LFA CURS 1

PRELIMINARII

Alfabet: mulțime finită și nevidă.

Exemple: $\{0,1,2,3,4,5\}$, $\{a,b\}$, $\{x\}$

Cuvânt (șir) format cu litere dintr-un alfabet Σ: $a_1 a_2 \dots a_n$, unde $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$

Exemple: $\Sigma = \{a,b\}$; Șiruri peste Σ:

ababb, a, baa, aaa

Șiruri peste $\{0\}$: 0, 000, 00000

Scriem a^n pentru $\underbrace{a \dots a}_{n \text{ ori}}$.

Lungimea unui șir (cuvânt)

Fie $w = a_1 a_2 \dots a_n$ cuvânt peste Σ, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma$. Notăm cu $|w|$ lungimea șirului w, constând din numărul literelor din Σ ce apar în w, în cazul acesta fiind n.

Pentru $a \in \Sigma$, notăm cu $|w|_a$ numărul aparițiilor lui a în w.

De exemplu, pentru $\Sigma = \{a,b\}$
$w = abbba$, $|w| = 5$, $|w|_a = 2$, $|w|_b = 3$.

Șirul (cuvântul) vid : este șirul de lungime 0, pe care îl vom nota cu λ, $|\lambda|=0$

Mulțimea șirurilor (cuvintelor) peste un alfabet Σ este notată cu Σ^* și constă din mulțimea tuturor șirurilor având litere din Σ.

Pentru $\Sigma = \{0,1\}$, avem:

$$\Sigma^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$$

Mulțimea șirurilor nevide (nenule) peste alfabetul Σ este notată cu Σ^+ și este egală cu:

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$$

Operația de concatenare

Fie Σ un alfabet, $u, v \in \Sigma^*$, $u = a_1 a_2 \dots a_m$, $v = b_1 \dots b_n$, unde $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \Sigma$.

Numim concatenarea șirurilor u și v, notată cu $u \cdot v$ sau uv, șirul următor

$$uv = a_1 a_2 \dots a_m b_1 \dots b_n$$

Evident, $|u| = m$, $|v| = n$, $|uv| = m+n$

Elementul neutru pentru concatenare este λ: $\lambda w = w \lambda = w, \ \forall\, w \in \Sigma^*$.

Limbaj peste un alfabet Σ

Numim limbaj peste alfabetul Σ orice submulțime $L \subseteq \Sigma^*$. Aceasta este o noțiune foarte generală a unui limbaj (formal).

Operații cu limbaje

Toate operațiile pentru mulțimi sunt valabile și pentru limbajele formale: reuniune, intersecție, complementară, diferență.

Concatenarea a două limbaje $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, este definită prin

$$L_1 L = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2 \}$$

Operația de stelare:

$$L \subseteq \Sigma^*, \ L^0 = \{\lambda\}, \ L^1 = L, \ L^2 = L \cdot L, \ \dots,$$

$$L^{i-1} = L^i \cdot L, \ \dots$$

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \dots \cup L^i \cup \dots$$

$$L^* = \{ w_1 w_2 \dots w_n \mid n \geq 0, \ w_1, \dots, w_n \in L \}$$

<u>Exemplu</u> $\Sigma = \{a, b\}$, $L = \{abb, ba\}$

$L^* = \{\lambda, ba, abb, baba, baabb, abbba, abbabb, \ldots\}$

<u>Proprietăți</u>

$(L^*)^* = L^*$

$L \cdot (L_1 \cup L_2) = L \cdot L_1 \cup L \cdot L_2$

$(L_1 \cup L_2) \cdot L = L_1 L \cup L_2 \cdot L$

AUTOMATE FINITE DETERMINISTE

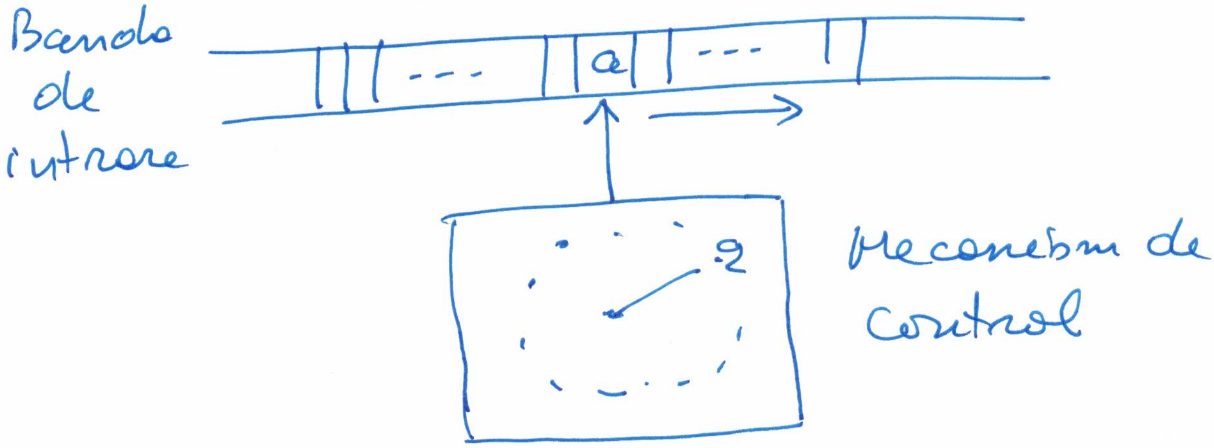
<u>Def.</u> 1 Numim automat finit determinist o structură de forma

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

unde:

- Q este mulțimea (finită și nevidă) a stărilor automatului
- Σ este alfabetul automatului
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ este funcția de tranziție
- $F \subseteq Q$ mulțimea stărilor finale
- $q \in Q$ starea inițială a automatului

Vom folosi prescurtarea <u>AFD</u> pentru un automat finit determinist.



Extensia lui δ este notată cu $\hat{\delta}$ și se definește prin:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \longrightarrow Q$$

- $\hat{\delta}(q, \lambda) = q, \ \forall q \in Q$
- $\hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a), \ \forall q \in Q,$ $\forall w \in \Sigma^*, \ \forall a \in \Sigma$

Observație:

$$\hat{\delta}(q, a) = \hat{\delta}(q, \lambda a) = \delta(\hat{\delta}(q, \lambda), a) = \delta(q, a).$$

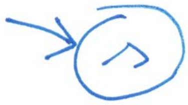
Ca notație, uneori putem folosi δ în loc de $\hat{\delta}$; atunci când argumentul lui δ este un șir și nu un simbol din Σ, se va face referire la extensie.

Limbajul definit de A

$$L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in F\}$$

Reprezentarea grafică a unui AFD

$q = \delta(p, a)$



s stare inițială

f stare finală

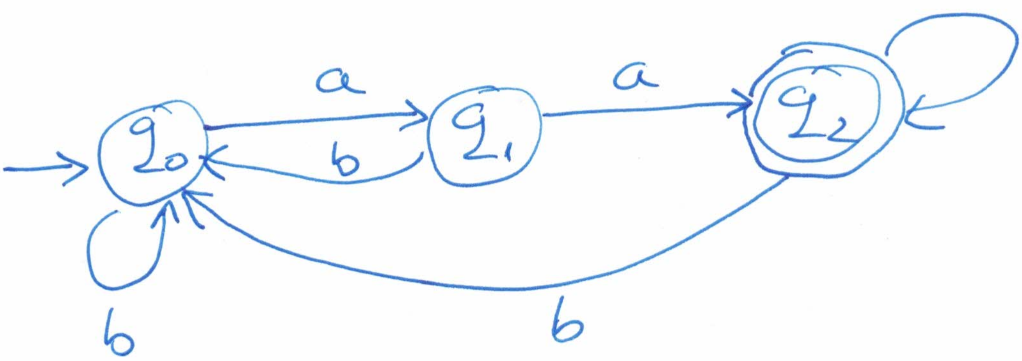
Observații

$q_0 \in F \iff \lambda \in L(A)$

$w \in L(A) \iff$ există un unic drum în graful asociat automatului A, drum care pornește din starea inițială și care se încheie într-o stare finală, fiind etichetat cu w

EXEMPLE DE AFD

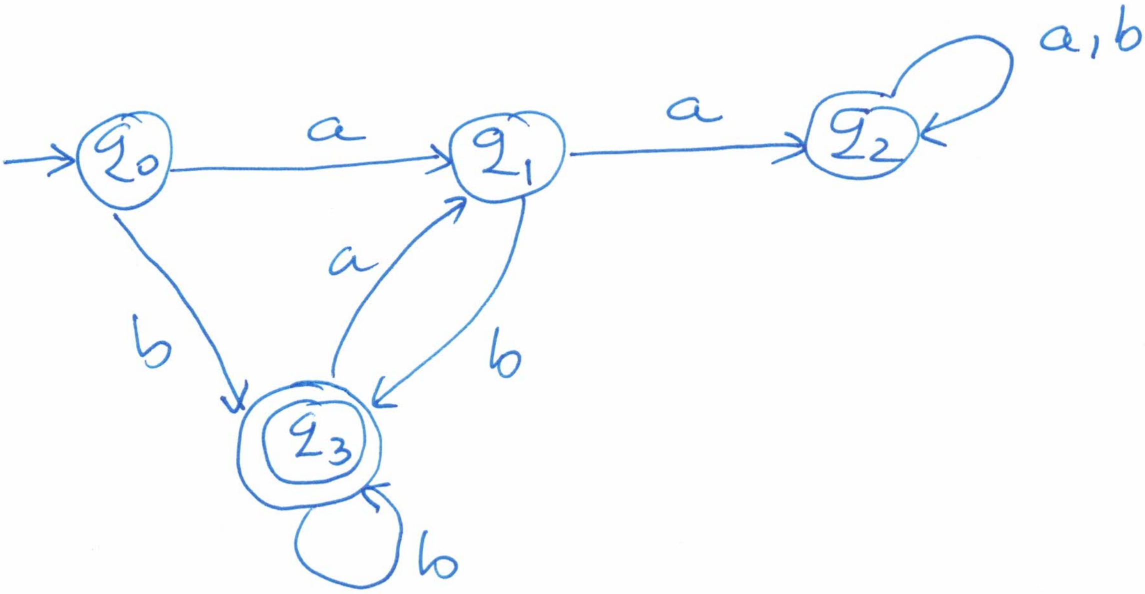
1) AFD care acceptă $L_1 = \{ x \in \{a,b\}^* \mid x$ se termină în 'aa' $\}$



$A_1 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a,b\}, \delta_1, q_0, \{q_2\})$

δ_1	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_0

2) AFD care acceptă $L_2 = \{ x \in \{a,b\}^* \mid x$ se termină în 'b' și nu conține 'aa' $\}$

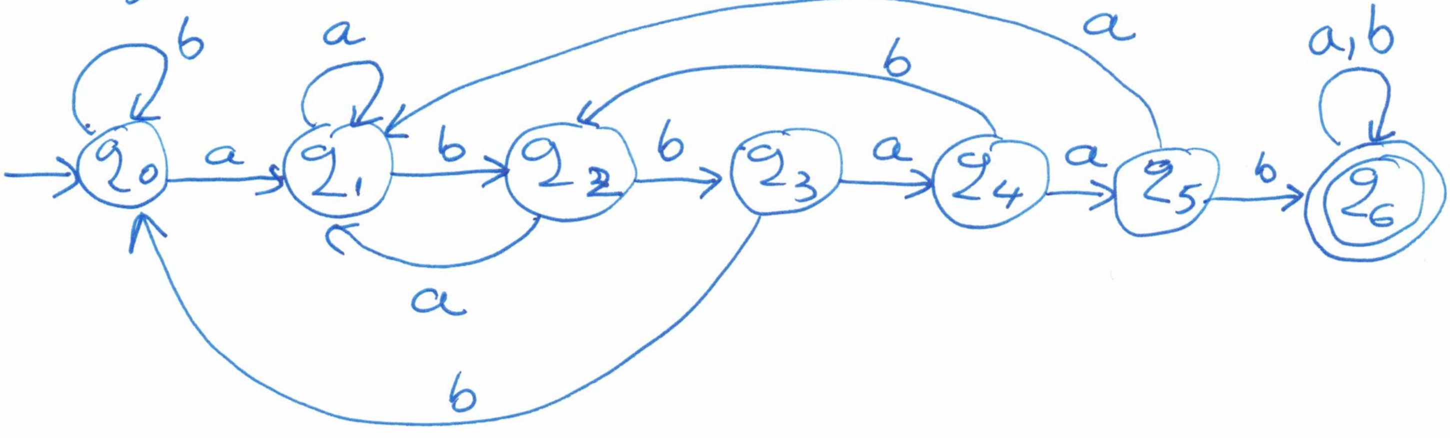


$A_2 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta_2, q_0, \{q_3\})$

δ_2	a	b
q_0	q_1	q_3
q_1	q_2	q_3
q_2	q_2	q_2
q_3	q_1	q_3

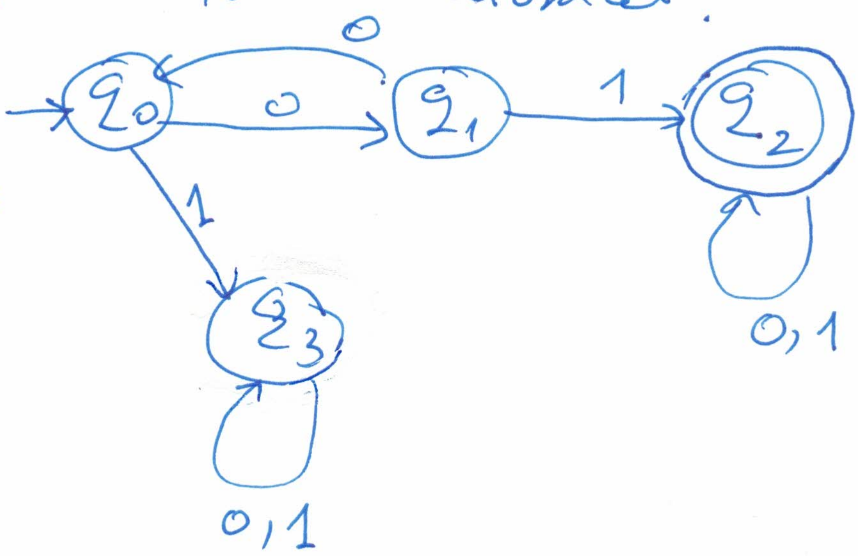
3) AFD care recunoaste limbajul

$L_3 = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ contine 'abbaab'$\}$



4) Care este limbajul acceptat de următorul automat?

A_4:



δ_4	0	1
q_0	q_1	q_3
q_1	q_0	q_2
q_2	q_2	q_2
q_3	q_3	q_3

Ce cuvinte nu acceptă A_4? – Cuvinte care încep cu '1' și cuvinte care încep cu un număr par de '0'-uri.

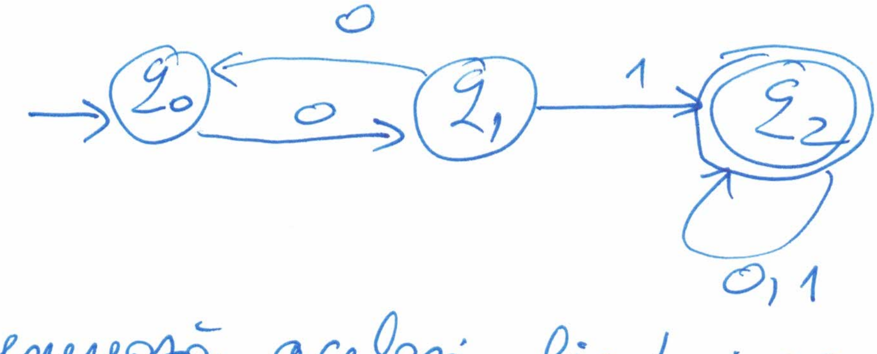
Ce cuvinte acceptă A_4?

$L(A_4) = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ începe cu un număr impar de '0'-uri urmate de cel puțin un '1' $\}$

<u>Obs.</u> Automatele definite ca în Def. 1 se mai numesc și automate finite deterministe <u>complete</u>.

5) Automatul următor:

A_5



generează același limbaj ca și A_4, dar nu este complet, deoarece $\delta(q_0, 1) = \emptyset$ (nu este definită)

AUTOMATE FINITE NEDETERMINISTE (AFN)

<u>Def 2</u> Numim automat finit nedeterminist (prescurtat AFN) o structură

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

unde elementele Q, Σ, q_0, F au aceeași semnificație ca pentru un AFD, iar δ este definită

$$\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$$

În acest caz, pentru o stare și un simbol date pot exista o tranziție, mai multe tranziții sau niciuna.

Extensia lui δ, notată cu $\hat{\delta}$ este definită:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$$

$$\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}, \ \forall q \in Q$$

$$\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(r, a) = \{p \in Q \mid \exists r \in \hat{\delta}(q, w), p \in \delta(r, a)\} = \quad w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$$

$= \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$, unde pentru $M \subseteq Q$ notăm

$$\delta(M, a) = \bigcup_{p \in M} \delta(p, a), \quad a \in \Sigma$$

<u>Observație</u> Pentru $q \in Q$, $a \in \Sigma$ avem

$$\hat{\delta}(q, a) = \hat{\delta}(q, \lambda a) = \delta(\hat{\delta}(q, \lambda), a) = \delta(q, a)$$

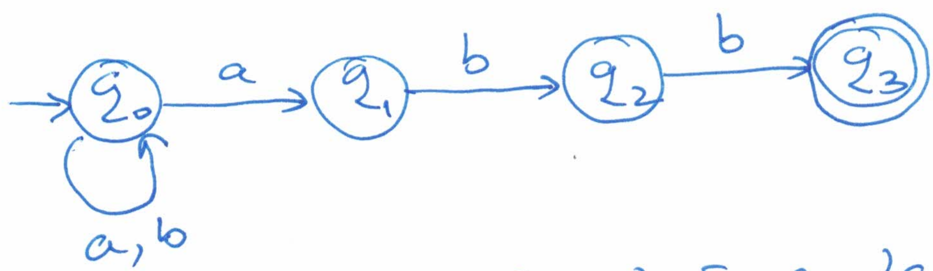
Limbajul acceptat de AFN A:

$$L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}$$

Observăm că în cazul automatelor finite nedeterministe un șir $x \in \Sigma^*$ este acceptat dacă și numai dacă în graful asociat automatului există cel puțin un drum care pornește din q_0 și se termină într-o stare finală, drumul fiind etichetat cu x.

EXEMPLE

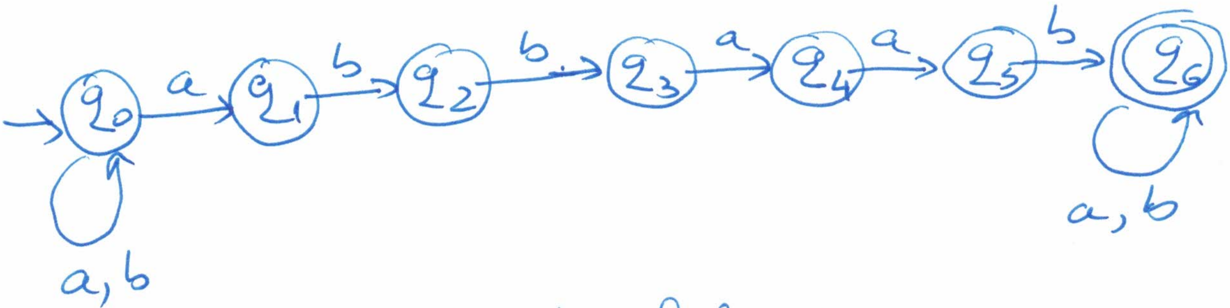
1) AFN care acceptă $L_1 = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ se termină în 'abb'$\}$



$A_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a,b\}, \delta_1, q_0, \{q_3\})$

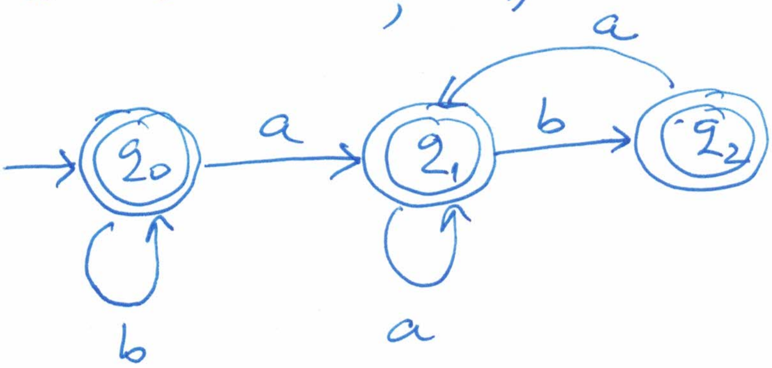
	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$

2) AFN pentru $L_2=\{x\in\{a,b\}^* \mid x \text{ conține 'abbaab'}\}$

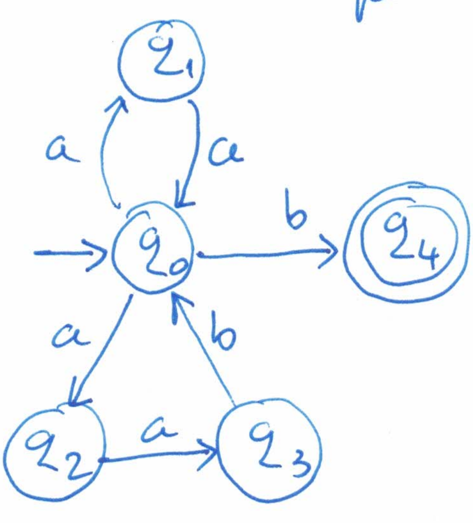


Observați diferența față de AFD care recunoaște același limbaj.

3) AFN care recunoaște $L_3=\{x\in\{a,b\}^* \mid x \text{ nu conține 'abb'}\}$

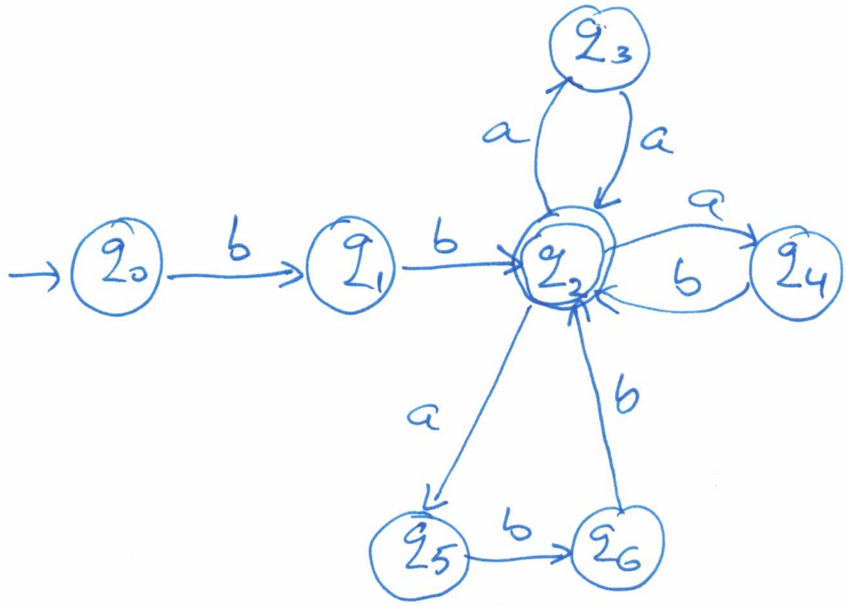


4) AFN care acceptă $L_4=\{aa,aab\}^*\{b\}$



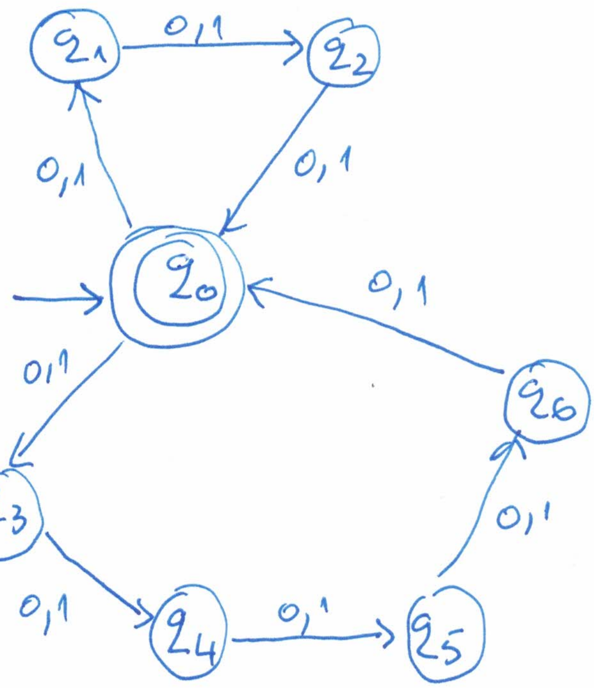
5) AFN care recunoaște limbajul

$L_5=\{bb\}\{aa,ab,abb\}^*$



6) AFN care recunoaşte limbajul

$L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid |w|$ divizibilă cu 3 sau cu 5 $\}$



ECHIVALENȚA AFN - AFD.

Fie $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFN, $M \subseteq Q$, $w \in \Sigma^*$.

Notăm cu $\hat{\delta}(M, w) = \bigcup_{p \in M} \hat{\delta}(p, w)$.

Atunci, conform definiției lui $\hat{\delta}$:

$$\hat{\delta}(M, \lambda) = \bigcup_{p \in M} \hat{\delta}(p, \lambda) = M \qquad (1)$$

Pentru $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ avem:

$$\hat{\delta}(M, xa) = \bigcup_{p \in M} \hat{\delta}(p, xa) = \bigcup_{p \in M} \delta(\hat{\delta}(p, x), a) = \bigcup_{q \in \hat{\delta}(M, x)} \delta(q, a) \quad (2)$$

<u>Lema 1</u> Pentru fiecare $x, y \in \Sigma^*$ și $M \subseteq Q$ avem $\hat{\delta}(M, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(M, x), y)$

<u>Dem</u> Inducție după $n = |y|$, M fixat

<u>Baza</u> $n = 0$, $y = \lambda$. Atunci
$\hat{\delta}(M, x\lambda) = \hat{\delta}(M, x) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(M, x), \lambda)$ (cf. relației 1)

<u>Ipoteza de inducție</u> Fie $n \geq 0$ fixat, $x \in \Sigma^*$.
Presupunem că $\forall M \subseteq Q$, $\forall y \in \Sigma^*$, $|y| \leq n$, atunci $\hat{\delta}(M, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(M, x), y)$.

<u>Saltul inductiv</u>. Fie $y \in \Sigma^*$, $|y| = n$, $a \in \Sigma$, $M \subseteq Q$.

Avem:

$$\hat{\delta}(M, xya) = \bigcup_{q \in \hat{\delta}(M, xy)} \delta(q, a)$$ din (2)

$$= \bigcup_{q \in \hat{\delta}(\hat{\delta}(M, x), y)} \delta(q, a)$$ din ipoteza de inducție

$$= \hat{\delta}(\hat{\delta}(M, x), ya)$$ din (2)

<u>Lema 2</u> Pentru orice familie de submulțimi indexate $M_i \subseteq Q$ și $x \in \Sigma^*$,

$$\hat{\delta}\left(\bigcup_i M_i, x\right) = \bigcup_i \hat{\delta}(M_i, x)$$

<u>Dem</u> Inducție după $n = |x|$

<u>Baza</u> $n = 0$, $x = \lambda$.

Din (1),

$$\hat{\delta}\left(\bigcup_i M_i, \lambda\right) = \bigcup_i M_i = \bigcup_i \hat{\delta}(M_i, \lambda)$$

<u>Saltul inductiv</u>

$$\hat{\delta}\left(\bigcup_i M_i, xa\right) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(\bigcup_i M_i, x)} \delta(p, a)$$ din (2)

$$= \bigcup_{p \in \bigcup_i \hat{\delta}(M_i, x)} \delta(p, a)$$ din ipoteza de inducție

$$= \bigcup_i \bigcup_{p \in \hat{\delta}(M_i, x)} \delta(p, a)$$ din teoria mulțimilor

$$= \bigcup_i \hat{\delta}(M_i, xa) \quad \text{din (2)}$$

În particular, pentru $M \subseteq Q$

$$\hat{\delta}(M, x) = \bigcup_{p \in M} \hat{\delta}(\{p\}, x)$$

<u>Teoremă</u>. Fie A un AFN. Atunci există un AFD A' astfel încât $L(A') = L(A)$.

<u>Dem</u> Considerăm $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD.
Vom construi AFD $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ astfel:

$Q' \subseteq 2^Q$, $q_0' = \{q_0\}$. Redăm în continuare un algoritm de construcție pentru Q', δ':

```
Q' = {q'0}, q'0 stare nemarcată;
while (există T ∈ Q' stare nemarcată)
 { marchează T;
   for (fiecare a ∈ Σ)
     { V ⇐ ∪_{p∈T} δ(p,a); // dacă T=φ, atunci V=φ
       δ'(T,a) = V;
       if (V ∉ Q')
          Q' = Q' ∪ {V}, V stare nemarcată
     }
 }
F' = {V ∈ Q' | V ∩ F ≠ φ}
```

În algoritmul de mai sus, Q' poate fi implementată ca o stivă sau ca o coadă.

Arătăm prin inducție după $n = |w|$ că

$$\hat{\delta}'(q'_0, w) = T,\ w \in \Sigma^*, T \subseteq Q \iff \hat{\delta}(q_0, w) = T$$

$\boxed{n=0}$ $w = \lambda$. Rezultă că $\hat{\delta}'(q'_0, \lambda) = q'_0 = \{q_0\}$.

Pe de altă parte, $\hat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$, deci $\hat{\delta}'(q_0, \lambda) = \hat{\delta}(q_0, \lambda)$.

$\boxed{n \to n+1}$ Presupunem că pentru orice de lungime n, $w \in \Sigma^*$, $|w| = n$, avem $\delta'(q'_0, w) = \hat{\delta}(q_0, w)$.

Fie $x = wa$, $|x| = n+1$, $a \in \Sigma$.

Putem scrie:

$$\hat{\delta}'(q'_0, wa) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definiția extensie } \hat{\delta}'}}{=} \delta'(\hat{\delta}'(q'_0, w), a) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipoteza de inducție}}}{=} \delta'(\hat{\delta}(q_0, w), a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definiție } \delta' \\ \text{în algoritm}}}{=} \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, w)} \delta(p, a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definiție} \\ \text{extensie } \hat{\delta}}}{=} \hat{\delta}(q_0, wa)$$

Atunci, pentru $w \in L(A)$ avem:

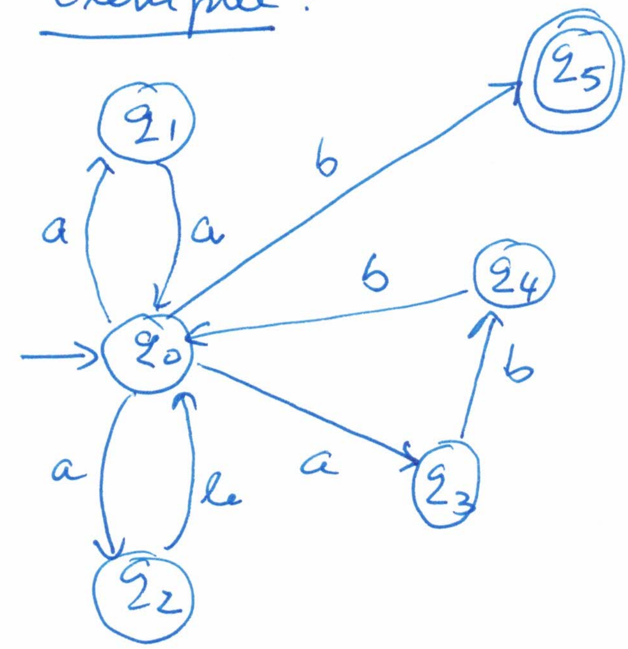
$$w \in L(A) \iff \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \iff \hat{\delta}'(q'_0, w) \cap F \neq \emptyset$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{definiție } F'}}{\iff} \hat{\delta}'(q'_0, w) \in F' \iff w \in L(A')$$

q.e.d.

Exemplu:

A:



δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_5\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_3	$\emptyset$	$\{q_4\}$
q_4	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$

$$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

Automatul A' obținut cu algoritmul din Teorema 1 va fi: