă $\varphi'(t_0) \neq 0$, atunci funcţia $y = f(x)$ este derivabilă de n ori în punctul corespunzător $x_0 = \varphi(t_0)$.

Propoziţia a fost demonstrată deja pentru $n = 1$. S-o presupunem adevărată pentru n oarecare şi s-o demonstrăm în cazul în care φ şi ψ sînt derivabile de $n + 1$ ori în t_0. Atunci φ şi ψ sînt derivabile de n ori într-o vecinătate U a lui t_0 şi $\varphi'(t) \neq 0$ pentru $t \in U$. Rezultă că funcţia inversă $\overset{-1}{\varphi}(x)$ este derivabilă de n ori în vecinătatea $V = \varphi(U)$ a lui x_0. Avem

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(\overset{-1}{\varphi}(x))}{\varphi'(\overset{-1}{\varphi}(x))}, \qquad x \in V;$$

dar ψ' şi φ' sînt derivabile de n ori în t_0, deci şi funcţiile compuse $\psi'(\overset{-1}{\varphi}(x))$ şi $\varphi'(\overset{-1}{\varphi}(x))$ sînt derivabile de n ori în x_0. Atunci cîtul lor, $f'(x)$, este derivabil de n ori în x_0, adică f este derivabilă de $n + 1$ ori în x_0. Conform principiului inducţiei complete, propoziţia este adevărată pentru orice n.

Corolar. Dacă φ şi ψ sînt derivabile de n ori pe I, atunci f este derivabilă de n ori pe J.

Derivînd egalitatea

$$f'(x) = \frac{\psi'(\overset{-1}{\varphi}(x))}{\varphi'(\overset{-1}{\varphi}(x))}$$

obţinem:

$$f''(x) = \frac{\psi''(\overset{-1}{\varphi}(x))\,\varphi'(\overset{-1}{\varphi}(x)) - \psi'(\overset{-1}{\varphi}(x))\,\varphi''(\overset{-1}{\varphi}(x))}{\varphi'^2(\overset{-1}{\varphi}(x))}\cdot(\overset{-1}{\varphi})'(x) =$$

$$= \frac{\psi''(\overset{-1}{\varphi}(x))\,\varphi'(\overset{-1}{\varphi}(x)) - \psi'(\overset{-1}{\varphi}(x))\,\varphi''(\overset{-1}{\varphi}(x))}{\varphi'^2(\overset{-1}{\varphi}(x))}\cdot\frac{1}{\varphi'(\overset{-1}{\varphi}(x))} =$$

$$= \frac{\psi''(\overset{-1}{\varphi}(x))\,\varphi'(\overset{-1}{\varphi}(x)) - \psi'(\overset{-1}{\varphi}(x))\,\varphi''(\overset{-1}{\varphi}(x))}{\varphi'^3(\overset{-1}{\varphi}(x))}.$$

Observaţie. Notînd $y'_t = \varphi'$ şi $x'_t = \psi'$, egalităţile precedente se scriu

$$f'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad f''_x = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}.$$

3. Formula lui Taylor

Fie funcţia $f: I \to R$, derivabilă de n ori într-un punct $a \in I$. Aceasta înseamnă că primele $n - 1$ derivate există nu numai în a, dar pe o întreagă vecinătate a lui a. Pentru simplitatea expunerii, vom presupune că primele $n - 1$ derivate există pe întreg intervalul I.

Pentru fiecare $x \in I$ să definim polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Polinomul T_n, definit pe I, se numeşte *polinomul lui Taylor* de gradul n, ataşat funcţiei f, în punctul a.

Dacă pentru fiecare $x \in I$ notăm

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x),$$

atunci:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \text{ adică}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

oricare ar fi $x \in I$. Această egalitate, valabilă pentru orice $x \in I$, se numeşte *formula lui Taylor* de ordinul n, corespunzătoare funcţiei f, în punctul a.

Funcţia R_n definită pe I se numeşte *restul* de ordinul n al formulei lui Taylor.

În cele ce urmează vom căuta să scriem restul R_n în altă formă, mai convenabilă pentru calcule.

Să calculăm mai întîi derivatele polinomului lui Taylor

$$T'_n(x) = f'(a) + \frac{x-a}{1} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a);$$

$$T''_n(x) = f''(a) + \frac{x-a}{1!} f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(a);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + \frac{x-a}{1!} f^{(n)}(a);$$

$$T_n^{(n)}(x) \equiv f^{(n)}(a); \quad T_n^{(n+1)}(x) \equiv 0; \quad T_n^{(n+k)}(x) \equiv 0.$$

Valorile derivatelor succesive ale acestui polinom, în punctul a, sînt* :

$$T_n(a) = f(a);$$

$$T'_n(a) = f'(a);$$

$$T''_n(a) = f''(a);$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a);$$

$$T_n^{(n+1)}(a) = 0.$$

Deoarece f și T au derivate de ordinul n în a, rezultă că și restul $R_n = f - T_n$ are derivate de ordinul n în a. De asemenea, deoarece f și T_n au derivate pînă la ordinul $n - 1$ inclusiv, pe întreg intervalul I, rezultă că și restul R_n are derivate pînă la ordinul $n - 1$ inclusiv pe întreg intervalul I.

Vom avea astfel:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \qquad x \in I;$$

$$R'_n(x) = f'(x) - T'_n(x), \qquad x \in I;$$

$$R''_n(x) = f''(x) - T''_n(x), \qquad x \in I;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x), \qquad x \in I;$$

$$R_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - T_n^{(n)}(a).$$

Rezultă atunci

$$R_n(a) = 0; R'_n(a) = 0; R''_n(a) = 0, \ldots R_n^{(n-1)}(a) = 0; R_n^{(n)}(a) = 0.$$

O b s e r v a ț i e. Deoarece R_n este derivabilă pe I, este continuă pe I; în particular este continuă în a, deci

$$\lim_{x \to a} R_n(x) = R_n(a) = 0.$$

* Polinomul lui Taylor de gradul n, atașat funcției f, a fost construit tocmai astfel încît să verifice condițiile scrise.

Aceasta înseamnă că, pentru x suficient de aproape de a, restul $R_n(x)$ este oricît de mic, adică diferența $f(x) - T_n(x)$ poate fi făcută oricît de mică; mai precis, putem realiza ca diferența $f(x) - T_n(x)$ să fie cît dorim de mică, dacă luăm pe x suficient de aproape de a. Aceasta înseamnă că pentru valorile lui x suficient de apropiate de a, funcția $f(x)$ poate fi aproximată prin polinomul lui Taylor $T_n(x)$.

Vom preciza, încă, acest rezultat, arătînd că nu numai $R_n(x)$, dar chiar raportul $\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$ poate fi făcut oricît de mic, dacă x este suficient de apropiat de a. Mai precis, vom arăta următoarea:

Lemă.

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Într-adevăr, să notăm $g(x) = (x-a)^n$. Avem

$$g'(x) = n(x-a)^{n-1};$$

$$g''(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g^{(n-1)}(x) = n!\,(x-a);$$

$$g^{(n)}(x) = n!$$

Atunci:

$$\begin{array}{ll} g(a) = 0 & R_n(a) = 0; \\ g'(a) = 0 & R_n'(a) = 0; \\ g''(a) = 0 & R_n''(a) = 0; \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ g^{(n-1)}(a) = 0 & R_n^{(n-1)}(a) = 0; \\ g^{(n)}(a) = n! \neq 0 & R_n^{(n)}(a) = 0. \end{array}$$

Fie $x \in I$ arbitrar. Deoarece $R_n(a) = 0$ și $g(a) = 0$, aplicînd corolarul teoremei lui Cauchy există un punct c_1, cuprins între a și x, astfel încît

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)}.$$

Deoarece $R_n'(a) = 0$ și $g'(a) = 0$, aplicînd încă o dată corolarul teoremei lui Cauchy, există un punct c_2 cuprins între a și c_1 (deci între a și x), astfel încît

$$\frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R''(c_2)}{g''(c_2)} \text{ și deci } \frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)}.$$

Aplicînd de $n - 1$ ori corolarul teoremei lui Cauchy găsim un punct ξ cuprins între a şi x, $\xi \neq a$, $\xi \neq x$, astfel încît

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n-1)}(\xi)}{g^{(n-1)}(\xi)} = \frac{R_n^{(n-1)}(\xi) - R_n^{(n-1)}(a)}{g^{(n-1)}(\xi) - g^{(n-1)}(a)} =$$

$$= \frac{\dfrac{R_n^{(n-1)}(\xi) - R_n^{(n-1)}(a)}{\xi - a}}{\dfrac{g^{(n-1)}(\xi) \quad g^{(n-1)}(a)}{\xi - a}}$$

(deoarece $R_n^{(n-1)}(a) = 0$, $g^{(n-1)}(a) = 0$ şi $\xi \neq a$).

Dacă alegem un şir $x_k \underset{k}{\to} a$, $x_k \neq a$, atunci $\xi_k \to a$ şi $\xi_k \neq a$, deci:

$$\frac{R_n^{(n-1)}(\xi_k) - R_n^{(n-1)}(a)}{\xi_k - a} \underset{k}{\to} R_n^{(n)}(a) = 0,$$

$$\frac{g^{(n-1)}(\xi_k) - g^{(n-1)}(a)}{\xi_k - a} \underset{k}{\to} g^{(n)}(a) = n\,! \neq 0$$

şi deci:

$$\frac{R_n(x_k)}{g(x_k)} \underset{k}{\to} \frac{R_n^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} = 0.$$

Deoarece şirul $x_k \to a$, $x_k \neq a$ a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{g(x)} = 0,$$

adică

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Propoziţie. Dacă f este derivabilă de n ori în punctul $a \in I$, atunci există o funcţie $\alpha(x)$ definită pe I astfel ca

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 = \alpha(a)$$

şi astfel ca pentru orice $x \in I$ să avem

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n\,!} f^{(n)}(a) +$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n\,!} \alpha(x).$$

Într-adevăr, deoarece $\lim\limits_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$, definim funcţia α astfel:

$$\alpha(x) = n!\,\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \text{ dacă } x \neq a \text{ şi } \alpha(a) = 0.$$

Atunci $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a} n!\,\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0 = \alpha(a)$, şi

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\,\alpha(x)$$

pentru orice $x \in I$ (chiar pentru $x = a$). Înlocuind în formula lui Taylor restul $R_n(x)$ cu $\frac{(x-a)^n}{n!}\alpha(x)$, se obţine formula din enunţul propoziţiei.

În propoziţia precedentă s-a presupus că funcţia f este derivabilă de n ori numai în punctul a.

În propoziţiile următoare vom presupune că f este *derivabilă* de $n+1$ ori pe întreg intervalul I, şi vom da alte forme restului formulei Taylor.

Fie a şi x două puncte arbitrare diferite din I pe care le fixăm. Fie de asemenea p un număr natural oarecare.

Restul $R_n(x)$ de ordinul n, al formulei lui Taylor în punctul a, se poate scrie sub forma

$$R_n(x) = (x-a)^p K,$$

unde K este un număr (care se schimbă o dată cu x şi a). Formula lui Taylor de ordinul n în punctul a se scrie deci pentru punctul x ales, astfel:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a) + (x-a)^p K.$$

Să considerăm acum funcţia $\varphi(t)$ definită pentru orice $t \in I$ prin egalitatea următoare:

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{x-t}{1!}f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2}f''(t) + \ldots + \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t) + (x-t)^p K.$$

Se verifică uşor că funcţia φ este derivabilă pe I, deoarece toate funcţiile din membrul drept sînt derivabile pe I.

Avem:

$$\varphi(x) = f(x) \text{ şi } \varphi(a) = f(x).$$

Putem aplica teorema lui Rolle funcţiei φ pe intervalul cu extremităţile a şi x: există un punct ξ cuprins între a şi x astfel ca $\varphi'(\xi) = 0$. Dar

$$\varphi'(t) = f'(t) + \frac{x-t}{1!}f''(t) - f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t) - \frac{x-t}{1!}f''(t) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t) - p(x-t)^{p-1}K =$$

$$= \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) - p\,(x-t)^{p-1}K.$$

Egalitatea $\varphi'(\xi) = 0$ se scrie atunci

$$\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) - p(x-\xi)^{p-1} K = 0,$$

de unde:

$$K = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Aşadar, restul R_n se scrie

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Sub această formă, R_n se numeşte *restul lui Schlömlich-Roche*. Luînd $p = 1$ obţinem *restul lui Cauchy*

$$R_n(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Luînd $p = n + 1$, obţinem *restul lui Lagrange*

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Observaţie. Punctul intermediar ξ depinde atît de a şi de x cît şi de n şi p.. Aşadar, în formula lui Cauchy, punctul ξ este diferit de cel din formula lui Lagrange.

Deoarece ξ este cuprins între a şi x, există un număr θ (care depinde, ca şi ξ, de a, x, n şi p) astfel ca $0 < \theta < 1$ şi

$$\xi = a + \theta(x - a).$$

Notînd $h = x - a$, atunci $\xi = a + \theta h$, iar formula lui Taylor se scrie:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n,$$

unde restul R_n poate avea una din formele

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad \text{(Schlömlich-Roche)};$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad \text{(Cauchy)};$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad \text{(Lagrange)}.$$

În particular, dacă $0 \in I$, şi dacă luăm $a = 0$, formula lui Taylor cu restul lui Lagrange se scrie astfel:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

unde $0 < \theta < x$ (θ depinde de x şi de n).

Restul lui Cauchy se scrie în acest caz astfel:

$$R_n = (n!)^{-1}x^{n+1}(1-\theta)^n f^{n+1}(\theta x).$$

Exemple. 1) Pentru funcția $f(x) = e^x$ definită pe R, avem: $f^{(n)}(x) = e^x$ și $f^{(n)}(0) = 1$, oricare ar fi $n \in N$, deci formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad \underset{x\in R}{0 < \theta < 1.}$$

2) Pentru funcția $f(x) = \sin x$ definită pe R, avem

$$f(x) = 0;\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{IV}(0) = 0, \ldots$$

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x, \qquad \underset{x\in R}{0 < \theta < 1.}$$

3) Pentru funcția $f(x) = \cos x$ definită pe R, avem

$$f(0) = 1;\ f'(0) = 0;\ f''(0) = -1;\ f'''(0) = 0;\ f^{IV}(0) = 1, \ldots$$

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos\theta x, \qquad \underset{x\in R}{0 < \theta < 1.}$$

4) Pentru funcția $f(x) = \ln(1+x)$ definită pe $(-1, +\infty)$ avem:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x};\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2};\ f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3};$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4};\ \ldots;\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n};\ \ldots$$

deci:

$$f(0) = 0;\ f'(0) = 1;\ f''(0) = -1;\ f'''(0) = 2;\ \ldots;\ f^{IV}(0) = -3!$$

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

unde $0 < \theta < 1$, θ depinde de x și de n, iar $x > -1$.

4. Puncte de extrem ale unei funcții

Fie f o funcție reală definită pe un interval I.

Teorema lui Fermat afirmă că într-un punct de extrem din interiorul intervalului, derivata funcției se anulează (dacă funcția este derivabilă în acest punct).

Știm însă că din $f'(x_0) = 0$, nu rezultă că x_0 este un punct de extrem.

Se va arăta mai departe că, studiind semnul derivatei într-o vecinătate a lui x_0, putem decide dacă x_0 este sau nu un punct de extrem, şi, în caz afirmativ, dacă este punct de maxim sau de minim.

Dacă nu cunoaştem semnul derivatei în punctele din jurul lui x_0, putem folosi derivatele de ordin superior ale funcţiei în x_0 (şi numai în x_0) pentru a vedea dacă x_0 este punct de extrem.

Teoremă. Fie f o funcţie derivabilă de n ori, $n \geqslant 2$, într-un punct $a \in I$, astfel încît

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0.$$

1) Dacă n este par, atunci a este punct de extrem al lui f; dacă $f^{(n)}(a) < 0$ atunci a este punct de maxim, iar dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci a este punct de minim.

2) Dacă n este impar, iar a este punct interior al intervalului I, atunci a nu este punct de extrem al funcţiei f.

Doarece primele $n - 1$ derivate se anulează în a, formula lui Taylor, de ordinul n, în punctul a, se scrie, pentru orice $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \alpha(x),$$

unde

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0, \text{ şi } \alpha(a) = 0,$$

atunci

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} [f^{(n)}(a) + \alpha(x)].$$

Deoarece $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$, avem

$$\lim_{x \to a} [f^{(n)}(a) + \alpha(x)] = f^{(n)}(a).$$

Dacă $f^{(n)}(a) > 0$, există o vecinătate V a lui a astfel ca

$$f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0 \text{ pentru } x \in V.$$

Dacă $f^{(n)}(a) < 0$, există o vecinătate V a lui a astfel ca

$$f^{(n)}(a) + \alpha(x) < 0 \text{ pentru } x \in V.$$

Dacă n este par, avem $(x-a)^n \geqslant 0$ pentru orice $x \in I$, deci: Dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci $f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0$ pentru $x \in V$, de unde rezultă că $f(x) - f(a) \geqslant 0$ sau

$$f(x) \geqslant f(a) \text{ pentru } x \in V,$$

adică a este un punct de *minim*.

Dacă $f^{(n)}(a) < 0$, atunci $f^{(n)}(a) + \alpha(x) < 0$ pentru $x \in V$, de unde rezultă că $f(x) - f(a) \leqslant 0$ sau

$$f(x) \leqslant f(a) \text{ pentru } x \in V$$

adică a este un punct de *maxim*.

Să considerăm acum cazul cînd a este punct interior al intervalului I iar n este *impar*. Atunci $(x - a^n) < 0$ dacă $x < a$ și $(x - a)^n > 0$ dacă $x > a$, deci:

dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci $f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0$, pentru $x \in V$, de unde rezultă că:

$$f(x) - f(a) < 0 \quad \text{adică } f(x) < f(a) \quad \text{dacă } x < a,\ x \in V,$$

$$f(x) - f(a) > 0 \quad \text{adică } f(x) > f(a) \quad \text{dacă } x > a,\ x \in V$$

și deci a nu este punct de extrem;

dacă $f^{(n)}(a) < 0$ atunci

$$f(x) > f(a) \quad \text{dacă } x < a, \quad x \in V,$$

$$f(x) < f(a) \quad \text{dacă } x > a, \quad x \in V$$

și deci nici în acest caz a nu este punct de extrem.

Observații. Doearece $f''(a)$ există, rezultă că f' există într-o întreagă vecinătate a lui a. Dacă n este par, iar a este punct interior al intervalului I, atunci derivata f' are semne diferite de o parte și de alta a lui a. Într-adevăr, dacă ar avea același semn într-o vecinătate a lui a, atunci f ar fi strict monotonă în această vecinătate și deci a n-ar mai fi punct de extrem al lui f.

Corolarul 1. Fie f o funcție derivabilă de două ori în punctul $a \in I$, astfel încît $f'(0) = 0$ și $f''(a) \neq 0$.

1) Dacă $f''(a) < 0$, atunci a este punct de maxim.
2) Dacă $f''(a) > 0$, atunci a este punct de minim.

Corolarul următor stabilește o proprietate reciprocă:

Corolarul 2. Dacă f este derivabilă de două ori într-un punct interior $a \in I$ și dacă f are în a un minim, atunci $f''(a) \geqslant 0$, iar dacă f are în a un maxim, atunci $f''(a) \leqslant 0$.

Să presupunem că a este un punct de minim, deci $f'(a) = 0$. Dacă am avea $f''(a) < 0$, atunci din corolarul precedent ar rezulta că a este un punct de maxim și am ajunge la o contradicție: așadar $f''(a) \geqslant 0$.

La fel se demonstrează că dacă a este un punct de maxim, atunci $f''(a) \leqslant 0$.

Corolarul 3. Dacă f este derivabilă de trei ori în punctul interior $a \in I$ şi dacă $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, atunci a nu este punct de extrem al funcţiei f.

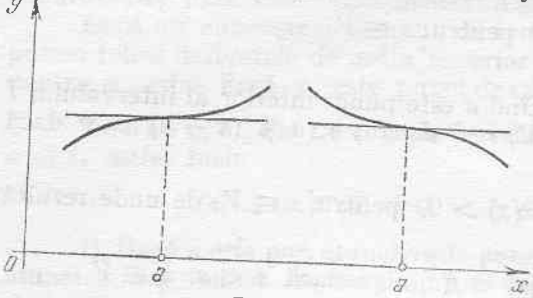


Fig. 98

Observaţie. În cazul cînd n este impar, tangenta la grafic în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox şi traversează graficul (fig. 98).

Un asemenea punct, în care tangenta traversează graficul, se numeşte *punct de inflexiune.*

§ 6. Regulile lui l'Hospital

În cazurile exceptate de teoremele relative la operaţiile cu limitele de funcţii, trebuie întreprins un studiu direct pentru a vedea dacă există limită.

Uneori derivatele pot fi de folos în aceste cazuri, prin aşa-numitele „reguli ale lui l'Hospital".

Aceste reguli se aplică în cazul $\frac{0}{0}$ şi în cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Celelalte cazuri se reduc la acestea.

1. Cazul $\frac{0}{0}$

Fie I un interval, x_0 un punct de acumulare al său (x_0 finit sau infinit) şi funcţiile f şi g definite pe intervalul I, cu excepţia, eventual, a lui x_0. Vom presupune că $g(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0$, $x \in I$. Dacă

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0 \text{ şi } \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

funcţia $\frac{f(x)}{g(x)}$ poate să aibă sau poate să nu aibă limită în punctul x_0.

În orice caz, deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = 0$ şi $|g(x)| > 0$ pentru $x \neq x_0$, $x \in I$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|g(x)|} = +\infty$$

şi deci

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty.$$

Aşadar, sînt posibile trei situaţii: sau $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, sau $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ sau $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ nu există, dar $\frac{f(x)}{g(x)}$ este nemărginită în orice vecinătate a lui x_0.

Vom cerceta în continuare cazul în care ambele funcţii au limita 0 în punctul x_0.

Teorema următoare este cunoscută sub numele de „regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$".

Teorema 1. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I, f şi g două funcţii definite pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0. Dacă:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$;

2) **f şi g sînt derivabile pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0;**

3) **$g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I;**

4) **există $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (finită sau infinită).**

Atunci:

a) **$g(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I;**

b) **funcţia $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstraţie. Vom considera mai întîi cazul cînd x_0 este *finit*. Deoarece g' nu se anulează nici la stînga lui x_0, nici la dreapta lui x_0, rezultă că g' păstrează un semn constant atît la stînga lui x_0, cît şi la dreapta lui x_0, deci funcţia g este *strict monotonă* atît la stînga lui x_0, cît şi la dreapta lui x_0. Rezultă atunci că $g(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ adică $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I.

Să definim acum funcţiile $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ pe mulţimea $I \cup \{x_0\}$ astfel:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0 & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}; \quad \bar{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0 & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}.$$

Avem: $\lim\limits_{x\to x_0} \bar{f}(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 = \bar{f}(x_0)$;

$\lim\limits_{x\to x_0} \bar{g}(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 = \bar{g}(x_0)$

deci funcţiile $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ sînt *continue* în punctul x_0 (dacă f şi g nu sînt definite în x_0, atunci $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ sînt prelungirile prin continuitate în punctul x_0 ale funcţiilor f şi g).

În orice punct $x \neq x_0$ din I, funcţiile $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ sînt derivabile (fiind egale, în vecinătatea lui x, respectiv cu funcţiile derivabile f şi g) şi

$$\bar{f}'(x) = f'(x), \ \bar{g}'(x) = g'(x) \neq 0.$$

Dacă alegem un şir oarecare $x_n \to x_0$, $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$, pentru fiecare n putem aplica funcţiilor $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ teorema lui Cauchy pe intervalul cu extremităţile în x_0 şi x_n: există un punct ξ_n cuprins între x_0 şi x_n, $\xi_n \neq x_0$, $\xi_n \neq x_n$, astfel ca

$$\frac{\bar{f}(x_n) - \bar{f}(x_0)}{\bar{g}(x_n) - \bar{g}(x_0)} = \frac{\bar{f}'(\xi_n)}{\bar{g}'(\xi_n)}.$$

În plus, $\bar{g}(x_n) \neq \bar{g}(x_0)$ adică $\bar{g}(x_n) \neq 0$.

Dar $\bar{f}(x_n) = f(x_n)$, $\bar{f}(x_0) = 0$, $\bar{f}'(\xi_n) = f'(\xi_n)$;

$$\bar{g}(x_n) = g(x_n),\ \bar{g}(x_0) = 0,\ \bar{g}'(\xi_n) = g'(\xi_n)$$

şi egalitatea precedentă se scrie

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

În plus $g(x_n) \neq 0$.

Să observăm că $|\xi_n - x_0| < |x_n - x_0|$ şi $|x_n - x_0| \to 0$, deci $\xi_n \to x_0$, iar $\xi_n \neq x_0$.

Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ şi $\xi_n \to x_0$, $\xi_n \neq x_0$, avem $\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to A$ şi deci $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to A$. Şirul (x_n), fiind ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

şi teorema este demonstrată în cazul cînd x_0 este finit.

Să trecem acum la cazul cînd x_0 este *infinit*. Pentru a face o alegere, să presupunem că $x_0 = +\infty$ (cazul cînd $x_0 = -\infty$ se tratează la fel).

Putem presupune că intervalul I este de forma $I = (a, +\infty)$ cu $a > 0$ considerînd, în caz contrar, restricţiile funcţiilor f şi g la un asemenea interval, ceea ce nu modifică existenţa limitei funcţiei $\frac{f}{g}$ în punctul $+\infty$.

Să considerăm atunci funcţiile F şi G definite pe intervalul $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ astfel:

$$F(y) = f\left(\frac{1}{y}\right),\ G(y) = g\left(\frac{1}{y}\right),\ 0 < y < \frac{1}{a}.$$

Să observăm că F şi G se obţin compunînd respectiv funcţiile f şi g cu funcţia $u(y) = \frac{1}{y}$, definită pentru $y \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ cu valori în $(a, +\infty)$.

Funcţiile F şi G verifică toate ipotezele teoremei pentru punctul $x_0=0$.

1) $\lim\limits_{y \to 0} F(y) = 0$ şi $\lim\limits_{y \to 0} G(y) = 0$.

Într-adevăr, fie $y_n \to 0$, $0 < y_n < \frac{1}{a}$. Dacă notăm $x_n = \frac{1}{y_n}$, avem $x_n \to +\infty$, deci $f(x_n) \to 0$ şi $g(x_n) \to 0$. Dar $f(x_n) = f\left(\frac{1}{y_n}\right)$ şi $g(x_n) = g\left(\frac{1}{y_n}\right)$. Rezultă că

$$F(y_n) = f\left(\frac{1}{y_n}\right) \to 0 \text{ şi } G(y_n) = g\left(\frac{1}{y_n}\right) \to 0.$$

Deoarece şirul $y_n \to 0$, $y_n > 0$ a fost ales arbitrar, deducem

$$\lim_{y\to 0} F(y) = 0 \text{ şi } \lim_{y\to 0} G(y) = 0.$$

2) Funcţiile F şi G sînt derivabile pe $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, deoarece funcţia $u(y) = \frac{1}{y}$ este derivabilă pe $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, iar f şi g sînt derivabile pe $(a, +\infty)$. Avem

$$F'(y) = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right);$$

$$G'(y) = -\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right).$$

3) $G'(y) \neq 0$ pentru orice $y \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$, deoarece $\frac{1}{y^2} \neq 0$ şi $g'\left(\frac{1}{y}\right) \neq 0$.

4) $\lim\limits_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$

Într-adevăr,

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} \quad \text{pentru } y \in \left(0, \frac{1}{a}\right).$$

Fie $y_n \to 0$, $0 < y_n < \frac{1}{a}$, şi să notăm $x_n = \frac{1}{y_n}$; atunci $x_n \to +\infty$, deci

$$\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} \to A, \text{ sau } \frac{f'\left(\frac{1}{y_n}\right)}{g'\left(\frac{1}{y_n}\right)} \to A$$

şi deci

$$\frac{F'(y_n)}{G'(y_n)} \to A.$$

Cum şirul $y_n \to 0$, $y_n > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = A.$$

Putem deci aplica teorema demonstrată mai sus, funcţiilor F şi G, în punctul 0. Deducem că $G(y) \neq 0$ pentru orice $y \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ şi

$$\lim_{y\to 0} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = A.$$

Rezultă atunci că $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, +\infty)$. Să arătăm că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Fie un şir oarecare $x_n \to +\infty$, $x_n > a$; notînd $y_n = \frac{1}{x_n}$ avem $y_n \to 0$, $y_n > 0$ şi deci

$$\frac{F(y_n)}{G(y_n)} \to A.$$

Dar

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f\left(\frac{1}{y_n}\right)}{g\left(\frac{1}{y_n}\right)} = \frac{F(y_n)}{G(y_n)}$$

şi deci

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to A.$$

Deoarece şirul $x_n \to +\infty$ a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

şi teorema este complet demonstrată.

Observaţii. 1° Condiţia ca $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ dintr-o anumită vecinătate a lui x_0 este esenţială. Dacă celelalte trei condiţii sînt verificate dar g' se anulează în puncte oricît de apropiate de x_0, este posibil ca funcţia $\frac{f}{g}$ să nu aibă limită în x_0.

Exemplu. Fie funcţiile

$f(x) = e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$, $g(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$ definite pe R.

1) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$;

2) f şi g sînt derivabile pe R şi

$f'(x) = -5\sin x \cdot e^{-2x}$; $g'(x) = -2\sin x \cdot e^{-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{2} e^{-x} = 0.$

Totuşi funcţia

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-x}\frac{1+2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,x} = e^{-x}\left(1 + \frac{1}{1+\mathrm{ctg}\,x}\right)$$

nu are limită în punctul $+\infty$.

Regula lui l'Hospital nu este aplicabilă la acest caz, deoarece derivata g' se anulează într-un şir de puncte care tind către $+\infty$, şi anume în punctele $k\pi$, k natural.

2° Reciproca regulii lui l'Hospital nu este, în general, adevărată. Dacă $\frac{f}{g}$ are limită în x_0, nu rezultă că şi $\frac{f'}{g'}$ are limită în x_0; altfel spus, dacă $\frac{f'}{g'}$ nu are limită în x_0, nu rezultă că $\frac{f}{g}$ nu are limită în x_0.

Exemplu. Fie funcţiile f şi g definite pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ astfel:

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$g(x) = \sin x.$$

Avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Funcţiile f şi g sînt derivabile pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ şi $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $g'(x) = \cos x$, iar derivata g' nu se anulează pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$. Totuşi funcţia $\frac{f'}{g'}$ nu are limită în punctul 0:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Avem $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = \dfrac{0}{1} = 0$, dar $\cos \dfrac{1}{x}$ nu are limită în 0, şi nici raportul $\dfrac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x}$, deci nici funcţia $\dfrac{f'}{g'}$.

3° Aplicînd regula lui l'Hospital funcţiei $\frac{\sin x}{x}$ în punctul 0, obţinem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Aceasta nu constituie o demonstraţie a faptului că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, ci doar o verificare, deoarece derivata funcţiei $\sin x$, care s-a folosit mai sus, s-a calculat ea însăşi cu ajutorul acestei limite.

În cazul cînd şi derivatele f' şi g' au limita 0 în punctul x_0, limita $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se poate calcula — dacă este posibil — aplicînd încă o dată regula lui l'Hospital funcţiilor f' şi g' şi procedeul se poate itera.

Exemplu. Aplicînd regula lui l'Hospital de trei ori, obţinem

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos^2 x + e^{\sin x} \sin x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos^3 x + 2e^{\sin x} \sin x \cos x + e^{\sin x} \cos x \sin x + e^{\sin x} \cos x}{\cos x} = 1.$$

În regula lui l'Hospital s-a folosit existența derivatelor într-o vecinătate a lui x_0, dar nu neapărat în x_0.

Teorema următoare dă o regulă de calcul care necesită existența derivatelor numai în punctul x_0, nu și în celelalte puncte vecine cu x_0.

Teorema 2 (Cauchy). Fie f și g două funcții definite pe un interval I și un punct $x_0 \in I$. Dacă:

1) $f(x_0) = 0$ **și** $g(x_0) = 0$;

2) f **și** g **sînt derivabile în punctul** x_0;

3) $g'(x_0) \neq 0$,

atunci:

a) **există o vecinătate** V **a lui** x_0, **astfel ca** $g(x) \neq 0$ **pentru** $x \neq x_0$ **din** V **și**

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Să observăm mai întîi că, deoarece $g'(x_0) \neq 0$ și

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, pentru orice $x \neq x_0$ din V, să avem

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq 0,$$

adică $g(x) \neq g(x_0)$, sau (deoarece $g(x_0) = 0$), $g(x) \neq 0$.

Pentru $x \neq x_0$ din V avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

(deoarece $f(x_0) = 0$ și $g(x_0) = 0$). Atunci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(g_0)}.$$

Observații. 1° Regula lui l'Hospital și teorema lui Cauchy nu au același cîmp de aplicabilitate. În unele cazuri, una din funcțiile f și g este derivabilă numai în x_0, deci în aceste cazuri nu se poate aplica regula lui l'Hospital, ci numai teorema lui Cauchy.

Exemplu. Fie funcțiile f și g definite pe R astfel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \text{ este rațional,} \\ 0 & \text{dacă } x \text{ este irațional;} \end{cases}$$

$$g(x) = \sin x.$$

Avem $f(0) = 0$ și $g(0) = 0$.

Funcţia f este derivabilă *numai* în punctul 0 şi $f'(0) = 0$. Funcţia g este derivabilă pe R şi $g'(x) = \cos x$, iar $g'(0) = 1$. Aplicînd teorema lui Cauchy, obţinem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Regula lui l'Hospital nu este aplicabilă aici.

2° Dacă funcţiile f şi g sînt derivabile pe întreg intervalul I şi în x_0, este posibil ca teorema lui Cauchy să se poată aplica, dar regula lui l'Hospital să nu se poată aplica.

Exemplu. Fie funcţiile f şi g definite pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$$

$$g(x) = \sin x.$$

Avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$.

Funcţiile f şi g sînt derivabile pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$$

$$g'(x) = \cos x,\ g'(0) = 1,$$

iar $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aplicînd teorema lui Cauchy, obţinem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Totuşi, regula lui l'Hospital nu se poate aplica deoarece funcţia $\frac{f'}{g'}$ nu are limită în punctul 0.

2. Cazul $\frac{\infty}{\infty}$

Pentru a demonstra regula lui l'Hospital în cazul $\frac{\infty}{\infty}$, avem nevoie de

Lema lui Stolz. Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri. Dacă şirul (b_n) este strict monoton şi nemărginit, şi dacă $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to A$ (finit sau infinit), atunci $\frac{a_n}{b_n} \to A$.

Să presupunem că şirul (b_n) este strict crescător, deci (fiind nemărginit) $b_n \to +\infty$.

Vom considera întîi cazul cînd A este *finit*. Fie $V = (\alpha, \beta)$ o vecinătate oarecare a lui A, $\alpha < A < \beta$.

Să alegem o vecinătate $V' = (\alpha', \beta')$ a lui A, astfel ca $\alpha < \alpha' < A < \beta' < \beta$.

Deoarece $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to A$, şi V' este o vecinătate a lui A, există un număr N', astfel încît pentru orice $n \geqslant N'$ să avem:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \in V \text{ adică}$$

$$\alpha' < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < \beta', \quad n \geqslant N'.$$

Înmulţind toţi termenii cu $b_{n+1} - b_n > 0$ (deoarece şirul (b_n) este strict crescător), obţinem

$$\alpha'(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \beta'(b_{n+1} - b_n), \quad n \geqslant N'.$$

Scriind aceste inegalităţi pentru N', $N' + 1$, $N' + 2$, ..., $n - 1$, în loc de n, adunînd membru cu membru şi făcînd reducerile necesare, obţinem

$$\alpha'(b_n - b_{N'}) < a_n - a_{N'} < \beta'(b_n - b_{N'}),$$

oricare ar fi $n > N'$.

Deoarece $b_n \to +\infty$, putem alege de la început N' astfel ca $b_{N'} > 0$ şi deci şi $b_n > 0$, oricare ar fi $n > N'$. Împărţind atunci cu $b_n > 0$, obţinem:

$$\alpha'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) < \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{N'}}{b_n} < \beta'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right),$$

de unde

$$\alpha'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{a_{N'}}{b_n} + \beta'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right).$$

Dar $\frac{b_{N'}}{b_n} \to 0$, şi $\frac{a_{N'}}{b_n} \to 0$, deci

$$\alpha'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} \to \alpha' \text{ şi } \beta'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} \to \beta'.$$

Deoarece $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, există un număr $N > N'$ astfel încît, pentru orice $n \geqslant N$, să avem

$$\alpha < \alpha'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} \text{ şi } \beta'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} < \beta,$$

deci pentru $n \geqslant N$,

$$\alpha < \frac{a_n}{b_n} < \beta$$

sau $\frac{a_n}{b_n} \in V = (\alpha, \beta)$. Deoarece vecinătatea V a lui A a fost aleasă arbitrar, rezultă că $\frac{a_n}{b_n} \to A$.

Să considerăm acum cazul cînd $A = +\infty$. În acest caz, luăm o vecinătate oarecare $V = (\alpha, +\infty)$ a lui $+\infty$. Alegem apoi vecinătatea $V' = (\alpha', +\infty)$ a lui $+\infty$, astfel ca $\alpha < \alpha'$.

Deoarece:

$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to +\infty$, există un număr N' astfel ca pentru orice $n \geqslant N'$ să avem

$$\alpha' < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Raţionamentul continuă ca mai sus, folosind numai inegalităţile din stînga şi găsim un număr $N > N'$ astfel ca pentru orice $n \geqslant N$ să avem

$$\alpha < \frac{a_n}{b_n},$$

adică $\frac{a_n}{b_n} \in V$, de unde deducem că $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$.

În cazul cînd $A = -\infty$, raţionamentul se face la fel, folosind numai inegalităţile din dreapta şi deducem că $\frac{a_n}{b_n} \to -\infty$.

Dacă şirul (b_n) este strict descrescător, şirul $(c_n) = (-b_n)$ este strict crescător, şi

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{c_{n+1} - c_n} = -\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to -A,$$

deci, în baza raţionamentului precedent, rezultă că

$$\frac{a_n}{c_n} \to -A,$$

de unde

$$\frac{a_n}{b_n} = -\frac{a_n}{c_n} \to A.$$

Putem acum trece la demonstrarea regulii lui l'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Vom demonstra următoarea teoremă mai generală:

Teorema 3. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I, f şi g două funcţii definite pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0. Dacă:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$;

2) f **şi** g **sînt derivabile pe** I, **cu excepţia, eventual, a lui** x_0;

3) $g'(x) \neq 0$ **pentru orice** $x \neq x_0$ **din** I;

4) **există** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ **(finită sau infinită).**

Atunci: funcția $\frac{f}{g}$ **are limită în** x_0 **și**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vom considera întîi cazul cînd x_0 nu este extremitatea stîngă a intervalului I şi vom arăta că funcția $\frac{f}{g}$ are în x_0 *limită la stînga* egală cu A. Pentru aceasta este suficient să folosim numai şiruri strict crescătoare $x_n \nearrow x_0$ (cu $x_n < x_0$).

Deoarece $g'(x) \neq 0$ pe intervalul $I \cap (-\infty, x_0)$, conform proprietății lui Darboux, derivata g' păstrează acelaşi semn pe acest interval. Pentru a face o alegere, să presupunem că $g'(x) > 0$ pentru orice $x < x_0$ din I.

Rezultă că funcția g este *strict crescătoare* la stînga lui x_0.

Fie acum un şir strict crescător $x_n \nearrow x_0$, ($x_n \in I$, $x_n < x_0$). Atunci şirul $(g(x_n))$ este de asemenea *strict crescător*. Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$, rezultă că $|g(x_n)| \to +\infty$, deci şirul $(g(x_n))$ este *nemărginit*.

Să aplicăm teorema lui Cauchy funcțiilor f şi g pe fiecare interval $[x_n, x_{n+1}]$: găsim un punct $\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$, deci $x_n < \xi_n < x_0$ astfel ca

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Dar, deoarece $x_n \to x_0$, rezultă că $\xi_n \to x_0$ şi $\xi_n < x_0$ şi din

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ deducem că } \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to A \text{ şi deci}$$

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} \to A.$$

Dar şirul $(g(x_n))$ este strict monoton şi nemărginit. Putem deci aplica lema lui Stolz, şi deducem că

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to A.$$

Cum şirul strict crescător $x_n \to x_0$ a fost ales arbitrar, aceasta înseamnă că

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Acelaşi rezultat se obține şi dacă se consideră că $g'(x) < 0$ pentru orice $x < x_0$ din I.

Dacă x_0 nu este extremitatea dreaptă a intervalului I, se raţionează în mod asemănător şi se deduce că

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Dacă x_0 este o extremitate a intervalului I, limita în x_0 este egală cu acea limită laterală care are sens în acest punct, şi prin aceasta, din cele demonstrate mai sus rezultă că

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Dacă x_0 este punct interior al intervalului I, din egalitatea limitelor laterale rezultă că funcţia $\frac{f}{g}$ are limită în x_0, egală cu A, şi teorema este complet demonstrată.

Exemplu. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ şi dacă $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$. Apoi

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \neq 0 \text{ pentru } x \neq 0 \text{ şi}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$ de unde, aplicînd regula lui l'Hospital, obţinem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Acest rezultat a fost obţinut mai înainte pe altă cale.

Observaţii. 1° Condiţia ca g' să nu se anuleze în nici un punct $x \neq x_0$ din I este şi aici esenţială.

2° Dacă $\frac{f'}{g'}$ nu are limită în punctul x_0, nu rezultă că nici $\frac{f}{g}$ nu are limită în acest punct.

3° Practic, regula lui l'Hospital se poate folosi cînd *ştim* să calculăm $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (în cazul cînd există).

Sînt cazuri în care limita raportului $\frac{f'}{g'}$ nu se calculează mai uşor decît limita raportului $\frac{f}{g}$, şi deci în acest caz nu este indicat a se folosi regula lui l'Hospital.

Exemple. 1) Fie $f(x) = e^x - e^{-x}$ şi $g(x) = e^x + e^{-x}$ definite pe R.
Avem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Apoi $f'(x) = e^x + {}^{-}e^x$, $g'(x) = e^x - e^{-x} \neq 0$ pentru $x \neq 0$.

Avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Dacă nu ştim de la început să calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, atunci nu ştim să calculăm nici $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ şi deci regula lui l'Hospital nu poate fi utilizată (chiar dacă ştim că limita există).

Limita funcţiei $\frac{f}{g}$ se poate calcula însă direct:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

2) Fie funcţiile $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ şi $g(x) = x$ definite pe R. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Apoi

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad g'(x) = 1.$$

Avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Aplicarea regulii lui l'Hospital în acest caz nu ne ajută, dacă nu ştim de la început să calculăm limita funcţiei $\frac{f}{g}$.

Această limită se poate calcula însă direct:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = \sqrt{0 + 1} = 1.$$

Regula lui l'Hospital se poate aplica de mai multe ori, fie pentru cazul $\frac{0}{0}$, fie pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$:

Corolarul 1. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I, f şi g două funcţii definite pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0. Dacă

1) funcţiile f şi g sînt derivabile de n ori pe I, cu excepţia, eventual a lui x_0;

2) $g^{(n)}(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(i)}(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g^{(i)}(x) = 0$, sau $\lim\limits_{x\to x_0} |g^{(i)}(x)| = +\infty$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$;

4) există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A$ (finită sau infinită).

Atunci:

a) $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0, \ldots, g^{(n-1)}(x) \neq 0$ **pentru orice** $x \neq x_0$ **din** I;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Pentru $n = 1$ corolarul este deja demonstrat (în teorema 1 şi teorema 3). Să-l presupunem adevărat pentru $n - 1$, şi să arătăm atunci că este adevărat şi pentru n.

Aplicînd teorema 1 sau teorema 3 funcţiilor $f^{(n-1)}$ şi $g^{(n-1)}$, deducem că $g^{(n-1)}(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A.$$

Deoarece am presupus corolarul adevărat pentru $n - 1$, rezultă că:

$$g(x) \neq 0,\ g'(x) \neq 0,\ \ldots,\ g^{(n-1)}(x) \neq 0 \quad \text{pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I,$$

de unde rezultă punctul a) al corolarului, şi că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$$

de unde rezultă şi punctul b) al corolarului.

Exemplu. S-a arătat mai înainte că dacă $\alpha > 0$, atunci

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty.$$

Vom regăsi acest rezultat aplicînd regula lui l'Hospital de n ori, unde n este un număr natural astfel ca

$$n - 1 < \alpha \leqslant n.$$

Atunci $\alpha - n \leqslant 0$ sau $n - \alpha \geqslant 0$, deci $\frac{1}{x^{\alpha-n}} = x^{n-\alpha}$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} x^{n-\alpha} > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^x}{x^{\alpha-n}} = \lim_{x \to \infty} x^{n-\alpha} e^x = +\infty.$$

Putem deci aplica de n ori regula lui l'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}} = +\infty.$$

Corolarul 2. Dacă

1) **funcţiile** f **şi** g **sînt derivabile de** n **ori în punctul** $x_0 \in I$;

2) $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$

$\quad g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0,$

3) $g^{(n)}(x_0) \neq 0.$

Atunci:

a) **există o vecinătate** V **a lui** x_0, **astfel ca pentru orice** $x \neq x_0$ **din** V **să avem** $g(x) \neq 0,\ g'(x) \neq 0, \ldots, g^{(n-1)}(x) \neq 0$;

b) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$.

Aplicînd teorema lui Cauchy funcţiilor $f^{(n-1)}$ şi $g^{(n-1)}$ deducem că: există o vecinătate V a lui x_0 astfel ca

$$g^{(n-1)}(x) \neq 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } V$$

şi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Deoarece funcţiile $f, g, f', g', \ldots f^{(n-2)}, g^{(n-2)}$ sînt continue în punctul x_0, avem

$$\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2;$$

$$\lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = g^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-2.$$

Se poate aplica deci corolarul regulii lui l'Hospital pentru $n - 1$ şi se obţine concluzia corolarului de faţă.

Exemplu. Fie funcţia $f: I \to R$, derivabilă de n ori în punctul $a \in I$. Dacă R_n este restul de ordinul n al formulei lui Taylor corespunzătoare acestei funcţii, în punctul a, s-a demonstrat că:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Această egalitate o putem demonstra acum folosind corolarul 2. Avem:

$$R_n(a) = 0,\ R'_n(a) = 0, \ldots, R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Dacă notăm $g(x) = (x-a)^n$, avem

$$g(a) = 0,\ g'(a) = 0, \ldots,\ g^{(n-1)}(a) = 0,\ g^{(n)}(a) = n! \neq 0.$$

Aplicînd corolarul deducem că:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{0}{n!} = 0.$$

3. Alte cazuri

Pentru celelalte cazuri nu avem reguli asemănătoare cu regula lui l'Hospital, însă aceste cazuri se pot reduce la unul din cazurile $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, şi astfel se poate aplica regula lui l'Hospital. Vom lua pe rînd celelalte cazuri care se ivesc, la adunare ($\infty - \infty$), la înmulţire ($0 \cdot \infty$) şi la puteri (0^0, 1^∞ şi ∞^0).

1) *Cazul* $\infty - \infty$. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al intervalului I, f şi g două funcţii *definite* şi derivabile pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0.

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, atunci pentru $f - g$ sîntem în cazul $\infty - \infty$.

Putem presupune că $f(x) \neq 0$ şi $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I, restrîngînd, la nevoie, domeniul de definiţie al funcţiilor f şi g.

Pentru orice $x \neq x_0$ din I avem

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{f(x) - g(x)}{f(x)\, g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\, g(x)}} = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\, g(x)}}$$

şi

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)\, g(x)} = 0.$$

Am redus astfel cazul $\infty - \infty$ la cazul $\frac{0}{0}$. Dacă în acest ultim caz se poate aplica regula lui l'Hospital, atunci putem calcula limita funcţiei

$$\frac{\dfrac{1}{g} - \dfrac{1}{f}}{\dfrac{1}{fg}} \text{ şi apoi } \lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\, g(x)}}.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Pentru a putea aplica regula lui l'Hospital ultimului raport, trebuie ca derivata funcţiei de la numitor să nu se anuleze în nici un punct $x \neq x_0$ din I. Dar

$$\left(\frac{1}{f(x)\, g(x)} \right)' = - \frac{f'(x) g(x) + f(x)\, g'(x)}{[f(x)\, g(x)]^2},$$

deci trebuie ca $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I. Deoarece $f(x) > 0$ şi $g(x) > 0$, o condiţie suficientă pentru ca $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \neq 0$, este ca f' şi g' să nu se anuleze în aceleaşi puncte, adică f şi g să nu aibă în comun nici un punct de extrem în vecinătatea lui x_0.

2) Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$, atunci putem reduce cazul $\infty - \infty$ la cazul $\frac{0}{0}$ şi în modul următor:

$$f - g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right) = \frac{1 - \frac{g}{f}}{\frac{1}{f}}$$

sau:

$$f - g = \left(\frac{f}{g} - 1\right) g = \frac{\frac{f}{g} - 1}{\frac{1}{g}}.$$

Pentru a putea aplica regula lui l'Hospital în acest caz, trebuie ca $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I, sau $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I.

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right] = \pm \infty$$

după cum $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ este < 1 sau > 1.

Exemple. 1) Pentru $x > 0$ avem

$$x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right),$$

deci

$$\lim_{x \to \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \to \infty} x\left(1 - \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}\right) = \infty\,(1 - 0) = \infty.$$

2) Pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$, avem

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x} \text{ şi } \lim_{x \to 0} (\sin x - x) = 0,\ \lim_{x \to 0} x \sin x = 0,$$

deci

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

2) *Cazul* $0 \cdot \infty$. Fie x_0 un punct de acumulare al intervalului I, f şi g două funcţii definite şi derivabile pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0.

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$ atunci, pentru funcţia $f|g|$ sîntem în cazul $0 \cdot \infty$.

Putem presupune că $g(x) \neq 0$ (restrîngînd, la nevoie, domeniul de definiție). Atunci

$$f(x)\,g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$$

şi $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$. Am redus astfel cazul $0 \cdot \infty$ la cazul $\dfrac{0}{0}$. Dacă în acest caz se poate aplica regula lui l'Hospital, atunci putem calcula limita funcției $\dfrac{f}{\dfrac{1}{g}}$ şi apoi

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}.$$

Pentru a putea aplica regula lui l'Hospital în acest caz, trebuie ca $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I.

Observație. Dacă $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I, atunci $f(x) \neq f(x_0)$, deci $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I.

Putem deci scrie

$$f(x)\,g(x) = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

şi am redus astfel cazul $0 \cdot \infty$ la cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$. Regula lui l'Hospital este aplicabilă în acest caz, deoarece $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2} \neq 0$.

Exemplu. Dacă $\alpha > 0$, atunci $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$, $(x > 0)$.

Avem $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Pentru $x > 0$ putem scrie

$$x^\alpha \ln x = \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^\alpha}}$$

deci

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

3) *Cazurile* 0^0, 1^∞, ∞^0. Fie x_0 un punct de acumulare al intervalului I, f şi g două funcții definite şi derivabile pe I, cu excepția, eventual, a punctului x_0. Presupunem că

$$f(x) > 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I.$$

Pentru orice $x \neq x_0$ din I avem

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ln f(x) = A$ (finit sau infinit) atunci

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^A.$$

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, sîntem în cazul 0^0, şi deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} \ln f(x) = -\infty$, acest caz se reduce la cazul $0 \cdot \infty$.

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, sîntem în cazul 1^∞ şi deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} \ln f(x) = 0$, acest caz se reduce de asemenea la cazul $0 \cdot \infty$.

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, sîntem în cazul ∞^0 şi deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} \ln f(x) = +\infty$, şi acest caz se reduce la cazul $0 \cdot \infty$.

Pentru a calcula limita funcţiei $g(x) \ln f(x)$, scriem

$$g(x) \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ dacă } g(x) \neq 0 \text{ pentru } x \neq x_0$$

sau

$$g(x) \ln f(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}} \text{ dacă } f(x) \neq 1 \text{ pentru } x \neq x_0$$

şi astfel acest caz se reduce la cazul $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Observaţii. 1° Dacă notăm

$$h = f^g,$$

aplicînd logaritmii, obţinem

$$\ln h(x) = g(x) \ln f(x).$$

Trebuie deci să calculăm $\lim\limits_{x \to x_0} \ln h(x) = A$ şi apoi $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = e^A$.

Pe de altă parte, putem scrie

$$f^g = [1 + (f - 1)]^g = \{[1 + (f - 1)]^{\frac{1}{f-1}}\}^{g(f-1)},$$

dacă $f(x) \neq 1$ pentru $x \neq x_0$. Deci în cazul 1^∞, adică în cazul cînd $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, avem

$$\lim_{x \to x_0} [1 + (f - 1)]^{\frac{1}{f-1}} = e.$$

Aşadar, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)[f(x) - 1] = A$, atunci

$$\lim_{x\to x_0} f^g = e^A.$$

Totul revine deci, în cazul 1^∞, la cercetarea limitei

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\,[f(x) - 1].$$

Observăm că sîntem în cazul $0 \cdot \infty$ pe care-l putem reduce la unul din cazurile $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, scriind

$$g(x)[f(x) - 1] = \frac{f(x) - 1}{\dfrac{1}{g(x)}}$$

sau:

$$g(x)[f(x) - 1] = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x) - 1}}.$$

Exemple.

1) $h(x) = x^x$ — definită pentru $x > 0$.

Avem

$$\ln h(x) = x \ln x \text{ şi } \lim_{x\to 0} x \ln x = 0$$

deci

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1.$$

2) $h(x) = \cos x^{\frac{1}{x^2}}$ definită pentru $x \neq 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Avem

$$\ln h(x) = \frac{1}{x^2} \ln \cos x$$

$$\text{şi } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \cos x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = -\frac{1}{2},$$

deci

$$\lim_{x\to 0} \cos x^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3) $h(x) = \left(\dfrac{1}{1 - \cos x}\right)^{\sin x}$ definită pentru $x \neq 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Avem

$$\ln h(x) = \sin x \ln \frac{1}{1 - \cos x} = -\sin x \ln (1 - \cos x)$$

şi

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln(1-\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{1-\cos x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = -\lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x \cos x}{\sin x} \cdot 1 = -\lim_{x\to 0} 3 \sin x \cos x = 0,$$

$$\text{deci } \lim_{x\to 0} \ln h(x) = 0 \text{ şi deci } \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x}\right)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

§ 7. Aplicaţiile derivatelor la studiul funcţiilor

În acest paragraf vom arăta că derivatele de ordinul întîi şi de ordinul doi ne dau indicaţii importante asupra comportării funcţiilor.

I. Derivata întîi. Intervale de monotonie. Puncte de extrem

Fie f o funcţie definită pe o mulţime E, care este o reuniune (finită şi infinită) de *intervale.*

Vom presupune că funcţia f este derivabilă pe mulţimea E, cu excepţia unei mulţimi finite sau numărabile de puncte din E.

Fie E' submulţimea lui E pe care f este derivabilă.

Mulţimea E' este de asemenea o reuniune finită sau infinită de intervale.

Reamintim următoarele rezultate:

Dacă derivata f' este strict pozitivă pe un interval $I \subset E'$, atunci funcţia f este strict crescătoare pe I.

Dacă derivata f' este strict negativă pe un interval $I \subset E'$, atunci funcţia f este strict descrescătoare pe I.

Dacă derivata f' nu se anulează pe un interval $I \subset E'$, atunci f' păstrează acelaşi semn pe întreg intervalul I.

Din aceste proprietăţi deducem că funcţia f este strict monotonă pe aceleaşi intervale pe care derivata f' nu se anulează.

Rezultă astfel calea de urmat pentru a determina intervalele pe care funcţia f este strict monotonă (intervale de monotonie ale funcţiei):

1) *Se determină mulţimea $E' \subset E$ pe care funcţia f este derivabilă, şi se calculează derivata f' pe mulţimea E'.*

2) *Se determină punctele din E', în care derivata f' se anulează (rădăcinile derivatei), adică se rezolvă ecuaţia*

$$f'(x) = 0, \quad x \in E'.$$

3) *Se descompune mulţimea E în intervale disjuncte astfel încît pe nici un asemenea interval derivata f' nu se mai anulează.* Aceste intervale, pe care derivata nu se anulează, se obţin din intervalele mulţimii E pe care este definită funcţia, împărţindu-le mai departe prin punctele în care funcţia nu este derivabilă şi prin punctele în care derivata se anulează (presupunînd că derivata nu se anulează pe un interval întreg).

4) Pe fiecare interval I pe care derivata f' nu se anulează, ea păstrează acelaşi semn. *Se determină semnul derivatei pe I*, calculînd valoarea derivatei într-un singur punct din I.

5) În funcţie de semnul derivatei f' pe un interval I, se determină dacă funcţia f este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe I: dacă f' are semnul $+$, f este strict crescătoare, iar dacă f' are semnul $-$, f este strict descrescătoare.

Rezultă apoi şi punctele de extrem ale funcţiei:

a) Fie x_0 un punct *interior* al mulţimii E, în care funcţia f este continuă, şi fie I intervalul din E care-l conţine pe x_0 şi astfel că derivata f' nu se mai anulează pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0 (dacă f este derivabilă în x_0).

Dacă pe I funcţia f este *strict crescătoare la stînga lui* x_0 şi *strict descrescătoare la dreapta lui* x_0, atunci x_0 este un *punct de maxim* al funcţiei.

Într-adevăr, deoarece f este strict crescătoare la stînga lui x_0, funcţia are limită la stînga în x_0 şi

$$f(x) < f(x_0 - 0) \qquad \text{dacă } x < x_0,\ x \in I.$$

Deoarece f este strict descrescătoare la dreapta lui x_0, funcţia are limită la dreapta în x_0 şi

$$f(x_0 + 0) > f(x) \qquad \text{dacă } x_0 < x,\ x \in I.$$

Deoarece f este continuă în x_0 avem $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$, deci

$$f(x) < f(x_0), \text{ oricare ar fi } x \neq x_0 \text{ din } I,$$

adică x_0 este un punct de maxim al funcţiei.

Se demonstrează la fel că:

Dacă pe I funcţia f este *strict descrescătoare* la stînga lui x_0 şi *strict crescătoare* la dreapta lui x_0, atunci x_0 este un *punct de minim* al funcţiei.

Din aceste observaţii rezultă următoarea regulă:

Dacă pe I, derivata f' are semnul + la stînga lui x_0 şi semnul − la dreapta lui x_0, atunci x_0 este un punct de maxim al funcţiei f; dacă pe I, derivata f' are semnul − la stînga lui x_0 şi semnul + la dreapta lui x_0, atunci x_0 este punct de minim al funcţiei f.

Dacă derivata f' are acelaşi semn de o parte şi de alta a lui x_0, atunci x_0 nu este punct de extrem al funcţiei.

Dacă funcţia f este derivabilă în punctul de extrem x_0, atunci, conform teoremei lui Fermat, avem în mod necesar $f'(x_0) = 0$.

b) Să presupunem că punctul $x_0 \in E$ este *extremitatea stîngă* a unui interval $I \subset E$, în interiorul căruia derivata nu se mai anulează, şi că funcţia f este *continuă* în x_0. Să presupunem de asemenea că x_0 nu este extremitate dreaptă a nici unui interval din E. În aceste condiţii:

— *dacă pe I (la dreapta lui x_0) derivata are semnul* —, *atunci x_0 este un punct de maxim;*

— *dacă pe I (la dreapta lui x_0) derivata are semnul* $+$, *atunci x_0 este un punct de minim.*

Într-adevăr, în primul caz, funcţia este strict descrescătoare la dreapta lui x_0, deci

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) > f(x) \text{ pentru } x \in I,$$

adică x_0 este punct de maxim, iar în al doilea caz funcţia este strict crescătoare la dreapta lui x_0, deci

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) < f(x) \text{ pentru } x \in I,$$

adică x_0 este punct de minim.

c) Să presupunem că punctul $x_0 \in E$ este extremitatea dreaptă a unui interval I (din care este formată mulţimea E) în interiorul căruia derivata nu se mai anulează, că funcţia f este *continuă* în x_0 şi că x_0 nu este extremitate stîngă a nici unui interval din E. În aceste condiţii:

— *dacă pe I (la stînga lui x_0) derivata are semnul* —, *atunci x_0 este punct de minim;*

— *dacă pe I (la stînga lui x_0) derivata are semnul* $+$, *atunci x_0 este punct de maxim.*

Demonstraţia este analogă cu cea a cazului precedent.

O b s e r v a ţ i e. În ultimele două cazuri, funcţia f poate fi derivabilă în x_0, fără ca derivata să se anuleze în x_0.

Rezultatele privitoare la intervalele de monotonie şi la punctele de extrem se trec într-un tablou cu trei linii: în prima linie se trec punctele care delimitează intervalele mulţimii E, punctele în care derivata nu există şi punctele în care derivata se anulează. În linia a doua se trece semnul derivatei f'. În linia a treia se trec extremele funcţiei, şi se indică prin săgeţi comportarea funcţiei ($\nearrow$dacă este strict crescătoare şi $\searrow$dacă este strict descrescătoare).

Exemple. 1) Fie funcţia $f(x) = e^x - x$ definită pe R.

Avem $f'(x) = e^x - 1$ pentru orice $x \in R$, Ecuaţia $e^x - 1 = 0$ are soluţia $x = 0$. Intervalele pe care derivata nu se anulează sînt $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$; pe primul interval avem $f'(x) < 0$ deoarece $f'(-1) = e^{-1} - 1 < 0$; pe al doilea interval avem $f'(x) > 0$ deoarece $f'(1) = e^1 - 1 > 0$.

Punctul 0 este punct de minim al funcţiei şi $f(0) = e^0 = 1$. Tabloul variaţiei funcţiei este:

x		0	
f'	$-$ $-$	0	$+$ $+$
f	$\searrow$	m (1)	$\nearrow$

Deoarece minimul funcţiei este 1, rezultă că $f(x) \geqslant 1$ pentru orice $x \in R$, adică $e^x - x \geqslant 1$ sau

$$e^x \geqslant x + 1,\ x \in R.$$

Atunci, cu atît mai mult

$$e^x > x \text{ pentru orice } x \in R.$$

Acest rezultat a fost obținut anterior pe altă cale.

2) Fie funcția $f(x) = \ln x - x$ definită pe $(0, +\infty)$.

Avem $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ pentru orice $x > 0$. Ecuația $\frac{1}{x} - 1 = 0$ are soluția $x = 1$. Intervalele pe care derivata nu se anulează sînt $(0, 1)$ și $(1, +\infty)$. Avem $f'(x) > 0$ pentru $x \in (0, 1)$, deoarece $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$, și $f'(x) < 0$ pentru $x > 1$ deoarece $f'(2) = \frac{1}{2} - 1 < 0$.

Punctul 1 este un punct de maxim al funcției și $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$. Tabloul variației funcției este:

x		0		1		
f'		+	+	0	−	−
f			$\nearrow$	M (-1)	$\searrow$	

Deoarece maximul funcției este -1, rezultă că $f(x) \leqslant -1$ pentru orice $x > 0$, adică $\ln x - x \leqslant -1$, sau

$$\ln x \leqslant x - 1, \quad x > 0.$$

Atunci cu atît mai mult

$$\ln x < x \text{ pentru orice } x > 0.$$

Acest rezultat a fost obținut anterior prin logaritmarea inegalității $e^x > x$, $(x > 0)$.

3) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ definită pe $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Avem

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

Ecuația $x^2 - 2x - 1 = 0$ are soluțiile $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ și $x_2 = 1 - \sqrt{2}$; în aceste puncte, derivata se anulează.

Avem $f(1 + \sqrt{2}) = 2(1 + \sqrt{2})$, $f(1 - \sqrt{2}) = 2(1 - \sqrt{2})$.

Tabloul variației funcției este:

x		$1 - \sqrt{2}$		1		$1 + \sqrt{2}$	
f'	+	0	−	|	−	0	+
f	$\nearrow$	M $2(1 - \sqrt{2})$	$\searrow$	|	$\searrow$	m $2(1 + \sqrt{2})$	$\nearrow$

2. Derivata a doua. Convexitate şi concavitate. Puncte de inflexiune

Simpla cunoaştere a faptului că o funcţie f este, de exemplu, strict crescătoare pe un interval I, nu este totdeauna suficientă pentru a ne da seama de forma graficului său.

De exemplu, funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ definită pe $[0, +\infty)$ este strict crescătoare, însă acest fapt nu este suficient pentru a decide dacă graficul său

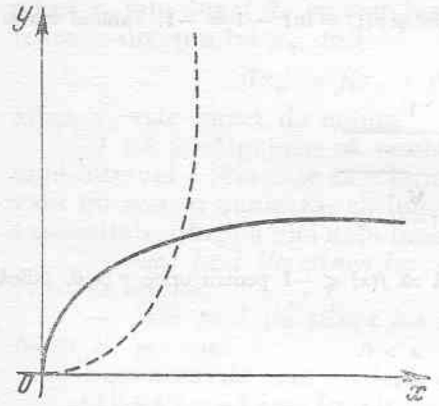


Fig. 99

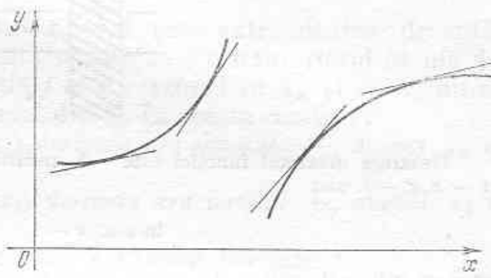


Fig. 100

are forma indicată cu linie continuă sau cea indicată cu linie întrerupt în figura 99.

O funcţie derivabilă $f: I \to R$ poate fi strict crescătoare pe I în două moduri, după cum tangenta la grafic, în fiecare punct, se află sub grafic sau deasupra graficului (fig. 100).

În primul caz graficul este o curbă *convexă*, iar în al doilea caz, o curbă *concavă*.

De asemenea, funcţia derivabilă f poate fi strict descrescătoare pe I în două moduri, după cum tangenta la grafic, în fiecare punct, se află sub grafic sau deasupra graficului (fig. 101).

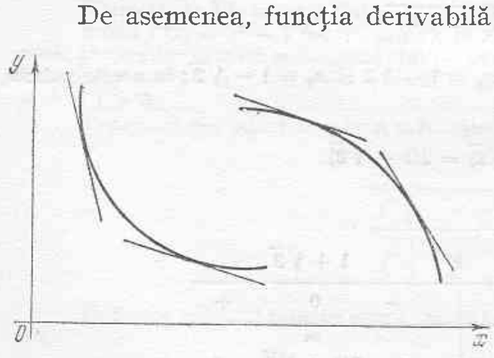


Fig. 101

În primul caz, graficul este o curbă *convexă*, iar în al doilea caz, o curbă *concavă*.

Vom da acum o definiţie precisă a convexităţii şi concavităţii şi vom arăta că derivata a doua (dacă există) ne dă indicaţii precise în această privinţă.

Fie f o funcție *derivabilă* pe un interval I și x_0 un punct din I. Tangenta la graficul funcției în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ are ecuația

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Funcția liniară

$$F(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(definită pe R) are ca grafic tangenta M_0T (fig. 102).

Spunem că tangenta M_0T se află *sub grafic* dacă

$$F(x) \leqslant f(x) \text{ pentru orice } x \in I$$

și că se află *strict sub grafic* dacă

$$F(x) < f(x) \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I.$$

Spunem că tangenta se află *deasupra graficului* dacă

$$F(x) \geqslant f(x) \text{ pentru orice } x \in I$$

și că se află strict *deasupra graficului* dacă

$$F(x) > f(x) \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I.$$

Definiție. Funcția f este convexă (respectiv strict convexă) pe intervalul I, dacă tangenta dusă în orice punct al graficului se află sub grafic (respectiv strict sub grafic).

Funcția f este concavă (respectiv strict concavă) pe intervalul I, dacă tangenta dusă în orice punct al graficului se află deasupra graficului (respectiv strict deasupra graficului).

Spunem că graficul funcției f este o *curbă convexă* (strict convexă) sau *concavă* (strict concavă) dacă funcția f are proprietatea respectivă.

Exemplu. O funcție liniară $f(x) = ax + b$ are ca grafic o dreaptă. Ea este în același timp convexă și concavă, deoarece tangenta într-un punct oarecare al graficului coincide cu graficul, deci se află în același timp sub grafic și deasupra graficului.

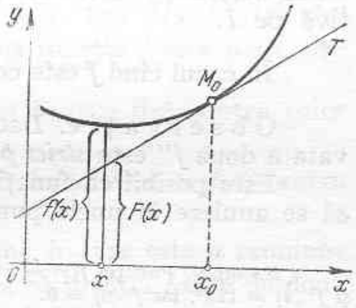


Fig. 102

Reciproc, dacă funcția f este și convexă și concavă pe I, atunci tangenta într-un punct oarecare al graficului coincide cu graficul, deci graficul este un segment de dreaptă și deci funcția este liniară.

Fie f o funcție *derivabilă de două ori* pe un interval I.

Dacă funcția f este convexă pe I, derivata a doua f'' este pozitivă pe I.

Dacă funcția f este concavă pe I, derivata a doua f'' este negativă pe I.

Într-adevăr, să presupunem că f este *convexă* pe I și să arătăm că derivata întîi f' este *crescătoare* pe I, de unde va rezulta că derivata sa f'' este *pozitivă* pe I.

Fie $x_1 < x_2$ două puncte oarecare din I.
Ducînd tangenta la grafic în punctul $M_1(x_1, f(x_1))$, avem:

$$F_1(x) \leqslant f(x) \text{ pentru orice } x \in I,$$

unde $F_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$.
În particular, $F_1(x_2) \leqslant f(x_2)$ adică

$$(*)\ f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2).$$

Ducînd tangenta la grafic în punctul $M_2(x_2, f(x_2))$, avem de asemenea

$$F_2(x) \leqslant f(x) \text{ pentru orice } x \in I,$$

unde $F_2(x) = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$.
În particular, $F_2(x_1) \leqslant f(x_1)$ adică

$$(**)\ f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \leqslant f(x_1).$$

Adunînd membru cu membru inegalitățile (*) și (**) obținem:

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \leqslant 0$$

sau

$$[f'(x_1) - f'(x_2)](x_2 - x_1) \leqslant 0$$

și deoarece $x_2 - x_1 > 0$, rezultă $f'(x_1) - f'(x_2) \leqslant 0$ sau $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$ adică derivata f' este crescătoare pe I și deci derivata a doua f'' este pozitivă pe I.

În cazul cînd f este concavă, demonstrația se face la fel.

O b s e r v a ț i e. Dacă f este *strict convexă* pe I nu rezultă că derivata a doua f'' este *strict pozitivă* pe I.

Este posibil ca funcția f să fie strict convexă și derivata a doua f'' să se anuleze în unele puncte.

Exemplu. Funcția $f(x) = x^4$ definită pe R este strict convexă pe R. Avem $f'(x) = 4x^3$ și $f''(x) = 12x^2$, iar $f''(0) = 0$.

Reciproc, avem însă următoarea

P r o p o z i ț i e. Fie f o funcție derivabilă de două ori pe intervalul I.

1) Dacă derivata a doua f'' este pozitivă pe I, funcția f este convexă pe I.

Dacă derivata a doua f'' este strict pozitivă pe I, funcția f este strict convexă pe I.

2) Dacă derivata a doua f'' este negativă pe I, funcţia f este concavă pe I.

Dacă derivata a doua f'' este strict negativă pe I, funcţia f este strict concavă pe I.

Fie x_0 un punct *oarecare* din I. Să scriem formula lui Taylor de ordinul întîi în punctul x_0:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(\xi),$$

unde $x \in I$ iar ξ este cuprins între x şi x_0.

Să scriem şi funcţia al cărei grafic este tangenta în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei f:

$$F(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Atunci, pentru orice $x \in I$ avem

$$F(x) - f(x) = -\frac{(x - x_0)^2}{2} f''(\xi).$$

Deoarece $(x - x_0)^2 > 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I, semnul diferenţei $F(x) - f(x)$ este contrar semnului lui $f''(\xi)$.

Dacă f'' este *pozitivă*, avem $f''(\xi) \geqslant 0$ şi deci $F(x) - f(x) \leqslant 0$ sau $F(x) \leqslant f(x)$ pentru orice $x \in I$, adică funcţia f este *convexă*.

Dacă f'' este *strict pozitivă*, avem $f''(\xi) > 0$ şi deci $F(x) - f(x) < 0$ sau $F(x) < f(x)$ pentru orice $x \neq x_0$ din I, adică funcţia f este *strict convexă*.

Dacă f'' este *negativă*, avem $f''(\xi) \leqslant 0$ deci $F(x) \geqslant f(x)$ pentru orice $x \in I$, adică funcţia f este *concavă*.

Dacă f'' este *strict negativă*, avem $f''(\xi) < 0$ şi deci $F(x) > f(x)$ pentru orice $x \neq x_0$ din I, adică f este *strict concavă*.

Fie acum o funcţie f definită pe o mulţime E care este o reuniune (finită sau infinită) de intervale. Vom presupune că funcţia f este de două ori derivabilă pe E, cu excepţia unei mulţimi finite sau numărabile de puncte din E. Mulţimea $E'' \subset E$, pe care f este derivabilă de două ori, este, de asemenea, reuniune (finită sau infinită) de intervale.

Din propoziţia precedentă deducem că funcţia f este strict convexă sau strict concavă pe acelaşi interval pe care derivata a doua păstrează acelaşi semn. Deoarece derivata a doua are, de asemenea, proprietatea lui Darboux, deducem că funcţia f este strict convexă sau strict concavă pe aceleaşi intervale pe care derivata a doua nu se anulează.

Rezultă astfel calea de urmat pentru determinarea intervalelor pe care funcţia este strict concavă sau strict convexă :

1) *Se determină mulţimea $E'' \subset E$ pe care funcţia f este derivabilă de două ori, şi se calculează derivata a doua f'' pe mulţimea E''.*

2) *Se determină punctele din E'' în care derivata a doua f'' se anulează, adică se rezolvă ecuaţia*

$$f''(x) = 0, \ x \in E''.$$

3) Se descompune mulţimea E în intervale disjuncte, astfel încît, pe nici un asemenea interval, derivata a doua f'' să nu se mai anuleze. Aceste intervale pe care derivata a doua nu se mai anulează se obţin din intervalele mulţimii E pe care este definită funcţia, împărţindu-le mai departe prin punctele în care funcţia nu este de două ori derivabilă şi prin punctele în care derivata a doua se anulează (presupunînd că derivata a doua nu se anulează pe un întreg interval).

4) Pe fiecare interval I pe care derivata a doua f'' nu se mai anulează, ea păstrează acelaşi semn. Se determină semnul derivatei a doua pe întregul interval I calculînd valoarea ei într-un singur punct din I.

5) În funcţie de semnul derivatei a doua pe un interval I se determină dacă funcţia f este strict convexă sau strict concavă : dacă f'' are semnul $+$, f este strict convexă, iar dacă f'' are semnul $-$, f este strict concavă.

La tabloul în care se trec rezultatele privind intervalele de monotonie şi extremele unei funcţii se mai adaugă o linie în care se trece semnul derivatei a doua. În prima linie trebuie trecute atunci şi valorile argumentului în care funcţia nu este derivabilă de două ori, cum şi rădăcinile derivatei a doua.

Exemplu. Fie funcţia $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$.

Avem : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ şi $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ pentru orice $x \neq 0$

x	$-\infty$		0			$+\infty$
f'		$-\ -$			$-\ -$	
f	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0
f''		$-\ -$			$+\ +$	

Pe intervalul $(-\infty, 0)$ funcţia este concavă, iar pe intervalul $(0, +\infty)$ funcţia este convexă.

În tablou am trecut şi limitele funcţiei în punctele $-\infty$ şi $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ şi } \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

cum și limitele laterale în punctul 0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Putem acum trasa graficul funcției (fig. 103).

De mai multe ori s-a vorbit înainte despre *puncte de inflexiune*, și anume cu ocazia definirii derivatelor infinite și cu ocazia determinării punctelor de extrem ale funcției cu ajutorul valorilor derivatelor succesive într-un punct.

Fie f o funcție definită pe un interval I și x_0 un punct *interior* al lui I.

Definiție. Se spune că punctul interior $x_0 \in I$ este punct de inflexiune al funcției f, dacă funcția are derivată (finită sau infinită) în punctul x_0, și dacă funcția este convexă de o parte a lui x_0 și concavă de cealaltă parte a lui x_0.

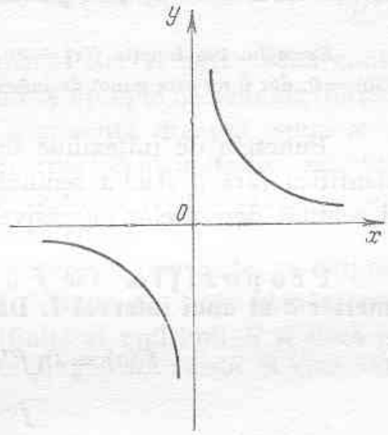


Fig. 103

Dacă x_0 este punct de inflexiune al funcției, punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numește *punct de inflexiune al graficului*.

Geometric, a spune că M_0 este punct de inflexiune al graficului înseamnă că graficul admite tangentă în punctul M_0 (paralelă sau neparalelă cu axa Oy) și că de o parte a lui M_0 graficul este o curbă convexă, iar de cealaltă parte a lui M_0 graficul este o curbă concavă sau că de o parte a lui M_0 tangenta se află sub grafic, iar de cealaltă parte a lui M_0 tangenta se află deasupra graficului.

Rezultă că tangenta dusă într-un punct de inflexiune al graficului traversează graficul, deoarece de o parte a lui M_0 tangenta se află sub grafic, iar de cealaltă parte a lui M_0 tangenta se află deasupra graficului.

După ce s-au determinat intervalele pe care funcția este strict convexă sau strict concavă rezultă și punctele de inflexiune ale funcției:

Fie f o funcție definită pe o mulțime E care este reuniune (finită sau infinită) de intervale, și x_0 un punct din *interiorul* unui interval al mulțimii E, astfel încît derivata $f'(x_0)$ există (finită sau infinită).

Dacă de o parte și de alta a lui x_0 derivata a doua f'' are semne diferite, atunci x_0 este punct de inflexiune al funcției f.

Dacă derivata a doua are același semn de o parte și de alta a lui x_0, atunci x_0 nu este punct de inflexiune al funcției.

Dacă într-un punct de inflexiune x_0 funcția este derivabilă de două ori, atunci avem în mod necesar $f''(x_0) = 0$.

Într-adevăr, x_0 este punct de extrem al derivatei f', deci derivata f'' a lui f' se anulează în x_0, conform teoremei lui Fermat.

Observație. Dacă derivata a doua se anulează într-un punct x_0, nu rezultă că x_0 este punct de inflexiune.

Exemplu. Fie funcția $f(x) = x^4$ definită pe R. Avem $f'(x) = 4x^3$ și $f''(x) = 12x^2$, iar $f''(0) = 0$, dar 0 nu este punct de inflexiune, ci punct de minim al funcției.

Punctele de inflexiune în care derivata a doua se anulează se pot identifica fără a studia semnul derivatei a doua în jurul acestor puncte, ci semnul derivatelor succesive numai în aceste puncte:

Propoziție. Fie f o funcție derivabilă de n ori într-un punct interior a al unui interval I. Dacă:

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$f^{(n)}(a) \neq 0,\ n \geqslant 3$$

și n este impar, atunci a este punct de inflexiune al funcției.

Să notăm $h = f'$; avem:

$$h(a) = 0,\ h'(a) = 0, \ldots,\ h^{(n-2)}(a) = 0,\ h^{(n-1)}(a) \neq 0,$$

iar $n - 1$ este *par*, deci a este punct de extrem al funcției h, iar derivata sa h' are semne diferite de o parte și de alta a lui a (dacă h' ar avea același semn de o parte și de alta a lui a, atunci a n-ar mai fi punct de extrem pentru h). Rezultă că $f'' = h'$ are semne diferite de o parte și de alta a lui a, deci a este punct de inflexiune al funcției f.

Corolar. Dacă într-un punct interior $a \in I$, avem

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0,\ f'''(a) \neq 0,$$

atunci a este punct de inflexiune al funcției f.

Exemplu. Fie funcția $f(x) = x^3$. Avem $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$. Deci, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6$. Rezultă că 0 este punct de inflexiune al funcției f.

3. Asimptote

Fie f o funcţie definită pe o mulţime E care este reuniune (finită sau infinită) de intervale.

În cazul cînd *funcţia* f este *nemărginită*, sau *mulţimea* E este nemărginită, graficul funcţiei este o mulţime nemărginită de puncte din plan (în sensul că nu există nici un dreptunghi sau nici un cerc care să conţină graficul în întregime).

Spunem în acest caz că graficul funcţiei are ramuri nemărginite.

Dacă o ramură nemărginită a graficului se apropie necontenit (într-un sens care va fi precizat mai departe) de o anumită dreaptă, spunem că această dreaptă este *asimptotă* la graficul funcţiei. Pentru studiu, asimptotele se împart în două categorii: asimptote verticale (sau paralele cu axa Oy) şi asimptote oblice (sau neparalele cu axa Oy).

a) *Asimptote verticale.* Asimptotele verticale se definesc pentru *funcţii nemărginite* chiar dacă sînt definite pe mulţimi mărginite.

Dacă x_0 este punctul de acumulare (finit) al mulţimii E şi dacă cel puţin una din limitele laterale $f(x_0 - 0)$ şi $f(x_0 + 0)$ există şi este *infinită*, spunem că dreapta

$$x = x_0,$$

paralelă cu axa Oy, este *asimptotă verticală* la graficul funcţiei f.

Evident, dacă $x \in E$ şi dacă funcţia f este continuă în x_0, atunci limitele laterale sînt egale cu $f(x_0)$, deci sînt *finite*. Aşadar, asimptotele verticale trebuie căutate în punctele de discontinuitate ale funcţiei (mai precis în punctele de discontinuitate de speţa a doua) şi în punctele de acumulare ale lui E care nu aparţin lui E (deci în care funcţia f nu este definită).

Exemple. 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$. Avem $f(0 - 0) = -\infty$ şi $f(0 + 0) = +\infty$, deci dreapta $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală a graficului.

2) $f(x) = \operatorname{tg} x$ definită pentru $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, k întreg. Avem $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty$ şi $f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty$, deci dreapta $x = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă verticală a graficului.

3) $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$. Avem $f(0 + 0) = -\infty$ (limita la stînga în 0 nu are sens). Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală a graficului.

4) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, definită pe $(0, +\infty)$. Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$ (limita la stînga în 0 nu are sens). Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală a graficului.

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 5, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$ definită pe R.

Avem $f(1-0) = -\infty$ şi $f(1+0) = +\infty$. Funcţia f este definită în 1, dar este discontinuă în acest punct. Dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală a graficului.

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ definită pe intervalul $(-1, 1)$. Dreptele $x = -1$ şi $x = 1$ sînt asimptote verticale ale graficului. Din acest exemplu se constată că funcţia poate avea asimptote verticale chiar dacă este definită pe o mulţime mărginită.

Observaţie. Dacă dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f, distanţa dintre grafic şi asimptotă, măsurată pe orizontală, descreşte necontenit cînd punctul de pe grafic se depărtează necontenit (cînd abscisa punctului de pe grafic se apropie de x_0).

b) *Asimptote oblice.* Asimptotele oblice se definesc pentru funcţii definite pe *mulţimi nemărginite*, chiar dacă funcţiile sînt mărginite.

Dacă mulţimea E pe care este definită funcţia este nemărginită la dreapta (nemajorată), atunci $+\infty$ este punct de acumulare al mulţimii E. În acest caz:

Spunem că o dreaptă $y = mx + n$ este asimptotă (oblică) *la ramura spre $+\infty$ a graficului dacă*

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

În loc de „asimptotă la ramura spre $+\infty$ a graficului" vom spune, mai simplu, „asimptotă la $+\infty$".

Dacă mulţimea E este nemărginită la stînga (neminorată), atunci $-\infty$ este punct de acumulare al mulţimii E. În acest caz:

Spunem că o dreaptă $y = m'x + n'$ este asimptotă (oblică) *la ramura spre $-\infty$ a graficului dacă*

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - m'x - n'] = 0.$$

În loc de „asimptotă la ramura spre $-\infty$ a graficului" vom spune „asimptotă la $-\infty$".

Vom studia întîi asimptotele la $+\infty$. Asimptotele la $-\infty$ se studiază la fel.

Să presupunem deci că mulţimea E este nemajorată şi că dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$, adică

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

Avem atunci

$$f(x) - mx = [f(x) - mx - n] + n,$$

deci:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = n.$$

Mai departe, pentru $x > 0$, avem

$$\frac{f(x)}{x} - m = \frac{f(x) - mx}{x},$$

deci

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - mx}{x} = \frac{n}{+\infty} = 0$$

şi, deoarece

$$\frac{f(x)}{x} = \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] + m,$$

rezultă

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Aşadar, dacă dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$, coeficientul unghiular m şi ordonata la origine n verifică egalităţile următoare:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx].$$

Reciproc, să presupunem că:

există $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ şi *este* **finită;**

există $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = n$ *şi este* **finită;**

atunci *dreapta* $y = mx + n$ *este asimptotă la* $+\infty$.

Într-adevăr, în acest caz,

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] - n = 0.$$

Observaţii. 1° Dacă $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ nu există sau este infinită, graficul funcţiei nu are asimptotă la $+\infty$.

Dacă există $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ şi este finită, dar $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$ nu există sau este infinită, graficul funcţiei nu are asimptotă la $+\infty$.

2° Dacă există $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ şi este *finită*, atunci dreapta $y = a$ este asimptotă la $+\infty$, paralelă cu axa Ox (asimptotă orizontală).

Într-adevăr, $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - a] = 0$.

3° Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *nu există* (nici finită, nici infinită), atunci *graficul funcţiei nu are asimptotă la* $+\infty$.

Să presupunem că există $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$.

Dacă $m = 0$, atunci $f(x) - mx = f(x)$ şi deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ nu există, nici $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - mx]$ nu există, deci graficul nu are asimptotă la $+\infty$.

Dacă $m \neq 0$, atunci pentru $x > 0$ avem $f(x) = \frac{f(x)}{x}\, x$ şi deci ar exista $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m\infty$, ceea ce contrazice ipoteza.

Aşadar, o condiţie *necesară* (dar nu suficientă) pentru ca graficul să aibă asimptotă la $+\infty$ este să existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (finită sau infinită). În cazul cînd această limită nu există, este inutil a mai căuta asimptotă la $+\infty$.

Din consideraţiile precedente rezultă calea de urmat pentru a vedea dacă există asimptotă la $+\infty$, iar în cazul cînd există, pentru a o determina:

1) Se caută $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ şi este *finită*, atunci dreapta $y = a$ este asimptotă la $+\infty$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ şi este *infinită*, atunci:

2) Se caută $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ şi este finită, atunci:

3) Se caută $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = n$ şi este *finită*, atunci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$.

Exemple. 1) $f(x) = \sin x$ definită pe R. Nu există $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$, deci graficul funcţiei nu are asimptotă la $+\infty$.

2) $f(x) = x^2$ definită pe R. Avem $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, deci este posibil ca graficul să aibă asimptotă la $+\infty$ şi atunci calculăm:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Deoarece această limită este *infinită*, graficul nu are asimptotă la $+\infty$.

3) $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$.

Avem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

deci calculăm mai departe limita

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

care este *finită*, deci calculăm mai departe limita

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

care este infinită, deci graficul nu are asimptotă la $+\infty$.

4) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ definită pe $R - \{1\}$. Avem

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1,$$

deci dreapta $y = 1$ este asimptotă la $+\infty$.

5) $f(x) = 2\sqrt{x^2-1}$ definită pe $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Avem

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x^2-1} = +\infty,$$

deci calculăm mai departe limita

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 2$$

care este *finită*, deci calculăm mai departe limita

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} [2\sqrt{x^2-1} - 2x] =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0.$$

Aşadar, dreapta $y = 2x$ este asimptotă la $+\infty$.

Să presupunem că mulţimea E este neminorată. Făcînd consideraţii asemănătoare cu cele din cazul precedent, rezultă calea de urmat pentru a vedea dacă există asimptotă la $-\infty$, iar în cazul cînd există, pentru a o calcula:

1) Se caută $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ şi este *finită*, dreapta $y = a$ este asimptotă la $-\infty$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ şi este *infinită*, atunci:

2) Se caută $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m'$ şi este *finită*, atunci:

3) Se caută $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - m'x]$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - m'x] = n'$ şi este finită, atunci:

dreapta $y = m'x + n'$ este asimptotă la $-\infty$.

Observaţii. Dacă nu există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, graficul funcţiei **nu are** asimptotă la $-\infty$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (finită sau infinită), dar $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ nu există sau nu este finită, atunci graficul funcţiei nu are asimptotă la $-\infty$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (finită sau infinită) şi dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ şi este finită, dar $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - mx]$ nu există sau este infinită, atunci **graficul** funcţiei nu are asimptotă la $-\infty$.

Exemple. 1) $f(x) = \operatorname{tg} x$, definită pe R. Nu există $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{tg} x$, deci graficul nu are **asimptotă** la $-\infty$.

2) $f(x) = x^2$ definită pe R. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, deci calculăm mai departe **limita**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

care este infinită, deci graficul nu are asimptotă la $-\infty$.

3) $f(x) = \ln |x|$ definită pe $R - \{0\}$. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln |x| = +\infty$, deci calculăm **mai** departe limita

$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln |x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln |x|}{|x|} = 0$$

care este finită, deci calculăm mai departe limita

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} \ln |x| = +\infty$$

care este infinită, deci graficul nu are asimptotă la $-\infty$.

4) $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$ definită pe $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
Avem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{x^2 - 1} = +\infty,$$

deci calculăm mai departe limita

$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 2 \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{-\sqrt{x^2}} = -2 \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = -2,$$

care este finită, deci calculăm mai departe limita

$$n' = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m'x] = 2 \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 - 1} + x] = 2 \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = 0,$$

care este finită, deci dreapta $y = -2x$ este asimptotă la $-\infty$.

5) $f(x) = e^x$ definită pe R. Avem

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0,$$

deci dreapta $y = 0$ este asimptotă la $-\infty$.

4. Reprezentarea grafică a funcţiilor

Cercetările întreprinse în cadrul acestui paragraf sînt suficiente pentru a putea trasa graficul unei funcţii care admite derivată de ordinul doi în toate punctele sau cu excepţia unei mulţimi numărabile de puncte. De cele mai multe ori se pune problema trasării graficului unei *funcţii elementare*. În acest scop se procedează pe etape în modul următor:

I) Domeniul de definiţie. 1) Dacă domeniul de definiţie a unei funcţii elementare nu este specificat, se subînţelege că este domeniul maxim de definiţie, format din toate punctele pentru care operaţiile au sens. Se determină acest domeniu maxim de definiţie.

2) Se calculează $f(0)$ dacă funcţia este definită în 0. În punctul $(0, f(0))$ graficul taie axa Oy.

3) Se rezolvă $f(x) = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii, dacă există, reprezintă abscisele punctelor în care graficul taie axa Ox.

4) Dacă domeniul de definiţie este nemajorat, se cercetează $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, iar dacă domeniul de definiţie este neminorat, se cercetează $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

II) Derivata întîi. 1) Se determină mulţimea $E' \subset E$ pe care funcţia f este derivabilă şi se calculează derivata întîi f'.

2) Se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$. Rădăcinile derivatei întîi pot fi puncte de extrem ale funcţiei.

3) Se determină intervalele pe care derivata întîi păstrează acelaşi semn şi se determină semnul derivatei întîi pe aceste intervale.

III) Derivata a doua. 1) Se determină mulţimea $E'' \subset E'$ pe care funcţia este derivabilă de două ori; se calculează derivata a doua f''.

2) Se rezolvă ecuaţia $f''(x) = 0$. Rădăcinile derivatei a doua pot fi puncte de inflexiune.

3) Se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează acelaşi semn şi se determină semnul derivatei a doua pe aceste intervale.

IV) Asimptotele. 1) Se cercetează dacă există asimptote verticale şi, dacă există, se calculează aceste asimptote.

2) Se cercetează dacă există asimptote oblice şi, dacă există, se calculează aceste asimptote.

V) T a b l o u l. Rezultatele obţinute anterior se trec, pentru sistematizare, într-un tablou cu linii orizontale.

1) În linia întîi se trec valorile remarcabile ale argumentului, obţinute anterior (rădăcinile funcţiei, derivatei întîi şi derivatei a doua, punctele în care funcţia şi derivatele nu sînt definite, extremităţile intervalelor pe care funcţia este definită etc.). Dacă domeniul de definiţie este nemărginit, se trec şi punctele $+\infty$ şi $-\infty$.

2) În linia a doua se trec rezultatele privind derivata întîi; se trage o linie verticală în dreptul punctelor în care funcţia este definită, dar derivata întîi nu este definită; de o parte şi de alta a acestei linii se scriu limitele laterale ale derivatei întîi, dacă există. Se scrie 0 în dreptul rădăcinilor derivatei şi se trece semnul derivatei.

3) În linia a treia se trec valorile funcţiei în dreptul valorilor argumentului din linia întîi. Se marchează cu săgeţi creşterea sau descreşterea funcţiei. Se trage o linie verticală, în dreaptul punctelor în care funcţia nu este definită. De o parte şi de alta a acestei linii se trec, dacă există, limitele laterale ale funcţiei.

În dreptul lui $+\infty$ şi $-\infty$ se trec limitele funcţiei în aceste puncte. Se marchează cu literele m, M şi i, respectiv, punctele de minim, de maxim şi de inflexiune ale funcţiei.

4) În linia a patra se trec rezultatele privind derivata a doua; se trage o linie verticală în dreptul punctelor în care f sau derivata întîi f' este definită, dar derivata a doua nu este definită. Se scrie 0 în dreptul rădăcinilor derivatei a doua. Se trece semnul derivatei a doua.

VI) G r a f i c u l. Rezultatele sistematizate în tablou permit trasarea graficului funcţiei pe o bucată de hîrtie pe care s-a desenat un sistem de axe ortogonale Ox şi Oy. Se trasează întîi asimptotele. Se trec apoi punctele $(x, f(x))$ care rezultă din tablou. În punctele de extrem ale graficului se trasează un mic segment de dreaptă orizontal. În punctele de inflexiune ale graficului se trasează o porţiune din tangenta la grafic în acest punct. Se unesc apoi punctele printr-o linie, ţinînd seama de indicaţiile din tablou privind creşterea sau descreşterea, cum şi convexitatea sau concavitatea funcţiei. Linia astfel obţinută ne dă forma graficului funcţiei.

Exemplu. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

I) D o m e n i u l d e d e f i n i ţ i e. Se pune condiţia ca $\dfrac{x+1}{x-1} \geqslant 0$ şi ca $x - 1 \neq 0$. Se obţine domeniul $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

În punctul 0 funcția nu este definită, deci graficul nu taie axa Oy. Rădăcinile funcției: -1.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1,\quad \lim_{x\to1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty.$$

II) Derivata întîi. $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

definită pe $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$. Pe această mulțime derivata f' nu se anulează. Semnul derivatei întîi este $-$ în ambele intervale. Avem $\lim\limits_{x\to1} f'(x) = -\infty$.

III) Derivata a doua. $f''(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,\dfrac{2x^2+3x+1}{(x-1)^3}$

definită pe $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$.

Derivata a doua nu se anulează pe această mulțime.
Semnul derivatei a doua este $-$ pe primul interval și $+$ pe al doilea interval.

IV) Asimptotele. Deoarece $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$, dreapta $x=1$ este asimptotă verticală.

Deoarece $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$, dreapta $x=-1$ nu este asimptotă verticală.

Asimptotele oblice au rezultat la punctul I: dreapta $y=1$ este asimptotă atît la $+\infty$ cît și la $-\infty$.

V) Tabloul.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-\quad-$	$-\infty$		$-\infty$	$-\quad-$	
f	1	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	1
f''		$-\quad-$				$+\quad+$	

VI) Graficul.

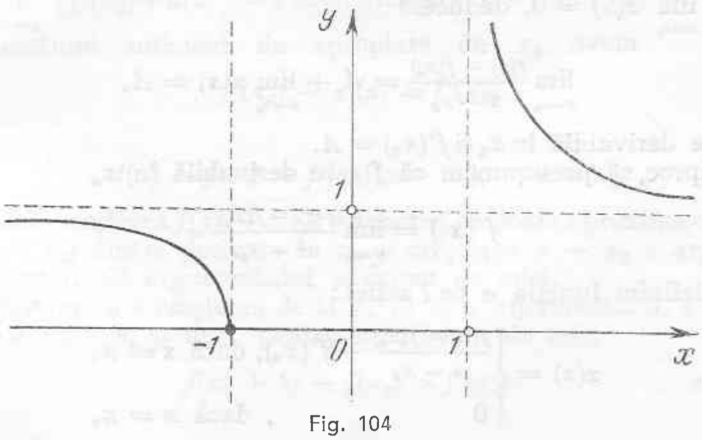


Fig. 104

§ 8. Diferențiale

1. Definiția diferențialei

Fie f o funcție definită pe un interval I și $x_0 \in I$.

Definiție. **Se spune că funcția f este diferențiabilă în punctul $x_0 \in I$, dacă există un număr $A \in R$ și o funcție α definită pe I, continuă în x_0 și nulă în x_0, astfel încît pentru orice $x \in I$, să avem**

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0).$$

Deoarece funcția α este continuă în x_0 și nulă în acest punct, avem

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0.$$

Dacă funcția f este diferențiabilă în fiecare punct din I, spunem că este diferențiabilă pe I.

Propoziție. **Funcția f este diferențiabilă într-un punct $x_0 \in I$ dacă și numai dacă este derivabilă în x_0.**

Să presupunem întîi că f este diferențiabilă în x_0, deci

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \ x \in I,$$

unde $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Pentru $x \neq x_0$ putem împărți cu $x - x_0$ și obținem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x), \ x \neq x_0.$$

Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, deducem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A,$$

deci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = A$.

Reciproc, să presupunem că f este derivabilă în x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Să definim funcția α pe I astfel:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0 & , \text{dacă } x = x_0 \end{cases}$$

Atunci

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 = \alpha(x_0),$$

deci funcţia α este continuă în punctul x_0 şi nulă în acest punct.

Din definiţia funcţiei α, rezultă că pentru $x \neq x_0$ avem

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$$

şi această egalitate este adevărată şi pentru $x = x_0$, deci funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0.

Observaţii. 1° Din demonstraţia acestei propoziţii, rezultă că funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă avem

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \qquad x \in I,$$

unde $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ şi $\alpha(x_0) = 0$. Funcţia α este perfect determinată de această egalitate în toate punctele $x \neq x_0$ din I.

2° Propoziţia precedentă afirmă că noţiunile de derivabilitate şi de diferenţiabilitate sînt echivalente, în sensul că dacă funcţia are una din aceste proprietăţi, atunci are şi cealaltă proprietate.

3° Din egalitatea prin care se defineşte diferenţiabilitatea rezultă

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \qquad x \in I.$$

Această egalitate este tocmai formula lui Taylor de ordinul întîi.

Egalitatea

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \qquad x \in I,$$

se scrie de asemenea

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \alpha(x)](x - x_0), \qquad x \in I$$

şi avem $\lim\limits_{x\to x_0} [f'(x_0) + \alpha(x)] = f'(x_0)$. Aceasta înseamnă că, pentru valori ale argumentului suficient de apropiate de x_0, avem

$$f'(x_0) + \alpha(x) \approx f'(x_0)$$

şi deci

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \qquad x \approx x_0, \qquad x \in I.$$

Aşadar, creşterea $f(x) - f(x_0)$ a funcţiei se poate aproxima cu produsul $f'(x_0)(x - x_0)$ dintre derivata în x_0 şi creşterea $x - x_0$ a argumentului (pentru creşteri ale argumentului suficient de mici).

Să notăm cu h creşterea de la x_0 la x a argumentului, $h = x - x_0$. Atunci $x = x_0 + h$, şi deci, pentru h suficient de mic,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h, \qquad x_0 + h \in I.$$

Această relație este foarte utilă, deoarece în loc să calculăm valorile funcției în punctele x_0 și $x_0 + h$ din I pentru a afla creșterea funcției, această creștere se poate obține mai ușor, dar cu aproximație, făcînd produsul $f'(x_0)h$, care este o funcție liniară în h.

Să observăm că în această relație trebuie să avem atît $x_0 \in I$, cît și $x_0 + h \in I$, pentru a putea scrie diferența $f(x_0 + h) - f(x_0)$, dar produsul $f'(x_0)h$ are sens oricare ar fi $h \in R$.

Definiție. Funcția liniară $h \to f'(x_0)h$ definită pentru orice $h \in R$ se numește diferențiala funcției f în punctul x_0 și se notează $df(x_0)$:

$$df(x_0)\,(h) = f'(x_0)h.$$

Relația de aproximație se scrie atunci

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0)\,(h), \qquad x_0 + h \in I.$$

Trebuie observat că, în timp ce derivata funcției f în punctul x_0 este un *număr*, $f'(x_0)$, diferențiala funcției f în punctul x_0 este o *funcție* liniară, $h \to f'(x_0)h$, definită pentru **orice** $h \in R$.

Deoarece diferențiala $df(x_0)$ este o funcție, ea are un grafic, care este o dreaptă ce trece prin origine și are coeficientul unghiular tg $\alpha = f'(x_0)$, deci este paralelă cu tangenta la graficul funcției f (în punctul $M_0\,(x_0, f(x_0))$

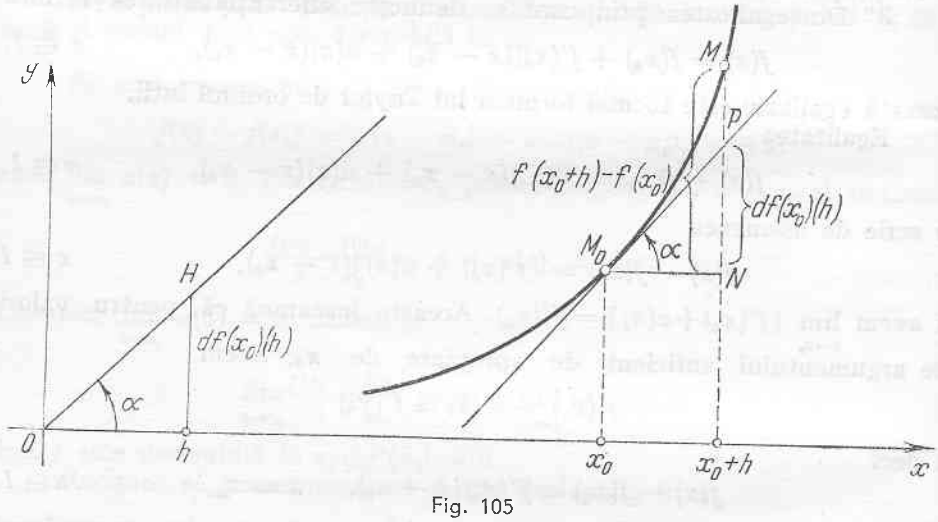


Fig. 105

(fig. 105). De aici rezultă și interpretarea geometrică a diferențialei. Avem $MN = f(x_0 + h) - f(x_0)$, $NP = df(x_0)(h)$. Relația de aproximație

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0)\,(h), \qquad x_0 + h \in I,$$

exprimă faptul că segmentul PM poate fi făcut oricît de mic, dacă se ia creșterea h suficient de mică.

Diferenţiala funcţiei într-un punct oarecare $x \in I$ este

$$\mathrm{d}f(x)\,(h) = f'(x) \cdot h, \qquad h \in R.$$

Pentru funcţia identică $\varphi(x) = x$ definită pe R, avem $\varphi'(x) \equiv 1$, deci diferenţiala sa $\mathrm{d}\varphi(x_0)$ verifică egalitatea

$$\mathrm{d}\varphi(x_0)\,(h) = h, \qquad h \in R.$$

Pentru orice $x \in I$ avem $\mathrm{d}\varphi(x)\,(h) = h$, $h \in I$, deci $\mathrm{d}\varphi(x) = \mathrm{d}\varphi(x_0)$. Atunci

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)\,(h)}{\mathrm{d}\varphi(x_0)} = \frac{f'(x_0)h}{h} = f'(x_0), \text{ oricare ar fi } h \neq 0,$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}\varphi(x_0)} = f'(x_0).$$

Derivata $f'(x_0)$ este egală deci cu raportul *constant* dintre diferenţiala sa $\mathrm{d}f(x_0)$ şi diferenţiala funcţiei identice, $\mathrm{d}\varphi(x_0)$.

Pentru un punct arbitrar $x \in I$ avem atunci

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}\varphi(x)} = f'(x).$$

Pentru diferenţiala funcţiei identice $\varphi(x) = x$ se foloseşte notaţia $\mathrm{d}x$, astfel încît

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x).$$

Se justifică astfel una din notaţiile derivatei, specificată la începutul capitolului.

Diferenţiala $\mathrm{d}x$ a funcţiei identice se numeşte, mai simplu, diferenţiala lui x. Uneori se întrebuinţează şi denumirea „diferenţiala variabilei independente", dar această denumire este improprie, deoarece noţiunea de diferenţială se referă *numai* la funcţii.

Din ultima egalitate se deduce

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x,$$

adică diferenţiala funcţiei f este egală cu produsul dintre derivata sa şi diferenţiala lui x.

Trebuie observat că pentru o valoare fixată x a argumentului, avem $\mathrm{d}x(h) = h$, oricare ar fi $h \in R$.

Exemple. 1) Pentru $f(x) = \sin x$, $x \in R$ avem

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}\sin x = \cos x\,\mathrm{d}x.$$

2) $\mathrm{d} \ln x = \frac{1}{x} \mathrm{d}x.$

3) $\mathrm{d}e^x = e^x \, \mathrm{d}x.$

4) $\mathrm{d} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x.$

5) $\mathrm{d}(x^2 + 3) = 2x\mathrm{d}x.$

Regulile demonstrate anterior pentru derivate se păstrează şi pentru diferenţiale:

$$\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v \, ; \qquad \mathrm{d}(u-v) = \mathrm{d}u - \mathrm{d}v \, ;$$

$$\mathrm{d}(\alpha u) = \alpha \mathrm{d}u \, ;$$

$$\mathrm{d}(uv) = v \, \mathrm{d}u + u\mathrm{d}v \, ;$$

$$\mathrm{d} \, \frac{u}{v} = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2} ,$$

unde u şi v sînt funcţii derivabile.

Exemple. 1) $\mathrm{d} \, \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1) \, \mathrm{d}(x+1) - (x+1) \, \mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2} =$

$$= \frac{(x-1) \, \mathrm{d}x - (x+1) \, \mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \frac{-2 \, \mathrm{d}x}{(x-1)^2} .$$

2) $\mathrm{d} \sin x \cos x = \cos x \, \mathrm{d} \sin x + \sin x \, \mathrm{d} \cos x =$

$= \cos x \cdot \cos x \mathrm{d}x + \sin x(-\sin x)\mathrm{d}x = \cos^2 x \mathrm{d}x - \sin^2 x \mathrm{d}x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \; \mathrm{d}x.$

2. Diferenţiala funcţiilor compuse

Fie două funcţii derivabile $u : I \to J$ şi $\varphi : J \to R$ şi funcţia compusă $f = \varphi \circ u : I \to R$:

$$f(x) = \varphi(u(x)), \qquad x \in I.$$

Funcţia f este de asemenea derivabilă. Diferenţiala sa este

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x = \varphi'(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$$

sau

$$\mathrm{d}[\varphi(u(x))] = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x)\mathrm{d}x.$$

Dar

$$u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u(x),$$

deci

$$d[\varphi(u(x))] = \varphi'(u(x))du(x).$$

Dacă nu se mai pune în evidenţă argumentul x, atunci ultima egalitate se scrie

$$d\varphi(u) = \varphi'(u)du.$$

Trebuie observat că în această egalitate u este o funcţie, dar că egalitatea are aceeaşi *formă* ca şi cînd u ar fi argumentul funcţiei φ.

În exemplele următoare, u este o funcţie derivabilă:

1) $du = nu^{n-1}\,du$;

2) $d\sqrt{u} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\,du$;

3) $d\sin u = \cos u du$;

4) $d\cos u = -\sin u\,du$;

5) $d\,\mathrm{tg}\,u = \dfrac{1}{\cos^2 u}\,du$;

6) $d\,\mathrm{ctg}\,u = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\,du$;

7) $d\arcsin u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;

8) $d\arccos u = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;

9) $d\,\mathrm{arc\,tg}\,u = \dfrac{1}{1+u^2}\,du$;

10) $d\,\mathrm{arc\,ctg}\,u = -\dfrac{1}{1+u^2}\,du$;

11) $d\ln u = \dfrac{1}{u}\,du$;

12) $de^u = e^u\,du$.

3. Diferenţiale de ordin superior

Fie funcţia $f: I \to R$ şi $x_0 \in I$.

Spunem că funcţia f este diferenţiabilă de două ori în punctul x_0 dacă este derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0 şi dacă derivata f' este diferenţiabilă în x_0.

Aceasta revine la a spune că f este derivabilă de două ori în x_0.

Diferenţiala de ordinul doi în x_0 se notează $d^2f(x_0)$ şi se defineşte prin egalitatea

$$d^2f(x_0) = f''(x_0)dx^2.$$

În mod analog, spunem că f este diferenţiabilă de n ori în punctul x_0, dacă are derivată de ordinul $n-1$ într-o vecinătate a lui x_0 şi dacă derivata $f^{(n-1)}$ este diferenţiabilă în x_0.

Aceasta revine la a spune că f este derivabilă de n ori în x_0.

Diferenţiala de ordinul n în x_0 se notează $d^n f(x_0)$ şi se defineşte prin egalitatea

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n.$$

Diferenţiala de ordinul n în x_0 este o funcţie de argumentul dx; mai precis, este un polinom de gradul n în dx.

§ 9. Aplicaţiile derivatei în fizică

Mărimile fizice se schimbă cu timpul (variază în timp). O asemenea mărime fizică se descrie în matematică printr-o funcţie $f(t)$, unde argumentul t semnifică timpul, iar valorile $f(t)$ ale funcţiei reprezintă măsura mărimii respective, la momentele t. De cele mai multe ori este convenabil să utilizăm ecuaţia $y = f(t)$, unde y semnifică măsura mărimii respective. Este important adesea să se cunoască „viteza de variaţie" a unei mărimi, care este o nouă mărime fizică şi a cărei măsură este derivata $\frac{df}{dt}$ a funcţiei f în raport cu timpul.

1. Viteza în mişcarea rectilinie

Să considerăm un mobil M în mişcare rectilinie (v. fig. 75). Dacă alegem un punct de referinţă O, un sens pozitiv de parcurgere pe dreapta pe care se mişcă mobilul şi un moment iniţial $t_0 = 0$, abscisa s a mobilului M la un moment t este dată de o ecuaţie

$$s = f(t)$$

numită legea de mişcare a mobilului.

s are semnificaţia „spaţiului parcurs de mobil" din momentul iniţial pînă la momentul t.

La începutul capitolului, s-a definit *viteza* $v(t_0)$ a mobilului la un moment t_0, ca fiind limita

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = v(t_0).$$

Aşadar

$$v(t_0) = f'(t_0)$$

adică, *viteza în mişcarea rectilinie este derivata spaţiului în raport cu timpul.* În scris: $v = s' = \frac{ds}{dt}$.

Dacă viteza este constantă spunem că mişcarea este *uniformă*. *Mişcarea mobilului este uniformă dacă şi numai dacă legea de mişcare este de forma* $s = \alpha t + \beta\ (\alpha,\ \beta \in R)$.

Într-adevăr, dacă $s = \alpha t + \beta$ atunci $v = s' = \alpha \equiv$ ct.; reciproc, dacă viteza este constantă, $v = \alpha =$ ct., adică $s' = \alpha$, atunci $s = \alpha t + \beta$.

În particular, dacă viteza este nulă, $v = 0$, atunci legea de mişcare este $s = \beta =$ ct., adică mobilul nu se mişcă. Reciproc, dacă mobilul nu se mişcă, avem $s = \beta =$ ct., deci $v = s' = 0$.

Viteza este pozitivă, dacă şi numai dacă mobilul se mişcă în sensul pozitiv al axei.

Într-adevăr, $v \geqslant 0$ dacă şi numai dacă funcţia $f(t)$ este crescătoare. Aceasta înseamnă că dacă $t_1 < t_2$, atunci $f(t_1) \leqslant f(t_2)$, deci mobilul se mişcă de la $s_1 = f(t_1)$ la $s_2 = f(t_2)$ în sensul pozitiv al axei. În mod asemănător:

Viteza este negativă, dacă şi numai dacă mobilul se mişcă în sensul negativ al axei.

Dacă $v(t_0) = 0$ *şi dacă înainte de* t_0 *şi după* t_0 *viteza are semne diferite, atunci în momentul t mobilul îşi schimbă sensul mişcării* (în acest moment mobilul „se întoarce").

Dacă $v(t_0) = 0$ şi dacă viteza are acelaşi semn înainte şi după t_0, mobilul are un moment de oprire în punctul $s_0 = f(t_0)$ după care îşi continuă mişcarea în acelaşi sens ca şi mai înainte.

2. Acceleraţia în mişcarea rectilinie

„Viteza de variaţie" a vitezei v cu care se mişcă mobilul se numeşte *acceleraţie*. Aşadar:

Acceleraţia în mişcarea rectilinie este derivata vitezei în raport cu timpul sau derivata a doua a spaţiului în raport cu timpul.

Pentru acceleraţie folosim litera a:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Dacă acceleraţia este constantă, spunem că mişcarea este *uniform accelerată*.

Mişcarea mobilui este uniform accelerată dacă şi numai dacă legea de mişcare este de forma $s = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

Într-adevăr, dacă acceleraţia este constantă $a \equiv A$, atunci $v = At + \beta$ şi deci $s = \frac{1}{2}At^2 + \beta t + \gamma$.

Reciproc, dacă $s = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, atunci $v = 2\alpha t + \beta$, deci $a = 2\alpha =$ ct.

Mişcarea mobilului este uniformă dacă şi numai dacă acceleraţia este nulă.

În adevăr, mişcarea este uniformă, $s = \alpha t + \beta$, dacă şi numai dacă viteza este constantă, $v = \alpha =$ ct., deci dacă şi numai dacă acceleraţia este nulă, $a = v' \equiv 0$.

Un exemplu important de mişcare uniform accelerată este căderea corpurilor în vid, în care legea de mişcare este :

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Acceleraţia mişcării este egală cu acceleraţia gravitaţiei g.

3. Viteza şi acceleraţia unghiulară

Să considerăm un mobil M care se mişcă pe o traiectorie circulară (fig. 106). Poziţia mobilului în fiecare moment t este perfect determinată de unghiul la centru α format de raza OM cu o dreaptă fixă OA, măsurat în sens trigonometric. Aşadar, mişcarea mobilului este dată de o ecuaţie $\alpha = f(t)$.

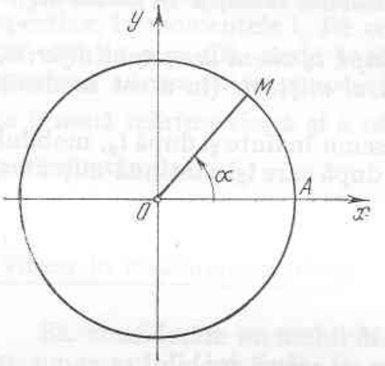


Fig. 106.

Unghiul la centru descris de mobil, în intervalul de timp dintre un moment t_0 şi un alt moment t, este $f(t) - f(t_0)$. Raportul

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

se numeşte viteza unghiulară medie a mobilului în intervalul de timp de la t_0 la t. Limita

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

(dacă există şi este finită) se numeşte *viteza unghiulară* a mobilului în momentul t_0. Aşadar :

Viteza unghiulară în mişcarea circulară este derivata unghiului la centru, în raport cu timpul.

Dacă viteza unghiulară este constantă, spunem că mişcarea circulară este *uniformă*.

Derivata a doua a unghiului la centru într-o mişcare circulară se numeşte acceleraţie unghiulară.

Mişcarea circulară este uniformă dacă şi numai dacă acceleraţia unghiulară este nulă.

4. Debitul unui lichid

Să considerăm un lichid în scurgere printr-un tub. Să notăm cu $Q(t)$ cantitatea de lichid care trece printr-o secţiune a tubului, în intervalul de timp t, începînd de la un anumit moment de referinţă, pe care-l notăm cu 0.

Diferenţa $Q(t) - Q(t_0)$ exprimă cantitatea de lichid scursă între momentele t_0 şi t.

Dacă în intervale de timp egale se scurg cantităţi de lichid egale, se spune că scurgerea lichidului are debit constant.

În acest caz se numeşte debit cantitatea de lichid scursă în unitatea de timp.

Dacă debitul lichidului nu este constant, considerăm debitul mediu

$$\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$$

în intervalul de timp de la t_0 la t. Limita

$$\lim_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} = Q'(t_0)$$

se numeşte debitul scurgerii lichidului în momentul t_0. Aşadar:

Debitul este derivata cantităţii de lichid în raport cu timpul.

5. Intensitatea curentului electric

Un curent electric care trece printr-un conductor se poate asemui cu un lichid în scurgere printr-o conductă. Putem vorbi şi în acest caz de cantitatea de electricitate $Q(t)$ scursă prin conductor într-un timp t, începînd de la un anumit moment de referinţă.

Putem vorbi de asemenea de debitul de electricitate. Debitul de electricitate se numeşte *intensitatea curentului electric.* Aşadar:

Intensitatea curentului electric este derivata cantităţii de electricitate în raport cu timpul.

6. Densitatea unei repartiţii liniare de masă

Problema definirii densităţii unei bare liniare a fost pusă, la începutul acestui capitol, ca una din problemele ce conduc la noţiunea de derivată:

Densitatea unei repartiţii liniare de masă este derivata masei în raport cu lungimea.

Capitolul VII

INTEGRAREA

§ 1. Mulţimi măsurabile în sensul lui Jordan

1. Mulţimi pe dreaptă măsurabile Jordan

Vom nota cu $\mathcal{P}$ clasa mulţimilor care sînt ***reuniuni finite*** de ***intervale mărginite*** (închise, deschise sau semideschise). Se verifică imediat că $\mathcal{P}$ are următoarele proprietăţi:

1) Reuniunea a două sau mai multe mulţimi (în număr finit) din $\mathcal{P}$ este tot o mulţime din $\mathcal{P}$.

2) Diferenţa a două mulţimi din $\mathcal{P}$ este tot o mulţime din $\mathcal{P}$.

(Într-adevăr, se observă că diferenţa a două intervale este vidă, un interval, sau o reuniune de două intervale.)

Clasa $\mathcal{P}$ a reuniunilor finite de intervale mărginite este un *clan**. Să observăm că orice mulţime $P \in \mathcal{P}$ se poate pune sub forma reuniunii

---

* Fie E o mulţime. O clasă $\mathcal{K}$ nevidă de părţi ale lui E se numeşte clan, dacă reuniunea $A \cup B$ şi diferenţa $A - B$ a două mulţimi A şi B din $\mathcal{K}$ aparţin lui $\mathcal{K}$. Rezultă atunci că intersecţia $A \cap B$ a două mulţimi $A, B \in \mathcal{K}$ aparţine lui $\mathcal{K}$ deoarece $A \cap B = A - (A - B)$. Prin inducţie completă se arată că reuniunea şi intersecţia unei familii finite de părţi din $\mathcal{K}$ aparţin lui $\mathcal{K}$.

O funcţie $m: \mathcal{K} \to X$ definită pe un clan $\mathcal{K}$ cu valori într-un spaţiu vectorial X se numeşte *funcţie aditivă* de mulţime, dacă $A, B \in \mathcal{K}$ şi $A \cap B = \emptyset$ implică $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Funcţiile aditive de mulţime se numesc *măsuri aditive* sau, mai simplu, *măsuri*.

O măsură $\mu: \mathcal{K} \to R$ cu valori reale se numeşte *măsură reală*; dacă în plus $\mu(A) \geq 0$ pentru orice $A \in \mathcal{K}$, μ se numeşte *măsură pozitivă*. Din definiţia măsurii rezultă următoarele proprietăţi: (*i*) $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} m(A_i)$, dacă mulţimile A_i sînt disjuncte două cîte două.

(*ii*) $m(A - B) = m(A) - m(B)$, dacă $B \subset A$ (m este substractivă).

O ***măsură pozitivă*** μ are în plus următoarele proprietăţi:

(*iii*) $\mu(A) \leq \mu(B)$, dacă $A \subset B$ (μ este crescătoare).

(*iv*) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, oricare ar fi mulţimile A_i din $\mathcal{K}$ (μ este subaditivă).

unei familii $(I_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de intervale care n-au în comun, două cîte două, decît cel mult o extremitate. Dacă notăm cu $m(I)$ lungimea unui interval, se definește *măsura* sau *lungimea* $m(P)$ a mulțimii P din $\mathcal{P}$ prin egalitatea

$$m(P) = \sum_{i=1}^{n} m(I_i).$$

Se demonstrează că $m(P)$ nu depinde de familia $(I_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de intervale care n-au în comun decît cel mult extremități și a căror reuniune este P, ci depinde numai de P.

Funcția reală $m : \mathcal{P} \to R$ definită pe clanul $\mathcal{P}$ al reuniunilor finite de intervale mărginite, are următoarele proprietăți:

1) $m(P) \geqslant 0$, ori care ar fi $P \in \mathcal{P}$;

2) $m(P \cup Q) = m(P) + m(Q)$, dacă $P \cap Q = \emptyset$.

Lungimea m este o *măsură aditivă* pe clasa $\mathcal{P}$.

Rezultă atunci că măsura m are, încă, următoarele proporietăți:

3) $m(Q - P) = m(Q) - m(P)$, dacă $P \subset Q$;

4) $m(P) \leqslant m(Q)$, dacă $P \subset Q$;

5) $m(P \cup Q) \leqslant m(P) + m(Q)$, oricare ar fi P, $Q \in \mathcal{P}$.

Vom căuta acum să extindem noțiunea de lungime (sau măsură) de la clasa $\mathcal{P}$ la o clasă mai largă de mulțimi de pe dreaptă, pe care le vom numi *mulțimi măsurabile în sensul lui Jordan*, sau, mai simplu, *mulțimi măsurabile Jordan*. Vom arăta că această clasă de mulțimi este tot un clan și că, pe acest clan, lungimea păstrează proprietățile sale fundamentale de a fi pozitivă și aditivă.

Vom defini mai întîi, pentru orice mulțime mărginită, o lungime interioară și o lungime exterioară.

Fie $A \subset R$ o mulțime *mărginită oarecare*.

Există totdeauna reuniuni de intervale $P \subset A$ (eventual $P = \emptyset$ sau P format dintr-un singur punct) și reuniuni deintervale $Q \supset A$, care acoperă pe A.

Oricare ar fi reuniunea de intervale $P \subset A$ și reuniunea de intervale $Q \supset A$, avem $P \subset Q$, deci $m(P) \leqslant m(Q)$. Să notăm

$$m_i(A) = \sup_{P\subset A} m(P), \; m_e(A) = \inf_{Q\supset A} m(Q).$$

Numerele $m_i(A)$ și $m_e(A)$ se numesc, respectiv, *măsura* (sau lungimea) *interioară* și *măsura* (sau lungimea) *exterioară* — în sensul lui Jordan — a lui A, și avem

$$m(P) \leqslant m_i(A) \leqslant m_e(A) \leqslant m(Q)$$

oricare ar fi mulțimile P și Q din $\mathcal{P}$ astfel ca $P \subset A \subset Q$.

D e f i n i ț i e. Spunem că o mulțime mărginită A este măsurabilă Jordan, dacă măsura interioară și măsura exterioară sînt egale:

$$m_i(A) = m_e(A).$$

Dacă A este măsurabilă, valoarea comună a măsurii interioare și a măsurii exterioare se numește măsura Jordan (sau lungimea) mulțimii A și se notează $m(A)$:

$$m(A) = m_i(A) = m_e(A).$$

Urmează că dacă A este măsurabilă, avem $m(P) \leqslant m(A) \leqslant m(Q)$ oricare ar fi reuniunile de intervale P și Q din $\mathcal{P}$, astfel ca $P \subset A \subset Q$. Rezultă de asemenea că $m(A) \geqslant 0$.

Dacă A este o reuniune finită de intervale mărginite, din $\mathcal{P}$, putem lua în particular $P = A$ și $Q = A$ și atunci

$$m_i(A) = \sup_{P \subset A} m(P) = m(A) \text{ și } m_e(A) = \inf_{Q \supset A} m(Q) = m(A),$$

deci $m_i(A) = m_e(A) = m(A)$, adică reuniunile finite de intervale mărginite sînt măsurabile, iar măsura lor, considerate ca mulțimi măsurabile, este egală cu lungimea lor definită anterior.

Clasa $\mathcal{M}$ a mulțimilor măsurabile conține deci clasa $\mathcal{P}$. Vom arăta că $\mathcal{M}$ este un clan și că măsura m este aditivă pe $\mathcal{M}$.

O b s e r v a ț i e. Măsura interioară a unei mulțimi poate fi diferită de măsura sa exterioară.

Exemplu. Fie A mulțimea punctelor raționale din intervalul $[0, 1]$. Mulțimea A nu are nici un punct interior, deci singurele intervale conținute în A sînt punctele. Urmează că orice reuniune finită de intervale $P \subset A$ este o mulțime finită de puncte, deci are lungimi nule și deci

$$m_i(A) = \sup_{P \subset A} m(P) = 0.$$

Orice reuniune finită de intervale $Q \supset A$ conține intervalul $[0,1]$, deci $m(Q) \geqslant m([0,1]) = 1$ și deci $m_e(A) = \inf_{Q \supset A} m(Q) = 1$.

Avem deci $m_i(A) < m_e(A)$. Mulțimea A nu este măsurabilă Jordan. Această mulțime nu are lungime, în sensul definiției de mai sus.

Vom da acum unele criterii de măsurabilitate; enunțurile acestor criterii pot fi luate ca definiții ale măsurabilității, echivalente cu definiția de mai sus.

P r o p o z i ț i a 1. O mulțime mărginită $A \subset R$ este măsurabilă Jordan, dacă și numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există o reuniune finită de intervale mărginite $P_\varepsilon \subset A$ și o reuniune finită de intervale mărginite $Q_\varepsilon \supset A$ astfel ca

$$m(Q_\varepsilon) - m(P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Să presupunem întîi că A este măsurabilă, deci

$$m(A) = \sup_{P \subset A} m(P) = \inf_{Q \supset A} m(Q).$$

Fie $\varepsilon > 0$. Există două reuniuni finite de intervale P_ε și Q_ε din $\mathcal{P}$ astfel ca $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ și

$$m(A) < m(P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(Q_\varepsilon) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Adunînd membru cu membru aceste inegalități, obținem

$$m(Q_\varepsilon) < m(P_\varepsilon) + \varepsilon,$$

adică

$$m(Q_\varepsilon) - m(P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

Reciproc, să presupunem că pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există două reuniuni finite P_ε și Q_ε din $\mathcal{P}$ astfel ca $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ și $m(Q_\varepsilon) - m(P_\varepsilon) < \varepsilon$ și să arătăm că A este măsurabilă. Avem

$$m(P_\varepsilon) \leqslant m_i(A) \leqslant m_e(A) \leqslant m(Q_\varepsilon),$$

de unde

$$m_e(A) - m_i(A) \leqslant m(Q_\varepsilon) - m(P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

adică $m_e(A) - m_i(A) \leqslant \varepsilon$. Deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă că $m_e(A) - m_i(A) = 0$, adică $m_i(A) = m_e(A)$, deci A este măsurabilă.

Propoziția 2. Dacă A este o mulțime măsurabilă Jordan și dacă pentru un anumit număr I avem $m(P) \leqslant I \leqslant m(Q)$, oricare ar fi reuniunile finite de intervale P și Q din $\mathcal{P}$, astfel ca $P \subset A \subset Q$, atunci $I = m(A)$.

Într-adevăr, din inegalitatea $m(P) \leqslant I \leqslant m(Q)$, deducem $\sup\limits_{P \subset A} m(P) \leqslant I \leqslant \inf\limits_{Q \supset A} m(Q)$, adică $m_i(A) \leqslant I \leqslant m_e(A)$; deoarece A este măsurabilă, avem $m_i(A) = m_e(A) = m(A)$, de unde $I = m(A)$.

Propoziția 3. O mulțime mărginită $A \subset R$ este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă există două șiruri (P_n) și (Q_n) de reuniuni finite de intervale mărginite, astfel încît $P_n \subset A \subset Q_n$ pentru fiecare n și astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} m(P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} m(Q_n)$. Limita comună este egală cu măsura mulțimii A:

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(P_n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n).$$

Să presupunem întîi că A este măsurabilă. Luînd $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $(n = 1,2,\ldots)$, există reuniuni finite de intervale mărginite P_n și Q_n astfel încît $P_n \subset A \subset Q_n$ și

$$m(Q_n) - m(P_n) < \frac{1}{n}.$$

Pe de altă parte

$$m(P_n) \leqslant m(A) \leqslant m(Q_n).$$

Rezultă atunci că

$$m(A) - m(P_n) \leqslant m(Q_n) - m(P_n) < \frac{1}{n}$$

$$m(Q_n) - m(A) \leqslant m(Q_n) - m(P_n) < \frac{1}{n}$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} [m(A) - m(P_n)] = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} [m(Q_n) - m(A)] = 0$, adică

$$\lim_{n\to\infty} m(P_n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n) = m(A).$$

Reciproc, să presupunem că există două şiruri (P_n) şi (Q_n) de reuniuni finite de intervale mărginite astfel ca $P_n \subset A \subset Q_n$ pentru fiecare n şi

$$\lim_{n\to\infty} m(P_n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n).$$

Deoarece

$$m(P_n) \leqslant m_i(A) \leqslant m_e(A) \leqslant m(Q_n)$$

pentru orice n, rezultă că

$$m_i(A) = m_e(A) = \lim_{n\to\infty} m(P_n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n),$$

deci A este măsurabilă Jordan.

P r o p o z i ţ i a 4. Dacă A_1 şi A_2 sînt mulţimi măsurabile Jordan, atunci $A_1 \cup A_2$ şi $A_1 - A_2$ sînt măsurabile Jordan. Dacă, în plus $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ atunci

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece A_1 şi A_2 sînt măsurabile, există patru reuniuni finite de intervale mărginite P_1, P_2, Q_1, Q_2, astfel ca

$$P_1 \subset A_1 \subset Q_2, \quad P_2 \subset A_2 \subset Q_2$$

şi

$$m(Q_1 - P_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \; m(Q_2 - P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să arătăm întîi că $A_1 \cup A_2$ este măsurabilă. Avem

$$P_1 \cup P_2 \subset A_1 \cup A_2 \subset Q_1 \cup Q_2$$

şi

$$(Q_1 \cup Q_2) - (P_1 \cup P_2) = (Q_1 \cup Q_2) \cap \complement(P_1 \cup Q_2) = (Q_1 \cup Q_2) \cap$$
$$\cap(\complement P_1 \cap \complement P_2) = (Q_1 \cap \complement P_1 \cap \complement P_2) \cup (Q_2 \cap \complement P_1 \cap \complement P_2) \subset (Q_1 \cap \complement P_1) \cup$$
$$\cup (Q_2 \cap \complement P_2) = (Q_1 - P_1) \cup (Q_2 - P_2)$$

deci

$$m[(Q_1 \cup Q_2) - (P_1 \cup P_2)] \leqslant m(Q_1 - P_1) + m(Q_2 - P_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

adică $A_1 \cup A_2$ este măsurabilă.

Să arătăm că $A_1 - A_2$ este măsurabilă. Avem

$$P_1 - Q_2 \subset A_1 - A_2 \subset Q_1 - P_2$$

şi

$$(Q_1 - P_2) - (P_1 - Q_2) = (Q_1 \cap \complement P_2) \cap \complement(P_1 \cap \complement Q_2) = (Q_1 \cap \complement P_2) \cap$$
$$\cap (\complement P_1 \cup Q_2) = (Q_1 \cap \complement P_2 \cap \complement P_1) \cup (Q_1 \cap \complement P_2 \cap Q_2) \subset (Q_1 \cap \complement P_1) \cup$$
$$\cup (Q_2 \cap \complement P_2) = (Q_1 - P_1) \cup (Q_2 - P_2)$$

de unde

$$m[(Q_1 - P_2) - (P_1 - Q_2)] \leqslant m(Q_1 - P_1) + m(Q_2 - P_2) < \varepsilon$$

adică $A_1 - A_2$ este măsurabilă.

Să presupunem acum că $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ şi să arătăm că

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

Fie (P_1^n), (Q_1^n), (P_2^n), (Q_2^n) patru şiruri de reuniuni finite de intervale mărginite astfel încît

$$P_2^n \subset A_1 \subset Q_1^n \text{ şi } P_2^n \subset A_2 \subset Q_1^n, \text{ pentru orice } n \in N,$$

$$\text{şi} \lim_{n\to\infty} m(P_1^n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_1^n) = m(A_1),\ \lim_{n\to\infty} m(P_2^n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_2^n) = m(A_2).$$

Deoarece A_1 şi A_2 sînt disjuncte şi $P_1^n \subset A_1$, $P_2^n \subset A_2$, avem $P_1^n \cap P_2^n = \emptyset$ pentru fiecare n, deci

$$m(P_1^n \cup P_2^n) = m(P_1^n) + m(P_2^n).$$

Pe de altă parte,

$$m(Q_1^n \cup Q_2^n) \leqslant m(Q_1^n) + m(Q_2^n).$$

Atunci

$$m(P_1^n) + m(P_2^n) \leqslant m(A_1 \cup A_2) \leqslant m(Q_1^n) + m(Q_2^n).$$

Trecînd la limită în aceste inegalităţi obţinem

$$m(A_1) + m(A_2) \leqslant m(A_1 \cup A_2) \leqslant m(A_1) + m(A_2),$$

adică

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

Observație. Deoarece $\mathcal{M}$ este un clan, rezultă că intersecția $A \cap B$ a două mulțimi măsurabile A și B, este tot o mulțime măsurabilă.

Ca și pentru reuniunile finite de intervale mărginite, măsura mulțimilor măsurabile Jordan are, încă, următoarele proprietăți:

1) $m(A_1 \cup A_2) \leqslant m(A_1) + m(A_2)$;

2) $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$;

3) $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$, dacă mulțimile A_i sînt disjuncte două cîte două;

4) $m(A_1) \leqslant m(A_2)$, dacă $A_1 \subset A_2$;

5) $m(A_1 - A_2) = m(A_1) - m(A_2)$, dacă $A_2 \subset A_1$.

Putem da acum criterii de măsurabilitate cu ajutorul mulțimilor măsurabile înseși. De aici va rezulta, în particular, că aplicînd mulțimilor măsurabile procedeul de extensiune aplicat reuniunilor finite de intervale mărginite rămînem tot în clasa mulțimilor măsurabile Jordan. (Se poate depăși această clasă aplicînd alt procedeu, de exemplu, folosind reuniuni infinite de intervale mărginite; se obțin atunci mulțimile măsurabile în sensul lui Lebesgue.)

Propoziția 5. Fie $M \subset R$ o mulțime mărginită. Dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există două mulțimi măsurabile Jordan A și B astfel ca $A \subset M \subset B$ și $m(B) - m(A) < \varepsilon$ atunci M este măsurabilă Jordan.

Fie $\varepsilon > 0$ și fie A și B două mulțimi măsurabile astfel ca $A \subset M \subset B$ și $m(B) - m(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece

$$\sup_{P \subset A} m(P) = m(A) \text{ și } \inf_{Q \supset B} m(Q) = m(B),$$

există o reuniune finită de intervale mărginite $P \subset A$ și o reuniune finită de intervale mărginite $Q \supset B$, astfel ca

$$m(A) - m(P) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad m(Q) - m(B) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Atunci $P \subset M \subset Q$ și

$$m(Q) - m(P) = m(Q) - m(B) + m(B) - m(A) + m(A) - m(P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

deci M este măsurabilă.

Corolar. Dacă există două şiruri (A_n) şi (B_n) de mulţimi măsurabile Jordan astfel ca $A_n \subset M \subset B_n$ pentru orice $n \in N$ şi

$$\lim_{n \to \infty} m(A_n) = \lim_{n \to \infty} m(B_n)$$

atunci M este măsurabilă şi măsura sa $m(M)$ este egală cu limita comună a celor două şiruri de măsuri.

Avem $\lim_{n \to \infty} [m(B_n) - m(A_n)] = 0$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$, astfel încît, pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$m(B_n) - m(A_n) < \varepsilon,$$

deci M este măsurabilă. Atunci

$$m(A_n) \leqslant m(M) \leqslant m(B_n)$$

şi deci, trecînd la limită,

$$m(M) = \lim_{n \to \infty} m(A_n) = \lim_{n \to \infty} m(B_n).$$

2. Mulţimi de măsură Jordan nulă

Mulţimile care au măsura Jordan nulă prezintă un interes deosebit. Reamintim întîi că avem totdeauna

$$0 \leqslant m_i(A) \leqslant m_e(A)$$

pentru orice mulţime $A \subset R$. Rezultă de aici că:

Orice mulţime cu măsura exterioară nulă este măsurabilă Jordan şi are măsură nulă.

De aceea nu vom mai spune mulţime măsurabilă Jordan de măsură nulă, ci, mai simplu, mulţime de măsură Jordan nulă.

Propoziţia 6. O mulţime mărginită $A \subset R$ este de măsură Jordan nulă dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o familie finită de intervale deschise mărginite $I_1, I_2, \ldots, I_n$ care acoperă pe A, astfel încît

$$\sum_{i=1}^{n} m(I_i) < \varepsilon.$$

Să presupunem întîi că $m(A) = 0$, deci $m_e(A) = 0$, şi fie $\varepsilon > 0$. Deoarece

$$m_e(A) = \inf_{Q \supset A} m(Q),$$

unde Q sînt reuniuni finite de intervale mărginite, există o asemenea mulţime $Q \supset A$ cu $m(Q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Să scriem Q sub formă de reuniune finită de intervale mărginite disjuncte:

$$Q = \bigcup_{i=1}^{n} J_i.$$

Avem deci

$$\sum_{i=1}^{n} m(J_i) = m(Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fiecărui interval J_i, cu extremităţile a_i şi b_i, să-i adăugăm intervale *deschise*, $\left(a_i - \frac{\varepsilon}{8^n}, a_i + \frac{\varepsilon}{8^n}\right)$ şi $\left(b_i - \frac{\varepsilon}{8^n}, b_i + \frac{\varepsilon}{8^n}\right)$ fiecare de lungime $\frac{\varepsilon}{8^n}$. Obţinem un interval deschis I_i, a cărui lungime verifică inegalitatea

$$m(I_i) \leqslant m(J_i) + \frac{\varepsilon}{4^n} + \frac{\varepsilon}{4^n} \leqslant m(J_i) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Familia de intervale mărginite *deschise* $I_1, I_2, \ldots, I_n$ acoperă pe A şi

$$\sum_{i=1}^{n} m(I_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(m(J_i) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{i=1}^{n} m(J_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reciproc, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există o familie finită de intervale mărginite (deschise sau nu) $I_1, I_2, \ldots, I_n$ care acoperă pe A, cu $\sum_{i=1}^{n} m(I_i) < \varepsilon$, rezultă că $m_e(A) < \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$, deci $m_e(A) = 0$, şi deci A este de măsură Jordan nulă.

Proprietăţile mulţimilor de măsură Jordan nulă sînt următoarele:

1) Dacă A este de măsură Jordan nulă, atunci orice submulţime $B \subset A$ este de măsură Jordan nulă.

Într-adevăr, $m_e(B) \leqslant m_e(A) = 0$.

2) Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt de măsură Jordan nulă, atunci reuniunea lor este de măsură Jordan nulă.

Într-adevăr, reuniunea lor este măsurabilă şi

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = 0.$$

Se poate da acum un criteriu de măsurabilitate Jordan, cu ajutorul mulţimilor de măsură nulă.

P r o p o z i ţ i a 7. O mulţime mărginită $A \subset E$ este măsurabilă Jordan, dacă şi numai dacă frontiera sa are măsura Jordan nulă.

Să presupunem întîi că A este măsurabilă şi fie $\varepsilon > 0$. Există două reuniuni finite de intervale mărginite P şi Q astfel încît $P \subset A \subset Q$ şi $m(Q) - m(P) < \varepsilon$. Să notăm cu $\mathring{P}$ interiorul mulţimii P (obţinut din P prin înlăturarea extremităţilor intervalelor ce compun pe P) şi cu $\bar{Q}$ aderenţa lui Q (obţinută din Q prin adăugarea extremităţilor intervalelor ce compun pe Q). Evident, $\mathring{P} \subset P$ şi $Q \subset \bar{Q}$ deci $\mathring{P} \subset A \subset \bar{Q}$, iar $m(\mathring{P}) = m(P)$ şi $m(\bar{Q}) = m(Q)$ (deoarece punctele adăugate sau înlăturate au măsura nulă), deci $M(\bar{Q}) - m(\mathring{P}) < \varepsilon$, sau

$$m(\bar{Q} - \mathring{P}) < \varepsilon.$$

Deoarece $\mathring{P} \subset A$ şi $\mathring{P}$ este deschisă, nici un punct frontieră al mulţimii A nu aparţine lui $\mathring{P}$, deci $\mathrm{Fr}\, A \subset \complement\mathring{P}$. Pe de altă parte $A \subset \bar{Q}$ deci $\mathrm{Fr}\, A \subset \bar{Q}$. Deducem atunci că $\mathrm{Fr}\, A \subset \bar{Q} \cap \complement\mathring{P} = \bar{Q} - \mathring{P}$, deci $\bar{Q} - \mathring{P}$ este o reuniune finită de intervale mărginite, care conţine mulţimea $\mathrm{Fr}A$. Deoarece $m(\bar{Q} - \mathring{P}) < \varepsilon$, rezultă că $m_e(\mathrm{Fr}A) < \varepsilon$; ε fiind arbitrar deducem că $m_e(\mathrm{Fr}A) = 0$, deci $m(\mathrm{Fr}A) = 0$.

Reciproc, să presupunem că $m(\mathrm{Fr}A) = 0$ şi fie $\varepsilon > 0$. Există o reuniune finită de intervale mărginite $S \supset \mathrm{Fr}A$, astfel ca $m(S) < \varepsilon$.

Să notăm cu P mulţimea punctelor din A care nu aparţin mulţimii S, adică $P = A - S$. Avem $P \subset A$ şi $P \cap S = \emptyset$. Dar mulţimea P este o reuniune finită de intervale mărginite, avînd ca extremităţi o parte din extremităţile intervalelor din S. Într-adevăr, mulţimea $A - S$ nu mai are nici un punct frontieră, deci toate punctele sale îi sînt puncte interioare, şi o dată cu un punct x conţine un întreg interval I_x.

Mulţimea $Q = P \cup S$ este o reuniune finită de intervale mărginite şi $A \subset Q$, deoarece

$$Q = P \cup S = (A - S) \cup S = (A \cap \complement S) \cup S = A \cup S \supset A.$$

Pe de altă parte, deoarece $P \cap S = \emptyset$, avem $m(P \cup S) = m(P) + m(S)$ deci $m(Q) - m(P) = m(P \cup S) - m(P) = m(P) + m(S) - m(P) = m(S) < \varepsilon$ adică A este măsurabilă.

Exemple. 1) Orice mulţime formată dintr-un singur punct, $\{x\}$, are măsură Jordan nulă, deoarece pentru orice $\varepsilon > 0$, intervalul $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, acoperă pe $\{a\}$ şi are lungimea $< \varepsilon$.

2) O mulțime finită $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ are măsura Jordan nulă, deoarece este reuniunea mulțimilor $\{a_1\}, \{a_2\} \ldots, \{a_n\}$.

3) Se poate arăta că mulțimea triadică a lui Cantor este perfectă (închisă și fără puncte izolate), nu este numărabilă (este echivalentă cu mulțimea tuturor numerelor reale) și are măsura Jordan nulă.

Mulțimea triadică a lui Cantor se obține astfel: Se împarte intervalul $[0, 1]$ în trei părți egale și se scoate interiorul segmentului de la mijloc. Fiecare din cele două intervale rămase se împarte în cîte trei părți egale și se scot interioarele intervalelor de la mijloc. Fiecare din cele patru părți rămase se împarte în cîte trei părți egale și se îndepărtează interioarele intervalelor de la mijloc, și așa mai departe, indefinit.

4) Mulțimile numărabile nu au, în general, măsura Jordan nulă. Într-adevăr, în general, aceste mulțimi nici nu sînt măsurabile Jordan, cum este de exemplu mulțimea punctelor raționale din $[0, 1]$.

3. Mulțimi neglijabile

După cum am specificat mai înainte, putem depăși clasa mulțimilor măsurabile Jordan, dacă folosim, nu reuniuni *finite* de intervale mărginite, ci reuniuni *numărabile* de asemenea intervale. Se obțin astfel mulțimile măsurabile (în sensul lui) Lebesgue.

Noi vom avea nevoie numai de mulțimile de măsură Lebesgue nulă, care vor fi numite, de asemenea, *mulțimi neglijabile.*

Pentru a simplifica scrisul, vom da următoarea definiție, care, de altfel, va fi reluată în capitolul despre serii. Dacă (α_n) este un șir de numere $\geqslant 0$, atunci limita α (finită sau $+\infty$) a șirului crescător al sumelor $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)_{1 \leqslant n < +\infty}$ va fi numită suma numerelor $(\alpha_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ și vom scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha.$$

Așadar,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sup_{n \in N} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Definiție. Spunem că o mulțime $A \subset R$ (mărginită sau nemărginită) este de măsură Lebesgue nulă, sau neglijabilă, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un șir (I_n) de intervale deschise care acoperă pe A, astfel încît

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon.$$

Unele din intervalele I_n pot fi, eventual, vide. Pentru intervalele vide I_n avem $m(I_n) = 0$.

Din propoziţia 6 deducem că:

Orice mulţime de măsură Jordan nulă este neglijabilă.

Există însă mulţimi neglijabile care nu sînt măsurabile Jordan. De exemplu, mulţimea punctelor raţionale din $[0,1]$ nu este măsurabilă Jordan, dar, după cum va rezulta mai jos, este neglijabilă, fiind numărabilă.

Proprietăţile mulţimilor neglijabile sînt următoarele:

1) Dacă A este neglijabilă, atunci orice submulţime $B \subset A$ este neglijabilă.

2) Dacă (A_n) este un şir de mulţimi neglijabile, atunci reuniunea lor este o mulţime neglijabilă.

Să demonstrăm întîi prima proprietate. Deoarece A este neglijabilă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un şir (I_n) de intervale deschise care acoperă pe A, deci şi pe B, astfel încît

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(In) < \varepsilon.$$

Urmează că B este de asemenea neglijabilă.

Să demonstrăm a doua proprietate. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece mulţimile A_n sînt neglijabile, pentru fiecare n există un şir $(I_{np})_{1 \leq p < +\infty}$ de intervale deschise care acoperă pe A_n, astfel încît

$$\sum_{p=1}^{\infty} m(I_{np}) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Atunci şirul dublu (I_{np}) de intervale deschise acoperă reuniunea $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ şi suma lungimilor acestor intervale este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} m(I_{np}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

deci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ este neglijabilă.

Exemple. 1) Orice mulţime formată dintr-un număr finit de puncte este neglijabilă, deoarece are măsură Jordan nulă.

2) Orice mulţime numărabilă $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ este neglijabilă, deoarece este reuniunea şirului de mulţimi neglijabile $A_n = \{a_n\}$.

Rezultă că mulţimea N a numerelor naturale şi mulţimea Q a numerelor raţionale sînt neglijabile, deoarece sînt numărabile.

3) Există mulţimi infinite nenumărabile care sînt neglijabile. De exemplu mulţimea triadică a lui Cantor este neglijabilă, fiind de măsură Jordan nulă.

4. Mulţimi plane măsurabile Jordan

Să considerăm planul R^2 ca produs cartezian $R \times R$ al dreptei reale ca ea însăşi. Aceasta revine la a considera punctele din plan raportate la două axe rectangulare.

Vom considera apoi dreptunghiurile pline, care au laturile paralele cu axele de coordonate, putîndu-şi conţine una sau mai multe laturi, adică de forma

$$I_1 \times I_2 = \{(x, y)| \in I_1, y \in I_2\}$$

unde I_1 şi I_2 sînt intervale mărginite pe dreaptă, care-şi pot conţine sau nu una sau ambele extremităţi. Aria unui asemenea dreptunghi se defineşte prin egalitatea

$$s(I_1 \times I_2) = m(I_1) \cdot m(I_2).$$

Conform acestei definiţii, punctele sau segmentele paralele cu una din axe sînt dreptunghiuri cu aria nulă. De asemenea, mulţimea vidă $\emptyset \subset R^2$ este un dreptunghi cu aria nulă.

Vom nota cu $\mathcal{D}$ clasa mulţimilor plane care sînt *reuniuni finite de dreptunghiuri* cu laturile paralele cu axele.

Se verifică imediat că $\mathcal{D}$ este un clan:

1) *Reuniunea a două mulţimi din $\mathcal{D}$ este tot o mulţime din $\mathcal{D}$;*

2) *Diferenţa a două mulţimi din $\mathcal{D}$ este tot o mulţime din $\mathcal{D}$.*

(Într-adevăr, diferenţa a două dreptunghiuri din $\mathcal{D}$ este vidă, un dreptunghi, sau o reuniune de mai multe dreptunghiuri din $\mathcal{D}$.) Orice mulţime P din $\mathcal{D}$ se poate pune sub forma reuniunii unei familii $(D_i)_{1 \leq i \leq n}$ de dreptunghiuri din $\mathcal{D}$ care n-au în comun două cîte două, decît cel mult cîte o latură:

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Se defineşte măsura sau aria $s(P)$ a lui P prin egalitatea

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m(D_i).$$

Se demonstrează că aria $s(P)$ depinde numai de P, şi nu depinde de modul particular în care P se scrie ca reuniune de dreptunghiuri care n-au în comun decît cel mult laturi.

Aria s definită pe clanul $\mathcal{D}$ este *pozitivă* şi *aditivă*, este deci o *măsură*.

Vom căuta acum să extindem noţiunea de arie de la clasa $\mathcal{D}$ la o clasă mai largă de mulţimi plane, care vor fi numite mulţimi măsurabile în sensul lui Jo rdan.

Fie $A \subset R^2$ o mulțime mărginită oarecare. Se definesc aria (sau măsura) Jordan interioară $s_i(A)$ și aria (sau măsura) Jordan exterioară $s_e(A)$ prin egalitățile

$$s_i(A) = \sup_{P \subset A} s(P), \quad s_e(A) = \inf_{Q \supset A} s(Q)$$

unde marginea superioară se ia pentru toate mulțimile $P \subset A$ din $\mathcal{P}$, iar marginea inferioară pentru toate mulțimile $Q \supset A$ din $\mathcal{P}$.

D e f i n i ț i e. **Spunem că mulțimea mărginită $A \subset R^2$ are arie Jordan sau este măsurabilă Jordan, dacă $s_i(A) = s_e(A)$. Dacă A este măsurabilă, se definește aria (sau măsura Jordan) $s(A)$ a lui A, prin egalitatea**

$$s(A) = s_i(A) = s_e(A).$$

Toate propozițiile relative la mulțimile măsurabile pe dreaptă rămîn valabile și pentru mulțimi plane măsurabile, și cu aceleași demonstrații, înlocuind reuniunile finite de intervale mărginite, cu reuniuni finite de dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele, iar lungimea m cu aria s.

P r o p o z i ț i a 1. **O mulțime mărginită $A \subset R^2$ este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o reuniune finită de dreptunghiuri $P_\varepsilon \subset A$ din $\mathcal{P}$ și o reuniune finită de dreptunghiuri $Q_\varepsilon \supset A$ din $\mathcal{P}$ astfel ca $s(Q_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) < \varepsilon$.**

P r o p o z i ț i a 2. **O mulțime mărginită $A \subset R^2$ este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă există două șiruri de reuniuni finite de dreptunghiuri (P_n) și (Q_n) din $\mathcal{P}$ cu $P_n \subset A \subset Q_n$ pentru fiecare n și $\lim\limits_{n\to\infty} s(P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} s(Q_n)$. În acest caz avem:**

$$s(A) = \lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} s(Q_n).$$

P r o p o z i ț i a 3. **Dacă A_1 și A_2 sînt măsurabile Jordan, atunci $A_1 \cup A_2$ și $A_1 - A_2$ sînt măsurabile Jordan. Dacă, în plus, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, atunci $s(A_1 \cup A_2) = s(A_1) + s(A_2)$.**

Așadar, clasa $\mathcal{M}$ a mulțimilor plane măsurabile Jordan este un clan, iar aria s este o măsură pe acest clan.

Se demonstrează că poligoanele pline și cercurile pline sînt mulțimi măsurabile, iar aria lor Jordan este egală cu aria lor obișnuită. Propoziția următoare arată că putem defini aria Jordan plecînd de la alte mulțimi măsurabile decît de la reuniunile finite de dreptunghiuri; de exemplu, plecînd de la reuniuni finite de poligoane oarecare, sau segmente de cercuri.

P r o p o z i ț i a 4. Fie $M \subset R^2$ o mulțime mărginită. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există două mulțimi plane măsurabile A și B cu $A \subset M \subset B$ și $s(B) - s(A) < \varepsilon$, atunci M este măsurabilă Jordan.

P r o p o z i ț i a 5. Dacă există două șiruri (A_n) și (B_n) de mulțimi plane măsurabile cu $A_n \subset M \subset B_n$ pentru orice n și

$$\lim_{n\to\infty} s(A_n) = \lim_{n\to\infty} s(B_n)$$

atunci M este măsurabilă Jordan și

$$s(M) = \lim_{n\to\infty} s(A_n) = \lim_{n\to\infty} s(B_n).$$

Mulțimile $A \subset R$ cu aria exterioară nulă, $s_e(A) = 0$, sînt mulțimile plane de arie (sau măsură) Jordan nulă. Orice submulțime a unei mulțimi de măsură nulă are de asemenea măsură nulă. Orice reuniune finită de mulțimi de măsură nulă are măsura Jordan nulă.

P r o p o z i ț i a 6. O mulțime mărginită $A \subset R^2$ este măsurabilă dacă și numai dacă frontiera sa are arie nulă.

Din această propoziție rezultă că poligoanele sînt măsurabile, deoarece frontiera lor este o linie poligonală, care are arie nulă.

5. Mulțimi măsurabile Jordan în spațiul R^3

Toate rezultatele enunțate pentru mulțimile măsurabile plane rămîn adevărate și pentru mulțimile măsurabile în spațiu, dacă se înlocuiesc dreptunghiurile cu laturile paralele cu axele, cu paralelipipedele pline cu fețele paralele cu planele de coordonate și ariile s cu volumele v.

Printre mulțimile măsurabile Jordan din spațiu se află poliedrele (pline), sferele, cilindrii, conurile și toate corpurile studiate în geometrie, iar volumul lor Jordan coincide cu volumul lor obișnuit.

De asemenea, pentru definirea volumului se poate pleca de la reuniuni finite de poliedre, de cilindri, sau alte mulțimi măsurabile, în locul reunilor finite de paralelipipede.

O b s e r v a ț i e. Toate rezultatele privind mulțimile măsurabile de pe dreaptă, din plan sau din spațiu se pot formula unitar, dacă se înlocuiesc cuvintele: *lungime, arie* și *volum*, prin *măsură* și se desemnează, toate, printr-o aceeași literă, de exemplu m, în loc de s sau v. Rezultatele enunțate în acest mod unitar rămîn valabile pentru mulțimi din spațiul R^n cu n dimensiuni.

§ 2. Integrala în sensul lui Riemann

1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală

a) *Problema ariei*. Fie f o funcție pozitivă mărginită pe un interval $[a, b]$.

Graficul său G este situat deasupra axei Ox. Ne punem problema dacă trapezul curbiliniu $abBA$ mărginit de axa Ox, graficul G și dreaptele $x = a$ și $x = b$ este o mulțime măsurabilă și cum se poate calcula aria sa.

Să observăm întîi că, deoarece intervalul $[a, b]$ și funcția f sînt mărginite, trapezul curbiliniu $abBA$ este o **mulțime mărginită** în plan. Pentru a vedea dacă este măsurabilă, vom căuta **să-l aproximăm din interior** și din exterior cu poligoane particulare, cu laturile paralele cu axele de coordonate. Anume, să considerăm o diviziune (d) a intervalului $[a, b]$:

$(d): a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$.

Pe fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$, ca bază, să construim dreptunghiul cu cea mai mare înălțime posibilă m_i, astfel încît acest dreptunghi să fie conținut în întregime în trapezul curbiliniu:

$$m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x).$$

Ariile dreptunghiurilor astfel construite sînt respectiv

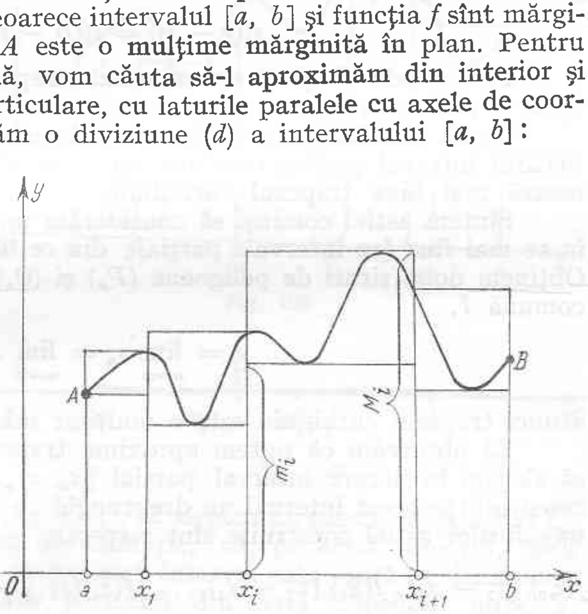


Fig. 107

$$m_0(x_1 - x_0),\ m_1(x_2 - x_1),\ \ldots,\ m_i(x_{i+1} - x_i),\ \ldots,\ m_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Reuniunea acestor dreptunghiuri este un poligon P conținut în trapezul curbiliniu, a cărui arie este

$$s = s(P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i).$$

Pe fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$, ca bază, să construim acum dreptunghiul cu cea mai mică înălțime M_i, astfel încît acest dreptunghi că conțină în întregime porțiunea din graficul funcției aflată deasupra intervalului $[x_i, x_{i+1}]$:

$$M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x).$$

Ariile acestor dreptunghiuri sînt respectiv

$$M_0(x_1 - x_0),\ M_1(x_2 - x_1) \ldots,\ M_i(x_{i+1} - x_i),\ \ldots,\ M_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Reuniunea acestor dreptunghiuri este un poligon Q, care conține în întregime trapezul curbiliniu, și a cărui arie este

$$S = s(Q) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Avem $P \subset Q$ și $s(P) \leqslant s(Q)$. Poligonul $Q - P$ conține în întregime graficul funcției și aria sa este

$$s(Q - P) = s(Q) - s(P).$$

Poligoanele P și Q aproximează trapezul curbiliniu respectiv prin lipsă și prin exces.

Cu cît numărul intervalelor parțiale este mai mare și cu cît lungimea fiecărui interval parțial este mai mică, cu atît poligoanele P și Q aproximează mai bine trapezul curbiliniu.

Sîntem astfel conduși să considerăm un șir (d_n) de diviziuni din ce în ce mai fine (cu intervale parțiale din ce în ce mai multe și mai mici). Obținem două șiruri de poligoane (P_n) și (Q_n). Dacă ariile lor au o limită comună I,

$$I = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

atunci trapezul curbiliniu este o mulțime măsurabilă și aria sa este I.

Să observăm că putem aproxima trapezul curbiliniu și în alt mod: să alegem în fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ un punct *arbitrar* ξ_i, și să construim pe acest interval un dreptunghi cu înălțimea $f(\xi_i)$. Ariile dreptunghiurilor astfel construite sînt respectiv

$$f(\xi_0)\,(x_1 - x_0),\ f(\xi_1)\,(x_2 - x_1), \ldots,\ f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),\ \ldots,\ f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Reuniunea acestor dreptunghiuri este un poligon R, a cărui arie este

$$\sigma = s(R) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i).$$

Poligonul R este cuprins între poligoanele P și Q, $P \subset R \subset Q$, deci $s(P) \leqslant s(R) \leqslant s(Q)$, sau

$$s < \sigma < S.$$

Dacă alegem un șir de diviziuni (d_n) din ce în ce mai fine, și pentru fiecare diviziune în parte alegem niște puncte intermediare ξ_i în mod arbitrar, între ariile poligoanelor (P_n), (Q_n) și (R_n) avem relația

$$s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n.$$

Dacă $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = I$, atunci de asemenea $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = I$, astfel încît trapezul curbiliniu se poate aproxima şi cu dreptunghiuri R, care nu sînt nici complet conţinute în trapezul curbiliniu, dar nici nu-l conţin în întregime.

b) *Masa unei bare rectilinii.* Să considerăm o bară materială rectilinie, aşezată de-a lungul axei Ox; fie a şi b abscisele extremităţilor barei. Să presupunem că se cunoaşte densitatea liniară $f(x)$ a barei în fiecare punct $x \in [a, b]$, şi că f este o funcţie continuă.

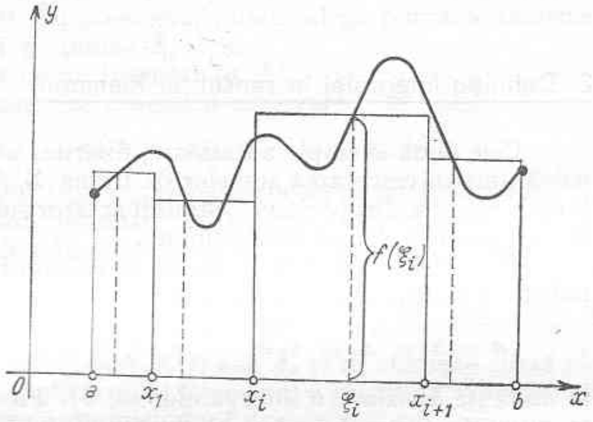


Fig. 108

Dacă densitatea este constantă, $f(x) \equiv \rho$, adică dacă bara este omogenă, masa sa este egală cu produsul dintre densitate şi lungime, $\rho(b - a)$.

Dacă densitatea nu este constantă (adică dacă bara nu este omogenă) procedăm în felul următor: împărţim bara în mai multe părţi; aceasta revine la a considera o diviziune (d) a intervalului $[a, b]$:

$$(d): a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

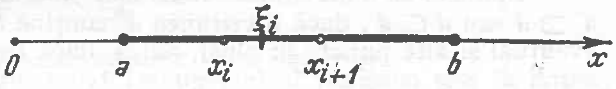


Fig. 109

În fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$, să alegem un punct intermediar ξ_i, şi să considerăm, într-o primă aproximaţie, că, pe acest interval, bara este omogenă şi că densitatea sa pe acest interval este egală cu densitatea $f(\xi_i)$ în punctul ξ_i ales. Masa porţiunii din bară cuprinsă între x_i şi x_{i+1}, considerată omogenă, cu densitatea $f(\xi_i)$, este $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$.

Masele aproximative ale porţiunilor din bară cuprinse între diferitele puncte ale diviziunii sînt respectiv:

$$f(\xi_0)(x_1 - x_0), f(\xi_1)(x_2 - x_1), \ldots, f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \ldots, f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Masa totală a barei, calculată cu aproximaţia corespunzătoare diviziunii (d) şi alegerii punctelor intermediare ξ_i, este

$$m_d = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Eroarea comisă provine din faptul că pe fiecare interval parţial am considerat densitatea constantă. Ne dăm seama uşor, intuitiv, că dacă intervalele parţiale sînt din ce în ce mai multe şi mai mici (dacă diviziunea este din ce în ce mai fină), atunci şi densitatea variază mai puţin în fiecare interval parţial în parte şi, deci, eroarea pe care o facem considerînd densitatea constantă pe fiecare asemenea interval este din ce în ce mai mică.

Sîntem astfel conduşi să considerăm un şir (d_n) de diviziuni din ce în ce mai fine. Dacă şirul (md_n) al maselor aproximative are o limită m, este natural să considerăm că m este masa totală a barei.

2. Definiţia integralei în sensul lui Riemann

Cele două exemple anterioare, diferite, unul din geometrie şi altul din fizică, impun cercetarea sumelor de forma $\Sigma_i f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$, chiar pentru funcţii care nu sînt pozitive. Studiul acestor sume ne va conduce la noţiunea de integrală în sensul lui Riemann.

Fie $[a, b]$ un interval (închis şi mărginit), $a \leqslant b$. O familie finită de puncte $d = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ astfel ca

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b$$

se numeşte *diviziune* a intervalului $[a, b]$. Fiecare din intervalele $[x_i, x_{i+1}]$ se numeşte *interval parţial* al diviziunii d. Un interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$ poate conţine un singur punct, dacă $x_i = x_{i+1}$.

Spunem că o diviziune d' *este mai fină* decît o diviziune d, şi scriem $d' \supset d$ sau $d \subset d'$, dacă diviziunea d' conţine *toate* punctele diviziunii d (şi eventual şi alte puncte în plus), adică, dacă fiecare interval parţial al diviziunii d' este conţinut în întregime într-un interval parţial al diviziunii d.

Lungimea celui mai mare interval parţial al unei diviziuni $d = (x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ se numeşte *norma diviziunii* d şi se notează $\nu(d)$

$$\nu(d) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Evident, $x_{i+1} - x_i \leqslant \nu(d)$ şi dacă $\nu(d) < \delta$, atunci $x_{i+1} - x_i < \delta$, oricare ar fi $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Dacă d' este mai fină decît d atunci $\nu(d') \leqslant \nu(d)$. (Cu cît o diviziune este mai fină, cu atît norma sa este mai mică.)

Dacă însă $\nu(d') \leqslant \nu(d)$, nu rezultă că diviziunea d' este mai fină decît diviziunea d. Diviziunea d' poate fi formată din intervale parţiale mai mici decît cele ale diviziunii d, fără ca diviziunea d' să conţină toate punctele diviziunii d.

Exemplu. $d = \left(a, \frac{a+b}{2}, b\right)$, $d' = \left(a, \frac{a+b}{3}, \frac{2(a+b)}{3}, b\right)$.

Avem $v(d) = \frac{a+b}{2}$ şi $v(d') = \frac{a+b}{3}$, deci $v(d') < v(d)$, dar diviziunea d' nu este mai fină decît diviziunea d.

Dacă în fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$ al unei diviziuni d, alegem un punct ξ_i, $x_i \leqslant \xi_i, \leqslant x_{i+1}$, punctele alese $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_{n-1}$ se numesc *puncte intermediare* ale diviziunii d.

Evident, pentru aceeaşi diviziune d, putem alege punctele intermediare (ξ_i) într-o infinitate de moduri, dacă $a < b$.

Dacă $a = b$, orice diviziune d a intervalului $[a, b]$ este formată numai din puncte care coincid cu a. Toate intervalele parţiale ale diviziunii d au lungimea nulă, deci $\nu(d) = 0$. În acest caz, putem alege punctele intermediare ξ_i într-un singur mod şi anume $\xi_i = a$.

Fie f o funcţie definită pe un interval $[a, b]$.

Să considerăm o diviziune d a acestui interval:

$$d: a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n = b.$$

În fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$ să alegem un punct intermediar ξ_i, $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$, şi să formăm produsul $f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i)$ dintre valoarea funcţiei f în punctul intermediar ξ_i şi lungimea intervalului parţial $[x_i, x_{i+1}]$. Obţinem astfel produsele:

$$f(\xi_0)\ (x_1 - x_0), f(\xi_1)\ (x_2 - x_1), \ \ldots, \ f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i), \ \ldots, \ f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Suma acestor produse se notează $\sigma_d(f)$ sau σ_d şi se numeşte *sumă riemanniană* (de la numele matematicianului Riemann) a funcţiei f, corespunzătoare diviziunii d şi punctelor intermediare ξ_i:

$$\sigma_d = \sigma_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i).$$

Sumele riemanniene se mai numesc *sume integrale*.

Dacă $a = b$, atunci $x_{i+1} = x_i$, deci $x_{i+1} - x_i = 0$ şi deci $\sigma_d(f) = 0$ oricare ar fi diviziunea d a intervalului $[a, a]$.

Evident, dacă $a < b$, pentru o aceeaşi diviziune d putem forma o infinitate de sume integrale, corespunzătoare diferitelor moduri posibile de alegere a punctelor intermediare ξ_i. Notaţia $\sigma_d(f)$ a sumei integrale nu este completă; ea ar trebui să conţină şi punctele intermediare de care depinde, dar aceasta ar complica notaţia.

Să observăm că dacă unul din intervalele parţiale are lungimea nulă, $x_{i+1} - x_i = 0$, „contribuţia'' sa în suma integrală este nulă, astfel încît, dacă $a < b$, putem să considerăm numai diviziuni formate din *puncte distincte*:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Problema care se pune acum este dacă, alegînd diviziuni din ce în ce mai fine, formate din intervale din ce în ce mai multe şi mai mici, sumele integrale se apropie din ce în ce mai mult de un anumit număr I (finit). Ajungem astfel la următoarea

Definiţie. Se spune că funcţia f este integrabilă (în sensul lui Riemann) pe intervalul $[a, b]$ dacă pentru orice şir de diviziuni (d_n) cu norma

tinzînd către $0, \nu(d_n) \to 0$, şi pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i^n, şirurile corespunzătoare (σ_{d_n}) de sume integrabile au o limită finită comună I.

Numărul I se numeşte integrala funcţiei f pe intervalul $[a,b]$ (în sensul lui Riemann) şi se notează

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ sau } \int_a^b f(x) \text{ sau } \int_a^b f\,dx \text{ sau } \int_a^b f.$$

Notaţia $\int_a^b f(x)\,dx$ se citeşte *integrală de la a la b din* $f(x)\,dx$.

Semnul $\int$ se numeşte *semn de integrare*, sau semnul integralei; a şi b se numesc limite de integrare: a este *limita inferioară*, iar b este *limita superioară*; intervalul $[a, b]$ se numeşte *interval de integrare*; funcţia f se numeşte *funcţia de integrat*; x se numeşte *variabila de integrare*. Variabila de integrare se poate nota cu orice literă, t, u, v, y, x etc. Astfel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha.$$

Dacă $a < b$, se defineşte $\int_b^a f(x)\,dx$ prin egalitatea

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemple. 1) Orice funcţie f definită pe un interval $[a, a]$ cu extremităţile egale este integrabilă pe acest interval şi

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Într-adevăr, avem $\sigma_d(f) = 0$, oricare ar fi diviziunea d a intervalului $[a, a]$. Aşadar, dacă $\nu(d_n) \to 0$, atunci $\sigma_{d_n} \to 0$, deci f este integrabilă şi $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2) Orice funcţie constantă $f(x) \equiv \alpha$ definită pe un interval $[a, b]$ este integrabilă şi

$$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha(b - a).$$

Într-adevăr, oricare ar fi diviziunea d şi punctele intermediare ξ_i avem $f(\xi_i) = \alpha$, deci

$$\sigma_d = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(x_{i+1} - x_i) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) =$$
$$= \alpha(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1}) = \alpha(x_n - x_0) = \alpha(b - a).$$

Pentru orice şir (d_n) de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$ avem $\sigma_{d_n} \to \alpha(b - a)$, deci f este integrabilă şi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \alpha(b - a)$, adică $\int_a^b \alpha\mathrm{d}x = \alpha(b - a)$.

3) Funcţia f definită pe intervalul $[a, b]$, $a < b$, astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ 1, & \text{dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

nu este integrabilă în sensul lui Riemann.

În adevăr, fie (d_n) un şir de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$. Dacă în fiecare diviziune alegem punctele intermediare ξ_i *raţionale*, avem $f(\xi_i) = 0$, deci sumele integrale corespunzătoare σ_{d_n} sînt toate nule şi deci $\lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n} = 0$. Dacă în fiecare diviziune alegem punctele intermediare ξ_i' *iraţionale*, avem $f(\xi_i') = 1$ şi sumele integrale corespunzătoare σ'_{d_n} sînt toate egale cu $b - a$:

$$\sigma'_{d_n} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = b - a,$$

deci $\lim_{n\to\infty} \sigma'_{d_n} = b - a \neq 0$. Aşadar, pentru alegeri diferite ale punctelor intermediare, sumele integrale au limite *diferite*. Rezultă că funcţia f nu este integrabilă în sensul lui Riemann.

Observaţii. 1° După o definiţie mai generală a integralei dată de Lebesgue, funcţia din exemplul 3 este integrabilă (în sensul lui Lebesgue), şi integrala sa (în sensul lui Lebesgue) este egală cu 0.

2° În definiţia integrabilităţii este suficient să se presupună că pentru fiecare şir (d_n) de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$, şi pentru fiecare alegere a punctelor intermediare, şirul sumelor integrale (σ_{d_n}) are limită finită. Rezultă atunci că toate şirurile (σ_{d_n}) au o limită finită comună I, oricare ar fi şirul de diviziuni (d_n) cu $\nu(d_n) \to 0$ şi oricare ar fi punctele intermediare.

Într-adevăr, dacă pentru două şiruri de diviziuni (d_n') şi (d_n'') cu $\nu(d_n') \to 0$ şi $\nu(d_n'') \to 0$ am avea $\sigma'_{d_n} \to I'$ şi $\sigma''_{d_n} \to I''$ cu $I' \neq I''$, atunci pentru următorul şir de diviziuni

$$d_1', d_1'', d_2', d_2'', \ldots, d_n', d_n'', \ldots$$

şirul normelor

$$\nu(d_1'), \nu(d_1''), \ldots, \nu(d_n'), \nu(d_n''), \ldots$$

tinde de asemenea către 0, dar şirul sumelor integrale

$$\sigma_{d_1'}, \sigma_{d_1''}, \ldots, \sigma_{d_n'}, \sigma_{d_n''}, \ldots$$

nu ar avea limită.

3° Dacă ştim că funcţia f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, pentru calculul integralei este suficient să luăm un *singur* şir particular (d_n) de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$, şi de asemenea nişte puncte intermediare particulare în fiecare diviziune. Ştim atunci că $\sigma_{d_n} \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Astfel, putem alege diviziunea d_n formată din n intervale parțiale, de aceeași lungime, și anume $\frac{b-a}{n}$; în fiecare asemenea interval parțial putem alege punctul intermediar la una din extremitățile acestui interval sau la mijlocul său.

Sumele integrale corespunzătoare se pot calcula mai ușor. Alegînd diviziunea (d_n) cu un număr suficient de mare de intervale parțiale, suma integrală corespunzătoare σ_{d_n} poate să difere oricît de puțin de valoarea integralei.

În acest mod se calculează integrala cu aproximație.

4° Să considerăm un singur șir (Δ_n) de diviziuni, și anume, pentru fiecare $n \in N$, diviziunea Δ_n este formată din n intervale parțiale de aceeași lungime $\frac{b-a}{n}$:

$$\Delta_n : a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \ldots, a + \frac{i(b-a)}{n}, \ldots, a + \frac{n(b-a)}{n} = b.$$

Avem $\nu(\Delta_n) = \frac{b-a}{n}$, deci $\nu(\Delta_n) \to 0$.

Pentru o alegere oarecare a punctelor intermediare, să notăm cu σ_n suma integrală corespunzătoare diviziunii Δ_n:

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}.$$

Se poate arăta că funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă șirul (σ_n) are o limită finită unică I, independentă de alegerea punctelor intermediare; limita I este egală cu integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

Lăsăm demonstrația acestui fapt pe seama cititorului, ca exercițiu.

5° La începuturile analizei, suma integrală $\sum f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$ era notată $\mathbf{S}_a^b f(x)\Delta x$, unde Δx reprezenta lungimea comună a intervalelor unei diviziuni Δ_n. Notația $\int_a^b f(x)\,dx$ amintește această notație a sumei integrale: semnul de integrare $\int$ provine din litera S prin alungire, iar dx provine din Δx.

Trebuie observat că semnul de diferențială dx care apare în notația integralei nu are justificare teoretică, dar s-a păstrat prin tradiție. Avantajul semnului de diferențială este acela că dacă f este o funcție de două sau mai multe variabile semnul diferențialei indică variabila de integrare, de exemplu

$$\int_a^b f(x, y)\,dx \text{ sau } \int_a^b f(x, y)\,dy.$$

Semnul de diferențială prezintă de asemenea un avantaj la calculul integralei unei funcții compuse prin metoda schimbării de variabilă, unde, dacă în mod formal se interpretează dx ca o diferențială, se pot da reguli simple pentru calculul integralei prin metoda schimbării de variabilă.

Se observă o analogie între definiţia integralei şi definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii. Ca şi pentru limite de funcţii, se poate da o definiţie cu ε şi δ a integralei, aşa cum rezultă din teorema următoare:

Teoremă. Funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă există un număr finit I cu proprietatea că, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi diviziunea d cu $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$, şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare în diviziunea d, să avem $|\sigma_d - I| < \varepsilon$.

În acest caz $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Demonstraţie. Să presupunem întîi că f este integrabilă pe $[a, b]$ şi să arătăm că numărul $I = \int_a^b f(x)\,dx$ îndeplineşte condiţia din enunţul teoremei.

Să presupunem, prin absurd, că numărul I ales nu îndeplineşte condiţia din enunţ. Aceasta înseamnă că: există un număr $\varepsilon_0 > 0$, astfel încît oricărui număr $\delta > 0$ îi corespunde o diviziune d (care depinde de δ) cu $\nu(d) < \delta$, şi o alegere a punctelor intermediare ξ_i astfel încît pentru suma integrală corespunzătoare să avem $|\sigma_d - I| > \xi_0$.

Deoarece $\delta > 0$ este arbitrar, să luăm $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Există deci o diviziune d_n cu $\nu(d_n) < \frac{1}{n}$ şi nişte puncte intermediare ξ_i astfel încît $|\sigma_{d_n} - I| > \varepsilon_0$.

Am obţinut astfel un şir (d_n) de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$ şi un şir (σ_{d_n}) de sume integrale cu $|\sigma_{d_n} - I| > \varepsilon_0$, pentru orice $n \in N$. Aceasta înseamnă că I nu este limita şirului (σ_{d_n}), adică şirul (σ_{d_n}) nu tinde către $\int_a^b f(x)\,dx$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza că f este integrabilă pe $[a, b]$.

Reciproc, să presupunem că există un număr finit I care îndeplineşte condiţia din enunţul teoremei; să arătăm în acest caz că f este integrabilă pe $[a, b]$ şi că $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Fie (d_n) un şir oarecare de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$ şi fie (σ_{d_n}) şirul corespunzător de sume integrale, pentru o alegere arbitrară a punctelor intermediare în fiecare diviziune.

Pentru a arăta că f este integrabilă pe $[a, b]$ trebuie să arătăm că $\sigma_{d_n} \to I$.

Fie pentru aceasta un număr $\varepsilon > 0$ oarecare. Lui ε ales îi corespunde un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel încît $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ să implice $|\sigma_d - I| < \varepsilon$.

Dar $\nu(d_n) \to 0$, deci, pentru numărul $\delta(\varepsilon) > 0$ obținut, există un număr $N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $\nu(d_n) < \delta(\varepsilon)$, și deci $|\sigma_{d_n} - I| < \varepsilon$.

Așadar, pentru numărul $\varepsilon > 0$ ales, am găsit un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $|\sigma_{d_n} - I| < \varepsilon$. Aceasta înseamnă că $\sigma_{d_n} \to I$.

Cum șirul (d_n) cu $\nu(d_n) \to 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ și că $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

O b s e r v a ț i e. Analogia dintre definiția integralei și definiția limitei unei funcții se poate extinde și asupra notațiilor.

Dacă $\nu(d_n) \to 0$ implică $\sigma_{d_n} \to I$, în loc de $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{d_n} = I$ putem scrie $\lim\limits_{\nu(d_n)\to 0} \sigma_{d_n} = I$ (sau, încă, $\sigma_{d_n} \to I$ cînd $\nu(d_n) \to 0$).

Dacă pentru *orice* șir (d_n) cu $\nu(d_n) \to 0$ avem $\sigma_{d_n} \to I$, vom scrie, ca și pentru funcții:

$$\lim_{\nu(d)\to 0} \sigma_d = I$$

(sau $\sigma_d \to I$ cînd $\nu(d) \to 0$). Cum limita I este, conform definiției, integrala funcției f, avem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\nu(d)\to 0} \sigma_d(f)$$

$$\left(\text{sau } \sigma_d(f) \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ cînd } \nu(d) \to 0\right).$$

În definiția integrabilității nu s-a impus condiția ca funcția f să fie mărginită. Această condiție este însă verificată de la sine, așa cum rezultă din următoarea

P r o p o z i ț i e. Dacă funcția f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, atunci f este mărginită pe $[a, b]$.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece f este integrabilă, putem găsi o diviziune d astfel încît oricare ar fi punctele intermediare ξ_i să avem

$$|\sigma_d - I| < \varepsilon \text{ sau } I - \varepsilon < \sigma_d < I + \varepsilon, \text{ unde } I = \int_a^b f.$$

Să presupunem, prin absurd, că funcția f nu este mărginită pe $[a, b]$; atunci există cel puțin un interval al diviziunii d pe care f nu este mărginită; fie $[x_j, x_{j+1}]$ un asemenea interval, și, pentru a face o alegere, să presupunem că f nu este mărginită superior pe intervalul $[x_j, x_{j+1}]$:

$$\sup_{x_j < x < x_{j+1}} f(x) = +\infty.$$

Să alegem punctele $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ pentru $i \neq j$, şi să notăm

$$\Omega = \sum_{i \neq j} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Putem alege acum punctul $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ astfel ca

$$f(\xi_j) > \frac{I - \Omega + 2\varepsilon}{x_{j+1} - x_j}.$$

(Evident, $x_{j+1} - x_j > 0$, deoarece, în caz contrar, intervalul $[x_j, x_{j+1}]$ s-ar reduce la un punct şi funcţia ar fi mărginită pe acest interval.)

Atunci $$f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) > I - \Omega + 2\varepsilon$$

şi

$$\sigma_d = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i \neq j} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) + f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) =$$

$$= \Omega + f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) > \Omega + I - \Omega + 2\varepsilon = I + 2\varepsilon,$$

adică $\sigma_d > I + 2\varepsilon$, ceea ce contrazice inegalităţile $I - \varepsilon < \sigma_d < I + \varepsilon$, care au rezultat din alegerea diviziunii d.

Dacă f nu este mărginită inferior pe intervalul $[x_j, x_{j+1}]$, se alege un punct ξ_j în acest interval, astfel ca $f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) < I - \Omega - 2\varepsilon$ şi se obţine inegalitatea $\sigma_d < I - 2\varepsilon$, ceea ce contrazice inegalitatea $I - \varepsilon < \sigma_d < I + \varepsilon$.

Rezultă deci că funcţia f este mărginită.

3. Criteriul lui Darboux

Vom demonstra acum un criteriu de integrabilitate, în care nu intervine valoarea integralei, şi care este analogul criteriului lui Cauchy de la şiruri, sau al criteriului lui Cauchy-Bolzano de la limite de funcţii.

Fie f o funcţie *mărginită* definită pe un interval $[a, b]$, $a < b$, şi fie m şi M marginile sale pe acest interval:

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \qquad M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Avem deci $m \leq f(x) \leq M$ pentru orice $x \in [a, b]$.

Să considerăm o diviziune (d) a intervalului $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Funcţia f este mărginită pe fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$; să notăm cu m_i şi M_i marginile funcţiei pe acest interval:

$$m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x), \qquad M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x).$$

Avem $m_i \leq f(x) \leq M_i$, oricare ar fi $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Să formăm sumele

$$s_d = s_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i),$$

$$S_d = S_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Sumele s_d şi S_d se numesc *sumele Darboux* ale funcţiei f, corespunzătoare diviziunii d; s_d este *suma inferioară Darboux*, iar S_d este *suma superioară Darboux*. Avem

$$m(b - a) \leqslant s_d \leqslant \sigma_d \leqslant S_d \leqslant M(b - a),$$

oricare ar fi alegerea punctelor intermediare cu ajutorul cărora s-a format suma riemanniană σ_d.

Într-adevăr, oricare ar fi punctul intermediar $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, avem

$$m \leqslant m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i \leqslant M.$$

Înmulţind toţi termenii cu numărul pozitiv $x_{i+1} - x_i$ obţinem

$$m(x_{i+1} - x_i) \leqslant m_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \leqslant M_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant$$
$$\leqslant M(x_{i+1} - x_i).$$

Adunînd membru cu membru cele n inegalităţi, obţinem

$$m \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant M \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_1),$$

adică

$$m(b - a) \leqslant s_d \leqslant \sigma_d \leqslant S_d \leqslant M(b - a).$$

Trebuie observat că, pentru o diviziune dată d, putem forma o infinitate de sume riemanniene σ_d, dar numai două sume Darboux, s_d şi S_d.

Legătura dintre sumele Darboux şi sumele riemanniene corespunzătoare unei *aceleiaşi* diviziuni d este dată de egalitatea

$$s_d = \inf_{\xi_i} \sigma_d, \quad S_d = \sup_{\xi_i} \sigma_d,$$

unde marginea inferioară şi cea superioară se consideră pentru toate alegerile posibile ale punctelor intermediare ξ_i.

În adevăr, fie $\varepsilon > 0$; deoarece $m_i = \inf\limits_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x)$, în fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$ există un punct ξ_i astfel ca $f(\xi_i) - m_i < \frac{\varepsilon}{b - a}$. Atunci

$$\sigma_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) - m_i](x_{i+1} - x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a}(x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon,$$

deci

$$\sigma_d - \varepsilon \leqslant s_d \leqslant \sigma_d. \text{ Rezultă că } s_d = \inf_{\xi_i} \sigma_d.$$

La fel se demonstrează cea de-a doua egalitate.

S-a arătat mai sus că pentru o aceeaşi diviziune d, suma inferioară s_d este mai mică sau egală cu suma superioară S_d. Vom arăta acum că orice sumă inferioară este mai mică decît orice sumă superioară, chiar dacă suma inferioară şi cea superioară provin din diviziuni diferite. Pentru aceasta avem nevoie de următoarea

Lemă. Dacă diviziunea d' este mai fină decît diviziunea d, atunci

$$s_d \leqslant s_{d'}, \leqslant S_{d'} \leqslant S_d.$$

(Prin trecerea de la o diviziune la o diviziune mai fină, sumele inferioare cresc, iar sumele superioare descresc.)

Fie $[x_i, x_{i+1}]$ un interval parţial al diviziunii d; să presupunem că diviziunea d' mai are un punct c în acest interval, $x_i < c < x_{i+1}$. Aşadar, pentru diviziunea d' există două intervale parţiale $[x_i, c]$ şi $[c, x_{i+1}]$ în locul intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ al diviziunii d.

Să notăm

$$m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x), \quad m' = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant c} f(x), \quad m_i'' = \inf_{c \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x).$$

Avem, evident, $m_i \leqslant m_i'$ şi $m_i \leqslant m_i''$, deci

$$m_i(c - x_i) \leqslant m' (c - x_i), \quad m_i (x_{i+1} - c) \leqslant m_i'' (x_{i+1} - c)$$

şi prin adunarea membru cu membru a acestor inegalităţi se obţine

$$m_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant m_i' (c - x_i) + m_i''(x_{i+1} - c).$$

Aşadar, termenul $m_i(x_{i+1} - x_i)$ corespunzător intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ în suma s_d se înlocuieşte printr-un număr mai mare sau egal, $m_i'(c - x_i) + m_i'' (x_{i+1} - c)$ pentru a obţine suma $s(d')$. Acest fapt rămîne valabil dacă diviziunea d' are în intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ mai multe puncte de diviziune; pe de altă parte acest fapt este valabil pentru fiecare interval parţial al diviziunii d. Rezultă atunci că $s_d \leqslant s_{d'}$.

Inegalitatea $S_{d'} \leqslant S_d$ se demonstrează la fel.

Propoziţie. Oricare ar fi diviziunile d_1 şi d_2 avem $s_{d_1} \leqslant S_{d_2}$. (Orice sumă inferioară este mai mică sau egală cu orice sumă superioară.)

Să notăm cu d diviziunea formată atît cu punctele diviziunii d_1, cît şi cu punctele diviziunii d_2. Evident, d este mai fină şi decît d_1 şi decît d_2. Atunci

$$s_{d_1} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant S_{d_1},$$

$$s_{d_2} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant S_{d_2},$$

de unde $s_{d_1} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant S_{d_2}$ şi deci $s_{d_1} \leqslant S_{d_2}$.

Corolar. Avem

$$\sup_d s_d \leqslant \inf_d S_d,$$

unde marginile superioare și inferioare se consideră pentru toate diviziunile posibile d, ale intervalului $[a, b]$.

Fie d_0 o diviziune oarecare. Pentru orice diviziune d avem

$$s_d \leqslant S_{d_0},$$

deci mulțimea $\{s_d\}$ a sumelor inferioare este majorată de numărul S_{d_0} (care este un majorant al ei.) Această mulțime are deci o margine superioară finită $\underline{I}$ (cel mai mic majorat) și $\underline{I} \leqslant S_{d_0}$.

Deoarece diviziunea d_0 a fost aleasă arbitrar, rezultă că pentru orice diviziune d avem $\underline{I} \leqslant S_d$. Așadar, mulțimea $\{S_d\}$ a sumelor superioare este minorată ($\underline{I}$ este un minorant al ei). Această mulțime are deci o margine inferioară finită $\overline{I}$ (cel mai mare minorant) și $\underline{I} \leqslant \overline{I}$, adică

$$\sup_d s_d \leqslant \inf_d S_d.$$

Numerele $\underline{I} = \sup\limits_d s_d$ și $\overline{I} = \inf\limits_d S_d$ se numesc *integralele Darboux* ale funcției f; $\underline{I}$ *este integrala inferioară Darboux* iar $\overline{I}$ este *integrala superioară Darboux.*

Pentru orice diviziune d avem

$$s_d \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S_d.$$

Integralele Darboux se mai notează și astfel:

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \text{ și } \overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Sîntem acum în măsură să dăm un criteriu de integrabilitate foarte important, care folosește sumele Darboux.

Teoremă. O funcție mărginită f: $[a, b] \to R$ este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi diviziunea d cu $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ să avem $S_d - s_d < \varepsilon$.

Să presupunem întîi că f este integrabilă pe $[a, b]$ și să notăm cu I integrala sa. Fie $\varepsilon > 0$; conform primului criteriu de integrabilitate, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi diviziunea d cu $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare, să avem $|\sigma_d - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ sau

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_d < I + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Pentru fiecare asemenea diviziune d avem deci

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \inf_{\xi_i} \sigma_d \leqslant \sup_{\xi_i} \sigma_d \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2},$$

adică

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}$$

şi deci $S_d - s_d \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$

Aşadar, dacă f este integrabilă, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel încît $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ implică $S_d - s_d < \varepsilon$.

Reciproc, să presupunem că această condiţie este verificată, şi să arătăm că f este integrabilă.

Rezultă mai întîi că $\overline{I} = \underline{I}$. Într-adevăr, din inegalitatea $s_d \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \leqslant S_d$ deducem, pentru $\nu(d) \leqslant \delta(\varepsilon)$,

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} \leqslant S_d - s_d \leqslant \varepsilon,$$

adică $0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} \leqslant \varepsilon$; deoarece ε este arbitrar rezultă că $\underline{I} = \overline{I}$. Să notăm cu I valoarea comună a integralelor Darboux. Avem:

$$s_d \leqslant I \leqslant S_d \quad \text{şi} \quad s_d \leqslant \sigma_d \leqslant S_d,$$

deci $|\sigma_d - I| \leqslant S_d - s_d$.

Dacă $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ atunci $S_d - s_d < \varepsilon$ şi deci

$$|\sigma_d - I| < \varepsilon,$$

adică f este integrabilă pe $[a, b]$ şi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$.

Această teoremă va fi numită *criteriul lui Darboux.*

O b s e r v a ţ i e. Din demonstraţia acestei teoreme, rezultă că, dacă f este integrabilă, integralele Darboux sînt egale între ele şi egale cu integrala Riemann:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Reciproc, se poate arăta că, dacă integralele Darboux sînt egale, funcţia este integrabilă în sensul lui Riemann.

Pentru funcţia definită pe $[a, b]$ cu $a < b$, prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \text{ este raţional} \\ 1, \text{ dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

avem $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = 0$ şi $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

4. Clase de funcții integrabile

Propoziția 1. Orice funcție f monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Pentru a face o alegere să presupunem că f este crescătoare și că nu este constantă, deci $f(a) < f(b)$. (Pentru funcțiile constante s-a arătat deja că sînt integrabile.)

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$. Avem

$$f(x_i) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{i+1}) \quad \text{pentru} \quad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},$$

deci $m_i = f(x_i)$ și $M_i = f(x_{i+1})$. Atunci

$$S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i).$$

Fie $\varepsilon > 0$; dacă $\nu(d) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, atunci $x_{i+1} - x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ pentru $i = 0, 1, \ldots, n-1$, deci, deoarece $f(x_{i+1}) - f(x_i) \geqslant 0$, avem

$$S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)](x_{i+1} - x_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon.$$

Așadar, luînd $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, criteriul lui Darboux este verificat, deci f este integrabilă. Dacă f este descrescătoare, demonstrația se face la fel, ținînd seama că $m_i = f(x_{i+1})$ și $M_i = f(x_i)$.

Propoziția 2. Orice funcție continuă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Fie d o diviziune. Deoarece f este continuă pe intervalul compact $[x_i, x_{i+1}]$, este mărginită și-și atinge marginile pe acest interval; există deci două puncte x_i' și x_i'' din $[x_i, x_{i+1}]$, astfel ca

$$f(x_i') = m_i, \; f(x_i'') = M_i.$$

Atunci

$$S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i') - f(x_i''))(x_{i+1} - x_i).$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece f este continuă pe intervalul compact $[a, b]$, este uniform continuă pe acest interval; numărului ε ales îi corespunde deci un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice $x', x'' \in [a, b]$ cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$.

Pentru orice diviziune d cu $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$, avem $|x_{i+1} - x_i| < \delta(\varepsilon)$, deci $|x_i'' - x'| < \delta(\varepsilon)$, şi, prin urmare, $|f(x_i'') - f(x_i')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Aşadar, dacă $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$, atunci

$$S_d - s_d = |S_d - s_d| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i'') - f(x_i')| (x_{i+1} - x_i) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{a-b} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

şi deci f este integrabilă pe $[a, b]$.

5. Criteriul lui Lebesgue

Pentru cele două clase de funcţii integrabile, funcţiile continue şi funcţiile monotone, mulţimea punctelor de discontinuitate este — într-un anumit sens — excepţională: vidă, la funcţiile continue şi cel mult numărabilă, la funcţiile monotone (cap. V, § 4, nr. 2, propoziţia 2). Criteriul lui Lebesgue, care va fi demonstrat mai jos, arată că mulţimea punctelor de continuitate caracterizează complet funcţiile integrabile în sensul lui Riemann. Spre deosebire de celelalte criterii de integrabilitate, care folosesc sumele integrale, criteriul lui Lebesgue are meritul deosebit de a caracteriza funcţiile integrabile numai prin structura acestor funcţii. Vom demonstra mai întîi o teoremă ajutătoare, care constituie ea însăşi un criteriu de integrabilitate.

Teorema 1. (Paul du Bois Reymond). O funcţie $f: [a, b] \to R$ este integrabilă în sensul lui Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă este mărginită şi pentru orice număr $\varepsilon > 0$, mulţimea

$$E_\varepsilon = \{x | \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$$

este de măsură Jordan nulă.

Să presupunem întîi că f este integrabilă. Atunci f este mărginită. Să presupunem prin absurd că ar exista un număr $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că mulţimea E_{ε_0} nu este de măsură Jordan nulă, ci de măsură exterioară strict pozitivă: $m_e(E_{\varepsilon_0}) = \alpha > 0$. Deoarece f este integrabilă, conform criteriului lui Darboux există o diviziune d a intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$S_d - s_d < \alpha\varepsilon_0.$$

Dacă un interval $[x_j, x_{j+1}]$ conţine puncte x din E_{ε_0} avem

$$M_j - m_j = \omega_f([x_j, x_{j+1}]) \geq \omega_f(x) \geq \varepsilon_0,$$

iar reuniunea tuturor intervalelor de acest fel conţine pe E_{ε_0} deci suma lungimilor acestor intervale este $\geqslant \alpha$. Atunci

$$S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \geqslant$$

$$\geqslant \sum{}' (M_j - m_j)(x_{j+1} - x_j) \geqslant \varepsilon_0 \sum (x_{j+1} - x_j) \geqslant \varepsilon_0 \alpha,$$

unde Σ' se referă numai la intervalele parţiale ce conţin puncte din E_{ε_0}. Am ajuns astfel la contradicţia $\varepsilon_0\alpha \leqslant S_d - s_d < \varepsilon_0\alpha$. Urmează aşadar că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, mulţimea E_ε este de măsură Jordan nulă.

Reciproc, să presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $m_e(E_\varepsilon) = 0$ şi să arătăm că f este integrabilă. Fie $\varepsilon > 0$. Să alegem ε' şi ε'' astfel încît

$$\omega_f([a, b])\, \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4} \text{ şi } (b - a)\, \varepsilon'' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deoarece $m_e(E_{\varepsilon''}) = 0$, există o familie finită de intervale deschise $(J_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ care acoperă pe $E_{\varepsilon''}$, cu suma lungimilor $< \varepsilon'$. Reuniunea F a acestor intervale este o mulţime deschisă. Diferenţa $E = [a, b] - F$ este o reuniune de intervale şi este închisă şi mărginită, deci compactă. Conform propoziţiei din cap. II, § 5, nr. 7, pentru $\varepsilon'' > 0$ ales, există un număr $\delta' > 0$ astfel încît oricare ar fi intervalul $I \subset [a, b] - F$ de lungime $< \delta'$ să avem $\omega_f(I) < \varepsilon''$. Să alegem $\delta = \min\left(\delta', \frac{\varepsilon'}{2p}\right)$. Fie acum d o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d) < \delta$. Pentru a arăta că f este integrabilă, va fi suficient să arătăm că

$$S_d - s_d < \varepsilon.$$

Vom împărţi $S_d - s_d$ în trei părţi astfel:

$$S_d - s_d = \sum (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum{}_1 + \sum{}_2 + \sum{}_3,$$

unde Σ_1 se referă la intervalele parţiale care n-au nici un punct comun cu F, Σ_2 se referă la intervalele parţiale conţinute în F, iar Σ_3 se referă la intervalele parţiale care acoperă o extremitate a unuia din intervalele J_i.

Pentru prima sumă avem:

$$\sum{}_1 (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum{}_1 \omega_f([x_{i+1} - x_i])\, (x_{i+1} - x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon'' \sum{}_1 (x_{i+1} - x_i) \leqslant \varepsilon''(b - a),$$

deoarece $[x_i, x_{i+1}] \subset [a, b] - F$ şi lungimea intervalelor $[x_i, x_{i+1}]$ este $< \delta$ deci $< \delta'$.

Pentru a doua sumă avem:

$$\sum{}_2 (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < (M - m) \sum{}_2 (x_{i+1} - x_i) \leqslant (M - m) \sum{}_2 m(J_i) \leqslant$$

$$\leqslant (M - m)\varepsilon'.$$

Pentru a treia sumă avem:

$$\sum\nolimits_3 (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \leqslant (M - m) \sum\nolimits_3 (x_{i+1} - x_i) \leqslant 2p\delta(M - m) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon'(M - m),$$

deoarece numărul extremităților intervalelor J_i este $2p$. Așadar, avem

$$S_d - s_d \leqslant \varepsilon''(b - a) + 2\varepsilon'(M - m) = \varepsilon''(b - a) + 2\varepsilon'\omega_f([a, b]) < \varepsilon$$

și teorema este complet demonstrată.

Înainte de a enunța criteriul lui Lebesgue, vom demonstra următoarea

Lemă. Dacă $f\colon [a, b] \to R$ este o funcție mărginită, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, mulțimea $E_\varepsilon = \{x | \omega_f(x) \geqslant \varepsilon\}$ este închisă.

Într-adevăr, fie $x_0 \in [a, b]$ un punct de acumulare al lui E_ε.

Să presupunem, prin absurd, că $x_0 \notin E_\varepsilon$, deci că $\omega_f(x_0) < \varepsilon$. Există atunci un interval deschis I_0 cu centrul în x_0, cu $\omega_f(I_0 \cap [a, b]) < \varepsilon$. În intervalul I_0 există cel puțin un punct $x \in E_\varepsilon$, deci $\omega_f(x) \geqslant \varepsilon$. Intervalul I_0 este o vecinătate a lui x, deci $\omega_f(I_0 \cap [a, b]) \geqslant \omega_f(x) \geqslant \varepsilon$ și am ajuns la o contradicție. Urmează deci că $x_0 \in E_\varepsilon$ și deci mulțimea E_ε este închisă. Teorema următoare este cunoscută sub numele de *„criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann"*.

Teorema 2 (Lebesgue). O funcție $f\colon [a, b] \to R$ este integrabilă Riemann, dacă și numai dacă este mărginită și mulțimea punctelor în care f este discontinuă este neglijabilă (de măsură Lebesgue nulă).

Să presupunem întîi că f este integrabilă. Atunci f este mărginită. Fie (ε_n) un șir descrescător de numere > 0, convergent către 0. În baza teoremei 1, fiecare mulțime $E_{\varepsilon_n}\{x | \omega_f(x) \geqslant \varepsilon_n\}$ este de măsură Jordan nulă, deci este neglijabilă și deci reuniunea lor

$$E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\varepsilon_n}$$

este de asemenea neglijabilă. Dar

$$E_0 = \{x | x \in [a, b],\ \omega_f(x) > 0\},$$

deci E_0 este formată din toate punctele de discontinuitate ale lui f. Așadar, dacă f este integrabilă, mulțimea E_0 a punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă.

Reciproc, să presupunem că f este mărginită și că mulțimea E_0 a punctelor de discontinuitate ale lui f este neglijabilă și să arătăm că f este integrabilă.

Fie $\delta > 0$. Deoarece E_0 este neglijabilă, există un șir (I_n) de intervale deschise care acoperă mulțimea E_0 astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} m(I_n) < \delta$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, avem $E_\varepsilon \subset E_0$, deci (I_n) constituie o acoperire a lui E_ε. Deoarece, conform lemei precedente, E_ε este o mulţime închisă şi mărginită, deci compactă, din acoperirea (I_n) se poate extrage o acoperire finită $(I_i)_{1\leqslant i\leqslant n(\varepsilon)}$ a lui E_ε. Deducem că $m_e(E_\varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} m(I_i) \leqslant \delta$. Cum $\delta > 0$ este arbitrar, rezultă că $m_e(E_\varepsilon) = 0$, deci E_ε este de măsură Jordan nulă. Conform teoremei 1, deducem că f este integrabilă şi astfel teorema este complet demonstrată.

Observaţii. 1° Se spune că o proprietate punctuală definită pentru punctele dintr-o mulţime $E \subset R$ are loc aproape peste tot pe E dacă mulţimea punctelor din E în care nu are loc este neglijabilă. Cu această denumire, o funcţie este continuă aproape peste tot, dacă mulţimea punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă. Criteriul lui Lebesgue se poate enunţa acum astfel:

O funcţie $f: [a, b] \to R$ este integrabilă dacă şi numai dacă este mărginită, şi continuă aproape peste tot pe $[a, b]$.

2° Din criteriul lui *Lebesgue* rezultă imediat că funcţiile continue şi funcţiile monotone sînt integrabile, deoarece la funcţiile continue mulţimea punctelor de discontinuitate este vidă, deci neglijabilă, iar la funcţiile monotone mulţimea punctelor de discontinuitate este cel mult numărabilă, deci de asemenea neglijabilă.

§ 3. Proprietăţile funcţiilor integrabile

Cu definiţia integralei cu şiruri sau cu ε şi δ, se pot demonstra atît proprietăţile funcţiilor integrabile cît şi proprietăţi ale integralei.

Cu criteriul lui Darboux sau cu criteriul lui Lebesgue se pot demonstra numai proprietăţi de integrabilitate, dar nu se pot demonstra proprietăţi ale integralei, deoarece integrala nu apare în enunţul acestor criterii. Folosirea citeriului lui Lebesgue simplifică mult demonstraţiile.

1. Spaţiul funcţiilor integrabile

Liniaritatea integralei

Propoziţia 1. Dacă f şi g sînt integrabile pe $[a, b]$ şi $\alpha, \beta \in R$, atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Vom da întîi o demonstraţie folosind direct definiţia cu şiruri a integrabilităţii şi a integralei. Fie d o diviziune oarecare a lui $[a, b]$; să alegem arbitrar punctele intermediare ξ_i. Avem

$$\sigma_d(\alpha f + \beta g) = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)](x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) + \beta \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \alpha\sigma_d(f) + \beta\sigma_d(g).$$

Fie (d_n) un şir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$. Pentru fiecare diviziune d_n avem:

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha\sigma_{d_n}(f) + \beta\sigma_{d_n}(g).$$

Deoarece f şi g sînt integrabile, avem

$$\sigma_{d_n}(f) \to \int_a^b f, \qquad \sigma_{d_n}(g) \to \int_a^b g,$$

deci

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) \to \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Rezultă că $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi că

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Să dăm acum o demonstraţie a integrabilităţii funcţiei $\alpha f + \beta g$ folosind criteriul lui Lebesgue. Să observăm întîi că f şi g sînt mărginite, fiind integrabile, deci funcţia $\alpha f + \beta g$ este de asemenea mărginită. Dacă notăm cu A mulţimile punctelor de discontinuitate a lui f şi cu B mulţimea punctelor de discontinuitate a lui g, mulţimile A şi B sînt neglijabile, deci $A \cup B$ este de asemenea neglijabilă. Mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei $\alpha f + \beta g$ este conţinută în $A \cup B$ deci este neglijabilă, deci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă. Egalitatea din enunţ se obţine acum astfel: Deoarece ştim că toate funcţiile care intervin în egalitate sînt integrabile, putem alege un şir particular de diviziuni (d_n) ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$ şi în fiecare diviziune putem alege punctele intermediare ξ_i într-un mod particular (de exemplu la extremitatea stîngă a intervalelor parţiale); să formăm sumele integrale relative la funcţiile f, g şi $\alpha f + \beta g$.

Deoarece ştim că toate aceste funcţii sînt integrabile, avem

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) \to \int_a^b (\alpha f + \beta g)$$

$$\sigma_{d_n}(f) \to \int_a^b f \quad \text{şi} \quad \sigma_{d_n}(g) \to \int_a^b g.$$

Pentru sumele integrabile, se arată ca mai sus că avem egalitatea

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha\sigma_{d_n}(f) + \beta\sigma_{d_n}(g)$$

de unde, trecînd la limită, obţinem

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Observaţii. 1° Mulţimea funcţiilor integrabile pe intervalul $[a, b]$ este un spaţiu vectorial, iar aplicaţia $f \to \int_a^b f$ este o funcţională liniară pe acest spaţiu.

2° Egalitatea $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ rămîne adevărată chiar dacă $a > b$.

3° Dacă $f + g$ (sau $f - g$) este integrabilă nu rezultă că f şi g sînt integrabile.

Propoziţia 2. Dacă f şi g sînt integrabile pe $[a, b]$ atunci funcţia fg este integrabilă pe $[a, b]$.

Deoarece f şi g sînt integrabile, ele sînt mărginite, iar mulţimile A şi B ale punctelor de discontinuitate sînt neglijabile. Rezultă că funcţia fg este mărginită şi că mulţimea punctelor sale de discontinuitate este conţinută în $A \cup B$, deci este neglijabilă, şi deci fg este integrabilă.

Observaţie. Mulţimea funcţiilor integrabile pe $[a, b]$ este o *algebră*. Integrala $\int_a^b f$ nu este însă o funcţională *multiplicativă* pe acest spaţiu; în general avem:

$$\int_a^b fg \neq \int_a^b f \int_a^b g.$$

Propoziţia 3. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, dacă f nu se anulează pe $[a, b]$ şi dacă funcţia $\frac{1}{f}$ este mărginită, atunci $\frac{1}{f}$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Într-adevăr funcția $\frac{1}{f}$ este continuă în aceleași puncte în care este continuă și f, deci $\frac{1}{f}$ este continuă aproape peste tot pe $[a, b]$ și fiind mărginită, prin ipoteză, este integrabilă pe $[a, b]$.

Propoziția 4. Dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$ și dacă funcția f^g este definită pe $[a, b]$ atunci f^g este integrabilă pe $[a, b]$.

Într-adevăr, f și g sînt mărginite și continue aproape peste tot, deci f^g este mărginită și continuă aproape peste tot, deci este integrabilă.

Corolar. Dacă $f \geqslant 0$ și dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci $\sqrt{f}$ este integrabilă pe $[a, b]$.

2. Proprietăți de monotonie ale integralei

Propoziția 5. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ și $f \geqslant 0$, atunci $\int_b^a f \geqslant 0.$

Să observăm întîi că pentru orice diviziune d a intervalului $[a, b]$ și pentru orice puncte intermediare ξ_i avem

$$\sigma_d(f) = \Sigma f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \geqslant 0$$

deoarece $f(\xi_i) \geqslant 0$ și $x_{i+1} - x_i \geqslant 0$.

Să alegem acum un șir particular (d_n) de diviziuni ale lui $[a, b]$ și în fiecare diviziune să alegem punctele intermediare ξ_i într-un mod particular. Pentru sumele integrale corespunzătoare avem:

$$\sigma_{d_n}(f) \to \int_a^b f.$$

Dar pentru fiecare n avem, ca mai sus

$$\sigma_{d_n}(f) \geqslant 0$$

și trecînd la limită obținem

$$\int_a^b f \geqslant 0.$$

Observație. Dacă $f \geqslant 0$ și $a \leqslant b$ avem $\int_b^a f \leqslant 0.$

Corolarul 1. Dacă f şi g sînt integrabile pe $[a, b]$ şi dacă $f \leqslant g$ atunci

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Într-adevăr, $g - f \geqslant 0$ şi $f - g$ este integrabilă, deci

$$\int_a^b (f - g) \leqslant 0.$$

Dar

$$\int_a^b (f - g) = \int_a^b f - \int_a^b g$$

de unde

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Observaţie. Dacă $f \leqslant g$ şi $a \leqslant b$ avem $\int_b^a f \geqslant \int_b^a g$.

Corolarul 2. Dacă f şi g sînt integrabile pe $[a, b]$ şi dacă $m \leqslant f \leqslant M$ şi $g \geqslant 0$, atunci

$$m \int_a^b g \, dx \leqslant \int_a^b fg \, dx \leqslant M \int_a^b g \, dx.$$

Într-adevăr, deoarece $g \geqslant 0$, din inegalităţile $m \leqslant f \leqslant M$ deducem $mg \leqslant f \leqslant Mg$ şi deci, prin integrare

$$\int_a^b mg \, dx \leqslant \int_a^b fg \, dx \leqslant \int_a^b Mg \, dx$$

de unde

$$m \int_a^b g \, dx \leqslant \int_a^b fg \, dx \leqslant M \int_a^b g \, dx.$$

Observaţie. Dacă $m \leqslant f \leqslant M$ şi $g \geqslant 0$ şi dacă $a \leqslant b$, atunci

$$m \int_b^a g \, dx \geqslant \int_b^a fg \, dx \geqslant M \int_b^a g \, dx.$$

C o r o l a r u l . 3. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ şi $m \leqslant f \leqslant M$ atunci

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a).$$

Într-adevăr, se ia $g(x) \equiv 1$ în corolarul 2, şi se observă că

$$\int_a^b g\, \mathrm{d}x = b - a.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Corolarul 3 rezultă şi din inegalităţile

$$m(b-a) \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant M(b-a) \text{ şi } s_d \leqslant \int_a^b f < S_d.$$

2° Dacă $m \leqslant f \leqslant M$ şi $a \leqslant b$, avem $m(a-b) \geqslant \int_b^a f \geqslant M(a-b)$

P r o p o z i ţ i a 5. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci funcţia $|f|$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, f este mărginită şi mulţimea A a punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă. Rezultă că $|f|$ este mărginită. Deoarece $|f|$ este continuă în orice punct în care f este continuă (şi, eventual şi în alte puncte), rezultă că mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui $|f|$ este conţinută în A, deci este neglijabilă, şi deci $|f|$ este integrabilă.

Pentru a demonstra inegalitatea din enunţ, plecăm de la inegalitatea

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$$

de unde, prin integrare obţinem

$$-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$$

şi deoarece $\int_a^b |f| \geqslant 0$, deducem

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Observaţii. 1° Dacă $|f|$ este integrabilă, nu rezultă că f este integrabilă.

Exemplu. Funcţia f definită pe $[a, b]$, $a < b$, astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ -1, & \text{dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

nu este integrabilă, deoarece mulţimea punctelor sale de discontinuitate este $[a, b]$ şi nu este neglijabilă. Avem însă $|f(x)| \equiv 1$, deci $|f|$ este continuă şi deci este integrabilă.

Corolarul 1. Pentru orice funcţie integrabilă f avem

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right|$$

fie că $a \leq b$, fie că $a \geq b$.

Dacă $a \leq b$, **avem** $\int_a^b |f| \geq 0$ **deci**

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right|$$

iar dacă $a \geq b$, avem $b \leq a$, deci

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.\right|$$

Corolarul 2. Dacă f este integrabilă şi dacă $|f| \leq M$, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M|b-a|$$

fie că $a \leq b$, fie că $a \geq b$.

Într-adevăr, dacă $a \leq b$, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq M(b-a) = M\,|b-a|$$

deoarece $b - a \geq 0$; iar dacă $a \geq b$, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M(a-b) = M|a-b|.$$

Corolarul 3. O funcție f: $[a, b] \to R$ este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă partea pozitivă f^+ și partea negativă f^- sînt integrabile pe $[a, b]$.

Se ține seama de egalitățile

$$\begin{cases} f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \\ f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$$

Corolarul 4. Dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci anvelopa superioară sup (f, g) și anvelopa inferioară *inf* (f, g) sînt integrabile pe $[a, b]$.

Se ține seama de egalitățile

$$\sup (f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

$$\inf (f, g) = -\sup(-f, -g).$$

3. Formule de medie

Propoziția 6. Dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$ și dacă $g \geqslant 0$, există un număr μ cuprins între marginile m și M ale funcției f, astfel ca

$$\int_a^b fg \, dx = \mu \int_a^b g \, dx.$$

Din inegalitatea $m \leqslant f \leqslant M$ deducem $mg \leqslant fg \leqslant Mg$ (deoarece $g \geqslant 0$) și deci

$$m \int_a^b g \, dx \leqslant \int_a^b fg \, dx \leqslant M \int_a^b g \, dx.$$

Să observăm că, deoarece $g \geqslant 0$ și $a \leqslant b$, avem $\int_a^b g \, dx \geqslant 0$.

Dacă $\int_a^b g \, dx = 0$, atunci din aceste inegalități deducem de asemenea $\int_a^b fg \, dx = 0$, deci, luînd un număr oarecare $\mu \in [m, M]$, avem

$$\int_a^b fg \, dx = \mu \int_a^b g \, dx = 0.$$

Dacă $\int_a^b g\,\mathrm{d}x > 0$, atunci

$$m \leqslant \frac{\int_a^b fg\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g\mathrm{d}x} \leqslant M$$

şi, luînd $\mu = \frac{\int_a^b fg\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g\,\mathrm{d}x}$, avem $m \leqslant \mu \leqslant M$ şi

$$\int_a^b fg\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g\,\mathrm{d}x.$$

Acestă egalitate se numeşte *formula mediei pentru integrale.*

C o r o l a r u l 1. **Dacă f este continuă, iar g este pozitivă şi integrabilă pe $[a, b]$, există un număr $\xi \in (a, b)$ astfel ca**

$$\int_a^b fg\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g\,\mathrm{d}x.$$

În adevăr, f fiind continuă pe $[a, b]$, îşi atinge marginile pe acest interval; există deci două puncte x_1 şi x_2 în $[a, b]$ astfel ca $f(x_1) = m$ şi $(x_2) = M$ şi deci $f(x_1) \leqslant \mu \leqslant f(x_2)$, unde μ este astfel ca

$$\int_a^b fg\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g\,\mathrm{d}x.$$

Dar, fiind continuă, f are proprietatea lui Darboux: ea nu poate trece de la valoarea $f(x_1)$ la valoarea $f(x_2)$ fără a trece prin valoarea intermediară μ; există deci un punct $\xi \in [a, b]$ astfel ca $\mu = f(\xi)$, şi deci

$$\int_a^b fg\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g\,\mathrm{d}x.$$

O b s e r v a ţ i e. Propoziţia 6 şi corolarul 1 rămîn valabile şi dacă $g \leqslant 0$.

Corolarul 2. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, există un număr cuprins între marginile funcției f, astfel ca

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \mu(b - a).$$

Se aplică formula mediei pentru funcția $g(x)\equiv 1$, ținînd seama că

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b 1 \cdot \mathrm{d}x = b - a.$$

Corolarul 3. Dacă f este continuă pe $[a, b]$, există un punct $\xi \in (a, b)$, astfel ca

$$\int_a^b f\,dx = f(\xi)\,(b - a)$$

Se aplică corolarul 1, pentru funcția $g(x)\equiv 1$.

Observație. Propoziția 6 și corolarele sale sînt valabile fie ca $a \leqslant b$, fie că $a \geqslant b$.

4. Proprietatea de ereditate. Aditivitatea integralei ca funcție de interval

Aditivitatea integralei ca funcție de interval. Proprietatea enunțată în propoziția următoare se numește *proprietate de ereditate**.

Propoziția 7. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe orice subinterval $[a', b'] \subset [a, b]$.

Într-adevăr, f este mărginită pe $[a, b]$, deci este mărginită și pe $[a'\ b']$. Pe de altă parte mulțimea A a punctelor de discontinuitate din $[a, b]$ este neglijabilă, iar mulțimea A' a punctelor de discontinuitate din $[a', b']$ este conținută în A, deci A' este neglijabilă, și deci f este integrabilă pe $[a', b']$.

Proprietatea exprimată de egalitatea din propoziția 8 se numește proprietatea de *aditivitate a integralei*, considerată ca *funcție de interval.*

* O proprietate care se referă la o clasă $\mathcal{C}$ de părți ale unei mulțimi E este ereditară dacă de îndată ce are loc pentru o mulțime $A \in \mathcal{C}$ are loc pentru orice submulțime $A' \subset A$ din $\mathcal{C}$.

500+
30
1000

P r o p o z i ţ i a 8. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci oricare ar fi punctul $c \in [a, b]$ avem

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Dacă $c = a$, atunci $\int_a^c f = 0$ şi $\int_c^b f = \int_a^b f$, deci formula este verificată. De asemenea, formula este verificată dacă $c = b$. Să presupunem deci că $a < c < b$. Funcţia f este integrabilă pe intervalele $[a, c]$ şi $[c, b]$.

Fie (d'_n) un şir de diviziuni ale intervalului $[a, c]$ cu $\nu(d'_n) \to 0$. Atunci

$$\sigma_{d'_n} \to \int_a^c f,$$

oricare ar fi punctele intermediare alese în fiecare diviziune d'_n.

Fie (d''_n) un şir de diviziuni ale intervalului $[c, b]$ cu $\nu(d''_n) \to 0$. Atunci

$$\sigma_{d''_n} \to \int_c^b f,$$

oricare ar fi punctele intermediare alese în fiecare diviziune d''_n. Pentru fiecare $n \in N$ să notăm $d_n = d'_n \cup d''_n$. Am obţinut astfel un şir de diviziuni (d_n) ale intervalului $[a, b]$ şi avem de asemenea $\nu(d_n) \to 0$, deoarece $\nu(d_n) \leqslant \leqslant \nu(d'_n) + \nu(d''_n)$. Atunci

$$\sigma_{d_n} \to \int_a^b f.$$

Dar

$$\sigma_{d_n} = \sigma_{d'_n} + \sigma_{d''_n}.$$

Trecînd la limită, obţinem

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Observație. Egalitatea $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ este adevărată, oricare ar fi ordinea de succesiune (după mărime) a punctelor a, b și c. De exemplu, dacă $a < b < c$, avem $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$, deci

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Au loc și proprietăți reciproce proprietății de ereditate.

Propoziția 9. Dacă f este integrabilă pe intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Într-adevăr, f este mărginită pe $[a, c]$ și $[c, b]$ deci este mărginită pe $[a, b]$. Pe de altă parte, mulțimea A a punctelor de discontinuitate din $[a, c]$ și mulțimea B a punctelor de discontinuitate din $[c, b]$ sînt neglijabile. Mulțimea punctelor de discontinuitate din $[a, b]$ este $A \cup B$, deci este neglijabilă și deci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Corolar. Dacă f este integrabilă pe intervalele $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_{n-1}, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Propoziția 10. Dacă f este mărginită pe $[a, b]$ și este integrabilă pe orice interval compact $[a, x]$ cu $x < b$, atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Fie (x_n) un șir crescător din $[a, b]$, convergent către b. Avem $x_n < b$ pentru orice n, deci f este integrabilă pe orice interval $[a, x_n]$, deci mulțimea E_n a punctelor de discontinuitate din $[a, x_n]$ ale lui f este neglijabilă. Cum orice punct de discontinuitate $x < b$ al lui f se află într-o mulțime E_n, urmează că mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f este formată de reuniunea $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, și, eventual, din b, deci este neglijabilă, și deci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Propoziția 10′. Dacă f este mărginită pe $[a, b]$ și este integrabilă pe orice interval compact $[x, b]$ cu $a < x$, atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Corolarul 1. Dacă f și g sînt egale pe $[a, b]$, cu excepția unui număr finit de puncte $c_1, c_2, \ldots, c_n$, și dacă una din ele este integrabilă pe $[a, b]$, atunci și cealaltă este integrabilă pe $[a, b]$ și integralele lor sînt egale.

Să presupunem că f este integrabilă pe $[a, b]$. Atunci f este integrabilă pe orice interval compact din $[a, b]$ și este mărginită pe $[a, b]$.

Rezultă atunci că și g este mărginită pe $[a, b]$ și integrabilă pe orice interval compact din $[a, b]$ care nu conține nici unul din punctele $c_1, c_2, \ldots, c_n$, deci este integrabilă pe $[a, b]$.

Fie acum un șir (d_n) de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$. În fiecare diviziune d_n să alegem punctele intermediare ξ_i diferite de punctele $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Atunci $f(\xi_i) = g(\xi_i)$, deci

$$\sigma_{d_n}(f) = \sum_i f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i g(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sigma_{d_n}(g).$$

Prin trecere la limită obținem

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

C o r o l a r u l 2. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ și dacă se modifică valoarea funcției în mod arbitrar într-un număr finit de puncte din $[a, b]$ atunci funcția obținută este de asemenea integrabilă pe $[a, b]$ și are aceeași ntegrală ca și f.

5. Integrarea pe o reuniune de intervale

Fie f o funcție definită pe un *interval mărginit* I, de forma $[a, b)$, sau $(a, b]$ sau (a, b).

Fie f_1 și f_2 două extensiuni ale funcției f la intervalul închis $\bar{I} = [a, b]$:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in I; \\ \lambda_1, & \text{dacă } x \notin I; \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in I; \\ \lambda_2, & \text{dacă } x \notin I. \end{cases}$$

Funcțiile f_1 și f_2 sînt de asemenea mărginite pe $\bar{I} = [a, b]$ și sînt egale pe $\bar{I}$ cu excepția, eventual, a extremităților a și b.

Dacă una din funcțiile f_1 și f_2 este integrabilă pe $[a, b]$, atunci și cealaltă este integrabilă pe $[a, b]$ și integralele lor sînt egale, $\int_a^b f_1 dx = \int_a^b f_2 dx$.

Așadar, integrabilitatea și integrala unei extensiuni f_1 a lui f nu depind de valorile date extensiunii în punctele a și b, ci numai de funcția f însăși.

Sintem conduși astfel la următoarea:

D e f i n i ț i e . Se spune că funcția f este integrabilă pe intervalul I, dacă o extensiune a sa f_1 la intervalul $\bar{I}$ este integrabilă. Integrala funcției f pe intervalul I se notează $\int_I f\,dx$ sau, încă, $\int_a^b f\,dx$ și este egală prin definiție cu integrala extensiunii f_1 pe intervalul $\bar{I} = [a, b]$:

$$\int_I f\,dx = \int_a^b f\,dx = \int_a^b f_1\,dx.$$

Din propoziția 10 rezultă

Propoziția 11. Funcția f este integrabilă pe I dacă și numai dacă este mărginită pe I și este integrabilă pe orice interval compact conținut în I.

Toate proprietățile integralelor definite pe un interval compact $[a, b]$ rămîn valabile și pentru integralele funcțiilor definite pe intervale mărginite oarecare.

Fie acum f o funcție definită pe o reuniune de intervale mărginite și disjuncte, $A = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$.

Definiție. Se spune că funcția f este integrabilă pe mulțimea A, dacă este integrabilă pe fiecare din intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Integrala funcției f pe mulțimea A, notată $\int_A f\,\mathrm{d}x$, este egală prin definiție cu suma integralelor pe cele n intervale:

$$\int_A f\,\mathrm{d}x = \int_{I_1} f\,\mathrm{d}x + \int_{I_2} f\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{I_n} f\,\mathrm{d}x.$$

Se verifică de asemenea ușor că toate proprietățile integralelor definite pe un interval rămîn valabile pentru integralele funcțiilor definite pe o reuniune de intervale:

1) Orice funcție integrabilă pe A este mărginită pe A.
2) Orice funcție continuă pe A este integrabilă pe A.
3) Orice funcție definită pe A și monotonă pe porțiuni este integrabilă pe A.
4) Mulțimea funcțiilor integrabile pe A este o algebră, iar integrala este o funcțională liniară:

$$\int_A (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_A f\,\mathrm{d}x + \beta \int_A g\,\mathrm{d}x.$$

5) Dacă f este integrabilă pe A, atunci $|f|$ este integrabilă pe A și

$$\left|\int_A f\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

6, Integrala este o funcțională pozitivă (și monotonă)

$$f \geqslant 0 \Rightarrow \int_A f\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \text{ și } \left(f \leqslant g \Rightarrow \int_A f\,\mathrm{d}x \leqslant \int_A g\,\mathrm{d}x\right).$$

7) Formula mediei: dacă f și g sînt integrabile pe A și dacă $g \geqslant 0$ (sau $g \leqslant 0$) atunci există un număr μ cuprins între marginile m și M ale funcției f, astfel ca

$$\int_A fg\,\mathrm{d}x = \mu \int_A g\,\mathrm{d}x.$$

Pentru fiecare interval I_i cu extremitățile a_i și b_i, $a_i < b_i$ să notăm cu $m(I_i)$ lungimea sa:

$$m(I_i) = b_i - a_i.$$

Să notăm de asemenea cu $m(A)$ suma lungimilor $m(I_i)$ ale intervalelor I_i care o compun

$$m(A) = m(I_1) + m(I_2) + \ldots + m(I_n) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \ldots + (b_n - a_n).$$

8) Dacă $f(x) \equiv \alpha$ pe A, atunci

$$\int_A \mathrm{d}x = \alpha m(A).$$

Într-adevăr:

$$\int_A \alpha\, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} \alpha \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \alpha\, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha(b_i - a_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \alpha m(A).$$

Luînd în formula mediei $g(x) \equiv 1$ rezultă că:

9) Dacă f este integrabilă pe A, există un număr μ cuprins între marginile m și M ale lui f astfel ca

$$\int_A f\, \mathrm{d}x = \mu m(A).$$

10) Proprietatea de ereditate. Dacă f este integrabilă pe A, atunci f este integrabilă pe orice submulțime $A' \subset A$, care este reuniune a unei familii finite de intervale.

11) Proprietatea de aditivitate a integralei ca funcție de mulțime. Dacă f este integrabilă pe A și dacă A este reuniunea unui număr finit de mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, disjuncte două cîte două, unde $A_1, \ldots, A_n$ sînt reuniuni finite de intervale, atunci

$$\int_A f\, \mathrm{d}x = \int_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} f\, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f\, \mathrm{d}x.$$

Mulțimile care sînt reuniuni finite de intervale mărginite formează un clan $\mathcal{M}$: reuniunea, intersecția și diferența a două astfel de mulțimi sînt mulțimi de același fel.

Lungimea $m(A)$ a mulțimilor $A \in \mathcal{M}$ este pozitivă și aditivă:

1) $m(A) \geqslant 0$;

2) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, dacă $A \cap B = \emptyset$.

Fie f o funcție definită pe R și integrabilă pe fiecare mulțime $A \in \mathcal{M}$. Să notăm

$$\mu(A) = \int_A f\, \mathrm{d}x.$$

Proprietatea de aditivitate a integralei, ca funcție de mulțime, se scrie astfel:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ dacă } A \cap B = \emptyset.$$

Așadar, funcția $\mu \to \mu(A)$ definită pe $\mathcal{M}$ este o măsură reală. Ea se numește *integrala nedefinită* a funcției f.

Dacă funcția f este *pozitivă*, atunci integrala sa nedefinită este o măsură pozitivă.

Se spune că măsura μ este absolut continuă în raport cu măsura m, dacă $m(A) = 0$ implică $\mu(A) = 0$.

Din formula mediei

$$\mu(A) = \int_A f\, \mathrm{d}x = \lambda m(A)$$

rezultă că dacă $m(A) = 0$, atunci $\mu(A) = 0$, deci integrala nedefinită a funcției este absolut continuă în raport cu măsura m.

O b s e r v a ţ i e. Dacă funcţia f nu este definită pe toată dreapta, ci numai pe o mulţime $M \in \mathcal{M}$, o prelungim pe toată dreapta, dîndu-i valoarea zero pe $\complement M$. Să notăm tot cu f prelungirea astfel obţinută. Atunci

$$\int_A f = \int_{A \cap M} f, \text{ deci } \int_A f = 0 \text{ dacă } A \cap M = \emptyset.$$

§ 4. Primitive

1. Integrala nedefinită

Fie f o funcţie definită pe un interval I (mărginit sau nemărginit) şi *integrabilă pe orice interval compact conţinut în* I. Fie α un punct oarecare din I, pe care îl menţinem fixat. Pentru orice punct $x \in I$, funcţia f este integrabilă pe intervalul compact $[x, \alpha]$ sau $[\alpha, x]$ (după cum $x \leqslant \alpha$ sau $\alpha \leqslant x$).

Să notăm

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\, dt.$$

Funcţia $F(x)$ este definită pentru orice punct $x \in I$.

Dacă a şi b sînt două puncte din I, avem

$$\int_\alpha^a f + \int_a^b f = \int_\alpha^b f,$$

deci

$$\int_a^b f = \int_\alpha^b f - \int_\alpha^a f$$

sau, cu notaţia de mai sus,

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Să presupunem că $\alpha \leqslant x$ şi nă notăm $I_x = [\alpha, x]$. Atunci

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\, dt = \int_{I_x} f(t)\, dt = \mu(I_x).$$

Aşadar, valoarea funcţiei F într-un punct $x \geqslant \alpha$ este egală cu valoarea integralei nedefinite μ a lui f, pentru intervalul $I_x = [\alpha, x]$.

Din această cauză, funcţia de punct $F(x)$ se numeşte de asemenea, prin abuz de limbaj, *integrala nedefinită* a funcţiei f.

2° Pentru fiecare punct $\alpha \in I$ obţinem cîte o funcţie $F(x) = \int\limits_{\alpha}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

Cunoaşterea integralei funcţiei f pe orice interval compact din I ne permite să definim funcţia F. Reciproc, dacă am putea determina pe altă cale funcţia F, am putea apoi calcula foarte uşor integrala funcţiei f, din egalitatea

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Vom arăta mai departe că, pentru anumite funcţii, acest lucru este posibil. Pentru aceasta va trebui mai întîi să studiem proprietăţile funcţiei F.

Propoziţia 1. Funcţia $F(x) = \int\limits_{\alpha}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ este continuă pe I.

Fie x_0 un punct oarecare din I. Să presupunem întîi că x_0 nu este o extremitate a intervalului I; există atunci un interval $[a, b]$ conţinut în I, şi care conţine în *interiorul* său pe x_0. Funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$, deci este mărginită pe acest interval. Fie

$$M = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} f(t).$$

Pentru orice $x \in (a, b)$ avem

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M|x - x_0|.$$

Dar

$$\lim_{x \to x_0} |x - x_0|\, M = 0$$

şi deci

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (a, b)}} F(x) = F(x_0),$$

adică F este continuă în punctul x_0, relativ la intervalul (a,b). Dar intervalul (a, b) este o vecinătate a lui x_0, deci F este continuă în punctul x_0 şi relativ la intervalul I.

Dacă x_0 este extremitatea stîngă a intervalului I, se consideră un interval $[x_0, b] \subset I$ cu $x_0 < b$. Funcţia f este integrabilă şi deci mărginită pe intervalul $[x_0, b]$; fie $M = \sup\limits_{x_0 \leqslant t \leqslant b} f(t)$. Pentru orice $x \in (x_0, b]$, avem

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(x - x_0),$$

de unde, iarăşi, se deduce că $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, adică F este continuă în x_0.

Dacă x_0 este extremitatea dreaptă a intervalului I, demonstrația se face la fel.

Observații. 1° Dacă funcția f este mărginită pe întregul interval I, nu mai este nevoie să demonstrăm propoziția separat pentru punctele interioare, și separat pentru extremități. Notînd, în acest caz,

$$M = \sup_{t \in I} |f(t)|$$

avem, pentru orice $x' \in I$ și $x'' \in I$,

$$|F(x') - F(x'')| = \left|\int_{x''}^{x'} f(t)\, dt\right| \leqslant M\,|x' - x''|.$$

Așadar, dacă f este mărginită pe I (în particular, dacă intervalul I este mărginit și f este integrabilă pe I) funcția F este lipschitziană pe I, deci este uniform continuă pe I, și cu atît mai mult, continuă pe I.

2° Relația $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$ înseamnă:

$$\lim_{x \to x_0} \int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt = \int_{\alpha}^{x_0} f(t)\, dt.$$

Această egalitate ne permite să calculăm integrala pe intervalul $[\alpha, x_0]$, cunoscînd integrala pe celelalte intervale compacte conținute în $[\alpha, x_0]$.

Propoziția 2. Funcția F este derivabilă în orice punct $x_0 \in I$ în care funcția f este continuă și $F'(x_0) = f(x_0)$.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece f este continuă în x_0, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice $t \in I$ cu $|t - x_0| < \delta(\varepsilon)$, să avem $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$, sau

$$f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Fie $x > x_0$ cu $x - x_0 < \delta(\varepsilon)$. Pentru orice $t \in [x_0, x]$ avem $f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$, deci

$$\int_{x_0}^{x} (f(x_0) - \varepsilon)\, dt \leqslant \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \leqslant \int_{x_0}^{x} (f(x_0) + \varepsilon)\, dt,$$

adică

$$[f(x_0) - \varepsilon]\,(x - x_0) \leqslant F(x) - F(x_0) \leqslant [f(x_0) + \varepsilon]\,(x - x_0)$$

și, împărțind cu $x - x_0 > 0$,

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < f(x_0) + \varepsilon.$$

Fie $x < x_0$ cu $x_0 - x < \delta(\varepsilon)$. Pentru orice $t \in [x, x_0]$ avem $f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$ deci

$$\int_x^{x_0} [f(x_0) - \varepsilon] \, dt \leqslant \int_x^{x_0} f(t) \, dt \leqslant \int_x^{x_0} [f(x_0) + \varepsilon] \, dt,$$

adică

$$[f(x_0) - \varepsilon] (x_0 - x) \leqslant F(x_0) - F(x) \leqslant [f(x_0) + \varepsilon] (x_0 - x)$$

şi, împărţind cu $x_0 - x > 0$, obţinem

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

sau

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

Aşadar, oricare ar fi $x \neq x_0$ cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, avem

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

sau

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Rezultă atunci că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

deci F este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$.

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă F este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$, nu rezultă că f este continuă în x_0.

În adevăr, plecînd de la o funcţie g continuă pe I (deci integrabilă pe orice interval compact din I) şi punînd

$$F(x) = \int_\alpha^x g(t) \, dt,$$

avem $F'(x_0) = g(x_0)$; dacă modificăm valoarea funcţiei g numai în punctul x_0, obţinem o funcţie f care este integrabilă pe fiecare interval compact din I şi are aceeaşi integrală ca şi g, deci

$$F(x) = \int_\alpha^x f(x) \, dx.$$

Dar $f(x_0) \neq g(x_0)$, deci $F'(x_0) \neq f(x_0)$.

2° Este posibil ca $F'(x_0) = f(x_0)$ fără ca f să fie continuă în x_0, după cum va fi arătat mai departe pe un exemplu.

Corolar. Dacă f este continuă pe întreg intervalul I, atunci funcţia F este derivabilă pe I şi $F' = f$.

Aşadar, dacă funcţia f este continuă pe I, funcţia

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

este o *primitivă* a lui f, oricare ar fi $\alpha \in I$, şi avem

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

oricare ar fi a şi b din I.

2. Formula lui Leibniz-Newton

Egalitatea $\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ reduce calculul integralei unei funcţii continue f, la găsirea unei primitive F a lui f. Se impune astfel un studiu mai detaliat al primitivelor.

Să reamintim mai întîi definiţia primitivelor.

Fie f o funcţie definită pe un *interval* I care nu se reduce la un punct.

Definiţie. Se spune că funcţia f are primitive pe intervalul I dacă există o funcţie F definită şi derivabilă pe I şi a cărei derivată să fie egală cu f.

Dacă $F' = f$, atunci F se numeşte funcţie primitivă a funcţiei f sau, mai simplu, primitivă a lui f.

Cu această definiţie, corolarul precedent se enunţă astfel:

Orice funcţie continuă pe I are primitive pe I.

Dacă F este o primitivă a lui f, adică dacă $F' = f$, atunci funcţia $F + C$ este de asemenea o primitivă a lui f, oricare ar fi numărul real C, deoarece

$$(F + C)' = F' + C' = F' = f.$$

Aşadar, dacă f are o primitivă F, atunci ea are o infinitate de primitive. Întreaga familie de funcţii $(F + C)_{C\in R}$, obţinute din primitiva F prin adăugarea unei constante arbitrare C, este formată din primitive ale lui f.

Mai mult, familia $(F + C)_{C\in R}$ conţine *toate* primitivele lui f. Într-adevăr, dacă Φ este o primitivă oarecare a lui f, adică dacă $\Phi' = f$, atunci $\Phi' = F'$, deci funcţiile Φ şi F diferă printr-o constantă, $\Phi - F = C$, sau $\Phi = F + C$, adică Φ se obţine din F prin adăugarea unei constante convenabile şi deci Φ face parte din familia $(F + C)_{C\in R}$.

Pentru familia de primitive $(F + C)_{C\in R}$ se folosește notația mai simplă $F + C$, unde se subînțelege că constanta arbitrară C parcurge *toate* numerele reale.

Fie $F_1 = F + C_1$ o primitivă oarecare a lui f. Atunci

$$F_1(b) - F_1(a) = (F(b) + C_1) - (F(a) + C_1) = F(b) - F(a).$$

Așadar, diferența $F(b) - F(a)$ este aceeași, oricare ar fi primitiva F a lui f.

P r o p o z i ț i a 1. Dacă f este o funcție continuă pe I și dacă $a,\ b \in I$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

oricare ar fi primitiva F a lui f.

Într-adevăr, dacă $\alpha \in I$, egalitatea aceasta este adevărată pentru primitiva

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Deoarece diferența $F(b) - F(a)$ este aceeași, oricare ar fi primitiva F a lui f, rezultă că egalitatea este adevărată oricare ar fi primitiva F a lui f.

Egalitatea din enunțul propoziției precedente se numește *formula lui Leibniz-Newton*. Ea reduce calculul integralei unei funcții *continue* f la găsirea unei primitive particulare F a lui f.

Diferența $F(b) - F(a)$ se mai notează $F(x)\Big|_a^b$:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Cu această notație, formula lui Leibniz-Newton se scrie

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b,$$

unde $F' = f$.

Formula lui Leibniz-Newton este valabilă nu numai pentru funcțiile continue, ci și pentru o clasă mai largă de funcții integrabile, acelea care au și primitive.

P r o p o z i ț i a 2. Dacă funcția f este integrabilă pe intervalul $I = [a,\ b]$ și dacă are primitive pe acest interval, atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

oricare ar fi primitiva F a lui f.

Fie F o primitivă oarecare a lui f, adică $F' = f$.
Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Funcţia F este derivabilă, deci continuă pe fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$, astfel încît îi putem aplica teorema creşterilor finite pe acest interval: există un punct $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ astfel ca $F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ sau

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Adunînd membru cu membru aceste egalităţi, obţinem

$$\sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

sau

$$F(b) - F(a) = \sigma_d(f).$$

Fie acum (d_n) un şir de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$. Dacă pentru fiecare diviziune d_n formăm suma integrală $\sigma_{d_n}(f)$ cu punctele intermediare ξ_i rezultate din formula creşterilor finite, avem

$$\sigma_{d_n}(f) = F(b) - F(a).$$

Aşadar, şirul $(\sigma_{d_n}(f))$ este constant, deci $\sigma_{d_n}(f) \to F(b) - F(a)$. Pe de altă parte, funcţia f este integrabilă şi $\nu(d_n) \to 0$, deci şirul sumelor integrale tinde către integrală:

$$\sigma_{d_n}(f) \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Limita şirului fiind unică, deducem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

şi propoziţia este demonstrată.

Înmulţind ambii membri ai egalităţii cu -1, obţinem

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -F(b) + F(a)$$

sau

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = F(x)\Big|_b^a.$$

Aşadar, şi în cazul funcţiilor integrabile care admit primitive, formula lui Leibniz-Newton este adevărată, oricare ar fi relaţia de inegalitate dintre limitele de integrare.

Observaţii. 1° Există funcţii integrabile care nu au primitive.

Exemplu. Funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2, \text{ dacă } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

definită pe intervalul $[0, 2]$ este integrabilă pe acest interval, fiind monotonă. Această funcţie nu are însă proprietatea lui Darboux pe $[0, 2]$, deci nu poate fi derivata altei funcţii, adică nu are primitive pe acest interval.

Se pot da exemple de funcţii care au primitive, dar care nu sînt integrabile.

2° Există funcţii care sînt integrabile şi au primitive, fără a fi continue.

Exemplu. Fie funcţia

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 \quad\quad, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

definită pe $[0, 1]$. Funcţia F este derivabilă pe $[0, 1]$ şi derivata sa $f = F'$ este

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \text{ dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 0, \quad\quad \text{ dacă } x = 0. \end{cases}$$

Aşadar, f are primitiva F. Funcţia f este de asemenea integrabilă pe $[0, 1]$, deoarece este continuă şi deci integrabilă pe orice interval compact $[x, 1]$ cu $x > 0$. Funcţia f nu este însă continuă în 0, deoarece nu are limită în acest punct.

Avem deci $F'(0) = f(0)$, fără ca f să fie continuă în 0.

Fie f o funcţie definită pe un *interval* I şi F o primitivă a sa.

Mulţimea $F + C$ a tuturor primitivelor sale se numeşte — prin abuz de limbaj — *integrala nedefinită* a funcţiei f şi se notează $\int f$ sau $\int f\mathrm{d}x$ sau $\int f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int f\,\mathrm{d}x = F + C$$

sau

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Pentru a face distincţie, integrala propriu-zisă $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se numeşte *integrală definită*.

Deoarece $F'(x) = f(x)$, ultima egalitate se scrie

$$\int F'(x)\, dx = F(x) + C.$$

Aşadar, dacă se pleacă de la o funcţie şi se aplică întîi operaţia de derivare, iar apoi ,,operaţia de integrare'', se regăseşte funcţia iniţială cu aproximaţia unei constante aditive.

Reciproc, dacă, plecînd de la o funcţie, se aplică întîi ,,operaţia de integrare'' (şi se obţine o familie de funcţii), iar apoi operaţia de derivare, se obţine funcţia iniţială.

Într-adevăr

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Dacă semnul dx, care apare în notaţia integralei nedefinite, se interpretează ca o diferenţială, se obţin alte relaţii utile pentru calcule:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

$$d\int f(x)\, dx = f(x)\, dx.$$

Într-adevăr:

$$\int d\,F(x) = \int F'(x)\, dx = F(x) + C$$

şi

$$d\int f(x)\, dx = d(F(x) + C) = d\,F(x) = F'(x)\, dx = f(x)\, dx.$$

Exemple.

1) $\int 0\, dx = \int 0'\, dx = 0 + C = C;$

2) $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C;$

3) $\int 3x^2\, dx = \int (x^3)' dx = x^3 + C;$

4) $\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$, deoarece $\left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right)' = \sin 2x;$

5) $\int (5x^5 + 7) dx = \frac{5}{6} x^6 + 7x + C$, deoarece $\left(\frac{5}{6} x^6 + 7x\right)' = 5x^5 + 7.$

O b s e r v a ţ i e. Fie f o funcţie definită pe o mulţime E, care este o reuniune (finită sau infinită) de intervale disjuncte. Dacă există o funcţie F definită şi derivabilă pe E astfel ca $F' = f$, funcţia F se numeste, încă, primitivă a lui f. Orice funcţie de forma $F + C$ este de asemenea o primitivă a lui f. Familia $(F + C)$ nu conţine însă toate primitivele lui f: există şi alte primitive care nu se pot obţine din F prin adăugarea unei constante; adică, diferenţa a două primitive ale lui f poate să nu fie constantă.

Exemplu. Fie F o primitivă a lui f şi fie I unul din intervalele din care este formată mulţimea E. Funcţia Φ definită pe E astfel:

$$\Phi(x) = \begin{cases} F(x) + 1, & \text{dacă } x \in I \\ F(x) + 2, & \text{dacă } x \notin I \end{cases}$$

este de asemenea o primitivă a lui f, deoarece pentru orice $x \in E$ avem $\Phi'(x) = F'(x) = f(x)$. Dar diferenţa $\Phi - F$ nu este constantă pe E:

$$\Phi(x) - F(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in I, \\ 2, & \text{dacă } x \notin I, \end{cases}$$

deci primitiva Φ nu se poate obţine din primitiva F prin adăugarea unei constante.

Integrala nedefinită $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (mulţimea tuturor primitivelor lui f) conţine deci şi alte funcţii pe lîngă cele ale familiei $(F + C)$. Egalitatea

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

nu mai este adevărată în acest caz.

În continuare, toate funcţiile considerate vor fi presupuse definite pe un *interval*, chiar dacă nu va fi menţionat acest fapt în mod explicit.

Pentru funcţiile definite pe un interval, egalitatea

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad (F' = f)$$

este adevărată.

3. Tabloul primitivelor imediate

Din tabloul derivatelor unor funcţii elementare, rezultă următorul tablou de integrale nedefinite (numit tabloul integralelor imediate, sau al primitivelor imediate).

Funcţiile se consideră definite pe un *interval* conţinut în domeniul lor maxim de definiţie.

1) $\int 0\,\mathrm{d}x = C$;

2) $\int \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \mathrm{d}x = x + C$;

3) $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ dacă $n \neq -1$, (n întreg);

$\int \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ dacă $n \neq 1$ (n întreg);

4) $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ dacă $\alpha \neq -1$ (α real);

5) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C = \ln K|x|,\ K > 0;$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C;$

7) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + K;$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$$

8) $\int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0,$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + K;$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$$

10) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C;$

11) $\int e^x\,dx = e^x + C, \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1;$

12) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

13) $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

14) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C;$

15) $\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

Verificarea acestor egalități se poate face imediat prin derivare, conform formulei $\int F'(x)dx = F(x) + C.$

4. Proprietățile primitivelor

În egalitatea de definiție a integralei nedefinite

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \qquad (F' = f),$$

constanta arbitrară C poate fi scrisă și în alte forme; esențial este faptul ca ea să parcurgă *toate* numerele reale. Astfel, constanta arbitrară poate fi scrisă $\ln C$, unde C parcurge toate numerele strict pozitive, sau αC unde $\alpha \neq 0$ și C parcurg toate numerele reale, sau $\frac{C}{\alpha}$ unde $\alpha \neq 0$ și C parcurg toate numerele reale sau $C_1 + C_2$, unde C_1 și C_2 (sau numai una din ele) parcurg toate numerele reale.

Propoziția 1. Dacă f și g au primitive pe un interval I, atunci funcția $f + g$ are primitive pe I și

$$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Fie F o primitivă a lui f, și G o primitivă a lui g; funcțiile F și G sînt derivabile și

$$F' = f, \ G' = g,$$

$$(F + G)' = F' + G' = f + g,$$

adică $F + G$ este o primitivă a lui $f + g$.

Să notăm cu C_1 și C_2 constantele arbitrare ale integralelor nedefinite ale funcțiilor f și g:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C_1, \ \int g(x)\mathrm{d}x = G(x) + C_2,$$

unde C_1 și C_2 parcurg toate numerele reale. Să notăm cu $C_1 + C_2$ constanta arbitrară a integralei nedefinite a funcției $f + g$; avem:

$$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int (F(x) + G(x))'\mathrm{d}x = F(x) + G(x) + C_1 + C_2 =$$

$$= (F(x) + C_1) + (G(x) + C_2) = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Prin inducție completă se deduce că dacă funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ au primitive pe I, atunci și suma lor $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ are primitive pe I și

$$\int (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)\mathrm{d}x = \int f_1\mathrm{d}x + \int f_2\mathrm{d}x + \ldots + \int f_n\mathrm{d}x.$$

(Integrala sumei este egală cu suma integralelor.)

O b s e r v a ț i e. Egalitatea $\int (f+g)\mathrm{d}x = \int f\mathrm{d}x + \int g\mathrm{d}x$ este o egalitate între două *mulțimi* de funcții. Dacă F, G, H sînt niște primitive *particulare*, respectiv ale funcțiilor f, g și $f+g$:

$$F' = f,\ G' = g,\ H' = f+g$$

egalitatea $H = F + G$ poate să nu fie adevărată.

Exemplu.

$$f(x) = 2x, \qquad g(x) = 3x^2, \qquad f(x) + g(x) = 2x + 3x^2;$$
$$F(x) = x^2; \qquad G(x) = x^3, \qquad H(x) = x^2 + x^3 - 1.$$

Avem $F'(x) = f(x)$, $\quad G'(x) = g(x)$, $\quad H'(x) = f(x) + g(x)$.

Dar $F(x) + G(x) = x^2 + x^3 \neq x^2 + x^3 - 1 = H(x)$.

P r o p o z i ț i a 2. Dacă f are primitive pe un interval I și α este un număr real, atunci funcția αf are primitive pe I, iar pentru $\alpha \neq 0$ avem

$$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Fie F o primitivă a lui f; funcția F este derivabilă și

$$F' = f.$$

Atunci funcția αF este de asemenea derivabilă și

$$(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f,$$

adică αF este o primitivă a lui F.

Dacă $\alpha \neq 0$, să notăm cu $\frac{C}{\alpha}$ costanta arbitrară a integralei nedefinite a funcției f:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + \frac{C}{\alpha},$$

unde C parcurge toate numerele reale. Să notăm cu C constanta arbitrară a integralei nedefinite a funcției αf; avem:

$$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \int (\alpha F(x))'\mathrm{d}x = \alpha F(x) + C = \alpha\left(F(x) + \frac{C}{\alpha}\right) = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x.$$

În particular, luînd $\alpha = -1$, obținem

$$\int (-f(x))\mathrm{d}x = -\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Atunci

$$\int (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Egalitatea $\int \alpha f \mathrm{d}x = \alpha \int f \mathrm{d}x$ pentru $\alpha \neq 0$ este o egalitate între două *mulţimi* de funcţii. Dacă F şi H sînt respectiv primitive *particulare* ale funcţiilor f şi αf, egalitatea $H = \alpha F$ poate să nu fie adevărată.

2° Pentru $\alpha = 0$, avem

$$\int \alpha f \mathrm{d}x = \int 0 \mathrm{d}x = C \text{ şi } \alpha \int f \mathrm{d}x = 0 \int f \mathrm{d}x = 0.$$

În acest caz egalitatea

$$\int \alpha f \mathrm{d}x = \alpha \int f \mathrm{d}x$$

nu mai este adevărată, deoarece mulţimea din membrul stîng este formată din *toate* funcţiile constante, iar mulţimea din membrul drept este formată dintr-o *singură* funcţie, funcţia identic nulă.

3° Fie $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinom definit pe un interval I. Aplicînd cele două propoziţii, deducem că

$$\int P(x)\mathrm{d}x = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C.$$

Exemple.

1) $$\int \frac{5x^3 - 2x^2 - 7x + 3}{x} \mathrm{d}x = \int \left(5x^2 - 2x - 7 + \frac{3}{x}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= 5\int x^2 \mathrm{d}x - 2\int x \,\mathrm{d}x - 7\int \mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 5\frac{x^3}{3} - x^2 - 7x + 3 \ln |x| + C.$$

2) $$\int \frac{-1}{1+x^2} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = -\operatorname{arc\,tg} x + C = \operatorname{arc\,ctg} x + C;$$

3) $$\int \left(2 \sin x - \frac{3}{\cos^2 x}\right) \mathrm{d}x = 2\int \sin x \,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = -2 \cos x - 3 \operatorname{tg} x + C.$$

Cele două propoziţii de mai sus permit să se calculeze primitivele unei funcţii f, dacă se poate scrie ca o combinaţie liniară de funcţii cărora le cunoaştem primitivele

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i;$$

$$\int f \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int \alpha_i f_i \mathrm{d}x.$$

5. Metode de calcul al primitivelor

Alte metode de calcul al primitivelor sînt: integrarea prin părţi (metoda de calcul a primitivelor prin părţi) şi schimbarea de variabilă (metoda de calcul a primitivelor funcţiilor compuse).

Să observăm mai întîi că

$$\int f\mathrm{d}x + C = \int f\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, dacă F este o primitivă a lui f, atunci

$$\int f\mathrm{d}x = F + K,$$

unde K parcurge toate numerele reale. Atunci

$$\int f\mathrm{d}x + C = F + K + C,$$

unde $K + C$ parcurge de asemenea toate numerele reale, deci

$$\int f\mathrm{d}x = F + K + C,$$

de unde

$$\int f\mathrm{d}x + C = \int f\mathrm{d}x.$$

Propoziţie. Dacă f şi g sînt două funcţii definite pe un interval I şi au derivate continue f' şi g' pe I, atunci

$$\int fg'\mathrm{d}x = fg - \int f'g\mathrm{d}x.$$

Funcţiile f şi g sînt continue (fiind derivabile). Deoarece f' şi g' sînt continue, prin ipoteză, funcţiile fg' şi $f'g$ sînt de asemenea continue, şi deci au primitive, astfel încît integralele care apar în egalitatea de mai sus au sens. Rămîne de demonstrat această egalitate, Avem:

$$(fg)' = f'g + fg',$$

deci funcţia fg este o primitivă a funcţiei $f'g + fg'$, deci

$$\int (f'g + fg')\mathrm{d}x = fg + C.$$

Dar

$$\int (f'g + fg')\mathrm{d}x = \int f'g\mathrm{d}x + \int fg'\mathrm{d}x,$$

deci

$$\int f'g\mathrm{d}x + \int fg'\mathrm{d}x = fg + C,$$

de unde

$$\int fg'\mathrm{d}x = fg - \int f'g\mathrm{d}x + C.$$

Dar

$$\int f'g\mathrm{d}x - C = \int f'g\mathrm{d}x,$$

astfel încît

$$\int fg'\mathrm{d}x = fg - \int f'g\mathrm{d}x.$$

Egalitatea $\int fg'\mathrm{d}x = fg - \int f'g\mathrm{d}x$ se numeşte **formula de integrare prin părţi (pentru integrale nedefinite).**

O b s e r v a ţ i i. 1° Formula de integrare prin părţi este o egalitate între două mulţimi de funcţii. Dacă F_1 este o primitivă particulară a lui fg', iar F_2 este o primitivă particulară a lui $f'g$, este posibil ca $F_1 \neq fg - F_2$.

2° Dacă notăm funcţiile cu u şi v, formula de integrare prin părţi se scrie

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int vu'\mathrm{d}x.$$

Dacă, acum, se interpretează dx ca diferenţială, avem $v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$ şi $u'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, astfel încît formula se scrie

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

3° Dacă se dă de calculat integrala $\int f\mathrm{d}x$, căutăm să scriem funcţia f sub forma $f = u \cdot v'$ (sau expresia $f\mathrm{d}x$ sub forma $f\mathrm{d}x = u\mathrm{d}v$) şi apoi aplicăm formula de integrare prin părţi. Dacă se poate calcula integrala $\int vu'\mathrm{d}x = \int v\mathrm{d}u$ din membrul drept, atunci rezultă şi integrala din membrul stîng.

Exemple.

1) Să se calculeze $\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

Luăm $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$.

Deci $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$, $v = x$.

Atunci

$$\int \ln x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C =$$

$$= x(\ln x - 1) + C.$$

2) Să se calculeze $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$.

Luăm $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = dx$,

deci $du = \frac{1}{1 + x^2} dx$, $v = x$.

Atunci

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1 + x^2} dx =$$

$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

3) Să se calculeze $\int x e^x \, dx$.

Luăm $u = x$, $dv = e^x \, dx$,

deci $du = dx$, $v = e^x$.

Atunci

$$\int x e^x dx = \int u \, dv = uv - \int v du = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C =$$

$$= e^x (x - 1) + C.$$

4) Să se calculeze $\int x \sin x \, dx$.

Luăm $u = x$, $dv = \sin x \, dx$,

deci

$$du = dx, \; v = -\cos x \, dx.$$

Atunci

$$\int x \sin x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = -x \cos x + \int \cos x \, dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Observație. Dacă am fi luat

$$u = \sin x, \; dv = x dx$$

am fi obținut

$$du = \cos x \, dx, \; v = \frac{x^2}{2}.$$

Atunci

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx$$

şi am fi obţinut în membrul drept o integrală „mai complicată".

Alegerea funcţiilor u şi v trebuie făcută în mod judicios pentru a obţine o integrală mai uşor de calculat.

Deşi formula de integrare prin părţi este valabilă pentru orice funcţie u şi v cu derivată continuă, această formulă este de un folos practic numai atunci cînd ajungem la o integrală pe care ştim s-o efectuăm.

Uneori este nevoie să aplicăm succesiv de mai multe ori formula de integrare prin părţi pentru a ajunge la o integrală cunoscută.

5) Să se calculeze $I = \int x^2 \sin x \, dx$.

Luăm

$$u = x^2, \quad dv = \sin x \, dx,$$

deci

$$du = 2x \, dx, \quad v = -\cos x.$$

Atunci

$$I = \int x^2 \sin x dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2J,$$

unde am notat $J = \int x \cos x \, dx$. Mai aplicăm o dată metoda de integrare prin părţi, luînd

$$u = x, \quad dv = \cos x \, dx,$$

deci

$$du = dx, \quad v = \sin x.$$

Atunci

$$J = \int x \cos x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + \frac{C}{2}$$

şi deci

$$I = -x^2 \cos x + 2J = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C,$$

adică

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Observaţie. Dacă în integrala $J = \int x \cos x \, dx$ am fi luat

$$u = \cos x, \quad dv = dx$$

am fi avut

$$du = -\sin x \, dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

deci

$$J = \int x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \cos x + I$$

şi am fi ajuns la integrala iniţială I, şi nu am fi putut calcula această integrală.

Se poate da o formulă de integrare prin părţi de ordinul n (pentru integrale nedefinite):

P r o p o z i ţ i e. Dacă funcţiile u şi v au derivate de ordinul n continue pe un interval I, atunci

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} + (-1)^1 u'v^{(n-2)} + (-1)^2 u''v^{(n-3)} + \dots +$$

$$+ (-1)^k u^{(k)}v^{(n-k-1)} + \dots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v + (-1)^n \int u^{(n)} v dx.$$

Într-adevăr:

$$\int u^{(k)} v^{(n-k)}\,dx = u^{(k)} v^{(n-k-1)} - \int u^{(k+1)} v^{(n-k-1)}\,dx,$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, deci

$$(-1)^k \int u^{(k)} v^{(n-k)}\,dx = (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)} + (-1)^{k+1} \int u^{(k+1)} v^{(n-k-1)}\,dx$$

sau

$$(-1)^k \int u^{(k)} v^{(n-k)}\,dx - (-1)^{(k+1)} \int u^{(k+1)} v^{(n-k-1)}\,dx = (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)}.$$

Adunînd membru cu membru cele n egalităţi pentru $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ şi reducînd termenii asemenea din membrul stîng obţinem:

$$\int uv^{(n)}\,dx - (-1)^n \int u^{(n)} v dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)},$$

adică

$$\int uv^{(n)}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)} + (-1)^n \int u^{(n)} v dx.$$

Exemplu. Să se calculeze $\int x^n e^x\,dx$.

Luăm

$$u = x^n, \qquad v^{(n)} = e^x$$

deci

$$u' = nx^{n-1} \qquad v^{(n-1)} = e^x$$

$$u'' = n(n-1)x^{n-2} \qquad v^{(n-2)} = e^x$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$u^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} \qquad v^{(n-k)} = e^x$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u^{(n-1)} = n!x \qquad v' = e^x$$

$$u^{(n)} = n! \qquad v = e^x.$$

Atunci

$$\int x^n e^x \, dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} e^x + (-1)^n \int e^x dx =$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k}.$$

Metoda de calcul al primitivelor prin schimbarea de variabilă rezultă din următoarea:

Propoziție. Fie funcțiile $u(x): I \to J$ și $f(t): J \to R$, unde I și J sînt intervale. Dacă $u(x)$ este derivabilă pe I, iar $f(t)$ are primitive pe J, atunci funcția $f(u(x)) \cdot u'(x): I \to R$ are primitive pe I. În acest caz, dacă

$$\int f(t) = F(t) + C,$$

atunci

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

În adevăr, fie $F(t)$ o primitivă a lui $f(t)$ pe I:

$$F'(t) = f(t) \text{ și } \int f(t) dt = F(t) + C.$$

Deoarece funcțiile $u(x): I \to J$ și $F(t): J \to R$ sînt derivabile, funcția compusă $F(u(x)): I \to R$ este derivabilă și

$$[F(u(x))]' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x),$$

deci funcția $F(u(x))$ este o primitivă a funcției $f(u(x)) \cdot u'(x)$ pe I și

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

Observații. Dacă se interpretează dx ca diferențială, atunci avem $u'(x)dx = du(x)$ și egalitatea precedentă se scrie

$$\int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C;$$

dacă nu se mai pune în evidență variabila x, se obține

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

În această egalitate, u nu este variabilă independentă (ci funcție), dar egalitatea are aceeași formă ca și cînd u ar fi variabilă independentă.

Practic, pentru a calcula integrala nedefinită

$$\int f(u(x)) u'(x) dx$$

se procedează astfel: se face înlocuirea $u(x) = t$ şi se diferenţiază ca o egalitate de funcţii: $du(x) = dt$ sau $u'(x)dx = dt$.

Făcînd aceste înlocuiri în integrala iniţială, se obţine (formal) succesiv:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(u(x)) + C.$$

Se atrage atenţia că egalitatea

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(t)dt$$

este formală, în sensul procedeului practic de mai sus.

Ea nu trebuie interpretată ca o egalitate obişnuită de funcţii. Într-adevăr, funcţia $f(u(x)) \cdot u'(x)$ este definită pe intervalul I, deci şi primitivele sale $\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx$ sînt funcţii definite pe I. Pe de altă parte, funcţia $f(t)$ este definită pe intervalul J, deci primitivele sale $\int f(t)\,dt$ sînt definite pe J. Aşadar, funcţiile $\int f(u(x))u'(x)dx$ şi funcţiile $\int f(t)dt$ sînt definite pe intervalele diferite I şi J, deci aceste funcţii nu pot fi egale. Dar chiar dacă $I = J$, cele două mulţimi de funcţii nu sînt egale, decît dacă $u'(x) \equiv 1$, adică dacă $u(x) = x$.

Exemple. 1) Să se calculeze $\int \frac{2x}{x^2 + 3} dx$.

Facem înlocuirea $x^2 + 3 = t$ şi, diferenţiind, obţinem $2x\,dx = dt$.

Atunci

$$\int \frac{2x\,dx}{x^2+3} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + 3| + C.$$

Putem proceda şi direct, astfel:

$$\int \frac{2x}{x^2+3} dx = \int \frac{(x^2+3)'}{x^2+3} dx = \int \frac{1}{x^2+3} d(x^2+3) = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \\ = \ln|x^2+3| + C.$$

2) Să se calculeze $\int \sin x^3 \cdot x^2\,dx$.

Facem înlocuirea $x^3 = t$, deci $3x^2\,dx = dt$. Atunci

$$\int \sin x^3 \cdot x^2 dx = \frac{1}{3}\int \sin x^3 \cdot 3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C$$

sau

$$\int \sin x^3 \cdot x^2\,dx = \int \sin x^3 \cdot \frac{(x^3)'}{3} dx = \frac{1}{3}\int \sin x^3 \cdot d(x^3) = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = \\ = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C.$$

Aplicînd acest procedeu, din tabloul primitivelor imediate, se obţin primitivele unor funcţii compuse:

1) $\int u^n \cdot u' \mathrm{d}x = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$; n întreg, $n \neq -1$;

2) $\int \frac{u'}{u^n} \mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$; n întreg, $n \neq 1$;

3) $\int u^{\alpha} u' \mathrm{d}x = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$; α real, $\alpha \neq -1$;

4) $\int \frac{u'}{u} \mathrm{d}x = \ln |u| C + C$;

5) $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} \mathrm{d}x = 2\sqrt{u} + C$;

6) $\int \frac{u'}{1+u^2} \mathrm{d}x = \operatorname{arc\,tg} u + C$;

7) $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}x = \arcsin u + C$;

8) $\int e^u \cdot u' \mathrm{d}x = e^u + C$;

9) $\int \sin u \cdot u' \mathrm{d}x = -\cos u + C$;

10) $\int \cos u \cdot u' \mathrm{d}x = \sin u + C$;

11) $\int \frac{u'}{\cos^2 u} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} u + C$;

12) $\int \frac{u'}{\sin^2 u} \mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} u + C.$

În aceste formule, u este o funcţie de x. Verificarea acestor formule se poate face şi direct, prin derivare.

Folosind egalitatea formală

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t,$$

se poate calcula integrala din membrul stîng, dacă se cunoaşte integrala din membrul drept. Să observăm că în integrala din membrul stîng apare derivata $u'(x)$.

Dacă se dă integrala

$$\int f(u(x))\,dx,$$

nu se mai poate aplica propoziţia de mai sus. Totuşi, şi în acest caz putem folosi schimbarea de variabilă dacă funcţia $u(x)$ verifică condiţii suplimentare:

Propoziţie. Fie funcţiile $u(x): I \to J$ şi $f(t): J \to R$, unde I şi J sînt intervale. Dacă funcţia $f(t)$ este continuă pe J, dacă funcţia $u(x)$ este strict monotonă şi derivabilă pe I, iar inversa sa $v(t): J \to I$ are derivată continuă $v'(t)$ pe J şi dacă

$$\int f(t)v'(t)\mathrm{d}t = F(t) + C,$$

atunci

$$\int f(u(x))\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Să observăm că, deoarece v este funcţia inversă a lui u, avem

$$v(u(x)) = x \text{ pentru orice } x \in I,$$
$$u(v(t)) = t \text{ pentru orice } t \in J,$$

şi

$$u'(x) \cdot v'(u(x)) \equiv 1 \text{ pentru orice } x \in I.$$

Deoarece $f(t)$ şi $v'(t)$ sînt presupuse continue, produsul lor $f(t)v'(t)$ este o funcţie continuă pe J, deci are primitive pe J. Fie $F(t)$ o primitivă a funcţiei $f(t)v'(t)$:

$$F'(t) = f(t)v'(t), \int f(t)v'(t)\mathrm{d}t = F(t) + C.$$

Deoarece funcţiile $u(x): I \to J$ şi $F(t): J \to T$ sînt derivabile, funcţia compusă $F(u(x)): I \to R$ este derivabilă şi $[F(u(x))]' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x))v'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x))$, deci funcţia $F(u(x))$, este o primitivă a funcţiei $f(u(x))$ pe I şi

$$\int f(u(x))\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Observaţie. Practic, pentru a calcula integrala nedefinită

$$\int f(u(x))\,\mathrm{d}x$$

se procedează astfel:

Se face înlocuirea

$$u(x) = t,$$

unde $u(x)$ trebuie să fie o funcţie strict monotonă pe I.

Se rezolvă în raport cu x ecuaţia $u(x) = t$ şi se obţine

$$x = v(t).$$

Se diferenţiază această ultimă egalitate:

$$\mathrm{d}x = v'(t)\mathrm{d}t.$$

Se înlocuiesc în integrala iniţială $u(x)$ şi $\mathrm{d}x$ şi se obţine (formal) succesiv:

$$\int f(u(x))\mathrm{d}x = \int f(t)v'(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(u(x)) + C.$$

Şi de data aceasta, egalitatea

$$\int f(u(x))\mathrm{d}x = \int f(t)\, v'(t)\, \mathrm{d}t$$

este formală. Ea nu trebuie considerată ca o egalitate obişnuită de funcţii.

În aplicaţiile curente condiţia ca derivata $v'(t)$ să fie continuă este verificată, deoarece în aceste aplicaţii intervin funcţii elementare. Aşadar, trebuie să ne fixăm atenţia asupra condiţiei ca funcţia $u(x)$ să fie strict monotonă, adică ecuaţia

$$u(x) = t$$

să aibă, pentru fiecare $t \in J$, o singură soluţie $x = v(t) \in I$.

Exemple. 1) Să se calculeze $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, $(x \geqslant 0)$.

Se face înlocuirea $\sqrt{x} = t$, $(t > 0)$, deci

$$x = t^2 \text{ şi } \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t.$$

Atunci

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 2(t - \ln(1+t)) + C = 2\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})^2 + C.$$

2) Să se calculeze $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$, $(x < 1)$.

Se face înlocuirea

$$\sqrt{1-x} = t \quad (t > 0), \text{ deci}$$

$1 - x = t^2$ sau $x = 1 - t^2$, de unde $\mathrm{d}x = -2t\,\mathrm{d}t$.

Atunci

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{1-t^2}{t}(-2t)dt = -2\int (1-t^2)\,dt =$$

$$= -2\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + C = 2t\left(\frac{1}{3}t^2 - 1\right) + C = 2\sqrt{1-x}\left(\frac{1}{3}(1-x) - 1\right) + C.$$

3) Să se calculeze $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $(-1 < x < 1)$.

Se face înlocuirea $x = \sin t$, deci $t = \arcsin x$, $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$

$$dx = \cos t\, dt.$$

Atunci

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C,$$

deoarece $\frac{\sin 2t}{2} = \sin t\cos t = \sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = x\sqrt{1-x^2}$.

4) Să se calculeze $\int \frac{dx}{\sin x}$, $(-\pi < x < \pi,\ x \neq 0)$.

Se face înlocuirea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $(-\infty < t < \infty,\ t \neq 0)$, deci $x = 2\operatorname{arc\,tg} t$ și

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Apoi, $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, astfel încît:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Observație. Dacă funcția $\frac{1}{\sin x}$ este definită pe o mulțime care conține punctele $-\pi$ și π, nu mai putem face înlocuirea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, deoarece pentru $x = -\pi$ și $x = \pi$, funcția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu este definită.

6. Primitivele funcţiilor raţionale

Problema găsirii primitivelor este inversă aceleia a derivării. Problema găsirii primitivelor este însă mult mai dificilă decît problema derivării.

Am văzut că derivatele funcţiilor elementare sînt de asemenea funcţii elementare, pe care le putem calcula totdeauna.

Primitivele funcţiilor elementare nu sînt însă totdeauna funcţii elementare. Pentru unele funcţii elementare nici nu se ştie dacă primitivele lor sînt tot funcţii elementare. Nu există reguli de calcul al primitivelor decît pentru clase restrînse de funcţii elementare.

Vom arăta acum că primitivele funcţiilor raţionale sînt funcţii elementare, şi că, dacă se cunosc rădăcinile polinomului de la numitor, primitivele funcţiilor raţionale se pot calcula.

Derivatele funcţiilor raţionale sînt de asemenea funcţii raţionale. Primitivele funcţiilor raţionale nu sînt însă totdeauna funcţii raţionale, ci pot fi funcţii logaritmice sau funcţii arc tg; de exemplu

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Se va arăta mai departe că primitivele funcţiilor raţionale sînt combinaţii liniare de: funcţii raţionale, funcţii logaritmice şi funcţii arc tg.

Se numesc fracţii simple funcţiile de forma

$$\frac{A}{(x-x_0)^n}, \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

definite pe un interval I, unde n este număr natural, iar trinomul $ax^2 + bx + c$ nu are rădăcini reale (deci $a \neq 0$ şi $c \neq 0$). În cazul fracţiei $\frac{A}{(x-x_0)^n}$, rădăcina x_0 a numitorului nu aparţine intervalului I.

Primitivele fracţiilor simple sînt funcţii elementare, care se pot totdeauna determina, aşa cum se arată mai jos:

$$\text{I)} \int \frac{1}{(x-x_0)^n}\,\mathrm{d}x$$

1) Dacă $n = 1$, $\displaystyle\int \frac{1}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = \ln|x-x_0| + C.$

2) Dacă $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_0)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1)(x-x_0)^{n-1}} + C.$

$$\text{II)} \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x, \quad (b^2-4ac<0, \text{ deci } a \neq 0,\ c \neq 0).$$

Vom considera pe rînd mai multe cazuri posibile:

3) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \text{ arc tg } \frac{x}{a} + C.$

4) $\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln (x^2 + a^2) + C.$

Atunci

5) $$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx + B \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + a^2) + \frac{B}{a} \text{ arc tg } \frac{x}{a} + C.$$

Dacă $n \geqslant 2$:

6) $$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + a^2)^n} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + C.$$

7) $$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + a^2)^n} dx + B \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = -\frac{A}{2} \frac{1}{(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + B \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx.$$

Ultima integrală se calculează cu ajutorul unei formule de recurenţă:

8) $$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx - \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx \right] = \frac{1}{a^2} [I_{n-1} - J],$$

adică

$$I_n = \frac{1}{a^2} [I_{n-1} - J],$$

unde

$$J = \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx.$$

Pentru calculul integralei J se aplică metoda de integrare prin părţi, luînd

$$u = x, \ dv = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx,$$

deci

$$du = dx, \ v = -\frac{1}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}}.$$

Atunci

$$J = \int x \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} \mathrm{d}x = \int u \cdot \mathrm{d}v = uv - \int v \,\mathrm{d}u = - \frac{1}{(2n - 1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n+1}} +$$

$$+ \frac{1}{2(n - 1)} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \mathrm{d}x,$$

adică

$$J = - \frac{1}{2(n - 1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n - 1)} I_{n-1}.$$

Atunci

$$I_n = \frac{1}{a^2} [I_{n-1} - J] = \frac{1}{a^2} \left[I_{n-1} + \frac{1}{2(n - 1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n - 1)} I_{n-1} \right] =$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2(n - 1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2(n - 1) - 1}{2(n - 1)} I_{n-1} \right].$$

Am obținut astfel următoarea formulă de recurență:

$$I_n = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2(n - 1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2(n - 1)} I_{n-1} \right].$$

Ținînd seama că

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C,$$

obținem succesiv:

$$I_2 = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2 \cdot 1} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} I_1 \right] = \frac{1}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C,$$

$$I_3 = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{4} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4} I_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{4} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} \right] + C =$$

$$= \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C,$$

$$I_4 = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{6} \frac{x}{(x^2 + a^2)^3} + \frac{5}{6} I_3 \right] =$$

$$= \frac{1}{6a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^3} + \frac{5}{24a^4} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{15}{48a^6} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{15}{48a^7} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$$

O b s e r v a ț i e. Procedînd ca mai sus, pentru integrala

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2 - a^2)^n} \mathrm{d}x,$$

unde $n \geqslant 2$, obținem următoarea formulă de recurență:

$$J_n = - \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2(n - 1)} \frac{x}{(x^2 - a^2)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2(n - 1)} J_{n-1} \right].$$

Ținînd seama că

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

se obțin succesiv integralele J_2, J_3, etc.

Funcția $\frac{1}{(x^2 - a^2)^n}$ nu este fracție simplă, deoarece numitorul are rădăcini reale și distincte, anume $-a$ și a.

Să trecem acum la cazul general:

9) $\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}\,\mathrm{d}x$, $(b^2 - 4ac < 0$, deci $a \neq 0$, $c \neq 0)$.

Trinomul $ax^2 + bx + c$ se poate scrie ca o sumă de două pătrate:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right], \text{ unde } k^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0.$$

Se face înlocuirea $x + \frac{b}{2a} = z$, deci $x = z - \frac{b}{2a}$ și $\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$.

Atunci

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax + B}{a^n\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right]^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^n}\int \frac{Az - \frac{bA}{2a} + B}{(z^2 + k^2)^n}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{A}{a^n}\int \frac{z}{(z^2 + k^2)^n}\,\mathrm{d}z + \frac{2aB - bA}{2a^{n+1}}\int \frac{1}{(z^2 + k^2)^n}\,\mathrm{d}z.$$

Prima integrală este de tipul 4 sau 5 (după cum $n = 1$ sau $n \geqslant 2$), iar a doua integrală este de tipul 3 sau 6 (după cum $n = 1$ sau $n \geqslant 2$). Efectuînd aceste integrale și făcînd apoi înlocuirea $z = x + \frac{b}{2a}$, obținem integrala inițială.

O b s e r v a ț i e. De multe ori este mai simplu să punem în evidență la numărător derivata $2ax + b$ a trinomului $ax^2 + bx + c$ de la numitor (dacă $A \neq 0$):

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{x + \frac{B}{A}}{(ax^2 + bx + c)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax + 2a\frac{B}{A}}{(ax^2 + bx + c)^n}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n}\,\mathrm{d}x + \frac{A}{2a}\int \frac{2a\frac{B}{A} - b}{(ax^2 + bx + c)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Pentru prima din aceste integrale avem:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln|ax^2+bx+c| + C$$

şi, dacă $n \geqslant 2$,

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + C.$$

Pentru a doua integrală

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

aplicăm apoi procedeul de mai sus: se scrie trinomul ax^2+bx+c ca o sumă de pătrate şi se face înlocuirea $x + \frac{b}{2a} = z$. Se obţine

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{1}{a^n}\int \frac{1}{(z^2+k^2)^n}\,dz,$$

iar ultima integrală este de tipul 3 sau 6 (după cum $n = 1$ sau $n \geqslant 2$).

Exemple:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = I_3 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x + C.$

3) $\displaystyle\int \frac{5x}{(x^2+3)^7}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+3)^7}\,dx = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6(x^2+3)^6} + C = -\frac{5}{12(x^2+3)^6} + C.$

4) $\displaystyle\int \frac{5x-7}{x^2+3}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx - 7\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{5}{2}\ln(x^2+3) - \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$

$\left(\text{ultima integrală este de forma} \displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx \text{ cu } a = \sqrt{3}\right).$

5) $\displaystyle\int \frac{-3x+4}{(x^2+5)^2}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{2x}{(x^2+5)^2}\,dx + 4\int \frac{1}{(x^2+5)^2}\,dx = \frac{3}{2(x^2+5)} + I_2.$

Ultima integrală este de forma $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx$ cu $a = \sqrt{5}$, deci

$$I_2 = \frac{1}{2\cdot 5}\,\frac{x}{(x^2+5)^2} + \frac{1}{2\cdot 5\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

şi deci

$$\int \frac{-3x+4}{(x^2+5)^2}\,dx = \frac{3}{2(x^2+5)} + \frac{2x}{5(x^2+5)^2} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

6) $\displaystyle\int \frac{3}{2x^2+4x+7}\,dx = \int \frac{3}{2\left[(x+1)^2+\frac{5}{2}\right]}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2+\frac{5}{2}}\,dx.$

Se face înlocuirea $x+1=z$, deci $dx=dz$. Atunci

$$\int \frac{3}{2x^2+4x+7}dx=\frac{3}{2}\int\frac{1}{z^2+\frac{5}{2}}dz=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{\frac{5}{2}}}+C=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{10}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{5}}z+C=\frac{3}{\sqrt{10}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{5}}(x+1)+C.$$

7) $$\int\frac{3}{(2x^2+4x+7)^2}dx=\frac{3}{4}\int\frac{1}{\left[(x+1)^2+\frac{5}{2}\right]^2}dx=\frac{3}{4}\int\frac{1}{\left(z^2+\frac{5}{2}\right)^2}dz=$$

$$=\frac{3}{4}I_2.$$

Ţinînd seama că în ultima integrală $a=\sqrt{\frac{5}{2}}$, avem:

$$I_2=\frac{1}{5}\frac{z}{z^2+\frac{5}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{5}}z+C=\frac{x+1}{5\left(x^2+2x+\frac{7}{2}\right)}+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{5}}(x+1)+C,$$

deci

$$\int\frac{3}{(2x^2+4x+7)^2}dx=\frac{3}{4}\frac{2(x+1)}{5(2x^2+4x+7)}+\frac{3}{4}\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{5}{2}}(x+1)+C.$$

8) $$\int\frac{6x-4}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{6x-6+2}{x^2-2x+5}dx=3\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx+$$

$$+\int\frac{2}{x^2-2x+5}dx=3\ln(x^2-2x+5)+2\int\frac{1}{x^2-2x+5}dx.$$

Dar $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$ şi făcînd $x-1=z$, deci $dx=dz$, obţinem

$$\int\frac{1}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2+4}dx=\int\frac{1}{z^2+4}dz=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C.$$

Atunci

$$\int\frac{6x-4}{x^2-2x+5}dx=3\ln(x^2-2x+5)+\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C.$$

9) $$\int\frac{5x-3}{(x^2-2x+5)^2}dx=\int\frac{5x-3}{[(x-1)^2+4]^2}dx.$$

Facem înlocuirea $x - 1 = z$, deci $x = z + 1$ şi $dx = dz$.
Atunci

$$\int \frac{5x-3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx = \int \frac{5z+5-3}{(z^2+4)^2}\,dz = \int \frac{5z+2}{(z^2+4)^2}\,dz =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2z}{(z^2+4)^2}\,dz + 2\int \frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = -\frac{5}{2(z^2+4)} + 2I_2 = -\frac{5}{2(x^2-2x+5)} + 2I_2;$$

$$I_2 = \frac{1}{8}\,\frac{z}{z^2+4} + \frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{2} + C = \frac{1}{8}\,\frac{x-1}{(x^2-2x+5)} + \frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C.$$

Aşadar

$$\int \frac{5x-3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx = -\frac{5}{2\,(x^2-2x+5)} + \frac{1}{4}\,\frac{x-1}{x^2-2x+5} + \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C.$$

Primitivele oricărei funcţii raţionale $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ definite pe un interval I (pe care numitorul $Q(x)$ nu se anulează în nici un punct) sînt funcţii elementare care se pot totdeauna determina (dacă se cunosc rădăcinile numitorului $Q(x)$).

Într-adevăr, dacă grad $P \geqslant$ grad Q, efectuînd împărţirea, obţinem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

unde $C(x)$ şi $P_1(x)$ sînt două polinoame: $C(x)$ este cîtul împărţirii, iar $P_1(x)$ este restul împărţirii, şi grad $P_1 <$ grad Q.

Atunci

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Integrala polinomului $C(x)$ se poate efectua, astfel încît am redus calculul integralei funcţiei raţionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ la acela al integralei funcţiei raţionale $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ cu gradul numărătorului mai mic decît gradul numitorului.

Se ştie din algebră că funcţia raţională $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ cu grad $P_1 <$ grad Q se poate scrie (într-un singur mod) ca suma de fracţii simple

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} \equiv \sum \frac{A}{(x-x_0)^n} + \sum \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n},$$

astfel încît

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx = \sum \int \frac{A}{(x-x_0)^n}\,dx + \sum \int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx.$$

Aşadar, integrala funcţiei raţionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se poate totdeauna efectua.

Observație. Ținînd seama de faptul că primitivele fracțiilor simple sînt de forma $k \ln (ax^2 + bx + c)$ sau $k \operatorname{arc\,tg} (ax + b)$ sau funcții raționale, sau combinații liniare de această formă, rezultă că primitivele oricărei funcții raționale sînt combinații liniare de funcții de această formă.

Pentru descompunerea funcției raționale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în fracții simple se procedează în felul următor:

Fiecărei rădăcini reale x_0 a numitorului $Q(x)$, de ordinul n de multiplicitate, îi corespunde, în descompunerea menționată, o sumă de n fracții simple, de forma

$$\frac{A_n}{(x-x_0)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \frac{A_1}{x-x_0}.$$

Fiecărei rădăcini complexe x_1 a numitorului $Q(x)$, de ordinul n de multiplicitate, îi corespunde în descompunerea menționată o sumă de n fracții simple, de forma

$$\frac{B_n x + C_n}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{B_{n-1}x + C_{n-1}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_2 x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{ax^2+bx+c},$$

unde trinomul $ax^2 + bx + c$ are rădăcinile x_1 și conjugata complexă a lui x_1.

Pentru determinarea coeficienților A_n, B_n, C_n etc., se poate aplica metoda coeficienților nedeterminați:

În identitatea

$$(1) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_n}{(x-x_0)^n} + \ldots + \frac{A_1}{x-x_0} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{(ax^2+bx+c)^n} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{ax^2+bx+c} + \ldots$$

se aduc la același numitor $Q(x)$ fracțiile din membrul drept și se obține identitatea

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

de unde $P(x) \equiv P_1(x)$. Polinomul $P_1(x)$ conține coeficienții A_n, B_n, $C_n, \ldots$ Egalînd coeficienții termenilor de același grad ai polinoamelor P și P_1, se obține un sistem de ecuatii din care de determină A_n, B_n, $C_n, \ldots$

O altă metodă pentru determinarea coeficienților A_n, B_n, $C_n, \ldots$ este următoarea: În identitatea (1) se dau valori particulare variabilei x și se obține un sistem de ecuații din care se determină A_n, B_n $C_n, \ldots$

Exemple. 1) Să se calculeze $\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} \, dx$ (pe un interval I care nu conține punctul 2).

Avem:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \equiv$$

$$\equiv \frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)+(Dx+E)(x^2+1)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

deci

$$2x^2+2x+13 \equiv A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)+(Dx+E)(x^3-2x^2+x-2) \equiv$$

$$\equiv (A+D)x^4+(E-2D)x^3+(2A+B+D-2E)x^2+(C-2B-2D+E)x+$$

$$+(A-2C-2E).$$

Atunci

$$A+D=0, \quad E-2D=0, \quad 2A+B+D-2E=2,$$

$$C-2B-2D+E=2, \quad A-2C-2E=13.$$

Se obţine: $A=1$, $B=-3$, $C=-4$, $D=-1$, $E=-2$, deci

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} - \frac{x+2}{x^2+1}.$$

Aşadar:

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Pentru determinarea coeficientului A se poate proceda astfel:
În identitatea iniţială se înmulţeşte cu $x-2$ (pentru $x \neq 2$):

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)^2} \equiv A + \left[\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}\right](x-2).$$

Identitatea aceasta este valabilă pentru orice $x \neq 2$; atunci ea este valabilă şi pentru $x=2$. Aşadar, făcînd $x=2$, obţinem $A=1$.

Atunci

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Înmulţind acum cu $(x^2+1)^2$, obţinem:

$$\frac{2x^2+2x+13}{x-2} \equiv Bx+C+(Dx+E)(x^2+1)+\frac{(x^2+1)^2}{x-2}.$$

Această identitate este valabilă pentru orice număr real $x \neq 2$, dar şi pentru orice număr complex $x \neq 2$.

Făcînd $x=i$ obţinem

$$\frac{-2+2i+13}{i-2} = Bi+C$$

sau

$$2i+11 = -B-2Bi+Ci-2C.$$

Egalînd părţile reale şi părţile imaginare, obţinem

$$-B - 2C = 11,$$
$$-2B + C = 2,$$

de unde $B = -3$ şi $C = -4$.

Atunci

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Făcînd în această identitate $x = 0$, obţinem

$$\frac{13}{-2} = -\frac{1}{2} - 4 + E,$$

de unde $E = -2$. În sfîrşit, făcînd $x = 1$, obţinem

$$\frac{17}{-4} = -1 - \frac{7}{4} + \frac{D+E}{2},$$

de unde $D + E = -3$, deci $D = -3 - E = -1$. Aşadar,

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)\,(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} - \frac{x+2}{x^2+1}.$$

2) Să se calculeze $\int \frac{5x^2 - 20x + 17}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$ (pe un interval I, care nu conţine punctul 2).

Avem

$$\frac{5x^2 - 20x + 17}{(x-2)^3} \equiv \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Înmulţind cu $(x-2)^3$, avem

$$5x^2 - 20x + 17 \equiv A + B(x-2) + C(x-2)^2.$$

Făcînd $x = 2$, obţinem $A = -3$.

Derivînd ambii membri, avem

$$10x - 20 \equiv B + 2C(x-2)$$

şi făcînd $x = 2$, obţinem $B = 0$.

Derivînd din nou, avem $10 = 2C$, de unde $C = 5$.

Aşadar

$$\frac{5x^2 - 20x + 17}{(x-2)^3} = -\frac{3}{(x-2)^3} + \frac{5}{x-2},$$

deci

$$\int \frac{5x^2 - 20x + 17}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x = -3\int \frac{1}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2(x-2)^2} + 5\ln|x-2| + C.$$

3) Să se calculeze $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx$ (pe un interval I care nu conține punctele $-a$ și a).

Avem

$$\frac{1}{x^2 - a^2} \equiv \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}.$$

Înmulțim cu $x - a$:

$$\frac{1}{x + a} \equiv A + \frac{B}{x + a}(x - a);$$

se face $x = a$. Obținem $A = \frac{1}{2a}$.

În identitatea inițială, înmulțim cu $x + a$:

$$\frac{1}{x - a} = \frac{A}{x - a}(x + a) + B$$

și facem $x = -a$. Obținem $B = -\frac{1}{2a}$.

Așadar

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right),$$

deci

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x - a}\,dx - \int \frac{1}{x + a}\,dx\right] = \frac{1}{2a}[\ln|x - a| - \ln|x + a|] + C =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C.$$

7. Integrarea funcțiilor continue

Fie f o funcție *continuă* pe un interval I, a și b două puncte din I. Pentru integrarea acestei funcții se poate folosi formula lui Leibniz-Newton

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b,$$

unde F este o primitivă (oarecare) a lui f, iar

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Formula lui Leibniz-Newton se obține formal din integrala nedefinită

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

înlăturînd constanta arbitrară C și scriind în ambii membri limitele de integrare.

Pentru funcţiile *continue* (ca şi pentru funcţiile integrabile care admit primitive), anumite proprietăţi ale integralei se pot demonstra, mai simplu, cu ajutorul primitivelor, fără a recurge la sumele integrale:

1) $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$;

2) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$;

3) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$;

4) $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b - a)$, unde ξ este cuprins între a şi b.

Într-adevăr, dacă F este o primitivă a lui f şi G este o primitivă a lui g:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^b g(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a),$$

atunci:

1) αF este o primitivă a lui αf, deci

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha F(x)\Big|_a^b = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha[F(b) - F(a)] =$$

$$= \alpha \cdot F(x)\Big|_a^b = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

2) $F + G$ este o primitivă a lui $f + g$, deci

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = (F(x) + G(x))\Big|_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) =$$

$$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$3)\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b + F(x)\Big|_b^c = F(b) - F(a) + F(c) -$$

$$- F(b) = F(c) - F(a) = F(x)\Big|_a^c = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.$$

4) Aplicînd teorema creşterilor finite funcţiei F, există un punct ξ cuprins între a şi b astfel ca

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a) = f(\xi)(b - a),$$

deci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = f(\xi)(b - a).$$

Să observăm că simbolul $F(x)\Big|_a^b$ are următoarele proprietăţi:

$$(\alpha F(x))\Big|_a^b = \alpha \cdot F(x)\Big|_a^b,$$

$$(F(x) + G(x))\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b.$$

Aceste proprietăţi au fost verificate în cursul demonstraţiei proprietăţilor 1 şi 2 ale integralei.

§ 5. Metode de integrare

Ca şi pentru integralele nedefinite, pentru calculul integralelor definite ale funcţiilor continue se pot aplica două metode de integrare: integrarea prin părţi şi schimbarea de variabilă.

1. Integrarea prin părţi

P r o p o z i ţ i a 1. Dacă f şi g sînt două funcţii definite pe un interval I, cu derivate f' şi g' continue pe acest interval, şi dacă a şi b sînt două puncte din I, atunci

$$\int_a^b fg'\,\mathrm{d}x = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g\,\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, fg este derivabilă pe I şi

$$(fg)' = f'g + fg',$$

adică fg este o primitivă a funcţiei $f'g + fg'$, deci

$$\int_a^b (f'g + fg')\,\mathrm{d}x = fg\Big|_a^b.$$

Dar

$$\int_a^b (f'g + fg')\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'g\,\mathrm{d}x + \int_a^b fg'\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x + \int_a^b fg'\,\mathrm{d}x = fg\Big|_a^b,$$

de unde

$$\int_a^b fg'\,\mathrm{d}x = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g\,\mathrm{d}x.$$

Această egalitate se numeşte *formula de integrare prin părţi* (pentru integralele definite).

Observaţie. Propoziţia rămîne adevărată şi dacă derivatele f' şi g' nu sînt continue, ci numai integrabile. Cum f şi g sînt de asemenea integrabile (deoarece fiind derivabile, sînt continue), rezultă că produsele $f'g$ şi fg' sînt integrabile, deci şi funcţia $(fg)' = f'g + fg'$ este integrabilă. Funcţia $(fg)'$ are şi primitive, deci i se poate aplica formula lui Leibniz–Newton, şi demonstraţia continuă ca mai sus.

Pentru integralele definite se poate de asemenea da o formulă de integrare prin părţi de ordin n:

Propoziţia 2. Dacă f şi g sînt două funcţii definite pe un interval I, care au derivate de ordinul n, $f^{(n)}$ şi $g^{(n)}$ continue pe I, şi dacă $a, b \in I$, atunci:

$$\int_a^b fg^{(n)}\mathrm{d}x = fg^{(n-1)}\Big|_a^b + (-1)^1 f'g^{(n-2)}\Big|_a^b + (-1)^2 f''g^{(n-3)}\Big|_a^b + \dots +$$

$$+ (-1)^k f^{(k)}g^{(n-k-1)}\Big|_a^b + \dots + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}g\Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g\,\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr,

$$\int_a^b f^{(k)}g^{(n-k)}\,\mathrm{d}x = f^{(k)}g^{(n-k-1)}\Big|_a^b - \int_a^b f^{(k+1)}g^{(n-k-1)}\,\mathrm{d}x,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

deci

$$(-1)^k\int_a^b f^{(k)}g^{(n-k)}\,\mathrm{d}x = (-1)^k f^{(k)}g^{(n-k-1)}\Big|_a^b + (-1)^{k-1}\int_a^b f^{(k+1)}g^{(n-k-1)}\,\mathrm{d}x.$$

Adunînd membru cu membru cele n egalităţi şi reducînd termenii asemenea, se obţine formula din enunţul propoziţiei.

Exemplu. Dacă $P(x)$ este un polinom de grad $\leqslant n$, iar α şi $\beta \neq 0$ sînt numere reale, avem

$$\int_a^b e^{\beta x}P(\alpha x)\,\mathrm{d}x = e^{\beta x}\left[\frac{P(\alpha x)}{\beta} - \frac{\alpha P'(\alpha x)}{\beta^2} + \ldots + (-1)^n\frac{\alpha^n P^{(n)}(\alpha x)}{\beta^{n+1}}\right]\Bigg|_a^b.$$

Într-adevăr, în formula de integrare prin părţi de ordinul n, luînd

$$f(x) = P(\alpha x),\ f'(x) = \alpha P'(\alpha x),\ f''(x) = \alpha^2 P''(\alpha x),\ \ldots$$

$$\ldots, f^{(n-1)}(x) = \alpha^{n-1}P^{(n-1)}(\alpha x),\ f^{(n)}(x) = \alpha^n P^{(n)}(\alpha x),$$

$$g^{(n)}(x) = e^{\beta x},\ g^{(n-1)}(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta},\ g^{(n-2)}(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta^2}, \ldots, g'(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta^{n-1}},\ g(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta^n},$$

obţinem:

$$\int_a^b e^{\beta x}P(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \left(P(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta} - \alpha P'(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta^2} + \ldots +\right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1}\alpha^{n-1}P^{(n-1)}(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta^n}\right)\Bigg|_a^b + (-1)^n\int_a^b \alpha^n P^{(n)}(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta^n}\,\mathrm{d}x.$$

Observînd că $P^{(n)}(\alpha x) = \text{constant}$, deoarece $P(\alpha x)$ este un polinom de grad $\leqslant n$, avem

$$\int_a^b \alpha^n P^{(n)}(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta^n}\,\mathrm{d}x = \alpha^n P^{(n)}(\alpha x)\int_a^b \frac{e^{\beta x}}{\beta^n}\,\mathrm{d}x = \alpha^n P^{(n)}(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta^{n+1}}\Bigg|_a^b$$

şi înlocuind în egalitatea precedentă, se obţine formula de mai sus.

Luînd în această formulă $\beta = -\alpha \neq 0$, obţinem egalitatea următoare

$$\int_a^b e^{-\alpha x}P(\alpha x)\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\left[P(\alpha x) + P'(\alpha x) + \ldots + P^{(n)}(\alpha x)\right]\Bigg|_a^b.$$

Observații. 1° Formula este adevărată și dacă se presupune că derivatele $f^{(n)}$ și $g^{(n)}$ nu sînt continue, ci numai integrabile.

2° Din formulele de integrare prin părți pentru integralele definite, se pot deduce formule de calcul al primitivelor luînd una dintre limitele de integrare variabilă:

$$\int_a^x fg'\,dx = fg\Big|_a^x - \int_a^x f'g\,dx$$

sau

$$\int_a^x fg'dx = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'g\,dx.$$

Atunci

$$\int fg'\,dx = \int_a^x fg'\,dx + C = f(x)g(x) - \int_a^x f'g\,dx - f(a)g(a) + C = f(x)g(x) - \int_a^x f'g\,dx.$$

Formula lui Taylor. Din formula de integrare prin părți de ordinul n se poate deduce formula lui Taylor *cu restul sub formă de integrală.*

Propoziția 3. Fie f o funcție definită pe un interval I și $a \in I$. Dacă f are derivată de ordinul $n+1$, continuă pe I, atunci pentru orice $x \in I$ avem:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) +$$
$$+ \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Se aplică formula de integrare prin părți de ordinul n funcțiilor $F(t) = \frac{(t-x)^n}{n!}$ și $G(t) = f'(t)$, definite pentru $t \in I$. Funcțiile F și G au derivate de ordinul n continue pe I:

$$\begin{aligned}
&F(t) = \frac{(t-x)^n}{n!}; && G^{(n)}(t) = f^{(n+1)}(t);\\
&F'(t) = \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}; && G^{(n-1)}(t) = f^{(n)}(t);\\
&\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\\
&F^{(n-1)}(t) = t - x; && G'(t) = f''(t);\\
&F^{(n)}(t) = 1; && G(t) = f'(t).
\end{aligned}$$

$$\int_a^x F(t)\,G^{(n)}(t)\,dt = F(t)\,G^{(n-1)}(t)\Big|_a^x + (-1)^1F'(t)\,G^{(n-2)}(t)\Big|_a^x + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}F^{(n-1)}(t)\,G(t)\Big|_a^x + (-1)^n\int_a^x F^{(n)}(t)\,G(t)\,dt,$$

adică

$$\int_a^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_a^x + (-1)^1 \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t)\Big|_a^x +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}(t-x)f'(t)\Big|_a^x + (-1)^n \int_a^x f'(t)\,dt = -\frac{(a-x)^n}{n!} f^{(n)}(a) -$$

$$-(-1)^1 \frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - \ldots - (-1)^{n-1}(a-x)f'(a) + (-1)^n[f(x) - f(a)];$$

ţinînd seama că

$$(t-x)^n = (-1)^n (x-t)^n,$$

$$(a-x)^k = (-1)^k (x-a)^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

obţinem

$$(-1)^n \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = -(-1)^n \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - (-1)^n \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) -$$

$$- \ldots - (-1)^n (x-a) f'(a) - (-1)^n f(a) + (-1)^n f(x),$$

de unde, împărţind cu $(-1)^n$ şi scoţînd pe $f(x)$, se obţine

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) +$$

$$+ \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Observaţii. 1° Ca şi la formula de integrare prin părţi, formula lui Taylor, cu restul sub forma integrală, este valabilă şi dacă derivata $f^{(n+1)}$ nu este continuă, ci numai integrabilă.

2° Dacă $f^{(n+1)}$ este continuă pe I, din restul sub forma integrală

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

se poate deduce restul sub forma lui Lagrange

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

unde ξ este cuprins între a şi x.

Într-adevăr, să aplicăm funcţiilor

$$F_1(t) = f^{(n+1)}(t),$$

$$G_1(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$$

formula mediei pentru integrale:

$$\int_a^x F_1(t)\,G_1(t)\,dt = F_1(\xi)\int_a^x G_1(t)dt,$$

unde ξ este cuprins între a şi x. Se poate aplica formula mediei, deoarece funcţiile $F_1(t)$ şi $G_1(t)$ sînt continue pe I, iar funcţia $G_1(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$ păstrează acelaşi semn pe intervalul cu extremităţile în a şi x (dacă $a < x$, atunci $a < t < x$, deci $x - t > 0$; dacă $x < a$ atunci $x < t < a$ deci $x - t < 0$).

Înlocuind în formula precedentă pe F_1 şi G_1, obţinem

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = f^{n+1}(\xi)\left(-\left.\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right|_a^x\right) =$$

$$= f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Transcendenţa numărului e

Din exemplul de la nr. 1 deducem că dacă $P(x)$ este un polinom de gradul k şi $\alpha \neq 0$, avem

$$\int_0^1 \alpha e^{-\alpha x}P(\alpha x)\,dx = \left.-e^{-\alpha x}Q(\alpha x)\right|_0^1 = -e^{-\alpha}Q(\alpha) + Q(0),$$

unde am notat

$$Q(x) = P(x) + P'(x) + \ldots + P^{(k)}(x).$$

Înmulţind cu e^{α} în egalitatea de mai sus, obţinem, chiar pentru $\alpha = 0$,

$$e^{\alpha}Q(0) = Q(\alpha) + \alpha e^{\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha x}P(\alpha x)\,dx = Q(\alpha) + R(\alpha),$$

unde am notat

$$R(\alpha) = \alpha e^{\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha x}P(\alpha x)\,dx.$$

Pentru demonstrarea transcendenţei numărului e, vom folosi polinomul

$$P(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(x-1)^p(x-2)^p\ldots(x-n)^p$$

de grad $np + p - 1$, unde p este un număr prim oarecare.

Derivata de ordin p a factorului $(x-n)^p$ este $p!$, deci derivata de ordin p a polinomului $P(x)$ are numai coeficienţi întregi, multipli ai lui p. Urmează că derivatele de ordin $r \geqslant p$ ale lui $P(x)$ sînt polinoame cu coeficienţi întregi divizibili cu p, deci pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $P^{(r)}(i)$ este un număr întreg multiplu de p.

Deoarece numerele $1, 2, \ldots, n$ sînt rădăcini de ordin p ale lui $P(x)$, rezultă că $P(x)$ şi primele sale $p-1$ derivate se anulează pentru $x = 1, 2, \ldots, n$. De asemenea, $P(x)$ şi primele sale $p-2$ derivate se anulează pentru $x = 0$. Urmează că pentru $x = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, avem

$$Q(i) = P^{(p)}(i) + \ldots + P^{(np+p-1)}(i) = Kp,$$

iar pentru $x = 0$ avem

$$Q(0) = P^{(p-1)}(0) + P^{(p)}(0) + \ldots + P^{(np+p-1)}(0) = P^{(p-1)}(0) + K'p =$$
$$= (-1)^{pn}(n\,!)^p + K'p$$

unde K şi K' sînt numere întregi.

Să presupunem, prin absurd, că e este un număr algebric, soluţie a ecuaţiei

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$$

cu coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ întregi şi să arătăm că ajungem la o contradicţie. Avem deci

$$a_0 + a_1e + \ldots + a_ne^n = 0.$$

Să considerăm polinomul

$$P(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)\,!}(x-1)^p(x-2)^p \ldots (x-n)^p$$

cu p prim oarecare şi să înmulţim în egalitatea precedentă cu $Q(0)$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot e^iQ(0) = 0.$$

Folosind egalitatea $e^{\alpha}Q(0) = Q(\alpha) + R(\alpha)$ pentru $\alpha = i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, obţinem

$$a_0Q(0) + \sum_{i=1}^{n} a_i\,Q(i) = -\sum_{i=1}^{n} a_iR(i)$$

de unde

$$(-1)^{pn}a_0(n\,!)^p + K''p = -\sum_{i=1}^{n} a_iR(i)$$

unde K'' este întreg. Luînd $p > |a_0|$ şi $p > n$, primul termen al sumei din membrul stîng nu are factor prim numărul p, deci nu este multiplu de p şi deci primul termen al egalităţii este un număr întreg $\neq 0$. Vom arăta că membrul drept al egalităţii este cuprins strict între -1 şi 1, şi vom ajunge astfel la o contradicţie. Avem, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$|R(i)| = e^i\left|\int_0^1 ie^{-ix}P(ix)\,\mathrm{d}x\right| = e^i\left|\int_0^i e^{-t}P(t)\,\mathrm{d}t\right| < e^ii \sup_{1\leqslant t\leqslant i}|P(t)| <$$
$$< \frac{e^ii(n\,!)^p}{(p-1)\,!} \leqslant \frac{ne^n(n\,!)^p}{(p-1)\,!}$$

deci, notînd $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|$, avem

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_iR(i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|a_i|\,|R(i)| \leqslant M\sum_{i=1}^{n}|R(i)| \leqslant Mn^2e^nn\,!\,\frac{(n\,!)^{p-1}}{(p-1)\,!}.$$

Dar $\lim_{p\to\infty} \frac{y^p}{p!} = 0$, deci, luînd p suficient de mare, obținem ca ultimul termen să fie < 1, deci $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i R(i)\right| < 1$ și am ajuns la contradicția enunțată mai sus. Așadar, numărul e este transcendent. Acest fapt a fost demonstrat de *Hermite*.

3. Transcendența numărului π

Demonstrația folosește proprietățile funcțiilor simetrice elementare de rădăcinile unei ecuații și următoarele două observații din teoria ecuațiilor algebrice.

1) *Dacă γ este un număr algebric (real sau complex), soluție a ecuației cu coeficienți întregi*

$$\varphi(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$$

atunci $i\gamma$, ($i = \sqrt{-1}$), este de asemenea algebric.

Într-adevăr, punînd $\gamma' = i\gamma$, avem $\gamma = -i\gamma'$, deci $\varphi(-i\gamma') = 0$, de unde $\varphi(-i\gamma')\varphi(i\gamma') = 0$, iar membrul stîng al ultimei egalități este un polinom în γ' cu coeficienți întregi.

2) *Dacă γ este un număr algebric, soluție a ecuației $\varphi(x) = 0$ atunci $\gamma' = \gamma a_n$ este de asemenea un număr algebric, soluție a unei ecuații algebrice canonice, cu coeficienți întregi, în care coeficientul lui x^n este* 1.

Această ecuație este

$$a_n^{n-1}\varphi\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0.$$

Să presupunem prin absurd că π este număr algebric, și să arătăm că ajungem la o contradicție. Din cele două observații de mai sus, rezultă că există un număr întreg c, astfel încît numărul $\pi i c$ să verifice o ecuație canonică cu coeficienți întregi:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 = 0.$$

Să notăm $c\beta_1, c\beta_2, \ldots, c\beta_n$ rădăcinile acestei ecuații. Printre aceste rădăcini se află și $\pi i c$: există deci m astfel încît $\beta_m = i\pi$, deci

$$1 + e^{\beta_m} = 0$$

deoarece $e^{\beta_m} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$. Atunci

$$(1 + e^{\beta_1})(1 + e^{\beta_2})\ldots(1 + e^{\beta_n}) = 0.$$

Să dezvoltăm produsul din membrul stîng: vor apare puteri ale lui e avînd exponenți sume formate din numerele $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Dacă o asemenea sumă este nulă, puterea lui e este 1. Așadar, după dezvoltare, vom obține o egalitate de forma

$$C + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \ldots + e^{\alpha_s} = 0,$$

unde C este întreg iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ sînt sume $\neq 0$, formate din numerele $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Dar $c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_s$ sînt rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienții întregi, deoarece $c\beta_1, \ldots, c\beta_n$ sînt rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi, deci și sumele formate cu acestea sînt rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi și printre aceste sume se află și $c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_s$. Să considerăm polinomul de grad $sp + p - 1$.

$$P(x) = \frac{(cx)^{p-1}}{(p-1)!}(cx - c\alpha_1)^p(cx - c\alpha_2)^p \ldots (cx - c\alpha_s)^p,$$

unde p este un număr prim. Atunci $(p-1)!P(x)$ este un polinom în cx, cu coeficienți întregi. Notînd

$$Q(x) = P(x) + P'(x) + \ldots + P^{(sp+p-1)}(x)$$

şi înmulţind cu $Q(0)$ în egalitatea $C + \sum_{i=1}^{s} e^{\alpha_i} = 0$, obţinem

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^{s} e^{\alpha_i} Q(0) = 0$$

şi deoarece $e^{\alpha_i} Q(0) = Q(\alpha_i) + R(\alpha_i)$, avem

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^{s} Q(\alpha_i) = -\sum_{i=1}^{s} R(\alpha_i).$$

Ca şi în demonstraţia transcendenţei lui e, deducem că derivata $P^{(r)}(x)$ se anulează pentru $x = 0$ dacă $r < p - 1$ şi pentru $x = \alpha_i$ dacă $r < p$. Pentru $r \geqslant p$, coeficienţii derivatei $P^{(r)}(x)$ sînt întregi şi divizibili cu p. Dar $P^{(r)}(x)$ este un polinom în cx, deci

$$\sum_{i=1}^{s} P^{(r)}(\alpha_i), \quad r \geqslant p$$

este o funcţie simetrică întreagă de $c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_s$, cu coeficienţi întregi divizibili cu p. Avem de asemenea

$$P^{(p-1)}(0) = c^{p-2}(-c\alpha_1)^p(-c\alpha_2)^p \ldots (-c\alpha_s)^p.$$

Aşadar

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^{s} Q(\alpha_i) = CP^{(p-1)}(0) + Kp$$

unde K este întreg; luînd p mai mare decît numerele C, c şi decît produsul $\alpha_1 c \cdot \alpha_2 c \ldots \alpha_s c$ deducem că $CQ(0) + \sum_{i=1}^{s} Q(\alpha_i)$ este un număr întreg $\neq 0$.

Să evaluăm acum $\sum_{i=1}^{s} R(\alpha_i)$ şi să arătăm că are modulul < 1. Avem

$$|R(\alpha_i)| \leqslant He^H M$$

unde $H = \max(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_s|)$ şi

$$M = \sup_{|x|<H} |P(x)| < \frac{(|c|H)^{p-1}(2|c|H)^{ps}}{(p-1)!},$$

deci

$$\left|\sum_{i=1}^{s} R(\alpha_i)\right| < K' \frac{K^{p-1}}{(p-1)!}$$

unde K şi K' sînt constante. Deoarece $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{K^{p-1}}{(p-1)!} = 0$, pentru p suficient de mare putem realiza ca $\left|\sum_{i=1}^{s} R(\alpha_i)\right| < 1$. Atunci egalitatea

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^{s} Q(\alpha_i) = -\sum_{i=1}^{s} R(\alpha_i)$$

nu poate avea loc, deoarece, după cum s-a arătat mai sus, membrul sting este întreg, şi am ajuns la o contradicţie.

Aşadar, π este transcendent. Acest fapt a fost demonstrat de *Lindemann*.

4. Schimbarea de variabilă (integrarea funcțiilor compuse)

Fie intervalele I și J, și funcțiile

$$u(x) : I \to J,\ f(t) : J \to R.$$

Propoziția 1. **Dacă $f(t)$ este continuă pe J, iar $u(x)$ are derivată $u'(x)$ continuă pe I, și dacă a și b sînt două puncte din I, atunci:**

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Această egalitate se numește *prima formulă de schimbare de variabilă*.

Funcțiile $f(t)$ și $f(u(x)) \cdot u'(x)$ sînt continue, respectiv, pe J și I, deci au primitive pe aceste intervale. Fie $F(t)$ o primitivă a funcției $f(t)$ pe intervalul J:

$$F'(t) = f(t).$$

Atunci funcția compusă $H(x) = F(u(x))$, definită pe I, este derivabilă pe I și

$$H'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x),$$

adică H este o primitivă a funcției $f(u(x)) \cdot u'(x)$.

Așadar

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = H(x)\Big|_a^b = H(b) - H(a) =$$

$$= F(u(b)) - F(u(a)) = F(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Practic, pentru a calcula integrala

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

se face înlocuirea

$$u(x) = t$$

și se diferențiază formal

$$u'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

Limitele de integrare a și b se înlocuiesc cu limitele de integrare t_1 și t_2, care se obțin tot din egalitatea $u(x) = t$, înlocuind pe x respectiv cu a și b:

$$t_1 = u(a), \qquad t_2 = u(b),$$

se obține

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Observații. 1° Funcția $u(x)$ nu este presupusă monotonă.

2° Nu este nevoie ca derivata $u'(x)$ să fie continuă, ci numai integrabilă.

Într-adevăr, deoarece funcția $f(u(x))$ este de asemenea integrabilă (fiind continuă, ca funcție compusă a funcțiilor continue $u(t)$ și $f(x)$), produsul $f(u(x)) \cdot u'(x)$ este o funcție integrabilă și avînd și primitivă (funcția $H(x)$), se poate aplica formula lui Leibniz-Newton și demonstrația continuă ca mai sus.

3° Formula de schimbare de variabilă se poate scrie și astfel

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t,$$

unde s-a notat cu x variabila din J și cu t variabila din I, iar între limitele de integrare există relațiile·

$$\alpha = u(a), \qquad \beta = u(b).$$

În acest fel putem calcula integrala $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ cu ajutorul integralei $\int_a^b f(u(t)) \cdot u'(t)\,\mathrm{d}t$, făcînd următoarele înlocuiri:

$$x = u(t), \qquad \mathrm{d}x = u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Limitele a și b se aleg astfel ca $u(a) = \alpha$ și $u(b) = \beta$. Dacă $u(a') = \alpha$ și $u(b') = \beta$, se pot alege a' și b' limitele integralei din membrul drept. Nu este nevoie ca funcția $u(t)$ să fie biunivocă.

Exemplu. Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Se face înlocuirea $x = \sin t$, deci $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

Putem alege $t_1 = 0$ și $t_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, k întreg, deoarece

$$x_1 = \sin t_1 = \sin 0 = 0,\ x_2 = \sin t_2 = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Atunci

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Dar

$$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} |\cos t| \cos t \, dt = 0, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Într-adevăr: pentru $2n\pi \leqslant t \leqslant 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ şi $2n\pi + \frac{3\pi}{2} \leqslant t \leqslant (2n+1)\pi$ avem $\cos t \geqslant 0$ deci $|\cos t| = \cos t$ şi

$$|\cos t| \cos t = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Iar pentru $2n\pi + \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$ avem $\cos t \leqslant 0$, deci $|\cos t| = -\cos t$ şi

$$|\cos t| \cos t = -\cos^2 t = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right).$$

Atunci

$$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} |\cos t| \cos t \, dt = \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - \int_{2n\pi+\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t \, dt + \int_{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}^{2(n+1)\pi} \cos^2 t \, dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{2n\pi+\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{2}} + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}^{2(n+1)\pi} = 0.$$

Aşadar

$$\int_0^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t \, dt = \int_0^{2\pi} |\cos t| \cos t \, dt + \int_{2\pi}^{4\pi} |\cos t| \cos t \, dt + \ldots +$$

$$+ \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} |\cos t| \cos t \, dt + \int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t \, dt = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Pentru calcul, alegem desigur cazul cel mai simplu: $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

O b s e r v a ţ i e. Din prima formulă de schimbare de variabilă se deduce o formulă de calcul pentru primitive, luînd una din limite variabile

$$\int_a^x f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(x)} f(t) dt.$$

P r o p o z i ţ i a 2. Dacă $f(t)$ este continuă pe J, iar $u(x)$ este strict monotonă pe I, dacă inversa sa $v = u^{-1} : J \to I$ are derivată continuă v' pe J, şi dacă $a, b \in I$, atunci

$$\int_a^b f(u(x))\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)v'(t)\, dt.$$

Această egalitate se numeşte a *doua formulă de schimbare de variabilă.*

Să observăm mai întîi că, deoarece $v = u^{-1}$, avem

$$u(v(t)) = t \text{ pentru orice } t \in J,$$
$$v(u(x)) = x \text{ pentru orice } x \in I,$$

$$I \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} J.$$

Funcţia $f(u(x))$ este continuă pe I.

$$I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} R$$
$$x \to u(x) \to f(u(x)).$$

Fie $F(x) : I \to R$ o primitivă a funcţiei $f(u(x))$:

$$F'(x) = f(u(x)),\ x \in I.$$

Să considerăm funcţia compusă $H(t) = F(v(t)) : J \to R$:

$$J \xrightarrow{v} I \xrightarrow{F} R$$
$$t \to v(t) \to F(v(t)).$$

Deoarece F şi v sînt derivabile, funcţia $H(t) = F(v(t))$ este derivabilă pe J şi avem

$$H'(t) = F'(v(t)) \cdot v'(t) = f(u(v(t))) \cdot v'(t) = f(t)v'(t),$$

deci $H(t)$ este o primitivă a funcţiei $f(t) \cdot v'(t)$. Atunci

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)v'(t)\, dt = H(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(v(t))\Big|_{u(a)}^{u(b)} =$$

$$= F(v(u(b))) - F(v(u(a))) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(u(x))\, dx.$$

Practic, pentru a calcula integrala

$$\int_a^b f(u(x))\, dx$$

se face înlocuirea

$$u(x) = t.$$

Se rezolvă apoi în raport cu x, $x = u^{-1}(t) = v(t)$ (sau se face de la început înlocuirea $x = v(t)$) ; apoi se diferenţiază, formal, egalitatea

$$x = v(t).$$

Se obţine

$$dx = v'(t)\ dt.$$

Limitele de integrare a şi b se înlocuiesc cu limitele de integrare t_1 şi t_2, care se obţin tot din egalitatea $u(x) = t$, înlocuind pe x respectiv cu a şi b:

$$t_1 = u(a), \qquad t_2 = u(b).$$

Se obţine

$$\int_a^b f(u(x))\ dx = \int_{t_2}^{t_1} f(t) \cdot v'(t)\ dt.$$

Observaţii. 1° Nu este nevoie ca derivata $v'(t)$ să fie continuă, ci numai integrabilă.

2° Derivata $v'(t)$ poate fi nulă în unele puncte $t \in J$; adică funcţia $u(x)$ poate să nu fie derivabilă în punctele corespunzătoare $x = v(t) \in I$.

3° În practică, de cele mai multe ori derivabilitatea lui v şi continuitatea derivatei v' sînt verificate. Ceea ce trebuie verificat totdeauna este ca funcţia $u(x)$ să fie biunivocă adică ecuaţia $u(x) = t$ să aibă, pentru fiecare $t \in J$, o *singură* soluţie, $x = v(t) \in I$. Rezultă atunci că funcţia $u(x)$ este strict monotonă, deoarece este biunivocă şi continuă.

Exemplu. Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{x(\sqrt{x}+1)}dx$.

Avem

$$\int_0^1 \sqrt{x(\sqrt{x}+1)}dx = \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1}\ dx.$$

Facem înlocuirea

$$\sqrt{\sqrt{x}+1} = t, \text{ deci } t \geqslant 0;$$

pentru $x_1 = 0$ avem $t_1 = 1$, iar pentru $x_2 = 1$ avem $t_2 = \sqrt{2}$.

Apoi

$$\sqrt{x} + 1 = t^2,$$

deci

$$\sqrt{x} = t^2 - 1$$

şi

$$x = (t^2 - 1)^2,$$

deci

$$dx = 4t(t^2 - 1)dt.$$

Atunci

$$\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)t\,4t(t^2-1)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} 4(t^2-1)^2\,t^2\mathrm{d}t = 4\int_1^{\sqrt{2}} (t^6 - 2t^4 + t^2)\mathrm{d}t =$$

$$= 4\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = 4\left(\frac{1}{7}\sqrt{2^7} - \frac{2}{5}\sqrt{2^5} + \frac{1}{3}\sqrt{2^3}\right) - 4\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{105}(11\sqrt{2} - 4).$$

Observaţie. Din a doua formulă de schimbare de variabilă se deduce o formulă de calcul al primitivelor, luînd una din limitele de integrare variabilă

$$\int_a^x f(u(x))\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(x)} f(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

§ 6. Integrale reductibile la integrale raţionale

1. Consideraţii preliminare

Pentru funcţiile continue, formula lui Leibniz-Newton reduce problema calculului integralei la aceea a găsirii primitivelor.

Primitivele funcţiilor raţionale se pot calcula totdeauna cînd se cunosc rădăcinile polinomului de la numitor şi deci se pot calcula şi integralele funcţiilor raţionale.

Pentru prescurtare, integralele funcţiilor raţionale vor fi numite *integrale raţionale.*

Dacă, printr-o schimbare de variabilă, o integrală se transformă într-o integrală raţională, spunem că integrala iniţială este *reductibilă* la o integrală raţională.

Integralele reductibile la integrale raţionale pot fi de asemenea calculate. Luînd una din limitele de integrare variabilă, se obţin primitivele unor funcţii care nu sînt raţionale.

Se pune astfel problema găsirii unor clase de funcţii ale căror integrale sînt reductibile la integrale raţionale.

Pentru aceasta să considerăm mai întîi prima formulă de schimbare de variabilă:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(x_1)}^{u(x_2)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dacă funcţia $f(t)$ este raţională (şi numai în acest caz), integrala din membrul drept este o integrală raţională şi deci integrala din membrul stîng este reductibilă la o integrală raţională şi poate fi calculată.

Aşadar: *Integralele de forma*

$$\int_{x_1}^{x_2} R(u(x)) \cdot u'(x)\, dx,$$

unde $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ *este o funcţie raţională, iar* $u(x)$ *este o funcţie oarecare cu derivata continuă, sînt reductibile la integrale raţionale, prin schimbarea de variabilă* $u(x) = t$.

Integralele de forma $\int_{x_1}^{x_2} R(u(x))\, dx$ nu sînt însă, în general, reductibile la integrale raţionale.

Evident, dacă $u(x)$ este *raţională*, funcţia compusă $R(u(x))$ este de asemenea raţională.

Vom încerca să găsim cîteva clase de funcţii $u(x)$ care nu sînt raţionale, dar pentru care integralele $\int_{x_1}^{x_2} R(u(x))\, dx$ sînt reductibile la integrale raţionale, prin schimbarea de variabilă $u(x) = t$. Pentru aceasta folosim a doua formulă de schimbare de variabilă

$$\int_{x_1}^{x_2} R(u(x))\, dx = \int_{t_1}^{t_2} R(t) \cdot v'(t)\, dt,$$

unde $u(x)$ este o funcţie *biunivocă* pe intervalul $I = [x_1, x_2]$, iar $v(t)$ este inversa sa (de asemenea biunivocă) cu derivata $v'(t)$ continuă pe intervalul $J = u(I)$ cu extremităţile în t_1 şi t_2:

$$t_1 = u(x_1), \qquad t_2 = u(x_2).$$

Dacă funcţia $v'(t)$ *este raţională, atunci funcţia* $R(t)\, v'(t)$ *este raţională şi deci integrala din membrul stîng este reductibilă la o integrabilă raţională.*

Funcţia $v'(t)$ este *raţională*, dacă şi numai dacă *primitiva* sa $v(t)$ este de forma

$$k \ln r(t), \qquad k \operatorname{arc\,tg} r(t), \qquad r(t)$$

sau o sumă de funcţii de acest fel, unde $r(t)$ este o *funcţie raţională biunivocă definită pe* J, iar $k \neq 0$.

Prin inversarea funcţiilor $v(t)$ de această formă, obţinem funcţiile $u(x)$ căutate.

Ne vom mărgini aici la următoarele cazuri:

1) $v(t) = k \ln t, (k \neq 0)$;

2) $v(t) = k \operatorname{arc\,tg} t, (k \neq 0)$;

3) $v(t) = \dfrac{\alpha t^n + \beta}{\gamma t^n + \delta}, (\alpha\delta \neq \gamma\beta, n \in N)$;

4) $v(t) = \dfrac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}, (\alpha\delta \neq \gamma\beta, \alpha \neq 0, \gamma \neq 0)$;

5) $v(t) = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t^2 + \delta}, (\alpha\delta \neq \gamma\beta, \alpha \neq 0, \gamma \neq 0)$.

Să găsim pentru fiecare din aceste cazuri funcţia $u(x)$ corespunzătoare:

1) $v(t) = k \ln t, \quad k \neq 0.$

Dacă punem $x = k \ln t$, avem $e^{\frac{x}{k}} = t$, şi deci, notînd $a = \frac{1}{k}$

$$u(x) = e^{ax}.$$

2) $v(t) = k \operatorname{arc\,tg} t, \quad k \neq 0.$

Dacă punem $x = k \operatorname{arc\,tg} t$, avem $\operatorname{tg} \frac{x}{k} = t$ şi deci

$$u(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{k}.$$

3) $v(t) = \dfrac{\alpha t^n + \beta}{\gamma t^n + \delta}, \alpha\delta \neq \gamma\beta.$

Dacă punem

$$x = \frac{\alpha t^n + \beta}{\gamma t^n + \delta},$$

atunci

$$x\gamma t^n + x\delta = \alpha t^n + \beta$$

şi, rezolvînd în raport cu t^n,

$$t^n = \frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha},$$

de unde

$$\sqrt[n]{\frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha}} = t$$

şi notînd $-\delta = a,\ \beta = b,\ \gamma = c,\ -\alpha = d$, rezultă

$$u(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

În particular, unii din coeficienţii $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pot fi nuli, şi deci şi unii din coeficienţii a, b, c, d pot fi nuli. Să remarcăm însă că avem $ad \neq bc$, deoarece

$$\alpha\delta \neq \gamma\beta.$$

În cazul cînd $n = 1$, $u(x)$ este raţională. Vom considera numai cazul cînd $n \geqslant 2$.

4) $v(t) = \dfrac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}$, $\alpha\delta \neq \gamma\beta$, $\alpha \neq \gamma \neq 0$.

Dacă punem $x = \dfrac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}$, atunci

$$\gamma x t + \delta x = \alpha t^2 + \beta$$

sau

$$\alpha t^2 - \gamma x t + \beta - \delta x = 0$$

şi, rezolvînd în raport cu t, avem

$$t = \frac{\gamma x \pm \sqrt{\gamma^2 x^2 + 4\alpha\delta x - 4\alpha\beta}}{2\alpha}.$$

În faţa radicalului se ia un singur semn, acela pentru care $t \in J$

Luînd $\alpha = \dfrac{1}{2}$ (ceea ce nu micşorează generalitatea, deoarece putem împărţi la numărătorul şi la numitorul fracţiei $\dfrac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}$ cu 2α) şi, notînd $\gamma^2 = a > 0$, $4\alpha\delta = b$, $-4\alpha\beta = c$,
obţinem

$$u(x) = \varepsilon\sqrt{a}\,x \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad a > 0,$$

unde $\quad \varepsilon = 1$ dacă $\gamma > 0$ şi $\varepsilon = -1$ dacă $\gamma < 0$.

5) $v(t) = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t^2 + \delta}$, $\alpha\delta \neq \gamma\beta$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$.

Dacă punem $x = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t^2 + \delta}$, atunci

$$\gamma x t^2 + \delta x = \alpha t + \beta$$

sau

$$\gamma x t^2 - \alpha t + \delta x - \beta = 0$$

şi, rezolvînd în raport cu t, avem

$$t = \frac{\alpha \pm \sqrt{-4\gamma\delta x^2 + 4\beta\gamma x + \alpha^2}}{2\gamma x}.$$

În fața radicalului se ia un singur semn, acela pentru care $t \in J$. Luînd $\gamma = \frac{1}{2}$ (ceea ce nu micşorează generalitatea) şi notînd $-4\gamma\delta = a$, $4\beta\gamma = b$, $\alpha^2 = c > 0$, obținem

$$u(x) = \frac{\varepsilon\sqrt{c} \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}}{x},$$

unde $\varepsilon = 1$, dacă $\alpha > 0$, şi $\varepsilon = -1$, dacă $\alpha < 0$.

Observație. Dacă $\alpha = 0$ sau dacă $\gamma = 0$, cazurile 4 şi 5 se reduc la cazul 3.

2. Integrale de funcții exponențiale

$$\int_{x_1}^{x_2} R(e^{ax})\,\mathrm{d}x, \qquad a \neq 0,$$

unde $R(u) = \frac{P(u)}{Q(u)}$ este o funcție rațională. Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcția de integrat să fie definită pe intervalul de integrare, se impune condiția:

$$Q(e^{ax}) \neq 0 \qquad \text{pentru orice } x \in [x_1, x_2].$$

Integrala aceasta se reduce la o integrală rațională, făcînd înlocuirea

$$e^{ax} = t.$$

Într-adevăr, avem $x = \frac{1}{a}\ln t$, deci $\mathrm{d}x = \frac{1}{at}\,\mathrm{d}t$; notînd

$t_1 = e^{ax_1}$ şi $t_2 = e^{ax_2}$ obținem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(e^{ax})\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} R(t)\frac{1}{at}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)\,\mathrm{d}t,$$

unde funcția $R_1(t) = R(t)\frac{1}{at}$ este rațională.

O b s e r v a ţ i e. Luînd una din limitele de integrare variabilă, se obţine o primitivă a funcţiei $R(e^{ax})$ pe intervalul $[x_1, x_2]$.

Exemple. 1) Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\, dx$.

Se face înlocuirea $e^{2x} = t$ deci $x = \frac{1}{2} \ln t$ şi $dx = \frac{1}{2t} dt$.

Avem $t_1 = e^0 = 1$ şi $t_2 = e$. Atunci

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\, dx = \int_1^e \frac{t}{1+t} \frac{1}{2t}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{1+t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+t)\Big|_1^e = \frac{1}{2}[\ln(1+e) - \ln 2] = \frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{2} = \ln \sqrt{\frac{1+e}{2}}.$$

Pentru calculul unei primitive a funcţiei $\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ (pe un interval oarecare) procedăm astfel:

$$\int_0^x \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^{2x}} \frac{1}{1+t}\, dt = \frac{1}{2} \ln(1+t)\Big|_1^{e^{2x}} =$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(1+e^{2x}) - \ln 2] = \ln\sqrt{1+e^{2x}} - \ln\sqrt{2}.$$

2) Integrala $\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{1-e^{2x}}\, dx$ nu are sens, deoarece funcţia de integrat nu este definită în punctul 0 din intervalul de integrare, iar în jurul acestui punct funcţia este nemărginită. (Mai departe, la capitolul despre integrale generalizate, se va da un sens acestei integrale).

3. Integrale de funcţii trigonometrice

În mod obişnuit, se numesc integrale trigonometrice integralele de forma

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx,$$

unde $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ este o funcţie raţională de două variabile.

Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcţia de integrat să fie definită pe intervalul de integrare, se impune condiţia

$$Q(\cos x, \sin x) \neq 0, \text{ pentru orice } x \in [x_1, x_2].$$

Această integrală se reduce la o integrală raţională, făcînd înlocuirea

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

sau, în anumite condiţii, una din înlocuirile

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \cos x = t, \quad \sin x = t.$$

I) *Înlocuirea* $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Dacă $x \neq (2k+1)\pi$, (k întreg), adică dacă $\frac{x}{2} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, avem

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

deci

$$R(\cos x, \sin x) = R\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\right) = R^*\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right),$$

unde R^* este o funcţie raţională de o variabilă.

a) Dacă $-\pi < x_1 < x_2 < \pi$, atunci $-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, deci $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ este definită pe $[x_1, x_2]$ şi

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} R^*\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) dx.$$

Se face înlocuirea

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$$

deci

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

şi $x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$, deci

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Notînd $t_1 = \operatorname{tg}\frac{x_1}{2}$ şi $t_2 = \operatorname{tg}\frac{x_2}{2}$, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)\, dt,$$

unde R_1 este o funcţie raţională. Am redus astfel integrala iniţială la o integrală raţională, în cazul cînd intervalul de integrare $[x_1, x_2]$ este conţinut în intervalul $(-\pi, \pi)$.

Să observăm că această condiţie a fost impusă numai de schimbarea de variabilă folosită, dar că integrala poate avea sens şi fără ca această condiţie să fie îndeplinită, dacă $Q(\cos x, \sin x)$ nu se anulează pe intervalul de integrare.

În acest caz se procedează astfel:

b) $$\int_{-\pi}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_{-\pi+\lambda}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx,$$

unde $-\pi < x_2 < \pi$. Pentru integralele din membrul drept, unde $\lambda > 0$, avem $-\pi < -\pi + \lambda < x_2 < \pi$, şi deci se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

c) $$\int_{x_1}^{\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_{x_1}^{\pi-\lambda} R(\cos x, \sin x)\, dx,$$

unde $-\pi < x_1 < \pi$. Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

d) $$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_{-\pi+\lambda}^{\pi-\lambda} R(\cos x, \sin x)\, dx.$$

Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

e) Dacă $(2k-1)\pi \leqslant x_1 < x_2 \leqslant (2k+1)\pi$, k întreg, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{x_1-2k\pi}^{x_2-2k\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx$$

şi $-\pi \leqslant x_1 - 2k\pi < x_2 - 2k\pi \leqslant \pi$. Integrala din membrul drept este de unul din tipurile precedente. Într-adevăr, să facem în integrala din stînga înlocuirea $x - 2k\pi = z$; atunci $x = z + 2k\pi$ şi $dx = dz$,

$$\cos x = \cos(z + 2k\pi) = \cos z,\ \sin x = \sin(z + 2k\pi) = \sin z.$$

Notînd $z_1 = x_1 - 2k\pi$, $z_2 = x_2 - 2k\pi$ avem,

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{z_1}^{z_2} R(\cos z, \sin z)\,dz = \int_{x_1-2k\pi}^{x_2-2k\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx,$$

unde în ultima integrală am notat variabila de integrare din nou cu x, în loc de z.

Rezultă în particular:

$$\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx,$$

oricare ar fi k întreg.

f) Dacă intervalul de integrare $[x_1, x_2]$ este oarecare, integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx$$

este o sumă de integrale de tipurile precedente.

Într-adevăr, să scriem în ordine crescătoare toate punctele de forma $z = (2k+1)\pi$, k întreg, cuprinse între x_1 şi x_2:

$$x_1 < z_1 < \ldots < z_n < x_2,$$

Pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n-1$ avem

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx.$$

Atunci

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{x_1}^{z_1} R(\cos x, \sin x)\,dx + \int_{z_1}^{z_2} R(\cos x, \sin x)\,dx + \cdots$$

$$\cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} R(\cos x, \sin x)\,dx + \int_{z_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{z_1} R(\cos x, \sin x)\,dx + \int_{z_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx +$$

$$+ (n-1)\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx.$$

Primele două integrale sînt de tipul e).

O b s e r v a ț i e. Dacă se ia una din limitele de integrare variabilă, se obține o primitivă a funcției $R(\cos x, \sin x)$ pe intervalul $(-\pi, \pi)$:

$$\int_a^x R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exemple. 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Se face înlocuirea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, deci

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$t_1 = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ t_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Atunci

$$I = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \ln|1+t|\,\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \ln 2 - \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}.$$

2) Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{4\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Avem

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{3\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_{-\pi+\lambda}^{\pi-\lambda} \frac{2}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, deci

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt;$$

$$t_1 = t_1(\lambda) = \operatorname{tg}\frac{-\pi+\lambda}{2}, \quad t_2 = t_2(\lambda) = \operatorname{tg}\frac{\pi-\lambda}{2}.$$

Atunci

$$\int_{-\pi+\lambda}^{\pi-\lambda} \frac{2}{2+\sin x}dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{t^2+t+1}dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \frac{4}{3}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2t_2+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2t_1+1}{\sqrt{3}}\right].$$

Avem

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} t_1 = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{tg}\frac{-\pi+\lambda}{2} = -\infty \text{ şi } \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} t_2 = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{tg}\frac{\pi-\lambda}{2} = +\infty,$$

deci

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg}\frac{2t_1+1}{\sqrt{3}} = \lim_{t_1\to-\infty} \operatorname{arc\,tg}\frac{2t_1+1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{2}$$

şi

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg}\frac{2t_2+1}{\sqrt{3}} = \lim_{t_1\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}\frac{2t_2+1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2},$$

astfel încît

$$I = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_{-\pi+\lambda}^{\pi-\lambda} \frac{2}{2+\sin x}dx = \frac{4}{3}\left[\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg}\frac{2t_2+1}{\sqrt{3}} - \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg}\frac{2t_1+1}{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{4}{3}\pi.$$

II) *Înlocuirea* $\operatorname{tg} x = t$. În general, înlocuirea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ duce la o integrală raţională mai greu de calculat.

Uneori se pot folosi alte înlocuiri, care duc la integrale raţionale mai simple.

În cazul cînd funcţia $R(\cos x, \sin x)$ *îndeplineşte condiţia*

$$R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$$

se face schimbarea $\operatorname{tg} x = t$.

În adevăr, dacă $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, avem $\cos x \neq 0$ şi

$$\sin x = \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x \operatorname{tg} x,$$

deci

$$R(\cos x, \sin x) = R(\cos x, \cos x \operatorname{tg} x) = R_1(\cos x, \operatorname{tg} x),$$

unde $R_1(u, v)$ este o funcţie raţională de două variabile.

Funcţia $R_1(\cos x, \operatorname{tg} x)$ este pară în $\cos x$. Într-adevăr,

$$R_1(-\cos x, \operatorname{tg} x) = R(-\cos x, -\cos x \operatorname{tg} x) = R(-\cos x, -\sin x) =$$
$$= R(\cos x, \sin x) = R_1(\cos x, \operatorname{tg} x).$$

Rezultă că funcţia $R_1(\cos x, \operatorname{tg} x)$ conţine numai puterile pare ale lui $\cos x$:

$$R_1(\cos x, \operatorname{tg} x) = R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x),$$

unde $R_2(u, v)$ este o funcţie raţională de două variabile. (Dacă numărătorul şi numitorul funcţiei R_2 conţin numai puterile impare ale lui $\cos x$, se simplifică cu $\cos x \neq 0$ şi rămîn numai puterile pare ale lui $\cos x$.)

Din egalitatea

$$R(\cos x, \sin x) = R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x)$$

rezultă, pe de o parte, că funcţia $R(\cos x, \sin x)$ conţine numai puterile lui $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ şi $\sin x \cos x$:

$$R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x) = R_2\left(\cos^2 x, \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x}\right),$$

iar pe de altă parte

$$R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x) = R_2\left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \operatorname{tg} x\right) = R_3(\operatorname{tg} x),$$

unde R_3 este o funcţie raţională de o singură variabilă.

a) Dacă $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, funcţia $\operatorname{tg} x$ este definită pe intervalul $[x_1, x_2]$ şi

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} R_3(\operatorname{tg} x)\, dx.$$

Se face înlocuirea

$$\operatorname{tg} x = t,$$

deci $x = \operatorname{arc\,tg} t$ şi $dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Notînd $t_1 = \operatorname{tg} x_1$ şi $t_2 = \operatorname{tg} x_2$, obţinem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} R_3(\operatorname{tg} x) = \int_{t_1}^{t} R_3(t)\frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} R_4(t)\, dt,$$

unde R_4 este o funcţie raţională.

Am redus astfel integrala iniţială la o integrală raţională, în cazul cînd intervalul $[x_1, x_2]$ este conţinut în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Deoarece pentru $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, avem

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

putem face direct în integrala iniţială înlocuirile

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

sau, deoarece funcţia $R(\cos x, \sin x)$ conţine numai puterile funcţiilor $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, şi $\sin x \cos x$, putem face direct în integrala iniţială înlocuirile

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Să observăm că integrala poate avea sens fără ca intervalul $[x_1, x_2]$ să fie conţinut în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, dacă $Q(\cos x, \sin x)$ nu se anulează pe intervalul de integrare.

În acest caz se procedează astfel:

b) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx,$$

unde $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg} x = t$.

c) $$\int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\, dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} R(\cos x, \sin x)\, dx,$$

unde $-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}$. Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg} x = t$.

$$\text{d)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\, dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} R(\cos x, \sin x)\, dx.$$

Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg} x = t$.

e) Dacă $(2k-1)\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k întreg, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{x_1-k\pi}^{x_2-k\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx$$

și $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 - k\pi < x_2 - k\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Integrala din membrul drept este de unul din tipurile precedente.

Într-adevăr, să facem în integrala inițială înlocuirea $x - k\pi = z$; atunci $x = z + k\pi$, $dx = dz$,

$$\cos^2 x = \cos^2(z + k\pi) = \cos^2 z,\ \sin^2 x = \sin^2(z + k\pi) = \sin^2 z,$$
$$\sin x \cos x = \sin(z + k\pi)\cos(z - k\pi) = \sin z \cos z.$$

Notînd $z_1 = x_1 - k\pi$, $z_2 = x_2 - k\pi$ avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} R^*(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x \cos x)\, dx =$$
$$= \int_{z_1}^{z_2} R^*(\cos^2 z, \sin^2 z, \sin z \cos z)\, dz = \int_{z_1}^{z_2} R(\cos z, \sin z)\, dz =$$
$$= \int_{x_1-k\pi}^{x_2-k\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx,$$

unde în ultima integrală am notat variabila de integrare din nou cu x în loc de z.

În particular,

$$\int_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\, dx.$$

f) Dacă intervalul de integrare $[x_1, x_2]$ este oarecare, integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx$$

este o sumă de integrale de tipurile precedente. Într-adevăr, să scriem în ordine crescătoare toate punctele de forma $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k întreg, cuprinse între x_1 şi x_2:

$$x_1 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n < x_2.$$

Pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n-1$ avem

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\, dx.$$

Atunci

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{x_1}^{z_1} R(\cos x, \sin x)\, dx + \int_{z_1}^{z_2} R(\cos x, \sin x)\, dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} R(\cos x, \sin x)\, dx + \int_{z_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx =$$

$$= \int_{x_1}^{z_1} R(\cos x, \sin x)\, dx + \int_{z_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx +$$

$$+ (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R \cos x, \sin x)\, dx.$$

Primele două integrale sînt de tipul e).

O b s e r v a ţ i e. Dacă se ia una din limitele de integrare variabilă, se obţine o primitivă a funcţiei $R(\cos x, \sin x)$ pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\int_0^x R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_0^{\operatorname{tg} x} R(t)\, dt.$$

Exemplu. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\, dx.$$

Aici

$$R(\cos x,\ \sin x) = \frac{1}{\sin x \cos x + 2} \quad \text{şi}$$

$$R(-\cos x,\ -\sin x) = R(\cos x,\ \sin x).$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$. Pentru aceasta despărţim integrala iniţială într-o sumă de integrale:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx +$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx +$$

$$+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} \frac{2}{\sin x \cos x + 2}\,dx.$$

Pentru ultima integrală se aplică schimbarea de variabilă

$$\operatorname{tg} x = t, \text{ deci } dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt,\ \sin x \cos x = \cos^2 x \operatorname{tg} x = \frac{1}{1+t^2}\,t = \frac{t}{1+t^2}.$$

Notînd $t_1 = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \lambda\right)$ şi $t_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$, avem

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} \frac{2}{\sin x \cos x + 2}\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{\frac{t}{1+t^2} + 2} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{2t^2 + t + 2}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t^2 + \frac{1}{2}t + 1}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}\,dt = \frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arc\,tg} \left.\frac{t + \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\right|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arc\,tg} \left.\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\right|_{t_1}^{t_2} = \frac{4}{\sqrt{15}}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{4t_2+1}{\sqrt{15}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{4t_1+1}{\sqrt{15}}\right).$$

Avem

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} t_1(\lambda) = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\lambda\right) = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} t_2(\lambda) = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right) = \infty,$$

deci

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg}\frac{4t_2+1}{\sqrt{15}} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg}\frac{4t_1+1}{\sqrt{15}} = -\frac{\pi}{2}.$$

Aşadar

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x\cos x+2}\,dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} \frac{2}{\sin x\cos x+2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{15}}\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{4t_2+1}{\sqrt{15}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{4t_1+1}{\sqrt{15}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{15}}.$$

III) *Înlocuirea* $\sin x = t$. Această înlocuire se poate folosi în cazul cînd funcţia $R(\cos x, \sin x)$ este impară în $\cos x$:

$$R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x).$$

Dacă $R(\cos x, \sin x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}$, unul din polinoamele $P(\cos x, \sin x)$ şi $Q(\cos x, \sin x)$ este impar în $\cos x$ (conţine numai puterile impare ale lui $\cos x$), iar celălalt este par în $\cos x$ (conţine numai puterile pare ale lui $\cos x$).

Dacă $P(-\cos x, \sin x) = -P(\cos x, \sin x)$, atunci

$Q(-\cos x, \sin x) = Q(\cos x, \sin x)$, deci

$P(\cos x, \sin x) = P_1(\cos^2 x, \sin x)\cos x$

$Q(\cos x, \sin x) = Q_1(\cos^2 x, \sin x)$

şi

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{P_1(\cos^2 x, \sin x)}{Q_1(\cos^2 x, \sin x)}\cos x = R_1(\cos^2 x, \sin x)\cos x.$$

Dacă $Q(-\cos x, \sin x) = -Q(\cos x, \sin x)$, atunci

$P(-\cos x, \sin x) = P(\cos x, \sin x)$, deci

$P(\cos x, \sin x) = P_1(\cos^2 x, \sin x)$,

$Q(\cos x, \sin x) = Q_2(\cos^2 x, \sin x)\cos x$

şi

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{P_1(\cos^2 x, \sin x)}{Q_1(\cos^2 x, \sin x)\cos x} = \frac{P_1(\cos^2 x, \sin x)}{Q_1(\cos^2 x, \sin x)\cos^2 x}\cos x =$$

$$= R_1(\cos^2 x, \sin x)\cos x.$$

Aşadar, în orice caz avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} R_1(\cos^2 x, \sin x)\cos x\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} R_1(1 - \sin^2 x, \sin x)(\sin x)'\,dx.$$

Se aplică prima formulă de schimbare de variabilă, făcînd înlocuirea

$$\sin x = t, \text{ deci } \cos x\,dx = dt.$$

Notînd $t_1 = \sin x_1$ şi $t_2 = \sin x_2$, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} R_1(1 - t^2, t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} R_2(t)\,dt,$$

unde R_2 este o funcţie raţională.

Am redus astfel integrala iniţială la o integrală raţională.

IV) *Înlocuirea* $\cos x = t$. Această înlocuire se poate folosi în cazul cînd funcţia $R(\cos x, \sin x)$ este impară în $\sin x$:

$$R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x).$$

Raţionînd ca în cazul precedent, deducem că

$$R(\cos x, \sin x) = R_1(\cos x, \sin^2 x)\sin x$$

şi deci

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} R_1(\cos x, \sin^2 x)\sin x\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} R_1(\cos x, 1 - \cos^2 x)(-\cos x)'\,dx.$$

Se aplică prima formulă de schimbare de variabilă, făcînd înlocuirea

$$\cos x = t, \text{ deci } -\sin x\,dx = dt.$$

Notînd $t_1 = \cos x_1$ şi $t_2 = \cos x_2$, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t, 1 - t^2)(-dt) = \int_{t_1}^{t_2} R_2(t)\, dt,$$

unde R_2 este o funcţie raţională.

Am redus astfel şi în acest caz integrala iniţială la o integrală raţională.

Exemple. 1) $\displaystyle\int_0^{5\pi} \cos^2 x \sin^5 x dx = \int_0^{5\pi} \cos^2 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x dx.$

Se face înlocuirea $\cos x = t$, deci $-\sin x dx = dt$.
Avem $t_1 = \cos 0 = 1$, şi $t_2 = \cos 5\pi = \cos \pi = -1$. Atunci

$$\int_0^{5\pi} \cos^2 x \cdot \sin^4 x dx = -\int_1^{-1} t^2(1 - t^2)^2 dt = \int_{-1}^{1} (t^6 - 2t^4 + t^2) dt =$$

$$= \left(\frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{7} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{105}.$$

$$2) \quad \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x} \cos x\, dx.$$

Se face înlocuirea $\sin x = t$, deci $\cos x\, dx = dt$.

Avem $t_1 = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, $t_2 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Atunci

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x} \cos x\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + t}{1 - t}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\ln 3 - \ln \frac{1}{3}\right] = \ln 3.$$

4. Integrale de funcţii iraţionale

În mod obişnuit se numesc integrale iraţionale, integralele funcţiilor la care variabila apare sub radical.

1) *Integralele de forma:*

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx,$$

unde $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ este o funcţie raţională de două variabile, sînt reductibile la integrale raţionale.

Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcţia de integrat să fie definită pe intervalul de integrare, se impun condiţiile:

1) $Q\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$;

2) $cx + d \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$; în cazul cînd $c \neq 0$, această condiţie înseamnă $-\frac{d}{c} \notin [x_1, x_2]$;

3) $\frac{ax+b}{cx+d} \geqslant 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă n este par.

Vom impune în plus condiţia

4) $ad \neq bc$.

(Dacă $ad = bc$, funcţia $\frac{ax+b}{cx+d}$ este *constantă*, şi integrala este raţională, astfel încît se calculează direct.) Pentru calculul integralei se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t, \text{ adică } \frac{ax+b}{cx+d} = t^n.$$

Cînd x parcurge intervalul $I = [x_1, x_2]$, t parcurge un *interval* J, deoarece funcţia $\frac{ax+b}{cx+d}$ este *continuă* pe I. Să observăm că $a - ct^n \neq 0$ pentru orice $t \in J$. Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că ar exista un punct $x_0 \in I$, astfel încît pentru punctul corespunzător $t_0 \in J$ să avem $a - ct_0^n = 0$.

Dacă $c \neq 0$, atunci $t_0^n = \frac{a}{c}$, deci

$$\frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} = t_0^n = \frac{a}{c},$$

de unde rezultă că $ad = bc$, ceea ce iarăşi contrazice ipoteza 4).

Dacă $c = 0$, atunci avem şi $a = 0$ şi deci $ad = 0$ şi $bc = 0$, adică $ad = bc$, ceea ce iarăşi contrazice ipoteza 4).

Înlocuirea precedentă stabileşte o corespondenţă biunivocă între intervalele I şi J; considerată ca o ecuaţie în x, are o singură soluţie în I pentru fiecare $t \in J$. Într-adevăr, din

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

deducem

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} = r(t),$$

unde $r(t)$ este o funcţie raţională definită pe întreg intervalul J (deoarece $a - ct^n \neq 0$ pentru $t \in J$). Atunci

$$dx = r'(t)\,dt,$$

unde $r'(t)$ este de asemenea o funcţie raţională pe J.

Notînd $t_1 = \sqrt[n]{\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}}$ şi $t_2 = \sqrt[n]{\frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}}$, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx = \int_{t_1}^{t_2} R(r(t), t)\, r'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)\,dt,$$

unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională.

Am redus astfel integrala iniţială la o integrală raţională, care se poate calcula.

Observaţie. Luînd una din limitele de integrare variabilă, se obţine o primitivă a funcţiei de integrat, pe intervalul $[x_1, x_2]$:

$$\int_{x_1}^{x} R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx = \int_{t_1}^{\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}} R_1(t)\,dt.$$

Cazuri particulare

a) Integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt[n]{ax + b})\,dx$$

este de forma precedentă, cu $c = 0$ şi $d = 1$.

Condiţia 2) $cx + d \neq 0$ este verificată de la sine, deoarece $cx + d \equiv 1$.

Condiţia 4) $ad \neq bc$ devine în acest caz

$$a \neq 0,$$

deoarece $ad = a$ şi $bc = 0$.

Se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{ax + b} = t \text{ adică } ax + b = t^n$$

şi integrala se reduce la o integrală raţională.

b) Integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n]{x}\right) dx$$

este de asemenea de forma precedentă cu $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ şi $d = 1$. Condiţia 2) $cx + d \neq 0$ şi condiţia 4) $ad \neq bc$ sînt verificate de la sine.

Condiția 3) $\frac{ax+b}{cx+d} \geqslant 0$ devine în acest caz $x \geqslant 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$ adică $0 \leqslant x_1 < x_2$, dacă n este par.

Se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{x} = t, \text{ adică } x = t^n$$

și integrala se reduce la o integrală rațională.

Exemple. 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\frac{7}{9}}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}\,dx.$$

Integrala este definită pe intervalul de integrare, deoarece numitorul nu se anulează pe acest interval, iar radicalii de ordin impar au sens și pentru numere negative.

Integrala se poate scrie astfel

$$I = \int_{-\frac{7}{9}}^{0} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{1}{x+1}\,dx.$$

Se face înlocuirea

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t, \text{ deci } x = \frac{t^3+1}{t^3-1},$$

$$x+1 = \frac{2t^3}{t^3-1} \text{ și } dx = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt.$$

Limitele de integrare:

$$t_1 = -\frac{1}{2},\quad t_2 = -1. \text{ Atunci}$$

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} t\cdot\frac{t^3-1}{2t^3}\cdot\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{-3}{t^3-1}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\left(\frac{-1}{t-1} +\right.$$

$$\left. + \frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} - \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}.$$

2) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\, dx.$$

Se face înlocuirea $\sqrt{x+1} = t$, deci $x + 1 = t^2$ şi $x = t^2 - 1$, iar $dx = 2t\, dt$. Limitele de integrare: $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.
Atunci

$$I = \int_0^1 \frac{t}{1+t} 2t\, dt = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t}\, dt = \int_0^1 \left(2t - 2 + \frac{2}{1+t}\right) dt =$$

$$= (t^2 - 2t + 2 \ln (1+t)) \Big|_0^1 = 1 - 2 + 2 \ln 2 = -1 + 2 \ln 2.$$

3) Integrala $\int_{-2}^{0} \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\, dx$ nu are sens, deoarece $\sqrt{x+1}$ nu are sens pentru $x < -1$.

4) Integrala $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}\, dx$ nu are sens (deocamdată), deoarece numitorul se anulează la capetele intervalului de integrare.

II) *Integralele de forma:*

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) dx$$

unde $R(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}) = \frac{P(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})}{Q(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})}$ este o funcţie raţională de $k+1$ variabile, iar $n_1, n_2, \ldots, n_k, m_1, m_2, \ldots, m_k$ sînt numere naturale, sînt reductibile la integrale raţionale.

Pentru ca integrala să aibă sens, se impun următoarele condiţii:

1) $Q\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$.

2) $cx + d \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$.

3) $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă unul din numerele $n_1, n_2, \ldots, n_k$ este par.

Se impune în plus condiţia

4) $ad \neq bc$,

care asigură că funcţia $\frac{ax+b}{cx+d}$ nu este constantă.

Fie n *cel mai mic multiplu comun* al numerelor $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Numărul n este par dacă şi numai dacă unul din numerele $n_1, n_2, \ldots, n_k$ este par.

Notînd $\frac{n}{n_1} = p_1, \ldots, \frac{n}{n_k} = p_k$, numerele $p_1, \ldots, p_k$ sînt naturale, şi pentru $i = 1, 2, \ldots, k$ avem:

$$\sqrt[n_i]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_i}} = \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_i p_i}} = \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)^{m_i p_i}.$$

Atunci

$$R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) =$$

$$= R\left[x, \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)^{m_1 p_1}, \ldots, \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)^{m_k p_k}\right] = R_1\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

unde R_1 este o funcție rațională, şi astfel integrala inițială s-a redus la integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R_1\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

care este de tipul precedent. Se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \quad \text{adică} \frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

unde n este cel mai mic multiplu comun al indicilor radicalilor, $n_1, n_2, \ldots, n_k$, şi integrala se reduce la o integrală rațională.

Pentru integrala de forma

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{(ax+b)^{m_k}}\right) dx$$

se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{ax+b} = t, \quad \text{adică } ax+b = t^n,$$

iar pentru integrala de forma

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right) dx$$

se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{x} = t \text{ adică } x = t^n.$$

1—63

Exemple. 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{\frac{1}{64}}^{1} \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}\,dx.$$

Se face înlocuirea $\sqrt[6]{x} = t$, $(t \geqslant 0)$, deci $x = t^6$ și $dx = 6t^5 dt$.

Avem

$\sqrt{x} = t^3$ și $\sqrt[3]{x^2} = t^4$. Limitele de integrare: $t_1 = \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$, $t_2 = \sqrt[6]{1} = 1$.

Atunci

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^6-1}{t^6(t^3+t^4)} 6t^5 dt = 6\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^6-1}{t^4(t+1)} dt = 6\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^5-t^4+t^3-t^2+t-1}{t^4} dt =$$

$$= 6\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(t - 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4}\right) dt = 6\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln t + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= 6\left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - 6\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} + 2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{-47}{4} + 6\ln 2.$$

2) Integrala $\int_0^1 \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}\,dx$ nu are sens, deoarece numitorul se anulează în punctul 0 din intervalul de integrare, și în jurul acestui punct funcția de integrat este nemărginită.

3) Să se calculeze

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+1}\,dx.$$

Funcția de integrat este definită pe intervalul de integrare. Se face schimbarea $\sqrt[6]{x+1} = t$, $(t \geqslant 0)$, deci $x = t^6 - 1$ și $dx = 6t^5 dt$.

Avem

$\sqrt{x+1} = t^3$ și $\sqrt[3]{x+1} = t^2$. Limitele de integrare

$$t_1 = \sqrt[6]{-1+1} = 0; \quad t_2 = \sqrt[6]{0+1} = 1.$$

Atunci

$$I = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1} 6t^5 \mathrm{d}t = 6\int_0^1 \frac{t^8}{t^2+1} \mathrm{d}t = 6\int_0^1 \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arc\,tg} t\right)\Big|_0^1 = 6\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1 + \operatorname{arc\,tg} 1\right) = -\frac{152}{35} + \frac{3}{2}\pi.$$

4) Integrala $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1} \mathrm{d}x$ nu are sens, deoarece pe intervalul $[-2, -1]$, conținut în intervalul de integrare, funcția de integrat nu este definită (din cauză că funcția $\sqrt{x+1}$ nu este definită).

5) Integrala $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}+2} \mathrm{d}x$ este definită pe intervalul de integrare deoarece numitorul nu se anulează, iar $\sqrt[3]{x+1}$ are sens și dacă $x + 1 < 0$. Se face schimbarea

$$\sqrt[3]{x+1} = t \text{ (}t\text{ poate fi și pozitiv și negativ)},$$

deci

$$x = t^3 - 1 \text{ și } \mathrm{d}x = 3t^2 \mathrm{d}t. \text{ Limitele de integrare}$$

$$t_1 = \sqrt[3]{-2+1} = -1,\ t_2 = \sqrt[3]{0+1} = 1.$$

Atunci

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{t+2} 3t^2 \mathrm{d}t = 3\int_{-1}^{1} \left(t - 2 + \frac{4}{t+2}\right) \mathrm{d}t = 3\left(\frac{t^2}{2} - 2t + 4\ln(t+2)\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 12(\ln 3 - 1).$$

III) *Integralele de forma:*

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x,$$

unde $R(u, v) = \dfrac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ este o funcție rațională de două variabile, sînt reductibile la integrale raționale. Pentru ca integrala să aibă sens, se impun următoarele condiții:

1) $Q\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$.

2) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$.

Se impun în plus condițiile

3) $a \neq 0$ și $b^2 - 4ac \neq 0$, adică trinomul $ax^2 + bx + c$ este de gradul doi și nu are rădăcinile egale.

Dacă $a = 0$, integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{bx + c})\, dx$$

şi este de tipul I. Prin înlocuirea $\sqrt{bx + c} = t$ se reduce la o integrală raţională.

Dacă $b^2 - 4ac = 0$, trinomul $ax^2 + bx + c$ are rădăcini egale:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$$

şi $a \geqslant 0$ (deoarece $ax^2 + bx + c) \geqslant 0$ şi $(x - \alpha)^2 \geqslant 0$). În acest caz integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{a}(x - \alpha))\, dx = \int_{x_1}^{x_2} R_1(x)\, dx,$$

adică este o integrală raţională.

Pentru calculul integralei vom deosebi trei cazuri:

a) *Cazul* $a > 0$. În acest caz se face înlocuirea $\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}x = t$ adică $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$.

Cînd x parcurge intervalul $I = [x_1, x_2]$, t parcurge un *interval* J, deoarece funcţia $\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}x$ este *continuă* pe I.

Să observăm că $b - 2\sqrt{a}t \neq 0$ pentru orice $t \in J$, adică t nu poate lua valoarea $\frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Într-adevăr, dacă ar exista un punct $x_0 \in I$ astfel ca pentru punctul corespunzător t_0 să avem $b - 2\sqrt{a}\, t_0 = 0$ adică $t_0 = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, atunci

$$\sqrt{ax_0^2 + bx_0 + c} = \sqrt{a}x_0 + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

şi, ridicînd la pătrat,

$$ax_0^2 + bx_0 + c = ax_0^2 + bx_0 + \frac{b^2}{4a},$$

adică $c = \frac{b^2}{4a}$ sau $b^2 - 4ac = 0$, ceea ce contrazice condiţia 3).

Egalitatea $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ stabileşte o corespondenţă biunivocă între intervalele I şi J. Considerată ca o ecuaţie în x, are o singură soluţie în I pentru fiecare valoare a lui $t \in J$. Într-adevăr, să observăm că, deoarece $\sqrt{ax^2 + bx + c} \geqslant 0$, avem de asemenea $\sqrt{a}x + t \geqslant 0$. Prin ridicare la pătrat obţinem:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2$$

sau

$$bx + c = 2\sqrt{a}\,xt + t^2,$$

de unde

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\,t} = r(t),$$

unde $r(t)$ este o funcţie *raţională* definită pe J $\left(\text{deoarece } t \neq \frac{b}{2\sqrt{a}}, \text{ pentru } t \in J\right)$.

Deoarece ecuaţia iniţială are ambii membri *pozitivi*, iar ecuaţia obţinută prin ridicare la pătrat are soluţia $x = r(t)$, rezultă că şi ecuaţia iniţială are soluţia $x = r(t)$.
Atunci

$$\mathrm{d}x = r'(t)\mathrm{d}t,$$

unde $r'(t)$ este de asemenea o funcţie raţională pe J, şi

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}r(t) + t.$$

Notînd $t_1 = \sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} - \sqrt{a}x_1$ şi $t_2 = \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c} - \sqrt{a}x_2$, avem:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} R[r(t),\ \sqrt{a}r(t) + t]r'(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)\mathrm{d}t,$$

unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională. Am redus astfel integrala iniţială la o integrală raţională care se poate calcula.

Observaţii. 1° Dacă trinomul $ax^2 + bx + c$ are rădăcini complexe şi $a > 0$, condiţia $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ este verificată de la sine.

În cazul cînd trinomul are rădăcini reale şi distincte, $\alpha < \beta$, condiţia $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ este îndeplinită dacă rădăcinile sînt de aceeaşi parte a intervalului de integrare, adică dacă:

$$x_1 < x_2 < \alpha \text{ sau } \beta < x_1 < x_2.$$

2° În cazul cînd $a > 0$ se poate de asemenea folosi una din înlocuirile

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{a}x + t,\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x - t$$

sau

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{a}x - t.$$

b) *Cazul* $b^2 - 4ac > 0$. În acest caz trinomul $ax^2 + bx + c$ are rădăcini reale şi distincte, $\alpha < \beta$, deci

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Vom impune condiţia ca cel puţin una dintre rădăcini, de exemplu α, să nu aparţină intervalului de integrare. Atunci $x - \alpha \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, şi

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}\,|x - \alpha|$$

iar integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx = \int_{x_1}^{x_2} R_1\left(x, \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}\right) dx$$

şi este de tipul I. Se face înlocuirea

$$\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}} = t, \quad (t \geqslant 0)$$

şi integrala se reduce la o integrală raţională. Se poate face direct înlocuirea următoare (care rezultă din cea precedentă):

$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\,t$, ($t \geqslant 0$ dacă $x > \alpha$ sau $t \leqslant 0$ dacă $x < \alpha$), adică

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t,$$

care este mai uşor de reţinut.

O b s e r v a ţ i i. Dacă $\alpha \notin [x_1, x_2]$, se poate face înlocuirea

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = a(x - \alpha)t.$$

Dacă $\beta \notin [x_1, x_2]$, se poate face una din înlocuirile

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \beta)t \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = a(x - \beta)t.$$

c) *Cazul* $c > 0$. În acest caz se face înlocuirea

$$u(x) = t,$$

unde funcţia $u(x)$ este definită pe $I = [x_1, x_2]$, astfel:

$$u(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x} \text{ dacă } x \neq 0,\ x \in [x_1, x_2],$$

şi $u(0) = \frac{b}{2\sqrt{c}}$ dacă $0 \in [x_1, x_2]$.

Funcţia $u(x)$ este continuă pe întreg intervalul I. În punctele $x \neq 0$ acest fapt este evident. Să arătăm că, dacă $0 \in I$, funcţia $u(x)$ este continuă în 0, adică

$$\lim_{x \to 0} u(x) = u(0) = \frac{b}{2\sqrt{c}}.$$

Pentru $x \neq 0$ avem

$$\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x} = \frac{ax^2+bx+c-c}{x[\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}]} =$$

$$= \frac{ax^2+bx}{x[\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}]} = \frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}},$$

deci

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0} \frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}} = \frac{b}{2\sqrt{c}} = u(0).$$

Egalitatea $u(x) = t$ se scrie

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx,$$

valabilă pentru orice $x \in I$ (chiar pentru $x = 0$).

Cînd x parcurge pe $I = [x_1, x_2]$, t parcurge un interval $J = u(I)$. Corespondenţa stabilită de ultima egalitate este biunivocă, această egalitate considerată ca o ecuaţie în x are o singură soluţie în I pentru fiecare $t \in J$.

Într-adevăr, dacă $t = \frac{b}{2\sqrt{c}}$, avem

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}x$$

sau

$$ax^2+bx+c = c+bx+\frac{b^2}{4c}x^2$$

sau

$$\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)x = 0,$$

şi deoarece am presupus $b^2 - 4ac \neq 0$, rezultă

$$x = 0.$$

Dacă $t \neq \frac{b}{2\sqrt{c}}$, adică $x \neq 0$, prin ridicare la pătrat obţinem

$$ax^2+bx+c = (\sqrt{c}+tx)^2 = c+2\sqrt{c}tx+t^2x^2,$$

adică

$$ax^2+bx = 2\sqrt{c}tx+t^2x^2$$

şi împărţind cu $x \neq 0$,

$$ax+b = 2\sqrt{c}t+t^2x,$$

de unde

$$(a-t^2)x = 2\sqrt{c}t-b.$$

Să observăm că $t^2 \neq a$, oricare ar fi $t \in J$. Într-adevăr, dacă ar exista un punct $x_0 \neq 0$ din I, astfel ca pentru punctul corespunzător $t_0 \in J$ să avem $t_0^2 \neq a$, atunci $a \geqslant 0$ şi $t_0 = \sqrt{a}$ şi înlocuind în ultima egalitate am obţine

$$0 = 2\sqrt{c}\,\sqrt{a} - b$$

sau $b = 2\sqrt{a}\,\sqrt{c}$ adică $b^2 = 4ac$, ceea ce contrazice condiţia 3).

Din egalitatea de mai sus deducem

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2} = r(t)$$

şi această egalitate este valabilă chiar pentru $t = \frac{b}{2\sqrt{c}}$ şi $x = 0$. Funcţia raţională $r(t)$ este deci definită pe tot intervalul J.
Atunci

$$dx = r'(t)dt,$$

unde $r'(t)$ este o funcţie raţională definită pe J, şi

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tr(t),$$

fie că $x \neq 0$, fie că $x = 0$.
Notînd

$$t_1 = \frac{\sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} - \sqrt{c}}{x_1} \text{ sau } t_1 = \frac{b}{2\sqrt{c}}$$

(după cum $x_1 \neq 0$ sau $x_1 = 0$) şi

$$t_2 = \frac{\sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c} - \sqrt{c}}{x_2} \text{ sau } t_2 = \frac{b}{2\sqrt{c}}$$

(după cum $x_2 \neq 0$ sau $x_2 = 0$), integrala iniţială devine

$$I = \int_{t_1}^{t_2} R\,[r(t),\ \sqrt{c} + tr(t)]r'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)dt,$$

unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională. Am redus integrala iniţială la o integrală raţională care se poate efectua.

O b s e r v a ţ i i. 1° În aplicaţiile practice, nu ne mai preocupăm de faptul dacă 0 aparţine sau nu intervalului de integrare; se face înlocuirea

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx$$

şi se fac calculele ca şi cînd $x \neq 0$.

Se poate face de asemenea înlocuirea

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - tx.$$

2° Dacă $0 \notin [x_1, x_2]$ se poate folosi una din înlocuirile

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{c} + tx \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{c} - tx.$$

3° Este posibil ca în acelaşi timp trinomul $ax^2 + bx + c$ să aibă rădăcini reale şi distincte ($b^2 - 4ac > 0$) şi să fie îndeplinite condiţiile $a > 0$ şi $c > 0$. Atunci se poate efectua una oarecare din înlocuirile indicate în aceste cazuri.

Exemple. 1) Să se calculeze integrala $I = \int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}\, dx$.

a) Coeficientul lui x^2 este 1; sîntem în cazul $a > 0$. Se face, de exemplu, înlocuirea

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = -\sqrt{1}x + t.$$

Ridicînd la pătrat obţinem

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2xt + t^2$$

sau

$$-x + 1 = -2xt + t^2, \text{ de unde}$$

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1},\ dx = 2\frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2}\, dt$$

şi

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t^2 - t + 1}{2t - 1}.$$

Limitele de integrare: $t_1 = 1$ şi $t_2 = 2$. Atunci

$$I = \int_1^2 \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t - 1)^2}\, dt = \int_1^2 \left[\frac{2}{t} - \frac{3}{2t - 1} + \frac{3}{(2t - 1)^2}\right] dt =$$

$$= \left(2 \ln |t| - \frac{3}{2} \cdot \ln |2t - 1| - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t - 1}\right)\Big|_1^2 = \ln\frac{4}{\sqrt{27}} + 1.$$

b) Termenul liber este 1; sîntem şi în cazul $c > 0$. Se face, de exemplu, înlocuire

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{1} - tx.$$

Ridicînd la pătrat, obţinem

$$x^2 - x + 1 = 1 - 2tx + t^2x^2$$

sau

$$x^2 - x = -2tx + t^2x^2$$

sau

$$x - 1 = -2t + t^2x,$$

de unde

$$x = \frac{2t - 1}{t^2 - 1}$$

şi

$$dx = -2\frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2}dt,$$

iar

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = -\frac{t^2 - t + 1}{t^2 - 1}.$$

Limitele de integrare

$$t_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{-x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{1}{2}, \text{ iar } t_2 = 0.$$

Atunci

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{2t^2 - 2t + 2}{(t - 2)(t + 1)(t - 1)^2}dt = \int_{\frac{1}{2}}^{0}\left\{\frac{2}{t - 2} - \frac{1}{2(t + 1)} - \frac{3}{2(t - 1)} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(t - 1)^2}\right\}dt = \left(2\ln|t - 2| - \frac{1}{2}\ln|t + 1| - \frac{3}{2}\ln|t - 1| + \frac{1}{t - 1}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{0} =$$

$$= \ln\frac{4}{\sqrt{27}} + 1.$$

Observaţie. Înlocuirea $\sqrt{x^2 - x + 1} = -\sqrt{1} + tx$ nu se poate folosi din cauză că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x}$ nu există. Această înlocuire se poate folosi dacă intervalul de integrare nu conţine pe 0.

2) Să se calculeze integrala

$$I = \int_5^6\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}dx.$$

a) Coeficientul lui x^2 este 1. Sîntem în cazul III, 3, $a > 0$. Se face înlocuirea $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{1}x - t$. Ridicînd la pătrat, obţinem

$$x^2 - 4 = x^2 + t^2 - 2xt,$$

de unde

$$-4 = t^2 - 2xt$$

sau

$$x = \frac{t^2 + 4}{2t}.$$

Atunci

$$dx = \frac{t^2 - 4}{2t^2}dt$$

şi

$$\sqrt{x^2 - 4} = -\frac{t^2 - 4}{2t}.$$

Limitele de integrare $t_1 = 5 - \sqrt{21}$, $t_2 = 6 - \sqrt{32}$.
Integrala devine

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{-2t}{t^2-4} \cdot \frac{t^2-4}{2t^2}\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t|\Big|_{t_1}^{t_2} = -\ln\frac{t_2}{t_1} = -\ln\frac{6-\sqrt{32}}{5-\sqrt{21}}.$$

b) Trinomul are rădăcinile reale și distincte -2 și 2. Sîntem în cazul III, 2. Se face înlocuirea

$$\sqrt{x^2-4} = (x-2)t,$$

de unde

$$x^2 - 4 = (x-2)^2t^2$$

sau

$$x + 2 = (x-2)t^2,$$

deci

$$x = \frac{2t^2+2}{t^2-1}$$

și

$$dx = \frac{-8t}{(t^2-1)^2}\,dt,$$

iar

$$\sqrt{x^2-4} = \frac{4t}{t^2-1}.$$

Limitele de integrare $t_1 = \frac{\sqrt{21}}{3}$, $t_2 = \sqrt{2}$.

Atunci

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^2-1}{4t} \frac{-8t}{(t^2-1)^2}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{-2}{t^2-1}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt =$$

$$= \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Big|_{t_1}^{t_2} = \ln\left|\frac{t_2+1}{t_2-1}\right| - \ln\left|\frac{t_1+1}{t_1-1}\right| = \ln\frac{(t_2+1)(t_1-1)}{(t_2-1)(t_1+1)} =$$

$$= \ln\frac{(\sqrt{2}+1)\left(\frac{\sqrt{21}}{3}-1\right)}{(\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{21}}{3}+1\right)} = \ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{21}-3)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{21}+3)}.$$

IV) *Integralele binome* sînt de forma:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt[m]{x^{m'}} \sqrt[p]{(a\sqrt[n]{x^{n'}} + b)^{p'}}\,dx$$

unde m', n', p' sînt numere întregi. Presupunem fracțiile $\frac{m'}{m}$, $\frac{n'}{n}$, $\frac{p'}{p}$ ireductibile.

Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcţia de integrat să fie definită pe $[x_1, x_2]$, se impun următoarele condiţii:

1) $x \geqslant 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă unul din numerele m sau n este par; această condiţie este echivalentă cu condiţia

$$0 \leqslant x_1 < x_2$$

(dacă, de exemplu, m este par, trebuie ca $x^{m'} \geqslant 0$ şi deoarece fracţia $\frac{m'}{m}$ este ireductibilă, m' este impar, deci trebuie ca $x \geqslant 0$).

2) $x \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă unul din numerele m' şi n' este $\leqslant 0$; această condiţie este echivalentă cu condiţia

$$0 \notin [x_1, x_2].$$

3) $a\sqrt[n]{x^{n'}} + b \geqslant 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă p este par.

4) $a\sqrt[n]{x^{n'}} + b \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă $p' \leqslant 0$.

Vom impune de asemenea condiţia

5) $a \neq 0$ şi $b \neq 0$.

Dacă $a = 0$, integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} k\sqrt[m]{x^{m'}}\,\mathrm{d}x,$$

unde $k = \sqrt[p]{b^{p'}}$ şi se calculează direct, deoarece se cunoaşte o primitivă a funcţiei $x^{m'}$ (sau e face înlocuirea $\sqrt[m]{x} = t$ şi se reduce la o integrală raţională).

Dacă $b = 0$, integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} k' \sqrt[m]{x^{m'}} \sqrt[np]{x^{n'p'}}\,\mathrm{d}x,$$

unde $k' = \sqrt[p]{a^{p'}}$ şi este o integrală de tipul II. Se face înlocuirea $\sqrt[r]{x} = t$ adică $x = t^r$ unde $r = mnp$, şi se reduce la o integrală raţională.

Condiţiile $a \neq 0$ şi $b \neq 0$ s-au impus pentru a înlătura cazurile deja tratate.

Notînd $\alpha = \frac{m'}{m}$, $\beta = \frac{n'}{n}$, $\gamma = \frac{p'}{p}$, integrala se scrie

$$I = \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha}(ax^{\beta} + b)^{\gamma}\mathrm{d}x.$$

Vom deosebi trei cazuri în care integrala binomă se reduce la o integrală rațională.

a) Cazul cînd γ este întreg.

Deoarece fracția $\gamma = \frac{p'}{p}$ este ireductibilă, condiția ca γ să fie întreg revine la aceea ca $p = 1$ sau $p = -1$. Notînd $\varepsilon = 1$ dacă $p = 1$ și $\varepsilon = -1$ dacă $p = -1$, avem $\gamma = \varepsilon p'$ și integrala se scrie

$$I = \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha}(ax^{\beta} + b)^{\varepsilon p'} \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt[m]{x^{m'}}\, (a\sqrt[n]{x^{n'}} + b)^{\varepsilon p'} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} R\,(\sqrt[m]{x^{n'}},\ \sqrt[n]{x^{n'}})\mathrm{d}x,$$

unde $R(u, v)$ este o funcție rațională de două variabile, deci, în acest caz integrala este de tipul II. Se face înlocuirea

$$\sqrt[r]{x} = t \text{ adică } x = t^r,$$

unde r este un multiplu comun al numitorilor lui α și β, de exemplu $r = mn$, și se reduce la o integrală rațională, care se poate calcula.

b) Cazul cînd $\frac{\alpha + 1}{\beta}$ este întreg.

În acest caz se face înlocuirea

$$\sqrt[p]{ax^{\beta} + b} = t \text{ adică } ax^{\beta} + b = t^p,$$

unde p este numitorul lui γ, și se reduce la o integrală rațională, care se poate efectua.

Într-adevăr, să facem mai întîi înlocuirea

$$x^{\beta} = z, \text{ deci } x = z^{\frac{1}{\beta}} \text{ și } \mathrm{d}x = \frac{1}{\beta} z^{\frac{1}{\beta} - 1} \mathrm{d}z.$$

Notînd $z_1 = x_1^{\beta}$ și $z_2 = x_2^{\beta}$, integrala devine

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\beta} z^{\frac{\alpha+1}{\beta} - 1} (az + b)^{\gamma} \mathrm{d}z = \int_{z_1}^{z_2} R(z, (az + b)^{\gamma}) \mathrm{d}z =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} R[z, \sqrt[p]{(az + b)^{p'}}]\, \mathrm{d}z,$$

unde $R(u, v)$ este o funcţie raţională de două variabile $\left(\frac{\alpha+1}{\beta} - 1 \text{ este întreg}\right)$; integrala obţinută este de tipul I. Se face acum înlocuirea

$$\sqrt[p]{az + b} = t \text{ adică } az + b = t^p$$

şi se reduce la o integrală raţională care se poate calcula. Aplicarea celor două înlocuiri succesive

$$x^\beta = z \text{ şi } az + b = t^p$$

este echivalentă cu aplicarea directă a înlocuirii

$$ax^\beta + b = t^p.$$

c) Cazul cînd $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma$ este întreg.

În acest caz se face înlocuirea

$$\sqrt[p]{\frac{ax^\beta + b}{x^\beta}} = t \text{ adică } \frac{ax^\beta + b}{x^\beta} = t^p \text{ sau } ax^\beta + b = x^\beta t^p,$$

unde p este numitorul lui γ. Pentru a putea folosi această înlocuire trebuie să presupunem că $x \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, adică $0 \notin [x_1, x_2]$. Înlocuirea aceasta ne duce la o integrală raţională, care se poate calcula.

Într-adevăr, avem

$$I = \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha (ax^\beta + b)^\gamma \,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha [x^\beta (a + bx^{-\beta})]^\gamma \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha+\beta\gamma} (bx^{-\beta} + a)^\gamma \,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha'} (bx^{\beta'} + a)^\gamma \,\mathrm{d}x,$$

unde $\alpha' = \alpha + \beta\gamma$ şi $\beta' = -\beta$. Ultima integrală este de tipul precedent, adică $\frac{\alpha'+1}{\beta'}$ este întreg. Într-adevăr:

$$\frac{\alpha'+1}{\beta'} = \frac{\alpha + \beta\gamma + 1}{-\beta} = -\left(\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma\right),$$

iar $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma$ este întreg, prin ipoteză. Dacă în ultima integrală se face înlocuirea

$$bx^{\beta'} + a = t^p,$$

unde p este numitorul lui γ, se obține o integrală rațională. Dar înlocuirea aceasta înseamnă

$$bx^{-\beta} + a = t^p \text{ sau } ax^\beta + b = x^\beta t^p.$$

Observație. Matematicianul rus Cebîșev a demonstrat că cele trei cazuri expuse mai sus sînt singurele cazuri în care o integrală binomă se poate reduce la o integrală rațională.

Exemple. 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_1^{64} \frac{(\sqrt[6]{x} - 1)^2}{\sqrt[6]{x^7}} dx.$$

Integrala se scrie

$$I = \int_1^{64} x^{-\frac{7}{6}}\left(x^{\frac{1}{6}} - 1\right)^2 dx,$$

unde $\alpha = -\frac{7}{6}$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = 2$. Aici γ este întreg. (Integrala este de tipul IV, 1). Se face înlocuirea $x = t^6$ deci $dx = 6\,t^5\,dt$. Avem

$$t = \sqrt[6]{x} \text{ deci } t_1 = \sqrt[6]{1} = 1 \text{ și } t_2 = \sqrt[6]{64} = 2. \text{ Atunci}$$

$$I = \int_1^2 t^{-7}(t-1)^2\, 6\,t^5\, dt = 6\int_1^2 \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2} dt =$$

$$= 6\int_1^2 \left(1 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt = 6\left(t - \ln t^2 - \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^2 = 9 - 12\ln 2.$$

2) Să se calculeze integrala

$$I = \int_1^{16} \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{16} x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right)^{\frac{1}{3}} dx.$$

Este o integrală binomă cu $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{3}$. Avem

$$\frac{\alpha + 1}{\beta} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{4}} = 2, \text{ întreg. Se face schimbarea}$$

$$x^{\frac{1}{4}} + 1 = t^3, \text{ deci } x = (t^3 - 1)^4 \text{ și } dx = 12t^2(t^3 - 1)^3\, dt.$$

Avem $t = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{4}} + 1}$, deci $t_1 = \sqrt[3]{1+1} = \sqrt[3]{2}$, $t_2 = \sqrt[3]{2+1} = \sqrt[3]{3}$. Atunci

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (t^3 - 1)^{-2}\, t \cdot 12t^2 (t^3 - 1)^3 \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} 12\, t^3 (t^3 - 1)\, \mathrm{d}t =$$

$$= 12 \int_{t_1}^{t_2} (t^6 - t^3)\, \mathrm{d}t = 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) \Bigg|_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} = 12 \left(\frac{9\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{2}}{7} - \frac{3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}}{4} \right) =$$

$$= \frac{45}{7}\sqrt[3]{3} - \frac{6}{7}\sqrt[3]{2}.$$

3) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-1}^{-2} \frac{\sqrt[3]{(2x^3 + 1)^2}}{x^6}\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{-2} x^{-6} (2x^3 + 1)^{\frac{2}{3}}\, \mathrm{d}x.$$

Este o integrală binomă cu $\alpha = -6$, $\beta = 3$ şi $\gamma = \frac{2}{3}$. Avem

$\frac{\alpha + 1}{\beta} + \gamma = \frac{-6 + 1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-5}{3} + \frac{2}{3} = -1$, întreg. Se face înlocuirea

$$2x^3 + 1 = x^3 t^3, \text{ adică } 2 + \frac{1}{x^3} = t^3, \text{ de unde}$$

$$-\frac{3}{x^4}\, \mathrm{d}x = 3t^2\, \mathrm{d}t.$$

Avem $t = \sqrt[3]{2 + \frac{1}{x^3}}$, deci $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{\sqrt[3]{15}}{2}$. Atunci

$$I = \int_{-1}^{-2} x^{-6} x^2 \left(2 + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{-2} x^{-4} \left(2 + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} \mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} t^2 \cdot t^2\, \mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} t^4\, \mathrm{d}t = -\frac{t^5}{5}\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \frac{t_1^5 - t_2^5}{5} = \frac{32 - 15\sqrt[3]{15^2}}{5 \cdot 32}.$$

4) Integrala $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[3]{(2x^2 + 1)^2}}{x^6}\, \mathrm{d}x$ nu are sens, deoarece funcţia nu este definită în punctul 0 din intervalul de integrare şi este nemărginită în jurul acestui punct.

5) Integrala $\int_{-1}^{1} x^6 \sqrt[3]{(2x^3 + 1)^2}\, \mathrm{d}x$ are sens. Funcţia este definită pe tot intervalul de integrare. Avem $\alpha = 6$, $\beta = 3$, $\gamma = \frac{2}{3}$ şi $\frac{\alpha + 1}{\beta} + \gamma = 3$, întreg. Totuşi, nu se poate aplica

schimbarea $2x^3 + 1 = x^3 t^3$, deoarece această schimbare se poate folosi numai dacă $x \neq 0$ pe tot intervalul de integrare, adică dacă intervalul de integrare nu conține pe 0.

6) Integrala $\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{x}}$ nu are sens, pentru că $\sqrt[4]{x}$ nu are sens pentru $x \in [-2, -1]$.

§ 7. Metode de calcul aproximativ al integralei

Formula lui Leibniz-Newton poate fi folosită pentru calculul integralei unei funcții numai atunci cînd se cunoaște o primitivă a acestei funcții. Or, primitivele se cunosc numai pentru cîteva clase restrînse de funcții elementare. Pentru alte funcții (chiar elementare), cărora nu li se cunosc primitivele sau pentru funcții integrabile care nu au primitive, formula lui Leibniz-Newton nu mai poate fi folosită. În acest caz ne mulțumim să calculăm integrala cu aproximație, prin diferite metode.

De exemplu, dacă se dă funcția prin graficul ei, nici nu se poate pune problema calculului exact al integralei, deoarece valorile funcției nu pot fi determinate decît aproximativ, prin măsurare.

Orice problemă de aproximare este indisolubil legată de evaluarea erorii comise. Nu are nici un sens să spunem că am calculat cu aproximație valoarea integralei, dacă nu precizăm că eroarea nu întrece un anumit număr.

Așadar, ori de cîte ori se dă un procedeu de calcul aproximativ al integralei, trebuie să se dea în același timp și un procedeu de evaluare a erorii.

În principiu metodele de calcul aproximativ al integralei unei funcții f constau în a aproxima funcția f cu o funcție mai simplă φ, căreia i se poate calcula ușor integrala și a lua integrala funcției φ în locul integralei funcției f.

1. Metoda dreptunghiurilor

Această metodă constă în a aproxima o funcție dată cu o funcție în scară (constantă pe intervale), adică în a aproxima graficul funcției cu o linie poligonală cu laturile paralele cu axele.

Fie f o funcție integrabilă pe un interval $[a, b]$, d o diviziune a acestui interval:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

și $\sigma_d(f)$ o sumă integrală corespunzătoare acestei diviziuni:

$$\sigma_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \quad x_i \leqslant \zeta_i \leqslant x_{i+1}.$$

Dacă luăm diviziunea d suficient de fină (adică dacă norma diviziunii este suficient de mică) putem realiza ca suma integrală să difere oricît de puţin de integrala funcţiei f. Putem aproxima astfel integrala cu sume integrale:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Putem să simplificăm calculele, luînd cele n intervale parţiale egale între ele:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$$

şi luînd punctele intermediare la extremitatea din stînga a intervalelor parţiale: $\xi_i = x_i$. Obţinem atunci următoarea formulă de aproximare:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,[f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})].$$

Dacă luăm punctele intermediare la extremitatea din dreapta a intervalelor parţiale: $\xi_i = x_{i+1}$, obţinem următoarea formulă de aproximare:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b)].$$

Fiecare din cele două formule de aproximare se numeşte *formula dreptunghiurilor*, iar metoda aceasta de aproximare a integralei se numeşte *metoda dreptunghiurilor*.

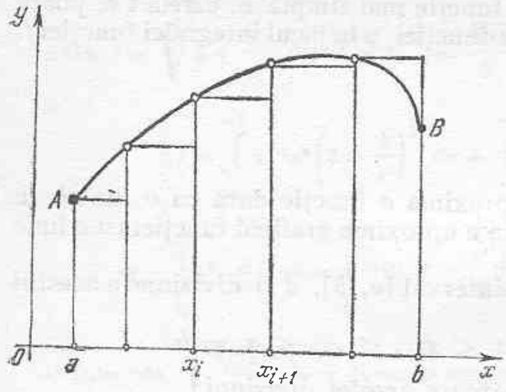


Fig. 110

Justificarea acestei denumiri este că, dacă funcţia f este *pozitivă*, fiecare termen $f(\xi_i)(x_{i+1} - x)$ al sumei integrale $\sigma_d(f)$ reprezintă aria unui dreptunghi (fig. 110).

În ceea ce priveşte evaluarea erorii, ea rezultă din inegalitatea

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sigma_d(f)\right| \leqslant S_d(f) - s_d(f),$$

unde s_d şi S_d sînt sumele Darboux. Evaluarea erorii este dată de diferenţa sumelor Darboux.

În acest fel putem calcula eroarea *după* ce am calculat suma integrală. Dacă eroarea este mai mare decît cea dorită, va trebui să luăm mai multe puncte de diviziune, să calculăm o nouă sumă integrală şi, din nou, eroarea comisă.

Acest procedeu nu este satisfăcător : este de dorit să știm de la început numărul n al intervalelor diviziunii, necesar pentru a realiza o aproximație dorită.

În anumite cazuri acest lucru este posibil, după cum rezultă din următoarea

Propoziție. Dacă funcția f este derivabilă și dacă derivata sa f' este mărginită, atunci

$$\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - \sigma_d(f) \right| \leqslant \frac{M'(b-a)^2}{n},$$

unde $M' = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

Într-adevăr,

$$S_d(f) - s_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i),$$

unde M_i și m_i sînt respectiv marginea superioară și marginea inferioară a funcției f pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$.

Deoarece f este continuă pe intervalul compact $[x_i, x_{i+1}]$, ea își atinge marginile pe acest interval: există două puncte x_i' și x_i'' din $[x_i, x_{i+1}]$, astfel ca

$$f(x_i') = M_i,\ f(x_i'') = m_i,$$

deci

$$S_d - s_d = \Sigma\, [f(x_i') - f(x_i'')](x_{i+1} - x_i).$$

Aplicînd formula creșterilor finite, există un punct ξ_i cuprins între x_i' și x_i'', deci $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, astfel ca

$$f(x_i') - f(x_i'') = f'(\xi_i)(x_i' - x_i'').$$

Atunci

$$S_d - s_d = \left| \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)(x_i' - x_i'')(x_{i+1} - x_i) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f'(\xi_i)|\,|(x_i' - x_i'')|\,|(x_{i+1} - x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M'(x_{i+1} - x_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} M' \frac{(b-a)^2}{n^2} = n \cdot M' \frac{(b-a)^2}{n^2} = M' \frac{(b-a)^2}{n},$$

de unde

$$\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - \sigma_d(f) \right| \leqslant \frac{M'(b-a)^2}{n}.$$

Astfel, dacă dorim ca eroarea să fie mai mică decît $\varepsilon > 0$, este suficient să luăm

$$n \geqslant \frac{M'(b-a)^2}{\varepsilon}$$

deoarece, în acest caz,

$$\frac{M'(b-a)^2}{n} < \varepsilon \text{ şi deci}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma_d(f)\right| < \varepsilon.$$

Exemplu. Fie funcţia $f(x) = x$ definită pe $[0, 1]$. Avem $f'(x) \equiv 1$, deci $M' = 1$, şi $b - a = 1$.

Pentru a calcula integrala cu două zecimale exacte, $\varepsilon = 10^{-2}$, este suficient să luăm

$$n \geqslant \frac{M'(b-a)^2}{\varepsilon} = 100.$$

Din acest exemplu se vede că metoda dreptunghiurilor nu este totdeauna convenabilă, deoarece necesită un număr mare de puncte de diviziune, deci calcule numeroase, pentru a realiza aproximaţii mai bune.

Pentru o diviziune aleasă, eroarea este cu atît mai mică, cu cît panta tangentei la grafic este mai mică şi, mai ales, cu cît intervalul de integrare este mai mic.

2. Metoda trapezelor

Această metodă constă în a aproxima funcţia dată cu o funcţie poligonală (liniară pe intervale) sau, în limbaj geometric, în a aproxima graficul funcţiei cu o linie poligonală cu vîrfurile pe grafic.

Fie f o funcţie integrabilă pe $[a, b]$ şi d o diviziune a intervalului. Să considerăm două sume integrale, luînd punctele intermediare la extremitatea stîngă a intervalelor parţiale:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i),$$

sau la extremitatea dreaptă a intervalelor parţiale:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i).$$

Fiecare din aceste sume aproximează integrala lui f. Semisuma acestor sume integrale

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

se află cuprinsă între sumele integrale şi deci aproximează şi ea integrala lui f:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

Pentru simplificarea calculelor, se iau intervalele parţiale egale între ele

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}.$$

Obţinem astfel următoarea formulă de aproximare:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n}[f(a) + f(b) + 2(f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))]$$

numită *formula trapezelor*. Această metodă de aproximare se numeşte *metoda trapezelor*.

Justificarea acestei denumiri este că, dacă funcţia f este *pozitivă*, fiecare termen $\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$ al sumei S_n reprezintă aria unui trapez, cu înălţimea $x_{i+1} - x_i$ şi bazele $f(x_i)$ şi $f(x_{i+1})$ (fig. 111).

Evaluarea erorii comise prin această aproximare rezultă din inegalitatea

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n\right| \leqslant S_d(f) - s_d(f),$$

S_d şi s_d fiind sumele Darbaoux.

În unele cazuri putem determina dinainte numărul n al intervalelor diviziunii, pentru a realiza o aproximaţie dorită, aşa cum rezultă din următoarea

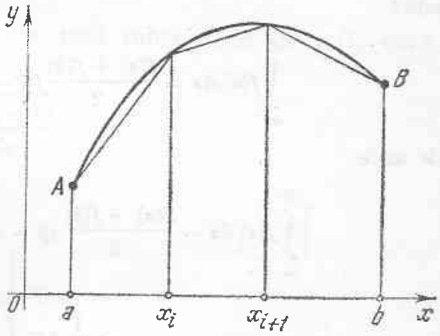


Fig. 111

P r o p o z i ţ i e. Dacă f are derivata de ordinul doi f'' integrabilă, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n\right| \leqslant \frac{M''(b-a)^3}{12n^2},$$

unde $M'' = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$.

Fie $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$. Aplicînd formula de integrare prin părți, avem

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}(x-\alpha) = f(\beta)(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)(x-\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

Aplicînd din nou formula de integrare prin părți, obținem

$$\int_\alpha^\beta f'(x)(x-\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f'(x)(x-\alpha)\,\mathrm{d}(x-\beta) = -\int_\alpha^\beta (x-\beta)\,\mathrm{d}[f'(x)(x-\alpha)] =$$

$$= -\int_\alpha^\beta f''(x)(x-\alpha)(x-\beta)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta f'(x)(x-\beta)\,\mathrm{d}x.$$

Aplicăm din nou formula de integrare prin părți ultimei integrale

$$\int_\alpha^\beta f'(x)(x-\beta)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (x-\beta)\,\mathrm{d}f(x) = f(\alpha)(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Făcînd aceste înlocuiri în prima egalitate, obținem

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = f(\beta)(\beta-\alpha) + \int_\alpha^\beta f''(x)(x-\alpha)(x-\beta)\,\mathrm{d}x + f(\alpha)(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$

adică

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(x)(x-\alpha)(x-\beta)\,\mathrm{d}x,$$

de unde

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |f''(x)|(x-\alpha)(\beta-x)\,\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}M''\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,\mathrm{d}x.$$

Dar

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-\alpha+\alpha-x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [(x-\alpha)(\beta-\alpha)-(x-\alpha)^2]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{(x-\alpha)^2}{2}(\beta-\alpha) - \frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]\Bigg|_\alpha^\beta = \frac{(\beta-\alpha)^3}{12},$$

deci

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)\right| \leqslant \frac{M''(\beta-\alpha)^3}{12}.$$

Luînd $\alpha = x_i$ şi $\beta = x_{i+1}$, obţinem

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{+1}-x_i)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_{i+1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M''(x_{i+1}-x_i)^3}{12} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M''(b-a)^3}{12n^3} = n\,\frac{M''(b-a)^3}{12n^3} = \frac{M''(b-a)^3}{12n^2}.$$

Astfel, dacă dorim ca eroarea să fie mai mică decît $\varepsilon > 0$, este suficient să luăm

$$n \geqslant \sqrt{\frac{M''(b-a)^3}{12\varepsilon}},$$

deoarece atunci $\frac{M''(b-a)^3}{12n^2} < \varepsilon$ şi deci

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n\right| < \varepsilon.$$

Exemplu. Fie funcţia $f(x) = x^2$ definită pe $[0, 1]$. Avem $f'(x) = 2x$ şi $f''(x) = 2$, deci $M'' = 2$, iar $b - a = 1$.

Pentru a calcula integrala cu o eroare mai mică decît $\varepsilon = 10^{-2}$, luăm

$$n \geqslant \sqrt{\frac{M''(b-a)^3}{12}} = \sqrt{\frac{2\cdot 100}{12}} > 4.$$

Astfel, luînd $n = 5$ avem $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{3}{5}$, $x_4 = \frac{4}{5}$, $x_5 = 1$.

Atunci

$$f(x_0) = 0,\ f(x_1) = \frac{1}{25},\ f(x_2) = \frac{4}{25},\ f(x_3) = \frac{9}{25},\ f(x_4) = \frac{16}{25},\ f(x_5) = 1$$

şi

$$S_5 = \frac{b-a}{2 \cdot 5}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{2}{25} + \frac{8}{25} + \frac{18}{25} + \frac{32}{25} + 1\right] = \frac{85}{250} = 0{,}34.$$

Valoarea exactă a integralei este

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333.$$

Avem într-adevăr

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - S_5 \approx 0{,}0066 < 0{,}01.$$

Dacă vrem să calculăm valoarea integralei cu 4 zecimale exacte (cu o eroare mai mică decît $\varepsilon = 10^{-4}$), luăm

$$n > \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{12}} = 10\sqrt{\frac{2 \cdot 100}{12}} > 40.$$

Observaţie. Metoda trapezelor necesită calcule mai puţine decît metoda dreptunghiurilor. Pentru a realiza o eroare mai mică decît $\varepsilon > 0$, trebuie să luăm prin metoda dreptunghiurilor

$$n \geqslant \frac{M'(b-a)^2}{\varepsilon},$$

iar prin metoda trapezelor

$$b \geqslant \frac{\sqrt{M''}\,(b-a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{12}\sqrt{\varepsilon}}.$$

Ţinem seama de faptul că dacă $\varepsilon < 1$, atunci $\varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$, deci $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < \frac{1}{\varepsilon}$. Metoda trapezelor este mai avantajoasă decît cea a dreptunghiurilor dacă $b - a > 1$, deoarece în acest caz

$$(b-a)^{\frac{2}{3}} < (b-a)^2.$$

3. Formula lui Simpson

Metoda de aproximare, care conduce la formula lui Simpson, constă în a aproxima funcția dată pe anumite intervale cu un polinom de gradul doi, adică în a aproxima graficul funcției pe anumite intervale cu o parabolă (fig. 112).

Fie f o funcție definită pe $[a, b]$ și d o diviziune a intervalului, formată din $2n$ intervale parțiale egale

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2i} <$$

$$< x_{2i+1} < x_{2i+2} < \ldots < x_{2n-2} <$$

$$< x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

$$x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{2n} = h,$$

$$j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n - 1.$$

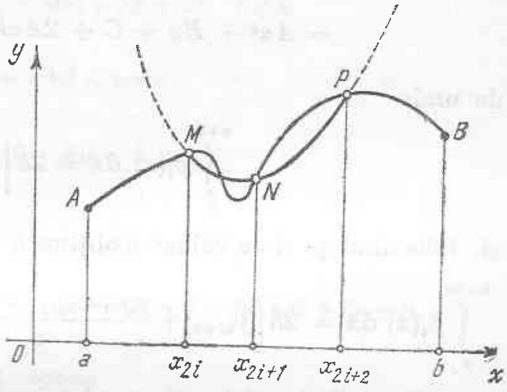


Fig. 112

Să notăm $x_{2i} = \alpha,\ x_{2i+1} = \alpha + h,\ x_{2i+2} = \alpha + 2h,$
$$f(x_{2i}) = y_{2i},\ f(x_{2i+1}) = y_{2i+1},\ f(x_{2i+2}) = y_{2i+2}.$$

Prin punctele (α, y_{2i}), $(\alpha + h, x_{2i+1})$, $(\alpha + 2h, y_{2i+2})$ trece o parabolă și numai una, cu axa paralelă cu Oy:

$$y = Ax^2 + Bx + C = p_i(x).$$

Avem

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2h} p_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\alpha+2h} (Ax^2 + Bx + C)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right)\Bigg|_{\alpha}^{\alpha+2h} =$$

$$= 2h\left[A\alpha^2 + B\alpha + C + 2A\alpha h + Bh + \frac{4Ah^2}{3}\right].$$

Scriind că parabola trece prin cele trei puncte, obținem

$$y_{2i} = A\alpha^2 + B\alpha + C,$$
$$y_{2i+1} = A\,(\alpha + h)^2 + B\,(\alpha + h) + C,$$
$$y_{2i+2} = A(\alpha + 2h)^2 + B(\alpha + 2h) + C.$$

Scăzînd membru cu membru prima ecuație din celelalte două, obținem:

$$y_{2i+1} - y_{2i} = 2A\alpha h + Bh + Ah^2;$$
$$y_{2i+2} - y_{2i} = 4A\alpha h + 2Bh + 4Ah^2.$$

Înmulţind prima ecuaţie cu -2 şi adunînd, rezultă

$$A = \frac{y_{2i} - 2y_{2i+1} + y_{2i+2}}{2h^2}.$$

Să observăm că

$$y_{2i+1} = A\alpha^2 + 2A\alpha h + Ah^2 + B\alpha + Bh + C =$$

$$= A\alpha^2 + B\alpha + C + 2A\alpha h + Bh + \frac{4Ah^2}{3} - \frac{Ah^2}{3},$$

de unde

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2h} p_i(x)\,\mathrm{d}x = 2h\left[y_{2i+1} + \frac{Ah^2}{3}\right]$$

şi, înlocuind pe A cu valoarea obţinută mai sus

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2h} p_i(x)\,\mathrm{d}x = 2h\left[y_{2i+1} + \frac{y_{2i} + 2y_{2i+1} + y_{2i+2}}{6}\right] = \frac{h}{3}\,[y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}].$$

Procedînd astfel pe fiecare interval $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, obţinem

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}[y_{2i} + y_{2i+1} + y_{2i+2}] =$$

$$= \frac{h}{3}\,[y_0 + y_{2n} + 4\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})].$$

Această valoare aproximează integrala funcţiei f

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{(b-a)^3}{6n}\{f(a) + f(b) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})] +$$

$$+ 2\,[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})]\}.$$

Această formulă de aproximare se numeşte *formula lui Simpson*.

Evaluarea erorii comise prin această aproximare este dată de următoarea

P r o p o z i ţ i e. Dacă f are derivată de ordinul patru mărginită, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_{2n}\right| \leqslant \frac{M^{\mathrm{IV}}(b-a)^5}{2880\,n^4},$$

unde $M^{\mathrm{IV}} = \sup\limits_{a<x<b}|f^{\mathrm{IV}}(x)|$, iar S_{2n} este suma din formula lui Simpson.

Să notăm $x_{2i} = c - h$, $x_{2i+1} = c$, $x_{2i+2} = c + h$. Atunci

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)].$$

Să notăm

$$R(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx - \frac{t}{3}[f(c-t) + 4f(c) + f(c+t)], \quad t \leqslant h.$$

Să remarcăm că, dacă F este o primitivă a lui f, avem

$$\int_{c-t}^{c+t} f(x)dx = F(c+t) - F(c-t)$$

și derivînd în raport cu t obținem

$$\left(\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx\right)' = (F(c+t) - F(c-t))' = F'(c+t) + F'(c-t) = f(c+t) + f(c-t).$$

Derivînd acum funcția $R(t)$ în raport cu t, obținem

$$R'(t) = f(c+t) + f(c-t) - \frac{1}{3}[f(c-t) + 4f(c) + f(c+t)] -$$

$$- \frac{t}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)],$$

adică

$$R'(t) = \frac{2}{3}[f(c+t) + f(c-t)] - \frac{4}{3}f(c) - \frac{t}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)].$$

Mai derivăm o dată:

$$R''(t) = \frac{2}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{1}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)] -$$

$$- \frac{t}{3}[f''(c+t) + f''(c-t)] = \frac{1}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{t}{3}[f''(c+t) + f''(c-t)].$$

În sfîrșit, derivînd încă o dată, obținem

$$R'''(t) = -\frac{t}{3}[f'''(c+t) - f'''(c-t)].$$

Să aplicăm acum formula creșterilor finite funcției $f'''(x)$ pe intervalul $[c-t, c+t]$: există un punct $\xi_1 \in (c-t, c+t)$, astfel ca

$$f'''(c+t) - f'''(c-t) = 2tf^{\mathrm{IV}}(\xi_1)$$

și deci

$$R'''(t) = -\frac{2t^2}{3}f^{\mathrm{IV}}(\xi_1).$$

Notînd cu M şi m marginile funcţiei f^{IV} pe $[c-h,\ c+h]$, avem

$$m \leqslant f^{IV}(\xi_1) \leqslant M,$$

de unde

$$-\frac{2t^2}{3}M \leqslant -\frac{2t^2}{3}f^{IV}(\xi_1) < -\frac{2t^2}{3}m.$$

adică

$$-\frac{2t^2}{3}M \leqslant R'''(t) \leqslant -\frac{2t^2}{3}m,$$

Să observăm că $R''(0)=0$, $R'(0)=0$ şi $R(0)=0$.
Intregrînd ultimele inegalităţi între 0 şi u, obţinem

$$-\int_0^u \frac{2t^2}{3}M\,dt \leqslant \int_0^u R'''(t)du \leqslant -\int_0^u \frac{2t^2}{3}m\,dt,$$

adică $-\frac{2u^3}{9}M \leqslant R''(u) \leqslant -\frac{2u^3}{9}m$, pentru orice $0 \leqslant u \leqslant h$; integrînd aceste inegalităţi între 0 şi z, avem

$$-\int_0^z \frac{2u^3}{9}M\,du \leqslant \int_0^z R''(u)\,du \leqslant -\int_0^z \frac{2u^3}{9}m\,du,$$

adică

$$-\frac{z^4}{18}M \leqslant R'(z) \leqslant -\frac{z^4}{18}m \text{ pentru } 0 \leqslant z \leqslant h.$$

Integrînd acum între 0 şi h, obţinem

$$-\int_0^h \frac{z^4}{18}M\,dz \leqslant \int_0^h R'(z)\,dz < -\int_0^h \frac{z^4}{18}m\,dz,$$

adică

$$-\frac{h^5}{90}M \leqslant R(h) \leqslant -\frac{h^5}{90}m.$$

Există atunci un punct $\xi_{2i} \in [c-h,\ c+h]$, astfel ca

$$R(h) = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi_{2i}),$$

adică

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(c-h)+4f(c)+f(c+h)] = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi_{2i})$$

sau

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+1}} f(x)\,dx - \frac{(b-a)}{6n}[f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})] = -\frac{(b-a)}{(2n)^5\cdot 90}f^{IV}(\xi_{2i}).$$

Atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_{2n}\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} - \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right]\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1} - \frac{(b-a)^5}{2880\,n^5} f^{\mathrm{IV}}(\xi_{2i})\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^5}{2880\,n^5} |f^{\mathrm{IV}}(\xi_{2i})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^5}{2880\,n^5} M^{\mathrm{IV}} = n \cdot \frac{(b-a)^5}{2880\,n^5} M^{\mathrm{IV}} = \frac{M^{\mathrm{IV}}(b-a)^5}{2880\,n^4}.$$

Astfel, dacă dorim ca eroarea să fie mai mică decît $\varepsilon > 0$, este suficient să luăm

$$n \geqslant \sqrt[4]{\frac{M^{\mathrm{IV}}(b-a)^5}{2880\,\varepsilon}}.$$

Observație. Pentru a realiza o aproximație dorită, formula lui Simpson necesită, în general, calcule mai puține decît formulele precedente.

§ 8. Aplicațiile integralei în geometrie și fizică

1. Aria unei suprafețe plane mărginite de o curbă

Fie f o funcție *pozitivă* definită pe un interval $[a, b]$. Graficul funcției f este situat deasupra axei Ox.

Să notăm cu F mulțimea punctelor din plan mărginită pe axa Ox, graficul AB al funcției f și dreptele $x = a$, $x = b$ paralele cu axa Oy:

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Propoziția 1. Dacă funcția f este integrabilă (în sensul lui Riemann), atunci mulțimea F este măsurabilă (în sensul lui Jordan) și

$$s(F) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

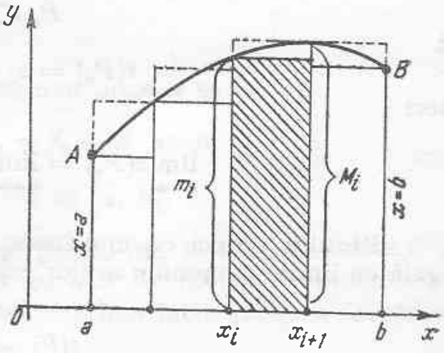


Fig. 113

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Să considerăm sumele Darboux corespunzătoare acestei diviziuni

$$s_d = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i), \quad S_d = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i),$$

unde

$$m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x), \quad M_i = \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x).$$

Aşadar

$$m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i, \quad \text{pentru orice } x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Produsul $m_i(x_{i+1} - x_i)$ reprezintă aria dreptunghiului cu baza pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ şi înălţimea m_i. Acest dreptunghiu este complet conţinut în mulţimea F.

Cele n dreptunghiuri de acest fel formează un poligon P *interior* mulţimii F, şi a cărui arie este egală cu suma inferioară Darboux

$$s(P) = s_d.$$

Produsul $M_i(x_{i+1} - x_i)$ reprezintă aria unui dreptunghi cu baza pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ şi înălţimea M_i. Acest dreptunghi conţine porţiunea din mulţimea F care se proiectează pe axa Ox pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$.

Cele n dreptunghiuri de acest fel formează un poligon Q *exterior* mulţimii F, şi a cărui arie este egală cu suma superioară Darboux

$$s(Q) = S_d.$$

Fie (d_n) un şir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, cu $\nu(d_n) \to 0$. Deoarece funcţia f este integrabilă, avem

$$\lim_{n\to\infty} s_{d_n} = \lim_{n\to\infty} S_{d_n} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă pentru fiecare diviziune d_n notăm cu P_n poligonul interior şi cu Q_n poligonul exterior obţinut ca mai sus, avem

$$P_n \subset F_n \subset Q_n$$

şi

$$s(P_n) = s_{d_n}, \quad s(Q_n) = S_{d_n},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} s(Q_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Rezultă atunci că mulţimea F este măsurabilă şi aria sa $s(F)$ este egală cu limita comună a ariilor celor două şiruri de poligoane (P_n) şi (Q_n):

$$s(F) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Propoziţia reciprocă este de asemenea adevărată: dacă mulţimea F este măsurabilă (în sensul lui Jordan), atunci funcţia f este integrabilă (în sensul lui Riemann).

2° Graficul funcţiei integrabile $f \geqslant 0$ are arie nulă, deoarece este conţinut în frontiera mulţimii măsurabile F, iar frontiera unei mulţimi măsurabile are arie nulă.

3° Dacă funcţia f este integrabilă, mulţimea

$$F' = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y < f(x)\},$$

obţinută din mulţimea F scoţînd punctele graficului funcţiei f, este de asemenea măsurabilă — ca diferenţă a două mulţimi măsurabile — şi aria sa este egală cu aria lui F:

$$s(F') = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Fie acum f_1 şi f_2 două funcţii definite pe $[a, b]$ astfel încît $f_1 \leqslant f_2$:

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

Graficul funcţiei f_1 este situat sub graficul funcţiei f_2. Să notăm cu F mulţimea punctelor cuprinse între graficele celor două funcţii şi dreptele $x = a$, $x = b$:

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}.$$

P r o p o z i ţ i a 2. Dacă funcţiile f_1 şi f_2 sînt integrabile, mulţimea F este măsurabilă şi

$$s(F) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Deoarece funcţiile f_1 şi f_2 sînt integrabile, ele sînt mărginite. Există deci un număr m astfel încît

$$m \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

Atunci

$$0 \leqslant f_1(x) - m \leqslant f_2(x) - m \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

Notînd $k = -m$, $\varphi_1 = f_1 + k$, $\varphi_2 = f_2 + k$, avem

$$0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x), \quad x \in [a, b].$$

Dacă funcţiile f_1 şi f_2 sînt *pozitive*, putem lua $m = 0$, deci $k = 0$ şi atunci $\varphi_1 = f_1$, $\varphi_2 = f_2$. Funcţiile φ_1 şi φ_2 sînt de asemenea integrabile.

Să notăm cu F' mulţimea punctelor cuprinse între graficele funcţiilor φ_1, φ_2 şi dreptele $x = a$, $x = b$:

$$F' = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}.$$

Mulţimea F' s-a obţinut din mulţimea F printr-o translaţie paralelă cu axa Oy, deci cele două mulţimi sînt echivalente ; dacă una din ele este măsurabilă, atunci şi cealaltă este măsurabilă şi au aceeaşi arie.

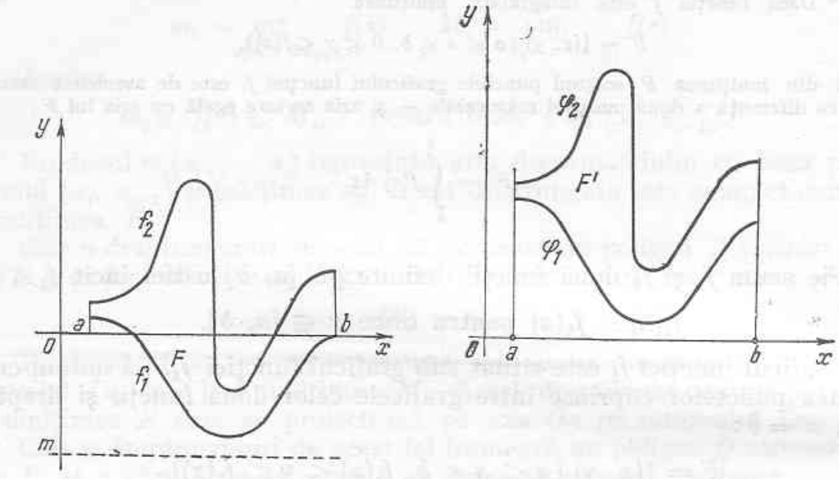


Fig. 114

Notînd

$$F_1 = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant \varphi_1(x)\},$$
$$F_2 = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\},$$

mulţimile F_1 şi F_2 sînt măsurabile şi

$$s(F_1) = \int_a^b \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x,\quad s(F_2) = \int_a^b \varphi_2(x)\mathrm{d}x.$$

Mulţimea F' este diferenţa mulţimilor F_2 şi F_1:

$$F' = F_2 - F_1,$$

deci F' este măsurabilă şi

$$s(F') = s(F_2) - s(F_1) = \int_a^b \varphi_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_1(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b [f_2(x) + k - (f_1(x) + k)]\mathrm{d}x = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Rezultă atunci că și mulțimea F este măsurabilă și

$$s(F) = s(F') = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

O b s e r v a ț i e. Propoziția 1 este un caz particular al propoziției 2, cu $f_1(x) \equiv 0$ și $f_2 = f$.

C o r o l a r u l 1. Dacă f este integrabilă, mulțimea

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \text{ sau } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$

este măsurabilă și

$$s(F) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Să considerăm funcțiile

$$f_1 = \frac{1}{2}(|f| + f),\ f_2 = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Deoarece f este integrabilă, funcția $|f|$ este integrabilă și deci și funcțiile f_1 și f_2 sînt integrabile. Avem

$$f = f_1 - f_2,\ |f| = f_1 + f_2.$$

Funcțiile f_1 și f_2 se numesc, respectiv, partea pozitivă și partea negativă a funcției f. Ele se pot defini și astfel:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } f(x) \leqslant 0 \\ f(x) & \text{dacă } f(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{dacă } f(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{dacă } f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Avem

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\},$$

deci F este măsurabilă și

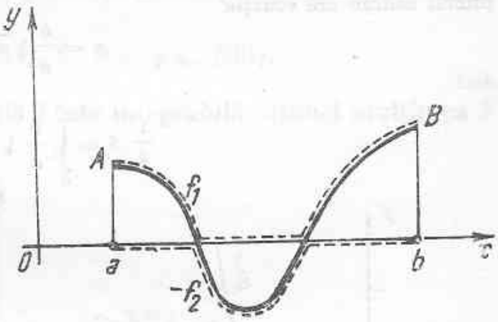


Fig. 115

$$s(F) = \int_a^b [f_2(x) + f_1(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

C o r o l a r u l 2. Graficul unei funcții integrabile oarecare este o mulțime măsurabilă cu aria nulă.

Într-adevăr, graficul funcției este conținut în frontiera mulțimii măsurabile F.

12—94

Observații. 1° Dacă $f \leqslant 0$ și este integrabilă, mulțimea F cuprinsă între graficul său, axa Ox și dreptele $x = a$, $x = b$, este măsurabilă și

$$s(F) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

deoarece $|f| = -f$.

2° Ținînd seama de faptul că ecuația graficului funcției f este

$$y = f(x),\ x \in [a, b],$$

aria mulțimii F, mărginită de curba $y = f(x)$, axa Ox și dreptele $x = a$, $x = b$, se scrie adesea

$$s(F) = \int_a^b |y|\,\mathrm{d}x.$$

Exemple. 1) Să se găsească aria suprafeței cuprinsă între parabolele $y = x^2$ și $y^2 = x$.

Cele două parabole se intersectează în punctele (0, 0) și (1, 1).

Cele două parabole sînt graficele funcțiilor $f_1(x) = x^2$ și $f_2(x) = \sqrt{x}$ definite pe [0, 1]. Aria S căutată este

$$S = \int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

2) Să se găsească aria elipsei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Vom calcula aria unui sfert de elipsă, cuprinsă în primul cadran. Porțiunea de elipsă din primul cadran are ecuația

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

deci

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

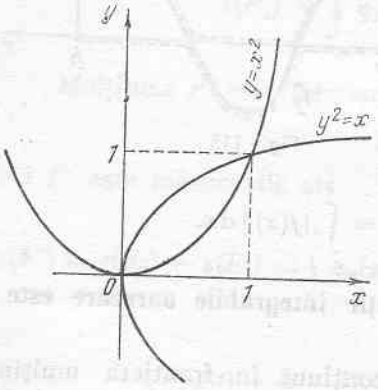


Fig. 116

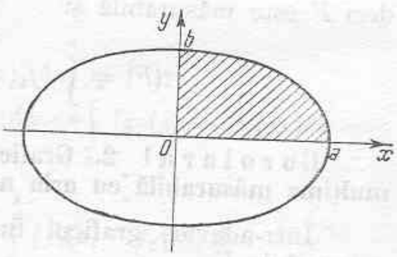


Fig. 117

Să facem înlocuirea $x = a \sin t$, deci $dx = a \cos t \, dt$ şi $0 = a \sin t_1$, $a = \sin t_2$, de unde $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Atunci

$$S = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t \, dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= 4ab\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

În cazul cînd elipsa este un cerc, $a = b = R$, rezultă că suprafaţa cercului este πR^2.

2. Aria unei suprafeţe plane mărginite de o curbă dată în coordonate polare

Fie $\rho = f(\theta)$ ecuaţia unei curbe în coordonate polare, unde $f(\theta)$ este o funcţie pozitivă definită pe un interval $[\alpha, \beta]$. Fiecărui $\theta \in [\alpha, \beta]$ îi corespunde în plan punctul de coordonate polare $(\theta, f(\theta))$. Să notăm cu F sectorul cuprins între curbă şi dreptele care trec prin origine şi au pantele $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$:

$$F = \{(\theta, \rho) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \ 0 \leqslant \rho \leqslant f(\theta)\}.$$

P r o p o z i ţ i a 3. Dacă funcţia f este integrabilă, atunci mulţimea F este măsurabilă şi

$$s(F) = \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha f^2(\theta)\,d\theta.$$

Fie d o diviziune a intervalului $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_i < $$
$$< \theta_{i+1} < \ldots < \theta_n = \beta$$

şi m_i, M_i, marginile funcţiei $f(\theta)$ pe intervalul parţial $[\theta_i, \theta_{i+1}]$.

Pentru fiecare indice i, să considerăm sectorul de cerc cu centrul în origine, unghiul la

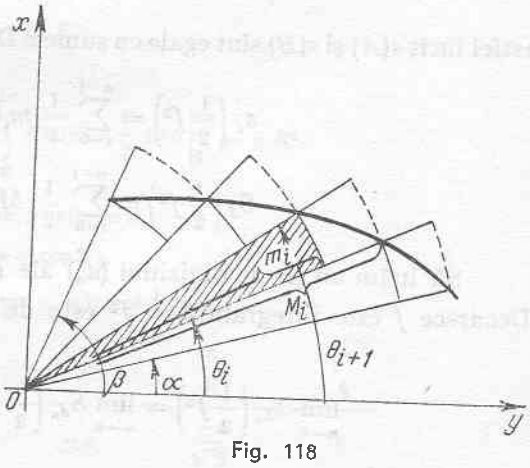


Fig. 118

centru $\theta_{i+1} - \theta_i$ şi raza m_i. Acest sector de cerc este conţinut în mulţimea F şi aria sa este

$$\frac{1}{2} m_i^2(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Reuniunea celor n sectoare de cerc este o mulţime măsurabilă A, complet conţinută în mulţimea F, şi cu aria

$$s(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} m_i^2(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Pentru fiecare indice i să considerăm acum sectorul de cerc cu centrul în origine, unghiul la centru $\theta_{i+1} - \theta_i$ şi raza M_i.
Aria sa este

$$\frac{1}{2} M_i^2(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Reuniunea celor n sectoare de cerc de acest fel este o mulţime măsurabilă B, care conţine mulţimea F, şi cu aria

$$s(B) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} M_i^2(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Să observăm că, deoarece $m_i = \inf\limits_{\theta_i<\theta<\theta_{i+1}} f(\theta)$, avem

$$\frac{1}{2} m_i^2 = \inf_{\theta_i<\theta<\theta_{i+1}} \frac{1}{2} f^2(\theta)$$

şi de asemenea

$$\frac{1}{2} M_i^2 = \sup_{\theta_i<\theta<\theta_{i+1}} \frac{1}{2} f^2(\theta),$$

astfel încît $s(A)$ şi $s(B)$ sînt egale cu sumele Darboux ale funcţiei $h(\theta) = \frac{1}{2} f^2(\theta)$:

$$s_d\left(\frac{1}{2} f^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} m_i(\theta_{i+1} - \theta_i);$$

$$S_d\left(\frac{1}{2} f^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} M_i(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Să luăm un şir de diviziuni (d_n) ale intervalului $[\alpha, \beta]$, cu $\nu(d_n) \to 0$. Deoarece f este integrabilă, $\frac{1}{2} f^2$ este de asemenea integrabilă şi

$$\lim_{n\to\infty} s_{d_n}\left(\frac{1}{2} f^2\right) = \lim_{n\to\infty} S_{d_n}\left(\frac{1}{2} f^2\right) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f^2(\theta)\, d\theta.$$

Dacă, pentru fiecare diviziune d_n, notăm cu A_n şi B_n mulţimile măsurabile formate, ca mai sus, din sectoare de cercuri, avem

$$A_n \subset F \subset B_n;$$

$$s(A_n) = s_{d_n}\left(\frac{1}{2} f^2\right), \quad s(B_n) = S_{d_n}\left(\frac{1}{2} f^2\right),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} s(A_n) = \lim_{n\to\infty} s(B_n) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta.$$

Rezultă atunci că mulţimea F este măsurabilă şi aria sa este egală cu limita comună a ariilor şirurilor de mulţimi (A_n) şi (B_n):

$$s(F) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta.$$

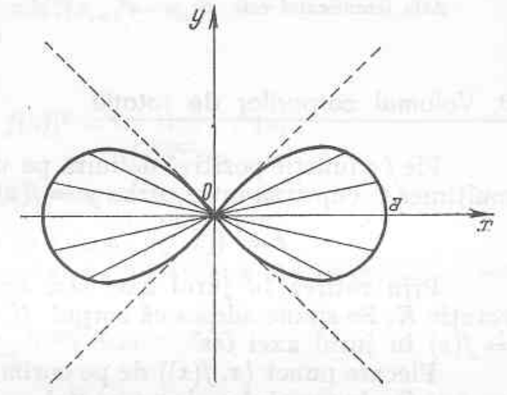


Fig. 119

Observaţie. Deoarece ecuaţia curbei care mărgineşte suprafaţa F este $\rho = f(\theta)$, aria mulţimii F se scrie adesea

$$s(F) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\theta.$$

Exemple. 1) Ecuaţia, în coordonate polare, a cercului cu centrul în origine şi raza R este

$$\rho \equiv R.$$

Aria S a cercului este

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2\,d\theta = \frac{1}{2} R^2\theta \Big|_0^{2\pi} = \pi R^2.$$

2) Ecuaţia lemniscatei, în coordonate polare, este

$$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi.$$

Pentru reprezentarea lemniscatei facem următorul tablou:

φ	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
ρ	0	$\frac{\pm a}{\sqrt{2}}$	$\pm a$	$\frac{\pm a}{\sqrt{2}}$	0

Aria unei bucle a lemniscatei este

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

Aria lemniscatei este $S = a^2$.

3. Volumul corpurilor de rotație

Fie f o funcție pozitivă definită pe un interval $[a, b]$. Să considerăm mulțimea F cuprinsă între curba $y = f(x)$, axa Ox și dreptele $x = a$, $x = b$:

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Prin rotirea în jurul axei Ox, această mulțime descrie un corp de rotație K. Se spune adesea că corpul K este născut prin rotația curbei $y = f(x)$ în jurul axei Ox.

Fiecare punct $(x, f(x))$ de pe curba $y = f(x)$ descrie un cerc cu centrul pe axa Ox, în punctul x, și cu raza $f(x)$.

P r o p o z i ț i a 1. Dacă funcția f este integrabilă, mulțimea K este măsurabilă și

$$v(K) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

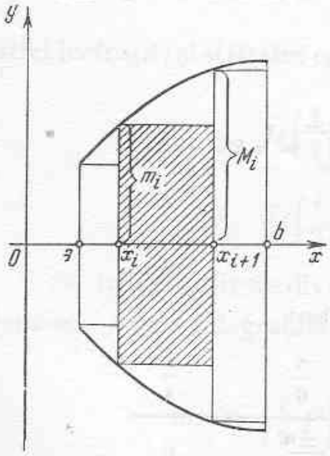


Fig. 120

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Să notăm cu m_i și M_i marginile funcției f pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$.

Dreptunghiul cu baza pe $[x_i, x_{i+1}]$ și înălțimea m_i descrie prin rotație un cilindru conținut în corpul K; acest cilindru are raza bazei m_i și înălțimea $x_{i+1} - x_i$, deci volumul său este

$$\pi m_i^2 (x_{i+1} - x_i).$$

Cei n cilindri de acest fel formează o mulțime măsurabilă A, complet conținută în K, și al cărei volum este

$$v(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i^2 (x_{i+1} - x_i).$$

Dreptunghiul cu baza pe $[x_i, x_{i+1}]$ şi înălţimea M_i descrie prin rotaţie un cilindru cu raza bazei M_i şi înălţimea $x_{i+1} - x_i$. Aria sa este

$$\pi M_i^2(x_{i+1} - x_i).$$

Cei n cilindri de acest fel formează o mulţime măsurabilă B, care conţine corpul K, şi al cărei volum este

$$v(B) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i^2(x_{i+1} - x_i).$$

Să observăm că

$$\pi m_i^2 = \pi \left(\inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x)\right)^2 = \pi \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f^2(x);$$

$$\pi M_i = \pi \left(\sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x)\right)^2 = \pi \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f^2(x),$$

astfel încît $v(A)$ şi $v(B)$ sînt egale cu sumele Darboux ale funcţiei $h = \pi f^2$.

$$s_d(\pi f^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi\, m_i^2(x_{i+1} - x_i),$$

$$S_d(\pi f^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i^2(x_{i+1} - x_i).$$

Să luăm un şir (d_n) de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$. Deoarece f este integrabilă, funcţia πf^2 este de asemenea integrabilă şi

$$\lim_{n\to\infty} s_{d_n}(\pi f^2) = \lim_{n\to\infty} S_{d_n}(\pi f^2) = \int_a^b \pi f^2(x) \mathrm{d}x.$$

Dacă pentru fiecare diviziune d_n notăm cu A_n şi B_n mulţimile măsurabile formate ca mai sus, din cilindri, avem

$$A_n \subset K \subset B_n$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} v(A_n) = \lim_{n\to\infty} v(B_n) = \pi \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Rezultă atunci că mulţimea K este măsurabilă, iar volumul său este egal cu limita comună a volumelor celor două şiruri de mulţimi (A_n) şi (B_n)

$$v(K) = \pi \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Observații. 1° Condiția ca funcția f să fie pozitivă nu este esențială. În adevăr, dacă f nu este pozitivă, curbele $y = f(x)$ și $y = |f(x)|$ descriu prin rotație același corp K, deci

$$V(K) = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx = \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

2° Dacă f este integrabilă, suprafața S născută prin rotația curbei $y = f(x)$ are volum nul, deoarece este conținută în frontiera mulțimii măsurabile K.

3° Dacă f este integrabilă, corpul K', născut din rotația mulțimii

$$F' = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \ 0 \leqslant y < f(x)\}$$

în jurul axei Ox, și care se obține din K, scoțind punctele de pe suprafața laterală S, este de asemenea o mulțime măsurabilă și are același volum ca și K.

$$v(K') = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

4° Deoarece ecuația curbei care dă naștere corpului K este

$$y = f(x),$$

volumul corpului K se scrie adesea

$$v(K) = \pi \int_a^b y^2 \, dx.$$

Fie acum f_1 și f_2 două funcții pozitive pe $[a, b]$, astfel ca $f_1 \leqslant f_2$, și fie

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}.$$

Prin rotirea în jurul axei Ox, această mulțime descrie un corp K. Corpul K este mărginit de suprafețele născute prin rotația curbelor $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ și de planele $x = a$, $x = b$.

Propoziția 2. Dacă f_1 și f_2 sînt integrabile, mulțimea K este măsurabilă și

$$v(K) = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] \, dx.$$

Într-adevăr, să notăm cu K_1 și K_2 corpurile născute prin rotirea în jurul axei Ox a mulțimilor

$$F_1 = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \ 0 \leqslant y \leqslant f_1(x)\}$$

$$F_2 = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \ 0 \leqslant y \leqslant f_2(x)\}.$$

Mulțimile K_1 și K_2 sînt măsurabile și

$$v(K_1) = \pi \int_a^b f_1^2(x) \, dx, \qquad v(K_2) = \pi \int_a^b f_2^2(x) \, dx.$$

Avem $F = F_2 - F_1$ şi $K = K_2 - K_1$, deci K este o mulţime măsurabilă — ca diferenţă a două mulţimi măsurabile — şi

$$v(K) = v(K_2) - v(K_1) = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\, dx.$$

Exemple. 1) Sfera cu centrul în origine şi raza R poate fi obţinută prin rotirea semicercului $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$ în jurul axei Ox. Volumul v al sferei este deci

$$v = \pi \int_{-R}^{R} y^2\, dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_0^R =$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

2) Curba $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leqslant x \leqslant a$ dă naştere, prin rotirea în jurul axei Ox, unui elipsoid de revoluţie. Volumul v al elipsoidului este:

$$v = \pi \int_{-a}^{a} y^2\, dx = 2\pi \int_0^a \frac{b}{a} (a^2 - x^2)\, dx = 2\pi \frac{b}{a} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_0^a =$$

$$= 2\pi \frac{b}{a} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = 4\pi a^2 b.$$

4. Lungimi de arce

În capitolul referitor la studiul curbelor se va da definiţia curbelor rectificabile şi a lungimii acestor curbe.

În acest capitol vom defini lungimea unor curbe particulare care sînt grafice de funcţii.

Graficul unei funcţii *continue* f se numeşte *curbă continuă* sau mai simplu, *curbă*. Ecuaţia curbei este

$$y = f(x).$$

Graficul unei funcţii f cu *derivată continuă* se numeşte *curbă netedă*. Fie f o funcţie cu *derivată continuă* f', definită pe un interval $[a, b]$, şi fie C curba $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

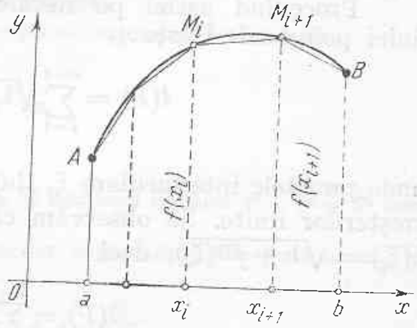


Fig. 121

Lungimea $l(C)$ a curbei C se defineşte prin egalitatea:

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Justificarea acestei definiţii este următoarea:

Să luăm pe curba C mai multe puncte, în ordine, de la A spre B:

$$A = M_0, M_1, \ldots, M_i, M_{i+1}, \ldots, M_n = B.$$

Unind aceste puncte în ordinea indicată, se obţine o linie poligonală P, cu vîrfurile pe curbă.

Alegerea punctelor M_i revine la alegerea unei diviziuni d a intervalului $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

astfel încît coordonatele punctului M_i sînt $(x_i, f(x_i))$.

Lungimea segmentului M_iM_{i+1} este

$$l(M_iM_{i+1}) = \sqrt{[x_{i+1} - x_i]^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}.$$

Să aplicăm funcţiei f teorema creşterilor finite pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$: există un punct $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, astfel încît

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Atunci

$$l(M_iM_{i+1}) = \sqrt{[x_{i+1} - x_i]^2 + [f'(\xi_i)]^2\,[x_{i+1} - x_i]^2} =$$
$$= \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,(x_{i+1} - x_i).$$

Procedînd astfel pe fiecare interval parţial, deducem că lungimea liniei poligonale P este:

$$l(P) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\;(x_{i+1} - x_i),$$

unde punctele intermediare ξ_i sînt acelea obţinute prin aplicarea teoremei creşterilor finite. Să observăm că, dacă notăm $h(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)}$ avem $h(\xi_i) = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}$, deci

$$l(P) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i)\;(x_{i+1} - x_i).$$

Lungimea $l(P)$ a liniei poligonale este deci egală cu o sumă integrală a funcției h:

$$\sigma_d(h) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i).$$

Fie (d_n) un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, cu $\nu(d_n) \to 0$. Deoarece f' este continuă, funcția $h = \sqrt{1 + f'^2}$ este de asemenea continuă, deci integrabilă.

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(h) = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Dacă pentru fiecare diviziune d_n notăm cu P_n linia poligonală corespunzătoare, avem

$$\lim_{n\to\infty} l(P_n) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Observăm că, pe măsură ce diviziunea d este mai fină, cu intervale parțiale mai multe și mai mici, linia poligonală corespunzătoare P are laturi mai multe și mai mici, deci se apropie, ca formă, din ce în ce mai mult de curba C. Este deci natural să luăm drept lungime a curbei C un număr $l(C)$, de care lungimea liniilor poligonale să se apropie din ce în ce mai mult pe măsură ce diviziunea este mai fină.

Un asemenea număr este integrala funcției $h = \sqrt{1 + f'^2}$. De aceea se ia, prin definiție,

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Observații. 1° După ce se va da definiția generală a curbelor rectificabile și a lungimii lor, egalitatea precedentă va rezulta ca o teoremă.

2° Deoarece ecuația curbei C este $y = f(x)$, lungimea curbei C se scrie adesea

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exemplu. Să verificăm cu această formulă că lungimea cercului $x^2 + y^2 = R^2$ este $2\pi R$.

Ecuația unui sfert de cerc, din semiplanul superior, cuprins între cele două bisectoare este

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad -\frac{R}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Avem

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

şi

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2},$$

deci, notînd cu L lungimea cercului, avem

$$\frac{1}{4}L = \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= R \arcsin \frac{x}{R}\Bigg|_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = R\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = R\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = R\,\frac{\pi}{4},$$

de unde $L = 4 \cdot R\,\frac{\pi}{2} = 2\pi R$.

O b s e r v a ţ i i. 1° Funcţia $\sqrt{R^2 - x^2}$ nu este derivabilă în punctele $-R$ şi R; în jurul acestor puncte, derivata este nemărginită. De aceea, nu se poate calcula cu ajutorul formulei precedente lungimea semicercului $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$. Pentru acest motiv s-a recurs la calculul lungimii unui sfert de cerc, deoarece pe intervalul $\left[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right]$ funcţia $\sqrt{R^2 - x^2}$ are *derivată continuă*. Această precauţie va fi de prisos după ce se vor defini integralele generalizate.

2° Exemplul precedent constituie o verificare a formulei de calcul pentru lungimea cercului. Prin acest exemplu nu se demonstrează că lungimea cercului este $2\pi R$, deoarece în calcule s-au folosit valorile funcţiei arcsin, şi anume: numărul π, a cărui definiţie a presupus cunoscută lungimea cercului.

Totuşi, dacă se defineşte numărul π (şi funcţiile trigonometrice) într-un mod care să nu implice lungimea cercului, de exemplu cu ajutorul seriilor, atunci exemplul precedent constituie o demonstraţie a faptului că lungimea cercului este $2\pi R$.

3° Avem $l(P) \leqslant l(C)$, oricare ar fi linia poligonală P înscrisă în curba C. Într-adevăr, prin trecerea de la o diviziune d la o diviziune mai fină, d', avem $l(P) \leqslant l(P')$. Dacă (d_n) este un şir de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$, aranjate după fineţe, şirul $(l(P_n))$ este crescător şi $l(P_n) \to l(C)$, deci $l(P_n) \leqslant l(C)$.

5. Suprafeţe de rotaţie

În capitolul relativ la studiul suprafeţelor în spaţiu, se va da definiţia ariei acestor suprafeţe.

În acest capitol vom defini aria unei suprafeţe născute prin rotirea unei *curbe netede* în jurul axei Ox.

Fie f o funcţie pozitivă cu *derivată continuă* pe un interval $[a, b]$. Graficul C al acestei funcţii este o curbă netedă.

Prin rotirea curbei în jurul axei Ox, ia naştere o suprafaţă de rotaţie S. Aria $\sigma(S)$ a acestei suprafeţe se defineşte prin egalitatea

$$\sigma(S) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Justificarea acestei definiţii este următoarea:

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < < \ldots < x_n = b.$$

Pentru fiecare punct x_i, să notăm cu M_i punctul de coordonate $(x_i, f(x_i))$ de pe curba C. Unind aceste puncte, obţinem o linie poligonală P, care prin rotaţie în jurul axei Ox dă naştere unei suprafeţe Σ, formată din mai multe trunchiuri de con.

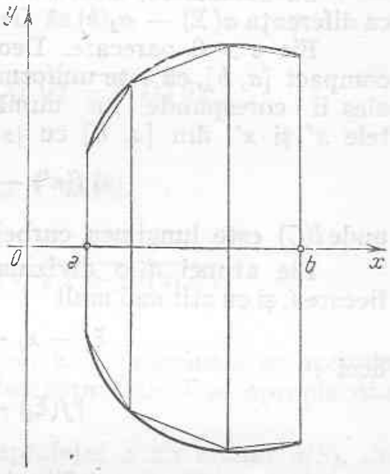


Fig. 122

Intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ îi corespunde trunchiul de con cu razele cercurilor de bază $f(x_i)$ şi $f(x_{i+1})$ şi generatoarea $l(M_i, M_{i+1})$. Aria laterală a acestui trunchi de con este deci

$$2\pi\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\,l(M_iM_{i+1}) = 2\pi\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2} =$$

$$= 2\pi\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,(x_{i+1} - x_i),$$

unde am aplicat teorema creşterilor finite f pe intervalul

$$[x_i, x_{i+1}],\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Aria suprafeţei Σ este

$$\sigma(\Sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}(x_{i+1} - x_i).$$

În membrul drept putem face să apară suma integrală

$$\sigma_d(h) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

a funcției $h(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$, anume

$$\sigma_d(h) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}(x_{i+1}-x_i).$$

Să arătăm că, dacă luăm diviziunea d suficient de fină, putem realiza ca diferența $\sigma(\Sigma) - \sigma_d(h)$ să fie oricît de mică.

Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Deoarece funcția f este continuă pe intervalul compact $[a, b]$, ea este uniform continuă pe acest interval: numărului $\varepsilon > 0$ ales îi corespunde un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi punctele x' și x'' din $[a, b]$ cu $|x' - x''| < \delta$, să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2\pi l(C)(b-a)},$$

unde $l(C)$ este lungimea curbei C.

Fie atunci d o diviziune cu $\nu(d) < \delta$, deci $x_{i+1} - x_i < \delta$ pentru fiecare i, și cu atît mai mult

$$\xi_i - x_i < \delta, \quad x_{i+1} - \xi_i < \delta,$$

deci

$$|f(\xi_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2\pi l(C)(b-a)}$$

$$|f(x_{i+1}) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{2\pi l(C)(b-a)}$$

și

$$|f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)| \leqslant |f(x_i) - f(\xi_i)| + |f(x_{i+1}) - f(\xi_i)| < \\ < \frac{\varepsilon}{\pi l(C)\,(b-a)}.$$

Observînd că $\sqrt{1+f'^2(\xi_i)} = l(M_iM_{i+1}) \leqslant l(C)$, avem

$$|\sigma(\Sigma) - \sigma_d(h)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \pi[f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}(x_{i+1}-x_i)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \pi\,|f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)|\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}(x_{i+1}-x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{l(C)\,(b-a)}\, l(C)(x_{i+1}-x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a) = \varepsilon.$$

Să luăm acum un șir (d_n) de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, cu $\nu(d_n) \to 0$. Să notăm cu Σ_n suprafața de rotație formată din trunchiuri de con, corespunzătoare diviziunii d_n. Din cele de mai sus rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma(\Sigma_n) - \sigma_{d_n}(h)| = 0,$$

deoarece, pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $\nu(d_n) < \delta(\varepsilon)$ şi deci

$$| \sigma(\Sigma_n) - \sigma_{d_n}(h) | < \varepsilon.$$

Pe de altă parte, funcţia $h = 2\pi f\sqrt{1+f'^2}$ este continuă, deci integrabilă, şi deci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(h) = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Atunci

$$\sigma(\Sigma_n) = [\sigma(\Sigma_n) - \sigma_{d_n}(h)] + \sigma_{d_n}(h),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\Sigma_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(h) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Pe măsură ce diviziunea d este mai fină, linia poligonală se apropie din ce în ce mai mult, ca formă, de curba C, deci suprafaţa Σ se apropie din ce în ce mai mult, ca formă, de suprafaţa S.

Este deci natural să luăm ca arie a suprafeţei S un număr $\sigma(S)$, de care aria $\sigma(\Sigma)$ să se apropie din ce în ce mai mult, pe măsură ce diviziunea d este mai fină. Un asemenea număr este integrala funcţiei $h = 2\pi f\sqrt{1+f'^2}$. De aceea, se ia, prin definiţie:

$$\sigma(S) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Observaţii. 1° După ce se va da definiţia generală a ariei unei suprafeţe în spaţiu, egalitatea precedentă va rezulta ca o teoremă.

2° Dacă funcţia f nu este pozitivă, atunci

$$\sigma(S) = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, în acest caz, razele bazelor trunchiului de con construit pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ sînt $|f(x_i)|$ şi $|f(x_{i+1})|$. Se alege funcţia $h(x) = |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}$ şi se procedează ca mai sus.

3° Deoarece ecuaţia curbei care dă naştere suprafeţei S este

$$y = f(x),$$

aria suprafeţei S se scrie adesea

$$\sigma(S) = 2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

6. Centre de greutate

După cum se ştie din fizică, centrul de greutate al unor corpuri simple se poate determina uşor. Dacă un corp are o axă de simetrie, centrul de greutate se află pe această axă.

Dacă se dă un sistem de n corpuri, care au centrele de greutate cu coordonatele respectiv

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n),$$

în raport cu un sistem de axe de coordonate, şi masele respectiv

$$m_1, m_2, \ldots, m_n,$$

atunci coordonatele (x_G, y_G, z_G) ale centrului de greutate sînt date de egalităţile:

$$x_G = \frac{\sum\limits_i x_i m_i}{\sum\limits_i m_i}, \quad y_G = \frac{\sum\limits_i y_i m_i}{\sum\limits_i m_i}, \quad z_G = \frac{\sum\limits_i z_i m_i}{\sum\limits_i m_i}.$$

Dacă cele n corpuri sînt omogene şi au aceeaşi densitate ρ, atunci masele lor sînt proporţionale cu volumele lor, $m_i = \rho v_i$, iar coordonatele centrului de greutate sînt date de egalităţile:

$$x_G = \frac{\sum\limits_i x_i v_i}{\sum\limits_i v_i}, \quad y_G = \frac{\sum\limits_i y_i v_i}{\sum\limits_i v_i}, \quad z_G = \frac{\sum\limits_i z_i v_i}{\sum\limits_i v_i}.$$

Dacă, în plus, cele n corpuri au formă de plăci plane sau sînt filiforme, masele sînt proporţionale cu ariile $m_i = kS_i$, respectiv cu lungimile, $m_i = kl_i$; în acest caz formulele precedente devin:

$$x_G = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i}, \quad y_G = \frac{\sum y_i S_i}{\sum S_i}, \quad z_G = \frac{\sum z_i S_i}{\sum S_i},$$

respectiv

$$x_G = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}, \quad y_G = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}, \quad z_G = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i}.$$

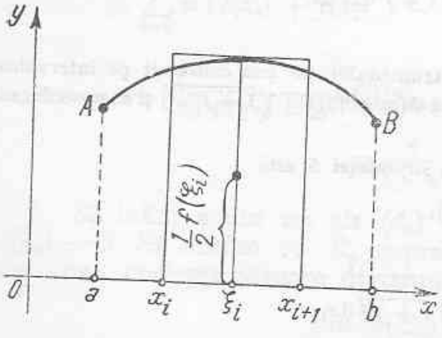


Fig. 123

Ne propunem acum să definim centrul de greutate al unei suprafeţe plane mărginite de o linie curbă.

Fie f o funcţie continuă pe un interval $[a, b]$. Să considerăm figura $abBA$ mărginită de axa Ox, curba $y = f(x)$ (graficul funcţiei f) şi dreptele

$x = a$, $x = b$. Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$; în fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ să alegem punctul $\xi_i = \frac{(x_i + x_{i+1})}{2}$ la mijlocul intervalului și să construim dreptunghiul cu baza pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ și înălțimea $f(\xi_i)$.

Centrul de greutate al dreptunghiului este $\left(\xi_i, \frac{1}{2} f(\xi_i)\right)$, iar aria sa este $S_i = f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$. Pentru sistemul format din cele n dreptunghiuri corespunzătoare diviziunii d, coordonatele centrului de greutate sînt:

$$\bar{x}(d) = \frac{\sum\limits_i \xi_i f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)}{\sum\limits_i f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)}, \quad \bar{y}(d) = \frac{\sum\limits_i \frac{1}{2} f^2(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)}{\sum\limits_i f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)}.$$

Observăm că la numitor se află o sumă integrală a funcției $f(x)$, iar la numărător se află respectiv sumele integrale ale funcțiilor $xf(x)$ și $\frac{1}{2} f^2(x)$. Dacă luăm un șir (d_n) de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$, șirurile de sume integrale tind respectiv către integralele $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_a^b \frac{1}{2} f^2(x)\,\mathrm{d}x$, și deci șirurile $\bar{x}(d_n)$ și $\bar{y}(d_n)$ tind respectiv către rapoartele

$$x_G = \frac{\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Prin definiție (x_G, y_G) este centrul de greutate al figurii $abBA$.

Exemplu. Se dă figura mărginită de parabola $y^2 = x$ și dreapta $x = 1$ (fig. 125). Se cere centrul său de greutate.

Deoarece figura are axa Ox ca axă de simetrie, centrul de greutate se află pe această axă, deci $y_G = 0$. Rămîne de calculat x_G. Dacă notăm cu S_1 și S_2 ariile celor două părți ale figurii, separate de axa Ox, și cu x_1, x_2 abscisele centrelor lor de greutate, avem $S_1 = S_2, x_1 = x_2$ și

$$x_G = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{x_1 S_1 + x_1 S_1}{S_1 + S_1} = x_1.$$

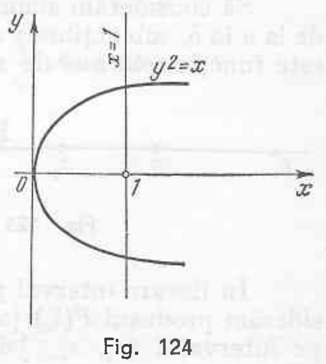


Fig. 124

Dar

$$x_1 = \frac{\int\limits_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x};$$

$$\int\limits_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1 = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5};$$

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3};$$

deci

$$x_G = x_1 = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}.$$

7. Lucrul mecanic

Dacă un corp se deplasează rectiliniu, pe distanţa d, sub acţiunea unei forţe constante F, dirijate de-a lungul direcţiei de deplasare, lucrul mecanic efectuat de forţa F pe distanţa d este egal cu produsul Fd dintre forţă şi deplasare.

Să considerăm acum un mobil care se deplasează de-a lungul axei Ox, de la a la b, sub acţiunea unei forţe $F(x)$, dirijată de-a lungul axei Ox, şi care este funcţie *continuă* de x. Ne propunem să definim şi în acest caz lucrul mecanic efectuat de forţa $F(x)$ de la a la b.

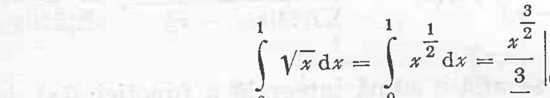


Fig. 125

Să luăm o diviziune d a intervalului $[a, b]$

$$d: a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots x_n = b.$$

În fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$ să alegem un punct ξ_i şi să considerăm produsul $F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$. Acest produs reprezintă lucrul efectuat pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ de o forţă constantă, egală cu $F(\xi_i)$.

Suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

reprezintă lucrul mecanic total efectuat de diferite forţe constante $F(\xi_i)$ pe intervalele corespunzătoare $[x_i, x_{i+1}]$. Suma precedentă este o sumă integrală a funcţiei $F(x)$. Intuitiv, ne dăm seama uşor că luînd diviziuni din ce în ce mai fine, cu intervalele parţiale din ce în ce mai mici, variaţia forţei $F(x)$ într-un asemenea interval parţial este din ce în ce mai mică, iar forţa variabilă $F(x)$ diferă din ce în ce mai puţin, pe un interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$, de forţa constantă $F(\xi_i)$. Dar, pe măsură ce luăm diviziuni mai fine, lucrul mecanic

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

efectuat de forţele constante $F(\xi_i)$, se apropie din ce în ce mai mult de integrala funcţiei $f(x)$:

$$\int_a^v F(x)\,\mathrm{d}x.$$

De aceea, prin definiţie, lucrul mecanic L efectuat de forţa $F(x)$ pe intervalul $[a, b]$ se defineşte prin egalitatea

$$L = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

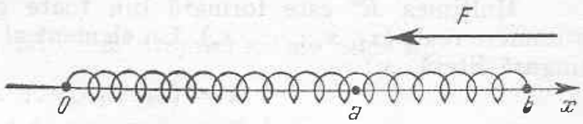


Fig. 126

Exemplu. Un corp este atras de un resort, fixat cu un capăt într-un punct O, cu o forţă proporţională cu distanţa de la poziţia corpului la punctul O. Să se afle lucrul mecanic cînd corpul se deplasează de la b la a (fig. 126).

Avem $F(x) = -kx$, unde $k > 0$ este un coeficient de proporţionalitate. Am luat forţa cu semnul $-$, deoarece ea este dirijată în sensul negativ al axei Ox. Avem:

$$L = \int_b^a F(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a kx\,\mathrm{d}x = -k\,\frac{x^2}{2}\bigg|_b^a = \frac{k}{2}\,(b^2 - a^2).$$

Capitolul VIII

FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE

§ 1. Spaţiile R^n

1. Spaţiul cu n dimensiuni

Notăm cu R^n produsul cartezian a n mulţimi egale cu dreapta reală R, $(n \in N)$:

$$R^n = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ ori}}.$$

Mulţimea R^n este formată din toate grupele ordonate posibile de n numere reale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Un element al mulţimii R^n va fi notat cu o singură literă, x:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

În cazul cînd $n = 1$, mulţimea R^1 este dreapta reală R.

Pentru $n = 2$, R^2 este mulţimea perechilor de numere reale (x_1, x_2), sau mulţimea punctelor din plan.

Din această cauză R^2 se numeşte spaţiul cu două dimensiuni. Punctele din planul R^2 vor fi notate adesea (x, y), în loc de (x_1, x_2). Totdeauna va reieşi din text dacă prin (x, y) se înţelege un punct din plan sau un interval de pe dreaptă.

Pentru $n = 3$, R^3 este mulţimea grupelor ordonate de trei numere reale (x_1, x_2, x_3), sau a punctelor din spaţiu. Din această cauză R^3 se numeşte spaţiul cu trei dimensiuni. Punctele din spaţiu vor fi notate adesea (x, y, z), în loc de (x_1, x_2, x_3).

Prin analogie, R^n se numeşte spaţiul cu n dimensiuni, iar elementele sale se numesc puncte. Dacă

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

este un punct din R^n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *coordonatele* sau *proiecţiile* punctului x; x_1 este prima coordonată (sau proiecţia pe prima axă), x_2 este a doua coordonată (sau proiecţia pe a doua axă) etc.

Funcţia $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to x_n$, care face să corespundă fiecărui punct din R^n, coordonata sa de ordin i, se numeşte *proiecţia* pe axa de ordin i şi se notează cu pr_i:

$$\mathrm{pr}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1, \mathrm{pr}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_2, \ldots, \mathrm{pr}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n.$$

2. Structura de spaţiu vectorial pe R^n

Pe spaţiul R^n se pot defini o parte din structurile de pe dreaptă şi anume structura algebrică şi structura topologică. Se poate defini şi o structură de ordine, dar nu este utilă pentru studiul care urmează.

Începem cu structura algebrică.

I) *A d u n a r e a*. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ două puncte din R^n. Se defineşte suma $x + y$ a acestor puncte astfel:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

A aduna punctele x şi y revine la a le aduna coordonatele de acelaşi ordin.

Punctul $O = (0, 0, \ldots, 0)$ care are toate coordonatele nule se numeşte *originea* spaţiului R^n.

Punctul $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ se numeşte *opusul* punctului $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Se verifică imediat următoarele proprietăţi ale adunării:

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + 0 = x$;
4) $x + (-x) = 0$.

Aşadar, R^n este *grup comutativ* pentru această adunare.

II) *Î n m u l ţ i r e a c u s c a l a r i*. Pentru orice număr $\alpha \in R$ şi orice punct $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ din R^n se defineşte produsul αx (sau $x\alpha$) astfel:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

A înmulţi pe x cu α revine la a înmulţi toate coordonatele lui x cu α.

Se verifică imediat următoarele proprietăţi:

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
8) $1 \cdot x = x$.

Aşadar, R^n este un *spaţiu vectorial* pentru operaţiile $x+y$ şi αx. De aceea punctele x^n din R^n se mai numesc şi *vectori*, iar coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se mai numesc *componentele vectorului* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Numerele reale α iau în acest caz numele de *scalari*, iar produsul αx se numeşte *produsul cu scalari*.

III) *Înmulţirea vectorilor*. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ două puncte din R^n. Se defineşte produsul xy al acestor puncte astfel:

$$xy = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n).$$

A înmulţi punctele x şi y revine la a le înmulţi coordonatele de acelaşi ordin.

Punctul $e = (1, 1, \ldots, 1)$ este element neutru pentru înmulţire. Dacă $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0$, atunci punctul $y = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$ este inversul punctului $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Se verifică imediat următoarele proprietăţi:

9) $x(yz) = (xy)z$;

10) $xy = yx$;

11) $x(y+z) = xy + xz$;

12) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Aşadar R^n este o *algebră* pentru operaţiile $x+y$, αx şi xy.

În cele ce urmează va interesa mai mult structura de spaţiu vectorial pe R^n şi mai puţin cea de algebră.

Pentru exemplificare, să arătăm la ce revine adunarea, înmulţirea şi înmulţirea cu scalari în cazul spaţiilor R^1 şi R^2.

În spaţiul $R^1 = R$, elementele sînt numere. Adunarea $x+y$ şi înmulţirea xy se reduc la adunarea şi înmulţirea obişnuită a numerelor x şi y, iar produsul cu scalari αx se reduce, de asemenea, la înmulţirea obişnuită a numerelor α şi x.

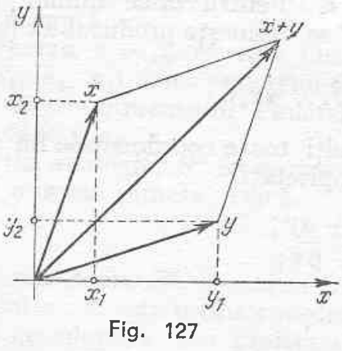


Fig. 127

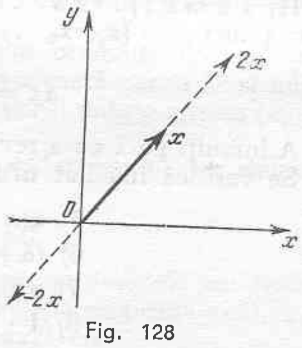


Fig. 128

Dacă $x = (x_1, x_2)$ şi $y = (y_1, y_2)$ sînt două puncte din R^2, punctul $x + y$ este al patrulea vîrf al paralelogramului cu celelalte trei vîrfuri în O, x şi y.

Dacă se identifică punctul x cu vectorul său de poziţie $\vec{x}$, coordonatele x_1 şi x_2 ale punctului x sînt componentele vectorului $\vec{x}$. Această identificare justifică denumirea de vectori dată punctelor x.

Adunarea punctelor din plan se face deci după regula paralelogramului, de adunare a forţelor sau a vectorilor, aşa cum se defineşte în fizică.

Înmulţirea cu scalari αx revine la amplificarea cu $|\alpha|$ a lungimii vectorului, păstrînd sensul vectorului dacă $\alpha > 0$ sau schimbîndu-i sensul dacă $\alpha < 0$.

Vectorii $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ formează o *bază* în spaţiul R^n; aceasta înseamnă că, dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un punct din R^n, atunci

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i.$$

Aşadar, orice vector x este o combinaţie liniară a vectorilor din bază, coeficienţii combinaţiei liniare fiind coordonatele lui x.

În spaţiul R^3, vectorii din bază e_1, e_2, e_3 se mai notează respectiv $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Un vector (x, y, z) se scrie atunci $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

3. Produsul scalar

În afară de operaţiile $x + y$ şi αx al căror rezultat este un *vector* din R^n, se mai defineşte o operaţie între vectori din R^n, al cărui rezultat este însă un număr (scalar); de aceea, această operaţie se numeşte *produs scalar*.

Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ două puncte din R^n. Se defineşte *produsul scalar* dintre x şi y ca fiind *numărul*, notat $(x|y)$, dat de egalitatea

$$(x \mid y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Produsul scalar $(x \mid y)$ este deci suma produselor coordonatelor de acelaşi ordin ale vectorilor x şi y.

Produsul scalar se mai notează, adesea, cu $< x, y >$ sau $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

Observaţii. 1° În spaţiul R^1, produsul scalar coincide cu produsul obişnuit: $(x \mid y) = xy$.

2° În spaţiul R^2 şi R^3, produsul scalar $(x \mid y)$ coincide cu produsul scalar definit în fizică, şi anume produsul lungimilor vectorilor cu cosinusul unghiului format de cei doi vectori.

Produsul scalar al vectorului x cu el însuşi este

$$(x \mid x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Se observă că $(x \mid x) \geqslant 0$. Avem $(0 \mid 0) = 0$; reciproc, dacă $(x \mid x)=0$, atunci $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, deci $x_i = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, adică $x = (0, 0, \ldots, 0)$.

Proprietățile produsului scalar sînt următoarele:

1) $(x \mid x) \geqslant 0$; $(x \mid x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$;

2) $(x \mid y) = (y \mid x)$;

3) $(x + y \mid z) = (x \mid z) + (y \mid z)$;

4) $\alpha(x \mid y) = (\alpha x \mid y) = (x \mid \alpha y)$;

5) $(zx \mid y) = (x \mid zy)$.

Se deduce, de asemenea, că $(0 \mid x) = (0 \mid x) = 0$, deoarece

$$(0 \mid x) = (0 + 0 \mid x) = (0 \mid x) + (0 \mid x).$$

Exemple. $(e_1 \mid e_1) = 1, (e_2 \mid e_2) = 1, \ldots, (e_n \mid e_n) = 1$; $(e_1 \mid e_2) = 0$; $(e_1 \mid e_3)=0$ $(e_2 \mid e_3) = 0, \ldots, (e_i \mid e_j) = 0$ dacă $i \neq j$.

Dacă folosim simbolul lui Kronecker, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j, \end{cases}$

atunci

$$(e_i \mid e_j) = \delta_{ij}.$$

Se spune că doi vectori x și y din R^n sînt *ortogonali* dacă produsul lor scalar este zero: $(x \mid y) = 0$. Astfel, dacă $i \neq j$, vectorii e_i și e_j sînt ortogonali (vectorii din bază sînt ortogonali doi cîte doi).

4. Norma în spațiul R^n

Pe dreaptă s-a definit distanța $|x - y|$ între două puncte x și y, cu ajutorul modulului.

În spațiul R^n se definește *norma* unui vector x, notată $\|x\|$, cu ajutorul căreia se definește apoi distanța dintre două puncte din R^n.

Norma $\|x\|$ a unui vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este numărul dat de egalitățile

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Rezultă că:

$$\|x\|^2 = (x \mid x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Așadar, norma $\|x\|$ se definește cu ajutorul produsului scalar.

Pentru vectorii din bază avem $\| e_1 \| = 1$, $\| e_2 \| = 1$, $\ldots$, $\| e_n \| = 1$.

În particular, $\| \vec{i} \| = 1$, $\| \vec{j} \| = 1$, $\| \vec{k} \| = 1$.

Proprietăţile normei sînt asemănătoare cu cele ale modulului:

1) $\| x \| \geqslant 0$; $\| x \| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$.
2) $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$.
3) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ (inegalitatea triunghiului).
4) $\| xy \| \leqslant \| x \| \| y \|$

Din aceste proprietăţi rezultă încă următoarele proprietăţi:

5) $\| -x \| = \| x \|$.
6) $\| x - y \| \leqslant \| x + y \|$.
7) $\| x \| - \| y \| \leqslant \| x \pm y \|$.

Primele două proprietăţi se deduc imediat din definiţia normei şi proprietăţile produsului scalar.

De exemplu, proprietatea 2 se demonstrează astfel:

$$\| \alpha x \| = \sqrt{(\alpha x \mid \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x \mid x)} = | \alpha | \sqrt{(x \mid x)} = | \alpha | \, \| x \|.$$

Luînd apoi $\alpha = -1$, obţinem proprietatea 5. Proprietăţile 6 şi 7 se deduc din proprietatea 3 la fel ca şi proprietăţile corespunzătoare ale modulului. Proprietatea 4 se demonstrează astfel:

$$\| xy \|^2 = (xy \mid xy) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 = (\Sigma\, x_i^2)(\Sigma\, y_j^2) = \| x \|^2 \| y \|^2,$$

de unde $\| xy \| \leqslant \| x \| \, \| y \|$. Rămîne de demonstrat numai proprietatea 3. Pentru aceasta vom demonstra mai întîi două inegalităţi.

1) $|(x \mid y)| \leqslant \frac{\| x \|^2}{2} + \frac{\| y \|^2}{2}$.

Pentru demonstraţie se foloseşte următoarea inegalitate dintre numere

$$| ab | \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

(deoarece $0 \leqslant (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leqslant a^2 + b^2 + 2 \, | ab |$).

Atunci:

$$| (x \mid y) | = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} | x_i y_i | \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^2}{2} + \frac{y_i^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1}{2} \| x \|^2 + \frac{1}{2} \| y \|^2,$$

de unde rezultă inegalitatea 1.

Să observăm că, dacă $x \neq 0$, atunci, în baza proprietăţii 2,

$$\left\| \frac{x}{\| x \|} \right\| = \left\| \frac{1}{\| x \|} x \right\| = \frac{1}{\| x \|} \| x \| = 1.$$

O altă inegalitate de care avem nevoie este

2) *Inegalitatea lui Schwarz:* $|(x \mid y)| \leqslant \| x \| \, \| y \|$.

Dacă $\| x \| \, \| y \| = 0$, atunci sau $\| x \| = 0$, deci $x = 0$, sau $\| y \| = 0$, deci $y = 0$. În ambele cazuri avem $(x \mid y) = 0$, deci inegalitatea lui Schwarz este verificată cu egalitate.

Să presupunem acum că $\| x \| \, \| y \| \neq 0$; atunci $\| x \| \neq 0$ şi $\| y \| \neq 0$ deci

$$\left\| \frac{x}{\| x \|} \right\| = 1 \text{ şi } \left\| \frac{y}{\| y \|} \right\| = 1.$$

Să aplicăm inegalitatea 1 vectorilor

$$x' = \frac{x}{\| x \|} \text{ şi } y' = \frac{y}{\| y \|}$$

ţinînd seama de faptul că $\| x' \| = 1$ şi $\| y' \| = 1$:

$$|(x' \mid y')| \leqslant \frac{\| x' \|^2}{2} + \frac{\| y' \|^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

adică

$$\left(\frac{x}{\|x\|} \,\middle|\, \frac{y}{\|y\|} \right) \leqslant 1.$$

Înmulţind ambii membri cu $\| x \| \, \| y \|$ se obţine inegalitatea lui Schwarz.

Putem acum trece la demonstrarea inegalităţii triunghiului:

$$\| x + y \|^2 = (x + y \mid x + y) = (x \mid x) + (y \mid y) + 2(x \mid y) \leqslant$$
$$\leqslant \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\, |(x \mid y)| \leqslant \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \| x \| \, \| y \| =$$
$$= (\| x \| + \| y \|)^2,$$

de unde

$$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|.$$

Observaţii. 1° În spaţiul $R^1 = R$, norma $\|x\|$ a unui număr x este egală cu modului său $|x|$:

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

2 În planul R^2 avem

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Norma $\|x\|$ reprezintă distanţa de la origine la punctul x. Inegalitatea triunghiului exprimă în acest caz faptul că într-un triunghi o latură este mai mică decît suma celorlalte două laturi.

De asemenea, în spaţiul R^3 norma $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ reprezintă distanţa de la origine la punctul x (lungimea vectorului de poziţie al punctului x).

3° Un spaţiu vectorial E pe care s-a definit o normă $||x||$ cu proprietăţile 1, 2 şi 3 se numeşte *spaţiu vectorial normat* sau *spaţiu normat*. Dacă, în plus, E este o algebră, iar norma verifică şi condiţia 4, atunci E se numeşte *algebră normată*.

Aşadar R^n este un *spaţiu normat* şi chiar o *algebră normată*.

Pe spaţiul R^n se pot defini şi alte norme, de exemplu

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

sau

$$||x||_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Cînd vrem să facem distincţie, norma definită mai înainte se notează $||x||_2$:

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

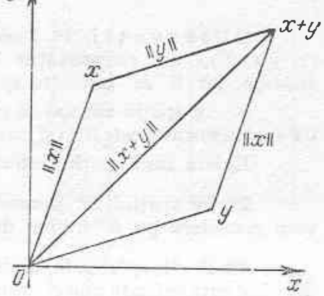


Fig. 129

Se poate arăta că $||x||_1$ şi $||x||_\infty$ verifică proprietăţile 1, 2 şi 3 ale normei.

Cele trei norme sînt *diferite* şi definesc, pe acelaşi spaţiu vectorial R^n, spaţii normate diferite.

În continuare, cînd va fi vorba de spaţiul normat R^n, se va subînţelege că ne referim la norma $||x||_2$.

Din punct de vedere topologic, cele trei norme sînt însă echivalente, în sensul că definesc aceeaşi topologie pe R^3. Mai precis, convergenţa, mulţimile deschise, mulţimile închise etc. sînt aceleaşi, oricare ar fi norma folosită.

4° Norma $||x||_2$ a fost dedusă din produsul scalar $||x||_2 = \sqrt{(x \mid x)}$. Normele $||x||_1$ şi $||x||_\infty$ nu se pot însă deduce dintr-un produs scalar.

5. Distanţa în R^n

Cu ajutorul normei se poate defini în R^n distanţa dintre două puncte la fel cum s-a definit în R^1 distanţa cu ajutorul modulului.

Prin definiţie, distanţa $d(x, y)$ dintre două puncte x şi y din R este dată de egalitatea

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Proprietăţile distanţei se deduc imediat din proprietăţile normei:

1) $d(x, y) \geqslant 0$; $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$ (inegalitatea triunghiului).

Să demonstrăm ultima proprietate:

$$d(x, y) = ||x - y|| = ||x - z + z - y|| \leq ||x - z|| + ||y - z|| =$$
$$= d(x, z) + d(z, y).$$

Observații. 1° Dacă pe o mulțime E s-a definit o funcție reală $(x, y) \to d(x, y)$, $(x, y \in E)$, cu proprietățile 1, 2 și 3 de mai sus, această funcție se numește *metrică* sau *distanță*, iar E se numește *spațiu metric*.

Pe un spațiu normat se poate defini o distanță cu ajutorul normei, $d(x, y) = ||x - y||$. Un spațiu normat este deci și un spațiu vectorial metric.

Există însă spații vectoriale metrice, în care distanța nu poate fi dedusă dintr-o normă.

2° Pe spațiul R^n, normele $||x||_1$, $||x||_2$ și $||x||_\infty$ definesc distanțe *diferite*. În continuare vom considera pe R^n numai distanța definită de norma $||x||_2$.

3° Pe dreapta reală, unde norma este egală cu modulul, avem $d(x, y) = |x - y|$, deci distanța definită mai sus este aceeași cu distanța obișnuită.

În planul R^2 avem

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

deci aceasta este distanța obișnuită între două puncte din plan.

§ 2. Topologia în R^n

1. Vecinătățile unui punct din R^n

Fie n intervale pe o dreaptă, $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Produsul lor cartezian $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n \subset R^n$ se numește *interval n-dimensional:*

$$I = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \ldots, x_n \in I_n\}.$$

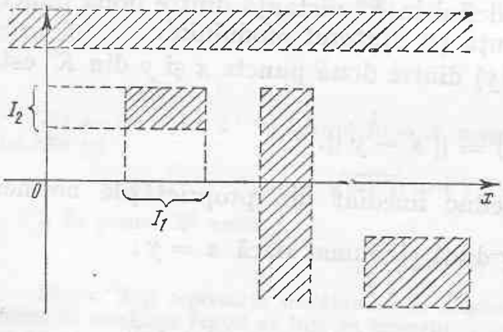


Fig. 130

Intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$ se numesc *laturile* intervalului n-dimensional. Avem

$$\text{pr}_1 I = I_1, \ \text{pr}_2 I = I_2, \ \ldots, \text{pr}_n I = I_n.$$

Laturile unui interval n-dimensional pot fi închise la un capăt sau la ambele capete, mărginite sau nemărginite.

În planul R^2, un interval bidimensional cu laturile mărginite este un dreptunghi.

În spaţiul R^3, un interval tridimensional cu laturile mărginite este un paralelipiped.

Dacă *toate* intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sînt *deschise*, atunci I se numeşte *interval n-dimensional deschis* (fig. 131).

Dacă *toate* intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sînt *închise*, atunci I se numeşte *interval n-dimensional închis* (fig. 132).

Dacă *toate* intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sînt *mărginite*, atunci I se numeşte *interval n-dimensional mărginit* (fig. 133).

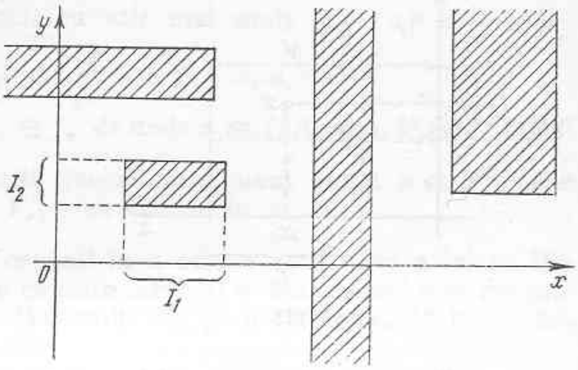


Fig. 131

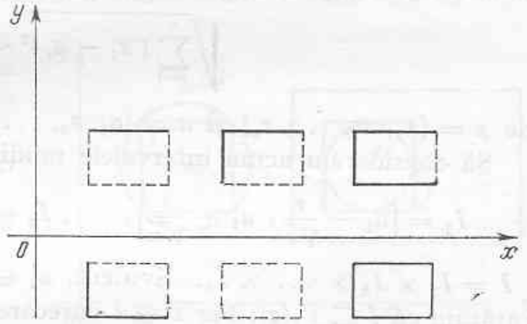


Fig. 132

În continuare, prin interval n-dimensional vom înţelege interval n-dimensional *deschis şi mărginit*, afară de cazul cînd se va specifica în mod expres contrariul.

Fie acum a un punct din spaţiul R^n şi $r > 0$ un număr.

Vom numi sferă (deschisă), cu centrul în a şi raza r, mulţimea

$$V_r(a) = \{x \mid x \in R^n,$$

$$\| x - a \| < r\},$$

formată din toate punctele $x \in R^n$ — a căror distanţă la a este $< r$.

În cazul spaţiului $R^1 = R$, o sferă $V_r(a)$ este un interval $(a - r, a + r)$ cu centrul în a.

În cazul spaţiului R^2 o sferă $V_r(a)$ este un cerc cu centrul în a şi raza r (punctele din interiorul cercului, fără punctele de pe circumferinţă).

În cazul spaţiului R^3, o sferă $V_r(a)$ este o sferă cu centrul în a şi raza r (punctele din interiorul sferei, fără punctele de pe suprafaţa sferei).

Mulţimea

$$W_r(a) = \{x \mid x \in R^n, \| x - a \| \leqslant r\}$$

se numeşte *sferă închisă* cu centrul în a şi raza r.

În continuare, cînd va fi vorba despre sfere, se va subînţelege că sînt sfere deschise.

P r o p o z i ţ i e. Orice sferă cu centrul în a conţine un interval n-dimensional care conţine pe a şi, reciproc, orice asemenea interval conţine o sferă cu centrul în a.

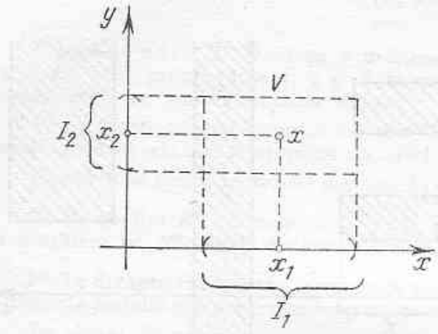


Fig. 133

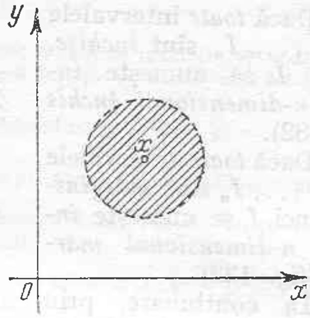


Fig. 134

Fie $V_r(a)$ o sferă cu centrul în a şi cu raza r; avem: $x \in V_r(a)$ dacă şi numai dacă $\| x - a \| < r$ sau

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} | x_i - a_i |^2} < r,$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Să considerăm acum intervalele unidimensionale:

$$I_1 = \left(a_1 - \frac{r}{\sqrt{n}},\ a_1 + \frac{r}{\sqrt{n}}\right), \ \ldots, \ I_n = \left(a_n - \frac{r}{\sqrt{n}},\ a_n + \frac{r}{\sqrt{n}}\right);$$

fie $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$. Evident, $a_1 \in I_1, \ldots, a_n \in I_n$, deci $a \in I$. Să arătăm că $I \subset V_r(a)$. Fie $x \in I$ oarecare. Aceasta înseamnă că $x_i \in I_i$ sau $|x_i - a_i| < \frac{r}{\sqrt{n}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Atunci $|x_i - a_i|^2 < \frac{r^2}{\sqrt{n}}$, deci

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} < \sqrt{n \frac{r^2}{n}} = r,$$

adică $\| x - a \| < r$, sau $x \in V_r(a)$. Aşadar, $I \subset V_r(a)$. Reciproc, fie $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ un interval n-dimensional care conţine pe a; intervalul I conţine un interval $J = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$ cu centrul în a, şi cu intervalele $J_1, \ldots, J_n$ de aceeaşi lungime:

$$J_1 = (a_1 - r, a_1 + r) \subset I_1, \ldots, J_n = (a_n - r, a_n + r) \subset I_n.$$

Să arătăm că $V_r(a) \subset J$, de unde va rezulta că $V_r(a) \subset I$.

Într-adevăr, dacă $x \in V_r(a)$, atunci $||x - a|| < r$ sau

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} < r,$$

deci $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 < r^2$ şi atunci, cu atît mai mult $|x_i - a_i|^2 < r^2$ sau

$$|x_i - a_i| < r,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

adică $x_1 \in J_1$, $x_2 \in J_2, \ldots, x_n \in J_n$, de unde $x \in J$. Aşadar, $V_r(a) \subset J \subset I$.

Definiţie. Se numeşte vecinătate a unui punct $a \in R^n$, orice mulţime care conţine o sferă $V_r(a)$ cu centrul în a.

Evident, orice sferă cu centrul în a este o vecinătate a lui a. Din propoziţia precedentă deducem că orice interval n-dimensional care conţine pe a este o vecinătate a lui a. Mai mult, din propoziţia precedentă rezultă imediat următoarea

Propoziţie. O mulţime V este vecinătate a unui punct $a \in R^n$, dacă şi numai dacă există un interval n-dimensional I, astfel ca $a \in I \subset V$.

Vecinătăţile unui punct $a \in R^n$ au aceleaşi proprietăţi ca şi vecinătăţile unui punct de pe dreaptă.

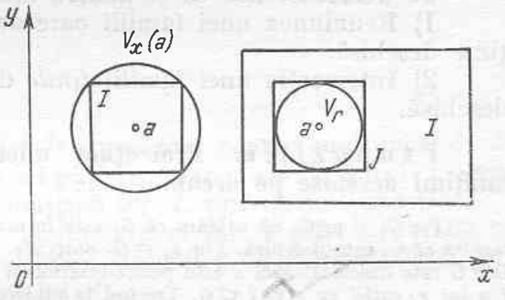


Fig. 135

Observaţie. Cu ajutorul normelor $||x||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ şi $||x||_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ se pot defini de asemenea „sferele"

$V_r^1(a) = \{x | x \in R,\ ||x - a||_1 < r\}$ şi

$V_r^\infty(a) = \{x | x \in R,\ ||x - a||_\infty < r\}$.

Fiecare din acestea defineşte aceeaşi topologie pe R^n ca şi vecinătăţile precedente.

În plan, $V_r^1(a)$ este un pătrat cu centrul în a, cu diagonala $2r$ şi laturile paralele cu bisectoarele axelor de coordonate. Ar putea fi numită vecinătate rombică.

Tot în plan, $V_r^\infty(a)$ este un pătrat cu centrul în a şi latura $2r$, cu laturile paralele cu axele. Se numeşte vecinătate pătratică.

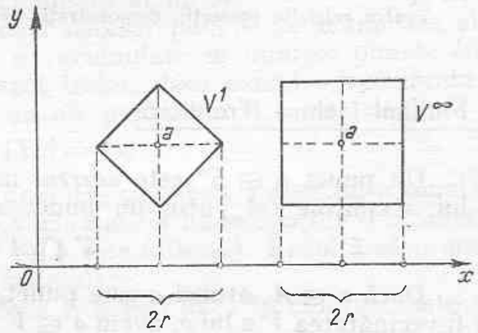


Fig. 136

2. Mulțimi deschise

O dată definite vecinătățile unui punct în spațiul R^n, toate considerațiile relative la mulțimile de pe dreaptă se transpun fără nici o modificare la mulțimi din R^n. Demonstrațiile relative la mulțimile de pe dreaptă, în care intervine modulul $|x|$, se transpun de asemenea în spațiul R^n, înlocuind modulul $|x|$ cu norma $||x||$ (adică folosind vecinătățile sferice).

Fie A o submulțime a spațiului R^n și un punct $a \in A$.

Vom spune că a este *punct interior al lui* A, dacă există o vecinătate V a lui a, conținută în A,

$$a \in V \subset A,$$

adică dacă A este ea însăși o vecinătate a lui a.

Mulțimea punctelor interioare ale lui A se numește *interiorul* lui A și se notează Int A sau $\mathring{A}$. Evident, $\mathring{A} \subset A$.

O mulțime este *deschisă* dacă este formată numai din puncte interioare, adică dacă este egală cu interiorul său, $A = \text{Int}\, A$. Așadar, o mulțime este deschisă dacă și numai dacă este vecinătatea fiecărui punct al său.

Exemple de mulțimi deschise: sferele (deschise), intervalele deschise n-dimensionale, mulțimea vidă $\emptyset$, spațiul total R^n.

Se demonstrează ca și pentru mulțimile deschise de pe dreaptă că:

1) Reuniunea unei familii oarecare de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

2) Intersecția unei familii *finite* de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

Propoziție. Proiecțiile unei mulțimi deschise $G \subset R^n$ sînt mulțimi deschise pe dreaptă.

Fie $G_1 = \text{pr}_1 G$. Să arătăm că G_1 este formată numai de puncte interioare, de unde va rezulta că G_1 este deschisă. Fie $x_1 \in G_1$ oarecare. Există un punct $x \in G$ astfel ca $x_1 = \text{pr}_1 x$. Dar G este deschisă, deci x este punct interior al său. Există deci un interval n-dimensional I a lui x, astfel ca $x \in I \subset G$. Trecînd la proiecții, obținem $\text{pr}_1 x \in \text{pr}_1 I \subset \text{pr}_1 G$, adică, notînd $I_1 = \text{pr}_1 I$, avem $x_1 \in I_1 \subset G_1$ și I_1 este un interval deschis, deci x_1 este un punct interior al lui G_1.

Pentru celelalte proiecții, demonstrația se face la fel.

3. Mulțimi închise. Frontieră

Un punct $a \in R^n$ este *aderent* mulțimii A, dacă orice vecinătate V a lui a conține cel puțin un punct $x \in A$, adică dacă

$$V \cap A \neq \emptyset.$$

Dacă $a \in A$, atunci a este punct aderent al lui A, pentru că, oricare ar fi vecinătatea V a lui a, avem $a \in V \cap A$ (eventual putem avea $V \cap A = \{a\}$).

Pot exista însă puncte aderente mulţimii A, fără să aparţină lui A.

Mulţimea punctelor aderente lui A se numeşte *aderenţa lui* A, sau *închiderea lui* A şi se notează $\bar{A}$.

Evident, $A \subset \bar{A}$.

O mulţime A este *închisă* dacă este egală cu închiderea sa, $A = \bar{A}$.

Se demonstrează ca şi pe dreaptă că o mulţime A este închisă, dacă şi numai dacă complementara sa $\complement A$ este deschisă.

Exemple de mulţimi închise: sferele închise $W_r(a)$, intervalele închise n-dimensionale, R^n, $\emptyset$, mulţimile finite.

De asemenea, se demonstrează ca şi pentru mulţimile închise de pe dreaptă că:

1) Reuniunea unei familii finite de mulţimi închise este o mulţime închisă.

2) Intersecţia unei familii oarecare de mulţimi închise este o mulţime închisă.

Un punct $a \in R$ este *punct frontieră* al lui A, dacă este aderent atît lui A, cît şi lui $\complement A$, adică dacă orice vecinătate V a lui a conţine şi puncte din A şi puncte din $\complement A$, $V \cap A \neq \emptyset$, $V \cap \complement A \neq \emptyset$.

Mulţimea punctelor frontieră ale lui A se numeşte *frontiera* lui A şi se notează $\mathrm{Fr}\, A$.

Avem $\mathrm{Fr}\, A = \mathrm{Fr} \complement A$ şi $\mathrm{Fr} A = \bar{A} - \mathrm{Int}\, A$.

4. Puncte de acumulare

Un punct $a \in R^n$ este *punct de acumulare* pentru mulţimea A, dacă orice vecinătate V a lui a conţine cel puţin un punct $x \neq a$ din A. Un punct de acumulare al lui A poate să aparţină lui A, sau să nu-i aparţină.

Rezultă că orice punct de acumulare al lui A este în acelaşi timp punct aderent al lui A, deci mulţimea punctelor de acumulare ale lui A este conţinută în închiderea $\bar{A}$ al lui A.

Un punct a aderent lui $A (a \in \bar{A})$, care nu aparţine lui A, $(a \notin A)$, este în mod necesar punct de acumulare al lui A.

Punctele lui A nu sînt în mod necesar puncte de acumulare ale lui A. Punctele lui A care nu sînt de acumulare se numesc puncte *izolate*. Aşadar, un punct $b \in A$ este punct izolat, dacă există o vecinătate V a lui b, care nu mai conţine nici un alt punct din A, afară de b:

$$V \cap A = \{b\}.$$

Se demonstrează, ca şi pe dreaptă, că a este punct de acumulare al lui A, dacă şi numai dacă, orice vecinătate a lui a conţine o infinitate de puncte din A (adică mulţimea $V \cap A$ este infinită). Rezultă că o mulţime finită nu are nici un punct de acumulare.

O mulţime A este închisă dacă şi numai dacă îşi conţine toate punctele sale de acumulare.

5. Mulţimi mărginite. Mulţimi compacte. Mulţimi conexe

Se spune că o mulţime $A \subset R^n$ este *mărginită*, dacă există o sferă, pe care-o putem presupune cu centrul în origine, care conţine mulţimea A. Aceasta înseamnă că există un număr M astfel încît pentru orice $x \in A$ să avem $\|x\| \leqslant M$.

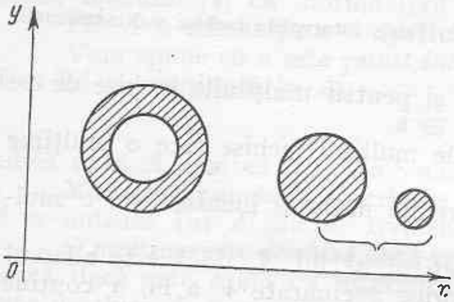


Fig. 137

A spune că mulţimea A este mărginită înseamnă, de asemenea, că $\sup_{x \in A} \|x\| < +\infty$.

Observaţie. Deoarece în spaţiul R^n nu mai avem o relaţie de ordine, nu se mai pot defini mulţimi majorate sau minorate, şi nici marginile unei mulţimi.

Mulţimile închise şi mărginite din R^n se numesc *mulţimi compacte*.

Orice mulţime finită este închisă şi mărginită, deci este compactă.

Orice sferă închisă şi orice interval n-dimensional închis şi mărginit sînt mulţimi compacte.

Sferele deschise şi intervalele deschise n- dimensionale nu sînt compacte.

O mulţime $A \subset R$ este *conexă*, dacă nu există nici o pereche de mulţimi *deschise* G_1 şi G_2 astfel ca:

$$A \subset G_1 \cup G_2,\ A \cap G_1 \neq \emptyset,\ A \cap G_2 \neq \emptyset \text{ şi } (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \emptyset.$$

În limbajul obişnuit, a spune că mulţimea A este conexă revine la aceea că „este formată dintr-o singură bucată".

Sferele şi intervalele n-dimensionale sînt conexe.
În plan, o coroană circulară este conexă.
O reuniune de două cercuri închise şi disjuncte nu este conexă.

O mulţime deschisă şi conexă se numeşte *domeniu*.

§ 3. Şiruri de puncte din spaţiul R^n

1. Şiruri convergente. Proprietăţi

O funcţie $f: N \to R^n$ definită pe mulţimea N a numerelor naturale, cu valori în R^n, se numeşte *şir de puncte din spaţiul* R^n.

Vom nota un şir de puncte din R^n, ca de obicei

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

sau, prescurtat: $(x_k)_{k \in N}$ sau, mai simplu, (x_k).

Şirurile convergente de puncte din R^n se definesc la fel ca şirurile convergente de numere.

Definiţie. Un punct $x_0 \in R^n$ este limita unui şir (x_k) de puncte din R^n, dacă în afara fiecărei vecinătăţi a lui x_0 se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului. Se scrie $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ sau $x_k \to x_0$.

Dacă $V_\varepsilon(x_0)$ este o vecinătate a lui x_0, atunci relaţia $x_k \in V_\varepsilon(x_0)$ este echivalentă cu $\| x_k - x_0 \| < \varepsilon$.

Obţinem astfel o definiţie echivalentă a limitei unui şir de puncte din R^n, dată de:

Propoziţia 1. Un punct $x_0 \in R^n$ este limita unui şir (x_k) de puncte din R^n, dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $k \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $\|x_k - x_0\| < \varepsilon$.

Din propoziţia următoare rezultă o definiţie echivalentă cu cea de mai sus, în care se foloseşte convergenţa şirului normelor, care este un şir de *numere*.

Propoziţia 2. $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ **dacă şi numai dacă** $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| = 0$.

Demonstraţia rezultă imediat din propoziţia 1.

Şirurile care au limită se numesc *şiruri convergente*.

Toate proprietăţile şirurilor convergente de numere, în care nu intervine relaţia de ordine, se păstrează şi pentru şirurile convergente de puncte din spaţiul R^n şi demonstraţiile sînt aceleaşi sau se deduc, mai simplu, din proprietăţile corespunzătoare ale şirurilor de numere:

1) *Limita unui şir convergent este unică.*

Să presupunem, prin absurd, că $x_k \to x_0$ şi $x_k \to x_0'$, iar $x_0 \neq x_0'$. Aceasta înseamnă că $\| x_k - x_0 \| \to 0$ şi $\| x_k - x_0' \| \to 0$.

Atunci

$$\| x_0 - x_0' \| = \| x_0 - x_k + x_k - x_0' \| \leqslant \| x_0 - x_k \| + \| x_k - x_0' \| \to 0$$

şi pe baza criteriului de convergenţă de la şirurile de numere rezultă că $\| x_0 - x_0' \| = 0$, adică $x_0 - x_0' = 0$, ceea ce contrazice presupunerea că $x_0 \neq x_0'$.

2) *Criteriu de convergenţă. Fie (α_k) un şir de numere. Dacă*

$$\| x_k - x_0 \| \leqslant \alpha_k,\ k \in N \text{ şi } \alpha_k \to 0, \text{ atunci } x_k \to x_0.$$

Într-adevăr, pe baza criteriului de convergenţă de la şirurile de numere, rezultă că $\| x_k - x_0 \| \to 0$, deci $x_k \to x_0$.

3) *Dacă $x_k \to x_0$, atunci $\| x_k \| \to \| x_0 \|$:*

$$\| \lim_{k\to\infty} x_k \| = \lim_{k\to\infty} \| x_k \|.$$

Demonstraţia rezultă din inegalitatea

$$|\,||x_k|| - ||x_0||\,| \leqslant ||x_k - x_0||$$

folosind criteriul precedent.

O b s e r v a ţ i e. Dacă $||x_k|| \to ||x_0||$, nu rezultă că şirul (x_k) este convergent. Dacă însă $||x_k|| \to 0$, atunci $x_k \to 0$.

4) *Orice şir convergent* (x_k) *de puncte din* R^n *este mărginit, adică există un număr* M *astfel ca* $||x_k|| \leqslant M$, *oricare ar fi* $k \in N$.

Într-adevăr, dacă $x_k \to x_0$, atunci $||x_k|| \to ||x_0||$.

Aşadar, şirul de numere $(||x_k||)$ este convergent, deci este mărginit: există atunci un număr $M > 0$, astfel ca $||x_k|| \leqslant M$, oricare ar fi $k \in N$.

O b s e r v a ţ i e. A spune că un şir (x_k) de puncte din R^n este mărginit, revine la a spune că şirul de numere format cu normele $(||x_k||)$ este mărginit.

Dacă şirul (x_k) este mărginit, nu rezultă că este convergent.

5) *Dacă* $x_k \to x_0$ *şi* $y_k \to y_0$, *atunci* $x_k + y_k \to x_0 + y_0$:

$$\lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = \lim_{k\to\infty} x_k + \lim_{k\to\infty} y_k.$$

Într-adevăr

$$||(x_k + y_k) - (x_0 - y_0)|| = ||(x_k - x_0) + (y_k - y_0)|| \leqslant ||x_k - x_0|| + ||x_k - y_0||.$$

Prin ipoteză, $||x_k - x_0|| \to 0$ şi $||y_k - y_0|| \to 0$, deci $||x_k - x_0|| + ||y_k - y_0|| \to 0$. Pe baza criteriului de convergenţă deducem atunci că $x_k + y_k \to x_0 + y_0$.

Proprietatea este adevărată şi pentru suma mai multor şiruri convergente.

6) *Dacă* $x_k \to x_0$ *şi* $y_k \to y_0$, *atunci* $x_k y_k \to x_0 y_0$:

$$\lim_{k\to\infty} (x_k y_k) = \lim_{k\to\infty} x_k \lim_{k\to\infty} y_k$$

Într-adevăr,

$$||x_k y_k - x_0 y_0|| = ||x_k(y_k - y_0) + (x_k - x_0)y_0|| \leqslant ||x_k||\,||y_k - y_0|| + ||x_k - x_0||\,||y_0|| \to 0.$$

7) *Dacă* $x_k \to x_0$ *şi* $y_k \to y_0$, *atunci* $(x_k \mid y_k) \to (x_0 \mid y_0)$:

$$\lim_{k\to\infty} (x_k \mid y_k) = (\lim_{k\to\infty} x_k \mid \lim_{k\to\infty} y_k) = \sum_{i=1}^{m} \lim_{k\to\infty} x_{ik} \lim_{k\to\infty} y_{ik}$$

8) *Dacă* $x_k \to x_0$ *şi* $\alpha_k \to \alpha_0$, $(\alpha_k, \alpha_0 \in R)$, *atunci* $\alpha_k x_k \to \alpha_0 x_0$:

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha_k x_k) = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \cdot \lim_{k\to\infty} x_k.$$

Într-adevăr,

$$||\alpha_k x_k - \alpha_0 x_0|| = ||\alpha_k (x_k - x_0) + (\alpha_k - \alpha_0) x_0|| \leqslant |\alpha_k|\,||x_k - x_0|| + |\alpha_k - \alpha_0|\,||x_0|| \to 0.$$

În particular, luînd $\alpha_k = \alpha$ pentru orice k, rezultă că *dacă* $x_k \to x_0$, *atunci* $\alpha x_k \to \alpha x_0$:

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha x_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} x_k.$$

Pentru $\alpha = -1$ deducem că, dacă $x_k \to x_0$, atunci $-x_k \to -x_0$:

$$\lim_{k\to\infty} (-x_k) = -\lim_{k\to\infty} x_k.$$

Folosind apoi proprietatea 5, rezultă că:

dacă $x_k \to x_0$ *şi* $y_k \to y_0$, *atunci* $x_k - y_k \to x_0 - y_0$:

$$\lim_{k\to\infty} (x_k - y_k) = \lim_{k\to\infty} x_k - \lim_{k\to\infty} y_k.$$

Observaţie. Mulţimea şirurilor convergente de puncte din R^n este o *algebră*, iar operaţia de trecere la limită este liniară şi multiplicativă.

9) *Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are aceeaşi limită.*

Demonstraţia se face la fel ca pentru subşiruri ale şirurilor numerice, folosind definiţia cu vecinătăţi a limitei.

10) *Prin schimbarea ordinei termenilor unui şir convergent se obţine tot un şir convergent şi cu aceeaşi limită.*

Pentru demonstraţie se foloseşte definiţia cu vecinătăţi a limitei.
Se demonstrează la fel următoarea proprietate:

11) *Prin scoaterea sau adăugarea unui număr finit de termeni, la un şir convergent, se obţine tot un şir convergent şi cu aceeaşi limită.*

12) *Un punct $a \in R^n$ este punct de acumulare al unei mulţimi $A \in R^n$ dacă şi numai dacă există un şir $x_k \to a$, format din puncte distincte din A.*

Demonstraţia se face la fel ca şi pentru mulţimi de numere, folosind vecinătăţile $V_k(a)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

13) *O mulţime $A \in R^n$ este închisă dacă şi numai dacă, o dată cu orice şir convergent de puncte din A, limita şirului aparţine de asemenea lui A.*

Demonstraţia este identică cu cea de la mulţimile de numere.

2. Şiruri fundamentale. Criteriul lui Cauchy

Definiţie. Un şir (x_k) de puncte din spaţiul R^n este un şir fundamental (sau şir Cauchy), dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $p \geqslant N(\varepsilon)$ şi $q \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$\| x_p - x_q \| < \varepsilon.$$

Orice şir convergent de puncte din R^n este un şir fundamental.

Demonstraţia se face ca şi pentru şiruri de numere, înlocuind modulul cu norma.

Observaţie. Toate proprietăţile precedente rămîn valabile pentru şiruri de puncte dintr-un spaţiu normat oarecare.

Proprietăţile în enunţul şi demonstraţia cărora n-a intervenit norma, ci numai vecinătăţile, rămîn valabile în spaţii topologice mai generale.

Pentru demonstrarea criteriului lui Cauchy pentru șiruri de puncte din R^n avem nevoie de o propoziție care stabilește o legătură între limita unui șir de puncte din R^n și limitele șirurilor de coordonate.

Această propoziție este de asemenea utilă pentru a da demonstrații mai simple pentru alte proprietăți.

Pentru a evita confuziile, dacă x_k este un termen al șirului $(x_k)_{k\in N}$ de puncte din R^n, vom nota cu $x_{i,k}$ sau x_{ik} coordonata sa de ordin i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}).$$

Așadar, $x_{ik} = \mathrm{pr}_i x_k$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Propoziția 1. Un șir $(x_k)_{k\in N}$ de puncte din R^n are limita $a \in R^n$ dacă și numai dacă, pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n$, șirul coordonatelor $(x_{ik})_{k\in N}$ are limita $a_i = \mathrm{pr}_i a$.

Pentru demonstrație se folosesc inegalitățile:

$$|\alpha_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Prima inegalitate rezultă astfel:

$$\alpha_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2, \text{ deci } |\alpha_i| = \sqrt{\alpha_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}.$$

A doua inegalitate rezultă astfel:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^2| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_i|\,|\alpha_j| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right)^2,$$

deci

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Vom folosi aceste inegalități luînd

$$\alpha_i = x_{ik} - a_i, \ i = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Atunci

$$|x_{ik} - a_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - a_i)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_{ik} - a_i|$$

sau

$$|x_{ik} - a_i| \leqslant \|x_k - a\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_{ik} - a_i|, \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Dacă $x_k \to a$, atunci $x_k - a \to 0$ şi deci, conform criteriului de convergenţă de la şirurile de numere, rezultă

$$x_{ik} \xrightarrow[k]{} a_i$$

pentru fiecare proiecţie, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Reciproc, să presupunem că

$$x_{1k} \xrightarrow[k]{} a_1,\ x_{2k} \xrightarrow[k]{} a_2, \ldots, x_{nk} \xrightarrow[k]{} a_n.$$

Atunci

$$| x_{1k} - a_1 | \xrightarrow[k]{} 0,\ | x_{2k} - a_2 | \xrightarrow[k]{} 0, \ldots, | x_{nk} - a_n | \xrightarrow[k]{} 0,$$

deci $\sum_{i=1}^{n} | x_k - a_i | \xrightarrow[k]{} 0.$

Din inegalităţile de mai sus rezultă atunci că

$$\| x_k - a \| \to 0, \text{ adică } x_k \to a.$$

Observaţii. 1° În cazul planului R^2, unde un punct este notat (x, y), x şi y fiind coordonatele sale, propoziţia precedentă se transcrie astfel:

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0. \end{cases}$$

Iar în cazul spaţiului R^3, propoziţia precedentă se transcrie astfel:

$$(x_n, y_n, z_n) \to (x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \\ z_n \to z_0. \end{cases}$$

2° Din propoziţia precedentă rezultă de asemenea următoarea definiţie echivalentă a unui şir convergent de puncte din R^n:

$\lim_{k\to\infty} x_k = a$, *dacă şi numai dacă, pentru orice număr* $\varepsilon > 0$, *există un număr* $N(\varepsilon)$, *astfel încît pentru orice* $k \geqslant N(\varepsilon)$ *să avem* $| x_{ik} - a_i | < \varepsilon$, *oricare ar fi* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Această definiţie se poate deduce, de altfel, din definiţia cu vecinătăţi, folosind numai vecinătăţile pătratice.

Criteriul lui Cauchy. Un şir $(x_k)_{k\in N}$ de puncte din $\mathbf{R}^n$ este şir convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.

Dacă (x_k) este un şir convergent, atunci el este şir fundamental, după cum s-a specificat mai înainte. Reciproc, să presupunem că (x_k) este şir fundamental şi să arătăm că este convergent. Se folosesc inegalităţile:

$$| x_{ip} - x_{iq} | \leqslant \| x_p - x_q \| \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ p, q = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

Deoarece $(x_k)_{k\in N}$ este şir fundamental, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $p \geqslant N(\varepsilon)$ şi $q \geqslant N(\varepsilon)$, să avem $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$, şi cu atît mai mult $|x_{ip} - x_{iq}| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Aşadar, fiecare şir de coordonate $(x_k)_{k\in N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ este un şir fundamental de numere, şi deci este convergent:

$$x_{1k} \xrightarrow[k]{} a_1,\ x_{2k} \xrightarrow[k]{} a_2,\ \ldots,\ x_{nk} \xrightarrow[k]{} a_n.$$

Conform propoziţiei precedente, şirul (x_k) este convergent şi are limita $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Observaţii. Un spaţiu metric în care fiecare şir fundamental este convergent se numeşte *spaţiu complet*.

Un spaţiu normat complet se numeşte spaţiu Banach.

O algebră normată completă se numeşte *algebră Banach*.

Rezultă că spaţiul normat R^n este complet, deci este un spaţiu Banach.

Un spaţiu Banach în care norma se poate deduce dintr-un produs scalar se numeşte spaţiu Hilbert. Un spaţiu Hilbert cu n dimensiuni se numeşte euclidian n-dimensional.

Rezultă că spaţiul Banach R^n, cu norma $\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)}$, este un spaţiu Hilbert, cu n dimensiuni, adică un spaţiu euclidian n-dimensional.

R^n este de asemenea un spaţiu Banach pentru normele $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ şi $\|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. Aceste norme nu se pot deduce dintr-un produs scalar deci, pentru aceste norme, R^n nu este spaţiu Hilbert.

3. Lema lui Cesàro. Teorema lui Weierstrass-Bolzano. Teorema lui Borel-Lebesgue

Lema lui Cesàro. Orice şir mărginit de puncte din R^n conţine un subşir convergent.

Pentru simplificarea scrisului, vom da demonstraţia acestei leme în cazul spaţiului R^3.

Fie $(x_n, y_n, z_n)_{n\in N}$ un şir mărginit din R^3. Din inegalităţile

$$|x_n| < \|(x_n, y_n, z_n)\|,$$
$$|y_n| < \|(x_n, y_n, z_n)\|,$$
$$|z_n| < \|(x_n, y_n, z_n)\|,$$

rezultă că şirurile coordonatelor, (x_n), (y_n), (z_n), sînt de asemenea mărginite, deci li se poate aplica lema lui Cesàro pentru şirurile numerice.

Şirul (x_n), fiind mărginit, conţine un subşir convergent

$$x_n' \to x_0.$$

Să extragem din şirul (y_n) subşirul (y_n') format din termenii care au aceiaşi indici ca şi cei ai subşirului (x_n') în şirul (x_n).

Subşirul (y_n') este de asemenea mărginit, deci conţine un subşir convergent

$$y_n'' \to y_0.$$

Să extragem din şirul (z_n) subşirul (z_n') format din termenii care au aceiaşi indici ca şi cei ai subşirului (y_n') în şirul (y_n).

Subşirul (z_n') este de asemenea mărginit, deci conţine un subşir convergent

$$z_n''' \to z_0.$$

Să reţinem din şirurile (x_n) şi (y_n) acei termeni care au aceiaşi indici ca şi cei ai subşirului (z_n''') în şirul (z_n). Obţinem subşirurile (x_n''') şi (y_n'''). Cum (x_n''') este şi subşir al şirului (x_n'), avem

$$x_n''' \to x_0.$$

De asemenea, deoarece (y_n''') este şi subşir al şirului (y_n'') avem

$$y_n''' \to y_0.$$

Atunci $((x_n''', y_n''', z_n'''))_{n\in N}$ este un subşir convergent al şirului iniţial $((x_n, y_n, z_n))_{n\in N}$:

$$(x_n''', y_n''', z_n''') \to (x_0, y_0, z_0)$$

şi lema este demonstrată.

Teorema lui Weierstrass - Bolzano. Orice mulţime mărginită şi infinită are cel puţin un punct de acumulare.

Deoarece A este infinită, putem extrage un şir (x_k) de puncte *distincte* din A. Şirul (x_k) este mărginit, deoarece A este mărginită. Conform lemei lui Cesàro şirul (x_k) conţine un subşir convergent

$$x_{nk} \to x_0.$$

Rezultă că fiecare vecinătate a lui x_0 conţine o infinitate de termeni ai subşirului (x_{nk}), adică o infinitate de puncte din A, deci x_0 este punct de acumulare al mulţimii A.

Propoziţie. Dacă mulţimea $A \subset R^n$ este compactă, atunci proiecţiile sale $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt mulţimi compacte pe dreaptă.

Deoarece A este compactă, este mărginită; proiecţiile sale $A_1, A_2, \ldots,$ sînt de asemenea *mărginite*.

Rămîne de arătat că proiecţiile sînt mulţimi închise.

Vom face demonstraţia numai pentru mulţimea A_1.

Fie $x_{1k} \xrightarrow[k]{} a_1$ un şir convergent de puncte din A_1; să arătăm că şi limita sa a_1 aparţine lui A_1, de unde va rezulta că A_1 este închisă.

Deoarece $x_{1k} \in A_1$, există un şir (x_k) de puncte din A, ale căror proiecţii pe prima axă sînt termenii şirului (x_{1k})

$$\text{pr}_1 x_k = x_{1k}.$$

Şirul (x_k) este mărginit (deoarece A este mărginită). El conţine deci un subşir convergent $x_{k_p} \xrightarrow[p]{} b$ şi, deoarece A este închisă, limita şirului aparţine de asemenea lui A, $b \in A$.

Atunci $x_{1k_p} \xrightarrow[p]{} b_1$ şi deoarece $b \in A$, avem $b_1 \in A_1$.

Dar $(x_{1k_p})_{p\in N}$ este un subşir al şirului $(x_{1k})_{k\in N}$, deci are aceeaşi limită, $x_{1k_p} \xrightarrow[p]{} a_1$; limita unui şir convergent fiind unică, rezultă că $a_1 = b_1$ şi deci $a_1 \in A_1$.

O b s e r v a ţ i e. Dacă toate proiecţiile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt mărginite, rezultă că şi A este mărginită. Dacă toate proiecţiile sînt închise, nu rezultă însă că şi A este închisă. Aşadar, dacă proiecţiile sînt compacte, nu rezultă că A este compactă.

T e o r e m a l u i B o r e l - L e b e s g u e. Din orice acoperire cu mulţimi deschise a unei mulţimi compacte $A \subset R^n$, se poate extrage o acoperire finită a mulţimii A.

Fie (G_α) o familie de mulţimi deschise care acoperă pe A. Pentru fiecare punct $x \in A$, există o mulţime deschisă G_α din familie, astfel ca $x \in G_\alpha$; x este deci punct interior al lui G_α. Există atunci o vecinătate dreptunghiulară I_α a lui x, astfel ca $x \in I_\alpha \subset G_\alpha$. Am obţinut astfel o familie de vecinătăţi dreptunghiulare (I_α) care acoperă pe A.

Să notăm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ proiecţiile mulţimii compacte A. Aceste proiecţii sînt de asemenea mulţimi compacte.

Fie $(I^1_\alpha), (I^2_\alpha), \ldots, (I^n_\alpha)$ familiile de intervale deschise liniare, obţinute cu proiecţiile intervalelor n-dimensionale ale familiei (I_α). Familia (I^i_α) acoperă mulţimea compactă A_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, deci conform teoremei lui Borel-Lebesgue de pe dreaptă, există un număr *finit* de intervale din (I^i_α) care acoperă pe A_i. Intervalele n-dimensionale de forma $I_\alpha = I^1_{\alpha_1} \times \times I^2_{\alpha_2} \times \ldots \times I^n_{\alpha_n}$, formate cu acele intervale care acoperă respectiv mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sînt în număr *finit*. Aceste intervale n-dimensionale acoperă mulţimea $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ şi cu atît mai mult mulţimea A, deoarece $A \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Fiecare asemenea interval I_α este conţinut într-o mulţime G_α. Obţinem astfel un număr finit de mulţimi G_α care acoperă mulţimea A.

O b s e r v a ţ i e. Teorema reciprocă este de asemenea adevărată. Aşadar:

O mulţime $A \subset R^n$ este compactă dacă şi numai dacă, din orice acoperire a lui A cu mulţimi deschise se poate extrage o acoperire finită. Într-un spaţiu topologic oarecare, acest enunţ se ia ca definiţie a mulţimilor compacte. Într-un spaţiu normat cu o infinitate de dimensiuni, o mulţime închisă şi mărginită poate să nu fie compactă.

§ 4. Funcţii definite pe mulţimi din R^n

1. Funcţii vectoriale de variabilă vectorială

Fie E o mulţime din R^n şi $f : E \to R^m$ o funcţie definită pe E cu valori în spaţiul cu m dimensiuni.

Argumentul funcţiei f este un vector din R^n, iar valorile funcţiei sînt, de asemenea, vectori. Spunem că f este o *funcţie vectorială de variabilă vectorială*.

O variabilă vectorială x din R^n este echivalentă cu n variabile reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (care sînt coordonatele lui x).

Valorile funcţiei se notează

$$f(x) \text{ sau } f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

iar funcţia f se mai numeşte *funcţia* (vectorială) *de n variabile reale*.

În cazul cînd $R^m = R^1$, f este o *funcţie reală de n variabile reale*.

Exemple. 1) Funcţia *proiecţie* $\mathrm{pr}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1$ este o funcţie reală de n variabile reale. De asemenea, proiecţiile $\mathrm{pr}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_2, \ldots, \mathrm{pr}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n$ sînt funcţii reale de n variabile.

2) Funcţia sumă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ şi funcţia produs $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$ sînt funcţii reale de n variabile reale.

Fiind dată o funcţie vectorială $f : E \to R^m$, putem obţine m funcţii reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ definite pe E, prin compunerea funcţiei f cu funcţiile proiecţie:

$$f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f,\ f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f,\ \ldots,\ f_m = \mathrm{pr}_m \circ f.$$

Pentru fiecare $x \in E$ avem

$$f_1(x) = \mathrm{pr}_1 f(x),\ f_2(x) = \mathrm{pr}_2 f(x),\ \ldots,\ f_m(x) = \mathrm{pr}_m f(x)$$

şi deci

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)).$$

Convenim să scriem această ultimă egalitate astfel:

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Funcţiile reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ se numesc *componentele reale ale funcţiei vectoriale f*.

Pe de altă parte, m funcţii reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ definite pe o aceeaşi mulţime $E \subset R^n$ pot fi considerate totdeauna ca fiind componentele reale ale unei funcţii vectoriale $f : E \to R^m$.

Ţinînd seama de aceste consideraţii, putem reduce totdeauna studiul unei funcţii vectoriale la studiul unor funcţii reale.

De multe ori este însă mai simplu studiul direct al funcţiei vectoriale.

Dacă mulţimea de definiţie E este o parte a dreptei, funcţiile $f : E \to R^m$ sînt funcţii vectoriale de o singură variabilă reală.

Dacă E este o parte a planului R^2, funcţiile $f : E \to R^m$ sînt funcţii vectoriale de două variabile reale şi se notează $f(x, y)$.

La fel se definesc funcţiile vectoriale de trei variabile reale $f(x, y, z)$.

Dacă E este un interval n-dimensional (mărginit sau nemărginit) $E = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, atunci cînd variabilele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ parcurg respectiv intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$, variabila vectorială $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ parcurge tot intervalul n-dimensional E.

Dacă însă E nu este interval n-dimensional (ci, de exemplu, sferă), fiecare variabilă reală parcurge o mulţime care depinde de valorile fixate ale celorlalte variabile.

Pentru anumite valori *fixate* $x_2, x_3, \ldots, x_n$, să considerăm mulţimea tuturor punctelor $x \in E$, care au coordonatele de ordin $\geqslant 2$ egale respectiv cu $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Proiecţia acestei mulţimi pe prima axă este mulţimea

$$E_1 = \{x_1 \mid x_1 \in R, (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in E\}.$$

Această mulţime depinde, în general, de valorile $x_2, x_3, \ldots, x_n$, alese.

Pentru valorile fixate $x_2, x_3, \ldots, x_n$, funcţia de o singură variabilă $f_1 : x_1 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definită pe mulţimea E_1, se numeşte *funcţie parţială* a funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Pentru fiecare sistem de numere $x_2, x_3, \ldots, x_n$ pentru care mulţimea corespunzătoare E_1 nu este vidă, obţinem cîte o funcţie parţială $x_1 \to f(x_1, x_2, \ldots, {}_n)$.

Se definesc în mod asemănător funcţiile parţiale de forma

$$f_2 : x_2 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n : x_n \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Să exemplificăm consideraţiile precedente în cazul funcţiilor de două variabile. Pentru simplitate să notăm cu (x, y) un punct oarecare din plan. Funcţiile de două variabile se notează atunci cu $f(x, y)$.

Exemple. 1) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ definită pe cercul cu centrul în O şi raza 1, $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Pentru $y = \dfrac{1}{2}$ obţinem funcţia parţială

$$f_1(x) = f\left(x, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{4} - x^2}$$

definită pe intervalul $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Pentru $y = \dfrac{1}{3}$ obţinem funcţia parţială $f_1(x) = f\left(x, \dfrac{1}{3}\right) = \sqrt{\dfrac{8}{9}}$ definită pe intervalul $\left[-\dfrac{\sqrt{8}}{3}, \dfrac{\sqrt{8}}{3}\right]$.

Pentru $y = 0$ obţinem funcţia parţială $f_1(x) = f(x, 0) = \sqrt{1 - x^2}$, definită pe intervalul $[-1, 1]$.

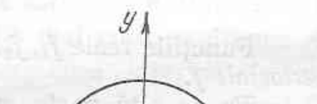


Fig. 138

Pentru $x = \frac{1}{5}$ obţinem funcţia parţială $f_2(y) = f\left(\frac{1}{5}, y\right) = \sqrt{\frac{24}{25} - y^2}$ definită pe intervalul $\left[-\frac{\sqrt{24}}{5}, \frac{\sqrt{24}}{5}\right]$.

2) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$ definită pe mulţimea punctelor (x, y) din plan pentru care $\left|\frac{x}{y}\right| \leqslant 1$ şi $y \neq 0$, $(-y \leqslant x \leqslant y$ dacă $y > 0$ şi $y \leqslant x \leqslant -y$ dacă $y < 0)$.

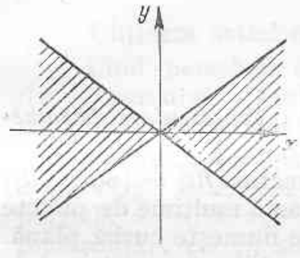


Fig. 139

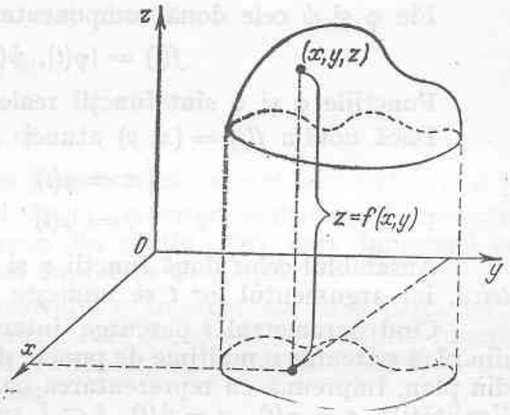


Fig. 140

Mulţimea de definiţie este porţiunea din plan care conţine axa Ox cuprinsă între bisectoarele axelor de coordonate, fără origine.

3) $f(x, y) = x + y$ definită pe R^2.

4) $f(x, y) = xy$ definită pe R^2.

5) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ definită pe mulţimea

$E = \{(x, y) | x, y \in R, y \neq 0\}$ formată din tot planul afară de axa Oy.

6) $f(x, y) = x^y$ definită pe mulţimea

$E = \{(x, y) | x, y \in R, x > 0\}$, adică pe semiplanul de la dreapta axei Oy, fără axa Oy.

Graficul unei funcţii reale de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definită pe o mulţime $E \subset R^n$, este format din toate punctele din spaţiul R^{n+1}, de forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ unde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$.

Graficul unei funcţii de două variabile $f(x, y)$ definită pe o mulţime E din plan este o mulţime din spaţiul cu trei dimensiuni:

$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in E, z = f(x, y)\}.$$

Graficul unei funcţii de două variabile este o „suprafaţă" în spaţiu.

2. Aplicaţii. Curbe şi suprafeţe. Transformări punctuale

1) *Curbe plane.* Fie f o funcţie definită pe un interval I de pe dreaptă, cu valori în plan.

Această funcţie face să corespundă fiecărui punct $t \in I$, punctul $f(t)$ din plan; f este o funcţie vectorială (cu valori în plan) de o variabilă reală.

Fie φ şi ψ cele două componente reale ale funcţiei f:

$$f(t) = (\varphi(t), \psi(t)), \ t \in I.$$

Funcţiile φ şi ψ sînt funcţii reale de variabila t.

Dacă notăm $f(t) = (x, y)$ atunci

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Ansamblul celor două funcţii φ şi ψ constituie o *reprezentare parametrică*, iar argumentul lor t se numeşte *parametru.*

Cînd parametrul t parcurge intervalul I, punctul $f(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ din plan parcurge o mulţime de puncte din plan. Această mulţime de puncte din plan, împreună cu reprezentarea parametrică, se numeşte curbă plană. Egalităţile $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$ se numesc ecuaţiile parametrice ale curbei plane.

2) *Curbe strîmbe.* Fie f o funcţie vectorială definită pe un interval I, cu valori în spaţiul R^3. Funcţia vectorială f are în acest caz trei componente reale, φ, ψ, χ. Anume, dacă notăm $f(t) = (x, y, z)$, atunci

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in I. \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

Ansamblul funcţiilor φ, ψ şi χ constituie de asemenea o *reprezentare parametrică.*

Cînd parametrul t parcurge intervalul I, punctul $f(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ parcurge o mulţime de puncte din spaţiu. Această mulţime din spaţiu, împreună cu reprezentarea parametrică, se numeşte curbă în spaţiu (sau, uneori, curbă strîmbă).

Mai multe reprezentări parametrice diferite pot defini aceeaşi curbă strîmbă.

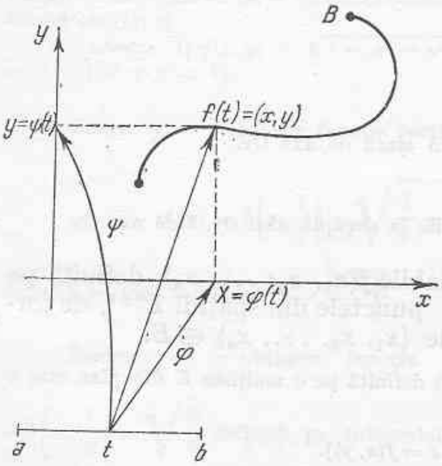


Fig. 141

Egalităţile $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ (unde $t \in I$) se numesc ecuaţiile parametrice ale curbei.

3) *Suprafeţe*. Fie f o funcţie definită pe o mulţime E din plan, cu valori în spaţiul R^3; f este o funcţie de două variabile, pe care să le notăm u şi v, $(u, v) \in E$. Aşadar, funcţia se notează $f(u, v)$. Avînd valorile în spaţiul R^3, această funcţie are trei componente reale φ, ψ, χ, definite pe E:

$$f(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)).$$

Dacă se notează $f(u, v) = (x, y, z)$ atunci

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in E \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Obţinem astfel o reprezentare parametrică, cu doi parametri, u şi v.

Cînd perechea de parametri (u, v) parcurge mulţimea E, punctul $f(u, v)$ parcurge o mulţime de puncte din spaţiu, $f(E)$, care împreună cu reprezentarea parametrică constitue suprafaţa în spaţiu.

Să fixăm o valoare v_0 a parametrului v. În acest caz, dacă parametrul u parcurge mulţimea valorilor pentru care $(u, v) \in E$, se obţine funcţia parţială $u \to f(u, v_0)$, de o singură variabilă, cu valori în spaţiu, deci o reprezentare cu un singur parametru

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v_0), \\ y = \psi(u, v_0), \\ z = \chi(u, v_0). \end{cases}$$

Această reprezentare defineşte o curbă în spaţiu, conţinută în suprafaţa $f(E)$, numită curba $v = v_0$.

De asemenea, dacă se fixează o valoare u_0 a parametrului u, şi dacă parametrul v parcurge mulţimea valorilor pentru care $(u_0, v) \in E$, se obţine funcţia parţială $v \to f(u_0, v)$ de o singură variabilă cu valori în spaţiu, deci o reprezentare cu un singur parametru

$$\begin{cases} x = \varphi(u_0, v), \\ y = \psi(u_0, v), \\ z = \chi(u_0, v). \end{cases}$$

Această reprezentare defineşte de asemenea o curbă pe suprafaţa $f(E)$, numită curba $u = u_0$.

Observaţie. În volumul II noţiunile de curbă şi suprafaţă vor fi mai bine precizate.

4) *Transformări punctuale în plan*. Fie E şi F două mulţimi din plan şi T o aplicaţie *biunivocă* a mulţimii E pe mulţimea F.

$$T : E \to F, \quad E, F \subset R^2.$$

Fiecărui punct $(u, v) \in E$ îi corespunde punctul $T(u, v) \in F$. Funcţia $T(u, v)$ este o funcţie vectorială de două variabile. Ea are două componente reale, f şi g, definite pe E.

$$T(u, v) = (f(u, v), g(u, v)), (u, v) \in E.$$

Dacă se notează $T(u, v) = (x, y)$, atunci

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}, (u, v) \in E.$$

Dacă γ este o curbă conţinută în mulţimea E dată de reprezentarea parametric

$$\begin{cases} u = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}, t \in I,$$

atunci $\Gamma = T(\gamma)$ este o curbă conţinută în mulţimea $F = T(E)$ dată de reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = f(\alpha(t), \beta(t)) \\ y = g(\alpha(t), \beta(t)) \end{cases}, t \in I.$$

Funcţia biunivocă $T: E \to F$ se numeşte de obicei *transformare punctuală* de la mulţimea E la mulţimea F. Funcţia sa inversă $\overset{-1}{T}: F \to E$, care este de asemenea biunivocă, este o funcţie vectorială de două variabile: fiecărui punct $(x, y) \in F$ îi corespunde punctul $(u, v) = \overset{-1}{T}(x, y) \in E$; avem

$$\overset{-1}{T}\, T(u, v) = (u, v) \quad T \cdot \overset{-1}{T}(x, y) = (x, y), \quad \begin{matrix} (u, v) \in E \\ (x, y) \in F. \end{matrix}$$

Funcţia $\overset{-1}{T}$ este de asemenea o transformare punctuală de la mulţimea F la E.

Funcţia vectorială $\overset{-1}{T}$ are două componente reale φ şi ψ definite pe F. Dacă se notează $(u, v) = \overset{-1}{T}(x, y)$, atunci

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}, (x, y) \in F.$$

Între componentele f şi g ale lui T şi componentele φ şi ψ ale lui $\overset{-1}{T}$ avem următoarele relaţii:

$$\begin{cases} \varphi(f(u, v), g(u, v)) = u \\ \psi(f(u, v), g(u, v)) = v \end{cases}, (u, v) \in E;$$

$$\begin{cases} f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = x \\ g(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = y \end{cases}, (x, y) \in F.$$

Sistemul $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}$

se obţine rezolvînd în raport cu x şi y sistemul

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}$$

şi, reciproc, ultimul sistem se obţine din primul, rezolvîndu-l în raport cu u şi v.

5) *Transformări punctuale în spaţiu.* Putem considera transformări punctuale T între două mulţimi E şi F din spaţiul cu trei dimensiuni. În acest caz funcţia biunivocă T are trei componente reale f, g, h, definite pe E. Dacă se notează $T(u, v, w) = (x, y, z)$, atunci

$$\begin{cases} x = f(u, v, w) \\ y = g(u, v, w), \ (u, v, w) \in E. \\ z = h(u, v, w) \end{cases}$$

Aplicaţia inversă $\overset{-1}{T} : F \to E$ are de asemenea trei componente reale φ, ψ, χ, definite pe F. Dacă se notează $\overset{-1}{T}(x, y, z) = (u, v, w)$, atunci

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y, z) \\ v = \psi(x, y, z), \ (x, y, z) \in F. \\ w = \chi(x, y, z) \end{cases}$$

Primul sistem se obţine din ultimul, rezolvîndu-l în raport cu x, y şi z, deci pentru $(u, v, w) \in E$ avem

$$\begin{cases} u = \varphi(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)), \\ v = \psi(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)), \\ w = \chi(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)). \end{cases}$$

Ultimul sistem se obţine din primul rezolvîndu-l în raport cu u, v, şi w, deci pentru $(x, y, z) \in F$ avem

$$\begin{cases} x = f(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)), \\ y = g(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)), \\ z = h(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)). \end{cases}$$

3. Operaţii cu funcţii vectoriale

Fie E o mulţime din R^n, f şi g două funcţii definite pe E cu valori în spaţiul R^m. Suma $f + g$ şi produsul fg sînt funcţii definite pe E cu valori în R^m, astfel:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ pentru } x \in E$$
$$(fg)(x) = f(x)\, g(x), \text{ pentru } x \in E.$$

Produsul αf al funcţiei f cu numărul real α este funcţie definită pe E cu valori în R^m astfel:

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \text{ pentru } x \in E.$$

Mulţimea tuturor funcţiilor definite pe E cu valori în R^m este o *algebră* pentru operaţiile $f + g$, fg şi αf.

Folosind produsul scalar din R^m, se defineşte *funcţia reală* $(f|g)$ pe E prin egalitatea $(f|g)(x) = (f(x)|g(x))$, pentru $x \in E$.

Folosind componentele reale ale funcţiilor f şi g, avem

$$(f|g)(x) = (f(x)|g(x)) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\, g_i(x),$$

adică

$$(f|g) = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i.$$

Putem apoi defini funcţia pozitivă $||f||$ pe E prin egalitatea

$$||f||\,(x) = ||f(x)||, \text{ pentru } x \in E.$$

Avem atunci

$$||f|| = \sqrt{(ff)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} f_i^2}.$$

4. Compunerea funcţiilor vectoriale

Fie mulţimile $E \subset R^n$, $F \subset R^m$ şi funcţiile $f: E \to F$, $g: F \to R^p$. Să considerăm de asemenea funcţia compusă $h = g \circ f : E \to R^p$:

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in E.$$

Să cercetăm cum se comportă componentene reale ale funcţiilor vectoriale faţă de operaţia de compunere a acestor funcţii.

Funcţia vectorială f are valori în $F \subset R^m$, deci are m componente reale, $f_1, f_2, \ldots, f_m : E \to R$

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Funcţia vectorială g are valori în R^p, deci are p componente reale, $g_1, g_2, \ldots, g_p : F \to R$

$$g = (g_1, g_2, \ldots, g_p).$$

Se defineşte de asemenea produsul $\varphi \cdot f$ cu o funcţie reală $\varphi : E \to R$ prin egalitatea $(\varphi f)(x) = \varphi(x) f(x)$, $x \in E$.

Operaţiile de adunare, înmulţire şi înmulţire cu scalari (sau cu funcţii scalare) ale funcţiilor vectoriale se reduc la operaţiile respective efectuate asupra componentelor lor reale.

Astfel, dacă $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ şi $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$, atunci

$$f + g = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots, f_m + g_m)$$

$$fg = (f_1 g_1, f_2 g_2, \ldots, f_m g_m)$$

$$\alpha f = (\alpha f_1, \alpha f_2, \ldots, \alpha f_m)$$

$$\varphi f = (\varphi f_1, \varphi f_2, \ldots, \varphi f_m).$$

Într-adevăr, pentru orice $x \in E$ avem

$$(f + g)\ (x) = f(x) + g(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) + (g_1(x), \ldots, g_m(x)) =$$
$$= (f_1(x) + g_1(x), \ldots, f_m(x) + g_m(x)) = ((f_1 + g_1)\ (x), \ldots, (f_m + g_m)\ (x)),$$

adică

$$f + g = (f_1 + g_1, \ldots, f_m + g_m).$$

La fel se demonstrează celelalte egalităţi.

Funcţia vectorială $h = g \circ f$ are valori în R^p, deci are p componente reale $h_1, h_2, \ldots, h_p : E \to R$

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_p).$$

Atunci

$$h_1 = g_1 \circ f, \quad h_2 = g_2 \circ f, \ldots, h_p = g_p \circ f.$$

Într-adevăr, pentru orice $x \in E$, avem $f(x) \in F$, deci

$$h(x) = g(f(x)) = (g_1(f(x)), g_2(f(x)), \ldots, g_p(f(x))),$$

iar, pe de altă parte,

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x), \ldots, h_p(x)),$$

deci

$$h_1(x) = g_1(f(x)), h_2(x), = g_2(f(x)), \ldots, h_p(x) = g_p(f(x)),$$

de unde rezultă egalităţile de mai sus.

Aşadar: *a compune funcţia g cu funcţia f revine la a compune componentele reale ale lui g cu funcţia f.*

Sau: pentru a obţine componentele reale ale funcţiei compuse $h = g \circ f$, se compun componentele reale ale funcţiei g cu funcţia f.

Studiul compunerii funcţiilor vectoriale se reduce astfel la acela al compunerii unei funcţii reale cu o funcţie vectorială, rezultatul fiind o funcţie reală.

Mai departe, problema compunerii unei funcţii reale g cu o funcţie vectorială f se poate reduce numai la compunerea funcţiilor reale, folosind componentele reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ al funcţiei f.

În acest caz avem, pentru orice $x \in E$,

$$h(x) = g(f(x)) = g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)).$$

Scriind apoi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, avem

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Aşadar, dîndu-se m funcţii reale de n variabile definite pe $E \subset R^n$,

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

şi funcţia reală $g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ de m variabile definite pe mulţimea

$$F \subset f_1(E) \times f_2(E) \times \ldots \times f_m(E) \subset R^m,$$

obţinem funcţia reală h de n variabile definită pe E:

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Exemple. 1) Fie $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, $t = \in [a, b]$ o reprezentare parametrică ce defineşte o curbă Γ din plan, şi fie h o aplicaţie *strict crescătoare* a intervalului $[\alpha, \beta]$ pe intervalul $[a, b]$:

$$h : [\alpha, \beta] \to [a, b].$$

Funcţiile compuse $\varphi = f \circ h$, $\psi = g \circ h$ definite pe intervalul $[\alpha, \beta]$ constituie o reprezentare parametrică ce defineşte aceeaşi curbă în plan:

$$\begin{cases} x = \varphi(\tau) \\ y = \psi(\tau) \end{cases}, \quad \tau \in [\alpha, \beta].$$

Într-adevăr, fie $(x_0, y_0) \in \Gamma$ un punct oarecare: există un punct $t_0 \in [a, b]$ astfel ca

$$x_0 = f(t_0),$$
$$y_0 = g(t_0).$$

Deoarece funcţia h este biunivocă, există un punct $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ astfel ca $t_0 = h(\tau_0)$; atunci

$$\varphi(\tau_0) = f(h(\tau_0)) = f(t_0) = x_0,$$
$$\psi(\tau_0) = g(h(\tau_0)) = g(t_0) = y_0,$$

deci punctul (x_0, y_0) aparţine şi curbei γ definite de reprezentarea parametrică (φ, ψ), adică $\Gamma \subset \gamma$.

Reciproc, fie $(x_0, y_0) \in \gamma$. Există un punct $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$, astfel ca

$$x_0 = \varphi(\tau_0),$$
$$y_0 = \psi(\tau_0).$$

Să notăm $t_0 = h(\tau_0) \in [a, b]$.

Atunci

$$f(t_0) = f(h(\tau_0)) = \varphi(\tau_0) = x_0,$$
$$g(t_0) = g(h(\tau_0)) = \psi(\tau_0) = y_0,$$

deci

$$(x_0, y_0) \in \Gamma, \text{ adică } \gamma \subset \Gamma. \text{ Rezultă atunci că } \gamma = \Gamma.$$

Trebuie să arătăm acum că cele două reprezentări stabilesc aceeaşi ordine de parcurgere pe curba Γ.

Fie $\tau_1 < \tau_2$ din $[\alpha, \beta]$ şi fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ punctele corespunzătoare de pe Γ:

$$x_1 = \varphi(\tau_1), \qquad x_2 = \varphi(\tau_2),$$
$$y_1 = \psi(\tau_1), \qquad y_2 = \psi(\tau_2).$$

În ordinea de parcurgere stabilită de reprezentarea (φ, ψ) întîlnim întîi punctul M_1, apoi punctul M_2.

Fie $t_1 = h(\tau_1)$ şi $t_2 = h(\tau_2)$. Deoarece h este strict crescătoare, avem $t_1 < t_2$. Punctelor t_1 şi t_2 le corespund, respectiv, tot punctele M_1 şi M_2 pe curba Γ:

$$x_1 = \varphi(\tau_1) = f(h(\tau_1)) = f(t_1), \; x_2 = \varphi(\tau_2) = f(h(\tau_2)) = f(t_2),$$
$$y_1 = \psi(\tau_1) = g(h(\tau_1)) = g(t_1), y_2 = \psi(\tau_2) = g(h(\tau_2)) = g(t_2).$$

Deoarece $t_1 < t_2$, înseamnă că şi în ordinea stabilită de reprezentarea (f, g) întîlnim întîi punctul M_1 şi apoi punctul M_2.

Cele două reprezentări definesc aceeaşi ordine pe mulţimea Γ, deci definesc aceeaşi curbă.

Consideraţii asemănătoare se pot face pentru curbe în spaţiul R^3.

2) Fie $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u\ v), (u, v) \in E \subset R^2 \\ z = h(u, v) \end{cases}$ o reprezentare cu doi parametri

care defineşte o suprafaţă S în spaţiu.

Fie T o transformare punctuală (aplicaţie biunivocă) a mulţimii $F \subset R^2$ pe mulţimea $E \subset R^2$, $T : F \to E$:

$$T(U, V) = (u, v), \qquad (U, V) \in F, \qquad (u, v) \in E.$$

Atunci, funcţiile compuse $\varphi = f \circ T$, $\psi = g \circ T$, $\chi = h \circ T$ definite pe F determină de asemenea o reprezentare cu doi parametri ce definesc aceeaşi suprafaţă:

$$\begin{cases} x = \varphi(U, V) \\ y = \psi(U, V), \qquad (U, V) \in F, \\ z = \chi(U, V) \end{cases}$$

unde

$$\varphi(U, V) = f(T(U, V)) = f(u, v)$$
$$\psi(U, V) = g(T(U, V)) = g(u, v), \qquad (u, v) \in E.$$
$$\chi(U, V) = h(T(U, V)) = h(u, v)$$

5. Inversarea funcţiilor vectoriale

Fie $E \subset R^n$ şi $F \subset R^m$, T o aplicaţie biunivocă a mulţimii E pe mulţimea F, şi $\overset{-1}{T}$ aplicaţia sa inversă

$$T : E \to F$$
$$\overset{-1}{T} : F \to E$$
$$\overset{-1}{T}T(x) = x, \qquad x \in E$$
$$\overset{-1}{T}T(y) = y, \qquad y \in F.$$

Funcţia T are valori în $F \subset R^m$, deci are m componente reale, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ definite pe $E \subset R^n$

$$T = (f_1, f_2, \ldots f_m).$$

Funcţia $\overset{-1}{T}$ are valori în $E \subset R^n$ deci are n componente reale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ definite pe $F \subset R^m$

$$\overset{-1}{T} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

Să stabilim ce legătură există între componentele reale ale celor două funcţii inverse:

Avem:

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)), \qquad x \in E \subset R^n.$$
$$\overset{-1}{T}(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(y)), \qquad y \in F \subset R^m.$$

Pentru fiecare $y \in F$, există un punct $x \in E$ şi numai unul, astfel încît $y = T(x)$, şi anume punctul $x = \overset{-1}{T}(y)$. Altfel spus, pentru fiecare vector $y \in F$, ecuaţia

$$y = T(x),$$

cu necunoscuta vectorială x, are o soluţie x în E şi numai una, şi anume

$$x = \overset{-1}{T}(y).$$

Fie $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in F$, şi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$.

Egalitatea $y = T(x)$ se scrie

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m) = T(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)),$$

adică

$$y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x),\ \ldots,\ y_m = f_m(x)$$

sau

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Ecuaţia vectorială $y = T(x)$ este echivalentă cu un sistem de m ecuaţii scalare.

Relaţia $x = \overset{-1}{T}(y)$ (echivalentă cu relaţia $y = T(x)$) se scrie

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overset{-1}{T}(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(y)),$$

adică

$$x_1 = \varphi_1(y),\ x_2 = \varphi_2(y),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(y)$$

sau

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_m). \end{cases}$$

A spune că pentru fiecare $y \in F$, ecuaţia $y = T(x)$ are o soluţie şi numai una, $x = \overset{-1}{T}y$ în E, revine la a spune că, pentru fiecare sistem de valori $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, sistemul (1) de m ecuaţii cu n necunoscute are o singură soluţie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dată de egalităţile (2). Aşadar, componentele reale ale funcţiilor vectoriale T şi $\overset{-1}{T}$ reprezintă, respectiv, funcţiile din membrul drept al ecuaţiilor sistemului (1), şi funcţiile din membrul drept ale soluţiilor (2) ale sistemului (1).

6. Funcţii mărginite

Fie f o mulţime definită pe o mulţime $E \subset R^n$ cu valori în R^m.

D e f i n i ţ i e. Se spune că funcţia f este mărginită (pe mulţimea E) dacă mulţimea valorilor $f(E) \subset R^m$ este mărginită.

Aceasta înseamnă că există o sferă $V_r(a)$ în R^m care conţine mulţimea valorilor $f(E)$.

Există de asemenea o sferă $V_M(O)$ cu centrul în O şi care conţine sfera $V_r(a)$, deci conţine şi mulţimea $f(E)$: dacă luăm $M = ||a|| + r$, atunci $V_r(a) \subset V_M(O)$. Într-adevăr, dacă $x \in V_r(a)$, atunci $||x - a|| < r$, deci $||x|| = ||x - a + a|| \leqslant ||x - a|| + ||a|| < r + ||a|| = M$, adică $x \in V_M(O)$ şi deci $V_r(a) \subset V_M(O)$.

Aşadar, în definiţia funcţiilor mărginite (şi a mulţimilor mărginite) putem folosi numai sfere cu centrul în origine.

A spune că $f(E) \subset V_M(a)$, înseamnă că $||f(x)|| < M$ pentru orice $x \in E$. Obţinem astfel o definiţie echivalentă cu cea precedentă dată de următoarea:

P r o p o z i ţ i e. Funcţia $f: E \to R^m$ este mărginită dacă şi numai dacă există un număr M astfel încît, pentru orice $x \in E$, să avem $||f(x)|| \leqslant M$.

C o r o l a r . Funcţia vectorială $f: E \to R^m$ este mărginită dacă şi numai dacă funcţia reală $x \to ||f(x)||$ definită pe E este mărginită (adică dacă $\sup\limits_{x \in E} ||f(x)|| < +\infty$).

O b s e r v a ţ i e. Dacă funcţia f nu are valori reale, ci într-un spaţiu cu $n \geqslant 2$ dimensiuni, nu mai au sens noţiunile de funcţie majorată sau minorată şi nici marginile funcţiei, deoarece într-un asemenea spaţiu nu avem o relaţie de ordine.

P r o p o z i ţ i e. Funcţia vectorială f este mărginită dacă şi numai dacă toate componentele sale reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt mărginite.

Într-adevăr, pentru orice $x \in E$, avem

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

şi

$$|f_i(x)| \leqslant ||f(x)|| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|.$$

Dacă funcţia $f(x)$ este mărginită, atunci funcţia reală $||f(x)||$ este mărginită, şi din prima inegalitate deducem că funcţia $|f_i(x)|$, deci şi $f_i(x)$, este mărginită, pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, m$.

Reciproc, dacă funcţiile $f_i(x)$ sînt mărginite, atunci şi funcţiile $|f_i(x)|$ sînt mărginite, deci suma lor $\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i(x)|$ este mărginită. Din a doua inegalitate rezultă că funcţia $||f(x)||$, deci şi funcţia $f(x)$, este mărginită.

Studiul funcţiilor vectoriale mărginite se reduce astfel la studiul funcţiilor reale mărginite.

Pentru funcţiile *reale* (de mai multe variabile) se poate da o definiţie a funcţiilor majorate sau minorate, cum şi a marginilor unei funcţii, deoarece mulţimea valorilor este conţinută în dreapta reală pe care avem definită relaţia de ordine.

Proprietăţile marginilor unei funcţii reale de mai multe variabile sînt aceleaşi ca şi pentru funcţiile reale de o singură variabilă.

§ 5. Limite. Continuitate

1. Limite de funcții vectoriale

Definiția limitei unei funcții reale se extinde și pentru funcții vectoriale.

Fie mulțimea $E \subset R^n$, x_0 un punct *de acumulare* pentru E și funcția vectorială $f : E \to R^m$.

Definiție. Se spune că un vector $l \in R^m$ este limita funcției f în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate U a lui l (în R^m) există o vecinătate V a lui x_0 (în R^n) astfel încît, oricît ar fi $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in U$. Se scrie

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x) \quad (\text{sau } f(x) \to l \text{ cînd } x \to x_0).$$

Propozițiile următoare dau definiții echivalente ale limitei. Demonstrația lor se face la fel ca și în cazul funcțiilor reale de o singură variabilă.

Propoziția 1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, dacă și numai dacă, pentru orice șir $x_k \to x_0$, $x_k \in E$, $x_k \neq x_0$, avem $f(x_k) \to l$.

Propoziția 2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, dacă și numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi $x \neq x_0$ din E cu $||x - x_0|| < \delta(\varepsilon)$, să avem $||f(x) - l|| < \varepsilon$.

Se pot, de asemenea, da enunțuri în care se folosesc numai ε sau numai δ:

Propoziția 3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, dacă și numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V a lui x_0 (V depinde de ε), astfel încît condițiile $x \in V \cap E$ și $x \neq x_0$ implică $||f(x) - l|| < \varepsilon$.

Propoziția 4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate U a lui l, există un număr $\delta > 0$ (care depinde de U) astfel încît, condițiile $x \in E$, $x \neq x_0$ și $||x - x_0|| < \delta$ implică $f(x) \in U$.

Observații. 1° În cazul spațiului R^p cu $p \geqslant 2$, nu am introdus puncte improprii la infinit. Așadar, dacă $f: E \subset R^n \to R^m$, $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, atît punctul x_0 cît și limita l sînt puncte obișnuite, respectiv în spațiile R^n și R^m.

2° În cazul funcțiilor vectoriale de *o singură variabilă* (reală) $f: E \subset R \to R^m$, se pot considera și limitele $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ dacă $+\infty$ sau $-\infty$ sînt puncte de acumulare ale mulțimii E.

Definiția limitei, propoziția 1 și propoziția 3 conțin și acest caz.

3° În cazul funcțiilor *reale* de mai multe variabile $f: E \subset R^n \to R$, limita l poate fi $+\infty$ și $-\infty$.

Definiția, propoziția 1 și propoziția 4 de mai sus conțin și acest caz.

4° În cazul funcţiilor vectoriale de *o singură variabilă reală* $f: E \subset R \to R^m$ se pot defini limitele laterale într-un punct x_0, la fel ca şi pentru funcţiile reale de o singură variabilă.

Dacă $x_p = (x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{np})$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, condiţia $x_p \xrightarrow[p]{} a$ este echivalentă cu condiţiile

$$x_{1p} \xrightarrow[p]{} a_1, \ x_{2p} \xrightarrow[p]{} a_2, \ldots, x_{np} \xrightarrow[p]{} a_n.$$

De aceea, în loc de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, limita se mai notează şi astfel:

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Astfel, pentru o funcţie de două variabile $f(x, y)$, limita sa în punctul x_0, y_0 se scrie

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y).$$

Se spune că aceasta este limita funcţiei f cînd x şi y tind independent (dar simultan) către x_0 şi, respectiv, y_0. În acest caz propoziţia 2 se poate transcrie astfel:

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l$, *dacă şi numai dacă, pentru orice număr* $\varepsilon > 0$, *există un număr* $\delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încît oricare ar fi* $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ *din* E *cu* $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ *şi* $|y - y_0| < \delta(\varepsilon)$, *să avem* $\| f(x, y) - l \| < \varepsilon$.

Se defineşte limita funcţiei $f: E \subset R^n \to R^m$ relativ la o submulţime $A \subset E$, într-un punct de acumulare a al lui A, la fel ca şi pentru funcţii reale de o singură variabilă:

Un vector $l \in R^m$ *este limita funcţiei* f *în punctul* a *relativ la submulţimea* A, *dacă pentru orice şir* $x_p \to a$, $x_p \in A$, $x_p \neq a$, *avem* $f(x_p) \to l$. *Se notează*

$$l = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

Dacă $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ există, atunci şi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ există şi cele două limite sînt egale. Dacă însă există $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, nu rezultă neapărat că există $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

În particular, dacă A este intersecţia mulţimii E cu o *dreaptă*, care trece prin a, atunci $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ se numeşte limita funcţiei f *după o direcţie*.

De exemplu, în cazul unei funcţii $f(x, y)$ de două variabile reale, dacă ecuaţia dreptei este $y = h(x)$, limita se scrie $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ y = h(x)}} f(x, y)$. Se zice că aceasta este limita funcţiei f cînd x şi y tind simultan dar *dependent* pe dreapta $y = h(x)$, respectiv către x_0 şi y_0. În fapt, aceasta este o limită a funcţiei compuse de o singură variabilă $f(x, h(x))$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} f(x, h(x)).$$

Toate proprietăţile limitelor de funcţii reale, care nu implică relaţia de ordine şi produsul, se păstrează şi pentru funcţiile vectoriale şi demonstraţiile sînt aceleaşi.

1) *Limita unei funcţii vectoriale într-un punct, dacă există, este unică.*

2) *Dacă* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, *atunci* $\lim_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$.

Observaţie. Dacă $\lim_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$, nu rezultă că $\lim_{x \to x_0} f(x)$ există. Dacă însă $\lim_{x \to x_0} \|f(x)\| = 0$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *dacă şi numai dacă* $\lim_{x \to x_0} [f(x) - l] = 0$, *adică dacă şi numai dacă* $\lim_{x \to x_0} \| f(x) - l\| = 0$.

4) *Dacă* $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, *atunci există o vecinătate* V *a lui* x_0, *astfel încît* $f(x) \neq 0$ *oricare ar fi* $x \neq x_0$ *din* $V \cap E$.

5) *Funcţia* f *are limită în* x_0 *dacă şi numai dacă, pentru orice număr* $\varepsilon > 0$, *există o vecinătate* V *a lui* x_0, *astfel încît oricare ar fi* $x', x'' \in V \cap E$, $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$, *să avem* $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

6) **Criteriu.** *Dacă* $f: E \to R^m$ *şi* $h: E \to R$, *dacă* $\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$, *şi dacă există un vector* $l \in R^m$ *şi o vecinătate* V *a lui* x_0, *astfel încît să avem*

$$\|f(x) - l\| \leq h(x)$$

pentru orice $x \neq x_0$ *din* $V \cap E$, *atunci*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

7) *Dacă* $f: E \to R^m$ *şi* $g: E \to R^m$ *au limite în* x_0, *atunci funcţiile* $f + g$, $fg: E \to R^m$ *au limită în* x_0 şi

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$$

8) *Dacă* $f: E \to R^m$ *şi* $\varphi: E \to R$ *au limită în* x_0, *atunci funcţia* $\varphi f: E \to R^m$ *are limită în* x_0 *şi*

$$\lim_{x \to x_0} [\varphi(x) f(x)] = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) \lim_{x \to x_0} f(x).$$

În particular, pentru $\varphi(x) = \alpha$, deducem $\lim_{x \to x_0} \alpha(f(x)) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x)$.

O b s e r v a ţ i e . Funcţiile $f: E \to R^m$ care au limită în x_0 formează o algebră, iar operaţia de trecere la limită este liniară şi multiplicativă pe acest spaţiu.

Propoziţia următoare reduce studiul limitelor de funcţii vectoriale la cel al limitelor componentelor reale:

P r o p o z i ţ i e. Fie funcţia $f: E \subset R^n \to R^m$ şi $f_1, f_2, \ldots, f_m: E \to R$ componentele sale reale: $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Atunci: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x) = l_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, unde $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in R^m$.

Pentru demonstraţie se foloseşte propoziţia asemănătoare de la şirurile de puncte din R^m:

Fie $x_k \xrightarrow[k]{} x_0$, $x_k \in E$, $x_k \neq x_0$. Avem

$$f(x_k) \to l \Leftrightarrow f_i(x_k) \to l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

deci

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f_i(x) = l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Toate proprietăţile precedente se pot obţine din această propoziţie, dacă în prealabil s-au demonstrat aceste proprietăţi pentru funcţiile reale *de mai multe variabile*. Demonstraţiile acestor proprietăţi se fac însă mai simplu, folosind direct definiţiile limitei vectoriale ca şi în cazul funcţiilor reale de o singură variabilă.

2° Este posibil ca pentru o funcţie vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ una din componentele sale reale să aibă limita infinită. În acest caz funcţia vectorială nu mai are limită. Se poate extinde propoziţia precedentă şi în acest caz, dacă se adaugă spaţiului R^n puncte la infinit. Astfel, în cazul planului R^2, ar trebui să adăugăm o mulţime infinită de puncte la infinit, de forma:

$$(-\infty, -\infty),\ (-\infty, +\infty),\ (+\infty, -\infty),\ (+\infty, +\infty),\ (-\infty, a),\ (a, -\infty),$$
$$(+\infty, a),\ (a, +\infty),\ a \in R.$$

Această convenţie ar complica studiul care urmează.

În asemenea situaţii este de preferat a cerceta limitele componentelor reale.

Exemple. 1) $f(x, y) = x + y$, definită pe R^2

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x + y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} (x + y) = a + b = f(a, b).$$

2) $f(x, y) = xy$, definită pe R^2

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} xy = ab = f(a, b).$$

3) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$, definită pentru $y \neq 0$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = f(a, b), \text{ dacă } b \neq 0.$$

4) $f(x, y) = x^y$, definită pentru $x > 0$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} x^y = a^b = f(a, b), \text{ dacă } a > 0.$$

2. Limite iterate

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie vectorială de n variabile, $f: E \subset R^n \to R^m$. Din această funcţie putem obţine funcţii vectoriale de o singură variabilă, şi anume, funcţiile sale parţiale:

$$f_1: x_1 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$f_2: x_2 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n: x_n \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Se pot considera atunci limitele acestor funcţii de o singură variabilă:

$$\lim_{x_i \to a_i} f_i(x_i) = \lim_{x_i \to a_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

dacă a_i este punct de acumulare al mulţimii $E_i = \{x_i \mid x_i \in R, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E\}$. Limita funcţiei f_i este un număr care depinde de celelalte $n - 1$ variabile reale, diferite de x_i.

Se poate considera apoi

$$\lim_{x_j \to a_j} \lim_{x_i \to a_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i \neq j.$$

Această limită este un număr care depinde de celelalte $n-2$ variabile diferite de x_i şi x_j. Se poate considera limita iterată a acestei funcţii în raport cu toate variabilele pe rînd. Această limită este un număr care nu mai depinde de nici una din variabile. Aceasta se numeşte *limita iterată* a funcţiei f.

De exemplu, pentru funcţiile de două variabile $f(x, y)$ se pot considera limitele iterate

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) \qquad \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Se spune că acestea sînt limitele funcţiei $f(x, y)$ cînd x şi y tind *succesiv*, respectiv către x_0 şi y_0. Legătura dintre limite şi limitele iterate este dată de următoarea

Propoziţie. Dacă există limita funcţiei într-un punct şi una din limitele iterate în acest punct, atunci aceste limite sînt egale.

Pentru a simplifica scrisul, vom da demonstraţia în cazul funcţiilor de două variabile $f: E \subset R^2 \to R^m$. Fie (x_0, y_0) un punct de acumulare al mulţimii E; să presupunem că există limitele

$$l = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \text{ şi } l_{12} = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y).$$

Vom arăta că $l = l_{12}$.

Pentru fiecare $x \in \mathrm{pr}_1 E$ să notăm

$$F(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y),$$

deci

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = l_{12}.$$

Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Deoarece $l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, există o vecinătate V a lui (x_0, y_0), astfel încît să avem

$$\| f(x, y) - l \| < \varepsilon$$

oricare ar fi $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ din V. Deoarece pentru fiecare $x \in \mathrm{pr}_1 E_1$ există $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = F(x)$, atunci

$$\lim_{y \to y_0} \| f(x, y) - l \| = \| F(x) - l \|.$$

Trecînd la limită în inegalitatea precedentă, obţinem

$$\| F(x) - l \| \leqslant \varepsilon$$

pentru orice x, astfel ca $(x, y_0) \in V$. Rezultă atunci

$$\lim_{x \to x_0} \| F(x) - l \| = \| \lim_{x \to x_0} F(x) - l \| = \| l_{12} - l \| < \varepsilon.$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că $l = l_{12}$.

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă există numai una din cele trei limite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x), \quad \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y), \quad \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

nu rezultă că şi celelalte două limite există.

Este posibil ca numai una sau numai două din aceste limite să existe.

2° Dacă limita nu există, limitele iterate pot exista amîndouă şi să fie diferite.

3° Este posibil ca, deşi (x_0, y_0) este punct de acumulare al mulţimii E, mulţimea $\{x | x \in R, (x, y) \in R\}$ să nu aibă pe x_0 ca punct de acumulare, oricare ar fi y. În acest caz nu are sens $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, oricare ar fi y.

De exemplu, dacă E este un segment de dreaptă paralel cu axa Oy, proiecţia sa pe axa Ox este formată dintr-un singur punct.

3. Continuitatea funcţiilor vectoriale

Definiţia continuităţii funcţiilor reale de o singură variabilă se extinde şi pentru funcţii vectoriale.

Fie funcţia $f : E \subset R^n \to R^m$ şi un punct $x_0 \in E$.

D e f i n i ţ i e. Se spune că funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît oricare ar fi $x \in V \cap E$ să avem $f(x) \in U$.

Următoarele propoziţii dau definiţii echivalente ale continuităţii:

Propoziţia 1. Funcţia f este continuă în punctul x_0, dacă şi numai dacă, pentru orice şir $x_p \underset{p}{\longrightarrow} x_0$, $x_p \in E$, avem $f(x_p) \underset{p}{\longrightarrow} f(x_0)$.

Propoziţia 2. Funcţia f este continuă în x_0, dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Propoziţia 3. Funcţia f este continuă în punctul x_0, dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V a lui x_0 (V depinde de ε) astfel încît, oricare ar fi $x \in V \cap E$, să avem $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Propoziţia 4. Funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă, pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$, există un număr $\delta > 0$ (care depinde de U) astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu $\|x - x_0\| < \delta$ să avem $f(x) \in U$.

Propoziţia 5. Funcţia f este continuă în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E$, dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ (sau pentru orice vecinătate U a lui $f(a)$) există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi punctul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ cu $|(x_1 - a_1)| < \delta$, $|x_2 - a_2| < \delta$, $\ldots$, $|x_n - a_n| < \delta$ să avem $\|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\| < \varepsilon$ (respectiv $f(x) \in U$).

Dacă x_0 este punct de acumulare pentru E se poate da o definiţie a continuităţii cu ajutorul limitei:

Propoziţia 6. Funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, adică dacă şi numai dacă

$$\lim_{x \to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0.$$

Se spune că funcţia f este *continuă pe mulţimea E*, dacă este continuă în fiecare punct din E.

Proprietăţile funcţiilor reale continue, care nu implică relaţia de ordine, rămîn valabile şi pentru funcţiile vectoriale continue:

1) *Dacă funcţia $f(x)$ este continuă în punctul x_0* (sau pe E), *atunci funcţia $\|f(x)\|$ este continuă în x_0* (respectiv pe E).

Proprietatea reciprocă nu este în general adevărată.

2) *Dacă f este continuă în x_0 şi $f(x_0) \neq 0$, există o vecinătate V a lui x_0 pe care funcţia este diferită de 0.*

3) *Dacă f este continuă în x_0, există o vecinătate V a lui x_0 pe care funcţia f este mărginită.*

4) *Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ există în R^m, atunci f se poate prelungi prin continuitate în punctul x_0, punînd $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.*

5) *Dacă f şi g sînt continue în* x_0 (sau pe *E*), *iar* $\varphi: E \to R$ *este continuă în* x_0 (sau pe *E*), *atunci funcţiile* $f+g, fg, (f|g)$ *şi* φf *sînt continue în* x_0 (*sau pe E*). *În particular, funcţia* αf *este continuă în* x_0 (*sau pe E*) *oricare ar fi* $\alpha \in R$.

O b s e r v a ţ i e. Mulţimea funcţiilor vectoriale definite pe $E \subset R^n$ şi continue în $x_0 \in E$ (sau pe *E*) este o *algebră*.

6) *Fie mulţimile* $E \subset R^n$ *şi* $F \subset R^m$. *Dacă funcţia* $f: E \to F$ *este continuă în punctul* $x_0 \in E$, *iar funcţia* $g: F \to R^p$ *este continuă în punctul* $y_0 = f(x_0) \in F$, *atunci funcţia compusă* $g \circ f: E \to R^p$ *este continuă în* $x_0 \in E$.
Dacă f este continuă pe E şi g este continuă pe F, atunci funcţia compusă $g \circ f$ este continuă pe E.

P r o p o z i ţ i e. Funcţia vectorială $f: E \subset R^n \to R^m$ **este continuă într-un punct** $x_0 \in E$, **dacă şi numai dacă fiecare din componentele sale reale** $f_1, f_2, \ldots, f_m: E \to R$ **este continuă în** x_0.

Propoziţia rezultă din inegalităţile

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leqslant \|f(x) - f(x_0)\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(x_0)|$$

aplicînd, de exemplu, definiţia cu ε şi δ a continuităţii.

O b s e r v a ţ i e. Propoziţia precedentă reduce studiul continuităţii funcţiilor vectoriale de mai multe variabile la acela al continuităţii componentelor lor reale de mai multe variabile.

Exemple. Funcţiile $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = xy$, $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $f(x, y) = x^y$ sînt continue pe toată mulţimea lor de definiţie.

Fie $A \subset R$ şi $f: A \to R$. *Dacă funcţia f este continuă pe A, atunci funcţia vectorială* $x \to (x, f(x))$ *definită pe A cu valori în plan este continuă pe A. Imaginea mulţimii A prin uncţia vectorială* $F(x) = (x, f(x))$ *este chiar graficul funcţiei reale* $f(x)$.

4. Continuitate parţială

Fie funcţia $f: E \subset R^n \to R^m$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punct din E. Să considerăm funcţia parţială (de o singură variabilă)

$$f_i : x_i \to f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

definită pe mulţimea

$$E_i = \{x_i \mid x_i \in R, (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in E\}.$$

Dacă funcţia parţială f_i este continuă în punctul $a_i \in E$, spunem că funcţia f este continuă (parţial) în raport cu variabila x_i în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

A spune că funcţia $f(x_1, \ldots, x_n)$ este continuă parţial în raport cu x_i în punctul a înseamnă că, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr

$\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi $x_i \in E_i$ cu $|x_i - a_i| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f_i(x_i) - f_i(a_i)\| < \varepsilon$, adică

$$\| f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots a_n) \| < \varepsilon.$$

Dacă funcţia f este continuă în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, vom spune adesea că este continuă în acest punct *în raport cu ansamblul variabilelor*, pentru a deosebi de continuitatea parţială în raport cu cîte o variabilă.

Propoziţie. Dacă funcţia f este continuă într-un punct $a = (a_1, \ldots, a_n)$ (în raport cu ansamblul variabilelor), atunci ea este continuă în acest punct în raport cu fiecare variabilă.

Într-adevăr, dacă funcţia f este continuă în punctul a, atunci:

Pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi punctul $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ cu $|x_1 - a_1| < \delta$, $|x_2 - a_2| < \delta$, $\ldots$, $|x_n - a_n| < \delta$, să avem

$$\| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \| < \varepsilon.$$

Rezultă atunci, în particular, că, dacă $|x_1 - a_1| < \delta$, $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$, avem

$$\| f(x_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \| < \varepsilon$$

şi deci funcţia f este continuă în raport cu variabila x_1 în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Continuitatea în raport cu celelalte vaiabile se demonstrează la fel.

Observaţie. Dacă funcţia f este continuă într-un punct în raport cu fiecare variabilă în parte, nu rezultă că ea este continuă în acest punct în raport cu ansamblul variabilelor.

Exemplu. Fie funcţia $f(x, y)$ definită pe R^2 astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ dacă } x \neq 0 \text{ şi } y \neq 0, \; f(0, 0) = 0.$$

Avem $f(x, 0) \equiv 0$ pentru orice $x \in R$, deci $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$, adică f este continuă în origine în raport cu variabila x.

De asemenea, $f(0, y) \equiv 0$ pentru orice $y \in R$, deci $\lim\limits_{y \to 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0)$, adică f este continuă în origine în raport cu variabila y.

Dar funcţia nu este continuă în origine (în raport cu ansamblul variabilelor) deoarece nu are limită în acest punct.

Într-adevăr, pentru $x \neq 0$ avem

$$f(x, y) = \frac{\dfrac{y}{x}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}.$$

Fie dreapta $y = mx$ care trece prin origine, cu coeficientul unghiular m. Dacă luăm şirul $(x_n, y_n) \to 0$ de puncte pe această dreaptă, avem $y_n = mx_n$ pentru orice $n \in N$ şi $f(x_n, y_n) = \dfrac{m}{1 + m^2}$, deci $f(x_n, y_n) \to \dfrac{m}{1 + m^2}$.

Limita $\dfrac{m}{1 + m^2}$ *depinde* de dreapta pe care se află şirul de puncte $(x_n, y_n) \to 0$.

Pentru drepte diferite, cu coeficienţi unghiulari diferiţi, obţinem limite diferite, deci funcţia nu are limită în origine.

5. Funcții vectoriale uniform continue

Fie funcția $f: E \subset R^n \to R^m$.

D e f i n i ț i e. Funcția f este uniform continuă (pe E) **dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi punctele $x', x'' \in E$, cu $\|x' - x''\| < \delta$, să avem** $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

P r o p o z i ț i e. O funcție vectorială $f: E \subset R^n \to R^m$ este uniform continuă dacă și numai dacă toate componentele sale reale $f_1, f_2, \ldots, f_m: E \to R$ sînt uniform continue.

Propoziția rezultă din inegalitățile

$$|f_i(x') - f_i(x'')| \leqslant \|f(x') - f(x'')\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f_i(x') - f_i(x'')|,$$

deoarece inegalitatea $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$ implică $|f_i(x') - f_i(x'')| < \varepsilon$, pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n$, iar inegalitățile $|f_i(x') - f_i(x'')| < \frac{\varepsilon}{n}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ implică $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

Propoziția precedentă reduce studiul funcțiilor vectoriale (de mai multe variabile) uniform continue la studiul continuității uniforme a componentelor lor reale (care sînt funcții reale de mai multe variabile).

P r o p o z i ț i e. Dacă funcția f este uniform continuă (în raport cu ansamblul variabilelor), atunci ea este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă (pentru valori fixate ale celorlalte variabile).

Într-adevăr, a spune că f este uniform continuă înseamnă că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi punctele

$$x' = (x_1', \ldots, x_n') \text{ și } x'' = (x_1'', \ldots, x_n'') \text{ din } E \text{ cu } |x' - x''| < \delta,$$

să avem

$$\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon,$$

adică

$$\|f(x_1', x_2', \ldots, x_n') - f(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')\| < \varepsilon.$$

Dacă luăm $x_2' = x_2'' = a_2, \ldots, x_n' = x_n'' = a_n$, atunci

$$|x_1' - x_1''| = \|(x_1', a_2, \ldots, a_n) - (x_1'', a_2, \ldots, a_n)\|,$$

deci, dacă $|x_1' - x_1''| < \varepsilon$, avem

$$\|f(x_1', a_2, \ldots, a_n) - f(x_1'', a_2, \ldots, a_n)\| < \varepsilon,$$

adică f este uniform continuă în raport cu variabila x_1, atunci cînd se dau celorlalte variabile valori fixate $a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Continuitatea uniformă în raport cu celelalte variabile se demonstrează la fel.

O b s e r v a ț i e. Dacă f este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă, nu rezultă că ea este uniform continuă.

Exemplu. Funcţia

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{dacă } x = y = 0, \end{cases}$$

definită pe pătratul $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, nu este continuă în origine (deci nu este uniform continuă).

Pentru orice $y \in [-1,1]$, funcţia parţială $x \to f(x, y)$, definită pe intervalul compact $[-1,1]$, este continuă, deci uniform continuă.

De asemenea, pentru orice $x \in [-1,1]$, funcţia parţială $y \to f(x, y)$, definită pe $[-1, 1]$, este continuă, deci uniform continuă.

6. Funcţii vectoriale continue pe mulţimi compacte

Proprietăţile funcţiilor reale de o singură variabilă, şi continue pe o mulţime compactă, se păstrează şi pentru funcţiile vectoriale şi cu aceleaşi demonstraţii (înlocuind modulul cu norma):

1) *O funcţie vectorială continuă pe o mulţime compactă este mărginită pe această mulţime.*

2) *O funcţie vectorială continuă pe o mulţime compactă este uniform continuă.*

3) O *funcţie vectorială continuă transformă o mulţime compactă tot într-o mulţime compactă.*

4) *O funcţie reală de n variabile, continuă pe o mulţime compactă $E \subset R^n$, îşi atinge efectiv marginile pe această mulţime.*

O b s e r v a ţ i e. Pe spaţiul R^m cu $m \geqslant 2$, nu s-a definit o relaţie de ordine, deci pentru funcţiile vectoriale cu valori în R^m nu au sens marginile acestei funcţii.

În acest caz se poate enunţa o proprietate pentru funcţia reală $||f(x)||$:

5) *Dacă f este o funcţie vectorială continuă pe o mulţime compactă E, atunci există un punct $x_M \in E$ astfel încît* $||f(x_M)|| = \sup\limits_{x \in E} ||f(x)||$.

Se ţine seama de faptul că funcţia reală $||f(x)||$ este continuă pe E şi se aplică proprietatea 4.

O b s e r v a ţ i e. Fie $A \subset R$ o mulţime compactă şi o funcţie reală continuă $f: A \to R$. *Graficul funcţiei f este o mulţime compactă în plan.*

Într-adevăr, graficul lui f este egal cu imaginea mulţimii A prin funcţia vectorială continuă $F(x) = (x, f(x))$, definită pe A cu valori în R^2.

7. Funcţii vectoriale continue pe mulţimi conexe

Pentru funcţiile continue, pe toată mulţimea de definiţie, se pot da anumite criterii de continuitate cu ajutorul imaginilor inverse.

Fie $E \subset R^n$, $E' \subset R^{n'}$ şi funcţia $f: E \to E'$ astfel ca $f(E) = E'$.

P r o p o z i ţ i e. Funcţia f este continuă pe mulţimea E, dacă şi numai dacă, pentru orice mulţime deschisă $G' \subset R^{n'}$, există o mulţime deschisă $G \subset R^n$, astfel ca

$$G \cap E = \overset{-1}{f}(G' \cap E').$$

Să presupunem întîi că f îndeplineşte condiţia din enunţ şi să arătăm că este continuă pe E. Fie $x_0 \in E$ oarecare şi fie V' o vecinătate a lui $f(x_0)$; V' este deschisă în $R^{n'}$. Conform presupunerii există deci o mulţime deschisă $G \subset R^n$, astfel ca $G \cap E = \overset{-1}{f}(V' \cap E')$. Dar $f(x_0) \in V' \cap E'$, deci $x_0 \in \overset{-1}{f}(V' \cap E')$, adică $x_0 \in G \cap E$. În particular $x_0 \in G$ şi, deoarece G este deschisă, x_0 este punct interior al său; există deci o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $x_0 \in V \subset G$. Oricare ar fi $x \in V \cap E$ avem deci $x \in G \cap E = \overset{-1}{f}(V' \cap E')$, deci $f(x) \in V' \cap E'$, şi deci $f(x) \in V'$. Aşadar, f este continuă în x_0. Cum x_0 a fost ales arbitrar în E, rezultă că f este continuă pe E.

Reciproc, să presupunem că f este continuă pe E şi fie $G' \cap R^{n'}$ o mulţime deschisă. Dacă $\overset{-1}{f}(G' \cap E') = \emptyset$, atunci luăm $G = \emptyset$ (care este deschisă în R^n) şi deci

$$G \cap E = \emptyset = \overset{-1}{f}(G' \cap E').$$

Să presupunem, aşadar, că $\overset{-1}{f}(G' \cap E') \neq \emptyset$, adică $G' \cap E' \neq \emptyset$. Să notăm $H = \overset{-1}{f}(G' \cap E')$, deci $f(H) = G' \cap E'$ şi să arătăm că există o mulţime deschisă G în R^n, astfel ca $G \cap E = H = \overset{-1}{f}(G' \cap E')$. Evident, $H \subset E$.

Fie $x_0 \in H$ oarecare; atunci $f(x_0) \in f(H) = G' \cap E' \subset G'$ şi, deoarece G' este deschisă, $f(x_0)$ este punct interior al său; există o vecinătate V' a lui $f(x_0)$, astfel ca

$$f(x_0) \in V' \subset G'.$$

Deoarece f este continuă în x_0, lui V' îi corespunde o vecinătate V a lui x_0, astfel ca pentru orice $x \in V \cap E$ să avem $f(x) \in V'$, adică $f(V \cap E) \subset V' \subset G'$; deoarece avem, de asemenea, $f(V \cap E) \subset E'$, rezultă că $f(V \cap E) \subset G' \cap E'$, şi deci

$$V \cap E \subset \overset{-1}{f}(G' \cap E') = H.$$

Cum x_0 a fost ales arbitrar, deducem că pentru orice punct $x \in H$ există o vecinătate V_x a lui x, astfel ca

$$V_x \cap E \subset H.$$

Să notăm $G = \bigcup_{x \in H} V_x$. Evident, $H \subset \bigcup_{x \in H} V_x$, deci $H \subset G$; cum avem, de asemenea, $H \subset E$, rezultă că

$$H \subset G \cap E.$$

Pe de altă parte,

$$G \cap E = (\bigcup_{x \in H} V_x) \cap E = \bigcup_{x \in H} (V_x \cap E) \subset H.$$

Din incluziunile $H \subset G \cap E$ şi $G \cap E \subset H$, deducem

$$G \cap E = H = \overset{-1}{f}(G' \cap E')$$

şi propoziţia este complet demonstrată.

Corolar. Funcţia f este continuă pe E dacă şi numai dacă, pentru orice mulţime închisă $M' \subset R^{n'}$, există o mulţime închisă $M \subset R^{n'}$, astfel ca

$$M \cap E = \overset{-1}{f}(M' \cup E').$$

Pentru demonstraţie se foloseşte propoziţia precedentă, cu mulţimile deschise $G' = \complement M'$ şi $G = \complement M$.

Propoziţie. Imaginea unei mulţimi conexe printr-o funcţie continuă este o mulţime conexă.

Fie $E \subset R^n$ o mulţime conexă şi o funcţie continuă $f : E \to R^n$. Să notăm $E' = f(E)$ şi să arătăm că E' este conexă.

Să presupunem prin absurd că E' n-ar fi conexă. Aceasta înseamnă că există două mulţimi deschise G_1' şi G_2' în $R^{n'}$, astfel ca

$$E' \subset G_1' \cup G_2',\ G_1' \cap E' \neq \emptyset,\ G_2' \cap E' \neq \emptyset \text{ şi } E' \cap G_1' \cap G_2' = \emptyset.$$

Deoarece f este continuă pe E, mulţimilor deschise G_1' şi G_2' în $R^{n'}$ le corespund două mulţimi deschise G_1 şi G_2 în R^n, astfel ca

$$G_1 \cap E = \overset{-1}{f}(G_1' \cap E'),\ G_2 \cap E = \overset{-1}{f}(G_2' \cap E').$$

Deoarece $G_1' \cap E' \neq \emptyset$ şi $G_2' \cap E' \neq \emptyset$, deducem că

$$G_1 \cap E \neq \emptyset \text{ şi } G_2 \cap E \neq \emptyset.$$

Deoarece $E' \cap G_1' \cap G_2' = \emptyset$, rezultă că $E \cap G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Într-adevăr

$$E \cap G_1 \cap G_2 = (E \cap G_1) \cap (E \cap G_2) = \overset{-1}{f}(E' \cap G_1') \cap \overset{-1}{f}(E' \cap G') =$$

$$= \overset{-1}{f}((E' \cap G_1') \cap (E' \cap G_2)) = \overset{-1}{f}(G_1' \cap G_2' \cap E').$$

În sfîrşit, deoarece $E' \subset G_1' \cup G_2'$, rezultă că $E \subset G_1 \cup G_2$.

Într-adevăr, $E' = E' \cap (G_1 \cup G_2') = (E' \cap G_1') \cup (E' \cap G_2')$. Atunci

$$E = \overset{-1}{f}(E') = \overset{-1}{f}((E' \cap G_1') \cup (E' \cap G_2')) = \overset{-1}{f}(E' \cap G_1') \cup \overset{-1}{f}(E' \cap G_2') =$$

$$= (E \cap G_1) \cup (E \cap G_2) = E \cap (G_1 \cup G_2)$$

şi deci

$$E \subset G_1 \cup G_2.$$

Presupunerea că E' nu este conexă conduce la existenţa a două mulţimi deschise G_1 şi G_2 în R^n cu proprietăţile următoare:

$$E \subset G_1 \cup G_2,\ E \cap G_1 \neq \emptyset,\ E \cap G_2 \neq \emptyset,\ E' \cap G_1' \cap G_2' = \emptyset.$$

Aceasta înseamnă că mulţimea E nu este conexă, ceea ce contrazice ipoteza din enunţul propoziţiei. Urmează, aşadar, că E' este conexă şi propoziţia este demonstrată.

Observaţii. 1° Există şi alte funcţii care transformă mulţimile conexe tot în mulţimi conexe, şi care nu sînt continue.

Vom spune că o funcţie are proprietatea lui Darboux dacă transformă mulţimile conexe tot în mulţimi conexe.

Rezultă că funcţiile vectoriale continue au proprietatea lui Darboux.

2° Fie $I \subset R$ un interval şi o funcţie reală continuă $f = I \to R$. *Graficul funcţiei f este o mulţime conexă în plan.*

Într-adevăr, graficul lui f este egal cu imaginea intervalului I prin funcţia vectorială continuă $F(x) = (x, f(x))$ definită pe I cu valori în R^2.

8. Derivata funcţiilor vectoriale de o variabilă

Fie I un interval pe dreaptă, $f: I \to R^n$ o funcţie vectorială şi $f_1, f_2, \ldots, \ldots, f_n : I \to R$ componentele sale reale

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Ca şi pentru funcţii reale, spunem că *funcţia f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ dacă există limita*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Limita însăşi se numeşte *derivata funcţiei f în punctul x_0* şi se notează cu $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă f este derivabilă în fiecare punct din I, supunem că f este derivabilă pe I.

Trebuie să observăm că derivata $f'(x_0)$ este un vector din spaţiul R^n, iar funcţia derivată f' are valori în R^n.

Se definesc în mod asemănător derivatele de ordin superior.

Propoziţia următoare reduce studiul derivatei unei funcţii vectoriale la acela al derivatelor componentelor sale reale.

Propoziţie. Funcţia f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ dacă şi numai dacă toate componentele sale reale $f_1, \ldots, f_n$ sînt derivabile în x_0. În acest caz avem

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_n'(x_0)).$$

În adevăr avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \ldots, \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}\right).$$

Se aplică apoi proprietatea corespunzătoare de la limite de funcţii.

C o r o l a r. Funcţia f este derivabilă pe I dacă şi numai dacă componentele sale reale sînt derivabile pe I. În acest caz avem

$$f' = (f'_1, f'_2, \ldots, f'_n).$$

Proprietăţile funcţiilor reale derivabile, în care nu este implicată relaţia de ordine, rămîn adevărate şi pentru funcţii vectoriale derivabile.

1) *Dacă f este derivabilă în x_0 (sau pe I) atunci f este continuă în x_0 (sau pe I).*

2) *Dacă $f, g : I \to R^n$ sînt funcţii derivabile în x_0 (sau pe I), iar $\varphi : I \to R$ este o funcţie reală derivabilă în x_0 (sau pe I), atunci funcţiile $f + g$, fg, $(f|g)$, φg, αf sînt derivabile în x_0 (sau pe I) şi avem*

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$$

$$(\varphi g)' = \varphi' g + \varphi g'$$

$$(\alpha f)' = \alpha f'.$$

Dacă, în plus, g nu se anulează în x_0 (sau pe I), atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 (sau pe I) şi avem

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Demonstraţiile sînt aceleaşi ca şi pentru funcţii reale.

Teorema creşterilor finite nu mai este însă valabilă sub forma unei egalităţi, ci sub forma unei inegalităţi.

T e o r e m ă. Fie $f : I \to R^n$ o funcţie şi $a < b$ două puncte din I. Dacă:

1) f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$;

2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b), atunci

$$||f(b) - f(a)|| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} ||f'(x)||(b - a).$$

Dacă f' este nemărginită, avem $\sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} ||f'(x)|| = +\infty$ şi inegalitatea este satisfăcută.

Să presupunem că f' este mărginită şi să alegem un număr oarecare $M > \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} ||f'(x)||$. Fie c un punct astfel ca $a < c < b$. Deoarece f este derivabilă în c avem

$$\lim_{x \to c} \frac{||f(x) - f(c)||}{|x - c|} = ||f'(c)|| < M.$$

Există o vecinătate $V \subset (a, b)$ a lui c, astfel încît să avem

$$\frac{\|f(x) - f(c)\|}{|x - c|} < M, \text{ pentru } x \neq c \text{ din } V,$$

deci

$$\|f(x) - f(c)\| \leqslant M|x - c|, \text{ pentru orice } x \in V.$$

Să notăm cu A mulţimea punctelor din $[a, b]$ care verifică inegalitatea precedentă. Mulţimea A nu este vidă, deoarece $V \subset A$. Mulţimea A este mărginită. Fie $a' = \inf A$ şi $b' = \sup A$. Avem $a', b' \in [a, b]$. Deoarece f este continuă pe $[a, b]$, este continuă în a'. Luînd un şir $x_n \to a'$ de puncte din A avem

$$\|f(x_n) - f(c)\| < M|x_n - c|,$$

de unde, prin trecere la limită,

$$\|f(a') - f(c)\| \leqslant M|a' - c|.$$

La fel se arată că

$$\|f(b') - f(c)\| \leqslant M|b' - c|.$$

Atunci

$$\|f(b') - f(a')\| = \|f(b') - f(c) - (f(a') - f(c))\| \leqslant \|f(b') - f(c)\| +$$
$$+ \|f(a') - f(c)\| \leqslant M(b' - c) + M|a' - c| = M(b' - c) + M(c - a') =$$
$$= M(b' - a'),$$

adică

$$\|f(b') - f(a')\| \leqslant M(b' - a').$$

Să arătăm acum că $a' = a$ şi $b' = b$. Dacă, prin absurd, am avea $a < a'$, raţionînd ca mai sus cu a' în loc de c, putem găsi o vecinătate $V' \subset (a, b)$ a lui a', astfel încît să avem

$$\|f(x) - f(a')\| \leqslant M|x - a'|, \text{ pentru } x \in V'.$$

Atunci, pentru orice $x < a'$ din V' avem

$$\|f(x) - f(c)\| = \|f(x) - f(a') + f(a') - f(c)\| \leqslant \|f(x) - f(a')\| +$$
$$+ \|f(a') - f(c)\| \leqslant M|x - a| + M|a' - c| = M(a' - x) + M(c - a') =$$
$$= M(c - x),$$

deci orice $x < a'$ din V' aparţine mulţimii A, ceea ce contrazice faptul că a' este marginea inferioară a mulţimii A. Aşadar $a' = a$. La fel se arată că $b' = b$.

Inegalitatea de mai sus se scrie

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b - a).$$

Deoarece $M > \sup\limits_{a\leq x\leq b} ||f'(x)||$ a fost ales arbitrar, deducem

$$||f(b) - f(a)|| \leq \sup_{a\leq x\leq b} ||f'(x)||(b - a)$$

şi teorema este demonstrată.

9. Viteza şi acceleraţia în mişcarea în spaţiu

Să considerăm un mobil M care se mişcă în spaţiul R^3 într-un interval de timp I. În fiecare $t\in I$ să notăm cu $r(t)$ punctul din R^3 în care se află mobilul M. Acest mobil descrie o traiectorie C, anume imaginea intervalului I prin funcţia vectorială $r(t)$. Dacă notăm cu $x(t)$, $y(t)$ şi $z(t)$ componentele vectorului $r(t)$, în fiecare moment t, atunci

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\ , \quad t \in I \\ z = z(t) \end{cases}$$

este o reprezentare parametrică a traiectoriei mobilului M. Avem

$$r = (x, y, z) = xi + yj + zk.$$

Să presupunem că funcţia vectorială $r(t)$ este derivabilă de două ori pe I.

Derivata întîi $r'(t)$ se numeşte *viteza mobilului* şi se notează de obicei cu $v(t)$:

$$v(t) = r'(t), = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k.$$

Viteza $v(t)$ este tot o funcţie vectorială definită pe I. Pentru fiecare punct $t_0\in I$, vectorul viteză $v(t_0)$ este tangent la curba C în punctul $r(t_0)$.

Derivata a doua $r''(t)$ se numeşte *acceleraţia* mobilului şi se notează de obicei cu $a(t)$:

$$a(t) = v'(t) = r''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) = x''(t)i + y''(t)j + z''(t)k.$$

Şi acceleraţia este o funcţie vectorială definită pe I.

10. Integrarea funcţiilor vectoriale de o variabilă

Fie $f: [a, b] \to R^n$ o funcţie vectorială şi $f_1, \ldots, f_n: [a, b] \to R$ componentele sale reale

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Ca şi pentru funcţii reale, spunem că *funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă există un vector $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)\in R^n$ cu proprietatea că oricare* *ar fi şirul* (d_n) *de diviziuni ale lui* $[a, b]$ *cu normele* $\nu(d_n) \to 0$ *şi oricare ar fi punctele intermediare* ξ_i *în fiecare diviziune, şirul corespunzător* $\sigma_{d_n}(f)$ *al sumelor Riemanniene are limita* I.

Limita I se numeşte *integrala funcţiei* f *pe intervalul* $[a, b]$ şi se notează

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Propoziţia următoare reduce studiul unei funcţii vectoriale integrabile la acela al componentelor sale reale.

Propoziţie. Funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă toate componentele sale reale, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt integrabile pe $[a, b]$. În acest caz

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f_1\,\mathrm{d}x, \int_a^b f_2\,\mathrm{d}x, \ldots, \int_a^b f_n\,\mathrm{d}x\right).$$

Demonstraţia foloseşte proprietatea corespunzătoare de la limite de funcţii.

Folosind această propoziţie, deducem că toate proprietăţile integralei funcţiilor reale, în care nu intervine relaţia de ordine, rămîn adevărate pentru funcţii vectoriale.

Dăm întîi următorul criteriu de integrabilitate:

1) *Funcţia* f *este integrabilă dacă şi numai dacă există un vector* $I \in R^n$ *cu proprietatea că oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există un număr* $\delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încît oricare ar fi diviziunea* d *cu norma* $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ *şi oricare ar fi punctele intermediare, să avem* $\|\sigma_d(f) - I\| < \varepsilon$.

2) *Orice funcţie integrabilă este mărginită.*

Din criteriul lui Lebesgue pentru funcţii reale se deduce următorul criteriu pentru funcţii vectoriale.

3) f *este integrabilă dacă şi numai dacă este mărginită şi continuă aproape peste tot.*

În particular, funcţiile continue sînt integrabile.

4) *Mulţimea funcţiilor integrabile* $f\colon [a, b] \to R^n$ *este o algebră, iar integrala* $\int_a^b f\mathrm{d}x$ *este liniară pe această algebră.*

5) *Proprietatea de integrabilitate este ereditară. Dacă* $a \leqslant c \leqslant b$, *atunci*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \int_a^c f\,\mathrm{d}x + \int_c^b f\,\mathrm{d}x.$$

6) *Dacă f este integrabilă, atunci funcţia reală $\|f\|$ este integrabilă şi avem*

$$\left\|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\| \leqslant \int_a^b \|f(x)\|\,\mathrm{d}x,\ a < b.$$

În adevăr, pentru fiecare sumă integrală avem

$$\|\sigma_d(f)\| = \|\Sigma f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)\| \leqslant \Sigma\|f(\xi_i)\|(x_{i+1}) = \sigma_d(\|f\|).$$

Se alege apoi un şir (d_n) de diviziuni cu norma $\nu(d_n) \to 0$ şi se trece la limită.

7) *Dacă f este integrabilă şi $\|f(x)\| \leqslant M$, atunci*

$$\left\|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\| \leqslant M(b-a).$$

8) *Funcţia* $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ *este continuă.*

9) *Dacă f este continuă într-un punct x_0, atunci funcţia $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ este derivabilă în x_0 şi avem $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Spunem că *o funcţie vectorială $F : [a, b] \to R^n$ este o primitivă a funcţiei vectoriale $f : [a, b] \to R^n$ dacă F este derivabilă şi $F' = f$.*

Studiul primitivelor funcţiilor vectoriale se reduce la acela al primitivelor componentelor sale, cu ajutorul propoziţiei următoare.

Propoziţie. Funcţia vectorială $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ este o primitivă a funcţiei $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dacă şi numai dacă pentru fiecare i funcţia reală F_i este o primitivă a funcţiei f_i.

De aici deducem că orice funcţie continuă are primitive. Are loc formula lui Leibniz-Newton.

Dacă f este integrabilă şi are primitive pe $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

oricare ar fi primitiva F a lui f.

Are loc *formula de integrare prin părţi*, atît pentru integrale nedefinite cît şi pentru integrale definite, funcţiile f şi g fiind ambele vectoriale sau una vectorială şi alta scalară.

De asemenea, au loc *formulele de schimbare de variabilă*, în aceleaşi condiţii ca şi pentru funcţii reale, funcţia u fiind presupusă reală.

§ 6. Derivate parțiale. Diferențiale

I. Derivate parțiale

Fie $f(x, y)$ o funcție *reală* de două variabile definită pe o mulțime $E \subset R^2$ și fie (x_0, y_0) un punct interior al lui E.

Definiție. Spunem că funcția $f(x, y)$ are în punctul (x_0, y_0) derivată parțială în raport cu variabila x, dacă există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

și este finită. Limita însăși se numește derivata parțială în raport cu x a funcției $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0) și se notează $f'_x(x_0, y_0)$ sau $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, sau $D_x f(x_0, y_0)$:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Se definește în mod semănător derivata parțială în raport cu y a funcției $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0), notată $f'_y(x_0, y_0)$ sau $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, sau $D_y f(x_0, y_0)$, prin egalitatea

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

dacă limita există și este finită.

În loc de „derivata parțială în raport cu x (respectiv cu y)" se mai spune derivata parțială în raport cu prima variabilă (respectiv cu a doua variabilă) și se notează $D_1 f(x_0, y_0)$ (respectiv $D_2 f(x_0, y_0)$), mai ales atunci cînd nu este necesar să se specifice modul în care se notează variabilele.

Spunem că funcția $f(x, y)$ are derivată parțială în raport cu x (respectiv cu y) pe o mulțime $A \subset E$, dacă are derivată parțială în raport cu x (respectiv cu y) în fiecare punct $(x, y) \in A$.

Dacă funcția f are derivată parțială în raport cu x (respectiv cu y) pe mulțimea A, funcția $f_x(x, y)$ (respectiv funcția $f'_y(x, y)$) definită pe A se numește derivată parțială a funcției f în raport cu x (respectiv în raport cu y) și se notează f'_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $D_x f$, $D_1 f$ (respectiv f'_y, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $D_y f$, $D_2 f$).

În loc să spunem că funcția f are derivată parțială în raport cu x (respectiv cu y) într-un punct (x, y) sau pe A, se spune adesea că derivata f'_x (respectiv derivata f'_y) există în punctul (x, y) sau pe A.

Practic derivata parțială f'_x se calculează considerînd pe y *constant* și derivînd ca o funcție de o singură variabilă, x. Derivata parțială în raport cu y se calculează în mod asemănător.

Exemple. 1) Fie funcția $f(x, y) = x^2y^3 - x^y$ definită pe semiplanul dechis $x > 0$. Avem

$$f'_x(x, y) = 2xy^3 - yx^{y-1},\ f'_y(x, y) = 3x^2y^2 - x^y \ln x.$$

2) $f(x, y) = x + y$ definită pe R^2

$$f'_x(x, y) \equiv 1,\ f'_y(x, y) \equiv 1.$$

3) $f(x, y) = xy$ definită pe R^2

$$f'_x(x, y) = y,\ f'_y(x, y) = x.$$

4) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ definită pentru orice (x, y) cu $y \neq 0$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{y},\ f'_y(x, y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Observații. 1° Derivata parțială a funcției $f(x, y)$ în raport cu x, în punctul (x_0, y_0), se poate defini chiar dacă (x_0, y_0) nu este punct interior al lui E.

Dacă mulțimea E conține un segment de dreaptă paralel cu axa Ox, care trece prin punctul (x_0, y_0), atunci are sens limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

deoarece (x_0, y_0) este punct de acumulare al acestui segment. În acest caz, se poate defini $f'_x(x_0, y_0)$. De asemenea, dacă E conține un segment de dreaptă paralel cu axa Oy care trece prin (x_0, y_0), se poate defini $f'_y(x_0, y_0)$.

Dacă mulțimea E nu conține nici un segment de dreaptă care să treacă prin (x_0, y_0) și care să fie paralel cu una din axe, atunci nu are sens nici una din derivatele parțiale în punctul (x_0, y_0).

De exemplu, dacă E este un segment de dreaptă neparalel cu axa Ox, sau o circumferință, derivatele parțiale nu au sens în nici un punct din E.

2° Să considerăm proiecția $E(y_0)$ pe axa Ox a mulțimii punctelor din E care au ordonata y_0:

$$E(y_0) = \{x | x \in R,\ (x, y_0) \in E\}.$$

Mulțimea $E(y_0)$ conține punctul x_0 în interiorul său.

Să considerăm funcția parțială

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

definită pentru $x \in E(y_0)$. Funcția $f(x, y)$ are derivată parțială în raport cu x în punctul (x_0, y_0), dacă și numai funcția $\varphi(x)$ de o singură variabilă este derivabilă în punctul x_0. În acest caz,

$$f'_x(x_0, y_0) = \varphi'(x_0).$$

În mod asemănător, să considerăm mulțimea

$$E(x_0) = \{y | y \in R,\ (x_0, y) \in E\}$$

și funcția parțială definită pe $E(x_0)$:

$$\psi(y) = f(x_0, y).$$

Funcţia $f(x, y)$ are derivată parţială în raport cu y în (x_0, y_0) dacă şi numai dacă funcţia $\psi(y)$ este derivabilă în y_0. În acest caz avem

$$f'_y(x_0, y_0) = \psi'(y_0).$$

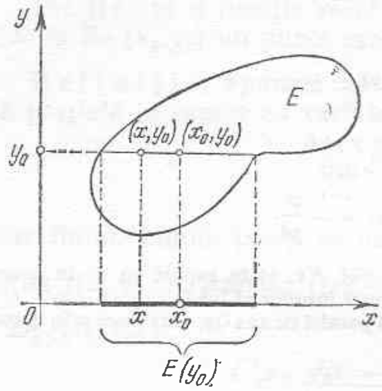


Fig. 142

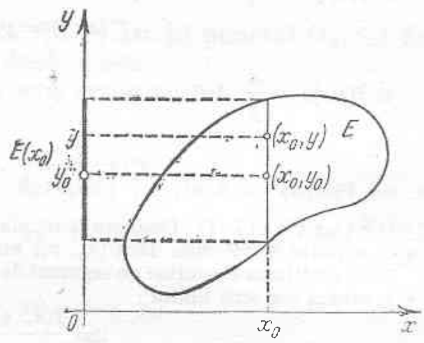


Fig. 143

P r o p o z i ţ i a 1. Dacă derivata parţială f'_x (respectiv f'_y) există în punctul (x_0, y_0), atunci f este continuă în punctul (x_0, y_0) în raport cu x (respectiv cu y).

Într-adevăr, deoarece funcţia $\varphi(x) = f(x, y_0)$ este derivabilă în x_0, ea este continuă în x_0. Aceasta înseamnă că funcţia $f(x, y)$ este continuă parţial în raport cu x în punctul (x_0, y_0)

O b s e r v a ţ i e. Dacă există ambele derivate parţiale $f'_x(x_0, y_0)$ şi $f'_y(x_0, y_0)$, atunci funcţia $f(x, y)$ este continuă în (x_0, y_0) în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu în mod necesar în raport cu ansamblul variabilelor.

Exemplu. Fie funcţia $f(x, y)$ definită pe R^2 astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ şi } f(0, 0) = 0.$$

Avem $f(x, 0) \equiv 0$, deci $f'_x(x, 0) \equiv 0$ şi $f'_x(0, 0) = 0$. De asemenea, $f'_y(0, 0) = 0$. Funcţia $f(x, y)$ are în origine derivate parţiale în raport cu fiecare variabilă, dar nu este continuă în acest punct. Într-adevăr, pe dreapta $y = mx$, $(m \neq 0)$, funcţia este constantă:

$$f(x, y) = \frac{mx^2}{x^2 + mx^2} = \frac{m}{1 + m^2}, \quad x \neq 0,$$

deci $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \dfrac{m}{1 + m^2} \neq f(0, 0).$

Propoziţia 2. Fie (x_0, y_0) un punct interior al lui E. Dacă derivatele parţiale f'_x şi f'_y există pe o vecinătate V a lui (x_0, y_0) atunci pentru orice punct $(x, y) \in V$ există un număr ξ cuprins între x_0 şi x şi un număr η cuprins între y_0 şi y astfel încît:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi, y)(x - x_0) + f'_y(x_0, \eta)(y - y_0).$$

Să alegem un punct arbitrar $(x, y) \in V$ şi să-l menţinem fix. Avem

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0).$$

Să notăm

$$\varphi(t) = f(t, y), \ \psi(t) = f(x_0, t), \ (t, y) \in V, \ (x_0, t) \in V.$$

Funcţiile $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ sînt derivabile:

$$\varphi'(t) = f'_x(t, y), \ \psi'(t) = f'_y(x_0, t).$$

Aplicînd teorema creşterilor finite funcţiilor $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$, deducem că există un punct ξ cuprins între x_0 şi x, astfel ca

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'_x(\xi)(x - x_0),$$

adică

$$f(x, y) - f(x_0, y) = f'_x(\xi, y)(x - x_0)$$

şi există un punct η cuprins între y_0 şi y, astfel ca

$$\psi(y) - \psi(y_0) = \psi'_y(\eta)(y - y_0),$$

adică

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, \eta)(y - y_0)$$

Atunci

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi, y)(x - x_0) + f'_y(x_0, \eta)(y - y_0).$$

Această egalitate se numeşte *formula lui Lagrange* pentru funcţii de două variabile. Această formulă va fi precizată mai departe, astfel:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi, \eta)(x - x_0) + f'_y(\xi, \eta)(y - y_0).$$

Observaţie. Notînd $\varphi(t) = f(t, y_0)$, $\psi(t) = f(x, t)$ şi, raţionînd ca mai sus, deducem că există un număr ξ' cuprins între x_0 şi x şi un număr η cuprins între y_0 şi y, astfel încît

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi', y_0)(x - x_0) + f'_y(x, \eta')(y - y_0).$$

Propoziţia 3. Fie (x_0, y_0) un punct interior al lui E. Dacă funcţia f are derivate parţiale mărginite într-o vecinătate V a lui (x_0, y_0) atunci ea este continuă în (x_0, y_0) (în raport cu ansamblul variabilelor).

Prin ipoteză, există un număr M, astfel ca

$$|f'_x(x, y)| \leqslant M \text{ şi } |f'_y(x, y)| \leqslant M \quad \text{pentru orice } (x, y) \in V.$$

Avem

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant |f'_x(\xi, y)(x - x_0) + f'_y(x, \eta)(y - y_0)| \leqslant$$
$$\leqslant M(|x - x_0| + |y - y_0|).$$

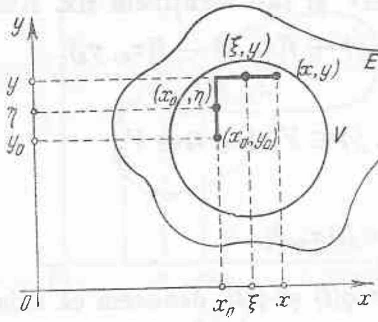


Fig. 144

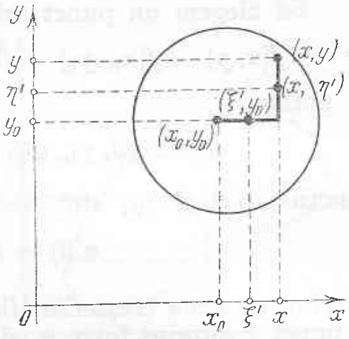


Fig. 145

Dar $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (|x - x_0| + |y - y_0|) = 0$, şi deci

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| = 0,$$

de unde

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

adică f este continuă în (x_0, y_0).

Corolarul 1. Dacă f'_x şi f'_y există pe o vecinătate V a lui (x_0, y_0) şi sînt continue în (x_0, y_0), atunci funcţia f este continuă în (x_0, y_0).

Într-adevăr, dacă f'_x şi f'_y sînt continue în (x_0, y_0), există o vecinătate V a lui (x_0, y_0) pe care aceste funcţii sînt mărginite.

Corolarul 2. Dacă derivatele parţiale f'_x şi f'_y există pe E şi sînt continue sau sînt mărginite pe E, atunci funcţia f este continuă pe E.

Observaţii. 1° Dacă $f(x, y, z)$ este o funcţie reală de trei variabile definită pe o mulţime $E \subset R^3$ şi dacă $(a, b, c) \in E$, se definesc derivatele sale parţiale, în număr de trei, astfel:

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial x} = f'_x(a, b, c) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b, c) - f(a, b, c)}{x - a},$$

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial y} = f'_y(a, b, c) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y, c) - f(a, b, c)}{y - b},$$

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial z} = f'_z(a, b, c) = \lim_{z \to c} \frac{f(a, b, z) - f(a, b, c)}{z - c}.$$

Exemplu. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ definită pe R^3;

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ f'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$(x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

2° Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcţie reală de n variabile definită pe o mulţime $E \subset R^n$, ea poate avea n derivate parţiale într-un punct $(a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n) \in E$. De exemplu, derivata parţială în raport cu x_i se defineşte astfel:

$$\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(a_1, \ldots, a_n) =$$

$$= \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{x_i - a_i}.$$

3° Deoarece derivatele parţiale ale unei funcţii de mai multe variabile sînt, de fapt, derivatele funcţiilor sale parţiale care sînt funcţii de o singură variabilă, rezultă că *operaţiile algebrice efectuate asupra funcţiilor care au derivate parţiale duc tot la funcţii care au derivate parţiale, iar regulile de derivare a sumei, diferenţei, produsului, cîtului etc. sînt aceleaşi ca şi pentru funcţii de o variabilă.*

4° Fie $f(x, y)$ o funcţie *vectorială* de două variabile definită pe o mulţime $E \subset R^2$ cu valori în R^m, şi $(a, b) \in E$. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_m$ componentele *reale* ale funcţiei vectoriale f:

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Se spune că funcţia vectorială f are derivată parţială în raport cu x în punctul (a, b), dacă, toate componentele sale reale au derivată parţială în raport cu x în punctul (a, b).

Derivata parţială $\frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$ se defineşte ca fiind *vectorul* din R^m care are drept componente derivatele parţiale în raport cu x ale funcţiilor $f_1, f_2, \ldots, f_m$

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1(a, b)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial f_m(a, b)}{\partial x}\right) \in R^m.$$

Această derivată parţială se poate defini direct prin egalitatea

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = f'_x(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \in R^m,$$

unde limita se consideră în R^m.

La fel se definesc derivatele parţiale ale unei funcţii vectoriale de n variabile cu valori în R^m, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Toate proprietăţile relative la derivatele parţiale ale funcţiilor reale de două variabile rămîn adevărate şi pentru derivatele parţiale ale funcţiilor reale sau vectoriale de mai multe variabile.

2. Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

Fie $f(x, y)$ o funcţie reală de două variabile definită pe o mulţime $E \subset R^2$ şi (a, b) un punct *interior* al lui E.

Definiţie. Se spune că funcţia $f(x, y)$ este diferenţiabilă în punctul (a, b) dacă există două numere reale λ şi μ, şi o funcţie $\omega(x, y)$ definită pe E, continuă în punctul (a, b) şi nulă în acest punct:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0,$$

astfel încît pentru orice punct $(x,y) \in E$ să avem egalitatea:

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Dacă E este o mulţime *deschisă*, se spune că f *este diferenţiabilă pe* E *dacă este diferenţiabilă în fiecare punct din* E.

Observaţii. 1° În această definiţie, faptul esenţial este că $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = 0.$

Este suficient ca funcţia $\omega(x, y)$ care verifică egalitatea precedentă să fie definită numai pe o vecinătate V a lui (a, b) cu excepţia punctului (a, b), deoarece în punctul (a, b) se poate prelungi prin continuitate, punînd $\omega(a, b) = 0$, iar în punctele $(x, y) \in V$ se defineşte prin egalitatea

$$\omega(x, y) = \frac{f(x, y) - f(a, b) - \lambda(x - a) - \mu(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}},$$

astfel încît funcţia prelungită $\omega(x, y)$ verifică egalitatea de definiţie a diferenţiabilităţii, pentru orice $(x, y) \in E$.

2° Pentru simplificarea scrisului, vom nota

$$\rho = \rho(x, y) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

ρ reprezintă distanţa dintre punctele (x, y) şi (a, b), adică

$$\rho = \|(x, y) - (a, b)\| = \|(x - a, y - b)\|.$$

Cu această notaţie, egalitatea de definiţie a diferenţiabilităţii se scrie

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\,\rho.$$

Avem $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \rho\,(x, y) = 0.$

3° Deoarece $|x - a| \leqslant \sqrt{(x - a)^2 + (x - b)^2}$ şi

$|y - b| \leqslant \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, avem

$$\frac{|x - a|}{\rho(x, y)} \leqslant 1 \text{ şi } \frac{|y - b|}{\rho(x, y)} \leqslant 1.$$

4° Chiar dacă funcţia f nu este diferenţiabilă, în punctul (a, b), pentru, două numere date λ şi μ, există o *singură* funcţie $\omega(x, y)$ definită pe E (cu excepţia lui (a, b)), care verifică egalitatea

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\rho$$

pentru orice $(x, y) \in E$, diferit de (a, b).

Într-adevăr, dacă o altă funcţie $\omega'(x, y)$ verifică egalitatea

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega'(x, y)\rho$$

pentru orice $(x, y) \in E$, diferit de (a, b), atunci pentru $(x, y) \neq (a, b)$ avem

$$\omega(x, y) = \frac{f(x, y) - f(a, b) - \lambda(x - a) - \mu(y - b)}{\rho}$$

şi

$$\omega'(x, y) = \frac{f(x, y) - f(a, b) - \lambda(x - a) - \mu(y - b)}{\rho},$$

de unde $\omega(x, y) = \omega'(x, y)$ pentru orice $(x, y) \neq (a, b)$ din E.

Funcţiile ω şi ω' pot fi diferite numai în punctul (a, b). Dacă punem condiţia ca aceste funcţii să aibă valoarea 0 în punctul (a, b), atunci ele sînt egale pe toată mulţimea E.

Înainte de a trece la studiul proprietăţilor funcţiilor diferenţiabile să stabilim un rezultat care va fi util mai departe.

Lemă. Dacă funcţia $\omega(x, y)$, definită pe E, are limita 0 în punctul (a, b), atunci există două funcţii ω_1 şi ω_2 definite pe E care au limita 0 în (a, b) şi care verifică egalitatea:

$$\omega(x, y)\rho = \omega_1(x, y)\,(x - a) + \omega_2(x, y)\,(y - b), \quad (x, y) \in E.$$

Reciproc, dacă funcţiile ω_1 şi ω_2, definite pe E, au limita 0 în punctul (a, b), atunci există o funcţie $\omega(x, y)$ cu limita 0 în punctul (a, b), care să verifice egalitatea precedentă.

Să presupunem întîi că se dă funcţia $\omega(x, y)$ cu

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = 0.$$

Definim funcţiile ω_1 şi ω_2 astfel:

$$\omega_1(x, y) = \omega(x, y)\,\frac{x - a}{\rho(x, y)}, \quad \omega_2(x, y) = \omega(x, y)\,\frac{y - b}{\rho(x, y)}, \quad (x, y) \neq (a, b).$$

Atunci

$$|\omega_1(x, y)| = |\omega(x, y)|\,\frac{|x - a|}{\rho} \leq |\omega(x, y)|,$$

deci

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega_1(x, y) = 0$$

şi la fel se arată că

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega_2(x, y) = 0.$$

Pe de altă parte, pentru $(x, y) \neq (a, b)$ avem

$$\omega_1(x, y)\,(x - a) + \omega_2(x, y)(y - b) = \omega(x, y)\,\frac{(x-a)^2}{\rho(x, y)} + \omega(x, y)\,\frac{(y-b)^2}{\rho(x, y)} =$$

$$= \omega(x, y)\,\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{\rho(x, y)} = \omega(x, y)\,\rho(x, y).$$

Reciproc, să presupunem că sînt date funcţiile $\omega_1(x, y)$ şi $\omega_2(x, y)$ cu

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega_i(x, y) = 0,\ i = 1, 2.$$

Definim atunci funcţia $\omega(x, y)$ astfel:

$$\omega(x, y) = \frac{\omega_1(x, y)(x-a) + \omega_2(x, y)(y-b)}{\rho(x, y)},\ (x, y) \neq (a, b),$$

deci

$$\omega(x, y)\,\rho(x, y) = \omega_1(x, y)\,(x - a) + \omega_2(x, y)(y - b),$$

pentru orice $(x, y) \in E$, şi

$$|\omega(x, y)| \leqslant |\omega_1(x, y)|\,\frac{|x-a|}{\rho(x, y)} + |\omega_2(x, y)|\,\frac{|y-b|}{\rho(x, y)} \leqslant$$

$$\leqslant |\omega_1(x, y)| + |\omega_2(x, y)|,$$

de unde

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = 0.$$

Observaţie. Pentru o funcţie ω dată putem găsi mai multe perechi de funcţii ω_1 şi ω_2 care să verifice lema precedentă.

Se poate lua, de exemplu,

$$\omega_1(x, y) = \omega(x, y)\,\frac{\rho(x, y)}{|x-a| + |y-b|}\,\frac{|x-a|}{x-a},$$

$$\omega_2(x, y) = \omega(x, y)\,\frac{\rho(x, y)}{|x-a| + |y-b|}\,\frac{|y-b|}{y-b}.$$

Pentru două funcţii date ω_1 şi ω_2, există o singură funcţie ω definită pe E (cu excepţia lui (a, b)) care să verifice lema.

Folosind această lemă, rezultă imediat

Propoziţia 3. Funcţia f este diferenţiabilă în punctul (a, b) dacă şi numai dacă există două numere reale λ şi μ, şi două funcţii ω_1 şi ω_2 definite pe E, continue în (a, b) şi nule în acest punct:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0,\ i = 1, 2$$

astfel încît pentru orice $(x, y) \in E$ să avem egalitatea

$$f(x,y) - f(a,b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega_1(x, y)(x - a) + \omega_2(x,y)(y-b).$$

Această egalitate se poate scrie și astfel:

$$f(x,y) - f(a,b) = [\lambda + \omega_1(x,y)](x - a) + [\mu + \omega_2(x,y)](y - b).$$

Observație. Ca și în definiția diferențiabilității este suficient ca funcțiile ω_1 și ω_2 să fie definite pe o vecinătate V a lui (a, b), cu excepția punctului (a, b), dar să aibă limita 0 în acest punct. Ele se prelungesc atunci prin continuitate în punctul (a, b), iar în afara lui V se prelungesc în mod unic, astfel încît să fie verificată egalitatea de mai sus.

Propoziția 4. Dacă funcția f este diferențiabilă în punctul (a, b), atunci ea are derivate parțiale în (a, b) și

$$f'_x(a, b) = \lambda, \ f'_y(a, b) = \mu.$$

Egalitatea de definiție a diferențiabilității se scrie atunci astfel:

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \omega(x, y)\rho$$

sau

$$f(x, y) - f(a,b) = [f'_x(a, b) + \omega_1(x, y)](x - a) + [f'_y(a, b) + \omega_2(x, y)](y - b).$$

Într-adevăr, dacă în egalitatea de definiție a diferențiabilității,

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

se ia $y = b$, se obține

$$f(x, b) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \omega(x, b)|x - a|.$$

Pentru $x \neq a$ deducem

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lambda + \omega(x, b)\frac{|x - a|}{x - a}.$$

Dar $\left|\omega(x, b)\frac{|x - a|}{x - a}\right| = |\omega(x, b)|$ și $\lim\limits_{x\to 0} |\omega(x, b)| = |\omega(a, b)| = 0,$

deci

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lambda,$$

adică funcția f are în punctul (a, b) derivata parțială în raport cu x și $f'_x(a, b) = \lambda$.

Se demonstrează în mod analog că f are în punctul (a, b) derivata parțială în raport cu y și $f'_y(a, b) = \mu$.

C o r o l a r. Dacă f este diferenţiabilă pe E, atunci ea are derivate parţiale f'_x şi f'_y pe E.

O b s e r v a ţ i e. Propoziţia reciprocă nu este adevărată: există funcţii care au derivate parţiale dar care nu sînt diferenţiabile.

Exemplu. Funcţia $f(x, y)$ definită pe R^2 astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ şi } f(0, 0) = 0$$

are derivate parţiale nule în origine:

$$f(x, 0) \equiv 0, \text{ deci } f'_x(x, 0) \equiv 0 \text{ şi } f'_x(0, 0) = 0;$$

$$f(0, y) \equiv 0, \text{ deci } f'_y(0, y) \equiv 0 \text{ şi } f'_y(0, 0) = 0.$$

Avem apoi, pentru $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) - f(0,0) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 = \frac{xy}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$= f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \frac{xy}{x^2 + y^2} \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}.$$

Dar funcţia $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ *nu are limită* în origine, deci funcţia f nu este diferenţiabilă în origine.

Aşadar, pentru funcţii de două sau mai multe variabile, noţiunea de diferenţiabilitate nu este echivalentă cu aceea de derivabilitate parţială.

P r o p o z i ţ i a 5. Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul (a, b), atunci ea este continuă în acest punct.

Într-adevăr, toţi termenii din membrul drept al egalităţii

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda (x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y) \rho,$$

prin care se defineşte diferenţiabilitatea, au limita 0 în punctul (a, b), deci

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} [f(x, y) - f(a, b)] = 0,$$

de unde

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b),$$

adică f este continuă în (a, b).

C o r o l a r. Dacă f este diferenţiabilă pe E atunci ea este continuă pe E.

O b s e r v a ţ i i. 1° Propoziţia reciprocă nu este adevărată: există funcţii continue care nu sînt diferenţiabile.

Exemplu. Funcţia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ definită pe R^2 este continuă în orice punct.

Avem f $(x, 0) = |x|$ şi funcţia $|x|$ nu este derivabilă în punctul 0, deci $f'_x(0, 0)$ nu există. La fel se arată că $f'_y(0, 0)$ nu există. Rezultă că funcţia f nu este diferenţiabilă în origine, deoarece nu are derivate parţiale în acest punct.

2° Chiar dacă funcţia f are derivate parţiale şi este şi continuă într-un punct, nu rezultă că este diferenţiabilă în acel punct.

Exemplu. Funcţia $f(x, y)$ definită pe R^2 astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ şi } f(0, 0) = 0$$

are derivate parţiale în origine, $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$ şi este continuă în origine, deoarece

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} |y| \leqslant |y|$$

şi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} |y| = 0$, deci

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0).$$

După cum s-a văzut într-un exemplu precedent, această funcţie nu este diferenţiabilă în origine.

Ultimele două propoziţii arată că existenţa derivatelor parţiale şi continuitatea unei funcţii sînt condiţii necesare (dar nu suficiente) pentru diferenţiabilitatea sa.

Propoziţia următoare dă condiţii suficiente de diferenţiabilitate.

Propoziţia 6. Dacă funcţia f are derivate parţiale f'_x şi f'_y într-o vecinătate V a lui (a, b) şi dacă aceste derivate parţiale sînt continue în (a, b), atunci funcţia f este diferenţiabilă în (a, b).

Aplicînd formula lui Lagrange, pentru fiecare punct $(x, y) \in V$, există un număr ξ cuprins între a şi x şi un număr η cuprins între b şi y, astfel încît

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(\xi, y)(x - a) + f'_y(a, \eta)(y - b) =$$
$$= f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) +$$
$$+ [f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b)](x - a) + [f'_y(a, \eta) - f'_y(a, b)](x - b) =$$
$$= f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \omega_1(x, y)(x - a) + \omega_2(x, y)(y - b),$$

unde am notat

$$\omega_1(x, y) = f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b),$$
$$\omega_2(x, y) = f'_y(a, \eta) - f'_y(a, b),$$

pentru $(x, y) \in V$. Să arătăm că aceste funcţii au limita 0 în punctul (a, b). Pentru aceasta, fie $(x_n, y_n) \to (a, b)$ un şir oarecare de puncte din V, adică $x_n \to a$ şi $y_n \to b$. Raţionînd ca mai sus, pentru fiecare punct (x_n, y_n) găsim un număr ξ_n cuprins între a şi x_n şi un număr η_n cuprins între b şi y_n care verifică formula lui Lagrange, deci pentru care

$$\omega_1(x_n, y_n) = f'_x(\xi_n, y_n) - f'_x(a, b),$$

$$\omega_2(x_n, y_n) = f'_y(a, \eta_n) - f'_y(a, b).$$

Să observăm că, deoarece $x_n \to a$, iar ξ_n se află între a şi x_n, avem $\xi_n \to a$; de asemenea, $\eta_n \to b$. Deoarece funcţiile f'_x şi f'_y sînt continue în (a, b), deducem

$$f'_x(\xi_n, y_n) \to f'_x(a, b),$$

$$f'_y(a, \eta_n) \to f'_y(a, b),$$

deci $\omega_1(x_n, y_n) \to 0$ şi $\omega_2(x_n, y_n) \to 0$. Deoarece şirul $(x_n, y_n) \to (a, b)$ a fost ales arbitrar, rezultă

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega_1(x, y) = 0 \text{ şi } \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega_2(x, y) = 0.$$

Funcţiile ω_1 şi ω_2 se prelungesc apoi în mod unic în exteriorul vecinătăţii V, astfel încît să avem

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \omega_1(x, y)(x - a) + \omega_2(x, y)(y - b),$$

deci f este diferenţiabilă în (a, b).

Corolar. Dacă derivatele parţiale f'_x şi f'_y există şi sînt continue pe E, atunci f este diferenţiabilă pe E.

Observaţie. Propoziţia reciprocă nu este adevărată: există funcţii diferenţiabile într-un punct, ale căror derivate parţiale nu sînt continue în acest punct.

Exemplu. Fie funcţia $f(x, y)$ definită pe R^2 astfel:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ şi } f(0, 0) = 0.$$

Să arătăm mai întîi că funcţia este diferenţiabilă în origine. Pentru $(x, y) \neq (0, 0)$ avem

$$f(x, y) - f(0, 0) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}.$$

Notînd $\omega(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$, avem

$$|\omega(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$$

şi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, deci $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \omega(x, y) = 0$.

Aşadar, funcţia f este diferenţiabilă în origine. Rezultă în particular $f'_x(0, 0) = 0$ şi $f'_y(0, 0) = 0$.

Să calculăm acum derivatele parţiale în punctele $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f'_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Aceste derivate parţiale nu au limită în origine şi deci cu atît mai mult nu sînt continue în origine, deoarece funcţiile

$$\sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ şi } \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

nu au limită în origine.

O b s e r v a ţ i i. 1° Se defineşte diferenţiabilitatea unei funcţii reale $f(x, y, z)$ de trei variabile, definită pe o mulţime $E \subset R^3$, într-un punct interior $(a, b, c) \in E$, prin egalitatea

$$f(x, y, z) - f(a, b, c) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \nu(z - c) + \omega(x, y, z)\rho,$$

unde λ, μ, ν sînt numere, $\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, iar

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b \\ z \to c}} \omega(x, y, z) = \omega(a, b, c) = 0.$$

Se demonstrează că $\lambda = f'_x(a, b, c)$, $\mu = f'_y(a, b, c)$, $\nu = f'_z(a, b, c)$.

2° Pentru o funcţie reală de n variabile, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definită pe o mulţime $E \subset R^n$, se defineşte diferenţiabilitatea într-un punct interior $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \subset E$ prin egalitatea

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i - a_i) + \omega(x_1, x_2, \ldots x_n)\,\rho,$$

unde λ_i sînt numere, $\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} = ||x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n||$, iar funcţia $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are limita 0 în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

3° Fie $f(x, y)$ o funcţie *vectorială* de două variabile, definită pe o mulţime $E \subset R^n$ cu valori în R^m, şi fie $f_1, f_2, \ldots f_m$ componentele sale reale : $f = (f_1 = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Se spune că funcţia f este diferenţiabilă în punctul (a, b), dacă toate componentele sale reale sînt diferenţiabile în (a, b). O definiţie echivalentă este următoarea: $f(x, y)$ este diferenţiabilă în punctu (a, b) dacă există doi vectori $\lambda = (\lambda_1 \dots, \lambda_m)$ şi $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ din R^m şi o funcţie vectorială $\omega(x, y)$ definită pe E cu valori în R^m, continuă în (a, b), şi nulă în (a, b), astfel încît pentru orice $(x, y) \in E$ să avem

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Notînd cu $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ componentele reale ale lui ω, ele sînt continue şi nule în (a, b). Egalitatea vectorială precedentă este echivalentă cu următoarele n egalităţi scalare:

$$f_i(x, y) - f_i(a, b) = \lambda_i(x - a) + \mu_i(y - b) + \omega_i(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

$= 1, 2, \dots, n$, adică diferenţiabilitatea lui f este echivalentă cu diferenţiabilitatea componentelor sale reale $f_1, f_2, \dots, f_n$.

$$\text{Avem } \lambda_i = \frac{\partial f_i(a, b)}{\partial x} \text{ şi } \mu_i = \frac{\partial f_i(a, b)}{\partial y}, \quad \text{deci}$$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \left(\frac{\partial f_1(a, b)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_m(a, b)}{\partial x}\right) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$$

$$\text{şi } \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) = \left(\frac{\partial f_1(a, b)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial f_m(a, b)}{\partial y}\right) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}.$$

Consideraţii asemănătoare se pot face pentru funcţii vectoriale $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variabile cu valori în R^m.

Toate celelalte proprietăţi relative la diferenţiabilitatea funţiilor reale de două variabile sînt adevărate şi pentru funcţii reale sau vectoriale de mai multe variabile.

4° Diferenţiabilitatea unei funcţii $f(x, y)$ definită pe o mulţime $E \subset R^2$ se poate defini în orice punct de acumulare $(a, b) \in E$, chiar dacă (a, b) nu este punct interior al lui E, prin aceeaşi egalitate

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\,\rho.$$

Dacă f este diferenţiabilă în (a, b), atunci f este continuă în (a, b).

Este însă posibil ca derivatele parţiale să nu aibă sens în punctul (a, b) şi deci propoziţiile 2 şi 4 nu mai au sens în acest caz.

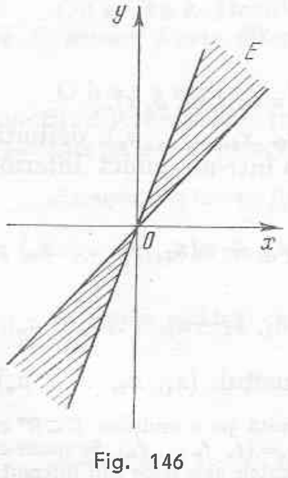


Fig. 146

Exemplu. Fie funcţia $f(x, y) = x + y$ definită pe mulţimea

$$E = \{(x, y) \mid x \leqslant y \leqslant 2x)\}.$$

Funcţia f este diferenţiabilă în origine, doarece

$$f(x, y) - f(0, 0) = x + y = 1 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) + 0 \cdot \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2},$$

deci

$$\lambda = 1, \ \mu = 1 \text{ şi } \omega(x, y) \equiv 0.$$

Derivatele parţiale nu au sens în origine, deoarece mulţimea E nu conţine nici un segment de dreaptă care să treacă prin origine şi să fie paralel cu una din axele de coordonate.

3. Diferențiala funcțiilor de mai multe variabile

Fie $f(x, y)$ o funcție reală definită pe o mulțime $E \subset R^2$ și diferențiabilă într-un punct interior $(a, b) \in E$:

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \omega(x, y)\,\rho,$$

unde $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = 0.$

Diferența $x - a$ se numește creșterea primei variabile de la a la x iar diferența $y - b$ se numește creșterea celei de-a doua variabile de la b la y.

Diferența $f(x, b) - f(a, b)$ se numește creșterea funcției corespunzătoare creșterilor $x - a$ și $y - b$ ale argumentelor.

Deoarece funcția ω are limita 0 în (a, b), avem următoarea relație de aproximare

$$f(x, y) - f(a, b) \approx f'_x(a, b)\,(x - a) + f'_y\,(a, b)(y - b).$$

Așadar, creșterea funcției f poate fi aproximată cu funcția *liniară* $f'_y(a, b)\,(x - a) + f'_x\,(a, b)(y - b)$, definită pentru orice $(x, y) \in R^2$.

Definiție. Funcția liniară de două variabile $f'_x\,(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$ se numește diferențiala funcției $f(x, y)$ în punctul (a, b) și se notează $\mathrm{d}f(a, b)$:

$$\mathrm{d}f(a, b)\,(x, y) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)\,(y - b).$$

Diferențiala este definită pe tot planul, deoarece diferențele $x - a$ și $y - b$ au sens pentru orice x și y reali.

Relația de aproximație a creșterii funcției f se scrie atunci

$$f(x, y) - f(a, b) \approx \mathrm{d}f(a, b)\,(x, y)$$

și ea are sens numai pentru acele valori ale lui x și y pentru care membrul stîng are sens, adică pentru $(x, y) \in E$.

Pentru calcule este util să se scrie diferențiala în alte forme.

Să notăm creșterile variabilelor cu u și v:

$$x - a = u, \quad y - b = v.$$

Atunci

$$\mathrm{d}f(a, b)\,(u, v) = f'_x(a, b)\,u + f'_y(a, b)v, \quad (u, v) \in R^2$$

unde u și v sînt considerate variabile independente.

Dacă funcția f este diferențiabilă pe toată mulțimea E, diferențiala sa într-un punct arbitrar (x, y) din E se scrie

$$\mathrm{d}f(x, y)\,(u, v) = f'_x(x, y)\,u + f'_y(x, y)\,v.$$

Diferenţiala funcţiei f pe mulţimea E este deci o funcţie de patru variabile, x, y, u şi v, unde perechea (x, y) parcurge mulţimea E, iar perechea (u, v) parcurge tot planul.

Să considerăm funcţiile

$$\varphi(x, y) = x,$$
$$\psi(x, y) = y,$$

definite pe R^2. Prima funcţie φ este *proiecţia pe axa* Ox, iar a doua funcţie, ψ, este *proiecţia pe axa* Oy. Aceste funcţii sînt diferenţiabile pe R^2. Avem

$$\varphi'_x(x, y) \equiv 1, \qquad \varphi'_y(x, y) \equiv 0,$$
$$\psi'_x(x, y) \equiv 0, \qquad \psi'_y(x, y) \equiv 1,$$

deci

$$\mathrm{d}\varphi\,(x, y)\,(u, v) \equiv u \text{ şi } \mathrm{d}\psi\,(x, y)\,(u, v) \equiv v.$$

Diferenţialele funcţiilor φ şi ψ se notează respectiv $\mathrm{d}x$ şi $\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}x(u, v) = \mathrm{d}\varphi(x, y)\,(u, v) = u, \qquad \mathrm{d}y(u, v) = \mathrm{d}\psi(x, y)\,(u, v) = v.$$

Cu aceste notaţii, diferenţiala funcţiei f se scrie

$$\mathrm{d}f(x, y) = f'_x(x, y)\,\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\,\mathrm{d}y$$

sau, dacă nu se mai pun în evidenţă variabile x şi y,

$$\mathrm{d}f = f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y, \text{ sau } \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Se observă că dacă interpretăm — în *mod formal* — pe ∂f ca un produs *simbolic* între ∂ şi f, în membrul drept se poate da f factor comun — în mod formal:

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)f.$$

Se pune astfel în evidenţă *operatorul de diferenţiere*:

$$\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Exemple. 1) $\dfrac{\partial(x + y)}{\partial x} = 1$ şi $\dfrac{\partial(x + y)}{\partial y} = 1$, deci $\mathrm{d}(x + y) = 1 \cdot \mathrm{d}x + 1 \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$.

2) $\dfrac{\partial(xy)}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial(xy)}{\partial y} = x$, deci $\mathrm{d}(x \cdot y) = y \cdot \mathrm{d}x + x \cdot \mathrm{d}y$.

3) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{y}\right) = -\dfrac{x}{y^2}$, deci $\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{1}{y}\mathrm{d}x - \dfrac{x}{y^2}\mathrm{d}y = \dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}$.

4) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^y) = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^y) = x^y \ln x$, deci $\mathrm{d}(x^y) = yx^{y-1}\,\mathrm{d}x + x^y \ln x\,\mathrm{d}y$.

O b s e r v a ţ i i. 1° Pentru o funcţie de trei variabile $f(x, y, z)$, operatorul de diferenţiere este

$$d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz,$$

iar diferenţiala sa este

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right) f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

unde dz este diferenţiala funcţiei $f(x, y, z) = z$.

2° Pentru o funcţie de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diferenţiala este

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

unde dx_i este diferenţiala funcţiei $\varphi_i (x_1, \ldots, x_n) = x_i$, iar operatorul de diferenţiere este

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i.$$

3° Pentru o funcţie *vectorială* $f(x, y)$ definită pe o mulţime $E \subset R^2$ cu valori în R^m, se defineşte diferenţiala într-un punct interior $(a, b) \in E$, în care este diferenţiabilă, prin egalitatea

$$df(x, y; a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (y - b),$$

unde derivatele parţiale sînt vectori din R^m. Diferenţiala este deci o *funcţie vectorială* cu valori în R^m. Făcînd aceleaşi consideraţii ca mai sus, diferenţiala funcţiei vectoriale f se scrie ca şi pentru funcţiile scalare:

$$df = f'_x dx + f'_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) f.$$

4. Derivate parţiale de ordin superior

Fie $f(x, y)$ o funcţie reală de două variabile definită pe o mulţime $E \subset R^2$. Pentru simplificarea expunerii vom presupune că mulţimea E este deschisă, adică este formată numai din puncte interioare, deci derivatele parţiale f'_x şi f'_y au sens în fiecare punct $(x, y) \in E$. Funcţiile f'_x şi f'_y se numesc derivate parţiale de ordinul întîi ale funcţiei f.

Dacă derivatele parţiale f'_x şi f'_y există pe E, ele sînt funcţii de două variabile, deci se poate pune problema existenţei derivatelor parţiale ale funcţiilor f'_x şi f'_y.

Dacă există derivatele parţiale ale funcţiilor f'_x şi f'_y, ele se numesc *derivate parţiale de ordinul doi* ale funcţiei f şi se notează astfel:

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2};$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

$$f''_{y^2} = (f'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

O funcţie de două variabile $f(x, y)$ poate avea *patru* derivate de ordinul doi. Funcţiile f''_{xy} şi f''_{yx} se numesc derivate parţiale *mixte* de ordinul doi.

O funcţie de trei variabile $f(x, y, z)$ poate avea *nouă* derivate parţiale de ordinul doi:

$$f''_{x^2},\ f''_{xy},\ f''_{xz},\ f''_{yx},\ f''_{y^2},\ f''_{yz},\ f''_{zx},\ f''_{zy},\ f''_{z^2}.$$

O funcţie de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ poate avea n derivate parţiale de ordinul întîi şi n^2 derivate parţiale de ordinul doi:

$$f''_{x_i y_j}\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Observaţie. Este posibil ca una sau mai multe derivate parţiale de ordinul doi să nu existe într-un punct sau pe o submulţime $A \subset E$.

Exemplu. Funcţia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ nu are derivate parţiale de ordinul întîi în origine, deci nu are nici derivate parţiale de ordinul doi în origine.

Se definesc în mod asemănător derivatele parţiale de ordinul trei, ca fiind derivatele parţiale ale derivatelor parţiale de ordinul doi, şi la fel se definesc derivatele parţiale de un ordin n oarecare.

Exemplu. Fie funcţia $f(x, y) = x^3y - y^2x^2$ definită pe R^2. Avem

$$f'_x = 3x^2y - 2y^2x,\ f'_y = x^3 - 2yx^2;$$

$$f''_{x^2} = 6xy - 2y^2,\ f''_{xy} = 3x^2 - 4yx,\ f''_{yx} = 3x^2 - 4xy,\ f''_{y^2} = -2x^2;$$

$$f'''_{x^2y} = 6x - 4y,\ f'''_{x^3} = 6y,\ f'''_{xyx} = 6x - 4y,\ f''_{yx^2} = 6x - 4y \text{ etc.}$$

Se observă că $f''_{xy} = f''_{yx}$, $f'''_{x^2y} = f'''_{xyx} = f'''_{yx^2}$, adică în derivatele parţiale mixte, ordinea în care se derivează în raport cu diferitele variabile nu are importanţă, ci numai numărul de ori de care se derivează în raport cu fiecare variabilă în parte.

În general, derivatele parţiale mixte f''_{xy} şi f''_{yx} nu sînt egale, şi la fel derivatele parţiale mixte $f'''_{x^2y}, f'''_{xyx}, f'''_{yx^2}$ nu sînt egale.

Următoarele două propoziţii dau condiţii suficiente pentru egalitatea derivatelor parţiale mixte.

Criterul lui Schwarz. Dacă funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale mixte de ordinul doi f''_{xy} şi f''_{yx} într-o vecinătate V a unui punct $(a, b)\in E$, şi dacă f''_{xy} şi f''_{yx} sînt continue în (a, b), atunci

$$f''_{xy}(a, b)= f''_{yx}(a, b).$$

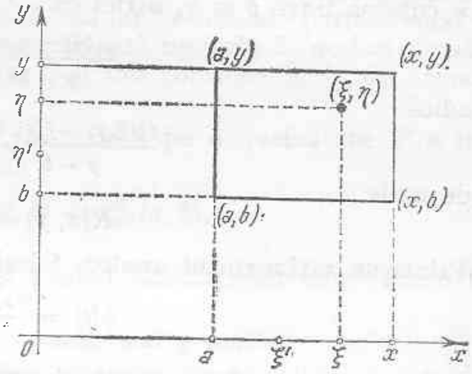


Fig. 147

Să alegem un punct arbitrar (x, y) din V, astfel ca $x \neq a$ şi $y \neq b$ şi să-l menţinem fix. Să notăm

$$R(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b)}{(x - a)(y - b)}.$$

Să considerăm funcţia

$$\varphi(t) = \frac{f(t, y) - f(t, b)}{y - b}$$

definită pe intervalul $[a, x]$ sau $[x, a]$, după cum $a < x$ sau $x < a$. Funcţia $\varphi(t)$ este derivabilă pe acest interval şi

$$\varphi'(t) = \frac{f'_x(t, y) - f'_x(t, b)}{y - b}.$$

Avem apoi

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b},$$

$$\varphi(a) = \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b},$$

deci $R(x, y)$ se scrie astfel

$$R(x, y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}.$$

Aplicînd acum funcţiei φ teorema creşterilor finite, deducem că există un punct ξ cuprins între a şi x astfel încît să avem

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(\xi),$$

adică

$$R(x, y) = \varphi'(\xi) = \frac{f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, b)}{y - b}.$$

Funcția $\varphi_1(\tau) = f'_x(\xi, \tau)$, definită pe intervalul $[b, y]$ sau $[y, b]$ după cum $b < y$ sau $y < b$, este derivabilă pe acest interval, deoarece f''_{xy} există pe V, și

$$\varphi_1'(\tau) = f''_{xy}(\xi, \tau).$$

Aplicînd teorema creșterilor finite funcției φ_1, deducem că există un punct η cuprins între b și y, astfel ca

$$\frac{\varphi_1(y) - \varphi_1(b)}{y - b} = \varphi_1'(\eta),$$

adică

$$\frac{f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, b)}{y - b} = f''_{xy}(\xi, \eta),$$

de unde

$$R(x, y) = f''_{xy}(\xi, \eta).$$

Printr-un raționament analog, folosind funcția

$$\psi(t) = \frac{f(x, t) - f(a, t)}{x - a},$$

deducem că există un punct η' cuprins între b și y, astfel ca

$$R(x, y) = \frac{f'_y(x, \eta') - f'_y(a, \eta')}{x - a}.$$

Folosind apoi funcția $\psi_1(\tau) = f'_y(\tau, \eta')$, deducem că există un punct ξ' cuprins între a și x, astfel ca

$$R(x, y) = f''_{yx}(\xi', \eta').$$

Așadar

$$f''_{xy}(\xi, \eta) = f''_{yx}(\xi', \eta').$$

Fie acum un șir $(x_n, y_n) \to (a, b)$ de puncte din V, cu $x_n \neq a$ și $y_n \neq b$. Avem $x_n \to a$ și $y_n \to b$.

Din cele de mai sus rezultă că pentru fiecare punct (x_n, y_n) există două numere ξ_n și ξ'_n cuprinse între a și x_n, și două numere η_n și η'_n cuprinse între b și y_n, astfel ca

$$f''_{xy}(\xi_n, \eta_n) = f''_{yx}(\xi'_n, \eta'_n).$$

Avem $\xi_n \to a$, $\xi'_n \to a$, $\eta_n \to b$, $\eta'_n \to b$, deci

$$(\xi_n, \eta_n) \to (a, b) \text{ și } (\xi'_n, \eta') \to (a, b).$$

Funcțiile f''_{xy} și f''_{yx} fiind continue în (a, b) deducem

$$f''_{xy}(\xi_n, \eta_n) \to f''_{xy}(a, b) \text{ și } f''_{yx}(\xi'_n, \eta_n) \to f''_{yx}(a, b).$$

Trecînd la limită în egalitățile

$$f''_{xy}(\xi_n, \eta_n) = f_{yx}(\xi'_n, \eta'_n),$$

rezultă

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Corolar. Dacă derivatele parţiale mixte f''_{xy} şi f''_{yx} există şi sînt continue pe E, atunci ele sînt egale pe E:

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Observaţii. 1° O propoziţie asemănătoare este valabilă pentru derivate parţiale de ordin superior: dacă mai multe derivate parţiale mixte, în care variabilele în raport cu care se derivează intervin de acelaşi număr de ori, există pe o vecinătate a lui (a, b) şi sînt continue în (a, b), atunci aceste derivate sînt egale în (a, b).

De exemplu, dacă f'''_{x^2y}, f'''_{xyx} şi f'''_{yx^2} există pe o vecinătate V a lui (a, b) şi sînt continue în (a, b), atunci

$$f'''_{x^2y}(a, b) = f'''_{xyx}(a, b) = f'''_{yx^2}(a, b).$$

2° Propoziţia este adevărată şi pentru funcţii reale sau vectoriale de trei sau mai multe variabile.

3° Este valabilă următoarea teoremă, mai generală:

Dacă f'_x, f'_y şi f''_{xy} există într-o vecinătate a lui (a, b) şi dacă f''_{xy} este continuă în (a, b), atunci f''_{yx} există în (a, b) şi $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a, b)$. (Pentru demonstraţie, v — M. Nicolescu, Analiză matematică, vol. II. p. 422).

Criteriul lui Young. Dacă funcţia f are derivate parţiale de ordinul întîi f'_x şi f'_y într-o vecinătate V a lui (a, b) şi dacă f'_x şi f'_y sînt diferenţiabile în (a, b), atunci derivatele parţiale mixte de ordinul doi există în (a, b) şi sînt egale în acest punct:

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Existenţa derivatelor parţiale de ordinul doi rezultă din faptul că f'_x şi f'_y fiind diferenţiabile în (a, b), ele au derivate parţiale în (a, b).

Să alegem un punct arbitrar $(x, y) \in V$, astfel ca $x \neq a$ şi $y \neq b$ şi să-l menţinem fix. Să notăm

$$R(x, y) = f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b).$$

Să considerăm funcţia

$$\varphi(t) = f(t, y) - f(t, b)$$

definită pe intervalul $[a, x]$ sau $[x, a]$, după cum $a < x$ sau $x < a$. Funcţia $\varphi(t)$ este derivabilă pe acest interval şi

$$\varphi'(t) = f'_x(t, y) - f'_x(t, b).$$

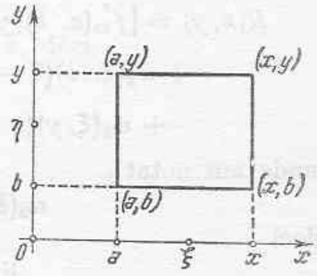


Fig. 148

Avem apoi

$$\varphi(x) = f(x, y) - f(x, b),$$

$$\varphi(a) = f(a, y) - f(a, b),$$

astfel încît $R(x, y)$ se scrie

$$R(x, y) = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Aplicînd funcţiei φ teorema creşterilor finite, deducem că există un punct ξ cuprins între a şi x astfel încît să avem

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)\ (x - a),$$

de unde

$$R(x,y) = \varphi'(\xi)\ (x - a) = [f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, b)](x - a) =$$

$$= [f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b) - (f'_x(\xi, b) - f'_x(a, b))]\ (x - a).$$

Dar funcţia f'_x este diferenţiabilă în (a, b), deci

$$f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b) = (f'_x)'_x(a, b)(\xi - a) + (f'_x)'_y(a, b)(y - b) +$$

$$+ \omega_1(\xi, y)(\xi - a) + \omega_2(\xi, y)(y - b),$$

unde

$$\lim_{\substack{\xi \to a \\ y \to b}} \omega_i(\xi, y) = \omega_i(a, b) = 0,\ i = 1,\ 2.$$

De asemenea

$$f'_x(\xi, b) - f'_x(a, b) = (f'_x)'_x(a, b)(\xi - a) + (f'_x)'_y(a, b)(b - b) +$$

$$+ \omega_3(\xi, b)(\xi - a) + \omega_4(\xi, b)(b - b),$$

unde

$$\lim_{\xi \to a} \omega_3(\xi, b) = \omega_3(a, b) = 0.$$

Deoarece $(f'_x)'_y = f''_{xy}$, $R(x, y)$ se scrie

$$R(x, y) = [f''_{xy}(a, b)(y - b) + \omega_1(\xi, y)(\xi - a) + \omega_2(\xi, y)\ (y - b) +$$

$$+ \omega_3(\xi, b)(\xi - a)]\,(x - a) = f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) +$$

$$+ \omega_2(\xi, y)(x - a)(y - b) + \omega_5(\xi, y)(\xi - a)(x - a),$$

unde am notat

$$\omega_5(\xi, y) = \omega_1(\xi, y) + \omega_3(\xi, b),$$

deci

$$\lim_{\substack{\xi \to a \\ y \to b}} \omega_5(\xi, y) = \omega_5(a, b) = 0.$$

Plecînd de la funcţia

$$\psi(t) = f(x,\ t) - f(a,\ t)$$

şi făcînd un raţionament analog, deducem că

$$R(x,\ y) = f''_{yx}(a,\ b)(x - a)(y - b) + \omega'_2(x,\ \eta)(x - a)(y - b) +$$

$$+ \omega'_5(x,\ \eta)(\eta - b)(y - b),$$

unde η este cuprins între b şi y şi

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \eta \to b}} \omega'_2(x,\ \eta) = \lim_{\substack{x \to a \\ \eta \to b}} \omega'_5(x,\ \eta) = 0.$$

Atunci

$$f''_{xy}(a,\ b)(x - a)(y - b) + \omega_2(\xi,\ y)(x - a)(y - b) + \omega_5(\xi, y)(\xi - a)(x - a) =$$

$$= f''_{yx}(a,\ b)(x - a)(y - b) + \omega'_2(x, \eta)(x - a)(y - b) + \omega'_5(x, \eta)(\eta - b)(y - b).$$

Împărţind în ambii membri ai egalităţii cu $(x - a)\ (y - b)$, obţinem:

$$f''_{xy}(a,\ b) + \omega_2(\xi, y) + \omega_5(\xi,\ y)\frac{\xi - a}{y - b} = f''_{yx}(a,\ b) + \omega'_2(x,\ \eta) + \omega'_5(x,\ \eta)\ \frac{\eta - b}{x - a}.$$

Să luăm acum un şir $(x_n,\ y_n) \to (a,\ b)$ cu $x_n \neq a,\ y_n \neq b$, astfel ca $x_n - a = y_n - b$ pentru orice n. Din cele de mai sus rezultă că pentru fiecare punct (x_n, y_n) putem găsi un număr ξ_n cuprins între a şi x_n, deci $|\ \xi_n - a\ | \leqslant |x_n - a\ | = |\ y_n - b\ |$, şi un punct η_n cuprins între b şi y_n, deci $|\ \eta_n - b\ | \leqslant |\ y_n - b\ | = |\ x_n - a\ |$, astfel încît

$$f''_{xy}(a,\ b) + \omega_2(\xi_n,\ y_n) - \omega_5(\xi_n,\ y_n)\ \frac{\xi_n - a}{y_n - b} =$$

$$= f''_{yx}(a,\ b) + \omega'_2(x_n,\ \eta_n) + \omega'_5(x_n,\ \eta_n)\ \frac{\eta_n - b}{x_n - b}.$$

Deoarece $x_n \to a$ şi $y_n \to b$, avem $\xi_n \to a$, şi $\eta_n \to b$, deci

$$\omega_2(\xi_n,\ y_n) \to \omega_2(a,\ b) = 0,$$

$$\omega'_2(x_n,\ \eta_n) \to \omega'_2(a,\ b) = 0.$$

Apoi $\left|\omega_5(\xi_n,\ y_n)\,\frac{\xi_n - a}{y_n - b}\right| \leqslant |\ \omega_5(\xi_n,\ y_n)\ | \to 0,$

$$\left|\omega'_5(x_n,\ \eta_n)\,\frac{\eta_n - b}{x_n - b}\right| \leqslant |\ \omega'_5(x_n,\ \eta_n)\ | \to 0.$$

Trecînd la limită în egalitatea de mai sus, obţinem

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Corolarul 1. Dacă f'_x şi f'_y există şi sînt diferenţiabile pe E, atunci toate derivatele parţiale de ordinul doi există pe E, iar derivatele parţiale mixte sînt egale pe E, $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Observaţii. 1° O propoziţie asemănătoare este valabilă pentru derivatele parţiale de ordin superior: dacă derivatele parţiale de ordinul $n - 1$ există pe o vecinătate V a lui (a, b) şi sînt diferenţiabile în (a, b), atunci există toate derivatele parţiale de ordinul n în (a, b) şi derivatele mixte, în care variabilele în raport cu care se derivează intervin de acelaşi număr de ori, sînt egale în (a, b).

2° Propoziţia este adevărată şi pentru funcţii reale sau vectoriale de mai multe variabile.

Din criteriul lui Young rezultă un criteriu asemănător cu criteriul lui Schwarz.

Corolarul 2. Dacă toate derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei f există într-o vecinătate V a lui (a, b) şi dacă sînt continue în (a, b), atunci

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Într-adevăr, funcţia f'_x este diferenţiabilă în (a, b) deoarece derivatele sale parţiale f''_{x^2} şi f''_{xy} sînt continue în (a, b). De asemenea, f'_y este diferenţiabilă în (a, b), deoarece derivatele sale parţiale f''_{yx} şi f''_{y^2} sînt continue în (a, b). Conform criteriului lui Young avem atunci $f''_{yx}(a, b) = f''_{xy}(a, b)$.

5. Diferenţiale de ordin superior

Fie $f(x, y)$ o funcţie reală de două variabile definită pe o mulţime $E \subset R^2$ şi (a, b) un punct în interiorul lui E.

Definiţie. Se spune că funcţia f este diferenţiabilă de n ori în punctul (a, b), sau că are diferenţială de ordinul n în (a, b), dacă toate derivatele parţiale de ordinul $n - 1$ ale lui f există într-o vecinătate V a lui (a, b) şi sînt diferenţiabile în (a, b).

Se spune că f este diferenţiabilă de n ori pe E dacă este diferenţiabilă de n ori în fiecare punct din E.

Folosind criteriul lui Young, rezultă că:

Dacă f este diferenţiabilă de n ori în (a, b), atunci toate derivatele parţiale de ordinul n există în (a, b), iar ordinea de derivare în (a, b) pînă la ordinul n inclusiv nu are importanţă.

P r o p o z i ţ i e. Dacă funcţia $f(x, y)$ are într-o vecinătate V a lui (a, b) toate derivatele parţiale de ordin n şi dacă aceste derivate parţiale sînt continue în (a, b), atunci f este diferenţiabilă de n ori în (a, b).

Într-adevăr, toate derivatele parţiale de ordinul $n-1$ au derivate parţiale în f continue în (a, b), deci toate derivatele parţiale de ordinul $n-1$ sînt diferenţiabile în (a, b).

Diferenţiala de ordinul n în punctul (a, b) se defineşte prin egalitatea

$$\mathrm{d}^n f(a, b)\,(x, y) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]^n f(a, b),$$

unde exponentul n înseamnă că se dezvoltă — formal — suma din paranteză după regula binomului lui Newton şi apoi se înmulţeşte — formal — cu $f(a, b)$.

Prin aceleaşi calcule ca şi la diferenţiala de ordinul 1 se obţine

$$\mathrm{d}^n f(a, b) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n f(a, b).$$

Dacă nu se mai pun în evidenţă variabilele diferenţialei, se scrie

$$\mathrm{d}^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n f.$$

S-a pus astfel în evidenţă operatorul de diferenţiere de ordinul n,

$$\mathrm{d}^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n,$$

care este — formal — puterea a n-a a operatorului de diferenţiere de ordinul întîi. Avem de asemenea

$$\mathrm{d}^n f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f).$$

Pentru funcţii de trei sau mai multe variabile, diferenţiabilitatea de ordinul n se defineşte ca şi pentru funcţiile de două variabile.

Diferenţiala de ordinul n a unei funcţii de trei variabile $f(x, y, z)$ se scrie

$$\mathrm{d}^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{d}z\right)^n f,$$

iar a unei funcţii de k variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ se scrie

$$\mathrm{d}^n f = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)^n f.$$

Se defineşte în mod asemănător diferenţiala de ordinul n a unei funcţii vectoriale, de două sau mai multe variabile.

Schema de implicaţii a propoziţiilor :

$$\begin{tikzcd}
 & \text{f dif. de 2 ori in (a,b)} \arrow[d, Leftrightarrow] & & \text{f'_x, f'_y mărg. pe V} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Toate deriv de ord. 2 ex. in V, cont in (a,b)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{f'_x, f'_y ex in V, dif. in (a,b)} \arrow[r, Rightarrow, "/" marking] \arrow[dd, Rightarrow, "\text{Young}"] & \text{f'_x, f'_y ex. in V, cont. in (a,b)} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \text{f dif. in (a,b)} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \text{f cont. in (a,b)} \arrow[dd, Rightarrow] \\
 & & & & \\
\text{f''_{xy}, f''_{yx} ex. in V, cont. in (a,b)} \arrow[r, Rightarrow, "\text{Schwarz}"] & f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b) & & \text{f'_x, f'_y ex. in (a,b)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{f cont. in (a,b) separat in raport cu x şi y}
\end{tikzcd}$$

Schema poate fi repetată spre stînga indefinit, cu derivatele şi diferenţiatele de ordinul 3, 4 etc.

6. Diferenţiale şi derivatele parţiale ale funcţiilor compuse

Operaţiile algebrice efectuate asupra funcţiilor cu derivate parţiale sau asupra funcţiilor diferenţiabile conduc la funcţii de acelaşi fel. (Pentru funcţiile cu derivate parţiale, acest fapt a fost menţionat mai înainte, iar pentru funcţiile diferenţiabile va rezulta mai departe.)

Importanţa noţiunii de diferenţiabilitate constă în faptul că ea se conservă şi prin operaţia de compunere a funcţiilor, în timp ce existenţa derivatelor parţiale poate să nu fie conservată prin această operaţie, aşa cum va fi arătat printr-un exemplu.

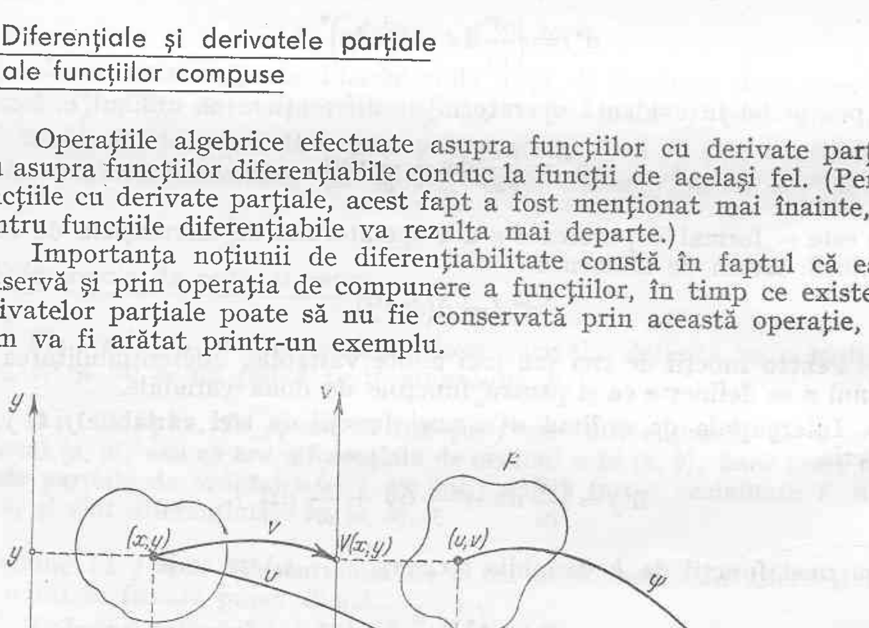


Fig. 149

Fie E și F două mulțimi din plan. Pentru a simplifica expunerea vom presupune că E și F sînt *deschise*, adică sînt formate din puncte interioare.

Fie $u(x, y)$, $v(x, y)$ două funcții reale definite pe E, astfel ca

$$(u(x, y), v(x, y)) \in F \text{ pentru orice } (x, y) \in E.$$

Fie $\varphi(u, v)$ o funcție reală definită pe F.

Putem atunci considera funcția compusă

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$$

definită pentru $(x, y) \in E$, cu valori reale.

Am notat cu aceleași litere u și v atît funcțiile definite pe E cît și coordonatele punctelor din F, pentru simplificarea calculelor care urmează.

Fie (a, b) un punct din E și (c, d) punctul din F corespunzător lui (a, b) prin funcțiile u și v:

$$c = u(a, b), \; d = v(a, b).$$

Teorema 1. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile în punctul (a,b)$\in E$ și funcția φ(u,v) este diferențiabilă în punctul corespunzător $(c, d) \in F$, alutunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x))$ este diferențiabilă în (a, b).

Să scriem întîi că funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile în punctul (a, b):

$$u(x, y) - u(a, b) = u'_x(a, b)\,(x - a) + u'_y(a, b)\,(y - b) + \omega_1(x, y)\rho,$$

$$v(x, y) - v(a, b) = v'_x(a, b)\,(x - a) + v'_y(a, b)\,(y - b) + \omega_2(x, y)\rho,$$

unde $\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ și

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0, \; i = 1,2.$$

Să scriem acum că funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă în punctul (c, d), unde $c = u(a, b)$ și $d = v(a, b)$:

$$\varphi(u, v) - \varphi(c, d) = [\varphi'_u(c, d) + \omega_3(u, v)](u - c) + [\varphi'_v(c,d) + \omega_4(u, v)]\,(v - d)$$

unde $\lim\limits_{\substack{u \to c \\ v \to d}} \omega_i(u, v) = \omega_i(c, d) = 0, \; i = 3,4.$

Să observăm că funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt continue în (a, b) (fiind diferențiabile), deci funcțiile compuse

$$\omega_3(u(x, y), v(x, y)), \; \omega_4(u(x, y), v(x, y))$$

sînt continue în (a, b); avem deci

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega_i(u(x, y), v(x, y)) = \omega_i(u(a, b), v(a, b)) = \omega_i(c, d) = 0, \; i = 3, 4.$$

Să scriem acum creşterea funcţiei compuse $f(x, y)$:

$$f(x, y) - f(a, b) = \varphi(u(x, y), v(x, y)) - \varphi(u(a, b), v(a, b)) =$$

$$= \varphi(u(x,y), v(x,y)) - \varphi(c, d) = [\varphi'_u(c, d) + \omega_3(u(x, y), v(x, y))] [u(x,y) - c] +$$

$$+ [\varphi'_v(c, d) + \omega_4(u(x, y), v(x, y))] [v(x, y) - d] =$$

$$= [\varphi'_u(c, d) + \omega_3] [u(x, y) - u(a, b)] + [\varphi'_v(c, d) + \omega_4] [v(x, y) - v(a, b)],$$

unde am notat pentru prescurtare,

$$\omega_i = \omega_i(u(x, y), v(x, y)), \ i = 3, 4.$$

Mai departe, înlocuind creşterile funcţilor $u(x, y)$ şi $v(x, y)$, obţinem:

$$f(x, y) - f(a, b) = [\varphi'_u(c, d) + \omega_3] [u'_x(a, b) (x-a) + u'_y(a, b) (y-b) + \omega_1\rho] +$$

$$+ [\varphi'_v(c, d) + \omega_4] [v'_x(a, b) (x - a) + v'_y(a, b) (y - b) + \omega_2\rho],$$

unde am notat $\omega_i = \omega_i(x, y)$, $i = 1, 2$.

Făcînd înmulţirile, obţinem:

$$f(x, y) - f(a, b) = [\varphi'_u(c, d) u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d) v'_x(a, b)] (x - a) +$$

$$+ [\varphi'_u(c, d) u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d) v'_y(a, b)] (y - b) +$$

$$+ [(\varphi'_u(c, d) + \omega_3) \omega_1 + (\varphi'_v(c, d) + \omega_4) \omega_2]\rho +$$

$$+ [u'_x(a, b) \omega_3 + v'_x(a, b) \omega_4] (x - a) + [u'_y(a, b) \omega_3 + v'_y(a, b) \omega_4](y - b).$$

Parantezele care înmulţesc pe ρ, $(x - a)$ şi $(y - b)$ au limita 0 în punctul (a, b); ultimii trei termeni se pot deci scrie în forma $\omega(x, y)\rho$, unde $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = 0$. Atunci

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\rho,$$

unde am notat

$$\lambda = \varphi'_u(c, d)\, u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d)\, v'_x(a, b),$$

$$\mu = \varphi'_u(c, d)\, u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d)\, v'_y(a, b),$$

deci f este diferenţiabilă în punctul (a, b) şi teorema este demonstrată.

Dacă ţinem seama de faptul că $\lambda = f'_x(a, b)$ şi $\mu = f'_y(a, b)$, obţinem următoarele formule de derivare parţială a funcţiilor compuse:

$$f'_x(a, b) = \varphi'_u(c, d)\, u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d)\, v'_x(a, b),$$

$$f'_y(a, b) = \varphi'_u(c, d)\, u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d) v'_y(a, b)$$

sau:

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(a, b)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(a, b)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(a, b)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(a, b)}{\partial y}.$$

Aceste formule se scriu într-o formă incompletă, dar mai ușor de reținut, astfel:

$$f'_x = \varphi'_u u'_x + \varphi'_v v'_x,$$

$$f'_y = \varphi'_u u'_y + \varphi'_v v'_y$$

sau:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dacă în membrul drept se dă — în mod formal — factor comun φ, se obțin formulele

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\varphi.$$

În aceste formule, literele u și v care apar la numitor desemnează *variabilele* funcției $\varphi(u, v)$, iar literele u și v care apar la numărător desemnează *funcții* de x și y.

Corolarul 1. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile pe E, iar funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă pe F, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ este diferențiabilă pe E.

Avem:

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y.$$

Într-adevăr, se înlocuiesc $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ din formula

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

cu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

O b s e r v a ț i e. În formula de diferențiere a funcției compuse să desfacem parantezele și să dăm factor comun pe $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ și $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$.

Obținem:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right),$$

dar

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

deci

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\mathrm{d}v.$$

Pe de altă parte

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\mathrm{d}v.$$

Așadar, diferențialele funcțiilor f și φ au aceeași formă. Acest fapt constituie ceea ce se numește *„invarianța diferențialei față de operația de compunere a funcțiilor"*.

Trebuie observat însă că această invarianță a diferențialei este formală (spre deosebire de „invarianța diferențiabilității" față de operația de compunere, care este reală). Într-adevăr, dacă folosim notația completă a diferențialei, avem:

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}\,\mathrm{d}u(x, y) + \frac{\partial \varphi(u(x, y)\ v(x, y))}{\partial v}\,\mathrm{d}v(x, y).$$

Deci în egalitatea $\mathrm{d}f = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}u$ și $\mathrm{d}v$ sînt diferențialele *funcțiilor* $u(x, y)$ și $v(x, y)$ definite pe E, iar pe de altă parte

$$\mathrm{d}\varphi(u, v) = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}\,\mathrm{d}v,$$

deci în egalitatea $\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}u$ și $\mathrm{d}v$ sînt diferențialele variabilelor u și v ale funcției $\varphi(u, v)$, sau, mai precis, diferențialele funcțiilor proiecție pe axele Ou și Ov, definite pe mulțimea F.

O altă proprietate invariantă prin operația de compunere este *existența și continuitatea derivatelor parțiale, așa cum rezultă din :*

C o r o l a r u l 2. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale continue pe E, iar funcția $\varphi(u, v)$ are derivate parțiale continue pe F, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parțiale continue pe E.

Într-adevăr, deoarece funcţiile $u(x, y)$, $v(x, y)$ şi $\varphi(u, v)$ au derivate parţiale continue, ele sînt diferenţiabile (şi deci şi continue). Atunci funcţia compusă este diferenţiabilă, deci are derivate parţiale date de formulele:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Toate funcţiile din membrul drept sînt continue, fie prin ipoteză, cum sînt derivatele parţiale ale funcţiilor $u(x, y)$ şi $v(x, y)$, fie ca funcţii compuse de funcţii continue cum sînt

$$\frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v}.$$

Rezultă deci că $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sînt continue.

Observaţie. Dacă derivatele parţiale ale funcţiilor $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ sînt continue numai în (a, b) şi derivatele parţiale ale funcţiei $\varphi(u, v)$ sînt continue numai în (c, d), rezultă că aceste funcţii sînt diferenţiabile în punctele respective, deci funcţia compusă este diferenţiabilă şi are derivate parţiale în (a, b), dar nu rezultă că funcţia compusă are derivate parţiale în celelalte puncte.

Teoremele precedente rămîn adevărate — şi cu aceleaşi demonstraţii — pentru funcţii reale (sau funcţii vectoriale) de oricîte variabile. Să enunţăm teorema în cazul general:

Fie $E \subset R^n$ şi $F \subset R^m$ două mulţimi deschise, $n \geqslant 1$ şi $m \geqslant 1$.

Teorema 1. Dacă

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sînt m funcţii reale de n variabile, diferenţiabile (respectiv cu derivate parţiale continue) pe mulţimea E, astfel încît

$$(u_1(x_1, \ldots, x_n), u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_n)) \in F$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ şi dacă

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

este o funcţie reală (sau cu valori în R^p) de m variabile diferenţiabilă (sau cu derivate parţiale continue) pe mulţimea F, atunci funcţia compusă:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

este diferenţiabilă (respectiv are derivate parţiale continue) pe E şi

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \mathrm{d}u_j,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Acest caz general se poate pune sub o formă foarte simplă.

Să notăm cu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ punctele din $E \subset R^n$ şi cu $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ punctele din $F \subset R^m$.

Funcţiile reale $u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definite pe $E \subset R^n$ se scriu atunci $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)$, iar funcţia vectorială $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ definită pe $F \subset R^m$ cu valori în R^p se scrie atunci $\varphi(u)$.

Funcţiile $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)$ sînt componentele reale ale unei funcţii vectoriale $u(x) : E \subset R^n \to F \subset R^m$:

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)).$$

Funcţia compusă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se scrie deci

$$f(x) = \varphi(u(x))$$

şi este o funcţie vectorială definită pe $E \subset R^n$ cu valori în R^p.

$$E \subset R^n \xrightarrow{u} F \subset R^m \xrightarrow{\varphi} R^p$$

$$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow \varphi(u(x))$$

$$x \longrightarrow f(x).$$

Ultima teoremă se formulează astfel:

Dacă funcţiile $u(x)$ şi $\varphi(u)$ sînt diferenţiabile respectiv pe $E \subset R^n$ şi $F \subset R^m$ atunci şi funcţia compusă $f(x) = \varphi(u(x))$ este diferenţiabilă pe $E \subset R^n$.

Această formulare este asemănătoare cu aceea a teoremei de derivabilitate (sau diferenţiabilitate) a funcţiilor reale de o singură variabilă.

Cazuri particulare

I) $m = 1$, n oarecare, adică $E \subset R^n$, $F \subset R$:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) : E \to R, \; \varphi(u) : F \to R,$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(u(x_1, x_2, \ldots, x_n)) : E \to R,$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \frac{d\varphi}{du} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \frac{d\varphi}{du} du = \varphi'(u) \, du,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

În cazul cînd $\varphi(u)$ este o funcţie elementară, se obţin regulile de diferenţiere cunoscute pentru funcţii de o variabilă.

Exemple (u este o funcție diferențiabilă de una sau mai multe variabile).

1) $du^n = nu^{n-1}\,du$ (n real oarecare);

2) $d\sin u = \cos u\,du$;

3) $d\cos u = -\sin u\,du$;

4) $d\,\mathrm{tg}\, u = \frac{1}{\cos^2 u}\,du$;

5) $d\,\mathrm{ctg}\, u = -\frac{1}{\sin^2 u}\,du$;

6) $d\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;

7) $d\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;

8) $d\,\mathrm{arctg}\, u = \frac{1}{1+u^2}\,du$;

9) $d\,\mathrm{arcctg}\, u = -\frac{1}{1+u^2}\,du$;

10) $d\ln u = \frac{1}{u}\,du$;

11) $de^u = e^u\,du$;

12) $da^u = a^u \ln a\,du$.

Pentru cazul cînd $m = 1$ și $n = 2$, adică $E \subset R^2$ și $F \subset R$:

$$u(x, y) : E \to R,\ \varphi(u) : F \to R,$$
$$f(x, y) = \varphi(u(x, y)).$$

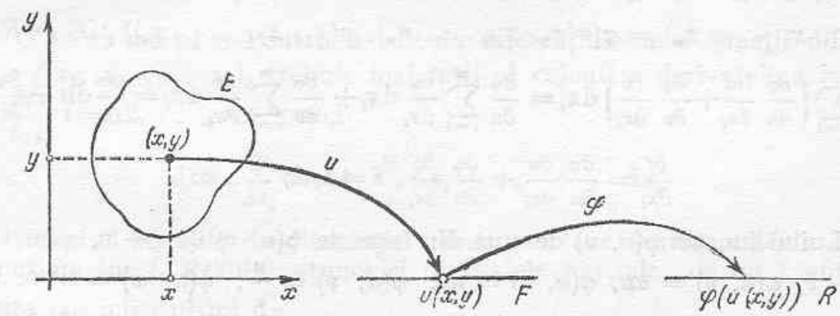


Fig. 150

avem

$$df = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

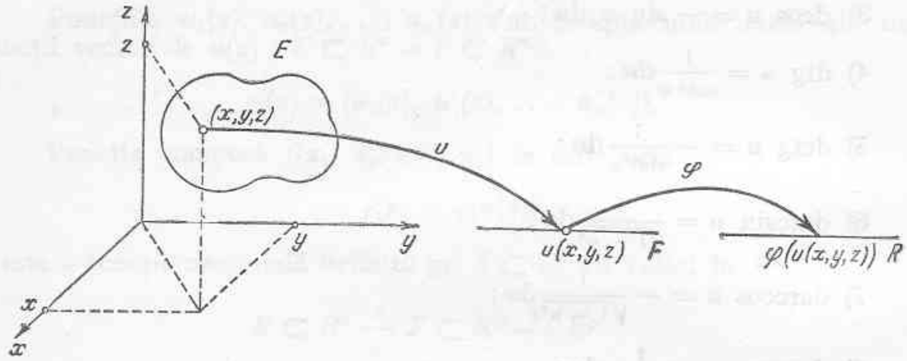


Fig. 151

Pentru cazul cînd $m = 1$ şi $n = 3$, adică $E \subset R^3$ şi $F \subset R$:

$$u(x, y, z) : E \to R, \ \varphi(u) : F \to R,$$

$$f(x, y, z) = \varphi(u(x, y, z)) : E \to R,$$

avem

$$df = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

II) $m = 2$, n oarecare, adică $E \subset R^n$, $F \subset R^2$:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ v(x_1, x_2, \ldots, x_n) : E \to R, \ \varphi(u, v) : F \to R;$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(u(x_1, x_2, \ldots, x_n), v(x_1, x_2, \ldots, x_n)) : E \to R;$$

$$df = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx_i = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx_i = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Luînd funcţia $\varphi(u, v)$ de una din formule $\varphi(u, v) = u + v$, $\varphi(u, v) = u - v$, $\varphi(u, v) = \alpha u$, $\varphi(u, v) = uv$, $\varphi(u, v) = \frac{u}{v}$, $\varphi(u, v) = u^v$ rezultă că suma a două funcţii diferenţiabile este o funcţie difenţiabilă şi de asemenea produsul unei funcții diferențiabile cu un scalar. Așadar, mulțimea funcțiilor diferențiabile într-un punct sau pe o mulțime este un spațiu vectorial. Se obțin următoarele reguli de diferențiere (ca și pentru funcții de o variabilă)

$$1)\ \mathrm{d}(u+v)=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v; \quad 2)\ \mathrm{d}(u-v)=\mathrm{d}u-\mathrm{d}v;$$

$$3)\ \mathrm{d}(\alpha u)=\alpha\mathrm{d}u; \quad 4)\ \mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v;$$

$$5)\ \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}; \quad 6)\ \mathrm{d}(u^v)=vu^{v-1}\,\mathrm{d}u+u^v\ln u\,\mathrm{d}v.$$

Aici, u și v sînt funcții diferențiabile de una sau mai multe variabile. Prin recurență se demonstrează că regulile privind diferențiala sumei și a produsului rămîn valabile și pentru mai multe funcții diferențiabile: $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$\mathrm{d}(u_1+u_2\ldots+u_m)=\mathrm{d}u_1+\mathrm{d}u_2+\ldots+\mathrm{d}u_m,$$

$$\mathrm{d}(u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_m)=\sum_{j=1}^{m}u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_{j-1}\cdot\mathrm{d}u_j\cdot u_{j+1}\ldots u_m.$$

Ultimele reguli se obțin de asemenea din teorema generală, luînd $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m)=u_1+u_2+\ldots+u_m$, respectiv

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m)=u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_m.$$

Pentru cazul cînd $m=2$, $n=3$, adică $E\subset R^3$, $F\subset R^2$,

$$u(x,y,z),\ v(x,y,z): E\to R,\ \varphi(u,v): F\to R,$$

$$f(x,y,z)=\varphi(u(x,y,z),\ v(x,y,z)): E\to R,$$

avem

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}z;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Observație. Pentru a calcula diferențiala unei funcții diferențiabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, trebuie mai întîi să calculăm derivatele sale parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,n$. Atunci

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n.$$

Folosind regulile de diferențiere date mai sus, putem calcula direct diferențiala lui f. Rezultă atunci și derivatele parțiale ale lui f, anume: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este coeficientul lui $\mathrm{d}x_i$.

Exemple. 1) $f(x, y) = \sin xy$ definită pe R^2. Avem

$$df(x, y) = d(\sin xy) = \cos xy \cdot d(xy) = \cos xy \cdot (dx \cdot y + x\,dy) =$$

$$= y \cos xy\, dx + x \cos xy\, dy,$$

deci

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(\sin xy)}{\partial x} = y \cos xy,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(\sin xy)}{\partial y} = x \cos xy.$$

2) $$d(\ln\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{2x\,dx + 2y\,dy}{2(x^2 + y^2)} = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy,$$

deci

$$\frac{\partial(\ln\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial(\ln\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

III) $n = 1$, m oarecare, adică $E \subset R$, $F \subset R^m$;

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_m(x) : E \to R,\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) : F \to R$$

$$f(x) = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) : E \to R;$$

avem

$$df = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial u_j} \frac{du_j}{dx} dx = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial u_j} du_j;$$

$$f'(x) = \frac{d\varphi}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial u_j} \frac{du_j}{dx}.$$

Pentru cazul cînd $n = 1$ şi $m = 2$, adică $E \subset R$ şi $F \subset R^2$:

$$u(x)v(x) : E \to R,\ \varphi(u, v) : F \to R;$$

$$f(x) = \varphi(u(x), v(x)) : E \to R,$$

avem

$$df = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{dv}{dx}\right) dx, \quad \frac{df}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial\varphi}{dv} \frac{\partial v}{dx}.$$

Pentru cazul cînd $n = 1$ şi $m = 3$, adică $E \subset R$, $F \subset R^3$,

$$u(x),\ v(x),\ w(x) : E \to R,\ \varphi(u, v, w) : F \to R$$

$$f(x) = \varphi(u(x), v(x), w(x)) : E \to R,$$

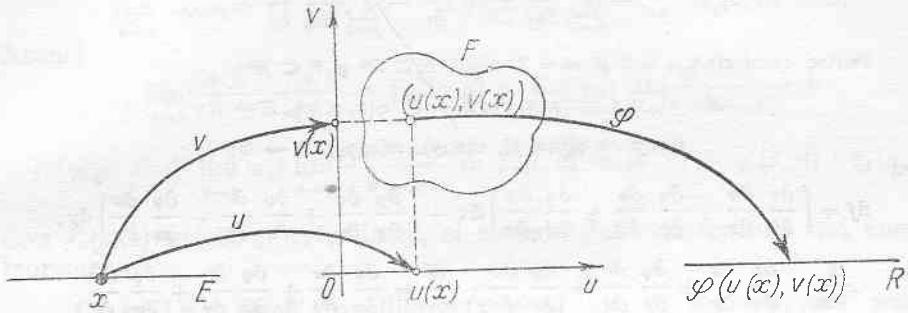


Fig. 152

avem

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}.$$

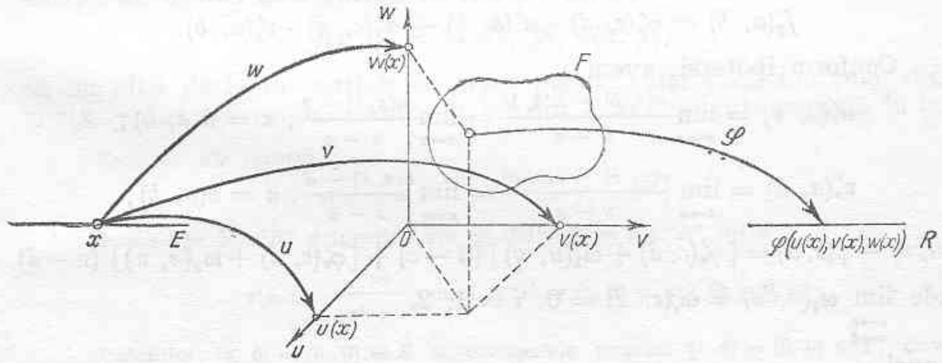


Fig. 153

IV) $n = 2$, m oarecare, adică $E \subset R^2$, $F \subset R^m$:

$$u_1(x, y),\ u_2(x, y),\ \ldots,\ u_m(x, y) : E \to R,\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) : F \to R$$

$$f(x, y) = \varphi(u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_m(x, y)) : E \to R;$$

avem

$$df = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial y} dy = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} du_j ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial y}.$$

Pentru cazul cînd $n = 2$ și $m = 3$, adică $E \subset R^2$ și $F \subset R^3$:

$$u(x, y),\ v(x, y),\ w(x, y) : E \to R,\ \varphi(u, v, w) : F \to R ;$$

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y),\ v(x, y),\ w(x, y)) : E \to R ;$$

avem

$$df = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Teoarema următoare asigură existența derivatelor parțiale ale funcției compuse (dar nu neapărat a diferențialei):

T e o r e m a 2. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale în raport cu x (sau cu y) în punctul $(a, b) \in E$, iar funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă în punctul corespunzător $(c, d) \in F$, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parțiale în raport cu x (sau cu y) în punctul (a, b), date de formulele următoare:

$$f'_x(a, b) = \varphi'_u(c, d) \cdot u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d) \cdot v'_x(a, b) ;$$

$$f'_y(a, b) = \varphi'_u(c, d) \cdot u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d) \cdot v'_y(a, b).$$

Conform ipotezei, avem

$$u'_x(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{u(x, b) - u(a, b)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{u(x, b) - c}{x - a},\ c = u(a, b) ;$$

$$v'_x(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{v(x, b) - v(a, b)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{v(x, b) - d}{x - a},\ d = v(a, b) ;$$

$$\varphi(u, v) - \varphi(c, d) = [\varphi'_u(c, d) + \omega_1(u, v)]\,(u - c) + [\varphi'_v(c, d) + \omega_2(\iota, v)]\,(v - d),$$

unde $\lim\limits_{\substack{u \to c \\ v \to d}} \omega_i(u, v) = \omega_i(c, d) = 0,\ i = 1, 2.$

Atunci

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \frac{\varphi(u(x, b), v(x, b)) - \varphi(u(a, b), v(a,b))}{x - a} =$$

$$= \frac{\varphi(u(x, b), v(x, b)) - \varphi(c, d)}{x - a} = [\varphi'_u(c, d) + \omega_1(u(x, b), v(x, b))]\,\frac{u(x, b) - c}{x - a} +$$

$$+ [\varphi'_v(c, d) + \omega_2(u(x, b), v(x, b))]\,\frac{v(x, b) - d}{x - a}.$$

Funcțiile de o singură variabilă $u(x, b)$, $v(x, b)$ sînt continue în a, deoarece sînt derivabile în a; funcția $\omega_i(u, v)$ este continuă în punctul corespunzător (c, d). Rezultă că funcția compusă $\omega_i(u(x, b), v(x, b))$ este continuă în punctul a:

$$\lim_{x\to a} \omega_i(u(x, b), v(x, b)) = \omega_i(u(a, b), v(a, b)) = \omega_i(c, d) = 0.$$

Atunci

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = [\varphi_u'(c, d) + \lim_{x\to a}\omega_1] \lim_{x\to a}\frac{u(x, b) - c}{x - a} +$$

$$+ [\varphi_v'(c, d) + \lim_{x\to a}\omega_2] \lim_{x\to a}\frac{v(x, b) - d}{x - a} = \varphi_u'(c, d)\cdot u_x'(a, b) + \varphi_v'(c, d)\cdot v_x'(a, b),$$

deci $f_x'(a, b)$ există și este fiintă, și ea este dată de formula din enunțul teoremei.

Corolar. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale pe E, iar funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă pe F, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parțiale pe E, date de formulele

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial\varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial\varphi(u, (x, y), v(x, y))}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Observație. Dacă funcția $\varphi(u, v)$ nu este diferențiabilă în punctul (c, d), atunci este posibil ca funcția compusă

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$$

să nu aibă derivate parțiale în acest punct, chiar dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$sînt *diferențiabile* în (a, b), iar $\varphi(u, v)$ are derivate parțiale în (c, d).

Exemplu. Fie funcțiile

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = x^2 + y^2$$

definite pe $E = R^2$ și funcția $\varphi(u, v)$ definită pe $F \subset R^2$, astfel:

$$\varphi(u, v) = \frac{uv}{u^2 + v^2} \text{ dacă } (u, v) \neq (0, 0) \text{ și } \varphi(0, 0) = 0.$$

Punctului $(a, b) = (0, 0) \in E$ îi corespunde punctul $(c, d) = (0, 0) \in F$, deoarece $c = u(0, 0) = 0$ și $d = v(0, 0) = 0$.

Funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile în $(0, 0)$ (și chiar pe tot planul), iar funcția $\varphi(u, v)$ are derivate parțiale în $(0,0)$, dar nu este diferențiabilă în acest punct.

Funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ nu are derivate parțiale în $(0, 0)$. Într-adevăr, dacă $(x, y) \neq (0, 0)$, atunci

$$u(x, y) = v(x, y) = x^2 + y^2 \neq 0, \text{ deci}$$

$$f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2, x^2 + y^2) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2},$$

iar dacă $(x, y) = (0, 0)$, avem $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$, deci

$$f(0, 0) = \varphi(0, 0) = 0.$$

Atunci, dacă $x \neq 0$, avem

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{x - 0} = \frac{1}{2x}$$

şi acest raport nu are limită în punctul 0, deci funcţia f nu are derivată parţială în raport cu x în punctul $(0, 0)$.

La fel se arată că f nu are derivată parţială în raport cu y în punctul $(0, 0)$.

7. Diferenţialele şi derivatele parţiale de ordin superior ale funcţiilor compuse

Ne vom mărgini la studiul funcţiilor de două variabile.

Rezultatele rămîn adevărate şi pentru funcţii de oricîte variabile.

Fie E şi F două mulţimi deschise din plan, $u(x, y)$, $v(x, y)$ două funcţii reale definite pe E, astfel încît $(u(x, y), v(x, y)) \in F$ pentru orice $(x, y) \in E$ şi funcţia reală $\varphi(u, v)$ definită pe F.

Să considerăm funcţia compusă f definită pe E:

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y)).$$

Fie (a, b) un punct din E şi $(c, d) \in F$ punctul corespunzător,

$$c = u(a, b), \ d = v(a, b).$$

Teorema 1. Dacă funcţiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ au derivate de ordinul doi în punctul $(a, b) \in E$, iar funcţia $\varphi(u, v)$ este diferenţiabilă de două ori într-o vecinătate a punctului corespunzător $(c, d) \in F$, atunci funcţia compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parţiale de ordinul doi în (a, b) şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial g} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

unde derivatele parţiale ale funcţiilor $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ se calculează în punctul (a, b), iar cele ale funcţiei $\varphi(u, v)$ în punctul corespunzător (c, d).

Deoarece funcţia $\varphi(u, v)$ este diferenţiabilă de două ori pe întreaga vecinătate U a lui (c, d), ea are *derivate parţiale* $\frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial u}$ şi $\frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial v}$ *diferenţiabile pe* U. Atunci funcţia $\varphi(u, v)$ este de asemenea *diferenţiabilă pe* U. Fără a micşora generalitatea putem presupune că derivatele parţiale φ'_u şi φ'_v există pe toată mulţimea de definiţie F, considerînd, la nevoie, funcţia $\varphi(u, v)$ definită numai pe U. Deoarece funcţiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ au derivate parţiale de ordinul doi în punctul (a, b) ele au derivate parţiale de ordinul întîi pe o mulţime V care conţine un segment paralel cu Ox şi un segment paralel cu Oy, ambele trecînd prin (a, b). Putem raţiona cu restricţiile funcţiilor $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ la mulţimea V, de aceea, fără a micşora generalitatea, putem presupune că derivatele parţiale ale funcţiilor $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ există pe toată mulţimea E.

Deoarece funcţiile $u(x, y)$, $v(x, y)$ au derivate parţiale pe E, iar funcţia $\varphi(u, v)$ este diferenţiabilă pe F, rezultă că funcţia compusă are derivate parţiale pe E şi

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial\varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial\varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Toate funcţiile din membrul drept au derivate parţiale în (a, b); funcţiile $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ au derivate parţiale în (a, b) deoarece, prin ipoteză, funcţiile u şi v au derivate parţiale de ordinul doi în acest punct; iar funcţiile

$$\frac{\partial\varphi(u(x,y), v(x,y))}{\partial u}, \quad \frac{\partial\varphi(u(x,y), v(x,y))}{\partial v}$$

au derivate parţiale în (a, b), deoarece funcţiile u şi v au derivate parţiale în (a, b), iar funcţiile $\frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial v}$ sînt diferenţiabile în punctul corespunzător (c, d).

Rezultă deci că şi funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ au derivate parţiale în (a, b), adică funcţia compusă f are derivate parţiale de ordinul doi în (a, b). Derivatele parţiale de ordinul doi ale lui f în punctul (a, b) se calculează astfel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

şi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

astfel încît

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=$$

$$=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

La fel se calculează şi celelalte trei formule.

Cele patru formule se pot scrie, în mod simbolic, astfel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\varphi+\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\varphi+\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\varphi+\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\varphi+\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}\right)\varphi;$$

Observaţie. În demonstraţie s-a folosit faptul că funcţia $\varphi(u, v)$ este de două ori diferenţiabilă pe o întreagă vecinătate a lui (c, d). Dacă $\varphi(u, v)$ este diferenţiabilă de două ori numai în (c, d), putem deduce că funcţia compusă $f(x, y)$ are derivate parţiale de ordinul întîi doar în punctul (a, b).

Corolar. Dacă funcţiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ au derivate parţiale de ordinul doi pe E, iar funcţia $\varphi(u, v)$ este diferenţiabilă de două ori pe E, atunci funcţia compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parţiale de ordinul doi pe E.

Observaţii. 1° Dacă derivatele parţiale mixte ale funcţiilor u şi v sînt egale,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},$$

rezultă că şi derivatele parţiale mixte ale funcţiei compuse sînt egale:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

2° Pentru ca $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ să existe este suficient ca $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ şi $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ să existe; există atunci şi $\frac{\partial u}{\partial x}$ şi $\frac{\partial v}{\partial x}$. Nu este necesară existenţa celorlalte derivate parţiale de ordinul doi ale funcţiilor u şi v şi nici existenţa derivatelor de ordinul întîi în raport cu y ale funcţiilor u şi v.

De asemenea, pentru ca $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ să existe, este suficient să existe $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ şi $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, dar nu în mod necesar celelalte derivate de ordinul doi şi nici $\frac{\partial u}{\partial x}$ şi $\frac{\partial v}{\partial x}$.

Pentru existenţa derivatei $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ se foloseşte existenţa derivatelor de ordinul doi $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ şi a derivatelor de ordinul întîi ale funcţiilor u şi v, atît în raport cu x cît şi în raport cu y, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

De asemenea, pentru existenţa derivatei $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se foloseşte existenţa derivatelor de ordinul doi $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ şi a derivatelor de ordinul întîi ale funcţiilor u şi v atît în raport cu x cît şi în raport cu y.

Teorema 2. Dacă funcţiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ sînt diferenţiabile de două ori în punctul $(a, b) \in E$, iar funcţia $\varphi(u, v)$ este diferenţiabilă de două ori într-o vecinătate a punctului corespunzător (c, d), atunci funcţia compusă $f(x, y) = \varphi(u(x,y)\ v(x, y))$ este diferenţiabilă de două ori în punctul (a, b) şi

$$d^2 f = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} d^2 v,$$

unde derivatele parţiale ale funcţiei φ sînt calculate în punctul (c, d), iar diferenţialele funcţiilor u şi v sînt calculate în punctul (a, b).

Deoarece funcţiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ sînt diferenţiabile de două ori în (a, b), ele au derivate parţiale de ordinul întîi într-o vecinătate V a lui (a, b) şi diferenţiabile în (a, b). Rezultă că şi funcţia compusă f are derivate parţiale de ordinul întîi în vecinătatea V:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Toate funcţiile din membrul drept al acestor egalităţi sînt diferenţiabile în (a, b) : derivatele parţiale ale funcţiilor $u(x, y)$ şi $v(x,y)$ sînt diferenţiabile în (a, b) deoarece aceste funcţii sînt de două ori diferenţiabile în (a, b) ; de asemenea, funcţiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ sînt diferenţiabile în (a, b) (fiind de două ori diferenţiabile în acest punct), iar $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ şi $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sînt diferenţiabile în punctul corespunzător (c, d) (deoarece φ este de două ori diferenţiabilă într-o vecinătate a acestui punct) ; atunci şi funcţiile compuse

$$\frac{\partial\varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}, \frac{\partial\varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v}$$

sînt diferenţiabile în (a, b). Rezultă deci că $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sînt diferenţiabile în (a, b), adică funcţia compusă f este diferenţiabilă de două ori în (a, b).

Deducem de aici că funcţia compusă f are toate derivatele de ordinul doi în (a, b), iar derivatele mixte sînt egale în (a, b).

Atunci

$$\mathrm{d}^2f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}v\right) = \mathrm{d}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\cdot \mathrm{d}u +$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot \mathrm{d}(\mathrm{d}u) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\cdot \mathrm{d}v + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot \mathrm{d}(\mathrm{d}v).$$

Dar

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}u) = \mathrm{d}^2u, \qquad \mathrm{d}(\mathrm{d}v) = \mathrm{d}^2v \text{ şi}$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\mathrm{d}v\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\mathrm{d}u + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\mathrm{d}v\,;$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\mathrm{d}v\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\mathrm{d}u + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\mathrm{d}v.$$

Atunci

$$\mathrm{d}^2f = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\mathrm{d}u + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}^2u + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\mathrm{d}u + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}v + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}^2v =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\mathrm{d}v^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}^2u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}^2v.$$

Această formulă se scrie, simbolic, astfel :

$$\mathrm{d}^2f = \left(\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\mathrm{d}v\right)^2\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{d}^2u + \frac{\partial}{\partial v}\mathrm{d}^2v\right)\varphi.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă funcţia $\varphi(u, v)$ este diferenţiabilă de două ori numai în (c, d), putem deduce că funcţia compusă are derivate parţiale de ordinul întîi numai în (a, b), deci nu mai rezultă că $f(x, y)$ este diferenţiabilă de două ori în (a, b).

2° Formula diferenţialei de ordinul doi a funcţiei compuse se poate obţine şi din egalitatea

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$

înlocuind derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei compuse f, date de formulele din teorema 1.

3° Diferenţiala de ordinul doi a funcţiei φ este

$$d^2\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right)^2\varphi.$$

Se observă că d^2f şi $d^2\varphi$ diferă prin termenul

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}d^2u + \frac{\partial}{\partial v}d^2v\right)\varphi,$$

astfel încît nu se mai poate vorbi de invarianţa diferenţialei de ordinul doi faţă de operaţia de compunere.

Dacă funcţiile $u(x,y)$ şi $v(x,y)$ sînt liniare,

$$u(x,y) = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$v(x,y) = a_2x + b_2y + c_2,$$

atunci

$$d^2u(x,y) = 0,\ d^2v(x,y) = 0,$$

deci

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}d^2u + \frac{\partial}{\partial v}d^2v\right)\varphi = 0,$$

adică, formal, avem $d^2f = d^2\varphi$; în acest caz şi diferenţiala de ordinul doi este invariantă faţă de operaţia de compunere.

De asemenea, în acest caz, derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei compuse $f(x, y)$ se scriu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\varphi.$$

Luînd în particular

$$u(x,y) = x,$$
$$v(x, y) = y,$$

avem chiar egalitate între funcţiile f şi φ

$$f(x, y) = \varphi(u(x,y), v(x, y)) = \varphi(x, y).$$

3° Dacă funcţia $f(x,y)$ este diferenţiabilă de două ori şi dacă se cunosc derivatele sale parţiale de ordinul doi, atunci se poate calcula diferenţiala sa :

$$\mathrm{d}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2.$$

Reciproc, dacă se cunoaşte diferenţiala de ordinul doi, rezultă şi derivatele parţiale de ordinul doi : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ este coeficientul lui $\mathrm{d}x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ este coeficientul lui $\mathrm{d}y^2$, iar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ este jumătatea coeficientului lui $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exemplu. Fie funcţia $f(x, y) = \sin\sqrt{xy}$ definită pentru $xy > 0$, adică în cadranele 1 şi 3, fără punctele de pe axe.

Avem

$$\mathrm{d}f(x, y) = \mathrm{d}(\sin\sqrt{xy}) = \cos\sqrt{xy}\,\mathrm{d}\sqrt{xy} = \cos\sqrt{xy}\,\frac{\mathrm{d}(xy)}{2\sqrt{xy}} = \cos\sqrt{xy}\,\frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{2\sqrt{xy}}.$$

$$\mathrm{d}^2 f(x, y) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f(x, y)) = \mathrm{d}\cos\sqrt{xy}\cdot\frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{2\sqrt{xy}} + \cos\sqrt{xy}\,\mathrm{d}\,\frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{2\sqrt{xy}} =$$

$$= -\sin\sqrt{xy}\,\frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{2\sqrt{xy}} +$$

$$+\cos\sqrt{xy}\;\frac{\sqrt{xy}\,\mathrm{d}(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) - (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}\sqrt{xy}}{2xy} =$$

$$= -\sin\sqrt{xy}\,\frac{y^2\,\mathrm{d}x^2 + 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}y^2}{4xy} +$$

$$+\cos\sqrt{xy}\;\frac{\sqrt{xy}(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) - (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)\,\dfrac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{2\sqrt{xy}}}{2xy} =$$

$$= -\sin\sqrt{xy}\;\frac{y^2\,\mathrm{d}x^2 + 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}y^2}{4xy} +$$

$$+\cos\sqrt{xy}\,\frac{4\,xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x^2 - 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - x^2\,\mathrm{d}y^2}{4\,xy\sqrt{xy}},$$

deci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{4xy}\left(y^2\sin\sqrt{xy} + \frac{y^2}{\sqrt{xy}}\cos\sqrt{xy}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{4\,xy}\left(x^2\sin\sqrt{xy} + \frac{x^2}{\sqrt{xy}}\cos\sqrt{xy)}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4xy}\left(2\,xy\sin\sqrt{xy} - \frac{2\,xy}{\sqrt{xy}}\cos\sqrt{xy}\right).$$

Teoremele precedente rămîn valabile şi pentru derivatele parţiale sau diferenţialele de un ordin n oarecare ale funcţiilor compuse.

Teoremă. Dacă funcţiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ sînt diferenţiabile de n ori (sau au derivate parţiale de ordinul n) pe E, iar funcţia $\varphi(u, v)$ este diferenţiabilă de n ori pe F, atunci funcţia compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x. y))$ este diferenţiabilă de n ori (respectiv are derivate parţiale de ordinul n) pe E.

Dacă funcţiile $u(x, y)$ şi $v(x,y)$ au derivate parţiale de ordinul n continue pe E, iar funcţia $\varphi(u, v)$ are derivate parţiale de ordinul n continue pe F, atunci funcţia compusă $f(x, y)$ are derivate parţiale de ordinul n continue pe E.

Demonstraţia se face prin inducţie completă şi o lăsăm pe seama cititorului, ca exerciţiu.

Observaţii 1° Teorema este adevărată şi în cazul general în care avem m funcţiile reale de n variabile

$$u_1(x_1, \ldots, x_n),\ u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

definite pe o mulţime $E \subset R^n$, şi o funcţie reală (sau cu valori în E^p) de m variabile

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

definite pe o mulţime $F \subset R^m$.

2° Dacă funcţiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ sînt liniare

$$u(x,y) = a_1x + b_1y + c_1,$$

$$v(x,y) = a_2x + b_2y + c_2,$$

diferenţiala de ordinul n a funcţiei compuse $f(x, y)$ se scrie ca şi diferenţiala de ordinul n a funcţiei $\varphi(u, v)$:

$$\mathrm{d}^n f = \left(\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\mathrm{d}v\right)^n \varphi = \mathrm{d}^n\varphi.$$

Demonstraţia se face prin inducţie completă, ţinînd seama că, în acest caz, avem $\mathrm{d}^2u = \mathrm{d}(\mathrm{d}u) = 0$, $\mathrm{d}^2v = \mathrm{d}(\mathrm{d}v) = 0$.

Pentru $n = 2$, formula a fost deja demonstrată. Să presupunem că este adevărată pentru n oarecare:

$$\mathrm{d}^n f = \left(\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\mathrm{d}v\right)^n \varphi = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n \varphi}{\partial u^{n-i}\,\partial v^i}(\mathrm{d}u)^{n-i}(\mathrm{d}v)^i$$

şi să demonstrăm că va rămîne adevărată şi pentru $n + 1$. Pentru aceasta, aplicăm operatorul de diferenţiere

$$\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

diferenţialei de ordinul n, $\mathrm{d}^n f$:

$$\mathrm{d}^{n+1}f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^n f) = \mathrm{d}\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i}\,\partial v^i}(\mathrm{d}u)^{n-i}(\mathrm{d}v)^i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left[\mathrm{d}\left(\frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i}\,\partial v^i}\right)\cdot(\mathrm{d}u)^{n-i}\cdot(\mathrm{d}v)^i + \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i}\,\partial v^i}\,\mathrm{d}((\mathrm{d}u)^{n-i}(\mathrm{d}v)^i)\right],$$

dar

$$\mathrm{d}((\mathrm{d}u)^{n-i}(\mathrm{d}v)^i) = \mathrm{d}(\mathrm{d}u)^{n-i}\,.\,(\mathrm{d}v)^i + (\mathrm{d}u)^{n-i}\mathrm{d}(\mathrm{d}v)^i =$$

$$= (n-i)(\mathrm{d}u)^{n-i-1}\,\mathrm{d}(\mathrm{d}u)\cdot(\mathrm{d}v)^i + (\mathrm{d}u)^{n-i}\,i(\mathrm{d}v)^{i-1}\,\mathrm{d}(\mathrm{d}v) = 0,$$

iar

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i}\,\partial v^i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)\frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i}\,\partial v^i} =$$

$$= \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1-i}\,\partial v^i}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n-i}\partial v^{i+1}}\,\mathrm{d}v,$$

astfel încît

$$\mathrm{d}^{n+1}f = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left[\frac{\partial^{n+1}f}{\partial u^{n+1-i}\partial v^i}(\mathrm{d}u)^{n+1-i}(\mathrm{d}v)^i + \frac{\partial^{n+1}f}{\partial u^{n-i}\partial v^{i+1}}(\mathrm{d}u)^{n-i}(\mathrm{d}v)^{i+1}\right].$$

În această sumă, coeficientul lui

$$\frac{\partial^{n+1}f}{\partial u^{n+1-i}\partial v^i}(\mathrm{d}u)^{n+1-i}(\mathrm{d}v)^i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

este

$$C_n^i + C_n^{i-1} = C_{n+1}^i,$$

iar coeficientul lui $\dfrac{\partial^{n+1}f}{\partial u^{n+1}}(\mathrm{d}u)^{n+1}$ este $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$, deci

$$\mathrm{d}^{n+1}f = C_{n+1}^0 \frac{\partial^{n+1}f}{\partial u^{n+1}}(\mathrm{d}u)^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} C_{n+1}^i \frac{\partial^{n+1}f}{\partial u^{n+1-i}\partial v^i}(\mathrm{d}u)^{n+1-i}(\mathrm{d}v)^i =$$

$$= \sum_{j=0}^{n=1} C_{n+1}^j \frac{\partial^{n+1}f}{\partial u^{n+1-j}\partial v^j}(\mathrm{d}u)^{n+1-j}(\mathrm{d}v)^j = \left(\frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)^{n+1} f.$$

8. Formula lui Taylor

Fie $f(x, y)$ o funcţie reală de două variabile definită pe o mulţime $E \subset R^2$ şi un punct interior $(a, b) \in E$.

Să presupunem că funcţia f este *diferenţiabilă* de n ori în punctul (a,b), deci are toate derivatele parţiale de ordinul n în punctul (a, b), iar în derivatele parţiale mixte pînă la ordinul n iclusiv nu are nici o importanţă ordinea variabilelor în raport cu care se derivează.

Pentru fiecare punct $(x, y) \in E$ să considerăm polinomul de două variabile, de gradul n,

$$T_n(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y-b)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}(y-b)^2\right] + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(x-a)^{n-i}(y-b)^i$$

sau,

$$T_n(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right) f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^2 f(a, b) +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^n f(a, b).$$

Polinomul $T_n(x, y)$ definit pe E se numeşte *polinomul lui Taylor de gradul n* ataşat funcţiei $f(x, y)$ în punctul (a, b).

Dacă pentru fiecare $(x, y) \in E$ notăm

$$R_n(x, y) = f(x, y) - T_n(x, y),$$

atunci

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y),$$

adică

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right) f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^2 f(a, b) +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^n f(a, b) + R_n(x, y)$$

pentru orice $(x,y) \in E$. Această egalitate, valabilă pentru orice $(x,y) \in E$, se numeşte *formula lui Taylor* de ordinul n, corespunzătoare funcţiei $f(x,y)$ în punctul (a, b).

Funcţia $R_n(x, y)$ definită pe E se numeşte *restul de ordinul* n al formulei lui Taylor.

Să observăm că pentru $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^k f(a, b) = \mathrm{d}^k f(a, b)(x, y) = \mathrm{d}^k f(a, b),$$

astfel încît, formula lui Taylor se mai poate scrie astfel:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(a, b) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a, b) + \ldots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(a, b) + R_n(x, y).$$

Dacă $(x, y) = (a, b)$, avem $T_n(a, b) = f(a, b)$ şi $R_n(a, b) = 0$.

În cazul cînd restul $R_n(x, y)$ este o funcţie continuă în (a, b),

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} R_n(x, y) = R_n(a, b) = 0,$$

atunci pentru valori ale lui x şi y suficient de apropiate de a şi b, putem realiza ca diferenţa $f(x, y) - T_n(x, y)$ să fie cît dorim de mică; pentru asemenea valori ale lui x şi y funcţia $f(x, y)$ poate fi aproximată cu polinomul $T_n(x, y)$. Vom arăta că, în anumite condiţii, avem nu numai

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} R_n(x, y) = 0,$$

dar chiar

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \frac{R_n(x, y)}{\rho^n(x, y)} = 0,$$

unde

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Teoremă. Dacă funcţia $f(x, y)$ este diferenţiabilă de $n+1$ ori într-o vecinătate V a lui (a, b), atunci, pentru orice punct $(x, y) \in V$, există un punct $(\xi, \eta) \in V$ pe segmentul care uneşte punctele (a, b) şi (x, y), astfel încît să avem

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^{n+1} f(\xi, \eta) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1} f(\xi, \eta)$$

şi

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(a, b) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a, b) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(a, b) + \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1} f(\xi, \eta).$$

Fie (x_0, y_0) un punct *arbitrar* în V. Să unim punctele (a, b) și (x_0, y_0) printr-un segment I.

Să considerăm funcțiile

$$x(t) = a + (x_0 - a)\,t,$$

$$y(t) = b + (y_0 - b)\,t$$

definite pentru $t \in [0,1]$. Cînd t parcurge segmentul $[0,1]$, punctul corespunzător $(x(t), y(t))$ din plan parcurge segmentul I.

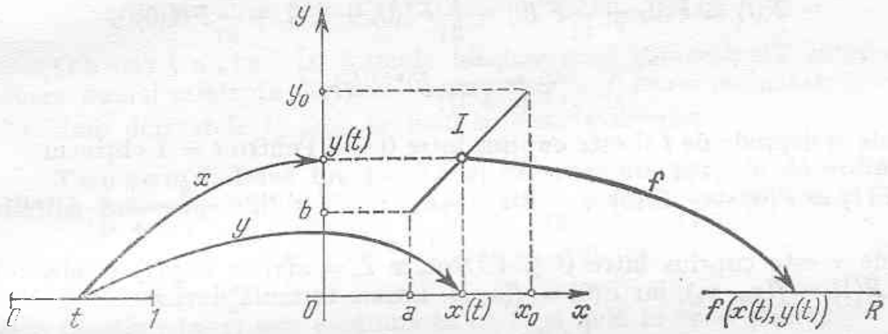


Fig. 154

Într-adevăr, pentru orice punct (x', y') de pe segmentul I există un punct $t' \in [0,1]$, astfel ca

$$x' = a + (x_0 - a)\,t' = x(t'),$$

$$y' = b + (y_0 - b)\,t' = y(t').$$

Pentru $t = 0$ avem $x(0) = a$, $y(0) = b$, iar pentru $t = 1$ avem $x(1) = x_0$, $y(1) = y_0$.

Să considerăm funcția compusă

$$F(t) = f(x(t), y(t)) = f(a + (x_0 - a)t,\ b + (y_0 - b)t)$$

definită pentru $t \in [0, 1]$. Deoarece funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ sînt diferențiabile de orice ordin pe $[0, 1]$, iar funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă de $n + 1$ ori pe V, rezultă că funcția compusă $F(t)$ este diferențiabilă de $n + 1$ ori pe $[0,1]$ și deoarece $d^2x(t) = 0$, $d^2y(t) = 0$, avem pentru $k = 1, 2, \ldots, n + 1$

$$d^kF(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx(t) + \frac{\partial}{\partial y}\, dy(t)\right)^k f(x(t), y(t)).$$

Dar $dx(t) = (x_0 - a)\, dt$ și $dy(t) = (y_0 - b)\, dt$, astfel încît

$$d^k F(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right)^k f(x(t), y(t))\, (dt)^k,$$

deci, derivata de ordinul k a funcţiei $F(t)$ este

$$F^{(k)}(t) = \frac{d^k F(t)}{dt^k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right)^k f\, x((t), y(t)).$$

Atunci

$$F^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right)^k f(a, b),$$

deoarece $x(0) = a$, $y(0) = b$. Funcţia $F(t)$ fiind derivabilă de $n + 1$ ori pe $[0,1]$, se poate scrie formula lui Mac Laurin cu restul în forma lui Lagrange:

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0) +$$
$$+ \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\tau),$$

unde τ depinde de t şi este cuprins între 0 şi t. Pentru $t = 1$ obţinem

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\tau),$$

unde τ este cuprins între 0 şi 1. Notăm $\xi = x(\tau)$, $\eta = y(\tau)$ şi observînd că $F(1) = f(x_0, y_0)$, iar $F(0) = f(a, b)$, ultima formulă devine

$$f(x_0, y_0) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right)f(a, b) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right)^n f(a, b) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right)^{n+1} f(\xi, \eta),$$

unde punctul (ξ, η) se află pe segmentul I care uneşte punctele (a, b) şi (x_0, y_0).

Deoarece punctul (x_0, y_0) a fost ales arbitrar în V, rezultă că, pentru orice punct $(x, y) \in V$, există un punct (ξ, η) pe segmentul ce uneşte (a,b) cu (x, y), astfel încît să avem

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)f(a, b) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^n f(a, b) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^{n+1} f(\xi, \eta),$$

deci restul $R_n(x, y)$ este

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^{n+1} f(\xi, \eta)$$

şi teorema este demonstrată.

Faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \frac{R_n(x, y)}{\rho^n(x, y)} = 0$ va fi demonstrat într-un caz mai general, în condiții mai puțin restrictive.

F o r m u l a l u i L a g r a n g e. Dacă $f(x, y)$ este diferențiabilă într-o vecinătate V a lui (a, b), atunci pentru orice $(x, y) \in V$ există un punct $(\xi, \eta) \in V$, cu ξ cuprins între a și x și η cuprins între b și y, astfel ca

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(\xi, \eta)(x - a) + f'_y(\xi, \eta)(y - b) .$$

O b s e r v a ț i e. În formula lui Lagrange demonstrată anterior se folosea numai existența derivatelor parțiale f'_x și f'_y într-o vecinătate a lui V, în schimb derivatele f'_x și f'_y se luau în puncte diferite.

T e o r e m ă. Dacă funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul n continue într-o vecinătate V a lui (a, b), atunci restul se poate scrie în forma

$$R_n(x, y) = \frac{1}{n!}\, \omega(x, y)\, \rho^n(x, y),$$

unde funcția $\omega(x, y)$ este continuă în (a, b) și nulă în acest punct:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$$

Într-adevăr, deoarece funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul n continue în V, rezultă că $f(x, y)$ este diferențiabilă de n ori în V, deci se poate scrie formula lui Taylor de ordinul $n - 1$:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right) f(a, b) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^{n-1} f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^{n} f(\xi, \eta)$$

pentru orice $(x, y) \in V$, unde ξ se află cuprins între a și x, iar η între b și y. Restul $R_{n-1}(x, y)$ este aici

$$R_{n-1}(x, y) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^{n} f(\xi, \eta).$$

Dacă se dezvoltă după formula binomului lui Newton, coeficientul lui $(x - a)^{n-i}(y - b)^i$ este

$$C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} .$$

Dar derivatele parţiale sînt continue în V, deci şi în punctul (a, b), şi, ţinînd seama că ξ şi η depind de x şi y şi că dacă $x \to a$ şi $y \to b$ avem $\xi \to a$ şi $\eta \to b$, rezultă că

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = C_n^i \frac{\partial^n f(a, b)}{\partial x^{n-i} \partial y^i}$$

şi deci

$$C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = C_n^i \frac{\partial^n f(a, b)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} + \omega_i(x, y),$$

unde $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0$.

Aşadar:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^n f(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i}(x - a)^{n-i}(y - b)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f(a, b)}{\partial x^{n-i} \partial y^i}(x - a)^{n-i}(y - b)^i + \sum_{i=0}^{n} \omega_i(x, y)(x - a)^{n-i}(y - b)^i =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^n f(a, b) + \omega(x, y)\rho^n,$$

unde am notat $\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$,

$$\omega(x, y) = \frac{1}{\rho^n} \sum_{i=0}^{n} \omega_i(x, y)(x - a)^{n-i}(y - b)^i,$$

$$\omega(a, b) = 0.$$

Deoarece $|x - a| \leqslant \rho$ şi $|y - b| \leqslant \rho$, avem

$$|\omega(x, y)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |\omega_i(x, y)| \frac{|x - a|^{n-i}}{\rho^{n-i}} \cdot \frac{|y - b|^i}{\rho^i} \leqslant \sum_{i=0}^{n} |\omega_i(x, y)|$$

şi, deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} |\omega_i(x, y)| = 0$, rezultă că

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = 0 = \omega(a, b).$$

Aşadar

$$R_{n-1}(x, y) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^n f(a, b) + \frac{1}{n!}\omega(x, y)\rho^n,$$

deci

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right) f(a, b) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^{n-1} f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^{n} f(a, b) + \frac{1}{n!}\omega(x, y)\rho^n.$$

Am obţinut deci formula lui Taylor de ordinul n, cu restul $R_n(x, y) = = \frac{1}{n!}\omega(x, y)\,\rho^n(x, y)$, unde

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

şi

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Ultima teoremă este valabilă dacă f este diferenţiabilă de n ori în V, şi derivatele parţiale de ordinul n sînt continue numai în (a, b).

Într-adevăr, în demonstraţie au fost folosite numai aceste condiţii.

2° Propoziţia analogă pentru funcţii de o singură variabilă a fost demonstrată în ipoteza că funcţia $f(x)$ are derivata de ordinul n numai în a.

3° Cele două teoreme rămîn adevărate şi pentru funcţii de mai multe variabile, fie că aceste funcţii au valori reale, fie că au valori vectoriale.

Caz particular. Dacă funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate V a lui (a, b), atunci pentru orice $(x,y) \in V$ avem

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b) +$$

$$+ \frac{1}{2}[f''_{x^2}(a, b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f''_{y^2}(a, b)(y-b)^2] +$$

$$+ \frac{1}{2}\omega(x, y)[(x-a)^2 + (y-b)^2],$$

unde $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$

9. Extremele funcţiilor de mai multe variabile

Fie $f(x, y)$ o funcţie reală de două variabile, definită pe o mulţime $E \subset R^2$.

D e f i n i ţ i e. Un punct $(a, b) \in E$ se numeşte punct de maxim local (respectiv de minim local) al funcţiei $f(x, y)$, dacă există o vecinătate V a lui (a, b) astfel încît, pentru orice $(x, y) \in V \cap E$ să avem $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ (respectiv $f(x, y) \geqslant f(a, b)$).

Punctele de maxim (local) şi punctele de minim (local) se numesc puncte de extrem (local) ale funcţiei.

Dacă (a, b) este un punct de maxim local (respectiv de minim local) al funcţiei $f(x, y)$, valoarea sa $f(a, b)$ în acest punct se numeşte maxim local (respectiv minim local) al funcţiei.

Maximele şi minimele locale ale funcţiei se numesc extremele (locale) ale funcţiei.

P r o p o z i ţ i a 1. Dacă funcţia f are derivate parţiale într-un punct de extrem (a, b) din interiorul mulţimii E, atunci derivatele parţiale se anulează în acest punct:

$$f'_x(a, b) = 0, \ f'_y(a, b) = 0.$$

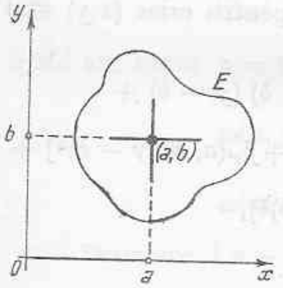
Într-adevăr, funcţia parţială $\varphi(x) = f(x, b)$, definită pe mulţimea

$$E_b = \{x | \, x \in R, (x, b) \in E\}$$

este derivabilă în punctul a, $\varphi'(a) = f'_x(a, b)$, iar a este punct de extrem al acestei funcţii şi punct interior al mulţimii E_b, deci, conform teoremei lui Fermat, avem $\varphi'(a)=0$, adică $f'_x(a, b) = 0$. La fel se arată că $f'_y(a, b) = 0$.

O b s e r v a ţ i i. 1° Propoziţia 1 este o generalizare a teoremei lui Fermat pentru funcţii de două variabile.

2° Propoziţia 1 rămîne adevărată şi dacă (a, b) nu este punct interior al lui E, dar dacă mulţimea E conţine un segment paralel cu Ox şi un segment paralel cu Oy, care conţin punctul (a, b) astfel că (a, b) nu se află la nici una din extremităţile acestor două segmente.



D e f i n i ţ i e. Un punct interior $(a, b) \in E$ se numeşte punct staţionar al funcţiei $f(x, y)$, dacă funcţia $f(x, y)$ este diferenţiabilă în punctul (a, b) şi dacă diferenţiala sa este nulă în acest punct, $df(a, b) = 0$.

Deoarece diferenţiala funcţiei $f(x, y)$ în (a, b) este

$$df(a, b) = f'_x(a, b)\,dx + f'_y(a, b)dy,$$

avem $df(a,b) = 0$ dacă şi numai dacă $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$.

Aşadar, a spune că (a, b) este un *punct staţionar* al funcţiei $f(x, y)$, înseamnă că *funcţia este diferenţiabilă în punctul* (a, b) *şi are derivatele parţiale nule în acest punct.*

P r o p o z i ţ i a 2. Orice punct de extrem local din interiorul mulţimii E în care funcţia $f(x, y)$ este diferenţiabilă este punct staţionar al funcţiei.

Într-adevăr, conform propoziţiei 1, avem

$$f'_x(a, b) = 0 \text{ şi } f'_y(a, b) = 0,$$

deci (a, b) este punct staţionar al funcţiei.

Observație. Propoziția reciprocă nu este adevărată: există puncte staționare care nu sînt puncte de extrem.

Exemplu. Fie funcția $f(x, y) = x^2 - y^2$, definită pe R^2.
Avem $f'_x(x, y) = 2x$ și $f'_y(x, y) = -2y$, deci

$$f'_x(0, 0) = 0, \ f'_y(0, 0) = 0.$$

Funcția este diferențiabilă în punctul (0, 0) (deoarece derivatele parțiale sînt continue) deci (0, 0) este punct staționar al funcției. Punctul (0, 0) nu este însă punct de extrem a funcției.

Într-adevăr, pentru punctele de forma $(x, 0)$, de pe axa Ox, avem

$$f(x, 0) = x^2 \geqslant 0 \geqslant f(0, 0),$$

iar pentru puncte de forma $(0, y)$, de pe axa Oy, avem

$$f(0, y) = -y^2 \leqslant 0 \leqslant f(0, 0),$$

astfel, încît, în (0, 0) funcția nu are nici minim local, nici maxim local.

Situația este asemănătoare cu aceea a funcțiilor de o singură variabilă pentru care există puncte în care derivata întîi se anulează, dar care nu sînt puncte de extrem (ci puncte de inflexiune).

Punctele staționare ale funcției $f(x, y)$ care nu sînt puncte de extrem ale sale se numesc *puncte șa* ale lui $f(x, y)$.

Interpretare geometrică. Graficul funcției $f(x, y)$ este o suprafață S a cărei ecuație este

$$z = f(x, y).$$

Dacă funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul (a, b), suprafața S are plan tangent în punctul corespunzător $(a, b, f(a, b))$, a cărui ecuație este

$$z - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Dacă (a, b) este punct staționar, suprafața S are în punctul $(a, b, f(a, b))$ plan tangent paralel cu planul xOy. Într-adevăr, $f'_x(a, b) = 0$ și $f'_y(a, b) = 0$, deci ecuația planului tangent devine $z - f(a, b) = 0$, adică

$$z = f(a, b),$$

adică este un plan paralel cu planul xOy.

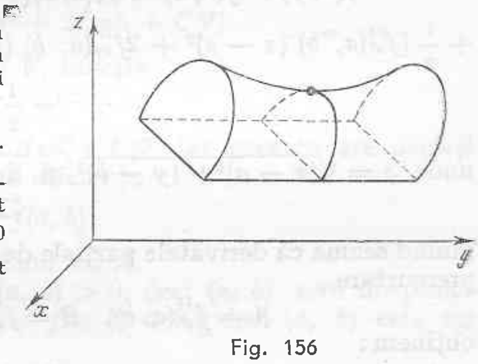


Fig. 156

Din considerațiile precedente rezultă că, dacă E este o mulțime *deschisă*, și dacă funcția $f(x, y)$ este *diferențiabilă* pe E, punctele staționare ale lui f sînt toate soluțiile (x, y) ale sistemului

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Cum orice punct de extrem local este punct staționar, rezultă că punctele de extrem local se află printre soluțiile sistemului de mai sus (dar nu toate soluțiile sistemului sînt puncte de extrem).

Ca şi pentru funcţii de o singură variabilă, pentru a identifica printre punctele staţionare unele puncte de extrem (dar nu neapărat toate punctele de extrem) va trebui să recurgem la derivatele parţiale de ordinul doi.

Teoremă. Dacă (a, b) este un punct staţionar al funcţiei $f(x, y)$ şi dacă funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate V a lui (a, b), atunci:

1) Dacă $f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 > 0$, derivatele parţiale fiind calculate în (a, b), atunci (a, b) este un punct de extrem local al funcţiei $f(x, y)$ şi anume:

dacă $f''_{x^2}(a, b) > 0$, (a, b) este punct de minim,

dacă $f''_{x^2}(a, b) < 0$, (a, b) este punct de maxim.

2) Dacă $f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 < 0$, atunci (a, b) nu este punct de extrem al funcţiei $f(x, y)$.

Deoarece (a, b) este punct staţionar, avem

$$f'_x(a, b) = 0 \text{ şi } f'_y(a, b) = 0.$$

Deoarece funcţia $f(x,y)$ are derivate parţiale de ordinul doi continue pe o vecinătate V a lui (a, b), putem scrie formula lui Taylor de ordinul doi pentru $(x, y) \in V$:

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) +$$
$$+ \frac{1}{2}[f''_{x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{y^2}(a, b)(y - b)^2] +$$
$$+ \frac{1}{2}\omega(x, y)\rho^2,$$

unde $\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = 0$.

Ţinînd seama că derivatele parţiale de ordinul întîi sînt nule şi notînd, pentru prescurtare,

$$A = f''_{x^2}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{y^2}(a, b),$$

obţinem:

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2}[A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 + \omega(x, y)\rho^2].$$

Pentru $\rho \neq 0$, să notăm $\alpha(x, y) = \frac{x - a}{\rho}$, $\beta(x, y) = \frac{y - b}{\rho}$. Atunci

$$\alpha^2(x, y) + \beta^2(x, y) \equiv 1, \text{ oricare ar fi punctul } (x, y) \neq (a, b),$$

de unde:

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2}[A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega]\rho^2.$$

Să observăm că dacă punctul (x, y) înconjură într-un mod oarecare punctul (a, b), punctul (α, β), care îi corespunde, descrie un cerc cu centrul în origine şi cu raza 1. Dacă (x, y) se deplasează pe o dreaptă ce trece prin (a, b), punctul (α, β) rămîne neschimbat.

Să presupunem întîi că $f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 > 0$, adică $AC - B^2 > 0$. Rezultă că trinomul $A\gamma^2 + 2B\gamma + C$ are rădăcini complexe şi deci nu se anulează pentru nici o valoare a lui γ. Atunci forma pătratică $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$ nu se anulează în nici un punct (α, β), deoarece $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

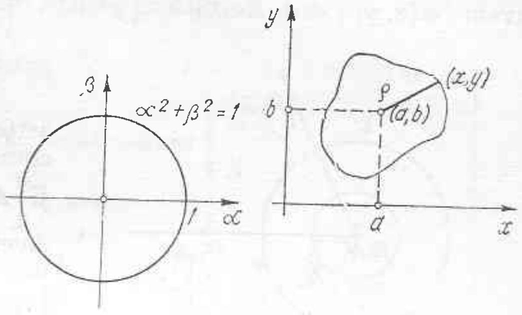


Fig. 157

Dar $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$ este funcţie continuă de (α, β) şi la fel $|A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2|$; modulul formei pătratice îşi atinge minimul pe cercul unitate $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ şi, deoarece nu se anulează, acest minim, μ, este strict pozitiv, $\mu > 0$. Dar $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = 0$, deci există un cerc (disc circular) V cu centrul în (a, b) şi raza suficient de mică, astfel încît să avem

$$|\omega(x, y)| < \mu \leqslant |A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2|$$

pentru orice $(x, y) \in V$. Rezultă că în V, funcţia

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega$$

are acelaşi semn cu funcţia $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$, iar aceasta are acelaşi semn cu A. Cum $\rho^2 \geqslant 0$, deducem că diferenţa

$$f(x, y) - f(a, b)$$

păstrează în V un semn constant, semnul lui A.

Dacă $A > 0$, atunci $f(x, y) - f(a, b) > 0$, deci (a, b) este un punct de minim; dacă $A < 0$, atunci $f(x, y) - f(a, b) < 0$, deci (a, b) este un punct de maxim.

Să presupunem acum că $f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 < 0$, adică $AC - B^2 < 0$. Rezultă că trinomul $A\gamma^2 + 2B\gamma + C$ are rădăcini reale şi distincte, $\gamma_1 < \gamma_2$, şi deci are un semn pentru valori ale lui γ cuprinse între rădăcini, şi semn contrar pentru valori ale lui γ în afara rădăcinilor. Să observăm că atunci cînd punctul (x, y) înconjură punctul (a, b), α şi β iau toate valorile cuprinse între -1 şi 1 şi deci raportul $\frac{\alpha}{\beta}$ ia toate valorile reale, deci atît valori în afara rădăcinilor γ_1 şi γ_2 cît şi valori între aceste rădăcini. Atunci $\left(A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2B\frac{\alpha}{\beta} + C\right)\beta^2$ ia atît valori strict negative cît şi valori strict pozitive.

Fie (x_1, y_1) un punct astfel încît pentru valorile (α_1, β_1) corespunzătoare să avem $\beta_1 \neq 0$ și $\left[A\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2 + 2B\frac{\alpha_1}{\beta_1} + C\right]\beta_1^2 = a > 0$. Cînd punctul (x, y) descrie dreapta d_1 ce unește punctul (x_1, y_1) cu (a, b), (α, β) rămîne neschimbat, deci $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = a > 0$. Există atunci un cerc V_1 cu centrul în (a, b) și raza suficient de mică astfel încît pentru $(x, y) \in V_1$ să avem $|\omega(x, y)| < a$. Rezultă că pentru orice punct (x, y) din $V_1 \cap d_1$ avem

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega > 0.$$

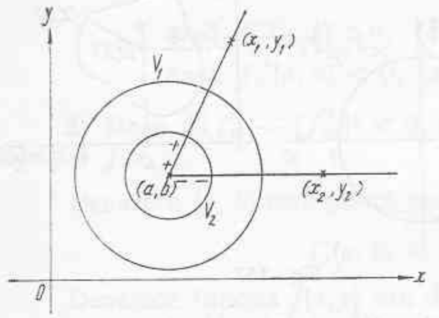


Fig. 158

Fie acum (x_2, y_2) un punct astfel încît pentru valorile (α_2, β_2) corespunzătoare să avem $\beta_2 \neq 0$ și $\left[A\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 + 2B\frac{\alpha_2}{\beta_2} + C\right]\beta_2 = b < 0$. Avem $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = b > 0$ pe dreapta d_2 ce unește punctul (x_2, y_2) cu punctul (a, b). Există atunci un cerc V_2 cu centrul în (a, b) astfel încît pentru $(x, y) \in V_2$ să avem $|\omega(x, y)| < |b|$. Rezultă că pentru orice (x, y) din $V_2 \cap d_2$ avem

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega < 0.$$

Notînd cu V un cerc cu centrul în (a, b) conținut în V_1 și în V_2, deducem că în interiorul cercului V funcția $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega$ ia valori > 0 pe dreapta d_1 și valori < 0 pe dreapta d_2.

Rezultă că în orice vecinătate a lui (a, b) diferența $f(x,y) - f(a, b)$ ia valori de semne contrare și deci (a, b) nu este punct de extrem.

Teorema este astfel complet demonstrată.

Așadar, în orice vecinătate V a punctului (a, b) diferența $f(x, y) - f(a, b)$, care are același semn cu $A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2B\frac{\alpha}{\beta} + C$, ia valori de semne contrare, și deci (a, b) nu este punct de extrem.

Teorema este astfel demonstrată.

Exemple. 1) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$. Rezolvăm sistemul

$$f'_x = 3x^2 + 3y = 0$$

$$f'_y = 3y^2 + 3x = 0$$

pentru a afla punctele staționare. Se obțin soluțiile $(0, 0)$ și $(-1, -1)$.

Pentru a vedea dacă aceste puncte staționare sînt sau nu puncte de extrem, calculăm derivatele parțiale de ordinul doi

$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{y^2} = 6y, \quad f''_{xy} = 3.$$

Avem:

$$f''_{x^2}(0, 0) = 0, \quad f''_{y^2}(0, 0) = 0, \quad f''_{xy}(0, 0) = 3;$$

în acest caz,

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 0 \cdot 0 - 3^2 = -9 < 0,$$

deci (0, 0) nu este punct de extrem.

Avem apoi $f''_{x^2}(-1, -1) = -6$, $f''_{y^2}(-1, -1) = -6$, $f''_{xy}(-1, -1) = 3$; în acest caz,

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 36 - 9 = 27 > 0,$$

deci $(-1, -1)$ este punct de extrem; deoarece $f''_{x^2}(-1, -1) = -6 < 0$, rezultă că $(-1, -1)$ este punct de maxim.

2) $f(x, y) = x^4 + 4x^2y + x^3 + 4y^2$. Rezolvînd sistemul $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ se obţin punctele staţionare (0, 0) şi $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$. Avem

$$f''_{x^2}\left(0, -\frac{8}{3}\right) = -\frac{64}{3},\ f''_{y^2}\left(0, -\frac{8}{3}\right) = -8,\ f''_{xy}\left(0, -\frac{8}{3}\right) = 0, \text{ deci:}$$

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - \left[f''_{xy}\right]^2 > 0.$$

Aşadar, $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$ este punct de extrem şi anume de maxim, deoarece $f''_{x^2} < 0$. Avem apoi $f''_{x^2}(0, 0) = 0$, $f''_{y^2}(0, 0) = 8$, $f''_{xy}(0, 0) = 0$, deci $f''_{x^2} f''_{y^2} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 0$, în acest caz, nu putem afirma nimic pe baza teoremei precedente. Un studiu direct asupra funcţiei arată că (0, 0) nu este punct de extrem.

O b s e r v a ţ i e. Dacă $f''_{x^2} f''_{y^2} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 0$, derivatele fiind calculate în punctul staţionar (a, b), nu putem afirma nimic despre acest punct. În unele cazuri este punct de extrem al funcţiei f, în alte cazuri nu este punct de extrem.

Exemple. 1) $f(x, y) = x^2 + y^4$. Punctul (0, 0) este punct staţionar: avem

$$f''_{x^2}(0, 0) = 2, \quad f''_{y^2}(0, 0) = 0, \quad f''_{xy}(0, 0) = 0, \text{ deci}$$

$f''_{x^2} f''_{y^2} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 0$. Avem apoi $f(0, 0) = 0$ şi $f(x, y) > 0$ pentru $(x, y) \neq (0, 0)$, deci (0, 0 este un punct de minim al fu ţiei.

2) $f(x, y) = x^2 + y^3$. Punctul (0, 0) este punct staţionar; avem

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - \left[f''_{xy}\right]^2 = 0,$$

şi (0, 0) nu este punct de extrem.

Într-adevăr, $f(0, 0) = 0$, $f(0, y) = y^3 < 0$ dacă $y < 0$ şi $f(0, y) = y^3 > 0$ dacă $y > 0$.

Fie acum $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie de n variabile, definită pe o mulţime $E \subset R^n$.

Se defineşte ca mai sus un punct de maxim (respectiv minim) local $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ prin condiţia

$f(x) \leqslant f(a)$ (respectiv $f(x) \geqslant f(a)$) pentru x într-o vecinătate V a lui a.

Rezultă că dacă a este punct staționar din interiorul lui E, atunci derivatele parțiale ale lui f se anulează în a:

$$f'_{x_1}(a) = 0,\ f'_{x_2}(a) = 0, \ldots, f'_{x_n}(a) = 0.$$

Punctul $a \in E$ este punct staționar al funcției f, dacă f este diferențiabilă în a și dacă $df(a) = 0$.

Pentru a determina *punctele staționare* ale unei funcții diferențiabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pe o mulțime deschisă $E \subset R^n$, se rezolvă sistemul derivatelor sale parțiale:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Se demonstrează ca mai sus următoarea teoremă generală.

Teoremă. Fie $a = (a_1, a_2 \ldots, a_n)$ un punct staționar al funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Să presupunem că funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$ are derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate V a lui a.

1) Dacă forma pătratică $\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_i \alpha_j$ este definită, atunci a este un punct de extrem, și anume un punct de maxim sau de minim, după cum $\varphi < 0$ sau $\varphi > 0$.

2) Dacă forma pătratică φ este nedefinită, atunci a nu este punct de extrem al funcției.

Se pleacă de la formula lui Taylor

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \frac{1}{2} \omega(x)\rho^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_i \alpha_j + \omega\right]\rho^2 = \frac{1}{2}[\varphi + \omega]\rho^2,$$

unde:

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2},\ \lim_{x \to a} \omega(x) = \omega(a) = 0 \text{ și } \alpha_i = \frac{x_i - a_i}{\rho}.$$

Dacă forma pătratică φ este definită, ea nu se anulează; pe de altă parte $|\varphi|$ fiind continuă, își atinge minimul μ pe mulțimea $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$, și deci $\mu > 0$. Se găsește apoi o vecinătate V a lui a, în care ω are valori mai mici decît μ. În această vecinătate diferența $f(x) - f(a)$ are semnul lui φ. Dacă $\varphi > 0$, avem $f(x) - f(a) > 0$ pentru $x \in V$, deci a este punct de minim; dacă $\varphi < 0$, avem $f(x) - f(a) < 0$ pentru $x \in V$, deci a este punct de maxim.

Dacă forma pătratică φ nu este definită, ia în orice vecinătate a lui a atît valori > 0 cît şi valori < 0; rezultă că în orice vecinătate a lui a, diferenţa $f(x) - f(a)$ ia atît valori > 0 cît şi valori < 0, şi deci a nu este punct de extrem.

10. Funcţii omogene şi teorema lui Euler

Fie $E \subset R^n$ un con, adică o mulţime care o dată cu un punct $x = (x_1, \ldots, x_n)$ conţine întreaga semidreaptă care uneşte punctul x cu originea $0 \in R^n$, cu excepţia eventual a originii. Fie funcţia reală $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ definită pe E.

Se spune că funcţia f este omogenă de grad k, dacă pentru orice număr $t > 0$ şi orice $x \in E$ avem

$$f(tx) = t^k f(x),$$

adică

$$f(tx, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Exemple: 1) Funcţia $ax^2 + bxy + cy^2$ este omogenă de grad 2;

2) Funcţia $\sqrt{x^2 + xy}$ este omogenă de grad 1;

3) Funcţia $\frac{1}{x^\alpha - y^\alpha}$ este omogenă de grad $-\alpha$;

4) Funcţia $\sqrt{x + y}$ este omogenă de grad $\frac{1}{2}$;

5) Funcţia $\frac{y}{x}$ este omogenă de grad 0.

T e o r e m a l u i E u l e r. Dacă funcţia $f(x)$ este omogenă de grad k şi diferenţiabilă într-un punct $a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, atunci

$$a_1 f'_{x_1}(a) + a_2 f'_{x_2}(a) + \ldots + a_n f'_{x_n}(a) = t^k f(a).$$

Deoarece $f(x)$ este omogenă, pentru orice $t > 0$ avem

$$\varphi(t) = f(ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) = t^k f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Deoarece $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este diferenţiabilă în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, funcţia din membrul stîng al egalităţii este derivabilă în raport cu t în punctul 1 şi avem

$$\frac{d\varphi(1)}{dt} = \left[\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) \frac{d(ta_i)}{dt}\right]_{t=1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f'_{x_i}(a).$$

De asemenea,

$$\frac{d\varphi(1)}{dt} = [kt^{k-1} f(a_1, \ldots, a_n)]_{t=1} = k f(a_1, \ldots, a_n) = kf(a),$$

de unde

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f'_{x_i}(a) = k f(a).$$

Corolar. Dacă funcția $f(x)$ este omogenă de grad k și diferențiabilă în orice punct $x \neq 0$ din E, atunci

$$x_1 f'_{x_1}(x) + x_2 f'_{x_2}(x) + \ldots + x_n f'_{x_n}(x) = kf(x)$$

pentru orice $x \neq 0$ din E.

Teorema reciprocă. Dacă funcția $f(x)$ este diferențiabilă în orice punct $x \neq 0$ din E și în aceste puncte verifică egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f'_{x_i}(x) = kf(x),$$

atunci $f(x)$ este omogenă de grad k.

Fie $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ un punct arbitrar din E. Să considerăm funcția

$$\varphi(t) = \frac{f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)}{t^k}$$

definită pentru $t \in (0, +\infty)$. Avem

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t^{k+1}}\left(\sum_{i=1}^{n} tx_i f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) - kf(tx_1, \ldots, tx_n)\right) = 0$$

pentru orice $t \in (0, +\infty)$, deci φ este constantă pe $(0, +\infty)$. Urmează că pentru orice $t > 0$ avem

$$\varphi(t) = \varphi(1),$$

adică

$$\frac{f(tx_1, \ldots, tx_n)}{t^k} = f(x_1, \ldots, x_n),$$

de unde

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n)$$

și deci f este omogenă de gradul k.

§ 7. Funcţii implicite

1. Funcţii implicite de una sau mai multe variabile

Să considerăm ecuaţia

$$F(x, y) = 0,$$

unde $F(x, y)$ este o funcţie reală de două variabile, definită pe o mulţime $E \subset R^2$. Să notăm cu E_x proiecţia lui E pe axa Ox:

$$E_x = pr_x E = \{x |\ \text{există}\ y \in R,\ \text{cu}\ (x, y) \in E\}$$

şi fie $A \subset E_x$.

O funcţie $f(x) : A \to R$ se numeşte soluţie (în raport cu y) a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ pe mulţimea A, dacă

$$F(x, f(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in A.$$

O ecuaţie $F(x, y) = 0$ poate avea (în raport cu y) una sau mai multe soluţii pe o mulţime A, sau poate să nu aibă nici o soluţie.

Exemple. 1) Fie funcţia $F(x, y) = x - y^2$ definită pe R^2 şi ecuaţia $x - y^2 = 0$. Această ecuaţie are, în raport cu y, o infinitate de soluţii pe mulţimea $[0, +\infty)$.

Într-adevăr, să considerăm două mulţimi disjuncte oarecare A_1 şi A_2, astfel ca $A_1 \cup A_2 = [0, +\infty)$.

Funcţia $f(x)$ definită pe $[0, +\infty)$ prin egalităţile:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dacă } x \in A_1 \\ -\sqrt{x} & \text{dacă } x \in A_2 \end{cases}$$

verifică ecuaţia $x - y^2 = 0$, deoarece $x - f^2(x) \equiv 0$.

Dintre toate soluţiile în raport cu y ale ecuaţiei $x - y^2 = 0$, numai două sînt funcţii continue, şi anume funcţiile

$$f_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{şi} \quad f_2(x) = -\sqrt{x}.$$

Dintre cele două soluţii continue ale ecuaţiei $x - y^2 = 0$, numai una verifică „condiţia iniţială" $f(1) = 1$.

2) Ecuaţia $x^2 + y^2 + 1 = 0$, $(x, y) \in R^2$ nu are nici o soluţie (reală), nici în raport cu y, nici în raport cu x.

3) Ecuaţia $x - 2y = 0$, $(x, y) \in R^2$ are o singură soluţie în raport cu y pe R, funcţia $f(x) = \frac{1}{2} x$.

Să considerăm de asemenea ecuaţia

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0,$$

unde $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ este definită pe o mulțime $E \subset R^{n+1}$. O funcție de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definită pe o mulțime $A \subset R^n$ este soluție în raport cu y a acestei ecuații, pe mulțimea A, dacă

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \equiv 0$$

pentru orice punct $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$.

Să observăm că dacă notăm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ecuația $F(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, y) = 0$ se scrie

$$F(x, y) = 0,$$

iar soluția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se scrie $f(x)$.

Așadar, putem considera numai ecuații de forma $F(x, y) = 0$, în care x este o variabilă reală sau vectorială.

Dacă există o *singură* funcție $f(x)$ definită pe o mulțime A care să verifice ecuația $F(x,y) = 0$ și, eventual, și alte condiții suplimentare, spunem că funcția $f(x)$ este definită de ecuația $F(x, y) = 0$.

Se spune de asemenea că rezolvînd ecuația $F(x, y) = 0$ în raport cu y, se obține funcția $y = f(x)$.

Funcțiile definite cu ajutorul ecuațiilor se numesc funcții definite implicit sau, mai simplu, *funcții implicite*.

În acest paragraf vom enunța cîteva propoziții care dau condiții suficiente de existență a funcțiilor implicite. După cum aceste condiții sînt mai mult sau mai puțin restrictive, rezultă pentru funcția implicită proprietăți mai multe sau mai puține.

Propoziția 1. Fie $A \subset R^n$, $n \geqslant 1$, x_0 un punct interior al lui A, $B \subset R$ iș y_0 un punct interior al lui B; fie funcția reală $F(x, y)$ definită pe $A \times B$.
Dacă:

1) $F(x_0, y_0) = 0$,

și dacă există o vecinătate $U \subset A_a$ lui x_0 și o vecinătate $V \supseteq B$ a lui y_0 astfel încît:

2) pentru orice punct $x \in U$ fixat, funcția $y \to F(x, y)$ (de variabilă reală y) este continuă și strict monotonă pe V;

3) pentru orice punct $y \in V$ fixat, funcția $x \to F(x, y)$ (de variabilă vectorială x) este continuă în x_0;

atunci:

a) există o vecinătate U_0 a lui x_0 și o vecinătate V_0 a lui y_0, astfel ca pentru orice punct $x \in U_0$ fixat, ecuația în y, $F(x, y) = 0$ să aibă o singură soluție în V_0, $y = f(x)$:

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in U_0,$$

b) funcția implicită $f(x): U_0 \to V_0$ definită de ecuația $F(x, y) = 0$ verifică egalitatea $f(x_0) = y_0$ și este continuă în x_0.

Alegem α, $\beta \in V$, astfel ca $\alpha < y_0 < \beta$, şi notăm $V_0 = (\alpha, \beta)$. Conform ipotezei 2, pentru $x = x_0$, funcţia $y \to F(x_0, y)$ (de variabilă reală y) este strict monotonă pe $[\alpha, \beta]$; deoarece $F(x_0, y_0) = 0$, iar $\alpha < y_0 < \beta$, rezultă că funcţia $F(x_0, y)$ are semne diferite în α şi β. Pentru a face o alegere, să presupunem că

$$F(x_0, \alpha) < 0, \quad F(x_0, \beta) > 0.$$

Conform ipotezei 3, funcţia $x \to F(x, \alpha)$ (de variabilă vectorială x) este continuă în x_0; deoarece $F(x_0, \alpha) < 0$, există o vecinătate $U' \subset U$ a lui x_0 astfel ca

$$F(x, \alpha) < 0$$

pentru orice $x \in U'$.

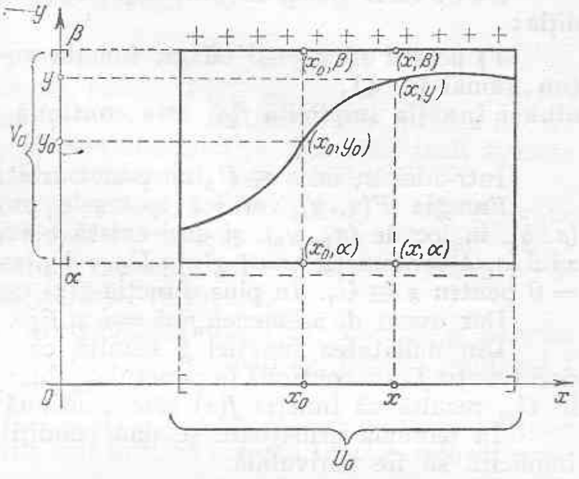


Fig. 159

De asemenea, conform ipotezei 3, funcţia $x \to F(x, \beta)$ este continuă în x_0; deoarece $F(x_0, \beta) > 0$, există o vecinătate $U'' \subset U$ a lui x_0, astfel ca $F(x, \beta) > 0$ pentru orice $x \in U''$.

Dacă luăm $U_0 = U' \cap U''$, U_0 este o vecinătate a lui x_0 şi

$$F(x, \alpha) < 0, \; F(x, \beta) > 0 \text{ pentru orice } x \in U_0.$$

Fie acum $x' \in U_0$ arbitrar. Conform ipotezei 2, funcţia $y \to F(x', y)$, de variabilă y, este continuă şi strict monotonă pe $[\alpha, \beta]$. Deoarece este continuă, are proprietatea lui Darboux. Din inegalităţile

$$F(x', \alpha) < 0, \; F(x', \beta) > 0$$

rezultă că există un punct y', astfel ca $\alpha < y' < \beta$ şi $F(x', y') = 0$. Deoarece funcţia $y \to F(x', y)$ este strict monotonă, există un singur punct $y' \in (\alpha, \beta)$ care verifică egalitatea $F(x', y') = 0$.

Deoarece $x' \in U_0$ a fost ales arbitrar, rezultă că, pentru orice punct $x \in U_0$ fixat, există un singur punct $y = f(x) \in V_0$ astfel ca $F(x, y) = 0$, şi astfel punctul *a*) este demonstrat.

Pentru $x = x_0$, avem $F(x_0, y_0) = 0$ şi cum y_0 este singurul punct din V_0 cu această proprietate, deducem că $f(x_0) = y_0$.

Rămîne de demonstrat continuitatea lui $f(x)$ în x_0. Să observăm că vecinătatea V_0 a lui y_0 a fost aleasă arbitrar. Din demonstraţia punctului *a*) rezultă deci că pentru orice vecinătate V a lui $y_0 = f(x_0)$ există o vecinătate U a lui x_0, astfel ca pentru orice $x \in U$ să avem $f(x) \in V$. Aceasta înseamnă că funcţia $f(x)$ este continuă în x_0 şi astfel propoziţia este demonstrată.

În ceea ce priveşte continuitatea funcţiei implicite, se pot face unele precizări.

C o r o l a r. **Dacă, în propoziţia 1, ipoteza 3 se înlocuieşte prin condiţia:**

3′) pentru orice $y \in V$ fixat, funcţia $x \to F(x, y)$ este continuă pe U (nu numai în x_0),
atunci funcţia implicită $f(x)$ este continuă pe U_0 (nu numai în x_0).

Într-adevăr, fie $a \in U_0$ un punct arbitrar; să notăm $b = f(a) \in V_0$. Funcţia $F(x, y)$ verifică ipotezele propoziţiei 1 relativ la punctul (a, b), în loc de (x_0, y_0), şi deci există o vecinătate $U_1 \times V_1 \subset U_0 \times V_0$ a lui (a, b) şi o funcţie *unică* $g(x): U_1 \to V_1$, astfel ca $g(a) = b$ şi $F(x, g(x)) = 0$ pentru $x \in U_1$. În plus, funcţia $g(x)$ este *continuă* în a.
Dar avem de asemenea $f(a) = b$ şi $F(x, f(x)) = 0$ pentru $x \in U_1 \subset U_0$.
Din unicitatea funcţiei g rezultă că $g(x) = f(x)$ pentru $x \in U_1$, şi deci funcţia f este continuă în punctul a. Cum punctul a a fost ales arbitrar în U_0, rezultă că funcţia $f(x)$ este continuă în orice punct $x \in U_0$.
În teorema următoare se dau condiţii suficiente pentru ca funcţia implicită să fie derivabilă.

T e o r e m a 1. **Fie** $A \subset R^n$, $n \geqslant 1$, $B \subset R$, $x_0 \in \mathrm{Int}\, A$, $y_0 \in \mathrm{Int}\, B$; **fie funcţia reală** $F(x, y)$ **definită pe** $A \times B$. **Dacă:**

1) $F(x_0, y_0) = 0$;

2) funcţia $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = F(x, y)$ **are derivate parţiale** $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \ldots, F'_{x_n}, F'_y$ **continue pe o vecinătate** $U \times V$ **a lui** (x_0, y_0);

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$;
atunci:

a) există o vecinătate U_0 **a lui** x_0 **şi o vecinătate** V_0 **a lui** y_0 **şi o funcţie unică** $y = f(x)$: $U_0 \to V_0$, **astfel ca**

$$f(x_0) = y_0 \text{ şi } F(x, f(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in U_0;$$

b) funcţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x)$ **are derivate parţiale** $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_n}$ **continue pe** U_0, **şi pentru fiecare** i **avem**

$$f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \quad x \in U_0;$$

c) dacă F **are derivate parţiale de ordinul** k **continue pe** $U \times V$, **atunci funcţia implicită** f **are derivate parţiale de ordinul** k **continue pe** U_0.

Să arătăm mai întîi că funcţia $F(x, y)$ verifică ipotezele propoziţiei precedente.

Deoarece F'_y este continuă şi diferită de 0 în (x_0, y_0), ea este diferită de 0 pe o întreagă vecinătate a lui (x_0, y_0). Putem presupune că această vecinătate este $U \times V$:

$$F'_y(x, y) \neq 0 \text{ pentru } x \in U \text{ şi } y \in V.$$

Ipoteza 1 este aceeaşi în propoziţie ca şi în teoremă.

Conform ipotezei 2 a teoremei, funcţia $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_n) = F(x, y)$ este diferenţiabilă, deci continuă, pe $U \times V$. În particular, pentru fiecare $y \in V$ fixat, funcţia $x \to F(x, y)$ este continuă pe U, astfel încît ipoteza 3 a propoziţiei (şi chiar ipoteza 3′ a corolarului) este verificată.

Deoarece pentru $x \in U$ fixat, funcţia $y \to F(x, y)$ are derivata $F'(x, y) \neq 0$ pentru $y \in V$, rezultă că funcţia $y \to F(x, y)$ este strict monotonă pe V; fiind derivabilă, această funcţie este continuă pe V şi astfel şi ipoteza 2 a propoziţiei este verificată.

Rezultă atunci punctul a din concluzia propoziţiei, care este şi punctul a din concluzia teoremei. În plus, conform corolarului, funcţia implicită f este continuă pe întreaga vecinătate U_0.

Să arătăm că funcţia $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are derivate parţiale continue pe U_0. Vom demonstra mai întîi că această funcţie este diferenţiabilă pe U_0.

Fie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punct arbitrar din U_0 şi $b = f(a) \in V_0$. Deoarece funcţia $F(x, y) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ este diferenţiabilă pe $U \times V$, ea este diferenţiabilă în punctul $(a, b) \in U \times V$, deci, pentru orice punct $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$ şi orice $y \in V$ putem scrie egalitatea

$$F(x, y) - F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [F'_{x_i}(a, b) + \omega_i(x, y)](x_i - a_i) +$$

$$+ [F'_y(a, b) + \omega(x, y)](y - b),$$

unde:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$$

În particular, luînd $x \in U_0$ şi y de forma $y = f(x) \in V_0$, avem $F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$; de asemenea, $F(a, b) = F(a, f(a)) = 0$. Atunci egalitatea precedentă devine

$$\sum_{i=1}^{n} [F'_{x_i}(a,b) + \omega_i(x, f(x))](x_i - a_i) + [F'_y(a, b) + \omega(x, f(x))]\ (f(x) - f(a)) = 0.$$

Deoarece funcția $f(x)$ este continuă în punctul a, iar funcțiile $\omega_i(x, y)$ și $\omega(x,y)$ sînt continue în punctul corespunzător $(a, f(a)) = (a, b)$, rezultă că funcțiile compuse $\omega_i(x, f(x))$ și $\omega(x, f(x))$ sînt continue în punctul a și

$$\lim_{x\to a} \omega_i(x, f(x)) = \omega_i(a, f(a)) = \omega_i(a, b) = 0;$$

$$\lim_{x\to a} \omega(x, f(x)) = \omega(a, f(a)) = \omega(a, b) = 0.$$

Deoarece $\lim_{x\to a}[F'_y(a, b) + \omega(x, f(x))] = F'_y(a,b) \neq 0$, există o vecinătate U_1 a lui a astfel ca pentru $x \in U_1$ să avem:

$$F'_y(a, b) + \omega(x, f(x)) \neq 0.$$

Din egalitatea de mai sus, obținem atunci, pentru $x \in U_1$,

$$f(x) - f(a) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{F'_{x_i}(a, b) + \omega_i(x, f(x))}{F'_y(a, b) + \omega(x, f(x))}(x_i - a_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{F'_{x_i}(a, b)}{F'_y(a, b)} + \Omega_i(x)\right](x_i - a_i),$$

unde am notat $\Omega_i(x) = \dfrac{F'_{x_i}(a, b) + \omega_i(x, f(x))}{F'_y(a, b) + \omega_i(x, f(x))} - \dfrac{F'_{x_i}(a, b)}{F'_y(a, b)}$.

Deoarece $\lim_{x\to a} \Omega_i(x) = 0$, rezultă că funcția $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este diferențiabilă în punctul a, iar derivatele sale parțiale în punctul a sînt date de egalitățile

$$f'_{x_i}(a) = -\frac{F'_{x_i}(a, b)}{F'_y(a, b)} = -\frac{F'_{x_i}(a, f(a))}{F'_y(a, f(a))}.$$

Deoarece punctul a a fost ales arbitrar în U_0, rezultă că funcția f este diferențiabilă în orice punct $x \in U_0$, iar derivatele sale parțiale în x sînt:

$$f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Dar funcțiile F'_{x_i} și F'_y sînt continue prin ipoteză pe $U \times V$, iar funcția f este continuă pe U_0. Rezultă că funcțiile compuse $F'_{x_i}(x, f(x))$ și $F'_y(x, f(x))$ sînt continue pe U_0 și deci și derivata $f'_{x_i} = -\dfrac{F'_{x_i}}{F'_y}$ este continuă pe U_0.

Demonstrația punctului *c*) se face prin inducție completă. Pentru $k = 1$, afirmația a fost deja demonstrată la punctul *b*). Să o presupunem adevărată pentru $k = p$ și s-o demonstrăm pentru $k = p + 1$.

Să presupunem deci că funcția $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = F(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul $p + 1$, continue pe $U \times V$. Atunci ea are derivate parțiale de ordinul p, continue pe $U \times V$ și deci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are derivate parțiale de ordinul p, continue pe U_0.

Pe de altă parte, funcţiile $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \dots, F'_{x_n}, F'_y$ au derivate parţiale de ordinul p, continue pe $U \times V$. Atunci funcţiile compuse

$$F'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)), \dots F'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$
$$F'_y(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

au derivate parţiale de ordinul p continue pe U_0, şi deci, pentru fiecare $i = 1, 2, \dots, n$, funcţia

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))}{F'_y(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))}$$

are derivate parţiale de ordinul p continue pe U_0. Aceasta înseamnă că funcţia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ are derivate parţiale de ordinul $p+1$ continue pe U_0.

Prin inducţie completă, rezultă deci că punctul c) este adevărat pentru orice k.

Teorema este astfel complet demonstrată.

O b s e r v a ţ i e. Dacă se modifică ipotezele teoremei, rezultă şi concluzii diferite. Se pot obţine astfel mai multe teoreme de existenţă a funcţiilor implicite.

Din teorema de existenţă a funcţiilor implicite se poate deduce o teoremă de existenţă a funcţiilor reciproce.

P r o p o z i ţ i e. Fie I şi J două intervale, $(x_0, y_0) \in \text{Int}\, I \times J$ şi funcţia $f(x): I \to J$. Dacă:

1) $f(x_0) = y_0$; 2) $f'(x)$ există într-o vecinătate U a lui x_0; 3) $f'(x_0) \neq 0$; atunci: a) există o vecinătate $U_0 \times V_0$ a lui (x_0, y_0) şi o funcţie $\varphi(y): V_0 \to U_0$ astfel ca $\varphi(y_0) = x_0$ şi $f(\varphi(y)) \equiv y$ pentru $y \in V_0$;

b) funcţia $\varphi(y)$ are derivata continuă pe V_0 şi $\varphi'(y) = -\dfrac{1}{f'(\varphi(y))}$.

Într-adevăr, să considerăm funcţia $F(x, y) = f(x) - y$ definită pe $I \times J$. Avem $F'_x(x, y) \equiv f'(x)$ şi $F'_y(x, y) \equiv -1$.

Ipotezele teoremei precedente sînt verificate, şi astfel rezultă concluzia acestei propoziţii.

2. Sisteme de funcţii implicite

Să considerăm sistemul de ecuaţii

$$(1) \quad \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

unde $F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ sînt n funcţii reale de $m+n$ variabile, definite pe o mulţime $E \subset R^{m+n}$.

Spunem că un sistem de n funcţii reale

$$(2)\quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, \ldots, x_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases}$$

de m variabile, definite pe o mulţime $A \subset R^m$, este o soluţie a sistemului de ecuaţii (1), în raport cu variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$, pe mulţimea A, dacă avem

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_m; f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) \equiv 0 \\ &F_2(x_1, \ldots, x_m; f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) \equiv 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_n(x_1, \ldots, x_m; f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) \equiv 0 \end{aligned}$$

pentru $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in A$.

În cazul cînd sistemul (1) are pe mulţimea A o *singură* soluţie (2), spunem că funcţiile $f_1, \ldots f_n$ sînt definite implicit de sistemul de ecuaţii (1), sau că sînt funcţii implicite. Se spune de asemenea că sistemul de funcţii (2) s-a obţinut din sistemul de ecuaţii (1), prin rezolvare în raport cu variabilele $y_1, \ldots, y_n$.

După cum la funcţiile implicite de una sau mai multe variabile au jucat un rol important derivatele parţiale, pentru sistemele de funcţii, un rol analog va avea un anumit determinant de derivate parţiale.

Să presupunem că funcţiile $F_1, F_2, \ldots, F_n$ au derivate parţiale în raport cu variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pe mulţimea E. Determinantul de funcţii

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

se numeşte *determinantul funcţional* al funcţiilor $F_1, F_2, \ldots, F_n$ în raport cu variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ şi se notează

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

Determinantul funcţional se mai numeşte *iacobian* (de la numele matematicianului Jacobi) şi se mai notează cu litera J. În cazul unei singure funcţii F avem

$$\frac{D(F)}{D(y)} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Pentru simplificarea scrisului, vom nota, ca de obicei, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Dacă notăm $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, atunci F este o *funcţie vectorială* **definită** pe E cu valori în R^n, iar sistemul (1) se scrie atunci, simplu,

$$(1') \qquad F(x, y) = 0.$$

De asemenea, dacă notăm $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, atunci f este o *funcţie vectorială* definită pe $A \subset R^m$, cu valori în R^n, iar sistemul (2) se scrie, simplu,

$$(2') \qquad y = f(x).$$

A spune că sistemul (2) este o soluţie a sistemului (1) revine la a spune că funcţia vectorială (2′) este o soluţie a ecuaţiei vectoriale (1′), adică

$$F(x, f(x)) = 0 \text{ pentru } x \in A.$$

În acest fel, un sistem de n funcţii implicite *reale*, definite de un sistem de n ecuaţii, este echivalent cu o singură funcţie implicită *vectorială*, definită de o ecuaţie vectorială. În acest caz, iacobianul se notează $\frac{D(F)}{D(y)}$.

Teorema 2. Fie $E \subset R^{m+n}$ **şi** $(x_0, y_0) = (\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots, \overset{0}{x_m}; \overset{0}{y_1}, \ldots, \overset{0}{y_n}) \in \operatorname{Int} E$; **fie funcţia vectorială** $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n): E \to R^n$.

Dacă:

1) $F(x_0, y_0) = 0$;

2) **funcţiile reale** $F_i (1 \leq i \leq n)$ **au derivate parţiale continue** $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}, (1 \leq j \leq m), \frac{\partial F_i}{\partial y_k}, (1 \leq k \leq n)$ **într-o vecinătate** $U \times V$ **a punctului** (x_0, y_0);

3) **iacobianul** $\frac{D(F)}{D(y)} = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$ **este** $\neq 0$ **în punctul** (x_0, y_0);

atunci:

a) **există o vecinătate** $U_0 \times V_0$ **a lui** (x_0, y_0), $(U_0 \subset R^m, V_0 \subset R^n)$, **şi o funcţie vectorială unică** $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)): U_0 \to V_0$, **astfel ca** $y_0 = f(x_0)$ **şi** $F(x, f(x)) = 0$ **pentru orice** $x \in U_0$;

b) **funcţiile reale** $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ **au derivate parţiale continue pe** U_0 **şi**

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_i, y_2, \ldots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_i)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}};$$

c) **dacă funcţiile** $F_1, F_2, \ldots, F_n$ **au derivate parţiale de ordinul** k **continue pe** $U \times V$, **atunci funcţiile** $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ **au derivate parţiale de ordinul** k **continue pe** U_0.

Demonstraţia se face prin inducţie completă asupra lui n.

Pentru $n = 1$ (un sistem format dintr-o singură ecuaţie, care defineşte o singură funcţie reală implicită), teorema a fost deja demonstrată (teorema 1).

Să presupunem teorema adevărată pentru un sistem de $n - 1$ funcţii implicite, definite de un sistem de $n - 1$ ecuaţii, şi s-o demonstrăm pentru un sistem de n funcţii implicite definite de un sistem de n ecuaţii.

Să presupunem deci condiţiile 1, 2, şi 3 din enunţul teoremei.

Deoarece iacobianul $\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}$ este $\neq 0$ în punctul $(x_0, y_0) = (x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, rezultă că cel puţin un determinant minor (de ordinul $n - 1$) este $\neq 0$ în acest punct. (Dacă toţi determinanţii minori ar fi nuli, dezvoltînd iacobianul după elementele unei linii, ar rezulta că iacobianul este nul în (x_0, y_0)).

Pentru a face o alegere, să presupunem că determinantul minor $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}$ este $\neq 0$ în punctul (x_0, y_0). —

Rezultă atunci că sistemul de $n - 1$ ecuaţii

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0 \\ F_2(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0 \end{cases}$$

îndeplineşte condiţiile 1, 2, 3 din enunţul teoremei şi deci, conform presupunerii, poate fi rezolvat în raport cu $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, în jurul punctului $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0, y_n^0)$: există o vecinătate U' a lui $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$, o vecinătate $V' = V_1' \times V_2' \times \ldots \times V_{n-1}' \times V_n'$ a punctului $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{n-1}^0, y_n^0)$ şi $n - 1$ funcţii

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x, y_n) : U' \times V_n' \to V_1' \\ y_2 = h_2(x, y_n) : U' \times V_n' \to V_2' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = h_{n-1}(x, y_n) : U' \times V_n' \to V_{n-1}' \end{cases}$$

astfel încît

$$y_1^0 = h_1(x_0, y_n^0),\ y_2^0 = h_2(x_0, y_n^0), \ldots, y_{n-1}^0 = h_{n-1}(x_0, y_n^0).$$

Pentru $(x, y_n) \in U' \times V_n'$ avem

$$\begin{aligned} &F_1(x, h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n)) \equiv 0 \\ &F_2(x, h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n)) \equiv 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_n(x, h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Funcţiile $h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n)$ au derivate parţiale continue pe $U' \times V'_n$.

Sistemul

$$(1) \quad \begin{cases} F_1(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ F_2(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{cases}$$

este echivalent, pentru $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in U' \times V'_1 \times V'_2 \times \ldots \times V'_n$, cu sistemul

$$(1') \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x, y_n) \\ y_2 = h_2(x, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = h_{n-1}(x, y_n) \\ F_n(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0, \end{cases}$$

iar acesta este echivalent pe $U' \times V'_1 \times \ldots \times V'_n$ cu sistemul

$$(1'') \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = h_{n-1}(x, y_n) \\ F_n(x, h_1(x, y_n), h_2(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n), y_n) = 0, \end{cases}$$

care se obţin din sistemul (1') înlocuind în F_n pe $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ respectiv cu $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$.

Să notăm

$$\Phi(x, y_n) = F_n(x, h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n), y_n)$$

pentru $(x, y_n) \in U' \times V'_n$.

Funcţia $\Phi(x, y_n)$ verifică ipotezele teoremei 1, pentru a putea fi rezolvată în raport cu y_n în jurul punctului (x_0, y_n^0). Într-adevăr,

1) $\Phi(x_0, y_n^0) = F_n(x_0, h_1(x_0, y_n^0), \ldots, h_{n-1}(x_0, y_n^0), y_n^0) =$

$$= F_n(x_0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0, y_n^0) = 0.$$

2) Funcţia $\Phi(x, y_n)$ are derivate parţiale continue în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_m$ şi y_n pe mulţimea $U' \times V'_n$, deoarece funcţiile $h_i(x, y_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, au derivate parţiale continue pe $U' \times V'_n$, iar funcţia $F_n(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ are derivate parţiale continue pe $U' \times V'_1 \times \ldots \times V'_{n-1} \times V'_n$.

3) $$\Phi'_{y_n}(x_0, y_n^0) \neq 0.$$

Într-adevăr:

$$\Phi'_{y_n} = \frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{\partial h_1}{\partial y_n} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial h_{n-1}}{\partial y_n} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} =$$

$$= -\frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_n, y_2, \ldots, y_{n+1})}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}} - \ldots - \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-2}, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}} \neq 0.$$

Derivatele parţiale ale funcţiilor h_i sînt calculate în punctul (x_0, y_n^0), iar cele ale funcţiilor F_j în punctul corespunzător $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$.

Rezultă atunci că există o vecinătate $U_0 \times V_n^0$ a lui (x_0, y_n^0) şi o funcţie $y_n = f_n(x) : U_0 \to V_n^0$ astfel ca

$$y_n^0 = f_n(x_0) \text{ şi } \Phi(x, f_n(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in U_0,$$

adică

$$F_n(x, h_1(x, f_n(x)), \ldots, h_{n-1}(x, f_n(x)), f_n(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in U_0.$$

Funcţia $y_n = f_n(x)$ are derivate parţiale continue pe U_0.

Să notăm $V^0 = V'_1$, $V_2^0 = V'_2, \ldots, V_{n-1}^0 = V'_{n-1}$ şi $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 \times \times \ldots \times V_n^0$. Sistemul (1″) este echivalent pe mulţimea $U_0 \times V_0$ cu sistemul

$$(1''')\quad \begin{cases} y_1 = h_1(x, y_n) \\ y_2 = h_2(x, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = h_{n-1}(x, y_n) \\ y_n = f_n(x). \end{cases}$$

Să înlocuim în primele $n - 1$ ecuaţii pe y_n cu f_n şi să notăm

$$f_1(x) = h_1(x, f_n(x)), \ldots, f_{n-1}(x) = h_{n-1}(x, f_n(x)).$$

Atunci sistemul (1‴) este echivalent pe $U_0 \times V_0$ cu sistemul

$$(2)\quad \begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = f_{n-1}(x) \\ y_n = f_n(x). \end{cases}$$

Sistemul (2) reprezintă soluția sistemului (1) pe mulțimea $U_0 \times V_0$. Avem evident

$$y_1^0 = f_1(x_0), \ldots, y_n^0 = f_n(x_0),$$

adică $y_0 = f(x_0)$.

Deoarece funcțiile $h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n)$ și $f_n(x)$ au derivate parțiale continue pe $U_0 \times V_n^0$, rezultă că funcțiile compuse

$$f_i(x) = h_i(x, f_n(x)),\ 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

au derivate parțiale continue pe U_0.

Dacă în identitățile (pentru $x \in U_0$)

$$\begin{cases} F_1(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \equiv 0 \\ F_2(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \equiv 0 \end{cases}$$

derivăm în raport cu x_i, obținem identitățile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} \equiv 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_n}\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} \equiv 0. \end{cases}$$

Din acest sistem de n ecuații se scot cele n derivate parțiale ale funcțiilor $f_1, \ldots, f_n$ în raport cu x_i, folosind regula lui Krammer:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_i, y_2, \ldots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_i)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}.$$

În acest fel punctele *a*) și *b*) ale teoremei au fost demonstrate.

Demonstrația punctului *c*) se face prin inducție completă asupra lui k. Pentru $k = 1$, punctul *c*) a fost demonstrat mai sus.

Să presupunem că afirmația este adevărată pentru $k = p$; din existența și continuitatea derivatelor parțiale ale funcțiilor $F_1, \ldots, F_n$, rezultă existența și continuitatea derivatelor parțiale de ordinul p ale funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Să arătăm atunci că afirmația rămîne adevărată pentru $k = p + 1$. Să presupunem deci că funcțiile $F_1, \ldots, F_n$ au derivate parțiale de ordinul $p + 1$ continue pe $U_0 \times V_0$; atunci aceste funcții au derivate parțiale de ordinul p continue pe această mulțime, și, conform presupunerii, rezultă că funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ au derivate parțiale de ordinul p continue pe U_0.

Dar

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} = - \frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_i, y_2, \ldots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}}$$

unde, în membrul drept s-au făcut înlocuirile $y_1 = f_1(x), \ldots, y_n = f_n(x)$.

Funcţiile care apar în membrul drept au derivate parţiale de ordinul p continue. Rezultă atunci că $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$ are derivate parţiale de ordinul p continue pe U_0, adică f_1 are derivate parţiale de ordinul $p+1$ continue pe U_0.

Pentru celelalte funcţii $f_2, \ldots, f_n$, demonstraţia se face la fel.

Rezultă deci, prin inducţie completă, că punctul c) este adevărat pentru orice k.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

3. Transformări regulate

Fie $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie vectorială definită pe o mulţime $E \subset R^n$, cu valori în R^n, şi fie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ componentele sale reale (definite tot pe E).

Definiţie. Spunem că funcţia vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots f_n)$ este o transformare regulată într-un punct interior $x_0 \in E$, dacă funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ au derivate parţiale continue într-o vecinătate V a lui x_0, şi dacă iacobianul $\frac{D(f)}{D(x)} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ este $\neq 0$ în punctul x_0.

Propoziţia 1. Dacă transformarea f este regulată în punctul interior $x_0 \in E$, atunci f este regulată într-o întreagă vecinătate a lui x_0.

Într-adevăr, iacobianul

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

este o funcţie continuă în punctul x_0 (deoarece derivatele parţiale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sînt continue într-o vecinătate V' a lui x_0, deci în x_0) şi este $\neq 0$ în acest punct, deci există o vecinătate V'' a lui x_0 pe care iacobianul este $\neq 0$.

Atunci, în vecinătatea $V = V' \cap V''$ a lui x_0, derivatele parțiale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sînt continue și iacobianul este $\neq 0$, deci f este o transformare regulată pe V.

Observație. Propoziția 1 ne îndreptățește să vorbim de „transformarea regulată în *jurul* lui x_0" în loc de „transformare regulată în x_0".

Propoziția 2. Orice transformare regulată într-un punct este continuă în acel punct.

Într-adevăr, dacă $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ este o transformare regulată în x_0, atunci funcțiile reale $f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ au derivatele parțiale continue într-o vecinătate V a lui x_0, deci sînt diferențiabile și deci continue în această vecinătate. Rezultă atunci că funcția vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ este continuă în vecinătatea V a lui x_0; în particular este continuă în x_0.

Propoziția 3. Iacobianul unei transformări regulate pe un domeniu D păstrează același semn pe acest domeniu.

În adevăr, un domeniu D este o mulțime *conexă* și deschisă, iar iacobianul este o funcție *continuă* pe D. Dacă iacobianul ar lua două valori de semne diferite, ar trebui să existe un punct $x_0 \in D$ în care iacobianul să se anuleze, deci în care transformarea să nu fie regulată, ceea ce ar contrazice ipoteza că transformarea este regulată pe întreg domeniul D. Rezultă deci că iacobianul păstrează același semn (fără a se anula) pe D. ∎

Teoarema următoare generalizează teorema de derivabilitate a funcțiilor inverse de o variabilă reală.

Teoremă. Dacă $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ este o transformare regulată într-o vecinătate U a unui punct interior $x_0 \in E$, atunci:

1) există o vecinătate $U_0 \subset U$ a lui x_0 și o vecinătate V_0 a lui $y_0 = f(x_0)$, astfel încît restricția lui f la U_0 este o aplicație biunivocă a lui U_0 pe V_0;

2) aplicația reciprocă $\varphi : V_0 \to U_0$ a restricției lui f la U_0 este o transformare regulată în punctul y_0;

3) avem

$$\frac{D(\varphi(y_0))}{D(y)} = \frac{1}{\frac{D(f(x_0))}{D(x)}}.$$

Demonstrație. Să considerăm funcția vectorială

$$F(x, y) = f(x) - y$$

definită pentru $(x, y) \in E \times R^n$, cu valori în R^n. Pentru componentele reale $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ale lui F avem

$$F_i(x, y) = f_i(x) - y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vom arăta că funcţia vectorială $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ îndeplineşte condiţiile ca pentru ecuaţia $F(x, y) = 0$ (adică ecuaţia $f(x) = y$) să poată fi rezolvată în raport cu x.

Să observăm că (x_0, y_0) este *punct interior* al mulţimii $E \times R^n$, deoarece x_0 este punct interior al lui E, iar y_0 este punct interior al lui R^n.

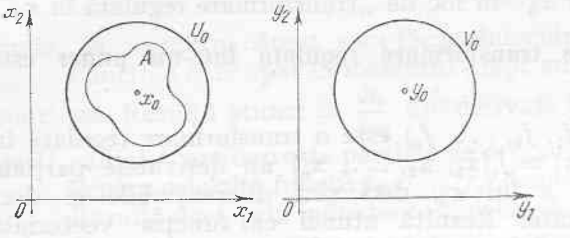


Fig. 160

1) $F(x_0, y_0) = f(x_0) - y_0 = 0$.

2) Funcţiile F_i au derivate parţiale $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, continue într-o vecinătate a lui (x_0, y_0).

Într-adevăr, deoarece f este regulată în vecinătatea U a lui x_0, există derivatele parţiale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ continue pe U, şi $\frac{D(f)}{D(x)} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0$ pe U.

Fie V o vecinătate oarecare a lui y_0. Atunci $U \times V$ este o vecinătate a lui (x_0, y_0), şi pentru $(x, y) \in U \times V$ avem $\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$, $\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial y_j} = -\delta_{ij}$, $(\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0$ pentru $i \neq j)$.

Derivatele $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ sînt constante, deci sînt continue; derivatele $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ sînt de asemenea continue, pe $U \times V$, deoarece pentru $(x, y) \in U \times V$ avem:

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ y' \to y}} \frac{\partial F_i(x', y')}{\partial x_j} = \lim_{x' \to x} \frac{\partial f_i(x')}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i(x, y)}{\partial x_j}.$$

3) $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0$ în punctul (x_0, y_0), deoarece

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$$

şi ultimul determinant este $\neq 0$ pentru $x \in U$ (şi y oarecare).

Conform teoremei relative la funcţiile vectoriale implicite, există o vecinătate $U' \times V_0 \subset U \times V$ a lui (x_0, y_0), astfel încît, pentru orice punct $y \in V_0$, există un punct *unic* $x = \varphi(y) \in U'$, astfel ca să avem $F(x, y) = 0$, adică $f(x) - y = 0$ sau $f(x) = y$. Aceasta înseamnă să fiecare punct $y \in V_0$ este imaginea $f(x)$ a unui singur punct $x \in U'$, deci y_0 este punct interior al mulţimii $f(U')$. Punctul 1 este astfel demonstrat.

De aici rezultă că f este biunivocă pe mulţimea $U_0 = \overset{-1}{f}(V_0) \subset U'$, deoarece dacă $x', x'' \in U_0$, atunci $f(x') \in V_0$ şi $f(x'') \in V_0$ şi din egalitatea $f(x') = f(x'') = y$ rezultă atunci, pe baza celor de mai sus, că există un *singur* $x \in U'$ astfel ca $f(x) = y$; atunci $x' = x$ şi $x'' = x$, deci $x' = x''$ şi deci f este biunivocă pe U_0.

Deoarece f este continuă în x_0, vecinătății U' a lui $y_0 = f(x_0)$ îi corespunde o vecinătate U'' a lui x_0, astfel ca $f(U'') \subset V_0$. Rezultă că $U'' \subset U_0$ și deci x_0 este punct interior al lui A. Cu aceasta punctul 1 este demonstrat.

Funcția $\varphi(y) : V_0 \to U_0$, care a rezultat mai sus (din teorema funcțiilor vectoriale implicite), are derivate parțiale continue pe V_0 și verifică egalitățile

$$\varphi(y_0) = x_0 \text{ și } F(\varphi(y), y) = 0 \text{ pentru } y \in V_0, \text{ adică :}$$

$$f(\varphi(y)) = y \text{ pentru } y \in V_0.$$

Rezultă că φ este inversa funcției biunivoce $f : U_0 \to V_0$.

Pentru a arăta că φ este o transformare regulată pe V_0 rămîne de arătat că determinantul său funcțional este $\neq 0$ pe V_0.

Pentru aceasta plecăm de la egalitatea vectorială

$$f(\varphi(y)) = y, \; y \in V_0$$

sau de la egalitățile scalare

$$f_i(\varphi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varphi_n(y_1, \ldots, y_n)) = y_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

pe care le derivăm în raport cu y_j, după regula de derivare a funcțiilor compuse :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_j} = \delta_{ij},$$

adică

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

De aici rezultă că produsul matricelor $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$ și $\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j}\right)$ este matricea unitate (δ_{ij}). Dar determinantul unui produs de matrice este egal cu produsul determinanților matricelor :

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right| \cdot \left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j}\right| = |\delta_{ij}| = 1.$$

Pe de altă parte, determinantul matricelor $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$ și $\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j}\right)$ sînt, respectiv, iacobienii $\frac{D(f)}{D(x)}$ și $\frac{D(\varphi)}{D(y)}$.

Așadar :

$$\frac{D(f)}{D(x)} \cdot \frac{D(\varphi)}{D(y)} = 1.$$

De aici rezultă că

$$\frac{D(\varphi)}{D(y)} \neq 0 \text{ pe } V_0,$$

deci φ este o transformare regulată pe V_0 şi că

$$\frac{D(\varphi)}{D(y)} = \frac{1}{\frac{D(f)}{D(x)}}.$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Corolar. Dacă f este o transformare regulată pe o mulţime deschisă $G \subset E$, atunci $f(G)$ este deschisă.

Într-adevăr, pentru orice punct $x \in G$, punctul $f(x)$ este punct interior al mulţimii valorilor $f(G)$, deci această mulţime este formată numai din puncte interioare, şi deci este deschisă.

Observaţie. Dacă f este regulată pe o mulţime deschisă $G \subset E$, nu rezultă că f este biunivocă pe G. Teorema afirmă, numai, că fiecare punct $x \in G$ are o vecinătate V_x pe care funcţia f este biunivocă. Se spune că funcţia f este *local biunivocă* pe o mulţime G, dacă fiecare punct din G are o vecinătate pe care f este biunivocă.

Aşadar, o transformare regulată este local biunivocă, dar nu neapărat biunivocă pe întreaga mulţime G.

Exemple. 1) Transformarea

$$x = \rho \cos \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi$$

definită pentru $\rho \in R$ şi $\varphi \in R$ are determinantul funcţional:

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho.$$

Transformarea este regulată în orice punct (ρ, φ) cu $\rho \neq 0$. Această transformare nu este însă biunivocă pe mulţimea $\{(\rho, \varphi) \mid \rho \neq 0\}$. Într-adevăr, două puncte diferite (ρ, φ) şi $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, $k \neq 0$ întreg, au aceeaşi imagine prin transformarea de mai sus.

În vecinătatea unui punct (ρ_0, φ_0), cu $\rho_0 \neq 0$, transformarea este biunivocă şi admite o transformare inversă.

Să calculăm derivatele lui ρ şi φ în raport cu x şi y fără a rezolva sistemul de mai sus în raport cu ρ şi φ.

Să derivăm în raport cu x cele două ecuaţii:

$$1 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

De aici:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}.$$

În mod analog, derivînd ecuaţiile de mai sus în raport cu y, obţinem:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

Fie E şi F două mulţimi din R^n. Pentru a simplifica expunerea vom presupune că E şi F sînt deschise, deci sînt formate numai din puncte interioare. Fie apoi funcţiile vectoriale $u(x) : E \to F$ şi $\varphi(u) : F \to R^n$, şi funcţia compusă $f(x) = \varphi(u(x)) : E \to R^n$.

Teoarema următoare generalizează teorema de derivare a funcţiilor compuse de o variabilă.

T e o r e m ă. Dacă $u(x)$ este o transformare regulată într-un punct $x_0 \in E$ iar $\varphi(u)$ este o transformare regulată în punctul corespunzător $u_0 = u(x_0) \in F$, atunci $f = \varphi \circ u$ este o transformare regulată în punctul x_0 şi

$$\frac{D(f)}{D(x)} = \frac{D(\varphi)}{D(u)} \cdot \frac{D(u)}{D(x)},$$

unde $\frac{D(f)}{D(x)}$ şi $\frac{D(u)}{D(x)}$ se calculează în punctul x_0, iar $\frac{D(\varphi)}{D(u)}$ se calculează în punctul $u_0 = u(x_0)$.

Deoarece $u(x)$ este o transformare regulată în x_0, există o vecinătate V a lui x_0, în care componentele reale $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ale lui u au derivate parţiale continue şi $\frac{D(u)}{D(x)} \neq 0$. Deoarece $\varphi(u)$ este o transformare regulată în punctul u_0, există o vecinătate U a lui u_0 în care componentele reale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ale lui φ au derivate parţiale continue şi $\frac{D(\varphi)}{D(u)} \neq 0$. Putem alege U şi V astfel ca $u(x) \in U$ pentru $x \in V$.

Rezultă atunci că funcţiile reale compuse

$$f_1(x) = \varphi_1(u(x)) = \varphi_1(u_1(x_1, \ldots, x_n), u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n))$$
$$f_2(x) = \varphi_2(u(x)) = \varphi_2(u_1(x_1, \ldots, x_n), u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n))$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x) = \varphi_n(u(x)) = \varphi_n(u_1(x_1, \ldots, x_n), u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n))$$

au derivate parţiale continue pe V. Dar $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt componentele reale ale funcţiei vectoriale compuse $f(x) = \varphi(u(x))$. Pentru a arăta că f este regulată în x_0, rămîne de arătat că $\frac{D(f)}{D(x)} \neq 0$ în x_0. Să derivăm funcţia $f_i(x)$ în raport cu x_j, ca pe o funcţie compusă, din egalitatea de mai sus

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_i(u(x))}{\partial u_1} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\varphi_i(u(x))}{\partial u_n} \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_j},$$

adică:

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(u(x))}{\partial u_k} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in V.$$

Aceste egalităţi implică următoarea egalitate de matrice:

$$\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial \varphi_i(u(x))}{\partial u_k}\right)\left(\frac{\partial u_k(x)}{\partial x_i}\right), \quad x \in V.$$

De aici rezultă o egalitate asemănătoare pentru determinanţii acestor matrice, care sînt determinanţi funcţionali:

$$\frac{D(f(x))}{D(x)} = \frac{D(\varphi(u(x)))}{D(u)} \cdot \frac{D(u(x))}{D(x)}, \quad x \in V.$$

Deoarece determinanţii din membrul drept sînt $\neq 0$ în punctul x_0, rezultă că $\frac{D(f)}{D(x)} \neq 0$ în x_0, deci f este o transformare regulată în x_0. Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

4. Dependenţă funcţională

Fie $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$, m funcţii *reale* definite pe o mulţime $E \subset R^n$.

Definiţie. Spunem că o funcţie reală $\varphi: E \to R$ depinde de funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ pe o mulţime $A \subset E$, dacă există o funcţie reală de m variabile $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ definită pe o mulţime $B \subset R^m$, astfel încît să avem

$$\varphi(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

pentru orice $x \in A$.

Observaţii. 1° Funcţia $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ poate fi constantă în raport cu unele variabile. În acest caz, φ depinde de funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$, dacă şi numai dacă depinde de o parte din aceste funcţii.

2° Dacă funcţia φ este constantă, ea depinde de orice sistem de funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Într-adevăr, luînd funcţia $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \text{constant}$, avem

$$\varphi(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = \text{const.}$$

Exemple. 1) Fie $f(x)$ o aplicaţie biunivocă a unui interval I pe un interval J, şi $\overset{-1}{f}: J \to I$ funcţia sa inversă. Avem: $\overset{-1}{f}(f(x)) = x$ pentru orice $x \in I$. Dacă $\varphi(x)$ este o funcţie reală definită pe I, avem

$$\varphi(x) = \varphi(\overset{-1}{f}(f(x))) = (\varphi \circ \overset{-1}{f})(f(x)), \quad x \in I.$$

Notînd $\Phi(y) = \varphi \circ \overset{-1}{f}(y)$, pentru $y \in J$, avem

$$\varphi(x) = \Phi(f(x)) \text{ pentru } x \in I.$$

Am demonstrat astfel că: orice funcţie $\varphi: I \to R$ depinde de orice funcţie biunivocă $f: I \to R$.

2) Fie funcţiile:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad g(x, y, z) = x + y + z, \quad h(x, y, z) = xy + yz + xz$$

pefinite pe R^3. Avem, pentru orice punct $(x, y, z) \in R^3$,

$$g^2(x, y, z) = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = f(x, y, z) + 2h(x, y, z).$$

De aici:

$$f = g^2 - 2h,$$

deci f depinde pe R^3 de funcţiile g şi h, şi

$$h = \frac{1}{2}(g^2 - f).$$

Să observăm că funcţia g nu depinde de funcţiile f şi h. Într-adevăr, pentru $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, avem: $f(1, 0, 0) = 1$, $g(1, 0, 0) = 1$, $h(1, 0, 0) = 0$; pentru $x = -1$, $y = 0$, $z = 0$, avem: $f(-1, 0, 0) = 1$, $g(-1, 0, 0) = -1$, $h(1, 0, 0) = 0$.

Oricare ar fi funcţia $\Phi(u, v)$, avem

$$\Phi(f(1, 0, 0), h(1, 0, 0)) = \Phi(1, 0) = \Phi(f(-1, 0, 0), h(-1, 0, 0))$$

şi deci nu putem avea

$$g(x, y, z) = \Phi(f(x, y, z), h(x, y, z))$$

pentru orice $(x, y, z) \in R^3$, deoarece $g(1, 0, 0) \neq g(-1, 0, 0)$.

3) Funcţia $f(x) = x^2$ depinde de funcţia $g(x) = x^3$, pe R, deoarece

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^3)^2} = \sqrt[3]{(g(x))^2}, \quad x \in R.$$

Funcţia g nu depinde însă de f pe mulţimea R.

Într-adevăr, $f(-1) = f(1) = 1$, în timp ce $g(-1) = -1$ şi $g(1) = 1$, deci, oricare ar fi funcţia $\Phi(y)$, avem

$$\Phi(f(-1)) = \Phi(1) = \Phi(f(1)),$$

în timp ce $g(-1) \neq g(1)$ şi deci nu putem avea

$$g(x) = \Phi(f(x))$$

pentru orice $x \in R$.

Să observăm însă că pentru $x \geqslant 0$ avem $x = \sqrt{x^2}$ şi deci

$$g(x) = x^3 = (\sqrt{x^2})^3 = (\sqrt{f(x)})^3,$$

adică funcţia g depinde de funcţia f pe semidreapta $(0, +\infty)$.

Definiţie. Spunem că funcţiile reale $f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)$, definite pe o mulţime $E \subset R^n$, sînt în dependenţă funcţională pe o mulţime $A \subset E$, dacă cel puţin una din ele depinde de celelalte pe mulţimea A.

Spunem că funcţiile reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt independente într-un punct interior $x_0 \in E$, dacă nici una din funcţii nu depinde de celelalte, în nici o vecinătate a lui x_0. Funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt independente pe o mulţime deschisă $G \subset E$, dacă sînt independente în orice punct $x \in G$.

Exemplu. Funcţiile $f(x) = x^2$ şi $g(x) = \begin{cases} -1, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$,

definite pe R, sînt independente în jurul originii.

Într-adevăr, oricare ar fi funcţia $\Phi(y)$, avem

$$\Phi(f(-x)) = \Phi(x^2) = \Phi(f(x)),$$

în timp ce pentru $x \neq 0$, avem $g(-x) \neq g(x)$. Aşadar, nu putem avea

$$g(x) = \Phi(f(x)) \text{ pentru } x \neq 0.$$

Aceasta înseamnă că g nu depinde de f în nici o vecinătate a originii.

De asemenea, oricare ar fi funcţia $\Phi(y)$, avem

$$\Phi(g(x)) = \begin{cases} \Phi(-1), & x \leqslant 0 \\ \Phi(1), & x > 0 \end{cases},$$

deci funcţia compusă $\Phi(g(x))$ ia numai două valori, în orice vecinătate a originii, în timp ce mulţimea valorilor funcţiei $f(x) = x^2$ este infinită, în orice vecinătate a originii. Aşadar, nu putem avea

$$f(x) = \Phi(g(x))$$

în nici o vecinătate a originii, deci f nu depinde de g în nici o vecinătate a originii.

Rezultă că f şi g sînt independente în jurul originii.

Propoziţie. Dacă funcţiile reale $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$, definite pe o mulţime $E \subset R^n$, sînt în dependenţă funcţională pe o mulţime $A \subset E$, atunci imaginea mulţimii A în spaţiul R^m prin funcţia vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ nu conţine nici un punct interior.

Demonstraţie. Mulţimea $B = f(A)$ este formată din toate punctele de forma $y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ cînd x parcurge mulţimea A. Deoarece funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt în dependenţă funcţională pe mulţimea A, una din aceste funcţii, de exemplu f_m, depinde de celelalte funcţii pe mulţimea A : există o funcţie reală

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$$

astfel ca

$$f_m(x) = \Phi(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \text{ pentru } x \in A.$$

Rezultă că orice punct $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m)$ din $B = f(A)$, trebuie să verifice egalitatea

$$y_m = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}),$$

deoarece există un punct $x \in A$ astfel ca $y = f(x)$, adică astfel ca

$$y_1 = f_1(x), \ldots, y_m = f_m(x).$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, avem $y_m + \varepsilon \neq y_m$, deci

$$y_m + \varepsilon \neq \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$$

şi deci punctul $(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m + \varepsilon)$ nu mai aparţine lui B.

Aceasta înseamnă că orice vecinătate V a punctului $y = (y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m) \in B$ conţine puncte de forma $(y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m + \varepsilon)$ dinafara lui B; rezultă că punctul $y = (y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m)$ nu este punct interior al lui B. Cum punctul y a fost ales arbitrar, deducem că B nu are nici un punct interior.

Teoremă. Fie funcţiile reale $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ definite pe o mulţime $E \subset R^n$. Dacă aceste funcţii au derivate parţiale într-o vecinătate a unui punct interior $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E$ şi dacă rangul matricei funcţionale $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, în punctul x_0, este egal cu numărul funcţiilor, atunci funcţiile sînt independente în punctul a.

Conform ipotezei, matricea funcţională

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

are în punctul x_0 rangul m. Aceasta înseamnă că cel puţin un determinant de ordinul m este $\neq 0$ în punctul x_0. Rezultă de aici că $m \leq n$.

Trebuie să arătăm că, în orice vecinătate V a punctului a, nici una din funcţii nu depinde de celelalte.

Să presupunem, prin absurd, că există o vecinătate V a lui a, astfel încît, una din funcţii, de exemplu f_m, depinde pe mulţimea V de celelalte funcţii. Conform propoziţiei precedente, imaginea mulţimii V, prin funcţia vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, nu conţine nici un punct interior în R^m.

În particular, punctul $b = f(a) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nu este punct interior al mulţimii $f(V)$. Pe de altă parte, să presupunem că determinantul funcţional de ordinul m

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

este $\neq 0$ în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)$. Fixînd $x_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, x_n = a_n$, funcţia vectorială de m variabile

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)$$

este o transformare regulată în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in E \cap R^m$. Atunci punctul $b = F(a_1, a_2, \ldots, a_m) = f(a_1, a_2, \ldots a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)$ este un punct interior al imaginii, prin funcţia F, a unei vecinătăţi U a punctului $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in E \cap R^m$ pe care o putem alege astfel ca $(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots, a_n) \in V$ pentru $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in U$. Rezultă atunci că $F(U) \subset f(V)$ şi deci b este punct interior şi al mulţimii $f(V)$. Am ajuns astfel la o contradicţie. Rezultă atunci că funcţiile $f_1, \ldots, f_m$ sînt independente în punctul x_0.

C o r o l a r. Dacă $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ este o transformare regulată într-un punct $a \in E$, atunci funcţiile reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt independente în punctul a.

Într-adevăr, $\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0$ în punctul a, deci rangul matricei funcţionale este egal cu numărul funcţiilor, şi deci funcţiile $f_1, \ldots, f_m$ sînt independente în punctul a.

Teoremă. Fie funcţiile reale $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ definite pe o mulţime $E \subset R^n$ şi un punct interior $a \in E$.

Dacă funcţiile f_i au derivate parţiale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ continue într-o vecinătate U a lui a şi dacă rangul matricei funcţionale $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ este egal cu $s \leq m$ pe vecinătatea U, atunci printre funcţiile $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ există s funcţii independente pe U, iar celelalte $m - s$ funcţii depind de acestea.

Demonstraţie. Deoarece rangul matricei funcţionale $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ este egal cu s pe mulţimea U, există un determinant de ordin s, care nu se anulează pe U. Pentru a face o alegere, să presupunem că:

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_s)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_s)} \neq 0 \text{ pe } U.$$

Conform teoremei precedente, funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_s$ sînt independente pe mulţimea U. Să considerăm sistemul

$$(1)\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_s) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) - y_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_s(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_s) = f_s(x_1, x_2, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) - y_s = 0 \end{cases}$$

unde funcţiile $F_1, \ldots, F_s$ sînt definite pe $E \times R^s$. Să notăm:

$$b_1 = f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$b_s = f_s(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_s)$$

şi să arătăm să sistemul (1) poate fi rezolvat în raport cu variabilele $x_1, \ldots, x_s$, în jurul punctului $(a, b) = (a_1, \ldots, a_s; a_{s+1}, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_s)$. Acesta este un punct interior al mulţimii $E \times R^s$, deoarece $(a_1, \ldots, a_n)$ este punct interior al lui E şi $(b_1, \ldots, b_s)$ este interior lui R_s. Avem apoi:

$$F_i(a_1, \ldots, a_s; a_{s+1}, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_s) = f_1(a_1, \ldots, a_s; a_{s+1}, \ldots, a_n) - b_s = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, s.$$

Funcţiile F_i au derivate parţiale $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ şi $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ continue într-o vecinătate a punctului (a, b), ceea ce rezultă din egalităţile:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \; i = 1, 2, \ldots, s, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j} = -\delta_{ij}, \; i, j = 1, 2, \ldots, s.$$

Atunci:

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)} = \frac{D(f_1, \ldots, f_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)} \neq 0$$

într-o vecinătate a punctului (a, b).

Conform teoremei relative la sistemele de funcţii implicite, există o vecinătate U^s a punctului $(a_1, \ldots, a_s)$ şi o vecinătate $U^{n-s} \times V^s$ a punctului $(a_{s+1}, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_s)$, astfel încît, pentru orice punct $(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_s) \in V^s \times U^{n-s}$, sistemul (1) are o soluţie şi *numai una* $(x_1, \ldots, x_s) \in U^s$:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s = \varphi_s(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Funcţiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ au derivate parţiale continue pe $V^s \times U^{n-s}$.

Să scriem că (2) este o soluţie a sistemului (1):

$$(3) \quad \begin{cases} f_1(\varphi_1(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_s(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n); x_{s+1}, \ldots, x_n) - y_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_s(\varphi_1(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_s(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots x_n); x_{s+1}, \ldots, x_n) - y_s = 0, \end{cases}$$

pentru $(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_s) \in V^s \times U^{n-s}$.

Avem de asemenea:

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(f_1(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n); x_{s+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s = \varphi_s(f_1(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n); x_{s+1}, \ldots, x_n) \end{cases}$$

pentru $(x_{s+1}, \ldots, x_n) \in U^{n-s}$ şi $(x_1, \ldots, x_s)$ într-o vecinătate U_0^s a punctului $(a_1, \ldots, a_s)$, aleasă astfel ca imaginea sa prin funcţia continuă $f = (f_1, \ldots, f_s)$ să fie conţinută în V^s.

Să presupunem că $s < m$; fie r un număr natural astfel ca $a < r < m$. Să arătăm că funcţia f_r depinde de funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_s$ pe o vecinătate a lui a. Pentru aceasta, să considerăm funcţia compusă

$$(5) \quad \begin{aligned} &F_r(y_1, y_2, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) = \\ &= f_r(\varphi_1(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_s(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n); x_{s+1}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Vom arăta că funcţia F_r este constantă în raport cu variabilele $x_{s+1}, \ldots, x_n$. Fie $s < k < n$. Să derivăm în raport cu variabila x_k, în egalităţile (2) şi (5):

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_s}\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s \\ \dfrac{\partial F_r}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \ldots + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_s}\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_k}. \end{cases}$$

Toate derivatele $\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}$ sînt calculate în punctul $(y_1, \ldots, y_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)$, iar derivatele $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_r}{\partial x_j}$, în punctul corespunzător $(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)$ unde $x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_s ; x_{s+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Pentru ca sistemul (6) de $s + 1$ ecuații cu s necunoscute $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial\varphi_s}{\partial x_k}$ să fie compatibil, trebuie ca determinantul sistemului să fie nul:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_s} & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \frac{\partial f_r}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_r}{\partial x_k} & \frac{\partial f_r}{\partial x_k} - \frac{\partial F_r}{\partial x_k} \end{vmatrix} = 0$$

sau:

$$\begin{vmatrix} \frac{D(f_1, \ldots, f_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)} & \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \ldots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \end{matrix} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_r}{\partial x_s} & \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \end{vmatrix} - \frac{D(f_1, \ldots, f_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)} \frac{\partial F_r}{\partial x_k} = 0.$$

Însă, prin ipoteză, primul determinant al acestei relații este nul pe U, iar $\frac{D(f_1, \ldots, f_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)} \neq 0$ pe U. Rezultă că:

$$\frac{\partial F_r(y_1, \ldots, y_s ; x_{s+1}, \ldots, x_n)}{\partial x_k} = 0,$$

deci F_r nu depinde de variabila x_k, cu $k > s$. Să notăm atunci

(7) $$\Phi_r(y_1, y_2, \ldots, y_s) = F_r(y_1, y_2, \ldots, y_s ; x_{s+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= f_r(\varphi_1(y_1, \ldots, y_s ; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_s(y_1, \ldots y_s ; x_{s+1}, \ldots, x_n) ; x_{s+1}, \ldots, x_n)$$

pentru $(y_1, y_2 \ldots, y_s) \in V^s$. Luînd acum $y_1, \ldots, y_s$ de forma

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_s ; x_{s+1}, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \ldots, x_s ; x_{s+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_s = f_s(x_1, \ldots, x_s ; x_{s+1}, \ldots, x_n) \end{cases}$$

pentru $(x_1, \ldots, x_s) \in U_0^s$ şi $(x_{s+1}, \ldots, x_n)$ oarecare în U^{n-s} şi înlocuind în $\Phi_s(y_1, y_2, \ldots, y_s)$, apoi ţinînd seama că în acest caz

$$\varphi_1(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) = x_1$$

$$\varphi_2(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) = x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_s(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) = x_n$$

şi făcînd aceste înlocuiri şi în al doilea membru al egalităţii (7), obţinem:

$$\Phi_r(f_1(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n)) =$$
$$= f_r(x_1, x_2, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \text{ pentru } (x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) \in U^s \times U^{n-s},$$

adică

$$f_r = \Phi_r(f_1, \ldots, f_s) \text{ pe } U_0^s \times U^{n-s}.$$

Aceasta înseamnă că f_r depinde de $f_1, \ldots, f_s$ pe o vecinătate a punctului $a = (a_1, \ldots, a_n)$ şi cu aceasta teorema este complet demonstrată.

C o r o l a r. Dacă numărul funcţiilor $f_1, \ldots, f_m$ este mai mare decît numărul variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, atunci funcţiile nu pot fi independente.

Într-adevăr, avem $n < m$, iar rangul matricei funcţionale poate fi cel mult n, deci mai mic decît numărul funcţiilor. Se aplică teorema precedentă.

Exemple. 1) Fie funcţiile $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$g(x, y, z) = x + y + z$$

$$h(x, y, z) = xy + yz + xz.$$

Matricea funcţională este:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y + z & x + z & x + y \end{pmatrix}.$$

Determinantul de ordinul 3 al acestei matrice este identic nul:

$$\frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)} \equiv 0,$$

deci rangul matricei este < 3. Rezultă că funcţiile f, g, h nu sînt independente.

Matricea formată cu derivatele primelor două funcţii este

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şi are rangul 2 în fiecare punct diferit de origine. Rezultă că cele două funcţii f şi g sînt independente în orice domeniu care nu conţine originea.

2) Să considerăm funcţiile liniare

$$f(x, y, z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$
$$g(x, y, z) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,$$
$$h(x, y, z) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Determinantul funcţional al acestor funcţii este

$$\frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Dacă determinantul este $\neq 0$, cele trei funcţii liniare **sînt independente**.

Dacă determinantul $= 0$ dar, de exemplu,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci funcţiile f şi g sînt independente, dar h depinde liniar de f şi g.

Dacă toţi minorii de ordinul doi sînt nuli, dar, de exemplu, $a_{11} \neq 0$, atunci funcţiile g şi h depind liniar de funcţia f.

5. Extreme condiţionate

Fie $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie reală definită pe o mulţime $E \subset R^n$ şi fie $A \subset E$.

Spunem că funcţia $f(x)$ are într-un punct $a \in A$ un *extrem relativ la mulţimea A*, dacă restricţia funcţiei $f(x)$ la mulţimea A are în punctul a un extrem obişnuit.

A spune că funcţia $f(x)$ are în punctul a un maxim (respectiv un minim) relativ la mulţimea A înseamnă că există o vecinătate V a lui a, astfel încît să avem

$$f(x) \geqslant f(a) \text{ respectiv } f(x) \leqslant f(a)$$

pentru orice punct $x \in V \cap A$.

Extremele funcţiei $f(x)$ relative la o submulţime $A \subset E$ se numesc *extreme condiţionate.*

Mai departe, vom considera un sistem de $k < n$ funcţii reale $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots, F_k(x)$ definite pe E, iar mulţimea A va fi definită ca mulţime a soluţiilor sistemului

$$(1) \quad \begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Aşadar, $A = \{x | x \in E,\ F_1(x) = 0,\ F_2(x) = 0, \ldots F_n(x) = 0\}$. În acest caz extremele funcţiei $f(x)$ relative la mulţimea A se mai numesc *extreme condiţionate de sistemul* (1). A considera restricţia funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la mulţimea A înseamnă a considera valorile funcţiei f numai pentru acele valori ale argumentelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care verifică sistemul (1). Aceasta se exprimă spunînd că cele n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt legate între ele prin cele k relaţii ale sistemului (1); extremele condiţionate ale funcţiei $f(x)$ se mai numesc, de aceea, *extreme cu legături*.

Teoarema următoare dă condiţii necesare de existenţă a punctelor de extrem condiţionat.

T e o r e m ă. Fie a un punct care verifică sistemul (1). Să presupunem că funcţia $f(x)$ şi funcţiile $F_1(x), \ldots, F_k(x)$ au derivate parţiale continue într-o vecinătate V a lui a şi că matricea funcţională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ are în punctul a rangul k (egal cu numărul relaţiilor sistemului (1)).

Dacă a este punctul extrem al funcţiei $f(x)$, condiţionat de sistemul (1), atunci există k numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ astfel încît să avem:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1(a)}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2(a)}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k(a)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1(a)}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2(a)}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k(a)}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1(a)}{\partial x_n} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2(a)}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k(a)}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Demonstraţie

Deoarece matricea funcţională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ are în punctul a rangul k, există un determinant funcţional de ordin k al acestei matrice, $\neq 0$ în punctul a. Pentru a face o alegere, să presupunem că

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_k)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_k)} \neq 0 \text{ în punctul } a.$$

Sistemul (1) se poate rezolva în raport cu variabilele $x_1, \ldots, x_k$ în jurul punctului $a = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. Într-adevăr, prin ipoteză avem $F_1(a) = 0$, $F_2(a) = 0, \ldots, F_n(a) = 0$; funcţiile $F_1, \ldots, F_k$ au derivate parţiale continue într-o vecinătate a lui a, iar iacobianul acestor funcţii în raport cu variabilele $x_1, \ldots, x_k$ este $\neq 0$ în punctul a. Conform teoremei relative la sistemele de funcţii implicite, există o vecinătate $V^k \subset A$ a punctului $(a_1, \ldots, a_k)$ în spaţiul R^k şi o vecinătate V^{n-k} a punctului $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$

în spaţiul R^{n-k}, astfel încît pentru orice punct $(x_{k+1}, \ldots, x_n) \in V^{n-k}$ sistemul (1) să aibă o soluţie *unică* $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ în V^k:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_{k+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Avem $a_1 = \varphi_1(a_{k+1}, \ldots, a_n)$, $a_2 = \varphi_2(a_{k+1}, \ldots, a_n)$, $\ldots$, $a_k = \varphi_k(a_{k+1}, \ldots, a_n)$.

Funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ au derivate parţiale continue pe mulţimea V^{n-k}. Să scriem că (3) este o soluţie a sistemului (1):

pentru orice punct $(x_{k+1}, \ldots, x_n) \in V^{n-k}$ avem

$$(4)\quad \begin{cases} F_1(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n)\ ; x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n)\ ; x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n)\ ; x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Diferenţialele acestor funcţii sînt nule pe V^{n-k}, în particular în punctul $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} d\varphi_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} d\varphi_2 + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} d\varphi_k + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} d\varphi_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} d\varphi_2 + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_k} d\varphi_k + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1} d\varphi_1 + \dfrac{\partial F_k}{\partial x_2} d\varphi_2 + \ldots + \dfrac{\partial F_k}{\partial x_k} d\varphi_k + \dfrac{\partial F_k}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \ldots + \dfrac{\partial F_k}{\partial x_n} dx_n = 0. \end{cases}$$

În (5), $d\varphi_1, \ldots, d\varphi_k$ reprezintă diferenţialele funcţiilor $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ calculate în punctul $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$, iar $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$ sînt variabile independente; derivatele funcţiilor $F_1, \ldots, F_k$ sînt calculate în punctul $(a_1, \ldots, a_n)$. Să considerăm acum funcţia compusă

$$(6)\quad F(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots x_n),$$

definită pentru $(x_{k+1}, \ldots, x_n) \in V^{n-k}$. Deoarece funcţia $f(x_1, \ldots, x_n)$ are în punctul $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un extrem, condiţionat de sistemul (1), funcţia $F(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ are un punctul $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ un extrem obişnuit.

Într-adevăr, $a_1 = \varphi_1(a_{k+1}, \ldots, a_n)$, $\ldots$, $a_k = \varphi_k(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ şi dacă, de exemplu, a este un punct de maxim condiţionat pentru $f(x)$, avem:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

pentru orice punct $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care verifică sistemul (1), dintr-o anumită vecinătate a lui $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Atunci, pentru $(x_{k+1}, \ldots, x_n) \in V^{n-k}$, luînd valorile $x_1, \ldots, x_k$ date de sistemul (3), punctul $(x_1, x_2, \ldots, x_k; x_{k+1}, \ldots, x_n)$ verifică sistemul (1) aşa cum rezultă din (4), iar inegalitatea precedentă se scrie, ţinînd seama de (6),

$$F(x_{k+1}, \ldots, x_n) \geqslant F(a_{k+1}, \ldots, a_n),$$

deci $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ este punct de maxim pentru funcţia F.

În acest caz diferenţiala acestei funcţii în punctul $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ este nulă:

$$(7)\quad dF = \frac{\partial f}{\partial x_1} d\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d\varphi_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k} d\varphi_k + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Şi aici, $d\varphi_1, \ldots, d\varphi_k$ sînt diferenţialele funcţiilor $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ în punctul $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$, iar $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$ sînt variabile indepedente; derivatele funcţiei f sînt calculate în punctul $(a_1, \ldots, a_n)$.

Ţinînd seama de ecuaţiile (5) şi (7), pentru orice sistem de numere $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ avem egalitatea:

$$(8)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right) d\varphi_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right) d\varphi_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right) d\varphi_k +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}}\right) dx_{k+1} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right) dx_n = 0.$$

Vom alege numerele $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ aşa fel încît coeficienţii diferenţialelor $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_k$ să se anuleze:

$$(2')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial x_2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_k} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial x_k} = 0 \end{cases}$$

derivatele fiind calculate în punctul $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Acest lucru este posibil, deoarece determinantul coeficienţilor lui $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ din sistemul (2') este

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_k)}{D(x_1, \ldots, x_k)},$$

calculat în punctul $(a_1, \ldots, a_n)$, iar acesta este $\neq 0$. Cu aceste valori obţinute pentru $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, egalitatea (8) se scrie (derivatele funcţiilor $f, F_1, \ldots, F_k$ fiind calculate în $a = (a_1, \ldots, a_n)$):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}}\right) dx_{k+1} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right) dx_n = 0.$$

Pentru ca această egalitate să aibă loc pentru orice valori ale variabilelor indepedente $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$ este necesar şi suficient să se anuleze coeficienţii acestor variabile:

$$(2'') \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial x_{k+1}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Egalităţile (2′) şi (2″) formează sistemul (2) de egalităţi ce trebuia demonstrat.

O b s e r v a ţ i e. Orice punct $a = (a_1, \ldots, a_n)$ care verifică sistemul (1), în care matricea funcţională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ are rangul k, şi care verifică şi sistemul (2) pentru anumite valori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, se numeşte punt *staţionar* al funcţiei $f(x)$, condiţionat de sistemul (1); coeficienţii $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k$ se numesc *multiplicatorii lui Lagrange*. Valorile $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ se schimbă o dată cu punctul staţionar a.

Teoarema de mai sus se poate enunţa astfel:

Orice punct de extrem condiţionat este punct staţionar condiţionat.

Afirmaţia reciprocă nu este, în general, adevărată: există puncte staţionare condiţionate în care funcţia nu are extreme condiţionate.

Să observăm că în sistemul (2) apar derivatele parţiale ale funcţiei

$$f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \ldots + \lambda_k F_k(x)$$

definită pentru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$.

Astfel, pentru o funcţie $f(x)$ cu derivatele parţiale continue pe o mulţime deschisă $E \subset R^n$, rezultă calea de urmat pentru aflarea punctelor staţionare condiţionate de sistemul (1) în care funcţiile $F_1(x), \ldots, F_k(x)$ au derivate parţiale continue pe E:

1) Se formează funcţia ajutătoare

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \ldots + \lambda_k F_k(x),$$

cu coeficienţii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ nedeterminaţi.

2) Se formează sistemul de $n + k$ ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial\Phi(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)}{\partial x_n} = 0 \\ F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

cu $n + k$ necunoscute, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, şi se caută soluţiile acestui sistem.

3) Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ este o soluţie a acestui sistem, atunci punctul $(x_1, \ldots, x_n)$ este punct staţionar condiţionat al funcţiei $f(x)$.

Printre punctele staţionare condiţionate astfel obţinute se află şi punctele de extrem condiţionat ale funcţiei $f(x)$.

Vom căuta acum condiţii suficiente care să ne permită să identificăm, dintre punctele staţionare, unele puncte de extrem condiţionat.

Fie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un *punct staţionar* al funcţiei $f(x)$ condiţionat de sistemul (1). Aceasta înseamnă pe de o parte că $F_1(a) = 0, \ldots, F_k(a) = 0$, iar pe de altă parte că există k numere $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ astfel ca să fie satisfăcut sistemul (2).

Vom presupune că funcţia $f(x)$ şi funcţiile $F_1(x), \ldots, F_k(x)$ *au derivate parţiale de ordinul doi, continue într-o vecinătate a punctului a.*

Pentru a vedea dacă a este sau nu punct de extrem condiţionat, va trebui să studiem semnul diferenţei

$$f(x) - f(a) = f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$$

pentru punctele $x = (x_1, \ldots, x_n)$ care verifică sistemul (1), deci pentru care $F_1(x) = 0, \ldots, F_k(x) = 0$. Să observăm că, pentru asemenea puncte x, avem $\Phi(x) = f(x)$ şi deci

$$f(x) - f(a) = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Aşadar, studiul semnului diferenţei $f(x) - f(a)$, pentru punctele x care verifică sistemul (1), se reduce la studiul diferenţei

$$\Phi(x) - \Phi(a)$$

pentru asemenea puncte x. Dar punctul a verifică sistemul (2); aceasta înseamnă că a este punct staţionar obişnuit pentru funcţia $\Phi(x)$, deci derivatele sale parţiale de ordinul întîi se anulează în a.

Pe de altă parte, funcţia $\Phi(x)$ are derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a lui a, deci putem scrie formula lui Taylor de ordinul doi:

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi(a)}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j + \frac{1}{2}\,\omega(x)\rho^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2\Phi + \frac{1}{2}\,\omega\rho^2,$$

unde:

$$\lim_{x\to a} \omega(a) = 0 \text{ şi } \rho = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2},$$

iar $\mathrm{d}x = x_i - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dacă diferenţiem relaţiile sistemului (1), obţinem k relaţii liniare în diferenţialele $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n = 0\\
&\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n = 0
\end{aligned}$$

derivatele parţiale fiind calculate în punctul a.

Deoarece matricea acestui sistem liniar este matricea funcţională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ care are rangul k, se pot exprima k diferenţiale în funcţie de celelalte $n - k$; introducînd aceste k diferenţiale în formula lui Taylor de mai sus, obţinem în membrul drept o formă pătratică $\Sigma A_{ij}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j$. După cum această formă pătratică este definită sau nu, diferenţa $\Phi(x) - \Phi(a) = f(x) - f(a)$ păstrează în jurul lui a acelaşi semn sau nu păstrează acelaşi semn, adică a este sau nu este punct de extrem condiţionat. În cazul cînd $\Sigma A_{ij}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j$ este definită pozitiv, avem un minim condiţionat, iar cînd este definită negativ, avem un maxim condiţionat.

Exemplu. Să se găsească extremele funcţiei

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz$$

condiţionate de ecuaţia $xyz = 1$, în domeniul $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Formăm funcţia

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z) = xy + xz + yz + \lambda xyz$$

şi apoi sistemul

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = y + z + \lambda yz = 0\\[2mm]
\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = x + z + \lambda xz = 0\\[2mm]
\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = x + y + \lambda xy = 0\\[2mm]
F(x, y, z) = xyz - 1 = 0.
\end{cases}$$

Acest sistem are soluţia:

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 1,\ \lambda = -2.$$

Funcţia ajutătoare este acum:

$$\Phi(x, y, z) = xy + xz + yz - 2xyz.$$

Pentru a vedea dacă punctul staţionar (1, 1, 1) este punct de extrem condiţionat, calculăm diferenţiala $d^2\Phi$, în punctul (1, 1, 1)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y + z - 2yz;\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = x + z - 2xz;\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = x + y - 2xy;$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0;\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = 1 - 2z;\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = 1 - 2y \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} = 1 - 2x.$$

În punctul (1, 1, 1) avem $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$ şi

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} = -1.$$

Diferenţiala a doua a lui Φ calculată în punctul (1, 1, 1) este

$$d^2\Phi = -(dx\,dy + dy\,dz + dx\,dz).$$

Să diferenţiem relaţia $xyz = 1$:

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0.$$

În punctul staţionar (1, 1, 1), această relaţie devine

$$dx + dy + dz = 0,$$

de unde $dz = -dx - dy$; înlocuind dz în $d^2\Phi$ obţinem

$$d^2\Phi = dx^2 + dx\,dy + dy^2.$$

Această formă pătratică este definită pozitiv, deci punctul (1, 1, 1) este un punct de minim condiţionat.

Capitolul IX

SERII DE NUMERE. ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

§ 1. Serii de numere

1. Definiţia seriilor convergente

Pînă acum ştim ce înseamnă suma unei mulţimi de numere, oricît de mare, dar finită. Nu ştim însă ce înseamnă suma unei mulţimi infinite de numere; de exemplu, nu ştim ce înseamnă suma

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

a unui şir de numere $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

În acest capitol, vom da un sens, în anumite cazuri, sumei unui şir de numere.

Convenim să numim *serie de numere* un şir de numere despărţite între ele prin semnul $+$:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Deocamdată, semnul $+$ nu are semnificaţia de adunare. Vom scrie, prescurtat, această serie*, astfel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ sau } \sum_{n \in N} u_n, \text{ sau } \sum_n u_n, \text{ sau încă } \sum u_n.$$

Numerele $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ se numesc termenii seriei.

Mulţimea indicilor poate parcurge o mulţime de numere întregi, diferită de cea a numerelor naturale. Putem astfel considera serii de forma:

$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ notate $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sau serii de forma:

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+p} + \ldots \text{ notate } \sum_{n=k+1} u_n \text{ sau } \sum_{n>k} u_k \text{ etc.}$$

---

* În acest capitol vor fi considerate numai serii de numere reale. Majoritatea rezultatelor rămîn adevărate pentru serii de numere complexe sau pentru serii de elemente dintr-un spaţiu Banach.

Să considerăm sumele următoare, formate cu termenii seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Am obţinut astfel un şir $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, numit şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Avem

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \text{ pentru orice } n \in N.$$

Să observăm că, reciproc, dîndu-se un şir (S_n), putem forma o serie $\sum_n u_n$ ale cărei sume parţiale să fie termenii şirului (S_n), luînd

$$u_1 = S_1$$
$$u_2 = S_2 - S_1$$
$$u_3 = S_3 - S_2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$u_n = S_n - S_{n-1}$$
$$\dots\dots\dots$$

În acest fel, o serie $\sum_n u_n$ este perfect determinată de şirul sumelor sale parţiale (S_n). De asemenea studiul seriei $\sum_n u_n$ se reduce la studiul şirului (S_n).

Se impune în primul rînd, următoarea

Definiţie. Vom spune că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, dacă şirul (S_n) al sumelor parţiale este convergent. Dacă S este limita şirului sumelor parţiale, vom spune că S este suma seriei şi vom scrie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Aşadar, $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$

Dacă şirul (S_n) al sumelor parţiale nu are limită sau dacă limita sa este $+\infty$ sau $-\infty$, vom spune că seria $\sum\limits_n u_n$ este *divergentă*.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, vom spune că suma seriei $\sum\limits_n u_n$ este $+\infty$ şi vom scrie $\sum\limits_n u_n = +\infty$; de asemenea, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ vom spune că seria $\sum\limits_n u_n$ are suma $-\infty$, şi vom scrie $\sum\limits_n u_n = -\infty$. Dacă însă şirul (S_n) nu are limită, nici finită nici infinită, nu vom da nici un sens operaţiei de adunare $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$
Vom spune în acest caz că seria $\sum\limits_n u_n$ este *oscilantă*.

Exemple. 1) *Seria geometrică.* Fie r un număr oarecare. Să considerăm seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$ Această serie se numeşte *seria geometrică*, cu raţia r. Să formăm sumele parţiale ale acestei serii, în cazul cînd $r \neq 1$:

$$S_1 = 1 = \frac{1-r}{1-r}$$

$$S_2 = 1 + r = \frac{1-r^2}{1-r}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n = 1 + r + \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Şirul (S_n) este deci diferenţa a două şiruri: şirul constant $\left(\frac{1}{1-r}\right)$ care are limita $\frac{1}{1-r}$, şi şirul $\left(\frac{r^n}{1-r}\right)$. Dacă $0<r<1$, atunci şirul (r^n) are limita 0, deci şi şirul $\left(\frac{r^n}{1-r}\right)$ are limita 0. Urmează că şirul (S_n) este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r} + \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$$

Dacă $r > 1$, şirul (r^n) are limita $+\infty$ şi cum $1 - r < 0$, rezultă că şirul $\left(\frac{r^n}{1-r}\right)$ are limita $-\infty$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r} = +\infty.$$

Dacă $r < -1$, şirul (r^n) este nemărginit şi nu are limită, deci nici şirul (S_n) nu are limită şi deci seria este divergentă şi nu are sumă.

În cazul cînd $r = 1$, avem $S_n = n$, deci $\lim S_n = +\infty$.

În cazul cînd $r = -1$, avem $S_n = 1 + (-1)^n$ deci seria este divergentă și nu are sumă.

Așadar: dacă $0 < |r| < 1$, seria este convergentă și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$;

dacă $|r| > 1$, seria este divergentă; dacă $r > 1$ avem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n = +\infty$.

2) Să considerăm seria $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ și să formăm șirul sumelor parțiale:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 - 1 = 0$$
$$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$
$$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{2n-1} = 1$$
$$S_{2n} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Așadar, șirul sumelor parțiale este 1, 0, 1, 0,..., 1, 0, ... care nu are limită. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nu este convergentă (este divergentă și nu are sumă, adică este oscilantă).

Deoarece studiul seriilor revine la studiul șirurilor sumelor parțiale, este de așteptat ca o serie întreagă de rezultate privind șirurile să se extindă a supra seriilor.

2. Influența unui număr finit de termeni asupra convergenței seriilor

Fie seria $\sum\limits_{n} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$

1) Dacă schimbăm ordinea unui număr finit de termeni, $u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots u_{n_p}$ ai seriei $\sum\limits_{n} u_n$, obținem o nouă serie.

Dacă notăm cu S_n sumele parțiale ale seriei $\sum\limits_{n} u_n$ și cu σ_n sumele parțiale ale seriei noi, pentru $n > \max(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ avem $S_n = \sigma_n$. Așadar:

Dacă seria $\sum\limits_{n} u_n$ este convergentă, seria obținută este convergentă și are aceea și sumă.

Dacă seria $\sum\limits_n u_n$ *este divergentă, seria obţinută este divergentă* (dacă $\sum\limits_n u_n$ are suma $+\infty$ sau $-\infty$, seria obţinută are de asemenea suma $+\infty$, respectiv $-\infty$).

Observaţie. Dacă schimbarea ordinii afectează o mulţime infinită de termeni ai seriei, afirmaţia de mai sus nu mai este în general adevărată, după cum va fi arătat mai departe.

2) *Dacă la o serie convergentă adăugăm sau înlăturăm un număr finit de termeni, seria obţinută este tot convergentă* (dar are altă sumă, în general).

Dacă la o serie divergentă adăugăm sau scădem un număr finit de termeni, seria obţinută este tot divergentă (dacă $\sum u_n$ are suma $+\infty$ sau $-\infty$, seria obţinută are tot suma $+\infty$ sau $-\infty$).

Într-adevăr, fie seria $\sum\limits_n u_n$. După 1, putem considera că termenii înlăturaţi sînt cei de la început, $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Seria obţinută are sumele parţiale

$$\sigma_n = S_{n+p} - S_p,$$

iar şirul (σ_n) este convergent dacă şi numai dacă şirul $(S_{n+p} - S_n)_{n\in N}$ este convergent, deci seria obţinută este convergentă dacă şi numai dacă seria $\sum\limits_n u_n$ este convergentă.

Dacă adăugăm un număr finit de termeni seriei $\sum\limits_n u_n$, obţinem o serie $\sum\limits_n v_n$. Atunci putem considera că seria $\sum\limits_n u_n$ se obţine prin înlăturarea unui număr finit de termeni din seria $\sum\limits_n v_n$, deci seria $\sum\limits_n v_n$ este convergentă dacă şi numai dacă seria $\sum\limits_n u_n$ este convergentă.

Observaţie. Deoarece termenii nuli nu au influenţă asupra comportării seriei, chiar dacă sînt în număr infinit, putem totdeauna să-i înlăturăm şi să considerăm că seria este formată numai din termeni diferiţi de zero.

3) Fie $\sum\limits_n u_n$ o serie, şi fie (S_n) şirul sumelor parţiale. Să aranjăm toţi termenii seriei în grupe, fiecare grupă fiind formată dintr-un număr finit de termeni consecutivi. Să efectuăm în fiecare grupă suma termenilor. Să considerăm apoi seria $\sum\limits_p v_p$ a acestor sume. Dacă notăm cu σ_p sumele parţiale ale acestei serii, atunci şirul (σ_p) este un subşir al şirului (S_n), cum se poate constata uşor. Deducem de aici:

Dacă seria $\sum\limits_n u_n$ *este convergentă, seria* $\sum\limits_p v_p$ *este convergentă şi are aceeaşi sumă.*

Dacă seria $\sum_n u_n$ *este divergentă dar are suma* $+\infty$ *sau* $-\infty$, *atunci seria* $\sum_p v_p$ *este divergentă şi are, respectiv, tot suma* $+\infty$ *sau* $-\infty$.

O b s e r v a ţ i e. Dacă seria $\sum_n u_n$ este divergentă dar nu are sumă, s-ar putea ca seria $\sum_p v_p$ să fie convergentă.

Exemplu. Fie seria $\sum u_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ Să considerăm seria $\sum v_p = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots$; această serie este convergentă şi are suma 0.

4) *Restul seriei.* Fie $\sum_n u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ o serie convergentă. Să considerăm seria $\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n = u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \ldots$, obţinută din prima serie prin înlăturarea primilor p termeni, $u_1 + u_2 + \ldots + u_p$. Această serie este de asemenea convergentă şi avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_p) + \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n.$$

Suma seriei $\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n$ se numeşte *restul de ordin* p al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Dacă notăm cu S suma seriei şi cu R_p restul de ordin p, egalitatea de mai sus se scrie $S = S_p + R_p$. De aici, $R_p = S - S_p$.

Cum şirul (S_p) este convergent către S, rezultă că:

Resturile unei serii convergente formează un şir convergent către 0.

3. Proprietăţi ale şirului termenilor şi ale sumelor parţiale

1) *Dacă seria* $\sum_n u_n$ *este convergentă, şirul sumelor parţiale este mărginit.*

Într-adevăr, şirul (S_n) al sumelor este convergent şi deci mărginit.

O b s e r v a ţ i e. Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată. O serie poate avea şirul sumelor parţiale mărginit, fără să fie convergentă.

Exemplu. Seria $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ este divergentă deşi şirul sumelor parţiale $1, 0, 1, 0, \ldots$ este mărginit.

În anumite condiţii, afirmaţia reciprocă este însă adevărată:

2) *Dacă seria* $\sum_n u_n$ *este formată din termeni pozitivi, iar şirul sumelor parţiale este mărginit, seria este convergentă.*

Într-adevăr, şirul (S_n) al sumelor parţiale este crescător, deoarece $u_{n+1} > 0$, deci $S_n < S_n + u_{n+1} = S_{n+1}$; fiind şi mărginit, şirul (S_n) este convergent, deci seria este convergentă.

O b s e r v a ţ i e. Dacă şirul sumelor parţiale este nemărginit, fiind crescător, are limita $+\infty$; deci seria este divergentă şi are suma $+\infty$.

3) *Dacă seria* $\sum_n u_n$ *este convergentă, şirul* (u_n) *al termenilor săi este convergent către* 0.

Fie (S_n) şirul sumelor parţiale. Prin ipoteză, (S_n) are o limită $S \in R$. Avem $u_n = S_n - S_{n-1}$. Aşadar, şirul (u_n) este diferenţa a două şiruri convergente (S_n) şi (S_{n-1}) care au aceaşi limită S. Rezultă că (u_n) este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Proprietatea 3) se poate enunţa în următoarea formulare echivalentă:

4) *Dacă şirul termenilor nu este convergent către zero, seria este divergentă.*

O b s e r v a ţ i e. Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată. O serie poate avea şirul termenilor convergent către 0, fără ca seria să fie convergentă.

Exemplu. Să considerăm *seria armonică*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Şirul termenilor $\left(\frac{1}{n}\right)$ este convergent către zero. Totuşi seria este divergentă. Într-adevăr, să aranjăm toţi termenii seriei în grupe finite de termeni astfel:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) +$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \dots$$

Să observăm că:

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} > \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\ \text{termeni}} > \frac{1}{2}.$$

Aşadar

$$S_{2^n} > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{n \text{ ori}} = \frac{n}{2}.$$

Cum şirul $\left(\frac{n}{2}\right)$ are limita $+\infty$, rezultă că şirul (S_{2^n}) are limita $+\infty$. Aşadar, şirul (S_n) al sumelor parţiale nu poate avea o limită finită $S \in R$, deoarece conţine un subşir divergent cu limita $+\infty$. Urmează că seria armonică este divergentă.

O b s e r v a ţ i e. Multă vreme nu s-a ştiut că seria armonică este divergentă şi s-a căutat să se adune un număr cît mai mare de termeni ai săi pentru a se obţine o sumă parţială cît mai aproape de „suma" seriei. Aceasta se explică prin faptul că seria armonică este „foarte încet" divergentă.

Într-adevăr, să remarcăm că

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{2^{n-1} \text{ ori}} = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Atunci suma parţială S_{2^n-1} verifică inegalitatea

$$S_{2^n-1} < n.$$

Aşadar, dacă adunăm 2^{n-1} termeni, suma obţinută, este mai mică decît n. Pentru a ne face o imagine mai exactă, vom scrie inegalitatea precedentă pentru cîteva valori ale lui n:

$S_3 < 2$	$S_{255} < 8$
$S_7 < 3$	$S_{511} < 9$
$S_{15} < 4$	$S_{1023} < 10$
$S_{31} < 5$	$S_{2047} < 11$
$S_{63} < 6$	....
$S_{127} < 7$	$S_{1073741} < 30$

4. Operaţii cu serii

P r o p o z i ţ i e . Dacă seriile $\sum\limits_n u_n$ şi $\sum\limits_n v_n$ sînt convergente şi au respectiv suma S şi T, atunci:

1) Suma $\sum\limits_n (u_n + v_n)$ este convergentă şi are suma $S + T$

$$\sum_n (u_n + v_n) = \sum_n u_n + \sum_n v_n.$$

2) **Seria $\sum_n \alpha u_n$ este convergentă, oricare ar fi $\alpha \in R$, şi are suma αS:**

$$\sum_n \alpha u_n = \alpha \sum_n u_n.$$

Demonstraţie. Fie (S_n) respectiv (T_n) şirurile sumelor parţiale ale seriilor $\sum_n u_n$ şi $\sum_n v_n$. Dacă notăm cu σ_n sumele parţiale ale seriei $\sum_n (u_n + v_n)$ avem

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + \\ + (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = S_n + T_n.$$

Cum şirurile (S_n) şi (T_n) sînt convergente prin ipoteză, şirul (σ_n) este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n = S + T,$$

deci seria $\sum_n (u_n + v_n)$ este convergentă şi are suma $S + T$. Dacă notăm cu Z_n sumele parţiale ale seriei $\sum_n \alpha u_n$, avem

$$Z_n = \alpha u_1 + \alpha u_2 + \ldots + \alpha u_n = \alpha(u_1 + \ldots + u_n) = \alpha S_n,$$

deci şirul (Z_n) este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \alpha . \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha S.$$

Rezultă că seria $\sum_n \alpha u_n$ este convergentă şi are suma αS.

Corolar. Dacă seria $\sum_n v_n$ este convergentă şi are suma T, atunci seria $\sum_n (-v_n)$ este convergentă şi are suma $-T$:

$$\sum_n (-v_n) = -\sum_n v_n.$$

Dacă $\sum_n u_n = S$ şi $\sum_n v_n = T$, atunci seria $\sum_n (u_n - v_n)$ este convergentă şi are suma $S - T$:

$$\sum_n (u_n - v_n) = \sum_n u_n - \sum_n v_n.$$

Observaţii. 1° Dacă seria $\sum (u_n + v_n)$ (sau seria $\sum (u_n - v_n)$) este convergentă nu rezultă că seriile $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ sînt convergente.

Exemplu. Seriile $\sum u_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ şi $\sum v_n = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ sînt oscilante, dar seria $\sum (u_n + v_n) = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ este convergentă.

2° Propoziţia şi corolarul rămîn adevărate dacă seriile $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ sînt divergente şi au sumele S şi T egale cu $+\infty$ sau $-\infty$, în cazul cînd $S + T$, $S - T$, αT au sens. În cazul cînd $S + T$ nu are sens, despre seria $\sum\limits_n (u_n + v_n)$ nu putem afirma nimic. Uneori este convergentă, alteori are sumă infinită, iar alteori este oscilantă.

Exemple:

$$1)\ \sum u_n = 1 + 2 + \ldots + n + \ldots = +\infty,$$

$$\sum v_n = -1 - 2 - \ldots - n - \ldots = -\infty,$$

$$\sum (u_n + v_n) = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0.$$

$$2)\ \sum u_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = +\infty,$$

$$\sum v_n = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n} - \ldots = -\infty,$$

$$\sum (u_n + v_n) = 0 + \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(3 - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(n - \frac{1}{n}\right) + \ldots = +\infty.$$

$$3)\ \sum u_n = 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots = +\infty,$$

$$\sum v_n = -1 - 4 - 3 - 6 - \ldots = -\infty,$$

$$\sum (u_n + v_n) = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \text{ nu are sumă.}$$

3° Dacă $\sum\limits_n u_n = +\infty$ şi $\alpha = 0$, atunci seria $\alpha \sum\limits_n u_n = \sum 0$, deci are totdeauna suma 0.

5. Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare

Studiul unei serii comportă, ca şi pentru şiruri, două probleme:

1) Stabilirea faptului dacă seria este convergentă sau divergentă.

2) În cazul cînd seria este convergentă, aflarea sumei seriei.

De cele mai multe ori ne mulţumim numai cu rezolvarea primei probleme, deoarece problema a doua este greu sau imposibil de rezolvat, în majoritatea exemplelor concrete. De altfel, o dată stabilit faptul că o serie este convergentă, adunînd un număr destul de mare de termeni ai săi obţinem un număr oricît de apropiat de suma seriei, număr care aproximează suma seriei cu o eroare oricît de mică.

În cele ce urmează vor fi date criterii suficiente (cu excepţia criteriului general al lui Cauchy, care este necesar şi suficient) pentru stabilirea convergenţei sau divergenţei seriilor.

Criteriul general al lui Cauchy. O serie $\sum_n u_n$ este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \geqslant 1$, să avem:

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} | < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Fie (S_n) şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_n u_n$. Prin definiţie, seria este convergentă dacă şi numai dacă şirul (S_n) este convergent, iar şirul (S_n) este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental, adică dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \geqslant 1$, să avem

$$| S_{n+p} - S_n | < \varepsilon.$$

Criteriul rezultă atunci din faptul că

$$S_{n+p} - S_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}) - $$
$$- (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}.$$

Observaţie. Acest criteriu are o importanţă teoretică fundamentală. Din el se deduc toate celelalte criterii. Practic însă acest criteriu este foarte greu de aplicat; de aceea vor fi date alte criterii suficiente (dar nu necesare), mai uşor de aplicat în cazurile întîlnite frecvent.

Criteriul lui Abel. Dacă $\sum u_n$ este o serie care are şirul sumelor parţiale mărginit, şi dacă (α_n) este un şir descrescător de numere pozitive convergent către 0, atunci seria

$$\sum_n \alpha_n u_n = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \ldots$$

este convergentă.

Demonstraţie, Deoarece şirul (S_n) al sumelor parţiale este mărginit, există un număr $M > 0$, astfel încît $|S_n| < M$, oricare ar fi $n \in N$. Vom arăta că seria $\sum_n \alpha_n u_n$ verifică criteriul lui Cauchy. Pentru aceasta să observăm că $u_{m+1} = S_{m+1} - S_m$, şi că

$$| \alpha_p - \alpha_{p+1}| = \alpha_p - \alpha_{p+1} > 0, \text{ şi deci}$$
$$| \alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| =$$
$$= | \alpha_{n+1} (S_{n+1} - S_n) + \alpha_{n+2} (S_{n+2} - S_{n+1}) + \ldots + \alpha_{n+p}(S_{n+p} - S_{n+p-1}) | =$$
$$= | - \alpha_{n+1}S_n + S_{n+1}(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + \ldots + S_{n+p-1}(\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p}S_{n+p}| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_{n+1}| S_n| + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) | S_{n+1}| + \ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) | S_{n+p-1}| +$$
$$+ \alpha_{n+p}|S_{n+p} | < M[\alpha_{n+1} + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + \ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p}] =$$
$$= 2M\alpha_{n+1}.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece şirul (α_n) este convergent către 0, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem $\alpha_n < \frac{\varepsilon}{2M}$. Atunci pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $p \geqslant 1$, deducem

$$|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| < \varepsilon$$

şi deci seria $\sum_n \alpha_n u_n$ verifică criteriul lui Cauchy, de unde rezultă că este convergentă.

6. Serii alternate

Se numeşte serie alternată, o serie pentru care produsul a doi termeni consecutivi este <0 (adică doi termeni consecutivi oarecare sînt de semne contrare). O serie alternată este deci de forma

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

sau de forma

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots$$

unde, $u_i > 0$, $i = 1, 2, 3 \ldots$

Deoarece ultima serie se reduce la cea precedentă prin înmulţire cu -1, vom considera în continuare numai serii alternate de forma $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$, cu primul termen > 0.

C r i t e r i u l l u i L e i b n i z. O serie alternată $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots (u_i > 0)$, pentru care şirul modulelor termenilor (u_n) este descrescător şi convergent către 0, este convergentă.

Să considerăm seria

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$$

Ea are sumele parţiale 1, 0, 1, 0, . . ., 1, 0, . . ., deci sînt mărginite. Deoarece şirul (u_n) este descrescător şi convergent către 0, din criteriul lui Abel rezultă că seria

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

este convergentă.

Exemplu.

Seria armonică alternată $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ verifică criteriul lui Leibniz, deci este convergentă.

Într-adevăr, şirul modulelor termenilor $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ este descrescător şi convergent către 0.

Să calculăm, pentru o serie alternată convergentă care verifică condiţiile criteriului lui Leibniz, eroarea pe care o facem luînd în locul sumei sale o sumă parţială. Presupunem $u_1 > 0$.

Pentru aceasta considerăm separat sumele cu indice impar şi cele cu indice par:

$$S_1 = u_1 \qquad S_2 = u_1 - u_2$$

$$S_3 = u_1 - (u_2 - u_3) < u_1 = S_1 \qquad S_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) > S_2$$

$$S_5 = S_3 - (u_4 - u_5) < S_3 \qquad S_6 = S_4 + (u_5 - u_6) > S_4.$$

....

Şirul sumelor impare $(S_{2n-1})_{1\leqslant n<+\infty}$ este descrescător, iar şirul sumelor pare $(S_{2n})_{1\leqslant n<+\infty}$ este crescător. Ele sînt subşiruri ale şirului $(S_n)_{1\leqslant n<+\infty}$ al sumelor parţiale, care este convergent către suma S a seriei. Aşadar, avem următoarea situaţie:

$$S_2 < S_4 < \ldots < S_{2n} < \ldots < S < \ldots < S_{2n+1} < \ldots < S_3 < S_1.$$

Avem apoi

$$0 < S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1},$$

de unde

$$0 < S - S_{2n} < u_{2n+1}.$$

De asemenea

$$0 < S_{2n+1} - S_{2n+2} = u_{2n+2},$$

de unde

$$0 < S_{2n+1} - S < u_{2n+2}.$$

Cele două cazuri de mai sus se pot scrie în mod unitar astfel:

$$0 < (-1)^n (S - S_n) < u_{n+1}.$$

Am demonstrat astfel următoarea

Teoremă. Dacă pentru seria alternantă $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$ în care şirul (u_n) este descrescător şi convergent către zero, înlocuim suma S a seriei cu suma parţială S_n a unui număr finit n de termeni, facem o eroare mai mică decît primul termen neglijat u_{n+1}. Eroarea este prin lipsă dacă n este par, şi prin adaos dacă n este impar.

§ 2. Serii absolut convergente

1. Serii absolut convergente. Serii semiconvergente

Vom spune că o serie

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

este absolut convergentă, dacă seria modulelor

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

este convergentă. Evident, dacă toţi termenii seriei sînt pozitivi şi dacă seria este convergentă, ea este absolut convergentă.

T e o r e m ă . Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Fie $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ o serie absolut convergentă. Aceasta înseamnă că seria $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$ este convergentă. Fie $\varepsilon > 0$. Conform criteriului general al lui Cauchy, există $N(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \geqslant 1$, să avem

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Cum

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|,$$

rezultă că seria $\Sigma\, u_n$ verifică de asemenea criteriul general al lui Cauchy, deci este convergentă.

O b s e r v a ţ i e. Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată. Seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

este convergentă, dar seria modulelor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

este divergentă.

O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numeşte serie semiconvergentă.

Seria armonică alternată este deci semiconvergentă.

Seriile absolut convergente au o proprietate asemănătoare cu aceea a sumei unei mulţimi finite de numere: comutativitatea. Pentru a efectua suma unei mulţimi finite de numere, nu are influenţă ordinea în care le adunăm.

T e o r e m ă . Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor, se obţine tot o serie absolut convergentă şi cu aceeaşi sumă.

Fie seria absolut convergentă

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

şi fie S suma sa. Seria modulelor

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

este de asemenea convergentă. Să notăm cu S_n sumele parţiale ale seriei $\Sigma\, u_n$. Fie $\varepsilon > 0$; există un număr $N = N(\varepsilon)$, astfel încît să avem

$$|S - S_N| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi

$$|u_{N+p}| + |u_{N+p+1}| + \cdots + |u_{N+q}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ oricare ar fi } p \geqslant 1 \text{ şi } q > p.$$

Fie

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_m + \ldots$$

o serie obţinută din seria $\sum\limits_n u_n$ prin schimbarea ordinii termenilor săi. Să notăm cu T_n sumele parţiale ale seriei $\sum\limits_n v_n$. Există un număr N_1 (care depinde de N, deci de ε), astfel încît pentru $m \geqslant N_1$, suma T_m să conţină toţi termenii $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Evident, suma T_m conţine şi alţi termeni, în plus,

$$u_{N+k_1} + u_{N+k_2} + \ldots + u_{N+k_m}.$$

Avem însă

$$|u_{N+k_1} + \ldots + u_{N+k_m}| \leqslant |u_{N+k_1}| + |u_{N+k_2}| + \ldots + |u_{N+k_m}| \leqslant$$

$$\leqslant |u_{N+1}| + |u_{N+2}| + \ldots + |u_{N+k_m}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aşadar

$$|T_m - S_N| = |u_{N+k_1} + \ldots + u_{N+k_m}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi deci, pentru $m \geqslant N_1(\varepsilon)$, avem

$$|S - T_m| \leqslant |S - S_N| + |S_N - T_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că şirul (T_m) are limita S. Deducem deci că seria $\Sigma\, v_n$ este convergentă şi are aceeaşi sumă S.

Făcînd raţionamentul de mai sus asupra seriei $\sum\limits_n |u_n|$, deducem că seria $\Sigma |v_n|$ este convergentă, adică seria Σv_n este absolut convergentă.

Această proprietate de comutativitate nu o au însă seriile semiconvergente. Mai mult:

T e o r e m ă (R i e m a n n). Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor, astfel încît seria obţinută să aibă ca sumă un număr dat, finit sau infinit, sau să fie oscilantă.

Fie seria semiconvergentă

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Seria modulelor

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

este divergentă. Să punem

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|$$

şi să notăm cu a_n *suma* termenilor pozitivi care se află printre primii n termeni şi cu $-b_n$ suma termenilor negativi care se află printre primii n termeni ai seriei Σu_n.

Avem deci

$$S_n = a_n - b_n, \qquad \sigma_n = a_n + b_n$$

şi deci

$$a_n = \frac{S_n + \sigma_n}{2}, \qquad b_n = \frac{\sigma_n - S_n}{2}.$$

Dacă S este suma seriei Σu_n, şirul (S_n) are limita S; şirul (σ_n) are însă limita $+\infty$. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{şi} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

Aşadar, seria formată cu termenii pozitivi ai seriei $\sum\limits_n u_n$ este divergentă şi are suma $+\infty$. De asemenea, seria formată cu termenii negativi ai seriei $\sum\limits_n u_n$ este divergentă şi are suma $-\infty$.

Fie A un număr oarecare; să arătăm că putem schimba ordinea termenilor seriei Σu_n, ca să obţinem o serie convergentă cu suma A. Pentru aceasta, să luăm în ordinea în care se prezintă în seria Σu_n un număr de termeni pozitivi, a căror sumă să fie mai mare ca A (aceasta este posibil deoarece suma seriei termenilor pozitivi este $+\infty$); vom lua, anume, cel mai mic număr de termeni pozitivi care să aibă această proprietate. Vom lua apoi, tot în ordinea în care se prezintă în seria Σu_n, cel mai mic număr de termeni negativi, astfel ca suma tuturor termenilor luaţi de la început să fie mai mică decît A (acest lucru este posibil, deoarece seria termenilor negativi are suma $-\infty$).

Vom lua apoi cel mai mic număr de termeni pozitivi, din cei rămaşi, tot în ordinea din seria $\Sigma\, u_n$, astfel ca suma tuturor termenilor luaţi de la început să fie mai mare ca A şi aşa mai departe. În acest mod, aranjăm toţi termenii seriei $\Sigma\, u_n$ într-o altă ordine. Vom arăta că seria obţinută este convergentă şi are suma A. Să notăm cu A_n sumele parţiale ale seriei noi, şi cu p_n *numărul* tuturor termenilor pozitivi şi negativi luaţi în primele n operaţii. Avem

$$A_1 > A,\ A_3 > A, \ldots, A_{p_n} > A, \ldots \text{ dacă } n \text{ este impar.}$$

$$A_2 < A,\ A_4 < A, \ldots, A_{p_n} < A, \ldots \text{ dacă } n \text{ este par.}$$

Dacă n este impar, $A_{p_n} > A$ şi u_{p_n} este pozitiv; cum, de fiecare dată, am luat cel mai mic număr de termeni necesar pentru a depăşi pe A,

avem

$$A_{p_n} - u_{p_n} \leqslant A$$

şi deci

$$0 < A_{p_n} - A \leqslant u_{p_n}.$$

Dacă n este par, $A_{p_n} < A$, şi u_{p_n} este negativ,

deci

$$A_{p_n} - u_{p_n} \geqslant A,$$

de unde

$$0 < A - A_{p_n} \leqslant -u_{p_n}.$$

Aşadar, oricum ar fi n, par sau impar, avem

$$|A - A_{p_n}| \leqslant |u_{p_n}|.$$

Dar, deoarece seria este convergentă, şirul (u_n) este convergent către 0; şirul (u_{p_n}) este un subşir al său, deci are tot limita 0. Rezultă că şirul (A_{p_n}) are limita A. Vrem însă să arătăm că şirul (A_n) al *tuturor* sumelor parţiale ale seriei noi are limita A. Din felul în care au fost aranjaţi în ordine termenii noii serii, rezultă că orice sumă A_k este cuprinsă între două sume A_{p_n} consecutive, una de ordin par şi una de ordin impar

$$A_{p_{2n}} \leqslant A_k \leqslant A_{p_{2n+1}}.$$

Cum sumele extreme au limita A, urmează că şi şirul (A_n) are limita A, adică seria este convergentă şi are limita A.

Procedînd ca mai sus se poate schimba ordinea termenilor seriei $\Sigma\, u_n$ ca să obţinem o serie divergentă cu suma $+\infty$.

Într-adevăr, alegem un număr de termeni pozitivi, astfel ca suma lor să fie mai mare ca 1; apoi adăugăm *un* termen negativ; apoi adăugăm un număr de termeni pozitivi, astfel ca suma tuturor termenilor de la început să fie > 2; apoi adăugăm *un* termen negativ; la a n-a operaţie, adăugăm un număr de termeni pozitivi astfel ca suma tuturor termenilor de la început să fie $> n$, apoi adăugăm un termen negativ.

Seria astfel obţinută este divergentă şi are suma $+\infty$.

Se pot aranja termenii seriei $\Sigma\, u_n$, astfel ca seria obţinută să fie oscilantă. Luăm un număr de termeni pozitivi cu suma > 1; adăugăm un număr de termeni negativi, ca să obţinem o sumă < 0; adăugăm un număr de termeni pozitivi ca să obţinem o sumă > 1, şi aşa mai departe. Sumele obţinute formează un şir care nu are limită, deci nici şirul tuturor sumelor parţiale ale seriei nu are limită.

Vom da acum un criteriu de convergență absolută.

Primul criteriu al comparației. Fie $\sum_n u_n$ și $\sum_n v_n$ două serii; să presupunem că există un număr N astfel încît $|u_n| \leq |v_n|$ pentru orice $n \geq N$.

Dacă seria Σv_n este absolut convergentă, atunci seria Σu_n este absolut convergentă.

Demonstrație, Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece seria $\Sigma |v_n|$ este convergentă, după criteriul general al lui Cauchy există un număr $N(\varepsilon)$ (pe care-l putem lua mai mare decît N), astfel încît, oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ și oricare ar fi $p \geq 1$, să avem

$$|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \ldots + |v_{n+p}| < \varepsilon.$$

Cum

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| \leq |v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \ldots + |v_{n+p}|,$$

pentru $n \geq N(\varepsilon)$ și $p \geq 1$, avem de asemenea

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon,$$

adică seria $\Sigma |u_n|$ este convergentă, și deci seria Σu_n este absolut convergentă.

2. Serii cu termeni pozitivi

Vom considera acum seria

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

în care toți termenii sînt *strict pozitivi*. O asemenea serie sau este convergentă, sau este divergentă și are suma $+\infty$.

Pentru seriile cu termeni pozitivi, proprietatea de convergență este echivalentă cu proprietatea de convergență absolută.

Vom da mai jos cîteva criterii de convergență, care rezultă direct sau indirect din criteriul general al lui Cauchy. În același timp, acestea sînt criterii de convergență absolută pentru serii cu termeni oarecare.

Să reformulăm întîi criteriul comparației pentru serii cu termeni pozitivi:

Primul criteriu al comparației. Fie $\sum_n u_n$ și $\sum_n v_n$ două serii cu termeni pozitivi. Să presupunem că există un număr N, astfel încît

$$u_n \leq v_n \text{ pentru orice } n \geq N.$$

1) Dacă seria Σv_n este convergentă, atunci seria Σu_n este convergentă.

2) Dacă seria Σu_n este divergentă, atunci seria Σv_n este divergentă.

Punctul 2 este o formulare echivalentă a punctului 1.

Al doilea criteriu al comparaţiei. Fie $\sum\limits_n u_n$ şi $\sum\limits_n v_n$ două serii cu termeni pozitivi. Să presupunem că există un număr N astfel încît

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ pentru orice } n \geqslant N.$$

1) Dacă seria Σv_n este convergentă, atunci seria Σu_n este convergentă.

2) Dacă seria Σu_n este divergentă, atunci seria Σv_n este divergentă.

Demonstraţie. Din inegalităţile de mai sus deducem

$$\frac{u_n}{v_n} \geqslant \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \text{ pentru orice } n \geqslant N, \text{ adică}$$

$$\frac{u_N}{v_N} \geqslant \frac{u_{N+1}}{v_{N+1}} \geqslant \ldots \geqslant \frac{u_n}{v_n} \geqslant \ldots, \quad n \geqslant N.$$

Dacă punem

$$k = \frac{u_N}{v_N} \neq 0, \text{ deducem}$$

$$k \geqslant \frac{u_n}{v_n} \text{ pentru orice } n \geqslant N,$$

adică

$$u_n \leqslant kv_n \text{ pentru orice } n \geqslant N.$$

Se aplică acum primul criteriu al comparaţiei : dacă Σv_n este convergentă, atunci seria Σkv_n este convergentă, deci seria Σu_n este convergentă.

Dacă Σu_n este divergentă, atunci seria Σkv_n este divergentă şi cum $\Sigma v_n = \Sigma \frac{1}{k} (kv_n)$, rezultă că seria Σv_n este divergentă.

Observaţie. Criteriile de mai sus ne dau posibilitatea de a deduce că o serie este convergentă sau divergentă, comparînd-o cu altă serie despre care ştim că este convergentă sau divergentă.

Deocamdată cunoaştem o singură serie cu termeni pozitivi convergentă : seria geometrică cu raţia $r < 1$:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$$

Cunoaştem de asemenea două serii divergente: seria geometrică cu raţia $r \geqslant 1$

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$$

şi seria armonică

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Evident, serii divergente putem construi cîte dorim, luînd un şir (u_n), care nu este convergent către zero, şi formînd seria

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Pentru a putea folosi uşor criteriile de comparaţie, va trebui să cunoaştem cît mai multe serii convergente.

Aplicaţie. Fie $\sum\limits_n u_n$ o serie cu termeni pozitivi, astfel ca şirul termenilor (u_n) să fie descrescător. Să considerăm şi seria $\Sigma\, 2^n u_{2^n}$. Dacă una dintre serii este convergentă, atunci şi cealaltă este convergentă.

Să presupunem întîi că seria $\Sigma\, 2^n u_{2^n}$ este convergentă. Să grupăm termenii seriei $\Sigma\, u_n$ astfel:

$$u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + \ldots + u_7) + (u_8 + \ldots + u_{15}) + \ldots + (u_{2^n} + \ldots + u_{2^{n+1}-1}) + \ldots$$

Deoarece şirul termenilor este descrescător, avem

$$u_{2^n} + \ldots + u_{2^{n+1}-1} \leqslant \underbrace{u_{2^n} + \ldots + u_{2^n}}_{2^n \text{ ori}} = 2^n u_{2^n}.$$

După criteriul comparaţiei, urmează că şi seria cu termenii grupaţi este convergentă, adică subşirul sumelor parţiale (S_{2^n}) este convergent. Dacă şirul (S_n) ar avea limita $+\infty$ ar urma ca şi subşirul (S_{2^n}) să aibă limita $+\infty$. Urmează deci că şi şirul (S_n) este convergent, şi deci că seria $\Sigma\, u_n$ este convergentă.

Să presupunem acum că seria $\Sigma\, u_n$ este convergentă. Atunci şi seria următoare, obţinută prin gruparea termenilor, este convergentă:

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + (u_5 + \ldots + u_8) + (u_9 + \ldots + u_{16}) + \ldots + (u_{2^{n-1}+1} + \ldots + u_{2^n}) + \ldots$$

Deoarece şirul termenilor este descrescător, avem

$$u_{2^{n-1}+1} + \ldots + u_{2^n} \geqslant \underbrace{u_{2^n} + \ldots + u_{2^n}}_{2^{n-1} \text{ ori}} = 2^{n-1} u_{2^n}.$$

Urmează că şi seria $\Sigma\, 2^{n-1} u_{2^n}$ şi deci şi seria $\Sigma\, 2^n u_{2^n}$ este convergentă.

Vom aplica acest rezultat la *seria armonică generalizată* :

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

Această serie este convergentă dacă $\alpha > 1$ *şi divergentă dacă* $\alpha \leqslant 1$.

Într-adevăr, să considerăm seria $\Sigma\, 2^n u_{2^n}$. Avem

$$2^n u_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n.$$

Aceasta este o serie geometrică cu raţia $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Dacă $\alpha > 1$, atunci $\alpha - 1 > 0$, deci $2^{\alpha-1} > 1$ şi deci $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, adică seria $\Sigma\, 2^n u_{2^n}$ este convergentă şi deci şi seria armonică generalizată este convergentă. Dacă $\alpha \leqslant 1$, avem $\frac{1}{2^{\alpha-1}} \geqslant 1$, deci seria $\Sigma\, 2^n u_{2^n}$ este divergentă şi deci şi seria armonică generalizată este divergentă.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy). Fie $\Sigma\, u_n$ o serie cu termeni pozitivi:

1) dacă există un număr N şi un număr $0 < k < 1$, astfel încît, pentru orice $n \geqslant N$, să avem $\sqrt[n]{u_n} \leqslant k$, atunci seria este convergentă;

2) dacă avem $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$, pentru o infinitate de termeni, atunci seria este divergentă.

Demonstraţie. 1) Din $\sqrt[n]{u_n} \leqslant k$ pentru $n \geqslant N$ deducem $u_n \leqslant k^n$. Cum $0 < k < 1$, seria geometrică $1 + k + k^2 + \ldots + k^n + \ldots$ este convergentă. Pe baza primului criteriu de comparaţie rezultă că şi seria $\Sigma\, u_n$ este convergentă.

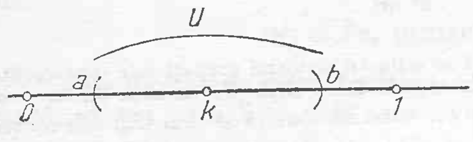


Fig. 161

2) Dacă $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$, atunci $u_n \geqslant 1$. Aşadar, seria are o infinitate de termeni $\geqslant 1$, deci şirul termenilor nu este convergent către 0. Rezultă că nici seria nu este convergentă, deci este divergentă.

Acest criteriu se poate enunţa (punctul 2 într-o formă ceva mai particulară) cu ajutorul limitelor extreme.

Corolarul 1. Fie $\Sigma\, u_n$ o serie de termeni pozitivi.

1) **Dacă** $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, **atunci seria este convergentă.**

2) **Dacă** $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, **atunci seria este divergentă.**

Să notăm $k = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Să presupunem întîi că avem $k < 1$ şi să luăm o vecinătate $U = (a, b)$ a lui k, care nu conţine pe 1 (fig. 162). În această vecinătate se află aproape toţi termenii şirului $(\sqrt[n]{u_n})$, adică există un număr N, astfel ca pentru orice $n > N$ să avem $\sqrt[n]{u_n} < b < 1$. Rezultă că seria este convergentă.

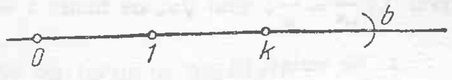


Fig. 162

Să presupunem acum că avem $k > 1$ şi să considerăm vecinătatea $(1, +\infty)$ a lui k. În această vecinătate se află aproape toţi termenii şirului $(\sqrt[n]{u_n})$, deci avem $\sqrt[n]{u_n} > 1$, pentru o infinitate de termeni. Rezultă că seria este divergentă.

Corolarul 2. Fie Σu_n o serie cu termeni pozitivi; să presupunem că şirul $(\sqrt[n]{u_n})$ are limita $k \leqslant \infty$. Atunci:

1) Dacă $k < 1$, seria este convergentă.

2) Dacă $k > 1$, seria este divergentă.

În adevăr, în acest caz avem $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$.

Observaţii. 1° Dacă şirul $(\sqrt[n]{u_n})$ este convergent şi are limita **$k = 1$, nu putem trage nici o concluzie asupra seriei.**

De exemplu, seria armonică $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ este divergentă dar şirul $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)$ are limita 1. Într-adevăr, $\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{n}\ln n$ şi şirul $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ are limita 0, deoarece funcţia $\frac{\ln x}{x}$ are, în punctul $+\infty$, limita 0, cum se constată uşor aplicînd regula lui l'Hospital. Cum $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = e^{\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}}}$, rezultă că şirul $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)$ are limita 1.

La fel, seria $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ este divergentă, dar şirul $(\sqrt[n]{u_n})$ are limita 1.

Există de asemenea serii convergente, pentru care şirul $(\sqrt[n]{u_n})$ are limita 1. Anume, seria armonică generalizată

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

este convergentă dacă $\alpha > 1$. Totuşi, şirul $\sqrt[n]{n^{-\alpha}} = n^{-\frac{\alpha}{n}}$ are limita 1.

2° În demonstraţia criteriului rădăcinii, s-a folosit convergenţa seriei geometrice cu raţia $r < 1$. Ne vom feri deci să aplicăm criteriul rădăcinii pentru demonstrarea convergenţei seriei geometrice.

Aplicaţii. 1. Fie seria

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

Avem $\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n}$; şirul $\sqrt[n]{u_n}$ are limita $k = 0$, deci seria este convergentă.

2. Fie seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Avem

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3e} < 1$$

şi deci seria este convergentă.

Criteriul raportului (al lui d'Alembert). Fie Σu_n o serie cu termeni pozitivi.

1) Dacă există un număr N şi un număr $0 < k < 1$, astfel încît pentru orice $n \geqslant N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, atunci seria este convergentă.

2) Dacă există un număr N, astfel ca pentru orice $n \geqslant N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, aunci seria este divergentă.

Demonstraţie. 1) Din inegalitatea $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, pentru $n \geqslant N$, deducem

$$u_{N+1} \leqslant ku_N$$
$$u_{N+2} \leqslant ku_{N+1} \leqslant k^2 u_N$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{N+p} \leqslant k^p u_N$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Aşadar, seria $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ are termenii mai mici decît ai seriei geometrice

$$ku_N + k^2u_N + k^3u_N + \ldots + k^pu_N + \ldots, \text{ (cu raţia } k < 1),$$

care este convergentă. Rezultă atunci că şi seria $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$ este convergentă şi deci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2) Din inegalitatea $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ pentru $n \geqslant N$ deducem $0 < u_n \leqslant u_{n+1}$, deci şirul $(u_n)_{n\in N}$ al termenilor este crescător şi are limita 0, deci seria este divergentă.

Acest criteriu se poate enunţa (punctul 2 într-o formă mai particulară) cu ajutorul limitelor extreme.

Corolarul 1. Fie Σu_n o serie cu termeni pozitivi.

1) **Dacă** $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, **atunci seria este convergentă.**

2) **Dacă** $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, **atunci seria este divergentă.**

Să notăm $k = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ şi să presupunem că avem $k < 1$. Să alegem o vecinătate $U = (a, b)$ a lui k astfel ca $b < 1$. În această vecinătate se află aproape toţi termenii şirului $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, deci există N astfel încît pentru $n > N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} < b$, şi deci seria este convergentă.

Să notăm acum $l = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ şi să presupunem că $l > 1$. Alegînd vecinătatea $(1, +\infty)$ a lui l, deducem că în această vecinătate se află aproape toţi termenii şirului $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, deci există N astfel ca pentru $n > N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ şi deci seria este divergentă.

Corolarul 2. Fie Σu_n o serie cu termeni pozitivi. Să presupunem că şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita k. Atunci:

1) **Dacă $k < 1$, seria este convergentă.**

2) **Dacă $k > 1$, seria este divergentă.**

În adevăr, în acest caz, $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$.

Observaţii. 1° Deoarece în acest criteriu s-a folosit convergenţa seriei geometrice, nu putem aplica acest criteriu pentru a demonstra că seria geometrică cu raţia $r < 1$ este convergentă.

2° Dacă şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ este convergent şi are limita $k = 1$, nu putem trage nici o concluzie.

2) Din inegalitatea $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ pentru $n \geqslant N$ deducem $0 < u_n \leqslant u_{n+1}$, deci şirul $(u_n)_{n\in N}$ al termenilor este crescător şi are limita $\neq 0$, deci seria este divergentă.

Acest criteriu se poate enunţa (punctul 2 într-o formă mai particulară) cu ajutorul limitelor extreme.

Corolarul 1. **Fie Σu_n o serie cu termeni pozitivi.**

1) **Dacă** $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, **atunci seria este convergentă.**

2) **Dacă** $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, **atunci seria este divergentă.**

Să notăm $k = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ şi să presupunem că avem $k < 1$. Să alegem o vecinătate $U = (a, b)$ a lui k astfel ca $b < 1$. În această vecinătate se află aproape toţi termenii şirului $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, deci există N astfel încît pentru $n > N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} < b$, şi deci seria este convergentă.

Să notăm acum $l = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ şi să presupunem că $l > 1$. Alegînd vecinătatea $(1, +\infty)$ a lui l, deducem că în această vecinătate se află aproape toţi termenii şirului $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, deci există N astfel ca pentru $n > N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ şi deci seria este divergentă.

Corolarul 2. **Fie Σu_n o serie cu termeni pozitivi. Să presupunem că şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita k. Atunci:**

1) **Dacă $k < 1$, seria este convergentă.**

2) **Dacă $k > 1$, seria este divergentă.**

În adevăr, în acest caz, $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$.

Observaţii. 1° Deoarece în acest criteriu s-a folosit convergenţa seriei geometrice, nu putem aplica acest criteriu pentru a demonstra că seria geometrică cu raţia $r < 1$ este convergentă.

2° Dacă şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ este convergent şi are limita $k = 1$, nu putem trage nici o concluzie.

Exemple. 1) Ştim că seria armonică $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ este divergentă. Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}$; şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita 1.

2) Seria armonică generalizată $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$ cu $\alpha > 1$ este convergentă. Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$; şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita 1.

Aplicaţii. 1. Fie seria

$$1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} + \ldots$$

Avem

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n\,!}{(n+1)\,!} = \frac{1}{n+1}$, deci şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita 0. Rezultă că seria este convergentă. Se va arăta că suma seriei este numărul e.

2. Fie seria

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots$$

$$\text{Avem } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ dacă } n \text{ este par} \\ \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Criteriul lui d'Alembert nu se poate aplica, deoarece pentru n par suficient de mare avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, iar pentru n impar suficient de mare avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Se aplică criteriul rădăcinii. Avem

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ dacă } n \text{ este par} \\ \\ \frac{1}{2} \text{ dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Avem $\sqrt[n]{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$ pentru orice n. Rezultă că seria este convergentă.

Criteriul lui Kummer. Fie Σu_n o serie cu termeni pozitivi:

1) Dacă există un şir (a_n) de numere strict pozitive, un număr $\rho > 0$ şi un număr N astfel încît să avem

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant \rho \text{ pentru orice } n \geqslant N,$$

atunci seria este convergentă.

2) Dacă există un şir (a_n) de numere strict pozitive, astfel încît seria $\Sigma \frac{1}{a_n}$ să fie divergentă, şi un număr N astfel încît $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqslant 0$, pentru orice $n > N$, atunci seria este divergentă.

Demonstraţie. Fără a micşora generalitatea, vom presupune $N = 1$.

1) Din inegalitatea $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant \rho$ deducem

$$\rho u_{n+1} \leqslant a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1},$$

adică

$$\rho u_1 \leqslant \rho u_1$$

$$\rho u_2 \leqslant a_1 u_1 - a_2 u_2$$

$$\rho u_3 \leqslant a_2 u_2 - a_3 u_3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho u_n \leqslant a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n.$$

Notînd cu S_n sumele parţiale ale seriei Σu_n şi adunînd inegalităţile de mai sus, obţinem

$$\rho S_n \leqslant (\rho + a_1) u_1 - a_n u_n \leqslant (\rho + a_1) u_1.$$

Deducem că şirul (S_n) este mărginit, şi fiind şi crescător (deoarece seria este cu termeni pozitivi) este convergent, deci seria este convergentă.

2) Din inegalităţile $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqslant 0$, deducem

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ sau } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Dacă notăm $v_n = \frac{1}{a_n}$, seria Σv_n este divergentă şi avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

După al doilea criteriu al comparaţiei deducem că seria $\sum_n u_n$ este divergentă.

Din criteriul lui Kummer, deducem

Criteriul lui Raabe şi Duhamel. Fie Σu_n o serie cu termeni pozitivi.

1) Dacă există un număr $k > 1$ şi un număr N astfel încît să avem

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant k \text{ pentru orice } n \geqslant N,$$

atunci seria este convergentă.

2) **Dacă există un număr N astfel încît**

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\leqslant 1 \text{ pentru orice } n\geqslant N,$$

atunci seria este divergentă.

Demonstraţie. Vom aplica criteriul lui Kummer pentru şirul (a_n), unde $a_n = n$. Avem atunci, pentru $n \geqslant N$,

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}=n\frac{u_n}{u_{n+1}}-n-1=n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1.$$

1) Deoarece $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geqslant k>1$, punînd

$\rho = k-1>0$, deducem că

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\geqslant k-1=\rho>0$$

şi deci seria este convergentă.

2) Deoarece $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\leqslant 1$, deducem $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\leqslant 0$

adică

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\leqslant 0.$$

Deoarece seria $\Sigma\frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că şi seria Σu_n este divergentă.

Corolar. **Fie Σu_n o serie cu termeni pozitivi. Să presupunem că şirul $\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]_{1\leqslant n<+\infty}$ are limita k.**

Atunci

1) **dacă $k>1$ seria este convergentă;**

2) **dacă $k<1$ seria este divergentă.**

Într-adevăr, luăm o vecinătate $U=(a, b)$ a lui k care să nu conţină pe 1 şi astfel ca $a \neq 1$. În această vecinătate se află aproape toţi termenii şirului, deci:

1) dacă $k>1$, avem $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geqslant a>1$,

2) dacă $k<1$ avem $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\leqslant b\leqslant 1$

şi deci condiţiile criteriului lui Raabe-Duhamel sînt verificate.

Exemplu. Fie seria

$$\sum_n \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)},$$

unde $\alpha > 0$. Seria este convergentă dacă $\alpha > 2$, şi divergentă dacă $\alpha < 2$.

Să aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} - 1 = \frac{\alpha+n}{n+1} - 1 = \frac{\alpha-1}{n+1}.$$

Atunci

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{n}{n+1}(\alpha - 1).$$

Acest şir are limita $k = (\alpha - 1)$. Dacă $\alpha > 2$, atunci $k > 1$, deci seria este convergentă. Dacă $\alpha < 2$, atunci $k < 1$, deci seria este divergentă. Pentru $\alpha = 2$, obţinem $k = 1$, şi criteriul lui Raabe-Duhamel nu ne dă nici o indicaţie. În acest caz seria se scrie

$$\sum \frac{n!}{2\cdot 3\dots(n+1)} = \sum \frac{1}{n+1},$$

adică

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \text{ şi deci este divergentă.}$$

§ 3. Şiruri de funcţii

1. Mulţimea de convergenţă

Fie A o mulţime *oarecare* şi $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ un şir de funcţii reale* definite, toate, pe A. Vom însemna prescurtat acest şir de funcţii astfel: $(f_n)_{1 \leq n < +\infty}$ sau $(f_n)_{n \in N}$ sau (f_n).

Fie $a \in A$. Valorile funcţiilor din şirul (f_n) în punctul a formează un *şir de numere:*

$$f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a), \dots$$

Aşadar, pentru fiecare punct $x \in A$, putem considera *şirul de numere* $(f_n(x))_{n\in N}$, format cu valorile funcţiilor din şirul (f_n) în punctul x. Un şir de funcţii (f_n) este deci echivalent cu o familie de şiruri de numere $(f_n(x))_{n\in N, x\in A}$, şi anume pentru fiecare punct $x \in A$ cîte un şir de numere.

Vom spune că un punct $a \in A$ este un *punct de convergenţă* al şirului de funcţii (f_n), dacă şirul de numere $(f_n(a))$ este convergent.

Mulţimea punctelor de convergenţă ale şirului de funcţii (f_n) se numeşte *mulţimea de convergenţă* a şirului (f_n).

* Majoritatea rezultatelor din acest paragraf rămîn adevărate pentru funcţii cu valori într-un spaţiu Banach.

Fie B mulţimea de convergenţă a şirului (f_n). Pentru fiecare punct $x \in B$, să notăm cu $f(x)$ limita şirului de numere $(f_n(x))$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Am stabilit astfel o corespondenţă $x \to f(x)$ între punctele $x \in B$ şi numerele reale, adică o funcţie reală f definită pe B prin egalitatea

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Funcţia f se numeşte *funcţia limită*, pe mulţimea B, a şirului de funcţii (f_n). Vom spune că şirul (f_n) converge pe mulţimea B către funcţia f.

2. Convergenţa simplă. Convergenţa uniformă

Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe o mulţime A. Vom spune că o funcţie f definită pe A este *limita simplă* (sau punctuală) a şirului (f_n), sau că şirul (f_n) *converge simplu* (sau punctual) *pe A către f*, dacă pentru fiecare punct $x \in A$, şirul de numere $(f(x_n))$ este convergent către numărul $f(x)$. Cu alte cuvinte:

Şirul (f_n) este simplu convergent pe A către f dacă, oricare ar fi $x \in A$, şi oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon, x)$, astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon, x)$ să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dacă şirul (f_n) este simplu convergent către f, vom scrie astfel:

$$f_n \xrightarrow{s} f.$$

Dacă în definiţia precedentă numărul N depinde numai de ε, nu şi de x, vom spune că şirul (f_n) este uniform convergent pe A către f. Atunci, în definiţia convergenţei uniforme a şirului (f_n) către f, afirmaţia „oricare ar fi x" trebuie să figureze după afirmaţia despre existenţa numărului N, pentru ca N să nu depindă de x. Aşadar:

Şirul (f_n) este uniform convergent pe A către f, dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dacă şirul (f_n) este uniform convergent către f, vom scrie astfel:

$$f_n \xrightarrow{u} f.$$

Evident, dacă şirul (f_n) este uniform convergent pe A către f, atunci şirul (f_n) este de asemenea simplu convergent pe A către f. Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată, cum va fi arătat prin cîteva exemple.

Mai întîi, vom da o imagine geometrică a convergenţei uniforme (în cazul cînd $A \subset R$). Să desenăm graficul funcţiei f, şi al funcţiilor $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$ (fig. 163).

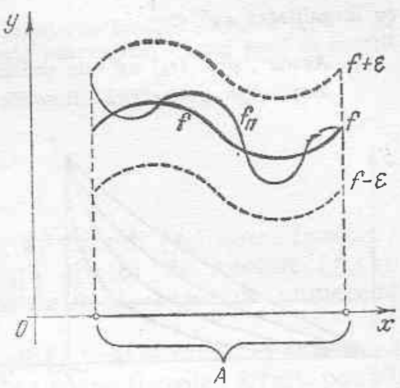


Fig. 163

Din definiţia convergenţei uniforme a şirului (f_n) către f, rezultă că există un număr N (ε), astfel încît dacă $n > N$ (ε), graficul funcţiei f_n să fie în întregime cuprins în fîşia dintre graficele funcţiilor $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$.

Exemple. 1) $A = [0, 1]$; $f_n(x) = x^n$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x = 1 \\ 0 \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Avem $f_n \xrightarrow{s} f$. Într-adevăr, şirul (f_n) se scrie

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = x^2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(x) = x^n$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Pentru $x = 1$, avem $f_1(1) = 1$, $f_2(1) = 1, \ldots, f_n(1), \ldots$, deci şirul $(f_n(1))$ este constant şi are limita $1 = f(1)$. Aşadar, în punctul 1, şirul (f_n) este convergent către f.

Dacă $0 \leqslant a < 1$, avem $f_n(a) = a^n$. Se ştie că şirul (a^n) este în acest caz convergent către $0 = f(a)$. Aşadar, pentru orice $x \in [0, 1]$, şirul de numere $(f_n(x))$ este convergent către $f(x)$, ceea ce înseamnă că şirul (f_n) este simplu convergent pe $[0, 1]$ către f.

Şirul (f_n) nu este însă uniform convergent către f. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că $f_n \xrightarrow{u} f$. Fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$; atunci există un număr $N = N\left(\frac{1}{2}\right)$ astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N$, şi oricare ar fi $x \in [0, 1]$ să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}.$$

Pentru $0 \leqslant x < 1$, avem $f(x) = 0$, deci pentru $n \geqslant N$ rezultă $|f_n(x)| < \frac{1}{2}$ sau

$$x^n < \frac{1}{2}.$$

În particular, pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $x^N < \frac{1}{2}$.

Dacă (x_k) este un şir de numere din $(0, 1)$ convergent către 1, şirul (x_k^N) este convergent către 1, deci există un număr $0 < x_{k_0} < 1$, astfel ca $\frac{3}{4} < x_{k_0}^N < 1$, ceea ce este în contradicţie cu inegalitatea $x_k^N < \frac{1}{2}$.

Aşadar, şirul (f_n) nu este uniform convergent către f.

Explicaţia geometrică: funcţiile $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$ sînt definite de următoarele egalităţi:

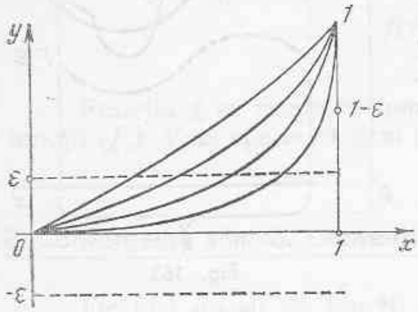


Fig. 164

$$f(x) - \varepsilon = \begin{cases} -\varepsilon \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 - \varepsilon \text{ pentru } x = 1; \end{cases}$$

$$f(x) + \varepsilon = \begin{cases} +\varepsilon \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 + \varepsilon \text{ pentru } x = 1. \end{cases}$$

Oricît de mare ar fi n, graficul funcţiei f_n iese din fişia determinată de funcţiile $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$.

2) $A = [0, 2\pi]$; $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $f(x) \equiv 0$.

Avem $f_n \xrightarrow{u} f$. Într-adevăr, şirul $\left(\frac{1}{n}\right)$ este convergent către 0. Pentru $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, dacă $n \geqslant N(\varepsilon)$, atunci $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Atunci pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$, avem

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n} - 0\right| = \frac{\sin nx}{n} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ oricare ar fi } x \in [0, 2\pi].$$

Din diagramă se vede că luînd o fişie în jurul funcţiei $f(x) \equiv 0$, atunci, pentru n suficient de mare, graficul funcţiei f_n este cuprins în această fişie.

3) $A = [0, +\infty)$; $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$; $f(x) \equiv 0$. Avem $f_n \xrightarrow{s} f$. Într-adevăr, pentru oricare $x \geqslant 0$, şirul $\left(\frac{x}{x+n}\right)_{n \in N}$ are limita 0, adică şirul $(f_n(x))$ are limita 0.

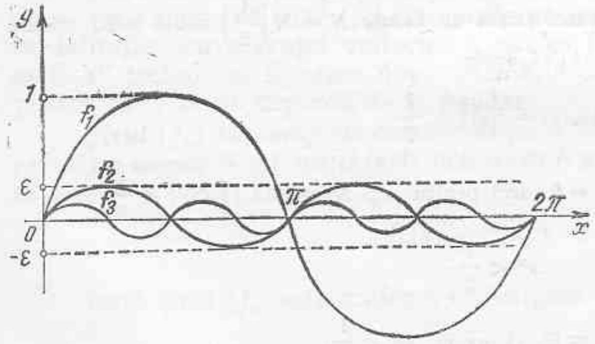


Fig. 165

Şirul (f_n) nu converge însă uniform pe A către $f(x) \equiv 0$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Dacă (f_n) ar converge uniform către f, ar exista un număr $N = N\left(\frac{1}{2}\right)$, astfel încît, pentru $n \geqslant N$, să avem $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$ oricare ar fi $x \in A$, adică $\frac{x}{x+n} < \frac{1}{2}$.

În particular, am avea $\frac{x}{x+N} < \frac{1}{2}$ oricare ar fi $x > 0$. Dacă luăm $x = 3N$, atunci $\frac{x}{x+N} = \frac{3N}{3N+N} = \frac{3}{4} < \frac{1}{2}$ şi am ajuns la o contradicţie.

4) Fie (a_n) un şir de numere şi pentru fiecare n să considerăm funcţia *constantă* $f_n(x) = a_n$ definită pe o mulţime A. Dacă şirul de numere (a_n) este convergent, atunci şirul de funcţii (f_n) este uniform convergent pe A.

3. Criterii de convergenţă uniformă

Deoarece convergenţa simplă a şirului de funcţii (f_n) către funcţia f revine, pentru fiecare $x \in A$, la convergenţa şirului de numere $(f_n(x))$ către numărul $f(x)$, criteriile de convergenţă de la şirurile de numere se aplică şi în acest caz.

Convergenţa uniformă a şirului de funcţii (f_n) către funcţia f înseamnă însă ceva mai mult decît convergenţa simplă: toate şirurile $(f_n(x))$, pentru toate punctele $x \in A$, sînt „egal convergente" sau „la fel de repede convergente".

Vom da două criterii de convergenţă uniformă.

Primul criteriu este asemănător criteriului lui Cauchy de la şirurile de numere.

Criteriul I (Cauchy). Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe o mulţime A. Şirul (f_n) este uniform convergent către o funcţie f definită pe A, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Să presupunem întîi că $f_n \xrightarrow{u} f$. Fie $\varepsilon > 0$; există atunci un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $p \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$ să avem

$$|f_p(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, dacă $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ şi $x \in A$, avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reciproc, să presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

şi să arătăm că există o funcţie f definită pe A, astfel ca $f_n \xrightarrow{u} f$. Din ipoteză, rezultă că pentru fiecare $x \in A$, şirul de numere $(f_n(x))$ este un şir fundamental, deci are ca limită un număr, pe care să-l notăm $f(x)$. Am construit deci o funcţie $x \to f(x)$ definită pe A. Din modul în care a fost construită funcţia f, rezultă că $f_n \xrightarrow{s} f$. Fie $\varepsilon > 0$ şi $N(\varepsilon)$, astfel ca pentru $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ şi $x \in A$ să avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Să luăm $m_0 \geqslant N(\varepsilon)$. Deoarece $f_n \xrightarrow{s} f$, avem $f_n - f_{m_0} \xrightarrow{s} f - f_{m_0}$ şi deoarece, pentru orice $x \in A$ avem

$$|f_n(x) - f_{m_0}(x)| < \varepsilon \text{ dacă } n \geqslant N(\varepsilon),$$

rezultă prin trecerea la limită că pentru orice $x \in A$ avem, de asemenea,

$$|f(x) - f_{m_0}(x)| < \varepsilon.$$

Cum m_0 a fost arbitrar $\geqslant N(\varepsilon)$, deducem că oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$ avem

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

adică $f_n \xrightarrow{u} f$.

Dăm acum un criteriu asemănător cu criteriul de convergenţă al şirurilor de numere.

Criteriul II. Fie (f_n) şi (φ_n) două şiruri de funcţii definite pe A şi f o funcţie definită pe A. Dacă avem

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varphi_n(x), \text{ pentru orice } n \in N \text{ şi orice } x \in A,$$

şi dacă $\varphi_n \xrightarrow{u} 0$, atunci $f_n \xrightarrow{u} f$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\varphi_n \xrightarrow{u} 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$, să avem $\varphi_n(x) < \varepsilon$. Atunci, cu atît mai mult, avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$, adică $f_n \xrightarrow{u} f$.

Observaţie. Avem $f_n \xrightarrow{u} f$ dacă şi numai dacă $f_n - f \xrightarrow{u} 0$. Criteriul precedent afirmă că dacă şirul de funcţii $f_n - f$ este majorat de un şir de funcţii uniform convergent către 0, atunci $f_n - f \xrightarrow{u} 0$.

Criteriul II se aplică adesea în cazul particular al următorului

Corolar. Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe A şi f o funcţie definită pe A. Dacă există un şir de numere (a_n) astfel încît să avem

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n, \text{ pentru orice } n \in N \text{ şi orice } x \in A$$

şi dacă $a_n \to 0$, atunci $f_n \xrightarrow{u} f$.

În adevăr, şirul de funcţii constante $\varphi_n(x) = a_n$ este uniform convergent către 0.

În exemplul 2 de mai sus am avut $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$, oricare ar fi $n \in N$ şi oricare ar fi $x \in [0, 2\pi]$, deci se poate aplica criteriul de mai sus.

4. Continuitatea şi convergenţa uniformă

Se ridică în mod natural întrebarea dacă o anumită proprietate, pe care o au toate funcţiile unui şir (f_n), o are şi limita f a acestui şir. Teorema următoare arată că prin *convergenţa uniformă*, proprietatea de *continuitate* a funcţiilor din şir se transmite şi asupra limitei. Vom presupune că $A \subset R$ (sau $A \subset R^n$).

Teoremă. Fie (f_n) un şir uniform convergent pe mulţimea $A \subset R$ către funcţia f. Dacă toate funcţiile f_n sînt continue într-un punct $a \in A$, atunci şi funcţia limită f este continuă în punctul a.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$, există $N = N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in A$ să avem

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

În particular, $|f_N(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Deoarece funcţia f este continuă în punctul a, pentru numărul ε ales, există o vecinătate V a lui a, astfel încît, oricare ar fi $x \in V \cap A$, să avem

$$|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Atunci, pentru orice $x \in V \cap A$, avem

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că f este continuă în a, şi teorema este demonstrată.

Corolar. Limita unui şir uniform convergent de funcţii continue pe A este o funcţie continuă pe A.

Observaţie. 1° Este posibil ca funcţiile (f_n) să nu fie continue, sau convergenţa să nu fie uniformă şi totuşi limita f a şirului să fie continuă.

5. Integrabilitatea şi convergenţa uniformă

Teorema următoare arată că proprietatea de integrabilitate se transmite, de asemenea, asupra limitei uniforme. Vom arăta mai întîi că şi proprietatea de mărginire se conservă prin convergenţa uniformă.

P r o p o z i ţ i e. **Dacă (f_n) este un şir de funcţii mărginite pe A şi uniform convergent către o funcţie f, atunci şi limita f este mărginită pe A.**

Să alegem $\varepsilon = 1$. Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$, există un număr $N = N(1)$, astfel încît oricare ar fi $x \in A$ să avem

$$|f(x) - f_N(x)| \leqslant 1, \text{ deci } |f(x)| \leqslant |f_N(x)| + 1.$$

Deoarece funcţia f_N este mărginită, există un număr M astfel încît oricare ar fi $x \in A$ să avem $|f_N(x)| \leqslant M$. Rezultă că

$$|f(x)| \leqslant M + 1, \text{ oricare ar fi } x \in A,$$

adică f este mărginită.

T e o r e m ă. **Dacă (f_n) este un şir uniform convergent de funcţii integrabile pe un interval $[a, b]$, atunci:**

1) funcţia f este integrabilă;

2) şirul integralelor $\left(\int_a^b f_n\, dx\right)$ este convergent, şi avem

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, \mathrm{d}x = \int_a^b f\, \mathrm{d}x.$$

Din criteriul de integrabilitate a lui Lebesgue rezultă că fiecare funcţie f_n este mărginită, iar mulţimea A_n a punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă.

Din propoziţia precedentă deducem în primul rînd că f este mărginită. Din teorema de la numărul precedent rezultă că mulţimea A a punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este conţinută în reuniunea mulţimilor A_n, deci A este neglijabilă. Aplicînd criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, rezultă că f este integrabilă pe $[a, b]$.

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$, există $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in [a, b]$ să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Rezultă atunci că

$$\int_a^b |f_n - f|\, \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Din relaţiile

$$\left|\int_a^b f_n \, dx - \int_a^b f \, dx \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \, dx \right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \, dx$$

deducem

$$\left|\int_a^b f_n \, dx - \int_a^b f \, dx \right| < \varepsilon, \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b f \, dx.$$

Observaţie. Deoarece $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, egalitatea demonstrată se scrie

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \, dx.$$

Teorema precedentă este numită adesea teorema de integrare termen cu termen a şirurilor de funcţii.

6. Derivabilitatea şi convergenţa uniformă

O altă proprietate care se păstrează prin convergenţa uniformă este aceea de a fi funcţii derivate (v. teorema 3).

Teorema 1. Fie (f_n) un şir de funcţii derivabile pe un interval I. Dacă:

1) şirul (f_n) este uniform convergent pe I către o funcţie f;

2) şirul derivatelor (f_n') este uniform convergent pe I către o funcţie g, atunci f este derivabilă pe I şi $f' = g$.

Demonstraţie. Fie $a \in I$ un punct oarecare; să arătăm că f este derivabilă în a şi că $f'(a) = g(a)$.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece şirul (f_n') este uniform convergent, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît dacă n, $m \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{oricare ar fi } x \in I.$$

Să alegem $n_0 > N(\varepsilon)$. Deoarece $f_m' \xrightarrow{u} g$, rezultă $f_{n_0}' - f_m' \xrightarrow{u} f_{n_0}' - g$; din inegalitatea precedentă deducem că

$$|f_{n_0}'(x) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{oricare ar fi } x \in I.$$

Deoarece funcţia f_{n_0} este derivabilă în a, pentru ε ales există o vecinătate U a lui a, astfel încît

$$\left|\frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)}{x - a} - f'_{n_0}(a)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

oricare ar fi $x \in U \cap I$.

Putem scrie, de asemenea,

$$\left|\frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - \frac{f_m(x) - f_m(a)}{x - a}\right| = \left|\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a))}{x - a}\right| =$$

$$= |f'_n(c) - f'_m(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dacă $n, m \geqslant N(\varepsilon)$, oricare ar fi $x \in I$, unde c este un anumit punct cuprins între x şi a (s-a aplicat teorema creşterilor finite funcţiei $f_n - f_m$).

Cum $f_m \xrightarrow{u} f$, avem $f_{n_0} - f_m \xrightarrow{u} f_{n_0} - f$; din inegalitatea precedentă, deducem, pentru $n = n_0$ şi $m \to \infty$,

$$\left|\frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)}{x - a} - \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Pentru orice $x \in U \cap I$ deducem atunci

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a)\right| \leqslant \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)}{x - a}\right| +$$

$$+ \left|\frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)}{x - a} - f'_{n_0}(a)\right| + |f'_{n_0}(a) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$) putem găsi o vecinătate U a lui a, astfel încît să avem

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a)\right| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in U \cap I.$$

Aceasta înseamnă că f este derivabilă în a şi că $f'(a) = g(a)$. Cum a a fost ales arbitrar, deducem că f este derivabilă pe I şi că $f' = g$.

Observaţii. 1° Deoarece $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ şi $g = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$, egalitatea $f' = g$ se scrie

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f'_n$$

(derivata limitei este egală cu limita derivatelor). De aceea teorema precedentă este numită *teorema de derivare termen cu termen a şirurilor de funcţii*.

2° Convergenţa uniformă a şirului (f_n) nu atrage convergenţa uniformă a şirului derivatelor.

Exemplu. $I = [0, \pi]$; $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$, $f(x) \equiv 0$. Avem $f_n \xrightarrow{u} f$. În adevăr

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n},$$

iar şirul $\left(\frac{1}{n}\right)$ are limita 0. Se aplică criteriul II de convergenţă uniformă.

Funcţiile (f_n) sînt derivabile pe I şi $f_n'(x) = -\sin nx$. Şirul derivatelor (f_n') nu este însă convergent pe I. Pentru $x = \frac{\pi}{2}$ avem $f_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin n\frac{\pi}{2}$. Acest şir se scrie, pentru $n = 1, 2, \ldots$, astfel:

$$-1, 0, 3, 0, -5, 0, 7, 0, \ldots$$

şi se vede că nu este convergent.

3° Convergenţa uniformă a şirului derivatelor este esenţială. Dacă şirul derivatelor $(f_n$ converge simplu, dar nu uniform, către g, atunci este posibil ca f să nu fie derivabilă, sau, dacă este derivabilă, este posibil ca $f' \neq g$.

Exemplu. $I = R$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg} nx$, $f(x) \equiv 0$.

Avem $f_n \xrightarrow{u} f$, deoarece

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n}\operatorname{arctg} nx\right| \leqslant \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}.$$

Funcţiile f_n sînt derivabile pe I şi $f_n'(x) = \frac{1}{1 + n^2x^2}$.

Şirul (f_n') converge simplu către funcţia

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \neq 0 \\ 1 \text{ dacă } x = 0. \end{cases}$$

Dacă şirul (f_n') ar converge uniform, limita sa g ar fi continuă, deoarece şi funcţiile f_n' sînt continue.

Cum funcţia g este discontinuă în origine, rezultă că şirul (f_n) nu converge uniform către g.

Funcţia f este derivabilă pe I şi avem $f'(x) \equiv 0$, dar $f' \neq g$, deoarece în origine avem $f'(0) = 0$ şi $g(0) = 1$.

4° Deşi convergenţa uniformă a şirului derivatelor este importantă, această condiţie este numai suficientă, dar nu şi necesară pentru concluzia teoremei.

Exemplu. $I = (0, \infty)$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg} nx$, $f(x) \equiv 0$. Avem $f_n \xrightarrow{u} f$. Avem apoi $f_n'(x) = \frac{1}{1 + n^2x^2}$, $g(x) \equiv 0$ şi $f_n' \xrightarrow{s} g$. Deşi şirul (f_n') nu converge uniform către g, avem totuşi $f' = g$.

Dacă intervalul I este *mărginit*, concluzia teoremei precedente rămîne adevărată şi dacă despre şirul (f_n) se ştie că este convergent într-un singur punct. În adevăr, dacă I este mărginit, restul ipotezelor implică convergenţa uniformă pe întregul intrval.

Teorema 2. Fie I un interval mărginit şi (f_n) un şir de funcţii derivabile pe I. Dacă:

1) şirul (f_n) este convergent într-un punct $x_0 \in I$;

2) şirul derivatelor (f_n') este uniform convergent pe I către o funcţie g, atunci

(i) şirul (f_n) este uniform convergent pe I către o funcţie f;

(ii) limita f este derivabilă pe I şi $f' = g$.

Avem de demonstrat doar punctul (i), deoarece punctul (ii) rezultă aplicînd teorema precedentă.

Să notăm cu l lungimea intervalului I. Presupunem $l > 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Din condiţiile 1 şi 2 deducem că există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $m \geqslant N(\varepsilon)$ să avem în acelaşi timp verificate următoarele inegalităţi:

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\varepsilon}{2l}, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Atunci

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + \\ + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.$$

Dacă notăm $h = f_n - f_m$, primul termen din dreapta se scrie

$$h(x) - h(x_0).$$

Funcţia h este derivabilă pe intervalul închis cu extremităţile în x şi x_0, deci i se poate aplica teorema creşterilor finite; există un număr c cuprins între x şi x_0 astfel încît

$$h(x) - h(x_0) = (x - x_0)\, h'(c),$$

de unde

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| = |x - x_0|\, |f_n'(c) - f_m'(c)| \leqslant \\ \leqslant l\, |f_n'(c) - f_m'(c)| < l\frac{\varepsilon}{2l} = \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru orice $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ şi orice $x \in I$. Urmează deci că

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

oricare ar fi $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in I$. Conform criteriului I de convergenţă uniformă, rezultă că şirul (f_n) converge uniform pe I către o funcţie f.

Fără nici o ipoteză asupra funcţiilor care se derivează, se poate enunţa următorul rezultat, relativ numai la derivate.

T e o r e m a 3. Limita g a unui şir uniform convergent (g_n) de funcţii derivate pe un interval oarecare I este o funcţie derivată.

Să presupunem întîi că intervalul I este mărginit şi fie $x_0 \in I$. Pentru fiecare n, fie f_n o primitivă a funcţiei g_n:

$$f_n' = g_n.$$

Putem alege primitivele f_n astfel încît să avem $f_n(x_0) = 0$. Sîntem acum în condiţiile teoremei precedente. Rezultă că şirul (f_n) este uniform convergent pe I către o funcţie derivabilă f şi că $f' = g$, deci g este, de asemenea, o derivată.

Să presupunem acum că intervalul I este nemărginit. Putem atunci construi un şir crescător (I_n) de intervale mărginite, a căror reuniune să fie egală cu I:

$$I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots \subset I \text{ şi } \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I.$$

Fie $x_0 \in I_1$, deci $x_0 \in I_n$ pentru fiecare n. Conform primei părţi a demonstraţiei, pe fiecare interval mărginit I_n, funcţia g este derivata unei funcţii F_n definită pe I_n. Putem alege funcţiile F_n astfel ca $F_n(x_0) = 0$. Să observăm că dacă un punct x face parte din două intervale I_n şi I_m, atunci avem $F_n(x) = F_m(x)$. În adevăr, dacă $I_n \subset I_m$ (adică dacă $n < m$), atunci funcţiile F_n şi F_m au pe intervalul I_n aceeaşi derivată g, deci diferenţa lor pe I_n este constantă; dar $F_n(x_0) = F_m(x_0) = 0$, deci $F_n(x) = F_m(x)$ pentru orice $x \in I_n$.

Să definim acum funcţia F pe întregul interval I astfel: dacă un punct x din I se află într-un interval I_n, atunci luăm $F(x) = F_n(x)$. Conform observaţiei de mai sus, numărul $F(x)$ este independent de alegerea particulară a intervalului I_n care conţine pe x.

Funcţia F este derivabilă pe I şi derivata sa este g. În adevăr, fie $a \in I$. Există un interval $I_n \ni a$, deci $F(a) = F_n(a)$. Dar F_n este derivabilă în a şi $F_n'(a) = g(a)$. Rezultă că F este derivabilă în a şi $F'(a) = F_n'(a) = g(a)$. Cum $a \in I$ a fost ales arbitrar, rezultă că F este derivabilă pe I şi $F' = g$, deci g este o derivată.

Observaţie. Teorema precedentă se poate enunţa şi astfel:

Dacă şirul (g_n) este uniform comvergent pe I către o funcţie g şi dacă funcţiile g_n au primitive pe I, atunci şi limita g are primitive pe I.

7. Aproximarea uniformă a funcţiilor continue

În teoremele care urmează se arată că funcţiile continue pot fi aproximate uniform cu funcţii aparţinînd unei mulţimi mai restrînse de funcţii continue.

Reamintim că o mulţime $\mathfrak{A}$ de funcţii continue definite pe o mulţime A este o algebră dacă suma şi produsul a două funcţii din $\mathfrak{A}$ aparţin lui $\mathfrak{A}$ şi produsul unei funcţii din $\mathfrak{A}$ cu un număr aparţine de asemenea lui $\mathfrak{A}$.

Un exemplu de algebră de funcţii continue pe R este mulţimea polinoamelor definite pe R, deoarece suma şi produsul a două polinoame este un polinom, iar produsul unui polinom cu un număr este de asemenea un polinom. Desigur, algebra polinoamelor pe R nu conţine toate funcţiile continue pe R.

Teorema lui Weierstrass-Stone*. **Fie intervalul compact $I = [a, b]$ şi $\mathfrak{A}$ o algebră de funcţii continue definite pe I. Dacă:**

1) funcţia identic egală cu 1 pe I, $f(x) \equiv 1$, aparţine lui $\mathfrak{A}$;

2) pentru orice puncte $x' \neq x''$ există o funcţie $f \in \mathfrak{A}$, astfel încît

$$f(x') \neq f(x'');$$

atunci orice funcţie continuă pe I este limita uniformă a unui şir de funcţii din $\mathfrak{A}$.

Nu dăm demonstraţia acestei teoreme.

O consecinţă a acestei teoreme este

Teorema lui Weierstrass. **Orice funcţie continuă pe un interval compact $I = [a, b]$ este limita uniformă pe I a unui şir de polinoame.**

Într-adevăr, dacă notăm cu $\mathfrak{P}$ algebra polinoamelor, funcţia identic egală cu 1 pe I, $f(x) \equiv 1$ este un polinom, deci aparţine algebrei $\mathfrak{P}$. Dacă $x' \neq x''$ sînt două puncte oarecare din I, pentru funcţia $f(x) = x$ avem $f(x') \neq f(x'')$; dar $f(x) = x$ este un polinom din $\mathfrak{P}$. Aşadar condiţiile teoremei precedente sînt îndeplinite, de unde rezultă teorema lui Weierstrass.

Observaţii. 1° Teorema precedentă afirmă doar că pentru o funcţie continuă f pe I există un şir (f_n) de polinoame uniform convergent către f, dar nu ne dă un procedeu să calculăm aceste polinoame.

Matematicianul sovietic S. N. Bernstein a dat o metodă prin care putem calcula, pentru o funcţie continuă f pe I, un şir (p_n) de polinoame uniform convergent către f. Aceste polinoame se numesc polinoamele lui Bernstein.

2° Dacă ne dăm un număr a, nu există numai un şir de numere (x_n) convergent către a. În mod analog, dacă ne dăm o funcţie continuă f pe I, nu există numai un şir (f_n) de polinoame uniform convergent către f. Polinoamele lui Bernstein formează doar unul din aceste şiruri.

8. Aproximarea funcţiilor continue prin funcţii poligonale

Fie I un interval. O funcţie f definită pe I se numeşte funcţie liniară dacă există două numere m şi n, astfel încît

$$f(x) = mx + n, \text{ pentru orice } x \in I.$$

Observaţie. Graficul unei funcţii liniare este un segment de dreaptă.

* Teorema rămîne valabilă dacă se înlocuieşte intervalul I cu un spaţiu compact oarecare.

Orice funcţie liniară $f(x) = mx + n$ are primitivele $F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + nx + C$.

Dacă I este mărginit, cu extremităţi în a şi b, $a < b$, am numit diviziune a intervalului I un număr de puncte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ astfel ca

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

O funcţie *continuă* f definită pe I se numeşte *funcţie poligonală* dacă există o diviziune a lui I,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

astfel încît restricţia funcţiei f la fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$ să fie liniară.

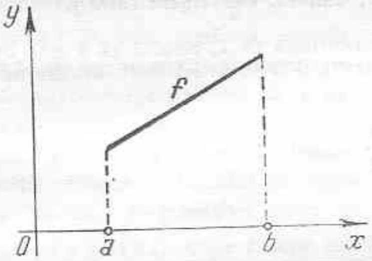


Fig. 166

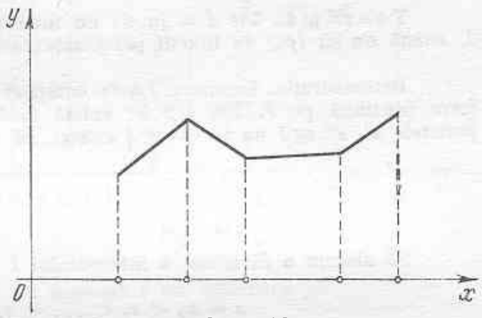


Fig. 167

Graficul unei funcţii poligonale este o linie poligonală.

Orice funcţie poligonală este continuă, deci are primitive. Putem însă demonstra direct acest fapt. Vom demonstra mai întîi următoarea

Lemă. Fie I_1 şi I_2 două intervale care au în comun cel puţin un punct x_0, şi f o funcţie definită pe $I = I_1 \cup I_2$. Dacă f are primitive pe fiecare din intervalele I_1 şi I_2, atunci f are primitive şi pe reuniunea lor I.

În adevăr, fie $F_1 : I_1 \to R$ o primitivă a lui f pe I_1:

$$F_1'(x) = f(x) \text{ pentru } x \in I_1$$

şi $F_2 : I_2 \to R$ o primitivă a lui f pe I_2:

$$F_2'(x) = f(x) \text{ pentru } x \in I_2.$$

Să observăm că, pe intersecţia $I_1 \cap I_2$, diferenţa $F_1 - F_2$ este constantă, deoarece cele două funcţii au derivate egale pe $I_1 \cap I_2$:

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \text{ pentru } x \in I_1 \cap I_2.$$

Avem atunci

$$F_1(x) - F_2(x) = F_1(x_0) - F_2(x_0) \text{ pentru } x \in I_1 \cap I_2.$$

Să definim acum funcţia F pe reuniunea $I_1 \cup I_2$ astfel:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{dacă } x \in I_1 \\ F_2(x) + F_1(x_0) - F_2(x_0) & \text{dacă } x \in I_2. \end{cases}$$

Dacă $x \in I_1 \cap I_2$, funcţia are aceeaşi valoare, prin cele două definiţii, deoarece $F_2(x) + F_1(x_0) - F_2(x_0) = F_2(x) + F_1(x) - F_2(x) = F_1(x)$. Funcţia F este derivabilă pe $I_1 \cup I_2$ şi derivata sa pe $I_1 \cup I_2$ este f, deci f are primitive pe $I_1 \cup I_2$. Din această lemă rezultă imediat următoarea

P r o p o z i ţ i e. Orice funcţie poligonală are primitive.

Într-adevăr, o funcţie poligonală este liniară pe intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$, deci are primitive pe fiecare din aceste intervale. Cum I_1 şi I_2 au în comun un punct, funcţia poligonală are primitive pe $I_1 \cup I_2$; dar $I_1 \cup I_2$ şi I_3 au în comun un punct, deci funcţia poligonală are primitive pe reuniunea $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ ş.a.m.d.

Teorema următoare arată că funcţiile continue pe intervale compacte pot fi aproximate uniform cu funcţii poligonale.

T e o r e m ă. Fie $I = [a, b]$ un interval compact. Pentru orice funcţie f continuă pe I, există un şir (p_n) de funcţii poligonale definite pe I, uniform convergent către f.

Demonstraţie. Deoarece I este compact şi f este continuă pe I, rezultă că f este uniform continuă pe I. Fie $\varepsilon > 0$; există deci un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi punctele $x', x'' \in I$ cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să alegem o diviziune a intervalului I

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

astfel ca distanţa dintre două puncte consecutive ale diviziunii să fie $< \delta(\varepsilon)$, adică

$$|x_{i+1} - x_i| < \delta(\varepsilon), \text{ pentru } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Să considerăm punctele din plan $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_i, f(x_i)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ şi să le unim prin segmente de dreaptă, în ordinea indicată de indici. Obţinem o linie poligonală, care defineşte o funcţie poligonală p_ε. Pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$, această funcţie p_ε este liniară:

$$p_\varepsilon(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \text{ pentru } x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}.$$

Pentru $x_{i+1} \leqslant x \leqslant x_i$, avem

$$p_\varepsilon(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

Pentru $x = x_i$, valoarea $p_\varepsilon(x)$ este aceeaşi, fie că o calculăm cu prima formulă, fie cu a doua formulă: $p_\varepsilon(x_i) = f(x_i)$.

Să arătăm că $|p_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$, oricare ar fi $x \in I$.

Fie, într-adevăr, un punct oarecare $x \in I$. Punctul x aparţine unui interval $[x_{i+1}, x_i]$, şi deci

$$|p_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) - f(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x_i) - f(x)| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \left| \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right|.$$

Dar, deoarece $|x_{i+1} - x_i| < \delta(\varepsilon)$ şi $|x - x_i| < \delta(\varepsilon)$, avem

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ şi } |f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ţinînd seama că $|x - x_i| \leqslant |x_{i+1} - x_i|$ avem $\left|\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right| \leqslant 1$, şi deci:

$|p_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Dacă, în particular, luăm $\varepsilon = \frac{1}{n}$ şi notăm cu p_n funcţia poligonală corespunzătoare, avem: $|p_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ oricare ar fi $x \in I$ şi deci, conform criteriului II de convergenţă uniformă, şirul (p_n) converge uniform pe I către f.

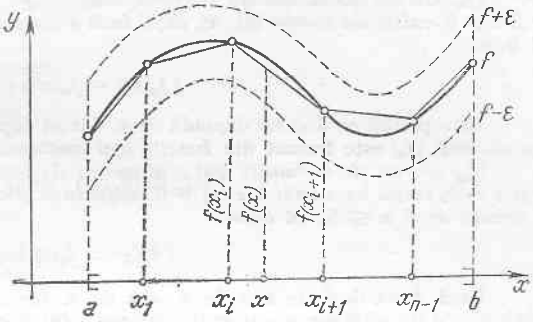


Fig. 168

Putem da acum o demonstraţie directă a faptului că funcţiile continue au primitive.

Corolar. **Orice funcţie continuă f pe un interval I are primitive pe I.**

Să presupunem întîi că intervalul I este compact. Atunci există un şir (p_n) de funcţii poligonale, uniform convergent către f pe intervalul I. Cum funcţiile poligonale p_n au primitivele pe I, rezultă că şi limita lor uniformă, f, are primitive pe I.

Dacă I nu este compact, există un şir crescător (I_n) de intervale compacte, a căror reuniune este I:

$$I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots \subset I, \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I.$$

Fie $x_0 \in I_1$; atunci $x_0 \in I_n$ oricare ar fi n.

Pe fiecare interval compact I_n, funcţia f are primitive; fie F_n o primitivă a lui f pe, intervalul I_n. În plus, putem alege primitivele F_n astfel ca $F_n(x_0) = 0$. Două primitive F_n şi F_m coincid pe $I_n \cap I_m$. Definim acum funcţia F pe intervalul I, astfel:

$$F(x) = F_n(x) \text{ dacă } x \in I_n.$$

Funcţia $F(x)$ este perfect definită pe I, este derivabilă şi derivata sa pe I este f, deci f are primitive pe I.

9. Şiruri de funcţii egal continue şi egal mărginite

Fie A o mulţime de numere* şi (f_n) un şir de funcţii definite pe A. A spune că (f_n) este un şir de funcţii continue pe A înseamnă a spune că fiecare funcţie din şir este continuă în fiecare punct $x \in I$, adică

* A poate fi un spaţiu topologic oarecare, pentru funcţii f_n continue, şi un spaţiu uniform pentru funcţii f_n uniform continue.

(f_n) este un şir de funcţii continue pe A, dacă, oricare ar fi $n \in N$, oricare ar fi $x \in A$ şi oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon, x, n) > 0$ astfel încît oricare ar fi $x' \in A$, cu $|x' - x| < \delta(\varepsilon, x, n)$, să avem

$$|f_n(x') - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Dacă funcţiile din şir sînt uniform continue pe A, atunci δ nu mai depinde de punctul x, deci afirmaţia relativă la x trebuie să figureze după afirmaţia relativă la δ:

(f_n) este un şir de funcţii uniform continue pe A, dacă, oricare ar fi $n \in N$ şi oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon, n)$, astfel încît oricare ar fi $x', x'' \in A$, cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon, n)$ să avem

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Este posibil ca δ să nu depindă de n, dar să depindă de punctul x. Vom spune în acest caz că şirul (f_n) este format din funcţii *egal continue:*

(f_n) este un şir de funcţii egal continue pe A, dacă, oricare ar fi punctul $x \in A$ şi oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon, x) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x' \in A$ cu $|x' - x| < \delta(\varepsilon, x)$ şi oricare ar fi $n \in N$, să avem

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon.$$

Dacă δ nu depinde nici de x, nici de n, funcţiile din şir sînt pe de o parte uniform continue, pe de altă parte sînt egal continue, sînt deci *egal uniform continue*: atunci afirmaţiile relative la x şi n trebuie să figureze după afirmaţia relativă la δ:

(f_n) este un şir de funcţii egal uniform continue pe A, dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi $x', x'' \in A$ cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $n \in N$, să avem

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Vom spune că şirul (f_n) este format din funcţii *mărginite pe A* dacă fiecare funcţie este mărginită pe A, deci:

(f_n) este un şir de funcţii mărginite pe A, dacă, oricare ar fi $n \in N$, există un număr $M(n)$, astfel încît, oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_n(x)| < M(n).$$

Dacă M nu depinde de n, adică dacă toate funcţiile sînt mărginite de acelaşi număr M, vom spune că funcţiile din şir sînt *egal mărginite*. În acest caz, afirmaţia relativă la n trebuie să figureze după afirmaţia relativă la M:

(f_n) este un şir de funcţii egal mărginite pe A, dacă există un număr M, astfel încît, oricare ar fi $n \in N$ şi oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_n(x)| < M.$$

Dacă (f_n) este un şir de funcţii mărginite şi uniform convergent pe o mulţime A, atunci (f_n) este un şir de funcţii egal mărginite.

În adevăr, limita f a şirului este mărginită, deci există $M > 0$ astfel încît să avem $|f(x)| \leqslant M$, pentru orice $x \in A$. Deoarece şirul este uniform convergent, luînd $\varepsilon = 1$, există un număr $N = N(1)$, astfel încît pentru orice $n \geqslant N$ şi orice $x \in A$ să avem $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$, deci $|f_n(x)| \leqslant |f(x)| + 1 \leqslant M + 1$.

Dacă pentru fiecare $n < N$ alegem un număr M_n astfel ca

$$|f_n(x)| \leqslant M_n \text{ pentru orice } x \in A$$

şi notăm $K = \max(M_1, M_2, \ldots, M_{N-1}, M + 1)$, atunci

$$|f_n(x)| \leqslant K, \text{ pentru orice } n \in N \text{ şi orice } x \in A,$$

deci (f_n) este un şir de funcţii egal mărginite.

Rezultă de aici că *un şir uniform convergent de funcţii continue pe un interval compact este egal mărginit.*

S-a arătat la capitolul despre şiruri că din orice şir mărginit se poate extrage un subşir convergent (Lema lui Cesàro). Are loc o teoremă asemănătoare pentru şiruri de funcţii, dacă înlocuim proprietatea de mărginire a şirurilor de numere cu proprietatea de egală mărginire şi egală continuitate a şirurilor de funcţii şi convergenţa şirurilor de numere cu convergenţa uniformă a şirurilor de funcţii:

Teoremă (Arzela). **Fie $I = [a, b]$ un interval compact. Din orice şir (f_n) de funcţii definite pe I, egal continue şi egal mărginite, se poate extrage un subşir $(f_{n_p})_{p \in N}$ uniform convergent pe I.**

Nu dăm demonstraţia acestei teoreme.

§ 4. Serii de funcţii

1. Convergenţa simplă şi uniformă

Fie A o mulţime oarecare şi $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un şir de funcţii reale definite pe A. Putem considera seria de funcţii

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

formată din termenii şirului de funcţii (f_n), despărţite între ele prin semnul $+$. Pentru fiecare punct $a \in A$, să considerăm seria de numere

$$f_1(a) + f_2(a) + \ldots + f_n(a) + \ldots$$

formată cu valorile funcţiilor din şirul (f_n) în punctul a.

O serie de funcţii este deci echivalentă cu o familie de serii de numere, şi anume pentru fiecare punct din A, cîte o serie de numere. Vom însemna prescurtat o serie de funcţii astfel:

$$\sum f_n \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ sau } \sum_{n \in N} f_n \text{ sau } \sum_n f_n.$$

Putem aplica seriilor de funcţii atît consideraţiile făcute asupra seriilor de numere, cît şi consideraţiile făcute asupra şirurilor de funcţii.

Să considerăm, ca şi pentru seriile de numere, sumele parţiale ale seriei de funcţii $\sum_n f_n$:

$$\begin{aligned} S_1 &= f_1 \\ S_2 &= f_1 + f_2 \\ S_3 &= f_1 + f_2 + f_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n &= f_1 + f_2 + \ldots + f_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

În acest caz, sumele parţiale sînt funcţii definite pe A. Vom spune că seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$ este convergentă într-un punct $a \in A$, dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este un şir de funcţii convergent în punctul a.

Dacă seria $\sum\limits_n f_n$ este convergentă în punctul $a \in A$, vom spune că a este *punct de convergenţă* al seriei.

A spune că a este punct de convergenţă al seriei $\sum\limits_n f_n$ înseamnă a spune că şirul de numere $(S_n(a))$ este convergent. Dar $S_n(a)$ sînt sumele parţiale ale seriei de numere

$$f_1(a) + f_2(a) + \ldots + f_n(a) + \ldots$$

Aşadar:

Seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$ este convergentă într-un punct $a \in A$ dacă şi numai dacă seria de numere $\sum\limits_n f_n(a)$ (formată cu valorile în punctul a ale funcţiilor f_n) *este convergentă.*

Vom spune că seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$ este absolut convergentă în punctul $a \in A$, dacă seria de numere $\sum\limits_n f_n(a)$ este absolut convergentă.

Mulţimea $N \subset A$ formată din toate punctele de convergenţă ale seriei de funcţii $\sum\limits_n f_n$ se numeşte *mulţimea de convergenţă* a seriei de funcţii $\sum\limits_n f_n$.

Definiţie. Fie $\sum\limits_n f_n$ o serie de funcţii definite pe A, şi f o funcţie definită pe o submulţime $B \subset A$.

Vom spune că seria $\sum\limits_n f_n$ este simplu (sau punctual) convergentă pe B către funcţia f, dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este simplu convergent pe B către f, adică dacă, pentru fiecare $x \in B$, seria de numere $\sum\limits_n f_n(x)$ este convergentă către $f(x)$.

Vom spune că seria $\sum\limits_n f_n$ este uniform convergentă pe B către f, dacă şirul de funcţii (S_n) este uniform convergent pe B către f.

Funcţia f se numeşte suma seriei $\sum f_n$ pe mulţimea B.

Este util să dăm şi altă formă echivalentă definiţiei de mai sus.

Seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$ este simplu convergentă pe B către f, dacă, pentru orice $x \in B$, şi orice $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon, x)$, astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon, x)$, să avem $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sau

$$|f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dacă N nu depinde de x, ci numai de ε, seria este uniform convergentă pe B către f. În acest caz, afirmaţia relativă la x trebuie să figureze după afirmaţia relativă la N:

Seria de funcţii $\sum_n f_n$ *este uniform convergentă pe B către f, dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in B$, să avem:*

$$|f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Exemple. 1) Pentru fiecare număr întreg $n \geqslant 0$, să considerăm funcţia f_n definită pe R prin egalitatea $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ şi să considerăm seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Mulţimea de convergenţă a acestei serii este toată dreapta. Într-adevăr, fie $x \in R$ un punct oarecare; să considerăm seria de numere

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots$$

Aceasta este o serie geometrică cu raţia $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$, deci este convergentă. Dacă $x = 0$, suma seriei este 0. Dacă $x \neq 0$, suma seriei este

$$x^2 \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{\dfrac{x^2}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Dacă notăm cu f funcţia definită pe R prin egalităţile

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0, \end{cases}$$

deducem că seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este simplu convergentă pe R către funcţia f. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă pe R, deoarece, pentru fiecare $x \in R$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este formată din numere pozitive.

2) Pentru fiecare număr întreg $n \geqslant 1$, să considerăm funcţia f_n definită pe R prin $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{n^2}$, şi seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Această serie este absolut convergentă pe toată dreapta. Într-adevăr, dacă $x \in R$ este un punct oarecare, obţinem seria de numere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin^2 x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin^n x}{n^2} + \ldots$$

Avem $\left|\dfrac{\sin^n x}{n^2}\right| < \dfrac{1}{n^2}$ şi, cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha = 2$), deducem din criteriul comparaţiei că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\sin^n x}{n^2}\right|$ este convergentă, adică seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^n x}{n^2}$ este absolut convergentă.

Se va arăta că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe R.

3) Pentru fiecare $n \in N$, fie f_n funcţia definită pe R prin egalitatea $f_n(x) = \cos^n x$. Să considerăm seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Pentru $x = k\pi$ (k întreg), obţinem seria de numere

$$\sum_n f_n(k\pi) = \cos k\pi + \cos^2 k\pi + \ldots + \cos^n k\pi + \ldots$$

Pentru k par, obţinem seria $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$

Pentru k impar, obţinem seria $-1 + 1 - 1 + \ldots$

În ambele cazuri, seria este divergentă.

Pentru $x \neq k\pi$, seria este însă absolut convergentă, cum se poate constata aplicînd criteriul rădăcinii al lui Cauchy:

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|\cos^n x|} = |\cos x| < 1.$$

Mulţimea de convergenţă a acestei serii este deci $R - \{k\pi\}_{k \in Z}$.

4) Pentru fiecare $n \in N$ să considerăm funcţia f_n definită pe R prin egalitatea $f_n(x) = \dfrac{e^{n|x|}}{n}$, şi seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Această serie nu este absolut convergentă în nici un punct. Într-adevăr, dacă $x \in R$ este oarecare, obţinem seria de numere

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{e^{|x|}}{1} + \frac{e^{2|x|}}{2} + \frac{e^{3|x|}}{3} + \ldots + \frac{e^{n|x|}}{n} + \ldots$$

şi cum $e^{n|x|} > 1$, avem $\dfrac{e^{n|x|}}{n} > \dfrac{1}{n}$; termenii acestei serii sînt mai mari decît termenii corespunzători ai seriei armonice $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, care este divergentă. Din criteriul comparaţiei, deducem că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{n|x|}}{n}$ este divergentă.

Mulţimea de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este vidă.

5) Fie (a_n) un şir de numere şi pentru fiecare n să considerăm funcţia constantă $f_n(x) = a_n$ definită pe o mulţime A. Dacă seria numerică $\sum a_n$ este convergentă, atunci seria de funcţii $\sum f_n$ este uniform convergentă pe A.

2. Restul seriei

Să considerăm seria de funcţii definite pe o mulţime A:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k = f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+p} + \ldots$$

Această serie se numeşte restul de rang n al seriei $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$. Dacă restul de rang n este o serie convergentă pe A, vom nota cu R_n suma sa. R_n va fi numit de asemenea restul de ordinul n al seriei $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$.

P r o p o z i ţ i e. O serie de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ definite pe A este convergentă (simplu sau uniform) pe A, dacă şi numai dacă restul său de orice rang este convergent (simplu sau uniform) pe A.

Într-adevăr, să notăm cu

$$S_m = f_1 + f_2 + \ldots + f_m$$

sumele parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ şi cu

$$\sigma_p = f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+p}$$

sumele parţiale ale restului de ordin n. Avem

$$S_{n+p} = S_n + \sigma_p.$$

Din această egalitate deducem că şirul de funcţii $(S_{n+p})_{1 \leq p < \infty}$ este simplu (sau uniform) convergent pe A, dacă şi numai dacă şirul de funcţii $(\sigma_p)_{1 \leq p < \infty}$ este simplu (sau uniform) convergent pe A. Adică seria $\sum_n f_n$ este simplu (sau uniform) convergentă pe A, dacă şi numai dacă restul de ordin n este o serie simplu (sau uniform) convergentă pe A.

O b s e r v a ţ i i. 1°. Din demonstraţie rezultă că, dacă un singur rest este convergent (simplu sau uniform) pe A, atunci seria este convergentă (simplu sau uniform) pe A. Rezultă atunci că orice rest este convergent (simplu sau uniform) pe A.

2°. Dacă notăm cu f suma seriei f_n şi cu R_n suma restului de rang n, rezultă atunci că avem

$$f = S_n + R_n.$$

P r o p o z i ţ i e. **Fie $\sum\limits_{n} f_n$ o serie de funcţii convergentă pe A. Seria este simplu (sau uniform) convergentă pe A către o funcţie f, dacă şi numai dacă şirul (R_n) al resturilor este un şir de funcţii simplu (sau uniform) convergent către 0 pe A.**

Într-adevăr, din egalitatea $f = S_n + R_n$, deducem

$$f - S_n = R_n.$$

Atunci, conform definiţiei, seria este simplu (sau uniform) convergentă pe A către f, dacă şi numai dacă şirul (S_n) al sumelor parţiale este simplu (sau uniform)convergent pe A către f, adică dacă şi numai dacă $(f - S_n) = (R_n)$ este simplu (sau uniform) convergent către 0 pe A.

Exemplu. Să considerăm funcţiile $f_n : R \to R$ definite astfel:

$$f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^2}{(1 + x^2)^n}, \text{ şi seria de funcţii } \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Fie x un punct oarecare din R. Să considerăm restul R al seriei. Seria de numere

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} - \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^3} - \frac{x^2}{(1 + x^2)^4} + \dots$$

fiind alternată, iar şirul termenilor fiind descrescător şi convergent către 0, diferenţa $S_n(x) - (Sx)$ este mai mică decît termenul

$$|u_{n+1}| = \frac{x^2}{(1 + x^2)^{n+1}}.$$

Cum

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x),$$

avem

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^2}{(1 + x^2)^{n+1}} = \frac{x^2}{1 + (1 + n)x^2 + \dots + x^{2n+2}} \leqslant \frac{x^2}{(1 + n)x^2} \leqslant \frac{1}{1 + n}.$$

Deoarece şirul $\left(\frac{1}{1 + n}\right)$ are limita zero, şirul resturilor (R_n) este uniform convergent către 0 pe R, şi deci seria este uniform convergentă pe R. Seria este deasemenea absolut convergentă pe R, deoarece s-a arătat că seria

$$\Sigma |f_n(x)| = \Sigma \frac{x^2}{(1 + x^2)^n}$$

este convergentă.

3. Criterii de convergenţă uniformă

Aceste criterii se deduc din cele corespunzătoare de la şirurile de funcţii combinate cu cele de la seriile de numere.

C r i t e r i u l I (Cauchy). O serie de funcţii Σf_n definite pe A, este uniform convergentă pe A, dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$ şi oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Într-adevăr, dacă notăm cu (S_n) sumele parţiale ale seriei, avem

$$S_{n+p} - S_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+p}.$$

Seria este uniform convergentă pe A, dacă şi numai dacă şirul de funcţii (S_n) este uniform convergent pe A; după criteriul lui Cauchy pentru şiruri de funcţii, şirul (S_n) este uniform convergent pe A, dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricît ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$, $p \geqslant 1$ şi oricare ar fi $x \in A$, avem:

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$

adică

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Exemplu. Dacă $f_n(x) = u_n$ este o funcţie constantă definită pe R şi dacă seria de numere $\sum u_n$ este convergentă, atunci seria de funcţii $\sum_n f_n$ este uniform convergentă pe R.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece seria $\sum u_n$ este convergentă, există $N(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$, să avem

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Atunci, oricare ar fi $x \in R$, $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$, avem

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

deci seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe R.

Din criteriul lui Cauchy vom deduce alt criteriu foarte util în aplicaţii.

C r i t e r i u l II. Fie $\sum f_n$ şi $\sum \varphi_n$ două serii de funcţii definite pe A. Dacă avem

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi_n(x), \text{ pentru orice } n \in N \text{ şi orice } x \in A$$

şi dacă seria $\sum \varphi_n$ este uniform convergentă pe A, atunci şi seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe A.

Fie $\varepsilon > 0$. Aplicînd seriei $\sum \varphi_n$ criteriul precedent de convergenţă uniformă, găsim un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$ şi oricare ar fi $x \in A$ să avem

$$\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots + \varphi_{n+p}(x) < \varepsilon.$$

Atunci, pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$, $p \geqslant 1$ şi $x \in A$ avem

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \ldots$$
$$\ldots + |f_{n+p}(x)| \leqslant \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots + \varphi_{n+p}(x) < \varepsilon$$

şi deci, conform primului criteriu de convergenţă uniformă, seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe A.

Criteriul II se aplică adesea în cazul particular al următorului:

Corolar. Fie $\sum f_n$ o serie de funcţii definite pe A şi $\sum a_n$ o serie convergentă de numere pozitive. Dacă avem

$$|f_n(x)| \leqslant a_n, \text{ pentru orice } n \in N \text{ şi orice } x \in A,$$

atunci seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe A.

În adevăr, punînd $\varphi_n(x) = a_n$, seria de funcţii constante $\sum \varphi_n$ este uniform convergentă.

Observaţie. Din acest corolar deducem că este suficient să majorăm o serie de funcţii printr-o serie convergentă de numere, pentru a deduce că seria de funcţii este uniform convergentă.

Exemple. 1) Fie seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$, unde pentru fiecare $n \in N$, funcţia f_n este definită pe R prin $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{n^2}$. Pentru orice $x \in R$ şi orice $n \in N$ avem

$$\frac{|\sin^n x|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Cum seria de numere $\sum \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă, deducem că seria de funcţii $\sum f_n$ este uniform convergentă pe R.

2) Pentru fiecare $n \in N$ să considerăm funcţia f_n definită pe R prin $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$, şi să considerăm seria de funcţii $\sum f_n$. Această serie este convergentă pe $(1, +\infty)$, deoarece dacă $x > 1$, obţinem seria armonică generalizată, cu exponentul $x > 1$:

$$\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \cdots$$

Pentru $x < 1$, seria este divergentă. Dacă $1 < a < +\infty$, seria este uniform convergentă pe $(a, +\infty)$, deoarece dacă $x \geqslant a$, atunci $n^x \geqslant n^a$, deci $\dfrac{1}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^a}$, şi seria $\sum\limits_n \dfrac{1}{n}$ este convergentă.

4. Continuitatea, integrabilitatea şi derivabilitatea seriilor uniform convergente

Teorema 1*. Fie $\sum f_n$ o serie de funcţii, uniform convergentă pe o mulţime* $A \subset R$, către o funcţie f. Dacă toate funcţiile f_n sînt continue într-un punct $x_0 \in A$ (sau pe A), atunci şi funcţia sumă f este continuă în x_0 (respectiv pe A).

În adevăr, sumele parţiale $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ sînt funcţii continue în x_0 (respectiv pe A), iar şirul (S_n) converge uniform pe A către f. Se aplică apoi teorema corespunzătoare de la şirurile de funcţii.

Teorema 2. Fie $\sum f_n$ o serie de funcţii, uniform convergentă pe un interval $[a, b]$ către o funcţie f. Dacă toate funcţiile f_n sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci:

1) **funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$,**

2) **seria integralelor $\sum \int_a^b f_n \, dx$ este convergentă şi**

$$\sum \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b f \, dx.$$

În adevăr, sumele parţiale $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ sînt funcţii integrabile pe $[a, b]$, iar şirul (S_n) converge uniform către f. Din teorema de integrare termen cu termen a şirurilor de funcţii rezultă că f este integrabilă pe $[a, b]$, că şirul integralelor $\left(\int_a^b S_n \, dx\right)$ este convergent şi

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b S_n \, dx = \int_a^b f \, dx.$$

Dar

$$\int_a^b S_n \, dx = \int_a^b f_1 \, dx + \ldots + \int_a^b f_n \, dx,$$

* A poate fi orice spaţiu topologic.

deci sumele parţiale ale seriei $\sum \int_a^b f_n \, dx$ converg către $\int_a^b f \, dx$, adică

$$\sum \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b f \, dx.$$

Observaţie. Deoarece $f = \sum f_n$, egalitatea precedentă se scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, dx,$$

iar teorema precedentă se numeşte teorema de integrare termen cu termen a seriilor de funcţii.

T e o r e m a 3. Fie $\sum f_n$ o serie de funcţii derivabile pe un interval I. Dacă:

1) seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe I către o funcţie f,

2) seria derivatelor $\sum f'_n$ este uniform convergentă pe I către o funcţie g,

atunci f este derivabilă pe I şi $f' = g$.

Considerăm sumele parţiale $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ care formează un şir de funcţii derivabile pe I şi uniform convergent către f. Derivatele $S'_n = f'_1 + \ldots + f'_n$ sînt sumele parţiale ale seriei derivatelor $\sum f'_n$, deci şirul (S'_n) converge uniform către g. Din teorema de derivare termen cu termen a şirurilor de funcţii deducem că f este derivabilă pe I şi că $f' = g$.

Observaţie. Deoarece $f = \sum f_n$ şi $g = \sum f'_n$, egalitatea $f' = g$ se scrie

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n,$$

iar teorema precedentă se numeşte teorema de derivare termen cu termen a seriilor de funcţii.

În cazul intervalelor mărginite avem teorema următoare:

T e o r e m a 4. Fie I un interval mărginit şi $\sum f_n$ o serie de funcţii derivabile pe I. Dacă:

1) seria $\sum f_n$ este convergentă într-un punct $x_0 \in I$,

2) seria derivatelor $\sum f'_n$ este uniform convergentă pe I către o funcţie g, atunci:

(i) seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe I către o funcţie f;

(ii) funcţia f este derivabilă şi $f' = g$.

În adevăr sumele parţiale $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ formează un şir de funcţii derivabile, convergent în x_0, iar şirul derivatelor $(S'_n) = (f'_1 + \ldots + f'_n)$ este uniform convergent către g. Se aplică atunci teorema corespunzătoare de la şirurile de funcţii.

Teorema 5. Suma unei serii uniform convergente $\sum g_n$ de funcţii derivate pe un interval oarecare I este o funcţie derivată.

Ca şi în cazul teoremelor precedente se aplică şirului sumelor parţiale $S_n = g_1 + \ldots + g_n$ teorema corespunzătoare de la şirurile de funcţii.

Acest corolar se poate enunţa şi astfel:

Dacă seria $\sum g_n$ este uniform convergentă pe I către o funcţie g şi dacă funcţiile g_n au primitive pe I, atunci şi g are primitive pe I.

5. Operaţii cu serii de funcţii

Dacă A_1 este mulţimea de convergenţă a seriei $\sum f_n$ şi f suma acestei serii, iar A_2 este mulţimea de convergenţă a seriei $\sum g_n$ şi g suma sa, atunci:

1) *Seria sumă $\sum (f_n + g_n)$ este convergentă pe $A_1 \cap A_2$ şi are suma $f + g$.*

2) *Seria $\sum \alpha f_n$ este convergentă pe A_1 şi are suma αf.*

Aceste afirmaţii se demonstrează luînd seriile de numere $\sum f_n(x)$ şi $\sum g_n(x)$ şi folosind proprietăţile seriilor de numere.

§ 5. Serii de puteri

1. Definiţia seriilor de puteri

Numim o serie de puteri, o serie de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ definite pe R, unde fiecare funcţie f_n este produsul dintre un număr a_n şi o funcţie putere x^n, $f_n(x) = a_n x^n$, $(n \in N)$.

Aşadar, o serie de puteri are forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \text{ pentru } x \in R,$$

unde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sînt numere. Numărul a_n se numeşte coeficientul termenului de rang n. O serie de puteri se scrie prescurtat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sau $\sum a_n x^n$.

Toate rezultatele privind seriile de funcţii sînt valabile, evident, şi pentru seriile de puteri.

În studiul seriilor de puteri, ne interesează în primul rînd mulţimea de convergenţă a seriei. Pentru seriile de puteri mulţimea de convergenţă nu este vidă. Ea conţine cel puţin punctul 0, deoarece pentru $x = 0$, seria se scrie

$$a_0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

şi este evident convergentă, suma sa fiind a_0.

Există serii de puteri pentru care mulţimea de convergenţă se reduce numai la 0.

Exemplu. Fie seria de puteri

$$1 + x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots + n^nx^n + \ldots$$

Această serie este convergentă numai în punctul 0. Într-adevăr, fie $x_0 \neq 0$. Să arătăm că seria de numere

$$1 + x_0 + 2^2x_0^2 + \ldots + n^nx_0^n + \ldots$$

este divergentă. Avem $|n^nx_0^n| = (|nx_0|)^n$. Dacă $n > \left|\frac{1}{x_0}\right|$, atunci $n|x_0| > 1$ şi deci $(|nx_0|)^n > 1$.

Rezultă că şirul termenilor seriei $(n^nx_0^n)$ nu este convergent către 0, şi deci seria este divergentă.

Este posibil ca mulţimea de convergenţă a unei serii să fie toată dreapta R.

Exemplu. Fie seria de puteri

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Fie $x_0 \in R$ un punct oarecare. Să considerăm seria de numere

$$1 + \frac{x_0}{1!} + \frac{x_0^2}{2!} + \ldots + \frac{x_0^n}{n!} + \ldots$$

şi să-i aplicăm criteriul raportului; avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x_0^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x_0^n|} = \frac{|x_0|}{n+1}.$$

Şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita $k = 0 < 1$, deci seria de numere este absolut convergentă.

Cum x_0 a fost arbitrar, rezultă că seria de puteri este convergentă în orice punct de pe dreaptă, adică mulţimea de convergenţă a seriei este toată dreapta.

2. Raza de convergenţă

Despre mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri ne dă informaţii teorema următoare:

Teorema I a lui Abel. Pentru orice serie de puteri $\sum a_n x^n$ există un număr R astfel ca $0 \leq R \leq +\infty$ şi astfel încît:

1) Seria este absolut convergentă pe intervalul deschis $(-R, R)$.

2) Pentru orice x, astfel ca $|x| > R$, seria este divergentă.

Pentru orice număr $0 < r < R$, seria este uniform convergentă pe intervalul închis $[-r, r]$.

Numărul R care îndeplineşte condiţiile 1 şi 2 se numeşte raza de convergenţă a seriei de puteri, iar intervalul $(-R, R)$ se numeşte intervalul de convergenţă al seriei de puteri.

Demonstraţie. Dacă seria de puteri este convergentă numai în punctul 0, luînd $R = 0$, teorema este demonstrată.

Vom presupune deci că mulţimea de convergenţă conţine puncte diferite de 0. Fie atunci $x_0 \neq 0$ un punct, în care seria este convergentă, adică astfel ca seria de numere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ să fie convergentă. Termenii acestei serii formează un şir $(a_n x_0^n)$ convergent către 0, deci acest şir este mărginit. Există atunci un număr M astfel încît să avem:

$$|a_n x_0^n| < M \text{ pentru } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Fie x un punct oarecare astfel ca $|x| < |x_0|$. Avem

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Cum $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ este convergentă şi, conform criteriului comparaţiei, rezultă că şi seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

este convergentă, adică seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este *absolut convergentă*.

Aşadar, dacă $x_0 \neq 0$ este un punct de convergenţă al seriei, atunci orice punct x pentru care $|x| < |x_0|$, este punct de convergenţă *absolută* a seriei. Rezultă că mulţimea de convergenţă conţine întreg intervalul $(-|x_0|, |x_0|)$.

De aici deducem că dacă x_1 este un punct de divergenţă al seriei, atunci orice punct x pentru care $|x| > |x_1|$ este punct de divergenţă al seriei.

Într-adevăr, dacă ar exista un punct x_0, cu $|x_0| > x_1$ în care seria este convergentă, atunci, după cele demonstrate mai sus, seria ar fi convergentă şi în x_1 (deoarece $|x_1| < |x_0|$), ceea ce este fals.

Să notăm cu A mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.

Avem evident $0 \in A$. Luăm $R = \sup A$. Avem $R > 0$. Să arătăm că R este raza de convergenţă a seriei, dacă R îndeplineşte condiţiile 1 şi 2.

1) Fie $x \in (-R, R)$. Avem $|x| < R$. Există deci un punct $x_0 \in A$ cuprins între $|x|$ şi R, $|x| < x_0 < R$. Cum x_0 este punct de convergenţă al seriei, din cele de mai sus rezultă că seria este absolut convergentă în x, deoarece $|x| < x_0$.

2) Dacă $R = +\infty$, inegalitatea $|x| > R$ nu are sens, deci în acest caz condiţia 2 din enunţul teoremei este de prisos.

Să presupunem deci $R < +\infty$. Fie x un punct astfel ca $|x| > R$. Dacă x ar fi punct de convergenţă, atunci orice punct y, astfel ca $R < y < |x|$, ar fi punct de convergenţă, deci $y \in A$, deci R n-ar mai fi marginea superioară a mulţimii A. Am ajunge la o contradicţie. Aşadar, dacă $|x| > R$, seria este divergentă în punctul x.

Astfel, numărul R definit mai sus este raza de convergenţă a seriei.

Rămîne de demonstrat ultima parte a teoremei. Fie r un număr astfel ca $0 < r < R$. Urmează că r este un punct de convergenţă absolută a seriei, adică seria de numere pozitive $\sum |a_n r^n| = \sum |a_n| r^n$ este convergentă.

Pentru orice $x \in [-r, r]$, avem $|x| < r$, şi deci

$$|a_n x^n| = |a_n| \, |x^n| < |a_n| r^n.$$

Conform criteriului II de convergenţă uniformă a seriilor de funcţii, rezultă că seria $\sum\limits_n a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

O b s e r v a ţ i e. În cazul cînd $0 < R < +\infty$, teorema lui Abel nu spune cum se comportă seria de puteri în punctele $-R$ şi R, extremităţile intervalului de convergenţă. Se poate întîmpla ca unul din aceste puncte sau ambele să fie puncte de divergenţă, sau unul din ele sau ambele să fie puncte de convergenţă, sau, în sfîrşit, seria să fie oscilantă în aceste puncte.

Dacă într-unul din punctele $-R$ sau R seria este absolut convergentă, atunci seria este absolut convergentă şi în celălalt punct.

Într-adevăr, pentru ambele serii, $\sum_n a_n(-R)^n$ şi $\sum_n a_n R^n$, seria modulelor este aceeaşi $\sum_n |a_n| R^n$, deci dacă una este absolut convergentă, atunci şi cealaltă este absolut convergentă.

Rezultă că dacă în unul din punctele $-R$ sau R seria este divergentă în celălalt punct seria nu este absolut convergentă.

Exemple. 1) Seria geometrică

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

este absolut convergentă pentru $|x| < 1$, şi divergentă pentru $|x| > 1$. Aici raza de convergenţă este $R = 1$. Pentru $x = 1$, obţinem seria de numere pozitive

$$1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

care este divergentă şi are suma $+\infty$. Pentru $x = -1$, obţinem seria de numere

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$$

care este oscilantă.

Aşadar mulţimea de convergenţă este $A = (-1, 1)$.

2) Fie seria

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Să arătăm că $R = 1$. Fie $x_0 > 0$; să considerăm seria de numere pozitive

$$\frac{x_0}{1} + \frac{x_0^2}{2} + \ldots + \frac{x_0^n}{n} + \ldots$$

Să-i aplicăm criteriul lui d'Alembert. Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_0^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x_0^n} = \frac{n}{n+1} x_0.$$

Limita acestui şir este $k = x_0$. Dacă $x_0 < 1$, seria este convergentă; dacă $x_0 > 1$, seria este divergentă. Aşadar $R = 1$.

Pentru $x = 1$, obţinem seria

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

care este divergentă (seria armonică). Pentru $x = -1$, obţinem seria

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots$$

care este convergentă, deoarece se obţine din seria armonică alternată prin inmulţire cu -1.

Mulţimea de convergenţă a seriei este deci $[-1, 1)$.

Să observăm că în -1 seria este semiconvergentă, iar pe $(-1, 1)$, seria este absolut convergentă.

3) Seria

$$-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\ldots$$

are mulţimea de convergenţă $(-1, +1]$. În punctul $+1$ seria este semiconvergentă, iar pe $(-1, 1)$ seria este absolut convergentă.

4) Seria

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^\alpha}+\frac{x^3}{3^\alpha}+\ldots+\frac{x^n}{n^\alpha}+\ldots$$

unde $\alpha > 1$, este absolut convergentă pe $[-1, 1]$.

Într-adevăr, fie $x_0 > 0$ un punct oarecare; să considerăm seria de numere pozitive

$$\frac{x_0}{1^\alpha}+\frac{x_0^2}{2^\alpha}+\ldots+\frac{x_0^n}{n^\alpha}+\ldots$$

Să aplicăm criteriul lui d'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\cdot\frac{n^\alpha}{x_0^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha x_0.$$

Şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita $k = x_0$. Dacă $x_0 < 1$, seria este convergentă, şi dacă $x_0 > 1$, seria este divergentă. Aşadar $R = 1$.

Pentru $x = 1$, obţinem seria

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

care este convergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha > 1$). Pentru $x = -1$, obţinem seria

$$-\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

care este absolut convergentă, deoarece seria modulelor este seria armonică generalizată de mai sus. Aşadar, mulţimea de convergenţă este $A = [-1, +1]$ şi anume, toate punctele acestei mulţimi sînt puncte de convergenţă absolută.

3. Teorema lui Cauchy-Hadamard

Teorema lui Abel afirmă doar existenţa razei de convergenţă, dar nu dă nici o metodă de a o calcula. O asemenea metodă este dată de teorema următoare, a cărei demonstraţie foloseşte criteriul lui Cauchy.

Teorema lui Cauchy şi Hadamard. Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri şi R raza de convergenţă. Să notăm $\omega = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci

$$R = \frac{1}{\omega} \text{ dacă } 0 < \omega \leqslant +\infty \text{ şi } R = +\infty \text{ dacă } \omega = 0.$$

Demonstraţie. Fie x_0 un punct oarecare; să considerăm seria de numere $\sum_n |a_n|\,|x_0|^n$. Termenii acestei serii sînt $u_n = |a_n|\,|x_0|^n$. Să-i aplicăm criteriul lui Cauchy. Avem

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{|a_n|}\;|x_0|,$$

şi deci

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{u_n} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}\;|x_0| = \omega\,|x_0|.$$

Dacă $\omega = 0$, atunci $\overline{\lim_n} \sqrt[n]{u_n} = 0 < 1$, deci seria $\sum a_n x_0^n$ este absolut convergentă oricare ar fi x_0, deci $R = +\infty$; dacă $\omega = +\infty$, şi $x_0 \neq 0$, avem $\overline{\lim_n} \sqrt[n]{u_n} = +\infty > 1$, deci seria $\sum_n a_n x_0^n$ este divergentă pentru orice $x_0 \neq 0$, adică $R = 0$; dacă $0 < \omega < +\infty$, atunci: dacă $|x_0| < \frac{1}{\omega}$ avem $\omega\,|x_0| < 1$, şi deci seria $\sum a_n x_0^n$ este absolut convergentă. Dacă $|x_0| > \frac{1}{\omega}$, luăm un punct x_1 astfel ca $|x_1| > |x_0| > \frac{1}{\omega}$. Atunci $\omega\,|x_0| > 1$, şi deci seria $\sum |a_n|\,|x_0|^n$ este divergentă. Din demonstraţia primei teoreme a lui Abel, rezultă că seria $\sum a_n x_1^n$ este divergentă. Aşadar $R = \frac{1}{\omega}$.

Exemple. 1) $\sum_n x^n$; avem $\sqrt[n]{|a^n|} = 1$, deci $\omega = 1$, şi deci $R = 1$.

2) $\sum_n \frac{x^n}{n!}$; avem $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$, $\omega = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, deci $R = +\infty$.

3) $\sum_n n^n x^n$; avem $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^n} = n$, deci $R = 0$.

În multe cazuri, pentru calculul razei de convergenţă R se poate folosi propoziţia următoare, a cărei demonstraţie foloseşte criteriul lui d'Alembert.

Propoziţie. Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri. Să presupunem că şirul $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ are limită (finită sau infinită). Atunci

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Fie $x_0 \neq 0$ un punct oarecare. Să considerăm seria numerică $\sum |a_n||x_0|^n$ şi să-i aplicăm criteriul lui d'Alembert. Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{n+1}|}{a_n}|x_0|.$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty, \text{ oricare ar fi } x_0 \neq 0,$$

deci seria este divergentă pentru orice $x_0 \neq 0$, şi deci $R = 0$. Să presupunem acum că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = l > 0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x_0|}{l}.$$

Dacă $|x_0| < l$ atunci $\frac{|x_0|}{l} < 1$, deci seria este convergentă, iar dacă $|x_0| > l$, atunci $\frac{|x_0|}{l} > 1$, deci seria este divergentă. Deducem că l este raza de convergenţă a seriei.

Observaţie. La criteriul lui d'Alembert se foloseşte raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, în timp ce pentru calculul razei de convergenţă se foloseşte raportul $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Exemplu. Să considerăm seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Avem

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = +\infty, \text{ deci } R = +\infty.$$

4. Continuitatea sumei unei serii de puteri

Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri, A mulţimea sa de convergenţă şi R raza sa de convergenţă. Ştim că $0 \in A$, şi că $(-R, R) \subset A \subset [-R, +R]$. Pentru fiecare $x \in A$, să notăm

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Am obţinut astfel o funcţie $x \to S(x)$ definită pe A; această funcţie este suma seriei de puteri $\sum\limits_n a_nx^n$ pe mulţimea A.

Vom nota cu S această funcţie.

O b s e r v a ţ i e. Trebuie reţinut că suma S a seriei de puteri este o funcţie definită numai pe mulţimea A, deşi funcţiile de puteri din care este formată seria sînt definite pe toată dreapta.

Accentuăm acest lucru, deoarece s-ar putea ca funcţia sumă S să se poată exprima prin operaţii asupra funcţiilor elementare, operaţii care au un sens şi pentru care nu aparţin lui A. În acest caz trebuie să facem distincţie între suma S şi funcţia definită prin aceste operaţii.

Exemplu. Să considerăm seria de puteri

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Mulţimea de convergenţă este $A = (-1, 1)$. Este o serie geometrică cu raţia x. Dacă $|x| < 1$, s-a arătat că suma acestei serii este $\frac{1}{1-x}$. Aşadar funcţia sumă S este definită pe $(-1, 1)$ prin egalitatea $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Putem scrie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad \text{pentru } -1 < x < 1.$$

Totuşi, operaţia $\frac{1}{1-x}$ are sens pentru orice $x \neq 1$. Dacă notăm cu f funcţia definită pe $R - \{1\}$, prin $f(x) = \frac{1}{1-x}$, funcţiile S şi f sînt diferite, deoarece au domenii de definiţie diferite; anume, funcţia S este restricţia funcţiei f, la intervalul $(-1, 1)$. De altfel pentru $|x| > 1$, egalitatea

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

nu mai este adevărată, deoarece seria din membrul drept este divergentă.

P r o p o z i ţ i e. Suma S a unei serii de puteri $\sum a_n x^n$ este o funcţie continuă pe intervalul de convergenţă.

Fie R raza de convergenţă a seriei şi A mulţimea de convergenţă a seriei. Funcţia sumă S a seriei este definită pe A, deci $S(x)$ are sens pentru orice $x \in (-R, R)$.

Fie $x_0 \in (-R, R)$ un punct oarecare; să arătăm că funcţia S este continuă în x_0. Avem $-R < x_0 < R$, deci există un număr r pozitiv, astfel că $-R < -r < x_0 < r < R$. Dar pe intervalul închis $[-r, r]$ seria este *uniform convergentă*, şi deoarece termenii seriei sînt funcţii continue, rezultă că suma ei S este o funcţie continuă pe $[-r, r]$; în particular este continuă în x_0.

Cum x_0 a fost arbitrar în $(-R, R)$, rezultă că funcţia S este continuă pe tot intervalul $(-R, R)$.

Corolar. Suma S a unui serii de puteri $\sum a_n x^n$ este uniform continuă pe orice interval compact conţinut în intervalul de convergenţă.

Într-adevăr, dacă $I = [a, b]$ este un interval compact conţinut în intervalul de convergenţă, funcţia S este continuă pe I, deci uniform continuă.

Observaţie. Dacă seria este convergentă şi în punctul $-R$ sau în punctul R, atunci funcţia S este definită şi în $-R$ sau în R.

Propoziţia de mai sus nu spune dacă funcţia S este în acest caz continuă în $-R$ sau R. Acest lucru va reieşi din teorema următoare:

Teorema II a lui Abel. Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri şi R raza sa de convergenţă. Dacă seria este convergentă în punctul R (sau în punctul $-R$), atunci suma S a seriei este o funcţie continuă în punctul R (sau în punctul $-R$).

Demonstraţie. Vom demonstra teorema numai pentru cazul cînd seria este convergentă în R. Pentru cazul convergenţei în $-R$, demonstraţia se face la fel.

Presupunem, aşadar, că seria de numere

$$a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \ldots + a_n R^n + \ldots$$

este convergentă.

Să arătăm în acest caz că seria $\sum a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[0, R]$. Fie $\varepsilon > 0$; deoarece seria de numere $\sum a_n R^n$ este convergentă, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel, încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$, să avem

$$|a_{n+1}R^{n+1} + a_{n+2}R^{n+2} + \ldots + a_{n+p}R^{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să notăm cu S_n sumele parţiale ale acestei serii. Pentru a simplifica scrisul, vom nota $\sigma_p = S_{n+p} - S_n$, pentru $p \geqslant 1$. Condiţia de mai sus se scrie atunci

$$|\sigma_p| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } p \geqslant 1.$$

Să remarcăm de asemenea că avem

$$a_{n+1}R^{n+1} = S_{n+1} - S_n = \sigma_1$$

$$a_{n+2}R^{n+2} = S_{n+2} - S_{n+1} = (S_{n+2} - S_n) - (S_{n+1} - S_n) = \sigma_2 - \sigma_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n+p}R^{n+p} = S_{n+p} - S_{n+p-1} = (S_{n+p} - S_n) - (S_{n+p-1} - S_n) = \sigma_p - \sigma_{p-1}.$$

Fie un punct oarecare $x \in [0, R]$; să notăm $y = \frac{x}{R}$. Avem $x = Ry$ şi $0 \leqslant y \leqslant 1$. Atunci, pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$, avem

$$a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots + a_{n+p}x^{n+p} = a_{n+1}R^{n+1}y^{n+1} + a_{n+2}R^{n+2}y^{n+2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n+p}R^{n+p}y^{n+p} = \sigma_1 y^{n+1} + (\sigma_2 - \sigma_1)y^{n+2} + \ldots + (\sigma_p - \sigma_{p-1})y^{n+p} =$$
$$= \sigma_1 y^{n+1} + \sigma_2 y^{n+2} - \sigma_1 y^{n+2} + \ldots + \sigma_p y^{n+p} - \sigma_{p-1}y^{n+p} =$$
$$= \sigma_1 y^{n+1}(1 - y) + \sigma_2 y^{n+2}(1 - y) + \ldots + \sigma_{p-1}y^{n+p-1}(1-y) + \sigma_p y^{n+p} =$$
$$= y^{n+1}(1-y)(\sigma_1 + \sigma_2 y + \sigma_3 y^2 + \ldots + \sigma_{p-1}y^{p-2}) + \sigma_p y^{n+p}.$$

Ţinînd seama că $0 \leqslant y^{n+1} \leqslant 1$, $a < y^{n+p} \leqslant 1$, şi $|\sigma_i| < \frac{\varepsilon}{2}$, $i = 1,2,\ldots$ deducem

$$|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots + a_{n+p}x^{y+p}| \leqslant$$
$$\leqslant (1 - y)(|\sigma_1| + |\sigma_2|y + \ldots + |\sigma_{p-1}|y^{p-2}) + |\sigma_p| \leqslant$$
$$\leqslant (1 - y)\frac{\varepsilon}{2}(1 + y + \ldots + y^{p-2}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(1 - y)\frac{1 - y^{p-1}}{1 - y} + \frac{\varepsilon}{2} =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}(1 - y^{p-1}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Conform criteriului lui Cauchy pentru serii de funcţii, deducem că seria $\Sigma a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[0, R]$. Deoarece termenii seriei sînt funcţii continue pe $[0, R]$, rezultă că şi suma S a seriei este o funcţie continuă pe $[0, R]$ şi în particular S este continuă în R.

O b s e r v a ţ i e. Fie $\Sigma a_n x^n$ o serie de puteri, R — raza sa de convergenţă şi S — suma sa. Dacă se ştie că seria este convergentă în R, şi dacă se cunosc valorile funcţiei pe $(-R, R)$, atunci funcţia S fiind continuă în R, avem

$$\lim_{x \to R} S(x) = S(R).$$

În acest fel avem posibilitatea să găsim suma seriei în punctul R, cunoscînd suma sa în interiorul intervalului de convergenţă.

Exemplu. Fie seria

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Avem $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$. Acest şir are limita 1, deci $R = 1$. Pentru $x = 1$, obţinem seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

care este convergentă.

Pentru $x = -1$ obţinem seria

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$$

care este divergentă, deoarece se obţine din seria armonică prin înmulţire cu -1. Mulţimea de convergenţă a acestei serii este deci $(-1, 1]$. Se va arăta mai departe că pe intervalul deschis $(-1, 1)$ suma seriei este $\ln(1 + x)$:

$$S(x) = \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Cum S este continuă în punctul 1, avem

$$S(1) = \lim_{x \to 1} S(x) = \lim_{x \to 1} \ln(1 + x) = \ln 2.$$

Aşadar, suma seriei armonice alternate este $\ln 2$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Acest rezultat ne dă posibilitatea să calculăm cu aproximaţie pe $\ln 2$, însumînd un număr suficient de mare de termeni ai seriei armonice alternate. Dar seria armonică alternată converge „foarte încet", aşa încît, trebuie să însumăm un număr foarte mare de termeni, pentru a obţine cîteva zecimale exacte din reprezentarea numărului $\ln 2$ în fracţie zecimală. Practic, pentru calculul logaritmilor, se folosesc alte serii care converg „mai repede".

5. Operaţii cu serii de puteri

Fie $\Sigma a_n x^n$ şi $\Sigma b_n x^n$ două serii de puteri. Suma lor $\Sigma (a_n + b_n) x^n$ este tot o serie de puteri. Dacă R_1 este raza de convergenţă a seriei $\Sigma a_n x^n$ şi R_2 raza de convergenţă a seriei $\Sigma b_n x^n$, atunci:

1) *raza R de convergenţă a seriei sumă $\Sigma (a_n + b_n) x^n$ verifică inegalitatea*

$$R \geqslant \inf(R_1, R_2);$$

2) *raza de convergenţă a seriei $\alpha \Sigma a_n x^n = \Sigma \alpha a_n x^n$, $(\alpha \neq 0)$ este R_1.*

Într-adevăr, dacă x_0 este un punct oarecare astfel ca $|x_0| < R_1$ şi $|x_0| < R_2$, atunci seriile de numere $\Sigma a_n x_0^n$ şi $\Sigma b_n x_0^n$ sînt convergente, deci şi seria $\Sigma (a_n + b_n) x^n$ este convergentă.

Rezultă că seria sumă $\Sigma(a_n + b_n)x^n$ este absolut convergentă, deci $|x_0| \leqslant R$. Cum x_0 a fost ales arbitrar astfel ca $|x_0| < R_1$ şi $|x_0| < R_2$, rezultă că $R \geqslant \inf(R_1, R_2)$.

Observaţie. Este posibil ca $R > \inf(R_1, R_2)$. De exemplu, dacă $R_1 < +\infty$ şi dacă $b_n = -a_n$ pentru fiecare $n \in N$, atunci $R_2 = R_1$ şi $R = +\infty$.

Dacă S_1 este suma seriei $\Sigma a_n x^n$ şi S_2 este suma seriei $\Sigma b_n x^n$, şi dacă notăm cu S suma seriei $\Sigma(a_n + b_n)x^n$, atunci

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x) \text{ pentru orice } |x| < R,$$

cum se poate constata imediat, pentru fiecare punct din $(-R, R)$.

Observaţie. Dacă A_1 este mulţimea de convergenţă a seriei $\Sigma a_n x^n$, A_2, mulţimea de convergenţă a seriei $\Sigma b_n x^n$, atunci S_1 este definită pe A_1 şi S_2 este definită pe A_2. Mulţimea A de convergenţă a seriei $\Sigma(a_n + b_n)x^n$ conţine mulţimea $A_1 \cap A_2$.

Suma S a seriei $\Sigma(a_n + b_n)x^n$ este definită pe A, şi

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x).$$

6. Derivarea seriilor de puteri

Fie (x_n) un şir de numere şi $\omega = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Din definiţia punctelor limită ale unui şir rezultă că există un subşir $(x_{n_p})_{p\in N}$ convergent către ω.

Să observăm că dacă $(y_{n_k})_{k\in N}$ este un subşir oarecare *convergent* al şirului (x_n), limita sa este mai mică decît ω:

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \leqslant \overline{\lim_{n}}\, x_n = \omega.$$

Reamintim că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, atunci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \alpha_n x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Fie acum $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Să considerăm seria cu derivatele termenilor acestei serii:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

Am obţinut tot o serie de puteri, pe care o vom numi seria derivatelor.

Teorema următoare arată legătura dintre mulţimile de convergenţă ale celor două serii, şi dintre sumele lor.

Teoremă. Dacă $\Sigma a_n x^n$ este o serie de puteri şi S suma sa, atunci:
1) Seria derivatelor are aceeaşi rază de convergenţă.
2) Funcţia S este derivabilă pe intervalul de convergenţă şi derivata S' este egală cu suma seriei derivatelor.

Demonstraţie: 1) Fie R raza de convergenţă a seriei $\Sigma a_n x^n$. Avem $R = \frac{1}{\omega}$ dacă $\omega \neq 0$ şi $R = +\infty$ dacă $\omega = 0$, unde $\omega = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Să calculăm raza de convergenţă a seriei derivatelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Pentru fiecare $x \neq 0$ fixat, seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ este convergentă dacă şi numai dacă seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ este convergentă, deoarece seria a doua se obţine din prima prin înmulţire cu numărul x.

Aşadar, seria de puteri $\Sigma n a_n x^{n-1}$ are aceeaşi rază de convergenţă cu seria de puteri $\Sigma n a_n x^n$. Pentru ultima serie, coeficientul lui x^n este $n a_n$. Avem $\sqrt[n]{n|a_n|} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|}$; deoarece şirul $(\sqrt[n]{n})$ are limita 1, rezultă că şirul $(\sqrt[n]{n|a_n|})$ are aceeaşi limită superioară ca şi şirul $(\sqrt[n]{|a_n|})$, adică $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \omega$.

Rezultă că seria $\Sigma n a_n x^n$, deci şi seria $\Sigma n a_n x^{n-1}$, are aceeaşi rază de convergenţă R, ca şi seria $\Sigma a_n x^n$.

2) Fie $x_0 \in (-R, R)$, şi fie $r > 0$, astfel ca $r < R$ şi $-r < x_0 < r$. Pe segmentul $[-r, +r]$, seria derivatelor este uniform convergentă către suma $\sigma(x)$. Cum seria $\Sigma a_n x^n$ este convergentă în x_0, rezultă că ea este uniform convergentă pe $[-r, r]$, că suma sa S este derivabilă pe $[-r, r]$, şi că $S' = \sigma$.

În particular, S' este derivabilă în x_0, şi $S'(x_0) = \sigma(x_0)$.

Cum x_0 a fost arbitrar în $(-R, R)$, rezultă că S este derivabilă pe $-R, R)$ şi că $S' = \sigma$.

Observaţie. Dacă punem $S(x) = \Sigma a_n x^n$ pentru $x \in (-R, R)$, teorema de mai sus spune că pentru a deriva suma unei serii de puteri, putem deriva seria termen cu termen:

$$S'(x) = \Sigma (a_n x^n)' = \Sigma n a_n x^{n-1}.$$

Putem acum pleca de la seria $\Sigma n a_n x^{n-1}$ şi să formăm seria derivatelor termenilor săi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. Această serie se numeşte seria derivatelor de ordinul 2. Ea are tot raza de convergență R, și suma sa este derivata σ' a sumei seriei $\Sigma\, na_n x^{n-1}$. Putem considera seria derivatelor de orice ordin și, repetînd raționamentul, deducem următoarea:

T e o r e m ă. Dacă $\Sigma\, a_n x^n$ este o serie de puteri și R raza sa de convergență, atunci,

1) Seria derivatelor de ordin n are aceeași rază de convergență R.

2) Suma S a seriei este indefinit derivabilă pe intervalul de convergență, și derivata de ordin n, $S^{(n)}$ este egală cu suma seriei derivatelor de ordin n.

Pe baza acestei teoreme, dacă se cunoaște suma unei serii, se obține prin derivare suma seriei derivatelor.

Exemple. 1) Avem:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Atunci

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot x + \ldots + n(n-1)x^{n-2} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1 \text{ etc.}$$

2) Să considerăm seria

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Această serie este convergentă pentru $|x| < 1$. Să notăm cu f suma sa:

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Prin derivare obținem:

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x} \text{ pentru } |x| < 1;$$

cum derivata funcției $g(x) = -\ln(1-x)$ este $g'(x) = \dfrac{1}{1-x}$, deducem că $f(x) = g(x) + C$.

Pentru $x = 0$, avem

$$f(0) = 0 \text{ și } g(0) = 0, \text{ deci } C = 0 \text{ și deci } f(x) = g(x).$$

Așadar avem

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

3) Dacă în exemplul 1 schimbăm x cu $-x$, obţinem

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \ldots + (-1)^n n x^{n-1} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 - 3 \cdot 2 \cdot x + \ldots + (-1)^n n(n-1)x^{n-2} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1 \text{ etc.}$$

4) Dacă în exemplul 1 punem x^2 în loc de x, obţinem

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1$$

şi prin derivare se obţine suma altor serii convergente pentru $|x| < 1$.

5) De asemenea, dacă în exemplul 3 punem x^2 în loc de x, obţinem

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

6) Să considerăm seria

$$\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Să notăm cu R raza sa de convergenţă şi cu f suma sa.
Prin derivare obţinem seria

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots$$

pentru care $R = 1$ şi care are suma $\frac{1}{1-x^2}$. Rezultă că şi seria dată are raza de convergenţă $R = 1$, şi suma sa f are derivata $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Cum funcţia $g(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ are aceeaşi derivată, $g'(x) = \frac{1}{1-x^2}$, rezultă că $f = g + C$; dar pentru $x = 0$, avem $f(0) = 0$ şi $g(0) = 0$, deci $C = 0$. Urmează că $f(x) = g(x)$, şi deci

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

7) Exemplul 6 se poate obţine şi astfel: să considerăm seria de la exemplul 2

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Să schimbăm pe x cu $-x$. Obţinem

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Scăzînd prima serie din ultima, obţinem

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) \text{ pentru } |x| < 1.$$

Acea stă egalitate, valabilă pentru $|x| < 1$, ne permite să calculăm logaritmul oricărui număr. Fie, într-adevăr, $y > 0$ un număr real oarecare. Să găsim un număr x, astfel ca

$$\frac{1+x}{1-x} = y. \text{ Obţinem } x = \frac{y-1}{y+1}. \text{ Avem } |x| < 1$$

şi deci

$$\ln y = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{(y+1)^3} + \ldots + \frac{1}{2_{n+1}}\frac{(y-1)^{2n+1}}{(y+1)^{2n+1}} + \ldots\right)$$

Seria din paranteză este „foarte repede" convergentă, aşa încît, însumînd un număr mic de termeni se obţin destule zecimale exacte ale lui $\ln y$.

Acesta este modul în care se calculează tablele de logaritmi.

8) Să reluăm seria de la 5:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Să considerăm seria

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Seria derivatelor acesteia este seria de mai sus, deci seria aceasta are raza de convergenţă $R = 1$. Suma sa f este derivabilă şi avem $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pentru $|x| < 1$. Dar funcţia $g(x) = \operatorname{arctg} x$ are aceeaşi derivată, deci $f(x) = \operatorname{arctg} x + C$ pentru $|x| < 1$. Cum pentru $x = 0$ avem $f(0) = 0$ şi $\operatorname{arctg} 0 = 0$, rezultă $C = 0$ şi deci

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Să observăm că pentru $x = 1$, obţinem seria

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

care este convergentă, cum se verifică uşor folosind criteriul lui Leibniz.

Deoarece $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, din teorema 2 a lui Abel obţinem

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Această serie poate servi pentru calculul numărului π, dar seria este „încet convergentă", aşa încît în practică se folosesc alte serii „mai repede" convergente.

9) Să considerăm seria

$$1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \ldots$$

Am văzut că pentru această seria avem $R = +\infty$. Să însemnăm cu $f(x)$ suma sa. Prin derivare obţinem

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \ldots = f(x).$$

Funcţia $f(x)$ are proprietatea că prin derivare se reproduce. Singurele funcţii cu această proprietate sînt funcţiile

$$f(x) = Ce^x,$$

deoarece, dacă $f' = f$, atunci $\frac{f'}{f} = 1$, sau $(\ln f)' = 1$, de unde $\ln f = x + \ln C$, de unde $f = Ce^x$. Dar pentru $x = 1$, obţinem $f(1) = 1$, şi $Ce^1 = 0$, şi deci $C = 1$. Aşadar $f(x) = e^x$, şi deci

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \ldots$$

Pentru $x = 1$, obţinem

$$e = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} + \ldots$$

Această serie serveşte pentru calculul numărului e.

Aici avem al treilea mod de a defini numărul e, ca sumă a seriei de mai sus, celelalte două moduri fiind: ca limită a şirului $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ şi ca bază a funcţiei exponenţiale care în 0 are derivata 1.

10) Să considerăm seria

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n\,!} x^n + \ldots,$$

unde k este un număr real oarecare. Această serie se numeşte *seria binomială*. Aplicînd criteriul lui d'Alembert se deduce că seria are raza de convergenţă $R = 1$.

Fie f suma acestei serii pe intervalul $(-1, 1)$. Aşadar

$$f(x) = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n\,!} x^n + \ldots$$

pentru $|x| < 1$.

Prin derivare obţinem

$$f'(x) = k + \frac{k(k-1)}{1\,!} x + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)\,!} x^{n-1} + \ldots$$

pentru $|x| < 1$.

Înmulțind seria aceasta cu x, suma ei este $xf'(x)$. Atunci

$$f'(x) + xf'(x) = k + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{k(k-1)\ldots(k-n)}{n!} + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!}\right]x^n =$$

$$= k\left(1 + \Sigma\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n\right) = kf(x) \text{ pentru } |x| < 1.$$

De aici deducem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{1+x} \text{ pentru } |x| < 1.$$

Funcția din membrul stîng este derivata funcției $g(x) = \ln f(x)$; funcția din membrul drept este derivata funcției $h(x) = k \ln(1+x)$. Așadar,

$$g'(x) = h'(x) \text{ pentru } |x| < 1,$$

deci cele două funcții diferă printr-o funcție constantă M

$$g(x) = h(x) + M.$$

Dacă punem $C = e^M$ atunci $M = \ln C$, deci

$$\ln f(x) = k\ln(1+x) + \ln C$$

sau

$$\ln f(x) = \ln C(1+x)^k,$$

de unde

$$f(x) = C(1+x)^k.$$

Dar pentru $x = 0$ seria binomială are suma

$$f(0) = 1$$

și deci

$$1 = C.$$

Așadar

$$f(x) = (1+x)^k$$

și deci, pentru $|x| < 1$,

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

11) Dînd lui k diferite valori, în seria binomială, obținem:

pentru $k = \dfrac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4 + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n + \ldots$$

pentru $|x| < 1$;

pentru $k = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \ldots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^n + \ldots$$

pentru $|x| < 1$.

De altfel, seria a doua se obţine din prima prin derivare.

Schimbînd x cu $-x$, în ultima serie, obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^n + \ldots$$

pentru $|x| < 1$.

Înlocuind acum x cu x^2, obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \ldots$$

pentru $|x| < 1$.

12) Să considerăm seria

$$x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! 5}x^5 + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n! (2n+1)}x^{2n+1} + \ldots$$

Prin derivare, obţinem seria care are suma $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, şi care are raza de convergenţă $R = 1$, deci şi seria dată are raza de convergenţă 1. Dacă notăm cu $f(x)$ suma seriei, avem

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pentru } |x| < 1$$

şi cum $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ este derivata funcţiei $x \to \arcsin x$, deducem

$$f(x) = \arcsin x + C \qquad \text{pentru } |x| < 1.$$

Pentru $x = 0$, avem $f(0) = 0$, şi $\arcsin 0 = 0$, deci $C = 0$, şi deci $f(x) = \arcsin x$. Aşadar,

$$\arcsin x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

pentru $|x| < 1$.

Pentru $x = \frac{1}{2}$ avem $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, şi deci

$$\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!}\frac{1}{2^{n+1}} + \ldots$$

Această serie permite să calculăm cu aproximaţie numărul π.

7. Serii Taylor

Fie $a \in R$ un punct oarecare. Vom numi serie Taylor o serie de puteri ale funcţiei $(x - a)$, de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

Punînd $y = x - a$, obţinem seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n + \ldots$$

Fie R raza de convergenţă a acestei serii de puteri. Pentru $-R < y < R$, seria este convergentă, şi pentru $|y| > R$ seria este divergentă. Inegalitatea $-R < y < R$ se scrie

$$-R < x - a < R$$

sau

$$a - R < x < a + R,$$

deci seria iniţială este convergentă în intervalul $(a - R,\ a + R)$ cu centrul în a.

Toate proprietăţile seriilor de puteri se menţin pentru seriile Taylor:

1) Pentru orice serie Taylor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, există un număr R, $(0 \leqslant R \leqslant +\infty)$ numit raza de convergenţă, astfel încît:

Seria este absolut convergentă pe intervalul $(a - R,\ a + R)$.
Seria este divergentă pentru $|x - a| > R$.

2) Pentru orice $0 < r < R$, seria este uniform convergentă pe intervalul închis $[a - r,\ a + r]$.

3) Suma seriei este o funcţie continuă pe $(a - R, a + R)$.

4) Dacă punem $\omega = \overline{\lim\limits_{n}} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci

$$R = \frac{1}{\omega} \text{ dacă } 0 < \omega \leqslant +\infty \text{ şi } R = +\infty, \text{ dacă } \omega = 0.$$

5) Suma a două serii Taylor $\Sigma\, a_n(x-a)^n$ şi $\Sigma\, b_n(x-a)^n$ este tot o serie Taylor, cu raza de convergenţă egală cel puţin cu cea mai mică rază de convergenţă a celor două serii.

6) O serie Taylor se poate deriva termen cu termen. Seria derivatelor are aceeaşi rază de convergenţă şi suma sa este derivata sumei Taylor iniţiale.

7) Suma unei serii Taylor este indefinit derivabilă în $(a - R,\ a + R)$.

Exemple. 1) Să considerăm seria Taylor

$$1 + (x - a) + (x - a)^2 + \dots + (x - a)^n + \dots$$

Este seria geometrică cu raţia $x - a$, deci seria este convergentă dacă $|x - a| < 1$ şi divergentă dacă $|x - a| > 1$. Raza de convergenţă este $R = 1$, iar intervalul de convergenţă este $(a - 1, a + 1)$.

Suma seriei pe acest interval este $\dfrac{1}{1 - (x - a)} = \dfrac{1}{1 - x + a}$.

$$\frac{1}{1 - x + a} = 1 + (x - a) + \dots + (x - a)^n + \dots \text{ pentru } a - 1 < x < a + 1.$$

Prin derivare se obţine

$$\frac{1}{(1 - x + a)^2} = 1 + 2(x - a) + 3(x - a)^2 + \dots + n(x - a)^{n-1} + \dots$$

pentru $a - 1 < x < a + 1$.

2) $$\ln(1 - x + a) = -(x - a)^2 - \frac{(x - a)^2}{2} - \dots - \frac{(x - a)^n}{n} - \dots$$

pentru $|x - a| < 1$ adică $a - 1 < x < a + 1$.

3) $$\frac{1}{1 + (x - a)^2} = 1 - (x - a)^2 + (x - a)^4 + \dots + (-1)^n (x - a)^{2n} + \dots$$

pentru $|x - a| < 1$ etc.

8. Dezvoltări în serie

Fie I un interval şi $a \in I$. Fie $f: I \to R$ o funcţie indefinit derivabilă în punctul a. Să considerăm seria Taylor următoare:

$$f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

Această serie se numeşte *seria Taylor a funcţiei f în punctul a*. Ea are o rază de convergenţă $0 \leq R \leq +\infty$, o mulţime de convergenţă A care conţine cel puţin punctul a, şi un interval de convergenţă $(a - R, a + R) \subset A$.

Suma T a acestei serii este o funcţie definită pe A.

Dacă notăm cu T_n sumele parţiale ale acestei serii

$$T_n(x) = f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

T_n sînt polinoame definite pe toată dreapta.

Şirul (T_n) al acestor polinoame este convergent pe A către T.

Trebuie observat că mulţimea A de convergenţă a seriei Taylor nu este neapărat o submulţime a intervalului I pe care este definită funcţia f. De altfel, seria Taylor este perfect determinată prin cunoaşterea derivatelor funcţiei f în punctul a, deci de cunoaşterea valorilor funcţiei f într-o anumită vecinătate a punctului a, pe care o putem alege arbitrar, oricît de mică.

Să observăm de asemenea că T_n sînt polinoamele lui Taylor din formulele lui Taylor ataşate funcţiei f în punctul a:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

$$x \in I,$$

unde R_n este *restul formulei lui Taylor* al funcţiei f în punctul a; R_n este o funcţie definită pe I, ca şi f. Avem deci

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \text{ pentru orice } x \in I,$$

de unde

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x) \text{ pentru } x \in I.$$

R_n *nu trebuie confundat cu restul seriei Taylor*. Pentru a le deosebi, vom nota cu ρ_n restul de rang n al seriei Taylor; ρ_n *este o funcţie definită pe mulţimea A de convergenţă a acestei serii*.

Avem

$$T(x) = T_n(x) + \rho_n(x) \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

Se pune întrebarea dacă avem

$$f(x) = T(x) \qquad \text{pentru } x \in A \cap I,$$

adică dacă suma seriei Taylor a funcţiei f, pe mulţimea $A \cap I$, este chiar funcţia f. Acest lucru nu se întîmplă totdeauna, cum reiese din exemplul următor:

Exemplu. Fie $f: R \to R$ funcţia definită prin egalităţile

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Această funcţie este continuă în 0, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$.

Această funcţie are derivate de orice ordin în 0 şi $f^{(n)}(0) = 0$.

Seria Taylor a acestei funcţii în 0 este

$$0 + 0x + 0x^2 + \ldots$$

Raza sa de convergenţă $R = +\infty$ şi suma sa este $T(x) \equiv 0$.
Totuşi, pentru $x \neq 0$, avem $f(x) \neq 0$, şi deci avem

$$f(0) = T(0), \text{ dar } f(x) \neq T(x) \text{ pentru orice } x \neq 0.$$

Răspunsul întrebării de mai sus este dat de teorema următoare:

Teoremă. Seria Taylor a funcţiei f în punctul a este convergentă într-un punct $x \in A \cap I$ către valoarea $f(x)$ a funcţiei f în x, dacă şi numai dacă valorile în x ale resturilor R_n ale formulelor lui Taylor formează un şir $(R_n(x))$, convergent către 0.

Într-adevăr, din egalitatea

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x)$$

deducem că $f(x)$ este limita şirului $T_n(x)$, dacă şi numai dacă şirul $(R_n(x))$ are limita 0. Cum în acest caz şirul $(T_n(x))$ are ca limită suma $T(x)$ a seriei Taylor, şi cum limita unui şir este unică, deducem că $f(x) = T(x)$.

Prin urmare, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, putem scrie

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

Corolar. Fie B o submulţime a mulţimii $A \cap I$. Avem

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

pentru orice $x \in B$, dacă şi numai dacă şirul de funcţii (R_n) format cu resturile formulelor lui Taylor este convergent pe B către 0.

Egalitatea de mai sus se numeşte *formula de dezvoltare a funcţiei f în serie Taylor în jurul punctului a.*

Observaţie. Dacă $f(x) = T(x)$, atunci $\rho_n(x) = R_n(x)$, deoarece $\rho_n(x) = T(x) - T_n(x)$ şi $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Dacă $0 \in I$ şi f este indefinit derivabilă în 0, atunci seria Taylor a funcţiei f în punctul 0 are forma

$$f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots$$

Această serie se mai numeşte *seria MacLaurin* a funcţiei f.

Exemple de dezvoltări în serie MacLaurin. 1) Să considerăm funcţia $f: R \to R$ definită prin $f(x) = e^x$. Această funcţie este indefinit derivabilă în orice punct.

Avem

$$f^{(n)}(x) = e^x, \text{ şi } f^{(n)}(0) = 1, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Formula lui MacLaurin cu restul sub forma lui Lagrange este

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{C_x},$$

unde C_x este un număr cuprins între 0 şi x, $x < C_x < 0$ sau $0 < C_x < x$, şi C_x depinde, în general, şi de n.

Avem

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{C_x}$$

şi

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{C_x} \leq e^{|C_x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Oricare ar fi $x \in R$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, deci suma seriei MacLaurin, pentru orice $x \in R$, este e^x,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Deoarece x este arbitrar, prin aceasta am şi demonstrat că mulţimea A de convergenţă a seriei este toată dreapta, şi suma ei este e^x pe toată dreapta.

2) Fie funcţia $f: R \to [-1, 1]$ definită prin $f(x) = \sin x$. Funcţia este indefinit derivabilă pe R, şi avem

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
f^{IV}(x) = \sin x & f^{IV}(0) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

Seria MacLaurin este

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Se calculează că raza de convergenţă este $R = +\infty$. Aceasta va rezulta de altfel şi din cele ce urmează.

Să considerăm formula lui MacLaurin cu restul în forma lui Lagrange

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin\left(C_x + \frac{2n+1}{2}\pi\right),$$

unde C_x este cuprins între 0 şi x. Restul R_n este

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin\left(C_x + \frac{2n+1}{2}\pi\right)$$

şi cum $\left|\sin\left(C_x + \frac{2n+1}{2}\pi\right)\right| \leqslant 1$, deducem

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Şirul $(R_n(x))$ are limita 0, şi deci $\sin x$ este suma seriei MacLaurin în punctul x. Dar x a fost arbitrar, şi deci pentru orice $x \in R$ avem

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Şi în acest caz seria MacLaurin converge pe toată dreapta către funcţia $\sin x$.

3) Funcţia $f: R \to [-1, +1]$ definită prin $f(x) = \cos x$, este indefinit derivabilă.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\ f^{IV}(x) = \cos x & f^{IV}(0) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Formula lui MacLaurin cu restul lui Lagrange se scrie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(C_x + (n+1)\pi)$$

şi cum $|\cos\theta| \leqslant 1$, pentru restul acestei formule avem

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$; rezultă că suma seriei MacLaurin este $\cos x$. Cum x a fost arbitrar, pentru orice $x \in R$ avem

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

Prin aceasta s-a şi demonstrat că seria este convergentă pentru orice $x \in R$.

4) Fie $f: (-1, +\infty) \to R$, definită prin $f(x) = \ln(1 + x)$.

Funcţia este indefinit derivabilă pe $(-1, +\infty)$.

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = 2!$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Seria MacLaurin este

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

S-a arătat că mulţimea de convergenţă a acestei serii este $A = (-1, 1]$. Să arătăm că pe A, suma seriei este $\ln(1+x)$.

Pentru aceasta considerăm formula lui MacLaurin, cu restul lui Lagrange

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(C_x),$$

unde $0 < C_x < x$, iar C_x depinde şi de n. Dacă $x \in (-1, +1]$ avem $|x| \leqslant 1$, deci $|C_x| < 1$.

Dar

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \text{ şi deci pentru restul } R_n \text{ avem}$$

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(1+C_x)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x}{1+C_x}\right|^{n+1}.$$

Dacă $0 < x \leqslant 1$, atunci avem $0 < C_x < x$, deci $1 + C_x > 1$

şi deci $\dfrac{x}{1+C_x} \leqslant x$. Atunci

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}|x|^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \quad \text{şi deci}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Urmează că pentru $x \in [0, 1]$, avem

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Egalitatea aceasta este adevărată pentru orice $x \in (-1, 1]$, cum s-a arătat cu ajutorul teoremei de derivare termen cu termen a seriilor de puteri.

Acesta este un exemplu în care mulţimea de definiţie a funcţiei este $= (-1, +\infty)$ şi mulţimea de convergenţă a seriei este $A = (-1, 1]$, iar seria are ca sumă funcţia f pe mulţimea $A \cap I = (-1, 1]$.

5) Să considerăm acum funcţia $f: R \to R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{pentru } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pentru } x \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

Această funcţie este, evident, indefinit derivabilă în 0, şi derivatele sale în 0 sînt egale cu derivatele funcţiei $x \to \ln(1+x)$ în 0, deci are aceeaşi serie MacLaurin. Avem deci

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \text{ pentru } x \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right].$$

Dar seria este convergentă pe $(-1, 1]$. Aşadar, $I = R$, $A = (-1, +1]$ şi $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \neq A \cap I$.

6) În exemplul 4, înlocuind x cu $-x$, obţinem funcţia f definită pe $(-\infty, +1)$ prin $f(x) = \ln(1-x)$. Seria Taylor a acestei funcţii este

$$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

Pe intervalul $[-1, 1)$, suma acestei serii este $\ln(1-x)$.

Exemple de dezvoltări în serie Taylor. 1) Fie $f(x) = e^x : R \to R$ şi fie $a \in R$. Avem

$$f(a) = e^a,\ f'(a) = e^a, \ldots, f^{(n)}(a) = e^a, \ldots \text{ şi}$$

$$e^x = e^a + \frac{x-a}{1!}e^a + \frac{(x-a)^2}{2!}e^a + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}e^a + \ldots \text{ pentru } x \in R.$$

2) Fie $f(x) = \sin x : R \to R$ şi $a \in R$. Avem:

$$f(a) = \sin a,\ f'(a) = \cos a,\ f''(a) = -\sin a,\ f'''(a) = -\cos a,\ f^{IV}(a) = \sin a, \ldots$$

$$\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!}\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\sin a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a + $$
$$+ \frac{(x-a)^4}{4!}\sin a - \ldots \text{ pentru orice } x \in R.$$

3) Fie $f(x) = \cos x : R \to R$, $a \in R$. Avem

$$f(a) = \cos a,\ f'(a) = -\sin a,\ f''(a) = -\cos a,\ f'''(a) = \sin a,\ f^{IV}(a) = \cos a, \ldots$$

$$\cos x = \cos a - \frac{x-a}{1!}\sin a - \frac{(x-a)^2}{2!}\cos a + \frac{(x-a)^3}{3!}\sin a +$$
$$+ \frac{(x-a)^4}{4!}\cos a - \ldots \text{ pentru orice } x \in R.$$

4) Fie $f(x) = \ln(1 + x) : (-1, +\infty) \to R$, şi fie $a > -1$.

Avem

$$f(a) = \ln(1 + a)$$

$$f'(a) = \frac{1}{1 + a}$$

$$f''(a) = -\frac{1}{(1 + a)^2}$$

....

$$f^{(n)}(a) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1 + a)^n}$$

....

$$\ln(1 + x) = \ln(1 + a) + \frac{x - a}{1 + a} - \frac{(x - a)^2}{2(1 + a)^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(x - a)^n}{n(1 + a)^n} + \ldots$$

pentru x în intervalul de convergenţă al seriei. Să calculăm raza de convergenţă.

Avem $\sqrt[n]{|u_n|} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n(1 + a)^n}}$. Acest şir are limita $\dfrac{1}{1 + a}$, deci avem $R = 1 + a$. Observăm că intervalul de convergenţă este $(a - R, a + R) = (-1, 1 + 2a)$, deci pentru orice serie Taylor a funcţiei $f(x) = \ln(1 + x)$, intervalul de convergenţă are extremitatea stîngă în punctul -1. Aşadar, cu cît a este mai aproape de -1, cu atît raza de convergenţă a seriei Taylor este mai mică.

5) Prin derivare obţinem

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 + a} - \frac{x - a}{(1 + a)^2} + \ldots + (-1)^n \frac{(x - a)^n}{(1 + a)^{n+1}} + \ldots \text{ pentru } -1 < x < 1 + 2a;$$

$$\frac{1}{(1 + x)^2} = \frac{1}{(1 + a)^2} - \frac{2(x - a)}{(1 + a)^3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{n(x - a)^{n-1}}{(1 + a)^{n+1}} + \ldots$$

pentru $-1 < x < 1 + 2a$.

Schimbînd x în $-x$ şi a în $-a$ avem

$$\frac{1}{1 - x} = \frac{1}{1 - a} + \frac{x - a}{(1 - a)^2} + \ldots + \frac{(x - a)^n}{(1 - a)^{n+1}} + \ldots \text{ pentru } -1 + 2a < x < 1;$$

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - a)^2} + \frac{2(x - a)}{(1 - a)^3} + \ldots + (-1)^n \frac{n(x - a)^{n-1}}{(1 - a)^{n+1}} + \ldots \text{ pentru } 1 + 2a < x < 1.$$

CUPRINSUL

Capitolul II

MULŢIMI DE NUMERE REALE. FUNCŢII REALE

Capitolul III

ŞIRURI DE NUMERE

Capitolul V

LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE

5—99

Capitolul VI

DERIVATE

Capitolul VII

INTEGRAREA

Capitolul VIII

FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

Capitolul IX

SERII DE NUMERE. ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

Coli de tipar: 49,—

Intreprinderea Poligrafică Cluj
Str. Brassai 5—7
Republica Socialistă România
Comanda nr. 415/971—5029

74

Lei ,30,10

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
BUCUREŞTI – 1971