INTEGRALE EULERIENE

1 Integrala gama

$$\boxed{\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \cdot e^{-x}\,dx \,,\ a>0}$$

Proprietăți

1) $\Gamma(1) = 1$
2) $\Gamma(a) = (a-1)\cdot\Gamma(a-1) \ \forall\, a>1$
3) $\Gamma(n) = (n-1)! \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

2 Integrala beta

$$\boxed{\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}\,dx \,,\ a>0,\ b>0}$$

Proprietăți

1) $\beta(a,b) = \beta(b,a) \quad \forall\, a,b>0$
2) $\beta(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad \forall\, a,b>0$
3) $\beta(a,b) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx \,,\ \forall a,b>0$
4) Dacă $a+b=1$ atunci: $\beta(a,b) = \dfrac{\pi}{\sin(a\pi)}$

3 Integrala Euler-Poisson

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Calculul medianei și modului unei v.a. continue

Fie X o v.a. continuă cu densitatea de probabilitate f și funcția de repartiție F.

Dacă F este continuă și strict crescătoare atunci mediana m_e se determină în mod unic rezolvând ecuația:

$$\boxed{F(m_e) = \frac{1}{2}}$$

Modul (punct modal) al v.a. X este orice punct de maxim local al funcției f.

Obs. În cazul v.a. discrete modul reprezintă valoarea cea mai probabilă.

Vrem să rezolvăm ecuația:

$\boxed{F(m_e) = \frac{1}{2}}$ Observăm că $m_e \notin (-\infty, 0) \cup [2, \infty)$.

Pt. $x \in [0,1)$ ecuația devine $\frac{m_e^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_e = \pm 1$

Pt. $x \in [1,2)$ ecuația devine $\frac{-m_e^2 + 4m_e - 2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_e \in \{-3, -1\}$

$\Rightarrow \boxed{m_e = 1}$

Exemplu

Fie X o v.a. continuă def. de:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2-x, & x \in (1,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Determinați mediana și modul.

Determinăm funcția de repartiție:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{-x^2+4x-2}{2}, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

(vezi materialele de la v.a. continue pentru detalii!)

x	$-\infty$		0		$\boxed{1}$		2		∞
$f'(x)$	+ + +		+ + +		− − −		+ + + +		
$f(x)$	0	$\longrightarrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\longrightarrow$	0

Valoarea modală este $\boxed{m_o = 1}$

Variabile aleatoare condiționate și media condiționată (în caz discret)

Fie X, Y două v.a. discrete cu repartiția comună:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m	p_i
x_1	π_{11}	π_{12}		π_{1j}	...	π_{1m}	p_1
x_2							
x_i	π_{i1}	...		π_{ij}	...	π_{im}	p_i
x_n	π_{n1}	...		π_{nj}	...	π_{nm}	p_n
q_j	q_1	...		q_j	...	q_m	1

$$X \mid Y = y_j : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{\pi_{1j}}{q_j} & \frac{\pi_{2j}}{q_j} & \cdots & \frac{\pi_{nj}}{q_j} \end{pmatrix}$$

$$Y \mid X = x_i : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ \frac{\pi_{i1}}{p_i} & \frac{\pi_{i2}}{p_i} & \cdots & \frac{\pi_{im}}{p_i} \end{pmatrix}$$

Exemplu:

$X \backslash Y$	-1	0	2	p_i
-2	0.2	0.3	0.1	0.6
1	0.1	0.1	0.2	0.4
q_j	0.3	0.4	0.3	1

$$X \mid Y = -1 : \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{0.2}{0.3} & \frac{0.1}{0.3} \end{pmatrix}$$

$$Y \mid X = 1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{0.1}{0.4} & \frac{0.1}{0.4} & \frac{0.2}{0.4} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E(X \mid Y) = \sum_x x \cdot P(X = x \mid Y = y)}$$

Obs. : $\mathbb{E}(X \mid Y)$ se numește media condiționată a lui X în raport cu Y și este o v.a.!