34. Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ deriv. de $(n-1)$ ori în $(a, \ldots$ și de $n$ ori în $c$.
S este polinomul Taylor de ordin $n$ asociat funcției $f$ în $c$

$$T_{f,n,c}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}\cdot(x-c)^k=$$

$$=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}\cdot(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}\cdot(x-c)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n.$$

35. Fie $D=\overset{\circ}{D}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $a\in D$ a.î. $\exists f'$ pe $D$ și $f''(a)$. Atunci,
1. Dacă $a$ este pct de min. local, $f'(a)=0$ și $f''(a)\geq 0$
2. Dacă $f'(a)=0$ și $f''(a)>0$, $a$ este pct. de min. local
3. $a$ pct. de max. local $\Rightarrow f'(a)=0$ și $f''(a)\leq 0$
4. $f'(a)=0$, $f''(a)<0 \Rightarrow a$ pct. de max. local

36. i) Teorema lui Young
Fie $D=\overset{\circ}{D}\subset\mathbb{R}^n$, $a\in D$, $f:D\to\mathbb{R}^m$ a.î. $\exists f'$ pe $D$ și $\exists f''(a)$.
Atunci, $\forall u,v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(a)=f''(a)(u,v)=f''(a)(v,u)$

ii) Teorema lui Schwarz
Fie $D=\overset{\circ}{D}\subset\mathbb{R}^n$, $a\in D$, $f:D\to\mathbb{R}^m$ și $u,v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Dacă
$\exists\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ pe $D$ și $\exists\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$ pe $D$ și este cont. în $a$ $\Rightarrow$
$\exists\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(a)$.

Scanned by CamScanner

# Enunțuri

1\. i) O structură $(S, +, \cdot, \leq)$ s.n. corp ordonat dacă:

1. $(S, +, \cdot)$ corp comutativ
2. $(S, \leq)$ mulțime total ordonată
3. dacă $x \leq y$ și $z \in S \Rightarrow x+z \leq y+z$
4. dacă $x \leq y$ și $z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$

ii) $(S, +, \cdot, \leq)$ s.n. corp complet ordonat dacă, $\forall A \subset S$ mărginită superior, există $\sup A$.

iii) Un corp ordonat $(S, +, \cdot, \leq)$ s.n. arhimedian dacă, pt $\forall x \in S$ $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $n > x$.

2) Limita unui șir

Fie $(x_n)_n$ un șir de nr. reale și $a \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul converge la $a$ și notăm $x_n \to a$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ dacă, pt $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ (rang de $\varepsilon$) a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|x_n - a| < \varepsilon$.

5) i) Distanța

Fie $X$ o mulțime și o funcție $d : X \times X \to [0, \infty)$ a.î.

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$, $\forall x,y,z \in X$

$d$ = distanța

ii) Perechea $(X, d)$ s.n. spațiu metric

iii) Un șir $(x_n)_n \subset (X, d)$ s.n. șir Cauchy dacă, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

iv) Un șir $(x_n)_n \subset (X, d)$ s.n. convergent la $a$ dacă, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow d(x_n, a) \to 0$

v) Fie $(X, d)$, $a \in X$, $r > 0$. $B(a, r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$ s.n. bila de centru $a$ și de rază $r$

- în $\mathbb{R}$, $B(a, r) = (a - r, a + r)$
- în $\mathbb{C}$, $B(a, r) = \{(z_1 - a_1)^2 + (z_2 - a_2)^2 < 1 \mid z \in \mathbb{C}\}$

7) Lim. sup.

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $u_n = \sup\limits_{k \geq n} x_k$. Atunci,

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \inf_{n\geq 1} u_n = \inf \sup_{k\geq n} x_k$$

Lim. inf.

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $v_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k$. Atunci,

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \sup_{n\geq 1} v_n = \sup \inf_{k\geq n} x_k$$

Scanned by CamScanner

8. Limita superioară este punct limită.

Consecințe: i) În $\mathbb{R}$, orice șir mărginit are un subșir convergent

ii) Orice șir Cauchy este convergent

iii) În $(\mathbb{R}^m, d_2)$, orice șir mărginit are un subșir convergent.

iv) $(\mathbb{R}^n, d_2)$ este un spațiu metric complet

9. ~~Propoz~~ Prop privind carac. limitei superioare:

Fie $(x_n)_n$ un șir mărginit de nr. reale. Atunci, $\overline{\lim}\, x_n = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 1) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n < a + \varepsilon$

2) $\exists x_{n_k} \to a$

10. Prop. lim sup și inf:

i) dacă $x_n \leq y_n$, $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$ și $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$

ii) $\overline{\lim}\,(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$

iii) $\overline{\lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$

iv) $\overline{\lim}\,(x_n + y_n) \geq \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$

v) dacă $\exists \lim x_n$, $\overline{\lim}\,(x_n + y_n) = \lim x_n + \overline{\lim}\, y_n$

vi) $\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \geq \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$

vii) $\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$

viii) $\overline{\lim}\, \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}\, x_n}$

ix) $\overline{\lim}\,(x_n \cdot y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$

12. Teorema Cesaro - Stolz

Dacă $(b_n)_n$ este un șir crescător și nemărginit și $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$,

atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$

13. i) $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ s.n. norma lui X dacă

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$

ii) $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d_{\|\ \|}(x, y) = \|x - y\|$ s.n. distanța asociată normei

1. $d_{\|\ \|}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d_{\|\ \|}(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d_{\|\ \|}(y, x)$
3. $d_{\|\ \|}(x, y) + d_{\|\ \|}(y, z) \geq d_{\|\ \|}(x, z)$

14. i) Fie X o mulțime. O mulțime $\mathcal{T} \in P(X)$ s.m. topologie dacă

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$
2. $D_1, D_2 \in \mathcal{T}_d \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}_d$
3. $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}_d \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}_d$

Scanned by CamScanner

Cauchy: Fie $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ deriv. pe $(a,b)$ și cont pe $[a,b]$ a.î. $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Atunci, $g(b) \neq g(a)$ și $\exists c \in (a,b)$ a.î.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demon: Din Lagrange, pt $g$ pe $[a,b] \Rightarrow \exists d: (a,b)$ a.î.

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(d) \neq 0 \Rightarrow g(a) \neq g(b)$$

Fie $h:[a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - \alpha \cdot g(x) \Rightarrow h$ cont pe $[a,b]$, deriv pe $(a,b)$.

$h(a) = h(b)$ (pt. a putea aplica Rolle) $\Rightarrow \alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Rolle $\to \exists c \in (a,b)$ a.î. $h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \alpha \cdot g'(c) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \alpha = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Teoremă: Fie $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $(a,b)$. Atunci, $f'$ are proprietatea lui Darboux.

Demon: $a < c < d < b$, $f'(c) < f'(d)$ și $\alpha \in (f'(c), f'(d))$

$? \Rightarrow \exists x_0 \in (c,d)$ a.î. $f'(x_0) = \alpha$.

$h: (a,b) \Rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - \alpha x$ derivabilă

$h$ este mărginită pe $[c,d]$ ($h$ continuă)

$\exists x_0 \in [c,d]$ a.î. $h(x_0) = \inf\limits_{x \in [c,d]} h(x)$

cazul 1: $x_0 \in (c,d) \Rightarrow x_0$ punct de minim local $\Rightarrow f'(x_0) = \alpha$

$h'(x_0) = 0 = f'(x_0) - \alpha$

cazul 2: $x_0 = c$

$h'(c) = f'(c) - \alpha < 0$

$h'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{h(x)-h(c)}{x-c} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ a.î., $\forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$,

$$\frac{h(x)-h(c)}{x-c} < 0$$

$x \in (c, c+\varepsilon) \Rightarrow h(x) < h(c)$

$h(c) = m = \inf\limits_{y \in [c,d]} h(y) < h(x)$

cazul 3: $x_0 = d$

=S,

E.

O

n.

Scanned by CamScanner

ii) Perechea $(X, \tau)$ s. n. spațiu topologic

iii) Spațiu topologic asociat unui spațiu metric

Notăm $\tau' = \{D \subset X \mid D \text{ deschisă}\}$ topologia asociată lui $d$ $(\tau = \tau_d)$

1. $\emptyset, X \in \tau_d$

2. $D_1, D_2 \in \tau_d \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \tau$

$a \in D_1 \cap D_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \in D_1 \in \tau \to D_1 \in \mathcal{V}_a \\ a \in D_2 \in \tau \to D_2 \in \mathcal{V}_a \end{array}\right\} \to D_1 \cap D_2 \in \mathcal{V}_a$

3. $(D_i)_{i \in I}$ familie de mulțimi deschise $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i \in \tau$

$a \in \bigcup_{i \in I} D_i \Rightarrow \exists j \in I$ a. î. $a \in D_j \Rightarrow D_j \in \mathcal{V}_a$

$D_j \subset \bigcup_{i \in I} D_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{V}_a$

iv) Fie $X \neq \emptyset$, $\tau \subset P(X)$ o topologie pe $X$

O mulțime $G \subseteq X$ s.n. deschisă dacă $G \in \tau$

O mulțime $F \subseteq X$ s.n. închisă dacă $X - F \in \tau$

v) $V \subset \mathbb{R}$ s.n. vecinătate a lui $a$ dacă $\exists\, \varepsilon > 0$ a. î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$

vi) Proprietățile vecinătăților

1. $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a$
2. $V_1 \in \mathcal{V}_a$, $V \subset V_1 \Rightarrow V \in \mathcal{V}_a$
3. $a \in V$, $\forall V \in \mathcal{V}_a$
4. $V \in \mathcal{V}_a$, $\exists\, W \in \mathcal{V}_a$ a. î. $W \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in W$

15. $\mathring{A} = \{a \in X \mid A \in \mathcal{V}_a\} = \bigcup_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D \in \tau$ interiorul lui $A$

$\overline{A} = \{a \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}_a, V \cap A = \emptyset\} = A \cup A'$ închiderea lui $A$

$A' = \{a \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}_a, V \cap (A - \{a\}) = \emptyset\}$ puncte de acumulare

$Fr(A) = \overline{A} - \mathring{A}$

$Iz(A) = \overline{A} - A'$

16. Fie $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ două spații topologice și $f: X \to Y$, $a \in X$

Spunem că $f$ cont. în $a$ dacă pt $\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$

18. Fie $(X, \tau)$ un sp. top., $f, g: X \to \mathbb{R}$ și $a \in X$. $f, g$ cont. în $a \Leftrightarrow$

1. $f$ este local mărginită
2. $|f|$ este continuă în $a$
3. $f+g$ și $f \cdot g$ cont. în $a$.

19. i) continuitatea într-un spațiu metric:

Fie $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ două spații metrice, $a \in X_1$, $f: X_1 \to X_2$.

Urm. afirm. sunt echivalente:

1) $f$ cont. în $a$
2) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a. î. $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$
3) $\forall (x_n)_n \subset X$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

Scanned by CamScanner

ii) cont. într-un spațiu topologic

Fie $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ spații top. și $f: X_1 \to X_2$. Urm. afirm. sunt echiv:

1) $f$ este cont pe $X_1$

2) $\forall D \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_1$

3) $F \in X_2$, $F$ închisă $\Rightarrow f^{-1}(F)$ închisă

20. Mărginirea funcțiilor continue

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci, $\exists c \in [a,b]$ a.î.

$$f(c) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

22. i) Mulțimi compacte în spații metrice:

Fie $(X,d)$ un sp. metric. O mulțime $A \subset X$ se num. secvențial compactă dacă $\forall (x_n)_n \subset A$, $\exists (x_{n_k})_k$ a.î. $x_{n_k} \to a \in A$

ii) în $\mathbb{R}^n$

O mulțime $A \subset (\mathbb{R}^n, d_2)$ este compactă $\Leftrightarrow$ este închisă și mărginită

23. Fie $A$ o mulțime, $(X,d)$ un spațiu metric și $f_n, f: A \to X$.

i) $f_n$ converge simplu la $f$ dacă, $\forall x \in A$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

ii) $f_n$ converge uniform la $f$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$,

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad , \forall x \in A$$

25. L'Hospital

Fie $f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ deriv pe $(a,b)$, cu $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Pp. că $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} g(x) = \alpha$ și $\alpha \in \{0; \pm\infty\}$ și $\exists \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Atunci, $\exists \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

26. i) Prima teoremă a lui Taylor

Fie $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă pe n ori pe $(a,b)$ și de n ori în c.

Atunci, $\exists \omega: (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{x \to c} \omega(x) = 0$ și

$$f(x) = T_{f,n,c}(x) + (x-c)^n \cdot \omega(x)$$

ii) Cea de-a doua teoremă a lui Taylor

Fie $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă de $(n+1)$ ori pe $(a,b)$ și $c \in (a,b)$.

$\forall x \in (a,b)$, $\exists \alpha \in (c, x)$ a.î.

$$f(x) = T_{f,n,c}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}$$

27. Teorema Cauchy-Hadamard

1. Dacă $\rho = 0$, $D = \{0\}$

Dacă $\rho = \infty$, $D = \mathbb{R}$

Dacă $\rho \in (0,\infty) \Rightarrow (-\rho, \rho) \subset D \subset [-\rho, \rho]$

Scanned by CamScanner

24. Teorema privind continuitatea limitei unui șir de funcții.

Teorema: Fie $f_n, f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ a. î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și $f_n$ cont în $c$, $\forall n \geq 1$. Atunci, $f$ cont în $c$.

Demon:
$f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a. î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$f_n$ cont. în $c \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a. î. $|x-c| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_n(x) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$|f(x) - f(c)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c)| \leq$
$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

25. Fermat: Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ și $c \in (a,b)$ a. î. $\exists f'(c)$ și $c$ să fie punct de extrem local. Atunci, $f'(c) = 0$.

Demon: Pp. că $c$ este punct de minim local $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ a. î. pt. $\forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \Rightarrow f(x) \geq f(c)$

dacă $x < c \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

dacă $x > c \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'(c) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$

$\Rightarrow f'(c) = 0$.

Rolle: Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $(a,b)$, continuă în $a$ și $b$ ($f$ cont pe $[a,b]$ și $f(a) = f(b)$). Atunci, $\exists c \in (a,b)$ a. î. $f'(c) = 0$.

Demon:
$f$ e cont pe $[a,b] \to f$ mărg. pe $(a,b)$
$M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Vom avea 3 cazuri:
1. $M > f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ a. î. $f(c) = M \Rightarrow$
$\Rightarrow c$ este pct. de extrem local $\xRightarrow{T.F.} f'(c) = 0$
2. $m < f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ a. î. $f(c) = m \Rightarrow$
$\Rightarrow c$ este pct. de maxim local $\xrightarrow{T.F} f'(c) = 0$
3. $M = m = f(a) = f(b) \Rightarrow f$ este constanta $\Rightarrow f'(c) = 0, \forall c \in (a,b)$

Lagrange: Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a. î. $f$ cont pe $[a,b]$, derivabilă pe $(a,b)$. Atunci, $\exists c \in (a,b)$ a. î. $\frac{f(a) - f(b)}{b - a} = f'(c)$

Demon: Fie $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dată de $h(x) = f(x) - \alpha \cdot x$,
$h$ cont. pe $[a,b]$, deriv. pe $(a,b)$.
$h(a) = h(b) \Leftrightarrow f(a) - \alpha a = f(b) - \alpha b \Leftrightarrow \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Rolle $\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ a. î. $h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \alpha = 0$ ↓
$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Scanned by CamScanner

2. Fie $0 < R < \rho \Rightarrow s$ este uniform conv. pe $[-R, R]$

3. $s_1(x) = \sum_{n \geq 1} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$, $\rho_1 = \rho$ ($s$ și $s_1$ au aceeași rază)

4. $s' = s_1$, $s \in C^{\infty}$ pe $(-\rho, \rho) = \mathring{D}$

$s^{(n)} = s_n$, $s_m(x) = \sum_{k \geq n} k(k-1)\dots(k-n+1) \cdot a_k \cdot x^{k-n}$

28. Derivabilitatea limitei unui șir de funcții.

Fie $f_n, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n' \xrightarrow{u} g$ și $\exists c \in (a,b)$ a.î. $(f_n(c))_{n \geq 1}$ să fie convergentă. Atunci, $\exists f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î.

1. $f' = g$
2. $f_n \xrightarrow{u} f$

29. Fie $\mathring{D} = D \subset \mathbb{R}^m$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ și $a \in D$. Spunem că $f$ este derivabilă în $a$ dacă $\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ a.î.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{d_2(x, a)} = 0 \quad (=) \quad \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

30. Prop. derivatei parțiale și ale derivatei de mai multe variabile

1. Derivata este unică
2. Dacă $\exists f'(a) \Rightarrow f$ este continuă în $a$
3. Dacă $\exists f'(a) \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n$, $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a)(v)$
4. Fie $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $f : B(a, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ și $\exists M \geq 0$ a.î. $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leq M$ pe $B(a, \varepsilon)$, Dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$ pe $B(a, \varepsilon)$ și $f$ este cont. în $a$
5. Dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\forall i = \overline{1,n}$ pe $B(a, \varepsilon)$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ cont. în $a \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \; \dots \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$

31. i) Derivata funcției compuse

Fie $f : (a,b) \to (c,d)$, $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a,b)$. Dacă $\exists f'(x_0)$ și $\exists g'(f(x_0)) \Rightarrow \exists (g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$

ii) Derivata funcției inverse

Fie $f : (a,b) \to (c,d)$ bijectivă a.î. $\exists f'(x_0) \neq 0$ și $f^{-1}$ să fie cont în $f(x_0) \Rightarrow \exists (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

32. Fermat: Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ și $a \in D$ a.î. $\exists f'(a)$ și $a$ să fie punct de extrem local. Atunci, $f'(a) = 0$.

33. Derivata de ordin 2.

Fie $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ a.î. $\exists$ în $\mathbb{R}^q$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\forall i = \overline{1,p}$, în toate punctele din $D$ și fie $c \in D$. Definim, dacă membrul drept există,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(c)$, $\forall i, j \in \{1, \dots p\}$ derivata parțială de ordin 2,

Scanned by CamScanner

17. Continuitatea funcțiilor compuse

Fie $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$, $(Z, \tau_Z)$ spații topologice

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $a \in X$

Dacă $f$ este cont. în $a$ și $g$ este cont. în $f(a)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ este cont. în $a$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

21. Def + Teorema de la uniform continuitatea fct. continue

Def: Fie $(X_1, d_1)$, $(X_2, d_2)$ spații metrice. O funcție $f: X_1 \to X_2$ s.n. uniform continuă dacă, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î.

$d_1(x, y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Teorema: Fie $A \subset \mathbb{R}$ închisă și mărginită și $f: A \to \mathbb{R}$ continuă.

Atunci, $f$ este uniform continuă.

Demonstrație:

$f$ u.c. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x, y \in A$ cu $|x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Pp. că $f$ nu e u.c. $\exists \varepsilon > 0$ a.î. $\forall \delta > 0 \Rightarrow \exists x_0, y_0 \in A$ a.î.

$|x_\delta - y_\delta| < \delta$ și $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

$u_n = x_{\frac{1}{n}}$, $v_n = y_{\frac{1}{n}}$

$(u_n)_n \subset A$ mărginită $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ a.î. $u_{n_k} \to c$

$A$ închisă $\Rightarrow c \in A$

$|u_n - v_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow v_{n_k} \to c$

$\varepsilon \leq |f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})| \leq |f(u_{n_k}) - f(c)| + |f(c) - f(v_{n_k})| \to c$

$f$ cont. în $c$ $\Rightarrow$ $0 < \varepsilon \leq 0$ contradicție $\to f$ e u.c.

4. Teorema privind convergența șirurilor monotone

T: Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Demon: Fie $(x_n)_n$ un șir crescător și mărginit de $M$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots \leq M$

Fie $a = \sup\limits_{n \geq 1} x_n$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq a$

$\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Scanned by CamScanner

Demonstrații

3. Propoziția privind șirurile conv.

Fie $(x_n)_n, (y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci,

1. $x_n \to a \Rightarrow$ șirul este mărginit
2. $x_n \to a$ și $y_n \to b \Rightarrow x_n + y_n \to a+b$
3. $x_n \to a$ și $y_n \to b \Rightarrow x_n \cdot y_n \to a \cdot b$
4. $x_n \to a \Rightarrow |x_n| \to a$
5. $x_n \to a \neq 0$ și $x_n \neq 0, \forall n \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

Demon. 3:

$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq$

$\leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| |x_n - a| < \varepsilon ( |b| + |x_n|)$

$x_n \to a \Rightarrow \exists M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

$|x_n y_n - ab| \leq \varepsilon (|b| + M)$

6. Prop. privind șirurile Cauchy și conv. într-un spațiu metric.

Fie $(X, d)$ un spațiu metric

1. $\forall$ șir conv. este Cauchy
2. $\forall$ șir Cauchy este mărginit
3. $\forall$ șir conv. este mărginit
4. $\forall$ șir Cauchy care are un subșir conv. este conv.

Demon 1:

$x_n \to a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon$ a.î. $\forall m \geq m_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

Fie $n, m \geq m_\varepsilon$. $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Demon 2:

$(x_n)_n$ șir Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon$ a.î. $\forall n, m \geq m_\varepsilon, d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\varepsilon = 1, m = m_1 \Rightarrow d(x_n, x_{m_1}) < 1, \forall m \geq m_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_n \in B(x_{m_1}, 1), \forall m \geq m_1$

$r = 2 + \max\limits_{k=1}^{m_1} d(x_n, x_{m_1})$

$\forall n, x_n \in B(x_{m_1}, r)$

Demon 3:

(1), (2) $\to$ (3)

Demon 4.

$\left.\begin{array}{l} (x_n)_n \text{ șir Cauchy} \\ \exists (x_{n_k})_k, x_{n_k} \to a \end{array}\right\} \xrightarrow{?} x_n \to a$

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon$ a.î. $\forall m \geq m_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon$ a.î. $\forall k \geq k_\varepsilon \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

Aleg un $k \geq k_\varepsilon$ și $m_k \geq m_\varepsilon \Rightarrow \forall m \geq m_\varepsilon$,

$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Scanned by CamScanner

## Integrale improprii şi proprietăţi

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a.î. $f$ să fie integrabilă pe $[a,c]$, $\forall c\in(a,b)$.
Dacă $\exists \lim_{c\nearrow b}\int_a^c f = l$ şi $l\in\mathbb{R}$, spunem că $f$ este integrabilă improprii pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f = \lim_{c\nearrow b}\int_a^c f$

Dacă $l=\infty$, $\int_a^b f=\infty$

Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integ. improprii. Atunci, $f+g$ şi $\alpha\cdot f$ sunt int. improprii şi

- $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- $\int_a^b \alpha f = \alpha\int_a^b f$

## Teorema privind variaţia unei funcţii derivabile

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă cu derivata mărginită. Atunci,
$\int_a^b |f'| \geq \bigvee_a^b(f) \geq \underline{\int_a^b} |f'|$. În particular, dacă $f'$ este int Riemann,
$\bigvee_a^b (f(x)) = \int_a^b |f'|(x)\,dx$

13 ## Variaţia unei funcţii

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\Delta = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$. Se num. variaţia diviziunii
$V_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$
$\bigvee_a^b(f) = \sup_\Delta V_\Delta(f)$, $f$ are variaţie mărginită dacă $V_a^b(f)<\infty$

Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$. Atunci,

1) $\bigvee_a^b(f+g) \leq \bigvee_a^b(f) + \bigvee_a^b(g)$
2) $\bigvee_a^b(|f|) \leq \bigvee_a^b(f)$
3) $\bigvee_a^b(c\cdot f) = |c|\cdot\bigvee_a^b(f)$
4) $\bigvee_a^b(f) = |f(b)-f(a)|$
5) $\bigvee_a^b(f\cdot g) \leq \|f\|_\infty\cdot\bigvee_a^b(g) + \|g\|_\infty\cdot\bigvee_a^b(f)$

Scanned by CamScanner

5. **Lema lui Darboux**

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită
$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_\varepsilon>0 \text{ a.î. } \|\Delta\|<\delta_\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \le S_\Delta(f) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to b} S_{\Delta n}(f) = \overline{\int_a^b}(f)$

**Teorema lui Darboux**

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărg. Urm. afirm. sunt echivalente:

1) $f$ este integrabilă Riemann
2) $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$
3) $\forall \varepsilon>0,\ \exists \Delta$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$
4) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon>0$ a.î. $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon \to S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

**Dem 3 ⇒ 2**

Fie $\Delta$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow s_\Delta(f) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f < S_\Delta(f) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon, \forall \varepsilon>0 \Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

**Dem 2 ⇒ 4**

Notăm $I = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta'_\varepsilon$ a.î. $\|\Delta\| < \delta'_\varepsilon \to S_\Delta(f) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta''_\varepsilon$ a.î. $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon \Rightarrow \underline{\int_a^b} f - s_\Delta(f) < \varepsilon$

Notăm $\delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon) \to \|\Delta\| < \delta_\varepsilon \to S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < 2\varepsilon$

**2 ⇔ 3 ⇔ 4 ⇒ 1**

$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon>0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \to S_\Delta(f) - I < \varepsilon,\ I - s_\Delta(f) < \varepsilon$

$s_\Delta(f) \le I \le S_\Delta(f)$

$s_\Delta(f) \le \sigma(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}) \le S_\Delta(f)$

$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le 2\varepsilon \Rightarrow |I - \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| \le 2\varepsilon$

Scanned by CamScanner

## 9. Păstrarea integrabilității prin convergența uniformă

1. Fie $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și $f_n$ int R, $\forall n \geq 1$.
Atunci, $f$ este int R și $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

**Demonstrație**

$$\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{u} f \\ f_n \text{ cont în } c \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ cont în } c \Rightarrow D_f \subset \bigcup_{n\geq 1} D_{f_n}$$

$f_n$ int R $\Rightarrow D_{f_n}$ neglijabilă $\mathcal{L} \Rightarrow D_f$ neg. $\mathcal{L}$

$f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ a $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\varepsilon = 1 \Rightarrow |f(x)| \leq 1 + |f_n(x)|, \forall x \in [a,b]$
$f_n$ este int. R. $\Rightarrow f_n$ este mărg $\Rightarrow f$ este mărg $\Rightarrow f$ int. R

## 10. Teorema Leibniz-Newton

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabilă cu $f'$ int R. Atunci, $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

**Demonstrație**

Fie $\Delta_n = a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_n^n = b$ a.î. $\|\Delta_n\| \to 0$

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n)\right]$$

Aplicăm T. Lagrange pt $f$ pe $[x_i^n, x_{i+1}^n] \Rightarrow \exists c_i^n \in (x_i^n, x_{i+1}^n)$ a.î.

$$f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n) = f'(c_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n)$$

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(c_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n) = \sigma_{\Delta_n}(f', (c_i^n)_{i=\overline{0,n-1}})$$

Deoarece $f'$ int. R, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f', (c_i^n)\ldots) = \int_a^b f'(x)\,dx$

Deci, $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$

## 11. Formula de integrare prin părți și de schimbare de variabilă

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile cu $f'$ și $g'$ int. Riemann.
Atunci, $\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx$

Fie $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ bij., crescătoare, derivabilă, cu $\varphi'$ continuă
Fie $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci, $f \circ \varphi$ cont. și int R și

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int_c^d f(y)\,dy$$

Scanned by CamScanner

3 [redacted] Suma a 2 funcții integrabile Riemann este integrabilă Riemann

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ int. R. Atunci, $f+g$ este int. R și $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

Demonstrație

$f$ int. Riemann $\to \exists I_f$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta'_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta'_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |I_f - \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| < \frac{\varepsilon}{2}$

$g$ int Riemann $\Rightarrow \exists I_g$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta''_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |I_g - \sigma_\Delta(g, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\sigma_\Delta(f+g, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}) = \sum_{i=0}^{n-1} (f+g)(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i) = \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)\ldots) + \sigma_\Delta(g, (\alpha_i)\ldots)$

$\|\Delta\| < \delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon) > 0$

$|I_f + I_g - \sigma_\Delta(f+g, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| = |I_f - \sigma_\Delta(f, \ldots) + I_g - \sigma_\Delta(g, \ldots)| \le$

$\le |I_f - \sigma_\Delta(f \ldots)| + |I_g - \sigma_\Delta(g, \ldots)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

4 [redacted] O funcție integrabilă Riemann este integrală Darboux

Fie $f : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ int. Riemann. Atunci, $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

Demonstrație:

$f$ este int. Riemann $\Rightarrow \exists I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |I_f - \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| < \varepsilon \quad \Rightarrow I - \varepsilon < \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}) < I + \varepsilon$

Deci, $S_\Delta(f) < I + \varepsilon$

Analog, $s_\Delta(f) > I - \varepsilon$

$I - \varepsilon < s_\Delta(f) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S_\Delta(f) < I + \varepsilon$

$0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$

$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

Scanned by CamScanner

# Teorie matematici speciale

## 1 Teorema funcțiilor implicite

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ și $(a,b) \in D$ a.î.

1) $f(a,b) = 0$
2) $f$ este $C^1$ (derivabilă cu derivata continuă)
3) $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ este inversabilă

Atunci, $\exists D_1 = \mathring{D}_1$ și $D_2 = \mathring{D}_2$ a.î. $a \in D_1, b \in D_2$, $D_1 \times D_2 \subset D$ și $\exists! \varphi : D_1 \to D_2$ a.î. $f(x, \varphi(x)) = 0$. În plus, $\exists \varphi'(a)$.

## Teorema multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ și $D \to \mathbb{R}^m$ $(m < n)$ și a un punct de extrem local al lui $f$ pe mulțimea $g(x) = 0$. Dacă $f, g \in C^1$ și rang $g' = m$ (maxim) $\Rightarrow \exists \, l \in (\lambda_1, \dots \lambda_m)$ a.î. $L'_\lambda(a) = 0$, unde $L_\lambda = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m$

## 2. Integrabilă Riemann

$f$ este integrabilă Riemann dacă $\exists I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |I - \sigma_\Delta(f, \xi_i)_{i=\overline{0,n-1}}| < \varepsilon$

$$\left( \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma(f, \xi_i)_{i=\overline{0,n-1}} = I \right)$$

## Suma Riemann

$\Delta = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\|\Delta\| = \max_{1 \le i \le n} (x_i, x_{i-1})$, și $\{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n\}$.

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\Delta \in \mathcal{D}[a,b]$ și $(\xi_i)_{i=1}^n$. Numărul real $\sigma_\Delta(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ s.n. suma Riemann asociată lui $f$, diviziunii $\Delta$ și sistemului de pct. intermed. $(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$

## Suma Darboux superioară

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită și $D = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i), \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f = \inf_D S_\Delta(f)$$

## Suma Darboux inferioară

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i), \quad m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f = \sup_D s_\Delta(f)$$

Scanned by CamScanner

[redacted]. Teorema lui Cauchy pentru un domeniu stelat

Fie $D$ un domeniu stelat în raport cu $a$ și $f$ derivabilă pe $D \setminus \{a\}$, continuă pe $D$. Atunci, $\int_\gamma f = 0$, pt $\forall$ drum închis de clasă $C^1$ pe porțiuni.

$\omega_1 = u\,dx - v\,dy = P\,dx + Q\,dy$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

[redacted]. Formulele lui Cauchy pentru disc

Fie $f : B[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ cont pe $B[a, b]$ și $f \in \theta(B(a, r))$. Atunci, $\forall z \in B(a, r)$, $\exists f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, unde $\partial B(a, r)$ este drumul $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (a + r\cos t, a + r\sin t)$

[redacted] Demonstrație

Fie $r_m \nearrow r$. Fie $g_z : B(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \begin{cases} \frac{f(u) - f(z)}{u - z}, & u \neq z \\ f(z), & u = z \end{cases}$

$g_z$ cont. pe $B(a, r)$, deriv. pe $B(a, r) \setminus \{z\}$.

$g_z(w)\,dw = 0 \rightarrow \int_{\partial B(a, r_N)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\,dw = 0$

$\int_{\partial B(a, r_m)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\partial B(a, r_m)} \frac{f(z)}{w-z}\,dw = f(z)$

$\int_{\partial B(a, r_m)} \frac{1}{w-z}\,dw = 2\pi i \cdot f(z) \rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r_m)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$

$f^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{m!\, f(w)}{w-z}\,dw$

[redacted] Teorema de derivare sub integrală

Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \in C^1$, $D = \mathring{D} \subset \mathbb{C}$ și $g : D \times K \rightarrow \mathbb{C}$ cont, $K = \gamma([a, b])$

Fie $G(z) = \int_\gamma g(z, w)\,dw$.

Dacă $\exists \frac{\partial}{\partial z} g(z, w)$ și $w \in K$ și este cont. în $z$ și $w \Rightarrow G'(z) = \int_\gamma \frac{\partial g(z, w)}{\partial z}\,dw$

$G(z) = \int_a^b g(z, \gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$

Scanned by CamScanner

## Lungimea unui drum

O funcție $f : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}^n$ continuă s.n. drum pe $\mathbb{R}^n$ dacă

$f(a)$ = capătul inițial

$f(b)$ = capătul final

$f(a) = f(b) \rightarrow$ drum închis

$f(a)$  $f(b)$

$f(a)=f(b)$ 

$\| \ \|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,\infty)$ , $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ , $d_2(x,y) = \|x-y\|_2 =$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - y_i)^2}$ .

## Lungimea unei funcții pt. un drum de clasă $C^1$.

Fie $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clasă $C^1$. Atunci, $l_f = \int_a^b \|f'(x)\|_2 \, dt$ .

## Integrala curbilinie de primul tip

$$\int_\gamma f(x,y)\,dS = \int_a^b f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt ,$$

unde $\gamma$ este un drum $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ , $t \in [a,b]$

1) $\int_\gamma (f+g)\,dl = \int_\gamma f\,dl + \int_\gamma g\,dl$

2) $\int_\gamma c \cdot f\,dl = c \cdot \int_\gamma f\,dl$

3) $\int_\gamma f\,dl = \int_{\gamma_1} f\,dl + \int_{\gamma_2} f\,dl$ , unde $(\gamma_1,\gamma_2)$ descomp. lui $\gamma$

4) $\left| \int_\gamma f\,dl \right| \leq l_\gamma \cdot \sup_{t \in f([a,b])} |f(t)|$

5) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f\,dl = \int_{\gamma_2} f\,dl$

## Integrala curbilinie de tipul II

$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ , $f : [a,b] \rightarrow \Delta$ $(f \in C^1)$

$\hookrightarrow$ drumul $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ , $t \in [a,b]$

$$= \int_a^b \left[ P(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t) \right] dt$$

1) $\int_{\gamma_-} = -\int_\gamma$

2) $\int_\gamma (w_1 + w_2) = \int_{\gamma_1} w_1 + \int_\gamma w_2$

3) $\int_\gamma a \cdot w = a \cdot \int_\gamma w$

4) $\int_{(\gamma_1,\gamma_2)} w = \int_{\gamma_1} w + \int_{\gamma_2} w$

5) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \rightarrow \int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w$

Scanned by CamScanner

## [redacted]. Teorema de identitate pentru serii de puteri

Fie $s_1 = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$ și $s_2(z) = \sum_{n\geq 0} b_n \cdot z^n$ două serii de puteri definite pe $B(0,R)$ a.î. $\exists A \subset B(0,R)$ cu $0 \in A'$ și $s_1(z) = s_2(z)$, $\forall z \in A$

## [redacted]. Integrala complexă pe drumuri

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to D$ un drum de clasă $C^1$ pe porțiuni și $f : D \to \mathbb{C}$ continuă. Integrala complexă a lui $f$ pe drumul $\gamma$ este

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

Presupunem că $\gamma \in C^1$, $\gamma = \alpha + i\beta$

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \left(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\right) \cdot \left(\alpha'(t) + i\beta'(t)\right) dt =$$

$$= \int_a^b \left[u(\gamma(t)) \cdot \alpha(t) - v(\gamma(t)) \cdot \beta'(t)\right] dt + i \int_a^b \left[u(\gamma(t)) \cdot \beta'(t) + v(\gamma(t)) \cdot \alpha'(t)\right] dt$$

$$\int_\gamma (f_1 + f_2)(z)\,dz = \int_\gamma f_1 + \int_\gamma f_2$$

## [redacted] Condiții echivalente ca o funcție să admită primitivă complexă

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D \to \mathbb{C}$ continuă. Urm. afirm. sunt echiv.:

1) $\forall \gamma : [a,b] \to D$ drum de clasă $C^1$ pe porțiuni și închis $\Rightarrow \int_\gamma f = 0$

2) $\forall \gamma : [a,b] \to D$ drum poligonal închis $\Rightarrow \int_\gamma f = 0$

3) $\exists g : D \to \mathbb{C}$ cu $g' = f$

## [redacted] Demonstrații

3) $\Rightarrow$ 1) Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ un drum de clasă $C^1$ pe porțiuni

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma g'(z)\,dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g \circ \gamma)'(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} g(\gamma(x_{i+1})) - g(\gamma(x_i)) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

$\gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow \int_\gamma f = 0$

TLN: $\gamma$ închis $\Rightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $a \in D$ fixat și $z \in D$

Fie $\gamma \in [0,1] \to D$ poligonal a.î. $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = z$

$f(z) = \int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Scanned by CamScanner

## [redacted]. Teorema Cauchy-Riemann pentru funcții $\mathbb{C}$ derivabile

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ și $f : D \to \mathbb{C}$. Urm. afirm. sunt echivalente:

1) $\exists f'(z_0)$

2) $f$ este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în $z_0$ și $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0), \quad f' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

[redacted] Demonstrație

1) $\Rightarrow$ 2) Notăm $f'(z_0) = \alpha + i\beta$

$f$ derivabilă în $z_0 \Rightarrow \exists\ \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ și $w : D \to \mathbb{C}$ a. î.

$f(z) = f(z_0) + (\alpha + i\beta)(z - z_0) + (z - z_0) \cdot w(z)$

$f(z) = f(z_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + i(\alpha(y - y_0) + \beta(x - x_0)) +$

$(u + iv)(z) = u(z_0) + iv(z_0) + \alpha(x - x_0) + \ldots + i \cdot (z - z_0) \cdot w_2(z) \cdot$

$+ (z - z_0) \cdot w_1(z)$

$u(z) = u(z_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + (z - z_0) \cdot w_1(z)$ } $\mathbb{R}$-diferențiabile

$v(z) = v(z_0) + \alpha(y - y_0) + \beta(x - x_0) + (z - z_0) \cdot w_2(z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\beta = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$f$ este $\mathbb{R}$ diferențiabilă $\Rightarrow \exists A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ și $w_1, w_2 : D \to \mathbb{R}$ a. î.

$$\begin{cases} u(z) = u(z_0) + a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) + (z - z_0) \cdot w_1(z) \\ i \cdot v(z) = v(z_0) + a_{21}(x - x_0) + a_{22}(y - y_0) + (z - z_0) \cdot w_2(z) \end{cases}$$

## [redacted] Teorema Cauchy-Hadamard pt. serii de nr. complexe

Fie $s(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$ și $\rho = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty)$, Atunci,

$D = \{z \in \mathbb{C} \mid s$ este convergentă în $z\}$

1) Dacă $\rho = 0$, $D = \{0\}$

$\rho = \infty \to D = \mathbb{C}$

2 $\quad 0 < \rho < \infty \to B(0, \rho) \subset D \subset B[0, \rho]$

2) Dacă $\rho > 0$ și $0 < R < \rho \to s$ este uniform absolut convg. pe $B(0, R)$

$\ldots z^{n-1} \Rightarrow \rho_1 = \rho$

3) $s_1(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n \cdot z^n)' = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot n \cdot z^{n-1} \Rightarrow \rho_1 = \rho$

4) $\Rightarrow s' = s_1$

5) $\Rightarrow s^{(n)}(z) = \sum_{k \geq 0} (a_k \cdot z^k)^{(n)} = \sum_{k \geq n} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k - n + 1) \cdot z^{n-k}$

$z = 0 \to s^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$

Scanned by CamScanner

## Reziduul unei funcții $\mathbb{C}$-derivabile

Prin reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul sau punctul singular esențial $z=a$, notat $\text{rez} f(a)$, înțelegem $\text{rez}(a) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma f(z)\,dz$

- $z_0$ = punct înlăturabil dacă $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C} \Rightarrow \text{Rez}(f, z_0) = 0$
- $z_0$ = pol de $\underbrace{\text{ordinul}}_{\text{(multiplicitatea rădăcinilor)}}$ $p$ dacă $\exists \lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$
- $z_0$ = punct esențial dacă $\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$

## Teorema reziduurilor

Fie $D$ un domeniu stelat a.î. $a_1, a_2, \dots a_n \in D$, $f \in \mathcal{O}(\Delta \setminus \{a_1, \dots a_n\})$, $\gamma : [a,b] \to \Delta \setminus \{a_1, \dots a_n\}$ un drum închis de clasă $C^1$ pe porțiuni.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} n_\gamma(a_i) \cdot \text{Rez}(f, a_i)$$

## Teorema lui Rouché

Fie $f, g \in \mathcal{O}(B(a,r)) \cap C(\overline{B(a,r)})$.

Dacă $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$, $\forall z \in \partial B(a,r)$, atunci

$$\partial(f, \Delta) = \theta(g, \partial)$$

## Dreptunghi

O mulțime $\Delta = \times_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ s.m. dreptunghi ($a_i < b_i$, $\forall i = \overline{1,n}$)

$$\overline{\Delta} = \times_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \text{dreptunghi închis}$$

$$\mathring{\Delta} = \times_{i=1}^{n} (a_i, b_i) = \text{dreptunghi deschis}$$

## Mulțime elementară

O mulțime $E = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$ s.m. elementară, unde $\Delta_i$ dreptunghi;

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \text{mulțime elementară}$$

## $\mu^*, \mu_*$

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. Atunci,

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \\ A \subset E}} v(E)$$

$$\mu_*(A) = \sup_{\substack{E \subset A \\ E \text{ elementară}}} v(E)$$

$$\mu^*(A) \geq \mu_*(A)$$

Scanned by CamScanner

## 6. Criteriul lui Lebesgue

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărg., int. R. Atunci, $D_f$ (mulț. pct. de discont. ale lui $f$) este neglijabilă

## 7. Teorema privind integrabilitatea funcțiilor continue și monotone

**$f$ continuă. Atunci, $f$ int. R.**

Fie $f$ mărg. și cont.
$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall x,y\in[a,b]$, cu $|x-y|<\delta_\varepsilon$, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Fie $\Delta$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$
Fie $x,y\in[x_i,x_{i+1}]$ $\to |x-y|\le|x_{i+1}-x_i|\le\|\Delta\|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$M_i-m_i=\sup|f(x)-f(y)|\le\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)\le\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}x_{i+1}-x_i=\varepsilon\cdot(b-a)$

Deci, $f$ este int. R.

**$f$ mărg. Atunci, $f$ int R**

Fie $f$ cresc. $\Rightarrow M_i=f(x_{i+1})$ și $m_i=f(x_i)$

$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1})-f(x_i))(x_{i+1}-x_i)\le$

$\le\|\Delta\|\cdot[f(b)-f(a)]$

$\varepsilon>0$. $\delta_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$

$\|\Delta\|\le\delta_\varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f)-s_\Delta(f)\le\|\Delta\|\cdot f(b)-f(a)\le\dfrac{\varepsilon(f(b)-f(a))}{f(b)-f(a)+1}\le\varepsilon$

## 8. Proprietățile funcțiilor int. Riemann

1. $S_\Delta(c\cdot f)=\begin{cases}c\cdot S_\Delta(f), & c>0\\ c\cdot s_\Delta(f), & c<0\end{cases}$, $s_\Delta(c\cdot f)=\begin{cases}c\cdot s_\Delta(f), & c>0\\ c\cdot S_\Delta(f), & c<0\end{cases}$

2. Dacă $f<g \Rightarrow \underline{\int_a^b} f\le\underline{\int_a^b} g$ și $\overline{\int_a^b} f\le\overline{\int_a^b} g$

3. $S_\Delta(f+g)\le S_\Delta(f)+S_\Delta(g)$; $s_\Delta(f+g)\ge s_\Delta(f)+s_\Delta(g)$
$\overline{\int_a^b}(f+g)\le\overline{\int_a^b} f+\overline{\int_a^b} g$; $\underline{\int_a^b}(f+g)\ge\underline{\int_a^b} f+\underline{\int_a^b} g$

4. $S_\Delta(|f|)-s_\Delta(|f|)\le S_\Delta(f)-s_\Delta(f)$

5. $S_\Delta(f\cdot g)-s_\Delta(f\cdot g)\le\|g\|_\infty[S_\Delta(f)-s_\Delta(f)]$, $\|f\|_\infty[S_\Delta(g)-s_\Delta(g)]$,
$\|g\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$

Scanned by CamScanner

[redacted] **Lema lui Fubini**

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $B \in J(\mathbb{R}^m)$ și $f: A\times B \to \mathbb{R}$ mărginită. Atunci,

$$\overline{\int}_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy \geq \overline{\int}_A \left(\overline{\int}_B f(x,y)\,dy\right) dx$$

[redacted] **Teorema lui Fubini**

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $B \in J(\mathbb{R}^m) \Rightarrow A\times B \in J(\mathbb{R}^{m+n})$ și $f: A\times B \to \mathbb{R}$ int. R.

Fie $\mathcal{F}, \mathcal{I}: A \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(x) = \overline{\int}_B f(x,y)\,dy$, $\mathcal{I}(x) = \underline{\int}_B f(x,y)\,dy$.

Atunci, $\mathcal{F}$ și $\mathcal{I}$ int. R. și

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \mathcal{F}(x)\,dx = \int_A \left(\overline{\int}_B f(x,y)\,dy\right) dx = \int_A \mathcal{I}(x)\,dx$$

[redacted] **Teorema lui Green**

Fie $w$ o formă diferențiabilă ($w = P\,dx + Q\,dy$), $w: [0,1]^2 \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Demo

$$\int_{[0,1]^2} dw = \int_{\partial[0,1]^2} w \,; \qquad dw = \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy$$

[redacted] **Demonstrație**

$C1: \; w = P\,dx \to dw = -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$

$C2: \; w = Q\,dy \to dw = \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$

$$C1: \int_{[0,1]^2} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right) dx = \int_0^1 -P(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \int_{\gamma_3} w + \int_{\gamma_1} = \int_{\partial[0,1]^2} w \quad (1)$$

$$\int_{\gamma_2} w = \int_0^1 P(1,t)\,dt = 0$$

Analog $\int_{[0,1]^2} Q\,dy = \int_{\partial[0,1]^2} w \quad (2)$

(1) și (2) $\to$ ceea ce tb. dem.

[redacted] **Integrala de suprafață de primul și al II-lea tip**

Se spune că $f$ este integrală de suprafață dacă există un nr. real $I$ a.î. $\forall (\Delta_m)$ cu $\|\Delta_m\| \to 0$ să avem

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_{\Delta_m}(f, \xi_m, \eta_m, \zeta_m) = I = \iint_S F(x,y,z)\,d\sigma$$

Scanned by CamScanner

## Transformarea Laplace

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $F(p) = L(f(t))(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt$, $p \in \mathbb{C}$,

$F: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $D = \{ p \mid \exists\, L(f(t))(p) \}$

O funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s.m. funcție original dacă

1) $f(t) = 0$, $\forall t < 0$

2) $f$ este int pe $[0, a]$, $\forall a > 0$

3) $|f(t)| < M \cdot e^{s_0 t}$, $M > 0$, $s_0 > 0$

## Proprietăți:

1) liniaritate: $L(\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot f(t)) = \alpha L(f(t)) + \beta \cdot L(f(t))$

2) deplasare: $L(f(t - \tau)) = \int_0^\infty f(t-\tau) \cdot e^{-pt}\, dt = \int_{-\tau}^\infty f(u) \cdot e^{-pu - p\tau}\, du =$

$= e^{-p\tau} \cdot L(f(t))(p)$, unde $t = \tau + u \Rightarrow u = t - \tau$

3) $L(f(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$

4) $L(f'(t))(p) = p \cdot L(f(t))(p)$

$L(f^{(n)}(t))(p) = p^n L(f(t))(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)} \cdot f(0)$

## Formula de schimbare de variabilă pentru integrala multiplă

$L\left(\int_0^t f(t)\, dt\right) = \frac{1}{p} \cdot L(f(t))$

$g(t) = \begin{cases} \int_0^u f(t)\, dt, & u > 0 \\ 0, & u \le 0 \end{cases}$

$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt$

$F'(p) = \frac{\partial}{\partial p} \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt = L \cdot (-t \cdot f(t))(p)$

Scanned by CamScanner

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, $f$ cont.

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy$

$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$ dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial x}$ și e cont.

## [redacted] Inegalitățile lui Cauchy

Fie $f : \overline{B(a,r)} \to \mathbb{C}$ a.î. $f \in C(\overline{B(a,r)}) \cap \mathcal{O}(B(a,r)) \Rightarrow$

$\Rightarrow |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M$, unde $M = \sup_{|z|=r} |f(z)|$

### [redacted] Demonstrație

Fie $z = a \Rightarrow |f^{(n)}(a)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dz \right| \leq$

$\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot l_{\partial B(a,r)} \cdot \sup_{|z|=r} \left| \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \right| = \frac{n!}{r^n} \cdot M$

## [redacted] Teorema lui Liouville

Fie $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mărginită. Atunci, $f$ = constant

### [redacted] Demonstrație

$|f'(z)| \leq \frac{M}{r} \to 0$, unde $M \geq |f(z)| \Rightarrow f'(z) = 0$, $\forall (z) \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ e constant.

## [redacted] Teorema privind analiticitatea funcțiilor olomorfe

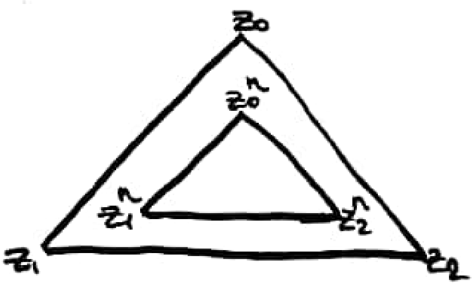
Fie $P \in \mathbb{C}[x]$ cu grad $P \geq 1$. Atunci, $\exists z \in \mathbb{C}$ a.î. $P(z) = 0$.

## [redacted] Lema lui Weierstrass

Fie $f_n \in C(\overline{B(a,r)}) \cap \mathcal{O}(B(a,r))$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} g$ pe $\partial B(a,r)$, unde $g : \partial B(a,r) \to \mathbb{C}$. Atunci, $\exists f \in \mathcal{O}(B(a,r))$ a.î. $f_n \to f$ uniform pe mulțimi compacte pe $B(a,r)$.

## [redacted] Lema lui Goursat (Cauchy pentru un $\Delta$)

Fie $f \in C(T(z_0,z_1,z_2)) \cap \mathcal{O}(\mathrm{Int}(T(z_0,z_1,z_2))) \Rightarrow \int_{\partial T} f = 0$




Scanned by CamScanner

[redacted] <u>Volumul unui dreptunghi</u>

$v(\Delta) = v(\bar{\Delta}) = v(\mathring{\Delta}) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

[redacted] <u>Volumul unei mulțimi elementare</u>

$v(E) = \sum_{i=1}^{n} v(\Delta_i)$ dacă $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, $i \neq j$.

[redacted]. <u>Spațiu cu măsură aditivă</u>

$(\mathbb{R}^n, j(\mathbb{R}^n), \mu)$

[redacted]. <u>Mulțime măsurabilă Jordan</u>

O mulțime mărginită din $\mathbb{R}^n$ s.n. măsurabilă Jordan dacă $\mu^*(A) = \mu_*(A)$

[redacted] <u>Prop. privind măsura sup/inf a reuniunii, intersecției și diferenței a două mulțimi</u>

$A, B \in \mathbb{R}^n$. Atunci,

1) $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$

2) $\mu_*(A \cup B) + \mu_*(A \cap B) \geq \mu_*(A) + \mu_*(B)$

3) $\mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*(A) - \mu_*(B)$

4) $\mu_*(A \setminus B) \geq \mu_*(A) - \mu^*(B)$

Dacă $A, B \in j(\mathbb{R}^n) \rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in j(\mathbb{R}^n)$

[redacted]. <u>Propoz. care arată că $j(\mathbb{R}^n)$ este un inel de mulțimi</u>

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ și $B \subset \mathbb{R}^m$ mărg. Atunci,

1) $\mu^*(A \times B) \leq \mu^*(A) \cdot \mu^*(B)$

2) $\mu_*(A \times B) \geq \mu_*(A) \cdot \mu_*(B)$

Dacă $A \in j(\mathbb{R}^n)$ și $B \in j(\mathbb{R}^m)$, $A \times B \in j(\mathbb{R}^{n+m})$ și $\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$

[redacted]. <u>Carac. mulțimilor măsurabile Jordan în raport cu frontiera</u>

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărg. Atunci, $\mu^*(\bar{A}) \leq \mu^*(Fr(A)) + \mu_*(\mathring{A})$

Fie $A \in j(\mathbb{R}^n)$. Urm. afirm. sunt echiv.:

1) $A \in j(\mathbb{R}^n)$

2) $\bar{A}, \mathring{A} \in j(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mu(\bar{A}) = \mu_*(\mathring{A})$

3) $\mu(Fr(A)) = 0$

Scanned by CamScanner

[redacted] Teorema Leibniz-Newton pentru integrale curbilinii

Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ și $\gamma : [a,b] \to D$ drum cu clasă $C^1$ pe porțiuni. Atunci, $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

[redacted] Demonstrație

CAZ I : Pp. că $\gamma \in C^1$

$$\int_\gamma df = \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) \, dt =$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) \, dt = \int_a^b f' \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) \, dt =$$

$$= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) \, dt = f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a)$$

CAZ II : $\gamma$ drum de clasă $C^1$ pe porțiuni

$\exists \Delta = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ a.î. $\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]}$ să fie de clasă $C^1$

$$\int_\gamma df = \sum_{i=0}^{n+1} \int_{\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]}} df = \sum_{i=0}^{n+1} f(\gamma(x_{i+1})) - f(\gamma(x_i)) =$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

[redacted]. Condiții echivalente ca o formă diferențială să admită primitivă

Fie $D$ un domeniu și $\omega$ o formă dif. pe $D$. Urm. afirm. sunt echiv.:

1) $\exists f : D \to \mathbb{R}$ a.î. $\partial f = \omega$

2) $\forall \gamma : [a,b] \to D$ $(\in C^1)$ închis, $\int_\gamma \omega = 0$

3) $\forall \gamma_1 : [0,1] \to D$ și $\gamma_2 : [0,1] \to D$ $(\in C^1)$ a.î. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ și $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

[redacted] Lema lui Poincaré

Fie $D = \mathring{D}$ un domeniu stelat în raport cu $a \in D$ și $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i \, dx_i$ o formă dif. de clasă $C^1$ și închisă $\left( \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}, \forall i,j = \overline{1,n}, i \neq j \right)$.

Atunci, $\omega$ este exactă, adică $\exists f : D \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ a.î. $\partial f = \omega$.

[redacted] Funcții $\mathbb{C}$ derivabile

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{R}$ și $z_0 \in \mathbb{C}$. Spunem că $f$ derivabilă în $z_0$ dacă

$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0}}_{\omega(z)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^z = c \cdot f(z)$$

Scanned by CamScanner

$$\iint_S f(x,y,z)\, d\sigma \longrightarrow \iint_D f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{p^2+q^2+1}, \text{ unde}$$

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

sferă

$$\longrightarrow \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{E\cdot G-F^2}\, du\, dv,$$

unde

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$$

$$G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$$

$$F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v$$

$$u=\theta,\ v=\varphi,\ \rho \to R$$

$$\iint_{S=Fr K} P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy = \iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

## [redacted] Existența locală și globală pentru ec. diferențiale

Fie $f:[a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ cont a.î. $\exists\, c>0$ a.î.

$|f(x,y)-f(x,y_1)| < c|y-y_1|,\ \forall y, y_1 \in [c,d],\ \forall x \in [a,b]$

Fie $x_0 \in (a,b)$ și $y_0 \in (c,d)$. Atunci, $\exists\, \varepsilon>0$ a.î.

$\exists!\, y:[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \to [c,d]$ a.î. $y'(x) = f(x, y(x))$.

## [redacted] Teorema privind existența și unicitatea pt. ec. diferențiale

Fie $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont. a.î. $\exists\, c>0$ cu prop. că

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < c|y_1-y_2|,\ \forall x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Fie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Atunci, $\exists!\, y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont a.î. $y'(x) = f(x,y(x))$

## [redacted] Existența și unicitatea pentru cazul global

Fie $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ cont, $x_0\in(a,b)$, $y_0 \in (c,d)$. Atunci,

$\exists\, \varepsilon>0$ și $\exists!\, y:[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\to\mathbb{R}$ a.î. $y'(x) = f(x,y(x))$,

$\forall x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, $y(x_0)=y_0$.

Scanned by CamScanner

45. Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ mărg., $\mathcal{A}$ o descompunere Jordan a lui A

**Suma Darboux superioară**

$$\overline{\int}_A f = \overline{\int}_A f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{A}} S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i \in I} M_i \cdot \mu(A_i) \quad , \; M_i = \sup f(A_i)$$

$$S_{\mathcal{A}}(f) = \sup_{(\alpha_i)_{i\in I}} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i \in I})$$

**Suma Darboux inferioară**

$$\underline{\int}_A f = \underline{\int}_A f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{A}} s_{\mathcal{A}}(f)$$

$$s_{\mathcal{A}}(f) = \sup_{(\alpha_i)_{i\in I}} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} m_i \cdot \mu(A_i) \quad , \; m_i = \inf_{x \in A_i} f(x)$$

**Suma Riemann**

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i\in I}) = \sum_{i \in I} f(\alpha_i) \cdot \mu(A_i) \quad , \; \alpha_i \in A_i$$

**Integrala unor funcții de mai multe variabile**

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{A}\| \to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i \in I})$$

**1) Lema lui Darboux și 2) T. lui Darboux pt. funcții de mai multe variabile**

1) Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ mărg. și $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow S_{\mathcal{A}}(f) - \overline{\int}_A f < \varepsilon$

2) Urm. afirm. sunt echivalente:

1) $f$ este int. Riemann

2) $\overline{\int}_A f = \underline{\int}_A f$

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ a.î. $S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall \mathcal{A}$ cu $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$

**Teorema lui Lebesgue pentru funcții de mai multe variabile**

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ mărg.

$f$ este int. Riemann $\to D_f$ sunt neglijabile Lebesgue

**Teorema privind păstrarea continuității prin convergență uniformă pt. funcții de mai multe variabile.**

- Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ uniform cont. Atunci, $f$ int. R.
- Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ mărg. a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și $f_n$ int. R. Atunci, și $f$ este int R. și $\int_A f_n \to \int_A f$.

Scanned by CamScanner