§1. Mulţimi ordonate

Definiţia 1. Fie A o mulţime nevidă. O relaţie binară R pe A se numeşte relaţie de ordine (parţială) dacă pentru orice $x, y, z \in A$ sunt verificate următoarele axiome

(O1) xRx (reflexivitatea)

(O2) Dacă xRy şi yRx atunci $x=y$ (antisimetria)

(O3) Dacă xRy şi yRz atunci xRz (tranzitivitatea)

Dacă R mai verifică şi axioma

(O4) Pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx (= x şi y sunt compatibile)

atunci R se numeşte relaţie de ordine totală.

O relaţie binară R se numeşte relaţie de preordine dacă verifică (O1) şi (O3).

O pereche (A, R) în care A este o mulţime nevidă şi R este o relaţie de ordine pe A se numeşte mulţime (parţial) ordonată; dacă R este preordine atunci (A, R) se numeşte mulţime preordonată iar dacă R este ordine totală (A, R) se numeşte mulţime total ordonată sau lanţ.

Exemple (1) Mulţimile $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ sunt lanţuri;

(2) Dacă X este o mulţime nevidă atunci $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ este o mulţime ordonată; ea este total ordonată dacă şi numai dacă X este formată dintr-un singur element.

(2) Dacă X este o mulţime nevidă atunci $(X, =)$ este o mulţime ordonată (în acest caz R este $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$).

(3) Dacă pe mulţimea $\mathbb{N}^*$ definim $x \preceq y \iff x \mid y$ atunci $(\mathbb{N}^*, \preceq)$ este o mulţime ordonată dar nu total ordonată;

(4) Pe mulţimea $\mathbb{C}$ definim relaţia binară $\leq$

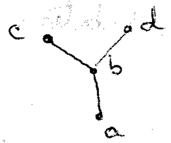
$$z_1 = a_1 + ib_1 \leq z_2 = a_2 + ib_2 \iff a_1 \leq a_2 \text{ şi } b_1 \leq b_2.$$

Atunci $(\mathbb{C}, \leq)$ este o mulţime ordonată dar nu total ordonată.

(5) Relaţia $x \preceq y \iff x \mid y$ definită pe $\mathbb{Z}^*$ este o relaţie de preordine care nu este o relaţie de ordine.

(6) Fie A mulțimea ofițerilor dintr-o unitate militară. Pentru $x, y \in A$ spunem că $x \le y$ dacă gradul lui x este mai mic sau egal cu gradul lui y. Atunci $(A, \le)$ este o mulțime preordonată care nu este ordonată.

Obs. O relație de ordine pe o mulțime finită se va reprezenta grafic. Dacă $A = \{a, b, c, d\}$ și $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d)\}$ atunci (A, R) este o mulțime ordonată ce va fi reprezentată grafic astfel



Convenție. O relație de ordine arbitrară pe o mulțime A va fi notată de acum înainte prin $\le$.

Fie o mulțime finită $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ și R o relație binară pe A. Vom identifica mulțimea A cu mulțimea $\{1, \dots, n\}$ iar pe R cu o relație pe $\{1, \dots, n\}$. Se definește o matrice booleană $M_R = (m_{ij})$ de ordinul n prin

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (i,j) \in R \\ 0, & \text{dacă } (i,j) \notin R. \end{cases}$$

Se observă că mulțimea relațiilor binare pe $A = \{1, \dots, n\}$ este în corespondență biunivocă cu mulțimea matricilor booleene de ordinul n. Atunci o relație binară pe A va fi dată prin matricea booleană asociată. De exemplu, relația R definită mai sus pe $A = \{1, 2, 3, 4\}$, unde $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ și $d = 4$ va fi reprezentată de

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Condițiile din Definiția 1 pot fi convertite cu ușurință în limbaj de matrici booleene

(Q1) $m_{ii} = 1$ pentru orice $i = 1, \dots, n$

(Q2) M_R este matrice antisimetrică ($m_{ij} = 1$ implică $m_{ji} = 0$)

(Q3) $m_{ij} = 1$, $m_{jk} = 1$ implică $m_{ik} = 1$, pentru orice $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$

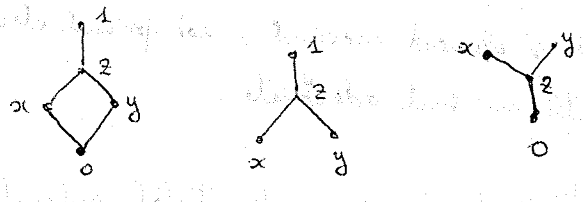
(Q3) Pentru orice $(i,j) \in \{1, \dots, n\}$, $m_{ij} = 1$ sau $m_{ji} = 1$.

- Program pentru determinarea tuturor relațiilor de ordine pe o mulțime finită

Fie $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ două mulțimi ordonate. O funcție $f: A \to B$ se numește <u>izotonă</u> dacă $x \leq y$ implică $f(x) \leq f(y)$ pentru orice $x, y \in A$.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată. Un element $u \in A$ se numește <u>prim element</u> (resp. <u>ultim element</u>) dacă $u \leq x$ (resp. $x \leq u$) pentru orice $x \in A$. Atât primul element cât și ultimul element al unei mulțimi ordonate sunt unice (atunci când există). Primul element va fi notat întotdeauna cu 0, iar ultimul element cu 1.

<u>Ex.</u> Considerăm mulțimile ordonate

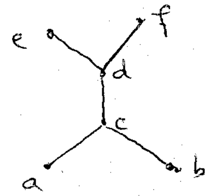


a) b) c)

In cazul a) există prim și ultim element, în cazul b) numai ultim element, iar în cazul c) numai prim element.

Fie X o submulțime ~~finită~~ a unei mulțimi ordonate A. Un element $a \in A$ este ~~un~~ <u>minorant</u> (resp. <u>majorant</u>) al lui X dacă $a \leq x$ (resp. $x \leq a$) pentru orice $x \in X$.

<u>Ex.</u> Considerăm mulțimea ordonată



Dacă $X = \{c, d\}$ atunci $\{a, b, c\}$ este mulțimea minoranților lui X iar ~~$\{c,d,f\}$~~ $\{d, e, f\}$ mulțimea majoranților săi.

Atât mulțimea majoranților, cât și cea a minoranților pot fi vide.

Supremumul $\sup$ unei mulțimi $X \subseteq A$ este cel mai mic majorant al lui X; dual, infimumul $\inf X$ al lui X este cel mai mare minorant al lui X. Atunci relația $a = \sup X$ este caracterizată de proprietățile

(i) $x \leq a$ pentru orice $x \in X$;

(ii) Dacă $x \leq b$ pentru orice $x \in X$ atunci $a \leq b$.

Relația $a = \inf X$ se reprezintă prin condiții duale.

Dacă $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ vom nota $\sup X = \sup(x_1,\dots,x_n)$ și $\inf X = \inf(x_1,\dots,x_n)$.

~~O mulțime ordonată $(A,\leq)$ se numește *inductivă* dacă orice parte total ordonată a sa admite un majorant.~~

~~Axioma lui Zorn Orice~~

Fie $(A,\leq)$ o mulțime ordonată. Un element *maximal* (resp. *minimal*) este un element m al lui A cu proprietatea că $m \leq a$ (resp. $a \leq m$) implică $a = m$. O mulțime ordonată poate avea mai multe elemente maximale sau mai multe elemente minimale.

Exemple 1) $(\mathbb{R},\leq)$ nu are niciun element maximal și niciun element minimal.

2) În $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ elementele minimale sunt de forma $\{x\}$, $x\in X$ iar X element maximal.

Ultimul element al unei mulțimi ordonate este și element maximal, iar primul element este element minimal. Reciprocele acestor afirmații nu sunt adevărate.

O mulțime ordonată $(A,\leq)$ se numește inductivă dacă orice parte total ordonată a sa admite un majorant.

Axioma lui Zorn. Orice mulțime ordonată inductivă admite un element maximal.

§2. Latici

<u>Definiția 1.</u> O mulțime ordonată $(L, \leq)$ se numește <u>latice</u> dacă pentru orice $x, y \in A$ există $\inf(x,y)$ și $\sup(x,y)$.

<u>Prop. 2.</u> Fie o latice $(L, \leq)$. Pentru orice $x, y \in L$ notăm $x \wedge y = \inf(x,y)$ și $x \vee y = \sup(x,y)$.

Atunci în L sunt verificate următoarele egalități:

(L1) $x \wedge x = x$; $x \wedge x = x$; (idempotența)

(L2) $x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$; (comutativitatea)

(L3) $(x \wedge y) \wedge z = (x \wedge y) \wedge z$ (asociativitatea)
$(x \vee y) \vee z = (x \vee y) \vee z$

(L4) $x \wedge (x \vee y) = x$; $x \vee (x \wedge y) = x$ (absorbția).

<u>Dem.</u> Vom demonstra, spre exemplificare, asociativitatea supremumului. Arătăm că $(x \vee y) \vee z = \sup(x, y, z)$. Aceasta este echivalent cu următoarele două condiții

(a) $x, y, z \leq (x \vee y) \vee z$

(b) Dacă $x, y, z \leq a$ atunci $(x \vee y) \vee z \leq a$.

Prima condiție este evidentă. Dacă $x, y, z \leq a$ atunci $x \vee y \leq a$ (pentru că $x \vee y = \sup(x,y)$) și $z \leq a$, deci $(x \vee y) \vee z = \sup(x \vee y, z) \leq a$.

Analog $x \vee (y \vee z) = \sup(x, y, z)$, deci $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

~~Propr.~~ Fie $(L, \vee, \wedge)$ o structură algebrică în care $\vee, \wedge$ sunt două operații binare ce verifică proprietățile (L1)-(L4) de mai sus. Vom observa că pentru orice $x, y \in L$ avem echivalența

$$x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y.$$

Într-adevăr, dacă $x \wedge y = x$ atunci $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = x$; dacă $x \vee y = y$ atunci $x \wedge y = (x \vee y) \wedge x = x$. Echivalența demonstrată ne permite să definim următoarea relație binară pe L

(1) $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$.

<u>Prop. 3.</u> $(L, \leq)$ este o latice în care $\sup(x,y) = x \vee y$ și $\inf(x,y) = x \wedge y$ pentru orice $x, y \in L$.

Dem. Verificăm întâi că $\leq$ este o relație de ordine

- $a \leq a$ rezultă din $a \wedge a = a$;

$a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = a \wedge b = b \wedge a = b$

$a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \wedge b = a,\ b \wedge c = b$

$\Rightarrow a = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$

$\Rightarrow a \leq c$.

Pentru a arăta că $a \wedge b = \inf(x, y)$ va trebui să stabilim relațiile

$a \wedge b \leq a,\ a \wedge b \leq b$

$x \leq a,\ x \leq b \Rightarrow x \leq a \wedge b$.

Primele două inegalități rezultă din $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b$, $(a \wedge b) \wedge b = a \wedge b$, iar cealaltă relație conform implicației

$x \wedge a = x,\ x \wedge b = x \Rightarrow x \wedge (a \wedge b) = (x \wedge a) \wedge b = x \wedge b = x$.

În mod analog se arată că $a \vee b = \sup(x, y)$.

Observație. Propozițiile 2 și 3 arată că avem două definiții echivalente ale conceptului de latice: prima, în care o latice este o mulțime ordonată $(L, \leq)$ cu proprietatea că orice mulțime de două elemente admite infimum și supremum și a doua, în care o latice apare ca o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$ ce satisface axiomele (L_1)-(L_4).

O mulțime ordonată $(L, \leq)$ în care orice submulțime a lui L admite infimum și supremum se numește latice completă. Dacă $\{x_i\}_{i \in I}$ este o mulțime de elemente din L vom folosi notațiile

$$\bigvee_{i \in I} x_i = \sup\{x_i\}_{i \in I} \quad \text{și} \quad \bigwedge_{i \in I} x_i = \inf\{x_i\}_{i \in I}$$

Observație (a) Într-o latice $(L, \vee, \wedge)$ sunt adevărate proprietățile

$x \leq y \Rightarrow a \wedge x \leq a \wedge y$ și $a \vee x \leq a \vee y$

$x \leq y;\ a \leq b \Rightarrow x \wedge a \leq y \wedge b$ și $x \vee a \leq y \vee b$

(b) Dacă $(L, \vee, \wedge)$ este o latice cu prim element 0 și cu ultim element 1 atunci $0 \wedge x = 0$, $0 \vee x = x$, $1 \wedge x = x$ și $1 \vee x = 1$ pentru orice $x \in L$.

Notație. Conform asociativității operațiilor $\vee, \wedge$ dintr-o latice vom putea nota

$$\bigvee_{i=1}^{n} x_i = x_1 \vee \dots \vee x_n = x_1 \vee (x_2 \vee \dots \vee (x_{n-1} \vee x_n) \dots) = \sup(x_1, \dots, x_n)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_1 \wedge \dots \wedge x_n = x_1 \wedge (x_2 \wedge \dots \wedge (x_{n-1} \wedge x_n) \dots) = \inf(x_1, \dots, x_n).$$

Prop. 4. Într-o latice L sunt echivalente afirmațiile următoare:

(i) $(x\wedge y)\vee(x\wedge z) = x\wedge(y\vee z)$ pentru orice $x,y,z\in L$;

(ii) $(x\vee y)\wedge(x\vee z) = x\vee(y\wedge z)$ pentru orice $x,y,z\in L$;

(iii) $(x\vee y)\wedge z \leq x\vee(y\wedge z)$ pentru orice $x,y,z\in L$.

Dem. (i)$\Rightarrow$(ii) Vom arăta că orice elemente a,b,c ale lui L verifică (ii). În (i) vom pune $x=a\vee b$, $y=a$ și $z=c$.

$$
\begin{aligned}
(a\vee b)\wedge(a\vee c) &= [(a\vee b)\wedge a]\vee[(a\vee b)\wedge c] \\
&= a\vee[(a\vee b)\wedge c] && (\text{conform } (L4))\\
&= a\vee[(a\wedge c)\vee(b\wedge c)] && (\text{conform } (i))\\
&= [a\vee(a\wedge c)]\vee(b\wedge c) \\
&= a\vee(b\wedge c). && (\text{conform } (L4))
\end{aligned}
$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) Din $z\leq x\vee z$ rezultă $(x\vee y)\wedge z \leq (x\vee y)\wedge(x\vee z) = x\vee(y\wedge z)$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Fie $a,b,c\in L$. În (iii) facem $x=a$, $y=b$, $z=a\vee c$:

$(a\vee b)\wedge(a\vee c) \leq a\vee[b\wedge(a\vee c)] = a\vee[(a\vee c)\wedge b]$;

Punând în (iii) $x=a$, $y=c$, $z=b$ rezultă $(a\vee c)\wedge b \leq a\vee(c\wedge b)$, de unde

$a\vee[(a\vee c)\wedge b] \leq a\vee[a\vee(c\wedge b)] = (a\vee a)\vee(b\wedge c) = a\vee(b\wedge c)$.

Din inegalitățile stabilite obținem $(a\vee b)\wedge(a\vee c) \leq a\vee(b\wedge c)$, iar inegalitatea reversă este valabilă în orice latice (exercițiu).

O latice L ce satisface condițiile echivalente (i)-(iii) se numește <u>latice distributivă</u>.

Fie L o latice cu prim element 0 și cu ultim element 1. Un element $a\in L$ se numește <u>complementat</u> dacă există un element $b\in A$, numit <u>complement</u> al lui a astfel încât $a\wedge b=0$ și $a\vee b=1$.

Lema 5. Într-o latice distributivă L cu prim și ultim element, orice element poate avea cel mult un complement.

Dem. Fie $a,b,c\in L$ astfel încât $a\wedge b = a\wedge c = 0$ și $a\vee b = a\vee c = 1$. Atunci

$b = b\wedge 1 = b\wedge(a\vee c) = (b\wedge a)\vee(b\wedge c) = 0\vee(b\wedge c) = b\wedge c$

și analog $c = b\wedge c$, deci $b=c$.

Complementul unui element a se va nota $\overline{a}$ sau $\neg a$.

Fie $C(L)$ mulțimea elementelor complementate ale unei latici distributive L cu prim și ultim element. Este evident că $\{0,1\}\subseteq C(L)$.

Prop. 6. Dacă $a,b\in C(L)$ atunci $a\vee b$, $a\wedge b\in C(L)$ și

$(a\wedge b)^{-}=\overline{a}\vee\overline{b}$, $(a\vee b)^{-}=\overline{a}\wedge\overline{b}$.

Dem. Pentru verificarea primei relații este suficient să demonstrăm

$(a\wedge b)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b})=0$, $(a\wedge b)\vee(\overline{a}\vee\overline{b})=1$.

Aceste egalități se obțin astfel

$(a\wedge b)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b})=(a\wedge b\wedge\overline{a})\vee(b\wedge\overline{a}\wedge\overline{b})=0\vee 0=0$

$(a\wedge b)\vee(\overline{a}\vee\overline{b})=(a\vee\overline{a}\vee\overline{b})\wedge(b\vee\overline{a}\vee\overline{b})=1\wedge 1=1$.

A doua relație se obține în mod analog.

Exemple.

(1) Orice lanț $(L,\leq)$ este o latice distributivă în care

$\cancel{x\vee y=\max(x,y) \text{ și } x\wedge y=}$

$$x\vee y=\begin{cases} x, & \text{dacă } y\leq x\\ y, & \text{dacă } y\leq x\end{cases} \quad \text{și} \quad x\wedge y=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\leq y\\ y, & \text{dacă } y\leq x.\end{cases}$$

(2) Dacă X este o mulțime atunci $\mathcal{P}(X)$ este o latice distributivă cu prim și ultim element.

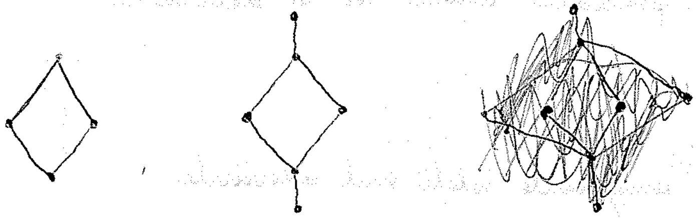
(3) Fie n un număr natural ≥ 2 și D_n mulțimea divizorilor naturali ai lui n. Definim relația binară $\preceq$ pe D_n: $x\preceq y \Leftrightarrow x\mid y$. Atunci $(D_n,\preceq)$ este o latice distributivă cu prim element 1 și cu ultim element n în care

$x\vee y=[x,y]$ (cel mai mic multiplu comun al lui x și y)

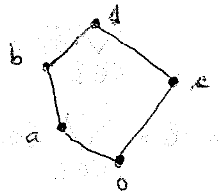
$x\wedge y=(x,y)$ (cel mai mare divizor comun al lui x și y)

(4) $(\mathbb{Z},\leq)$ este o latice distributivă fără prim și ultim element.

(5) Următoarele latici sunt distributive



(6) Considerăm laticea următoare



Se observă că a și b sunt complemenți ai lui c deci laticea nu este distributivă.

Fie L, L' două latici cu prim și ultim element. O funcție $f: L \to L'$ se numește <u>morfism de latici cu prim</u> și <u>ultim element</u> dacă următoarele proprietăți sunt verificate, pentru orice $x, y \in L$:

(a) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$;

(b) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$;

(c) $f(0) = 0$; $f(1) = 1$.

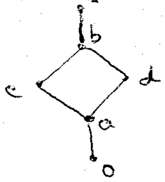
Vom nota cu $Ld(0,1)$ categoria laticilor distributive cu prim și ultim element.

<u>Observație</u>. Orice morfism din $Ld(0,1)$ este o funcție izotonă:

$$x \leq y \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow f(x) \wedge f(y) = f(x) \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Un morfism din $Ld(0,1)$ se numește <u>izomorfism</u> dacă este o funcție bijectivă. Un izomorfism de forma $f: L \to L$ se numește <u>automorfism al lui L</u>. Un <u>endomorfism</u> al lui L este un morfism de forma $f: L \to L$.

<u>Exemplu</u>. Presupunem că L este laticea



Atunci L are două automorfisme f_1, f_2; f_1 este morfismul identic 1_L iar f_2 este dat de: $f_2(0) = 0$, $f_2(a) = a$, $f_2(c) = d$, $f_2(d) = c$, $f_2(b) = b$, $f_2(1)$. Argumentul are la bază observația că dacă A este o latice distributivă cu 0 și 1 și $f: A \to A$ un automorfism atunci pentru orice $x \in A$, $x < y$ dacă și numai dacă $f(x) < f(y)$.

Exercițiu. Dacă L este laticea din exemplul precedent atunci să se determine toate endomorfismele lui L.

Lema 7. Pentru orice familie $\{a_i\}_{i\in I}$ din B următoarele relații sunt adevărate

(1) Dacă $\bigvee_{i\in I} a_i$ există în B atunci ~~există~~ $\bigwedge_{i\in I} \bar{a}_i = (\bigvee_{i\in I} a_i)^-$

(2) Dacă $\bigwedge_{i\in I} a_i$ există în B atunci ~~există~~ $\bigvee_{i\in I} \bar{a}_i = (\bigwedge_{i\in I} a_i)^-$

(3) Dacă $\bigvee_{i\in I} a_i$ există în B atunci $(\bigvee_{i\in I} a_i)\wedge b = \bigvee_{i\in I}(a_i \wedge b)$.

Dem. Exercițiu.

Lema 8. Sunt echivalente următoarele afirmații

(1) Pentru orice $X \subseteq B$ există $\sup X$;

(2) Pentru orice $X \subseteq B$ există $\inf X$.

Dem. Se aplică Lema 7.

O algebră Boole completă este o algebră Boole în care sunt îndeplinite afirmațiile (1) și (2) din Lema 8.

§3. Algebre Boole

Def. 1. O algebră Boole este o latice distributivă cu prim și ultim element în care orice element este complementat.

Așadar o algebră Boole este o structură algebrică de tipul $(B, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ în care $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice distributivă cu prim și ultim element, iar $^{-}$ este o operație unară astfel încât $x \vee \bar{x} = 1$ și $x \wedge \bar{x} = 1$ pentru orice $x \in B$.

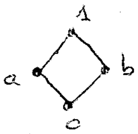
Dacă L este o latice distributivă cu prim și ultim element atunci mulțimea $C(L)$ a elementelor complementate ale lui L este o algebră Boole (vezi Prop. 6, §2).

Exemple de algebre Boole

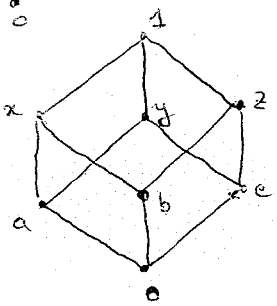
(1) Dacă X este o mulțime, atunci $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, C, \emptyset, X)$ este o algebră Boole.

(2) $L_2 = \{0, 1\}$.

(3) rombul



(4) cubul



(5) mulțimea evenimentelor asociate unei experiențe aleatoare.

(6) Dacă X este un spațiu topologic atunci familia $\mathcal{B}(X)$ a părților simultan închise și deschise ale lui X formează o algebră Boole.

(7) Orice produs direct de algebre Boole are o structură canonică de algebră Boole (operațiile se fac pe componente). În particular, dacă X este o mulțime nevidă, atunci L_2^X este o algebră Boole.

Lema 2. Într-o algebră Boole B avem pentru orice $x, y \in B$:

(1) $\bar{\bar{x}} = x$

(2) $(x \vee y)^{-} = \bar{x} \wedge \bar{y}$; $(x \wedge y)^{-} = \bar{x} \vee \bar{y}$;

(3) $x \leq y \Leftrightarrow \bar{y} \leq \bar{x}$

(4) $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge \bar{y} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} \vee y = 1$.

Dem. (i) Din unicitatea complementului: $x \vee \bar{x} = 1, x \wedge \bar{x} = 0$.

(ii) Prop. 6, §2.

(iii) $x \le y \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow \bar{x} \vee \bar{y} = \bar{x} \Rightarrow \bar{y} \le \bar{x}$.

(iv) $x \le y \Rightarrow x \wedge \bar{y} \le y \wedge \bar{y} = 0 \Rightarrow x \wedge \bar{y} = 0$.

$x \wedge \bar{y} = 0 \Rightarrow y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \bar{y}) = (x \vee y) \wedge (y \vee \bar{y}) = (x \vee y) \wedge 1 = x \vee y$

$\Rightarrow x \le y$.

Într-o algebră Boole B se definesc următoarele două operaţii binare

$x \to y = \bar{x} \vee y$ (implicaţie booleană)

$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$ (echivalenţa booleană)

Lema 3. Pentru orice $x, y \in B$ avem

(i) $x \le y \Leftrightarrow x \to y = 1$;

(ii) $x \leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = y$.

Dem. (i) rezultă din Lema 2, (4), iar (ii) din (i).

Dăm mai jos câteva din proprietăţile celor două operaţii

$x \to (y \to x) = 1$

$(x \to (x \to y)) \to (x \to y) = 1$

$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$

$(x \leftrightarrow y) \to (x \to y) = 1$

$(x \to y) \to ((y \to x) \to (x \leftrightarrow y)) = 1$

$\bar{x} \leftrightarrow \bar{y} = x \leftrightarrow y$

Să stabilim, de exemplu, proprietatea a treia. Este suficient să probăm că $x \to y \le (y \to z) \to (x \to z)$. Un calcul simplu arată că

$(y \to z) \to (x \to z) = (\bar{y} \vee z)^{-} \vee \bar{x} \vee z = (y \wedge \bar{z}) \vee \bar{x} \vee z = y \vee \bar{x} \vee z$

de unde $x \to y = \bar{x} \vee y \le y \vee \bar{x} \vee z = (y \to z) \to (x \to z)$.

Exerciţiu. Să se demonstreze că $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$ pentru orice $x, y, z \in B$.

Se numeşte *inel Boole* orice inel unitar $(A, +, \cdot, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$.

Lema 4. Pentru orice două elemente x, y ale unui inel Boole A avem $x + x = 0$ şi $xy = yx$.

Dem. Din

$$x+y=(x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2 = x+xy+yx+y$$

rezultă $xy+yx=0$. Făcând $y=x$ se obține $x+x=x^2+x^2=0$. Pentru orice $z\in A$, vom avea $z+z=0$, adică $z=-z$. Luând $z=xy$, rezultă $xy=-yx=yx$.

Fie A un inel Boole. Definim următoarele operații pe A:

$$x\vee y = x+y+xy$$
$$x\wedge y = xy$$
$$\bar{x} = x+1$$

Prop. 5. $(A, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ este o algebră Boole.

Dem. Să stabilim, de exemplu, asociativitatea operației $\vee$.

$$(x\vee y)\vee z = (x+y+xy)+z+(x+y+xy)\cdot z = x+y+z+xy+yx+zx+xyz = \ldots$$
$$\ldots = x\vee(y\vee z)$$

Vom mai arăta că $1+x$ verifică proprietățile complementului

$$x\vee(x+1) = x+x+1+x(x+1) = 2x+1+x^2+x = 0+1+(x+x) = 1+0 = 1$$
$$x\wedge(x+1) = x(x+1) = x^2+x = x+x = 0.$$

Fie acum B o algebră Boole. Introducem operațiile următoare pe B

$$x+y = (x\wedge\bar{y})\vee(\bar{x}\wedge y)\ ;\quad x\cdot y = x\wedge y$$

Prop. 6. $(B, +, \cdot, 0, 1)$ este un inel boolean.

Dem. Să verificăm asociativitatea operației $+$.

$$(a+b)+c = [((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))\wedge\bar{c}]\vee[((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))^-\wedge c]$$

Calculăm separat

$$((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))\wedge\bar{c} = (a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{a}\wedge b\wedge\bar{c})$$

$$((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))^-\wedge c = [(\bar{a}\vee b)\wedge(a\vee\bar{b})]\wedge c$$
$$= [(a\wedge\bar{a})\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(a\wedge b)\vee(b\wedge\bar{b})]\wedge c$$
$$= ((a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b}))\wedge c$$
$$= (a\wedge b\wedge c)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b}\wedge c).$$

Înlocuind mai sus se obține

$(a+b)+c = (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c)$.

Expresia obținută este simetrică în a, b, c, deci $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Verificarea celorlalte axiome ale inelelor se face în aceeași manieră.

Exercițiu. Fie $F(B)$ inelul Boole asociat algebrei Boole B și $G(A)$ algebra Boole asociată inelului Boole A. Să se arate că algebrele Boole B și $G(F(B))$ sunt izomorfe și că inelele Boole A și $F(G(A))$ sunt izomorfe.

Caz particular. Fie algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ a părților unei mulțimi X. Adunarea $+$ a lui $\mathcal{P}(X)$ ca inel Boole este chiar diferența simetrică $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$, iar înmulțirea este intersecția $A \cap B$.

Exercițiu. Fie ~~A~~ $(A, +, \cdot, 0, 1)$ un inel comutativ și unitar. Un element ~~e~~ $e \in A$ se numește idempotent dacă $e^2 = e$. Notăm cu $B(A)$ mulțimea idempotenților lui A. Pe $B(A)$ definim următoarea operație:

$$e \oplus f = e + f - 2ef, \text{ pentru orice } e, f \in B(A).$$

Să se arate că $(B(A), \oplus, \cdot, 0, 1)$ este inel Boole.

Definiția 7. O submulțime nevidă B' a ~~lui~~ algebrei Boole B se numește subalgebră Boole (pe ~~scurt~~ scurt, subalgebră) a lui B dacă pentru orice $x, y \in A$ sunt verificate axiomele următoare:

(a) $x, y \in B' \Rightarrow x \vee y \in B'$;

(b) $x, y \in B' \Rightarrow x \wedge y \in B'$;

(c) $x \in B' \Rightarrow \bar{x} \in B'$;

(d) $0 \in B'$ și $1 \in B'$.

Observație. ~~Axiomele (a), (b), (d) rezultă~~ Fiecare din axiomele (a), (b) și (d) rezultă din celelalte trei. Axioma (c) nu rezultă din celelalte. Într-adevăr, considerăm algebra Boole L_2^2 și $B' = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$. B' verifică axiomele (a), (b), (d), dar nu este închisă la negație.

Exemple de subalgebre

(1) $L_2 = \{0,1\}$ este subalgebră a oricărei algebre Boole.

(2) Dacă B este o algebră Boole atunci $L_2^{\mathbb{N}}$ este subalgebră a lui $B^{\mathbb{N}}$.

(3) Dacă X este un spațiu topologic atunci algebra Boole $B(X)$ a părților simultan închise și deschise este subalgebră a lui $\mathcal{P}(X)$.

(4) L_2^3 are următoarele subalgebre

$B_1 = \{(0,0,0), (1,1,1)\}$

$B_2 = \{(0,0,0), (1,1,1), (1,0,0), (0,1,1)\}$

$B_3 = \{(0,0,0), (1,1,1), (0,1,0), (1,0,1)\}$

$B_4 = \{(0,0,0), (1,1,1), (0,0,1), (1,1,0)\}$

$B_5 = L_2^3$.

Exercițiu. Să se întocmească un program pentru determinarea tuturor subalgebrelor lui L_2^n.

Def. 8. Fie B, B' două algebre Boole. O funcție $f: B \to B'$ se numește morfism de algebre Boole (morfism boolean) dacă pentru orice $x, y \in B$ sunt verificate următoarele axiome:

(1) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$;

(2) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$;

(3) $f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$;

(4) $f(0) = 0$; $f(1) = 1$.

Exercițiu. Să se arate că fiecare din cele ~~trei~~ ~~patru~~ axiomele (1)-(4) este implicată de celelalte trei.

Un morfism boolean de forma $f: B \to B$ se numește endomorfism. Un izomorfism boolean ~~de forma~~ este un morfism boolean $f: B \to B'$ bijectiv; un izomorfism de forma $f: B \to B$ se numește ~~endo~~ automorfism al lui B. Dacă B, B' sunt izomorfe atunci vom nota $B \simeq B'$.

Observație (a) Dacă $f: B \to B'$ este un morfism boolean atunci $f(B)$ este subalgebră a lui B'.

(b) Un morfism boolean $f: B \to B'$ verifică egalitățile:

$$f(x \to y) = f(x) \to f(y) \quad \text{și} \quad f(x \leftrightarrow y) = f(x) \leftrightarrow f(y)$$

pentru orice $x, y \in B$.

Vom nota cu $\mathcal{B}$ categoria algebrelor Boole și a morfismelor booleene.

Exemple de morfisme booleene

(1) Fie X, Y două mulțimi nevide ~~...~~ și $f: X \to Y$ o funcție oarecare. Funcția $\Phi: \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$, definită de $\Phi(C) = f^{-1}(C)$ pentru orice $C \subseteq Y$, este morfism boolean.

(2) Fie $\mathcal{P}(X)$ algebra Boole a părților lui X. Considerăm funcția $\Phi: \mathcal{P}(X) \to L_2^X$ definită de $\Phi(A) = \chi_A$ pentru orice $A \subseteq X$ (χ_A este funcția caracteristică a lui A). Atunci Φ este un izomorfism boolean.

(3) Rombul este izomorf cu L_2^2:

$0 \mapsto (0,0)$; $a \mapsto (1,0)$; $b \mapsto (0,1)$; $1 \mapsto (1,1)$.

(4) Cubul este izomorf cu L_2^3:

$0 \mapsto (0,0,0)$;	$x \mapsto (1,1,0)$	(pentru că $x = a \vee b$);
$a \mapsto (1,0,0)$;	$y \mapsto (1,0,1)$	(pentru că $y = a \vee c$)
$b \mapsto (0,1,0)$;	$z \mapsto (0,1,1)$	(pentru că $z = b \vee c$)
$c \mapsto (0,0,1)$;	$1 \mapsto (1,1,1)$	

(5) Ne propunem să determinăm automorfismele cubului. Întâi vom observa că dacă $f: B \to B'$ este un izomorfism boolean atunci: $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$, pentru orice $x, y \in B$. Atunci, dacă f este un automorfism al cubului, vom avea $f(\{a,b,c\}) = \{a,b,c\}$. Rezultă că numărul de automorfisme ale cubului este 8 (= numărul de permutări ale unei mulțimi cu 3 elemente). Morfismul identic este unul din cele 8. Să vedem cum se determină unul din celelalte. Presupunem că $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$. Atunci

$$f(x) = f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = b \vee c = z$$
$$f(y) = f(a \vee c) = f(a) \vee f(c) = b \vee a = x$$
$$f(z) = f(b \vee c) = f(b) \vee f(c) = c \vee a = y.$$

Bineînțeles că $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$.

Exercițiu. Să se determine (eventual printr-un program) toate automorfismele lui L_2^n.

Exercițiu. Să se determine toate morfismele booleene de tipul

a) $f: L_2^3 \to L_2$; b) $f: L_2^3 \to L_2^2$; c) $f: L_2^2 \to L_2^3$; d) $f: L_2^3 \to L_2^3$.

Observație. $f: L \to L'$ un morfism din $Ld(0,1)$. Dacă $x \in C(L)$ atunci $f(x) \in C(L')$ deci putem defini $C(f) = f|_{C(L)} : C(L) \to C(L')$. $C(f)$ este un morfism boolean.

Asocierea $L \rightsquigarrow C(L)$, $f \rightsquigarrow C(f)$ definește un functor contravariant $C: Ld(0,1) \to \mathbb{B}$.

Lema 9. Fie $f: B \to B'$ un morfism boolean. Sunt echivalente afirmațiile

(1) f este injectiv;

(2) Pentru orice $x, y \in B$ avem: $x \le y \iff f(x) \le f(y)$.

Dem. (1) $\Rightarrow$ (2). Dacă $f(x) \le f(y)$ atunci $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = f(x)$, deci $x \wedge y = x$, de unde $x \le y$

Este evident că $x \le y$ implică $f(x) \le f(y)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Dacă $f(x) = f(y)$ atunci $f(x) \le f(y)$ și $f(y) \le f(x)$, de unde $x \le y$ și $y \le x$.

Rezultă $x = y$.

Lema 10. Fie $f: B \to B'$ un morfism boolean. Sunt echivalente afirmațiile

(1) f este injectiv;

(2) $f^{-1}(0) = \{0\}$;

(3) $f^{-1}(1) = \{1\}$.

Dem. (1) $\Rightarrow$ (3) $f(x) = 1 = f(1) \Rightarrow x = 1$.

(3) $\Rightarrow$ (1) $f(x) \le f(y) \Rightarrow f(x \to y) = f(x) \to f(y) = 1$

$\Rightarrow x \to y = 1$

$\Rightarrow x \le y$.

Aplicând Lema 9 rezultă că f este injectiv.

(1) $\iff$ (2) Analog.

Observație. Fie A, A' două inele Boole și $G(A)$, $G(A')$ algebrele Boole asociate. Dacă $f: A \to A'$ este un morfism de inele unitare atunci $G(f) = f: G(A) \to G(A')$ este un morfism boolean.

Fie B, B' două algebre Boole și $F(B)$, $F(B')$ inelele Boole asociate. Dacă $g: B \to B'$ este un morfism ~~de~~ boolean atunci $F(g) = g: F(B) \to F(B')$ este un morfism de inele unitare.

F poate fi privit ca un functor de la categoria algebrelor Boole la categoria ~~algebrelor~~ inelelor Boole, iar G un functor de categoria inelelor Boole la categoria algebrelor Boole. Functorii F și G stabilesc un izomorfism ~~dintre~~ între categoria algebrelor Boole și categoria inelelor Boole.

§4. Filtre și congruențe

Def.1. Fie B o algebră Boole oarecare. O submulțime nevidă F a lui B se numește filtru dacă pentru orice $x, y \in B$ următoarele condiții sunt îndeplinite

(F1) $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$;

(F2) $x \in F, x \leq y \Rightarrow y \in F$.

Dual, un ideal al lui B este o submulțime nevidă I a lui B pentru care

(F_1') $x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$;

(F_2') $x \leq y, y \in I \Rightarrow x \in I$.

Unui filtru F i se asociază idealul $I_F = \{\bar{x} \mid x \in F\}$, iar unui ideal I i se asociază filtrul $F_I = \{\bar{x} \mid x \in I\}$. În acest fel filtrele lui B sunt în corespondență biunivocă cu idealele lui B. Conform acestei observații vom studia numai filtrele unei algebre Boole; proprietățile idealelor se vor obține prin dualizare.

Observație. Dacă F este un filtru al lui B atunci $1 \in F$. Pentru orice elemente x, y ale lui F, $x, y \in F$ dacă și numai dacă $x \wedge y \in F$.

Fie B o algebră Boole. O relație de echivalență $\sim$ pe B se numește congruență dacă:

(i) $x \sim y, x' \sim y' \Rightarrow x \vee x' \sim y \vee y'$;

(ii) $x \sim y, x' \sim y' \Rightarrow x \wedge x' \sim y \wedge y'$;

(iii) $x \sim y \Rightarrow \bar{x} \sim \bar{y}$.

Observație. Condiția (i) sau (ii) rezultă din celelalte două.

În cele ce urmează vom stabili o corespondență biunivocă între filtre și congruențe.

Unui filtru F îi asociem relația binară

$$x \sim_F y \Leftrightarrow x \leftrightarrow y \in F$$
$$\Leftrightarrow x \rightarrow y \in F \text{ și } y \rightarrow x \in F.$$

Prop. 2. $\sim_F$ este o congruență a lui B.

Demonstrație. Arătăm întâi că $\sim_F$ este o relație de echivalență pe B.

$x \sim_F x$ rezultă din $x \leftrightarrow x = 1 \in F$;

$x \sim_F y$ implică $y \sim_F x$ deoarece $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$.

Fie $x \sim_F y$ și $y \sim_F z$, deci $x \rightarrow y \in F$, $y \rightarrow x \in F$, $y \rightarrow z \in F$ și $z \rightarrow y \in F$. Stabilim inegalitatea $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z$, care va implica $x \rightarrow z \in F$. Într-adevăr

$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leq \bar{x} \vee z = x \rightarrow z$.

Analog rezultă $z \rightarrow x \in F$, deci $x \sim_F z$.

Vom arăta că
$$x\sim_F y,\ x'\sim_F y' \Rightarrow x\vee x'\sim_F y\vee y'.$$
Dacă $x\sim_F y$, $x'\sim_F y'$ atunci $x\to y\in F$, $y\to x\in F$, $x'\to y'\in F$ şi $y'\to x'\in F$. Se

observă că
$$(x\to y)\wedge(x'\to y') = (\bar{x}\vee y)\wedge(\bar{x}'\vee y')$$
$$\leq (\bar{x}\vee y\vee y')\wedge(\bar{x}'\vee y\vee y')$$
$$=(\bar{x}\wedge\bar{x}')\vee y\vee y' = (x\vee x')\to(y\vee y').$$
Folosind această inegalitate se obţine $(x\vee x')\to(y\vee y')\in F$ şi analog

$(y\vee y')\to(x\vee x')\in F$, deci $x\vee x'\sim_F y\vee y'$.

Cum $x\leftrightarrow y=\bar{x}\leftrightarrow\bar{y}$, vom avea: $x\sim_F y\Rightarrow \bar{x}\sim_F\bar{y}$. Deci $\sim_F$ este o congruenţă.

Reciproc, unei congruenţe $\sim$ îi asociem $\tilde{F}=\{x\in B\mid x\sim 1\}$.

Prop. 3. $\tilde{F}$ este un filtru al lui B.

Dem. $\tilde{F}$ este nevidă deoarece $1\sim 1$ implică $1\in F$. Verificăm axiomele filtrului:

(F1): $x,y\in\tilde{F}\Rightarrow x\sim 1,\ y\sim 1 \Rightarrow x\wedge y\sim 1\wedge 1\Rightarrow x\wedge y\sim 1\Rightarrow x\wedge y\in\tilde{F}$;

(F2): $x\leq y,\ x\in\tilde{F}\Rightarrow x\vee y=y,\ x\sim 1\Rightarrow y=x\vee y\sim 1\vee y=1\Rightarrow y\in\tilde{F}$.

Prop. 4. Mulţimea filtrelor lui B este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea congruenţelor lui B.

Dem. Arătăm că funcţiile $F\mapsto\sim_F$, $\sim\ \mapsto\tilde{F}$ sunt inverse una celeilalte. Observăm că
$$F\ \cancel{\mapsto}\ \sim_F\ \longmapsto \tilde{F}^F \quad\text{şi}\quad \sim\ \longmapsto \tilde{F}\longmapsto \sim_{\tilde{F}}.$$ Atunci
$$\tilde{F}^F=\{x\mid x\sim_F 1\}=\{x\mid x\leftrightarrow 1\in F\}=\{x\mid x\in F\}=F.$$
Vom demonstra că pentru orice $x,y\in B$:
$$x\sim_{\#} y \Leftrightarrow x\sim_{\tilde{F}} y.$$
$x\sim_{\tilde{F}} y$ este echivalent cu $x\to y\in\tilde{F}$ şi $y\to x\in\tilde{F}$. Dacă $x\sim_{\#} y$ atunci $(x\to y)\sim(y\to 1)$, deci $(x\to y)\sim 1$ şi analog $(y\to x)\sim 1$. Rezultă $x\to y\in\tilde{F}$ şi $y\to x\in\tilde{F}$, deci $x\sim_{\tilde{F}} y$.

Reciproc, presupunem că $x\to y\in\tilde{F}$ şi $y\to x\in\tilde{F}$, deci $(x\to y)\sim 1$ şi $(y\to x)\sim 1$. Rezultă $x\wedge y=x\wedge(x\to y)\sim x\wedge 1=x$ şi analog $x\wedge y\sim y$, deci $x\sim y$.

Exerciţiu. Fie algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ cu X infinită. Să se arate că părţile cofinite (= părţile cu complementarele finite) formează un filtru şi să se determine congruenţa asociată.

Fie F un filtru al algebrei Boole B. Notăm cu $B/_F$ mulțimea cât $B/_{\sim_F}$ și cu $x/_F$ clasa de echivalență a lui $x \in B$. Pe $B/_F$ introducem operațiile:

$$x/_F \vee y/_F = x \vee y/_F, \quad x/_F \wedge y/_F = x \wedge y/_F \text{ și } \overline{x/_F} = \bar{x}/_F.$$

Prop. 5. $(B/_F, \vee, \wedge, ^-, 0/_F, 1/_F)$ este o algebră Boole. Aplicația canonică $p: B \to B/\sim$ este un morfism boolean surjectiv.

Prop. 6. Fie $f: B \to B'$ un morfism boolean.

(1) $f^{-1}(1) = \{x \in B \mid f(x) = 1\}$ este un filtru al lui B;

(2) $f(B)$ este o subalgebră a lui B' izomorfă cu $B/_{f^{-1}(1)}$

Dem. (1) Ușor.

(2) ~~Definim funcția g: B/F~~ Notăm $F = f^{-1}(1)$ și definim funcția $g: B/_F \to f(B)$ prin $g(x/_F) = f(x)$ pentru orice $x \in B$. Definiția lui g nu depinde de reprezentanți:

$$x/_F = y/_F \Rightarrow x \leftrightarrow y \in F$$
$$\Rightarrow f(x) \leftrightarrow f(y) = f(x \leftrightarrow y) = 1$$
$$\Rightarrow f(x) = f(y).$$

O verificare simplă arată că g este morfism boolean. Conform implicațiilor

~~morfism~~

$g(x/_F) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x/_F = 1/_F$

rezultă că g este injectivă (se aplică Lema 10, §3). Surjectivitatea lui g este evidentă.

Exercițiu. Fie $f: B \to B'$ un morfism boolean surjectiv. Dacă F este un filtru al lui B atunci $f(F)$ este un filtru al lui B'; dacă G este un filtru al lui B' atunci $f^{-1}(G)$ este un filtru al lui B. Filtrele lui B' sunt în corespondență biunivocă cu mulțimea filtrelor lui B ce includ pe $f^{-1}(1)$.

Exercițiu. Fie F, G două filtre ale lui B astfel încât $F \subseteq G$. Atunci $G/_F = \{x/_F \mid x \in G\}$ este un filtru al lui $B/_F$ și algebrele Boole $(B/_F)/_{(G/_F)}$ și $B/_G$ sunt izomorfe.

Lema 7. Orice intersecție de filtre este un filtru.

Dacă X este o submulțime a lui B atunci filtrul generat de X este intersecția filtrelor ce includ pe X. Cu alte cuvinte filtrul generat de X este cel mai mic filtru (în sensul incluziunii) ce include pe X. Vom nota cu $[X)$ filtrul generat de X.

Observație. Un filtru F este filtrul generat de X dacă el verifică

(a) $X \subseteq F$

(b) G filtru, $X \subseteq G \Rightarrow F \subseteq G$.

Este evident că filtrul generat de mulțimea vidă este $\{1\}$.

Prop. 8. Dacă $X \neq \emptyset$, atunci

$$[X) = \{a \in B \mid \text{ex. } n \in \mathbb{N}^* \text{ și } x_1, \dots, x_n \in X,\ x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq a\}.$$

Dem. Fie F mulțimea din dreapta. Arătăm că F este filtru. Dacă $a, b \in F$ atunci există

$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$ astfel încât

$x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq a$, $y_1 \wedge \dots \wedge y_m \leq b$.

Rezultă $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_m \leq a \wedge b$, deci $a \wedge b \in F$. Axioma (F2) din Def. 1 este evident verificată. Se observă că $X \subseteq F$. Presupunem că G este un filtru ce include pe X. Dacă $a \in F$ atunci există $x_1, \dots, x_n \in X$ astfel încât $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq a$. Atunci $x_1, \dots, x_n \in G$, deci $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in G$, de unde $a \in G$. A rezultat $F \subseteq G$. Deci $[X) = F$.

Vom nota cu $[x)$ filtrul generat de $\{x\}$; $[x)$ se va numi filtrul principal generat de x.

Corolar 9. $[x) = \{a \mid x \leq a\}$.

Corolar 10. $[\{x_1, \dots, x_n\}) = [x_1 \wedge \dots \wedge x_n)$.

Corolar 11. Dacă F este un filtru și $x \in A$ atunci $[F \cup \{x\}) = \{a \mid \text{ex. } e \in F,\ e \wedge x \leq a\}$.

Lema 12. Într-o algebră Boole finită orice filtru este principal.

Observație. Să calculăm congruența asociată unui filtru principal $[x)$:

$$
\begin{aligned}
a \sim_{[x)} b &\Leftrightarrow a \to b \in [x),\ b \to a \in [x) \\
&\Leftrightarrow x \leq a \to b,\ x \leq b \to a \\
&\Leftrightarrow x \wedge a \leq b,\ x \wedge b \leq a \\
&\Leftrightarrow a \wedge x = b \wedge x.
\end{aligned}
$$

Exercițiu. Să se determine toate filtrele cubului, congruențele ~~corespunzătoare~~ și algebrele Boole cât corespunzătoare.

§5. Teorema de reprezentare a lui Stone

Scopul acestui paragraf este de a demonstra că orice algebră Boole este izomorfă cu o algebră Boole ale cărei elemente sunt părți ale unei mulțimi. Acest rezultat ocupă un loc central în teoria algebrelor Boole și are numeroase aplicații în logică, topologie, calculul probabilităților, etc. Instrumentul principal folosit în demonstrația acestei teoreme va fi conceptul de ultrafiltru.

Fie B o algebră Boole. Un filtru F al lui B este *propriu* dacă $F \neq B$; un filtru F este propriu dacă și numai dacă $0 \notin F$.

Mulțimea filtrelor proprii ale lui B este ordonată în raport cu incluziunea. Un *ultrafiltru* este un element maximal al acestei mulțimi. ~~...~~ Cu alte cuvinte, un filtru propriu U este ultrafiltru dacă și numai dacă pentru orice filtru propriu F, din $U \subseteq F$ rezultă $U = F$.

Exemple (1) Dacă X este o mulțime nevidă și $x \in X$ atunci $\mathcal{U}_x = \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ este un ultrafiltru în $\mathcal{P}(X)$.

(2) Dacă $B = L_2^n$ și $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ atunci filtrele principale $[e_1)$, $[e_2)$, ..., $[e_n)$ sunt ultrafiltrele lui B.

În cazul algebrelor Boole infinite demonstrarea existenței ultrafiltrelor (altele decât cele din exemplul impune invocarea axiomei lui Zorn. Următorul rezultat poartă numele teorema de existență a ultrafiltrului.

Prop. 1. Pentru orice filtru propriu F există un ultrafiltru U astfel încât $F \subseteq U$.

Dem. Fie Σ mulțimea filtrelor proprii ale lui B ce includ pe F. Evident $F \in \Sigma$. Vom arăta că $(\Sigma, \subseteq)$ este inductiv ordonată. Fie $(F_i)_{i \in I}$ o familie total ordonată de filtre din Σ: pentru orice $i, j \in I$, $F_i \subseteq F_j$ sau $F_j \subseteq F_i$. Notăm $G = \bigcup_{i \in I} F_i$. Vom ~~arăt~~ demonstra că G este un filtru propriu. Dacă $x, y \in G$ atunci există $i, j \in I$ astfel încât $x \in F_i$ și $y \in F_j$. Putem presupune, de exemplu, că $F_i \subseteq F_j$. Atunci $x, y \in F_j$, deci $x \wedge y \in F_j \subseteq G$. A doua proprietate din definiția filtrului se verifică imediat.

Atunci G este un majorant al familiei $(F_i)_{i \in I}$ și $(\Sigma, \subseteq)$ este inductivă. Aplicând axioma lui Zorn rezultă existența unui ultrafiltru U ce include pe F.

Cor 2. Dacă $x \neq 0$ atunci există un ultrafiltru U astfel încât $x \in U$.

Dem. Se aplică Prop. 1 filtrului propriu $F = [x)$.

Un filtru propriu F se numește filtru prim dacă pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y \in F$ implică $x \in F$ sau $y \in F$.

Prop. 3. Dacă F este un filtru propriu al lui B atunci sunt echivalente următoarele afirmații:

(1) F este ultrafiltru;

(2) F este filtru prim;

(3) Pentru orice $x \in B$, $x \in F$ sau $\bar{x} \in F$.

Dem. (1) $\Rightarrow$ (2). Presupunem prin absurd că F nu este prim deci există $x, y \in B$ astfel încât $x \vee y \in F$, dar $x, y \notin F$. Atunci incluziunile stricte

$$F \subsetneq [F \cup \{x\}) \text{ și } F \subsetneq [F \cup \{y\})$$

arată că filtrele $[F \cup \{x\})$, $[F \cup \{y\})$ nu sunt proprii, deci conțin pe 0. Folosind Corolarul 11, §4, din $0 \in [F \cup \{x\})$ rezultă existența unui element $a \in F$ astfel încât $a \wedge x = 0$. Analog, există $b \in F$ cu $b \wedge y = 0$. Atunci

$$0 = (a \wedge x) \vee (b \wedge y) = (a \vee b) \wedge (a \vee y) \wedge (x \vee b) \wedge (x \vee y)$$

Cum $a \vee b$, $a \vee y$, $x \vee b \in F$ (din $a, b \in F$) și $x \vee y \in F$ (prin ipoteză) rezultă că $0 \in F$. Contradicție, deci F este prim.

(2) $\Rightarrow$ (3). Din $x \vee \bar{x} = 1 \in F$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Presupunem prin absurd că există un filtru propriu G astfel încât $F \subsetneq G$. Atunci există $x \in G$ și $x \notin F$. Folosind ipoteza (3), $\bar{x} \in F \subseteq G$, deci $0 = x \wedge \bar{x} \in G$. Contradicție, deci F este ultrafiltru.

Exercițiu. Fie F un filtru propriu. Atunci F este ultrafiltru dacă și numai dacă algebra Boole cât $B/_F$ este izomorfă cu L_2.

Exercițiu. Un filtru propriu F este ultrafiltru dacă și numai dacă pentru orice $x, y \in B$, avem $x \to y \in F$ sau $y \to x \in F$.

Suntem acum în măsură să demonstrăm teorema de reprezentare a lui Stone.

Prop. 4. Pentru orice algebră Boole B există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d: B \to \mathcal{P}(X)$.

Dem. Vom nota cu X mulțimea ultrafiltrelor lui B și cu $d: B \to \mathcal{P}(X)$ funcția definită prin $d(x) = \{U \in X \mid x \in U\}$ pentru orice $x \in B$. Pentru orice $x, y \in B$ și pentru orice ultrafiltru U avem echivalențele:

$$\begin{aligned} U \in d(x \vee y) &\Leftrightarrow x \vee y \in U \\ &\Leftrightarrow x \in U \text{ sau } y \in U && (U \text{ este prim}) \\ &\Leftrightarrow U \in d(x) \text{ sau } U \in d(y) \\ &\Leftrightarrow U \in d(x) \cup d(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \in d(x \wedge y) &\Leftrightarrow x \wedge y \in U && (U \text{ este filtru}) \\ &\Leftrightarrow x \in U \text{ și } y \in U \\ &\Leftrightarrow U \in d(x) \text{ și } U \in d(y) \\ &\Leftrightarrow U \in d(x) \cap d(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \in d(\bar{x}) &\Leftrightarrow \bar{x} \in U \\ &\Leftrightarrow x \notin U && (\text{Propoziția } 3, (3)) \\ &\Leftrightarrow U \notin d(x) \\ &\Leftrightarrow U \in C d(x) \end{aligned}$$

Am demonstrat că

$$d(x \vee y) = d(x) \cup d(y); \; d(x \wedge y) = d(x) \cap d(y); \; d(\bar{x}) = C d(x)$$

ceea ce arată că d este morfism boolean. Dacă $x \neq 0$ atunci există un ultrafiltru U astfel încât $x \in U$ (Corolarul 2), deci $U \in d(x)$ și $d(x) \neq \emptyset$. Am arătat că $d(x) = \emptyset$ implică $x = 0$, deci $d^{-1}(\emptyset) = \{0\}$. Aplicând Lema 10, §3, d este injectiv.

Cum $\mathcal{P}(X)$ și L_2^X sunt algebre Boole izomorfe teorema de reprezentare a lui Stone capătă și următoarea formă

Prop. 4'. Pentru orice algebră Boole există o mulțime nevidă și un morfism boolean injectiv $d: B \to L_2^X$.

Observație. (1) Prop. 4 reduce calculul boolean într-o algebră Boole oarecare la calculul cu mulțimi.

(2) Prop. 4' reduce calculul calculul boolean într-o algebră Boole oarecare la

a) întîi, la calculul în L_2^X;
b) apoi, calculul în L_2^X se reduce la calculul în L_2 (operațiile se fac pe componente)

§6. Algebre Boole atomice. Structura algebrelor Boole atomice

Fie B o algebră Boole. Un element nenul a al lui B se numește <u>atom</u> dacă

$0 \le y \le x \Rightarrow y = 0$ sau $y = x$.

Algebra Boole B se numește <u>atomică</u> dacă pentru orice element $x \neq 0$ există un atom a astfel încât $a \le x$.

<u>Exemple</u>. (1) În algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ atomii sunt $\{x\}$, $x \in X$. Evident $\mathcal{P}(X)$ este atomică.

(2) În L_2^n atomii sunt $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

<u>Lema 1</u>. Orice algebră Boole finită este atomică.

<u>Demonstrație</u>. Orice șir strict descrescător $a_0 > a_1 > \dots > a_n > \dots > 0$ este finit.

<u>Propoziția 2</u>. Dacă B este o algebră Boole atomică și $\{a_i\}_{i \in I}$ este mulțimea atomilor săi atunci $\bigvee_{i \in I} a_i = 1$.

<u>Dem</u>. Presupunem prin absurd că există un majorant b al familiei $\{a_i\}_{i \in I}$ diferit de 1: $a_i \le b < 1$ pentru orice $i \in I$. Atunci $\bar{b} \neq 0$ și cum B este atomică există un atom a_j $(j \in I)$ astfel încât $a_j \le \bar{b}$. Cum $a_j \le b$ rezultă $a_j \le b \wedge \bar{b} = 0$. Contradicție.

O familie $\{e_i\}_{i \in I}$ din B se numește <u>partiție</u> dacă

(i) $e_i \wedge e_j = 0$ pentru orice $i \neq j$;

(ii) $\bigvee_{i \in I} e_i = 1$.

<u>Exemplu</u>. Dacă B este atomică atunci mulțimea $\{a_i\}_{i \in I}$ a atomilor lui B formează o partiție. Condiția (ii) este dată de Prop. 2, iar (i) rezultă direct din definiția atomului.

Fie $a \neq 0$ în B; notăm $B(a) = \{x \in B \mid x \le a\}$. Observăm că $B(a)$ este închisă la $\vee$ și $\wedge$. Pentru orice $x \in B(A)$ notăm $\tilde{x} = \bar{x} \wedge a$, introducând astfel o operație unară $\sim$ pe $B(a)$.

<u>Lema 3</u>. $(B(a), \vee, \wedge, \sim, 0, a)$ este o algebră Boole.

<u>Dem</u>. Dacă $x \in B(a)$, atunci $x \wedge \tilde{x} = 0$ și $x \vee \tilde{x} = a$.

Prop. 4. Fie $a_1,\dots,a_n \in B$ și $f: B \to B(a_1)\times\dots\times B(a_n)$ funcția definită de $f(x)=(x\wedge a_1,\dots,x\wedge a_n)$ pentru orice $x\in B$.

(a) f este injectivă $\iff \bigvee_{i=1}^{n} a_i = 1$;

(b) f este surjectivă $\iff a_i\wedge a_j = 0$ pentru orice $i\neq j$;

(c) f este bijectivă $\iff \{a_1,\dots,a_n\}$ este o partiție;

(d) f este morfism boolean.

Dem. (a) $\Rightarrow$: Din $f(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) = (a_1,\dots,a_n) = f(1)$ rezultă $\bigvee_{i=1}^{n} a_i = 1$.

$\Leftarrow$: Presupunem $\bigvee_{i=1}^{n} a_i = 1$. Atunci

$$f(x)=f(y) \Rightarrow x\wedge a_i = y\wedge a_i,\ i=1,\dots,n$$
$$\Rightarrow x = x\wedge\Big(\bigvee_{i=1}^{n} a_i\Big) = \bigvee_{i=1}^{n}(x\wedge a_i) = \bigvee_{i=1}^{n}(y\wedge a_i) = y\wedge\Big(\bigvee_{i=1}^{n} a_i\Big) = y$$

deci f este injectivă.

(b) $\Rightarrow$: Fie $i,j\in I$ distincți; notăm $c = a_i\wedge a_j$ și definim

$$x_k = \begin{cases} c, & k=i \\ \bar{c}\wedge a_j, & k=j \\ 0, & k\neq i,j \end{cases}$$

Atunci $(x_1,\dots,x_n)\in B(a_1)\times\dots\times B(a_n)$ deci există $x\in B$ astfel încât $f(x)=(x_1,\dots,x_n)$. Pe componentele i și j vom avea $a_i\wedge x = c$ și $a_j\wedge x = \bar{c}\wedge a_j$. Atunci $c\le x$ și $c\le a_j$ de unde $c\le x\wedge a_j = \bar{c}\wedge a_j \le \bar{c}$. Rezultă $c=0$, deci $a_i\wedge a_j=0$ pentru orice $i\neq j$.

$\Leftarrow$: Presupunem $a_i\wedge a_j = 0$ pentru $i\neq j$. Fie $(x_1,\dots,x_n)\in B(a_1)\times\dots\times B(a_n)$, deci $x_i\le a_i$, $i=1,\dots,n$. Notăm $x = x_1\vee\dots\vee x_n$. Pentru orice $i=1,\dots,n$ avem:

$$x\wedge a_i = \Big(\bigvee_{j=1}^{n} x_j\Big)\wedge a_i = \bigvee_{j=1}^{n}(x_j\wedge a_i) = x_i$$

pentru că $x_j\wedge a_i = 0$ pentru $j\neq i$ (pentru că $x_j\wedge a_i\le a_j\wedge a_i = 0$) și $x_i\wedge a_i = x_i$.

Se deduce că $f(x) = (x\wedge a_1,\dots,x\wedge a_n) = (x_1,\dots,x_n)$, deci f este surjectivă.

(c) Din (a) și (b)

(d) Exercițiu.

Cor. 5. Dacă $\{a_1,\dots,a_n\}$ este o partiție atunci morfismul f din Prop. 4 este un izomorfism boolean.

Prop. 6. Dacă B este o algebră Boole finită atunci există ~~un astfel~~ un număr natural n astfel încât B şi L_2^n sunt izomorfe.

Dem. Dacă B este finită atunci B este atomică. Fie $a_1, \dots, a_n$ atomii lui B. Cum $\{a_1, \dots, a_n\}$ este o partiţie avem $B \simeq \prod_{i=1}^{n} B(a_i)$. Dacă a este un atom atunci $B(a_i) = \{0, a\}$, deci $B(a_i) \simeq L_2$ pentru orice $i = 1, \dots, n$. Am obţinut $B \simeq L_2^n$.

Cor. 7. Două algebre Boole finite de acelaşi cardinal sunt izomorfe.

Dem. Dacă $B_1 \simeq B_2$ şi ~~$B_2 \simeq$~~ $B_1 \simeq L_2^n$, $B_2 \simeq L_2^m$ atunci $n = m$ şi $B_1 \simeq B_2$.

~~O algebră Boole B este completă dacă pentru orice $(x_i)_{i \in I}$ în B există $\bigvee_{i \in I} x_i$.~~

Prop. 8. Fie B o algebră Boole completă şi $\{a_i\}_{i \in I}$ o partiţie în B. Atunci funcţia $f : B \to \prod_{i \in I} B(a_i)$ definită de $f(x) = (x \wedge a_i)_{i \in I}$ este un izomorfism boolean.

Dem. Analog cu demonstraţia Prop. 4 şi a Cor. 5.

Prop. 9. Sunt echivalente afirmaţiile următoare:

(1) B este o algebră Boole completă şi atomică;

(2) B este izomorfă cu o algebră Boole de forma $\mathcal{P}(X)$.

Dem. (1) $\Rightarrow$ (2) Analog cu demonstraţia Prop. 6, aplicându-se Prop. 8.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\mathcal{P}(X)$ este completă şi atomică.

7. Dualitatea algebrelor Boole

Fie B o algebră Boole, $\operatorname{Spec} B$ mulțimea ultrafiltrelor lui B și $d : B \to \mathcal{P}(\operatorname{Spec} B)$ morfismul lui Stone: $d(x) =$ $d_A(x) = \{P \in \operatorname{Spec} B \mid x \in P\}$.

<u>Lema 1</u>. Pentru orice $x, y \in B$ avem

(i) $d(x \vee y) = d(x) \cup d(y)$;

(ii) $d(x \wedge y) = d(x) \cap d(y)$;

(iii) $d(\bar{x}) = \complement d(x)$;

(iv) $d(0) = \emptyset$; $d(1) = \operatorname{Spec} B$.

<u>Dem</u>. Vezi demonstrația teoremei de reprezentare a lui Stone.

Fie $\mathcal{F}(B)$ mulțimea filtrelor lui B. Pentru orice $F \in \mathcal{F}(B)$ notăm $d(F) = \{P \in \operatorname{Spec} B \mid F \subseteq P\}$.

Este evident că $d(x) = d([x))$ pentru orice $x \in B$.

<u>Prop. 2</u>. $\{d(F) \mid F \in \mathcal{F}(B)\}$ este familia mulțimilor închise ale unei topologii pe B.

<u>Dem</u>. Fie $(F_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}(B)$ și $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(B)$. Atunci

(1) $\bigcap_{i \in I} d(F_i) = d(\bigvee_{i \in I} F_i)$ unde $\bigvee_{i \in I} F_i$ este filtrul lui B generat de $\bigcup_{i \in I} F_i$;

(2) $d(F_1) \cup d(F_2) = d(F_1 \cap F_2)$;

(3) $d(1) = \operatorname{Spec} B$; $d(0) = \emptyset$.

Fie $P \in \operatorname{Spec} B$. (1) rezultă din echivalența

(1') $F_i \subseteq P,\ i \in I \iff \bigvee_{i \in I} F_i \subseteq P$,

iar (2) rezultă din echivalența

(2') $F_1 \cap F_2 \subseteq P \iff F_1 \subseteq P$ sau $F_2 \subseteq P$.

Vom demonstra (2'). Dacă $F_1, F_2 \nsubseteq P$ atunci există $x \in F_1 - P$ și $y \in F_2 - P$, deci $x \vee y \notin P$ (P fiind filtru prim). ~~ceea ce contrazice $x \vee y \in F_1 \cap F_2$~~ Dar $x \vee y \in F_1 \cap F_2$, deci $F_1 \cap F_2 \nsubseteq P$.

Implicația cealaltă este evidentă.

Egalitățile (3) sunt evidente. Proprietățile (1)-(3) nu exprimă altceva decât că $\{d(F) \mid F \in \mathcal{F}($ sunt închișii unei topologii pe $\operatorname{Spec} B$.

<u>Observație</u>. Topologia definită de Prop. 2 poartă numele de <u>topologia lui Stone</u>.

~~Fie $f : A \to B$ un morfism boolean și $\operatorname{Spec} f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ funcția definită de $(\operatorname{Spec} f)(P) = f^{-1}(P)$ pentru orice $P \in \operatorname{Spec} B$.~~

Prop. 3. (1) Pentru orice $x \in B$, $d(x)$ este o mulțime închisă și deschisă a lui Spec B.

(2) $\{d(x) \mid x \in X\}$ este bază de deschiși (sau de închiși)

Dem. (1) Din $Cd(x) = d(\bar{x})$.

(2) Pentru orice filtru F avem $F = \bigvee\{[x) \mid x \in F\}$, de unde

$$d(F) = d(\bigvee\{[x) \mid x \in F\}) = \bigcap_{x \in F} d(x).$$

Prop. 4. Pentru orice $x \in B$, $d(x)$ este o mulțime compactă.

Dem. Considerăm o acoperire deschisă a lui $d(x)$: $d(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} d(x_i)$. Așadar, pentru orice $P \in \mathrm{Spec}B$, $x \in P$ implică existența unui $i \in I$ astfel încât $x_i \in P$.

Fie $X = \{x\} \cup \{\bar{x}_i \mid i \in I\}$ și $F = [X)$ filtrul generat de X. Presupunem prin absurd că F este propriu, deci există $U \in \mathrm{Spec}B$, $F \subseteq U$ (Prop. 1, §5). Atunci $\bar{x}_i \in U$ pentru orice $i \in I$ și $x \in U$ implică existența unui $j \in I$ astfel încât $x_j \in U$. Contradicție, deci $0 \in F$. Ținând seama de Prop. 8, §4 există $J \subseteq I$ finită astfel încât $0 = x \wedge \bigwedge\{\bar{x}_j \mid j \in J\}$. De aici se deduce că $x \leq \bigvee_{j \in J} x_j$, de unde $d(x) \subseteq d(\bigvee_{j \in J} x_j) = \bigcup_{j \in J} d(x_j)$. Rezultă că $d(x)$ este compactă.

Prop. 5. Spec B este spațiu compact și separat.

Dem. Fie $P_1, P_2 \in \mathrm{Spec}B$, $P_1 \neq P_2$ deci există $x \in P_1$ și $x \notin P_2$. Conform Prop. 3, §5, $\bar{x} \in P$, de unde $P_1 \in d(x)$, $P_2 \in d(\bar{x})$ și $d(x) \cap d(\bar{x}) = \emptyset$. Am demonstrat că Spec B este separat. Compacitatea lui B rezultă din Prop. 4 ($\mathrm{Spec}B = d(1)$).

Un spațiu topologic este <u>zero-dimensional</u> dacă părțile sale închise și deschise formează o bază. Un spațiu compact, separat și zero-dimensional se numește spațiu boolean.

Prop. 6. Pentru orice algebră Boole B, Spec B este un spațiu boolean.

Fie $f: A \to B$ un morfism boolean și $\mathrm{Spec}f: \mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ funcția definită astfel: $(\mathrm{Spec}f)(P) = f^{-1}(P)$ pentru orice $P \in \mathrm{Spec}B$.

Prop. 7. Spec f este o funcție continuă.

Dem. Pentru orice $y \in A$ avem

$$(\operatorname{Spec} f)^{-1}(d_A(y)) = \{P \in \operatorname{Spec} B \mid f^{-1}(P) \in d_A(y)\}$$
$$= \{P \in \operatorname{Spec} B \mid y \in f^{-1}(P)\}$$
$$= \{P \in \operatorname{Spec} B \mid f(y) \in P\}$$
$$= d_B(f(y)).$$

Dacă $\mathbb{B}$ este categoria algebrelor Boole și $S\mathbb{B}$ este categoria spațiilor booleene și a funcțiilor continue atunci asocierea $B \rightsquigarrow \operatorname{Spec} B$, $f \rightsquigarrow \operatorname{Spec} f$ definește un functor contravariant $\operatorname{Spec} : \mathbb{B} \to S\mathbb{B}$.

Fie acum X un spațiu boolean și $T(X)$ algebra Boole a părților închise și deschise ale lui X. Dacă $g : X \to Y$ este un morfism din $S\mathbb{B}$ (= aplicație continuă) atunci considerăm funcția $T(g) : T(Y) \to T(X)$ definită de $T(g)(D) = g^{-1}(D)$ pentru orice $D \in T(Y)$. Asocierea $X \rightsquigarrow T(X)$, $g \rightsquigarrow T(g)$ definește un functor contravariant $T : S\mathbb{B} \to \mathbb{B}$.

Prop. 8. Pentru orice $B \in \mathbb{B}$ algebrele Boole B și $T(\operatorname{Spec}(B))$ sunt izomorfe.

Dem. Considerăm morfismul lui Stone $d_B : B \to T(\operatorname{Spec}(B))$ $(x \mapsto d_B(x))$. d_B este un morfism boolean injectiv. A rămas de arătat surjectivitatea lui d_B. Fie $D \in T(\operatorname{Spec}(B))$, deci D este o parte a lui $\operatorname{Spec} B$ închisă și deschisă. Cum D este este închisă în spațiul $\operatorname{Spec} B$ compact și separat rezultă că D este compactă. D fiind deschisă și $\{d_B(x) \mid x \in B\}$ bază a lui $\operatorname{Spec} B$ există o familie $(x_i)_{i \in I}$ în B astfel încât $D = \bigcup_{i \in I} d_A(x_i)$. Atunci există $J \subseteq I$ finită astfel încât $D = \bigcup_{i \in J} d_B(x_i) = d_B(\bigvee_{i \in J} x_i)$ și d_B este ~~injectiv~~ surjectiv.

Prop. 9. Pentru orice $X \in S\mathbb{B}$ spațiile booleene X și $\operatorname{Spec} T(X)$ sunt homeomorfe.

Dem. Pentru orice $x \in X$, $U_x = \{D \in T(X) \mid x \in D\}$ este un ultrafiltru al lui $T(X)$. Considerăm funcția $\varphi_X : X \to \operatorname{Spec} T(X)$ definită de $\varphi_X(x) = U_x$ pentru orice $x \in X$. Pentru a arăta că φ_X este homeomorphism parcurgem următorii pași:

a) φ_X este injectivă.

Dacă $x, y \in X$, $x \neq y$ atunci există $D_1, D_2 \in T(X)$, $x \in D_1$, $y \in D_2$ și $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Atunci $D_1 \in \mathcal{U}_x$, $D_2 \in \mathcal{U}_y$ și $D_2 \notin \mathcal{U}_x$, deci $\varphi_X(x) = \mathcal{U}_x \neq \mathcal{U}_y = \varphi_X(y)$.

b) φ_X este surjectivă

Fie $\mathcal{U} \in \operatorname{Spec} T(X)$. Dacă $\{D_1, \dots, D_n\} \in \mathcal{U}$ atunci $\bigcap_{i=1}^{n} D_i \in \mathcal{U}$, deci $\bigcap_{i=1}^{n} D_i \neq \emptyset$ (pentru că $\mathcal{U}$ este filtru propriu în $T(X)$). Atunci $\mathcal{U}$ are proprietatea intersecției finite deci $\bigcap\{D \mid D \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset$, deoarece X este compact.

Fie $x, y \in \bigcap\{D \mid D \in \mathcal{U}\}$, $x \neq y$, deci există $D_1, D_2 \in T(X)$, $x \in D_1$, $y \in D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Dar $C_{D_1} \cup C_{D_2} = X \in \mathcal{U}$ deci $C_{D_1} \in \mathcal{U}$ sau $C_{D_2} \in \mathcal{U}$, pentru că $\mathcal{U}$ este filtru prim în $T(X)$. S-a obținut $x \notin D_1$ sau $y \notin D_2$. Contradicție, deci mulțimea $\bigcap\{D \mid D \in \mathcal{U}\}$ are un singur element x. Atunci avem $x \in D$ dacă și numai dacă $D \in \mathcal{U}$, de unde $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}$. Am demonstrat că $\varphi_X(x) = \mathcal{U}$, deci φ_X este surjectivă.

c) φ_X este continuă

Pentru orice $D \in T(X)$ avem

$$\varphi_X^{-1}(d(D)) = \{x \mid \mathcal{U}_x \in d(D)\} = \{x \mid D \in \mathcal{U}_x\} = \{x \mid x \in D\} = D.$$

d) φ_X este aplicație deschisă

Pentru orice $D \in T(X)$ vom demonstra că

$$\{\mathcal{U}_x \mid x \in D\} = \{\mathcal{U} \in \operatorname{Spec} T(X) \mid D \in \mathcal{U}\}$$

Dacă $D \in \mathcal{U} \in \operatorname{Spec} T(X)$ atunci $\mathcal{U} = \mathcal{U}_x$ cu $\bigcap\{D' \mid D' \in \mathcal{U}\} = \{x\}$. Rezultă $D \in \mathcal{U}_x$ și deci $x \in D\}$. Implicația cealaltă este evidentă. Am demonstrat că $\varphi_X(D) = \{\mathcal{U}_x \mid x \in D\} = d(D)$, deci φ_X este aplicație deschisă.

Prop. 10. Dacă $f : A \to B$ este un morfism boolean atunci următoarea diagramă este comutativă

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_A", "\sim"'] \arrow[d, "f"'] & T(\mathrm{Spec}(A)) \arrow[d, "T(\mathrm{Spec}(f))"] \\ B \arrow[r, "\sim", "d_B"'] & T(\mathrm{Spec}(B)) \end{tikzcd}$$

Dem. Pentru orice $x \in A$ au loc următoarele egalități:

$$\begin{aligned} T(\mathrm{Spec}(f))(d_A(x)) &= \{P \in \mathrm{Spec}\, B \mid \mathrm{Spec}(f)(P) \in d_A(x)\} \\ &= \{P \in \mathrm{Spec}\, B \mid f^{-1}(P) \in d_A(x)\} \\ &= \{P \in \mathrm{Spec}\, B \mid x \in f^{-1}(P)\} \\ &= d_B(f(x)). \end{aligned}$$

Propoziția 10 spune că $d : id\,\mathbb{B} \to T \circ \mathrm{Spec}$ este izomorfism functorial.

Prop. 11. Dacă $g : X \to Y$ este un morfism din $S\mathbb{B}$ atunci următoarea diagramă este comutativă:

~~Dem~~

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_X", "\sim"'] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Spec}(T(X)) \arrow[d, "\mathrm{Spec}(T(g))"] \\ Y \arrow[r, "\sim", "\varphi_Y"'] & \mathrm{Spec}(T(Y)) \end{tikzcd}$$

Dem. Pentru orice $x \in X$ următoarele egalități sunt adevărate

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(T(g))(\varphi_X(x)) &= (T(g))^{-1}(\varphi_X(x)) \\ &= \{D \in T(Y) \mid T(g)(D) \in \varphi_X(x)\} \\ &= \{D \in T(Y) \mid g^{-1}(D) \in U_x\} \\ &= \{D \in T(Y) \mid x \in g^{-1}(D)\} \\ &= \varphi_Y(g(x)). \end{aligned}$$

Prop. 11 spune că $\varphi : id\, S\mathbb{B} \to \mathrm{Spec} \circ T$ este izomorfism functorial.

Însumând toate rezultatele acestui paragraf putem formula următoarea

Teoremă (dualitatea Stone). Categoriile $\mathbb{B}$ și $S\mathbb{B}$ sunt duale.

§9. Algebre Boole injective

Fie B o algebră Boole oarecare.

Lema 1. Intersecția unei familii de subalgebre ale lui B este o subalgebră.

Dem. Direct din definiția subalgebrei.

Dacă $X \subseteq B$ atunci subalgebra generată de X este intersecția tuturor subalgebrelor lui B ~~generate~~ ce includ pe X.

Lema 2. Fie A o subalgebră a lui B și $b \notin A$. Atunci

$$A(b) = \{(a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge \bar{b}) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

este subalgebra lui B generată de $A \cup \{b\}$.

Dem. Fie $x = (a_1 \wedge b) \vee (a_2 \vee \bar{b})$ și $y = (a_1' \wedge b) \vee (a_2' \vee \bar{b})$. Atunci:

$$x \vee y = [(a_1 \vee a_2') \wedge b] \vee [(a_2 \vee a_2') \wedge \bar{b}] \in A(b).$$

Dacă $a \in A$ atunci

$$a \vee x = [a \wedge (b \wedge \bar{b})] \vee x = (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (a_1 \vee b) \vee (a_2 \vee \bar{b})$$

$$= [(a_1 \vee a_2) \wedge b] \vee [(a_2 \vee a) \wedge \bar{b}] \in A(b)$$

Conform acestei observații:

$$\bar{x} = (\bar{a}_1 \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a}_2 \vee b) = (\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2) \vee [(\bar{a}_1 \wedge b) \vee (\bar{a}_2 \wedge \bar{b})] \in A(b)$$

deoarece $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2 \in A$ și $(\bar{a}_1 \wedge b) \vee (\bar{a}_2 \wedge \bar{b}) \in A(b)$. Rezultă că $A(b)$ este subalgebră și restul demonstrației este evident.

(Sikorski)

Prop. 3. Fie A o subalgebră a lui B, $b \notin A$, C o algebră Boole completă și $h: A \to C$ un morfism boolean. Atunci există un ~~morfism~~ boolean $\tilde{h}: A(b) \to C$ ce extinde pe h. $\tilde{h}(b)$ poate fi orice element $c \in C$ cu proprietatea următoare

$$(1) \quad \bigvee \{h(a) \mid a \in A, a \leq b\} \leq c \leq \bigwedge \{h(a) \mid a \in A, b \leq a\}.$$

Dem. Se stabilește imediat inegalitatea

$$\bigvee \{h(a) \mid a \in A, a \leq b\} \leq \bigwedge \{h(a) \mid a \in A, b \leq a\}$$

deci există un elemente c cu proprietatea (1).

Dacă $x = (a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge \bar{b})$ atunci vom pune

(2) $\tilde{h}(x) = [h(a_1) \wedge c] \vee [h(a_2) \wedge \bar{c}]$

c fiind un element ce verifică (1). Arătăm că $\tilde{h}: A(b) \to C$ este bine definită;

Anume vom arăta că

$x = (a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge \bar{b}) = (a_1' \wedge b) \vee (a_2' \wedge \bar{b})$

implică

$[h(a_1) \wedge c] \vee [h(a_2) \wedge \bar{c}] = [h(a_1') \wedge c] \vee [h(a_2') \wedge \bar{c}]$

Inegalitatea

(3) $(a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge \bar{b}) \le (a_1' \wedge b) \vee (a_2' \wedge \bar{b}) =$

$= (a_1' \vee a_2') \wedge (a_1' \vee \bar{b}) \wedge (a_2' \vee b)$

implică inegalitățile

(4) $a_1 \wedge b \le a_1' \vee a_2', \ a_1' \vee \bar{b}, \ a_2' \vee b$

$a_2 \wedge \bar{b} \le a_1' \vee a_2', \ a_1' \vee \bar{b}, \ a_2' \vee b$

De aici rezultă

(5) $h(a_1) \wedge c \le h(a_1') \vee h(a_2'), \ h(a_1') \vee \bar{c}, \ h(a_2') \vee c$

$h(a_2) \wedge \bar{c} \le h(a_1') \vee h(a_2'), \ h(a_1') \vee \bar{c}, \ h(a_2') \vee c$

De exemplu

$a_1 \wedge b \le a_1' \vee \bar{b} \Rightarrow (a_1 \wedge b) \wedge (a_1' \vee \bar{b})^- = 0$

$\Rightarrow a_1 \wedge \overline{a_1'} \wedge b = 0$

$\Rightarrow b \le (a_1 \wedge \overline{a_1'})^-$

$\Rightarrow c \le h((a_1 \wedge \overline{a_1'})^-) = (h(a_1) \wedge h(\overline{a_1'}))^-$

$\Rightarrow h(a_1) \wedge h(\overline{a_1'}) \wedge c = 0$

$\Rightarrow h(a_1) \wedge c \wedge (h(a_1') \vee \bar{c})^- = 0$

$\Rightarrow h(a_1) \wedge c \le h(a_1') \vee \bar{c}$

Inegalitățile (5) implică

$[h(a_1) \wedge c] \vee [h(a_2) \wedge \bar{c}] \le [h(a_1') \wedge c] \wedge [h(a_2') \wedge \bar{c}]$

Inegalitatea inversă rezultă analog.

Arătăm acum că $\tilde{h}$ este morfism boolean.

Dacă $x=(a_1\wedge b)\vee(a_2\wedge \bar{b})$ şi $y=(a_1'\wedge b)\vee(a_2'\wedge \bar{b})$ atunci

$$x\vee y=[(a_1\vee a_1')\wedge b]\vee[(a_2\vee a_2')\wedge \bar{b}]\text{, deci}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(x\vee y) &= [h(a_1\vee a_1')\wedge c]\vee[h(a_2\vee a_2')\wedge \bar{c}]\\
&= [(h(a_1)\vee h(a_1'))\wedge c]\vee[(h(a_2)\vee h(a_2'))\wedge \bar{c}]\\
&= [(h(a_1)\wedge c)\vee(h(a_2)\wedge \bar{c})]\vee[(h(a_1')\wedge c)\vee(h(a_2')\wedge \bar{c})]\\
&= \tilde{h}(x)\vee\tilde{h}(y).
\end{aligned}$$

Rezultă că $\tilde{h}(x_1\vee\dots\vee x_n)=\tilde{h}(x_1)\vee\dots\vee\tilde{h}(x_n)$ pentru orice $x_1,\dots,x_n\in A(b)$. Observând că $\bar{x}=(\bar{a}_1\wedge\bar{a}_2)\vee(\bar{a}_1\wedge b)\vee(\bar{a}_2\wedge\bar{b})$ vom avea

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(\bar{x}) &= \tilde{h}(\bar{a}_1\wedge\bar{a}_2)\vee\tilde{h}[(\bar{a}_1\wedge b)\vee(\bar{a}_2\wedge\bar{b})]\\
&= (\overline{h(a_1)}\wedge\overline{h(a_2)})\vee[h(\bar{a}_1)\wedge c]\vee[h(\bar{a}_2)\wedge\bar{c}]\\
&= [(h(a_1)\vee h(a_2))\wedge(h(a_1)\vee\bar{c})\wedge(h(a_2)\wedge c)]^-\\
&= [(h(a_1)\wedge c)\vee(h(a_2)\wedge\bar{c})]'\\
&= (\tilde{h}(x))^-.
\end{aligned}$$

Am demonstrat că $\tilde{h}$ este morfism boolean şi restul este evident.

Definiţia 4. O algebră ~~...~~ Boole C se numeşte *injectivă* dacă pentru orice algebră Boole B, pentru orice subalgebră A a lui B şi pentru orice morfism boolean $f: A\to C$ există un morfism boolean $g: B\to C$ ~~...~~ ce extinde pe f.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
 & C
\end{tikzcd}$$

Prop. 5 (Sikorski) Orice algebră Boole completă C este injectivă.

Dem. Considerăm diagrama în $\mathbb{B}$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, phantom, "\leq"] \arrow[dr, "f"'] & B \\
 & C
\end{tikzcd}$$

Fie Σ mulțimea perechilor (D, h), astfel încât D este subalgebră a lui B ce include pe A și $h : D \to C$ este un morfism boolean ce extinde pe f:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"'] & \subseteq D \arrow[d, "h"] & \subseteq B \\ & C & \end{tikzcd}$$

Dacă $(D, h), (E, u) \in \Sigma$ definim $(D, h) \preccurlyeq (E, u)$ dacă următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[drr, "f"'] & \subseteq D \arrow[dr, "h"] & \subseteq E \arrow[d, "u"] & \subseteq B \\ & & C & \end{tikzcd}$$

Se demonstrează ușor că $(\Sigma, \preccurlyeq)$ este inductiv ordonată deci, conform axiomei lui Zorn, admite un element maximal (D, h). Presupunem că $D \neq B$ deci există $a \in B - D$. Considerăm $D(a)$ și aplicăm Prop. 3: există un morfism boolean $\tilde{h} : D(a) \to C$ ce extinde pe h. Aceasta contrazice maximalitatea lui (D, h), ceea ce arată că $D = B$. Propoziția este astfel demonstrată.

<u>Lema 6</u>. Fie în B diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_C"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Dacă B este algebră Boole completă atunci și C este completă.

<u>Dem</u>. Pentru o familie de elemente $\{x_i\}_{i \in I}$ vom arăta că $\bigvee_C x_i = g(\bigvee_B f(x_i))$. Este evident că $x_i = g(f(x_i)) \leq g(\bigvee_B f(x_i))$ pentru orice $i \in I$. Dacă $y \in C$ și $x_i \leq y$ pentru orice $i \in I$ atunci $f(x_i) \leq f(y)$, $i \in I$ în B, deci $\bigvee_B f(x_i) \leq f(y)$. Se obține $g(\bigvee_B f(x_i)) \leq g(f(y)) = y$.

<u>Prop. 7</u>. (Halmos) Orice algebră Boole injectivă C este completă.

<u>Dem</u>. Fie $d : C \to L_2^X$ morfismul lui Stone. C se identifică cu o subalgebră a lui L_2^X. Conform injectivității rezultă un morfism boolean $g : L_2^X \to C$ astfel încât $g \circ d = 1_C$. L_2^X este completă și se aplică apoi Lema 6.

<u>Teorema 8</u> (Sikorski-Halmos). O algebră Boole este injectivă dacă și numai dacă ea este completă.

<u>Dem</u>. Din Propozițiile 5 și 7.