Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea I

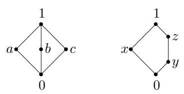
Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Emailuri: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@gmail.com

Abstract

Textul de faţă conţine o colecţie de probleme de diferite tipuri date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Fie laticile: L = diamantul $= \{0, a, b, c, 1\}$ şi M = pentagonul $= \{0, x, y, z, 1\}$, cu diagramele Hasse de mai jos:*



Câte funcţii injective de la L la M există? Câte morfisme injective de latici de la L la M există? Demonstraţi.

Rezolvare: Observăm că L şi M au acelaşi cardinal, anume 5, prin urmare, pentru orice funcţie $f : L \to M$, are loc echivalenţa: f este injectivă dacă şi numai dacă f este bijectivă. Prin urmare, numărul funcţiilor injective de la L la M este egal cu numărul funcţiilor bijective de la L la M, anume $5! = 120$.

Conform celor de mai sus, orice morfism injectiv de latici de la L la M este izomorfism de latici. Fie $h : L \to M$ un izomorfism de latici. Rezultă că $h(0) = 0$ şi $h(1) = 1$, prin urmare, datorită injectivităţii lui h, obţinem că $h(\{a, b, c\}) = \{x, y, z\}$. Să presupunem, de exemplu, că $h(b) = y$ şi $h(c) = z$. În acest moment putem observa că z nu este atom, iar c este atom, deci putem obţine contradicţie cu faptul că orice izomorfism de latici duce atomii în atomi. Dar putem da şi un argument care nu necesită cunoaşterea acestui rezultat teoretic, printr-un simplu calcul: $h(b \wedge c) = h(0) = 0 \neq y = y \wedge z = h(b) \wedge h(c)$, ceea ce este o contradicţie cu faptul că h este morfism de latici. Celelalte cazuri se tratează analog; a nu se uita că h este injectiv, prin urmare numărul cazurilor este $3! = 6$. Contradicţia a apărut datorită presupunerii că există izomorfisme de latici de la L la M. Aşadar nu există izomorfisme de latici de la L la M, prin urmare numărul morfismelor injective de latici de la L la M este 0.

Exerciţiul 1.2. *Considerăm sistemul formal al calculului propoziţional clasic, în care notăm cu E mulţimea enunţurilor. Să se demonstreze semantic următoarea regulă de deducţie:*

$$\frac{\Sigma \cup \{\neg\chi\} \vdash \psi \to \neg\varphi}{\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \chi},$$

pentru orice mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$ şi pentru orice enunţuri $\varphi, \psi, \chi \in E$.

Rezolvare: Conform teoremei de completitudine tare, este suficient să demonstrăm că: dacă $\Sigma \cup \{\neg\chi\} \vDash \psi \to \neg\varphi$, atunci $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vDash \chi$.

Presupunem aşadar că $\Sigma \cup \{\neg\chi\} \vDash \psi \to \neg\varphi$.

Să notăm cu V mulţimea variabilelor propoziţionale şi fie $h : V \to \mathcal{L}_2$ o interpretare care este un model pentru mulţimea de enunţuri $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$, adică o funcţie oarecare h de la V la $\mathcal{L}_2$ cu proprietatea că $h \vDash \Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$. Ştim că, dată h, există o unică funcţie $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care restricţionată la V este egală cu h şi care comută cu $\neg$ şi $\to$, unde $\neg$ şi $\to$ pe E sunt conectori logici, iar $\neg$ şi $\to$ pe $\mathcal{L}_2$ sunt operaţii de algebră Boole ($\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$ este *algebra Boole standard*, după cum ne amintim din curs).

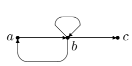
$h \vDash \Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$, aşadar $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) = 1$. Rezultă că $\tilde{h}(\psi \to \neg\varphi) = \tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\neg\varphi) = \tilde{h}(\psi) \to \neg\tilde{h}(\varphi) = 1 \to \neg 1 = 1 \to 0 = 0$. Presupunem prin absurd că $\tilde{h}(\chi) = 0$. Rezultă că $\tilde{h}(\neg\chi) = \neg\tilde{h}(\chi) = \neg 0 = 1$. Dar $h \vDash \Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$, aşadar în particular $h \vDash \Sigma$. Am obţinut că $\tilde{h}(\neg\chi) = 1$ şi $h \vDash \Sigma$, prin urmare $h \vDash \Sigma \cup \{\neg\chi\}$. Conform ipotezei, $\Sigma \cup \{\neg\chi\} \vDash \psi \to \neg\varphi$. Rezultă că $\tilde{h}(\psi \to \neg\varphi) = 1$, de unde, folosind rezultatul din primul calcul

de mai sus, obţinem $0 = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este o contradicţie. Aşadar $\tilde{h}(\chi) = 1$.

Am demonstrat că, oricare ar fi o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu proprietatea că $h \vDash \Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$, rezultă că $\tilde{h}(\chi) = 1$. Aşadar $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vDash \chi$.

2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Considerăm sistemul formal al calculului cu predicate. Fie signatura $\tau = ((1); (2); \emptyset)$ şi structura de ordinul I de această signatură $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}; R^{\mathcal{A}}; \emptyset)$, unde $A = \{a, b, c\}$ este o mulţime cu 3 elemente, operaţia unară $f^{\mathcal{A}}$ va fi notată cu f şi este definită prin: $f : A \to A$, $f(a) = b$, $f(b) = f(c) = a$, iar relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$ va fi notată cu R şi este definită prin: $R = \{(a, b), (b, a), (b, b), (b, c)\} \subseteq A^2$. Să se calculeze valoarea de adevăr a enunţului: $\forall x(R(x, f(x)) \vee R(f(x), x))$.*

$R :$ 

Rezolvare: $||\forall x(R(x, f(x)) \vee R(f(x), x))|| = \bigwedge_{t \in A} (||R(t, f(t))|| \vee ||R(f(t), t)||)$ $= (||R(a, f(a))|| \vee ||R(f(a), a)||) \wedge (||R(b, f(b))|| \vee ||R(f(b), b)||) \wedge (||R(c, f(c))|| \vee ||R(f(c), c)||) = (||R(a, b)|| \vee ||R(b, a)||) \wedge (||R(b, a)|| \vee ||R(a, b)||) \wedge (||R(c, a)|| \vee ||R(a, c)||) = (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0 \vee 0) = 1 \wedge 1 \wedge 0 = 0$.

Exerciţiul 2.2. *Să se calculeze închiderea tranzitivă a relaţiei R de la Exerciţiul 2.1.*

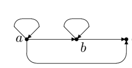
Rezolvare: Notăm cu $T(R)$ închiderea tranzitivă a relaţiei binare R. În general, $T(R) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$. Dar ştim că, dacă R este o relaţie binară pe o mulţime finită, cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $T(R) = \bigcup_{k=1}^{n} R^k$. Într-adevăr, se poate demonstra prin inducţie matematică după p că, pentru orice număr natural $p \geq n + 1$, are loc: $R^p \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} R^k$. Demonstraţia se poate face în cazul general al unor n şi R arbitrare şi nu trebuie redată în

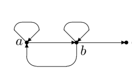
rezolvarea acestui exerciţiu la examen, dar un student care nu cunoaşte formula particulară a lui $T(R)$ din cazul finit poate observa uşor şi demonstra prin inducţie matematică faptul că, în cazul particular al acestui exerciţiu, în care $n = |A| = 3$, pentru orice număr natural $p \geq 4$, $R^p \subseteq R \cup R^2 \cup R^3$.

Aşadar, avem: $T(R) = \bigcup_{k=1}^{3} R^k = R \cup R^2 \cup R^3$.

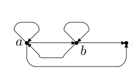
Amintim definiţia compunerii a două relaţii binare R si S pe o mulţime A: $R \circ S = \{(x, z) \in A^2 | (\exists y \in A)(x, y) \in S$ şi $(y, z) \in R\}$, care este tot o relaţie binară pe mulţimea A. Această operaţie de compunere este asociativă, ceea ce ne permite să definim, pentru orice relaţie binară R şi orice număr natural nenul k, relaţia binară $R^k = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{k \text{ de } R}$. R^k poate fi definită recursiv astfel: $R^1 = R$ şi, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $R^{k+1} = R \circ R^k$. Menţionăm că se mai definesc $R^0 = \Delta_A = \{(x, x) | x \in A\}$ =diagonala lui A şi $R^{-k} = (R^{-1})^k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, unde $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$ =inversa lui R.

Revenind la problema de faţă, calculăm:

$R^2 = R \circ R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$: 

$R^3 = R \circ R^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c)\}$: 

Obţinem:

$T(R) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$: 

Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a II-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Emailuri: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@gmail.com

Abstract

Textul de faţă conţine o colecţie de probleme de diferite tipuri date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

Pentru orice mulţime A, vom nota cu Δ_A *diagonala lui* A, adică următoarea relaţie binară pe A: $\Delta_A = \{(a, a) | a \in A\}$. De exemplu, $\Delta_\emptyset = \emptyset$, $\Delta_{\{1,2,3\}} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. În mod evident, Δ_A este cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A (cea mai mică în sensul incluziunii), adică este relaţia de echivalenţă generată de $\emptyset$. În fapt, Δ_A este chiar relaţia de egalitate pe mulţimea A. Este uşor de văzut că Δ_A este singura relaţie pe A care este şi relaţie de echivalenţă şi relaţie de ordine. Mai mult, în demonstraţia imediată a afirmaţiei anterioare nu intervine proprietatea de tranzitivitate, prin urmare se observă că: Δ_A este singura relaţie pe A care este şi reflexivă, şi simetrică, şi antisimetrică. Mai mult, observăm că: o relaţie binară pe A este simetrică şi antisimetrică dacă şi numai dacă este inclusă în Δ_A.

În cele ce urmează vom folosi notaţia Δ_A pentru anumite mulţimi A.

De asemenea, vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

1 Lista 1 de subiecte

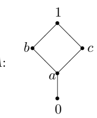
Exerciţiul 1.1. *Să se construiască două latici distributive distincte cu câte 5 elemente A şi B, astfel încât fiecare să aibă ca sublatici pe $\mathcal{L}_2^2$ (rombul)*

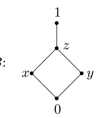
şi $\mathcal{L}_4$ (lanţul cu 4 elemente), şi să se determine toate morfismele de latici cu 0 şi 1 de la A la B.

Rezolvare: Observaţi că enunţul ne dă libertatea de a alege domeniul şi codomeniul. Dar vom vedea îndată că există doar două latici de tipul enunţat, iar cele două posibilităţi de alegere a domeniului şi codomeniului (amintim că ele trebuie să fie distincte) au o simetrie/antisimetrie vizibilă, în sensul că, oricum am alege pe A şi B, determinarea morfismelor de la A la B şi determinarea morfismelor de la B la A se fac în aceeaşi manieră. Acest lucru se va observa uşor din diagramele Hasse ale celor două latici.

O primă remarcă ar fi aceea că orice latice finită are 0 şi 1, pentru că orice latice conţine infimumul şi supremumul oricăror două elemente ale sale, de unde rezultă (procedând din aproape în aproape) că orice latice conţine infimumul şi supremumul oricărei mulţimi finite de elemente ale sale, aşadar în particular orice latice finită conţine infimumul şi supremumul mulţimii tuturor elementelor sale, iar acest infimum şi acest supremum sunt, în mod evident (pentru că sunt elemente ale laticii), respectiv minimul şi maximul mulţimii tuturor elementelor sale, adică 0 şi 1. Conchidem că, orice latici ca în enunţ vom alege, ele vor avea câte 5 elemente, deci vor fi finite, aşadar vor avea 0 şi 1, prin urmare are sens căutarea unui morfism de latici cu 0 şi 1 între ele.

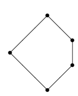
Două latici de tipul cerut sunt următoarele:

laticea A:


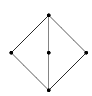
laticea B:


Într-adevăr, fiecare dintre aceste latici are ca sublatici rombul şi lanţul cu 4 elemente, şi, întrucât niciuna dintre laticile A şi B nu are ca sublatice nici pentagonul, nici diamantul (vezi figura de mai jos), un rezultat din curs ne permite să conchidem că laticile A şi B sunt distributive.

Observaţi că şi pentagonul este o latice cu 5 elemente care are ca sublatici rombul şi lanţul cu 4 elemente, dar, precum ştim din curs, pentagonul nu este o latice distributivă. Se observă că A, B şi pentagonul sunt singurele latici cu 5 elemente care au ca sublatici rombul şi lanţul cu 4 elemente (nu este necesară justificarea acestui lucru şi nici nu este necesară această precizare, pentru că enunţul ne dă libertatea alegerii).



pentagonul



diamantul

Să determinăm aşadar morfismele de latici cu 0 şi 1 de la A la B. Fie $f : A \to B$ un morfism de latici cu 0 şi 1, aşadar $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$. Fiind morfism de latici, f comută cu $\vee$ şi $\wedge$, prin urmare avem:

$$1 = f(1) = f(b \vee c) = f(b) \vee f(c),$$

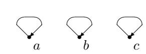
$$f(a) = f(b \wedge c) = f(b) \wedge f(c).$$

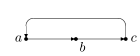
După cum observăm din diagrama Hasse a lui B, prima dintre cele două relaţii de mai sus implică faptul că $f(b) = 1$ sau $f(c) = 1$, pentru că, oricare ar fi două elemente din $B \setminus \{1\}$, disjuncţia lor este mai mică decât z şi deci diferită de 1. Alegem $f(b) = 1$, ceea ce, împreună cu a doua relaţie de mai sus, ne conduce la $f(a) = f(c)$. Luăm $f(a) = f(c) \in B$. Oricare dintre cele 5 funcţii astfel determinate, anume $f_1, \ldots, f_5 : A \to B$ de mai jos, este morfism de latici cu 0 şi 1, după cum se poate observa uşor. Nu este necesară justificarea prin calcul direct a acestui fapt, observaţia că această proprietate se vede din diagramele Hasse este suficientă.

Urmând acelaşi raţionament, alegerea $f(c) = 1$ ne conduce la $f(a) = f(b) \in B$, iar funcţiile $f_6, \ldots, f_{10} : A \to B$ care verifică aceste identităţi sunt toate morfisme de latici cu 0 şi 1. Ca mai sus, nu este nevoie să justificaţi prin calcul acest fapt.

α	0	a	b	c	1
$f_1(\alpha)$	0	0	1	0	1
$f_2(\alpha)$	0	x	1	x	1
$f_3(\alpha)$	0	y	1	y	1
$f_4(\alpha)$	0	z	1	z	1
$f_5(\alpha)$	0	1	1	1	1
$f_6(\alpha)$	0	0	0	1	1
$f_7(\alpha)$	0	x	x	1	1
$f_8(\alpha)$	0	y	y	1	1
$f_9(\alpha)$	0	z	z	1	1
$f_{10}(\alpha)$	0	1	1	1	1

Exerciţiul 1.2. *Considerăm sistemul formal al calculului cu predicate. Fie signatura $\tau = (\emptyset; 2, 2; \emptyset)$ şi structura de ordinul I de această signatură $\mathcal{A} = (A; R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}}; \emptyset)$, unde $A = \{a, b, c\}$ este o mulţime cu 3 elemente, iar relaţiile binarĕ $R_1^{\mathcal{A}}$ şi $R_2^{\mathcal{A}}$ vor fi notate respectiv cu R_1 şi R_2, şi sunt definite prin: $R_1 = \Delta_A \subset A^2$, $R_2 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\} \subset A^2$. Să se calculeze valoarea de adevăr a enunţului: $\forall x \exists y (R_1(x, y) \to \neg R_2(x, y))$.*

R_1 :


R_2 :


Rezolvare:

Valoarea de adevăr a enunţului dat este:

$$||\forall x \exists y (R_1(x, y) \to \neg R_2(x, y))|| =$$

$$\bigwedge_{t \in A} \bigvee_{u \in A} (||R_1(t, u)|| \to \neg ||R_2(t, u)||) =$$

$$\left(\bigvee_{u \in A} (||R_1(a, u)|| \to \neg ||R_2(a, u)||) \right) \wedge$$

$$\left(\bigvee_{u \in A} (||R_1(b, u)|| \to \neg ||R_2(b, u)||) \right) \wedge$$

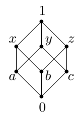
$$\left(\bigvee_{u \in A} (||R_1(c, u)|| \to \neg ||R_2(c, u)||) \right) =$$

$$1 \wedge 1 \wedge 1 = 1.$$

Într-adevăr, pentru orice $t \in A$, există $u \in A$ astfel încât $(t, u) \notin R_1$, adică $||R_1(t, u)|| = 0$, prin urmare $||R_1(t, u)|| \to \neg ||R_2(t, u)|| = 1$ şi deci disjuncţiile din parantezele expresiei de mai sus sunt egale cu 1, deci conjuncţia lor este egală cu 1. Amintim că evaluarea enunţurilor se face în algebra Boole standard $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$.

2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Să se determine filtrele cubului (cubul este algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$) şi, cu notaţiile din reprezentarea cubului prin diagrama Hasse de mai jos, să se determine congruenţa $\sim_{<a>}$ asociată filtrului $< a >$:*



Amintim că la seminar s-a demonstrat că, pentru orice algebră Boole B şi orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalenţa: $\alpha \leq \beta \to \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Rezolvare: Orice algebră Boole finită are toate filtrele principale, adică generate de un singur element. Pentru orice algebră Boole B şi orice element $\alpha \in B$, filtrul generat de α este $< \alpha >= \{\beta \in B | \alpha \leq \beta\}$, unde, desigur, $\leq$ este relaţia de ordine parţială a laticii B.

Cubul este o algebră Boole finită (cu 8 elemente), aşadar filtrele sale sunt cele 8 enumerate mai jos:

$< 0 >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | 0 \leq \beta\} = \mathcal{L}_2^3$ (filtrul impropriu, adică acela care este egal cu întreaga algebră Boole);

$< a >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | a \leq \beta\} = \{a, x, y, 1\}$;

$< b >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | b \leq \beta\} = \{b, x, z, 1\}$;

$< c >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | c \leq \beta\} = \{c, y, z, 1\}$;

$< x >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \leq \beta\} = \{x, 1\}$;

$< y >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | y \leq \beta\} = \{y, 1\}$;

$< z >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | z \leq \beta\} = \{z, 1\}$;

$< 1 >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | 1 \leq \beta\} = \{1\}$ (filtrul trivial).

Filtrele $< a >, < b >, < c >, < x >, < y >, < z >$ sunt filtrele proprii şi netriviale ale cubului.

În şirul de echivalenţe de mai jos folosim relaţia demonstrată la seminar pe care am amintit-o în enunţ. Dacă unele echivalenţe nu vă sunt clare, demonstraţi pe rând implicaţia directă şi implicaţia reciprocă a fiecăreia dintre acele echivalenţe. Conform definiţiei congruenţei generate de un filtru, avem, pentru orice elemente $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_2^3$: $(\alpha, \beta) \in \sim_{<a>}$ ddacă $\alpha \sim_{<a>} \beta$ ddacă $\alpha \leftrightarrow \beta \in < a >$ ddacă $a \leq \alpha \leftrightarrow \beta$ ddacă $a \leq (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

ddacă $[a \leq \alpha \to \beta$ şi $a \leq \beta \to \alpha]$ ddacă $[a \wedge \alpha \leq \beta$ şi $a \wedge \beta \leq \alpha]$ ddacă $[a \wedge \alpha \leq a \wedge \beta$ şi $a \wedge \beta \leq a \wedge \alpha]$ ddacă $a \wedge \alpha = a \wedge \beta$.

Aşadar, $\sim_{<a>}= \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}_2^3 \times \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \alpha = a \wedge \beta\}$. Care sunt perechile de elemente din $\mathcal{L}_2^3$ care în conjuncţie cu a dau acelaşi element? Diagrama Hasse ne sugerează răspunsul. Să nu uităm că orice congruenţă $\sim$ este în primul rând o relaţie de echivalenţă, deci are proprietăţile: reflexivitate (adică $\sim$ include diagonala mulţimii pe care este definită), simetrie (adică, pentru orice pereche (α, β) din $\sim$, avem că $\sim$ conţine şi perechea (β, α)) şi tranzitivitate (adică, pentru oricare două perechi de forma (α, β) şi (β, γ) din $\sim$, avem că $\sim$ conţine şi perechea (α, γ)). Aceste observaţii ne vor ajuta să determinăm congruenţa $\sim_{<a>}$. a este un atom, prin urmare este uşor de văzut ca, pentru orice $\alpha \in \mathcal{L}_2^3$, $a \wedge \alpha \in \{0, a\}$. De fapt, mulţimile $C_1 = \{\alpha \in \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \alpha = 0\}$ şi $C_2 = \{\alpha \in \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \alpha = a\}$ sunt chiar clasele de echivalenţă ale congruenţei $\sim_{<a>}$, după cum se poate vedea uşor din definiţia claselor unei relaţii de echivalenţă. Iar congruenţa $\sim_{<a>}$ nu este altceva decât: $\sim_{<a>}= \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_1\} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_2\}$. Cine sunt C_1 şi C_2? Cel mai uşor poate fi determinată C_2: întrucât relaţia $a \wedge \alpha = a$ din definiţia mulţimii C_2 este echivalentă cu: $a \leq \alpha$, după cum ştim din definiţia relaţiei $\leq$ pe baza operaţiei $\wedge$ (sau a operaţiei $\vee$) din corespondenţa latice Ore – latice Dedekind, rezultă că: $C_2 = \{\alpha \in \mathcal{L}_2^3 | a \leq \alpha\} =< a >= \{a, x, y, 1\}$. Remarcăm că, pentru orice $\alpha \in \mathcal{L}_2^3 \setminus < a >= \mathcal{L}_2^3 \setminus C_2 = \{0, b, c, z\}$, $a \wedge \alpha = 0$, aşadar aceste elemente compun mulţimea C_1: $C_1 = \{0, b, c, z\} = \mathcal{L}_2^3 \setminus < a >= \mathcal{L}_2^3 \setminus C_2$, ceea ce era uşor de observat şi direct din faptul că relaţia de congruenţă $\sim_{<a>}$ are exact două clase de echivalenţă, care, după cum ştim din proprietăţile claselor unei relaţii de echivalenţă, sunt mulţimi complementare una alteia.

În lumina celor de mai sus, să enumerăm elementele congruenţei $\sim_{<a>}$: punem deoparte perechile de forma (α, α) din $\sim_{<a>}$, şi astfel obţinem: $\sim_{<a>}= \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_1\} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_2\} = \Delta_{\mathcal{L}_2^3} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_1, \alpha \neq \beta\} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_2, \alpha \neq \beta\} = \Delta_{\mathcal{L}_2^3} \cup \{(0, b), (b, 0), (0, c), (c, 0), (0, z), (z, 0), (b, c), (c, b), (b, z), (z, b), (c, z), (z, c)\} \cup \{(a, x), (x, a), (a, y), (y, a), (a, 1), (1, a), (x, y), (y, x), (x, 1), (1, x), (y, 1), (1, y)\} = \{(0, 0), (a, a), (b, b), (c, c), (x, x), (y, y), (z, z), (1, 1), (0, b), (b, 0), (0, c), (c, 0), (0, z), (z, 0), (b, c), (c, b), (b, z), (z, b), (c, z), (z, c), (a, x), (x, a), (a, y), (y, a), (a, 1), (1, a), (x, y), (y, x), (x, 1), (1, x), (y, 1), (1, y)\}$.

Sigur, enunţul nu ne cere să enumerăm elementele congruenţei $\sim_{<a>}$, aşa că obţinerea faptului că $\sim_{<a>}= \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_1\} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_2\} = \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \{0, b, c, z\}\} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \{a, x, y, 1\}\}$ ar fi suficientă la un examen. De asemenea, comentariile destinate numai facilitării

înţelegerii de către cititor a acestei expuneri, care fac această rezolvare să pară atât de voluminoasă, nu trebuie scrise la examen. Menţionarea rezultatelor teoretice folosite în demonstraţie, cum ar fi cel privind forma filtrelor unei algebre Boole finite, forma unui filtru principal, definiţia congruenţei asociate unui filtru etc. sunt obligatorii la examen. Desigur, aceste precizări sunt valabile pentru rezolvarea oricărei probleme la examen.

Exerciţiul 2.2. *Considerăm sistemul formal al calculului propoziţional clasic, în care notăm cu E mulţimea enunţurilor. Să se demonstreze semantic că, pentru orice mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$ şi pentru orice enunţuri $\varphi, \psi \in E$, are loc: $\Sigma \cup \{\neg \psi\} \vdash \neg \varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.*

Rezolvare: Conform teoremei de completitudine tare, este suficient să demonstrăm că: $\Sigma \cup \{\neg \psi\} \vDash \neg \varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$.

Să notăm cu V mulţimea variabilelor propoziţionale.

"$\Rightarrow$": Presupunem că $\Sigma \cup \{\neg \psi\} \vDash \neg \varphi$. Demonstrăm că $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$.

Fie o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ astfel încât $h \vDash \Sigma \cup \{\varphi\}$ (adică h satisface $\Sigma \cup \{\varphi\}$). Ştim că, dată h, există o unică funcţie $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care restricţionată la V este egală cu h şi care comută cu $\neg$ şi $\to$, unde $\neg$ şi $\to$ pe E sunt conectori logici, iar $\neg$ şi $\to$ pe $\mathcal{L}_2$ sunt operaţii de algebră Boole ($\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$ este *algebra Boole standard*, după cum ne amintim din curs).

$h \vDash \Sigma \cup \{\varphi\}$, aşadar $h \vDash \Sigma$ şi $\tilde{h}(\varphi) = 1$. Trebuie să demonstrăm că $\tilde{h}(\psi) = 1$. Presupunem prin absurd că $\tilde{h}(\psi) = 0$. Rezultă că $\tilde{h}(\neg \psi) = \neg \tilde{h}(\psi) = \neg 0 = 1$. Întrucât $h \vDash \Sigma$, obţinem că $h \vDash \Sigma \cup \{\neg \psi\}$, de unde, conform ipotezei, rezultă că $\tilde{h}(\neg \varphi) = 1$, adică $\neg \tilde{h}(\varphi) = 1$, prin urmare $\tilde{h}(\varphi) = 0$, ceea ce este o contradicţie cu alegerea lui h. Aşadar $\tilde{h}(\psi) = 1$ şi deci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$, pentru că h a fost aleasă arbitrar dintre interpretările care satisfac $\Sigma \cup \{\varphi\}$.

"$\Leftarrow$": Presupunem că $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$. Demonstrăm că $\Sigma \cup \{\neg \psi\} \vDash \neg \varphi$.

Fie o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ astfel încât $h \vDash \Sigma \cup \{\neg \psi\}$, adică $h \vDash \Sigma$ şi $\tilde{h}(\neg \psi) = 1$. Trebuie să demonstrăm că $\tilde{h}(\neg \varphi) = 1$. Presupunem prin absurd că $\tilde{h}(\neg \varphi) = 0$. Acest fapt este echivalent cu $\neg \tilde{h}(\varphi) = 0$, adică $\tilde{h}(\varphi) = 1$. Întrucât $h \vDash \Sigma$, obţinem că $h \vDash \Sigma \cup \{\varphi\}$. Conform ipotezei, rezultă că $\tilde{h}(\psi) = 1$, prin urmare $\neg \tilde{h}(\psi) = 0$, adică $\tilde{h}(\neg \psi) = 0$, ceea ce este o contradicţie cu alegerea lui h. Aşadar $\tilde{h}(\neg \varphi) = 1$ şi deci $\Sigma \cup \{\neg \psi\} \vDash \neg \varphi$, pentru că h a fost aleasă arbitrar dintre interpretările care satisfac $\Sigma \cup \{\neg \psi\}$.

Echivalenţa din enunţ este demonstrată.

Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Addenda la Partea a II–a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: cmuresan11@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Abstract

Textul de faţă conţine o completare pentru Partea a II–a din seria de referate conţinând probleme date de autoare la examenul de logică matematică şi computaţională.

1 Introducere

În acest text:

- abrevierea *ddacă* semnifică "dacă şi numai dacă";
- abrevierea *i. e.* provine de la "id est" şi semnifică "adică".

Următoarea listă de exerciţii conţine:

- un exerciţiu de logică propoziţională rezolvat semantic în Partea a II–a, cerând, de data aceasta, o demonstraţie sintactică;
- o completare la exerciţiul cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$, în care extind cerinţa, şi în care aleg să folosesc o altă notaţie pentru filtrele principale decât cea utilizată în Partea a II–a.

Pentru preliminariile necesare, a se consulta cartea "Logică matematică", de George Georgescu şi Afrodita Iorgulescu, tipărită la Editura ASE, din Bucureşti, în anul 2010, sau cursul de logică matematică şi computaţională al autoarei, de pe serverul de cursuri al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (a se vedea şi bibliografia dată în primul curs).

2 Lista de exerciţii

Exerciţiul 2.1. *Considerăm sistemul formal al calculului propoziţional clasic, în care notăm cu E mulţimea enunţurilor. Să se demonstreze sintactic că, pentru orice mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$ şi pentru orice enunţuri $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \cup \{\neg \psi\} \vdash \neg \varphi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.*

Rezolvare: Fie $\Sigma \subseteq E$ şi $\varphi, \psi \in E$, arbitrare, fixate. Avem de demonstrat că:

$$\Sigma \cup \{\neg \psi\} \vdash \neg \varphi \ \text{ ddacă } \ \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

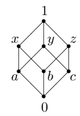
Conform Teoremei deducţiei, este suficient să demonstrăm că:

$$\Sigma \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi \ \text{ ddacă } \ \Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

"$\Rightarrow$": Presupunem că $\Sigma \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$. Cum $(\neg \psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ este axioma (A_3), are loc: $\vdash (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$, aşadar: $\Sigma \vdash (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$. Din ipoteza acestei implicaţii, proprietatea anterioară şi regula de deducţie (MP), rezultă că: $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
"$\Leftarrow$": Presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Dintre proprietăţile sintactice valabile în calculul propoziţional clasic, amintesc faptul că: $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$, prin urmare: $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$. Din ipoteza acestei implicaţii, proprietatea anterioară şi regula de deducţie (MP), rezultă că are loc: $\Sigma \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$.

Exerciţiul 2.2. *Să se determine toate filtrele, congruenţele şi algebrele Boole factor ale cubului.*

Rezolvare: Cubul este algebra Boole dată de puterea a 3–a a lanţului cu 2 elemente: $\mathcal{L}_2^3$. Amintesc diagrama Hasse a acestei algebre Boole:



Vom păstra notaţiile uzuale pentru operaţiile, relaţia de ordine şi operaţiile derivate ale unei algebre Boole, precum şi notaţiile pentru elementele cubului figurate în diagrama Hasse de mai sus: mulţimea suport a cubului, pe care o notăm, cum este uzual, cu L_2^3, are următoarele elemente: $L_2^3 = \{0, a, b, c, x, y, z, 1\}$, unde 0 şi 1 sunt primul şi, respectiv, ultimul element al cubului, a, b, c sunt atomii cubului, iar $x = a \vee b$, $y = a \vee c$ şi $z = b \vee c$. Unele algebre Boole care vor interveni în acest text vor fi referite prin mulţimile lor suport.

Toate filtrele unei algebre Boole finite sunt principale (mai mult, toate filtrele finite ale unei algebre Boole sunt principale; şi încă mai mult, toate filtrele finit generate ale unei algebre Boole sunt principale), adică generate de câte un singur element. Pentru orice element α al unei algebre Boole B, filtrul principal generat de α în B este: $[\alpha) = \{\beta \in B \mid \alpha \leq \beta\} \subseteq B$.

Cubul este o algebră Boole finită, având $2^3 = 8$ elemente. Prin urmare, filtrele cubului sunt în număr de 8, anume cele 8 filtre generate de câte unul dintre cele 8 elemente ale cubului:

$[0) = \{\beta \in L_2^3 \mid 0 \leq \beta\} = L_2^3$ (filtrul impropriu);
$[a) = \{\beta \in L_2^3 \mid a \leq \beta\} = \{a, x, y, 1\}$ (ultrafiltru);
$[b) = \{\beta \in L_2^3 \mid b \leq \beta\} = \{b, x, z, 1\}$ (ultrafiltru);
$[c) = \{\beta \in L_2^3 \mid c \leq \beta\} = \{c, y, z, 1\}$ (ultrafiltru);
$[x) = \{\beta \in L_2^3 \mid x \leq \beta\} = \{x, 1\}$;
$[y) = \{\beta \in L_2^3 \mid y \leq \beta\} = \{y, 1\}$;
$[z) = \{\beta \in L_2^3 \mid z \leq \beta\} = \{z, 1\}$;
$[1) = \{\beta \in L_2^3 \mid 1 \leq \beta\} = \{1\}$ (filtrul trivial).

Filtrele şi congruenţele unei algebre Boole sunt în corespondenţă bijectivă. Bijecţia de la mulţimea filtrelor unei algebre Boole B la mulţimea congruenţelor sale asociază fiecărui filtru principal $[\alpha)$ generat de un element $\alpha \in B$ congruenţa $\sim_{[\alpha)}$ a lui B definită astfel:

$$\begin{aligned}\sim_{[\alpha)} &= \{(\beta, \gamma) \mid \beta, \gamma \in B, \beta \leftrightarrow \gamma \in [\alpha)\} \\ &= \{(\beta, \gamma) \mid \beta, \gamma \in B, \alpha \leq \beta \leftrightarrow \gamma\} \\ &= \{(\beta, \gamma) \mid \beta, \gamma \in B, \beta \wedge \alpha = \gamma \wedge \alpha\} \subseteq B^2;\end{aligned}$$

am explicitat definiţia dată de prima dintre egalităţile anterioare; ultima egalitate se demonstrează folosind **legea de reziduaţie**. Aşadar, pentru orice elemente $\beta, \gamma \in B$:

$$\beta \sim_{[\alpha)} \gamma \ \text{ ddacă } \ \beta \wedge \alpha = \gamma \wedge \alpha.$$

Să determinăm congruenţa asociată fiecăruia dintre cele 8 filtre ale cubului, şi, concomitent, algebra Boole factor prin fiecare dintre aceste congruenţe, sau, echivalent, algebra Boole factor prin fiecare filtru al cubului. Fiecare dintre aceste algebre Boole factor are drept mulţime subiacentă mulţimea factor a lui L_2^3 prin congruenţa corespunzătoare (care, în acest context, este privită doar ca relaţie de echivalenţă), adică mulţimea claselor acestei congruenţe. Cât despre structura de algebră Boole a unei astfel de algebre factor, ea se determină cu ajutorul **Teoremei de structură a algebrelor Boole finite**, conform căreia, dacă o algebră Boole finită are cardinalul 2^n, cu $n \in \mathbb{N}$, atunci acea algebră Boole este izomorfă cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^n$. În cele ce urmează, vom folosi şi legătura dintre $\wedge$ şi $\leq$ într–o latice, aplicată algebrei Boole $\mathcal{L}_2^3$.

- Corespunzător filtrului $[0)$ (filtrul impropriu):

Pentru orice $\beta, \gamma \in L_2^3$, $\beta \sim_{[0)} \gamma$ ddacă $\beta \wedge 0 = \gamma \wedge 0$ ddacă $0 = 0$, iar aceasta este o proprietate adevărată indiferent de valorile lui β şi γ, ceea ce înseamnă că orice $\beta, \gamma \in L_2^3$ satisfac $\beta \sim_{[0)} \gamma$ şi deci au aceeaşi clasă de echivalenţă, adică $\sim_{[0)} = (L_2^3)^2$, şi mulţimea factor prin $\sim_{[0)}$ este formată dintr–o singură clasă de echivalenţă, care cuprinde toate elementele cubului: $L_2^3/_{[0)} = \{0/_{[0)}\} = L_2^3 = \{u/_{[0)}\}$, pentru orice $u \in L_2^3$ (oricare ar fi $u \in L_2^3$, $0/_{[0)} = u/_{[0)}$), aşadar algebra Boole factor $L_2^3/_{[0)}$ este algebra Boole trivială (izomorfă cu $\mathcal{L}_2^0$ şi cu $\mathcal{L}_1$).

- Corespunzător filtrului $[a)$:

$[a)$ este un filtru generat de un atom, aşadar este ultrafiltru, prin urmare calculele de mai jos trebuie sa ne conducă la concluzia că algebra Boole factor a cubului prin filtrul $[a)$ este izomorfă cu algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$ (lanţul cu 2 elemente).

Pentru orice $\beta, \gamma \in L_2^3$, $\beta \sim_{[a)} \gamma$ ddacă $\beta \wedge a = \gamma \wedge a$. Să enumerăm clasele congruenţei $\sim_{[a)}$, cu toate elementele care le compun:
$0/_{[a)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge a = 0 \wedge a\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge a = 0\} = \{0, b, c, z\} = b/_{[a)} = c/_{[a)} = z/_{[a)}$;
$1/_{[a)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge a = 1 \wedge a\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge a = a\} = \{u \in L_2^3 \mid a \leq u\} = \{a, x, y, 1\} = [a) = a/_{[a)} = x/_{[a)} = y/_{[a)}$; de fapt, din corespondenţa biunivocă între filtre şi congruenţe, ştim că, pentru orice filtru F al unei algebre Boole B, $1/F = F = u/F$, oricare ar fi $u \in B$.

În concluzie, algebra Boole factor $L_2^3/_{[a)} = \{0/_{[a)}, 1/_{[a)}\}$, deci are 2 elemente, aşadar $L_2^3/_{[a)}$ este izomorfă cu algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$.

- Aceeaşi situaţie pentru filtrele $[b)$ şi $[c)$: calculele decurg la fel ca pentru filtrul $[a)$, iar algebrele Boole factor sunt izomorfe tot cu $\mathcal{L}_2$.

- Corespunzător filtrului $[x)$:

$0/_{[x)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = 0 \wedge x\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = 0\} = \{0, c\} = c/_{[x)}$;
$1/_{[x)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = 1 \wedge x\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = x\} = \{u \in L_2^3 \mid x \leq u\} = \{x, 1\} = [x) = x/_{[x)}$; ca mai sus, puteam folosi direct faptul că orice filtru F al unei algebre Boole este o clasă a congruenţei asociate lui F;
$a/_{[x)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = a \wedge x\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = a\} = \{a, y\} = y/_{[x)}$;
$b/_{[x)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = b \wedge x\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = b\} = \{b, z\} = z/_{[x)}$.

În concluzie, algebra Boole factor $L_2^3/_{[x)} = \{0/_{[x)}, a/_{[x)}, b/_{[x)}, 1/_{[x)}\}$, deci are 2^2 elemente, aşadar $L_2^3/_{[x)}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$ (rombul).

- Aceeaşi situaţie pentru filtrele $[y)$ şi $[z)$: calculele decurg la fel ca pentru filtrul $[x)$, iar algebrele Boole factor sunt izomorfe tot cu $\mathcal{L}_2^2$.

- Corespunzător filtrului $[1)$ (filtrul trivial):

Pentru orice $\beta, \gamma \in L_2^3$, $\beta \sim_{[1)} \gamma$ ddacă $\beta \wedge 1 = \gamma \wedge 1$ ddacă $\beta = \gamma$, ceea ce înseamnă că toate clasele lui $\sim_{[1)}$ sunt singletonuri: orice $\beta \in L_2^3$ are $\beta/_{[1)} = \{\beta\}$, adică $\sim_{[1)} = \Delta_{L_2^3}$ (diagonala mulţimii L_2^3), iar $L_2^3/_{[1)} = \{\{\beta\} \mid \beta \in L_2^3\}$, aşadar algebra Boole factor $L_2^3/_{[1)}$ este cardinal echivalentă cu $\mathcal{L}_2^3$, deci această algebră Boole factor este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^3$ (cubul).

Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a III-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Emailuri: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@gmail.com

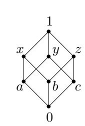
Abstract

Textul de faţă conţine o colecţie de probleme de diferite tipuri date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

Peste tot în acest text, prescurtarea ddacă va semnifica "dacă şi numai dacă".

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Se consideră algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ (cubul), reprezentată prin diagrama Hasse de mai jos. Să se determine algebra Boole factor asociată filtrului generat de x, prin enumerarea elementelor ei. Să se demonstreze că această algebră Boole este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$ (rombul).*



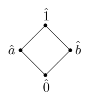
Amintim o proprietate importantă a algebrelor Boole, numită legea de reziduaţie *(a se vedea Observaţia 3.2 din Anexă): pentru orice algebră Boole B şi orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalenţa: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \leq \gamma$.*

Rezolvare: Filtrul generat de x în $\mathcal{L}_2^3$ este $< x >= \{\alpha \in \mathcal{L}_2^3 | x \leq \alpha\} = \{x, 1\}$. Congruenţa asociată acestui filtru este $\sim_{<x>} \subseteq (\mathcal{L}_2^3)^2$, definită prin: pentru orice $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_2^3$, $\alpha \sim_{<x>} \beta$ ddacă, prin definiţie, $\alpha \leftrightarrow \beta \in < x >$, adică, explicitând definiţia operaţiei $\leftrightarrow$, $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \in < x >$, ceea ce, conform descrierii de mai sus a filtrului $< x >$, este echivalent cu $x \leq (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$, iar definiţia operaţiei $\wedge = \inf$ ne asigură de faptul că această inegalitate este echivalentă cu următoarele două: $x \leq \alpha \rightarrow \beta$ şi $x \leq \beta \rightarrow \alpha$. Conform echivalenţei amintite în enunţ şi demonstrate în Observaţia 3.2 din Anexă, aceste două inegalităţi sunt echivalente cu: $x \wedge \alpha \leq \beta$ şi $x \wedge \beta \leq \alpha$, iar acestea sunt echivalente cu: $x \wedge \alpha \leq x \wedge \beta$ şi $x \wedge \beta \leq x \wedge \alpha$, după cum se poate demonstra imediat prin dublă implicaţie. Aceste ultime două inegalităţi sunt echivalente cu egalitatea $x \wedge \alpha = x \wedge \beta$. Aşadar, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_2^3$, $\alpha \sim_{<x>} \beta$ ddacă $x \wedge \alpha = x \wedge \beta$.

Pentru orice $\alpha \in \mathcal{L}_2^3$, vom nota cu $\hat{\alpha}$ clasa de echivalenţă a elementului α în algebra Boole factor $\mathcal{L}_2^3 / < x >$, anume $\hat{\alpha} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \wedge \alpha = x \wedge \beta\}$. Aşadar, avem:

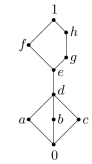
$\hat{0} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \wedge \beta = 0\} = \{0, c\} = \hat{c}$;
$\hat{a} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \wedge \beta = a\} = \{a, y\} = \hat{y}$;
$\hat{b} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \wedge \beta = b\} = \{b, z\} = \hat{z}$;
$\hat{x} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \wedge \beta = x\} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \leq \beta\} =< x >= \{x, 1\} = \hat{1}$.

Prin urmare, $\mathcal{L}_2^3 / < x > = \{\hat{0}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{1}\}$, deci această algebră Boole are 4 elemente, şi teorema de reprezentare a lui Stone pentru cazul particular al algebrelor Boole finite ne asigură de faptul că $\mathcal{L}_2^3 / < x >$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$. Diagrama Hasse a acestei algebre Boole factor este următoarea:

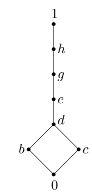


Exerciţiul 1.2. *Să se construiască o latice cu 10 elemente care să aibă ca sublatici disjuncte pentagonul şi diamantul şi să i se pună în evidenţă o sublatice distributivă cu 8 elemente.*

Rezolvare: Fie laticea $L = \{0, a, b, c, d, e, f, g, h, 1\}$, cu următoarea diagramă Hasse:



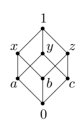
L are 10 elemente şi este chiar suma directă dintre diamant şi pentagon. Observăm că submulţimea cu 8 elemente $M = \{0, b, c, d, e, g, h, 1\} = L \setminus \{a, f\}$ a lui L este o sublatice a lui L, pentru că este închisă la supremumul şi infimumul de două elemente, adică, pentru orice $\alpha, \beta \in M$, au loc: $\alpha \vee \beta = \sup\{\alpha, \beta\} \in M$ şi $\alpha \wedge \beta = \inf\{\alpha, \beta\} \in M$. Iată diagrama Hasse a laticii M, din care se observă că nici diamantul, nici pentagonul nu sunt sublatici ale lui M, prin urmare un rezultat din curs ne asigură de faptul că M este latice distributivă:



2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Se consideră algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ (cubul), reprezentată prin diagrama Hasse de mai jos. Să se determine algebra Boole factor asociată*

filtrului generat de a, prin enumerarea elementelor ei. Să se demonstreze că această algebră Boole este izomorfă cu $\mathcal{L}_2$ (algebra Boole standard).



*Ca şi în Exerciţiul 1.1, facem trimitere la Observaţia 3.2 din Anexă (*legea de reziduaţie*).*

Rezolvare: Filtrul generat de a în $\mathcal{L}_2^3$ este $< a >= \{\alpha \in \mathcal{L}_2^3 | a \leq \alpha\} = \{a, x, y, 1\}$. Mai departe, rezolvarea decurge la fel ca aceea a Exerciţiului 1.1.

Pentru orice $\alpha \in \mathcal{L}_2^3$, vom nota cu $\hat{\alpha}$ clasa de echivalenţă a elementului α în algebra Boole factor $\mathcal{L}_2^3 / < a >$. La fel ca în Exerciţiul 1.1, se arată că, pentru orice $\alpha \in \mathcal{L}_2^3$, $\hat{\alpha} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \alpha = a \wedge \beta\}$. Aşadar, avem:

$\hat{0} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \beta = 0\} = \{0, b, c, z\} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{z} = \mathcal{L}_2^3 \setminus < a >$;
$\hat{a} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \beta = a\} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | a \leq \beta\} =< a >= \{a, x, y, 1\} = \hat{x} = \hat{y} = \hat{1}$.

Prin urmare, $\mathcal{L}_2^3 / < a > = \{\hat{0}, \hat{1}\}$, deci această algebră Boole are 2 elemente, şi teorema de reprezentare a lui Stone pentru cazul particular al algebrelor Boole finite ne asigură de faptul că $\mathcal{L}_2^3 / < a >$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2$. Diagrama Hasse a acestei algebre Boole factor este următoarea:

Exerciţiul 2.2. *Considerăm sistemul formal al calculului propoziţional clasic, în care notăm cu E mulţimea enunţurilor. Să se demonstreze semantic următoarea regulă de deducţie:*

$$\frac{\Sigma_1 \cup \{\varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi; \Sigma_2 \cup \{\psi\} \vdash \chi \rightarrow \varphi}{\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\chi \wedge \psi)},$$

pentru orice mulţimi de enunţuri $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq E$ şi pentru orice enunţuri $\varphi, \psi, \chi \in E$.

Rezolvare: Conform teoremei de completitudine tare, este suficient să demonstrăm că: dacă $\Sigma_1 \cup \{\varphi\} \vDash \psi \rightarrow \chi$ şi $\Sigma_2 \cup \{\psi\} \vDash \chi \rightarrow \varphi$, atunci $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \vDash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\chi \wedge \psi)$.

Presupunem aşadar că $\Sigma_1 \cup \{\varphi\} \vDash \psi \rightarrow \chi$ şi $\Sigma_2 \cup \{\psi\} \vDash \chi \rightarrow \varphi$.

Fie V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic, $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$ algebra Boole standard şi h o interpretare care este un model pentru mulţimea de enunţuri $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, adică o funcţie $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ astfel încât $h \vDash \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Ştim că, dată h, există o unică funcţie $\tilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ care restricţionată la V este egală cu h şi care comută cu $\neg$ şi $\rightarrow$, unde $\neg$ şi $\rightarrow$ pe E sunt conectori logici, iar $\neg$ şi $\rightarrow$ pe $\mathcal{L}_2$ sunt operaţii de algebră Boole. Faptul că $h \vDash \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, adică h este un model pentru mulţimea de enunţuri $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, adică h satisface $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, semnifică, prin definiţie, că $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Avem de demonstrat că $\tilde{h}((\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\chi \wedge \psi)) = 1$, ceea ce este echivalent cu faptul că $(\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)) \leftrightarrow (\tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)) = 1$, egalitate care la rândul ei este echivalentă cu $\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)$ (a se vedea proprietăţile algebrelor Boole pentru această ultimă echivalenţă).

Cazul 1: Dacă $\tilde{h}(\psi) = 0$, atunci $\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = 0 = \tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)$.

Cazul 2: Dacă $\tilde{h}(\psi) = 1$, atunci, cum, prin alegerea lui h, avem că $h \vDash \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ şi deci în particular $h \vDash \Sigma_2$, rezultă că $h \vDash \Sigma_2 \cup \{\psi\}$. Prin ipoteză, $\Sigma_2 \cup \{\psi\} \vDash \chi \rightarrow \varphi$. În consecinţă, $\tilde{h}(\chi \rightarrow \varphi) = 1$, adică $\tilde{h}(\chi) \rightarrow \tilde{h}(\varphi) = 1$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\chi) \leq \tilde{h}(\varphi)$, conform proprietăţilor algebrelor Boole.

Cazul 2.1: Dacă, în plus faţă de ipoteza $\tilde{h}(\psi) = 1$, avem că $\tilde{h}(\varphi) = 0$, atunci relaţia $\tilde{h}(\chi) \leq \tilde{h}(\varphi)$ de mai sus implică $\tilde{h}(\chi) = 0$ şi prin urmare $\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = 0 = \tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)$.

Cazul 2.2: Dacă, în plus faţă de ipoteza $\tilde{h}(\psi) = 1$, avem că $\tilde{h}(\varphi) = 1$, atunci, cum $h \vDash \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ şi deci în particular $h \vDash \Sigma_1$, rezultă că $h \vDash \Sigma_1 \cup \{\varphi\}$. Prin ipoteză, $\Sigma_1 \cup \{\varphi\} \vDash \psi \rightarrow \chi$. În consecinţă, $\tilde{h}(\psi \rightarrow \chi) = 1$, adică $\tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\chi) = 1$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\psi) \leq \tilde{h}(\chi)$, conform proprietăţilor algebrelor Boole. Dar $\tilde{h}(\psi) = 1$, conform ipotezei cazului 2. Rezultă că $\tilde{h}(\chi) = 1$ şi deci $\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = 1 = \tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)$.

În concluzie, pentru orice interpretare h care este model pentru $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, are loc $\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)$, ceea ce, precum am observat la începutul rezolvării, este echivalent cu $\tilde{h}((\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\chi \wedge \psi)) = 1$. Întrucât h a fost aleasă arbitrar dintre interpretările care satisfac $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, conchidem că $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \vDash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\chi \wedge \psi)$, şi regula de deducţie din enunţ este demonstrată.

3 Anexă

Lema 3.1. *Fie L o latice şi $a, b, x \in L$ astfel încât $a \leq b$. Atunci: $a \vee x \leq b \vee x$ şi $a \wedge x \leq b \wedge x$.*

Demonstraţie: Din definiţia relaţiei de ordine într-o latice (a se vedea demonstraţia echivalenţei celor două definiţii ale laticii), avem echivalenţa: $a \leq b$ ddacă $a \vee b = b$. Rezultă că $(a \vee x) \vee (b \vee x) = a \vee x \vee b \vee x = a \vee b \vee x \vee x = a \vee b \vee x = (a \vee b) \vee x = b \vee x$. Am folosit asociativitatea, comutativitatea şi idempotenţa operaţiei $\vee$, precum şi egalitatea $a \vee b = b$ de mai sus. Aşadar, am obţinut egalitatea $(a \vee x) \vee (b \vee x) = b \vee x$, care, în conformitate cu definiţia relaţiei de ordine într-o latice, este echivalentă cu inegalitatea $a \vee x \leq b \vee x$.

Tot din definiţia relaţiei de ordine într-o latice, avem echivalenţa: $a \leq b$ ddacă $a \wedge b = a$. Rezultă că $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge x \wedge b \wedge x = a \wedge b \wedge x \wedge x = a \wedge b \wedge x = (a \wedge b) \wedge x = a \wedge x$. Am folosit asociativitatea, comutativitatea şi idempotenţa operaţiei $\wedge$, precum şi egalitatea $a \wedge b = a$ de mai sus. Aşadar, am obţinut egalitatea $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge x$, care, în conformitate cu definiţia relaţiei de ordine într-o latice, este echivalentă cu inegalitatea $a \wedge x \leq b \wedge x$.

Observaţia 3.2 (Legea de reziduaţie). *Fie B o algebră Boole. Atunci, pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalenţa: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \leq \gamma$.*

Demonstraţie: Vom demonstra echivalenţa din enunţ prin dublă implicaţie. A se vedea mai jos o a doua demonstraţie.
"$\Leftarrow$": Dacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$, atunci, conform Lemei 3.1, luând supremumul dintre fiecare membru al acestei inegalităţi şi $\overline{\beta}$, obţinem: $(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\beta} \leq \gamma \vee \overline{\beta}$. În această inegalitate aplicăm distributivitatea unei algebre Boole şi definiţia implicaţiei într-o algebră Boole, şi obţinem inegalitatea echivalentă: $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge (\beta \vee \overline{\beta}) \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge 1 \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $\alpha \vee \overline{\beta} \leq \beta \rightarrow \gamma$, de unde, întrucât $\alpha \leq \sup\{\alpha, \overline{\beta}\} = \alpha \vee \overline{\beta}$ şi aplicând tranzitivitatea unei relaţii de ordine, rezultă: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$.
"$\Rightarrow$": Dacă $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică, explicitând definiţia implicaţiei într-o algebră Boole, $\alpha \leq \overline{\beta} \vee \gamma$, atunci, conform Lemei 3.1, luând infimumul dintre fiecare membru al acestei inegalităţi şi β, obţinem: $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \vee \gamma) \wedge \beta$, adică, aplicând distributivitatea unei algebre Boole, $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq 0 \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq \gamma \wedge \beta$. Aplicând în această ultimă inegalitate faptul că $\gamma \wedge \beta = \inf\{\gamma, \beta\} \leq \gamma$ şi tranzitivitatea unei relaţii de ordine, obţinem: $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Lema 3.3. *Fie B o algebră Boole şi $x, y, z \in B$. Atunci:*

(i) $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$*;*

(ii) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ *şi* $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ *(*legile lui de Morgan*);*

(iii) $x \leq y$ *ddacă* $x \rightarrow y = 1$ *(de unde rezultă imediat că:* $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$*);*

(iv) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \wedge y) \rightarrow z = y \rightarrow (x \rightarrow z)$*.*

Demonstraţie: Punctul (i) este imediat, echivalenţa fiind demonstrată prin dublă implicaţie astfel: $x = y$ implică $\overline{x} = \overline{y}$ implică $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, ceea ce este echivalent cu $x = y$. Am folosit unicitatea complementului şi idempotenţa operaţiei de complementare, care rezultă tot din unicitatea complementului într-o algebră Boole (chiar în orice latice distributivă cu 0 şi 1, unde nu este asigurată existenţa complementului, însă).

Legile lui de Morgan (punctul (ii)) se demonstrează imediat aplicând definiţia complementului şi unicitatea lui pentru orice element al unei algebre Boole. Mai precis, prima relaţie se demonstrează arătând că elementul $\overline{x} \wedge \overline{y}$ satisface cele două relaţii care definesc complementul lui $x \vee y$ (anume disjuncţia lui cu $x \vee y$ este egală cu 1 şi conjuncţia lui cu $x \vee y$ este egală cu 0). Se procedează la fel pentru cealaltă relaţie.
(iii) Aplicând Lema 3.1, obţinem: dacă $x \leq y$, atunci $x \wedge \overline{y} \leq y \wedge \overline{y} = 0$, prin urmare $x \wedge \overline{y} = 0$; reciproc, folosind distributivitatea unei algebre Boole, obţinem: dacă $x \wedge \overline{y} = 0$, atunci $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$, aşadar $y = y \vee x$, adică $x \leq y$, conform definiţiei lui $\leq$. Am obţinut: $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$. Acum aplicăm punctele (i) şi (ii) (legile lui de Morgan) şi obţinem: $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$ ddacă $\overline{x \wedge \overline{y}} = \overline{0}$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{\overline{y}} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$ ddacă $x \rightarrow y = 1$, conform definiţiei implicaţiei.
(iv) Aplicăm definiţia implicaţiei şi punctul (ii) (legile lui de Morgan): $x \rightarrow (y \rightarrow z) = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z = \overline{x \wedge y} \vee z = (x \wedge y) \rightarrow z$, iar ultima egalitate din enunţ rezultă din comutativitatea lui $\wedge$ şi prima egalitate din enunţ.

Demonstraţia a doua pentru legea de reziduaţie (Observaţia 3.2): Fie $\alpha, \beta, \gamma \in B$. Conform Lemei 3.3, punctele (iii) şi (iv), avem: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$ ddacă $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) = 1$ ddacă $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma = 1$ ddacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a IV-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Emailuri: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@gmail.com

Abstract

Textul de faţă conţine o colecţie de probleme de diferite tipuri date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

Peste tot în acest text, prescurtarea ddacă va semnifica "dacă şi numai dacă".

Amintim următoarea notaţie: pentru orice $m, n \in \mathbb{Z}$ cu $m \leq n$, se notează $\overline{m, n} = \{m, m+1, \ldots, n-1, n\} \subset \mathbb{Z}$.

Fie A o mulţime oarecare. Amintim că o *relaţie binară pe A* este o submulţime a produsului cartezian $A \times A$, produs notat şi A^2; în particular, A^2 este o relaţie binară pe A, anume cea mai mare relaţie binară pe A raportat la relaţia de incluziune între relaţii binare pe A.

Dacă R şi S sunt două relaţii binare pe A, atunci, prin definiţie, *compunerea* lor este următoarea relaţie binară pe A: $R \circ S = \{(a, c) \in A \times A \mid (\exists b \in A)(a, b) \in S$ şi $(b, c) \in R\}$. De asemenea, pentru orice n natural, R^n este o relaţie binară pe A, definită prin: $R^0 = \Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ (*diagonala lui A*) şi, pentru orice n natural, $R^{n+1} = R^n \circ R$. Este evident că Δ_A este element neutru la compunerea de relaţii binare pe A (atât la stânga, cât şi la dreapta), şi deci $R^1 = R$.

Compunerea relaţiilor binare pe A este asociativă şi, în general, necomutativă. În cazul particular al compunerii puterilor aceleiaşi relaţii binare pe A însă, este satisfăcută comutativitatea, ea fiind implicată de asociativitatea compunerii; într-adevăr, asociativitatea compunerii oricăror relaţii

binare pe A ne asigură de faptul că, în şirul de compuneri de mai jos, nu contează unde punem parantezele, şi, prin urmare, pentru orice $n, k \in \mathbb{N}^*$, este valabil următorul şir de egalităţi: $R^n \circ R^k = \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n \text{ de } R} \circ \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{k \text{ de } R} = \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n+k \text{ de } R} = \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{k \text{ de } R} \circ \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n \text{ de } R} = R^k \circ R^n$. Privind, în acest şir de egalităţi, primul membru, membrul din mijloc şi ultimul membru, putem adăuga faptul că: $R^n \circ R^k = R^{n+k} = R^k \circ R^n$. Faptul că $\Delta_A = R^0$ este element neutru la compunere şi deci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $R^n \circ R^0 = R^n \circ \Delta_A = R^n = \Delta_A \circ R^n = R^0 \circ R^n$ (şi, desigur, $R^n = R^{n+0}$), ne arată că relaţia $R^n \circ R^k = R^{n+k} = R^k \circ R^n$ este valabilă pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$ (nu neapărat nenule). În fapt, se poate arăta că această relaţie este valabilă pentru orice $n, k \in \mathbb{Z}$, dacă definim R^{-1} ca mai jos şi, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, definim $R^{-n} = (R^{-1})^n$; dar nu vom folosi această generalizare în cele ce urmează.

Inversa relaţiei R este o relaţie binară pe A notată R^{-1} şi definită prin: $R^{-1} = \{(b, a) \in A^2 \mid (a, b) \in R\}$. Amintim că $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Fie A o mulţime nevidă şi R o relaţie binară tranzitivă pe A. Demonstraţi că:*

(i) pentru orice n natural nenul, $R^{n+1} \subseteq R^n$;

(ii) pentru orice n natural, R^n este tranzitivă.

Rezolvare: Fie S o relaţie binară oarecare pe A. Conform definiţiei, S este tranzitivă ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă $(a, b) \in S$ şi $(b, c) \in S$, atunci $(a, c) \in S$, ceea ce este echivalent cu faptul că $S^2 \subseteq S$.
(i) Procedăm prin inducţie matematică după n natural nenul. Pentru $n = 1$, conform celor de mai sus, $R^2 \subseteq R$ pentru că R este tranzitivă. Presupunând relaţia $R^{n+1} \subseteq R^n$ valabilă pentru un n natural nenul arbitrar, fixat, compunem în această relaţie cu R (nu contează dacă aplicăm compunerea la dreapta sau la stânga, datorită comutativităţii demonstrate mai sus pe un caz particular în care ne încadrăm aici) şi obţinem: $R^{n+2} \subseteq R^{n+1}$. Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că $R^{n+1} \subseteq R^n$ pentru orice n natural nenul.

(ii) Pentru $n = 0$, $R^0 = \Delta_A$ este tranzitivă întrucât $\Delta_A^2 = \Delta_A \circ \Delta_A = \Delta_A \supseteq \Delta_A$. Putem menţiona că, pentru $n = 1$, $R^1 = R$ este tranzitivă din ipoteză, cu toate că acest caz este cuprins în următorul. Pentru orice n natural nenul, $2n > n \geq 1$, aşadar, conform punctului (i), $R^{2n} \subseteq R^{2n-1} \subseteq \ldots \subseteq R^{n+1} \subseteq R^n$, prin urmare $(R^n)^2 = R^{2n} \subseteq R^n$ şi deci R^n este tranzitivă.

Exerciţiul 1.2. *Considerăm algebra Boole standard $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$, cu $0 \lneq 1$, ca submulţime a mulţimii numerelor naturale: $\mathcal{L}_2 = \{0,1\} \subset \mathbb{N}$, având relaţia de ordine dată de ordinea naturală de pe $\mathbb{N}$ şi operaţiile disjuncţie, conjuncţie şi negaţie definite uzual: pentru orice $x, y \in \mathcal{L}_2$, $x \vee y = \max\{x,y\}$, $x \wedge y = \min\{x,y\}$, $\overline{x} = 1 - x$. Fie n natural nenul şi algebra Boole $(\mathcal{L}_2^n, \vee, \wedge, ^-, 0_n, 1_n)$, cu $\mathcal{L}_2^n = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{L}_2\}$ şi operaţiile definite uzual, pe componente, pe baza operaţiilor lui $\mathcal{L}_2$: pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n$ ca mai sus:*

$$\begin{cases} (x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n), \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n), \\ \overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}), \\ 0_n = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ de } 0}, \\ 1_n = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ de } 1}. \end{cases}$$

Relaţia de ordine de pe $\mathcal{L}_2^n$, notată $\leq$, este definită pe baza relaţiei de ordine de pe $\mathcal{L}_2$ astfel: pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n$, are loc $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ddacă: $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, …, $x_{n-1} \leq y_{n-1}$ şi $x_n \leq y_n$.

Pentru orice k natural, notăm $A_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}_2^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\} \subseteq \mathcal{L}_2^n$, unde operaţia $+$ este adunarea obişnuită din $\mathbb{N}$.

Demonstraţi că:

(i) $\mathcal{L}_2^n = A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$ şi mulţimile A_k, cu $k \in \mathbb{N}$, sunt două câte două disjuncte;

(ii) $A_k \neq \emptyset$ ddacă $k \in \overline{0,n}$;

(iii) pentru orice $k \in \overline{0,n}$ şi orice $x \in A_k$, are loc: $\overline{x} \in A_{n-k}$;

(iv) pentru orice $k, l \in \overline{0,n}$, orice $x \in A_k$ şi orice $y \in A_l$, au loc: $x \vee y \in \bigcup_{j=\max\{k,l\}}^{k+l} A_j$ şi $x \wedge y \in \bigcup_{j=0}^{\min\{k,l\}} A_j$;

(v) pentru orice $k \in \overline{0,n}$ şi orice $x \in A_k$, filtrul principal generat de x în algebra Boole $\mathcal{L}_2^n$, notat $< x >$, are proprietăţile: $< x > \subseteq \bigcup_{j=k}^{n} A_j$ şi cardinalul său este $| < x > | = 2^{n-k}$.

Rezolvare: (i) Pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}_2^n$, avem: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{L}_2 = \{0,1\}$, aşadar $0 \leq x_j \leq 1$ pentru orice $j \in \overline{1,n}$, şi deci $0 = \underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{n \text{ de } 0} \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ de } 1} = n$, aşadar $x \in A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$. Am obţinut: $\mathcal{L}_2^n \subseteq A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$. Dar, prin definiţie, $A_k \subseteq \mathcal{L}_2^n$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, prin urmare avem şi incluziunea în sens invers: $A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n \subseteq \mathcal{L}_2^n$. Deci $\mathcal{L}_2^n = A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$.

Conform definiţiei mulţimilor A_k, cu $k \in \mathbb{N}$, pentru orice $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ cu $k_1 \neq k_2$ şi orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_{k_1}$, avem $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k_1 \neq k_2$, deci $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin A_{k_2}$. Aşadar $A_{k_1} \cap A_{k_2} = \emptyset$, şi deci mulţimile A_k, cu $k \in \mathbb{N}$, sunt două câte două disjuncte.

(ii) Este evident că, pentru orice $k \in \overline{0,n}$, $A_k \neq \emptyset$, pentru că, de exemplu, $(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k \text{ de } 1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-k \text{ de } 0}) \in A_k$.

Acum fie $k \in \mathbb{N} \setminus \overline{0,n}$. Presupunem prin absurd că există $x \in A_k$. Conform punctului (i), A_k este disjunctă de fiecare dintre mulţimile $A_0, \ldots, A_n$, aşadar $x \notin A_0, \ldots, x \notin A_n$, deci $x \notin A_0 \cup \ldots \cup A_n = \mathcal{L}_2^n$ (am aplicat din nou punctul (i)). Dar, prin ipoteză, $x \in A_k \subseteq \mathcal{L}_2^n$. Am obţinut $x \in \mathcal{L}_2^n$ şi $x \notin \mathcal{L}_2^n$; contradicţie. Prin urmare, $A_k = \emptyset$ pentru orice $k \in \mathbb{N} \setminus \overline{0,n}$.

Demonstraţia punctului (ii) este completă.

(iii) Fie $k \in \overline{0,n}$ şi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_k$, aşadar $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$. $\overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) = (1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_n)$, prin urmare $\overline{x} \in A_j$, cu $j = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_n} = 1 - x_1 + 1 - x_2 + \ldots + 1 - x_n = n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = n - k$, deci $\overline{x} \in A_{n-k}$.

(iv) Să observăm că, pentru orice $p \in \overline{0,n}$ şi orice $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathcal{L}_2^n$, are loc: $z \in A_p$ ddacă $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = p$ ddacă există o submulţime $P \subseteq \overline{1,n}$ astfel încât $|P| = p$ şi:

$$\begin{cases} (\forall j \in P) & z_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1,n} \setminus P) & z_j = 0, \end{cases}$$

deoarece $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathcal{L}_2 = \{0,1\}$.

Fie $k, l \in \overline{0,n}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_k$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A_l$, aşadar există submulţimile $K \subseteq \overline{1,n}$ şi $L \subseteq \overline{1,n}$, astfel încât $|K| = k$, $|L| = l$ şi:

$$\begin{cases} (\forall j \in K) & x_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1,n} \setminus K) & x_j = 0, \\ (\forall j \in L) & y_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1,n} \setminus L) & y_j = 0. \end{cases}$$

$x \vee y = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$ şi avem:

$$\begin{cases} (\forall j \in K \cup L) & x_j \vee y_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1,n} \setminus (K \cup L))) & x_j \vee y_j = 0, \end{cases}$$

prin urmare $x \vee y \in A_{|K \cup L|}$. Dar $K \subseteq K \cup L$ şi $L \subseteq K \cup L$, aşadar $k = |K| \leq |K \cup L|$ şi $l = |L| \leq |K \cup L|$, deci $\max\{k,l\} \leq |K \cup L|$. Pe de altă parte, $|K \cup L| = |K| + |L| - |K \cap L| \leq |K| + |L| = k + l$. Am obţinut: $x \vee y \in A_{|K \cup L|}$ şi $\max\{k,l\} \leq |K \cup L| \leq k + l$, de unde rezultă că $x \vee y \in \bigcup_{j=\max\{k,l\}}^{k+l} A_j$.

$x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$ şi avem:

$$\begin{cases} (\forall j \in K \cap L) & x_j \wedge y_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1,n} \setminus (K \cap L))) & x_j \wedge y_j = 0, \end{cases}$$

prin urmare $x \wedge y \in A_{|K \cap L|}$. Dar $K \cap L \subseteq K$ şi $K \cap L \subseteq L$, aşadar $|K \cap L| \leq |K| = k$ şi $|K \cap L| \leq |L| = l$, deci $0 \leq |K \cap L| \leq \min\{k,l\}$. Am obţinut: $x \wedge y \in A_{|K \cap L|}$ şi $0 \leq |K \cup L| \leq \min\{k,l\}$, de unde rezultă că $x \wedge y \in \bigcup_{j=0}^{\min\{k,l\}} A_j$.

(v) Fie $k \in \overline{0,n}$ şi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_k$. Ştim că filtrul principal generat de un element într-o algebră Boole este mulţimea majoranţilor acelui element din respectiva algebră Boole, aşadar: $< x >= \{y \in \mathcal{L}_2^n \mid x \leq y\} = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n \mid x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, \ldots, x_n \leq y_n\}$. Rezultă că, pentru orice $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in < x >$, $k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq y_1 + y_2 + \ldots + y_n \leq \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ de } 1} = n$, aşadar $y_1 + y_2 + \ldots + y_n \in \overline{k,n}$, prin urmare $y \in \bigcup_{j=k}^{n} A_j$. Am obţinut: $< x > \subseteq \bigcup_{j=k}^{n} A_j$.

Pentru a calcula cardinalul filtrului generat de x, avem nevoie de o exprimare mai precisă a elementelor acestui filtru. Conform observaţiei de la începutul rezolvării punctului (iv), faptul că $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_k$ este echivalent cu faptul că există $K \subseteq \overline{1,n}$, având $|K| = k$, astfel încât:

$$\begin{cases} (\forall j \in K) & x_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1,n} \setminus K) & x_j = 0. \end{cases}$$

Rezultă: $< x >= \{y \in \mathcal{L}_2^n \mid x \leq y\} = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n \mid x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, \ldots, x_n \leq y_n\} = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n \mid (\forall j \in K) 1 \leq y_j, (\forall j \in \overline{1,n} \setminus K) 0 \leq y_j\} = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n \mid (\forall j \in K) y_j = 1\}$, celelalte componente ale unui element y care majorează pe x putând lua orice valoare, deoarece componentele corespunzătoare ale lui x au valoarea 0. Aşadar, pentru orice $y \in < x >$, k componente ale lui y sunt fixate, putând lua doar valoarea 1, iar celelalte $n - k$ componente pot lua oricare dintre valorile 0 şi 1, deci fiecare dintre aceste $n - k$ componente poate lua 2 valori. Numărul acestor elemente $y \in < x >$ este aşadar egal cu $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-k \text{ de } 2} = 2^{n-k}$, prin urmare $| < x > | = 2^{n-k}$.

2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Fie n un număr natural nenul şi mulţimea $A = \overline{0,n}$. Considerăm relaţia binară pe A: $R = \{(k, k+1) \mid k \in \overline{0, n-1}\} \cup \{(n, 0)\}$. Demonstraţi că:*

(i) pentru orice i natural, $R^i = \{(k,l) \in A^2 \mid (n+1) | (l - k - i)\}$, unde a doua bară orizontală reprezintă relaţia "divide pe" între două numere întregi;

(ii) $T(R) = A^2$, unde $T(R)$ este închiderea tranzitivă a relaţiei R.

Rezolvare: (i) $R^0 = \Delta_A = \{(k,k) \mid k \in A = \overline{0,n}\}$. $\{(k,l) \in A^2 = \overline{0,n}^2 \mid (n+1) | (l - k - 0)\} = \{(k,l) \in A^2 = \overline{0,n}^2 \mid (n+1) | (l - k)\} = \{(k,l) \in A^2 = \overline{0,n}^2 \mid k = l\} = R^0$, unde penultima egalitate este dedusă din faptul că, pentru orice $k, l \in \overline{0,n}$, are loc: $0 - n \leq l - k \leq n - 0$, deci $l - k \in \overline{-n,n}$, iar singurul număr din $\overline{-n,n}$ care se divide cu $n + 1$ este 0.

Pentru a obţine relaţiile din enunţ pentru $i \in \mathbb{N}^*$, procedăm prin inducţie matematică după i.

Pentru $i = 1$, $\{(k,l) \in A^2 = \overline{0,n}^2 \mid (n+1)|(l-k-1)\} = R$, pentru că, oricare ar fi $k, l \in \overline{0,n}$, are loc: $l-k-1 \in \overline{-n-1, n-1}$, iar singurele numere din $\overline{-n-1, n-1}$ care se divid cu $n+1$ sunt $-n-1$ şi 0, şi faptul că:

$$\begin{cases} l-k-1 \in \{-n-1, 0\} \\ \text{şi} \\ k, l \in \overline{0,n} \end{cases}$$

este echivalent cu:

$$\begin{cases} (k,l) = (n,0) \\ \text{sau} \\ (k,l) \in \{(j, j+1) \mid j \in \overline{0, n-1}\}, \end{cases}$$

adică: $(k,l) \in R$.

Acum să presupunem că, pentru un $i \in \mathbb{N}^*$ arbitrar, fixat, $R^i = \{(k,l) \in A^2 \mid (n+1)|(l-k-i)\}$. Atunci $R^{i+1} = R^i \circ R = \{(k,m) \in A^2 \mid (\exists l \in A)(k,l) \in R$ şi $(l,m) \in R^i\} = \{(k,m) \in A^2 \mid (\exists l \in A)(n+1)|(l-k-1)$ şi $(n+1)|(m-l-i)\}$. Pentru orice $k, l, m \in \mathbb{Z}$, dacă $(n+1)|(l-k-1)$ şi $(n+1)|(m-l-i)$, atunci $(n+1)|(l-k-1+m-l-i)$, ceea ce este echivalent cu $(n+1)|(m-k-(i+1))$. Aşadar, $R^{i+1} \subseteq \{(k,m) \in A^2 \mid (n+1)|(m-k-(i+1))\}$. Să notăm mulţimea $\{(k,m) \in A^2 \mid (n+1)|(m-k-(i+1))\}$ cu B_{i+1}. Am demonstrat că $R^{i+1} \subseteq B_{i+1}$.

Pentru a obţine incluziunea în sens invers, să observăm că, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(n+1)|(\alpha+\beta)$, există (chiar un unic) $l \in \overline{0,n}$ astfel încât $(n+1)|(\alpha+l)$ şi $(n+1)|(\beta-l)$; într-adevăr, mulţimea $\overline{0,n}$ este formată din $n+1$ numere naturale consecutive, prin urmare şi mulţimea $\{\alpha+l \mid l \in \overline{0,n}\} = \overline{\alpha, \alpha+n}$ este formată din $n+1$ numere naturale consecutive, aşadar (exact) unul dintre elementele acestei mulţimi se divide cu $n+1$, adică există un (unic) $l \in \overline{0,n}$ astfel încât $(n+1)|(\alpha+l)$, iar faptul suplimentar că $(n+1)|(\alpha+\beta)$ implică $(n+1)|(\alpha+\beta-(\alpha+l))$, adică $(n+1)|(\beta-l)$.

Acum să luăm $(k,m) \in B_{i+1}$, adică, $k, m \in A = \overline{0,n}$ astfel încât $(n+1)|(m-k-(i+1))$. Luând în afirmaţia anterioară $\alpha = -k-1$ şi $\beta = m-i$, rezultă că există un (unic) $l \in A = \overline{0,n}$ astfel încât $(n+1)|(l-k-1)$ şi $(n+1)|(m-l-i)$, şi deci $(k,m) \in R^{i+1}$ conform expresiei lui R^{i+1} de mai sus. Am demonstrat aşadar că are loc şi $B_{i+1} \subseteq R^{i+1}$.

Conchidem că $R^{i+1} = B_{i+1} = \{(k,m) \in A^2 \mid (n+1)|(m-k-(i+1))\}$, şi principiul inducţiei matematice ne asigură de faptul că relaţia din enunţ este valabilă pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar relaţia din enunţ este satisfăcută pentru orice $i \in \mathbb{N}$.
(ii) Amintim formula închiderii tranzitive a unei relaţii binare: $T(R) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} R^i$. Aplicăm acum punctul (i): $T(R) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} R^i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \{(k,l) \in A^2 \mid (n+1)|(l-k-i)\} = \{(k,l) \in A^2 \mid (\exists i \in \mathbb{N}^*)(n+1)|(l-k-i)\}$. $T(R)$ este o relaţie binară pe A, deci $T(R) \subseteq A^2$. Evident, pentru orice $(k,l) \in A^2 = \overline{0,n}^2$, există (chiar o infinitate de) $i \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $(n+1)|(l-k-i)$ (orice $i = l-k+(n+1)\alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{N}^*$, satisface: $i \in \mathbb{N}^*$ şi $(n+1)|(l-k-i)$), prin urmare are loc şi incluziunea în sens invers: $A^2 \subseteq T(R)$. Aşadar $T(R) = A^2$.

Exerciţiul 2.2. *Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ o latice cu 0 şi 1. Pentru orice $x \in L$, notăm cu $C(x)$ mulţimea complemenţilor lui x în L. Definim relaţia binară $\sim$ pe L prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \sim y$ ddacă $x \in C(y)$ (adică x este complement al lui y). Demonstraţi că:*

(i) $\sim$ este simetrică şi $\sim \neq \emptyset$;

(ii) $\sim$ este reflexivă ddacă L este trivială (adică L are un singur element, adică $0 = 1$ în L, adică $L = \{0\}$, adică $L = \{1\}$);

(iii) $\sim$ este tranzitivă ddacă L este trivială;

(iv) $\bigcup_{x \in L \setminus \{0,1\}} C(x) \subseteq L \setminus \{0,1\}$.

Rezolvare: (i) Conform definiţiei unui complement al unui element într-o latice cu 0 şi 1, pentru orice $x, y \in L$, $x \sim y$ ddacă $x \in C(y)$ ddacă $x \vee y = 1$ şi $x \wedge y = 0$ ddacă $y \in C(x)$ (amintim că operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ sunt comutative) ddacă $y \sim x$. Aşadar $\sim$ este o relaţie simetrică.

$0 \vee 1 = 1$ şi $0 \wedge 1 = 0$, prin urmare $0 \in C(1)$ (şi $1 \in C(0)$), adică $0 \sim 1$ (şi $1 \sim 0$), adică $(0,1) \in \sim$ (şi $(1,0) \in \sim$). Deci $\sim \neq \emptyset$.
(ii) Conform demonstraţiei ultimei părţi a punctului (i), dacă L este trivială, deci $L = \{1\}$, atunci $1 = 0 \sim 1$, aşadar $1 \sim 1$, prin urmare $\Delta_L = \{(1,1)\} \subseteq \sim$, aşadar $\sim$ este reflexivă.

Reciproc, dacă $\sim$ este reflexivă, adică $\Delta_L \subseteq \sim$, atunci $(1,1) \in \sim$, adică $1 \sim 1$, prin urmare $1 = 1 \wedge 1 = 0$, deci $0 = 1$, adică L este trivială.
(iii) Conform demonstraţiei primei implicaţii de la punctul (ii), dacă L este trivială, adică $L = \{1\}$, atunci $L^2 = \{(1,1)\} \subseteq \sim \subseteq L^2$, prin urmare $\sim = L^2 = \{(1,1)\}$, deci $\sim$ este tranzitivă (deoarece, oricare ar fi mulţimea L, relaţia binară L^2 pe L este în mod trivial tranzitivă: oricare ar

fi $(x,y), (y,z) \in L^2$, rezultă $(x,z) \in L^2$; de asemenea, oricare ar fi mulţimea L şi 1 element al lui L, relaţia binară $\{(1,1)\}$ pe L este în mod trivial tranzitivă: oricare ar fi $(x,y), (y,z) \in \{(1,1)\}$, rezultă $x = y = z = 1$, rezultă $(x,z) = (1,1) \in \{(1,1)\}$).

Reciproc, dacă $\sim$ este tranzitivă, atunci, întrucât $(1,0), (0,1) \in \sim$ conform demonstraţiei celei de-a doua părţi a punctului (i), rezultă $(1,1) \in \sim$, deci L este trivială conform ultimei părţi a demonstraţiei celei de-a doua implicaţii a punctului (ii).
(iv) Desigur, pentru orice $x \in L$ (în particular pentru orice $x \in L \setminus \{0,1\}$), $C(x) \subseteq L$. Rămâne de demonstrat că, pentru orice $x \in L \setminus \{0,1\}$, $0, 1 \notin C(x)$. Fie aşadar $x \in L \setminus \{0,1\}$, arbitrar, fixat. Presupunem prin absurd că $0 \in C(x)$; rezultă $x = 0 \vee x = 1$, deci $x = 1$, ceea ce contravine ipotezei $x \in L \setminus \{0,1\}$; aşadar $0 \notin C(x)$. Presupunem prin absurd că $1 \in C(x)$; rezultă $x = 1 \wedge x = 0$, deci $x = 0$, ceea ce, de asemenea, este o contradicţie cu ipoteza $x \in L \setminus \{0,1\}$; aşadar $1 \notin C(x)$. Demonstraţia este încheiată.

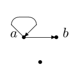
3 Lista 3 de subiecte

Exerciţiul 3.1. *Fie A o mulţime nevidă. Pentru orice relaţie binară Q pe A, notăm cu Q_{in}, Q_{out} următoarele relaţii binare pe A:*

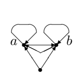
$$\begin{cases} Q_{in} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(b,c) \in Q\}, \\ Q_{out} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in Q\}. \end{cases}$$

De exemplu, dacă $A = \{a, b, c\}$ este o mulţime de cardinal 3 şi $Q = \{(a,a), (a,b)\} \subset A^2$, atunci $Q_{in} = \{(a,a), (b,a), (c,a), (a,b), (b,b), (c,b)\} \subset A^2$ şi $Q_{out} = \{(a,a), (a,b), (a,c)\} \subset A^2$. Ilustrăm grafic acest exemplu:

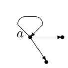
Q:



Q_{in}:



Q_{out}:



Intuitiv (făcând referire la această reprezentare a relaţiilor binare pe A ca grafuri orientate cu mulţimea de vârfuri A):

- *Q_{in} este mulţimea arcelor din A^2 care intră în vârfuri în care intră măcar un arc din Q;*
- *Q_{out} este mulţimea arcelor din A^2 care ies din vârfuri din care iese măcar un arc din Q.*

Fie R o relaţie binară nevidă pe A. Demonstraţi că:

(i) $R \subseteq R_{in} \cap R_{out}$;

(ii) $\begin{cases} R_{in} = R \circ A^2; \\ R_{out} = A^2 \circ R; \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} (R_{in})^{-1} = (R^{-1})_{out}; \\ (R_{out})^{-1} = (R^{-1})_{in}; \end{cases}$

(iv) $R_{in} \circ R_{out} = R_{in} \cap R_{out}$;

(v) dacă $R^2 \neq \emptyset$, atunci $R_{out} \circ R_{in} = A^2$.

Rezolvare: (i) Pentru orice $(a,c) \in R$, avem:
există $b \in A$ astfel încât $(b,c) \in R$, de exemplu $b = a$; aşadar $(a,c) \in R_{in}$;
există $b \in A$ astfel încât $(a,b) \in R$, de exemplu $b = c$; aşadar $(a,c) \in R_{out}$.

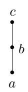
Aşadar $(a,c) \in R_{in} \cap R_{out}$, prin urmare $R \subseteq R_{in} \cap R_{out}$.
(ii) $R \circ A^2 = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in A^2$ şi $(b,c) \in R\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(b,c) \in R\} = R_{in}$, deoarece $(a,b) \in A^2$ pentru orice $(a,c) \in A^2$ şi $b \in A$.

$A^2 \circ R = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in R$ şi $(b,c) \in A^2\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in R\} = R_{out}$, deoarece $(b,c) \in A^2$ pentru orice $(a,c) \in A^2$ şi $b \in A$.
(iii) $(A^2)^{-1} = \{(b,a) \in A^2 \mid (a,b) \in A^2\} = A^2$. Aplicând punctul (ii) de câte două ori pentru fiecare dintre următoarele şiruri de egalităţi, obţinem:

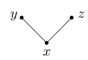
$(R_{in})^{-1} = (R \circ A^2)^{-1} = (A^2)^{-1} \circ R^{-1} = A^2 \circ R^{-1} = (R^{-1})_{out}$;
$(R_{out})^{-1} = (A^2 \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ (A^2)^{-1} = R^{-1} \circ A^2 = (R^{-1})_{in}$.
(iv) $A^2 \circ A^2 = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in A^2$ şi $(b,c) \in A^2\} = A^2$. Folosim asociativitatea compunerii de relaţii binare. Conform punctului (ii), $R_{in} \circ R_{out} = (R \circ A^2) \circ (A^2 \circ R) = R \circ (A^2 \circ A^2) \circ R = R \circ A^2 \circ R = (R \circ A^2) \circ R = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in R$ şi $(b,c) \in R \circ A^2\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b,d \in A)(a,b) \in R,\ (b,d) \in A^2$ şi $(d,c) \in R\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b,d \in A)(a,b) \in R$ şi $(d,c) \in R\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in R$ şi $(\exists d \in A)(d,c) \in R\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (a,c) \in R_{out}$ şi $(a,c) \in R_{in}\} = R_{in} \cap R_{out}$.
(v) Şi aici folosim asociativitatea compunerii de relaţii binare; a se observa că, în calculele următoare, ridicarea la puterea 2 are două semnificaţii diferite: $A^2 = A \times A$ este produsul cartezian de mulţimi, iar $R^2 = R \circ R$ este compunere de relaţii binare pe mulţimea A. Conform punctului (ii), $R_{out} \circ R_{in} = (A^2 \circ R) \circ (R \circ A^2) = A^2 \circ (R \circ R) \circ A^2 = A^2 \circ R^2 \circ A^2 = (A^2 \circ R^2) \circ A^2 = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in A^2$ şi $(b,c) \in A^2 \circ R^2\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b,d \in A)(a,b) \in A^2,\ (b,d) \in R^2$ şi $(d,c) \in A^2\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b,d \in A)(b,d) \in R^2\} = A^2$, deoarece condiţia din definiţia mulţimii anterioare, care spune că R^2 are măcar un element, este adevărată prin ipoteză: $R^2 \neq \emptyset$.

Exerciţiul 3.2. *Fie mulţimile ordonate* $(A, \leq)$ *şi* $(B, \sqsubseteq)$ *(adică* $\leq$ *şi* $\sqsubseteq$ *sunt relaţii de ordine pe mulţimile* A *şi respectiv* B*), cu câte* 3 *elemente:* $A = \{a,b,c\}$, $B = \{x,y,z\}$, *şi cu următoarele diagrame Hasse:*

$(A, \leq) = \mathcal{L}_3$:
(lanţul cu 3 *elemente)*



$(B, \sqsubseteq)$:



Determinaţi toate funcţiile izotone $f : A \to B$. *Câte astfel de funcţii există?*

Rezolvare: Amintim că o funcţie $f : A \to B$ se zice *izotonă* ddacă, pentru orice $\alpha, \beta \in A$, dacă $\alpha \leq \beta$ atunci $f(\alpha) \sqsubseteq f(\beta)$. $(A, \leq)$ este lanţul cu 3 elemente: $a \leq b \leq c$ în A. Prin urmare, funcţiile izotone $f : A \to B$ sunt funcţiile $f : A \to B$ care verifică: $f(a) \sqsubseteq f(b) \sqsubseteq f(c)$ în B.
Cazul 1*:* Dacă $f(a) = x = \min(B)$, atunci $f(b)$ poate lua orice valoare din B.

Subcazul 1.1: Dacă $f(b) = x = \min(B)$, atunci $f(c)$ poate lua orice valoare din B. În acest subcaz se obţin $|B| = 3$ funcţii f.
Subcazul 1.2: Dacă $f(b) = y$, atunci $y \sqsubseteq f(c)$, aşadar $f(c) = y$. Aici se obţine o singură funcţie f.
Subcazul 1.3: Dacă $f(b) = z$, atunci $z \sqsubseteq f(c)$, aşadar $f(c) = z$. Şi aici obţinem tot o singură funcţie f.
Cazul 2*:* Dacă $f(a) = y$, atunci $y \sqsubseteq f(b) \sqsubseteq f(c)$, ceea ce implică $f(b) = f(c) = y$. În acest caz obţinem o singură funcţie f.
Cazul 3*:* Dacă $f(a) = z$, atunci $z \sqsubseteq f(b) \sqsubseteq f(c)$, ceea ce implică $f(b) = f(c) = z$. Şi în acest caz se obţine o singură funcţie f.
Aşadar, am obţinut 7 funcţii izotone de la $(A, \leq)$ la $(B, \sqsubseteq)$: $f_i : A \to B$, cu $i \in \overline{1,7}$, date în tabelul următor:

α	a	b	c
$f_1(\alpha)$	x	x	x
$f_2(\alpha)$	x	x	y
$f_3(\alpha)$	x	x	z
$f_4(\alpha)$	x	y	y
$f_5(\alpha)$	x	z	z
$f_6(\alpha)$	y	y	y
$f_7(\alpha)$	z	z	z

Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a V-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Emailuri: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@gmail.com

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

În cele ce urmează vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

1 Mic mnemonic de definiţii şi rezultate din curs

Fie A o mulţime oarecare. Amintim că o *relaţie binară pe* A este o submulţime a produsului cartezian $A \times A$, produs notat şi A^2. Deci relaţiile binare sunt mulţimi, aşadar li se pot aplica operaţiile de reuniune şi intersecţie, precum şi relaţia de incluziune, cu aceleaşi semnificaţii ca pentru orice mulţimi. Desigur, A^2 este o relaţie binară pe A, anume cea mai mare relaţie binară pe A, în sensul incluziunii. De acum încolo, prin notaţia $(a,b) \in A^2$ vom înţelege: $a \in A$ şi $b \in A$.

Dacă R şi S sunt două relaţii binare pe A, atunci, prin definiţie, *compunerea* lor este următoarea relaţie binară pe A: $R \circ S = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)\,(a,b) \in S$ şi $(b,c) \in R\}$. De asemenea, pentru orice n natural, R^n este o relaţie binară pe A, definită prin: $R^0 = \Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ (*diagonala lui* A) şi, pentru orice n natural, $R^{n+1} = R^n \circ R$. Este evident că Δ_A este element neutru la compunerea de relaţii binare pe A (atât la stânga, cât şi la dreapta), şi deci $R^1 = R$.

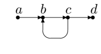
O relaţie binară R pe A este *tranzitivă* ddacă, pentru orice elemente $a,b,c \in A$, dacă $(a,b) \in R$ şi $(b,c) \in R$, atunci $(a,c) \in R$. Este imediat că orice intersecţie nevidă de relaţii binare tranzitive pe A este o relaţie binară tranzitivă pe A şi că A^2 este o relaţie binară tranzitivă pe A (care include orice altă relaţie binară pe A), iar de aici deducem că, pentru orice relaţie binară S pe A, există o cea mai mică relaţie binară tranzitivă pe A care include pe S (cea mai mică în sensul incluziunii), şi anume intersecţia tuturor relaţiilor binare tranzitive pe A care includ pe S. Această cea mai mică relaţie binară tranzitivă pe A care include pe S se notează cu $T(S)$ şi se numeşte *închiderea tranzitivă a relaţiei* S. Se demonstrează că $T(S) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$. În cazul particular în care A este o mulţime finită cu n elemente, se arată că $T(S) = \bigcup_{k=1}^{n} S^k$.

2 Lista de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Considerăm sistemul formal al calculului cu predicate. Fie signatura* $\tau = (1; 2; \emptyset)$ *şi structura de ordinul I de această signatură* $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}; R^{\mathcal{A}}; \emptyset)$*, unde* $A = \{a,b,c,d\}$ *este o mulţime cu* 4 *elemente, iar funcţia* $f^{\mathcal{A}} : A \to A$ *şi relaţia binară* $R^{\mathcal{A}}$ *pe* A *vor fi notate respectiv cu* f *şi* R*, şi sunt definite prin:* $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$, $f(d) = a$ *(vezi tabelul de mai jos) şi* $R = \{(a,b),(b,c),(c,b),(c,d)\} \subset A^2$ *(vezi reprezentarea grafică de mai jos). Să se calculeze valorile de adevăr ale enunţurilor:* $\exists\, x\, (R(x, f(x)) \wedge R(f(x), x))$ *şi* $\exists\, x\, \forall\, y\, (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y))$.

x	a	b	c	d
$f(x)$	b	c	d	a

R :



Rezolvare: Amintim că, pentru orice $t, u \in A$:

$$||R(t,u)|| = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (t,u) \in R, \\ 0, & \text{dacă } (t,u) \notin R. \end{cases}$$

Valoarea de adevăr a primului enunţ este:

$$||\exists x\,(R(x,f(x))\wedge R(f(x),x))|| =$$
$$\bigvee_{t\in A}(||R(t,f(t))||\wedge||R(f(t),t)||)=1,$$

pentru că:

$$||R(b,f(b))||\wedge||R(f(b),b)|| = ||R(b,c)||\wedge||R(c,b)|| = 1\wedge 1 = 1.$$

Al doilea enunţ are valoarea de adevăr:

$$||\exists x\,\forall y\,(R(y,f(f(x)))\vee R(f(x),y))|| =$$
$$\bigvee_{t\in A}\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(t)))||\vee||R(f(t),u)||) =$$
$$\left(\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(a)))||\vee||R(f(a),u)||)\right)\vee$$
$$\left(\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(b)))||\vee||R(f(b),u)||)\right)\vee$$
$$\left(\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(c)))||\vee||R(f(c),u)||)\right)\vee$$
$$\left(\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(d)))||\vee||R(f(d),u)||)\right)=$$
$$0\vee 0\vee 0\vee 0 = 0,$$

pentru că:

$$||R(a,f(f(a)))||\vee||R(f(a),a)|| = ||R(a,c)||\vee||R(b,a)|| = 0\vee 0 = 0,$$

deci $\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(a)))||\vee||R(f(a),u)||)=0;$

$$||R(a,f(f(b)))||\vee||R(f(b),a)|| = ||R(a,d)||\vee||R(c,a)|| = 0\vee 0 = 0,$$

deci $\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(b)))||\vee||R(f(b),u)||)=0;$

$$||R(a,f(f(c)))||\vee||R(f(c),a)|| = ||R(a,a)||\vee||R(d,a)|| = 0\vee 0 = 0,$$

deci $\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(c)))||\vee||R(f(c),u)||)=0;$

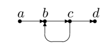
$$||R(d,f(f(d)))||\vee||R(f(d),d)|| = ||R(d,b)||\vee||R(a,d)|| = 0\vee 0 = 0,$$

deci $\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(d)))||\vee||R(f(d),u)||)=0.$

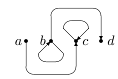
Exerciţiul 2.2. *Să se calculeze închiderea tranzitivă a relaţiei R din enunţul Exerciţiului 2.1.*

Rezolvare: Cum mulţimea A are 4 elemente, rezultă că închiderea tranzitivă a lui R este: $T(R)=\bigcup_{k=1}^{4}R^k = R\cup R^2\cup R^3\cup R^4$.

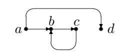
Să ne amintim că $R=\{(a,b),(b,c),(c,b),(c,d)\}$:

$R:$ 

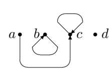
$R^2 = R\circ R = \{(x,z)\in A^2 | (\exists\, y\in A)\,(x,y)\in R$ şi $(y,z)\in R\} = \{(a,c),(b,b),(b,d),(c,c)\}$:

$R^2:$ 

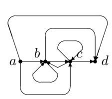
$R^3 = R^2\circ R = \{(x,z)\in A^2 | (\exists\, y\in A)\,(x,y)\in R$ şi $(y,z)\in R^2\} = \{(a,b),(a,d),(b,c),(c,b)\}$:

$R^3:$ 

$R^4 = R^3\circ R = \{(x,z)\in A^2 | (\exists\, y\in A)\,(x,y)\in R$ şi $(y,z)\in R^3\} = \{(a,c),(b,b),(c,c)\}$:

$R^4:$ 

Prin urmare, $T(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup R^4 = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,b),(c,c),(c,d)\}$:

$T(R):$ 

Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a VI-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@yahoo.com

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

În cele ce urmează vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

1 Mnemonic de definiţii şi rezultate din curs

Fie A o mulţime oarecare. Amintim că o *relaţie binară pe A* este o submulţime a produsului cartezian $A\times A$, produs notat şi A^2. Deci relaţiile binare sunt mulţimi, aşadar li se pot aplica operaţiile de reuniune şi intersecţie, precum şi relaţia de incluziune, cu aceleaşi semnificaţii ca pentru orice mulţimi. Desigur, A^2 este o relaţie binară pe A, anume cea mai mare relaţie binară pe A, în sensul incluziunii. De acum încolo, prin notaţia $(a,b)\in A^2$ vom înţelege: $a\in A$ şi $b\in A$; de asemenea, pentru orice relaţie binară R pe A, prin scrierea $(a,b)\in R$ se va subînţelege că $a,b\in A$; faptul că $(a,b)\in R$ se mai notează aRb.

Dacă R este o relaţie binară pe mulţimea A, atunci, prin definiţie, *inversa lui R* este relaţia binară pe A notată R^{-1} şi definită prin: $R^{-1}=\{(b,a)\in A^2 | (a,b)\in R\}$.

Dacă R şi S sunt două relaţii binare pe A, atunci, prin definiţie, *compunerea* lor este următoarea relaţie binară pe A: $R\circ S=\{(a,c)\in A^2 \mid (\exists\, b\in A)\,(a,b)\in S$ şi $(b,c)\in R\}$. De asemenea, pentru orice n natural, R^n este o relaţie binară pe A, definită prin: $R^0=\Delta_A=\{(a,a)\mid a\in A\}$ (*diagonala lui A*) şi, pentru orice n natural, $R^{n+1}=R^n\circ R$. Este evident că Δ_A este element neutru la compunerea de relaţii binare pe A (atât la stânga, cât şi la dreapta), şi deci $R^1=R$.

Evident, pentru orice relaţii binare R şi S pe A, $R\subseteq S$ ddacă $R^{-1}\subseteq S^{-1}$. Se demonstrează uşor că, pentru orice relaţie binară R pe A şi orice $n\in\mathbb{N}$, $(R^n)^{-1}=(R^{-1})^n$ (de exemplu, demonstrând în prealabil faptul că, pentru orice relaţii binare R şi S pe A, $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$, şi apoi făcând inducţie după n). De asemenea, este imediat că, pentru orice familie nevidă $(R_i)_{i\in I}$ de relaţii binare pe A, $\bigcup_{i\in I}R_i^{-1}=\left(\bigcup_{i\in I}R_i\right)^{-1}$.

O relaţie binară R pe A se zice:

(i) *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, are loc $(a,a) \in R$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\Delta_A \subseteq R$;

(ii) *simetrică* ddacă, pentru orice $(a,b) \in R$, are loc $(b,a) \in R$;

(iii) *tranzitivă* ddacă, pentru orice elemente $a,b,c \in A$, dacă $(a,b) \in R$ şi $(b,c) \in R$, atunci $(a,c) \in R$.

O relaţie binară R pe A se numeşte *(relaţie de) echivalenţă pe* A ddacă R este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Este imediat că intersecţia oricărei familii nevide de relaţii binare reflexive pe A este o relaţie binară reflexivă pe A şi că A^2 este o relaţie binară reflexivă pe A (care include orice altă relaţie binară pe A), iar de aici deducem că, pentru orice relaţie binară R pe A, există o cea mai mică relaţie binară reflexivă pe A care include pe R (cea mai mică în sensul incluziunii), şi anume intersecţia tuturor relaţiilor binare reflexive pe A care includ pe R. Această cea mai mică relaţie binară reflexivă pe A care include pe R se notează cu $\overline{R}$ şi se numeşte *închiderea reflexivă a relaţiei* R. Evident, $R \subseteq \overline{R}$.

Discuţia din paragraful anterior este valabilă şi pentru proprietăţile de simetrie şi tranzitivitate în locul celei de reflexivitate, şi deci şi pentru toate aceste trei proprietăţi cumulate, adică pentru proprietatea de a fi relaţie de echivalenţă pe A. Pentru orice relaţie binară R pe A, închiderea simetrică a lui R se notează cu R^*, iar închiderea tranzitivă a lui R se notează cu $T(R)$, iar cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A care include pe R se numeşte *echivalenţa generată de* R şi se notează cu $E(R)$.

Se demonstrează că, pentru orice relaţie binară R pe A:

(i) $\overline{R} = \Delta_A \cup R$; R este reflexivă ddacă $R = \overline{R}$;

(ii) $R^* = R \cup R^{-1}$; R este simetrică ddacă $R = R^*$ ddacă $R = R^{-1}$;

(iii) $T(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$; R este tranzitivă ddacă $R = T(R)$ ddacă $R^2 \subseteq R$;

(iv) $E(R) = T(\overline{R^*}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta_A \cup R \cup R^{-1})^n$.

Închiderea reflexivă comută cu închiderea simetrică şi cu închiderea tranzitivă, adică, pentru orice relaţie binară R pe A, $\overline{R^*} = (\overline{R})^*$ şi $\overline{T(R)} = T(\overline{R})$. Închiderile simetrică şi tranzitivă nu comută între ele.

Dată o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe A, se definesc clasele de echivalenţă ale lui $\sim$ ca fiind mulţimile $\hat{a}$, pentru fiecare $a \in A$, unde $\hat{a}$ se numeşte *clasa de echivalenţă a lui* a *raportat la* $\sim$ şi se defineşte prin: $\hat{a} = \{b \in A | a \sim b\} = \{b \in A | (a,b) \in \sim\}$. Se demonstrează că mulţimile $\hat{a}$, $a \in A$ formează o *partiţie a lui* A, adică sunt două câte două disjuncte şi reuniunea lor este A.

2 Lista de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Fie A o mulţime nevidă şi R o relaţie binară nevidă pe A. Demonstraţi că:*

(i)
- *dacă R este reflexivă, atunci $T(R)$ este reflexivă;*
- *R este reflexivă ddacă R^* este reflexivă;*

(ii)
- *dacă R este simetrică, atunci $T(R)$ este simetrică;*
- *R este simetrică ddacă $\overline{R}$ este simetrică;*

(iii) dacă R este tranzitivă, atunci $\overline{R}$ este tranzitivă.

Rezolvare: Fiecare punct al acestui exerciţiu admite mai multe soluţii, în funcţie de rezultatele teoretice pe care rezolvitorul alege să le aplice. Acesta este motivul pentru care mnemonicul din secţiunea anterioară este atât de amplu, cuprinzând şi rezultate care nu sunt folosite în cele ce urmează, pentru a oferi cititorului posibilitatea de a obţine soluţii diferite prin combinarea acelor rezultate teoretice în diverse moduri. În cele ce urmează, vom prezenta câte o soluţie pentru primele două puncte ale exerciţiului, şi două dintre soluţiile alternative pentru ultimul punct.

(i) Dacă R este reflexivă, atunci $\Delta_A \subseteq R$, dar, cum $R \subseteq T(R)$, rezultă că $\Delta_A \subseteq T(R)$, deci $T(R)$ este reflexivă.

Dacă R este reflexivă, atunci $\Delta_A \subseteq R$, dar, cum $R \subseteq R^*$, rezultă că $\Delta_A \subseteq R^*$, deci R^* este reflexivă.

Dacă R^* este reflexivă, atunci au loc următoarele fapte. Fie $a \in A$, arbitrar, fixat. Cum $R^* = R \cup R^{-1}$ este reflexivă, rezultă că $(a,a) \in R \cup R^{-1}$, deci $(a,a) \in R$ sau $(a,a) \in R^{-1}$. Conform definiţiei inversei lui R, dacă $(a,a) \in R^{-1}$, rezultă că $(a,a) \in R$. Aşadar, pentru orice $a \in A$, rezultă $(a,a) \in R$, deci R este reflexivă.

(ii) Dacă R este simetrică, atunci $R = R^{-1}$, prin urmare $T(R) = T(R^{-1}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^{-1})^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n)^{-1} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \right)^{-1} = (T(R))^{-1}$, prin urmare $T(R)$ este simetrică.

Dacă R este simetrică, atunci $R = R^{-1}$, prin urmare $\overline{R} = \Delta_A \cup R = \Delta_A \cup R^{-1} = \Delta_A^{-1} \cup R^{-1} = (\Delta_A \cup R)^{-1} = (\overline{R})^{-1}$, aşadar $\overline{R}$ este simetrică.

Dacă $\overline{R}$ este simetrică, atunci au loc următoarele fapte. Fie $(a,b) \in R$, arbitrar, fixat. Cum $R \subseteq \overline{R}$, rezultă că $(a,b) \in \overline{R}$, care este simetrică, prin urmare $(b,a) \in \overline{R} = \Delta_A \cup R$, deci $(b,a) \in \Delta_A$ sau $(b,a) \in R$. Dacă $(b,a) \in \Delta_A$, atunci $b = a$, aşadar $(b,a) = (a,a) = (a,b) \in R$. Am demonstrat că, pentru orice $(a,b) \in R$, rezultă că $(b,a) \in R$, deci R este simetrică.

(iii) Să presupunem că R este tranzitivă.

Aici putem aplica faptul că închiderea reflexivă comută cu închiderea tranzitivă pentru orice relaţie binară şi să conchidem că, întrucât $R = T(R)$ datorită tranzitivităţii lui R, rezultă $\overline{R} = \overline{T(R)} = T(\overline{R})$, deci $\overline{R}$ este tranzitivă.

Sau putem aplica direct definiţia tranzitivităţii. Să considerăm $a,b,c \in A$ astfel încât $(a,b),(b,c) \in \overline{R} = \Delta_A \cup R$. Atunci avem de analizat patru cazuri:

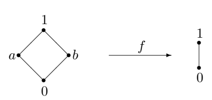
- dacă $(a,b),(b,c) \in R$, atunci, cum R este tranzitivă, rezultă că $(a,c) \in R$, dar $R \subseteq \overline{R}$, şi deci $(a,c) \in \overline{R}$;
- dacă $(a,b),(b,c) \in \Delta_A$, atunci $a = b = c$, deci $(a,c) = (a,a) \in \Delta_A \subseteq \overline{R}$, aşadar $(a,c) \in \overline{R}$;
- dacă $(a,b) \in R$ şi $(b,c) \in \Delta_A$, atunci $b = c$, deci $(a,c) = (a,b) \in \overline{R}$;

- dacă $(b,c) \in R$ şi $(a,b) \in \Delta_A$, atunci $a = b$, deci $(a,c) = (b,c) \in \overline{R}$.

Am demonstrat că, pentru orice $a,b,c \in A$ astfel încât $(a,b),(b,c) \in \overline{R}$, rezultă că are loc şi $(a,c) \in \overline{R}$, aşadar $\overline{R}$ este tranzitivă.

Exerciţiul 2.2. *Considerăm algebrele Boole: $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$ (*algebra Boole standard*, anume lanţul cu două elemente) şi $\mathcal{L}_2^2 = \{0,a,b,1\}$ (*rombul*). Determinaţi toate funcţiile izotone $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ şi specificaţi, cu demonstraţie, care dintre ele sunt morfisme de algebre Boole.*

Rezolvare:



Conform definiţiei, o funcţie $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ este izotonă ddacă, pentru orice $x,y \in \mathcal{L}_2^2$, $x \leq y$ implică $f(x) \leq f(y)$. În $\mathcal{L}_2^2$, $0 \leq a \leq 1$ şi $0 \leq b \leq 1$, iar a şi b sunt incomparabile. Prin urmare, o funcţie $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ este izotonă ddacă $f(0) \leq f(a) \leq f(1)$ şi $f(0) \leq f(b) \leq f(1)$.

Fie $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ o funcţie izotonă.

Cazul 1*:* $f(0) = 1$. Atunci, conform celor de mai sus, rezultă $f(a) = f(b) = f(1) = 1$.

Cazul 2*:* $f(0) = 0$.

Subcazul 2.1*:* $f(1) = 0$. Atunci rezultă $f(a) = f(b) = 1$.

Subcazul 2.2*:* $f(1) = 1$. Atunci $f(a)$ şi $f(b)$ pot lua orice valori din $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$.

Aşadar toate funcţiile izotone de la $\mathcal{L}_2^2$ la $\mathcal{L}_2$ sunt următoarele şase: $f_i : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$, $i \in \overline{1,6}$, date în tabelul următor:

x	0	a	b	1
$f_1(x)$	0	0	0	0
$f_2(x)$	0	0	0	1
$f_3(x)$	0	0	1	1
$f_4(x)$	0	1	0	1
$f_5(x)$	0	1	1	1
$f_6(x)$	1	1	1	1

Conform definiţiei, o funcţie $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ este morfism boolean ddacă f comută cu $\vee$, $\wedge$, complementul, 0 şi 1, ceea ce este echivalent cu condiţia ca f să comute cu $\vee$, $\wedge$, 0 şi 1, întrucât comutarea cu complementul rezultă din acestea, fapt valabil pentru orice funcţie între orice algebre Boole. Se observă că, în cazul unei funcţii $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$, f este morfism boolean ddacă: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ şi $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, pentru că aceste condiţii implică faptul că f comută cu $\vee$ şi $\wedge$, comutarea lui f cu 0 şi 1 implicând satisfacerea restului de condiţii din comutarea cu $\vee$ şi $\wedge$.

Prin urmare, morfismele booleene de la $\mathcal{L}_2^2$ la $\mathcal{L}_2$ sunt funcţiile $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ care verifică: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) = f(0) = 0$ şi $f(a) \vee f(b) = f(a \vee b) = f(1) = 1$, ceea ce este echivalent cu: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ şi $\begin{cases} f(a) = 0 \text{ şi } f(b) = 1 \\ \text{sau} \\ f(a) = 1 \text{ şi } f(b) = 0. \end{cases}$

Aşadar, funcţiile f_3 şi f_4 de mai sus sunt toate morfismele booleene de la $\mathcal{L}_2^2$ la $\mathcal{L}_2$:

x	0	a	b	1
$f_3(x)$	0	0	1	1
$f_4(x)$	0	1	0	1

Exerciţiul 2.3. *Fie R o relaţie binară pe mulţimea numerelor întregi, $R = \{(k,k+1) | k \in \mathbb{Z}\}$.*

(i) Demonstraţi că $E(R) = \mathbb{Z}^2$.

(ii) Pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi orice $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{Z}$ cu $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ (unde $<$ este ordinea strictă obişnuită de pe $\mathbb{Z}$), scrieţi câte clase de echivalenţă are $E(R \setminus \{(x_1,x_1+1),(x_2,x_2+1),\ldots,(x_m,x_m+1)\}) \stackrel{notaţie}{=} \sim$ şi enumeraţi elementele fiecărei clase de echivalenţă a lui $\sim$. Cerinţa de la acest punct al exerciţiului va fi efectuată fără demonstraţie.

Rezolvare: (i) $E(R) = T(\overline{R^*}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n$.

$\Delta_{\mathbb{Z}} = \{(k,k) | k \in \mathbb{Z}\}$, $R = \{(k,k+1) | k \in \mathbb{Z}\}$ şi $R^{-1} = \{(k+1,k) | k \in \mathbb{Z}\}$, aşadar $\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | x - y \in \{-1,0,1\}\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | \, |x-y| \leq 1\}$.

Demonstrăm prin inducţie matematică după $n \in \mathbb{N}^*$ că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | \, |x-y| \leq n\}$.

Pasul de verificare ($n = 1$): $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^1 = \Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | \, |x-y| \leq 1\}$, conform celor de mai sus.

Pasul de inducţie ($n \rightsquigarrow n+1$): Presupunem că $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | \, |x-y| \leq n\}$ pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat.

Notăm $M = \{(x,z) \in \mathbb{Z}^2 | \, |x-z| \leq n+1\}$. Trebuie să arătăm că $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1} = M$.

Aplicând relaţia pentru $n = 1$ din pasul de verificare şi ipoteza de inducţie, obţinem: $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1} = (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n \circ (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1}) = \{(x,z) \in \mathbb{Z}^2 | (\exists\, y \in \mathbb{Z})\, (x,y) \in \Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1}$ şi $(y,z) \in (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n\} = \{(x,z) \in \mathbb{Z}^2 | (\exists\, y \in \mathbb{Z})\, |x-y| \leq 1$ şi $|y-z| \leq n\} \subseteq M$, deoarece am obţinut că, pentru orice $(x,z) \in (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$, există un $y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|x-y| \leq 1$ şi $|y-z| \leq n$, prin urmare, conform inegalităţii triunghiului pentru modul, $|x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = n+1$, deci $(x,z) \in M$.

Acum fie $(x,z) \in M$, arbitrar, fixat. Atunci $|z-x| = |x-z| \leq n+1$, deci $z - x \in \overline{-(n+1), n+1}$, prin urmare $(x,z) = (x,x+k)$, cu numărul $k \in \overline{-(n+1), n+1}$.

Cazul 1*:* $k \in \overline{1, n+1}$. Atunci $z = x + k = x + (k-1) + 1$, cu $k - 1 \in \overline{0,n}$. Notăm $y = x + 1 \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $|x-y| = 1 \leq 1$ şi $|y-z| = z - y = k - 1 \leq n$, prin urmare $(x,z) \in (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$.

Cazul 2*:* $k \in \overline{-(n+1), -1}$. Atunci $z = x + k = x + (k+1) - 1$, cu $k + 1 \in \overline{-n, 0}$. Notăm $y = x - 1 \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $|x-y| = 1 \leq 1$ şi $|y-z| = |k+1| \leq n$, prin urmare $(x,z) \in (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$.

Cazul 3*:* $k = 0$. Atunci $z = x$. Luăm $y = x = z$. Rezultă că $|x-y| = 0 \leq 1$ şi $|y-z| = 0 \leq n$, prin urmare $(x,z) \in (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$.

Aşadar are loc şi incluziunea $M \subseteq (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$, deci $M \subseteq (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$ şi pasul de inducţie este încheiat.

Am obţinut că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | \, |x-y| \leq n\}$. Rezultă că $E(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n = \mathbb{Z}^2$.

(ii) Fie $m \in \mathbb{N}$ şi $x_1, x_2, \dots, x_m$ şi $\sim$ ca în enunţ. Atunci $\sim$ are $m+1$ clase de echivalenţă, anume:

- dacă $m = 0$, atunci $\sim = E(R) = \mathbb{Z}^2$ conform punctului (i), şi deci $\sim$ are o singură clasă de echivalenţă, egală cu $\mathbb{Z}$;
- dacă $m \neq 0$, atunci clasele de echivalenţă ale lui $\sim$ sunt $C_1, \dots, C_{m+1}$, definite prin:

$$\begin{cases} C_1 = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq x_1\}, \\ C_k = \overline{x_{k-1}+1, x_k}, \text{ pentru orice } k \in \overline{2, m}, \\ C_{m+1} = \{x \in \mathbb{Z} | x > x_m\}. \end{cases}$$

Acest fapt poate fi demonstrat în mai multe moduri. Ca sugestie pentru una dintre demonstraţiile care i se pot da, de exemplu, dacă notăm $Q = R \setminus \{(x_1, x_1+1), (x_2, x_2+1), \dots, (x_m, x_m+1)\}$, atunci $\sim = E(Q) = T(\overline{Q^s}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup Q \cup Q^{-1})^n$, şi se poate demonstra prin inducţie după n că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup Q \cup Q^{-1})^n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | \ |x - y| \leq n$ şi $(\exists k \in \overline{1, m+1})\, x, y \in C_k\}$. Pasul de verificare rezultă imediat, iar pasul de inducţie este, de asemenea, uşor de obţinut. Demonstraţiile pentru fiecare dintre aceşti doi paşi decurg într-o manieră asemănătoare cu inducţia de la punctul (i) pentru R în locul lui Q, dar ţinând seama şi de faptul că $(x_1, x_1+1), (x_2, x_2+1), \dots, (x_m, x_m+1) \notin Q$, ceea ce face ca aceste perechi să separe clasele de echivalenţă ale lui $\sim$. Se obţine aşadar $\sim = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | (\exists k \in \overline{1, m+1})\, x, y \in C_k\}$, ceea ce încheie demonstraţia punctului (ii).

Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a VII-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@yahoo.com

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

În cele ce urmează vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

1 Mnemonic de definiţii şi rezultate din curs

Vom nota operaţiile unei latici mărginite în modul uzual: $\vee, \wedge, 0, 1$, reprezentând respectiv disjuncţia, conjuncţia, primul şi ultimul element.

Fie A o mulţime oarecare. Amintim că o *relaţie binară pe A* este o submulţime a produsului cartezian $A \times A$, produs notat şi A^2. Deci relaţiile binare sunt mulţimi, aşadar li se pot aplica operaţiile de reuniune şi intersecţie, precum şi relaţia de incluziune, cu aceleaşi semnificaţii ca pentru orice mulţimi. Desigur, A^2 este o relaţie binară pe A, anume cea mai mare relaţie binară pe A, în sensul incluziunii. De acum încolo, prin notaţia $(a, b) \in A^2$ vom înţelege: $a \in A$ şi $b \in A$; de asemenea, pentru orice relaţie binară R pe A, prin scrierea $(a, b) \in R$ se va subînţelege că $a, b \in A$; faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează aRb.

Dacă R şi S sunt două relaţii binare pe A, atunci, prin definiţie, *compunerea* lor este următoarea relaţie binară pe A: $R \circ S = \{(a, c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)\, (a, b) \in S$ şi $(b, c) \in R\}$. De asemenea, pentru orice n natural, R^n este o relaţie binară pe A, definită prin:

$$\begin{cases} R^0 = \Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} \ (\textit{diagonala lui } A), \\ R^{n+1} = R^n \circ R, \text{ pentru orice } n \text{ natural.} \end{cases}$$

Este evident că Δ_A este element neutru la compunerea de relaţii binare pe A (atât la stânga, cât şi la dreapta), şi deci $R^1 = R$.

O relaţie binară R pe A se zice *tranzitivă* ddacă, pentru orice elemente $a, b, c \in A$, dacă $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in R$, atunci $(a, c) \in R$.

Este imediat că intersecţia oricărei familii nevide de relaţii binare tranzitive pe A este o relaţie binară tranzitivă pe A şi că A^2 este o relaţie binară tranzitivă pe A (care include orice

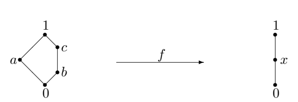
relaţie binară pe A), iar de aici deducem că, pentru orice relaţie binară R pe A, există o cea mai mică relaţie binară tranzitivă pe A care include pe R (cea mai mică în sensul incluziunii), şi anume intersecţia tuturor relaţiilor binare tranzitive pe A care includ pe R (care formează o familie nevidă, pentru că A^2 aparţine acestei familii). Această cea mai mică relaţie binară tranzitivă pe A care include pe R se notează cu $T(R)$ şi se numeşte *închiderea tranzitivă a relaţiei R*.

Se demonstrează că, pentru orice relaţie binară R pe A, $T(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

2 Lista de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Determinaţi toate morfismele de latici mărginite de la pentagon la lanţul cu* 3 *elemente.*

Rezolvare: Fie pentagonul $P = \{0, a, b, c, 1\}$ şi lanţul cu 3 elemente $\mathcal{L}_3 = \{0, x, 1\}$, ca în diagramele Hasse din figura de mai jos.



(P) $(\mathcal{L}_3)$

Fie $f : P \to \mathcal{L}_3$ un morfism de latici mărginite. Atunci $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$. Să vedem ce valori pot lua $f(a), f(b), f(c) \in \mathcal{L}_3 = \{0, x, 1\}$.

Să observăm că pentagonul are toate elementele complementate: în P, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia, la fel a şi b, respectiv a şi c. Sigur că unicitatea complementului nu este satisfăcută: a are doi complemenţi, anume b şi c.

În lanţul cu 3 elemente, elementele complementate sunt 0 şi 1, acestea fiind complemente unul altuia, iar x nu are niciun complement, după cum se verifică foarte uşor, observând că, la fel ca în orice lanţ, $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$ în $\mathcal{L}_3$.

Un morfism de latici mărginite duce elemente complementate în elemente complementate. Într–adevăr, dacă $\alpha, \beta \in P$, astfel încât β este complement al lui α, atunci $\alpha \vee \beta = 1$ şi $\alpha \wedge \beta = 0$ în P, prin urmare în $\mathcal{L}_3$ au loc: $f(\alpha) \vee f(\beta) = f(\alpha \vee \beta) = f(1) = 1$ şi $f(\alpha) \wedge f(\beta) = f(\alpha \wedge \beta) = f(0) = 0$, deci $f(\beta)$ este complement al lui $f(\alpha)$.

Prin urmare, imaginea lui f este inclusă în mulţimea elementelor complementate ale lui $\mathcal{L}_3$, anume $\{0, 1\}$. În plus, conform calculului de mai sus, $f(b)$ şi $f(c)$ trebuie să fie complemente ale lui $f(a)$ în $\mathcal{L}_3$, aşadar, dacă $f(a) = 0$, atunci $f(b) = f(c) = 1$, iar, dacă $f(a) = 1$, atunci $f(b) = f(c) = 0$.

Am obţinut două funcţii $f_1, f_2 : P \to \mathcal{L}_3$, anume cele date în tabelul de mai jos, şi se verifică uşor că fiecare dintre ele este morfism de latici mărginite:

α	0	a	b	c	1
$f_1(\alpha)$	0	0	1	1	1
$f_2(\alpha)$	0	1	0	0	1

Aşadar, f_1 şi f_2 sunt cele două morfisme de latici mărginite de la pentagon la lanţul cu 3 elemente.

Exerciţiul 2.2. *Fie următoarea relaţie binară pe mulţimea numerelor naturale:* $R = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^2$. *Determinaţi închiderea tranzitivă a lui R.*

Rezolvare: Conform formulei generale, închiderea tranzitivă a lui R este $T(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. Demonstrăm că, pentru orice n natural nenul, $R^n = \{(x, 2^n x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ (de fapt, egalitatea este valabilă şi pentru $n = 0$). Aplicăm inducţie matematică după $n \in \mathbb{N}^*$.

Pasul de verificare: $n = 1$: $R^1 = R = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{(x, 2^1 x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Pasul de inducţie: $n \in \mathbb{N}^* \rightsquigarrow n + 1$: Presupunem că $R^n = \{(x, 2^n x) \mid x \in \mathbb{N}\}$, pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat. Conform definiţiei recursive a puterilor unei relaţii binare pe o mulţime şi definiţiei compunerii de relaţii binare, $R^{n+1} = R^n \circ R = \{(x, z) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists y \in \mathbb{N})\, (x, y) \in R, (y, z) \in R^n\} = \{(x, z) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists y \in \mathbb{N})\, y = 2x, z = 2^n y\} = \{(x, z) \in \mathbb{N}^2 \mid z = 2^{n+1} x\} = \{(x, 2^{n+1} x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Aşadar, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $R^n = \{(x, 2^n x) \mid x \in \mathbb{N}\}$, prin urmare $T(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, 2^n x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{(x, 2^n x) \mid x \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova, 2003.

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1974, 1975, 1976.

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti, 1978.

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti, 2010.

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1982.

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1996.

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online, în care se află şi articolul de faţă.

Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a VIII-a

Claudia MUREŞAN

Universitatea din Bucureşti

Facultatea de Matematică şi Informatică

Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România

Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@yahoo.com

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

În cele ce urmează vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Pentru noţiunile şi rezultatele pe care le vom folosi în exerciţiile următoare, recomandăm consultarea bibliografiei de la sfârşitul acestui text.

Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul "partially ordered set") $\equiv$ *mulţime parţial ordonată*
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime total ordonată* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată*
- *poset mărginit* $\equiv$ *poset cu prim şi ultim element*
- *latice mărginită* $\equiv$ *latice cu prim şi ultim element*

Structurile algebrice cu care vom lucra vor fi desemnate, uneori, prin mulţimile lor suport.

Pentru orice număr natural nenul n, vom nota cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente.

Laticile vor fi notate cu $(L,\vee,\wedge,\le)$, laticile mărginite cu $(L,\vee,\wedge,\le,0,1)$, iar algebrele Boole cu $(B,\vee,\wedge,\le,\bar{\cdot},0,1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii.

Amintim că:

- pentru orice mulţimi A,B,M astfel încât $M\subseteq B$ şi orice funcţie $f:A\to B$ cu imaginea $f(A)\subseteq M$, se defineşte *corestricţia lui f la M* ca fiind funcţia $g:A\to M$ dată de: $g(x)=f(x)$, pentru orice $x\in A$; de obicei, corestricţia lui f la M se notează tot cu f;
- pentru orice relaţie binară R pe o mulţime A, se defineşte *inversa lui R* ca fiind relaţia binară pe A notată cu R^{-1} şi dată de: $R^{-1}=\{(a,b)\mid a,b\in A,(b,a)\in R\}\subseteq A^2=A\times A$;
- legătura dintre operaţiile $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\le$ în orice latice $(L,\vee,\wedge,\le)$ este: pentru orice elemente $x,y\in L$, au loc echivalenţele: $x\le y$ ddacă $x\vee y=y$ ddacă $x\wedge y=x$;

- în orice latice $(L,\vee,\wedge,\le)$, pentru orice elemente $a,b,x,y\in L$, dacă $\begin{cases} a\le b\\ \text{şi}\\ x\le y,\end{cases}$ atunci $\begin{cases} a\vee x\le b\vee y\\ \text{şi}\\ a\wedge x\le b\wedge y;\end{cases}$
- dacă $(L,\vee,\wedge,\le,0,1)$ este o latice mărginită, iar $x,y\in L$, atunci, prin definiţie, y este *complement al lui x în L* ddacă $\begin{cases} x\vee y=1\\ \text{şi}\\ x\wedge y=0;\end{cases}$
- *algebra Boole trivială* este algebra Boole cu un singur element, adică algebra Boole cu $0=1$, iar *algebrele Boole netriviale* sunt algebrele Boole care nu sunt triviale, adică algebrele Boole cu cel puţin două elemente;
- în orice algebră Boole $(B,\vee,\wedge,\le,\bar{\cdot},0,1)$, pentru orice elemente $x,y\in B$, au loc echivalenţele: $\begin{cases} x\le y\Leftrightarrow x\to y=1\\ \text{şi}\\ x=y\Leftrightarrow x\leftrightarrow y=1;\end{cases}$
- **Teorema de structură a algebrelor Boole finite** afirmă că orice algebră Boole finită este izomorfă cu o putere naturală a algebrei Boole standard, $\mathcal{L}_2=\{0,1\}$.

În exerciţiile din logica propoziţională clasică, vom nota cu:

- V mulţimea variabilelor propoziţionale;
- E mulţimea enunţurilor;
- $(E/_{\sim},\vee,\wedge,\le,\bar{\cdot},0,1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, despre care ştim că este o algebră Boole;
- $\vdash\varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală.

Amintim că, pentru orice $\varphi\in E$, are loc echivalenţa:

$$\vdash\varphi\Leftrightarrow\hat{\varphi}=1,$$

unde $\hat{\varphi}\in E/_{\sim}$ este clasa enunţului φ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$.

De asemenea, pentru orice interpretare $h:V\to\mathcal{L}_2$, vom nota cu $\tilde{h}:E\to\mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici (primitivi) în operaţii booleene.

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Oricărui poset $\mathcal{P}=(P,\le)$ îi asociem relaţia binară $R_{\mathcal{P}}=\{(a,b)\mid a,b\in P,a\nleq b,b\nleq a\}\subseteq P^2$ ($R_{\mathcal{P}}$ este mulţimea perechilor de elemente incomparabile în posetul $\mathcal{P}$).*

Acum considerăm un poset fixat $\mathcal{P}=(P,\le)$, cu $P\neq\emptyset$.

Să se demonstreze că:

(i) $R_{\mathcal{P}}$ e ireflexivă;

(ii) $R_{\mathcal{P}}$ e simetrică;

(iii) $R_{\mathcal{P}}=\emptyset$ ddacă $\mathcal{P}$ este lanţ;

(iv) dacă $\mathcal{P}$ nu este lanţ, atunci $R_{\mathcal{P}}$ nu e tranzitivă;

(v) dacă $\mathcal{B}=(B,\vee,\wedge,\le,\bar{\cdot},0,1)$ este o algebră Boole, iar $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}=(B,\le)$ este posetul subiacent lui $\mathcal{B}$, atunci: $\{x\in B\mid xR_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}}\overline{x}\}=B\setminus\{0,1\}$.

Rezolvare: (i) $\le$ e reflexivă, i. e., pentru orice $a\in P$, are loc $a\le a$, ceea ce înseamnă că, pentru orice $a\in P$, $(a,a)\notin R_{\mathcal{P}}$, adică $R_{\mathcal{P}}$ este ireflexivă.

(ii) Fie $a,b\in P$, astfel încât $(a,b)\in R_{\mathcal{P}}$, adică $a\nleq b$ şi $b\nleq a$, altfel scris, $b\nleq a$ şi $a\nleq b$, i. e. $(b,a)\in R_{\mathcal{P}}$. Aşadar, $R_{\mathcal{P}}$ e simetrică.

(iii) Au loc echivalenţele: $\mathcal{P}$ este lanţ ddacă oricare două elemente ale sale sunt comparabile, i. e., pentru orice $a,b\in P$, avem $a\le b$ sau $b\le a$, ceea ce înseamnă că, oricare ar fi $a,b\in P$, are loc $(a,b)\notin R_{\mathcal{P}}$, adică $R_{\mathcal{P}}=\emptyset$.

(iv) Aplicând succesiv (iii), (ii) şi (i), obţinem: dacă $\mathcal{P}$ nu este lanţ, atunci $R_{\mathcal{P}}\neq\emptyset$, adică există $a,b\in P$ astfel încât $(a,b)\in R_{\mathcal{P}}$, prin urmare $(b,a)\in R_{\mathcal{P}}$, iar acum faptul că $(a,a)\notin R_{\mathcal{P}}$ arată că $R_{\mathcal{P}}$ nu este tranzitivă.

(v) Să notăm cu $M=\{x\in B\mid(x,\overline{x})\in R_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}}\}\subseteq B$. Avem de demonstrat că $M=B\setminus\{0,1\}$.

Cum $0\le 1=\overline{0}$, iar $\overline{1}=0\le 1$, rezultă că $(0,\overline{0})\notin R_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}}$ şi $(1,\overline{1})\notin R_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}}$, adică $0\notin M$ şi $1\notin M$, deci $M\subseteq B\setminus\{0,1\}$.

Fie $x\in B\setminus\{0,1\}$, arbitrar, fixat. Presupunem prin absurd că $x\notin M$, i. e. $(x,\overline{x})\notin R_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}}$, i. e. $x\le\overline{x}$ sau $\overline{x}\le x$.

Dacă $x\le\overline{x}$, atunci $x=x\wedge\overline{x}=0$, ceea ce este o contradicţie cu faptul că $x\in B\setminus\{0,1\}$.

Dacă $\overline{x}\le x$, atunci $x=x\vee\overline{x}=1$, ceea ce este tot o contradicţie cu faptul că $x\in B\setminus\{0,1\}$.

Prin urmare, $x\in M$. Am demonstrat că $B\setminus\{0,1\}\subseteq M$.

Rezultă că $M=B\setminus\{0,1\}$.

Exerciţiul 1.2. *Să se demonstreze că algebra Boole a elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite cu exact 5 elemente este izomorfă cu algebra Boole standard.*

Rezolvare: Fie $\mathcal{L}=(L,\vee,\wedge,\le,0,1)$ o latice distributivă mărginită cu exact 5 elemente: $L=\{0,a,b,c,1\}$, şi fie $C(L)$ mulţimea elementelor complementate ale lui L. (De fapt, nu era necesară precizarea "mărginită", pentru că orice latice finită şi nevidă este mărginită.)

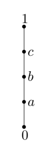
$\mathcal{L}$ este distributivă, prin urmare orice element al său are cel mult un complement, deci fiecare element din $C(L)$ are exact un complement. Pentru fiecare element $x\in C(L)$, vom nota cu $\overline{x}$ unicul său complement din $\mathcal{L}$; desigur, la rândul său, $\overline{x}\in C(L)$, iar unicul complement al lui $\overline{x}$ este x ($\overline{\overline{x}}=x$).

Desigur, $0,1\in C(L)$, cu $\overline{0}=1$ (şi, implicit, $\overline{1}=0$), de unde, conform unicităţii complementului, rezultă că niciunul dintre elementele a,b,c nu are drept complement pe 0 sau pe 1, aşadar complementele elementelor a,b,c, dacă există, se află tot în mulţimea $\{a,b,c\}$.

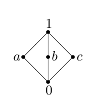
Ştim că $(C(L),\vee,\wedge,\le,\bar{\cdot},0,1)$ este o algebră Boole, unde am notat la fel operaţiile şi relaţia de ordine ale lui $\mathcal{L}$ cu cele restricţionate la $C(L)$ (cele induse pe $C(L)$). Această algebră Boole va fi referită tot prin $C(L)$, ca şi mulţimea sa suport.

În posetul mărginit $(L,\le,0,1)$ putem avea următoarele ordonări ale elementelor $0,a,b,c,1$, modulo permutări ale mulţimii $\{a,b,c\}$:

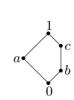
(i) $0\le a\le b\le c\le 1$; atunci $\mathcal{L}=\mathcal{L}_5$ ($\mathcal{L}$ este lanţul cu 5 elemente), cu următoarea diagramă Hasse:



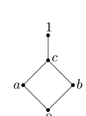
(ii) $0\le a\le 1$, $0\le b\le 1$, $0\le c\le 1$, iar a,b,c sunt două câte două incomparabile; atunci $\mathcal{L}$ este diamantul, care este o latice nedistributivă, deci acest caz este exclus:



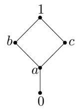
(iii) $0\le a\le 1$, $0\le b\le c\le 1$, iar a nu este comparabil nici cu b, nici cu c; atunci $\mathcal{L}$ este pentagonul, care este o latice nedistributivă, deci şi acest caz este exclus:



(iv) $0\le a\le c\le 1$, $0\le b\le c\le 1$, iar a şi b sunt incomparabile:



(v) $0\le a\le b\le 1$, $0\le a\le c\le 1$, iar b şi c sunt incomparabile:



Cazurile în care se obţine o latice distributivă sunt (i), (iv) şi (v).

În cazul (i), cum $\mathcal{L}$ este lanţ, au loc: $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$, prin urmare, oricare ar fi $x, y \in \{a, b, c\}$, $x \vee y = \max\{x, y\} \in \{x, y\} \subseteq \{a, b, c\} = L \setminus \{0, 1\}$, deci $x \vee y \neq 1$. Rezultă că niciunul dintre elementele a, b, c nu este complementat ($a, b, c \notin C(L)$), aşadar $C(L) = \{0, 1\} = \mathcal{L}_2$, adică $C(L)$ este (izomorfă cu) algebra Boole standard.

În cazul (iv), $a \vee b = a \vee c = b \vee c = c \neq 1$, aşadar şi aici $a, b, c \notin C(L)$, deci $C(L) = \{0, 1\} = \mathcal{L}_2$, adică $C(L)$ este (izomorfă cu) algebra Boole standard.

În cazul (v), $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c = a \neq 0$, deci şi în acest caz $a, b, c \notin C(L)$, aşadar $C(L) = \{0, 1\} = \mathcal{L}_2$, adică $C(L)$ este (izomorfă cu) algebra Boole standard.

Exerciţiul 1.3. *Fie $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi \in E$, astfel încât: $\varphi = \neg\alpha \to (\beta \wedge \neg\gamma)$ şi $\psi = (\beta \to \gamma) \to \alpha$.*

Să se demonstreze că: $\vdash \varphi$ ddacă $\vdash \psi$.

Rezolvare: Să notăm clasele enunţurilor α, β, γ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_\sim$ cu x, y, z, respectiv, adică: $x = \hat{\alpha}$, $y = \hat{\beta}$, $z = \hat{\gamma}$. Acum să calculăm clasele lui φ şi ψ în $E/_\sim$:

$\hat{\varphi} = \overline{\hat{\alpha}} \to (\hat{\beta} \wedge \overline{\hat{\gamma}}) = \overline{x} \to (y \wedge \overline{z}) = \overline{\overline{x}} \vee (y \wedge \overline{z}) = x \vee (y \wedge \overline{z})$;

$\hat{\psi} = (\hat{\beta} \to \hat{\gamma}) \to \hat{\alpha} = (y \to z) \to x = \overline{(\overline{y} \vee z)} \vee x = x \vee \overline{(\overline{y} \vee z)} = x \vee (\overline{\overline{y}} \wedge \overline{z}) = x \vee (y \wedge \overline{z})$.

Am folosit definiţia implicaţiei într–o algebră Boole şi **legile lui de Morgan**.

Aşadar, $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$, prin urmare au loc echivalenţele: $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$ ddacă $\hat{\psi} = 1$ ddacă $\vdash \psi$.

2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Oricărui poset $\mathcal{P} = (P, \leq)$ îi asociem relaţia binară $Q_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \mid a, b \in P, \exists \sup\{a, b\}$ în $\mathcal{P}\} \subseteq P^2$.*

De asemenea, pentru orice poset $\mathcal{P} = (P, \leq)$, notăm cu $\overline{\mathcal{P}}$ posetul dual: $\overline{\mathcal{P}} = (P, \geq)$, unde am folosit notaţia uzuală $\geq = \leq^{-1}$.

Acum considerăm un poset fixat $\mathcal{P} = (P, \leq)$, cu $P \neq \emptyset$.

Să se demonstreze că:

(i) $Q_{\mathcal{P}}$ este reflexivă;

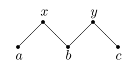
(ii) $Q_{\mathcal{P}}$ e simetrică;

(iii) $Q_{\mathcal{P}}$ nu e neapărat tranzitivă;

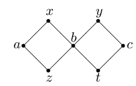
(iv) $Q_{\mathcal{P}} \supseteq (\leq \cup \geq)$;

(v) $\mathcal{P}$ este latice ddacă $Q_{\mathcal{P}} = Q_{\overline{\mathcal{P}}} = P^2$.

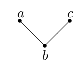
Rezolvare: (i) Pentru orice $a \in P$, există $\sup\{a, a\} = \sup\{a\} = a$ în $\mathcal{P}$, aşadar $(a, a) \in Q_{\mathcal{P}}$, deci $Q_{\mathcal{P}}$ e reflexivă.
(ii) Pentru orice $a, b \in P$, $\{a, b\} = \{b, a\}$, deci există $\sup\{a, b\}$ în $\mathcal{P}$ ddacă există $\sup\{b, a\}$ în $\mathcal{P}$, adică $(a, b) \in Q_{\mathcal{P}}$ ddacă $(b, a) \in Q_{\mathcal{P}}$, prin urmare $Q_{\mathcal{P}}$ e simetrică.
(iii) În fiecare dintre următoarele poseturi au loc: $(a, b) \in Q_{\mathcal{P}}$, $(b, c) \in Q_{\mathcal{P}}$, dar $(a, c) \notin Q_{\mathcal{P}}$, deci $Q_{\mathcal{P}}$ nu e tranzitivă (desigur, în cadrul unui examen, este suficient să se dea un singur (contra)exemplu):



$\sup\{a, b\} = x$
$\sup\{b, c\} = y$
mulţimea $\{a, c\}$ nu are majoranţi,
deci nu există $\sup\{a, c\}$



la fel ca în posetul anterior



$\sup\{a, b\} = \max\{a, b\} = a$
$\sup\{b, c\} = \max\{b, c\} = c$
mulţimea $\{a, c\}$ nu are majoranţi,
deci nu există $\sup\{a, c\}$

(iv) Fie $a, b \in P$, arbitrare, fixate.

Dacă $(a, b) \in \leq$, i. e. $a \leq b$, atunci există $\sup\{a, b\} = \max\{a, b\} = b$ în $\mathcal{P}$, deci $(a, b) \in Q_{\mathcal{P}}$. Prin urmare $\leq \subseteq Q_{\mathcal{P}}$.

Dacă $(a, b) \in \geq$, i. e. $a \geq b$, i. e. $b \leq a$, atunci există $\sup\{a, b\} = \max\{a, b\} = a$ în $\mathcal{P}$, deci $(a, b) \in Q_{\mathcal{P}}$. Prin urmare $\geq \subseteq Q_{\mathcal{P}}$.

Am obţinut: $Q_{\mathcal{P}} \supseteq (\leq \cup \geq)$.
(v) Ştim că supremumul şi infimumul sunt noţiuni duale una alteia, adică supremumul în posetul dual, $\overline{\mathcal{P}}$, coincide cu infimumul în $\mathcal{P}$. Prin urmare, $Q_{\overline{\mathcal{P}}} = \{(a, b) \mid a, b \in P, \exists \inf\{a, b\}$ în $\mathcal{P}\}$.

Conform definiţiei, $\mathcal{P} = (P, \leq)$ este latice ddacă, pentru orice $a, b \in P$, există $\sup\{a, b\}$ şi $\inf\{a, b\}$ în $\mathcal{P}$, adică, pentru orice $a, b \in P$, $(a, b) \in Q_{\mathcal{P}}$ şi $(a, b) \in Q_{\overline{\mathcal{P}}}$, i. e. $Q_{\mathcal{P}} = Q_{\overline{\mathcal{P}}} = P^2$.

Exerciţiul 2.2. *Fie $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o algebră Boole şi $(B^2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Boole produs direct a lui $\mathcal{B}$ cu ea însăşi, cu operaţiile şi relaţia de ordine definite pe componente şi notate la fel ca acelea ale lui $\mathcal{B}$.*

Considerăm funcţia $f : B^2 \to B$, definită prin: $f(x, y) = x \vee y$, pentru orice $x, y \in B$.

Să se demonstreze că:

(i) f comută cu $\vee$, 0 şi 1;

(ii) f e morfism boolean ddacă $\mathcal{B}$ este algebra Boole trivială.

Rezolvare: (i) $f(0) = f(0, 0) = 0 \vee 0 = 0$ şi $f(1) = f(1, 1) = 1 \vee 1 = 1$. Deci f comută cu 0 şi cu 1.

Fie $x, y, a, b \in B$, arbitrare, fixate. $f((x, y) \vee (a, b)) = f(x \vee a, y \vee b) = x \vee a \vee y \vee b = x \vee y \vee a \vee b = f(x, y) \vee f(a, b)$. Deci f comută cu $\vee$. Am folosit asociativitatea şi comutativitatea operaţiei $\vee$ a lui $\mathcal{B}$.

(ii) "$\Leftarrow$:" Dacă $\mathcal{B}$ este algebra Boole trivială, i. e. $B = \{\beta\}$, cu unicul element $\beta = 0 = 1$ şi cu toate operaţiile de algebră Boole având ca rezultat pe β, atunci $B^2 = \{(\beta, \beta)\}$, cu toate operaţiile de algebră Boole având ca rezultat pe (β, β), iar $f : \{(\beta, \beta)\} \to \{\beta\}$ este definită prin: $f(\beta, \beta) = \beta \vee \beta = \beta$. Evident, în acest caz, f este morfism de algebre Boole.
"$\Rightarrow$:" Dacă f este morfism de algebre Boole, atunci f comută cu operaţia de complementare, aşadar $f(\overline{(0, 1)}) = \overline{f(0, 1)}$, adică $f(1, 0) = \overline{0 \vee 1}$, i. e. $1 \vee 0 = \overline{1}$, adică $1 = 0$, deci $\mathcal{B}$ este algebra Boole trivială.

Exerciţiul 2.3. *Să se demonstreze că: pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$, mulţimea*

$$\Sigma = \{\varphi \wedge (\psi \leftrightarrow \neg\chi), ((\varphi \wedge \psi) \vee \neg\neg\chi) \to ((\varphi \to \chi) \leftrightarrow \psi)\} \subset E$$

nu admite niciun model (i. e. nu există nicio interpretare h, astfel încât $h \vDash \Sigma$).

Rezolvare: Să notăm cu $\alpha = \varphi \wedge (\psi \leftrightarrow \neg\chi) \in E$ şi $\beta = ((\varphi \wedge \psi) \vee \neg\neg\chi) \to ((\varphi \to \chi) \leftrightarrow \psi) \in E$. Avem: $\Sigma = \{\alpha, \beta\} \subset E$. Presupunem prin absurd că există $h : V \to \mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, astfel încât $h \vDash \Sigma$, i. e. $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\beta) = 1$.

Aşadar, $1 = \tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\varphi) \wedge (\tilde{h}(\psi) \leftrightarrow \overline{\tilde{h}(\chi)})$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 1$ şi $\tilde{h}(\psi) \leftrightarrow \overline{\tilde{h}(\chi)} = 1$, iar ultima dintre aceste două egalităţi este echivalentă cu $\tilde{h}(\psi) = \overline{\tilde{h}(\chi)}$.

Rezultă că $1 = \tilde{h}(\beta) = ((\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)) \vee \overline{\overline{\tilde{h}(\chi)}}) \to ((\tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\chi)) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)) = ((1 \wedge \tilde{h}(\psi)) \vee \tilde{h}(\chi)) \to ((1 \to \tilde{h}(\chi)) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)) = (\tilde{h}(\psi) \vee \tilde{h}(\chi)) \to ((\overline{1} \vee \tilde{h}(\chi)) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)) = (\overline{\tilde{h}(\chi)} \vee \tilde{h}(\chi)) \to ((0 \vee \tilde{h}(\chi)) \leftrightarrow \overline{\tilde{h}(\chi)}) = 1 \to (\tilde{h}(\chi) \leftrightarrow \overline{\tilde{h}(\chi)}) = 1 \to 0 = 0$, pentru că, în $\mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\chi) \neq \overline{\tilde{h}(\chi)}$. Am obţinut $1 = 0$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este o contradicţie.

Aşadar, nu există nicio interpretare h care să satisfacă Σ.

3 Lista 3 de subiecte

Exerciţiul 3.1. *Fie $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o algebră Boole.*

Pentru orice relaţie binară $R \subseteq B^2$, notăm cu $\neg R$ următoarea relaţie binară pe B: $\neg R = \{(\overline{a}, \overline{b}) \mid a, b \in B$, astfel încât $(a, b) \in R\} \subseteq B^2$.

Să se demonstreze că:

(i) pentru orice $R \subseteq B^2$ şi orice $a, b \in B$, au loc echivalenţele: $\begin{cases} aRb \text{ ddacă } \overline{a} \neg R \overline{b}; \\ a \neg Rb \text{ ddacă } \overline{a} R \overline{b}; \end{cases}$

(ii) pentru orice $R \subseteq B^2$, $\neg\neg R = R$;

(iii) pentru orice $R \subseteq B^2$ şi orice $S \subseteq B^2$, au loc: $\begin{cases} R \subseteq S \text{ ddacă } \neg R \subseteq \neg S; \\ \neg(R \cup S) = \neg R \cup \neg S; \\ \neg(R \cap S) = \neg R \cap \neg S; \\ \neg(R \setminus S) = \neg R \setminus \neg S; \end{cases}$

(iv) dacă R este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$, atunci $R = \neg R$;

(v) $\neg \leq = \geq$, unde am notat $\geq = \leq^{-1}$.

Rezolvare: Pentru cele ce urmează, fie $R \subseteq B^2$ şi $a, b \in B$, arbitrare, fixate.
(i) Conform definiţiei lui $\neg R$, dacă aRb, atunci $\overline{a} \neg R \overline{b}$.

Dacă $\overline{a} \neg R \overline{b}$, atunci, conform definiţiei lui $\neg R$, există $c, d \in B$, astfel încât cRd şi $\overline{c} = \overline{a}$, iar $\overline{d} = \overline{b}$. Unicitatea complementului în algebre Boole ne asigură de faptul că $c = a$ şi $d = b$. Conform alegerii lui c şi d, are loc cRd, aşadar aRb.

Am demonstrat că aRb ddacă $\overline{a} \neg R \overline{b}$.

Din idempotenţa operaţiei de complementare şi echivalenţa anterioară rezultă că: $a \neg Rb$ ddacă $\overline{\overline{a}} \neg R \overline{\overline{b}}$ ddacă $\overline{a} R \overline{b}$.
(ii) Folosind punctul (i), obţinem echivalenţele: $a \neg\neg Rb$ ddacă $\overline{a} \neg R \overline{b}$ ddacă aRb. Aşadar, $(a, b) \in \neg\neg R$ ddacă $(a, b) \in R$, prin urmare $\neg\neg R = R$.
(iii) Pentru acest punct, fie şi $S \subseteq B^2$, arbitrară, fixată.

Dacă $R \subseteq S$, atunci, conform punctului (i), avem: dacă $a \neg Rb$, ceea ce este echivalent cu $\overline{a} R \overline{b}$, atunci $\overline{a} S \overline{b}$, ceea ce este echivalent cu $a \neg Sb$, aşadar $\neg R \subseteq \neg S$. Deci are loc implicaţia: $R \subseteq S$ implică $\neg R \subseteq \neg S$, prin urmare şi: $\neg R \subseteq \neg S$ implică $\neg\neg R \subseteq \neg\neg S$, ceea ce este echivalent cu $R \subseteq S$, conform punctului (ii). Aşadar, au loc ambele implicaţii, adică este satisfăcută echivalenţa: $R \subseteq S$ ddacă $\neg R \subseteq \neg S$.

Prin aplicarea punctului (i) şi a definiţiilor operaţiilor cu mulţimi, obţinem:

$(a, b) \in \neg(R \cup S)$ ddacă $(\overline{a}, \overline{b}) \in R \cup S$ ddacă $\begin{cases} (\overline{a}, \overline{b}) \in R \\ \text{sau} \\ (\overline{a}, \overline{b}) \in S \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} (a, b) \in \neg R \\ \text{sau} \\ (a, b) \in \neg S \end{cases}$ ddacă $(a, b) \in \neg R \cup \neg S$, prin urmare $\neg(R \cup S) = \neg R \cup \neg S$;

$(a, b) \in \neg(R \cap S)$ ddacă $(\overline{a}, \overline{b}) \in R \cap S$ ddacă $\begin{cases} (\overline{a}, \overline{b}) \in R \\ \text{şi} \\ (\overline{a}, \overline{b}) \in S \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} (a, b) \in \neg R \\ \text{şi} \\ (a, b) \in \neg S \end{cases}$ ddacă $(a, b) \in \neg R \cap \neg S$, prin urmare $\neg(R \cap S) = \neg R \cap \neg S$;

$(a, b) \in \neg(R \setminus S)$ ddacă $(\overline{a}, \overline{b}) \in R \setminus S$ ddacă $\begin{cases} (\overline{a}, \overline{b}) \in R \\ \text{şi} \\ (\overline{a}, \overline{b}) \notin S \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} (a, b) \in \neg R \\ \text{şi} \\ (a, b) \notin \neg S \end{cases}$ ddacă $(a, b) \in \neg R \setminus \neg S$, prin urmare $\neg(R \setminus S) = \neg R \setminus \neg S$.
(iv) Presupunem că R este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$. Atunci R este compatibilă cu operaţia de complementare, aşadar: dacă aRb, atunci $\overline{a} R \overline{b}$, ceea ce implică $\overline{\overline{a}} R \overline{\overline{b}}$, ceea ce este echivalent cu aRb, în conformitate cu idempotenţa complementării. Am demonstrat că aRb ddacă $\overline{a} R \overline{b}$.

Dar, conform punctului (i), $\overline{a} R \overline{b}$ ddacă $a \neg Rb$.

Aşadar, aRb ddacă $a \neg Rb$, i. e. $(a, b) \in R$ ddacă $(a, b) \in \neg R$, deci $R = \neg R$.
(v) Conform definiţiei lui $\geq = \leq^{-1}$, are loc: $a \geq b$ ddacă $b \leq a$. Dar, conform unei proprietăţi a algebrelor Boole, $b \leq a$ ddacă $\overline{a} \leq \overline{b}$, iar, conform punctului (i), $\overline{a} \leq \overline{b}$ ddacă $a \neg \leq b$.

Prin urmare, are loc echivalenţa: $a \geq b$ ddacă $a \neg \leq b$, adică $(a, b) \in \geq$ ddacă $(a, b) \in \neg \leq$, deci $\geq = \neg \leq$.

Exerciţiul 3.2. *Fie $(A, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ şi $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ două latici mărginite (care vor fi referite prin mulţimile lor suport), iar $f : A \to B$ şi $g : A \to B$ două morfisme de latici mărginite.*

Notăm cu $M = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \subseteq A$.

Să se demonstreze că:

(i) dacă A este algebră Boole, atunci $f(A)$ este algebră Boole şi corestricţia $f : A \to f(A)$ este morfism boolean;

(ii) M este o sublatice mărginită a lui A;

(iii) dacă A este algebră Boole, **nu rezultă** *că M este o subalgebră Boole a lui A;*

(iv) $f(M) = g(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$, dar nu are neapărat loc egalitatea în acea incluziune.

Rezolvare: (i) Cum A şi B sunt latici mărginite şi $f : A \to B$ este un morfism de latici mărginite, rezultă că $f(A)$ este o latice mărginită cu operaţiile induse de cele ale lui B (i. e. o sublatice mărginită a lui B).

Presupunem că A este o algebră Boole, deci A este distributivă şi complementată.

Fie $x, y, z \in f(A)$, arbitrare, fixate. Rezultă că există $a, b, c \in A$, astfel încât $x = f(a), y = f(b), z = f(c)$. Întrucât A este distributivă, rezultă că $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, prin urmare, aplicând pe f în ambii membri şi apoi folosind faptul că f este morfism de latici, $f(a \vee (b \wedge c)) = f((a \vee b) \wedge (a \vee c))$, aşadar $f(a) \vee f(b \wedge c) = f(a \vee b) \wedge f(a \vee c)$, deci $f(a) \vee (f(b) \wedge f(c)) = (f(a) \vee f(b)) \wedge (f(a) \vee f(c))$, adică $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Conform echivalenţei celor două legi de distributivitate în orice latice, rezultă că $f(A)$ satisface şi cealaltă lege de distributivitate, deci este distributivă.

Am obţinut că $f(A)$ este o latice distributivă mărginită, desigur, cu primul element $0 = f(0)$ şi ultimul element $1 = f(1)$ (primul şi, respectiv, ultimul element al lui B).

Fie $x \in f(A)$, arbitrar, fixat. Rezultă că există $a \in A$, astfel încât $x = f(a)$. A este complementată, prin urmare există un element $\overline{a} \in A$, astfel încât $\begin{cases} a \vee \overline{a} = 1 \\ \text{şi} \\ a \wedge \overline{a} = 0. \end{cases}$ Prin urmare, $\begin{cases} x \vee f(\overline{a}) = f(a) \vee f(\overline{a}) = f(a \vee \overline{a}) = f(1) = 1 \\ \text{şi} \\ x \wedge f(\overline{a}) = f(a) \wedge f(\overline{a}) = f(a \wedge \overline{a}) = f(0) = 0, \end{cases}$ aşadar $f(\overline{a}) \in f(A)$ este complement al lui x în laticea mărginită $f(A)$. Deci $f(A)$ este şi complementată.

Am obţinut că $f(A)$ este o latice mărginită distributivă şi complementată, adică o algebră Boole.

$f : A \to B$ este un morfism de latici mărginite, prin urmare corestricţia sa la $f(A)$, $f : A \to f(A)$, este, de asemenea, morfism de latici mărginite.

A şi $f(A)$ sunt algebre Boole, deci satisfac existenţa şi unicitatea complementului. Să notăm, cum este uzual, cu $\bar{\cdot}$ operaţia de complementare a fiecăreia dintre aceste algebre Boole. Conform calculului de mai sus, rezultă că, pentru orice element $a \in A$, complementul lui $f(a)$ în algebra Boole $f(A)$ este $f(\overline{a})$, adică $\overline{f(a)} = f(\overline{a})$, aşadar f comută şi cu operaţia de complementare.

Rezultă că $f : A \to f(A)$ este morfism de algebre Boole.

(ii) M este o submulţime a laticii mărginite A.

f şi g sunt morfisme de latici mărginite, prin urmare $f(0) = 0 = g(0)$ şi $f(1) = 1 = g(1)$, deci $0, 1 \in M$.

Fie $a, b \in M$, adică $a, b \in A$, astfel încât $f(a) = g(a)$ şi $f(b) = g(b)$. Aplicând faptul că f şi g sunt morfisme de latici, deci comută cu $\vee$ şi $\wedge$, obţinem:

$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = g(a) \vee g(b) = g(a \vee b)$, aşadar $a \vee b \in M$;

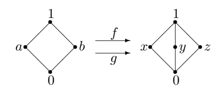
$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) = g(a) \wedge g(b) = g(a \wedge b)$, aşadar $a \wedge b \in M$.

Am obţinut că M este închisă la 0, 1, $\vee$ şi $\wedge$, deci M este o sublatice mărginită a lui A.

(iii) Pentru a rezolva acest punct, vom găsi un exemplu care să ilustreze situaţia cerută. Conform punctului (i), în cazul în care A este o algebră Boole, $f(A)$ şi $g(A)$ sunt tot algebre Boole, iar corestricţiile $f : A \to f(A)$ şi $g : A \to g(A)$ sunt morfisme booleene.

În exemplul de mai jos, $A = \mathcal{L}_2^2$ (A este rombul), care este o algebră Boole, B este diamantul, morfismele de latici mărginite $f : A \to B$ şi $g : A \to B$ corestricţionate la imaginile lor ($f : A \to f(A)$ şi $g : A \to g(A)$, respectiv) sunt chiar izomorfisme booleene, iar $M = \mathcal{L}_3$ (M este lanţul cu trei elemente), care nu este o algebră Boole, aşadar nu este subalgebră Boole a lui A.

Fie, aşadar, $A = \{0, a, b, 1\}$ şi $B = \{0, x, y, z, 1\}$, cu diagramele Hasse desenate mai jos, iar $f : A \to B$ şi $g : A \to B$ date de tabelul de dedesubtul acestor diagrame Hasse.



α	0	a	b	1
$f(\alpha)$	0	y	x	1
$g(\alpha)$	0	y	z	1

Este clar că f şi g sunt morfisme de latici mărginite.

$f(A) = \{0, x, y, 1\}$ şi $g(A) = \{0, y, z, 1\}$. A, $f(A)$ şi $g(A)$ sunt algebre Boole, fiecare izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$ (rombul), iar $f : A \to f(A)$ şi $g : A \to g(A)$ sunt izomorfisme booleene.

După cum se observă, submulţimea $M = \{\alpha \in A \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}$ a lui A este $M = \{0, a, 1\} = \mathcal{L}_3$ (lanţul cu 3 elemente), care este o sublatice mărginită a lui B, este o latice mărginită şi distributivă, dar nu este o algebră Boole, pentru că elementul a nu are complement în M (a se vedea şi **Teorema de structură a algebrelor Boole finite**, care arată că orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2, deci M nu poate fi organizată ca o algebră Boole, pentru că are cardinalul egal cu 3).

(iv) În exemplul de la punctul (iii), are loc egalitatea: $f(M) = g(M) = f(A) \cap g(A)$, pentru că $M = \{0, a, 1\}$ şi $f(\{0, a, 1\}) = g(\{0, a, 1\}) = \{0, y, 1\} = f(A) \cap g(A)$.

Dar, dacă am considera aceleaşi latici mărginite A şi B ca în exemplul de la punctul (iii), însă morfismele de latici mărginite $f : A \to B$ şi $g : A \to B$ date de tabelul următor, atunci: $f(A) = \{0, x, y, 1\}$, $g(A) = \{0, y, z, 1\}$, deci $f(A) \cap g(A) = \{0, y, 1\}$, dar $M = \{0, 1\}$, deci $f(M) = g(M) = \{0, 1\} \subsetneq f(A) \cap g(A)$.

α	0	a	b	1
$f(\alpha)$	0	x	y	1
$g(\alpha)$	0	y	z	1

A rămas de demonstrat faptul că are loc întotdeauna $f(M) = g(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$, în ipotezele exerciţiului.

Cum $M \subseteq A$, rezultă că $f(M) \subseteq f(A)$. Acum, fie $\beta \in f(M)$. Atunci există $\alpha \in M$, astfel încât $\beta = f(\alpha)$. Conform definiţiei lui M, faptul că $\alpha \in M$ implică $f(\alpha) = g(\alpha)$. Aşadar, $\beta = g(\alpha) \in g(M) \subseteq g(A)$. Prin urmare, $f(M) \subseteq g(M) \subseteq g(A)$. Din faptul că $f(M) \subseteq f(A)$ şi faptul că $f(M) \subseteq g(A)$, rezultă că $f(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$.

Am demonstrat că $f(M) \subseteq g(M)$ şi că $f(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$.

Analog se demonstrează că $g(M) \subseteq f(M)$ (şi $g(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$, cu toate că această incluziune va rezulta oricum din egalitatea $f(M) = g(M)$ şi incluziunea $f(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$ de mai sus).

Prin urmare, $f(M) = g(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$.

Exerciţiul 3.3. *Fie $\alpha, \beta, \varphi, \psi \in E$, astfel încât $\vdash \varphi \to \psi$ şi $\vdash \alpha \to \beta$.*

Să se demonstreze că: $\vdash (\psi \to \alpha) \to (\varphi \to \beta)$.

Rezolvare: Fie a, b, x, y clasele enunţurilor $\alpha, \beta, \varphi, \psi$, respectiv, în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_\sim$, i. e.: $a = \hat{\alpha}$, $b = \hat{\beta}$, $x = \hat{\varphi}$ şi $y = \hat{\psi}$.

$\vdash \varphi \to \psi$, aşadar $\widehat{\varphi \to \psi} = 1$, i. e. $\hat{\varphi} \to \hat{\psi} = 1$, adică $x \to y = 1$, deci $x \leq y$, ceea ce este echivalent cu $\overline{y} \leq \overline{x}$.

$\vdash \alpha \to \beta$, aşadar $\widehat{\alpha \to \beta} = 1$, i. e. $\hat{\alpha} \to \hat{\beta} = 1$, adică $a \to b = 1$, deci $a \leq b$.

Din inegalităţile $\overline{y} \leq \overline{x}$ şi $a \leq b$ rezultă că: $\overline{y} \vee a \leq \overline{x} \vee b$, adică $y \to a \leq x \to b$, deci $(y \to a) \to (x \to b) = 1$, aşadar $(\hat{\psi} \to \hat{\alpha}) \to (\hat{\varphi} \to \hat{\beta}) = 1$, adică $\widehat{(\psi \to \alpha) \to (\varphi \to \beta)} = 1$, prin urmare $\vdash (\psi \to \alpha) \to (\varphi \to \beta)$.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova, 2003.

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1974, 1975, 1976.

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti, 1978.

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti, 2010.

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1982.

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1996.

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online, în care se află şi articolul de faţă.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri).

Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a IX-a

Claudia MUREŞAN

Universitatea din Bucureşti

Facultatea de Matematică şi Informatică

Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România

Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

Vom folosi notaţia “ddacă“ drept prescurtare pentru sintagma “dacă şi numai dacă“.

Amintim abrevierea “i. e.“ (“id est“), semnificând “adică“.

Pentru noţiunile şi rezultatele teoretice pe care le vom folosi în exerciţiile următoare, recomandăm consultarea bibliografiei de la sfârşitul acestui text. Oferim în cele ce urmează un mic mnemonic de denumiri, notaţii şi rezultate care ne vor fi necesare pentru rezolvarea acestor exerciţii.

Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată;*
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată;*
- *funcţie izotonă* $\equiv$ *funcţie care păstrează ordinea* $\equiv$ *funcţie crescătoare;*
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană.*

Peste tot în acest referat, vom nota:

- pentru orice mulţime A, cu $card(A)$ sau $card\, A$ cardinalul mulţimii A;
- pentru orice mulţime A, cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$ (produsul cartezian, produsul direct de mulţimi; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul; a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice);
- cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente, pentru orice n natural nenul;
- laticile sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq)$, laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;
- cu V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic;
- cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;
- cu $(E/\sim, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, despre care ştim că este o algebră Boole;

- cu $\hat{\varphi} \in E/\sim$ clasa unui enunţ φ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/\sim$;
- cu $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ unica extindere la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene a unei interpretări $h : V \to \mathcal{L}_2$;
- cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;
- cu $\vDash \varphi$ faptul că un enunţ φ este universal adevărat (tautologie, adevăr semantic) în logica propoziţională clasică;
- cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- cu $\Sigma \vDash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil semantic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- cu $h \vDash \varphi$, respectiv $h \vDash \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ satisface un enunţ $\varphi \in E$, respectiv o mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$.

Amintim că:

- pentru orice relaţie binară R pe o mulţime A (adică orice submulţime $R \subseteq A^2$), se defineşte *inversa lui* R ca fiind relaţia binară pe A notată cu R^{-1} şi dată de: $R^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in R\} \subseteq A^2 = A \times A$; inversa unei relaţii de ordine notate $\leq$ se notează, uzual, cu $\geq$;
- legătura dintre operaţiile $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- orice lanţ este o latice distributivă, cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:
  - (i) $\overline{\overline{x}} = x$ (**autodualitatea operaţiei de complementare**);
  - (ii) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ şi $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ (**legile lui de Morgan**);
  - (iii) $x \to y = \overline{x} \vee y$ (**definiţia implicaţiei într–o algebră Boole**);
  - (iv) $x \leq y$ ddacă $x \to y = 1$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducţiei** pentru calculul propoziţional clasic);
- pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$ (**lemă** din calculul propoziţional clasic);
- pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine** a calculului propoziţional clasic);
- pentru orice $\varphi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic).

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ o latice nevidă (i. e. cu mulţimea suport $L \neq \emptyset$).*
Pentru orice $a, b \in L$, definim relaţiile binare $R_{a,b}$ şi $S_{a,b}$ pe L, astfel:

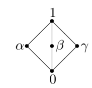
- $R_{a,b} \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in L, x \vee a = y \vee b\} \subseteq L^2$;
- $S_{a,b} \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in L, x \wedge a = y \wedge b\} \subseteq L^2$.

(i) Demonstraţi că, pentru orice $a, b \in L$, au loc egalităţile: $R_{a,b} = R_{b,a}^{-1}$ şi $S_{a,b} = S_{b,a}^{-1}$.

(ii) Fie $a, b \in L$. Să se demonstreze că următoarele patru afirmaţii sunt echivalente:

- *(1) $R_{a,b}$ şi $S_{a,b}$ sunt reflexive;*
- *(2) $(a, a) \in R_{a,b} \cap S_{a,b}$;*
- *(3) $(b, b) \in R_{a,b} \cap S_{a,b}$;*
- *(4) $a = b$.*

(iii) În cazul particular în care $\mathcal{L}$ este diamantul, cu $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, 1\}$ şi diagrama Hasse de mai jos, să se determine $R_{\alpha,\beta}$ şi $S_{\alpha,\beta}$.



Rezolvare: (i) Fie $a, b \in L$, arbitrare. Pentru orice $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $(x, y) \in R_{a,b}$ ddacă $x \vee a = y \vee b$ ddacă $y \vee b = x \vee a$ ddacă $(y, x) \in R_{b,a}$ ddacă $(x, y) \in R_{b,a}^{-1}$. Prin urmare, $R_{a,b} = R_{b,a}^{-1}$. Analog rezultă că $S_{a,b} = S_{b,a}^{-1}$.
(ii) Fie $a, b \in L$, arbitrare. Vom demonstra echivalenţa celor patru condiţii în această ordine: $(1) \Rightarrow \begin{cases} (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1) \text{ şi} \\ (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1). \end{cases}$
$(1) \Rightarrow (2)$: Trivial.
$(1) \Rightarrow (3)$: Trivial.
$(2) \Rightarrow (4)$: Ipoteza acestei implicaţii este că $(a, a) \in R_{a,b} \cap S_{a,b}$, i. e. $(a, a) \in R_{a,b}$ şi $(a, a) \in S_{a,b}$. $(a, a) \in R_{a,b}$ înseamnă că $a \vee a = a \vee b$, adică $a = a \vee b$, i. e. $b \leq a$. $(a, a) \in S_{a,b}$ înseamnă că $a \wedge a = a \wedge b$, adică $a = a \wedge b$, i. e. $a \leq b$. Deci $b \leq a$ şi $a \leq b$, aşadar $a = b$.
$(3) \Rightarrow (4)$: Analog cu implicaţia anterioară.
$(4) \Rightarrow (1)$: Dacă $a = b$, atunci $R_{a,b} = R_{a,a}$ şi $S_{a,b} = S_{a,a}$. Orice $x \in L$ satisface $x \vee a = x \vee a$, deci $(x, x) \in R_{a,a} = R_{a,b}$. Prin urmare, $R_{a,b}$ este reflexivă. Analog se arată că $S_{a,b}$ este reflexivă.
(iii) $R_{\alpha,\beta} = \{(x, y) \mid x, y \in L, x \vee \alpha = y \vee \beta\}$. Prin urmare, avem:

- întrucât $0 \vee \alpha = \alpha \vee \alpha = \alpha$, rezultă că $\{y \in L \mid (0, y) \in R_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (\alpha, y) \in R_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid \alpha = y \vee \beta\} = \emptyset$, pentru că, dacă ar exista un element $y \in L$ cu $\alpha = y \vee \beta \geq \beta$, atunci ar rezulta că $\beta \leq \alpha$, ceea ce nu este adevărat;

- întrucât $\beta \vee \alpha = \gamma \vee \alpha = 1 \vee \alpha = 1$, rezultă că $\{y \in L \mid (\beta, y) \in R_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (\gamma, y) \in R_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (1, y) \in R_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid 1 = y \vee \beta\} = \{\alpha, \gamma, 1\}$.

Aşadar, $R_{\alpha,\beta} = \{(\beta, \alpha), (\beta, \gamma), (\beta, 1), (\gamma, \alpha), (\gamma, \gamma), (\gamma, 1), (1, \alpha), (1, \gamma), (1, 1)\}$.
$S_{\alpha,\beta} = \{(x, y) \mid x, y \in L, x \wedge \alpha = y \wedge \beta\}$. Prin urmare, avem:

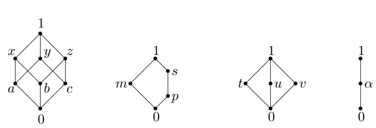
- întrucât $0 \wedge \alpha = \beta \wedge \alpha = \gamma \wedge \alpha = 0$, rezultă că $\{y \in L \mid (0, y) \in S_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (\beta, y) \in S_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (\gamma, y) \in S_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid 0 = y \wedge \beta\} = \{0, \alpha, \gamma\}$;
- întrucât $\alpha \wedge \alpha = 1 \wedge \alpha = \alpha$, rezultă că $\{y \in L \mid (\alpha, y) \in S_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (1, y) \in S_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid \alpha = y \wedge \beta\} = \emptyset$, pentru că, dacă ar exista un element $y \in L$ cu $\alpha = y \wedge \beta \leq \beta$, atunci ar rezulta că $\alpha \leq \beta$, ceea ce nu este adevărat.

Aşadar, $S_{\alpha,\beta} = \{(0, 0), (0, \alpha), (0, \gamma), (\beta, 0), (\beta, \alpha), (\beta, \gamma), (\gamma, 0), (\gamma, \alpha), (\gamma, \gamma)\}$.

Exerciţiul 1.2. *Considerăm următoarele latici mărginite:*

- *cubul, notat cu $\mathcal{L}_2^3$, cu mulţimea suport $L_2^3 = \{0, a, b, c, x, y, z, 1\}$,*
- *pentagonul, pe care îl vom nota cu $\mathcal{P}$, cu mulţimea suport $P = \{0, m, p, s, 1\}$,*
- *diamantul, pe care îl vom nota cu $\mathcal{D}$, cu mulţimea suport $D = \{0, t, u, v, 1\}$,*
- *lanţul cu trei elemente, notat cu $\mathcal{L}_3$, cu mulţimea suport $L_3 = \{0, \alpha, 1\}$,*

cu următoarele diagrame Hasse:



$\mathcal{L}_2^3$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{D}$ $\mathcal{L}_3$

Să se demonstreze că nu există niciun morfism surjectiv de latici:

(i) de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{P}$;

(ii) de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{D}$;

(iii) de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{L}_3$.

Rezolvare: După cum ştim, cele patru latici enumerate în enunţ au următoarele caracteristici:

- cubul este o algebră Boole, adică o latice distributivă mărginită complementată;
- pentagonul este o latice mărginită nedistributivă;
- diamantul este o latice mărginită nedistributivă;
- lanţul cu trei elemente este o latice distributivă mărginită.

Vom folosi aceste caracteristici ale celor patru latici pentru a rezolva exerciţiul. Pentru început, să demonstrăm o serie de fapte generale. Fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ şi $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, \leq)$ două latici nevide arbitrare. Să arătăm că:

- dacă laticea $\mathcal{L}$ este distributivă şi există un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, atunci şi laticea $\mathcal{M}$ este distributivă;
- dacă laticile $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ sunt mărginite şi există un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, atunci h este morfism de latici mărginite şi h duce orice element complementat al lui $\mathcal{L}$ într–un element complementat al lui $\mathcal{M}$, aşadar, dacă $\mathcal{L}$ este complementată, atunci şi $\mathcal{M}$ este complementată.

Aşadar, să presupunem că laticea $\mathcal{L}$ este distributivă şi există un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$. Fie $\delta, \varepsilon, \varphi \in M$, arbitrare. h este surjectiv, aşadar există $d, e, f \in L$ cu $h(d) = \delta$, $h(e) = \varepsilon$ şi $h(f) = \varphi$. $\mathcal{L}$ este o latice distributivă, deci $d \vee (e \wedge f) = (d \vee e) \wedge (d \vee f)$. Obţinem: $\delta \vee (\varepsilon \wedge \varphi) = h(d) \vee (h(e) \wedge h(f)) = h(d \vee (e \wedge f)) = h((d \vee e) \wedge (d \vee f)) = (h(d) \vee h(e)) \wedge (h(d) \vee h(f)) = (\delta \vee \varepsilon) \wedge (\delta \vee \varphi)$. Echivalenţa celor două legi de distributivitate într–o latice ne asigură de faptul că $\mathcal{M}$ satisface şi cealaltă lege de distributivitate. Aşadar, $\mathcal{M}$ este o latice distributivă.

Acum să presupunem că laticile $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ sunt mărginite şi există un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$. Folosim notaţiile obişnuite 0 şi 1 pentru primul şi ultimul element, respectiv, în fiecare dintre laticile $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$. Fie $\delta \in M$, arbitrar. Surjectivitatea lui h ne asigură de faptul că există $d \in L$ cu $h(d) = \delta$. În $\mathcal{L}$ are loc dubla inegalitate: $0 \leq d \leq 1$. $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ este un morfism de latici şi, prin urmare, o funcţie izotonă între poseturile $(L, \leq)$ şi $(M, \leq)$, aşadar $h(0) \leq h(d) = \delta \leq h(1)$. Am obţinut că, oricare ar fi $\delta \in M$, $h(0) \leq \delta \leq h(1)$. Definiţia şi unicitatea minimului şi maximului într–un poset arată că $h(0) = 0$ şi $h(1) = 1$, deci h este morfism de latici mărginite. Acum, fie $d \in L$ un element complementat al lui $\mathcal{L}$ şi $e \in L$ un complement al lui d, adică un element al lui L care satisface: $\begin{cases} d \vee e = 1 \\ \text{şi} \\ d \wedge e = 0. \end{cases}$ Atunci, în $\mathcal{M}$ avem:

$$\begin{cases} h(d) \vee h(e) = h(d \vee e) = h(1) = 1 \\ \text{şi} \\ h(d) \wedge h(e) = h(d \wedge e) = h(0) = 0, \end{cases}$$

aşadar $h(e)$ este un complement al lui $h(d)$, deci $h(d)$ este element complementat al lui $\mathcal{M}$. Dacă laticea mărginită $\mathcal{L}$ este complementată, adică are toate elementele complementate, iar $\delta \in M$, arbitrar, atunci, cum h este surjectiv, rezultă că există $d \in L$ cu $h(d) = \delta$, iar d este un element complementat, ca toate elementele lui $\mathcal{L}$, prin urmare $\delta = h(d)$ este element complementat al lui $\mathcal{M}$, deci $\mathcal{M}$ are toate elementele complementate, adică laticea mărginită $\mathcal{M}$ este complementată.

După aceste preparative, să trecem la rezolvarea celor trei puncte ale exerciţiului.
(i) $\mathcal{L}_2^3$ este o latice distributivă, aşadar, dacă ar exista un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{P}$, atunci, conform celor de mai sus, ar rezulta că laticea $\mathcal{P}$ este distributivă, ceea ce este fals. Prin urmare, nu există niciun morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{P}$.
(ii) Analog cu (i).
(iii) $\mathcal{L}_2^3$ este o latice mărginită complementată, aşadar, dacă ar exista un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{L}_3$, atunci, conform celor de mai sus, ar rezulta că laticea $\mathcal{L}_3$ este complementată, deci elementul α ar fi complementat în $\mathcal{L}_3$. Dar, în $\mathcal{L}_3$, $\alpha \vee 0 = \alpha \vee \alpha = \alpha \neq 1$, deci nici 0, nici α nu sunt complemente ale lui α, iar $\alpha \wedge 1 = \alpha \neq 0$, deci 1 nu este complement al lui α, prin urmare α nu are complement în $\mathcal{L}_3$, aşadar am obţinut o contradicţie. Deci nu există niciun morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{L}_3$.

O altă variantă de rezolvare a punctului (iii) este folosirea observaţiei că, dacă $\mathcal{L}$ este o algebră Boole, i. e. o latice distributivă mărginită complementată, iar $\mathcal{M}$ este o latice mărginită, astfel încât există un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, atunci, conform preparativelor de mai sus, rezultă că $\mathcal{M}$ este o latice distributivă mărginită complementată, i. e. o algebră Boole. Aşadar, dacă ar exista un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{L}_3$, atunci ar rezulta că $\mathcal{L}_3$ este o algebră Boole, ceea ce este fals, întrucât $\mathcal{L}_3$ are exact 3 elemente, deci este o latice finită care nu are cardinalul putere a lui 2 (a se vedea **Teorema de structură a algebrelor Boole finite**, caz particular al **Teoremei de reprezentare a lui Stone**).

Exerciţiul 1.3. *Fie $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$, astfel încât:*

$$\vdash (\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta)$$

Să se demonstreze că:

$$\vdash (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta)$$

Rezolvarea 1 (sintactic): Folosim faptele cunoscute (a se vedea, de exemplu, [6]) că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$:

(i) $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$

(ii) $\vdash \varphi \to (\psi \vee \varphi)$

(iii) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

(iv) $\vdash (\psi \wedge \varphi) \to \varphi$

(v) $\vdash \varphi \wedge \psi$ ddacă $\begin{cases} \vdash \varphi \\ \text{şi} \\ \vdash \psi \end{cases}$

(vi) este valabilă regula de deducţie: $\dfrac{\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \chi}{\vdash \varphi \to \chi}$

Din (i), relaţia din ipoteză şi (iii), avem:

$$\vdash \alpha \to (\alpha \vee \beta),$$

$$\vdash (\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta),$$

$$\vdash (\gamma \wedge \delta) \to \gamma,$$

de unde, prin două aplicări ale regulii de deducţie de la (vi), obţinem:

$$\vdash \alpha \to \gamma \qquad (a)$$

Din (ii), relaţia din ipoteză şi (iv), avem:

$$\vdash \beta \to (\alpha \vee \beta),$$

$$\vdash (\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta),$$

$$\vdash (\gamma \wedge \delta) \to \delta,$$

de unde, prin două aplicări ale regulii de deducţie de la (vi), obţinem:

$$\vdash \beta \to \delta \qquad (b)$$

Din (a), (b) şi implicaţia reciprocă din (v), rezultă:

$$\vdash (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta)$$

Rezolvarea 2 (algebric): Notăm cu $a = \hat{\alpha}, b = \hat{\beta}, c = \hat{\gamma}, d = \hat{\delta} \in E/\sim$. Conform ipotezei, $\vdash (\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta)$, ceea ce este echivalent cu $\widehat{(\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta)} = 1$, adică $(\hat{\alpha} \vee \hat{\beta}) \to (\hat{\gamma} \wedge \hat{\delta}) = 1$, i. e. $(a \vee b) \to (c \wedge d) = 1$, ceea ce este echivalent cu $a \vee b \leq c \wedge d$. Dar $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$, $c \wedge d \leq c$ şi $c \wedge d \leq d$. Aşadar, $a, b \leq a \vee b \leq c \wedge d \leq c, d$, de unde, prin tranzitivitate, rezultă că $a \leq c$ şi $b \leq d$, ceea ce este echivalent cu $a \to c = 1$ şi $b \to d = 1$, deci $(a \to c) \wedge (b \to d) = 1$, adică $(\hat{\alpha} \to \hat{\gamma}) \wedge (\hat{\beta} \to \hat{\delta}) = 1$, i. e. $\widehat{(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta)} = 1$, ceea ce este echivalent cu $\vdash (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta)$.

2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Fie $\mathcal{P} = (P, \leq)$ un poset nevid (i. e. cu mulţimea elementelor $P \neq \emptyset$).*

Definim următoarea relaţie binară pe mulţimea P: $R = \{(a, b) \mid a, b \in P, card\{x \in P \mid a \leq x \text{ sau } x \leq a\} = card\{x \in P \mid b \leq x \text{ sau } x \leq b\}\} \subseteq P^2$. Cu alte cuvinte, R este formată din perechile (a, b) de elemente din P cu proprietatea că mulţimea elementelor comparabile cu a în posetul $\mathcal{P}$ are acelaşi cardinal cu mulţimea elementelor comparabile cu b în posetul $\mathcal{P}$.

Să se demonstreze că:

(i) R este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea P;

(ii) dacă posetul $\mathcal{P}$ este mărginit, atunci $(\min \mathcal{P}, \max \mathcal{P}) \in R$;

(iii) dacă posetul $\mathcal{P}$ este lanţ, atunci $R = P^2$;

(iv) dacă posetul $\mathcal{P}$ este finit şi are minim sau maxim, atunci are loc echivalenţa: $R = P^2$ ddacă $\mathcal{P}$ este lanţ;

(v) dacă posetul $\mathcal{P}$ este infinit sau nu are nici minim, nici maxim, atunci nu are neapărat loc echivalenţa de la punctul (iv), adică: egalitatea $R = P^2$ nu este neapărat echivalentă cu condiţia ca posetul $\mathcal{P}$ să fie lanţ.

Rezolvare: Introducem următoarea notaţie, care va fi utilă pentru redactarea soluţiei acestui exerciţiu: pentru orice $a \in P$, fie $\langle a \rangle$ mulţimea elementelor lui P care sunt comparabile cu a în posetul $\mathcal{P}$, i. e. $\langle a \rangle = \{x \in P \mid a \leq x \text{ sau } x \leq a\} \subseteq P$. Cu această notaţie, putem scrie definiţia lui R în felul următor: $R = \{(a, b) \mid a, b \in P, card\langle a \rangle = card\langle b \rangle\}$. Altfel spus, pentru orice $a, b \in P$, are loc echivalenţa: $(a, b) \in R$ ddacă $card\langle a \rangle = card\langle b \rangle$. Este trivial faptul că, dacă două elemente $a, b \in P$ au proprietatea că $\langle a \rangle = \langle b \rangle$, atunci $(a, b) \in R$ (nu şi reciproc).
(i) Pentru orice $a \in P$, $\langle a \rangle = \langle a \rangle$, aşadar $(a, a) \in R$, deci R este reflexivă.

Pentru orice $a, b \in P$, au loc echivalenţele: $(a, b) \in R$ ddacă $card\langle a \rangle = card\langle b \rangle$ ddacă $card\langle b \rangle = card\langle a \rangle$ ddacă $(b, a) \in R$. Prin urmare, relaţia R este simetrică.

Pentru orice $a, b, c \in P$, dacă $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in R$, atunci $card\langle a \rangle = card\langle b \rangle$ şi $card\langle b \rangle = card\langle c \rangle$, aşadar $card\langle a \rangle = card\langle c \rangle$, adică $(a, c) \in R$. Deci R este tranzitivă.

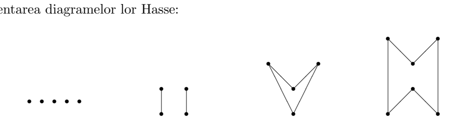
Prin urmare, R este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea P.
(ii) Presupunem că posetul $\mathcal{P}$ este mărginit, i. e. are minim şi maxim. Minimul şi maximul unui poset (mărginit) sunt comparabile cu toate elementele posetului, deci $\langle \min \mathcal{P} \rangle = P = \langle \max \mathcal{P} \rangle$, prin urmare $(\min \mathcal{P}, \max \mathcal{P}) \in R$.

(iii) Dacă $\mathcal{P}$ este lanţ, atunci elementele sale sunt două câte două comparabile, prin urmare, oricare ar fi $x, y \in P$, $\langle x \rangle = P = \langle y \rangle$, aşadar $(x, y) \in R$, deci $R = P^2$.
(iv) Considerăm posetul $\mathcal{P}$ ca fiind finit (i. e. cu mulţimea suport P finită) şi având minim. Fie $n = card(P) \in \mathbb{N}^*$ (întrucât P este finită şi nevidă). Cum $\langle \min \mathcal{P} \rangle = P$, rezultă că are loc: $card\langle \min \mathcal{P} \rangle = card(P) = n$.
"$\Rightarrow$:" Dacă $R = P^2$, atunci, în particular, oricare ar fi $x \in P$, are loc $(\min \mathcal{P}, x) \in R$, i. e. $card\langle x \rangle = card\langle \min \mathcal{P} \rangle = card(P) = n$. Deci, pentru orice $x \in P$, mulţimile finite $\langle x \rangle$ şi P au proprietăţile: $\langle x \rangle \subseteq P$ şi $card\langle x \rangle = card(P) = n$. Rezultă că $\langle x \rangle = P$, pentru orice $x \in P$, adică orice element $x \in P$ este comparabil cu orice element al lui P, cu alte cuvinte toate elementele lui $\mathcal{P}$ sunt două câte două comparabile, adică $\mathcal{P}$ este lanţ.
"$\Leftarrow$:" Această implicaţie rezultă din punctul (iii).

Demonstraţia decurge analog în cazul în care posetul $\mathcal{P}$ este finit şi are maxim.
(v) Implicaţia reciprocă de la punctul (iv) este valabilă întotdeauna, conform punctului (iii). Prin urmare, avem de demonstrat că, în absenţa oricăreia dintre condiţiile de la (iv), implicaţia directă nu are loc. Altfel spus, avem de demonstrat că există poseturi $\mathcal{P} = (P, \leq)$ care nu sunt lanţuri, dar în care relaţia R definită ca în enunţ satisface $R = P^2$. Vom demonstra acest lucru prin exemple, pe care le vom căuta printre poseturile infinite, precum şi printre acelea care nu au nici minim, nici maxim, întrucât punctul (iv) ne asigură de faptul că putem elimina celelalte cazuri.

Pentru început, vom da un exemplu de poset infinit $\mathcal{P} = (P, \leq)$ care nu este lanţ, dar în care $R = P^2$. Mai mult, acest poset este infinit şi mărginit. Să considerăm posetul $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, |)$: mulţimea numerelor naturale, înzestrată cu divizibilitatea, mai precis relaţia de ordine parţială "divide pe". Acest poset este mărginit: $\min \mathcal{N} = 1$ şi $\max \mathcal{N} = 0$, pentru că, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$, $1 \,|\, x \,|\, 0$. Şi, desigur, acest poset este infinit: $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (cardinalul mulţimilor numărabile). 1 şi 0 sunt minimul şi, respectiv, maximul lui $\mathcal{N}$, deci, în $\mathcal{N}$, $\langle 1 \rangle = \langle 0 \rangle = \mathbb{N}$, aşadar $card\langle 1 \rangle = card\langle 0 \rangle = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Pentru orice $x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x \,|\, x^n$, iar $x^n \neq x^k$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$, aşadar $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \langle x \rangle \subseteq \mathbb{N}$, iar $card\{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = card\{n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = card(\mathbb{N}^*) = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$, deci $\aleph_0 \leq card\langle x \rangle \leq \aleph_0$, aşadar $card\langle x \rangle = \aleph_0 = card\langle 1 \rangle = card\langle 0 \rangle$. Prin urmare, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}$, $card\langle x \rangle = \aleph_0 = card\langle y \rangle$, deci $(x, y) \in R$, aşadar $R = \mathbb{N}^2$. Desigur, $\mathcal{N}$ nu este lanţ, pentru că, de exemplu, 2 nu divide pe 5 şi 5 nu divide pe 2.

Acum vom da mai multe exemple de poseturi $\mathcal{P} = (P, \leq)$ care nu au nici minim, nici maxim, şi nu sunt lanţuri, dar în care relaţia binară corespunzătoare $R = P^2$, adică, pentru orice $x, y \in P$, $card\langle x \rangle = card\langle y \rangle$. Mai mult, aceste poseturi sunt finite şi nu au nici minim, nici maxim. Le vom da prin reprezentarea diagramelor lor Hasse:



$\mathcal{P}_1 = (P_1, \leq)$ $\qquad$ $\mathcal{P}_2 = (P_2, \leq)$ $\qquad$ $\mathcal{P}_3 = (P_3, \leq)$ $\qquad$ $\mathcal{P}_4 = (P_4, \leq)$

Posetul $\mathcal{P}_1$ este un antilanţ, adică oricare două elemente diferite ale sale sunt incomparabile, aşadar, pentru orice $x \in P_1$, $card\langle x \rangle = 1$ (fiecare element al acestui poset este comparabil numai cu el însuşi).

În posetul $\mathcal{P}_2$, orice $x \in P_2$ are $card\langle x \rangle = 2$ (fiecare element al acestui poset este comparabil doar cu el însuşi şi cu încă un element).

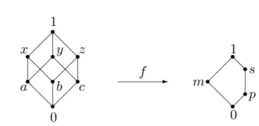
În $\mathcal{P}_3$, orice $x \in P_3$ are $card\langle x \rangle = 3$.

În $\mathcal{P}_4$, orice $x \in P_4$ are $card\langle x \rangle = 3$.

Exerciţiul 2.2. *Considerăm următoarele latici mărginite:*

- *cubul, notat cu $\mathcal{L}_2^3$, cu mulţimea suport $L_2^3 = \{0, a, b, c, x, y, z, 1\}$,*
- *pentagonul, pe care îl vom nota cu $\mathcal{P}$, cu mulţimea suport $P = \{0, m, p, s, 1\}$,*

cu diagramele Hasse de mai jos, şi fie $f : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{P}$ un morfism de latici mărginite.



$\mathcal{L}_2^3$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{P}$

Să se demonstreze că:

(i) dacă $p \in Im(f)$, atunci $s \notin Im(f)$;

(ii) dacă $s \in Im(f)$, atunci $p \notin Im(f)$.

Rezolvare: Vom începe prin a demonstra unele fapte teoretice. Cu toate că acestea sunt, în general, cunoscute, şi că raţionamentele necesare pentru a le demonstra sunt similare celor pe care le–am aplicat în rezolvarea Exerciţiului 1.2, vom expune aici aceste raţionamente, pentru completitudine.

Primul rezultat teoretic pe care îl vom folosi în cele ce urmează este faptul că imaginea oricărui morfism de latici mărginite este o sublatice mărginită a codomeniului acelui morfism. Să demonstrăm, aşadar, că imaginea lui f ($Im(f) = f(L_2^3)$) este o sublatice mărginită a codomeniului lui f ($\mathcal{P}$).

$Im(f) \subseteq P$. Cum $L_2^3 \neq \emptyset$, rezultă că $Im(f) = f(L_2^3) \neq \emptyset$.

Fie $\delta, \varepsilon \in Im(f)$. Atunci există $d, e \in L_2^3$, astfel încât $f(d) = \delta$ şi $f(e) = \varepsilon$. Rezultă că $\delta \vee \varepsilon = f(d) \vee f(e) = f(d \vee e) \in Im(f)$ şi $\delta \wedge \varepsilon = f(d) \wedge f(e) = f(d \wedge e) \in Im(f)$, aşadar $Im(f)$ este închisă la operaţiile de latice ($\vee$ şi $\wedge$), deci $Im(f)$ este o sublatice a lui $\mathcal{P}$.

$1 = f(1) \in Im(f)$ şi $0 = f(0) \in Im(f)$.

Prin urmare, $Im(f)$ este închisă la operaţiile de latice mărginită ($\vee$, $\wedge$, 0 şi 1), deci $Im(f)$ este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{P}$.

Al doilea rezultat de care vom avea nevoie este faptul că imaginea unei latici distributive printr–un morfism de latici este o latice distributivă. Să demonstrăm, aşadar, că $Im(f)$ este o latice distributivă.

Fie $\delta, \varepsilon, \tau \in Im(f)$, aşadar există $d, e, t \in L_2^3$ astfel încât $f(d) = \delta$, $f(e) = \varepsilon$ şi $f(t) = \tau$. Folosind faptul că $\mathcal{L}_2^3$ este o latice distributivă, obţinem: $(\delta \vee \varepsilon) \wedge \tau = (f(d) \vee f(e)) \wedge f(t) = f(d \vee e) \wedge f(t) = f((d \vee e) \wedge t) = f((d \wedge t) \vee (e \wedge t)) = f(d \wedge t) \vee f(e \wedge t) = (f(d) \wedge f(t)) \vee (f(e) \wedge f(t)) = (\delta \wedge \tau) \vee (\varepsilon \wedge \tau)$. Prin urmare, laticea $Im(f)$ satisface una dintre legile de distributivitate, şi, deci, pe amândouă, aşadar $Im(f)$ este o latice distributivă.

Am obţinut că $Im(f)$ este o latice distributivă mărginită (ca fapt general, imaginea unei latici distributive mărginite printr–un morfism de latici mărginite este o latice distributivă mărginită).

Un alt rezultat necesar pentru a rezolva acest exerciţiu spune că imaginea printr–un morfism de latici mărginite a complementului unui element al domeniului morfismului este un complement al imaginii acelui element în codomeniul morfismului, precum şi în imaginea morfismului.

Fie, aşadar, $d, e \in L_2^3$ astfel încât e este complement al lui d în $\mathcal{L}_2^3$; să demonstrăm că $f(e)$ este complement al lui $f(d)$ în $\mathcal{P}$ şi în $Im(f)$. Conform definiţiei unui complement, avem: $d \vee e = 1$ şi $d \wedge e = 0$. Rezultă că $f(d) \vee f(e) = f(d \vee e) = f(1) = 1$ şi $f(d) \wedge f(e) = f(d \wedge e) = f(0) = 0$, deci $f(e)$

este complement al lui $f(d)$ în $\mathcal{P}$, dar şi în $Im(f)$, pentru că toţi termenii din P care apar în aceste relaţii aparţin sublaticii mărginite $Im(f)$ a lui $\mathcal{P}$.

Şi acum să demonstrăm că nu putem avea $p, s \in Im(f)$.

Presupunem prin absurd că $p, s \in Im(f)$, adică există $u, v \in L_2^3$ astfel încât $f(u) = p$ şi $f(v) = s$. u şi v sunt elemente ale laticii mărginite complementate $\mathcal{L}_2^3$, deci au complemente în $\mathcal{L}_2^3$. Fie $\overline{u}, \overline{v} \in L_2^3$, astfel încât $\overline{u}$ este complement al lui u în $\mathcal{L}_2^3$ şi $\overline{v}$ este complement al lui v în $\mathcal{L}_2^3$. Atunci $f(\overline{u})$ este complement al lui $f(u) = p$ în $\mathcal{P}$ şi în $Im(f)$ şi $f(\overline{v})$ este complement al lui $f(v) = s$ în $\mathcal{P}$ şi în $Im(f)$. Dar singurul complement al lui p în $\mathcal{P}$ este m, şi tot m este singurul complement al lui s în $\mathcal{P}$. Rezultă că $m = f(\overline{u}) = f(\overline{v}) \in Im(f)$. Prin urmare, $m \in Im(f)$ are doi complemenţi distincţi, anume p şi s, în $\mathcal{P}$ şi în $Im(f)$. Dar $Im(f)$ este o latice distributivă mărginită, deci satisface proprietatea de unicitate a complementului, conform unui rezultat teoretic binecunoscut: orice element al lui $Im(f)$ are cel mult un complement în laticea distributivă mărginită $Im(f)$. Am obţinut o contradicţie; aşadar nu putem avea simultan $p \in Im(f)$ şi $s \in Im(f)$.

(i) Conform celor de mai sus, dacă $p \in Im(f)$, atunci $s \notin Im(f)$.

(ii) Similar, dacă $s \in Im(f)$, atunci $p \notin Im(f)$.

Ca o observaţie suplimentară, întrucât $\mathcal{L}_2^3$ este o algebră Boole, adică o latice distributivă mărginită complementată, iar f este un morfism de latici mărginite, rezultă că şi $Im(f)$ este o latice distributivă mărginită complementată, adică o algebră Boole (a se revedea raţionamentul anterior, precum şi rezolvarea Exerciţiului 1.2). În plus, elementele lui $\mathcal{P}$ $0, 1 \in Im(f)$. Dacă am avea $p, s \in Im(f)$, atunci şi complementul acestor elemente din $\mathcal{P}$, anume m, ar satisface $m \in Im(f)$ (ca mai sus). Deci am avea întregul $P \subseteq Im(f) \subseteq P$, adică $P = Im(f)$. Iar aici am putea argumenta că, atunci, $card(Im(f)) = card(P) = 5$, iar 5 nu este o putere naturală a lui 2, deci am obţine o contradicţie cu faptul că $Im(f)$ este o algebră Boole (a se vedea **Teorema de structură a algebrelor Boole finite**). Sau am putea observa că $Im(f)$, ca latice mărginită, ar fi exact $\mathcal{P}$ (ca mai sus), iar $\mathcal{P}$ nu este o algebră Boole, deci, iarăşi, am avea o contradicţie. Acestea sunt alte două moduri în care am putea încheia rezolvarea exerciţiului.

Exerciţiul 2.3. *Fie $\alpha, \beta, \gamma \in E$, arbitrare. Să se demonstreze că:*

$$\vdash \alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma) \quad \textit{ddacă} \quad \{\gamma\} \vdash \neg\,(\alpha \wedge \beta).$$

Rezolvarea 1 (parţial sintactic, parţial algebric): Conform **Teoremei deducţiei**, $\{\gamma\} \vdash \neg\,(\alpha \wedge \beta)$ ddacă $\vdash \gamma \to \neg\,(\alpha \wedge \beta)$.

Fie $a = \hat{\alpha}, b = \hat{\beta}, c = \hat{\gamma} \in E/\!\sim$. Au loc echivalenţele: $\vdash \gamma \to \neg\,(\alpha \wedge \beta)$ ddacă $\widehat{\gamma \to \neg\,(\alpha \wedge \beta)} = 1$ ddacă $\hat{\gamma} \to \overline{(\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta})} = 1$ ddacă $c \to \overline{(a \wedge b)} = 1$ ddacă $\overline{c} \vee \overline{(a \wedge b)} = 1$ ddacă $\overline{c} \vee \overline{a} \vee \overline{b} = 1$ ddacă $\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c} = 1$ ddacă $a \to (\overline{b} \vee \overline{c}) = 1$ ddacă $a \to (b \to \overline{c}) = 1$ ddacă $\hat{\alpha} \to (\hat{\beta} \to \overline{\hat{\gamma}}) = 1$ ddacă $\hat{\alpha} \to (\hat{\beta} \to \widehat{\neg\,\gamma}) = 1$ ddacă $\alpha \to \widehat{(\beta \to \neg\,\gamma)} = 1$ ddacă $\vdash \alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma)$. Am folosit definiţia implicaţiei într–o algebră Boole, **legile lui de Morgan** şi comutativitatea operaţiei $\vee$ într–o latice.

Am obţinut echivalenţa din enunţ.

Rezolvarea 2 (semantic): Conform **Teoremei de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic, au loc următoarele echivalenţe:

$$\vdash \alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma) \text{ ddacă } \vDash \alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma) \text{ şi}$$

$$\{\gamma\} \vdash \neg\,(\alpha \wedge \beta) \text{ ddacă } \{\gamma\} \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta).$$

Vom demonstra, prin dublă implicaţie, echivalenţa:

$$\vDash \alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma) \quad \text{ddacă} \quad \{\gamma\} \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta).$$

Şi aici vom folosi definiţia implicaţiei într–o algebră Boole, **legile lui de Morgan** şi comutativitatea operaţiei $\vee$ într–o latice, dar şi autodualitatea complementării. De data aceasta, algebra Boole în care vom lucra va fi $\mathcal{L}_2$ (algebra Boole standard, cu mulţimea suport $\{0, 1\}$).

"$\Rightarrow$:" Presupunem că $\vDash \alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma)$.

Fie $h : V \to \mathcal{L}_2$ astfel încât $h \vDash \gamma$, i. e. $\tilde{h}(\gamma) = 1$. Cum $\vDash \alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma)$, are loc: $\tilde{h}(\alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma)) = 1$, i. e. $\tilde{h}(\alpha) \to (\tilde{h}(\beta) \to \overline{\tilde{h}(\gamma)}) = 1$, prin urmare $\tilde{h}(\alpha) \to (\tilde{h}(\beta) \to \overline{1}) = 1$, deci $\tilde{h}(\alpha) \to (\tilde{h}(\beta) \to 0) = 1$, adică $\tilde{h}(\alpha) \to (\overline{\tilde{h}(\beta)} \vee 0) = 1$, i. e. $\tilde{h}(\alpha) \to \overline{\tilde{h}(\beta)} = 1$, deci $\overline{\tilde{h}(\alpha)} \vee \overline{\tilde{h}(\beta)} = 1$, aşadar $\overline{\tilde{h}(\alpha) \wedge \tilde{h}(\beta)} = 1$, i. e. $\tilde{h}(\neg\,(\alpha \wedge \beta)) = 1$, aşadar $h \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta)$.

Prin urmare, $\{\gamma\} \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta)$.

"$\Leftarrow$:" Presupunem că $\{\gamma\} \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta)$.

Fie $h : V \to \mathcal{L}_2$ o interpretare arbitrară.

Dacă $\tilde{h}(\gamma) = 0$, atunci $\tilde{h}(\neg\,\gamma) = \overline{\tilde{h}(\gamma)} = \overline{0} = 1$, prin urmare $\tilde{h}(\beta \to \neg\,\gamma) = \tilde{h}(\beta) \to \tilde{h}(\neg\,\gamma) = \tilde{h}(\beta) \to 1 = 1$, aşadar $\tilde{h}(\alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma)) = \tilde{h}(\alpha) \to \tilde{h}(\beta \to \neg\,\gamma)) = \tilde{h}(\alpha) \to 1 = 1$.

Dacă $\tilde{h}(\gamma) = 1$, atunci $h \vDash \gamma$, aşadar, întrucât $\{\gamma\} \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta)$, rezultă că $\tilde{h}(\neg\,(\alpha \wedge \beta)) = 1$, adică $\overline{\tilde{h}(\alpha \wedge \beta)} = 1$, deci $\tilde{h}(\alpha \wedge \beta) = \overline{\overline{\tilde{h}(\alpha \wedge \beta)}} = \overline{1} = 0$, prin urmare $\tilde{h}(\alpha) \wedge \tilde{h}(\beta) = 0$, aşadar $\tilde{h}(\alpha) = 0$ sau $\tilde{h}(\beta) = 0$, deoarece $\tilde{h}(\alpha)$ şi $\tilde{h}(\beta)$ sunt elemente ale lui $\mathcal{L}_2$. Dacă $\tilde{h}(\alpha) = 0$, atunci $\tilde{h}(\alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma)) = \tilde{h}(\alpha) \to \tilde{h}(\beta \to \neg\,\gamma) = 0 \to \tilde{h}(\beta \to \neg\,\gamma) = 1$. Dacă $\tilde{h}(\beta) = 0$, atunci $\tilde{h}(\beta \to \neg\,\gamma) = \tilde{h}(\beta) \to \tilde{h}(\neg\,\gamma) = 0 \to \tilde{h}(\neg\,\gamma) = 1$, prin urmare $\tilde{h}(\alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma)) = \tilde{h}(\alpha) \to \tilde{h}(\beta \to \neg\,\gamma) = \tilde{h}(\alpha) \to 1 = 1$.

În fiecare caz posibil obţinem $\tilde{h}(\alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma)) = 1$. Aşadar, $\vDash \alpha \to (\beta \to \neg\,\gamma)$.

Am obţinut echivalenţa din enunţ.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova, 2003.

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1974, 1975, 1976.

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti, 1978.

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti, 2010.

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1982.

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1996.

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online, în care se află şi articolul de faţă.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).

Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a X-a

Claudia MUREŞAN

Universitatea din Bucureşti

Facultatea de Matematică şi Informatică

Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România

Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti. Unele dintre enunţurile de mai jos sunt extinse faţă de versiunile respectivelor exerciţii care au apărut la acest examen.

Vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Pentru noţiunile şi rezultatele teoretice pe care le vom folosi în exerciţiile următoare, recomandăm consultarea bibliografiei de la sfârşitul acestui text. Oferim în cele ce urmează un mic mnemonic de noţiuni şi rezultate care ne vor fi necesare pentru rezolvarea acestor exerciţii.

Vom nota cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale şi cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulţimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a, b} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$.

Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată* (i. e. mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine pe ea);
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată;*
- *funcţie izotonă* $\equiv$ *funcţie care păstrează ordinea* $\equiv$ *funcţie crescătoare;*
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană,*

precum şi definiţiile, notaţiile şi rezultatele următoare:

- se foloseşte următoarea convenţie: dacă o mulţime A este suportul unei structuri algebrice $\mathcal{A}$, atunci prin A vom înţelege deopotrivă mulţimea A şi structura algebrică $\mathcal{A}$, în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* ddacă mulţimea ei suport este nevidă, respectiv finită;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $|A|$ cardinalul lui A, iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulţimea părţilor lui A);

- pentru orice mulţimi A şi B, vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecţie cu B, care se transcrie prin: $|A| = |B|$;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulţimi*; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulţimi* (se defineşte şi A^0, care este un singleton, i. e. o mulţime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice, precum şi puterile naturale ale unei structuri algebrice;
- pentru orice mulţime A, o *relaţie binară pe A* este o submulţime a lui A^2;
- dacă A este o mulţime şi $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a \,\rho\, b$;
- pentru orice mulţime A, se notează cu Δ_A relaţia binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ şi numită *diagonala lui A*;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se zice:
  - (i) *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x \,\rho\, x$;
  - (ii) *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$, atunci $y \,\rho\, x$;
  - (iii) *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$ şi $y \,\rho\, x$, atunci $x = y$;
  - (iv) *asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;
  - (v) *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x \,\rho\, y$ şi $y \,\rho\, z$, atunci $x \,\rho\, z$;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se numeşte:
  - (i) *(relaţie de) preordine* ddacă este reflexivă şi tranzitivă;
  - (ii) *(relaţie de) echivalenţă* ddacă este o preordine simetrică;
  - (iii) *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
  - (iv) *(relaţie de) ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relaţie de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x \,\rho\, y$ sau $y \,\rho\, x$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se defineşte *inversa lui ρ* ca fiind relaţia binară pe A notată cu ρ^{-1} şi dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A şi orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;
- pentru orice relaţii binare ρ şi σ pe o mulţime A, avem:
  - (i) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
  - (ii) $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
  - (iii) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcup\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
  - (iv) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecţiei cu inversarea);

- inversa unei relaţii de ordine notate $\leq$ se notează, uzual, cu $\geq$;
- pentru orice mulţime A şi orice relaţii binare ρ şi σ pe A, compunerea dintre relaţiile binare ρ şi σ se notează cu $\rho\circ\sigma$ şi se defineşte astfel: $\rho\circ\sigma = \{(a,c) \mid a,c \in A, (\exists\, b \in A)\,(a,b) \in \sigma \text{ şi } (b,c) \in \rho\}$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ şi $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

  (i) ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;
  (ii) ρ este simetrică ddacă $\rho = \rho^{-1}$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se numeşte *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ cea mai mică (în sensul incluziunii) relaţie binară reflexivă/simetrică/tranzitivă pe A care include pe ρ;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

  (i) ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;
  (ii) ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;
  (iii) ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A:

  (i) $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;
  (ii) $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;
  (iii) $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $Echiv(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A, şi, pentru orice $\sim\in Echiv(A)$, se notează cu $A/\!\sim$ *mulţimea factor a lui A prin* $\sim$, i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $\sim$;
- pentru orice mulţime nevidă A, o *partiţie a lui A* este o familie nevidă de părţi nevide ale lui A două câte două disjuncte şi având reuniunea egală cu A; vom nota mulţimea partiţiilor lui A cu $Part(A)$;
- pentru orice mulţime nevidă A, $Echiv(A) \cong Part(A)$, întrucât funcţia $\varphi : Echiv(A) \to Part(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/\!\sim$ pentru orice $\sim\in Echiv(A)$, este o bijecţie; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice $\pi = (A_i)_{i\in I} \in Part(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relaţia de echivalenţă pe A care are drept clase mulţimile A_i, cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim\subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$;

- pentru orice n natural nenul, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente şi cu L_n mulţimea suport a lui $\mathcal{L}_n$; cele n elemente ale lui L_n vor fi notate adecvat fiecărei situaţii în care vor apărea în cele ce urmează; $\mathcal{L}_n$ este unic modulo un izomorfism de poseturi, i. e. modulo o funcţie izotonă bijectivă şi cu inversa izotonă;
- pentru orice poset $(P,\leq)$, notăm cu $<$ relaţia de ordine strictă asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $<=\leq\setminus\Delta_P = \{(a,b) \mid a,b \in P, a \leq b, a \neq b\}$, şi cu $\prec$ relaţia de succesiune asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $\prec= \{(a,b) \mid a,b \in P, a < b, (\nexists\, x \in P)\, a < x < b\}$;
- notăm laticile sub forma $(L,\vee,\wedge,\leq)$ sau $(L,\vee,\wedge)$, laticile mărginite sub forma $(L,\vee,\wedge,\leq,0,1)$ sau $(L,\vee,\wedge,0,1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B,\vee,\wedge,\leq,\bar{\cdot},0,1)$ sau $(B,\vee,\wedge,\bar{\cdot},0,1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;
- legătura dintre operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L,\vee,\wedge,\leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- într–o latice mărginită $\mathcal{L} = (L,\vee,\wedge,\leq,0,1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ şi} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puţin un complement;
- într–o latice mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;
- o latice este nedistributivă ddacă are o sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul;
- orice lanţ este o latice (distributivă), cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;
- în orice algebră Boole $(B,\vee,\wedge,\leq,\bar{\cdot},0,1)$, se definesc *implicaţia booleană*, $\to$, şi *echivalenţa booleană*, $\leftrightarrow$, ca operaţii binare pe B, astfel: pentru orice $x, y \in B$:

  (i) $x \to y = \overline{x} \vee y$;
  (ii) $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$;

- în orice algebră Boole $(B,\vee,\wedge,\leq,\bar{\cdot},0,1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:

  (i) $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ şi: $\overline{x} = 1$ ddacă $x = 0$, iar: $\overline{x} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latice mărginită, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia şi nu au alte complemente);
  (ii) $\overline{\overline{x}} = x$;
  (iii) $x \to y = 1$ ddacă $x \leq y$;
  (iv) $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;

- pentru orice mulţime A, $(\mathcal{P}(A),\cup,\cap,\subseteq,\bar{\cdot},\emptyset,A)$ este o algebră Boole, unde am notat, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\overline{X} = A \setminus X$;
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_2^n$ (puterea a n–a a lanţului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole $\mathcal{L}_2$, numită *algebra Boole standard*; dacă notăm cu $L_2 = \{0,1\}$ mulţimea suport a lanţului cu 2 elemente, $\mathcal{L}_2$, atunci $L_2^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_1,x_2,\ldots,x_n \in \{0,1\}\}$ este mulţimea subiacentă a algebrei Boole $\mathcal{L}_2^n$; vom păstra aceste notaţii în cele ce urmează;

- orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$;
- se numeşte *atom* al unei algebre Boole $(B,\vee,\wedge,\leq,\bar{\cdot},0,1)$ un succesor al lui 0 în posetul $(B,\leq)$, adică un element $a \in B$ cu $0 \prec a$ (i. e. astfel încât $0 < a$ şi nu există niciun $x \in B$ cu proprietatea că $0 < x < a$);
- se numeşte *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B,\vee,\wedge,\leq,\bar{\cdot},0,1)$ o submulţime nevidă F a lui B închisă la conjuncţie şi la majorare, i. e. o mulţime F cu proprietăţile:

  (i) $\emptyset \neq F \subseteq B$;
  (ii) pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;
  (iii) pentru orice $x \in F$ şi orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;

  mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathcal{F}(\mathcal{B})$;

- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conţine elementul 1;
- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B,\vee,\wedge,\leq,\bar{\cdot},0,1)$ şi orice $a \in B$, mulţimea notată $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, numit *filtrul principal generat de a*; notăm mulţimea filtrelor principale ale lui $\mathcal{B}$ cu $\mathcal{PF}(\mathcal{B})$;
- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale;
- se numeşte *congruenţă* a unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B,\vee,\wedge,\leq,\bar{\cdot},0,1)$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B compatibilă cu operaţiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, i. e. o relaţie binară $\sim$ pe B cu proprietăţile:

  (i) $\sim\in Echiv(B)$;
  (ii) pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea cu** $\vee$);
  (iii) pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea cu** $\wedge$);
  (iv) pentru orice $x, x' \in B$, dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea cu** $\bar{\cdot}$);

  notăm cu $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$;

- referitor la definiţia anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relaţii binare $\sim$ pe B cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$ (i. e. constantele 0 şi 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, proprietăţi care sunt satisfăcute nu numai de către orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B, ci chiar de către orice relaţie reflexivă $\sim$ pe B;
- mulţimea congruenţelor unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este în bijecţie cu mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$;
- notăm cu V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic;
- notăm cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;
- notăm cu $(E/\!\sim,\vee,\wedge,\leq,\bar{\cdot},0,1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, despre care ştim că este o algebră Boole;

- notăm cu $\hat{\varphi} \in E/\!\sim$ clasa unui enunţ φ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/\!\sim$;
- dată o interpretare în calculul propoziţional clasic, i. e. o funcţie $h : V \to \mathcal{L}_2$, notăm cu $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene (notaţii alternative: $h : V \to L_2 = \{0,1\}$, $\tilde{h} : E \to L_2$);
- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\vDash \varphi$ faptul că un enunţ φ este universal adevărat (tautologie, adevăr semantic) în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\Sigma \vDash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil semantic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- pentru orice enunţ φ, $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, şi $\vDash \varphi$ ddacă $\emptyset \vDash \varphi$;
- se notează cu $h \vDash \varphi$, respectiv $h \vDash \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ satisface un enunţ $\varphi \in E$, respectiv o mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducţiei** pentru calculul propoziţional clasic); în cele ce urmează, vom nota prin **TD** această teoremă;
- pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$ (**lemă** din calculul propoziţional clasic);
- pentru orice $\varphi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic); în cele ce urmează, vom nota prin **TCT** această teoremă; cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numeşte **Teorema de completitudine** a calculului propoziţional clasic.

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Fie A o mulţime nevidă şi ρ o relaţie binară pe A. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\mathcal{R}(\rho) = \mathcal{S}(\rho)$;

(ii) ρ este reflexivă şi simetrică.

Rezolvare: (ii)$\Rightarrow$(i): Dacă ρ este reflexivă şi simetrică, atunci $\mathcal{R}(\rho) = \rho = \mathcal{S}(\rho)$.
(i)$\Rightarrow$(ii): Dacă are loc egalitatea $\mathcal{R}(\rho) = \mathcal{S}(\rho)$, atunci, conform formulelor pentru $\mathcal{R}(\rho)$ şi $\mathcal{S}(\rho)$, obţinem: $\Delta_A \cup \rho = \rho \cup \rho^{-1}$. Întrucât $\begin{cases} \Delta_A \subseteq \Delta_A \cup \rho \text{ şi} \\ \rho^{-1} \subseteq \rho \cup \rho^{-1}, \end{cases}$ rezultă că: $\begin{cases} \Delta_A \subseteq \rho \cup \rho^{-1} \text{ şi} \\ \rho^{-1} \subseteq \Delta_A \cup \rho. \end{cases}$

Fie $a \in A$, arbitrar. Atunci $(a,a) \in \Delta_A \subseteq \rho \cup \rho^{-1}$, deci are loc cel puţin una dintre situaţiile:

- $(a,a)\in\rho$;
- $(a,a)\in\rho^{-1}$, prin urmare $(a,a)\in\rho$.

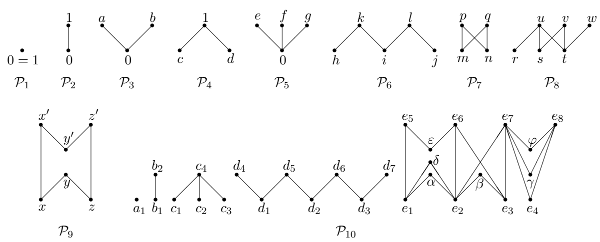
Aşadar, oricare ar fi $a\in A$, $(a,a)\in\rho$, deci $\Delta_A\subseteq\rho$, prin urmare ρ este reflexivă, iar $\Delta_A\cup\rho=\rho$. Cum $\rho^{-1}\subseteq\Delta_A\cup\rho$, rezultă că $\rho^{-1}\subseteq\rho$, prin urmare $(\rho^{-1})^{-1}\subseteq\rho^{-1}$, i. e. $\rho\subseteq\rho^{-1}$, aşadar $\begin{cases}\rho^{-1}\subseteq\rho \text{ şi}\\ \rho\subseteq\rho^{-1},\end{cases}$ deci $\rho=\rho^{-1}$, aşadar ρ este simetrică.

Exerciţiul 1.2. *Să se deseneze diagramele Hasse a:*

(i) zece poseturi finite nevide două câte două neizomorfe în care relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune coincid;

(ii) două latici finite nevide neizomorfe în care relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune coincid; în plus, să se demonstreze că acestea două sunt (modulo câte un izomorfism de latici) singurele latici finite nevide în care relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune coincid.

Rezolvare: Faptul că două poseturi finite nevide sunt neizomorfe se traduce în proprietatea că diagramele lor Hasse sunt diferite. La fel pentru latici finite nevide.
(i) În fiecare dintre următoarele poseturi, $<=\prec$:



Într–adevăr:

- în $\mathcal{P}_1=\mathcal{L}_1$ (lanţul cu 1 element): $<=\prec=\emptyset$;
- în $\mathcal{P}_2=\mathcal{L}_2$ (lanţul cu 2 elemente): $<=\prec=\{(0,1)\}$;
- în $\mathcal{P}_3$: $<=\prec=\{(0,a),(0,b)\}$;
- în $\mathcal{P}_4$: $<=\prec=\{(c,1),(d,1)\}$;
- în $\mathcal{P}_5$: $<=\prec=\{(0,e),(0,f),(0,g)\}$;
- în $\mathcal{P}_6$: $<=\prec=\{(h,k),(i,k),(i,l),(j,l)\}$;

- în $\mathcal{P}_7$: $<=\prec=\{(m,p),(m,q),(n,p),(n,q)\}$;
- în $\mathcal{P}_8$: $<=\prec=\{(r,u),(s,u),(t,u),(s,v),(t,v),(t,w)\}$;
- în $\mathcal{P}_9$: $<=\prec=\{(x,x'),(z,z'),(x,y),(z,y),(y',x'),(y',z')\}$;
- în $\mathcal{P}_{10}$:$<=\prec=\{(b_1,b_2),(c_1,c_4),(c_2,c_4),(c_3,c_4),(d_1,d_4),(d_1,d_5),(d_2,d_5),(d_2,d_6),(d_3,d_6),(d_3,d_7),(e_1,e_5),(e_2,e_6),(e_3,e_7),(e_1,\alpha),(e_2,\alpha),(e_1,\delta),(e_2,\delta),(\varepsilon,e_5),(\varepsilon,e_6),(e_2,\beta),(e_3,\beta),(e_2,e_7),(e_3,e_6),(e_4,e_7),(e_4,e_8),(\gamma,e_7),(\gamma,e_8),(\varphi,e_7),(\varphi,e_8)\}$.

(ii) Fie $\mathcal{L}$ o latice finită şi nevidă. Atunci $\mathcal{L}$ este mărginită, i. e. are 0 şi 1. Dacă laticea mărginită $\mathcal{L}$ are un singur element, atunci, în $\mathcal{L}$, $0=1$, prin urmare $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1$ (lanţul cu 1 element), iar, dacă $\mathcal{L}$ are exact două elemente, atunci $0\neq 1$ şi 0 şi 1 sunt singurele elemente ale lui $\mathcal{L}$, aşadar $\mathcal{L}=\mathcal{L}_2$ (lanţul cu 2 elemente).

Deci $\mathcal{L}_1$ este singura latice cu un singur element, iar $\mathcal{L}_2$ este singura latice cu două elemente. În fiecare dintre acestea, $<=\prec$, după cum am observat la punctul (i) (a se revedea poseturile $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$).

Acum să considerăm o latice finită nevidă (deci mărginită) $\mathcal{L}$ cu 3 sau mai multe elemente. Întrucât $\mathcal{L}$ are cel puţin 3 elemente, rezultă că $\mathcal{L}$ are un element x diferit de 0 şi de 1. Atunci, în $\mathcal{L}$, $0<x<1$, aşadar $0<1$ (i. e. $(0,1)$ aparţine relaţiei de ordine strictă asociate relaţiei de ordine a lui $\mathcal{L}$) şi $0\not\prec 1$ (i. e. $(0,1)$ nu aparţine relaţiei de succesiune asociate relaţiei de ordine a lui $\mathcal{L}$), prin urmare $<\neq\prec$ în $\mathcal{L}$ (i. e. relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune nu coincid în $\mathcal{L}$).

Aşadar, $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_2$ sunt singurele latici finite şi nevide în care relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune coincid (singurele modulo un izomorfism de latici (mărginite), desigur, iar $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_2$ sunt neizomorfe, pentru că au cardinale diferite).

Exerciţiul 1.3. *Fie $\mathcal{B}=(B,\vee,\wedge,\leq,\bar{\cdot},0,1)$ o algebră Boole cu cel puţin doi atomi distincţi, iar F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Să se demonstreze că: $F\neq B$ ddacă F nu conţine doi atomi distincţi ai lui $\mathcal{B}$.*

Rezolvare: Este suficient să demonstrăm că: $F=B$ ddacă F conţine doi atomi distincţi ai lui $\mathcal{B}$.
"$\Rightarrow$:" Presupunem că $F=B$. Prin ipoteză, există $a,b\in B$, astfel încât a şi b sunt atomi în $\mathcal{B}$ şi $a\neq b$. Cum $F=B$, rezultă că $a,b\in F$.
"$\Leftarrow$:" Presupunem că există $a,b\in F$, astfel încât a şi b sunt atomi în $\mathcal{B}$ şi $a\neq b$. Cum F este un filtru al lui $\mathcal{B}$, rezultă că $a\wedge b\in F$.

$0\leq a\wedge b\leq a$ şi $0\prec a$, prin urmare $0=a\wedge b$ sau $a\wedge b=a$. Dacă am avea $a\wedge b=a$, atunci, întrucât $a\wedge b\leq b$, ar rezulta că $a\leq b$. Dar $0\prec b$, iar $0\neq a$ pentru că $0\prec a$, ceea ce implică $a=b$; am obţinut o contradicţie cu alegerea lui a şi b. Aşadar, are loc $0=a\wedge b$.

Prin urmare, $0\in F$, iar F este un filtru al lui $\mathcal{B}$ (în particular, F este o submulţime a lui B închisă la majorare), de unde rezultă că $F=B$.

Exerciţiul 1.4. *Fie $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\varphi,\psi,\chi\in E$ şi $\Sigma\subseteq E$, $\Delta\subseteq E$, astfel încât:*

$$\varphi=(\alpha\rightarrow\neg\beta)\leftrightarrow(\gamma\wedge(\neg\delta\rightarrow\varepsilon)),\ \psi=\alpha\wedge\beta,\ \chi=\neg\delta\wedge\neg\varepsilon,$$

$$\Sigma\vdash\varphi,\ \Delta\vdash\gamma,\ \Sigma\cap\Delta\vdash\psi.$$

Să se demonstreze că: $\Sigma\cup\Delta\vdash\chi$.

Rezolvare: Proprietăţile $\Sigma\vdash\varphi$, $\Delta\vdash\gamma$, $\Sigma\cap\Delta\vdash\psi$ sunt echivalente, conform **TCT**, cu $\Sigma\vDash\varphi$, $\Delta\vDash\gamma$, $\Sigma\cap\Delta\vDash\psi$, respectiv.

Să demonstrăm că $\Sigma\cup\Delta\vDash\chi$. În acest scop, să considerăm o interpretare arbitrară care satisface mulţimea de enunţuri $\Sigma\cup\Delta$, i. e. o funcţie arbitrară $h:V\rightarrow L_2=\{0,1\}$ astfel încât $h\vDash\Sigma\cup\Delta$.

Cum $\Sigma\subseteq\Sigma\cup\Delta$, iar $h\vDash\Sigma\cup\Delta$, rezultă că $h\vDash\Sigma$. Dar $\Sigma\vDash\varphi$, aşadar $\tilde{h}(\varphi)=1$.

Cum $\Delta\subseteq\Sigma\cup\Delta$, iar $h\vDash\Sigma\cup\Delta$, rezultă că $h\vDash\Delta$. Dar $\Delta\vDash\gamma$, aşadar $\tilde{h}(\gamma)=1$.

Cum $\Sigma\cap\Delta\subseteq\Sigma\cup\Delta$, iar $h\vDash\Sigma\cup\Delta$, rezultă că $h\vDash\Sigma\cap\Delta$. Dar $\Sigma\cap\Delta\vDash\psi$, aşadar $\tilde{h}(\psi)=1$.

$\psi=\alpha\wedge\beta$, prin urmare $1=\tilde{h}(\psi)=\tilde{h}(\alpha\wedge\beta)=\tilde{h}(\alpha)\wedge\tilde{h}(\beta)$, aşadar $\tilde{h}(\alpha)=\tilde{h}(\beta)=1$, prin urmare $\tilde{h}(\alpha\rightarrow\neg\beta)=\tilde{h}(\alpha)\rightarrow\overline{\tilde{h}(\beta)}=1\rightarrow\overline{1}=1\rightarrow 0=0$.

$\varphi=(\alpha\rightarrow\neg\beta)\leftrightarrow(\gamma\wedge(\neg\delta\rightarrow\varepsilon))$, prin urmare $1=\tilde{h}(\varphi)=\tilde{h}(\alpha\rightarrow\neg\beta)\leftrightarrow\tilde{h}(\gamma\wedge(\neg\delta\rightarrow\varepsilon))=0\leftrightarrow\tilde{h}(\gamma\wedge(\neg\delta\rightarrow\varepsilon))=0\leftrightarrow(\tilde{h}(\gamma)\wedge\tilde{h}(\neg\delta\rightarrow\varepsilon))=0\leftrightarrow(1\wedge\tilde{h}(\neg\delta\rightarrow\varepsilon))=0\leftrightarrow\tilde{h}(\neg\delta\rightarrow\varepsilon)=0\leftrightarrow(\overline{\tilde{h}(\delta)}\rightarrow\tilde{h}(\varepsilon))$. Deci $0\leftrightarrow(\overline{\tilde{h}(\delta)}\rightarrow\tilde{h}(\varepsilon))=1$, prin urmare $\overline{\tilde{h}(\delta)}\rightarrow\tilde{h}(\varepsilon)=0$, ceea ce, întrucât acest calcul este efectuat în algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$, înseamnă că $\overline{\tilde{h}(\delta)}=1$ şi $\tilde{h}(\varepsilon)=0$, deci $\tilde{h}(\delta)=\tilde{h}(\varepsilon)=0$.

$\chi=\neg\delta\wedge\neg\varepsilon$, prin urmare $\tilde{h}(\chi)=\tilde{h}(\neg\delta\wedge\neg\varepsilon)=\overline{\tilde{h}(\delta)}\wedge\overline{\tilde{h}(\varepsilon)}=\overline{0}\wedge\overline{0}=1\wedge 1=1$.

În concluzie, orice interpretare h cu $h\vDash\Sigma\cup\Delta$ are proprietatea că $\tilde{h}(\chi)=1$, ceea ce înseamnă că $\Sigma\cup\Delta\vDash\chi$, iar, conform **TCT**, acest fapt este echivalent cu: $\Sigma\cup\Delta\vdash\chi$.

2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *(i) Fie $(P,\leq)$ un poset nevid. Să se demonstreze că: $(P,\leq)$ este un lanţ ddacă $\mathcal{S}(\leq)=P^2$.*

(ii) Să se dea un exemplu de poset finit şi nevid $(P,\leq)$ astfel încât $\mathcal{S}(\leq)\notin Echiv(P)$.

(iii) Să se dea un exemplu de poset finit şi nevid $(P,\leq)$ astfel încât $\mathcal{S}(\leq)\in Echiv(P)\setminus\{P^2\}$.

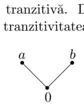
(iv) Fie $(P,\leq)$ un poset nevid. Să se demonstreze că, pentru orice $x,y\in P$, $(x,y)\in\mathcal{S}(\leq)$ ddacă x şi y sunt comparabile în posetul $(P,\leq)$.

(v) Fie $(P,\leq)$ un poset nevid, astfel încât $\mathcal{S}(\leq)\in Echiv(P)$ şi, pentru fiecare $x\in P$, fie $\hat{x}$ clasa de echivalenţă a lui x raportat la $\mathcal{S}(\leq)$. Să se demonstreze că, pentru orice $x,y\in P$: $\hat{x}=\hat{y}$ ddacă x şi y sunt comparabile în posetul $(P,\leq)$.

(vi) Pentru un k natural nenul, arbitrar, fixat, să se dea un exemplu de poset finit şi nevid $(P,\leq)$ astfel încât $\mathcal{S}(\leq)\in Echiv(P)$ şi $|P/_{\mathcal{S}(\leq)}|=k$ (i. e. $\mathcal{S}(\leq)$ are exact k clase de echivalenţă).

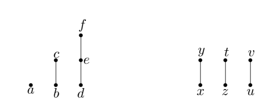
(vii) Pentru un k natural nenul, arbitrar, fixat, să se determine toate poseturile nevide $(P,\leq)$ cu proprietăţile: $\mathcal{S}(\leq)\in Echiv(P)$ şi $|P/_{\mathcal{S}(\leq)}|=k$ (i. e. $\mathcal{S}(\leq)$ are exact k clase de echivalenţă).

Rezolvare: (i) $P^2\supseteq\mathcal{S}(\leq)=\leq\cup\leq^{-1}=\leq\cup\geq=\{(x,y)\mid x,y\in P,x\leq y \text{ sau } x\geq y\}=\{(x,y)\mid x,y\in P,x\leq y \text{ sau } y\leq x\}$. Aşadar: $\mathcal{S}(\leq)=P^2$ ddacă $P^2\subseteq\mathcal{S}(\leq)$ ddacă, oricare ar fi $x,y\in P$, are loc $(x,y)\in\mathcal{S}(\leq)$ ddacă, oricare ar fi $x,y\in P$, avem $x\leq y$ sau $y\leq x$ ddacă relaţia de ordine $\leq$ este totală ddacă $(P,\leq)$ este lanţ.
(ii) Pentru orice mulţime nevidă P, $P^2\in Echiv(P)$, aşadar, conform (i), posetul $(P,\leq)$ dat ca exemplu nu trebuie să fie lanţ. Este uşor de observat că închiderea simetrică a unei relaţii de ordine $\leq$ este reflexivă (pentru că $\leq$ este reflexivă) şi simetrică (fiind o închidere simetrică). Aşadar, $\mathcal{S}(\leq)$ nu este relaţie de echivalenţă ddacă $\mathcal{S}(\leq)$ nu este tranzitivă. Deci exemplul dat trebuie să fie o relaţie de ordine care nu este totală şi care îşi pierde tranzitivitatea prin considerarea închiderii sale simetrice.



Fie $(P,\leq)$ posetul reprezentat prin diagrama Hasse de mai sus. Atunci $\leq=\{(0,0),(a,a),(b,b),(0,a),(0,b)\}$, aşadar $\mathcal{S}(\leq)=\{(0,0),(a,a),(b,b),(0,a),(a,0),(0,b),(b,0)\}$. Cum $(a,0),(0,b)\in\mathcal{S}(\leq)$, dar $(a,b)\notin\mathcal{S}(\leq)$, rezultă că $\mathcal{S}(\leq)$ nu este tranzitivă, deci $\mathcal{S}(\leq)\notin Echiv(P)$.
(iii) Pentru orice mulţime nevidă P, $Echiv(P)\setminus\{P^2\}$ conţine relaţiile de echivalenţă pe P cu două sau mai multe clase de echivalenţă. Rezultatul de la punctul (i), alături de proprietatea că închiderea simetrică a unei reuniuni (disjuncte) de relaţii binare este reuniunea (disjunctă a) inchiderilor simetrice ale acelor relaţii binare (după cum se observă din formula închiderii simetrice şi comutarea reuniunii cu inversarea pentru relaţii binare) sugerează un exemplu adecvat aici: după cum vom arăta mai jos, considerând un poset $(P,\leq)$ format din reuniunea disjunctă a mai multe lanţuri, $\mathcal{S}(\leq)$ va deveni o relaţie de echivalenţă ale cărei clase de echivalenţă vor fi închiderile simetrice ale restricţiei lui $\leq$ la fiecare dintre acele lanţuri.

De exemplu, dacă posetul $(P,\leq)$ este reuniunea disjunctă a lanţurilor $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ şi $\mathcal{L}_3$, cu diagrama Hasse de mai jos, din stânga, sau reuniunea disjunctă a trei lanţuri izomorfe cu $\mathcal{L}_2$, ca în diagrama Hasse de mai jos, din dreapta, atunci $\mathcal{S}(\leq)$ va fi o relaţie de echivalenţă cu trei clase:



$\mathcal{P}_1=(P_1,\leq)$ $\qquad$ $\mathcal{P}_2=(P_2,\sqsubseteq)$

Într–adevăr, în cazul posetului $\mathcal{P}_1$ figurat mai sus, cu $P_1=\{a,b,c,d,e,f\}$, are loc: $\leq=\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,c),(d,d),(d,e),(d,f),(e,e),(e,f),(f,f)\}$, prin urmare $\mathcal{S}(\leq)=\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,d),(d,e),(d,f),(e,d),(e,e),(e,f),(f,d),(f,e),(f,f)\}=\{a\}^2\cup\{b,c\}^2\cup\{d,e,f\}^2\in Echiv(P_1)\setminus\{P_1^2\}$, având clasele de echivalenţă: $\{a\}$, $\{b,c\}$ şi $\{d,e,f\}$.

De asemenea, în cazul posetului $\mathcal{P}_2$ de mai sus, cu $P_2=\{x,y,z,t,u,v\}$, avem: $\sqsubseteq=\{(x,x),(x,y),(y,y),(z,z),(z,t),(t,t),(u,u),(u,v),(v,v)\}$, prin urmare $\mathcal{S}(\sqsubseteq)=\{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y),(z,z),(z,t),(t,z),(t,t),(u,u),(u,v),(v,u),(v,v)\}=\{x,y\}^2\cup\{z,t\}^2\cup\{u,v\}^2\in Echiv(P_2)\setminus\{P_2^2\}$, având clasele de echivalenţă: $\{x,y\}$, $\{z,t\}$ şi $\{u,v\}$.
(iv) Pentru orice $x,y\in P$, au loc echivalenţele: $(x,y)\in\mathcal{S}(\leq)$ ddacă $(x,y)\in\leq\cup\leq^{-1}$ ddacă $(x,y)\in\leq\cup\geq$ ddacă $x\leq y$ sau $x\geq y$ ddacă $x\leq y$ sau $y\leq x$ ddacă x şi y sunt comparabile în posetul $(P,\leq)$.
(v) Notăm $\sim=\mathcal{S}(\leq)$. Pentru orice $x,y\in P$, au loc echivalenţele: $\hat{x}=\hat{y}$ ddacă $x\sim y$ ddacă $(x,y)\in\sim$ ddacă $(x,y)\in\mathcal{S}(\leq)$ ddacă x şi y sunt comparabile în posetul $(P,\leq)$, cu ultima echivalenţă rezultând din punctul (iv).
(vi) Considerăm k lanţuri nevide: $\mathcal{L}_{n_1}=(L_{n_1},\leq_1)$, $\mathcal{L}_{n_2}=(L_{n_2},\leq_2)$, …, $\mathcal{L}_{n_k}=(L_{n_k},\leq_k)$, cu $n_1,n_2\ldots,n_k\in\mathbb{N}^*$, astfel încât:

- pentru fiecare $j\in\overline{1,k}$, $L_{n_j}=\{x_{j,1},x_{j,2},\ldots,x_{j,n_j}\}$, cu $x_{j,1}<_j x_{j,2}<_j\ldots<_j x_{j,n_j}$, unde $<_j=\leq_j\setminus\Delta_{L_{n_j}}$ ($\mathcal{L}_{n_j}$ este lanţul cu n_j elemente);
- mulţimile $L_{n_1},L_{n_2},\ldots,L_{n_k}$ sunt două câte două disjuncte.

Fie $\mathcal{P}=(P,\leq)$ posetul dat de reuniunea (disjunctă a) celor k lanţuri descrise mai sus, i. e.: $P=\bigcup_{j=1}^{k}L_{n_j}$ şi $\leq=\bigcup_{j=1}^{k}\leq_j$. Atunci $\mathcal{S}(\leq)=\mathcal{S}(\bigcup_{j=1}^{k}\leq_j)=(\bigcup_{j=1}^{k}\leq_j)\cup(\bigcup_{j=1}^{k}\leq_j)^{-1}=(\bigcup_{j=1}^{k}\leq_j)\cup(\bigcup_{j=1}^{k}\leq_j^{-1})=$

$\bigcup_{j=1}^{k}(\leq_j \cup \leq_j^{-1}) = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{S}(\leq_j) = \bigcup_{j=1}^{k} L_{n_j}^2$; pentru ultima egalitate am folosit punctul (i).

Întrucât mulţimile $L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots, L_{n_k}$ sunt două câte două disjuncte, rezultă că mulţimile date de relaţiile de ordine $\leq_1 \subseteq L_{n_1}^2, \leq_2 \subseteq L_{n_2}^2, \ldots, \leq_k \subseteq L_{n_k}^2$ sunt două câte două disjuncte.

Conform punctului (iv), pentru orice $a, b \in P$, are loc: $(a, b) \in \mathcal{S}(\leq)$ ddacă a şi b sunt comparabile în posetul $(P, \leq)$ ddacă $(a, b) \in \leq = \bigcup_{j=1}^{k} \leq_j$ sau $(b, a) \in \leq = \bigcup_{j=1}^{k} \leq_j$ ddacă există $i \in \overline{1, k}$ astfel încât $a, b \in L_{n_i}$. Pentru ultima echivalenţă am folosit faptul că relaţiile de ordine $\leq_1 \subseteq L_{n_1}^2, \leq_2 \subseteq L_{n_2}^2, \ldots, \leq_k \subseteq L_{n_k}^2$ sunt totale (de aici rezultă implicaţia inversă: $a, b \in L_i$ implică $a \leq_i b$ sau $b \leq_i a$, iar $\leq_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \leq_j$) şi două câte două disjuncte (de aici rezultă implicaţia directă: relaţiile din reuniunea anterioară sunt două câte două disjuncte, aşadar există $i \in \overline{1, k}$, astfel încât $a \leq_i b$, sau există $i \in \overline{1, k}$, astfel încât $b \leq_i a$, deci există $i \in \overline{1, k}$, astfel încât $a \leq_i b$ sau $b \leq_i a$, iar $\leq_i \subseteq L_i^2$, aşadar $a, b \in L_i$).

În concluzie: oricare ar fi $a, b \in P$, are loc: $(a, b) \in \mathcal{S}(\leq)$ ddacă există $i \in \overline{1, k}$ astfel încât $a, b \in L_{n_i}$, iar mulţimile $L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots, L_{n_k}$ formează o partiţie a lui P (fiind nevide, două câte două disjuncte şi având reuniunea P), ceea ce arată că $\mathcal{S}(\leq) \in Echiv(P)$, având clasele de echivalenţă $L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots, L_{n_k}$: $P/_{\mathcal{S}(\leq)} = \{L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots, L_{n_k}\}$.

(vii) Observăm că, în rezolvarea punctului (vi), nu am folosit finitudinea lanţurilor $\mathcal{L}_{n_1}, \mathcal{L}_{n_2}, \ldots, \mathcal{L}_{n_k}$ decât pentru a obţine un poset $(P, \leq)$ finit. În rest, întreaga demonstraţie de la punctul (vi) este valabilă pentru orice k lanţuri nevide două câte două disjuncte. Cu alte cuvinte: reuniunea disjunctă a k lanţuri este un poset de tipul cerut, adică: dacă avem k lanţuri nevide: $\mathcal{P}_1 = (P_1, \leq_1)$, $\mathcal{P}_2 = (P_2, \leq_2)$, …, $\mathcal{P}_k = (P_k, \leq_k)$, astfel încât mulţimile $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sunt două câte două disjuncte, iar $\mathcal{P} = (P, \leq)$ este posetul dat de reuniunea (disjunctă a) acestor k lanţuri, i. e.: $P = \bigcup_{j=1}^{k} P_j$ şi $\leq = \bigcup_{j=1}^{k} \leq_j$, atunci $\mathcal{S}(\leq) \in Echiv(P)$ şi $|P/_{\mathcal{S}(\leq)}| = k$, $P/_{\mathcal{S}(\leq)} = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$.

Acum vom demonstra reciproca: orice poset de tipul cerut este o reuniune disjunctă a k lanţuri.

Fie, aşadar, $\mathcal{P} = (P, \leq)$ un poset nevid cu proprietăţile: $\mathcal{S}(\leq) \in Echiv(P)$ şi $|P/_{\mathcal{S}(\leq)}| = k$. Notăm $\sim = \mathcal{S}(\leq)$ şi fie $P_1, P_2, \ldots, P_k$ clasele de echivalenţă ale lui $\sim$, i. e. $P/\sim = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$. Atunci $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ este o partiţie a lui P, i. e. $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sunt nevide şi două câte două disjuncte şi au reuniunea egală cu P.

Pentru fiecare $j \in \overline{1, k}$, notăm cu $\leq_j$ restricţia lui $\leq$ la P_j, i. e. $\leq_j = \leq \cap P_j^2$, şi considerăm $\leq_j$ ca relaţie binară pe P_j.

Acum fie $j \in \overline{1, k}$, arbitrar, fixat.

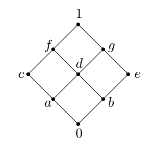
$\leq$ este o relaţie de ordine, i. e. o relaţie reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică. Din definiţia antisimetriei, rezultă imediat că $\leq_j = \leq \cap P_j^2$ este o relaţie antisimetrică. $\leq$ este reflexivă, adică $\Delta_P \subseteq \leq$, prin urmare $\Delta_P \cap P_j^2 \subseteq \leq \cap P_j^2$, i. e. $\Delta_{P_j} \subseteq \leq_j$, ceea ce arată că relaţia binară $\leq_j$ este reflexivă. Acum fie $x, y, z \in P_j$, astfel încât $x \leq_j y$ şi $y \leq_j z$. Dar $\leq_j \subseteq \leq$, aşadar $x \leq y$ şi $y \leq z$, prin urmare $x \leq z$ datorită tranzitivităţii lui $\leq$. Cum $x, z \in P_j$, rezultă că $(x, z) \in \leq \cap P_j^2 = \leq_j$, i. e. $x \leq_j z$. Deci $\leq_j$ este şi tranzitivă. Aşadar, $\leq_j$ este o relaţie de ordine pe P_j, deci $(P_j, \leq_j)$ este un poset.

Acum fie $x, y \in P_j$, arbitrare, fixate. P_j este o clasă de echivalenţă a lui $\sim = \mathcal{S}(\leq)$, aşadar $x \sim y$, i. e. $\hat{x} = \hat{y}$, ceea ce înseamnă, conform punctului (v), că x şi y sunt comparabile în posetul $(P, \leq)$, i. e. $x \leq y$ sau $y \leq x$. Dar $x, y \in P_j$, prin urmare $(x, y) \in \leq \cap P_j^2 = \leq_j$ sau $(y, x) \in \leq \cap P_j^2 = \leq_j$, adică $x \leq_j y$ sau $y \leq_j x$. Aşadar, relaţia de ordine $\leq_j$ pe P_j este totală, deci posetul $(P_j, \leq_j)$ este un lanţ.

Prin urmare, $(P_1, \leq_1)$, $(P_2, \leq_2)$, …, $(P_k, \leq_k)$ sunt lanţuri şi posetul $\mathcal{P} = (P, \leq)$ este reuniunea disjunctă a acestor lanţuri.

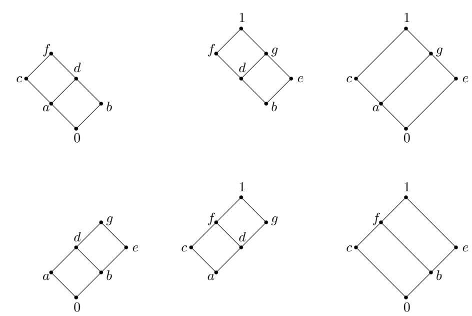
În concluzie: poseturile nevide cu proprietatea că închiderea simetrică a relaţiei lor de ordine este o relaţie de echivalenţă cu k clase sunt exact reuniunile disjuncte a câte k lanţuri nevide. Altfel scris: un poset nevid $\mathcal{P} = (P, \leq)$ are proprietăţile $\mathcal{S}(\leq) \in Echiv(P)$ şi $|P/_{\mathcal{S}(\leq)}| = k$ ddacă există k lanţuri nevide $(P_1, \leq_1)$, $(P_2, \leq_2)$, …, $(P_k, \leq_k)$ astfel încât mulţimile $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sunt două câte două disjuncte, $P = \bigcup_{j=1}^{k} P_j$ şi $\leq = \bigcup_{j=1}^{k} \leq_j$.

Exerciţiul 2.2. *Considerăm laticea $\mathcal{L}_3^2 = \mathcal{L}_3 \times \mathcal{L}_3$, cu diagrama Hasse:*



Să se pună în evidenţă toate sublaticile acestei latici care sunt izomorfe cu $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ şi să indice, dintre acestea, acelea care sunt sublatici mărginite ale lui $\mathcal{L}_3^2$.

Rezolvare: $\mathcal{L}_3^2$, cu elementele notate ca mai sus, are şase sublatici izomorfe cu $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$, anume următoarele:



Dintre acestea, numai două sunt sublatici mărginite ale lui $\mathcal{L}_3^2$, anume: $\{0, a, c, e, g, 1\}$ şi $\{0, b, c, e, f, 1\}$.

Exerciţiul 2.3. *Să se demonstreze că:*

(i) pentru orice n natural, algebra Boole $\mathcal{L}_2^n$ are exact 2^n congruenţe;

(ii) dacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole, atunci: $\mathcal{B}$ are doar un număr finit de congruenţe ddacă există un număr natural n, astfel încât $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$.

Rezolvare: Dacă $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ este o algebră Boole arbitrară, atunci $\mathcal{C}(\mathcal{B}) \cong \mathcal{F}(\mathcal{B})$, iar $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \supseteq \mathcal{PF}(\mathcal{B})$. De asemenea, se observă uşor că $B \cong \mathcal{PF}(\mathcal{B})$, o bijecţie între aceste două mulţimi fiind $\varphi : B \to \mathcal{PF}(\mathcal{B})$, pentru orice $a \in B$, $\varphi(a) = [a)$. Într–adevăr, cum $\mathcal{PF}(\mathcal{B}) = \{[a) \mid a \in B\}$, rezultă că φ este surjectivă, iar injectivitatea lui φ se deduce astfel: fie $a, b \in B$, astfel încât $\varphi(a) = \varphi(b)$, i. e. $[a) = [b)$; dar $a \in [a)$ şi $b \in [b)$, ceea ce implică $a \in [b) = \{x \in B \mid b \leq x\}$ şi $b \in [a) = \{x \in B \mid a \leq x\}$, adică $b \leq a$ şi $a \leq b$, deci $a = b$ conform antisimetriei lui $\leq$. Prin urmare, $\mathcal{C}(\mathcal{B}) \cong \mathcal{F}(\mathcal{B}) \supseteq \mathcal{PF}(\mathcal{B}) \cong B$, deci $|\mathcal{C}(\mathcal{B})| = |\mathcal{F}(\mathcal{B})| \geq |\mathcal{PF}(\mathcal{B})| = |B|$, aşadar $|B| \leq |\mathcal{C}(\mathcal{B})|$. În plus, dacă B este finită, atunci $\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \mathcal{PF}(\mathcal{B})$ şi, prin urmare, în acest caz, $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \cong B$ şi, în concluzie, şi $\mathcal{C}(\mathcal{B}) \cong B$, deci $|\mathcal{C}(\mathcal{B})| = |B|$.
(i) $\mathcal{L}_2^n$ este o algebră Boole finită, aşadar $|\mathcal{C}(\mathcal{L}_2^n)| = |L_2^n| = 2^n$.
(ii) "$\Leftarrow$:" Dacă $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$, atunci $\mathcal{C}(\mathcal{B}) \cong \mathcal{C}(\mathcal{L}_2^n)$, aşadar $|\mathcal{C}(\mathcal{B})| = |\mathcal{C}(\mathcal{L}_2^n)| = 2^n$ conform punctului (i), deci $\mathcal{B}$ are exact 2^n congruenţe.
"$\Rightarrow$:" Dacă $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ este finită, atunci, cum $|B| \leq |\mathcal{C}(\mathcal{B})|$, rezultă că B este finită, prin urmare există un $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$.

Exerciţiul 2.4. *Să se demonstreze următoarea regulă de deducţie pentru calculul propoziţional clasic: pentru orice $\Sigma \subseteq E$, orice $\Delta \subseteq E$ şi orice $\varphi, \psi, \chi \in E$:*

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi \to \neg\,\psi,\ \Delta \vdash \varphi}{\Sigma \cup \Delta \vdash \psi \to \chi}.$$

Rezolvare: Fie $\Sigma \subseteq E$, $\Delta \subseteq E$ şi $\varphi, \psi, \chi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \to \neg\,\psi$ şi $\Delta \vdash \varphi$. Avem de demonstrat că $\Sigma \cup \Delta \vdash \psi \to \chi$.

Aplicând **TCT**, din faptul că $\Sigma \vdash \varphi \to \neg\,\psi$ şi $\Delta \vdash \varphi$ obţinem: $\Sigma \vDash \varphi \to \neg\,\psi$ şi $\Delta \vDash \varphi$. Să demonstrăm că $\Sigma \cup \Delta \vDash \psi \to \chi$.

Considerăm o interpretare arbitrară care satisface mulţimea de enunţuri $\Sigma \cup \Delta$, i. e. o funcţie arbitrară $h : V \to L_2 = \{0, 1\}$ cu proprietatea că $h \vDash \Sigma \cup \Delta$.

Cum $\Sigma \subseteq \Sigma \cup \Delta$, iar $h \vDash \Sigma \cup \Delta$, rezultă că $h \vDash \Sigma$. Dar $\Sigma \vDash \varphi \to \neg\,\psi$, prin urmare $\tilde{h}(\varphi \to \neg\,\psi) = 1$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\varphi) \to \overline{\tilde{h}(\psi)} = 1$, i. e. $\overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} = 1$.

Cum $\Delta \subseteq \Sigma \cup \Delta$, iar $h \vDash \Sigma \cup \Delta$, rezultă că $h \vDash \Delta$. Dar $\Delta \vDash \varphi$, prin urmare $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

Aşadar, $1 = \overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} = \overline{1} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} = 0 \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} = \overline{\tilde{h}(\psi)}$, în consecinţă $\tilde{h}(\psi) = \overline{\overline{\tilde{h}(\psi)}} = \overline{1} = 0$.

Prin urmare, $\tilde{h}(\psi \to \chi) = \tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\chi) = 0 \to \tilde{h}(\chi) = 1$.

În concluzie, orice interpretare care satisface $\Sigma \cup \Delta$ satisface şi enunţul $\psi \to \chi$, ceea ce înseamnă că $\Sigma \cup \Delta \vDash \psi \to \chi$, iar acest fapt, conform **TCT**, este echivalent cu: $\Sigma \cup \Delta \vdash \psi \to \chi$.

3 Lista 3 de subiecte

Exerciţiul 3.1. *Fie A o mulţime nevidă, iar ρ şi σ două relaţii binare nevide pe A. Să se demonstreze că:*

(i) $\mathcal{R}(\rho \cap \sigma) = \mathcal{R}(\rho) \cap \mathcal{R}(\sigma)$;

(ii) dacă ρ e simetrică, atunci $\mathcal{S}(\rho \cap \sigma) = \rho \cap \mathcal{S}(\sigma)$;

(iii) dacă σ e asimetrică şi $\rho \cap \sigma \neq \emptyset$, atunci $\rho \cap \sigma$ e asimetrică;

(iv) dacă ρ e simetrică, σ e asimetrică şi $\sigma \nsubseteq \rho$, atunci $\rho \cup \sigma$ nu e simetrică.

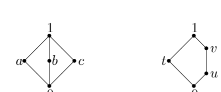
Rezolvare: (i) $\mathcal{R}(\rho \cap \sigma) = \Delta_A \cup (\rho \cap \sigma) = (\Delta_A \cup \rho) \cap (\Delta_A \cup \sigma) = \mathcal{R}(\rho) \cap \mathcal{R}(\sigma)$.
(ii) Dacă ρ e simetrică, atunci $\rho = \rho^{-1}$, prin urmare $\mathcal{S}(\rho \cap \sigma) = (\rho \cap \sigma) \cup (\rho \cap \sigma)^{-1} = (\rho \cap \sigma) \cup (\rho^{-1} \cap \sigma^{-1}) = (\rho \cap \sigma) \cup (\rho \cap \sigma^{-1}) = \rho \cap (\sigma \cup \sigma^{-1}) = \rho \cap \mathcal{S}(\sigma)$.
(iii) Presupunem că σ e asimetrică şi $\rho \cap \sigma \neq \emptyset$. Fie $a, b \in A$, astfel încât $(a, b) \in \rho \cap \sigma$, arbitrare. $\rho \cap \sigma \subseteq \sigma$, prin urmare $(a, b) \in \sigma$, aşadar $(b, a) \notin \sigma$, deoarece σ este asimetrică. Dar $\sigma \supseteq \rho \cap \sigma$, prin urmare $(b, a) \notin \rho \cap \sigma$. Aşadar, $\rho \cap \sigma$ este asimetrică.
(iv) Presupunem că ρ e simetrică, σ e asimetrică şi $\sigma \nsubseteq \rho$. Atunci există $a, b \in A$, astfel încât $(a, b) \in \sigma$ şi $(a, b) \notin \rho$. Cum $(a, b) \in \sigma$ şi σ este asimetrică, rezultă că $(b, a) \notin \sigma$. Cum $(a, b) \notin \rho$, iar ρ e simetrică şi, prin urmare, $\rho^{-1} = \rho$, rezultă că $(b, a) \notin \rho^{-1} = \rho$. Aşadar, $(b, a) \notin \rho$ şi $(b, a) \notin \sigma$, deci $(b, a) \notin \rho \cup \sigma$. Dar $(a, b) \in \sigma \subseteq \rho \cup \sigma$, deci $(a, b) \in \rho \cup \sigma$. Aşadar $\rho \cup \sigma$ nu este simetrică.

Exerciţiul 3.2. *(i) Fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ o latice mărginită cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in L \setminus \{0, 1\}$, dacă $x \neq y$, atunci x şi y sunt complemente unul altuia. Să se demonstreze că, dacă $|L| \geq 5$, atunci $\mathcal{L}$ nu este distributivă, şi să se deseneze diagrama Hasse a lui $\mathcal{L}$ pentru cazul în care $|L| = 5$.*

(ii) Să se deseneze diagramele Hasse pentru 7 latici finite nevide distributive două câte două neizomorfe şi diagramele Hasse pentru 7 latici finite nevide nedistributive două câte două neizomorfe astfel încât, în fiecare dintre acestea, singurele elemente complementate să fie 0 şi 1 (i. e. primul şi ultimul element).

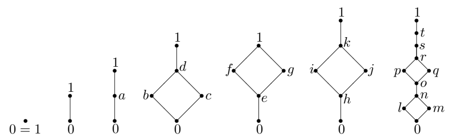
Rezolvare: (i) Dacă $|L| \geq 5$, atunci $|L \setminus \{0, 1\}| \geq 3$, aşadar există trei elemente $x, y, z \in L \setminus \{0, 1\}$ două câte două distincte. Conform ipotezei, rezultă că y şi z sunt complemente ale lui x în $\mathcal{L}$. Dar $y \neq z$, aşadar x are cel puţin două complemente distincte în $\mathcal{L}$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{L}$ nu este distributivă.

Dacă $|L| = 5$, atunci, cum $\mathcal{L}$ este nedistributivă, rezultă că $\mathcal{L}$ este izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul, pe care le vom nota cu $\mathcal{D}$ şi, respectiv, $\mathcal{P}$. Amintim diagramele lor Hasse:

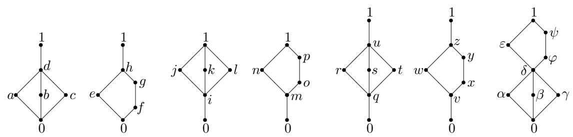


$\mathcal{D}$ $\mathcal{P}$

În $\mathcal{D}$, fiecare două dintre elementele a, b, c sunt complemente unul altuia, în timp ce, în $\mathcal{P}$, u şi v nu sunt complemente unul altuia. Rezultă că $\mathcal{L}$ este izomorfă cu $\mathcal{D}$ (diamantul), având prima dintre cele două diagrame Hasse de mai sus.
(ii) Laticile distributive reprezentate prin următoarele diagrame Hasse:



şi laticile nedistributive reprezentate prin următoarele diagrame Hasse:



satisfac condiţiile din enunţ.

Exerciţiul 3.3. *Fie A o mulţime nevidă, $a \in A$ şi $M = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid a \notin X\}$. Considerăm algebra Boole $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$, cu $\overline{X} = A \setminus X$ pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$. Să se demonstreze că:*

(i) M nu este filtru al algebrei Boole $\mathcal{P}(A)$;

(ii) M este sublatice a laticii $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$;

(iii) M nu este subalgebră Boole a algebrei Boole $\mathcal{P}(A)$;

(iv) pe M se poate defini o structură de algebră Boole.

Rezolvare: (i) $a \in A$, aşadar $A \notin M$, iar A este ultimul element al algebrei Boole $\mathcal{P}(A)$, prin urmare M nu este filtru al acestei algebre Boole.

A se observa că $\emptyset \in M$, deci $M \neq \emptyset$.

(ii) $M \subseteq \mathcal{P}(A)$ şi, pentru orice $X, Y \in M$, avem: $a \notin X$ şi $a \notin Y$, prin urmare $a \notin X \cup Y$ şi $a \notin X \cap Y$, deci $X \cup Y \in M$ şi $X \cap Y \in M$, aşadar M este închisă la $\cup$ şi la $\cap$, deci M este o sublatice a laticii $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.

(iii) Conform punctului (i), $A \notin M$, aşadar M nu este subalgebră Boole a lui $\mathcal{P}(A)$.

(iv) Observăm că $M = \mathcal{P}(A \setminus \{a\})$, aşadar $(M, \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A \setminus \{a\})$ este o algebră Boole, unde am notat $\overline{X} = (A \setminus \{a\}) \setminus X = A \setminus (X \cup \{a\})$ pentru orice $X \in M$.

Exerciţiul 3.4. *Să se demonstreze că următoarea regulă de deducţie este valabilă în calculul propoziţional clasic: pentru orice $\Sigma, \Delta, \Gamma \subseteq E$ şi orice $\varphi, \psi \in E$:*

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi),\ \Delta \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi,\ \Gamma \vdash (\varphi \vee \neg\neg\psi) \to \varphi}{\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi}.$$

Rezolvare: Fie $\Sigma, \Delta, \Gamma \subseteq E$ şi $\varphi, \psi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$, $\Delta \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi$ şi $\Gamma \vdash (\varphi \vee \neg\neg\psi) \to \varphi$. Avem de demonstrat că $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

Conform **TCT**, proprietăţile $\Sigma \vdash \varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$, $\Delta \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi$, $\Gamma \vdash (\varphi \vee \neg\neg\psi) \to \varphi$ sunt echivalente cu $\Sigma \vDash \varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$, $\Delta \vDash (\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi$, $\Gamma \vDash (\varphi \vee \neg\neg\psi) \to \varphi$, respectiv.

Să demonstrăm că $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma \vDash \neg\varphi \wedge \neg\psi$. În acest scop, considerăm o interpretare arbitrară care satisface mulţimea de enunţuri $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$, i. e. o funcţie arbitrară $h : V \to L_2 = \{0, 1\}$ astfel încât $h \vDash \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$.

$\Sigma \subseteq \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$ şi $h \vDash \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$, prin urmare $h \vDash \Sigma$. Dar $\Sigma \vDash \varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$, aşadar $\tilde{h}(\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)) = 1$.

$\Delta \subseteq \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$ şi $h \vDash \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$, prin urmare $h \vDash \Delta$. Dar $\Delta \vDash (\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi$, aşadar $\tilde{h}((\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi) = 1$.

$\Gamma \subseteq \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$ şi $h \vDash \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$, prin urmare $h \vDash \Gamma$. Dar $\Gamma \vDash (\varphi \vee \neg\neg\psi) \to \varphi$, aşadar $\tilde{h}((\varphi \vee \neg\neg\psi) \to \varphi) = 1$.

Avem de demonstrat că $\tilde{h}(\neg\varphi \wedge \neg\psi) = 1$, ceea ce este echivalent cu $\overline{\tilde{h}(\varphi)} \wedge \overline{\tilde{h}(\psi)} = 1$, fapt echivalent cu $\overline{\tilde{h}(\varphi)} = \overline{\tilde{h}(\psi)} = 1$, egalităţi echivalente cu $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) = 0$.

Presupunem prin absurd că $\tilde{h}(\varphi) = 1$. Atunci $1 = \tilde{h}(\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)) = \tilde{h}(\varphi) \to (\overline{\overline{\tilde{h}(\varphi)}} \to \tilde{h}(\psi)) = 1 \to (\overline{\overline{1}} \to \tilde{h}(\psi)) = 1 \to (1 \to \tilde{h}(\psi))$, deci $1 \to (1 \to \tilde{h}(\psi)) = 1$, aşadar $1 \to \tilde{h}(\psi) = 1$, prin urmare $\tilde{h}(\psi) = 1$.

Atunci $1 = \tilde{h}((\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi) = (\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)) \to \overline{\tilde{h}(\varphi)} = (1 \wedge 1) \to \overline{1} = 1 \to 0 = 0$. Am obţinut o contradicţie.

Rezultă că $\tilde{h}(\varphi) = 0$, prin urmare $1 = \tilde{h}((\varphi \vee \neg\neg\psi) \to \varphi) = (\tilde{h}(\varphi) \vee \overline{\overline{\tilde{h}(\psi)}}) \to \tilde{h}(\varphi) = (0 \vee \tilde{h}(\psi)) \to 0 = \tilde{h}(\psi) \to 0$, aşadar $\tilde{h}(\psi) \to 0 = 1$, deci $\tilde{h}(\psi) = 0$.

Am obţinut că $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) = 0$, ceea ce, conform unui raţionament de mai sus, este echivalent cu faptul că $\tilde{h}(\neg\varphi \wedge \neg\psi) = 1$.

În concluzie, orice interpretare care satisface mulţimea de enunţuri $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$ satisface şi enunţul $\neg\varphi \wedge \neg\psi$, ceea ce înseamnă că $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma \vDash \neg\varphi \wedge \neg\psi$, fapt echivalent cu $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$ conform **TCT**.

4 Lista 4 de subiecte

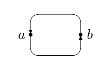
Exerciţiul 4.1. *(i) Să se dea un exemplu de mulţime finită şi nevidă A şi de relaţie binară ρ pe A cu proprietăţile: ρ nu e reflexivă şi nu e tranzitivă, dar $\mathcal{R}(\rho) = \mathcal{T}(\rho)$.*

(ii) Să se demonstreze că, dacă A este o mulţime finită şi nevidă, iar ρ este o relaţie binară pe A, reflexivă şi netranzitivă, atunci $\mathcal{R}(\rho) \neq \mathcal{T}(\rho)$.

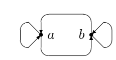
(iii) Să se demonstreze că, dacă A este o mulţime finită şi nevidă, iar ρ este o preordine pe A, atunci $\mathcal{R}(\rho) = \mathcal{T}(\rho)$.

Rezolvare: (i) Fie $A = \{a, b\}$ ($a \neq b$) şi ρ următoarea relaţie binară pe A: $\rho = \{(a, b), (b, a)\}$. ρ nu este reflexivă, pentru că $(a, a) \notin \rho$, şi nu este tranzitivă, pentru că $(a, b), (b, a) \in \rho$, dar $(a, a) \notin \rho$.

ρ :



$\mathcal{R}(\rho) = \mathcal{T}(\rho) = A^2$:



$\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho = \{(a, a), (b, b)\} \cup \{(a, b), (b, a)\} = A^2$.

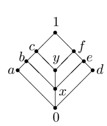
$\rho \subseteq \mathcal{T}(\rho)$, aşadar: $(a, b), (b, a) \in \mathcal{T}(\rho)$, iar $\mathcal{T}(\rho)$ este tranzitivă, prin urmare $(a, a) \in \mathcal{T}(\rho)$; $(b, a), (a, b) \in \mathcal{T}(\rho)$, iar $\mathcal{T}(\rho)$ este tranzitivă, prin urmare $(b, b) \in \mathcal{T}(\rho)$. Aşadar, avem: $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} \subseteq \mathcal{T}(\rho)$, i. e. $A^2 \subseteq \mathcal{T}(\rho)$; dar $\mathcal{T}(\rho) \subseteq A^2$, prin urmare $\mathcal{T}(\rho) = A^2$.

În concluzie, $\mathcal{R}(\rho) = A^2 = \mathcal{T}(\rho)$.

(ii) Dacă ρ este reflexivă, atunci $\mathcal{R}(\rho) = \rho$, iar, dacă ρ nu e tranzitivă, atunci $\mathcal{T}(\rho) \neq \rho$, aşadar, pentru ρ reflexivă şi netranzitivă, avem: $\mathcal{R}(\rho) = \rho \neq \mathcal{T}(\rho)$, deci $\mathcal{R}(\rho) \neq \mathcal{T}(\rho)$.

(iii) Dacă ρ este o preordine, atunci: întrucât ρ este reflexivă, are loc $\mathcal{R}(\rho) = \rho$, iar, întrucât ρ este tranzitivă, are loc $\mathcal{T}(\rho) = \rho$, aşadar $\mathcal{R}(\rho) = \rho = \mathcal{T}(\rho)$.

Exerciţiul 4.2. *Fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ laticea mărginită dată de următoarea diagramă Hasse:*



Pentru orice n natural, notăm cu $C_n = \{\alpha \in L \mid \alpha$ are exact n complemenţi distincţi în $\mathcal{L}\}$. Să se determine:

(i) C_n pentru toţi $n \in \mathbb{N}$;

(ii) valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care C_n este o sublatice a lui $\mathcal{L}$;

(iii) valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care C_n este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{L}$.

Rezolvare: (i) În laticea $\mathcal{L}$:

- 0 are ca unic complement pe 1;
- complemenţii lui a sunt: d, e, f;
- b are ca unic complement pe d;
- c are ca unic complement pe d;
- complemenţii lui d sunt: a, b, c;
- e are ca unic complement pe a;
- f are ca unic complement pe a;
- x nu are complemenţi, pentru că: singurul element $\alpha \in L$ cu $x \vee \alpha = 1$ este $\alpha = 1$, dar $x \wedge 1 = x \neq 0$;
- y nu are complemenţi, pentru că: singurul element $\alpha \in L$ cu $y \vee \alpha = 1$ este $\alpha = 1$, dar $y \wedge 1 = y \neq 0$;
- 1 are ca unic complement pe 0.

Aşadar:

- $C_0 = \{x, y\}$;
- $C_1 = \{0, b, c, e, f, 1\}$;
- $C_2 = \emptyset$;
- $C_3 = \{a, d\}$;
- $C_n = \emptyset$, pentru orice $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Pentru orice $n \in \{2\} \cup \{k \in \mathbb{N} | \ k \geq 4\}$, $C_n = \emptyset$, care este o sublatice a lui $\mathcal{L}$.

$C_0 = \{x, y\}$, care este un lanţ, pentru că $x \leq y$, deci C_0 este o sublatice a lui $\mathcal{L}$, întrucât: cum $x \leq y$, rezultă că $x \vee y = y \in C_0$, iar $x \wedge y = x \in C_0$.

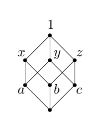
C_1 nu este o sublatice a lui $\mathcal{L}$, pentru că: $b, e \in C_1$, dar $b \wedge e = x \notin C_1$.

C_3 nu este o sublatice a lui $\mathcal{L}$, pentru că: $a, d \in C_3$, dar $a \wedge d = 0 \notin C_3$.

Aşadar: C_n este o sublatice a lui $\mathcal{L}$ ddacă $n \in \{0, 2\} \cup \{k \in \mathbb{N} | \ k \geq 4\}$.

(iii) $0 \notin \{x, y\} = C_0$ şi $0 \notin \emptyset = C_2 = C_n$, pentru orice $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$, aşadar niciuna dintre mulţimile C_n cu $n \in \{0, 2\} \cup \{k \in \mathbb{N} | \ k \geq 4\}$ nu este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{L}$. Acest fapt şi rezultatul de la punctul (ii) arată că nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât C_n să fie o sublatice mărginită a lui $\mathcal{L}$.

Exerciţiul 4.3. *(i) Considerăm algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ (cubul):*



Să se determine o sublatice mărginită L a lui $\mathcal{L}_2^3$ cu exact 4 elemente care este lanţ, şi o sublatice mărginită M a lui $\mathcal{L}_2^3$ cu exact 4 elemente care nu este lanţ. Să se demonstreze că L nu este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$, în timp ce M este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$.

(ii) Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole (cu cel puţin 4 elemente), iar S o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$ cu exact 4 elemente. Să se demonstreze că: S este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$ ddacă S nu este lanţ.

Rezolvare: (i) Fie $L = \{0, a, x, 1\}$ şi $M = \{0, b, y, 1\}$. În algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$, au loc:

- $0 \leq a \leq x \leq 1$, aşadar L este lanţ;
- $b \nleq y$ şi $y \nleq b$, aşadar M nu este lanţ.

Cum L este lanţ şi $0, 1 \in L$, rezultă că L este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{L}_2^3$, pentru că: oricare ar fi $\alpha, \beta \in L$, $\alpha \vee \beta = \max\{\alpha, \beta\} \in \{\alpha, \beta\} \subset L$ şi $\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha, \beta\} \in \{\alpha, \beta\} \subset L$.

M este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{L}_2^3$, pentru că: $0, 1 \in M$ şi: oricare ar fi $\alpha \in M$, $0 \vee \alpha = \alpha \in M$, $0 \wedge \alpha = 0 \in M$, $1 \vee \alpha = 1 \in M$ şi $1 \wedge \alpha = \alpha \in M$, iar $b \vee y = 1 \in M$ şi $b \wedge y = 0 \in M$.

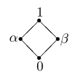
$a \in L$, dar $\overline{a} = z \notin L$, prin urmare L nu este închisă la complementare, deci L nu este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$.

$M = \{0, b, y, 1\}$, iar $\overline{0} = 1 \in M$, $\overline{b} = y \in M$, $\overline{y} = b \in M$ şi $\overline{1} = 0 \in M$, aşadar M este închisă şi la complementare, deci M este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$.

(ii) Considerăm $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi $S \subseteq B$, cu $|S| = 4$, astfel încât $\mathcal{B}$ este o algebră Boole, iar S este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$.

"$\Rightarrow$:" Dacă S este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$, atunci S este o algebră Boole, şi, întrucât $|S| = 4$, rezultă că S este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$ (rombul), care nu este lanţ (are diagrama Hasse următoare), aşadar S nu este lanţ.

$\mathcal{L}_2^2$:

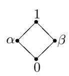


"$\Leftarrow$:" Presupunem că S nu este lanţ.

S este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$, deci $0, 1 \in S$, şi $|S| = 4$, prin urmare $S = \{0, \alpha, \beta, 1\}$, cu elementele $0, \alpha, \beta, 1 \in B$ două câte două distincte.

$0 \leq \alpha \leq 1$ şi $0 \leq \beta \leq 1$, iar S nu este lanţ, aşadar $\alpha \nleq \beta$ şi $\beta \nleq \alpha$, ceea ce înseamnă că diagrama Hasse a laticii mărginite S este următoarea (S este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$):

$S \cong \mathcal{L}_2^2$:



Din această diagramă Hasse deducem că egalităţile $\begin{cases} \alpha \vee \beta = 1 \text{ şi} \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$ au loc în S, şi deci şi în $\mathcal{B}$, pentru că S este o sublatice a lui $\mathcal{B}$, aşadar operaţiile $\vee$ şi $\wedge$ de pe S sunt exact operaţiile $\vee$ şi $\wedge$ din $\mathcal{B}$ restricţionate la $S \times S$. Aşadar, α şi β sunt complemente unul altuia in S, şi deci şi în $\mathcal{B}$, prin urmare $\overline{\alpha} = \beta$ şi $\overline{\beta} = \alpha$ în $\mathcal{B}$.

Concluzionând: $S = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$ şi au loc: $\overline{0} = 1 \in S$, $\overline{\alpha} = \beta \in S$, $\overline{\beta} = \alpha \in S$ şi $\overline{1} = 0 \in S$, deci S este închisă şi la complementare, aşadar S este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$.

Exerciţiul 4.4. *Să se demonstreze că, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalenţa:*

$$\{\varphi\} \vdash \neg\, \psi \quad \textit{ddacă} \quad \{\psi\} \vdash \neg\, \varphi.$$

Rezolvare: Notăm cu $x = \hat{\varphi}, y = \hat{\psi} \in E/\!\sim$.

Folosind **TD** şi o lemă din calculul propoziţional clasic, obţinem echivalenţele: $\{\varphi\} \vdash \neg\, \psi$ ddacă $\vdash \varphi \rightarrow \neg\, \psi$ ddacă $\widehat{\varphi \rightarrow \neg\, \psi} = 1$ ddacă $\hat{\varphi} \rightarrow \overline{\hat{\psi}} = 1$ ddacă $x \rightarrow \overline{y} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{y} = 1$ ddacă $\overline{y} \vee \overline{x} = 1$ ddacă $y \rightarrow \overline{x} = 1$ ddacă $\hat{\psi} \rightarrow \overline{\hat{\varphi}} = 1$ ddacă $\widehat{\psi \rightarrow \neg\, \varphi} = 1$ ddacă $\vdash \psi \rightarrow \neg\, \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vdash \neg\, \varphi$.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova (2003).

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1974, 1975, 1976).

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti (1978).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti (2010).

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti (1969).

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online, în care se află şi articolul de faţă.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).

Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a XI-a

Claudia MUREŞAN

Universitatea din Bucureşti

Facultatea de Matematică şi Informatică

Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România

Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti. Unele dintre enunţurile de mai jos sunt extinse faţă de versiunile respectivelor exerciţii care au apărut la acest examen.

1 Preliminarii

Vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Pentru noţiunile şi rezultatele teoretice pe care le vom folosi în exerciţiile următoare, recomandăm consultarea bibliografiei de la sfârşitul acestui text. Oferim în cele ce urmează un mic mnemonic de noţiuni şi rezultate care ne vor fi necesare pentru rezolvarea acestor exerciţii.

Amintim denumirile alternative:

- *algebră* $\equiv$ *structură algebrică;*
- *relaţie de ordine* $\equiv$ *relaţie de ordine parţială*;
- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată*;
- *relaţie de ordine totală* $\equiv$ *relaţie de ordine liniară*;
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată*;
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană;*
- *morfism boolean* $\equiv$ *morfism de algebre Boole;*

noţiunile generice:

- un *morfism de structuri algebrice* este o funcţie între mulţimile suport a două structuri algebrice de acelaşi tip care comută cu operaţiile acelor structuri algebrice;

- un *izomorfism de structuri algebrice* este un morfism inversabil între două algebre de acelaşi tip, i. e. un morfism care este o funcţie inversabilă (deci bijectivă) şi a cărei inversă este tot un morfism între acele algebre;
- o *subalgebră* a unei algebre $\mathcal{A}$ este o submulţime S a mulţimii suport a lui $\mathcal{A}$ închisă la operaţiile algebrei $\mathcal{A}$; S devine astfel algebră de acelaşi tip cu $\mathcal{A}$ cu operaţiile induse pe S de operaţiile lui $\mathcal{A}$, i. e. restricţiile operaţiilor algebrei $\mathcal{A}$ la mulţimea S;
- o *congruenţă* a unei algebre $\mathcal{A}$ este o relaţie de echivalenţă (a se vedea mai jos) pe mulţimea suport a lui $\mathcal{A}$ compatibilă cu operaţiile algebrei $\mathcal{A}$, ceea ce permite ca mulţimea factor (a se vedea mai jos) a mulţimii subiacente lui $\mathcal{A}$ prin acea relaţie de echivalenţă să fie organizată în mod canonic ca algebră de acelaşi tip cu $\mathcal{A}$;

precum şi definiţiile, notaţiile şi rezultatele următoare:

- notăm cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale;
- pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a, b} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$;
- se foloseşte următoarea convenţie: dacă o mulţime A este suportul unei structuri algebrice $\mathcal{A}$, atunci prin A vom înţelege deopotrivă mulţimea A şi structura algebrică $\mathcal{A}$, în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *finită* ddacă mulţimea ei suport este finită;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $|A|$ cardinalul lui A;
- pentru orice mulţimi A şi B, faptul că A este în bijecţie cu B se transcrie prin: $|A| = |B|$;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulţimi*; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulţimi* (se defineşte şi A^0, care este un singleton, i. e. o mulţime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice, precum şi puterile naturale ale unei structuri algebrice;
- pentru orice mulţime A, o *relaţie binară pe* A este o submulţime a lui A^2;
- dacă A este o mulţime şi $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează sub forma $a\, \rho\, b$ şi se citeşte *a este în relaţia ρ cu b;*
- dacă ρ este o relaţie binară pe o mulţime finită şi nevidă $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, cu n număr natural nenul şi elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ două câte două distincte, se defineşte *matricea caracteristică a lui ρ* ca fiind matricea $(a_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}}$ cu $a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } (x_i, x_j) \notin \rho, \\ 1, & \text{dacă } x_i\, \rho\, x_j, \end{cases}$ oricare ar fi $i, j \in \overline{1, n}$;
- pentru orice mulţime A, se notează cu Δ_A relaţia binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ şi numită *diagonala lui A*;
- pentru orice mulţime A, se notează cu id_A *funcţia identică a lui A*, i. e. funcţia $id_A : A \rightarrow A$ definită prin: $id_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$; ca relaţie binară pe A, id_A coincide cu Δ_A;

- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se zice:
  - (i) *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x\,\rho\,x$;
  - (ii) *ireflexivă* ddacă nu există $x \in A$ cu proprietatea că $x\,\rho\,x$;
  - (iii) *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$, atunci $y\,\rho\,x$;
  - (iv) *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$ şi $y\,\rho\,x$, atunci $x = y$;
  - (v) *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x\,\rho\,y$ şi $y\,\rho\,z$, atunci $x\,\rho\,z$;
- în mod evident, o relaţie binară ρ pe o mulţime A este:
  - (i) reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;
  - (ii) ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap \rho = \emptyset$;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se numeşte:
  - (i) *(relaţie de) preordine* ddacă este reflexivă şi tranzitivă;
  - (ii) *(relaţie de) echivalenţă* ddacă este o preordine simetrică;
  - (iii) *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
  - (iv) *(relaţie de) ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relaţie de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x\,\rho\,y$ sau $y\,\rho\,x$;
- pentru orice mulţime nevidă A, o *partiţie a lui* A este o familie nevidă de părţi nevide ale lui A două câte două disjuncte şi având reuniunea egală cu A; vom nota mulţimea partiţiilor lui A cu $Part(A)$;
- dacă $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe o mulţime A, atunci, oricare ar fi $x \in A$, se defineşte *clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\sim$* ca fiind mulţimea elementelor lui A care sunt în relaţia $\sim$ cu x; pentru orice $x \in A$, să notăm cu $\hat{x}$ clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\sim$, i. e.: $\hat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\} = \{y \in A \mid x \sim y\}$ ($\sim$ este relaţie de echivalenţă, în particular este simetrică); se notează cu $A/\sim$ *mulţimea factor* (sau *cât*) *a lui A prin* $\sim$, i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $\sim$: $A/\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$ ($A/\sim$ se obţine prin "împărţirea" lui A în clasele de echivalenţă ale lui $\sim$, care formează o partiţie a lui A – a se vedea mai jos); notăm cu $Echiv(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A;
- pentru orice mulţime nevidă A, $Echiv(A)$ este în bijecţie cu $Part(A)$, întrucât funcţia $\varphi : Echiv(A) \to Part(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/\sim$ pentru orice $\sim \in Echiv(A)$, este o bijecţie (oricare ar fi relaţia de echivalenţă $\sim$ pe A, mulţimea factor a lui A prin $\sim$ este o partiţie a lui A); inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice $\pi = (A_i)_{i \in I} \in Part(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relaţia de echivalenţă pe A care are drept clase mulţimile A_i, cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$, adică: $x \sim y$ ddacă x şi y se află într–o aceeaşi mulţime din familia $(A_i)_{i \in I}$;
- un *poset* este o mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine; un *lanţ* este o mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine totală;
- o *funcţie izotonă* între două poseturi este o funcţie între acele poseturi care păstrează ordinea; un *izomorfism de poseturi* este o funcţie izotonă bijectivă şi cu inversa izotonă între acele poseturi;

- pentru orice n natural nenul, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente; $\mathcal{L}_n$ este unic modulo un izomorfism de poseturi, i. e. între oricare două lanţuri cu n elemente există un izomorfism de poseturi;
- notăm laticile sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq)$ sau $(L, \vee, \wedge)$, laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;
- legătura dintre operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- *duala unei latici* $(L, \vee, \wedge)$ este laticea $(L, \wedge, \vee)$;
- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ şi $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge)$ sunt două latici, atunci o funcţie $f : L \to M$ este un *morfism de latici* între $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ ddacă, pentru orice $x, y \in L$, au loc: $\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \text{ şi} \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y); \end{cases}$
- izomorfismele de latici coincid cu morfismele bijective de latici;
- într–o latice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ şi} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puţin un complement;
- orice lanţ este o latice (distributivă), cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, au loc următoarele:
  - (i) $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$;
  - (ii) pentru orice $x \in B$, $\overline{\overline{x}} = x$;
  - (iii) **legile lui de Morgan:** pentru orice $x, y \in B$, $\begin{cases} \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \text{ şi} \\ \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}; \end{cases}$
- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ şi $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci o funcţie $f : A \to B$ este un *morfism de algebre Boole* între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ ddacă, pentru orice $x, y \in A$, au loc: $\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \\ f(\overline{x}) = \overline{f(x)}, \\ f(0) = 0 \text{ şi } f(1) = 1; \end{cases}$
- izomorfismele de algebre Boole coincid cu morfismele bijective de algebre Boole;
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_2^n$ (puterea a n–a a lanţului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole $\mathcal{L}_2$, numită *algebra Boole standard*;
- orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$; în particular, orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2;

- se numeşte *congruenţă a unei algebre Boole* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B care, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, satisface proprietăţile:
  - (i) dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $\vee$**);
  - (ii) dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $\wedge$**);
  - (iii) dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $\bar{}$**);
- referitor la definiţia anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relaţii binare $\sim$ pe B cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$ (i. e. constantele 0 şi 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, proprietăţi care sunt satisfăcute nu numai de către orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B, ci chiar de către orice relaţie reflexivă $\sim$ pe B;
- dacă $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ este o algebră Boole, iar $\sim$ este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$, atunci mulţimea factor a lui B prin $\sim$ se organizează ca algebră Boole astfel: dacă, oricare ar fi $a \in B$, notăm cu $\hat{a}$ clasa lui a în raport cu $\sim$, atunci, pentru orice $x, y \in B$, se definesc:
  - (i) $\hat{x} \vee \hat{y} = \widehat{x \vee y}$,
  - (ii) $\hat{x} \wedge \hat{y} = \widehat{x \wedge y}$,
  - (iii) $\overline{\hat{x}} = \hat{\overline{x}}$,
  - (iv) $0 = \hat{0}$ şi $1 = \hat{1}$;

  faptul că $\sim$ este o congruenţă a algebrei Boole $\mathcal{B}$ arată că operaţiile de mai sus sunt bine definite, i. e. nu depind de reprezentanţii claselor; $(B/\sim, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ este o algebră Boole, numită *algebra Boole factor* (sau *cât*) *a lui $\mathcal{B}$ prin* $\sim$;
- notăm cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;
- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;
- regula de deducţie **modus ponens** (notată MP) pentru logica propoziţională clasică este: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\dfrac{\vdash \varphi,\ \vdash \varphi \to \psi}{\vdash \psi}$.

2 Lista de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Fie A o mulţime având $|A| = n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi ρ o relaţie binară pe A având $|\rho| = k \in \mathbb{N}$, k impar, $k < n$. Să se demonstreze că:*

(i) ρ nu este reflexivă;

(ii) dacă ρ este simetrică, atunci $|\rho \cap \Delta_A|$ este impar;

(iii) dacă ρ este ireflexivă, atunci ρ nu este simetrică.

Rezolvare: (i) Dacă ρ ar fi reflexivă, atunci ar avea loc $\Delta_A \subseteq \rho$, prin urmare $n = |A| = |\Delta_A| \leq |\rho| = k$, deci s–ar obţine o contradicţie cu ipoteza $k < n$. Rezultă că ρ nu este reflexivă.
(ii) $|A| = n = |\overline{1, n}|$, aşadar A este în bijecţie cu mulţimea $\overline{1, n}$, i. e. există o bijecţie $\varphi : \overline{1, n} \to A$. Pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, notăm $x_i = \varphi(i) \in A$. Aşadar, $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (conform surjectivităţii lui φ), cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ două câte două distincte (conform injectivităţii lui φ).

Considerăm următoarele mulţimi:

$$S = \{(x_i, x_j) \mid i, j \in \overline{1, n}, i < j\} \quad \text{şi}$$
$$D = \{(x_i, x_j) \mid i, j \in \overline{1, n}, i > j\}.$$

Desigur, $\Delta_A = \{(x_i, x_i) \mid i \in \overline{1, n}\}$.

Avem: $A^2 = \Delta_A \cup S \cup D$ şi, datorită faptului că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt două câte două distincte, rezultă că mulţimile Δ_A, S şi D sunt două câte două disjuncte. Aşadar, $\{\Delta_A, S, D\}$ este o partiţie a lui A^2.

Notăm:

$$M = \rho \cap \Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A, (a, a) \in \rho\} = \{(x_i, x_i) \mid i \in \overline{1, n}, (x_i, x_i) \in \rho\},$$
$$N = \rho \cap S = \{(x_i, x_j) \mid i, j \in \overline{1, n}, i < j, (x_i, x_j) \in \rho\},$$
$$P = \rho \cap D = \{(x_i, x_j) \mid i, j \in \overline{1, n}, i > j, (x_i, x_j) \in \rho\}.$$

Ca observaţie, în matricea caracteristică a lui ρ, mulţimea M este reprezentată prin elementele nenule de pe diagonala principală, N este reprezentată de elementele nenule de sub diagonala principală, iar P este reprezentată prin elementele nenule de deasupra diagonalei principale.

Acum să considerăm ρ simetrică şi să notăm cu $f : N \to P$ funcţia definită astfel: oricare ar fi $a, b \in A$ astfel încât $(a, b) \in N$, $f(a, b) = (b, a)$. De asemenea, să definim $g : P \to N$ astfel: oricare ar fi $a, b \in A$ astfel încât $(a, b) \in P$, $g(a, b) = (b, a)$. Am eliminat convenţional câte o pereche de paranteze în scrierile: $f(a, b)$, $g(a, b)$; vom proceda la fel şi mai jos.

f este bine definită, în sensul că valorile ei se află, întradevăr, în P, deoarece, datorită simetriei lui ρ şi în conformitate cu definiţiile mulţimilor N şi P, pentru orice $a, b \in A$ cu $(a, b) \in N$, avem: $(a, b) \in \rho$ şi $a = x_i, b = x_j$, cu $i, j \in \overline{1, n}$ astfel încât $i < j$, aşadar $(b, a) \in \rho$ şi $b = x_j, a = x_i$, cu $j, i \in \overline{1, n}$ astfel încât $j > i$, deci $f(a, b) = (b, a) \in P$. Analog rezultă că g este bine definită.

Pentru orice $a, b \in A$ cu $(a, b) \in N$, avem: $g(f(a, b)) = g(b, a) = (a, b)$, aşadar $g \circ f = id_N$. Analog, $f \circ g = id_P$. Rezultă că $g = f^{-1}$, deci f este inversabilă, aşadar f este o bijecţie între N şi P, prin urmare $|N| = |P|$.

Am observat mai sus că $\{\Delta_A, S, D\}$ este o partiţie a lui A^2. Rezultă că avem:

$$\rho = \rho \cap A^2 = \rho \cap (\Delta_A \cup S \cup D) = (\rho \cap \Delta_A) \cup (\rho \cap S) \cup (\rho \cap D) = M \cup N \cup P, \text{ iar}$$

$$M \cap N = \rho \cap \Delta_A \cap \rho \cap S = \rho \cap \Delta_A \cap S = \rho \cap \emptyset = \emptyset$$

şi, analog, $M \cap P = \emptyset$ şi $N \cap P = \emptyset$. Aşadar, $\{M, N, P\}$ este o partiţie a lui ρ, prin urmare:

$$k = |\rho| = |M| + |N| + |P| = |\rho \cap \Delta_A| + |N| + |N| = |\rho \cap \Delta_A| + 2 \cdot |N|,$$

aşadar $|\rho \cap \Delta_A| = k - 2 \cdot |N|$, iar acesta este un număr impar, deoarece k este impar şi $2 \cdot |N|$ este par.
(iii) Considerăm ρ ireflexivă, i. e. $\rho \cap \Delta_A = \emptyset$, adică $|\rho \cap \Delta_A| = 0$. Dacă ρ ar fi simetrică, atunci, conform (ii), $|\rho \cap \Delta_A|$ ar fi impar. Dar 0 nu este impar, deci am obţine o contradicţie. Aşadar, ρ nu este simetrică.

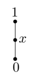
Exerciţiul 2.2. *Fie L o latice având $|L| = 3$. Să se demonstreze că:*

(i) L este o latice mărginită;

(ii) laticea mărginită L nu este complementată;

(iii) L are o singură sublatice mărginită care este algebră Boole cu operaţiile induse de cele de pe L, la care se adaugă operaţia de complementare.

Rezolvare: (i) L este o latice finită, prin urmare L este o latice mărginită.
(ii) L este o latice mărginită cu exact 3 elemente (distincte), aşadar $L = \{0, x, 1\}$, cu $0 \neq 1$ şi $x \notin \{0, 1\}$, deci $0 < x < 1$. Prin urmare, L este (izomorfă cu) lanţul cu 3 elemente, $\mathcal{L}_3$:



Dacă x ar avea un complement y în lanţul L, atunci, cu notaţiile uzuale pentru operaţiile unei latici, $1 = x \vee y = \max\{x, y\} \in \{x, y\}$, iar $x \neq 1$, aşadar $1 = \max\{x, y\} = y$, prin urmare $0 = x \wedge y = x \wedge 1 = x$. Dar $x \neq 0$, deci am obţinut o contradicţie, prin urmare L nu este complementată.
(iii) L are doar două sublatici mărginite, anume L şi $\{0, 1\}$. Conform punctului (ii), L nu este complementată, aşadar L nu este algebră Boole. Acest lucru putea fi argumentat şi prin faptul că $|L| = 3$, iar cardinalele algebrelor Boole finite sunt puteri naturale ale lui 2. În schimb, $\{0, 1\}$ este (izomorfă cu) lanţul cu 2 elemente, $\mathcal{L}_2$, aşadar $\{0, 1\}$ este (izomorfă cu) algebra Boole standard.

Exerciţiul 2.3. *Fie $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole, $\mathcal{L}_2 = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ algebra Boole standard, iar $f : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2$ un morfism boolean. Notăm: $Z = \{x \in B \mid f(x) = 0\}$ şi $U = \{x \in B \mid f(x) = 1\}$.*
Să se demonstreze că:

(i) $|B| \geq 2$;

(ii) mulţimile Z şi U sunt în bijecţie, şi să se pună în evidenţă o bijecţie între ele;

(iii) Z şi U sunt sublatici ale lui $\mathcal{B}$, astfel încât laticea Z este izomorfă cu duala laticii U, şi niciuna dintre mulţimile Z şi U nu este sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$;

(iv) mulţimile Z şi U formează o partiţie a mulţimii B, iar echivalenţa $\sim$ corespunzătoare acestei partiţii este o congruenţă a algebrei Boole $\mathcal{B}$;

(v) algebra Boole factor $B/\sim$ prin congruenţa $\sim$ de la punctul (iv) este izomorfă cu $\mathcal{L}_2$.

Rezolvare: (i) $0, 1 \in B$, aşadar $B \neq \emptyset$, adică $|B| \neq 0$. Presupunem prin absurd că $|B| = 1$, ceea ce este echivalent cu $0 = 1$ în $\mathcal{B}$. Atunci, în $\mathcal{L}_2$, $0 = f(0) = f(1) = 1$. Dar $0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$, deci am obţinut o contradicţie. Aşadar, $|B| \geq 2$.
(ii) Fie $g : Z \to U$, definită prin: pentru fiecare $x \in Z$, $g(x) = \overline{x}$, iar $h : U \to Z$, definită prin: pentru fiecare $x \in U$, $h(x) = \overline{x}$. g este bine definită, în sensul că valorile ei se află, într–adevăr, în U, pentru că: dacă $x \in Z$, atunci $f(x) = 0$, aşadar $f(\overline{x}) = \overline{f(x)} = \overline{0} = 1$, deci $\overline{x} \in U$. Analog rezultă că h este bine definită.

Pentru orice $x \in Z$, $h(g(x)) = \overline{\overline{x}} = x$, aşadar $h \circ g = id_Z$. Analog, $g \circ h = id_U$. Aşadar, $h = g^{-1}$, prin urmare g este inversabilă, deci bijectivă.
(iii) Pentru orice $x, y \in Z$, avem $f(x) = f(y) = 0$, aşadar $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = 0 \vee 0 = 0$ şi $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = 0 \wedge 0 = 0$, deci $x \vee y, x \wedge y \in Z$, prin urmare Z este o sublatice a lui $\mathcal{B}$. $f(1) = 1 \neq 0$ în $\mathcal{L}_2$, deci $1 \notin Z$, aşadar Z nu este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$. În mod similar se arată că U este o sublatice a lui $\mathcal{B}$, dar nu este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$.

Bijecţia $g : Z \to U$ de la punctul (ii) este un izomorfism de latici între sublaticea $(Z, \vee, \wedge)$ a lui $\mathcal{B}$ şi duala $(U, \wedge, \vee)$ a sublaticii $(U, \vee, \wedge)$ a lui $\mathcal{B}$, pentru că, oricare ar fi $x, y \in Z$, $g(x \vee y) = \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} = g(x) \wedge g(y)$ şi $g(x \wedge y) = \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} = g(x) \vee g(y)$.
(iv) $Z \cup U = \{x \in B \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in B \mid f(x) = 1\} = \{x \in B \mid f(x) \in \{0, 1\}\} = B$. Dacă ar exista $x \in Z \cap U$, atunci am avea în $\mathcal{L}_2$: $0 = f(x) = 1$, deci am obţine o contradicţie cu $0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$. Aşadar, $Z \cap U = \emptyset$. Prin urmare, $\{Z, U\}$ este o partiţie a lui B.

Fie $\sim$ echivalenţa corespunzătoare acestei partiţii, adică echivalenţa definită astfel: pentru orice $a, b \in B$, $a \sim b$ ddacă $a, b \in Z$ sau $a, b \in U$ ddacă $f(a) = f(b) = 0$ sau $f(a) = f(b) = 1$ ddacă $f(a) = f(b)$, întrucât mulţimea suport a lui $\mathcal{L}_2$ este $\{0, 1\}$.

Rezultă că, pentru orice $x, y, x', y' \in B$ astfel încât $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, avem $f(x) = f(x')$ şi $f(y) = f(y')$, aşadar $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = f(x') \vee f(y') = f(x' \vee y')$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = f(x') \wedge f(y') = f(x' \wedge y')$ şi $f(\overline{x}) = \overline{f(x)} = \overline{f(x')} = f(\overline{x'})$, prin urmare $x \vee y \sim x' \vee y'$, $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ şi $\overline{x} \sim \overline{x'}$. Aşadar, $\sim$ este o congruenţă a algebrei Boole $\mathcal{B}$.
(v) Notăm, pentru fiecare $x \in B$, cu $\hat{x} = \{y \in B \mid x \sim y\}$ clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\sim$. Definim $\varphi : B \to \{0, 1\}$, pentru orice $x \in B$, $\varphi(\hat{x}) = f(x)$.

Să observăm că, pentru orice $x, y \in B$, au loc echivalenţele: $\hat{x} = \hat{y}$ ddacă $x \sim y$ ddacă $f(x) = f(y)$ ddacă $\varphi(\hat{x}) = \varphi(\hat{y})$. În acest şir de echivalenţe, implicaţiile directe (i. e. "de la stânga la dreapta") arată că φ este bine definită (în sensul că definiţia ei nu depinde de reprezentanţii claselor), iar implicaţiile contrare (i. e. "de la dreapta la stânga") arată că φ este injectivă.

$\varphi(\hat{0}) = f(0) = 0$ şi $\varphi(\hat{1}) = f(1) = 1$, aşadar imaginea $\varphi(B)$ a lui φ satisface: $\{0, 1\} = \varphi(\{\hat{0}, \hat{1}\}) \subseteq \varphi(B) \subseteq \{0, 1\}$, prin urmare $\varphi(B) = \{0, 1\}$, aşadar φ este surjectivă.

Am obţinut că φ este bijectivă.

Definiţiile canonice ale operaţiilor de algebră Boole pe $B/\sim$ şi faptul că f este un morfism boolean arată că, pentru orice $x, y \in B$, $\varphi(\hat{x} \vee \hat{y}) = \varphi(\widehat{x \vee y}) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = \varphi(\hat{x}) \vee \varphi(\hat{y})$, $\varphi(\hat{x} \wedge \hat{y}) = \varphi(\widehat{x \wedge y}) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = \varphi(\hat{x}) \wedge \varphi(\hat{y})$ şi $\varphi(\overline{\hat{x}}) = \varphi(\hat{\overline{x}}) = f(\overline{x}) = \overline{f(x)} = \overline{\varphi(\hat{x})}$. De asemenea, $\varphi(\hat{0}) = f(0) = 0$ şi $\varphi(\hat{1}) = f(1) = 1$. Prin urmare, $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2$ este un morfism boolean.

Aşadar, φ este un izomorfism boolean între $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{L}_2$.

Exerciţiul 2.4. *Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$, astfel încât:*

$$\vdash \varphi \to \psi, \quad \vdash \psi \to \chi, \quad \vdash \chi \to \varphi.$$

Să se demonstreze că au loc echivalenţele:

$$\vdash \varphi \quad ddacă \quad \vdash \psi \quad ddacă \quad \vdash \chi.$$

Rezolvare: Demonstrăm implicaţia: $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \psi$. Dacă $\vdash \varphi$, atunci, cum $\vdash \varphi \to \psi$ prin ipoteză, aplicând MP obţinem că $\vdash \psi$.

Implicaţiile $\vdash \psi \Rightarrow \vdash \chi$ şi $\vdash \chi \Rightarrow \vdash \varphi$ se demonstrează analog.

Rezultă că au loc echivalenţele:

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \psi \Leftrightarrow \vdash \chi.$$

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova (2003).

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1974, 1975, 1976).

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti (1978).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti (2010).

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti (1969).

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online, în care se află şi articolul de faţă.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).