# Teorie examen analiză

## - Semestrul II -

① **Definiți suma Riemann, suma Darboux superioară și suma Darboux inferioară.**

- **Suma Riemann**

Fie $[a,b]$ un interval din $\mathbb{R}$ cu $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $d=(x_i)_{0\le i\le n}$ o diviziune a lui $[a,b]$ și $\xi=(\xi_i)_{0\le i\le n-1}\in\xi(d)$.
Numărul $\sigma_d(f,\xi):=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$ s.n. suma Riemann asociată funcției $f$, diviziunii $d$ și sistemului de puncte intermediare $\xi$.

! Pt. suma Darboux superioară și inferioară, $f$ mărginită.

- **Suma Darboux superioară**

Numărul $S_d(f)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)$, unde $M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_i,x_{i+1}]\}$ s.n. suma Darboux superioară asociată fct. $f$ și div. $d$.

- **Suma Darboux inferioară**

Numărul $s_d(f)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$, unde $m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_i,x_{i+1}]\}$ suma Darboux inferioară asociată funcției $f$ și diviziunii $d$.

② **Definiți integrala Darboux superioară, integrala Darboux inferioară și integrala superioară Riemann.**

- **Integrala Darboux superioară**

Pt. orice funcție mărginită $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, numărul $\inf_d S_d(f)$ s.n. integrala Darboux superioară a lui $f$ și se notează prin $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

- **Integrala Darboux inferioară**

Pt. orice funcție mărginită $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, numărul $\sup_d s_d(f)$ s.n. integrala Darboux inferioară a lui $f$ și se notează prin $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

- **Integrala superioară Riemann.**

③ Demonstrați că suma a 2 funcții integrabile Riemann este integrabilă Riemann.

• Propoziție

Fie $f, g$ integrabile Riemann pe $[a,b]$. Atunci $f+g$ este integrabilă Riemann și $\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$

Demonstrație

Fie $(d_n)_n$ un șir de diviziuni ale lui $[a,b]$, cu $\|d_n\| \to 0$.

Avem: $\overline{\int_a^b}(f+g)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_{d_n}(f+g) \le \lim\limits_{n\to\infty} S_{d_n}(f) + \lim\limits_{n\to\infty} S_{d_n}(g) =$

$= \overline{\int_a^b} f\,dx + \overline{\int_a^b} g\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$. (1)

$\underline{\int_a^b}(f+g)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} s_{d_n}(f+g) \le \lim\limits_{n\to\infty} s_{d_n}(f) + \lim\limits_{n\to\infty} s_{d_n}(g) =$

$= \underline{\int_a^b} f\,dx + \underline{\int_a^b} g\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \overline{\int_a^b}(f+g)\,dx = \underline{\int_a^b}(f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$

ceea ce implică faptul că $f+g$ este integrabilă Riemann și $\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$.

④ Demonstrați că o funcție integrabilă Riemann este integrabilă Darboux.

• Propoziție

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann.
Atunci pentru orice șir $(d_n)_n$ de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $\|d_n\| \to 0$ și pentru orice șir $(\xi^{(n)})_n$, cu $\xi^{(n)} \in \xi(d_n)$ avem:

$\Gamma_{d_n}(f; \xi^{(n)}) \to \int_a^b f(x)\,dx$

$s_{d_n}(f) \to \int_a^b f(x)\,dx$

$S_{d_n}(f) \to \int_a^b f(x)\,dx$, în plus avem:

$\sup\limits_d s_d(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \inf\limits_d S_d(f)$.

Demonstrație

Fie $(d_n)_n$ un șir de diviziuni ale lui $[a,b]$, cu $\|d_n\| \to 0$ și pentru fiecare $n$ fie $\xi^{(n)} \in \xi(d)$. Pentru $\varepsilon > 0$ alegem $n_\varepsilon > 0$ a.î. $\|d\| < n_\varepsilon$, $\xi \in \xi(d) \Rightarrow |\Gamma_d(f;\xi) - \int_a^b f(x)\,dx| < \varepsilon$.
Întrucât $\|d_n\| \to 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \|d_n\| < n_\varepsilon$ și deci $n \ge n_\varepsilon \Rightarrow |\Gamma_{d_n}(f;\xi^{(n)}) - \int_a^b f(x)\,dx| < \varepsilon$, ceea ce arată că $\Gamma_{d_n}(f;\xi^{(n)}) \to \int_a^b f(x)\,dx$.
Pe de altă parte, din ~~$s_{d_n}(f) = \inf_\xi \Gamma_{d_n}$, $S_{d_n}(f) = \sup$~~

$s_{d_n}(f) = \inf\limits_\xi \Gamma_{d_n}(f,\xi)$, $S_{d_n}(f) = \sup\limits_\xi \Gamma_{d_n}(f,\xi)$

deducem: $n \ge n_\varepsilon \Rightarrow |s_{d_n}(f) - \int_a^b f(x)\,dx| \le \varepsilon$

$n \ge n_\varepsilon \Rightarrow |S_{d_n}(f) - \int_a^b f(x)\,dx| \le \varepsilon$

și deci: $s_{d_n}(f) \to \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, $S_{d_n}(f) \to \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Fie acum $d$ o diviziune arbitrară a lui $[a,b]$.

Din $\|d_n\| \to 0$ rezultă $\|d_n \cup d\| \to 0$ și

$s_d(f) \le s_{d\cup d_n}(f) \le S_{d\cup d_n}(f) \le S_d(f)$ și de aici deducem, trecând la limită, $s_d(f) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S_d(f)$.

Și în plus
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s_{d_n}(f) \le \sup_d s_d(f) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \inf_d S_d(f) \le \lim_{n\to\infty} S_{d_n}(f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

5. Enunțați lema. Enunțați și demonstrați teorema lui Darboux.

- <u>Enunț lemă</u>

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită. Atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există $\eta_\varepsilon>0$ a.î.:

$\|d\|<\eta_\varepsilon \Rightarrow S_d(f)-\overline{\int_a^b} f(x)\,dx<\varepsilon$, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s_d(f)<\varepsilon$.

- <u>Teorema lui Darboux</u>

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $f$ este integrabilă Riemann;

ii) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$;

iii) pentru orice $\varepsilon>0$ există o diviziune $d$ a lui $[a,b]$, cu proprietatea $S_d(f)-s_d(f)<\varepsilon$;

iv) pentru orice $\varepsilon>0$ există $\eta_\varepsilon>0$ a.î.: $\|d\|<\eta_\varepsilon \Rightarrow S_d(f)-s_d(f)<\varepsilon$.

<u>Demonstrație</u>

i) $\Rightarrow$ ii) rezultă din faptul că dacă o funcție este integrabilă Riemann atunci este integrabilă Darboux.

ii) $\Leftrightarrow$ iv) rezultă din lemă; iv) $\Rightarrow$ iii) trivială

iii) $\Rightarrow$ i) Fie $\varepsilon>0$ și $d_0$ o diviziune a lui $[a,b]$ cu $S_{d_0}(f)-s_{d_0}(f)<\varepsilon/2$. Din lemă $\Rightarrow \exists\, \eta_\varepsilon>0$ a.î.

$\|d\|<\eta_\varepsilon \Rightarrow S_d(f)-\overline{\int_a^b} f(x)\,dx<\varepsilon/4$, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s_d(f)<\varepsilon/4$

De aici deducem că $\|d\| < \eta_\varepsilon$, $\|\delta\| < \eta_\varepsilon$ $\Rightarrow$ ~~$S_d(f) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon/4$,~~ ~~$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s_d(f) < \varepsilon/4$~~

$$S_d(f) - s_\delta(f) \le S_d(f) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s_\delta(f) +$$
$$+ \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + S_{d_0}(f) - s_{d_0}(f) < \varepsilon$$

și deci $\|d\| < \eta_\varepsilon$, $\|\delta\| < \eta_\varepsilon$, $\xi \in \varphi(d)$, $\xi' \in \varphi(\delta)$ $\Rightarrow |\sigma_d(f,\xi) - \sigma_\delta(f,\xi')| \le$
$\le S_d(f) - s_\delta(f) < \varepsilon.$

(6) **Proprietățile funcțiilor integrabile Riemann**

**Proprietăți**

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f, g: A \to \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$

- $f$ și $g$ sunt integrabile Riemann $\Rightarrow$ $f+g$ este integrabilă Riemann. $\int_A f+g = \int_A f + \int_A g$
- $f, g$ integrabile Riemann și $f \le g \Rightarrow \int_A f \le \int_A g$
  $f \le M \Rightarrow \int_A f \le M\mu(A)$
- $|\int_A f| \le \int_A |f|$
- $f$ integrabilă Riemann $\Rightarrow$ $a \cdot f$ integrabilă Riemann
  $\int_A af = a \int_A f$

(7) Demonstrați că orice funcție continuă e integrabilă Riemann

• **Propoziție**

Orice funcție continuă pe $[a,b]$ este integrabilă Riemann.

**Demonstrație**

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și fie $\varepsilon>0$. Întrucât $f$ este uniform continuă rezultă că $\exists\, \eta_\varepsilon>0$, a. î. $x',x''\in[a,b]$, $|x'-x''|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

Dacă $d=(x_i)_{0\le i\le n}$ este o diviziune a lui $[a,b]$ cu norma mai mică ca $\eta_\varepsilon$, atunci avem:

$$S_d(f)-s_d(f)=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i), \text{ unde}$$

$$M_i=\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x),\quad m_i=\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x).$$

Deoarece $x_{i+1}-x_i<\eta_\varepsilon \Rightarrow M_i-m_i\le \sup_{x,y\in[x_i,x_{i+1}]}(f(x)-f(y))\le\frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Rightarrow S_d(f)-s_d(f)\le\varepsilon$.

Integrabilitatea Riemann a lui $f$ $\Rightarrow$ din Th. Darboux.

(8) Demonstrați că orice funcție monotonă este integrabilă Riemann.

• **Propoziție**

Orice funcție monotonă pe $[a,b]$ este integrabilă Riemann.

**Demonstrație**

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție crescătoare și $\varepsilon>0$. Dacă $d=(x_i)_{0\le i\le n}$ este o diviziune a lui $[a,b]$, cu $\|d\|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$, avem $S_d(f)=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)$, $s_d(f)=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ și deci $S_d(f)-s_d(f)=$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1})-f(x_i))(x_{i+1}-x_i)\le\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1})-f(x_i))<\varepsilon$$

De aici și din criteriul lui Darboux $\Rightarrow$ că $f$ este integrabilă Riemann.

9 Enunțați și demonstrați teorema privind păstrarea integrabilității prin convergența uniformă.

## Propoziție

Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții integrabile Riemann pe $[a,b]$ care converge uniform la o funcție $f$. Atunci $f$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ și $\int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n dx$.

## Demonstrație

Fie $\varepsilon>0$ și $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $n\ge n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, $\forall x\in[a,b]$.

De aici rezultă că dacă $d_\varepsilon$ este o diviziune a lui $[a,b]$, a.î. $S_d(f_{n_\varepsilon}) - s_d(f_{n_\varepsilon}) < \varepsilon/2$ atunci din

$S_d(f) \le S_d(f_{n_\varepsilon}) + \varepsilon/4$ ; $s_d(f)\ge s_d(f_{n_\varepsilon}) - \varepsilon/4$ deducem

$S_d(f) - s_d(f) \le S_d(f_{n_\varepsilon}) - s_d(f_{n_\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Din Th. Darboux $\Rightarrow$ $f$ integrabilă Riemann.

Avem $n\ge n_\varepsilon \Rightarrow \left|\int_a^b f dx - \int_a^b f_n dx\right| \le \int_a^b |f-f_n| dx \le \varepsilon/4$

și deci $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx$

10 Enunțați și demonstrați Teorema Leibniz-Newton.

## Propoziție

Fie $f$ o funcție derivabilă pe $[a,b]$ a.î. derivata sa $f'$ să este integrabilă Riemann.

$$\int_a^b f'(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

Mai mult, pt orice diviziune $d=(x_k)_{0\le k\le n}$ a lui $[a,b]$ există un sistem $\xi=(\xi)_{0\le k\le n-1}\in \xi(d)$ a.î.:

$$\int_a^b f'(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k).$$

## Demonstrație

Fie $d=(x_k)_{0\le k\le n}$ o diviziune a lui $[a,b]$ și $\xi = (\xi_k)_{0\le k\le n-1}\in \xi(d)$ a.î.

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

De aici rezultă că:

$$f(b)-f(a) = \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1})-f(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) = \sigma_d(f';\xi)$$

Afirmația rezultă alegând un șir $(d_n)_n$ de diviziuni ale lui $[a,b]$, cu $\|d_n\|\to 0$ și observând că

$$\int_a^b f' dx = \lim_n \sigma_{d_n}(f';\xi^{(n)})$$

## 11. Demonstrați formula de integrare prin părți

- **Formula de integrare prin părți**

Fie $f, g$ 2 funcții derivabile cu derivatele $f', g'$ integrabile, atunci:

$$\int_a^b f'g\,dx = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b fg'\,dx.$$

**Demonstrație**

$$\int_a^b f'g\,dx + \int_a^b fg'\,dx = \int_a^b (fg)'\,dx = (fg)(b) - (fg)(a).$$

## 12. Enunțați formula de schimbare de variabilă.

- **Formula schimbării de variabilă**

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă și $g : [c,d] \to [a,b]$ o funcție bijectivă a.î. $g, g^{-1}$ sunt derivabile și cu derivata integrabilă. Atunci $f \circ g$ este integrabilă pe $[c,d]$ și are loc formula: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f \circ g \cdot |g'|\,dx$

13

## Definiția derivata unei funcții și derivata parțială

**• Definiția derivatei**

Fie $f: D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ și $c$ un punct de acumulare al lui $D$ care aparține lui $D$.

Dacă $\exists$ (în $\overline{\mathbb{R}}$) limita

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

se numește derivata lui $f$ în $c$ și se notează $f'(c)$.

Dacă $f'(c)$ este finită, spunem că $f$ este derivabilă în $c$.

**• Definiția derivatei parțiale**

Fie $f: D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $c$ un punct interior al lui $D$ și $u \in \mathbb{R}^p$.

Un vector $L_u \in \mathbb{R}^q$ s.n. derivata lui $f$, în punctul $c$, după vectorul $u$ (sau după direcția $u$, dacă $\|u\|=1$) dacă există limita $\lim_{t \to 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t}$ și

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t} = L_u.$$

16

## Definiți derivatele de ordin 2 și derivata parțială de ordin 2.

**• Definiție derivata de ordin 2**

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe $D$. Dacă $f'$ este derivabilă în $c \in D$, vom nota $(f')'(c) = f''(c)$ și vom numi această valoare a doua derivată a lui $f$ în $c$.

Similar se definește a $n$-a derivată a lui $f$ în $c$ $f^{(n)}(c)$.

**• Definiție derivată parțială de ordin 2**

Dacă $f$ este o funcție cu domeniul din $\mathbb{R}^p$ și codomeniul din $\mathbb{R}$, $f$ poate avea $p$ derivate parțiale (de prim ordin) notate cu $f'_{x_i}$ sau $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Fiecare dintre aceste derivate parțiale constituie o funcție cu domeniul din $\mathbb{R}^p$ și codomeniul din $\mathbb{R}$, deci poate avea la rândul ei $p$ derivate parțiale, numite derivate parțiale de ordin 2, notate $f''_{x_i x_j}$ sau cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, adică derivata parțială a lui $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ în raport cu $x_j$.

În același mod se definesc derivatele parțiale de ordin $n$.

(16) Enunțați teorema lui Schwarz și Young

Propoziție (Th. Schwarz)

Fie $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)$, unde $U$ este o vecinătate a lui $(x,y)$, pentru care $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ există în orice punct din $U$ și astfel ca $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ să fie continuă în $(x,y)$. Atunci $\exists$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ în $(x,y)$ și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Propoziție (Th. Young)

Fie $G$ un deschis din $E$, $a \in G$ și $f : G \to F$ o funcție care este derivabilă de ordin doi în pct $a$. Atunci $f''(a)$ este simetrică adică:

$f''(a)(u,v) = f''(a)(v,u)$ pt $\forall\, u, v \in E$. În plus

$$f''(a)(u,v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu+tv) - f(a+tu) - f(a+tv) + f(a)}{t^2}$$

(17) Enunțați teorema de inversiune locală

Propoziție

Fie $f$ o funcție de clasă $C^1$ pe o vecinătate a unui punct $c$ a.î. $Df(c)$ este bijectivă. Atunci $\exists$ o vecinătate $U$ a lui $c$, cu proprietatea că $V = f(U)$ este o vecinătate a lui $f(c)$, $f : U \to V$ este bijectivă, iar $g = f^{-1} : V \to U$ este continuă. Mai mult, $g$ este de clasă $C^1$ pe $V$ și dacă $y \in V$, iar $x = g(y) \in U$ atunci $Dg(y) = D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}$.

19 Enunțați th. lui Fermat în cazul funcțiilor definite pe $\mathbb{R}^n$ și demonstrați.

Propoziție

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ și $c \in \mathring{D}$. Dacă c este un punct de extrem local al lui f, iar f este diferențiabilă în c, atunci $\nabla f(c) = 0$

Demonstrație

Orice restricție a lui f la o dreaptă, care trece prin c, are un punct de extrem în c.

Din Th. Fermat $\Rightarrow$ că derivata în c după orice direcție este nulă.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(c) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla f(c) = 0.$$

20 Enunțați formula lui Taylor într-un punct

Propoziție

Fie G un deschis din E și $f: G \to F$ o funcție derivabilă de ordin doi într-un punct $a \in G$.

Atunci $f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a, x-a)$

$$+ \varepsilon_f(x) \cdot \|x-a\|^2,$$ unde $\varepsilon_f$ este continuă în a și $\varepsilon_f(a) = 0$ sau echivalent

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \left(f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a, x-a)\right)}{\|x-a\|^2}$$

(21) Condiții necesare și suficiente de extrem local

Propoziție

Fie $G$ un deschis din $B$ și $f : G \to \mathbb{R}$ o funcție reală derivabilă de ordin 2 într-un punct $a \in G$. Atunci:

- Dacă $a$ este un punct de minim local pentru $f$ atunci $f'(a) = 0$ și $f''(a) \geq 0$
- Dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) > 0$ atunci $a$ este un punct de minim local strict pentru $f$.

(22) Enunțați teorema multiplicatorului Lagrange

Propoziție

Fie $f$ și $g$ de clasă $C^1$ pe $D \subseteq \mathbb{R}^p$, cu valori în $\mathbb{R}$ și $c \in \mathring{D}$ a. î. $g(c) = 0$. Să presupunem că există $V_0$ o vecinătate a lui $c$, astfel ca $f(x) \leq f(c)$, pt $x \in V_0$ cu proprietatea suplimentară $g(x) = 0$.

Dacă $Dg(c) \neq 0$, atunci $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ astfel că:

$$Df(c) = \lambda\, Dg(c).$$

(24) **Definiția unei mulțimi elementare și a unei mulțimi măsurabile Jordan**

- **Definiție mulțime elementară**

Un interval închis din $\mathbb{R}^p$ este o submulțime $J$ a lui $\mathbb{R}^p$ de formă $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$ unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$ pt $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

- **Definiție mulțime măsurabilă Jordan**

O submulțime $Z$ a lui $\mathbb{R}^p$ s.n. de măsură Jordan nulă dacă pt $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ există o familie finită $\{\dot{J}_1, \dots, \dot{J}_n\}$ de intervale închise a.î.
$Z \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \dot{J}_k$ și $\mu(\dot{J}_1) + \dots + \mu(\dot{J}_n) < \varepsilon$.

---

Spunem că o mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ s.n. măsurabilă Jordan dacă $\mu_*(A) = \mu^*(A)$

(25) **Enunțați th. lui Darboux pt $\mathbb{R}^n$**

**Propoziție**

Fie $A \in \dot{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ mărginită, atunci:

- $f$ este integrabilă Riemann
- $\overline{S}_A f = \underline{S}_A f$
- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ o descompunere $\mathcal{A}$ a lui $A$ a.î. $S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $\delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall$ o descompunere $\mathcal{A}$ cu $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \delta_\varepsilon$

27 Enunțați teorema lui Fubini

**Propoziție**

Fie $\alpha, \beta : \Delta \to \mathbb{R}$ 2 funcții continue, unde $\Delta$ este o submulțime compactă și măsurabilă lui $\mathbb{R}^2$, a.î. $\alpha \leq \beta$ și $M = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Delta$ și $\alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Atunci, pentru orice funcție continuă $f : M \to \mathbb{R}$, avem:

$$\iiint_M f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Delta \left( \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right) dx\,dy$$

28 Enunțați teorema de schimbare de variabilă.

**Propoziție**

Fie $\varphi : G = \overset{\circ}{G} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ o funcție de clasă $C^1$ pe $G$ astfel că $\det J_\varphi(x) \neq 0$, pt $\forall x \in G$.

Dacă $\Delta$ este o submulțime compactă și măsurabilă lui $G$, iar $f : \varphi(\Delta) \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci $\varphi(\Delta)$ este măsurabilă și $\int_{\varphi(\Delta)} f = \int_\Delta (f \circ \varphi) \lvert \det J_\varphi \rvert$.