CURS 1 SERIA 14

REGULI DE SCRIERE A DEMONSTRAȚIILOR

(1) NU DEMONSTRĂM DECÂT ADEVĂR! (a x cită „ustensilele de care dispunem ne permit doar să pornim de la niște afirmații (pe care le interpretăm ca fiind „adevărate") și să ajungem, în acord cu anumite reguli, la alte afirmații (pe care le vom interpreta ca fiind adevărate)

MORALA: Ca să demonstrăm că o afirmație p e falsă, demonstrez de fapt că e adevărată $\neg p$.

2

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$\vdash \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \wedge \neg q) \equiv$

$\neg p \vee (\neg(\neg q)) \equiv$

$\neg p \vee q \stackrel{def}{\equiv} p \Rightarrow q$

$P(x): x \in \mathbb{Z} \quad 3x+4=10$

$Q(x,y): x \in \mathbb{R} \ y \in \mathbb{R} \quad 2x+5y>19$

„există valoare $x \in \mathbb{Z}$ pt care $3x+4=10$”

se notează $(\exists x) P(x)$ (deci $\exists x \in \mathbb{Z} \ 3x+4=10$)

e prop!

4 pt orice valoare $x \in \mathbb{Z}$ $3x+4=10$ (3)

e propr!

se notează $(\forall x) P(x)$ sau $\forall x \in \mathbb{Z}\ 3x+4=10$

$\neg((\exists x) P(x))$ e echivalent cu

$(\forall x) \neg P(x)$

$\neg((\forall x) P(x))$ e echivalent cu

$(\exists x) \neg P(x)$

~~ex~~ • Dacă într-un enunț apar mai multe variabile cuantificate, el se neagă aplicând regulile anterioare în mod iterat

ex: $\neg(\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{Q}\ \boxed{x \geq 5y-1})$

e echivalent cu

$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{Q}\ x < 5y-1$

① În scrierea demonstrațiilor (4)
trebuie mers cu IMPLICAȚII ARGUMENTATE de la CE ȘTIM la CE VREM SĂ DEMONSTRĂM

ex: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 94 > 16x^2$

dem: Fie $x \in \mathbb{R}$

Atunci $(x^2-8)^2 \geq 0 \Rightarrow$

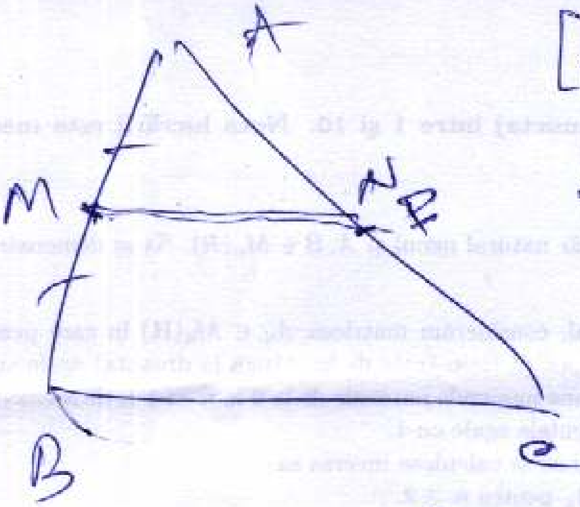
$x^4 - 16x^2 + 64 \geq 0 \Rightarrow$

$\boxed{x^4 + 94 > x^4 + 64 \geq 16x^2}$ □

APARENTĂ excepție: Metoda reducerii la absurd

(ea se aplică așa: presupunem că e falsă concluzia și, pe baza unui raționament corect, ajungem să arătăm că e falsă ipoteza (sau la contradicție cu un fapt matematic cunoscut).)

ex:



$[AM] \equiv [MB]$

$MN \parallel BC$

$\Rightarrow [AN] \equiv [NC]$

(1)

dem: Presupunem prin absurd că $[AN] \not\equiv [NC]$.

Notăm cu P mijlocul lui $[AC]$

Absolut, $N \neq P \Rightarrow MN \neq MP$

cf T. liniei mijlocii, $MP \parallel BC$

ip $\Rightarrow MN \parallel BC$

} contradicție cu Postulatul lui Euclid

Rămâne, deci, că $[AN] \equiv [NC]$. □

$\neg q \Rightarrow \neg p$ $\qquad$ $p \Rightarrow q$

$\equiv$ $\qquad\qquad$ $\equiv$

$\neg(\neg q) \vee \neg p$ $\qquad$ $\neg p \vee q$

$\equiv$

$q \vee \neg p \equiv \neg p \vee q$

(3) Dacă avem de ~~arătat~~ demonstrat o prop. de forma $(\exists x)\, P(x)$, considerăm o valoare (adecvată!) CONVENABILĂ („corectă"/„bună") pt x și facem demonstrația cu ea

ex: $\exists x \in \mathbb{Q} \quad x^2+209=30x$

dem: Fie $x=11$.

Evident, $x=\frac{11}{1}\in\mathbb{Q}$.

Atunci $x^2+209=11^2+209=330=30\cdot 11=30x$ □

ex: $\exists x\in\mathbb{R} \ \exists y\in\mathbb{R} \quad 5x+4y>17$

dem: Fie $x=5$

Fie $y=5$

Atunci $\boxed{5x+4y=5\cdot 5+4\cdot 5=45>17}$ □

(7)

(4) Dacă avem de demonstrat o prop de forma $(\forall x) P(x)$, considerăm o valoare $x \in M(aT)$ ARBITRARĂ („fixă") pt x și facem demonstrația pe baza proprietăților generale ale variabilelor de tipul lui x