Algoritmi Fundamentali

Ruxandra Marinescu – Ghemeci

ruxandra.marinescu@fmi.unibuc.ro

ruxandra.marinescu@unibuc.ro

Programa

Programa

- Algoritmi în grafuri
  - Arbori parțiali de cost minim. Algoritmii lui Kruskal, Prim
  - Distanțe în grafuri. Algoritmii Bellman-Ford, DAG, Dijkstra, Floyd-Warshall
  - Rețele de Transport
  - Grafuri planare
  - Probleme de colorare
- NP – completitudine
- Algoritmi euristici, de aproximare

Obiectiv general

- Dezvoltarea gândirii algoritmice prin familiarizarea cu algoritmi fundamentali de grafuri și aplicații ale acestora și cu noi tipuri de abordare ale problemelor dificile de algoritmică

Obiective specifice

- modelarea problemelor cu ajutorul grafurilor și elaborarea de algoritmi de grafuri pentru rezolvarea acestora
- abilități de justificare a corectitudinii algoritmilor propuși si de a estima eficiența acestora
- implementarea eficientă a algoritmilor (alegerea structurilor de date etc)
- abilități de abordare a problemelor pentru care nu se cunosc algoritmi polinomiali

Structura

- **Curs**
  - 2 ore pe săptămâna
  - finalizat cu examen
- **Laborator**
  - 2 ore la două săptămâni
  - limbaj C/C++ sau Python
  - finalizat cu test de laborator (parte din examenul final)
- **Seminar**
  - 2 ore la două săptămâni
  - discuții probleme curs/laborator, complexități + exerciții
  - nu este notat separat, subiecte legate de seminar se vor regăsi la examen

Evaluare

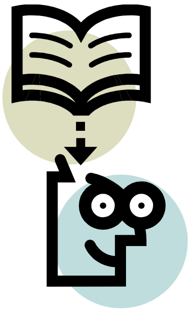
Evaluare

- **Examen final (care va include și test de laborator)**

  Condiție necesară:

  Nota test laborator $\geq$ 5 puncte

Bibliografie



BIBLIOGRAFIE

- Jon Kleinberg, Éva Tardos, **Algorithm Design**, Addison-Wesley 2005 http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/
- T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.R. Rivest – **Introducere in algoritmi**, MIT Press, trad. Computer Libris Agora
- S. Dasgupta, C.H. Papadimitriou, U.V. Vazirani – **Algorithms**, McGraw-Hill, 2008
- Steven S. Skiena – **Algorithms**, Springer, 2008

BIBLIOGRAFIE

- Douglas B. West, **Introduction to Graph Theory**, Prentice Hall 1996, 2001

- J.A. Bondy, U.S.R Murty – **Graph theory with applications**, The Macmillan Press 1976 / Springer 2008

- Dragoș-Radu Popescu, **Combinatorică şi teoria grafurilor**, Editura Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Bucureşti, 2005.

BIBLIOGRAFIE

- **coursera.org**
- infoarena.ro …

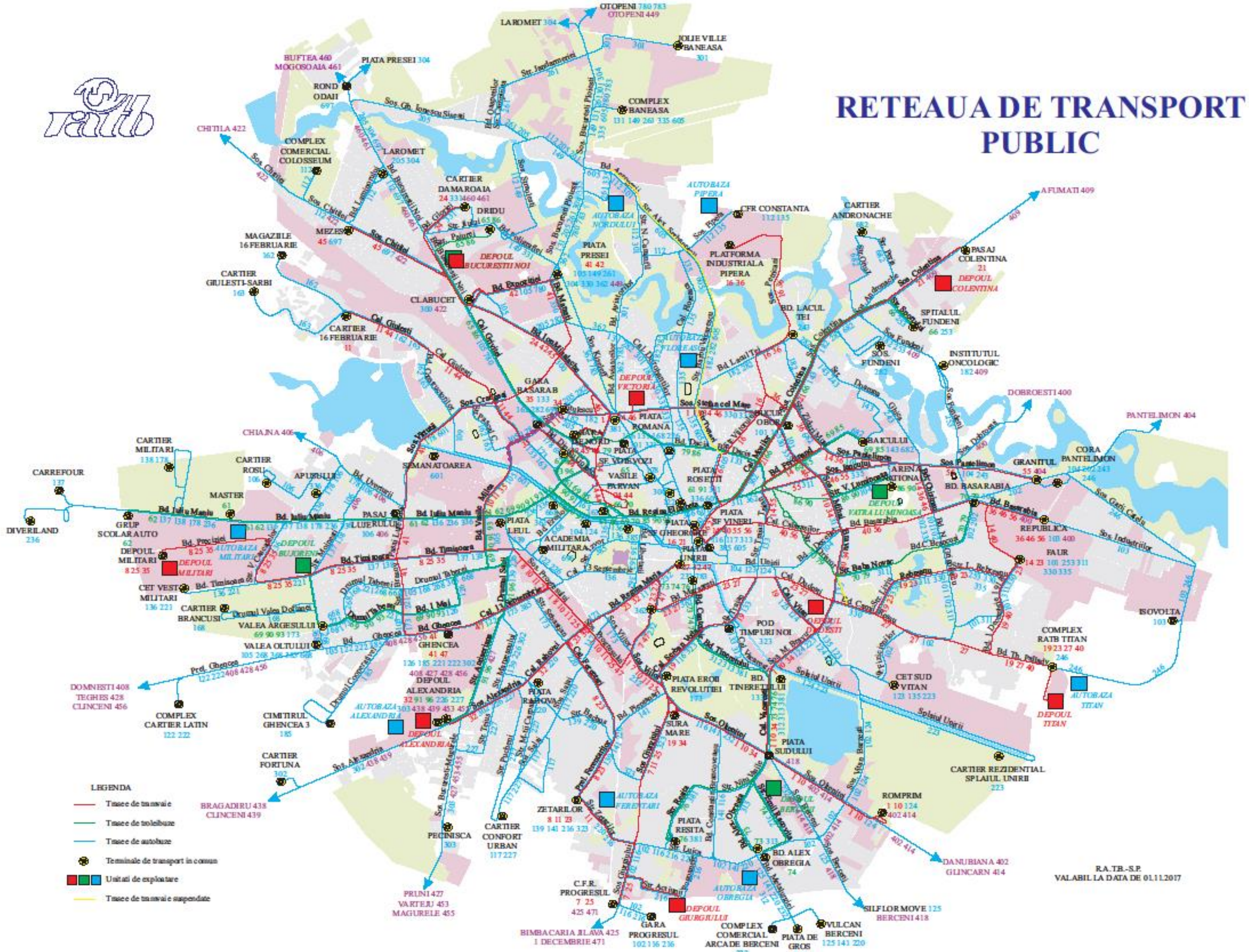
Motivații

- domeniu fundamental
- numeroase aplicații în diverse domenii

  procesarea imaginilor, bioinformatică, rețele, baze de date, proiectare, strategii
- instrumente pentru a dezvolta algoritmi eficienți
- cursuri viitoare – cum abordăm probleme “dificile”
- interviuri

Aplicații

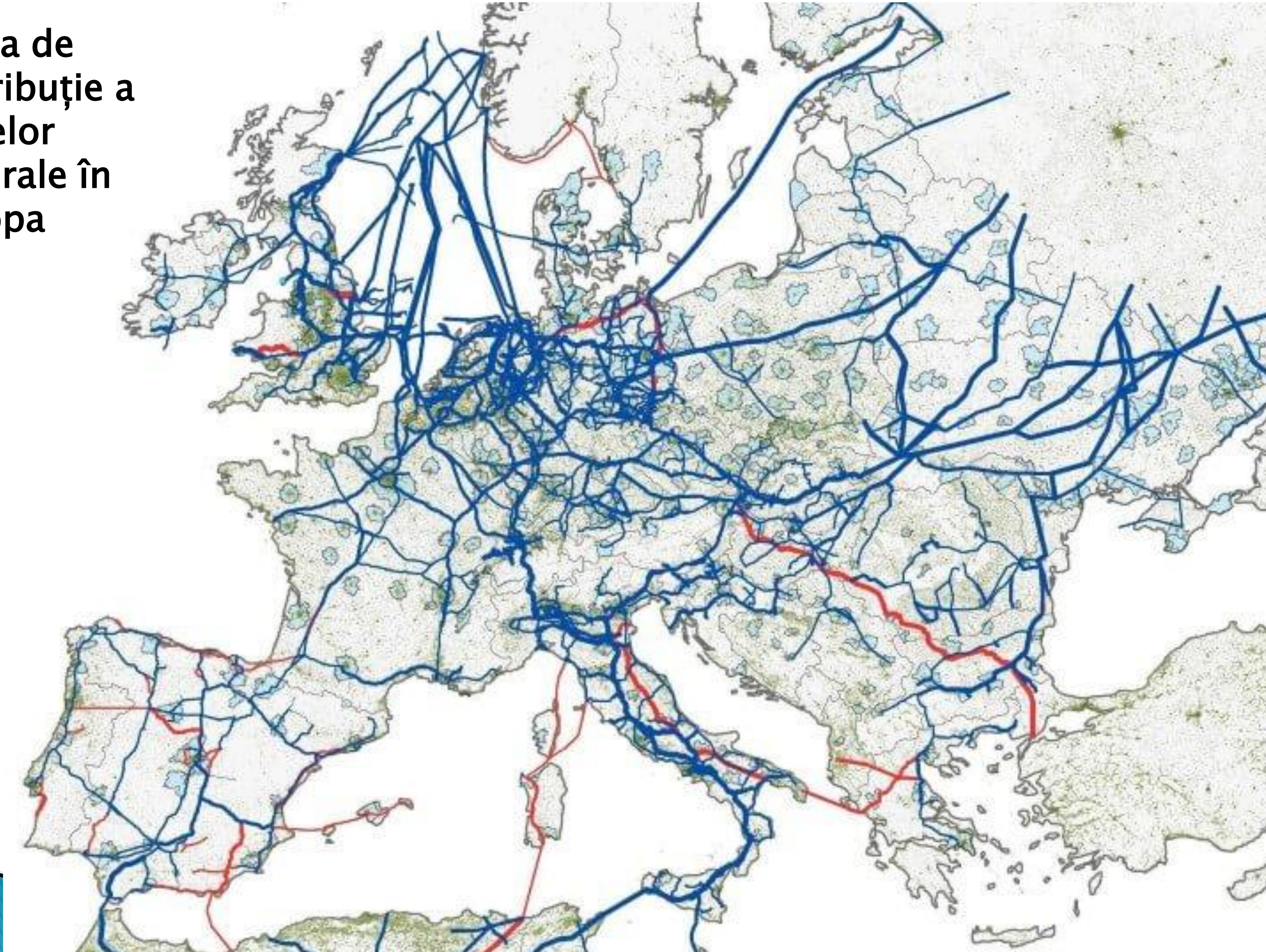
Rețele de transport în comun, trasee turistice, gps



http://www.ratb.ro/maps1/Generala.pdf

Rețele de transport în comun, trasee turistice, gps

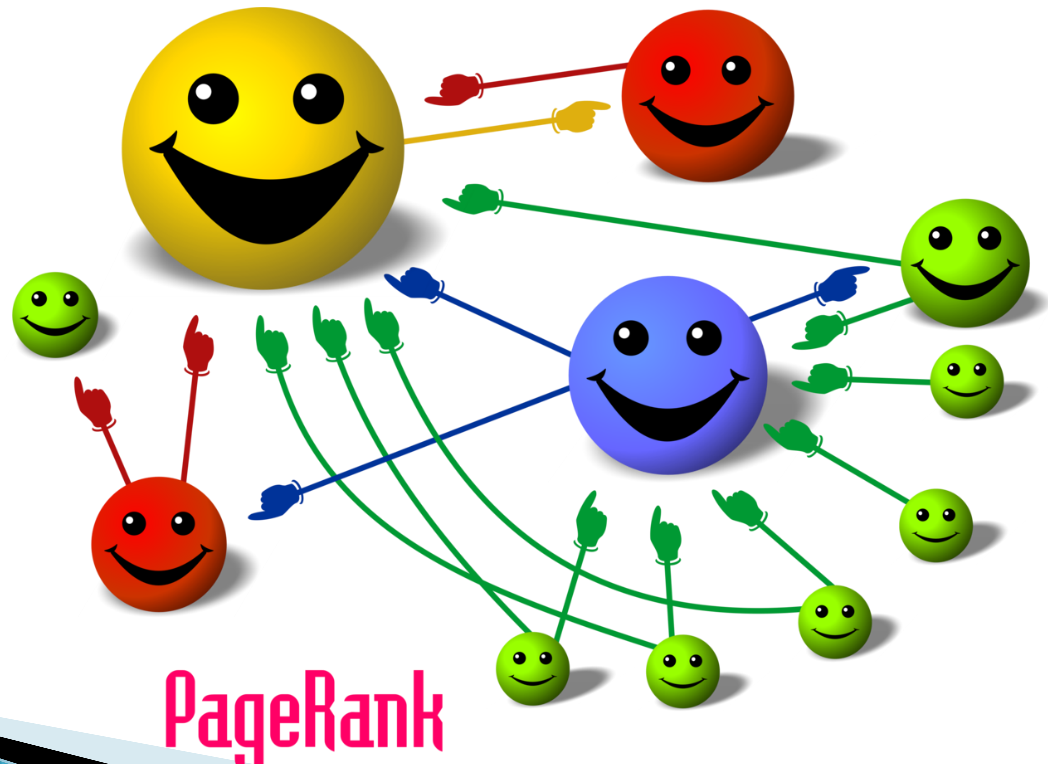
Rețea de distribuție a gazelor naturale în Europa



https://britishbusinessenergy.co.uk/europe-natural-gas-network/

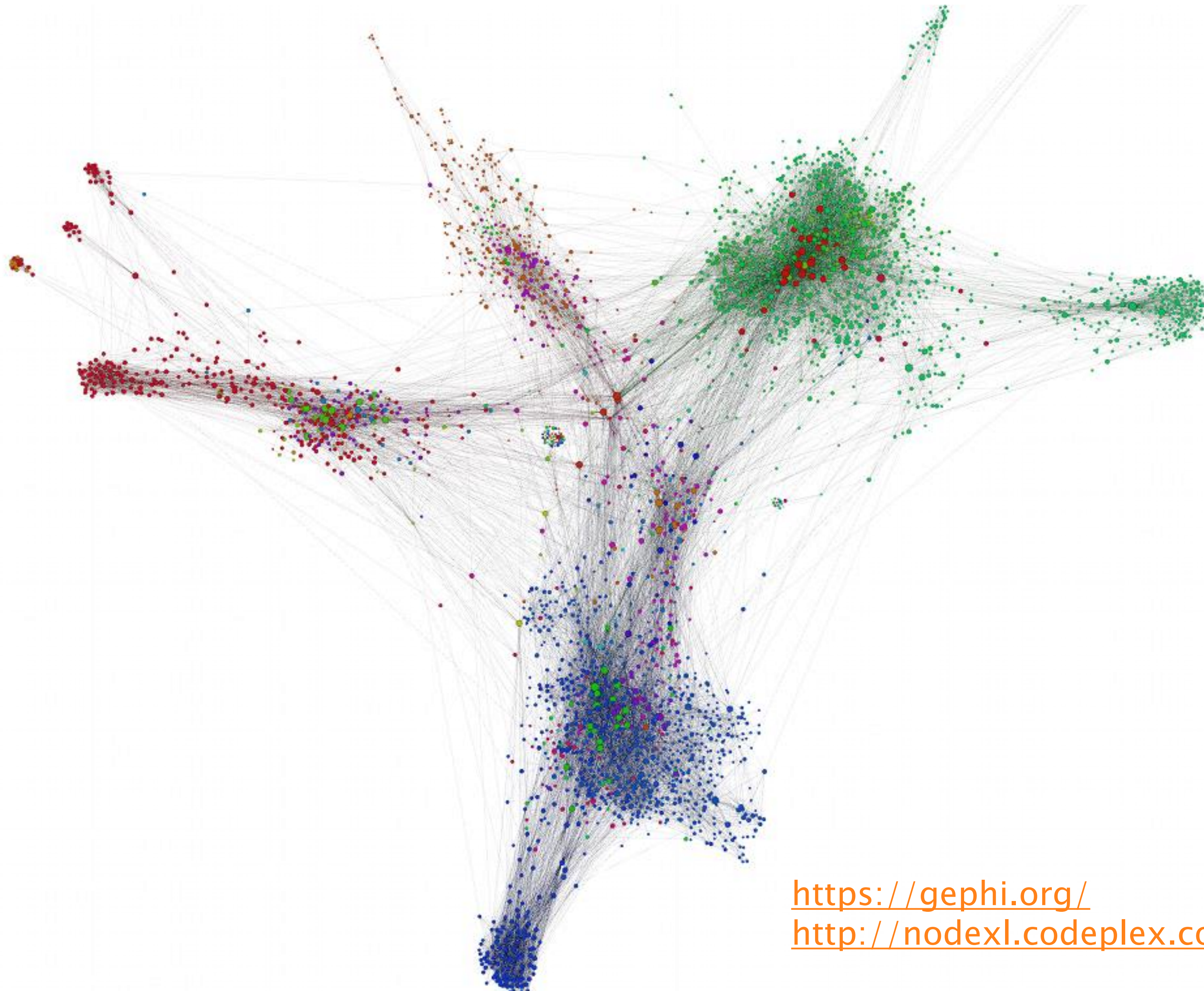
Analiza rețelelor

- Interacțiuni
  - Rețele sociale
  - Rețele biologice
  - Rețele de citări, de știri, de spionaj etc



https://en.wikipedia.org/wiki/PageRank

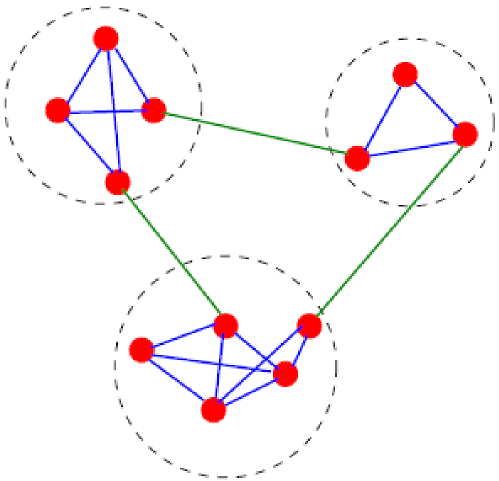
- Softuri pentru vizualizarea și analiza rețelelor



https://gephi.org/
http://nodexl.codeplex.com/

Rețele sociale

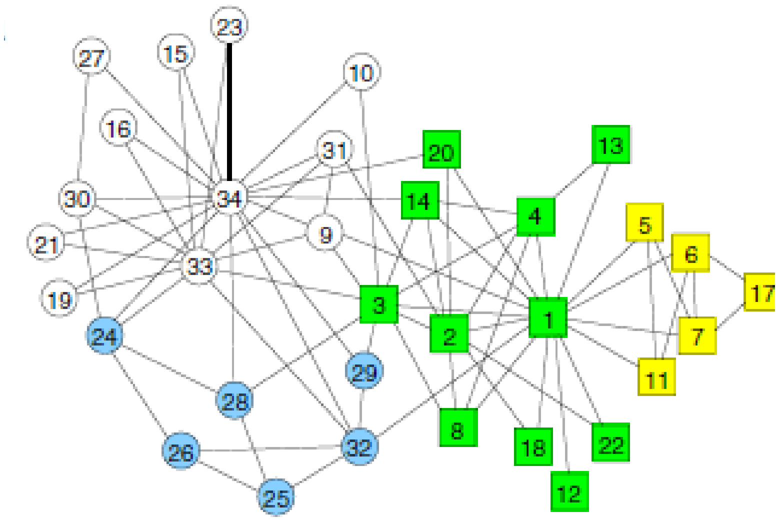
Detectare de comunități, clustering



3 comunități

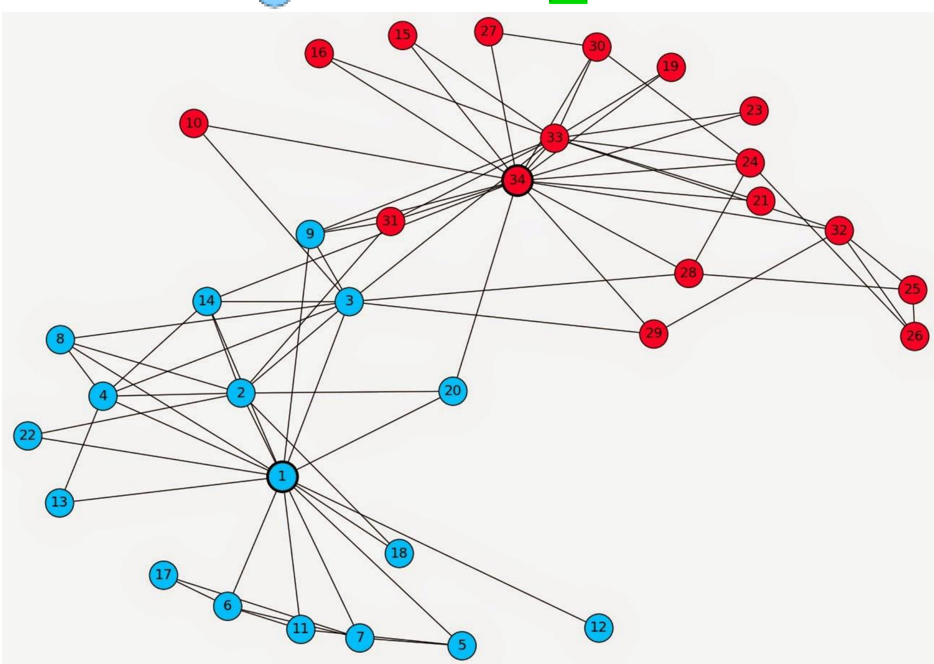
Santo Fortunato, Community detection in graphs, Physics Reports 486 (2010) 75–174

Rețele sociale



Clubul de carate al lui Zachary: membri + interacțiuni în afara clubului
⇒ comunități

Santo Fortunato, Community detection in graphs, Physics Reports 486 (2010) 75-174



Zachary, W. W. (1977), **Information Flow Model for Conflict and Fission in Small Groups**, J. of Anthropological Research 33, 452-473.

http://historicaldataninjas.com/karate-club-network/
https://en.wikipedia.org/wiki/Zachary%27s_karate_club

Rețele

- **Rețele de știri** – detectarea de știri false
  https://neo4j.com/blog/machine-learning-graphs-fake-news-epidemic-part-2/
  https://cambridge-intelligence.com/detecting-fake-news/

- **Rețele de teroriști**

Bioinformatică

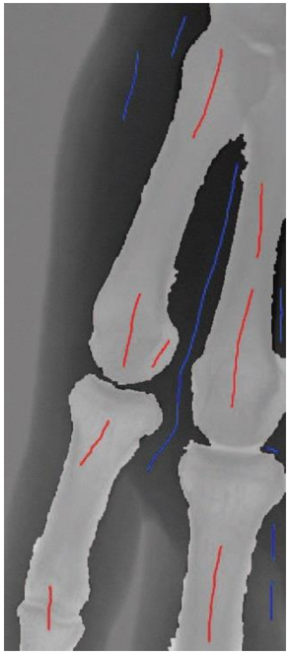
- grafuri de interacțiuni gene/proteine

http://domaingraph.bioinf.mpi-inf.mpg.de/docu/dg_network.php

- clustering
- grafuri de intersecție, grafuri De Bruijn
- arbori filogenetici

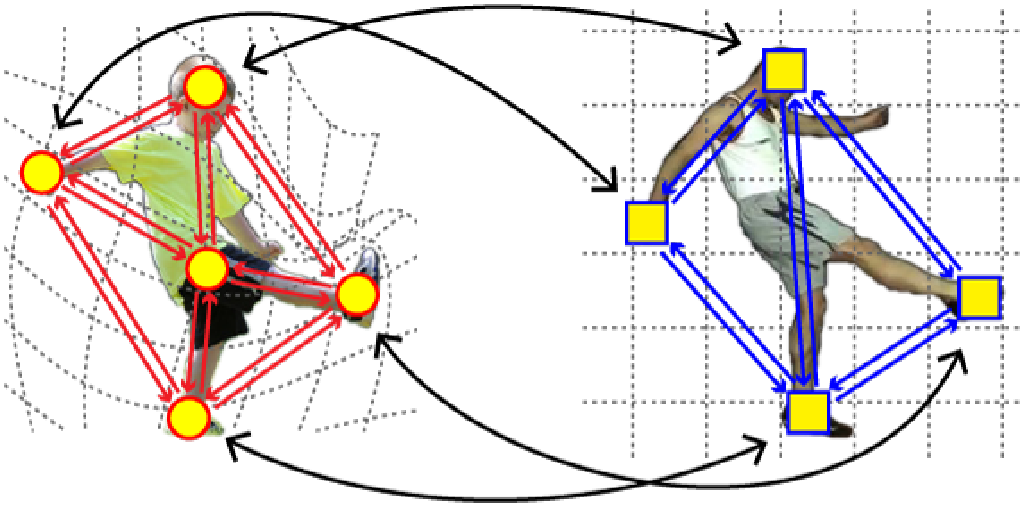
Image segmentation

– tăietura minimă – fluxuri în rețele de transport
– medicină

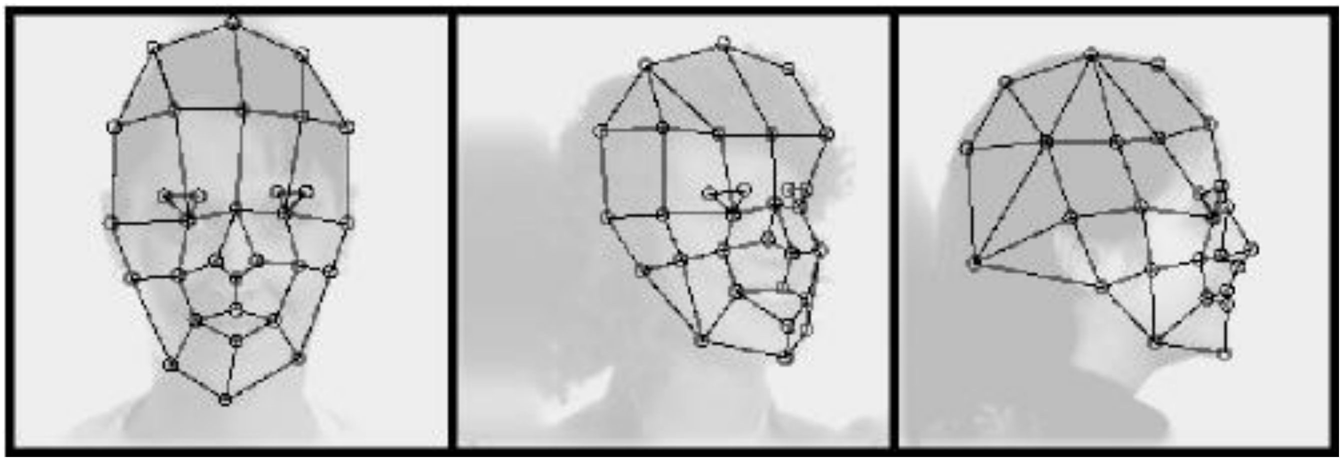


Spatially Varying Color Distributions for Interactive Multi-Label Segmentation (C. Nieuwenhuis, D. Cremers), In IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 35, 2013

Computer vision



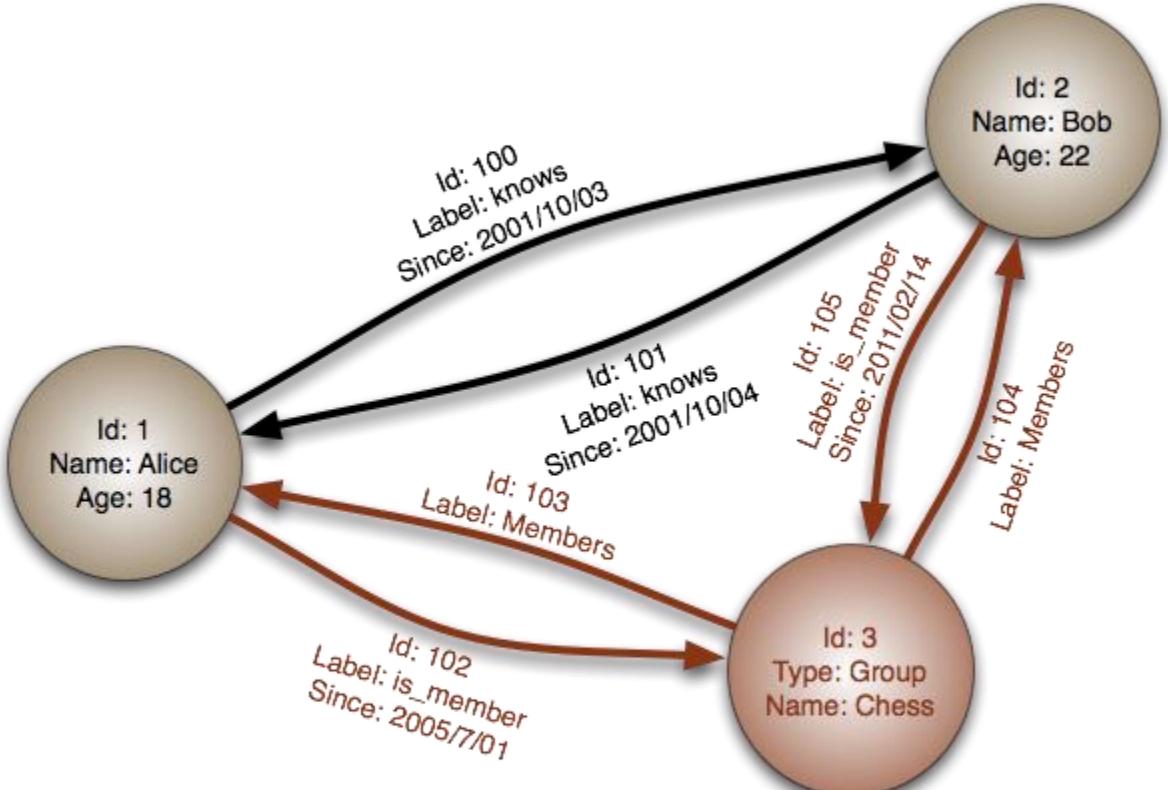
F. Zhou and F. De la Torre, Deformable Graph Matching, IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (**CVPR**), 2013 http://www.f-zhou.com/gm/2013_CVPR_DGM.pdf



https://www.ini.rub.de/PEOPLE/wiskott/Projects/EGMFaceRecognition.html

Baze de date

- Graph database
  - Neo4J https://neo4j.com/



https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_database

Probleme de planificare, orar

Exemplu – De câte săli este nevoie minim pentru programarea într-o zi a n conferințe cu intervale de desfășurare date?

Conf. 1: interval (1,4)

Conf. 2: interval (2,3)

Conf. 3: interval (2,5)

Conf. 4: interval (6,8)

Conf. 5: interval (3,8)

Conf. 6: interval (6,7)

Probleme de planificare, orar

Exemplu – De câte săli este nevoie minim pentru programarea într-o zi a n conferințe cu intervale de desfășurare date?

Conf. 1: interval (1,4)

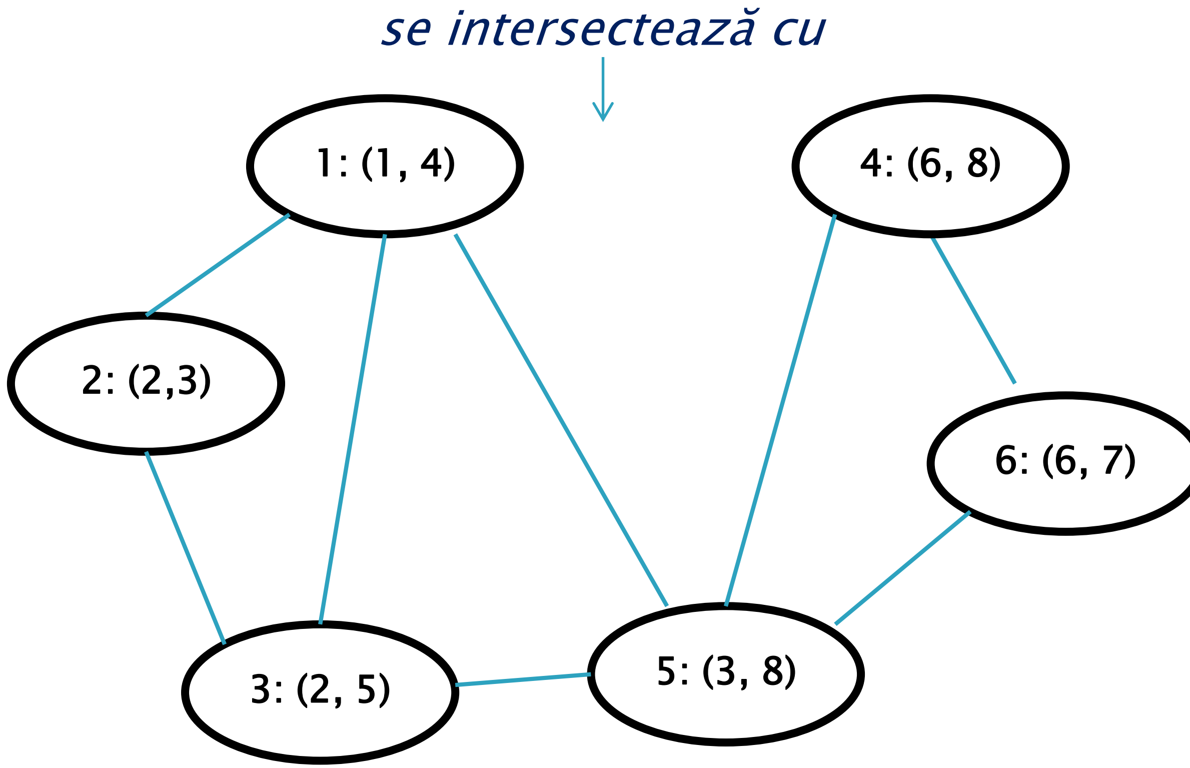
Conf. 2: interval (2,3)

Conf. 3: interval (2,5)

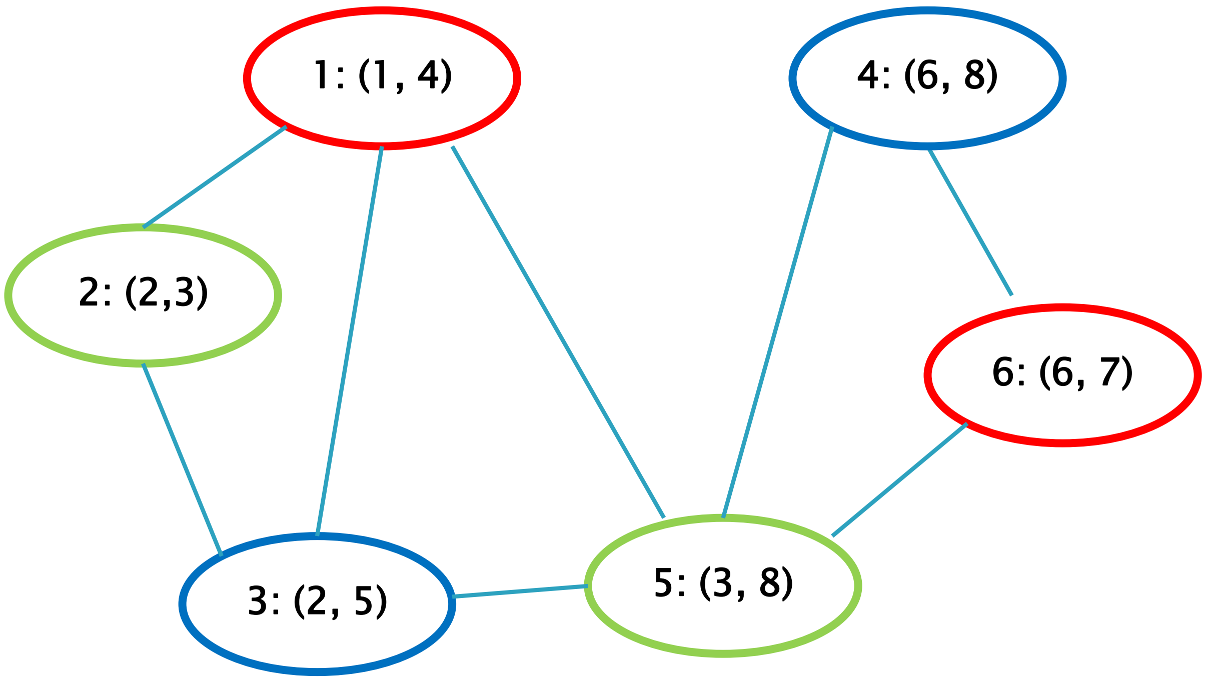
Conf. 4: interval (6,8)

Conf. 5: interval (3,8)

Conf. 6: interval (6,7)



Graful intersecției intervalelor este 3-colorabil:



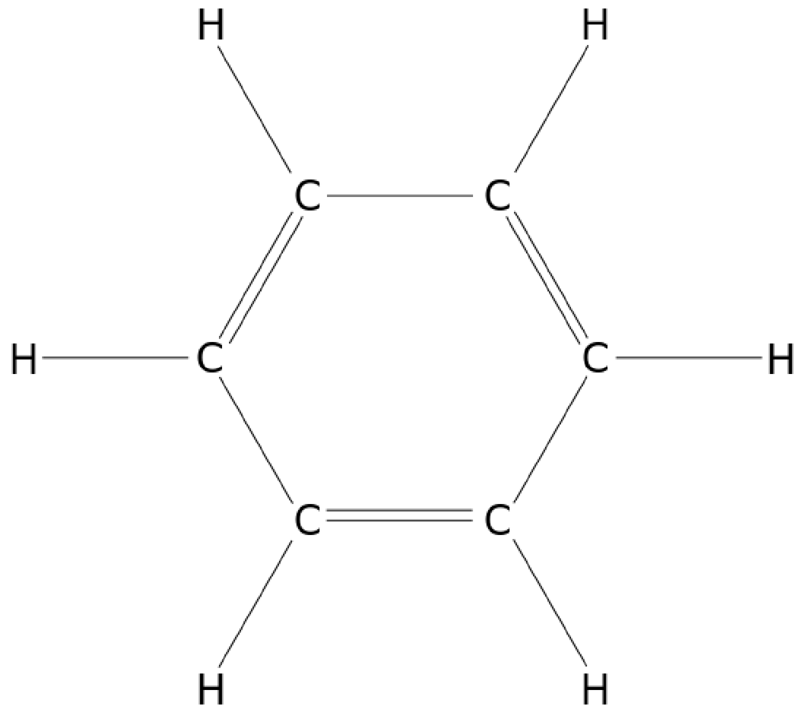
Sunt necesare minim 3 săli (corespunzătoare celor 3 culori):

Sala 1: (1,4), (6,7)

Sala 2: (2,3), (3,8)

Sala 3: (2,5), (6,8)

- **Graf ← “notaţie grafică” din chimie**
  - J. Silvester, 1878



Chimie

- indici topologici (Wiener, Randic…)
- izomorfism, graf de interacțiuni…

  Danail Bonchev and D.H. Rouvray, eds., *Chemical Graph Theory: Introduction and Fundamentals*, Taylor and Francis, 1991

Matematică

- ## Grafuri asociate grupurilor
  - ### Graful Cayley

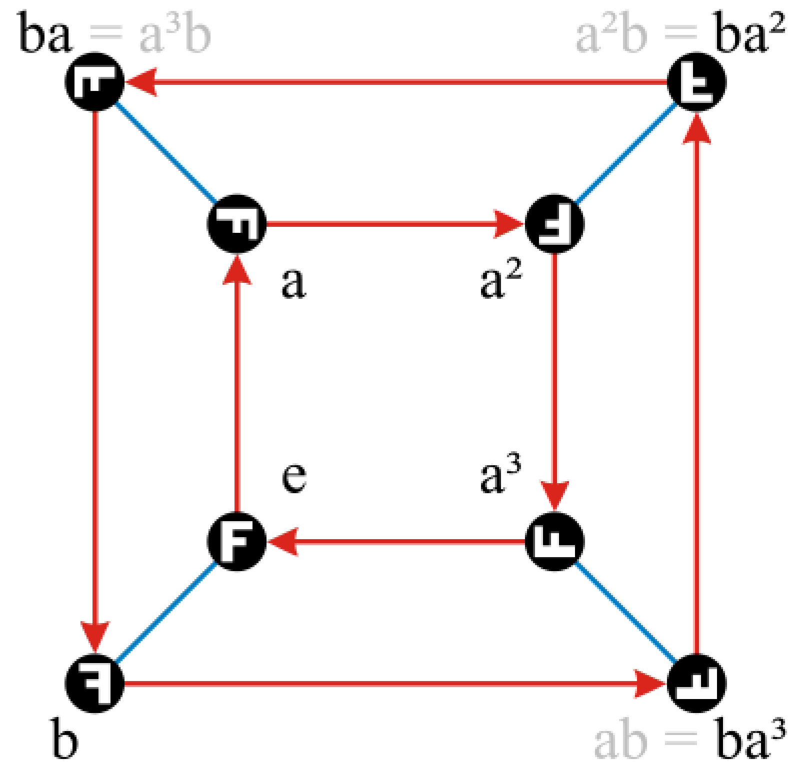
Grupul diedral D_4

$$\langle a, b \mid a^4 = b^2 = e,\ ab = ba^3 \rangle$$

a

b

≡



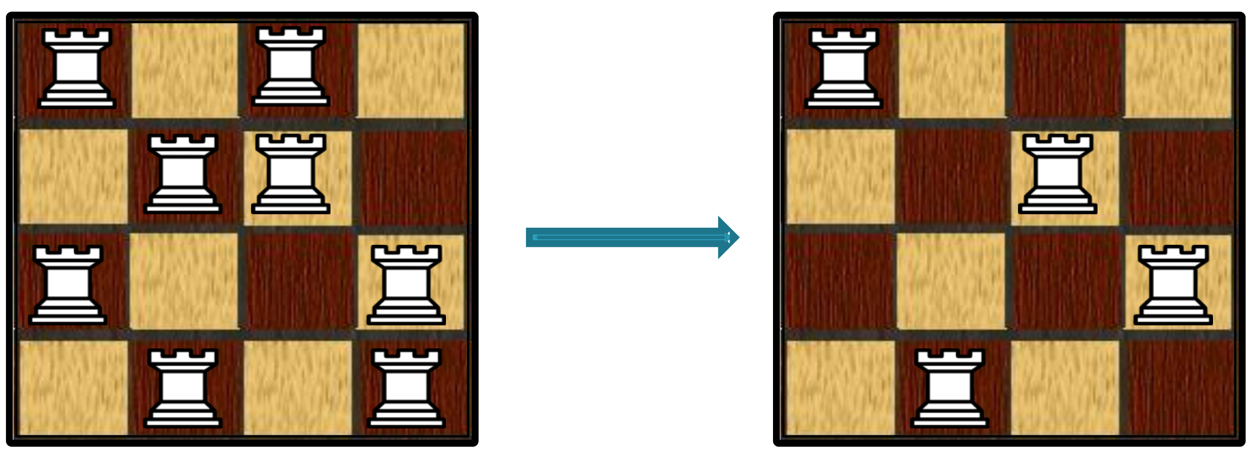
proprietăți graf ⇄ proprietăți grup

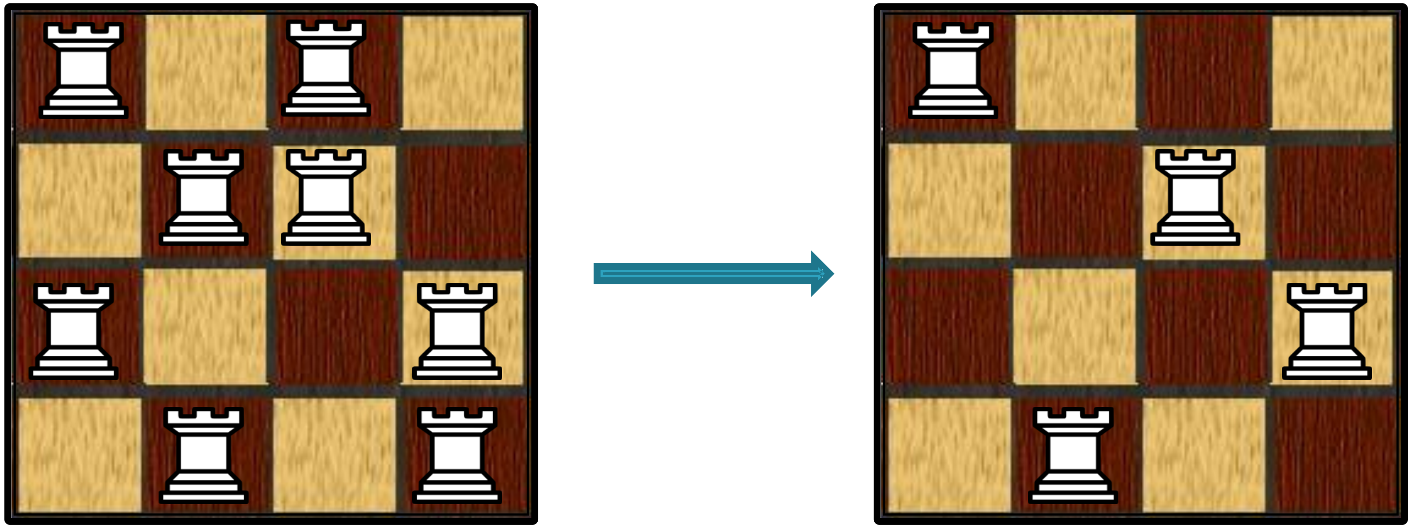
Matematică

- Demonstrarea unor rezultate matematice
  - Matrice -> graf
  - Diagonală/ Matrice de permutări – cuplaj

Probleme

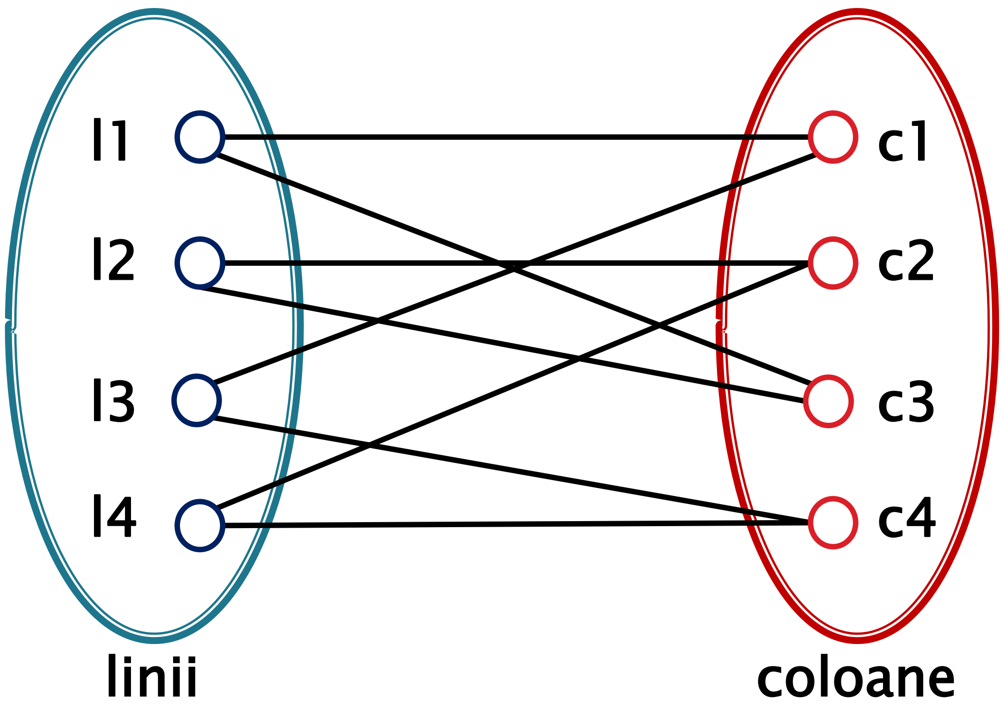
Pe o tablă de tip șah de dimensiuni nxn sunt așezate ture, astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană sunt **același număr de ture**. Să se arate că se pot păstra pe tablă n dintre aceste ture, care nu se atacă două câte două – **Cuplaje**



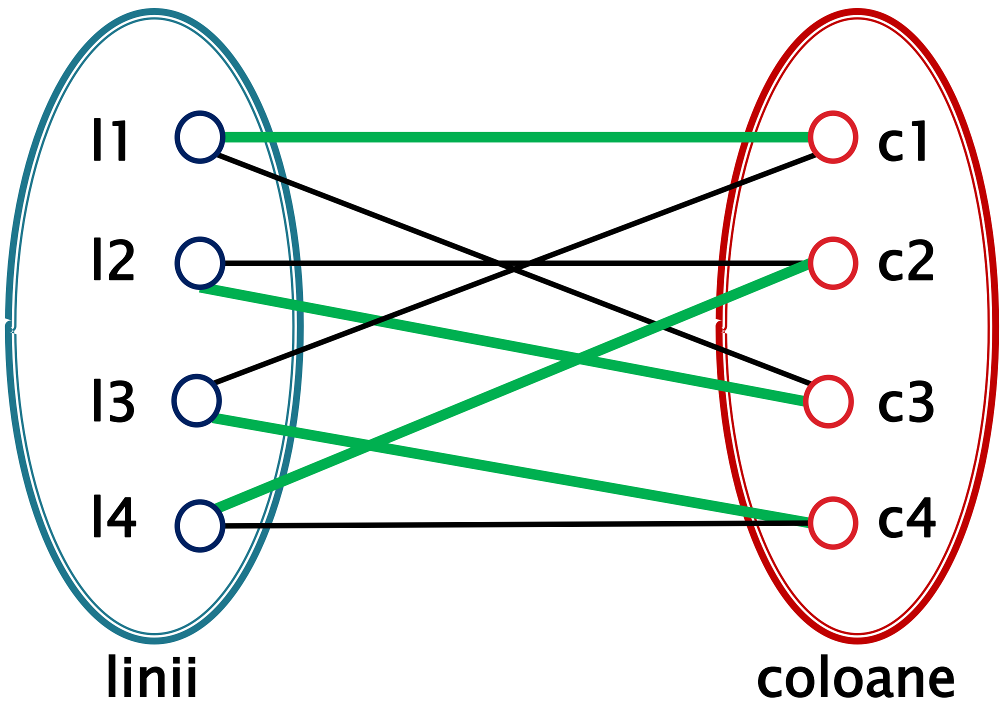


$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



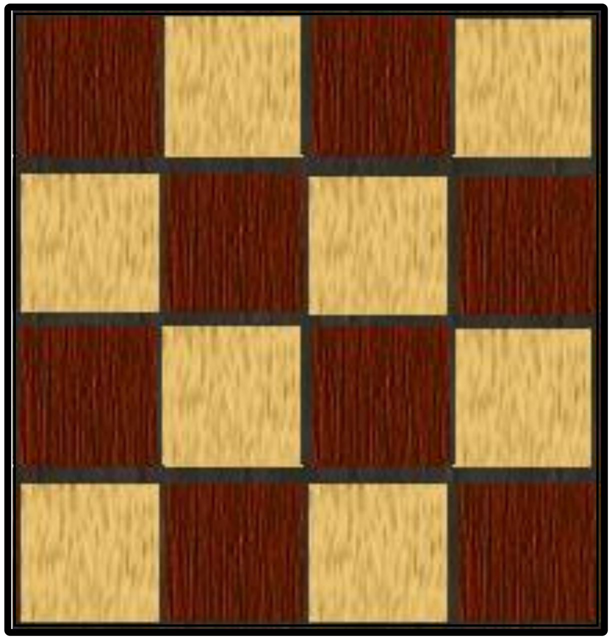
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

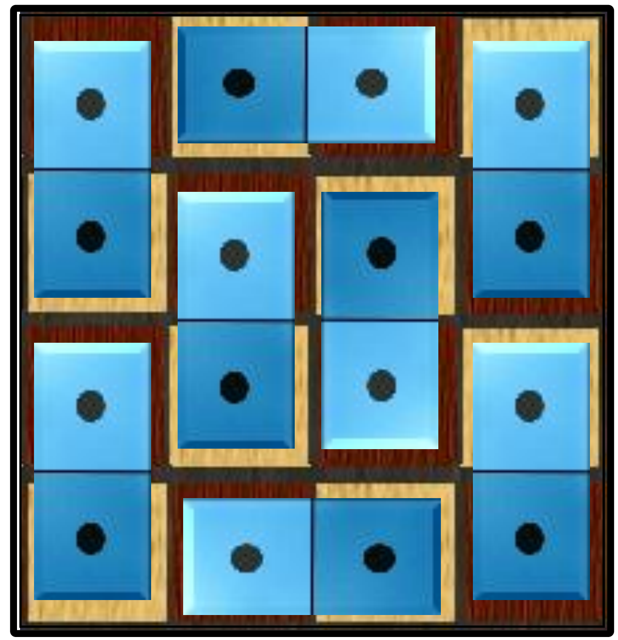


Cuplaj perfect

Probleme

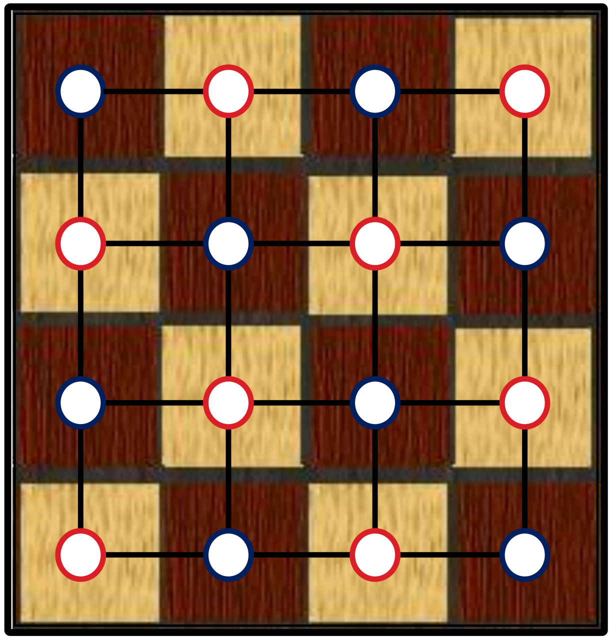
- Acoperirea unei table cu piese de domino

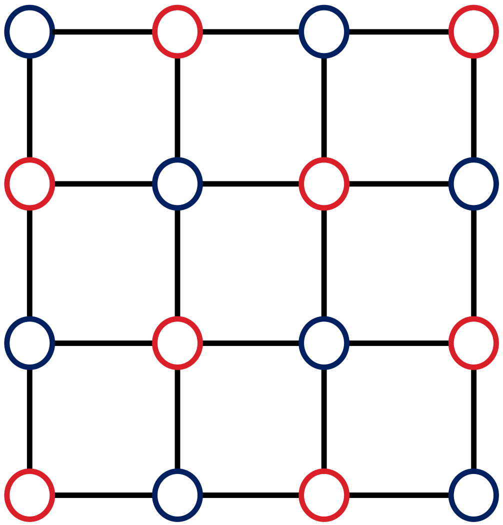




Probleme

- **Tabla** $\Rightarrow$ **graful grid**

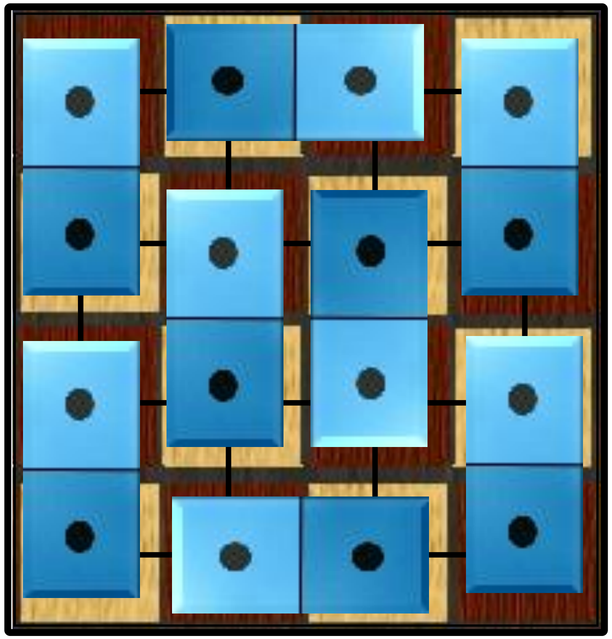


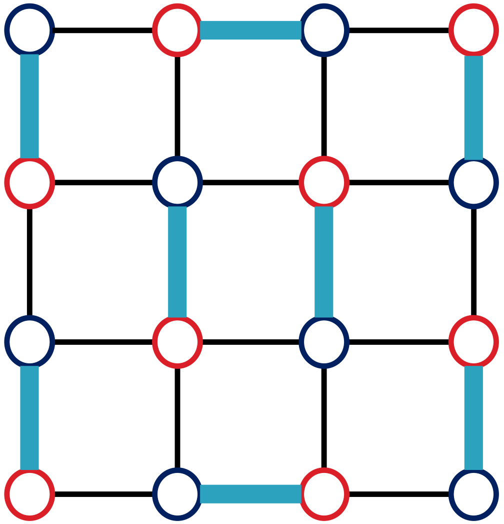


Graful grid

Probleme

- Tabla ⇒ graful grid
- Acoperire ⇔ cuplaj perfect



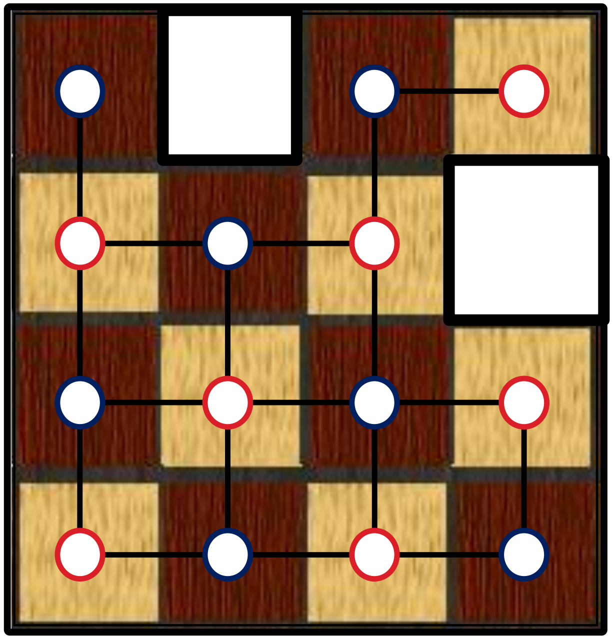


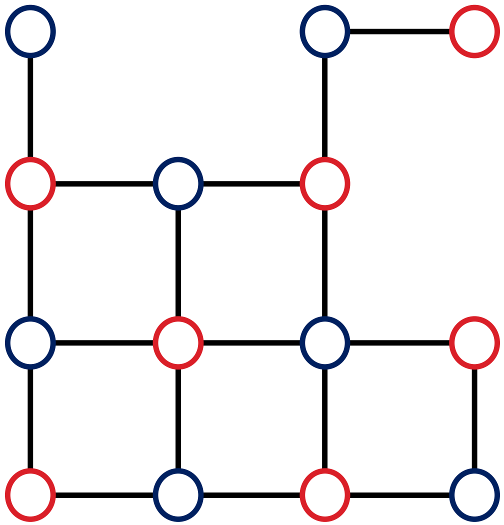
Graful grid

Probleme

- Acoperirea unei table m x n cu piese de domino
  - Este acoperibilă $\Leftrightarrow$ mn par
  - Dacă tabla este acoperibilă, dar eliminăm două pătrățele din ea, în ce condiții rămâne acoperibilă?

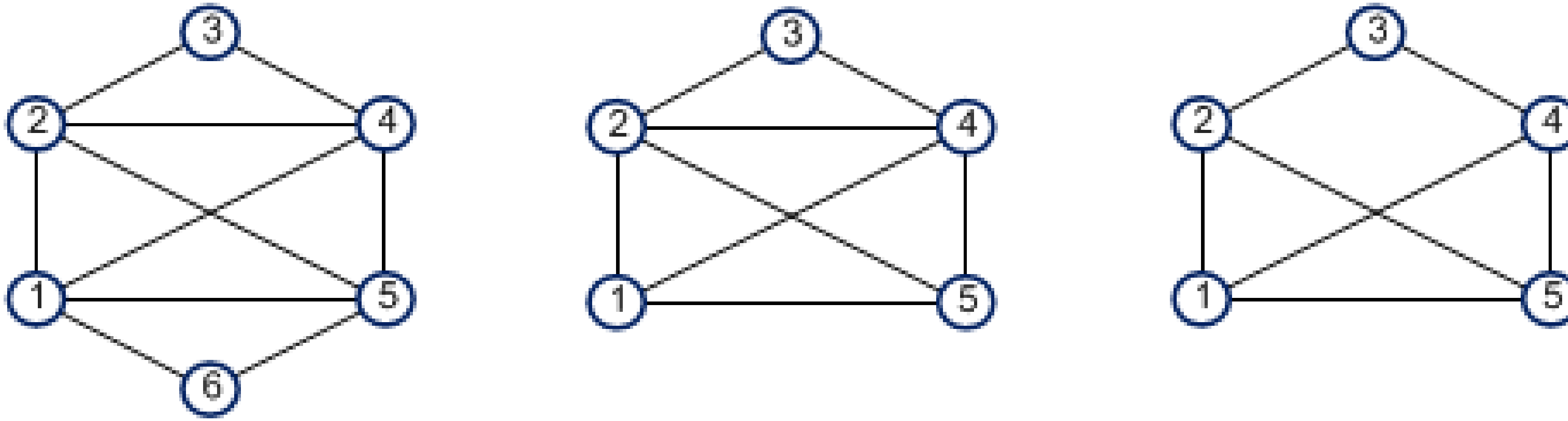
Probleme



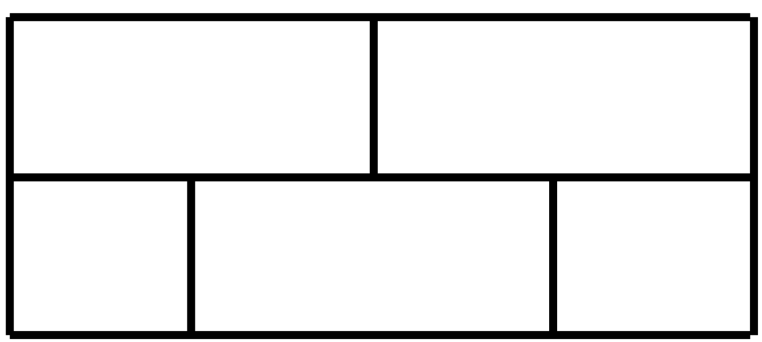


Graful grid

Probleme



Se poate desena diagrama printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie şi fără a desena o linie de două ori?



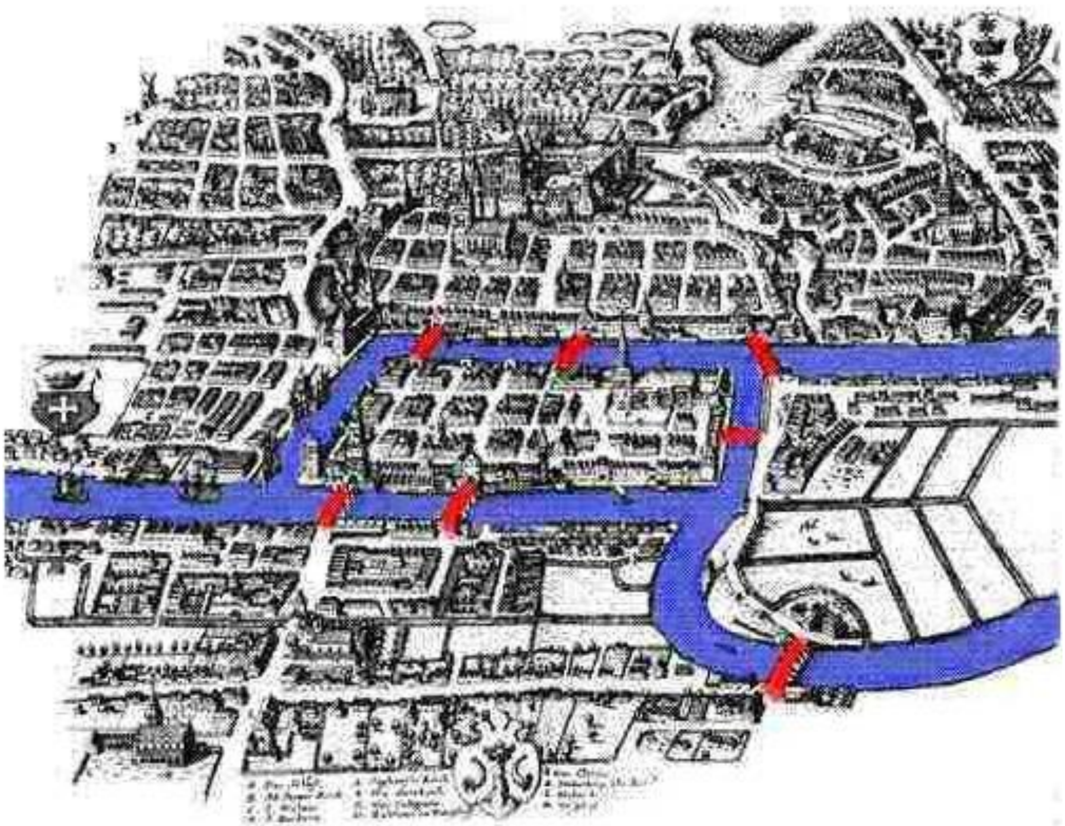
Există linie continuă neînchisă care să intersecteze în interior fiecare segment o singură dată?

Alte aplicații

- Rețele de calculatoare
- Limbaje formale
- Probleme de planificări, repartiții…
- Teoria jocurilor

Istoric

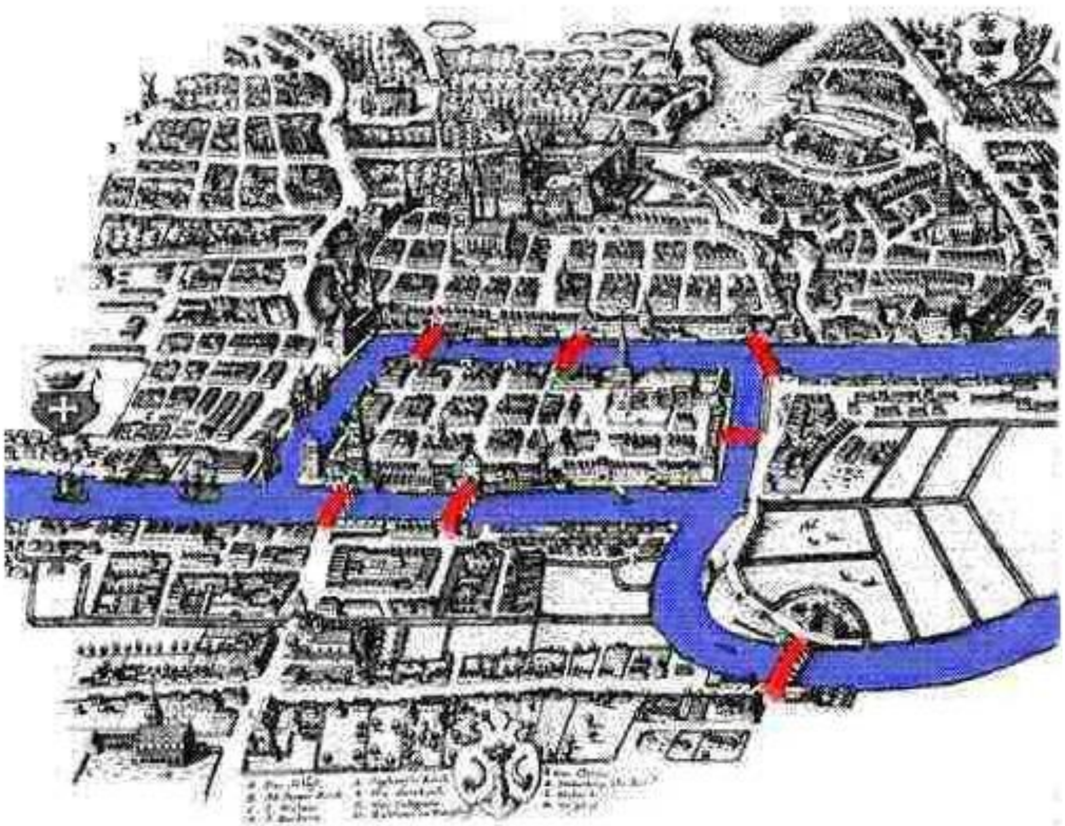
Problema celor 7 poduri din Königsberg

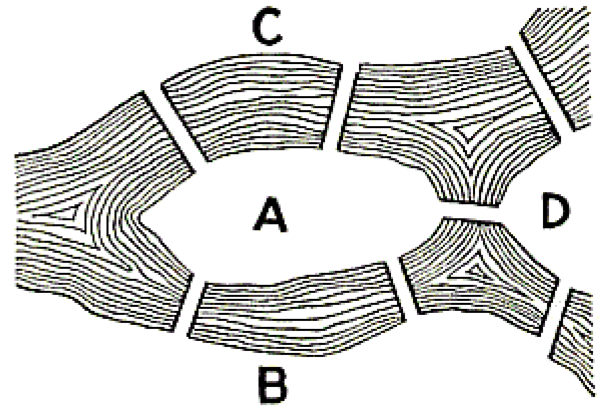


Este posibil ca un om să facă o plimbare în care să treacă pe toate cele 7 poduri o singură dată?

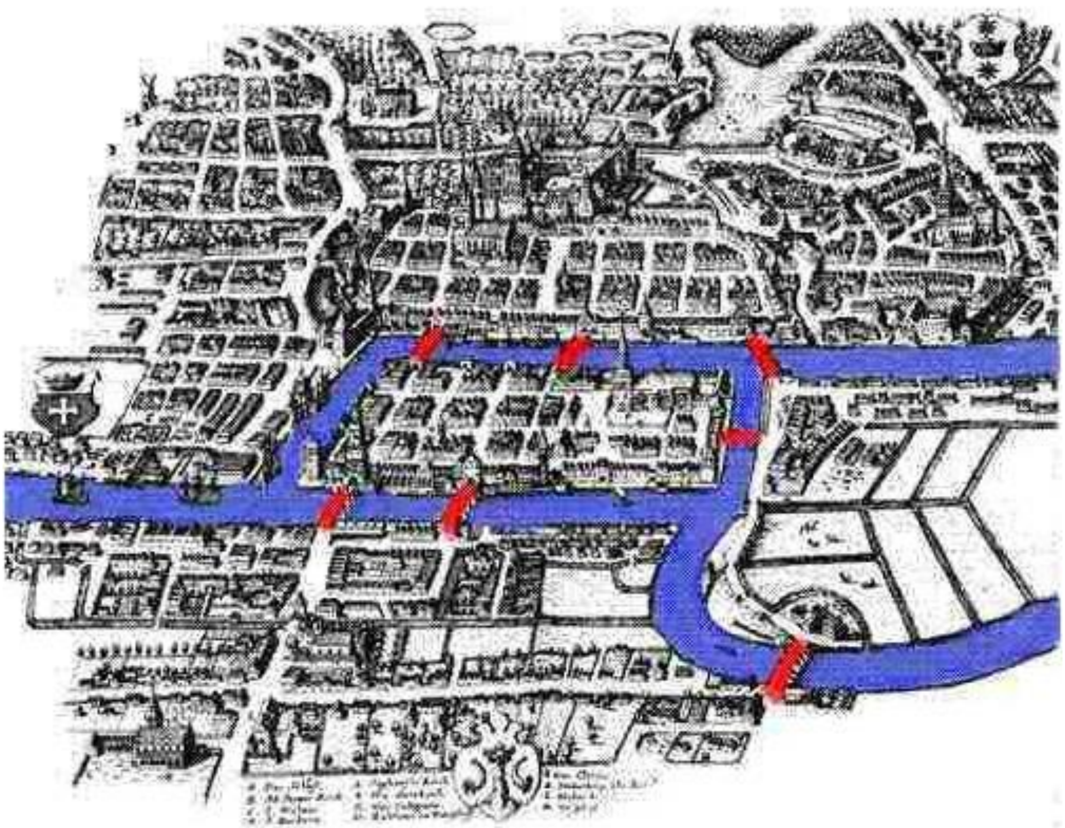
http://think-like-a-git.net/sections/graph-theory/seven-bridges-of-konigsberg.html

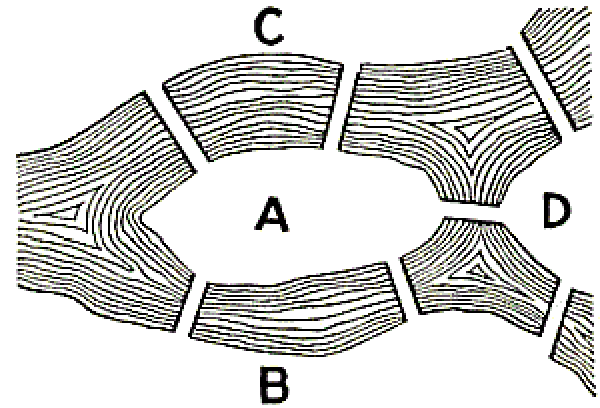
Problema celor 7 poduri din Königsberg



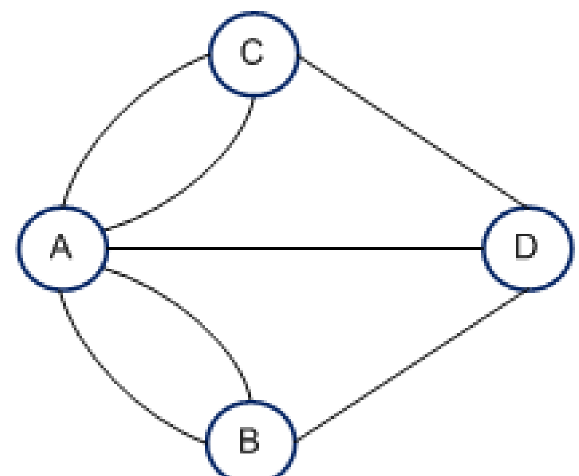


Problema celor 7 poduri din Königsberg

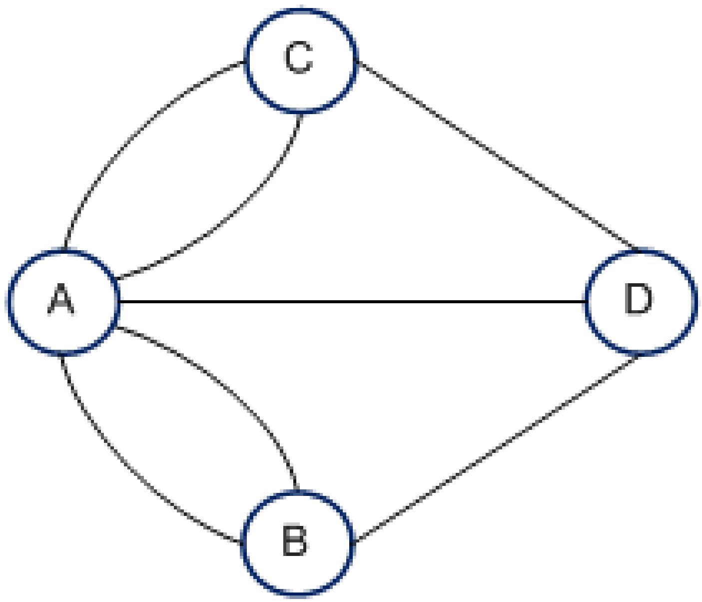




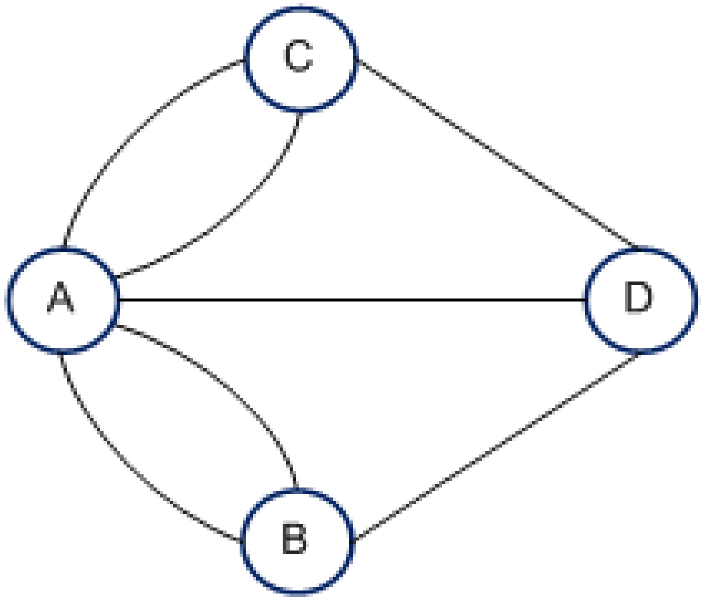
Modelare:



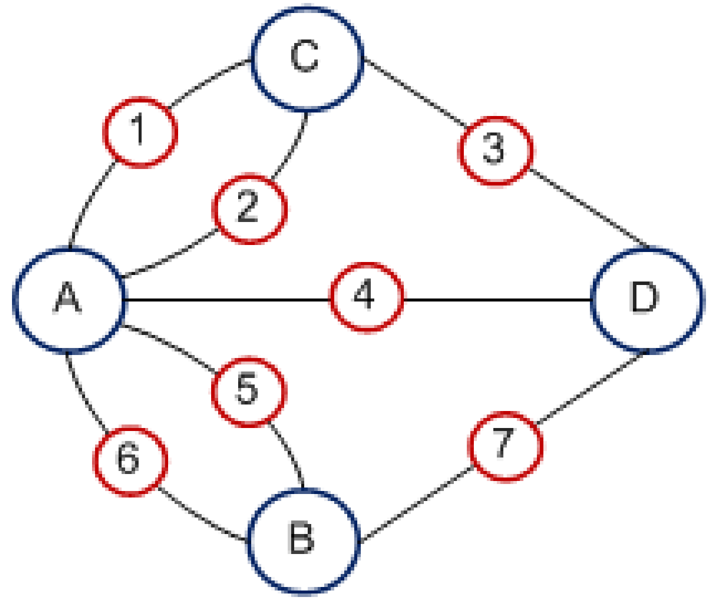
Problema celor 7 poduri din Königsberg



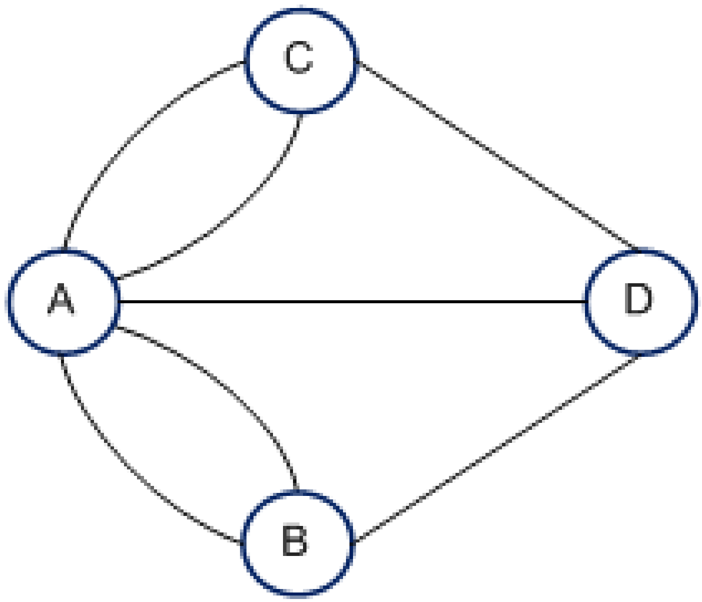
Problema celor 7 poduri din Königsberg

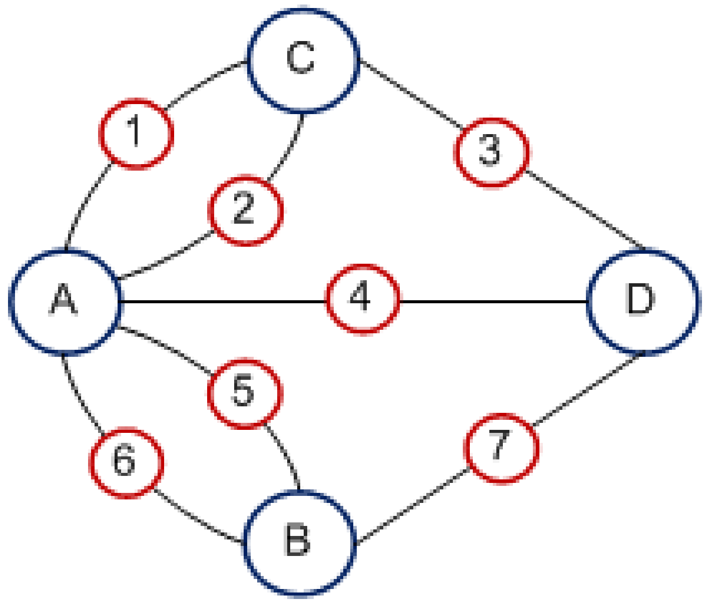


multigraf



Problema celor 7 poduri din Königsberg





1736 – Leonhard Euler

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

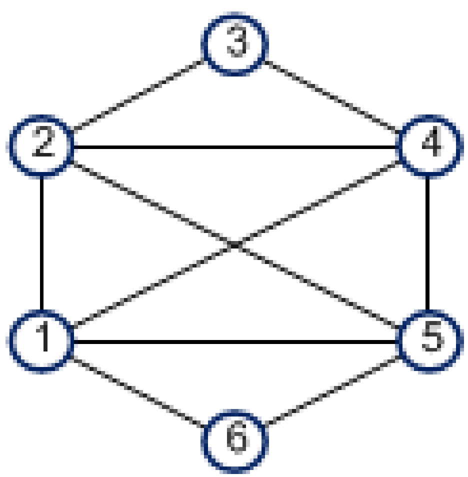
- **Ciclu eulerian** – traseu închis care trece o singură dată prin toate muchiile
- **Graf eulerian**

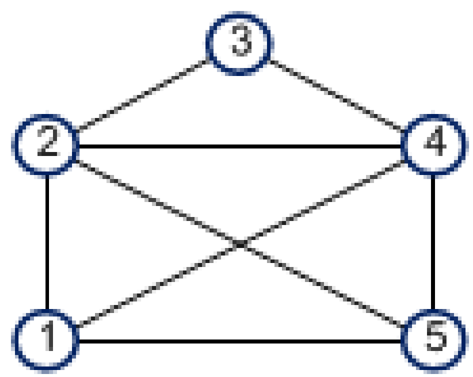
Problema celor 7 poduri din Königsberg

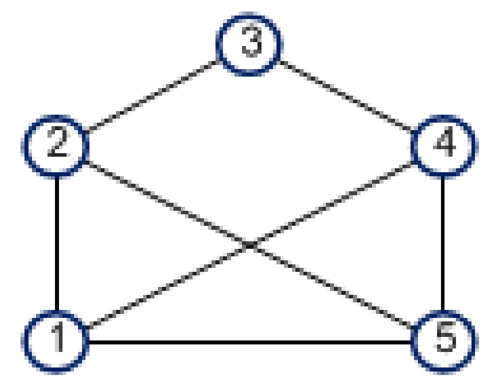
- **Interpretare**

Se poate desena diagrama printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie şi fără a desena o linie de două ori (în plus: să terminăm desenul în punctul în care l-am început)?

- Tăierea unui material



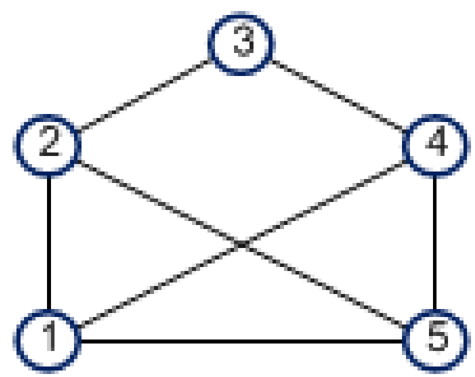




Problema celor 7 poduri din Königsberg

- **Interpretare**

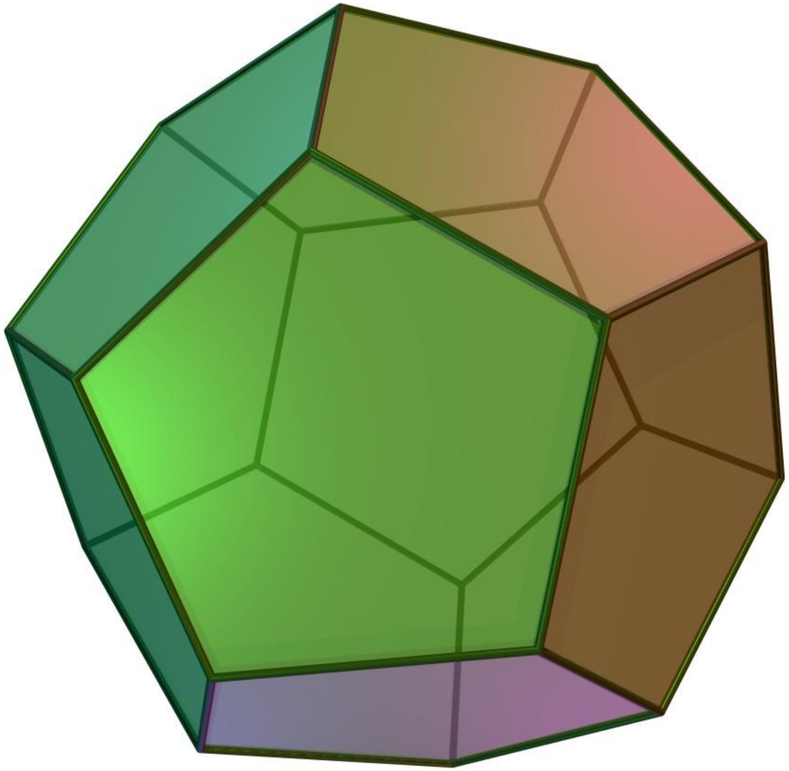
  De câte ori (minim) trebuie să ridicăm creionul de pe hârtie pentru a desena diagrama?



Jocul icosian

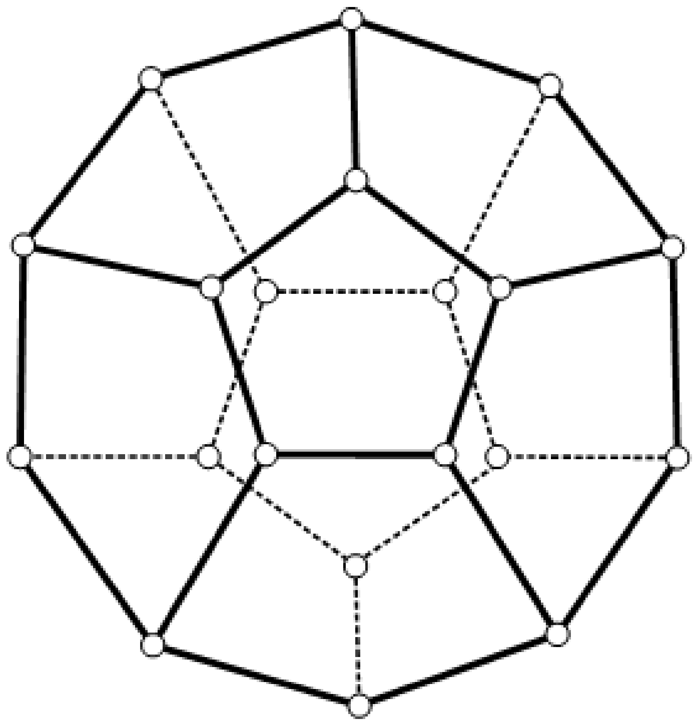
- 1856 – **Hamilton** – *“voiaj în jurul lumii”* :

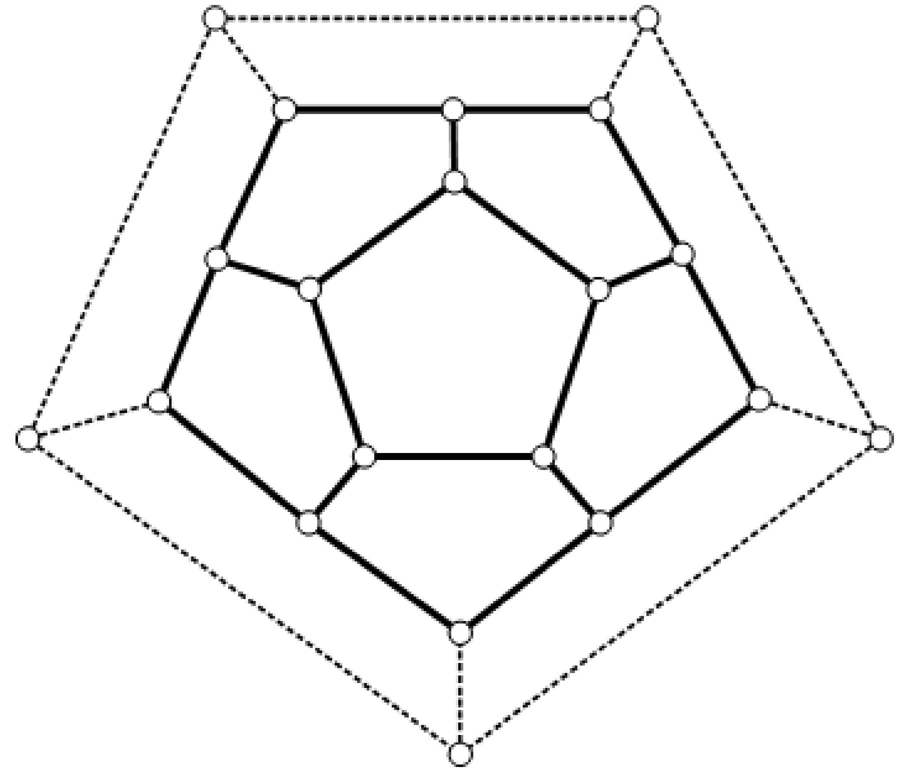
Există un traseu închis pe muchiile dodecaedrului care să treacă prin fiecare vârf o singură dată



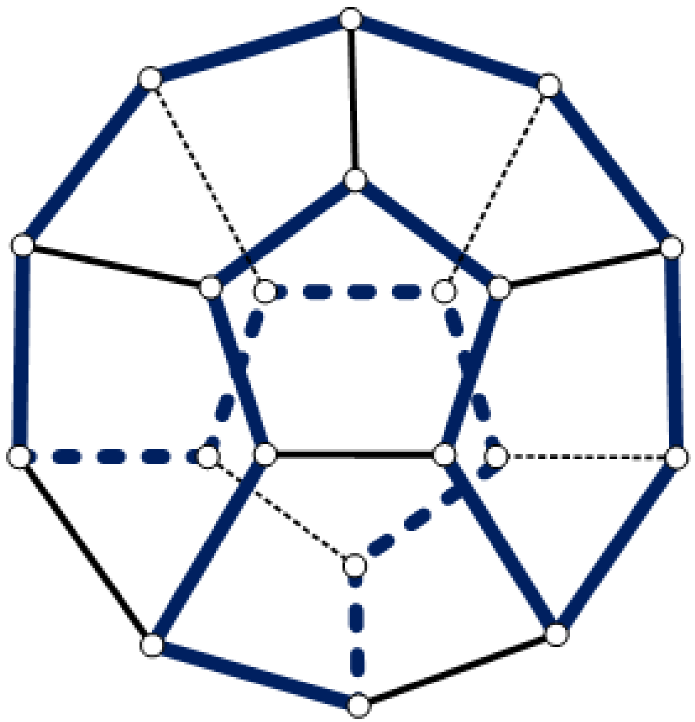
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dodecahedron.jpg

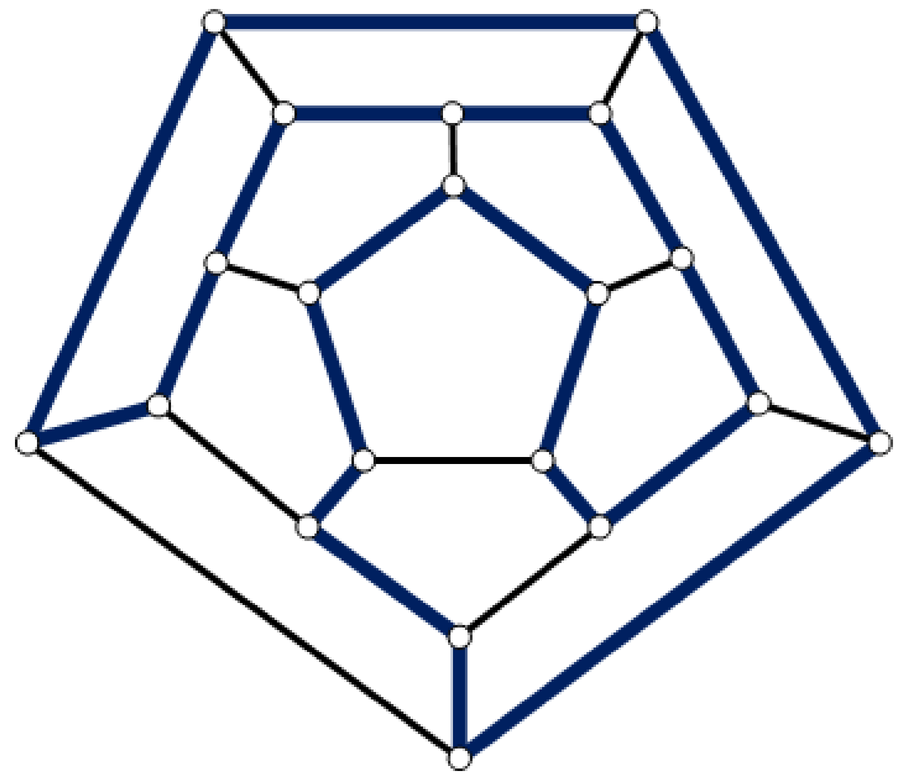
Jocul icosian





Jocul icosian





Jocul icosian

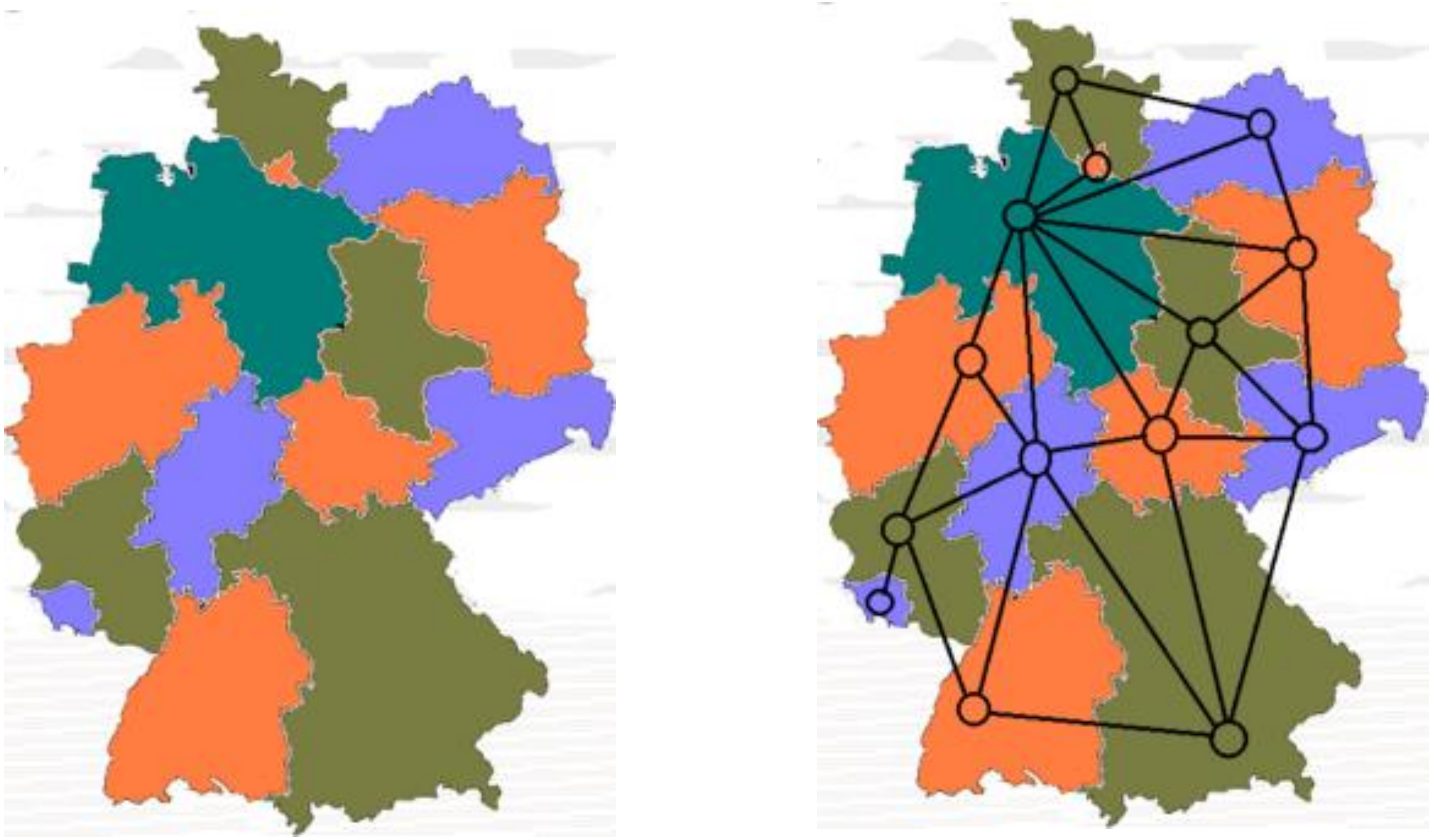
- **Ciclu hamiltonian** – trece o singură dată prin toate vârfurile
- **Graf hamiltonian**
- **Problema comis-voiajorului**

Problema celor 4 culori

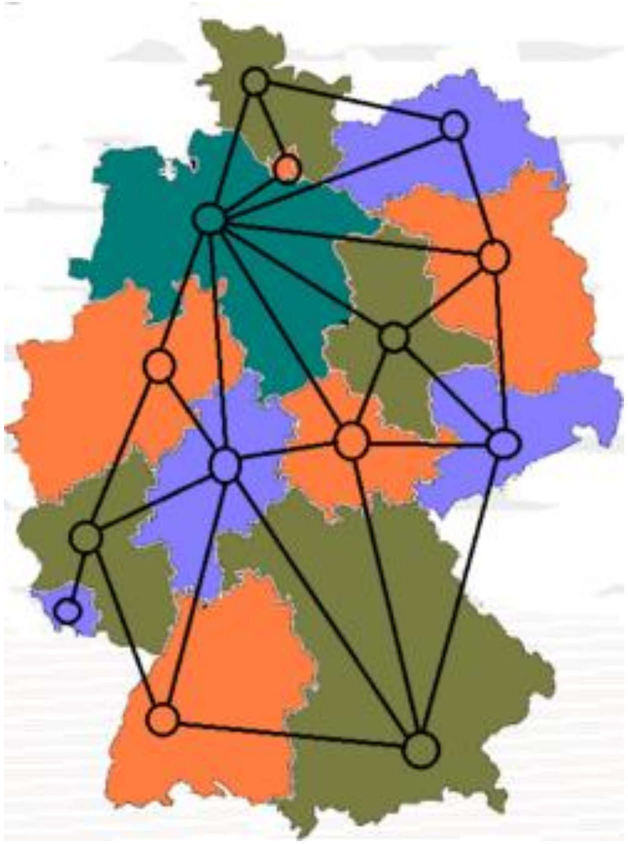
- **Problema celor 4 culori – De Morgan** 1852

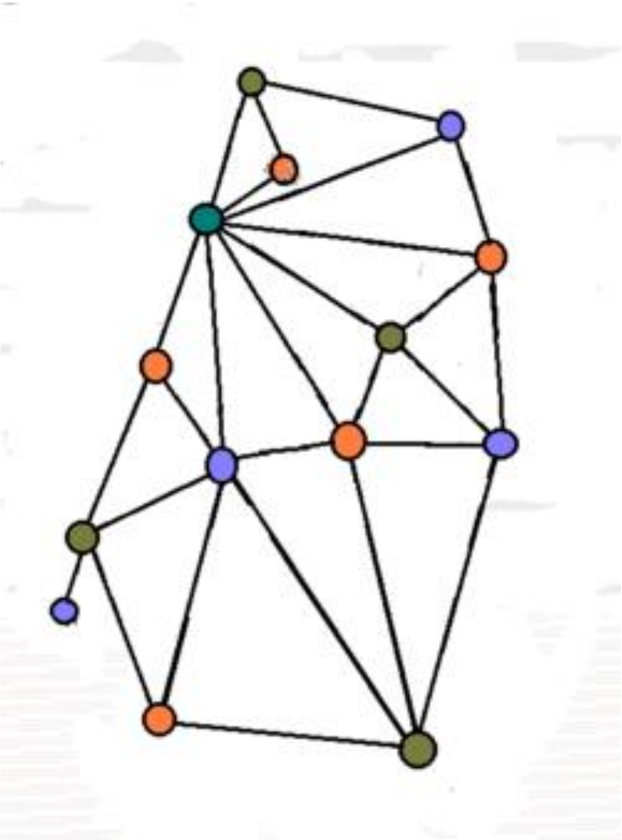
Se poate colora o hartă cu patru culori astfel încât orice două țări, care au frontieră comună și care **nu se reduce la un punct**, să aibă culori diferite?

http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem



http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem





http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem

- **Problema celor 4 culori – Appel și Haken** răspuns afirmativ în 1976 cu ajutorul calculatorului

Noţiuni introductive

Multiset

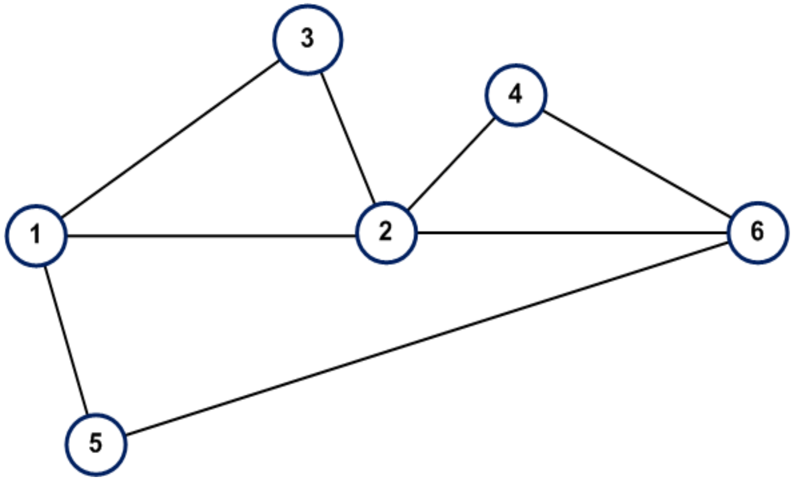
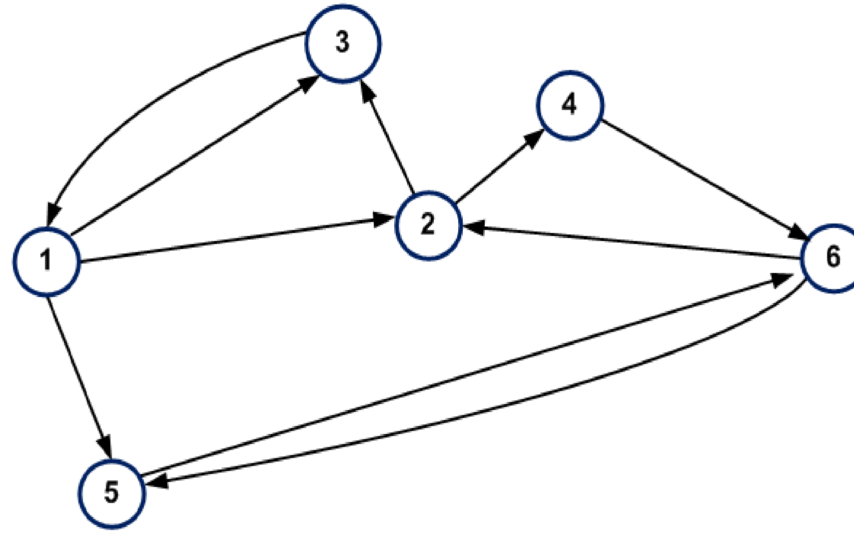
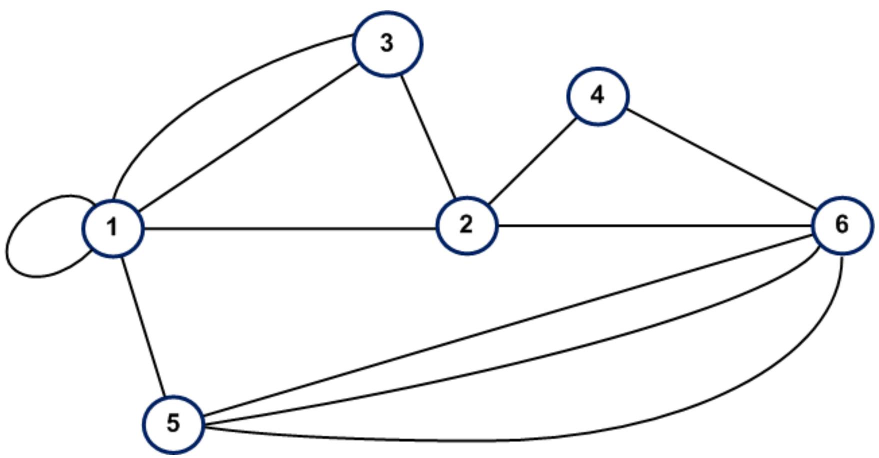
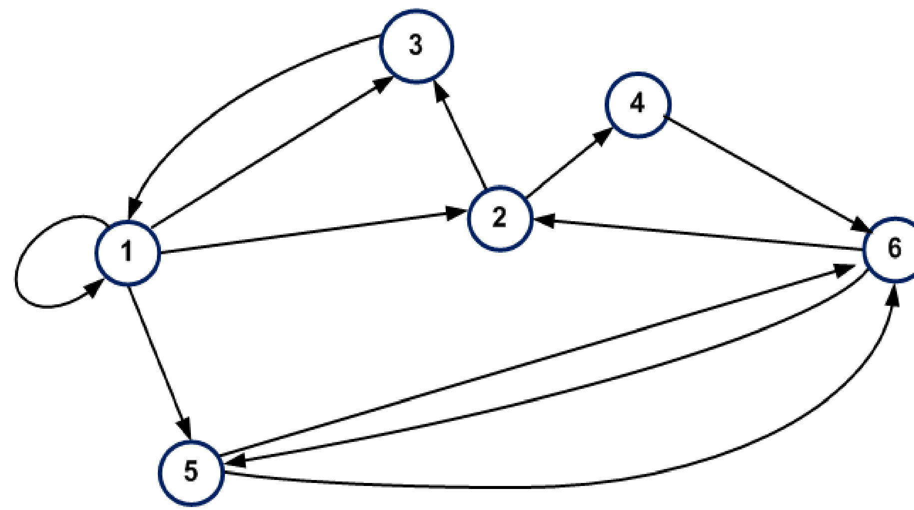
- S o mulţime (finită) nevidă
- **Multiset**
  - **Intuitiv: “mulțime” +se pot repeta elementele**

Multiset

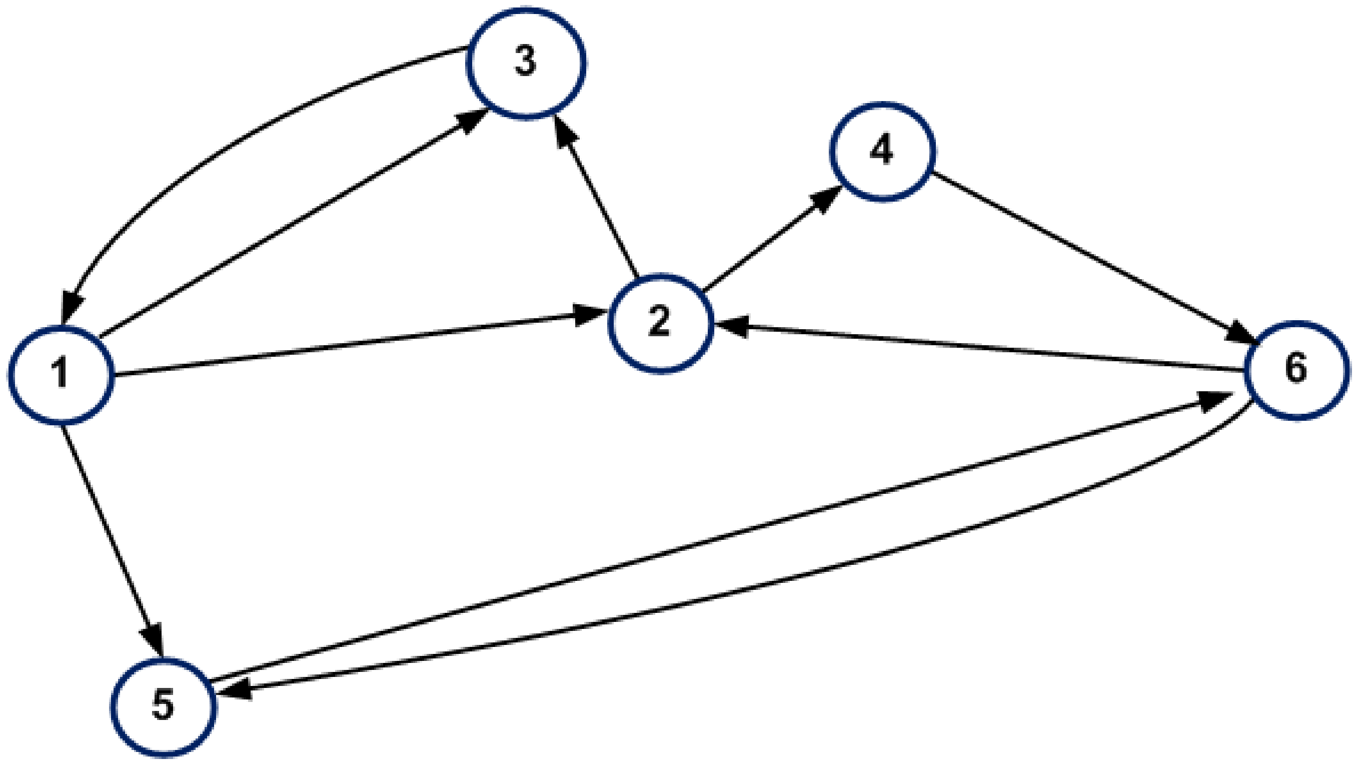
- S o mulţime (finită) nevidă
- **Multiset**
  - **$R = (S, r)$, $r : S \to \mathbb{N}$** **funcţie de multiplicitate**
- **Notaţie**
  - **$R = \{x^{r(x)} \mid x \in S\}$**

Multiset

- **Exemplu**
  - **$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$**
  - **$R = \{2^2, 3, 5^3\}$**
- $|R| = 2+1+3 = 6$ – suma multiplicităților
- $1 \notin R$


3
4
1
2
6
5

3
4
2
1
6
5

3
4
1
2
6
5

3
4
2
1
6
5

Graf orientat



Graf orientat

- **Graf orientat**: $G = (V, E)$
  - V – finită
  - E – perechi (ordonate) de 2 elemente distincte din V
  - $v \in V$ – **vârf**
  - $e = (u, v)$ **= uv** – **arc**
    - $u = e^{-}$ – **vârf iniţial / origine / extremitate iniţială**
    - $v = e^{+}$ – **vârf final / terminus / extremitate finală**

Graf orientat

- G = (V, E)
  - $d_G^-(u)$ – grad interior

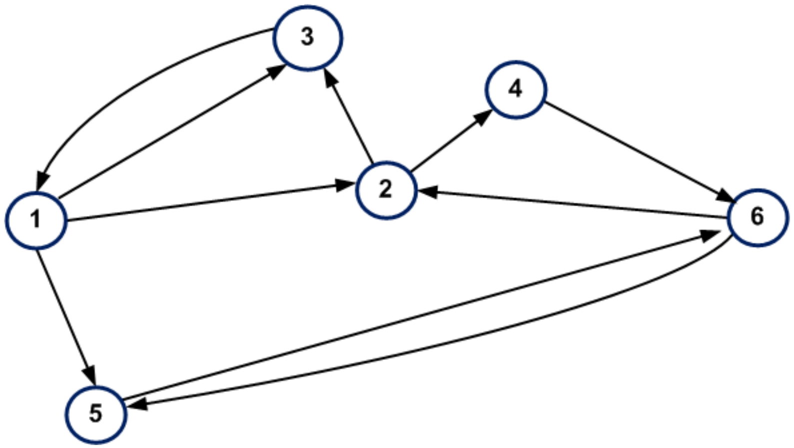
    $$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$$

  - $d_G^+(u)$ – grad exterior

    $$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$$

  - $d_G(u)$ – grad

    $$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$



Graf orientat

- Are loc relația

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

Multisetul gradelor

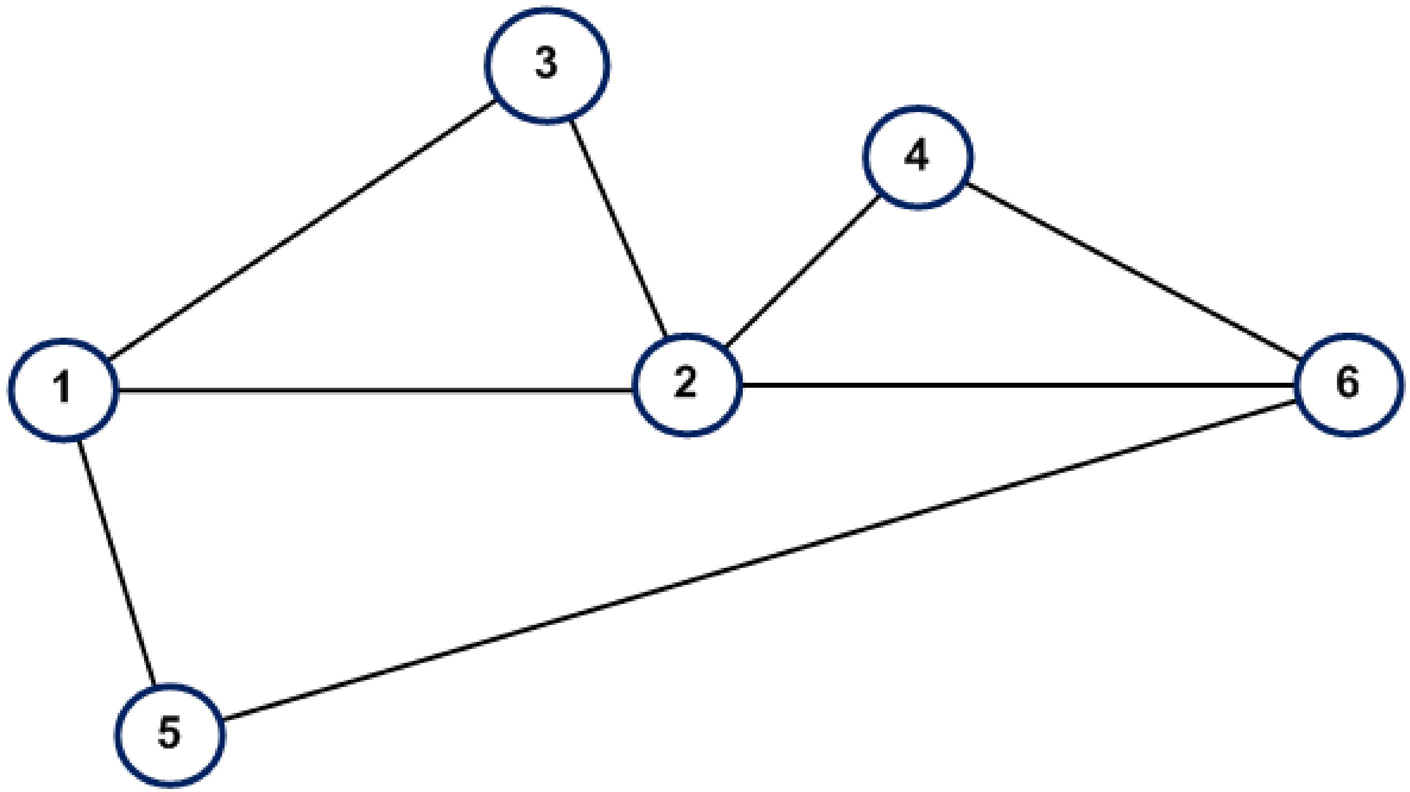
- G orientat, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  - Multisetul gradelor interioare

$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), \ldots, d_G^-(v_n)\}$$

  - Multisetul gradelor exterioare

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), \ldots, d_G^+(v_n)\}$$

Graf neorientat



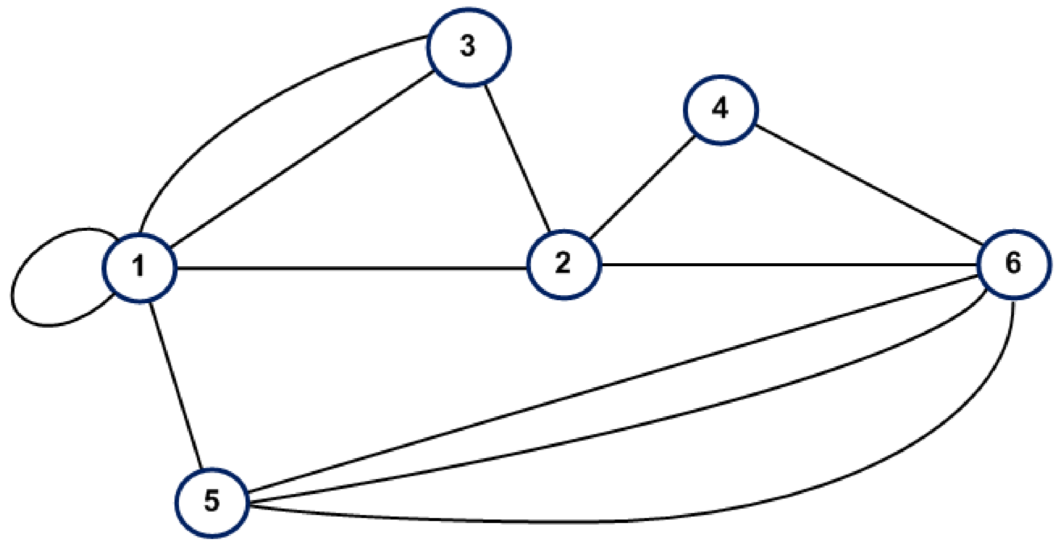
Graf neorientat

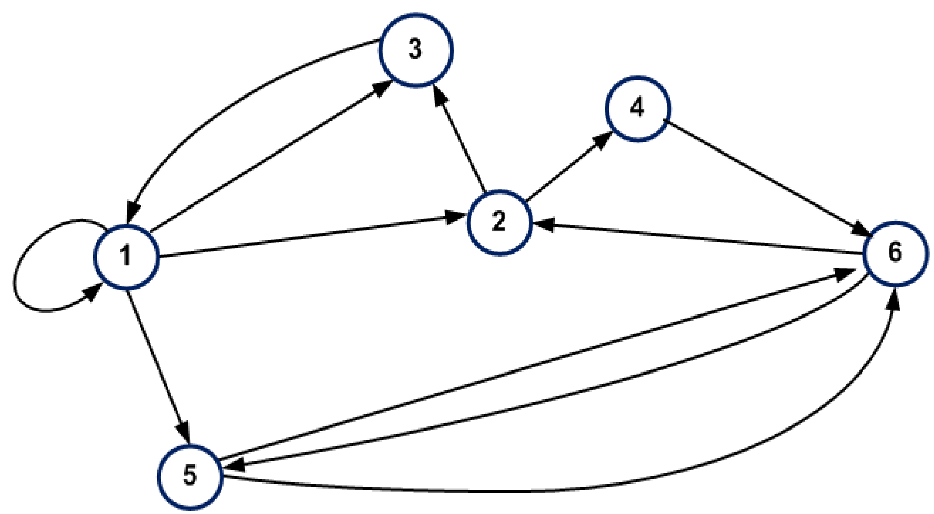
- **Graf neorientat**: $G = (V, E)$
  - **V – finită**
  - **E – submulțimi de 2 elemente (distincte) din V**
  - $v \in V$ – **vârf / nod**
  - $e = \{u,v\} = uv$ – **muchie**
    - u, v – **capete / extremităţi**

Notaţii

- $V(G)$, $E(G)$
- $e = uv$

Multigraf neorientat/orientat





Multigraf

- **$G = (V, E, r)$**

  r(e) – **multiplicitatea muchiei e**

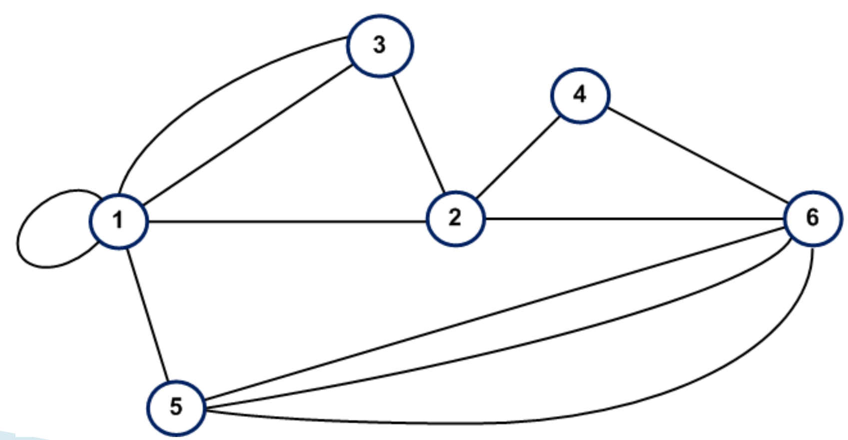
Multigraf neorientat

- **G = (V, E, r)**

  r(e) – multiplicitatea muchiei e

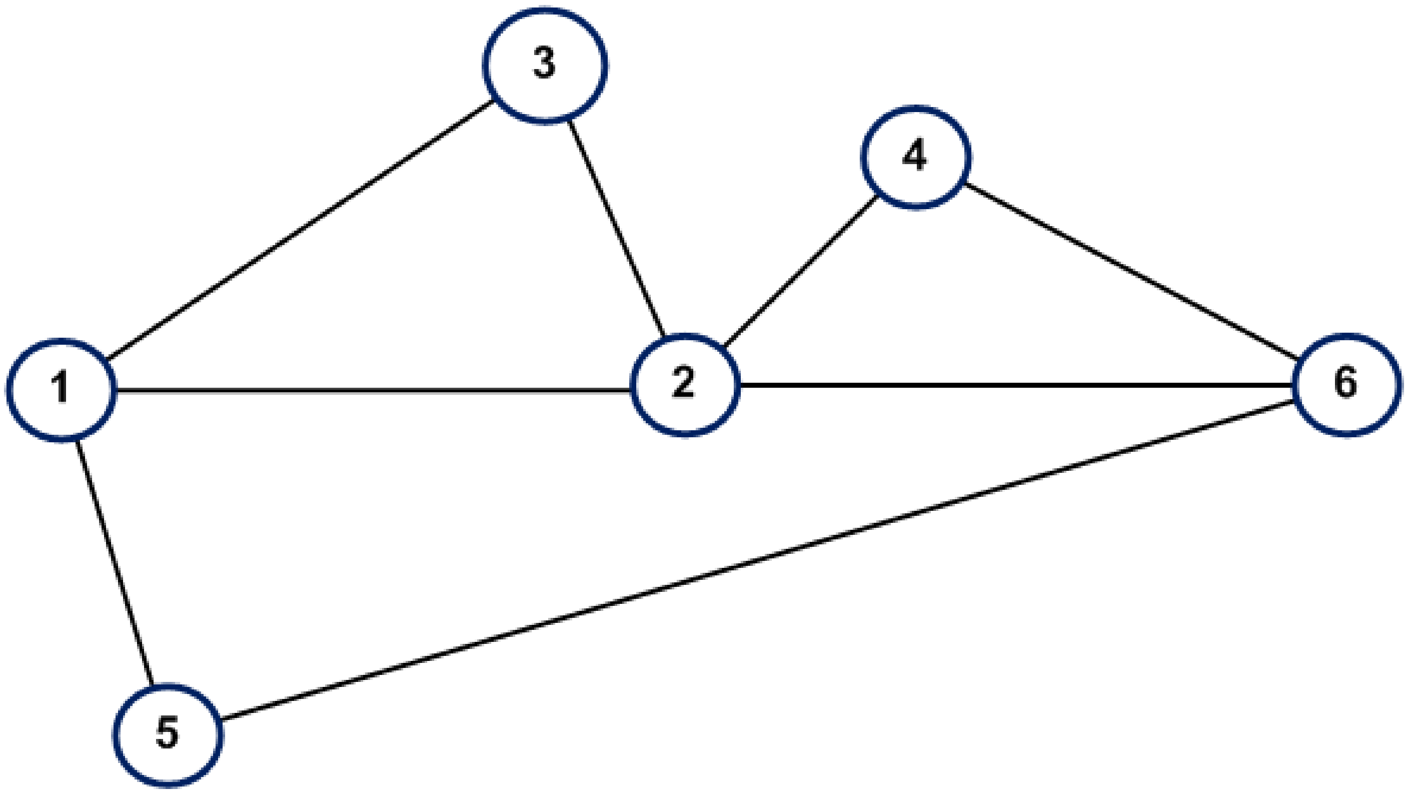
  - e = {u,u} = **buclă**
  - e cu r(e) > 1 = **muchie multiplă**

$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| + 2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| +$$



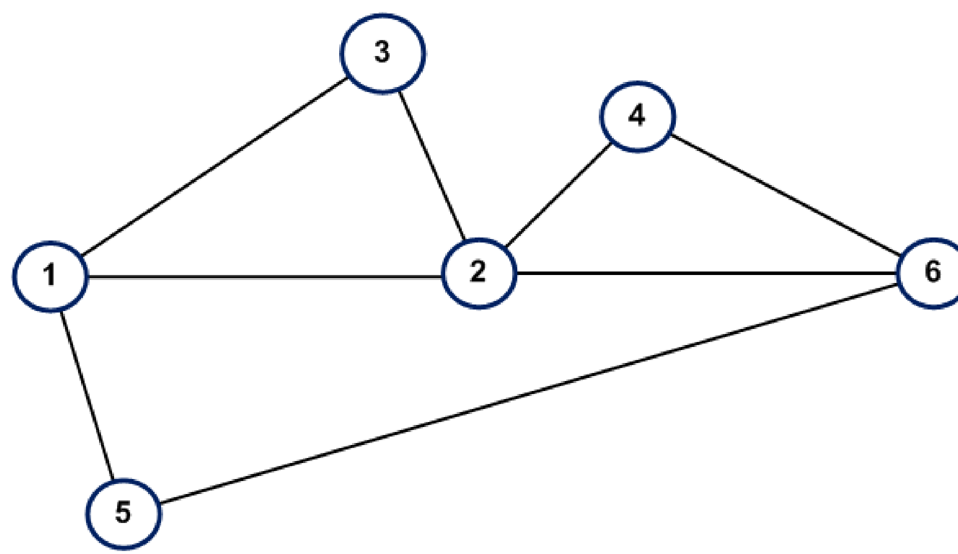
Alte noţiuni fundamentale

Adiacență. Incidență


3
4
1
2
6
5

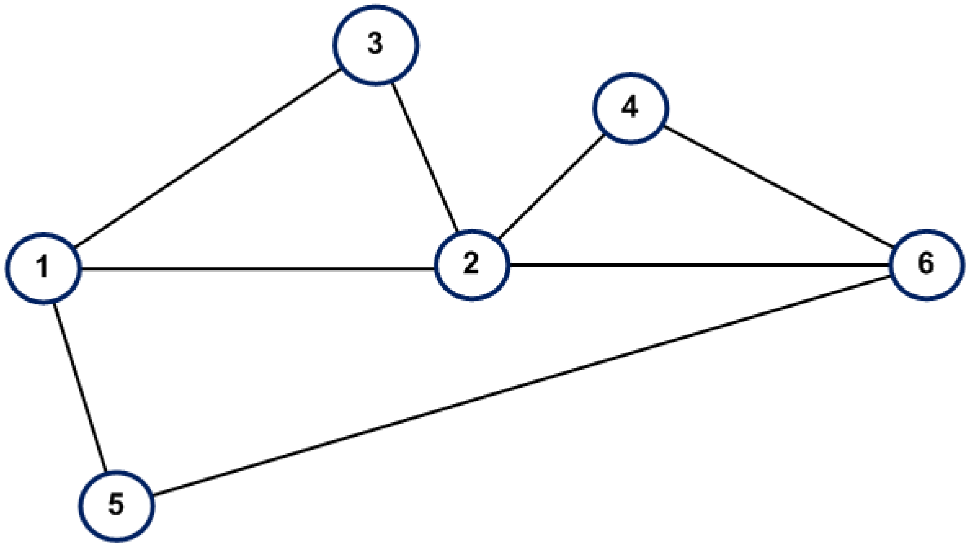
Adiacență. Incidență

- Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**
  - u și $v \in V$ sunt **adiacente** dacă $uv \in E$
  - Un **vecin** al lui $u \in V$ este un vârf adiacent cu el
  - **Notație** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u



Adiacență. Incidență

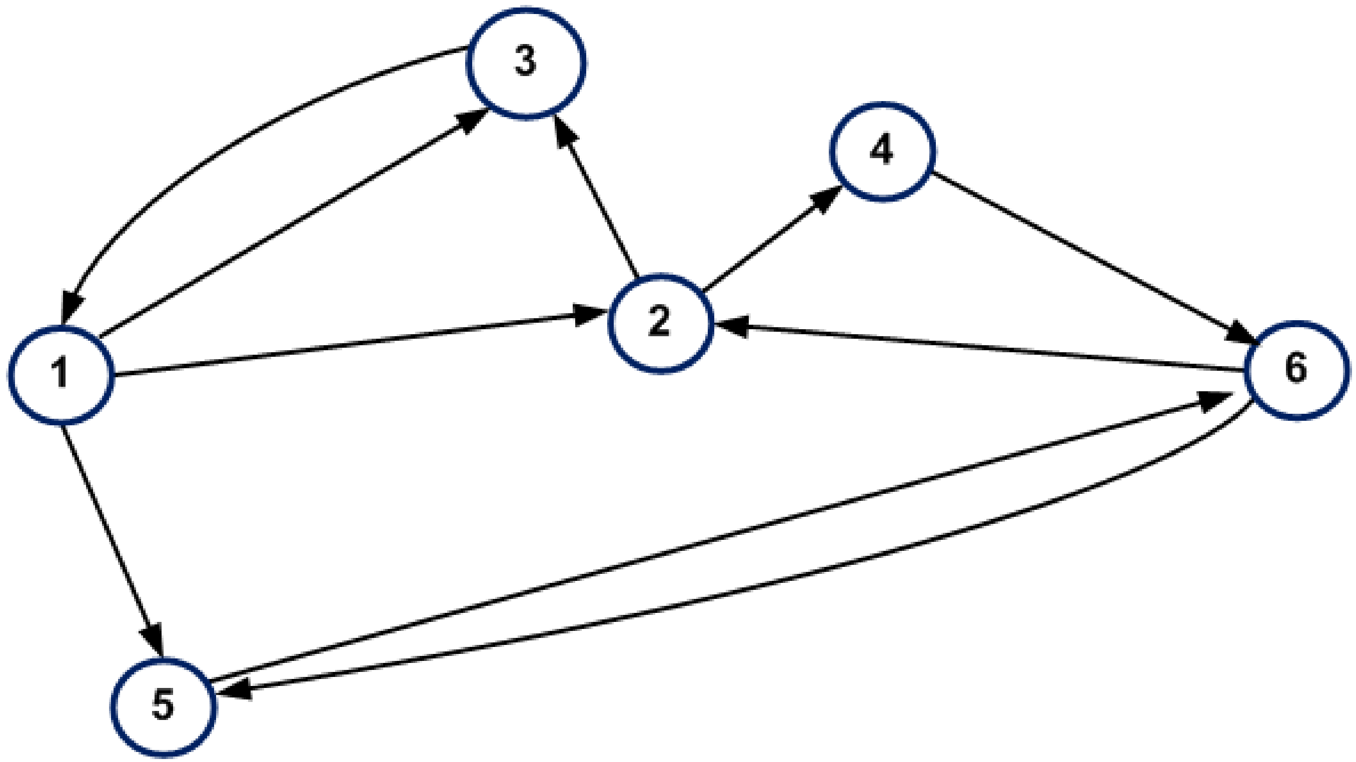
- Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**
  - O muchie $e \in E$ este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e
  - e și $f \in E$ sunt **adiacente** dacă există un vârf în care sunt incidente (au o extremitate în comun)



Drumuri. Circuite

Drumuri. Circuite

- Drum (walk)
- Drum simplu (trail)
- Drum elementar (path)
- Circuit + elementar
- Lungimea unui drum
- Distanță între două vârfuri


3
4
1
2
6
5

Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat**

- Un **drum** este o secvență P de vârfuri

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$$

unde $v_1, \ldots, v_k \in V(G)$

cu proprietatea că între oricare două vârfuri consecutive există arc:

$$(v_i, v_{i+1}) \in E(G), \forall i \in \{1, \ldots, k-1\}$$

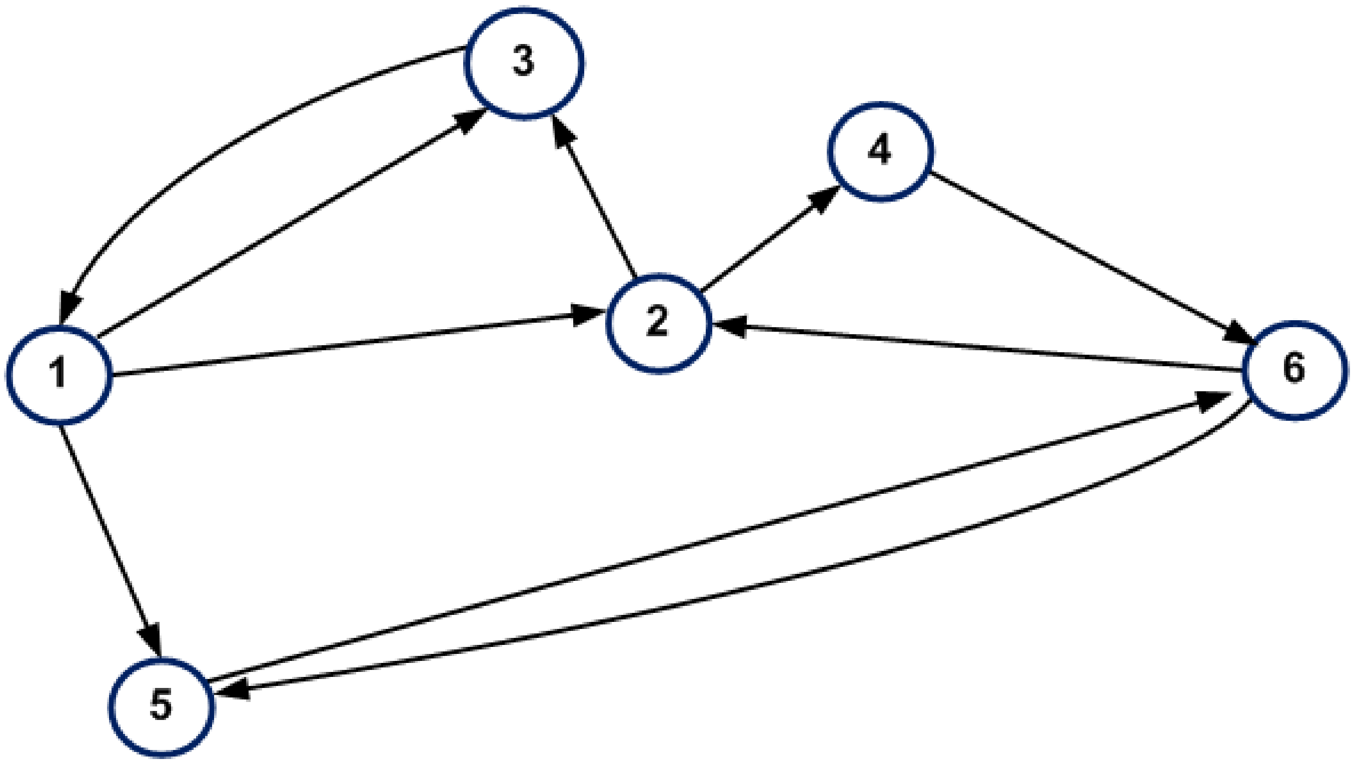
Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat și un drum**

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$$

- P este **drum simplu** dacă nu conține un arc de mai multe ori ($(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$, $\forall i \neq j$)

- P este **drum elementar** dacă nu conține un vârf de mai multe ori ($v_i \neq v_j$, $\forall i \neq j$)



[1, 2, 4, 6, 2, 4] – drum care nu este simplu

[1, 2, 4, 6, 2, 3] – drum simplu care nu este elementar

[1, 2, 4, 6] – drum elementar

Drumuri. Circuite

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

- **Lungimea** lui P = **l(P)** = **k–1 = |E(P)|**
- v_1 și v_k se numesc **capetele/ extremitățile** lui P
- P se numește și **v_1–v_k drum**
- Pentru $i \leq j$ notăm $[v_i \underline{P}\, v_j]$ subdrumul lui P dintre v_i și v_j

Drumuri. Circuite

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$$

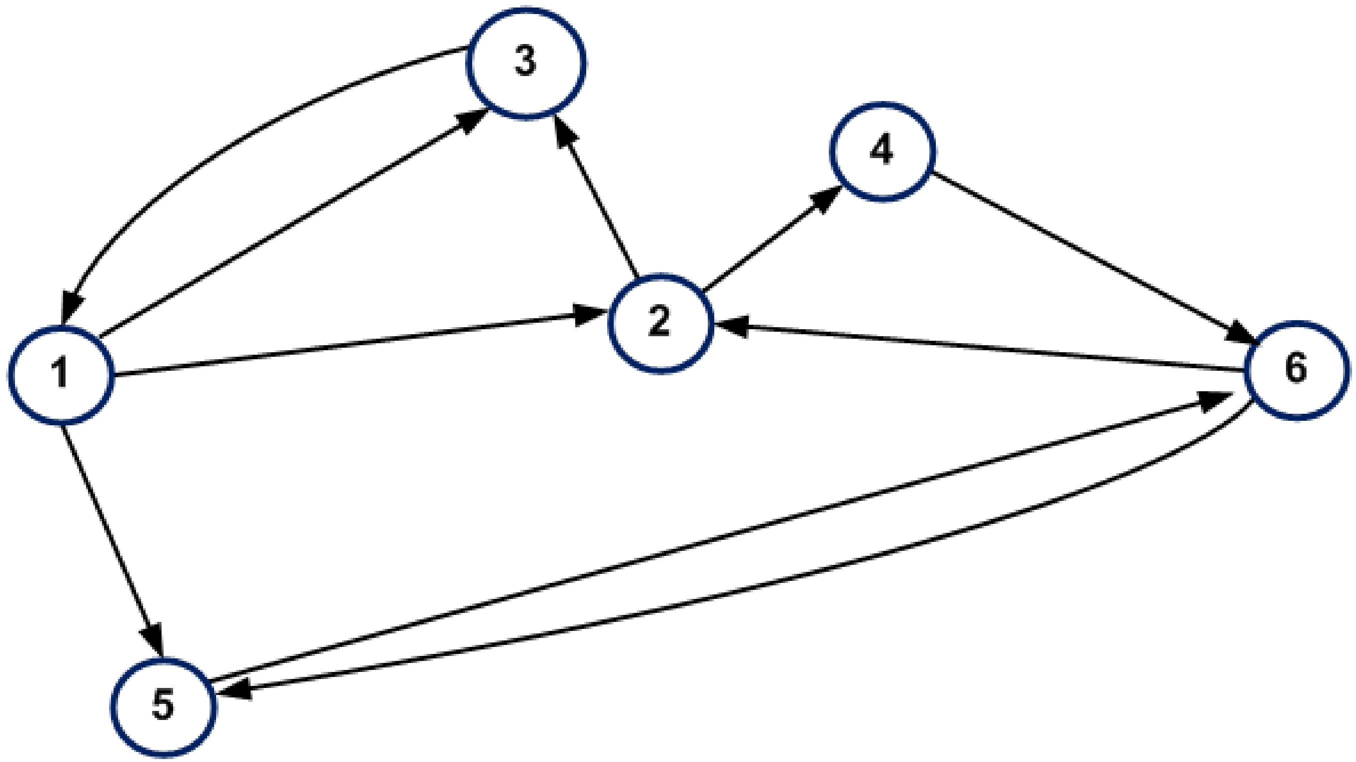
- Notăm
  - $V(P) = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
  - $e_i = (v_i, v_{i+1})$
  - $E(P) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}$

Drumuri. Circuite

- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v)=\begin{cases}\mathbf{0},\ \text{daca } u=v\\ \infty,\ \text{daca nu exista } u\text{-}v \text{ drum in } G\\ \min\{l(P)\mid P \text{ este } u\text{-}v \text{ drum in } G\},\ \text{altfel}\end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u-v drum)


3
4
2
1
6
5

Drumuri. Circuite

- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v)=\begin{cases}\mathbf{0}, & \text{daca } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\\ \infty, & \text{daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\\ \min\{l(P)\mid P \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\}, & \text{altfel}\end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u-v drum)

- Un u-v drum de lungime $d_G(u,v)$ se numește **drum minim de la u la v**
- Vom nota și $d(u,v)$ dacă G se deduce din context

Drumuri. Circuite

- Un **circuit** este un drum simplu cu capetele identice

  $C = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k,}\ v_1]$

- **Circuit elementar**

- **Notații** V(C), E(C)

Lanțuri. Cicluri

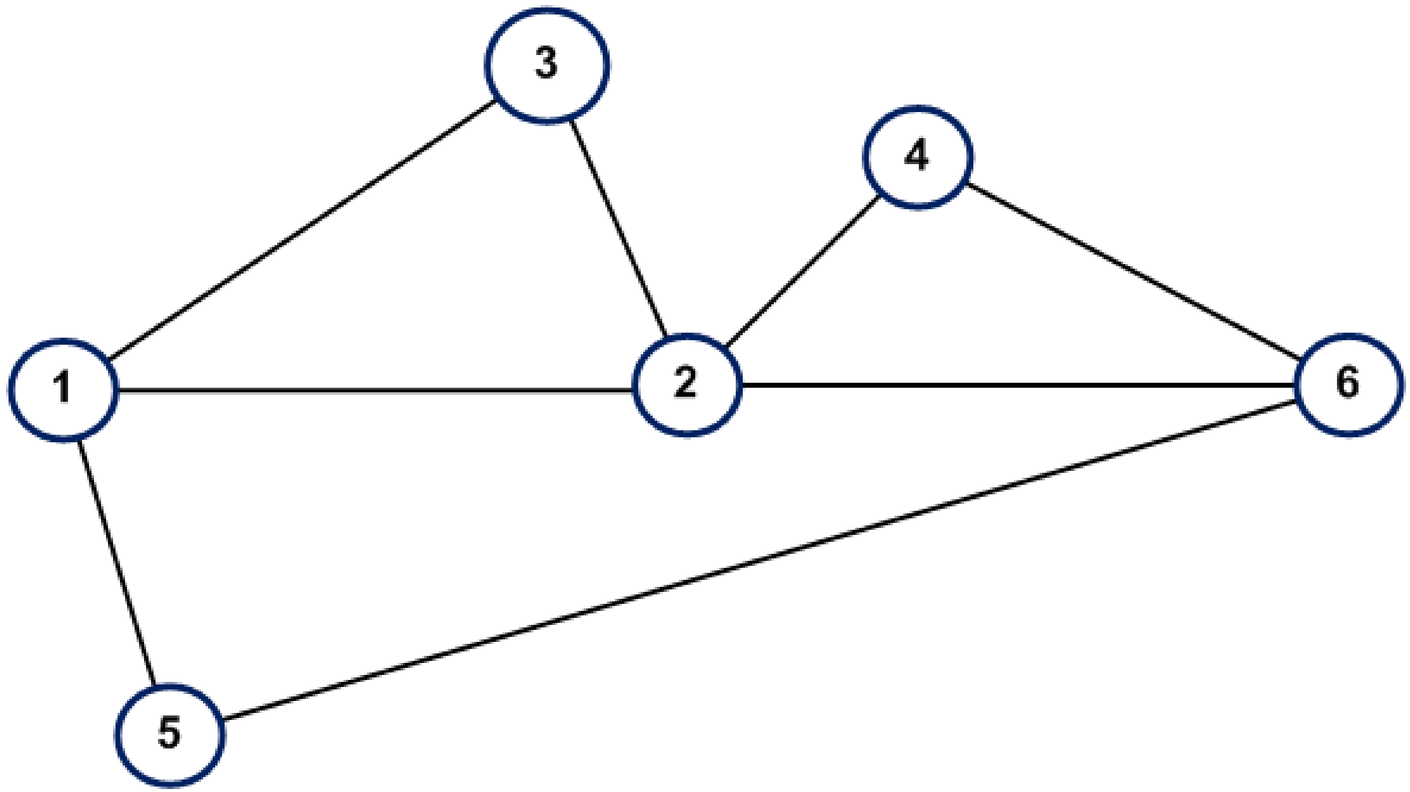
Lanțuri. Cicluri

Pentru G graf **neorientat – noțiuni similare**

- Un **lanț** este o secvență P de vârfuri cu proprietatea că oricare două vârfuri consecutive sunt adiacente

  $$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

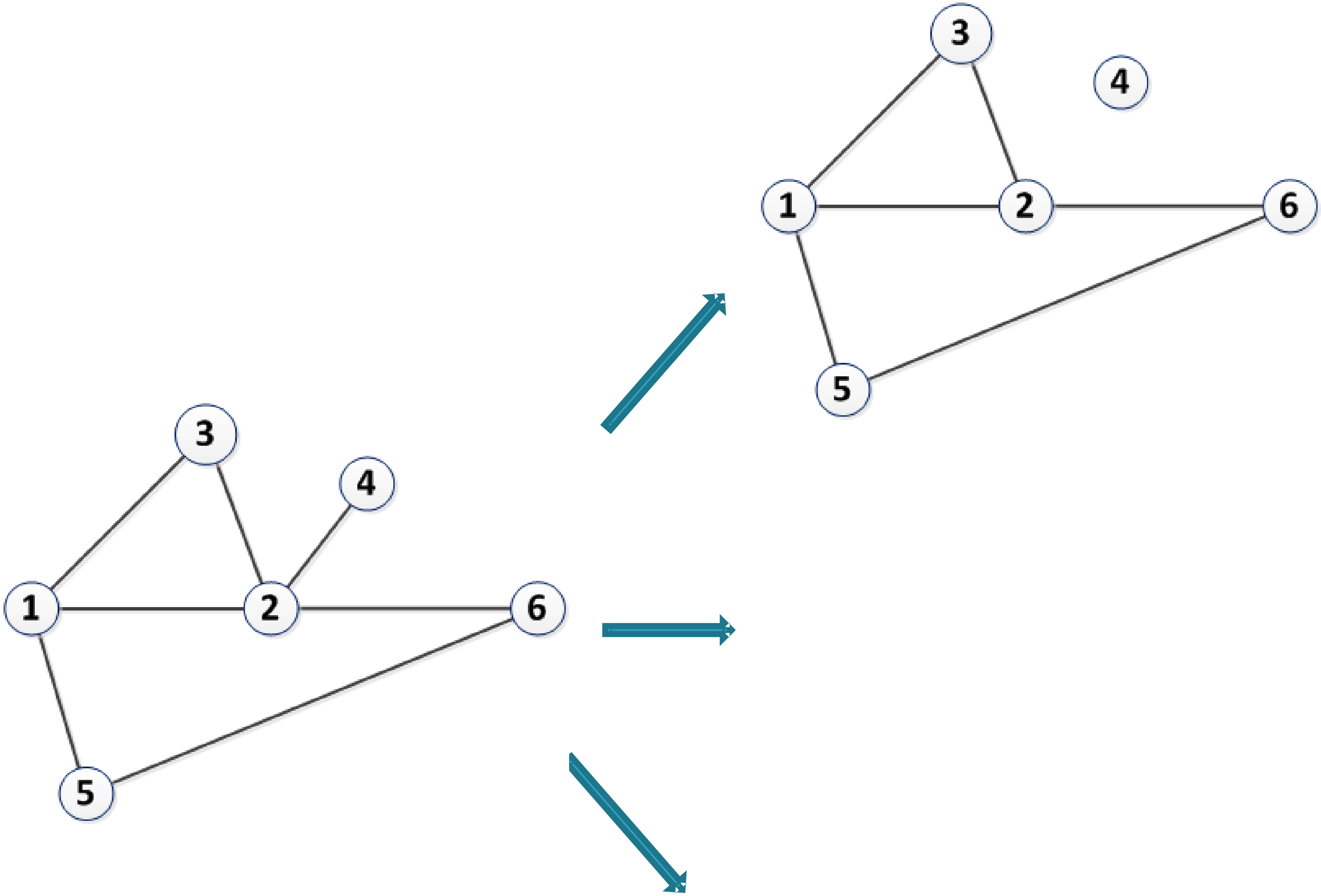
  - **lanț simplu** / **lanț elementar** / **lungime**
  - **ciclu** / **ciclu elementar**
  - **distanță** / **lanț minim**


3
4
1
2
6
5

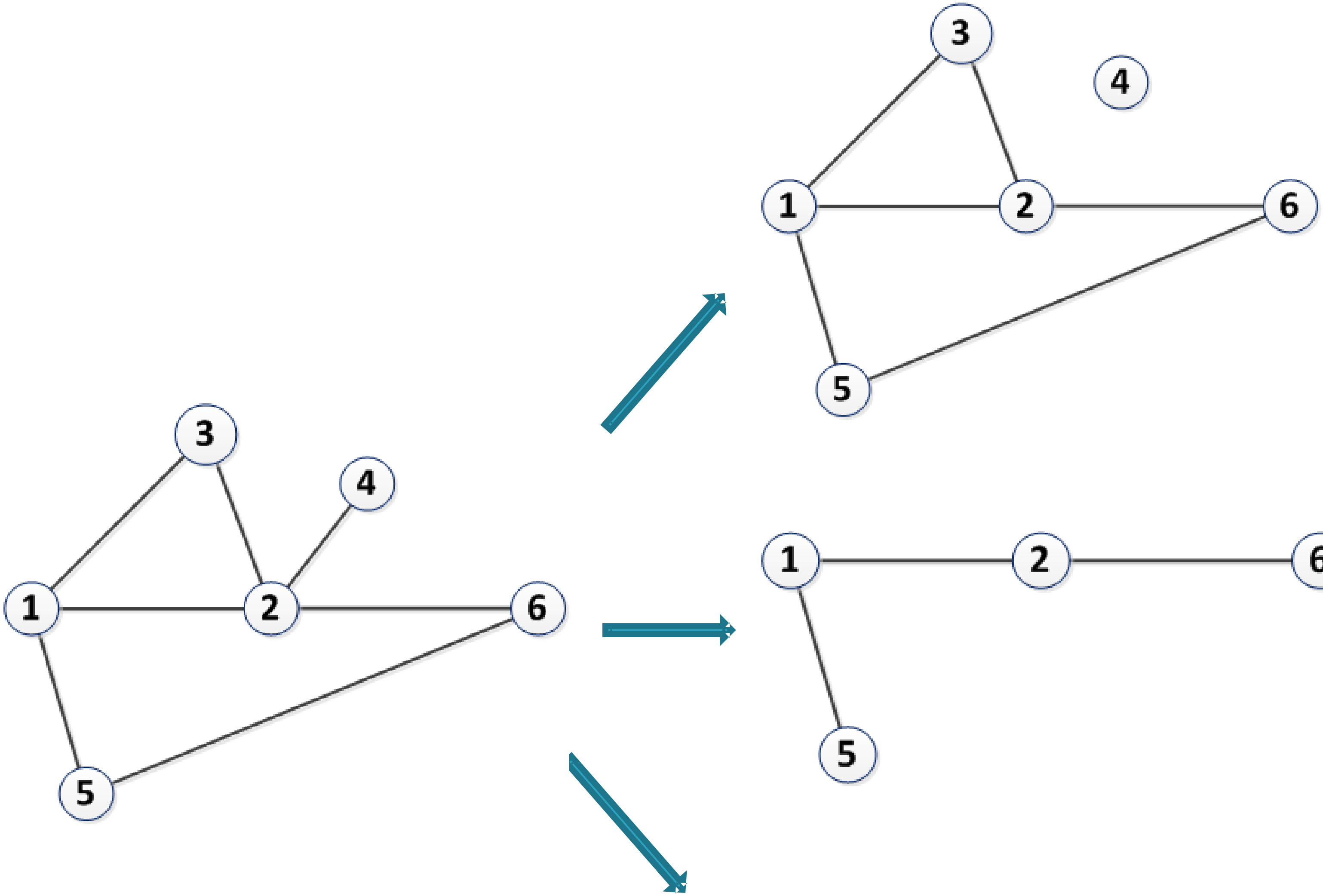
Graf parțial. Subgraf. Conexitate

Graf parțial. Subgraf

- graf parțial
- subgraf
- subgraf indus

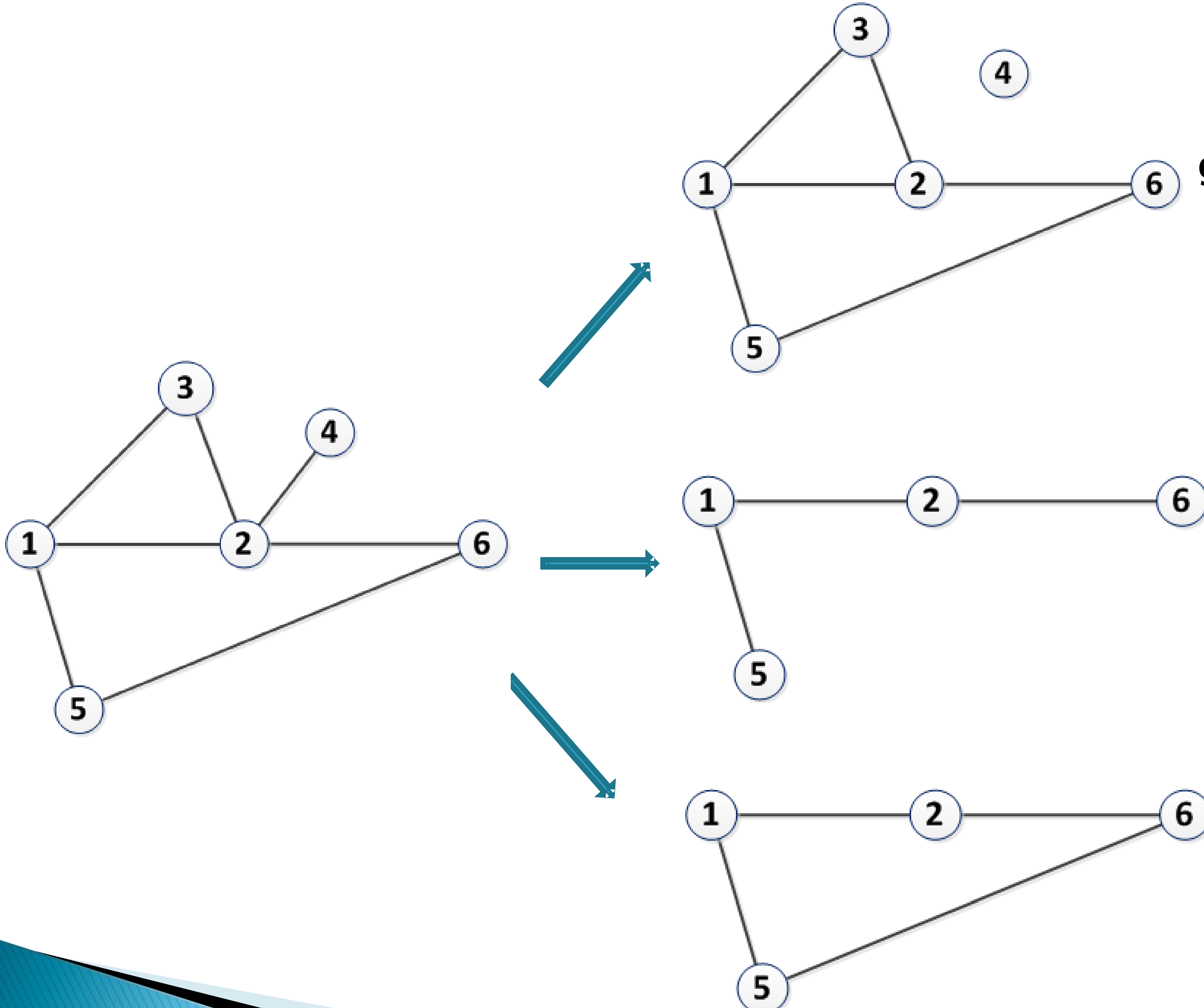


graf parțial



graf parțial

subgraf



graf parțial

subgraf

subgraf indus de {1,2,5,6}

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \prec G}$) dacă

  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \prec G}$) dacă

  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf indus de V_1 în** G (vom nota $\mathbf{G_1 = G[V_1]}$) dacă

  $V_1 \subseteq V,$

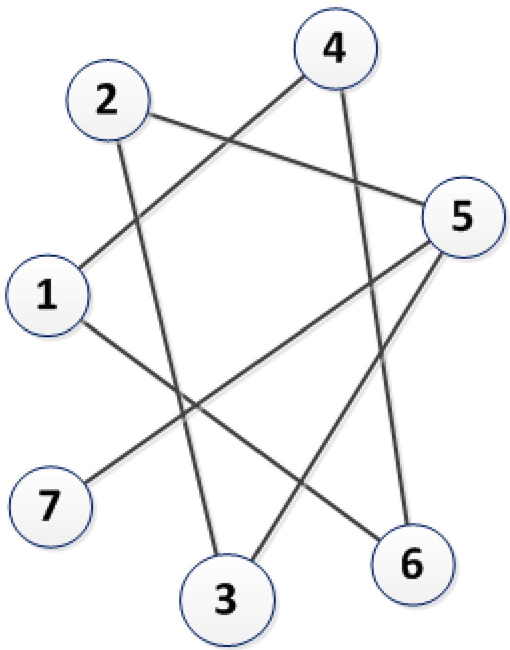
  $E_1 = \{e \mid e \in E(G), \text{ e are ambele extremități în } V_1\}$

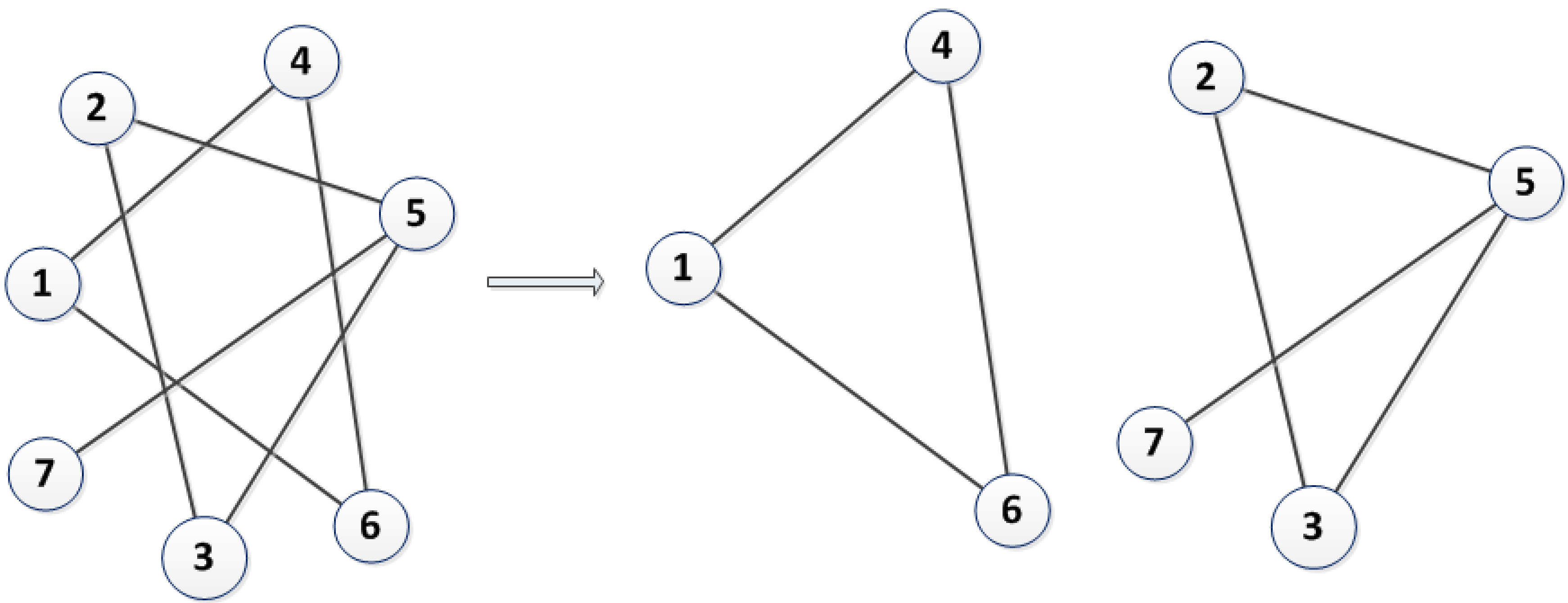
  (toate arcele/muchiile cu extremități în V_1)

Conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- **graf conex**
- **componentă conexă**


4
2
5
1
7
3
6



două componente conexe

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț
- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf **indus** conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț

- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)

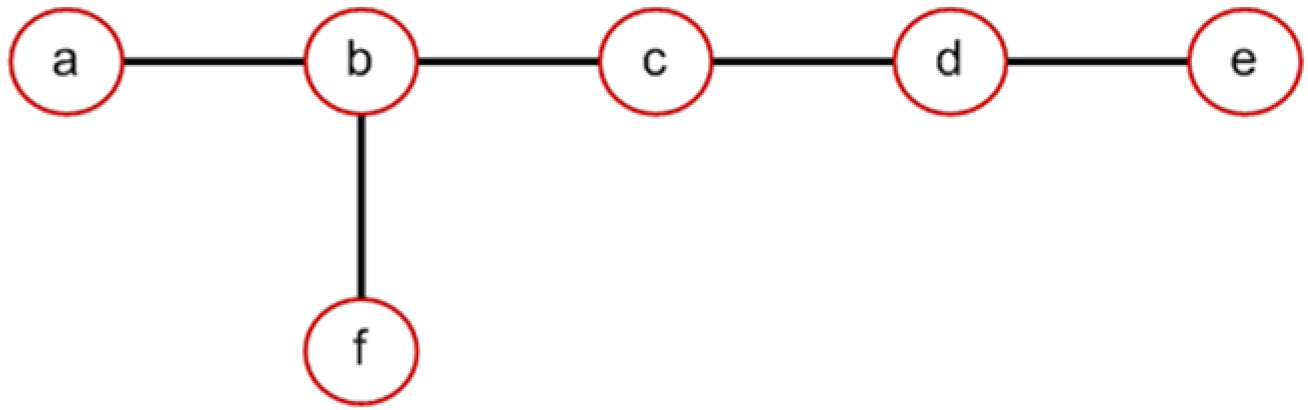
- Pentru cazul orientat – **tare-conexitate**

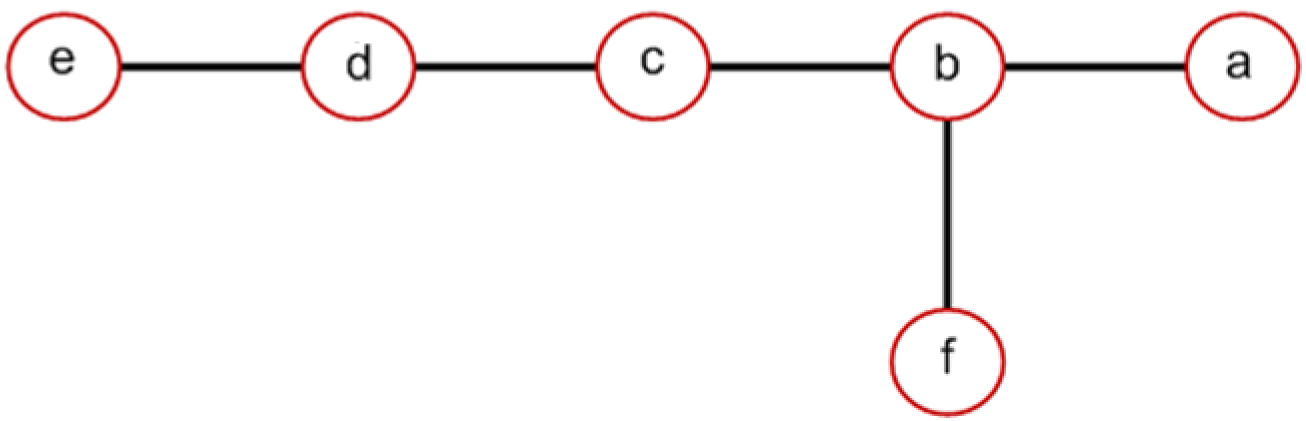
Notaţii

- **$G - v$** , $v \in V(G)$
- **$G - e$** , $e \in E(G)$
- **$G - V'$** , $V' \subseteq V(G)$
- **$G - E'$** , $E' \subseteq E(G)$
- **$G + e$**

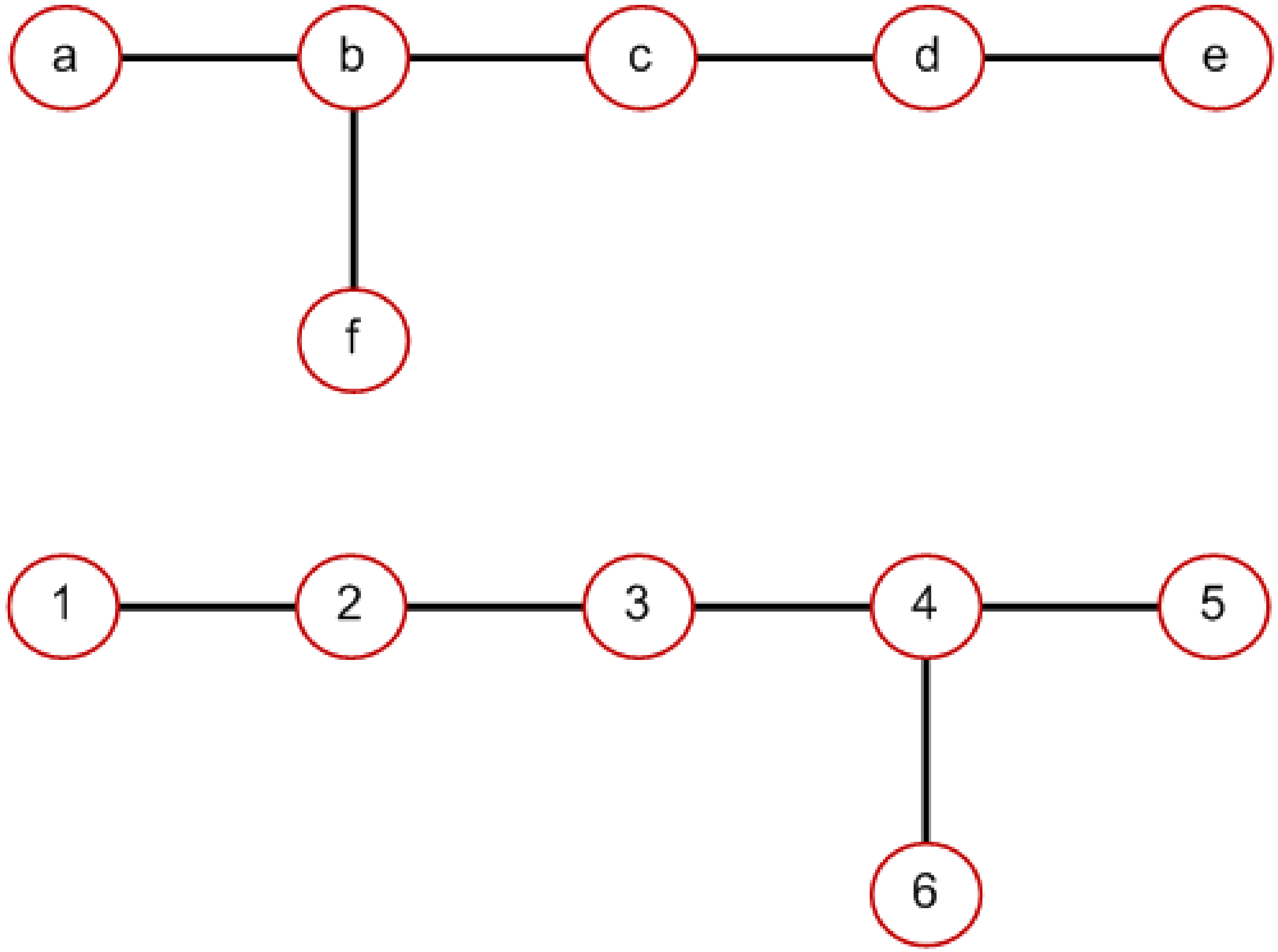
Egalitate. Izomorfism

Egalitate





Egalitate?



Izomorfism

Fie G_1, G_2 două grafuri

- $G_1 = (V_1, E_1)$
- $G_2 = (V_2, E_2)$

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** (**$G_1 \sim G_2$**) $\Leftrightarrow$

există $f : V_1 \rightarrow V_2$ bijectivă cu

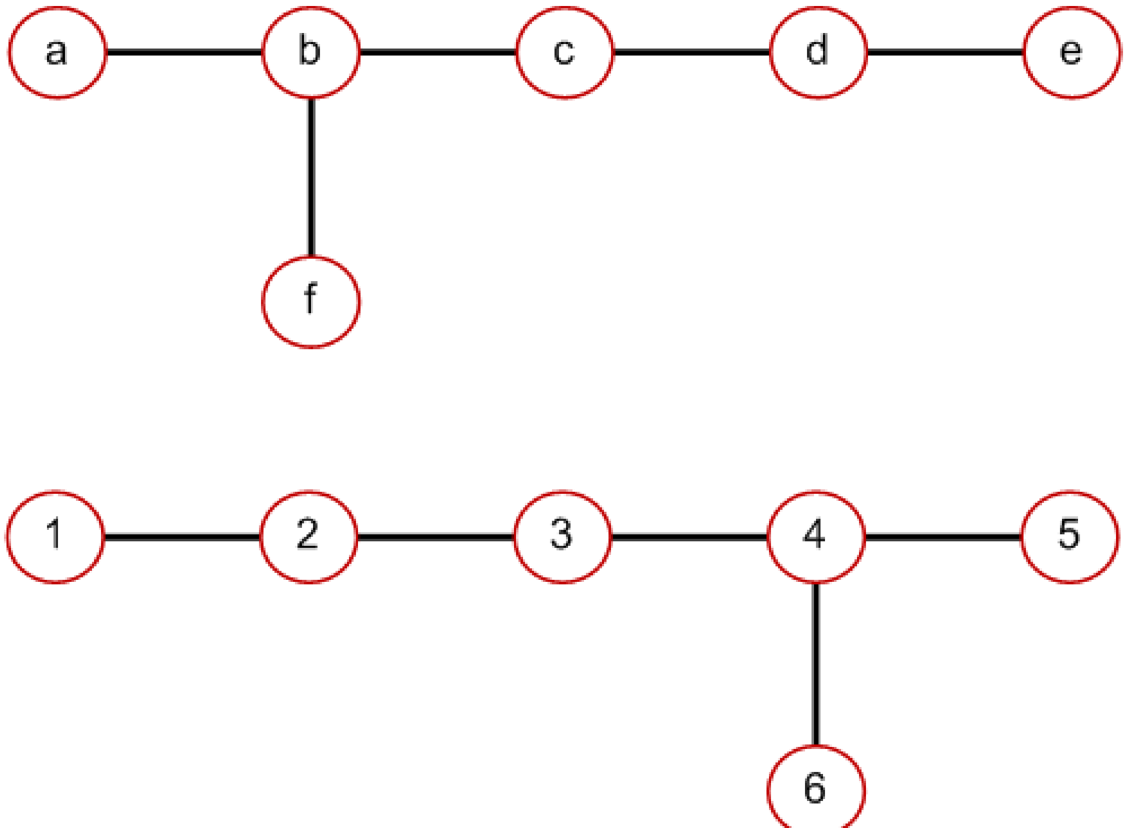
$$\mathbf{uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2}$$

pentru orice $u,v \in V_1$

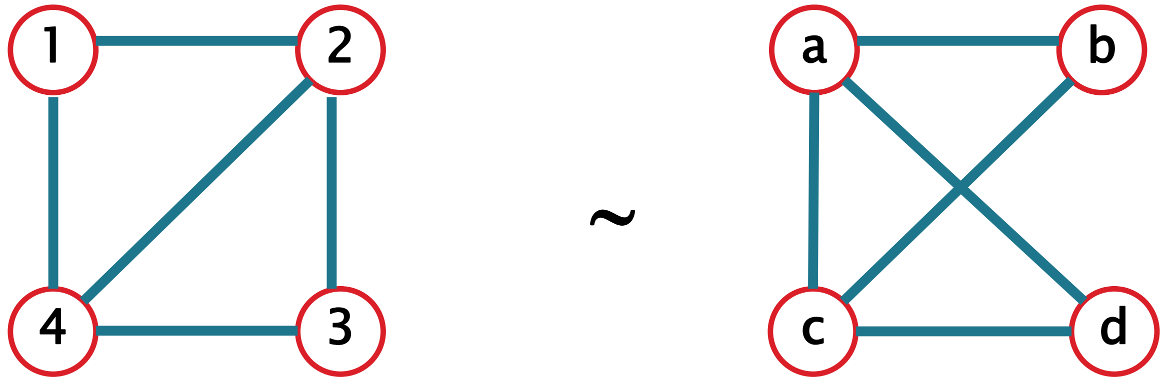
(f conservă adiacența și neadiacența)

Izomorfism

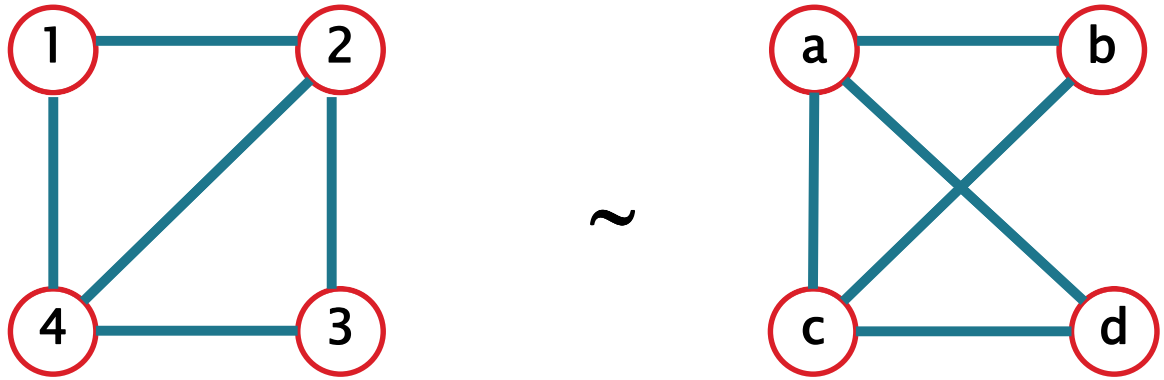
Interpretare: se pot reprezenta în plan prin același desen



Izomorfism



Izomorfism



f: 2 -> a

4 -> c

1 -> b

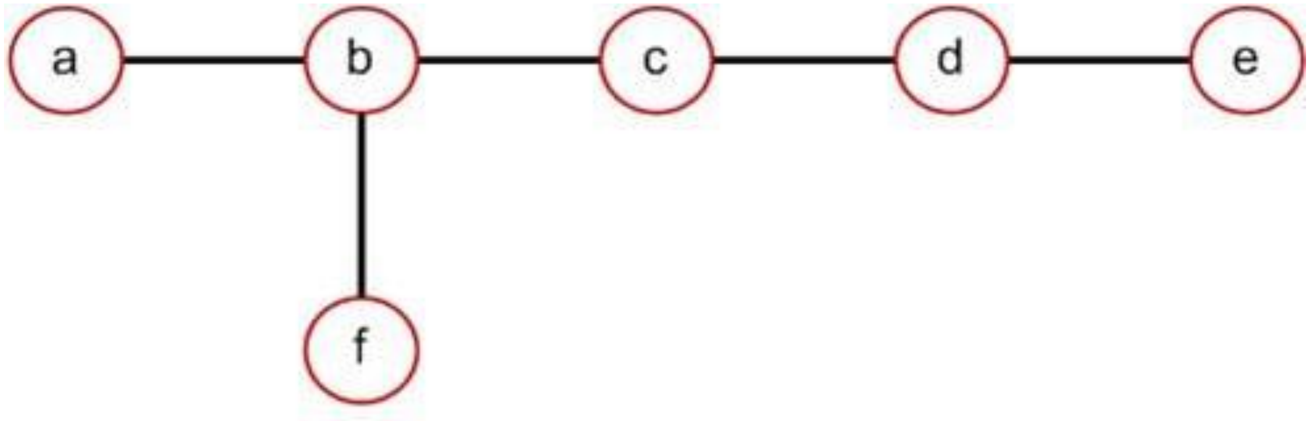
3- > d

Izomorfism

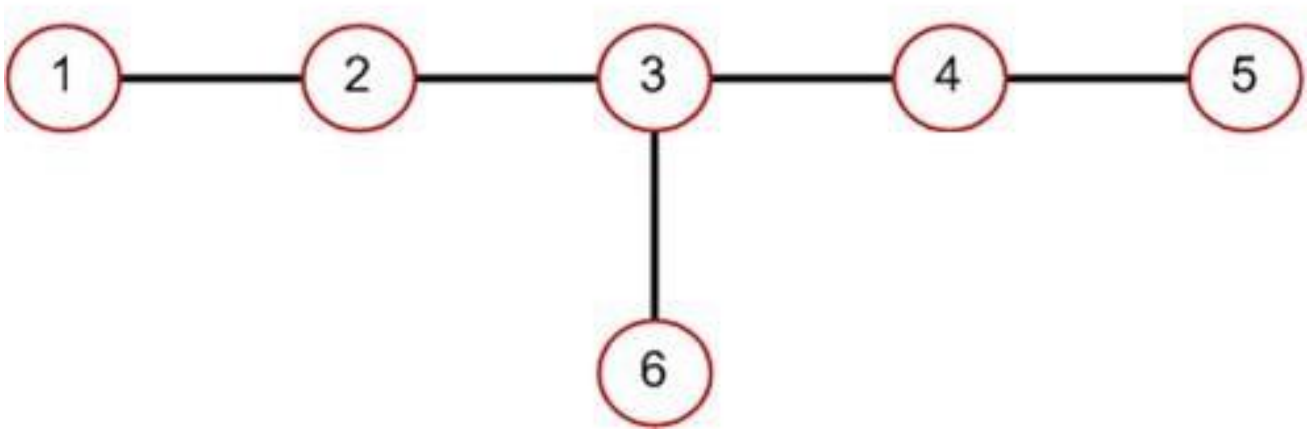
- $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$

- $s(G_1) = s(G_2) \not\Rightarrow G_1 \sim G_2$ Exemplu??

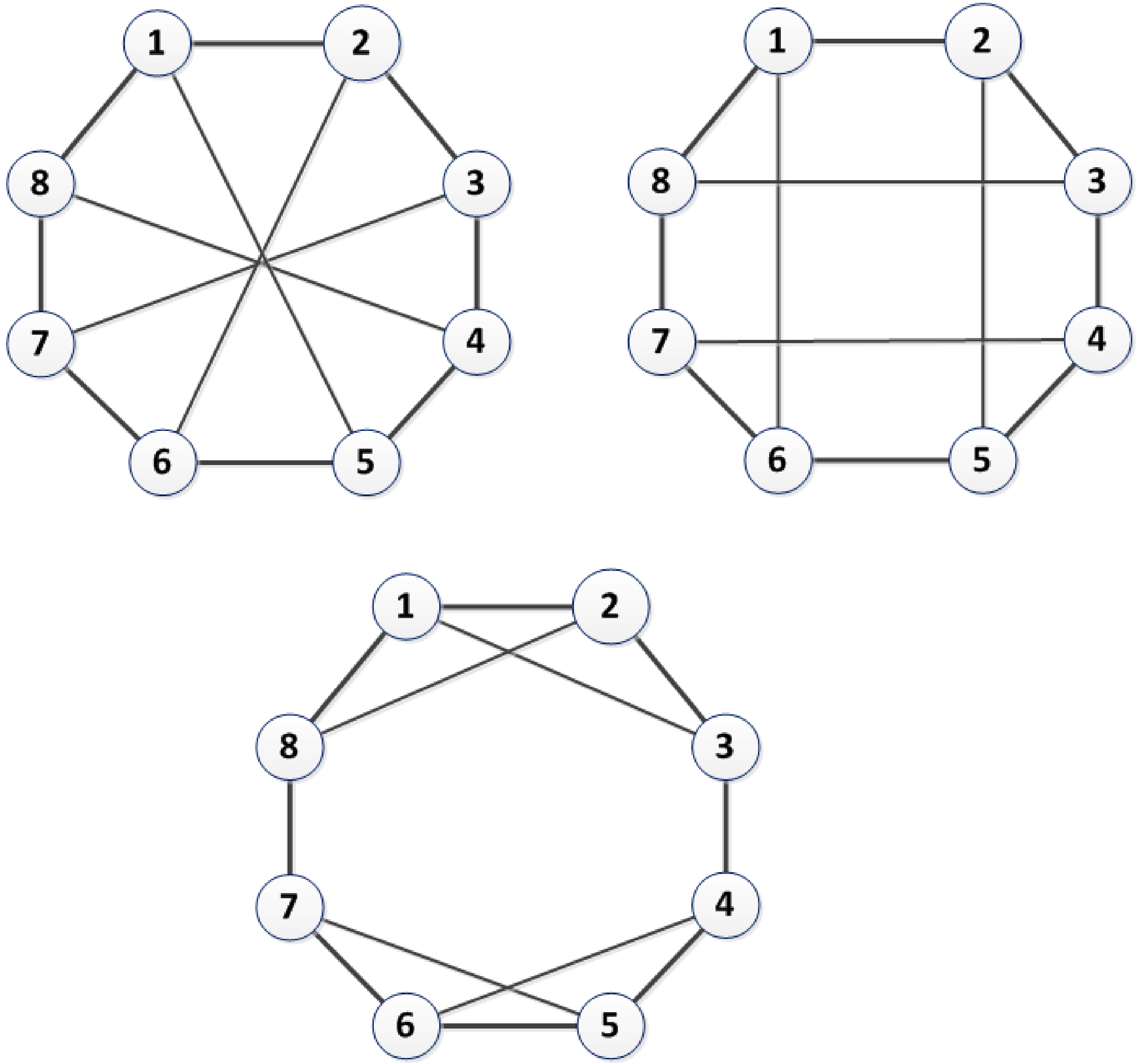
Izomorfism



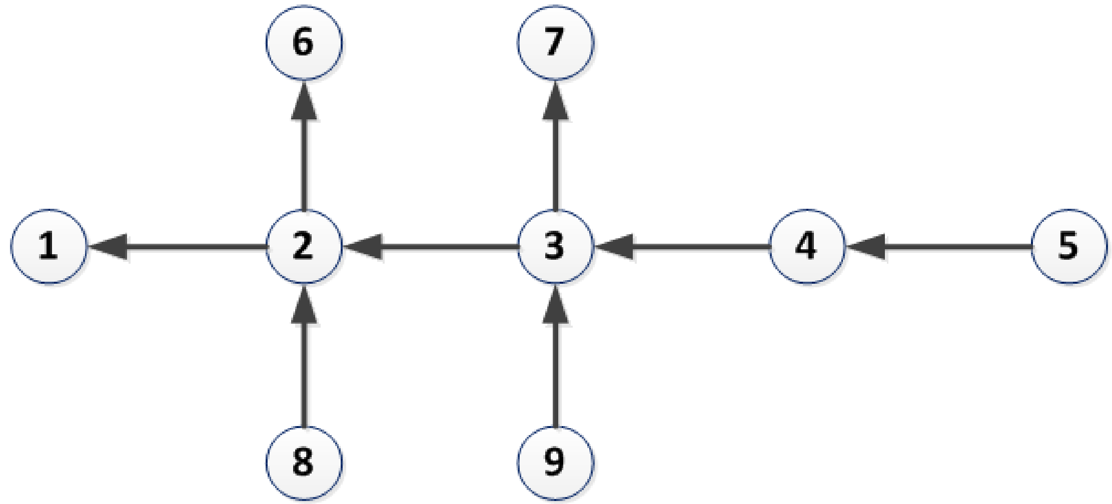
Izomorfe?

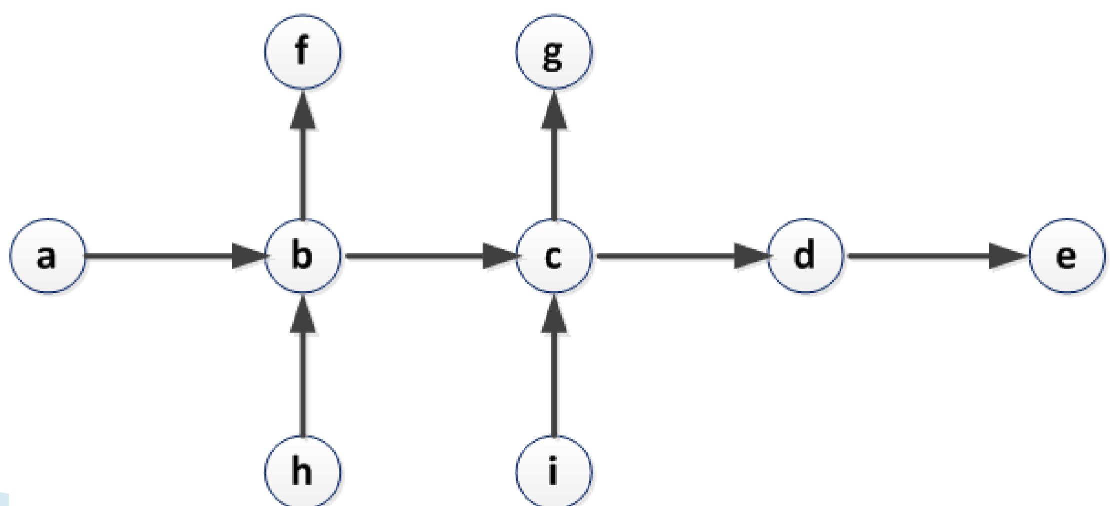


Care dintre aceste grafuri sunt izomorfe?



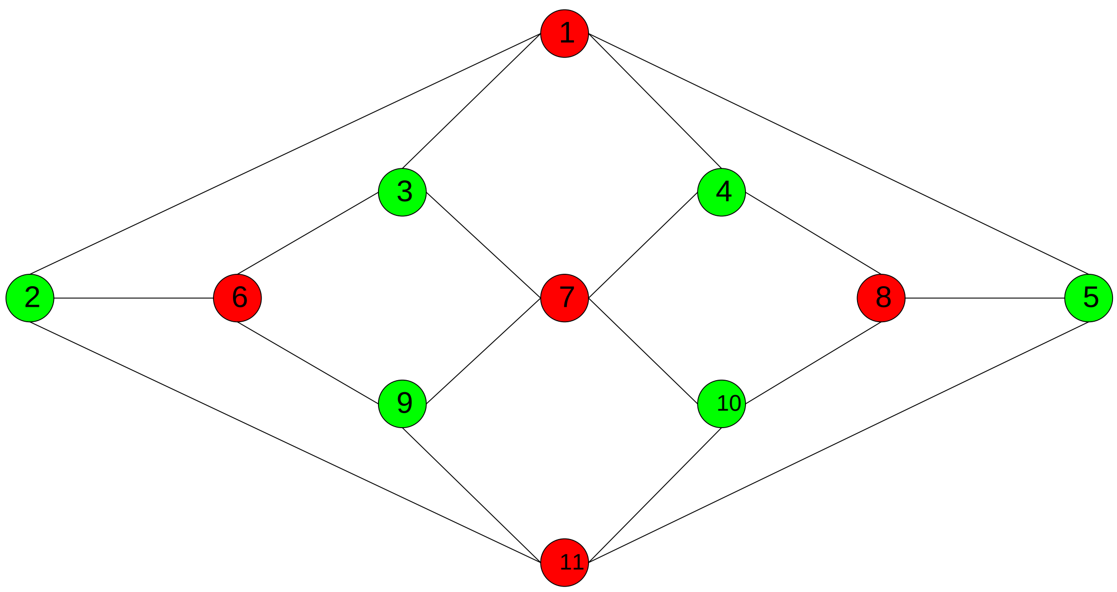
Sunt aceste grafuri izomorfe?

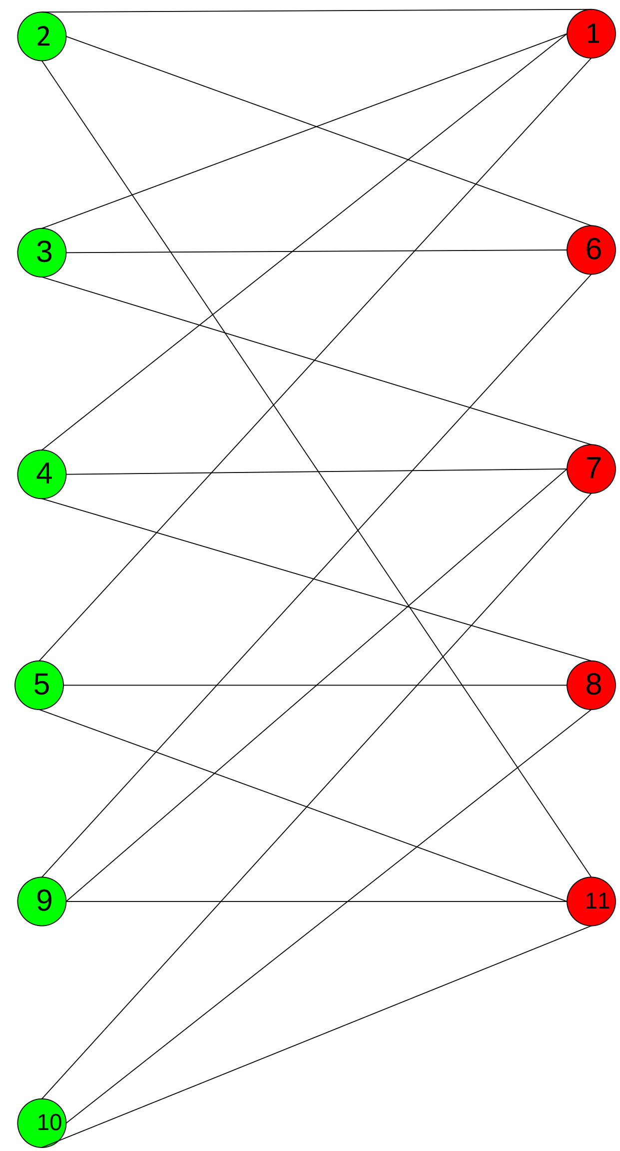




Grafuri standard

Graf bipartit





Graf bipartit

- Un graf neorientat $G = (V, E)$ se numește **bipartit** $\Leftrightarrow$ există o partiție a lui V în două submulțimi V_1, V_2 (**bipartiție**):

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2:

$$|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$$

Graf bipartit

Observație

- $G = (V, E)$ **bipartit** $\Leftrightarrow$

  există o colorare a vârfurilor cu două culori:

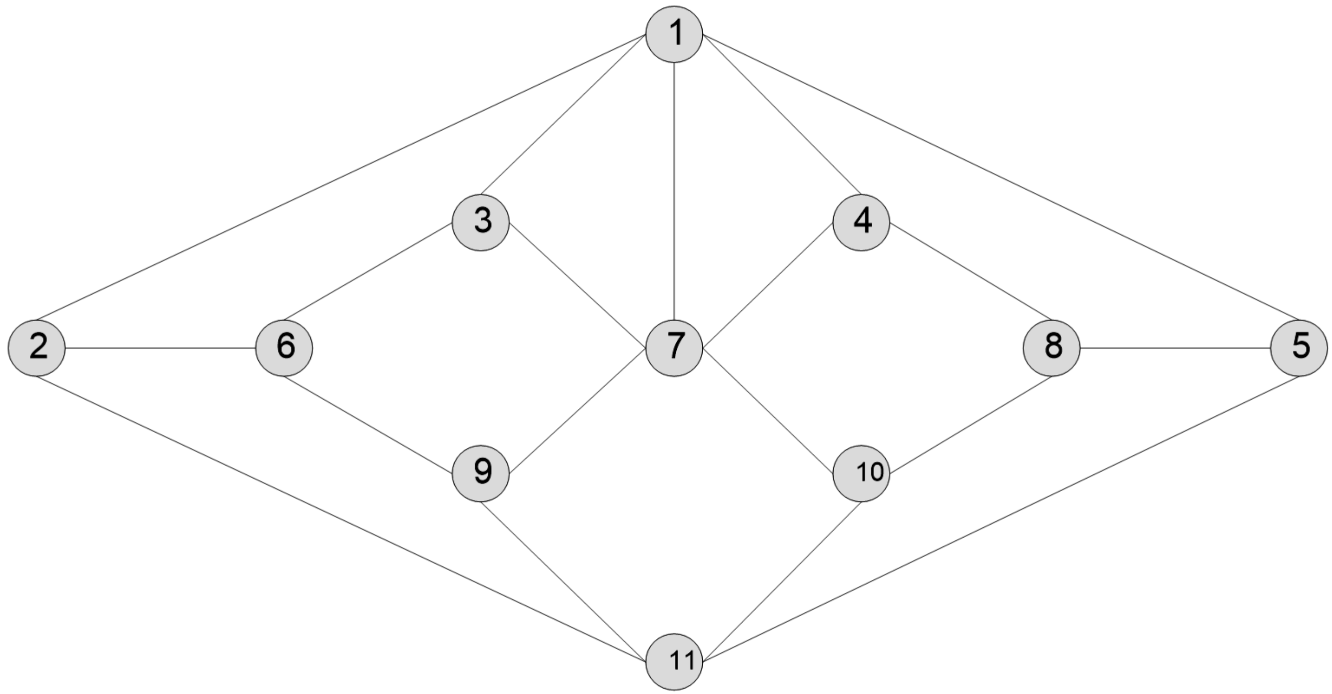
  $$c : V \rightarrow \{1, 2\}$$

  astfel încât pentru orice muchie $e=xy\in E$ avem

  $$c(x) \neq c(y)$$

  (**bicolorare**)

Graf bipartit

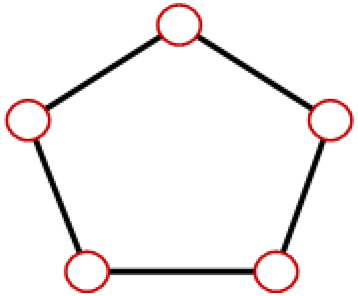


nu este bipartit

Grafuri standard

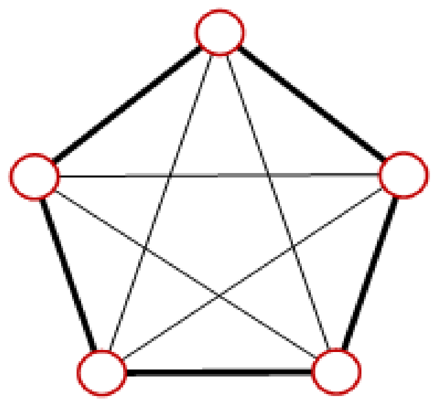
- P_n – lanţ elementar

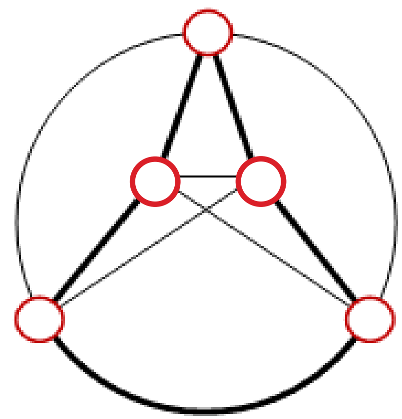
- C_n – ciclu elementar



Grafuri standard

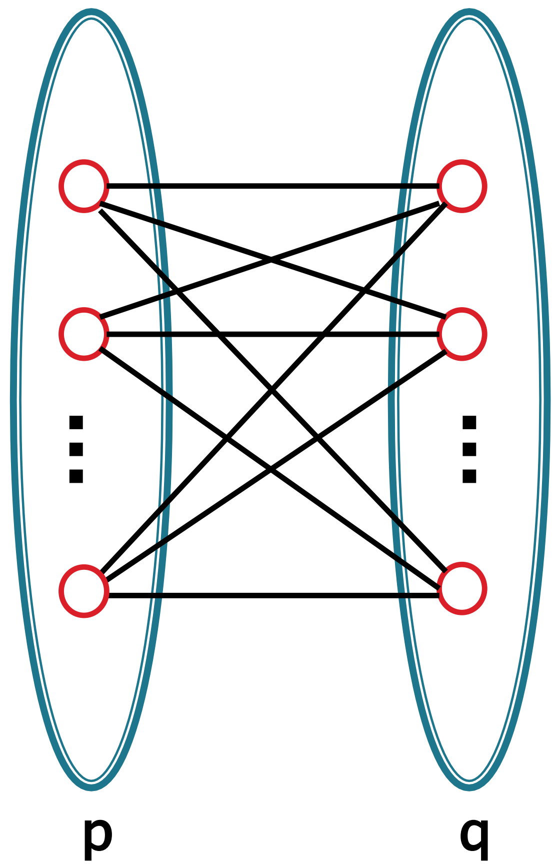
- K_n – graf complet





Grafuri standard

- $K_{p,q}$ – graf bipartit complet



Grafuri standard

- $K_{3,3}$