Breviar pentru o mare parte din cursul de LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Pentru noţiunile şi rezultatele teoretice pe care le vom folosi în exerciţiile următoare, recomandăm consultarea bibliografiei de la sfârşitul acestui text. Oferim în cele ce urmează un mic mnemonic de noţiuni şi rezultate care ne vor fi necesare pentru rezolvarea acestor exerciţii.

Vom nota cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale şi cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulţimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a, b} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$.

Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată* (i. e. mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine pe ea);
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată;*
- *funcţie izotonă* $\equiv$ *funcţie care păstrează ordinea* $\equiv$ *funcţie crescătoare;*
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană,*

precum şi definiţiile, notaţiile şi rezultatele următoare:

- se foloseşte următoarea convenţie: dacă o mulţime A este suportul unei structuri algebrice $\mathcal{A}$, atunci prin A vom înţelege deopotrivă mulţimea A şi structura algebrică $\mathcal{A}$, în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* ddacă mulţimea ei suport este nevidă, respectiv finită;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $|A|$ cardinalul lui A, iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulţimea părţilor lui A);
- pentru orice mulţimi A şi B, vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecţie cu B, care se transcrie prin: $|A| = |B|$;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulţimi*; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulţimi* (se defineşte şi A^0, care este un singleton, i. e. o mulţime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice, precum şi puterile naturale ale unei structuri algebrice;

- pentru orice mulţime A, o *relaţie binară pe* A este o submulţime a lui A^2;
- dacă A este o mulţime şi $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a\,\rho\,b$;
- pentru orice mulţime A, se notează cu Δ_A relaţia binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ şi numită *diagonala lui* A;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se zice:
  (i) *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x\,\rho\,x$;
  (ii) *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$, atunci $y\,\rho\,x$;
  (iii) *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$ şi $y\,\rho\,x$, atunci $x = y$;
  (iv) *asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;
  (v) *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x\,\rho\,y$ şi $y\,\rho\,z$, atunci $x\,\rho\,z$;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se numeşte:
  (i) *(relaţie de) preordine* ddacă este reflexivă şi tranzitivă;
  (ii) *(relaţie de) echivalenţă* ddacă este o preordine simetrică;
  (iii) *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
  (iv) *(relaţie de) ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relaţie de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x\,\rho\,y$ sau $y\,\rho\,x$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se defineşte *inversa lui* ρ ca fiind relaţia binară pe A notată cu ρ^{-1} şi dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A şi orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;
- pentru orice relaţii binare ρ şi σ pe o mulţime A, avem:
  (i) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
  (ii) $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
  (iii) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcup\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
  (iv) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecţiei cu inversarea);
- inversa unei relaţii de ordine notate $\leq$ se notează, uzual, cu $\geq$;
- pentru orice mulţime A şi orice relaţii binare ρ şi σ pe A, compunerea dintre relaţiile binare ρ şi σ se notează cu $\rho \circ \sigma$ şi se defineşte astfel: $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists\, b \in A)\,((a, b) \in \sigma \text{ şi } (b, c) \in \rho)\}$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ şi $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:
  (i) ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;

(ii) ρ este simetrică ddacă $\rho = \rho^{-1}$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se numeşte *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ cea mai mică (în sensul incluziunii) relaţie binară reflexivă/simetrică/tranzitivă pe A care include pe ρ;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;

- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

  (i) ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;
  (ii) ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;
  (iii) ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A:

  (i) $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;
  (ii) $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;
  (iii) $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \rho^n$;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $\mathrm{Eq}(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A, şi, pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, se notează cu $A/\!\sim$ *mulţimea factor a lui* A *prin* $\sim$, i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $\sim$;

- pentru orice mulţime nevidă A, o *partiţie a lui* A este o familie nevidă de părţi nevide ale lui A două câte două disjuncte şi având reuniunea egală cu A; vom nota mulţimea partiţiilor lui A cu $\mathrm{Part}(A)$;

- pentru orice mulţime nevidă A, $\mathrm{Eq}(A) \cong \mathrm{Part}(A)$, întrucât funcţia $\varphi : \mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/\!\sim$ pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, este o bijecţie; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice $\pi = (A_i)_{i\in I} \in \mathrm{Part}(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relaţia de echivalenţă pe A care are drept clase mulţimile A_i, cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$;

- pentru orice n natural nenul, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente şi cu L_n mulţimea suport a lui $\mathcal{L}_n$; cele n elemente ale lui L_n vor fi notate adecvat fiecărei situaţii în care vor apărea în cele ce urmează; $\mathcal{L}_n$ este unic modulo un izomorfism de poseturi, i. e. modulo o funcţie izotonă bijectivă şi cu inversa izotonă;

- pentru orice poset $(P, \leq)$, notăm cu $<$ relaţia de ordine strictă asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $< = \leq \setminus \Delta_P = \{(a,b) \mid a, b \in P, a \leq b, a \neq b\}$, şi cu $\prec$ relaţia de succesiune asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $\prec = \{(a,b) \mid a, b \in P, a < b, (\nexists\, x \in P)\, a < x < b\}$;

- notăm laticile sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq)$ sau $(L, \vee, \wedge)$, laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;

- legătura dintre operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;

- într–o latice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ şi} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puţin un complement;

- într–o latice mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;

- o latice este nedistributivă ddacă are o sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul;

- orice lanţ este o latice (distributivă), cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc *implicaţia booleană,* $\rightarrow$, şi *echivalenţa booleană,* $\leftrightarrow$, ca operaţii binare pe B, astfel: pentru orice $x, y \in B$:

  (i) $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$;
  (ii) $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:

  (i) $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ şi: $\overline{x} = 1$ ddacă $x = 0$, iar: $\overline{x} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latice mărginită, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia şi nu au alte complemente);
  (ii) $\overline{\overline{x}} = x$;
  (iii) $x \rightarrow y = 1$ ddacă $x \leq y$;
  (iv) $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;

- pentru orice mulţime A, $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ este o algebră Boole, unde am notat, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\overline{X} = A \setminus X$;

- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_2^n$ (puterea a n–a a lanţului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole $\mathcal{L}_2$, numită *algebra Boole standard*; dacă notăm cu $L_2 = \{0, 1\}$ mulţimea suport a lanţului cu 2 elemente, $\mathcal{L}_2$, atunci $L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}\}$ este mulţimea subiacentă a algebrei Boole $\mathcal{L}_2^n$; vom păstra aceste notaţii în cele ce urmează;

- orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$;

- se numeşte *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul $(B, \leq)$, adică un element $a \in B$ cu $0 \prec a$ (i. e. astfel încât $0 < a$ şi nu există niciun $x \in B$ cu proprietatea că $0 < x < a$);

- se numeşte *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o submulţime nevidă F a lui B închisă la conjuncţie şi la majorare, i. e. o mulţime F cu proprietăţile:

  (i) $\emptyset \neq F \subseteq B$;
  (ii) pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;
  (iii) pentru orice $x \in F$ şi orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;

  mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Filt}(\mathcal{B})$;

- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conţine elementul 1;
- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi orice $a \in B$, mulţimea notată $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, numit *filtrul principal generat de a*; notăm mulţimea filtrelor principale ale lui $\mathcal{B}$ cu $\mathrm{PFilt}(\mathcal{B})$;
- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale;
- se numeşte *congruenţă* a unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B compatibilă cu operaţiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, i. e. o relaţie binară $\sim$ pe B cu proprietăţile:

  (i) $\sim \in \mathrm{Eq}(B)$;

  (ii) pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea cu** $\vee$);

  (iii) pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea cu** $\wedge$);

  (iv) pentru orice $x, x' \in B$, dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea cu** $\bar{\cdot}$);

  notăm cu $\mathrm{Con}(\mathcal{B})$ mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$;
- referitor la definiţia anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relaţii binare $\sim$ pe B cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$ (i. e. constantele 0 şi 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, proprietăţi care sunt satisfăcute nu numai de către orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B, ci chiar de către orice relaţie reflexivă $\sim$ pe B;
- mulţimea congruenţelor unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este în bijecţie cu mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$;
- notăm cu V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic;
- notăm cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;
- notăm cu $(E/\!\sim, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, despre care ştim că este o algebră Boole;
- notăm cu $\hat{\varphi} \in E/\!\sim$ clasa unui enunţ φ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/\!\sim$;
- dată o interpretare în calculul propoziţional clasic, i. e. o funcţie $h : V \to \mathcal{L}_2$, notăm cu $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene (notaţii alternative: $h : V \to L_2 = \{0, 1\}$, $\tilde{h} : E \to L_2$);
- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\vDash \varphi$ faptul că un enunţ φ este universal adevărat (tautologie, adevăr semantic) în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\Sigma \vDash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil semantic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;

- pentru orice enunţ φ, $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, şi $\vDash \varphi$ ddacă $\emptyset \vDash \varphi$;
- se notează cu $h \vDash \varphi$, respectiv $h \vDash \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ satisface un enunţ $\varphi \in E$, respectiv o mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducţiei** pentru calculul propoziţional clasic; abreviată **TD**);
- pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$ (**lemă** din calculul propoziţional clasic);
- pentru orice $\varphi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic; abreviată **TCT**); cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numeşte **Teorema de completitudine** a calculului propoziţional clasic (**TC**).

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova (2003).

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1974, 1975, 1976).

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti (1978).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti (2010).

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti (1969).

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).