# Curs 14

Exp: Să presupunem că sunt două companii, A și B, care produc becuri inteligente. Becurile produse de comp. A au o durată de viață rep. $Exp(\lambda_0)$ iar cele fabricate de B au o durată de viață rep. $Exp(\lambda_1)$ cu $\lambda_0 < \lambda_1$. Am primit un bec inteligent (pe care nu este inscripționată firma). Știm că un bec ales aleator provine de la compania A cu prob. $p_0$ și de la B cu prob. $p_1 = 1 - p_0$.

Fie T durata de viață a becului primit.

a) Care este f-ct de rep. și densitatea de rep. a lui T.

b) Are v.a T prop. lipsei de memorie?

c) Fie I v.a definită prin $I=1$ dacă becul a fost produs de compania B. Det. rep cond. a lui I la $T=t$.

Sol: a) T v.a cont.

$$I = \begin{cases} 1, & \text{dacă becul a fost produs de comp. B} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$ – v.a. discretă

Din ipoteză știm că $T \mid I=0 \sim Exp(\lambda_0)$

$T \mid I=1 \sim Exp(\lambda_1)$

Mai știm că $\mathbb{P}(I=1) = p_1 = 1-p_0$, $I \sim B(p_1)$

Formula prob. totale

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \le t)$$
$$= \mathbb{P}(T \le t \mid I=0)\,\mathbb{P}(I=0) + \mathbb{P}(T \le t \mid I=1)\,\mathbb{P}(I=1)$$

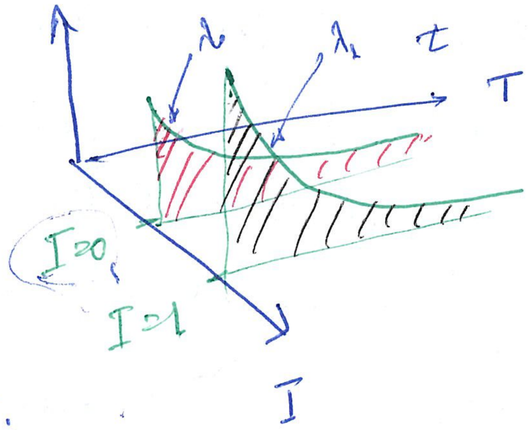
În cazul unei v.a rep $\mathcal{E}xp(\lambda)$ avem

$$\begin{cases} \text{densitatea} & \lambda e^{-\lambda t} \\ \text{fct. de rep} & 1-e^{-\lambda t} \end{cases}, t \geq 0$$

$$\mathbb{P}(T \leq t) = (1-e^{-\lambda_0 t})p_0 + (1-e^{-\lambda_1 t})p_1$$

$$= 1 - p_0 e^{-\lambda_0 t} - p_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad p_1 = 1-p_0$$

Densitatea comună a lui $(T, I)$




Densitatea lui $T$:

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = p_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad t > 0$$

b) Cum $\lambda_0 \neq \lambda_1$, forma $p_0\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + p_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$ nu se reduce la o expresie de tipul $\lambda e^{-\lambda t}$ ceea ce înseamnă că v.a $T$ nu este rep exponențial.

c) Vom folosi formula lui Bayes pt o va cont și una discretă

$$\mathbb{P}(I=1 \mid T=t) = \frac{f_{T|I}(t|1)\, \mathbb{P}(I=1)}{f_T(t)}$$ (Formula lui Bayes)

$f_{T|I}(t|1)$ - este densitatea cond. a lui $T$ știind că $I=1$

Cum $T|I=1 \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1)$ atunci

$$\mathbb{P}(I=1 \mid T=t) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \times p_1}{p_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}} = \frac{p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}}{p_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}}$$

Dacă $t \to \infty$ atunci $\mathbb{P}(I=1 \mid T=t) \to 0$.

## Covarianța și corelația r.a.

Def: Fie $X$ și $Y$ două v.a. S.n. covarianța dintre $X$ și $Y$

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]}$$

Obs: Intuitiv covarianța a două v.a măsoară tendința celor două v.a de a crește simultan sau descrește simultan.

Obs: Avem că $\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - E[X]E[Y]}$

În particular, $Cov(X,X) = Var(X) \geq 0$

Def: Spunem că v.a $X$ și $Y$ sunt necorelate dacă au $Cov(X,Y) = 0$.

Obs: Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y$ (independente) atunci $Cov(X,Y) = 0$.

(Necorelarea nu implică independența)

Exp:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(0,1) \\ Y = X^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\,dx = 0$$

$$\mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y] = 0$$

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0 \Rightarrow X$ și $Y$ sunt necorelate

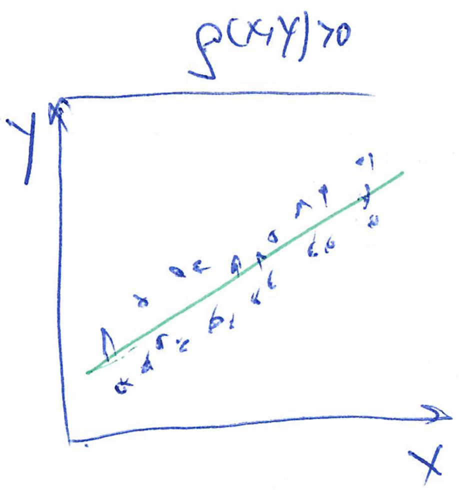
dar $X$ și $Y$ nu sunt indep.

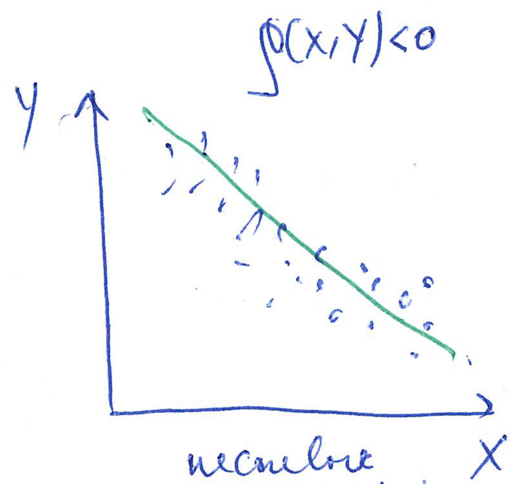
(P) Avem următoarele prop:

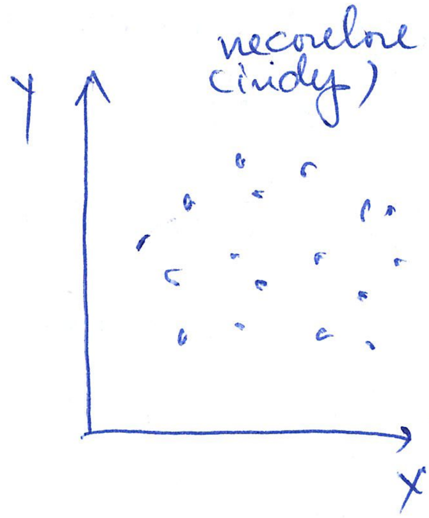
1) $Cov(X,X) = Var(X)$
2) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
3) $Cov(X,a) = 0$, a const
4) $Cov(aX+b,Y) = a\,Cov(X,Y)$
5) $Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$
6) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$
7) $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)$

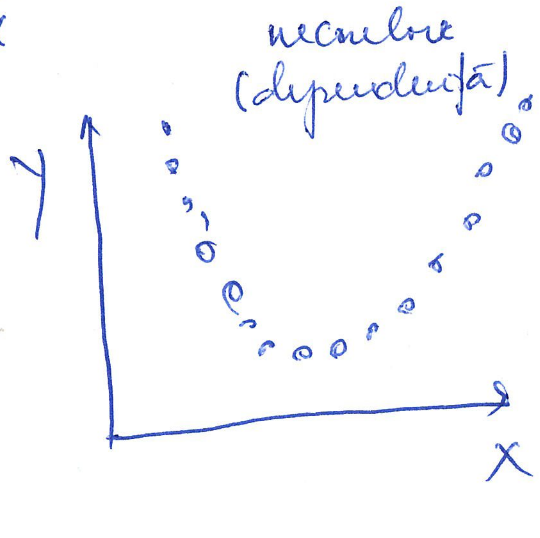
Def: Se numește corelația dintre X și Y (coeficientul de corelație)

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$



(P) Coeficientul de corelație verifică inegalitatea
$$|\rho(X,Y)| \le 1$$
Avem egalitate doar în cazul în care există o combinație afină între X și Y ($Y = aX+b$ sau $X = aY+b$)

Dem:

Putem presupune că X și Y au medie 0 și varianță 1.

Fie $E[X] = \mu_X$, $E[Y] = \mu_Y$ iar $Var(X) = \sigma_X^2$ și $Var(Y) = \sigma_Y^2$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}} = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$
$$= E\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\cdot\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$$

---

v.a $\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ și $\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$ s.n v.a normalizate (centrate și reduse)

- au medie 0 și varianță 1.

Astfel dacă X și Y ar fi fost v.a de medie 0 și var. 1

atunci
$$\rho(X,Y) = E[X\cdot Y]$$

Avem $E[(X+\lambda Y)^2] \ge 0$, $\forall \lambda$

$$\lambda^2 E[Y^2] + 2\lambda E[XY] + E[X^2] \ge 0 \quad \forall \lambda$$
$$\Delta = 4E[XY]^2 - 4E[X^2]E[Y^2] \le 0$$

Cum $\left.\begin{array}{l} Var(X) = Var(Y) = 1 \\ E(X) = E[Y] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow E[X^2] = E[Y^2] = 1$

~~Ex~~ Astfel din $\Delta \le 0$ avem

$$\underbrace{E[XY]}_{\rho}{}^2 \le 1 \Rightarrow \rho^2 \le 1 \Rightarrow |\rho(X,Y)| \le 1$$

Să pp. că $\rho(X,Y) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \rho(X,Y)=1 \\ \Delta = 4\rho^2(X,Y) - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \underset{1}{\underset{\parallel}{E[Y^2]}} + 2\lambda \underbrace{E[XY]}_{1} + \underset{1}{\underset{\parallel}{E[X^2]}} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

$$E[(X+\lambda Y)^2] = (\lambda+1)^2 \ge 0$$

Dacă $\lambda = -1 \Rightarrow E[(X-Y)^2] = 0 \Rightarrow P(X=Y) = 1$.

$$P\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} = \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X + \frac{\mu_Y \sigma_X - \mu_X \sigma_Y}{\sigma_X}}$$

$$aX + b$$

(T) (Ineg. Cauchy-Schwartz)
Dacă $X$ și $Y$ sunt 2 v.a. cu varianțe finite atunci

$$|E[XY]| \le \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$$

Obs: Dacă $Y=1$ atunci $E[X]^2 \le E[X^2] \Rightarrow Var(X) \ge 0$

## Media cond.

Fie A un eveniment de probabilitate pozitivă ($\mathbb{P}(A)>0$)
Definim media condiționată a v.a. X la A:

$$\mathbb{E}[X|A] = \begin{cases} \sum_x x\,\mathbb{P}(X=x|A) & , X \text{ discretă} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x)\,dx & , X \text{ cont.} \end{cases}$$

Definim media cond. a lui X la Y=y prin:

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \begin{cases} \sum_x x\,\mathbb{P}(X=x|Y=y) & , \text{v.a. discrete} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx & , \text{v.a. cont.} \end{cases}$$

## Inegalități și teoreme limită

Ce se întâmplă dacă nu putem evalua de manieră exactă o anume prob. sau nu putem calcula media ceva?

Putem rezolva problema prin:

1) simulare.
2) mărginirea prob. căutate (inegalități)
3) aproximări la limită

Ineg Cauchy - Schwartz:

$$|\mathbb{E}[XY]| \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]}$$

Exp: (Metoda momentului de ordin 2)

$X$ - v.a pozitivă, $X \geq 0$ și căutăm să mărginim $\mathbb{P}(X = 0)$

i) $X$ - nr. de ex. la care Ionel răspunde greșit atunci
ex. $\{X = 0\}$ - Ionel a răspuns perfect (a luat nota maximă)

ii) $X$ - nr. de perechi care au aceeași zi de naștere sau diferă printr-o zi
$\{X = 0\}$ - perechile care au zile de naștere la cel puțin 2 zile distanță

$$X = \begin{cases} 0, & X = 0 \\ X, & X > 0 \end{cases} = \underbrace{X}_{X} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{X>0\}}}_{Y}$$

Din ineg Cauchy - Schwartz:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{\{X>0\}}] \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}^2_{\{X>0\}}]}$$

$\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$

$$= \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X>0\}}]}$$

$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$

$$= \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{P}(X>0)}$$

$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X>0) \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=0) = 1 - \mathbb{P}(X>0) \leq 1 - \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} = \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X^2]}$$

## Ineg. lui Jensen

(P) Fie X o v.a. și g o fct convexă. Atunci:

$$\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$$

Dacă g este concavă:

$$\mathbb{E}[g(X)] \leq g(\mathbb{E}[X])$$

Obs: a) $g(x) = x^2 \Rightarrow \mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$

b) $g(x) = |x| \Rightarrow \mathbb{E}[|X|] \geq |\mathbb{E}[X]|$

c) $g(x) = \log(x) \Rightarrow \mathbb{E}[\log(X)] \leq \log(\mathbb{E}[X])$