

Claudia MUREȘAN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

CUPRINSUL CURSULUI DE LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Capitolul 1: Preliminarii algebrice:

- Mulțimi, funcții și relații. Relații binare. Relații de echivalență
- Relații de ordine. Mulțimi (parțial) ordonate
- Latici
- Algebre Boole. Morfisme de algebre Boole. Filtre și congruențe în algebre Boole. Ultrafiltre. Teorema de reprezentare a lui Stone (*algebra Boole cu exact două elemente determină structura tuturor algebrilor Boole*). Structura algebrilor Boole finite

Capitolul 2: Logica propozițională clasică:

- Sintaxa (*o primă prezentare pentru logica propozițională clasică: sistemul Hilbert*)
- Algebra Lindenbaum–Tarski (*o algebră Boole asociată logicii propoziționale clasice*)
- Semantica (*calcul cu valori de adevăr, în algebra Boole cu exact două elemente: 0 = fals, 1 = adevărat*)
- Teorema de completitudine (*deducția sintactică, coincide cu deducția semantică*)
- Rezoluția propozițională (*echivalență cu sistemul Hilbert*)
- Deducția naturală (*echivalență cu sistemul Hilbert*)

Capitolul 3: Logica clasică a predicatelor (*predicat = propoziție cu variabile*):

- Structuri de ordinul I (*structuri algebrice în care iau valori variabilele din predicate*)
- Sintaxa
- Semantica
- Teorema de completitudine (*deducția sintactică, coincide cu deducția semantică*)
- Rezoluția în logica clasică a predicatelor

A se vedea **bibliografia** acestui curs, în Cursul I. Prescurtări uzuale:

- **i. e.**, = id est = adică
- **ddacă** = dacă și numai dacă
- **a. i.** = astfel încât
- **ș. a. m. d.** = și așa mai departe
- “:=”: abreviere pentru: $\stackrel{\text{definiție}}{=}$, $\stackrel{\text{notație}}{=}$
- $---\!-\!-\!-$: notație pentru: “să se demonstreze că”

- implicația $[p \Rightarrow q]$ este echivalentă cu $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$

Cuantificatorii:

- *cuantificatorul universal*: \forall
- *cuantificatorul existențial*: \exists

Dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate referitoare la x (mai precis o proprietate referitoare la elementele pe care le parcurge/le poate denumi x), atunci:

- $\text{non } [(\forall x) (p(x))]$ \Leftrightarrow $(\exists x) (\text{non } p(x))$
- $\text{non } [(\exists x) (p(x))]$ \Leftrightarrow $(\forall x) (\text{non } p(x))$

Notația 2.1. Alăturarea de simboluri $\exists!$ semnifică “există un unic”, “există și este unic”.

Observația 2.1. $\exists!$ nu este un cuantificator, ci este o notație prescurtată pentru enunțuri compuse: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate asupra lui x , atunci scrierea $(\exists!x) (p(x))$ este o abreviere pentru enunțul scris, desfișurat, astfel:

$$(\exists x) (p(x)) \text{ și } (\forall y) (\forall z) [(p(y) \text{ și } p(z)) \Rightarrow y = z],$$

unde y și z sunt variabile.

Cuantificatorii aplicați fixând un domeniu al valorilor:

Fie M o mulțime, x o variabilă, iar $p(x)$ o proprietate referitoare la elementele lui M . Atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru scrierile fără domeniu al valorilor lângă cuantificatorii:

- $(\forall x \in M) (p(x)) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall x) (x \in M \Rightarrow p(x))$
- $(\exists x \in M) (p(x)) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists x) (x \in M \text{ și } p(x))$

Toate proprietățile logice pentru enunțuri cuantificate din acest curs se scriu la fel și sunt valabile și pentru cuantificatorii urmați de un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată.

Cuantificatorii de același fel comută, cei diferiți nu:

Fie x și y variabile, iar $p(x, y)$ o proprietate asupra lui x și y . Atunci:

- $(\forall x) (\forall y) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y) (\forall x) (p(x, y))$
- $(\exists x) (\exists y) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y) (\exists x) (p(x, y))$

- $(\forall x) (\exists y) (p(x, y)) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists y) (\forall x) (p(x, y))$ (pentru fiecare valoare a lui x , valoarea lui y pentru care e satisfăcut enunțul din stânga depinde de valoarea lui x)

Analog, dacă A și B sunt mulțimi, avem:

- $(\forall x \in A) (\forall y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in B) (\forall x \in A) (p(x, y))$
- $(\exists x \in A) (\exists y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in B) (\exists x \in A) (p(x, y))$
- $(\forall x \in A) (\exists y \in B) (p(x, y)) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists y \in B) (\forall x \in A) (p(x, y))$

Desigur, la fel pentru cazul în care doar unul dintre cuantificatorii este aplicat cu un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată: $(\forall x) (\forall y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in B) (\forall x) (p(x, y))$ etc..

Cuantificatorii, disjuncții și conjuncții logice:

Să observăm și următoarele proprietăți logice: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ și $q(x)$ sunt enunțuri referitoare la x , atunci:

- $(\forall x) (p(x) \text{ și } q(x)) \Leftrightarrow (\forall x) (p(x)) \text{ și } (\forall x) (q(x))$
- $(\exists x) (p(x) \text{ sau } q(x)) \Leftrightarrow (\exists x) (p(x)) \text{ sau } (\exists x) (q(x))$
- $(\forall x) (p(x) \text{ sau } q(x)) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall x) (p(x)) \text{ sau } (\forall x) (q(x))$
- $(\exists x) (p(x) \text{ și } q(x)) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists x) (p(x)) \text{ și } (\exists x) (q(x))$

1 Teoria mulțimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

- O definiție din **teoria naivă a mulțimilor**: o *mulțime* este o colecție de obiecte **bine determinate și distincte**, numite *elementele mulțimii*.

- **distincte**: o mulțime nu conține un același obiect de mai multe ori; un element apare într-o mulțime o singură dată

- **bine determinate**: orice mulțime are o descriere precisă, care o identifică în mod unic, adică îi identifică în mod unic elementele

A se vedea în Cursul I Paradoxul lui Bertrand Russell, care arată că **nu există mulțimea tuturor mulțimilor**. Totalitatea mulțimilor nu formează o mulțime, ci o **clasă**.

Din punctul de vedere al teoriei naive a mulțimilor, nu se pot spune multe lucruri despre noțiunea de *clasă*, decât că este “ceva mai vag/mai mare/mai cuprinzător decât o mulțime”. Se consideră că orice mulțime este o clasă, dar nu și invers. Clasele care nu sunt mulțimi se numesc *clase proprii*.

Semnul (simbolul) de apartenență **nu** poate apărea la dreapta unei clase proprii, adică nu se consideră a avea sens faptul că o clasă proprie aparține unui alt obiect.

Așadar **nu există clasa tuturor claselor**, din simplul motiv că nu există un obiect care să aibă clase proprii ca elemente.

- O *axiomă* este un fapt **dat** ca fiind adevărat într-o teorie matematică.
- O *axiomă* nu se demonstrează, ci pur și simplu este **dată** ca fiind adevărată.
- Faptul de a fi axiomă **nu este o proprietate intrinsecă** a unei afirmații.
- *formalizare*: exprimare folosind **n numai** simboluri matematice
- *metalimbaj*: “limbajul natural”, “vorbirea curentă (obișnuită)”, “exprimarea în cuvinte”, “fără simboluri matematice”

2 Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Lucrăm numai cu enunțuri care sunt **fie false, fie adevărate**.

Conectorii logici: folosiți pentru a lega enunțuri, formând astfel *enunțuri compuse*:

- *disjuncția*: sau
- *conjuncția*: și
- *negația*: non
- *implicația*: \Rightarrow
- *echivalența*: \Leftrightarrow

Pentru orice enunțuri (propoziții, afirmații, proprietăți) p , q și r , au loc echivalențele următoare:

- $[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)]$
- $[p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)]$
- $\text{non } (p \text{ sau } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)]$
- $\text{non } (p \text{ și } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } q]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)]$ (**principiul reducerii la absurd**)
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \Leftrightarrow (\text{non } q)]$ (consecință imediată a principiului reducerii la absurd și a faptului că $(p \Leftrightarrow q) \stackrel{\text{def}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ și } (q \Rightarrow p)]$)

Scoaterea de sub un cuantificator a unui enunț care nu depinde de variabila cuantificată:
Dacă, în enunțurile compuse cuantificate de mai sus, în locul lui $q(x)$ avem un enunț q care nu depinde de x , atunci:

$$(\forall x) q \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (\exists x) q,$$

așadar, în acest caz, din proprietățile anterioare obținem:

- $(\forall x) (p(x) \text{ și } q) \Leftrightarrow (\forall x) (p(x)) \text{ și } q$
- $(\exists x) (p(x) \text{ sau } q) \Leftrightarrow (\exists x) (p(x)) \text{ sau } q$
- $(\forall x) (p(x) \text{ sau } q) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall x) (p(x)) \text{ sau } q$
- $(\exists x) (p(x) \text{ și } q) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists x) (p(x)) \text{ și } q$

Acum fie p , q și r enunțuri. Atunci, din proprietățile: $[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)]$, $[p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)]$, $\text{non } (p \text{ sau } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)]$, $\text{non } (p \text{ și } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$ și $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } q]$, se pot deduce următoarele proprietăți:

- $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \stackrel{\text{def}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \stackrel{\text{def}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
- $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \stackrel{\text{def}}{=} [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \stackrel{\text{def}}{=} [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$

3 Operații cu mulțimi și relații între mulțimi

Notația 3.1. Păstrăm notația consacrată ∈ pentru simbolul de **apartenență**, ce indică faptul că un obiect este element al altui obiect (mulțime, clasă).

- Păstrăm notația clasică, folosind acolade, pentru specificarea elementelor unei mulțimi (fie prin enumerare, fie printr-o proprietate a lor).

Amintim că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulțimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.

Notația 3.2. Păstrăm notațiile cunoscute \cup , \cap , \setminus și Δ pentru **reuniunea**, **intersecția**, **diferența** și, respectiv, **diferența simetrică** între mulțimi.

Amintim că, pentru orice mulțimi A și B , se definesc:

- $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;
- $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;
- $A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$;
- $A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

A se vedea proprietățile operațiilor cu mulțimi demonstrate la seminar, precum și cele lăsate ca temă pentru acasă în cursul orclor de seminar!

Vom face mereu apel și la cunoștințe din gimnaziu și liceu, dintre care pe unele le vom aminti, de regulă doar enunțându-le.

Notăția 3.3. Păstrăm notațiile \subseteq , \supseteq și \supsetneq pentru **incluziunile** și **incluziunile stricte** dintre mulțimi în **fiecare sens**. Vom mai nota incluziunile stricte și cu \subset și respectiv \supset , dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă și nu poate avea loc egalitatea de mulțimi nu ne folosește în cele prezentate.

Amintim că, pentru orice mulțimi A și B :

- $A = B \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall x) [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (prin definiție, două mulțimi sunt egale ddacă au aceleași elemente);
- $A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall x) [x \in A \Rightarrow x \in B]$;
- $A \supseteq B \stackrel{\text{def}}{\iff} B \subseteq A$;
- $A \subsetneq B \stackrel{\text{def}}{\iff} [A \subseteq B \text{ și } A \neq B]$;
- $A \supsetneq B \stackrel{\text{def}}{\iff} B \subsetneq A$.

Notăția 3.4. Vom nota cu \emptyset **mulțimea vidă**, adică mulțimea fără elemente, i.e. unica (conform definiției egalității de mulțimi) mulțime care satisface: $(\nexists x) (x \in \emptyset)$, sau, echivalent: $(\forall x) (x \notin \emptyset)$.

Definiția 3.1. Dacă A și B sunt mulțimi, atunci A se numește:

- *submulțime a lui B* (sau *parte a lui B*) ddacă $A \subseteq B$;
- *submulțime proprie* (sau *strictă*) a lui B ddacă $A \subsetneq B$.

Notăția 3.5. Pentru orice mulțime T , vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ **mulțimea părților lui T** , i. e. **mulțimea submulțimilor lui T** : $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Să notăm cu **xor** conectorul logic sau *exclusiv*, definit astfel: pentru orice enunțuri p și q , enunțul $(p \text{ xor } q)$ este adevărat exact atunci când **exact unul** dintre enunțurile p și q este adevărat, adică exact atunci când $[(p \text{ e adevărat și } q \text{ e fals}) \text{ sau } (q \text{ e adevărat și } p \text{ e fals})]$. Formal:

- $(p \text{ xor } q) \Leftrightarrow [(p \text{ și non } q) \text{ sau } (q \text{ și non } p)]$

Remarca 3.1. Definiția diferenței simetrice arată că, pentru orice mulțimi A și B :

- $A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ xor } x \in B\}$.

A se vedea, în Cursul I, proprietățile logice (cu enunțuri) în care se transcriu următoarele proprietăți pentru calculul cu mulțimi.

Și a se observa faptul că, pentru operații comutative, precum reuniunea și intersecția de mulțimi, distributivitatea la stânga față de alte operații este echivalentă cu distributivitatea la dreapta.

Pentru orice mulțimi A, B, C, D , au loc:

- $A = B$ ddacă $[A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A]$
- **idempotența reuniunii:** $A \cup A = A$
- **idempotența intersecției:** $A \cap A = A$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \Delta A = \emptyset$
- **comutativitatea reuniunii:** $A \cup B = B \cup A$
- **comutativitatea intersecției:** $A \cap B = B \cap A$
- **comutativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta B = B \Delta A$
- **asociativitatea reuniunii:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
- **asociativitatea intersecției:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
- **asociativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

5

- $A \setminus B \subseteq A$
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Considerăm o mulțime T , iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ (*complementara lui X față de T*). Au loc:

- $\overline{\overline{A}} = A$, adică $\overline{\overline{A}} \subseteq T$
- $\overline{\emptyset} = T$
- $\overline{T} = \emptyset$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

- **operația de trecere la complementară este autoduală:** $\overline{\overline{A}} = A$

- **legile lui De Morgan:** $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$

- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (ușor de demonstrat folosind proprietățile de mai sus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; mai mult:
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$
- $A \cup \overline{A} = T$; mai mult:
- $A \cup B = T$ ddacă $A \supseteq \overline{B}$ ddacă $B \supseteq \overline{A}$

- **A și B sunt părți complementare ale lui T ddacă fiecare este complementara celeilalte față de T :** $\begin{cases} A \cup B = T \\ \text{și} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ddacă } A = \overline{B} \text{ ddacă } B = \overline{A} \end{cases}$

4 Alte operații cu mulțimi

Produsul direct a două mulțimi:

Notăția 4.1 (a se vedea definiția axiomatică a unei perechi ordonate în Cursul I). Pentru orice elemente a și b , notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b .

Definiția 4.1 (egalitatea de perechi semnifică egalitatea pe componente). Pentru orice elemente a_1, a_2, x_1, x_2 :

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} a_1 = x_1 \\ \text{și} \\ a_2 = x_2 \end{cases}$$

Definiția 4.2. Pentru orice mulțimi A și B , se definește **produsul cartezian** dintre A și B (numit și **produsul direct** dintre A și B) ca fiind mulțimea de perechi ordonate $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Remarca 4.1 (produsul cartezian cu \emptyset este \emptyset ; produsul cartezian este distributiv față de reuniune, intersecția, diferența și diferența simetrică între mulțimi (și la stânga, și la dreapta). Pentru orice mulțimi A, B și C , au loc egalitățile:

- **distributivitatea la stânga a reuniunii față de intersecție:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **distributivitatea la dreapta a reuniunii față de intersecție:** $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$
- **distributivitatea la stânga a intersecției față de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **distributivitatea la dreapta a intersecției față de reuniune:** $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$
- $A \subsetneq B$ ddacă $[(\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ și } (\exists x) (x \in B \setminus A)]$ ddacă $[A \subseteq B \text{ și } B \setminus A \neq \emptyset]$ ddacă $[A \subseteq B \text{ și } B \not\subseteq A]$
- $A \subseteq B$ ddacă $(A \subseteq B \text{ sau } A = B)$
- $A \subseteq A$
- $\text{non}(A \subsetneq A)$

- **tranzitivitatea incluziunii nestricte:** $(A \subseteq B \text{ și } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

- $(A \subsetneq B \text{ și } B \subseteq C) \Rightarrow A \subsetneq C$

- $(A \subseteq B \text{ și } B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$

- **tranzitivitatea incluziunii stricte:** $(A \subsetneq B \text{ și } B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$

- $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$

- $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$

- $A \cup B = B$ ddacă $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$

- $\emptyset \subseteq A$

- $A \cup \emptyset = A$

- $A \cap \emptyset = \emptyset$

- $A \setminus \emptyset = A$

- $A \setminus B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq B$

- $\emptyset \setminus A = \emptyset$

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, adică: $A \subseteq \emptyset$ ddacă $A = \emptyset$

- $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $A = B$

- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \setminus B = A$ ddacă $B \setminus A = B$

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$

- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$

- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$

- $(A \subseteq C \text{ și } B \subseteq C) \text{ ddacă } A \cup B \subseteq C$

- $(A \subseteq B \text{ și } A \subseteq C) \text{ ddacă } A \subseteq B \cap C$

- $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C \subseteq B \setminus C)$

- $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$

- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$

6

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ și $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ și $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ și $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
- $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ și $(B \Delta C) \times A = (B \times A) \Delta (C \times A)$

Reuniunea disjunctă a două mulțimi:

Definiția 4.3. Fie A și B două mulțimi. Se definește **reuniunea disjunctă** a mulțimilor A și B ca fiind mulțimea notată $A \amalg B$ și definită prin:

$$A \amalg B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Observația 4.1. Reuniunea disjunctă este “un fel de reuniune” în care mulțimile care se reuneș sunt “făcute disjuncte”, prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a unui indice corespunzător mulțimii respective (un element diferit de cel atașat elementelor celeilalte mulțimi) (vom vorbi despre **indici** într-o discuție despre **familii arbitrare de mulțimi**).

5 Mulțimi și funcții

Definiția 5.1. Fie A și B mulțimi oarecare. Se numește **funcție** de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. i., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.

Formal: $(\forall a \in A) (\exists! b \in B) ((a, b) \in G)$.

Faptul că f este o funcție de la A la B se notează cu $f : A \rightarrow B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Mulțimea A se numește **domeniul** funcției f , B se numește **codomeniul** sau **domeniul valorilor** lui f , iar G se numește **graficul** lui f .

Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ și se numește **valoarea funcției f în punctul a** .

Remarca 5.1 $((a, b) \in G \Leftrightarrow f(a) = b)$. Dacă $f = (A, G, B)$ este o funcție $(f : A \rightarrow B)$, atunci graficul G al lui f este mulțimea de perechi: $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

Definiția 5.2. Fie $f = (A, F, B)$ și $g = (C, G, D)$ două funcții $(f : A \rightarrow B, \text{ iar } g : C \rightarrow D)$.

- Egalitatea $f = g$ semnifică egalitatea de triplete $(A, F, B) = (C, G, D)$, i. e. spunem că $f = g$ ddacă:

$$\begin{aligned} A &= C && \text{(are loc egalitatea domeniilor),} \\ B &= D && \text{(are loc egalitatea codomeniilor) și} \\ F &= G && \text{(are loc egalitatea graficelor celor două funcții,} \\ &&& \text{ceea ce, conform scrierii acestor grafice} \\ &&& \text{din remarca anterioară, se transcrie în egalitate} \\ &&& \text{punctuală, adică egalitate în fiecare punct:} \\ &&& \text{pentru orice } a \in A = C, f(a) = g(a)). \end{aligned}$$

- Dacă X este o mulțime a. i. $X \subseteq A$ și $X \subseteq C$, atunci spunem că f și g *coincide* pe X ddacă f și g au aceleași valori în elementele lui X , adică: oricare ar fi $x \in X$, $f(x) = g(x) \in B \cap D$.

Notăția 5.1 (**putere de mulțimi**). Pentru orice mulțimi A și B , se notează cu B^A mulțimea funcțiilor de la A la B :

$$B^A = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$$

Remarca 5.2 (există o **unică funcție de la \emptyset la o mulțime arbitrară**). Fie B o mulțime oarecare (**poate fi vidă și poate fi nevidă**). Atunci $B^\emptyset = \{(\emptyset, \emptyset, B)\}$.

Remarca 5.3 (nu există nicio funcție de la o mulțime nevidă la \emptyset). Fie A o mulțime a. i. $A \neq \emptyset$. Atunci $\emptyset^A = \emptyset$.

7

8

Definiția 5.3. Pentru orice mulțimi A și B , orice funcție $f : A \rightarrow B$ și orice submulțimi $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$, se definesc:

- *imaginea lui X prin f* sau *imaginea directă a lui X prin f* , notată $f(X)$, este submulțimea lui B :

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$

- $f(A)$ se mai notează cu $Im(f)$ și se numește *imaginea lui f* :

$$Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

- *preimaginea lui Y prin f* sau *imaginea inversă a lui Y prin f* , notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărți, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f , care există numai atunci când f este inversabilă, deci numai atunci când f este bijectivă – a se vedea în cele ce urmează –, pe când preimaginea unei submulțimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcție), este submulțimea lui A :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Definiția 5.4. Fie A și B mulțimi și $f : A \rightarrow B$ o funcție. f se zice:

- *injectivă* dacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
 - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
 - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- *surjectivă* dacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - pentru orice $b \in B$, există (cel puțin un) $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall b \in B) (\exists a \in A) (f(a) = b)$)
 - $f(A) = B$
- *bijectivă* dacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - f este simultan injectivă și surjectivă
 - pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall b \in B) (\exists! a \in A) (f(a) = b)$)

Funcțiile injective, surjective, respectiv bijective se mai numesc *injecții*, *surjecții*, respectiv *bijecții*.

Când notăm $f : A \rightarrow B$, subînțelegem că A și B sunt mulțimi.

Remarca 5.4. Pentru orice funcție $f : A \rightarrow B$:

- $f^{-1}(B) = A$;
- $f(\emptyset) = \emptyset$ și $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$;
- dacă $V \subseteq W \subseteq B$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$;
- pentru orice $M \subseteq A$, $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$, cu egalitate pentru f injectivă;
- pentru orice $N \subseteq B$, $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$, cu egalitate pentru f surjectivă;
- în schimb, pentru orice $N \subseteq f(A) = Im(f)$, $f(f^{-1}(N)) = N$.

Definiția 5.5 (funcția identitate a unei mulțimi). Pentru orice mulțime A , notăm cu id_A funcția identică a lui A (numită și funcția identitate a lui A sau identitatea lui A): $id_A : A \rightarrow A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.

Definiția 5.6 (componerea de funcții). Dacă A, B, C sunt mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ sunt funcții, atunci *componerea funcției g cu funcția f* este funcția notată cu $g \circ f$ și definită astfel: $g \circ f : A \rightarrow C$, pentru orice $a \in A$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$.

- pentru orice mulțimi A și B , dacă $A \not\cong B$, atunci nu există nicio mulțime C cu proprietățile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) și $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$); așadar avem chiar echivalențele: $A \not\cong B$ ddacă $|A| \neq |B|$ ddacă $|A| \cap |B| = \emptyset$

Definiția 6.3 (suma, produsul și puterea de numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B , avem, prin definiție:

- $|A| + |B| := |A \sqcup B|$
- $|A| \cdot |B| := |A \times B|$
- $|B|^{|A|} := |B^A|$

Propoziția 6.1 (independența de reprezentanți a operațiilor cu numere cardinale). *Operațiile cu numere cardinale, definite ca mai sus, nu depind de reprezentanții claselor de cardinal echivalență, adică: pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$), au loc:*

- $|A \sqcup B| = |A' \sqcup B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$

Definiția 6.4 (inegalități între numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B , notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecție $j : A \rightarrow B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ și $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecție $j : A \rightarrow B$, dar nu există nicio bijecție $f : A \rightarrow B$

Remarca 6.1. Definiția anterioară este independentă de reprezentanții claselor de cardinal echivalență, i. e., pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$):

- există o injecție de la A la B ddacă există o injecție de la A' la B' ;
- $A \cong B$ ddacă $A' \cong B'$, așadar: $A \not\cong B$ ddacă $A' \not\cong B'$.

Remarca 6.2. Dacă A și B sunt mulțimi și $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$, întrucât funcția incluziune: $i : A \rightarrow B$, $i(a) := a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă.

Definiția 6.3 (definiții echivalente pentru inegalități între numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B :

- $|A| \leq |B|$ ddacă există o surjecție $t : B \rightarrow A$ ddacă [există o mulțime C , a. i. $|B| = |A| + |C|$]
- $|A| < |B|$ ddacă [există o surjecție $t : B \rightarrow A$, dar nu există nicio bijecție $g : B \rightarrow A$] ddacă [există o mulțime nevidă C , a. i. $|B| = |A| + |C|$]

Remarca 6.4. Inegalitatea \leq este corect definită ca mai sus, în sensul că, pentru orice mulțimi A și B , $|A| = |B|$ ddacă $[|A| \leq |B| \text{ și } |B| \leq |A|]$.

Notăția 6.1. Desigur, folosim și notațiile \geq și $>$, cu semnificația: $|B| \geq |A| \stackrel{\text{def}}{=} |A| \leq |B|$, respectiv $|B| > |A| \stackrel{\text{def}}{=} |A| < |B|$, pentru orice mulțimi A și B .

Teorema 6.1 (Cantor). Pentru orice mulțime X , $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

O construcție pentru mulțimea numerelor naturale:

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), printr-o construcție echivalentă cu cea menționată în primul curs:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

Definiția 5.7 (inversa unei funcții). Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$. f se zice *inversabilă* ddacă există o funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Remarca 5.5 (dacă există, inversa unei funcții este unică). Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție inversabilă. Atunci există o unică funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Definiția 5.8. Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție inversabilă. Atunci unica funcție $g : B \rightarrow A$ cu proprietățile $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$ se notează cu f^{-1} ($f^{-1} = g : B \rightarrow A$) și se numește *inversa lui f* .

Remarca 5.6. Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$. Atunci: f este inversabilă ddacă este bijectivă.

Exercițiul 5.1 (caracterizarea surjectivității prin existența unei inverse la dreapta, și a injectivității prin existența unei inverse la stânga – temă). Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \rightarrow B$. Atunci:

- f este surjectivă ddacă $(\exists g : B \rightarrow A) (f \circ g = id_B)$; în plus, conform (iii) de mai jos, în caz afirmativ, g este injectivă;
- f este bijectivă ddacă $(\exists! g : B \rightarrow A) (f \circ g = id_B)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la dreapta g a lui f este $g = f^{-1}$, care este simultan inversă la dreapta și inversă la stânga pentru f ;
- f este injectivă ddacă $(\exists h : B \rightarrow A) (h \circ f = id_A)$; în plus, conform (i) de mai sus, în caz afirmativ, h este surjectivă;
- f este bijectivă ddacă $(\exists! h : B \rightarrow A) (h \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la stânga h a lui f este $h = f^{-1}$, care este simultan inversă la stânga și inversă la dreapta pentru f ;
- după cum știm, f este bijectivă ddacă este inversabilă, i. e. f este bijectivă ddacă $(\exists j : B \rightarrow A) (f \circ j = id_B \text{ și } j \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, j este unică, se notează cu f^{-1} și se numește *inversa lui f* ; dar, conform (i) și (iii), avem și următoarea caracterizare a bijectivității: f este bijectivă ddacă $(\exists g, h : B \rightarrow A) (f \circ g = id_B \text{ și } h \circ f = id_A)$; în plus, conform (ii) și (iv), în caz afirmativ, g și h sunt unice și $g = h = f^{-1}$.

Exercițiul 5.2 (funcțiile imagine directă și imagine inversă – temă). Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \rightarrow B$. Considerăm funcțiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B), & (\forall M \subseteq A) (f_*(M) := f(M)); \\ f^* : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), & (\forall N \subseteq B) (f^*(N) := f^{-1}(N)). \end{cases}$$

Atunci au loc următoarele echivalențe:

- f este injectivă ddacă f_* este injectivă ddacă f^* este surjectivă ddacă $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$ (i. e. $(\forall M \subseteq A) (f^{-1}(f(M)) = M)$) ddacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$;
- f este surjectivă ddacă f_* este surjectivă ddacă f^* este injectivă ddacă $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$ (i. e. $(\forall N \subseteq B) (f(f^{-1}(N)) = N)$) ddacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$;
- din (i) și (ii), obținem: f este bijectivă ddacă f_* este bijectivă ddacă f^* este bijectivă ddacă f^* și f_* sunt inverse una altele ddacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) = B \setminus f(M))$.

6 Teoria cardinalelor

Definiția 6.1. Două mulțimi A și B se zic *echipotente* sau *cardinal echivalente* ddacă există o funcție bijectivă de la A la B , fapt notat prin: $A \cong B$.

Definiția 6.2. Pentru orice mulțime A , se numește *cardinalul lui A* sau *numărul cardinal al lui A* clasa tuturor mulțimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$.

Să observăm că:

- pentru orice mulțime A , $A \cong A$ (pentru că $id_A : A \rightarrow A$ este o bijecție), deci $A \in |A|$
- pentru orice mulțimi A și B , dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ și $|A| = |B|$, i. e. orice mulțime C satisface $A \cong C$ ddacă satisface $B \cong C$; așadar avem chiar echivalențele: $A \cong B$ ddacă $B \cong A$ ddacă $|A| = |B|$

Mereu se consideră mulțimea având drept elemente toate mulțimile de la pașii anteriori: succesorul unui n este $n+1 := \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Iar mulțimea tuturor elementelor construite astfel, denumite *numere naturale*, se notează cu \mathbb{N} .

În definițiile de mai sus pentru *numerele naturale* trebuie rezolvată, într-un fel sau altul, problema următoare: cu definiția de mai sus, orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este o clasă proprie, care nu poate aparține unei mulțimi sau clase. Putem înlocui aceste clase cu etichete ale lor, de exemplu chiar cu, reprezentanții lor de mai sus: $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, ...

Definiția de mai sus pentru *mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale* arată corectitudinea *principiului inducției matematice*: dacă o submulțime $S \subseteq \mathbb{N}$ satisface:

- $0 \in S$,
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $[n \in S \Rightarrow n+1 \in S]$,

atunci $S = \mathbb{N}$.

Având mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale, se construiesc \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} și se definesc operațiile și relațiile de ordine pe aceste mulțimi în modul cunoscut din liceu.

Mulțimea numerelor naturale, \mathbb{N} , este o mulțime infinită, mai precis o mulțime numărabilă.

Notăția 6.2 ($\aleph_0 := |\mathbb{N}|$). Cardinalul mulțimii numerelor naturale se notează cu \aleph_0 , pronunțat "alef 0".

Definiția 6.5. O mulțime X se zice *numărabilă* ddacă $|X| = \aleph_0$, i. e. ddacă $X \cong \mathbb{N}$.

Remarca 6.5. Orice $n \in \mathbb{N}$ satisface $n < \aleph_0$.

Definiția 6.6. O mulțime X se zice *infinită*:

- în sens *Dedekind*, ddacă există $S \subseteq X$ a. i. $S \cong X$
- în sens *Cantor*, ddacă există $S \subseteq X$, a. i. S este numărabilă
- în sens *obișnuit*, ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \not\cong \{1, 2, \dots, n\}$

Teorema 6.2. Cele trei definiții de mai sus ale mulțimilor infinite sunt echivalente.

Desigur, o mulțime finită este, prin definiție, o mulțime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiția de mai sus a mulțimilor infinite *în sens obișnuit*:

Definiția 6.7. O mulțime finită este o mulțime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \dots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Remarca 6.6. Conform definiției anterioare, *cardinalele finite*, i. e. cardinalele mulțimilor finite, sunt exact numerele naturale.

Remarca 6.7. Definiția mulțimilor infinite în sens Cantor arată că \aleph_0 (i. e. cardinalul mulțimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde *cardinal infinit* (sau *cardinal transfinit*) înseamnă cardinal al unei mulțimi infinite.

Definiția 6.8. O mulțime *cel mult numărabilă* este o mulțime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu \aleph_0).

Notăția 6.3. Amintim următoarele notații consacrate pentru un segment al mulțimii \mathbb{Z} a numerelor întregi: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, $\overline{a, b} := [a, b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \begin{cases} \{a, a+1, \dots, b\}, & \text{dacă } a \leq b; \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$

Remarca 6.8. Mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi este numărabilă.

Mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale este numărabilă.

Definiția 6.9. O mulțime *nenumerabilă* este, prin definiție, o mulțime infinită care nu este numărabilă, i. e. o mulțime având cardinalul strict mai mare decât \aleph_0 .

Remarca 6.9. Mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale este nenumerabilă.

Definiția 6.10 ($\mathbb{C} := |\mathbb{R}|$). Cardinalul lui \mathbb{R} se notează cu \mathfrak{C} și se numește *puterea continuumului*.

- Conform celor de mai sus, $\aleph_0 < \mathfrak{C}$.

Vom vedea că $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ pentru orice mulțime M .

Remarca 6.10 ($\mathcal{C} = 2^{\aleph_0}$). $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Remarca 6.11. Oricare ar fi mulțimile A și B :

- după cum am observat mai sus, $A \subseteq B$ implică $|A| \leq |B|$;
- dacă B este finită și $A \subseteq B$, atunci $|A| < |B|$.

În plus, după cum arată definiția lui Cantor a mulțimilor infinite:

- dacă $|A| \leq |B|$ și A este infinită, atunci B este infinită;
- dacă $|A| \leq |B|$ și B este finită, atunci A este finită.

Observația 6.1. Conform celor de mai sus, faptul că o mulțime A este finită se exprimă, în simboluri, prin: $|A| < \aleph_0$. Pentru comoditate, vom folosi și notația $|A| < \infty$ pentru faptul că o mulțime A este finită.

7 Familii arbitrare de mulțimi

Definiția 7.1 (familie de elemente ale lui A indexată de I). Fie I și A mulțimi arbitrare.

O familie $(x_i)_{i \in I} \subseteq A$ este o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in \mathbb{R}$. Elementele mulținii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i \in I}$.

- Există o singură familie vidă de elemente ale unei mulțimi arbitrare A , pentru că există o singură funcție de la \emptyset la A (a se vedea și mai jos).
- Familia vidă nu este egală cu nicio familie nevidă, ci este egală doar cu ea însăși.

Fie I și A două mulțimi nevide, iar $(a_i)_{i \in I}$ și $(b_i)_{i \in I}$ două familii de elemente din A indexate de I :

- $I \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$
- $(a_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $a_i \in A$
- $(b_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $b_i \in A$

Cele două familii sunt egale ddacă sunt egale pe componente:

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \quad \text{ddacă,} \quad \text{pentru orice } i \in I, \quad a_i = b_i.$$

Familii arbitrare de mulțimi:

Definiția 7.2. Fie T o mulțime arbitrară. Se numește *șir de submulțimi ale lui T indexat de \mathbb{N}* o funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, se notează $A_n := f(n) \in \mathcal{P}(T)$, iar șirul de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Scriem $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{P}(T)$.

Definiția 7.3. Fie T și I două mulțimi arbitrare. Se numește *familie de submulțimi ale lui T indexată de I* o funcție $f: I \rightarrow \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i \in I}$. Scriem $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulținii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i \in I}$.

Pentru a generaliza definiția anterioară la familii de mulțimi oarecare avem nevoie de acea definiție mai cuprinzătoare a noțiunii de funcție (a se vedea sistemul axiomatic pentru teoria mulțimilor din Cursul I), care permite unei funcții f definite pe I să aibă drept codomeniul o clasă (nu neapărat o mulțime), anume clasa tuturor mulțimilor în acest caz.

Operații cu familii arbitrare de mulțimi:

Definiția 7.4. Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I .

Se definesc următoarele operații:

13

Amintesc că asociativitatea unei operații binare, cum sunt reuniunea și intersecția a două mulțimi, permite scrierea unui șir de astfel de operații fără paranteze: pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3 :

- $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Propoziția 7.1 (asociativitatea produsului direct ca operație binară). Fie A_1, A_2, A_3 mulțimi arbitrare.

Atunci: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^3 A_i$, întrucât următoarele funcții sunt bijecții: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\psi} (A_1 \times A_2) \times A_3$

$\xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^3 A_i$, pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ și orice $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ și $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$.

În plus, fiecare dintre bijecțiile φ și ψ se identifică cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenție egalitățile: $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ și orice $a_3 \in A_3$.

Prim urmare, putem scrie: $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^3 A_i$.

Ca și la funcții aplicate unor perechi de elemente, folosim **licența de scriere (convenția)**: pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulțimi A_1, A_2, \dots, A_n, B , orice funcție $f: \prod_{i=1}^n A_i \rightarrow B$ și orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \dots, a_n) := f((a_1, a_2, \dots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere). Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenție**, și va fi clar la elementele căror mulțimi ne vom referi, prin notații de forma:

- $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i \in I} \in A'$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînțelege: $a \in A$ și $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînțelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt mulțimi, I este o mulțime nevidă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie (nevidă) de mulțimi.

Definiția 7.5. Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I .

Se definește **reuniunea disjunctă** a familiei $(A_i)_{i \in I}$ ca fiind mulțimea notată $\prod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\prod_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\})$$

Observația 7.1. Reuniunea disjunctă este “un fel de reuniune” în care mulțimile care se reuneșc sunt “făcute disjuncte”, prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulținii respective.

Notația 7.2. Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașați, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\prod_{i \in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\prod_{i \in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

- **reuniunea familiei** $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcup_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I) (x \in A_i)\} = \{x \mid (\exists i) (i \in I \text{ și } x \in A_i)\}$$

- **intersecția familiei** $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcap_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I) (x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall i) (i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$$

- **produsul cartezian al familiei** $(A_i)_{i \in I}$ (numit și **produsul direct al familiei** $(A_i)_{i \in I}$) este mulțimea notată $\prod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \{(a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i)\} = \\ &= \{(a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall i) (i \in I \Rightarrow a_i \in A_i)\}, \end{aligned}$$

sau, altfel scris (cu definiția unei familii de elemente exemplificate mai sus pe familii de numere reale):

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \{f \mid f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (f(i) \in A_i)\} = \\ &= \{f \mid f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i) (i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i)\}. \end{aligned}$$

Notația 7.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile A_1, A_2, \dots, A_n . Produsul direct $\prod_{i \in \overline{1, n}} A_i$ se mai notează cu $\prod_{i=1}^n A_i$, iar un element $(a_i)_{i \in \overline{1, n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu (a_1, a_2, \dots, a_n) . În cazul particular în care $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, $\prod_{i \in \overline{1, n}} A$ $\stackrel{\text{notație}}{=} \prod_{i=1}^n A \stackrel{\text{notație}}{=} A^n$.

Remarca 7.1 (puterile unei mulțimi: caz particular al produsului direct). În definiția anterioară, dacă $I \neq \emptyset$ și, pentru orice $i \in I$, $A_i = A$, atunci $\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} A = A$, așadar $\prod_{i \in I} A = \{f \mid f: I \rightarrow A, (\forall i \in I) (f(i) \in A)\} = \{f \mid f: I \rightarrow A\} = A^I$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $|I| = n$, avem: $A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid (\forall i \in \overline{1, n}) (a_i \in A)\} = \{f \mid f: \overline{1, n} \rightarrow A\} = A^{\overline{1, n}} = A^n$.

Remarca 7.2. Pentru orice mulțimi A , I și J , dacă $I \cong J$, atunci $A^I \cong A^J$. Acest fapt rezultă direct din independența de reprezentanți a operației de exponențiere asupra numerelor cardinale.

Exercițiul 7.1 (temă – distributivitatea produsului cartezian față de reuniuni și intersecții arbitrare). Fie A o mulțime, I o mulțime nevidă (de fapt poate fi și vidă – vom vedea), iar $(B_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi. Să se demonstreze că:

- $A \times (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i)$ și $(\bigcup_{i \in I} B_i) \times A = \bigcup_{i \in I} (B_i \times A)$
- $A \times (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \times B_i)$ și $(\bigcap_{i \in I} B_i) \times A = \bigcap_{i \in I} (B_i \times A)$

Exercițiul 7.2 (temă – distributivitatea generalizată a produsului cartezian față de intersecție). Fie I și J o mulțimi nevide (de fapt pot fi și vide – vom vedea), iar $(A_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ o familie de mulțimi (indexată de $I \times J$; poate fi scrisă și sub forma: $\{A_{(i,j)}\}_{(i,j) \in I \times J}$). Să se demonstreze că:

$$\prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}$$

14

Notația 7.3. La fel ca la produsul direct, dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i \in \overline{1, n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\prod_{i \in \overline{1, n}} A_i \stackrel{\text{notație}}{=} \prod_{i=1}^n A_i \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Remarca 7.3. Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3 , se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și câte o identificare de indici, i. e. câte o bijecție între mulțimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \cong (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \cong \prod_{i=1}^3 A_i$, adică, prin

identificarea acestor bijecții cu identitatea, putem scrie: $A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 = \prod_{i=1}^3 A_i$.

Aritatea unei operații a unei structuri algebrice (cu o singură mulțime suport, o singură mulțime de elemente) este **numărul argumentelor (operatorilor, variabilelor) acelei operații**. Dacă structura algebrică are mulțimea suport A , iar f este o operație n -ară pe A , cu $n \in \mathbb{N}$, atunci $f: \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n \rightarrow A$ (f este o funcție cu n argumente din A , cu valori tot în A).

Remarca 7.4 (reuniunea familiei vide este vidă). Dacă recitim definiția reuniunii unei familii arbitrare, observăm că reuniunea familiei vide este mulțimea elementelor pentru care există un $i \in \emptyset$ cu o anumită proprietate, condiție care este întotdeauna falsă, deci reuniunea familiei vide este \emptyset .

Remarca 7.5 (produsul direct al familiei vide este un singleton). Cele de mai sus arată că produsul direct al familiei vide este mulțimea cu unicul element dat de unica funcție de la \emptyset la A , anume $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, adică produsul direct al familiei vide este singletonul $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Operațiile zeroare sunt constanțele structurilor algebrice: de exemplu, elementul neutru al unui grup G este o funcție φ de la un singleton (anume $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$) la G : $\varphi: \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \rightarrow G$, iar o funcție definită pe un singleton are o singură valoare $(\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in G)$, deci poate fi identificată cu această unică valoare a ei, care este un element distins, o constantă din G : $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = e \in G$, și identificăm $\varphi = e$.

Remarca 7.6 (reuniunea disjunctă a familiei vide este vidă). Definiția reuniunii disjuncte a unei familii arbitrare de mulțimi arată că reuniunea disjunctă a familiei vide de mulțimi este egală cu, reuniunea familiei vide de mulțimi, care este \emptyset .

Exemplul 7.2. Dacă A și B sunt mulțimi, iar $f: A \rightarrow B$ și $g: A \rightarrow B$, iar pe mulțimea B avem, de exemplu, o operație binară + și o relație binară \leq (vom vedea) \leq , atunci putem defini, **punctual**, operația +, respectiv relația \leq , între funcțiile f și g , astfel:

- $f + g: A \rightarrow B$, pentru orice $x \in A$, $(f + g)(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} f(x) + g(x)$
- prin definiție, $f \leq g$ ddacă, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.

Definiția 7.6 (familii de funcții între două mulțimi fixate A și B). Fie I , A și B mulțimi arbitrare. O familie de funcții de la A la B indexată de I este o familie de elemente ale mulținii B^A indexată de I , i. e. o funcție $h: I \rightarrow B^A$ (pentru orice $i \in I$, $f_i \stackrel{\text{notație}}{=} h(i): A \rightarrow B$).

Se pot defini și operații cu familii arbitrare de funcții, tot **punctual**:

Exemplul 7.2. Dacă I , A și B sunt mulțimi nevide, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții de la A la B (adică, pentru orice $i \in I$, $f_i: A \rightarrow B$), B este o mulțime ordonată (vom vedea) \leq , pentru orice $x \in A$, submulțimea $\{f_i(x) \mid i \in I\} \subseteq B$ are un cel mai mare element (un **maxim**), atunci putem defini funcția:

$$\max\{f_i \mid i \in I\}: A \rightarrow B,$$

astfel: pentru orice $x \in A$,

$$(\max\{f_i \mid i \in I\})(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} \max\{f_i(x) \mid i \in I\}.$$

Definiția 7.7 (familii de funcții – cazul general – material facultativ). Fie I o mulțime arbitrară, iar $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ familii de mulțimi indexate de I .

O familie de funcții $(f_i)_{i \in I}$ indexată de I cu $f_i : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$ este un element al produsului direct $\prod_{i \in I} B_i^{A_i}$, adică o familie de elemente ale mulțimii $\prod_{i \in I} B_i^{A_i}$ indexată de I cu elementul de indice i aparținând lui $B_i^{A_i}$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. o funcție $h : I \rightarrow \prod_{i \in I} B_i^{A_i}$, cu $f_i = h(i) : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Definiția 7.8 (operațiile cu familii arbitrare de funcții generalizează compunerea de funcții – material facultativ). Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ sunt familii de mulțimi, C este o mulțime, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții și g este o funcție a. i., pentru fiecare $i \in I$, $f_i : A_i \rightarrow B_i$, iar $g : \prod_{i \in I} B_i \rightarrow C$, atunci putem defini funcția $g((f_i)_{i \in I}) : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow C$ prin: oricare ar fi $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$, $g((f_i)_{i \in I})(x_i)_{i \in I} := g((f_i(x_i))_{i \in I})$: operația g (de aritate, i. e. număr de argumente, $|I|$) aplicată familiei de funcții $(f_i)_{i \in I}$, definită punctual.

Cazul finit: $I = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$: $g(f_1, \dots, f_n) : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow C$, pentru orice $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$, $g(f_1, \dots, f_n)(x_1, \dots, x_n) := g(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$.

La fel se pot generaliza relațiile binare între funcții la relații de aritate arbitrară, chiar infinită, adică, pentru familia $(f_i)_{i \in I}$ de mai sus, submulțimi ale lui $\prod_{i \in I} B_i$: relații de aritate (i. e. număr de argumente) $|I|$ – a se vedea în Cursul III definiția unei relații n -are:

Definiția 7.9 (material facultativ). Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ sunt familii de mulțimi, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții cu $f_i : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$, iar $R \subseteq \prod_{i \in I} B_i$, atunci: familia $(f_i)_{i \in I}$ de funcții se află în relația R , notat $(f_i)_{i \in I} \in R$, ddacă $(f_i(x_i))_{i \in I} \in R$ pentru fiecare $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$.

Cazul finit: $I = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că $R \subseteq B_1 \times \dots \times B_n$ este o relație n -ară: $(f_1, \dots, f_n) \in R$ ddacă, pentru orice $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$, $(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in R$.

Exercițiul 7.3 (imagini și preimagini de reuniuni și intersecții arbitrare de mulțimi printr-o funcție). Fie A, B, I și J mulțimi nevide (de fapt, pot fi și vide – vom vedea), $f : A \rightarrow B$, iar $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ și $(B_j)_{j \in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Să se demonstreze că:

- $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$;
- $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$;
- $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$;
- $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$;
- f este injectivă ddacă, pentru orice mulțime nevidă K și orice $(M_k)_{k \in K} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $f(\bigcap_{k \in K} M_k) = \bigcap_{k \in K} f(M_k)$.
- Să se dea un exemplu pentru incluziune strictă la punctul (iv).

8 Funcții caracteristice

Definiția 8.1. Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim funcția caracteristică a lui A (raportat la T): $\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$

În cazul particular în care mulțimea totală T este finită și nevidă: $T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcția caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \dots, \chi_A(x_n))$; acest vector de valori din mulțimea $\{0, 1\}$ se numește vectorul caracteristic al lui A . A se observa că suma valorilor din acest vector este egală cu, cardinalul lui A : $\chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) + \dots + \chi_A(x_n) = |A|$.

Propoziția 8.1 (principiul includerii și al excluderii). Pentru orice n natural nenul și orice mulțimi finite M_1, M_2, \dots, M_n , are loc egalitatea:

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^n M_i| &= \sum_{i=1}^n |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n| = \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_s}|. \end{aligned}$$

Și dual: $|\bigcap_{i=1}^n M_i| = \sum_{i=1}^n |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \dots +$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n| = \sum_{s=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_s}|.$$

Propoziția 8.2 (proprietățile funcțiilor caracteristice). Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcția caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcțiile constante: $\mathbf{0} : T \rightarrow \{0, 1\}$ și $\mathbf{1} : T \rightarrow \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$, $\mathbf{0}(x) = 0$ și $\mathbf{1}(x) = 1$.

Atunci au loc proprietățile:

- $\chi_{\emptyset} = \mathbf{0}$ și $\chi_T = \mathbf{1}$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, are loc echivalența: $A \subseteq B$ ddacă $\chi_A \leq \chi_B$ (punctual, i. e.: pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$)
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, are loc echivalența: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \max\{\chi_A, \chi_B\}$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T \setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$
- $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Remarca 8.1. Fie T și I două mulțimi nevide și $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părți ale lui T indexată de I . Atunci au loc:

- $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Remarca 8.2 (legile de distributivitate generalizată pentru \cup și \cap). Pentru orice mulțime nevidă I , orice mulțime A și orice familie de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$, au loc egalitățile:

- distributivitatea generalizată a \cup față de \cap : $A \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$
- distributivitatea generalizată a \cap față de \cup : $A \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$

Propoziția 8.3. Pentru orice mulțime nevidă T , $\mathcal{P}(T) \cong \{0, 1\}^T$.

Corolarul 8.1. Pentru orice mulțime T , $|\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.

A se vedea precizările despre examen și temele obligatorii de la sfârșitul Cursului II.

Breviar pentru Cursurile I și II de Logică Matematică și Computațională

Claudia MUREȘAN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

CUPRINSUL CURSULUI DE LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Capitolul 1: Preliminarii algebrice:

- Mulțimi, funcții și relații. Relații binare. Relații de echivalență
- Relații de ordine. Mulțimi (parțial) ordonate
- Latici

- Algebre Boole. Morfisme de algebre Boole. Filtre și congruențe în algebre Boole. Ultrafiltre. Teorema de reprezentare a lui Stone (algebra Boole cu exact două elemente determină structura tuturor algebrelor Boole). Structura algebrelor Boole finite

Capitolul 2: Logica propozițională clasică:

- Sintaxa (o primă prezentare pentru logica propozițională clasică: sistemul Hilbert)
- Algebra Lindenbaum–Tarski (o algebră Boole asociată logicii propoziționale clasice)
- Semantica (calcul cu valori de adevăr, în algebra Boole cu exact două elemente: $0 = \text{fals}$, $1 = \text{adevărat}$)
- Teorema de completitudine (deducția sintactică, coincide cu deducția semantică)
- Rezoluția propozițională (echivalență cu sistemul Hilbert)
- Deducția naturală (echivalență cu sistemul Hilbert)

Capitolul 3: Logica clasică a predicatelor (predicat = propoziție cu variabile):

- Structuri de ordinul I (structuri algebrice în care iau valori variabilele din predicate)
- Sintaxa
- Semantica
- Teorema de completitudine (deducția sintactică, coincide cu deducția semantică)
- Rezoluția în logica clasică a predicatelor

A se vedea bibliografia acestui curs, în Cursul I. Prescurtări uzuale:

- i. e. = id est = adică
- ddacă = dacă și numai dacă
- a. i. = astfel încât
- ș. a. m. d. = și așa mai departe
- “:=”: abreviere pentru: $\stackrel{\text{definiție}}{=}$, $\stackrel{\text{notație}}{=}$
- : notație pentru: “să se demonstreze că”

1 Teoria mulțimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

- O definiție din teoria naivă a mulțimilor: o mulțime este o colecție de obiecte bine determinate și distincte, numite elementele mulțimii.
- distincte: o mulțime nu conține un același obiect de mai multe ori; un element apare într-o mulțime o singură dată
- bine determinate: orice mulțime are o descriere precisă, care o identifică în mod unic, adică îi identifică în mod unic elementele

A se vedea în Cursul I Paradoxul lui Bertrand Russell, care arată că nu există mulțimea tuturor mulțimilor. Totalitatea mulțimilor nu formează o mulțime, ci o clasă.

Din punctul de vedere al teoriei naive a mulțimilor, nu se pot pune multe lucruri despre noțiunea de clasă, decât că este “ceva mai vag/mai mare/mai cuprinzător decât o mulțime”. Se consideră că orice mulțime este o clasă, dar nu și invers. Clasele care nu sunt mulțimi se numesc clase proprii.

Semnul (simbolul) de apartenență nu poate apărea la dreapta unei clase proprii, adică nu se consideră a avea sens faptul că o clasă proprie aparține unui alt obiect.

Așadar nu există clasa tuturor claselor, din simplul motiv că nu există un obiect care să aibă clase proprii ca elemente.

- O axiomă este un fapt dat ca fiind adevărat într-o teorie matematică.
- O axiomă nu se demonstrează, ci pur și simplu este dată ca fiind adevărată.
- Faptul de a fi axiomă nu este o proprietate intrinsecă a unei afirmații.
- formalizare: exprimare folosind numai simboluri matematice
- metalimbaj: “limbajul natural”, “vorbirea curentă (obișnuită)”, “exprimarea în cuvinte”, “fără simboluri matematice”

2 Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Lucrăm numai cu enunțuri care sunt fie false, fie adevărate.

Conectorii logici: folosiți pentru a lega enunțuri, formând astfel enunțuri compuse:

- disjuncția: sau
- conjuncția: și
- negația: non
- implicația: \Rightarrow
- echivalența: \Leftrightarrow

Pentru orice enunțuri (propoziții, afirmații, proprietăți) p, q și r , au loc echivalențele următoare:

- $[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)]$
- $[p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)]$
- $\text{non } (p \text{ sau } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)]$
- $\text{non } (p \text{ și } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } q]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)]$ (principiul reducerii la absurd)
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \Leftrightarrow (\text{non } q)]$ (consecință imediată a principiului reducerii la absurd și a faptului că $(p \Leftrightarrow q) \stackrel{\text{def.}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ și } (q \Rightarrow p)]$)

- implicația $[p \Rightarrow q]$ este echivalentă cu $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$

Cuantificatorii:

- *cuantificatorul universal:* \forall
- *cuantificatorul existențial:* \exists

Dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate referitoare la x (mai precis o proprietate referitoare la elementele pe care le parcurge/le poate denumi x), atunci:

- $\text{non } [(\forall x) (p(x))] \Leftrightarrow (\exists x) (\text{non } p(x))$
- $\text{non } [(\exists x) (p(x))] \Leftrightarrow (\forall x) (\text{non } p(x))$

Notăția 2.1. Alăturarea de simboluri $\exists!$ semnifică “există un unic”, “există și este unic”.

Observația 2.1. $\exists!$ nu este un cuantificator, ci este o notație prescurtată pentru enunțuri compuse: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate asupra lui x , atunci scrierea $(\exists!x) (p(x))$ este o abreviere pentru enunțul scris, desigur, astfel:

$$(\exists x) (p(x)) \text{ și } (\forall y) (\forall z) [(p(y) \text{ și } p(z)) \Rightarrow y = z],$$

unde y și z sunt variabile.

Cuantificatorii aplicați fixând un domeniu al valorilor:

Fie M o mulțime, x o variabilă, iar $p(x)$ o proprietate referitoare la elementele lui M . Atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru scrierile fără domeniu al valorilor lângă cuantificatorii:

- $(\forall x \in M) (p(x)) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall x) (x \in M \Rightarrow p(x))$
- $(\exists x \in M) (p(x)) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists x) (x \in M \text{ și } p(x))$

Toate proprietățile logice pentru enunțuri cuantificate din acest curs se scriu la fel și sunt valabile și pentru cuantificatori urmați de un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată.

Cuantificatorii de același fel comută, cei diferiți nu:

Fie x și y variabile, iar $p(x, y)$ o proprietate asupra lui x și y . Atunci:

- $(\forall x) (\forall y) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y) (\forall x) (p(x, y))$
- $(\exists x) (\exists y) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y) (\exists x) (p(x, y))$
- $(\forall x) (\exists y) (p(x, y)) \not\Leftrightarrow (\exists y) (\forall x) (p(x, y))$ (pentru fiecare valoare a lui x , valoarea lui y pentru care e satisfăcut enunțul din stânga depinde de valoarea lui x)

Analog, dacă A și B sunt mulțimi, avem:

- $(\forall x \in A) (\forall y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in B) (\forall x \in A) (p(x, y))$
- $(\exists x \in A) (\exists y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in B) (\exists x \in A) (p(x, y))$
- $(\forall x \in A) (\exists y \in B) (p(x, y)) \not\Leftrightarrow (\exists y \in B) (\forall x \in A) (p(x, y))$

Desigur, la fel pentru cazul în care doar unul dintre cuantificatori este aplicat cu un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată: $(\forall x) (\forall y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in B) (\forall x) (p(x, y))$ etc..

Cuantificatori, disjuncții și conjuncții logice:

Să observăm și următoarele proprietăți logice: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ și $q(x)$ sunt enunțuri referitoare la x , atunci:

- $(\forall x) (p(x) \text{ și } q(x)) \Leftrightarrow (\forall x) (p(x)) \text{ și } (\forall x) (q(x))$
- $(\exists x) (p(x) \text{ sau } q(x)) \Leftrightarrow (\exists x) (p(x)) \text{ sau } (\exists x) (q(x))$
- $(\forall x) (p(x) \text{ sau } q(x)) \not\Leftrightarrow (\forall x) (p(x)) \text{ sau } (\forall x) (q(x))$
- $(\exists x) (p(x) \text{ și } q(x)) \not\Leftrightarrow (\exists x) (p(x)) \text{ și } (\exists x) (q(x))$

3

Notăția 3.3. Păstrăm notațiile \subseteq , \subset și \supseteq pentru **incluziunile** și **incluziunile stricte** dintre mulțimi în fiecare sens. Vom mai nota incluziunile stricte și cu \subset și respectiv \supset , dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă și nu poate avea loc egalitatea de mulțimi nu ne folosește în cele prezentate.

Amintim că, pentru orice mulțimi A și B :

- $A = B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x) [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (prin definiție, două mulțimi sunt egale ddacă au aceleași elemente);
- $A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x) [x \in A \Rightarrow x \in B]$;
- $A \supseteq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A$;
- $A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [A \subseteq B \text{ și } A \neq B]$;
- $A \supseteq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A$.

Notăția 3.4. Vom nota cu \emptyset **mulțimea vidă**, adică mulțimea fără elemente, i.e. unica (conform definiției egalității de mulțimi) mulțime care satisface: $(\nexists x) (x \in \emptyset)$, sau, echivalent: $(\forall x) (x \notin \emptyset)$.

Definiția 3.1. Dacă A și B sunt mulțimi, atunci A se numește:

- *submulțime a lui B* (sau *parte a lui B*) ddacă $A \subseteq B$;
- *submulțime proprie* (sau *strictă*) a lui B ddacă $A \subset B$.

Notăția 3.5. Pentru orice mulțime T , vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ **mulțimea părților** lui T , i. e. **mulțimea submulțimilor** lui T : $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Să notăm cu **xor** conectorul logic sau *exclusiv*, definit astfel: pentru orice enunțuri p și q , enunțul $(p \text{ xor } q)$ este adevărat exact atunci când **exact unul** dintre enunțurile p și q este adevărat, adică exact atunci când $[(p \text{ e adevărat și } q \text{ e fals}) \text{ sau } (q \text{ e adevărat și } p \text{ e fals})]$. Formal:

- $(p \text{ xor } q) \Leftrightarrow [(p \text{ și non } q) \text{ sau } (q \text{ și non } p)]$

Remarca 3.1. Definiția diferenței simetrice arată că, pentru orice mulțimi A și B :

- $A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ xor } x \in B\}$.
- A se vedea, în Cursul I, proprietățile logice (cu enunțuri) în care se transcriu următoarele proprietăți pentru calculul cu mulțimi.
- Și a se observa faptul că, pentru operații comutative, precum reuniunea și intersecția de mulțimi, distributivitatea la stânga față de alte operații este echivalentă cu distributivitatea la dreapta.
- Pentru orice mulțimi A, B, C, D , au loc:
 - $A = B$ ddacă $[A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A]$
 - **idempotența reuniunii:** $A \cup A = A$
 - **idempotența intersecției:** $A \cap A = A$
 - $A \setminus A = \emptyset$
 - $A \Delta A = \emptyset$

- **comutativitatea reuniunii:** $A \cup B = B \cup A$
- **comutativitatea intersecției:** $A \cap B = B \cap A$
- **comutativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta B = B \Delta A$
- **asociativitatea reuniunii:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **asociativitatea intersecției:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **asociativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

Scoaterea de sub un cuantificator a unui enunț care nu depinde de variabila cuantificată:

Dacă, în enunțurile compuse cuantificate de mai sus, în locul lui $q(x)$ avem un enunț q care nu depinde de x , atunci:

$$(\forall x) q \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (\exists x) q,$$

așadar, în acest caz, din proprietățile anterioare obținem:

- $(\forall x) (p(x) \text{ și } q) \Leftrightarrow (\forall x) (p(x)) \text{ și } q$
- $(\exists x) (p(x) \text{ sau } q) \Leftrightarrow (\exists x) (p(x)) \text{ sau } q$
- $(\forall x) (p(x) \text{ sau } q) \not\Leftrightarrow (\forall x) (p(x)) \text{ sau } q$
- $(\exists x) (p(x) \text{ și } q) \not\Leftrightarrow (\exists x) (p(x)) \text{ și } q$

Acum fie p, q și r enunțuri. Atunci, din proprietățile: $[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)]$, $[p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)]$, $\text{non } (p \text{ sau } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)]$, $\text{non } (p \text{ și } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$ și $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } q]$, se pot deduce următoarele proprietăți:

- $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \not\Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \not\Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
- $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \not\Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \not\Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$

3 Operații cu mulțimi și relații între mulțimi

Notăția 3.1. • Păstrăm notația consacrată \in pentru **simbolul de apartenență**, ce indică faptul că un obiect este element al altui obiect (mulțime, clasă).

- Păstrăm notația clasică, folosind acolade, pentru specificarea elementelor unei mulțimi (fie prin enumerare, fie printr-o proprietate a lor).

Amintim că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulțimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.

Notăția 3.2. Păstrăm notațiile cunoscute \cup , \cap , \setminus și Δ pentru **reuniunea**, **intersecția**, **diferența** și, respectiv, **diferența simetrică** între mulțimi.

Amintim că, pentru orice mulțimi A și B , se definește:

- $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;
- $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;
- $A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$;
- $A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

A se vedea proprietățile operațiilor cu mulțimi demonstrate la seminar, precum și cele lăsate ca temă pentru acasă în cursul orclor de seminar!

Vom face mereu apel și la cunoștințe din gimnaziu și liceu, dintre care pe unele le vom aminti, de regulă doar enunțându-le.

4

- **distributivitatea la stânga a reuniunii față de intersecție:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **distributivitatea la dreapta a reuniunii față de intersecție:** $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$
- **distributivitatea la stânga a intersecției față de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **distributivitatea la dreapta a intersecției față de reuniune:** $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$
- $A \subseteq B$ ddacă $[(\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ și } (\exists x) (x \in B \setminus A)]$ ddacă $[A \subseteq B \text{ și } B \setminus A \neq \emptyset]$ ddacă $[A \subseteq B \text{ și } B \not\subseteq A]$
- $A \subseteq B$ ddacă $(A \subseteq B \text{ sau } A = B)$
- $A \subseteq A$
- $\text{non}(A \subseteq A)$

- **transitivitatea incluziunii nestrict:** $(A \subseteq B \text{ și } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

- $(A \subseteq B \text{ și } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

- $(A \subseteq B \text{ și } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

- **transitivitatea incluziunii stricte:** $(A \subset B \text{ și } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

- $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$

- $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$

- $A \cup B = B$ ddacă $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$

- $\emptyset \subseteq A$

- $A \cup \emptyset = A$

- $A \cap \emptyset = \emptyset$

- $A \setminus \emptyset = A$

- $A \setminus B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq B$

- $\emptyset \setminus A = \emptyset$

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, adică: $A \subseteq \emptyset$ ddacă $A = \emptyset$

- $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $A = B$

- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \setminus B = A$ ddacă $B \setminus A = B$

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$

- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$

- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$

- $(A \subseteq C \text{ și } B \subseteq C)$ ddacă $A \cup B \subseteq C$

- $(A \subseteq B \text{ și } A \subseteq C)$ ddacă $A \subseteq B \cap C$

- $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C \subseteq B \setminus C)$

- $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$

- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$

5

6

- $A \setminus B \subseteq A$
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Considerăm o mulțime T , iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ (*complementara lui X față de T*). Au loc:

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\emptyset} = T$
- $\overline{T} = \emptyset$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

- **operația de trecere la complementară este autoduală:** $\overline{\overline{A}} = A$

- **legile lui De Morgan:**
$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$$

- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (ușor de demonstrat folosind proprietățile de mai sus)

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; mai mult:

- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$

- $A \cup \overline{A} = T$; mai mult:

- $A \cup B = T$ ddacă $A \supseteq \overline{B}$ ddacă $B \supseteq \overline{A}$

- **A și B sunt părți complementare ale lui T ddacă fiecare este complementara celeilalte față de**

$$T: \begin{cases} A \cup B = T \\ A \cap B = \emptyset \end{cases} \quad \text{ddacă } A = \overline{B} \text{ ddacă } B = \overline{A}$$

4 Alte operații cu mulțimi

Produsul direct a două mulțimi:

Notăția 4.1 (a se vedea definiția axiomatică a unei perechi ordonate în CURSUL I). Pentru orice elemente a și b , notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b .

Definiția 4.1 (egalitatea de perechi semnifică egalitatea pe componente). Pentru orice elemente a_1, a_2, x_1, x_2 :

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = x_1 \\ \text{și} \\ a_2 = x_2 \end{cases}$$

Definiția 4.2. Pentru orice mulțimi A și B , se definește **produsul cartezian** dintre A și B (numit și **produsul direct** dintre A și B) ca fiind mulțimea de perechi ordonate $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

7

Remarca 5.3 (nu există nicio funcție de la o mulțime nevidă la \emptyset). Fie A o mulțime a. i. $A \neq \emptyset$. Atunci $\emptyset^A = \emptyset$.

Definiția 5.3. Pentru orice mulțimi A și B , orice funcție $f: A \rightarrow B$ și orice submulțimi $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$, se definesc:

- **imaginea lui X prin f sau imaginea directă a lui X prin f** , notată $f(X)$, este submulțimea lui B :

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$

- $f(A)$ se mai notează cu $Im(f)$ și se numește **imaginea lui f** :

$$Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

- **preimaginea lui Y prin f sau imaginea inversă a lui Y prin f** , notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărți, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f , care există numai atunci când f este inversabilă, deci numai atunci când f este bijectivă – a se vedea în cele ce urmează –, pe când preimaginea unei submulțimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcție), este submulțimea lui A :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Definiția 5.4. Fie A și B mulțimi și $f: A \rightarrow B$ o funcție. f se zice:

- **injectivă** ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
 - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
 - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- **surjectivă** ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - pentru orice $b \in B$, există (cel puțin un) $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall b \in B) (\exists a \in A) (f(a) = b)$)
 - $f(A) = B$
- **bijectivă** ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - f este simultan injectivă și surjectivă
 - pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall b \in B) (\exists! a \in A) (f(a) = b)$)

Funcțiile injective, surjective, respectiv bijective se mai numesc **injecții**, **surjecții**, respectiv **bijecții**.

Când notăm $f: A \rightarrow B$, subînțelegem că A și B sunt mulțimi.

Remarca 5.4. Pentru orice funcție $f: A \rightarrow B$:

- $f^{-1}(B) = A$;
- $f(\emptyset) = \emptyset$ și $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$;
- dacă $V \subseteq W \subseteq B$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$;
- pentru orice $M \subseteq A$, $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$, cu egalitate pentru f injectivă;
- pentru orice $N \subseteq B$, $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$, cu egalitate pentru f surjectivă;
- în schimb, pentru orice $N \subseteq f(A) = Im(f)$, $f(f^{-1}(N)) = N$.

Definiția 5.5 (funcția identitate a unei mulțimi). Pentru orice mulțime A , notăm cu id_A **funcția identică a lui A** (numită și **funcția identitate a lui A** sau **identitatea lui A**): $id_A: A \rightarrow A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.

Remarca 4.1 (produsul cartezian cu \emptyset este \emptyset ; produsul cartezian este distributiv față de reuniunea, intersecția, diferența și diferența simetrică între mulțimi (și la stânga, și la dreapta). Pentru orice mulțimi A, B și C , au loc egalitățile:

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ și $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ și $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ și $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
- $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ și $(B \Delta C) \times A = (B \times A) \Delta (C \times A)$

Reuniunea disjunctă a două mulțimi:

Definiția 4.3. Fie A și B două mulțimi. Se definește **reuniunea disjunctă** a mulțimilor A și B ca fiind mulțimea notată $A \coprod B$ și definită prin:

$$A \coprod B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Observația 4.1. Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulțimile care se reuneșc sunt "făcute disjuncte", prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a unui indice corespunzător mulțimii respective (un element diferit de cel atașat elementelor celeilalte mulțimi) (vom vorbi despre **indici** într-o discuție despre **familii arbitrare de mulțimi**).

5 Mulțimi și funcții

Definiția 5.1. Fie A și B mulțimi oarecare. Se numește **funcție** de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. i., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.

Formal: $(\forall a \in A) (\exists! b \in B) ((a, b) \in G)$.

Faptul că f este o funcție de la A la B se notează cu $f: A \rightarrow B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Mulțimea A se numește **domeniul** funcției f , B se numește **codomeniul** sau **domeniul valorilor** lui f , iar G se numește **graficul** lui f .

Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ și se numește **valoarea funcției f în punctul a** .

Remarca 5.1 $((a, b) \in G \Leftrightarrow f(a) = b)$. Dacă $f = (A, G, B)$ este o funcție ($f: A \rightarrow B$), atunci graficul G al lui f este mulțimea de perechi: $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

Definiția 5.2. Fie $f = (A, F, B)$ și $g = (C, G, D)$ două funcții ($f: A \rightarrow B$, iar $g: C \rightarrow D$).

- Egalitatea $f = g$ semnifică egalitatea de triplete $(A, F, B) = (C, G, D)$, i. e. spunem că $f = g$ ddacă:

$$\begin{aligned} A &= C && \text{(are loc egalitatea domeniilor),} \\ B &= D && \text{(are loc egalitatea codomeniilor) și} \\ F &= G && \text{(are loc egalitatea graficelor celor două funcții,} \\ &&& \text{ceea ce, conform scrierii acestor grafice} \\ &&& \text{din remarka anterioară, se transcrie în egalitate} \\ &&& \text{punctuală, adică egalitate în fiecare punct:} \\ &&& \text{pentru orice } a \in A \subseteq C, f(a) = g(a)). \end{aligned}$$

- Dacă X este o mulțime a. i. $X \subseteq A$ și $X \subseteq C$, atunci spunem că f și g *coincid pe X* ddacă f și g au aceleași valori în elementele lui X , adică: oricare ar fi $x \in X$, $f(x) = g(x) \in B \cap D$.

Notăția 5.1 (**putere de mulțimi**). Pentru orice mulțimi A și B , se notează cu B^A mulțimea funcțiilor de la A la B :

$$B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$$

Remarca 5.2 (există o unică funcție de la \emptyset la o mulțime arbitrară). Fie B o mulțime oarecare (**poate fi vidă și poate fi nevidă**). Atunci $B^\emptyset = \{(\emptyset, \emptyset, B)\}$.

8

Definiția 5.6 (**compunerea de funcții**). Dacă A, B, C sunt mulțimi, iar $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ sunt funcții, atunci **compunerea funcției g cu funcția f** este funcția notată cu $g \circ f$ și definită astfel: $g \circ f: A \rightarrow C$, pentru orice $a \in A$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$.

Definiția 5.7 (**inversa unei funcții**). Fie A și B mulțimi, iar $f: A \rightarrow B$. f se zice **inversabilă** ddacă există o funcție $g: B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Remarca 5.5 (dacă există, inversa unei funcții este unică). Fie A și B mulțimi, iar $f: A \rightarrow B$ o funcție inversabilă. Atunci există o unică funcție $g: B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Definiția 5.8. Fie A și B mulțimi, iar $f: A \rightarrow B$ o funcție inversabilă. Atunci unica funcție $g: B \rightarrow A$ cu proprietățile $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$ se notează cu f^{-1} ($f^{-1} = g: B \rightarrow A$) și se numește **inversa** lui f .

Remarca 5.6. Fie A și B mulțimi, iar $f: A \rightarrow B$. Atunci: f este inversabilă ddacă este bijectivă.

Exercițiul 5.1 (caracterizarea surjectivității prin existența unei inverse la dreapta, și a injectivității prin existența unei inverse la stânga – temă). Fie A și B mulțimi nevide, iar $f: A \rightarrow B$. Atunci:

- f este surjectivă ddacă $(\exists g: B \rightarrow A) (f \circ g = id_B)$; în plus, conform (iii) de mai jos, în caz afirmativ, g este injectivă;
- f este bijectivă ddacă $(\exists! g: B \rightarrow A) (f \circ g = id_B)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la dreapta g a lui f este $g = f^{-1}$, care este simultan inversă la dreapta și inversă la stânga pentru f ;
- f este injectivă ddacă $(\exists h: B \rightarrow A) (h \circ f = id_A)$; în plus, conform (i) de mai sus, în caz afirmativ, h este surjectivă;
- f este bijectivă ddacă $(\exists! h: B \rightarrow A) (h \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la stânga h a lui f este $h = f^{-1}$, care este simultan inversă la stânga și inversă la dreapta pentru f ;
- după cum știm, f este bijectivă ddacă este inversabilă, i. e. f este bijectivă ddacă $(\exists j: B \rightarrow A) (f \circ j = id_B \text{ și } j \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, j este unică, se notează cu f^{-1} și se numește **inversa lui f** ; dar, conform (i) și (iii), avem și următoarea caracterizare a bijectivității: f este bijectivă ddacă $(\exists g, h: B \rightarrow A) (f \circ g = id_B \text{ și } h \circ f = id_A)$; în plus, conform (ii) și (iv), în caz afirmativ, g și h sunt unice și $g = h = f^{-1}$.

Exercițiul 5.2 (funcțiile imagine directă și imagine inversă – temă). Fie A și B mulțimi nevide, iar $f: A \rightarrow B$. Considerăm funcțiile:

$$\begin{cases} f_*: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B), & (\forall M \subseteq A) (f_*(M) := f(M)); \\ f^*: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), & (\forall N \subseteq B) (f^*(M) := f^{-1}(M)). \end{cases}$$

Atunci au loc următoarele echivalențe:

- f este injectivă ddacă f_* este injectivă ddacă f^* este surjectivă ddacă $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$ (i. e. $(\forall M \subseteq A) (f^{-1}(f(M)) = M)$) ddacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$;
- f este surjectivă ddacă f_* este surjectivă ddacă f^* este injectivă ddacă $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$ (i. e. $(\forall N \subseteq B) (f(f^{-1}(N)) = N)$) ddacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$;
- din (i) și (ii), obținem: f este bijectivă ddacă f_* este bijectivă ddacă f^* este bijectivă ddacă f^* și f_* sunt inverse una altele ddacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) = B \setminus f(M))$.

6 Teoria cardinalelor

Definiția 6.1. Două mulțimi A și B se zic **echipotente** sau **cardinal echivalente** ddacă există o funcție bijectivă de la A la B , fapt notat prin: $A \cong B$.

Definiția 6.2. Pentru orice mulțime A , se numește **cardinalul** lui A sau **numărul cardinal al lui A** clasa tuturor mulțimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$.

Să observăm că:

- pentru orice mulțime A , $A \cong A$ (pentru că $id_A: A \rightarrow A$ este o bijecție), deci $A \in |A|$

- pentru orice mulțimi A și B , dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ și $|A| = |B|$, i. e. orice mulțime C satisface $A \cong C$ ddacă satisface $B \cong C$; așadar avem chiar echivalențele: $A \cong B$ ddacă $B \cong A$ ddacă $|A| = |B|$
- pentru orice mulțimi A și B , dacă $A \not\cong B$, atunci nu există nicio mulțime C cu proprietățile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) și $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$); așadar avem chiar echivalențele: $A \not\cong B$ ddacă $|A| \neq |B|$ ddacă $|A| \cap |B| = \emptyset$

Definiția 6.3 (suma, produsul și puterea de numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B , avem, prin definiție:

- $|A| + |B| := |A \coprod B|$
- $|A| \cdot |B| := |A \times B|$
- $|B|^{|A|} := |B^A|$

Propoziția 6.1 (independența de reprezentanți a operațiilor cu numere cardinale). Operațiile cu numere cardinale, definite ca mai sus, nu depind de reprezentanții claselor de cardinal echivalentă, adică: pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$), au loc:

- $|A \coprod B| = |A' \coprod B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B|^{|A|} = |(B')^{(A')}|$

Definiția 6.4 (inegalități între numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B , notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecție $j : A \rightarrow B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ și $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecție $j : A \rightarrow B$, dar nu există nicio bijecție $f : A \rightarrow B$

Remarca 6.1. Definiția anterioară este independentă de reprezentanții claselor de cardinal echivalentă, i. e., pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$):

- există o injecție de la A la B ddacă există o injecție de la A' la B' ;
- $A \cong B$ ddacă $A' \cong B'$, așadar: $A \not\cong B$ ddacă $A' \not\cong B'$.

Remarca 6.2. Dacă A și B sunt mulțimi și $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$, întrucât funcția incluziune: $i : A \rightarrow B$, $i(a) := a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă.

Remarca 6.3 (definiții echivalente pentru inegalități între numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B :

- $|A| \leq |B|$ ddacă există o surjecție $t : B \rightarrow A$ ddacă [există o mulțime C , a. i. $|B| = |A| + |C|$]
- $|A| < |B|$ ddacă [există o surjecție $t : B \rightarrow A$, dar nu există nicio bijecție $g : B \rightarrow A$] ddacă [există o mulțime nevidă C , a. i. $|B| = |A| + |C|$]

Remarca 6.4. Inegalitatea \leq este corect definită ca mai sus, în sensul că, pentru orice mulțimi A și B , $|A| = |B|$ ddacă $|A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|$.

Notăția 6.1. Desigur, folosim și notațiile \geq și $>$, cu semnificații: $|B| \geq |A| \stackrel{\text{def}}{=} |A| \leq |B|$, respectiv $|B| > |A| \stackrel{\text{def}}{=} |A| < |B|$; pentru orice mulțimi A și B .

Teorema 6.1 (Cantor). Pentru orice mulțime X , $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

O construcție pentru mulțimea numerelor naturale:

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), printr-o construcție echivalentă cu cea menționată în primul curs:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

11

- Conform celor de mai sus, $\aleph_0 < \mathcal{C}$.

Vom vedea că $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ pentru orice mulțime M .

Remarca 6.10 ($\mathcal{C} = 2^{\aleph_0}$). $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Remarca 6.11. Oricare ar fi mulțimile A și B :

- după cum am observat mai sus, $A \subseteq B$ implică $|A| \leq |B|$;
- dacă B este finită și $A \subseteq B$, atunci $|A| < |B|$.

În plus, după cum arată definiția lui Cantor a mulțimilor infinite:

- dacă $|A| \leq |B|$ și A este infinită, atunci B este infinită;
- dacă $|A| \leq |B|$ și B este finită, atunci A este finită.

Observația 6.1. Conform celor de mai sus, faptul că o mulțime A este finită se exprimă, în simboluri, prin: $|A| < \aleph_0$. Pentru comoditate, vom folosi și notația $|A| < \infty$ pentru faptul că o mulțime A este finită.

7 Familii arbitrare de mulțimi

Definiția 7.1 (familie de elemente ale lui A indexată de I : $(x_i)_{i \in I} \subseteq A$). Fie I și A mulțimi arbitrare.

O familie de elemente ale lui A indexată de I este o funcție $f : I \rightarrow A$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in A$, astfel că familia f se mai notează sub forma $(x_i)_{i \in I} \subseteq A$. Elementele mulținii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i \in I}$.

- Există o singură familie vidă de elemente ale unei mulțimi arbitrare A , pentru că există o singură funcție de la \emptyset la A (a se vedea și mai jos).
- Familia vidă nu este egală cu nicio familie nevidă, ci este egală doar cu ea însăși.

Fie I și A două mulțimi nevide, iar $(a_i)_{i \in I}$ și $(b_i)_{i \in I}$ două familii de elemente din A indexate de I :

- $I \neq \emptyset, A \neq \emptyset$
- $(a_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $a_i \in A$
- $(b_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $b_i \in A$

Cele două familii sunt egale ddacă sunt egale pe componente:

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \quad \text{ddacă,} \quad \text{pentru orice } i \in I, \quad a_i = b_i.$$

Familii arbitrare de mulțimi:

Definiția 7.2. Fie T și I două mulțimi arbitrare. Se numește *familie de submulțimi ale lui T indexată de I* o funcție $f : I \rightarrow \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i \in I}$. Scriem $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulținii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i \in I}$.

Pentru a generaliza definiția anterioară la familii de mulțimi oarecare avem nevoie de acea definiție mai cuprinzătoare a noțiunii de funcție (a se vedea sistemul axiomatic pentru teoria mulțimilor din Cursul I), care permite unei funcții f definite pe I să aibă drept codomeniu o clasă (nu neapărat o mulțime), amme classa tuturor mulțimilor în acest caz.

Operații cu familii arbitrare de mulțimi:

Definiția 7.3. Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I .

Se definesc următoarele operații:

Mereu se consideră mulțimea având drept elemente toate mulțimile de la pașii anteriori: succesorul unui n este $n+1 := \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Iar mulțimea tuturor elementelor construite astfel, denumite *numere naturale*, se notează cu \mathbb{N} .

În definițiile de mai sus pentru **numerele naturale** trebuie rezolvată, într-un fel sau altul, problema următoare: cu definiția de mai sus, orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este o clasă proprie, care nu poate aparține unei mulțimi sau clase. Putem înlocui aceste clase cu etichete ale lor, de exemplu chiar cu, reprezentanții lor de mai sus: $\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$

Definiția de mai sus pentru mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale arată corectitudinea **principiului inducției matematice**: dacă o submulțime $S \subseteq \mathbb{N}$ satisface:

- $0 \in S$,
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $[n \in S \Rightarrow n+1 \in S]$,

atunci $S = \mathbb{N}$.

Având mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale, se construiesc \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} și se definesc operațiile și relațiile de ordine pe aceste mulțimi în modul cunoscut din liceu.

Mulțimea numerelor naturale, \mathbb{N} , este o mulțime infinită, mai precis o mulțime numărabilă.

Notăția 6.2 ($\aleph_0 := |\mathbb{N}|$). Cardinalul mulținii numerelor naturale se notează cu \aleph_0 , pronunțat "alef 0".

Definiția 6.5. O mulțime X se zice *numărabilă* ddacă $|X| = \aleph_0$, i. e. ddacă $X \cong \mathbb{N}$.

Remarca 6.5. Orice $n \in \mathbb{N}$ satisface $n < \aleph_0$.

Definiția 6.6. O mulțime X se zice *infinită*:

- (i) *în sens Dedekind*, ddacă există $S \subseteq X$ a. i. $S \cong X$
- (ii) *în sens Cantor*, ddacă există $S \subseteq X$, a. i. S este numărabilă
- (iii) *în sens obișnuit*, ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \not\cong \{1, 2, \dots, n\}$

Teorema 6.2. Cele trei definiții de mai sus ale mulțimilor infinite sunt echivalente.

Desigur, o mulțime finită este, prin definiție, o mulțime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiția de mai sus a mulțimilor infinite *în sens obișnuit*:

Definiția 6.7. O mulțime finită este o mulțime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \dots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Remarca 6.6. Conform definiției anterioare, **cardinalele finite**, i. e. cardinalele mulțimilor finite, sunt exact numerele naturale.

Remarca 6.7. Definiția mulțimilor infinite în sens Cantor arată că \aleph_0 (i. e. cardinalul mulțimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde **cardinal infinit** (sau **cardinal transfinit**) înseamnă cardinal al unei mulțimi infinite.

Definiția 6.8. O mulțime cel mult numărabilă este o mulțime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu \aleph_0).

Notăția 6.3. Amintim următoarele notații consacrate pentru un segment al mulțimii \mathbb{Z} a numerelor întregi: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, $\overline{a, b} := [a, b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \begin{cases} \{a, a+1, \dots, b\}, & \text{dacă } a \leq b; \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$

Remarca 6.8. Mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi este numărabilă. Mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale este numărabilă.

Definiția 6.9. O mulțime *nenumerabilă* este, prin definiție, o mulțime infinită care nu este numărabilă, i. e. o mulțime având cardinalul strict mai mare decât \aleph_0 .

Remarca 6.9. Mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale este nenumerabilă.

Definiția 6.10 ($\mathcal{C} := |\mathbb{R}|$). Cardinalul lui \mathbb{R} se notează cu \mathcal{C} și se numește **puterea continuumului**.

12

- **reuniunea familiei** $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcup_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I) (x \in A_i)\} = \{x \mid (\exists i) (i \in I \text{ și } x \in A_i)\}$$

- **intersecția familiei** $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcap_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I) (x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall i) (i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$$

- **produsul cartezian al familiei** $(A_i)_{i \in I}$ (numit și **produsul direct al familiei** $(A_i)_{i \in I}$) este mulțimea notată $\prod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \{(a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i)\} = \\ &= \{(a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall i) (i \in I \Rightarrow a_i \in A_i)\}, \end{aligned}$$

sau, altfel scris (cu definiția unei familii de elemente exemplificate mai sus pe familii de numere reale):

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (f(i) \in A_i)\} = \\ &= \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i) (i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i)\}. \end{aligned}$$

Notăția 7.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile A_1, A_2, \dots, A_n . Produsul direct $\prod_{i \in \overline{1, n}} A_i$ se mai notează cu $\prod_{i=1}^n A_i$, iar un element $(a_i)_{i \in \overline{1, n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu (a_1, a_2, \dots, a_n) . În cazul particular în care $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, $\prod_{i \in \overline{1, n}} A_i \stackrel{\text{notație}}{=} \prod_{i=1}^n A \stackrel{\text{notație}}{=} A^n$.

Remarca 7.1 (puterile unei mulțimi: caz particular al produsului direct). În definiția anterioară, dacă $I \neq \emptyset$ și, pentru orice $i \in I$, $A_i = A$, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A = A$, așadar $\prod_{i \in I} A = \{f \mid f : I \rightarrow A, (\forall i \in I) (f(i) \in A)\} = \{f \mid f : I \rightarrow A\} = A^I$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $|I| = n$, avem: $A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid (\forall i \in \overline{1, n}) (a_i \in A)\} = \{f \mid f : \overline{1, n} \rightarrow A\} = A^{\overline{1, n}} = A^n$.

Remarca 7.2. Pentru orice mulțimi A , I și J , dacă $I \cong J$, atunci $A^I \cong A^J$. Acest fapt rezultă direct din independența de reprezentanți a operației de exponențiere asupra numerelor cardinale.

Exercițiul 7.1 (temă – distributivitatea produsului cartezian față de reuniuni și intersecții arbitrare). Fie A o mulțime, I o mulțime nevidă (de fapt poate fi și vidă – vom vedea), iar $(B_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi. Să se demonstreze că:

- $A \times \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i)$ și $\left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \times A = \bigcup_{i \in I} (B_i \times A)$
- $A \times \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \times B_i)$ și $\left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) \times A = \bigcap_{i \in I} (B_i \times A)$

Exercițiul 7.2 (temă – distributivitatea generalizată a produsului cartezian față de intersecție). Fie I și J o mulțimi nevide (de fapt pot fi și vide – vom vedea), iar $(A_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ o familie de mulțimi (indexată de $I \times J$; poate fi scrisă și sub forma: $(A_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$). Să se demonstreze că:

$$\bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} A_{i,j}$$

13

14

Amintesc că asociativitatea unei operații binare, cum sunt reuniunea și intersecția a două mulțimi, permite scrierea unui șir de astfel de operații fără paranteze: pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3 :

- $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$ $\stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3)$ $\stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Propoziția 7.1 (asociativitatea produsului direct ca operație binară). Fie A_1, A_2, A_3 mulțimi arbitrare.

Atunci: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^3 A_i$, întrucât următoarele funcții sunt bijecții: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\varphi}$

$(A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^3 A_i$, pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ și orice $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ și $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$.

În plus, fiecare dintre bijecțiile φ și ψ se identifică cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenție egalitățile: $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ și orice $a_3 \in A_3$.

Prim urmare, putem scrie: $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^3 A_i$.

Ca și la funcții aplicate unor perechi de elemente, folosim **licența de scriere (convenția)**: pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulțimi A_1, A_2, \dots, A_n, B , orice funcție $f : \prod_{i=1}^n A_i \rightarrow B$ și orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \dots, a_n) := f((a_1, a_2, \dots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere).

Când va fi convenibil să folosim următoarea **convenție**, și va fi clar la elementele căror mulțimi ne vom referi, prin notații de forma:

- $(a_i)_{i \in I}$ din $\prod_{i \in I} A_i$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i \in I}$ din A^I vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînțelege: $a \in A$ și $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînțelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt mulțimi, I este o mulțime nevidă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie (nevidă) de mulțimi.

Definiția 7.4. Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I .

Se definește **reuniunea disjunctă** a familiei $(A_i)_{i \in I}$ ca fiind mulțimea notată $\prod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\prod_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\})$$

Observația 7.1. Reuniunea disjunctă este “un fel de reuniune” în care mulțimile care se reuneșc sunt “făcute disjuncte”, prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulținii respective.

Notația 7.2. Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașați, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\prod_{i \in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\prod_{i \in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

15

Definiția 7.6 (familii de funcții – cazul general – material facultativ). Fie I o mulțime arbitrară, iar $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ familii de mulțimi indexate de I .

O familie de funcții $(f_i)_{i \in I}$ indexată de I cu $f_i : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$ este un element al produsului direct $\prod_{i \in I} B_i^{A_i}$, adică o familie de elemente ale mulțimii $\prod_{i \in I} B_i^{A_i}$ indexată de I cu elementul de indice i aparținând lui $B_i^{A_i}$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. o funcție $h : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} B_i^{A_i}$, cu $f_i = h(i) : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Definiția 7.7 (operațiile cu familii arbitrare de funcții generalizează compunerea de funcții – material facultativ). Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ sunt familii de mulțimi, C este o mulțime, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții și g este o funcție a. i., pentru fiecare $i \in I$, $f_i : A_i \rightarrow B_i$, iar $g : \prod_{i \in I} B_i \rightarrow C$, atunci putem defini funcția $g((f_i)_{i \in I}) : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow C$ prin: oricare ar fi $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$, $g((f_i)_{i \in I})(x_i)_{i \in I} := g((f_i(x_i))_{i \in I})$: operația g (de aritate, i. e. număr de argumente, $|I|$) aplicată familiei de funcții $(f_i)_{i \in I}$, definită **punctual**.

Cazul finit: $T = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$: $g(f_1, \dots, f_n) : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow C$, pentru orice $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$, $g(f_1, \dots, f_n)(x_1, \dots, x_n) := g(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$.

La fel se pot generaliza relațiile binare între funcții la relații de aritate arbitrare, chiar infinită, adică, pentru familia $(f_i)_{i \in I}$ de mai sus, submulțimi ale lui $\prod_{i \in I} B_i$: relații de aritate (i. e. număr de argumente) $|I|$ – a se vedea în Cursul III definiția unei relații n -are:

Definiția 7.8 (material facultativ). Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ sunt familii de mulțimi, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții cu $f_i : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$, iar $R \subseteq \prod_{i \in I} B_i$, atunci: familia $(f_i)_{i \in I}$ de funcții se află în relația R , notat $(f_i)_{i \in I} \in R$, ddacă $(f_i(x_i))_{i \in I} \in R$ pentru fiecare $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$.

Cazul finit: $I = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că $R \subseteq B_1 \times \dots \times B_n$ este o relație n -ară: $(f_1, \dots, f_n) \in R$ ddacă, pentru orice $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$, $(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in R$.

Exercițiul 7.3 (imagini și preimagini de reuniuni și intersecții arbitrare de mulțimi printr-o funcție). Fie A, B, I și J mulțimi nevide (de fapt, pot fi și vide – vom vedea), $f : A \rightarrow B$, iar $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ și $(B_j)_{j \in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Să se demonstreze că:

- $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$;
- $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$;
- $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$;
- $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$;
- f este injectivă ddacă, pentru orice mulțime nevidă K și orice $(M_k)_{k \in K} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $f(\bigcap_{k \in K} M_k) = \bigcap_{k \in K} f(M_k)$.
- Să se dea un exemplu pentru incluziune strictă la punctul (iv).

8 Funcții caracteristice

Definiția 8.1. Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim funcția caracteristică a lui A (raportat la T): $\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$

În cazul particular în care mulțimea totală T este finită și nevidă: $T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcția caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \dots, \chi_A(x_n))$: acest vector de valori din mulțimea $\{0, 1\}$ se numește **vector caracteristic** al lui A . A se observa că suma valorilor din acest vector este egală cu, cardinalul lui A : $\chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) + \dots + \chi_A(x_n) = |A|$.

Notația 7.3. La fel ca la produsul direct, dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i \in \overline{1, n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\prod_{i \in \overline{1, n}} A_i \stackrel{\text{notație}}{=} \prod_{i=1}^n A_i \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Remarca 7.3. Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3 , se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și câte o identificare de indici, i. e. câte o bijecție între mulțimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \cong (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \cong \prod_{i=1}^3 A_i$, adică, prin

identificarea acestor bijecții cu identitatea, putem scrie: $A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 = \prod_{i=1}^3 A_i$.

Aritatea unei operații a unei structuri algebrice (cu o singură mulțime suport, o singură mulțime de elemente) este **numărul argumentelor (operanzilor, variabilelor) acelei operații**. Dacă structura algebrică are mulțimea suport A , iar f este o operație n -ară pe A , cu $n \in \mathbb{N}$, atunci $f : \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n \rightarrow A$ (f este o funcție cu n argumente din A , cu valori tot în A).

Remarca 7.4 (reuniunea familiei vide este vidă). Dacă recitim definiția reuniunii unei familii arbitrare, observăm că reuniunea familiei vide este mulțimea elementelor pentru care există un $i \in \emptyset$ cu o anumită proprietate, condiție care este întotdeauna falsă, deci reuniunea familiei vide este \emptyset .

Remarca 7.5 (produsul direct al familiilor vide este un singleton). Cele de mai sus arată că produsul direct al familiilor vide este mulțimea cu unicul element dat de unica funcție de la \emptyset la \emptyset , anume $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, adică produsul direct al familiilor vide este singletonul $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Operațiile zeroare sunt constantele structurilor algebrice: de exemplu, elementul neutru al unui grup G este o funcție φ de la un singleton (anume $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$) la G : $\varphi : \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \rightarrow G$, iar o funcție definită pe un singleton are o singură valoare $(\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in G)$, deci poate fi identificată cu această unică valoare a ei, care este un element distinct, o constantă din G : $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = e \in G$, și identificăm $\varphi = e$.

Remarca 7.6 (reuniunea disjunctă a familiei vide este vidă). Definiția reuniunii disjuncte a unei familii arbitrare de mulțimi arată că reuniunea disjunctă a familiei vide de mulțimi este egală cu, reuniunea familiei vide de mulțimi, care este \emptyset .

Exemplul 7.1. Dacă A și B sunt mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ și $g : A \rightarrow B$, iar pe mulțimea B avem, de exemplu, o operație binară + și o relație binară (vom vedea) \leq , atunci putem defini, **punctual**, operația +, respectiv relația \leq , între funcțiile f și g , astfel:

- $f + g : A \rightarrow B$, pentru orice $x \in A$, $(f + g)(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} f(x) + g(x)$
- prin definiție, $f \leq g$ ddacă, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.

Definiția 7.5 (familii de funcții între două mulțimi fixate A și B). Fie I, A și B mulțimi arbitrare. O familie de funcții de la A la B indexată de I este o familie de elemente ale mulțimii B^A indexată de I , i. e. o funcție $h : I \rightarrow B^A$ (pentru orice $i \in I$, $f_i \stackrel{\text{notație}}{=} h(i) : A \rightarrow B$).

Se pot defini și operații cu familii arbitrare de funcții, tot **punctual**:

Exemplul 7.2. Dacă I, A și B sunt mulțimi nevide, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții de la A la B (adică, pentru orice $i \in I$, $f_i : A \rightarrow B$), B este o mulțime ordonată (vom vedea) și, pentru orice $x \in A$, submulțimea $\{f_i(x) \mid i \in I\} \subseteq B$ are un cel mai mare element (un **maxim**), atunci putem defini funcția:

$$\max\{f_i \mid i \in I\} : A \rightarrow B,$$

astfel: pentru orice $x \in A$,

$$(\max\{f_i \mid i \in I\})(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} \max\{f_i(x) \mid i \in I\}.$$

16

Propoziția 8.1 (principiul includerii și al excluderii). Pentru orice n natural nenul și orice mulțimi finite M_1, M_2, \dots, M_n , are loc egalitatea:

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^n M_i| &= \sum_{i=1}^n |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n| = \\ &\quad \sum_{n=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} (-1)^{n-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_n}|. \end{aligned}$$

Și dual: $|\bigcap_{i=1}^n M_i| = \sum_{i=1}^n |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \dots +$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup M_2 \cap \dots \cap M_n| = \sum_{n=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} (-1)^{n-1} \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_n}|.$$

Propoziția 8.2 (proprietățile funcțiilor caracteristice). Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcția caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcțiile constante: $\mathbf{0} : T \rightarrow \{0, 1\}$ și $\mathbf{1} : T \rightarrow \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$, $\mathbf{0}(x) = 0$ și $\mathbf{1}(x) = 1$.

Atunci au loc proprietățile:

- $\chi_{\emptyset} = \mathbf{0}$ și $\chi_T = \mathbf{1}$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, are loc echivalența: $A \subseteq B$ ddacă $\chi_A \leq \chi_B$ (punctual, i. e.: pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$)
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, are loc echivalența: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \max\{\chi_A, \chi_B\}$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T \setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$
- $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Remarca 8.1. Fie T și I două mulțimi nevide și $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părți ale lui T indexată de I . Atunci au loc:

- $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Remarca 8.2 (legile de distributivitate generalizată pentru \cup și \cap). Pentru orice mulțime nevidă I , orice mulțime A și orice familie de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$, au loc egalitățile:

- distributivitatea generalizată a \cup față de \cap : $A \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$
- distributivitatea generalizată a \cap față de \cup : $A \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$

Propoziția 8.3. Pentru orice mulțime nevidă T , $\mathcal{P}(T) \cong \{0, 1\}^T$.

Corolarul 8.1. Pentru orice mulțime T , $|\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.

A se vedea precizările despre examen și temele obligatorii de la sfârșitul Cursului II.

1 Relații binare

Relații n -are, relații binare:

Definiția 1.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și A_1, A_2, \dots, A_n mulțimi. Se numește *relație n -ară* între mulțimile A_1, A_2, \dots, A_n o submulțime a produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Observația 1.1. Pentru $n = 1$ în definiția anterioară se obține noțiunea de *relație unară* pe o mulțime: prin definiție, o *relație unară* pe o mulțime A este o submulțime a lui A .
Pentru $n = 2$ în definiția anterioară se obține noțiunea de *relație binară*.

Definiția 1.2. Fie A și B două mulțimi. Se numește *relație binară* între A și B o submulțime R a produsului direct $A \times B$.

Pentru fiecare $a \in A$ și fiecare $b \in B$, faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează cu $a R b$ și se citește: *a este în relație R cu b* .

Exemplul 1.1. Pentru orice mulțimi A și B , produsul direct $A \times B$ este o relație binară între A și B (evident, cea mai mare în sensul incluziunii dintre toate relațiile binare între A și B).

Tipuri de relații binare:

Definiția 1.3 (tipuri de relații binare). Fie A și B mulțimi, iar $R \subseteq A \times B$ (i. e. R o relație binară între A și B). R se zice:

- *funcțională* ddacă: pentru orice $a \in A$ și orice $b_1, b_2 \in B$, dacă $a R b_1$ și $a R b_2$, atunci $b_1 = b_2$; o relație funcțională între A și B se mai numește *funcție parțială* de la A la B ;
- *totală* ddacă: pentru orice $a \in A$, există $b \in B$, a. i. $a R b$; o relație funcțională totală între A și B se mai numește *funcție* de la A la B ;
- *injectivă* ddacă, pentru orice $a_1, a_2 \in A$ și orice $b \in B$, dacă $a_1 R b$ și $a_2 R b$, atunci $a_1 = a_2$;
- *surjectivă* ddacă, pentru orice $b \in B$, există $a \in A$, astfel încât $a R b$.

Remarca 1.1. Definiția de mai sus a unei funcții este exact definiția din cursul al doilea, în care identificăm o funcție cu graficul ei: o funcție $f = (A, G, B)$ se identifică cu $G \subseteq A \times B$.

De asemenea, cu această identificare, noțiunea de funcție injectivă, respectiv surjectivă, respectiv bijectivă, coincide cu aceea de relație funcțională totală injectivă, respectiv surjectivă, respectiv injectivă și surjectivă.

Într-adevăr:

Remarca 1.2. Pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$:

- R este o **relație funcțională (funcție parțială)** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel mult un $b \in B$, a. i. $a R b$;
- R este o **relație totală** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel puțin un $b \in B$, a. i. $a R b$;
- așadar, R este o **funcție** ddacă este o **relație funcțională totală**, i. e.: pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, a. i. $a R b$;
- R este o **relație injectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, a. i. $a R b$;
- R este o **relație surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel puțin un $a \in A$, a. i. $a R b$;
- R este o **relație injectivă și surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există un unic $a \in A$, a. i. $a R b$;
- R este o **relație funcțională totală injectivă/surjectivă/injectivă și surjectivă** ddacă este o **funcție injectivă/surjectivă/bijectivă**, respectiv.

Definiția 1.4. Pentru orice mulțime A ,

$$\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$$

este o relație binară între A și A , numită *diagonala lui A* .

1

Definiția 1.6. Pentru orice mulțimi A, B, C și orice relații binare $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq B \times C$, se definește *compunerea lui S cu R* ca fiind relația binară între A și C notată $S \circ R$ și definită prin: $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, (\exists b \in B) [(a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in S]\} \subseteq A \times C$.

Remarca 1.7 (temă). Diagonala unei mulțimi este element neutru la compunere și la dreapta, și la stânga, i. e., pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$, $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R$.

Remarca 1.8. Compunerea ca relații binare a două funcții coincide cu compunerea lor ca funcții. În particular, rezultatul ei este tot o funcție.

Definiția 1.7. Pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$, se definește *inversa lui R* , notată R^{-1} , ca fiind următoarea relație binară între B și A :

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$$

Altfel scris: prin definiție, $R^{-1} \subseteq B \times A$, a. i., pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$:

$$b R^{-1} a \Leftrightarrow a R b$$

Remarca 1.9. A se observa faptul că, pentru orice relație binară R , se definește inversa ei R^{-1} , spre deosebire de cazul inverselor de funcții, care se definesc numai pentru funcțiile bijective, această restricție provenind atât din constrângerea ca relația binară să fie funcție, cât și din constrângerea ca inversa ei să fie tot funcție (a se vedea o remarcă de mai jos, care arată că definiția funcției este exact definiția bijectivității (i. e. a injectivității și surjectivității) în oglindă).

Remarca 1.10. Este imediat faptul că inversa ca relație a unei funcții bijective este inversa ei ca funcție (a se vedea și remarcă următoare).

Remarca 1.11 (temă). Fie A, B mulțimi și $R \subseteq A \times B$. Atunci:

- R este injectivă ddacă R^{-1} este funcțională;
- R este surjectivă ddacă R^{-1} este totală;
- prin urmare: R este injectivă și surjectivă ddacă R^{-1} este funcție.

Remarca 1.12. A se observa că o relație binară injectivă și surjectivă nu este neapărat o funcție (bijectivă), pentru că nu i se impune condiția de a fi funcțională, și nici cea de a fi totală.

Exercițiul 1.1 (temă). Fie A, B mulțimi și $R \subseteq A \times B$. Dacă R este injectivă, atunci:

- $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$;
- $R^{-1} \circ R = \Delta_A$ ddacă R este totală.

Remarca 1.13 (asociativitatea compunerii de relații binare). Fie A, B, C, D mulțimi, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ și $T \subseteq C \times D$. Atunci:

- $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Remarca 1.14. Fie A, B, C mulțimi, $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq B \times C$. Atunci:

- $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Exercițiul 1.2 (temă). Fie A, B, C și I mulțimi nevide (de fapt, pot fi și vide – vom vedea), $P \subseteq C \times A$, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq A \times B$ și $T \subseteq B \times C$ relații binare, iar $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relații binare de la A la B , i. e., pentru orice $i \in I$, $R_i \subseteq A \times B$.
Să se demonstreze că:

- $R \circ \emptyset = \emptyset = \emptyset \circ R$
- $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$
- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $R \subseteq S$ ddacă $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

Remarca 1.3 ($\Delta_A =$ egalitatea pe A). Pentru orice mulțime A , Δ_A este chiar *relația de egalitate pe A* , adică, pentru orice $a, b \in A$, avem:

$$a \Delta_A b \text{ ddacă } a = b.$$

Remarca 1.4 ($\Delta_A = id_A$). Pentru orice mulțime A , Δ_A este o funcție, chiar o funcție bijectivă, amme **funcția identică a lui A (identitatea lui A)**:

$$\Delta_A = id_A : A \rightarrow A, \text{ pentru orice } a \in A, id_A(a) = a.$$

Operații cu relații binare:

- Relațiile sunt mulțimi, așadar li se pot aplica operațiile obișnuite cu mulțimi: reuniunea, intersecția, diferența etc..
- Astfel, pentru orice mulțimi A, B și orice relații binare R și S între A și B : $R \cup S, R \cap S, R \setminus S, \overline{R} := (A \times B) \setminus R$ (*complementara lui R*) sunt tot relații binare între A și B .

Definiția 1.5. Pentru orice mulțimi A, B, A', B' și orice relații binare $R \subseteq A \times B$ și $R' \subseteq A' \times B'$, se definește *produsul direct al relațiilor R și R'* , notat $R \times R'$, ca fiind următoarea relație binară între $A \times A'$ și $B \times B'$: $R \times R' := \{(a, a'), (b, b') \mid a \in A, a' \in A', b \in B, b' \in B', (a, b) \in R, (a', b') \in R'\} \subseteq (A \times A') \times (B \times B')$.

Generalizare: pentru orice mulțime I , orice familii de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ și orice familie de relații binare $(R_i)_{i \in I}$, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, se definește *produsul direct al familiei $(R_i)_{i \in I}$* , notat $\prod_{i \in I} R_i$, ca fiind

$$\text{următoarea relație binară între } \prod_{i \in I} A_i \text{ și } \prod_{i \in I} B_i: \prod_{i \in I} R_i := \{(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i, b_i \in B_i \text{ și } a_i R_i b_i)\} \subseteq$$

$$\prod_{i \in I} A_i \times \prod_{i \in I} B_i.$$

Observația 1.2. Definiția produsului direct de relații binare este diferită de definiția produsului direct de mulțimi al acelorași relații binare, adică de produsul lor direct ca mulțimi. Mulțimile obținute prin cele două tipuri de produs direct sunt în bijecție, dar nu sunt egale, dacă nu considerăm produsul direct de mulțimi ca fiind comutativ, prin asimilarea bijecției în cauză cu identitatea.

Remarca 1.5 (facultativă). Cu notațiile din definiția anterioară, dacă avem încă o pereche de relații binare $S \subseteq A \times B$ și $S' \subseteq A' \times B'$, atunci, în cazul în care R, R', S și S' sunt nevide:

$$R \times R' = S \times S' \text{ ddacă } [R = S \text{ și } R' = S']$$

În general, dacă avem încă o familie de relații binare $(S_i)_{i \in I}$, cu $S_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, atunci, în cazul în care $I \neq \emptyset$ și, pentru fiecare $i \in I$, $R_i \neq \emptyset$ și $S_i \neq \emptyset$:

$$\prod_{i \in I} R_i = \prod_{i \in I} S_i \Leftrightarrow (\forall i \in I) (R_i = S_i)$$

Într-adevăr, dacă ne referim la cazul general, echivalența de mai sus rezultă, prin dublă implicație, din faptul că:

- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod_{i \in I} R_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in R_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod_{i \in I} S_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in S_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $\prod_{i \in I} R_i = \prod_{i \in I} S_i$ ddacă are loc echivalența: $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod_{i \in I} R_i \Leftrightarrow ((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod_{i \in I} S_i$;
- pentru fiecare $i \in I$, $R_i = S_i$ ddacă are loc echivalența: $(a_i, b_i) \in R_i \Leftrightarrow (a_i, b_i) \in S_i$.

Remarca 1.6 (facultativă). Desigur, și pentru două familii de mulțimi nevide $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ indexate de aceeași mulțime nevidă I , avem:

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} B_i \Leftrightarrow (\forall i \in I) (A_i = B_i),$$

pentru că, având o familie de elemente arbitrare $(x_i)_{i \in I}$, avem: $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I) (x_i \in A_i)$, și la fel pentru $(B_i)_{i \in I}$, de unde rezultă că: $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ au aceleași elemente ddacă, pentru fiecare $i \in I$, A_i și B_i au aceleași elemente.

2

- $R = S$ ddacă $R^{-1} = S^{-1}$
- **inversa comută cu reuniunea și cu intersecția:**

- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

Generalizare:

- $(\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$
- $(\bigcap_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}$

- **compunerea este distributivă față de reuniune, la stânga și la dreapta:**

- $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$
- $(R \cup S) \circ P = (R \circ P) \cup (S \circ P)$

Generalizare:

- $T \circ (\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigcup_{i \in I} (T \circ R_i)$
- $(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ P = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ P)$

- **compunerea nu este distributivă față de intersecție (contraexemplu pentru această distributivitate:** dacă $x \in A$, $y, z \in B$ cu $y \neq z$ și $t \in C$, iar $R := \{(x, y)\}$, $S := \{(x, z)\}$ și $T := \{(y, t), (z, t)\}$, atunci: $T \circ (R \cap S) = T \circ \emptyset = \emptyset \neq \{(x, t)\} = T \circ R = T \circ S = (T \circ R) \cap (T \circ S)$)

- **compunerea (la stânga și la dreapta) păstrează incluziunile nestricte:**

- $R \subseteq S$ implică $T \circ R \subseteq T \circ S$ (dar $R \subseteq S$ nu implică $T \circ R \subseteq T \circ S$)
- $R \subseteq S$ implică $R \circ P \subseteq S \circ P$ (dar $R \subseteq S$ nu implică $R \circ P \subseteq S \circ P$)

prin urmare:

- $T \circ (\bigcap_{i \in I} R_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} (T \circ R_i)$
- $(\bigcap_{i \in I} R_i) \circ P \subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \circ P)$

Să ne amintim definiția puterilor unei mulțimi:

Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi.

Amintesc definiția **produsului cartezian al familiei $(A_i)_{i \in I}$** (numit și **produsul direct al familiei $(A_i)_{i \in I}$**):

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \{(a_i)_{i \in I} \mid (a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i)\} = \\ &= \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (f(i) \in A_i)\}. \end{aligned}$$

Fie A o mulțime arbitrară.

Amintesc că **puterile unei mulțimi** sunt un caz particular al produsului direct, anume cazul $A_i = A$, pentru orice $i \in I$:

$$A^I = \{f \mid f : I \rightarrow A\} = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in A)\} = \prod_{i \in I} A.$$

Notăția următoare, a *puterii* a n -a a unei mulțimi A , A^n , pentru un număr natural nenul n , corespunde cazului particular $I = \overline{1, n}$ și $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$.

Notăția 1.1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice mulțime A , se notează:

$$\begin{aligned} A^n &:= A^{\overline{1,n}} = \{f \mid f: \overline{1,n} \rightarrow A\} = \\ &= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid (\forall i \in \overline{1,n}) (a_i \in A)\} = \prod_{i=1}^n A = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ de } A}. \end{aligned}$$

Caz particular: pentru $n = 2$: $A^2 = A \times A$.

2 Relații binare pe o mulțime

În cele ce urmează, când nu se va menționa altfel, A va fi o mulțime arbitrară.

Definiția 2.1. Se numește *relație binară pe A* o relație binară între A și A , i. e. o submulțime a produsului direct $A^2 = A \times A$.

Exemplul 2.1. A^2 și Δ_A sunt relații binare pe A .

Remarca 2.1. Dacă A este finită și nevidă, iar R este o relație binară pe A , atunci perechea (A, R) este un graf orientat (cu mulțimea vârfurilor A și mulțimea arcelor R), așadar relația binară R poate fi reprezentată grafic chiar prin acest graf orientat.

3 Operații cu relații binare pe o mulțime

Definiția 3.1 (puterile naturale ale unei relații binare pe o mulțime). Pentru orice relație binară $R \subseteq A \times A$ și orice $n \in \mathbb{N}$, se definește *puterea n -a a lui R* , notată $R^n \subseteq A \times A$, recursiv, astfel:

$$\begin{cases} R^0 := \Delta_A; \\ R^{n+1} := R^n \circ R, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarca 3.1. Asociativitatea compunerii de relații binare permite următoarea scriere fără paranteze pentru orice relație binară R pe A și orice număr natural nemul n :

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n \text{ de } R}.$$

Nota 3.1. Pentru o relație binară R și un $n \in \mathbb{N}$, se va deduce din context dacă notația R^n semnifică: $\underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n \text{ de } R}$ (operație care poate fi definită numai dacă R este o relație binară pe o mulțime, nu între două mulțimi diferite) sau produsul direct de relații binare $\underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{n \text{ de } R}$ sau produsul direct de mulțimi $\underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{n \text{ de } R}$.

Remarca 3.2. $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$.

Remarca 3.3. Pentru orice relație binară $R \subseteq A \times A$ și orice $n \in \mathbb{Z}$:

$$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n.$$

Remarca 3.4 (comutarea și adunarea exponenților întregi de același semn la compunerea puterilor unei relații binare pe o mulțime – facultativă). Fie $R \subseteq A^2$ și n, k două numere întregi de același semn, adică $n, k \geq 0$ sau $n, k \leq 0$. Atunci:

$$R^n \circ R^k = R^k \circ R^n = R^{n+k}.$$

4 Tipuri de relații binare pe o mulțime

Definiția 4.1 (tipuri de relații binare pe o mulțime). Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se zice:

- *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa ;

5

- *(relație de) ordine strictă* ddacă e asimetrică și tranzitivă.

Remarca 4.2 (consecințe a remarcilor anterioare).

- Întrecut orice relație de ordine este reflexivă, rezultă că o relație de ordine este totală (în acest al doilea sens) ddacă este completă.

- Întrecut Δ_A este tranzitivă, rezultă că Δ_A este unica relație binară pe A care este simultan relație de echivalență și relație de ordine.
- Dacă R este o preordine, atunci $R = R^2$.

Remarca 4.3. Orice relație de ordine este reflexivă, și orice relație de ordine strictă este ireflexivă.

Nu există relații binare pe o mulțime nevidă care să fie simultan reflexive și ireflexive. Prin urmare, nu există relații binare pe o mulțime nevidă care să fie simultan relații de ordine și relații de ordine strictă.

A se vedea, în Cursul III, secțiunea facultativă despre matrici caracteristice.

5 Despre produsul direct de relații binare pe o mulțime

Lema 5.1. Fie I o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$, $(B_i)_{i \in I}$ și $(C_i)_{i \in I}$ familii de mulțimi, iar $(Q_i)_{i \in I}$, $(R_i)_{i \in I}$ și $(S_i)_{i \in I}$ familii de relații binare, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, $S_i \subseteq A_i \times B_i$ și $Q_i \subseteq B_i \times C_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:

- $\prod_{i \in I} R_i \subseteq \prod_{i \in I} S_i$ ddacă $(\exists i_0 \in I) (R_{i_0} = \emptyset)$ sau $(\forall i \in I) (R_i \subseteq S_i)$;
- $\prod_{i \in I} R_i = \prod_{i \in I} S_i$ ddacă $(\exists i_0, i_1 \in I) (R_{i_0} = \emptyset, S_{i_1} = \emptyset)$ sau $(\forall i \in I) (R_i = S_i)$;
- $(\prod_{i \in I} R_i) \cap (\prod_{i \in I} S_i) = \prod_{i \in I} (R_i \cap S_i)$ (și la fel pentru \cup, \setminus, Δ în loc de \cap);
- $(\prod_{i \in I} Q_i) \circ (\prod_{i \in I} R_i) = \prod_{i \in I} (Q_i \circ R_i)$;
- $(\prod_{i \in I} R_i)^{-1} = \prod_{i \in I} R_i^{-1}$.

Propoziția 5.1. Fie I o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi și $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relații binare, cu $\emptyset \neq R_i \subseteq A_i^2 = A_i \times A_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:

- $\prod_{i \in I} R_i$ este reflexivă ddacă R_i este reflexivă, pentru fiecare $i \in I$
- dacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} ireflexivă, atunci $\prod_{i \in I} R_i$ este ireflexivă
- $\prod_{i \in I} R_i$ este simetrică ddacă R_i este simetrică, pentru fiecare $i \in I$
- $\prod_{i \in I} R_i$ este antisimetrică ddacă R_i este antisimetrică, pentru fiecare $i \in I$
- dacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} asimetrică, atunci $\prod_{i \in I} R_i$ este asimetrică
- $\prod_{i \in I} R_i$ este tranzitivă ddacă R_i este tranzitivă, pentru fiecare $i \in I$

Prim urmare:

- $\prod_{i \in I} R_i$ este o preordine, respectiv echivalență, respectiv ordine, ddacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i este o preordine, respectiv echivalență, respectiv ordine;

7

- *ireflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, $(a, a) \notin R$, i. e. nu există $a \in A$ cu aRa ;
- *simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb , atunci bRa ;
- *antisimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb și bRa , atunci $a = b$;
- *asimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă $(a, b) \in R$, atunci $(b, a) \notin R$;
- *tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc , atunci aRc ;
- *totală* (într-un al doilea sens) ddacă, pentru orice $a, b \in A$ cu $a \neq b$, au loc aRb sau bRa ;
- *completă* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, au loc aRb sau bRa .

Observația 4.1. Acest al doilea sens pentru denumirea de *relație binară totală* este specific *relațiilor binare pe o mulțime*. Primul sens a fost întâlnit la *relații binare în general (relații binare între două mulțimi)*, și nu coincide cu sensul de aici pe acest caz particular al relațiilor binare pe o mulțime.

Remarca 4.1 (caracterizarea acestor tipuri de relații binare prin operații cu mulțimi). Fie R o relație binară pe A . Atunci au loc:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap R = \emptyset$;
- în cazul în care $A \neq \emptyset$: dacă R este ireflexivă, atunci R nu este reflexivă, dar nu și reciproc;
- R este simetrică ddacă $R \subseteq R^{-1}$ ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- R este simetrică și antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- singura relație binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică și antisimetrică este Δ_A ;
- R este asimetrică ddacă $R \cap R^{-1} = \emptyset$;
- dacă R este asimetrică, atunci R este antisimetrică, dar nu și reciproc;
- singura relație binară pe A care este simultan simetrică și asimetrică este \emptyset ;
- dacă R este asimetrică, atunci R este ireflexivă, dar nu și reciproc;
- R este asimetrică și tranzitivă ddacă R este ireflexivă și tranzitivă;
- R este tranzitivă ddacă $R^2 \subseteq R$;
- dacă R este reflexivă, atunci $R \subseteq R^2$;
- R este totală ddacă $\Delta_A \cup R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă $R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă R este reflexivă și totală.

Definiția 4.2 (tipuri de relații binare pe o mulțime). Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se numește:

- *(relație de) preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă;
- *(relație de) echivalență* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- *(relație de) ordine (parțială)* ddacă e o preordine antisimetrică, i. e. o relație reflexivă, tranzitivă și antisimetrică;
- *(relație de) ordine totală* ddacă e simultan o relație de ordine și o relație totală (în acest al doilea sens de mai sus);

6

- $\prod_{i \in I} R_i$ este o ordine strictă ddacă există $i_0 \in I$ a.ă. R_{i_0} este o ordine strictă și, pentru fiecare $i \in I \setminus \{i_0\}$, R_i este o ordine,

pentru că: dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i este antisimetrică, atunci: $\prod_{i \in I} R_i$ este asimetrică ddacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} asimetrică.

6 Relații de echivalență și partiții a unei mulțimi

Exemplul 6.1. Δ_A și A^2 sunt relații de echivalență pe A , anume cea mai mică și, respectiv, cea mai mare relație de echivalență pe A , în sensul incluziunii, adică raportat la relația de incluziune între mulțimi.

Definiția 6.1. Fie A nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. $\emptyset \neq I$) de submulțimi ale lui A . Familia $(A_i)_{i \in I}$ se numește *partiție* a lui A ddacă satisface următoarele condiții:

- pentru orice $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$
- pentru orice $i, j \in I$, dacă $i \neq j$, atunci $A_i \cap A_j = \emptyset$ (i. e. mulțimile din familia $(A_i)_{i \in I}$ sunt două câte două disjuncte)
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Propoziția 6.1. Fie A nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o partiție a lui A . Atunci, pentru orice $x \in A$, există un unic $i_0 \in I$, a. i. $x \in A_{i_0}$.

Observația 6.1. În cele ce urmează vom defini *clasele unei relații de echivalență*. Aici vom folosi cuvântul *clasă* cu un alt sens decât acela din Cursul I, unde am vorbit despre teoria axiomatică a mulțimilor. Aici, toate clasele de echivalență sunt mulțimi, în această accepțiune a relațiilor binare ca fiind definite între mulțimi. Dacă adoptăm definiția relațiilor binare din sistemul axiomatizat prezentat în Cursul I, care permitea unei relații binare să fie definită între două clase, atunci putem spune că relația de **cardinal echivalență**, studiată în Cursul II, este o relație de echivalență pe **clasa mulțimilor**, iar clasele ei de echivalență sunt **clase proprii**, cu **excepția clasei lui \emptyset** (de data aceasta, **clase** în sensul din Cursul I).

Pentru cele ce urmează, vom considera mulțimea A nevidă, și o relație de echivalență \sim pe A , i. e.:

- \sim este o relație binară pe A : $\sim \subseteq A^2$
- \sim este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \sim x$
- \sim este **simetrică**: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \sim y$, atunci $y \sim x$
- \sim este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, dacă $x \sim y$ și $y \sim z$, atunci $x \sim z$

Să observăm că, în definiția simetriei, putem interschimba x și y și continuăm seria de implicații, obținând implicația dublă, adică: \sim este **simetrică** ddacă, pentru orice $x, y \in A$, are loc echivalența: $x \sim y$ ddacă $y \sim x$.

Definiția 6.2. Pentru fiecare $x \in A$, definim *clasa de echivalență a lui x raportat la \sim* ca fiind următoarea submulțime a lui A , notată cu \hat{x} sau cu x/\sim : $\hat{x} := x/\sim := \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Remarca 6.1. Observăm că simetria lui \sim ne asigură de faptul că: pentru orice $x \in A$, $\hat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\}$.

Propoziția 6.2 (proprietățile claselor de echivalență). (i) Pentru orice $x \in A$, $x \in \hat{x}$, și, așadar, $\hat{x} \neq \emptyset$.

(ii) Pentru orice $x, y \in A$, avem:

- dacă $x \sim y$, atunci $\hat{x} = \hat{y}$;
- dacă $(x, y) \notin \sim$, atunci $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$.

Propoziția 6.3 (proprietățile claselor de echivalență). Pentru orice $x, y \in A$:

- $x \sim y$ ddacă $y \sim x$ ddacă $x \in \hat{y}$ ddacă $y \in \hat{x}$ ddacă $\hat{x} = \hat{y}$;

8

- $(x, y) \notin \sim \text{dăcă } (y, x) \notin \sim \text{dăcă } x \notin \sim \text{dăcă } y \notin \sim \text{dăcă } \widehat{x} \text{ dăcă } \widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset.$

Definiția 6.3. Fiecare $x \in A$ se numește *representant al clasei* \widehat{x} .

Remarca 6.2 (proprietățile claselor de echivalență). Pentru fiecare $x, y \in A$, y este reprezentant al clasei \widehat{x} dăcă $y \in \widehat{x}$.

Definiția 6.4. Mulțimea claselor de echivalență ale lui \sim se notează cu A/\sim și se numește *mulțimea factor a lui A prin* \sim sau *mulțimea cât a lui A prin* \sim : $A/\sim = \{\widehat{x} \mid x \in A\}$.

Observația 6.2. Denumirile de **mulțime factor** și **mulțime cât** se datorează faptului că mulțimea A/\sim din definiția anterioară se obține prin "împărțirea mulțimii A în clasele de echivalență ale lui \sim " (a se vedea următoarea propoziție).

Propoziția 6.4 (clasele de echivalență formează o partiție). *Mulțimea factor A/\sim este o partiție a lui A.*

Remarca 6.3. Funcția $p : A \rightarrow A/\sim$, definită prin: pentru orice $x \in A$, $p(x) := \widehat{x}$, este surjectivă (sigur că este corect definită, pentru că \widehat{x} este unic determinat de x , oricare ar fi $x \in A$).

Definiția 6.5. Cu notațiile de mai sus, funcția p se numește *surjecția canonică de la A la A/\sim .*

Notăția 6.1. Notăm cu:

- $\text{Part}(A)$ mulțimea partițiilor lui A ;
- $\text{Eq}(A)$ mulțimea relațiilor de echivalență pe mulțimea A .

Propoziția 6.5. *Mulțimea partițiilor unei mulțimi nevide este în bijecție cu mulțimea relațiilor de echivalență pe acea mulțime.*

Într-adevăr, funcțiile:

$$\text{Eq}(A) \xrightleftharpoons[\varphi]{\psi} \text{Part}(A)$$

definite prin:

- pentru orice $\sim \in \text{Eq}(A)$, $\varphi(\sim) = A/\sim$,
- pentru orice $(A_i)_{i \in I} \in \text{Part}(A)$, $\psi((A_i)_{i \in I}) = \{(x, y) \mid x, y \in A, (\exists i \in I) (x, y \in A_i)\} = \bigcup_{i \in I} A_i^2 \subseteq A^2$,

sunt inverse una alteia, așadar sunt inversabile, deci bijective.

- În cazul **morfismelor** între structuri algebrice (de același tip) (i. e. funcțiile care comută cu operațiile acelor structuri algebrice), **nucleul** se definește în funcție de un element distins din structura codomeniului, cum este elementul neutru la grupuri.
- În cazul **funcțiilor**, definite între două mulțimi pe care nu se dau structuri algebrice, pentru definirea unei noțiuni de **nucleu**, o funcție nu poate fi raportată decât la ea însăși, de unde și denumirea din definiția următoare.
- Pentru cele ce urmează, fie A și B două mulțimi nevide arbitrare și $f : A \rightarrow B$ o funcție arbitrară.
- Următoarea diagramă (reprezentare grafică) este doar pentru intuiție:

$$A \xrightleftharpoons[f]{f} B$$

Definiția 6.6 (nucleul de săgeată dublă). Se numește **nucleul (de săgeată dublă al)** lui f următoarea relație binară pe A , notată $\text{Ker}(f)$:

$$\text{Ker}(f) := \{(x, y) \mid x, y \in A, f(x) = f(y)\} \subseteq A^2.$$

- În cazul morfismelor, au loc proprietăți de forma: morfismul este injectiv dăcă nucleul său este trivial.
- Și aici avem o proprietate de acest tip:

Remarca 6.4. (i) $\text{Ker}(f) \supseteq \Delta_A$;

9

(ii) $\text{Ker}(f) = \Delta_A$ dăcă f este injectivă.

Remarca 6.5. $\text{Ker}(f) = \{(x, y) \mid x, y \in A, (f(x), f(y)) \in \Delta_B\}$ este o relație de echivalență pe A .

- Nucleele de săgeată dublă ale morfismelor între structuri algebrice de același tip sunt **congruențe**, adică relații de echivalență care păstrează operațiile structurilor algebrice respective. (Vom vorbi despre **congruențe** pe algebre Boole în unele dintre cursurile următoare.) Am precizat: nucleele **de săgeată dublă** ale morfismelor, deci nu nucleele morfismelor în primul sens.

- Cu privire la proprietatea care urmează: intuitiv, o **diagramă** (cu mulțimi și funcții, ca aceea din propoziția următoare, de exemplu) se zice *comutativă* dăcă, indiferent pe ce drum "urmărim săgețile" și compunem funcțiile, între oricare două mulțimi din diagramă se obține aceeași funcție, i. e. toate compunerile de funcții între acele mulțimi sunt egale (mulțimile pot fi și 4 sau mai multe, nu neapărat 3, ca în cazul diagramei următoare).

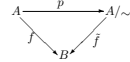
Pentru cele ce urmează, renunțăm la fixarea lui A , B și f .

Propoziția 6.6 (proprietatea de universalitate a mulțimii factor). *Fie A o mulțime nevidă, \sim o relație de echivalență pe A și $p : A \rightarrow A/\sim$ surjecția canonică: pentru orice $x \in A$, $p(x) = \widehat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$. Atunci: pentru orice mulțime nevidă B și orice funcție $f : A \rightarrow B$ cu $\sim \subseteq \text{Ker}(f)$, există o unică funcție $\tilde{f} : A/\sim \rightarrow B$ care face comutativă următoarea diagramă, i. e. cu proprietatea că:*

$$\tilde{f} \circ p = f,$$

i. e., pentru orice $x \in A$:

$$\tilde{f}(\widehat{x}) = f(x).$$



7 Operatori de închidere și familii Moore

- Vom studia în cele ce urmează **operatorii de închidere** pe mulțimea părților unei mulțimi și **familii Moore (sistemele de închidere)** de părți ale unei mulțimi.

- Aceste noțiuni pot fi definite și studiate pe **mulțini ordonate arbitrare** (vom vedea ce sunt acestea), adică, în considerațiile de mai jos, se poate înlocui mulțimea părților unei mulțimi cu o mulțime arbitrară M , incluziunea de mulțimi cu o relație de ordine arbitrară \leq pe M , iar intersecția cu **infimumul în mulțimea ordonată** (M, \leq) (în timp ce reuniunea va avea drept generalizare o noțiune numită **supremum**) (vom vedea ce sunt toate acestea).

- Vom vedea că, în mulțini ordonate arbitrare:

- supremumul familiei vide este minimul (cele două există simultan);
- infimumul familiei vide este maximul (cele două există simultan).

- Pentru familii de mulțimi:

- am demonstrat că reuniunea familiei vide de mulțimi este \emptyset (cea mai mică mulțime în sensul incluziunii, adică raportat la incluziunea de mulțimi: $\emptyset \subseteq A$, pentru orice mulțime A);
- nu există o cea mai mare mulțime (dintre toate mulțimile) în sensul incluziunii, pentru că, dacă ar exista, atunci aceasta ar include pe $\mathcal{P}(A)$, pentru orice mulțime A , deci ar conține fiecare mulțime A , deci ar avea ca submulțime mulțimea tuturor mulțimilor, care nu există (a se vedea Cursul I); dar există o cea mai mare mulțime dintre părțile unei anumite mulțimi. Deci ce mulțime va fi intersecția familiei vide de mulțimi?

10

Remarca 7.1. Intersecția familiei vide nu există decât raportat la o mulțime totală T : intersecția familiei vide de părți ale lui T (adică infimumul familiei vide în mulțimea ordonată $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ – vom vedea), se **definește** în următorul mod, și este egală cu mulțimea totală T :

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i := \{x \in T \mid (\forall i \in \emptyset) (x \in A_i)\} = \{x \in T \mid (\forall i) (i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)\} = T,$$

întrucât proprietatea $(\forall i) (i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)$ este adevărată pentru orice x .

Exercițiul 7.1. Fie T o mulțime, iar $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (mulțini de părți ale lui T care satisfac această incluziune). Atunci au loc incluziunile:

- $\bigcup_{A \in X} A \subseteq \bigcup_{A \in Y} A$
- $\bigcap_{A \in X} A \supseteq \bigcap_{A \in Y} A$

În particular, dacă $M \in Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (i. e. $\emptyset \neq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ și $M \in Y$, adică pentru $X = \{M\}$ mai sus (un *singleton*, i. e. o mulțime cu un singur element)), atunci:

- $M \subseteq \bigcup_{A \in Y} A$
- $M \supseteq \bigcap_{A \in Y} A$

Definiția 7.1. Fie T o mulțime arbitrară.

- Se numește **familie Moore de părți ale lui T** (sau **sistem de închidere pe mulțimea părților lui T**) o familie de părți ale lui T închisă la intersecții arbitrare, i. e. o familie de mulțimi $M = (M_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$, cu I mulțime arbitrară, având proprietatea că, pentru orice $S \subseteq I$, $\bigcap_{i \in S} M_i \in M$ (i. e., pentru orice $S \subseteq I$, există $i_S \in I$, astfel încât $\bigcap_{i \in S} M_i = M_{i_S}$). Familiile Moore se mai numesc **sisteme de închidere**.

- Se numește **operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$** o funcție $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$, astfel încât, pentru orice $X, Y \in \mathcal{P}(T)$, au loc proprietățile:

- $C(C(X)) = C(X)$ (C este *idempotent*);
- $X \subseteq C(X)$ (C este *extensiv*);
- dacă $X \subseteq Y$, atunci $C(X) \subseteq C(Y)$ (C este *crescător*).

Peste tot în restul acestei secțiuni, T va fi o mulțime arbitrară.

Remarca 7.2. Orice familie Moore de părți ale lui T conține intersecția familiei vide de părți ale lui T , adică pe T .

Exemplul 7.1. • $id_{\mathcal{P}(T)}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.

- Funcția constantă $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$, $(\forall X \in \mathcal{P}(T)) (C(X) = T)$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- $\mathcal{P}(T)$ este o familie Moore de părți ale lui T .
- $\{T\}$ este o familie Moore de părți ale lui T .
- \emptyset nu este o familie Moore de părți ale lui T , pentru că nu îl conține pe T .

Așadar:

Remarca 7.3. Orice familie Moore este nevidă.

Propoziția 7.1. *Dacă M este o familie Moore de părți ale lui T , atunci, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, există o (unică) cea mai mică mulțime din M care include pe A (cea mai mică în sensul incluziunii), și aceasta este egală cu intersecția mulțimilor din M care includ pe A .*

Propoziția 7.2 (*). *Fie I o mulțime nevidă și $M = (M_i)_{i \in I}$ o familie Moore de părți ale lui T .*

Definim funcția $C_M : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ astfel: pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, $C_M(X)$ este, prin definiție, cea mai mică mulțime din M care include pe X , adică $C_M(X) := \bigcap_{\substack{M_i \in M \\ X \subseteq M_i}} M_i$.

Atunci C_M este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.

Definiția 7.2 (mulțimi închise). Fie $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Elementele din imaginea lui C , $C(\mathcal{P}(T))$, adică mulțimile de forma $C(X)$, cu $X \in \mathcal{P}(T)$, se numesc **mulțimi închise** raportat la operatorul de închidere C .

Propoziția 7.3 (caracterizare echivalență pentru mulțimile închise). *Fie $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Atunci mulțimile închise raportat la operatorul de închidere C sunt exact acele mulțimi $X \in \mathcal{P}(T)$ care satisfac $X = C(X)$, i. e.: $\{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\}$.*

Propoziția 7.4 ().** *Fie $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Definim $M_C = C(\mathcal{P}(T)) = \{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\} \subseteq \mathcal{P}(T)$ (familia mulțimilor închise din $\mathcal{P}(T)$ raportat la operatorul de închidere C).*

Atunci M_C este o familie Moore de părți ale lui T .

Propoziția 7.5. *Aplicațiile din cele Propozițiile (*) și (**) sunt inverse una alteia, adică:*

- pentru orice operator de închidere $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$, $C_{M_C} = C$;
- pentru orice familie Moore M de părți ale lui T , $M_{C_M} = M$.

Așadar aceste aplicații sunt bijecții, deci mulțimea operatorilor de închidere pe $\mathcal{P}(T)$ și mulțimea familiilor Moore de părți ale lui T sunt în bijecție.

Exemplul 7.2. • Familia Moore asociată operatorului de închidere $id_{\mathcal{P}(T)}$ pe $\mathcal{P}(T)$ este $id_{\mathcal{P}(T)}(\mathcal{P}(T)) = \mathcal{P}(T)$.

- Familia Moore asociată operatorului de închidere dat de funcția constantă $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$, $(\forall X \in \mathcal{P}(T)) (C(X) = T)$, este $C(\mathcal{P}(T)) = \{T\}$.

8 Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

- Peste tot în această secțiune, A va fi o mulțime arbitrară.
- $\mathcal{P}(A^2)$ este mulțimea submulțimilor lui $A^2 = A \times A$, adică mulțimea relațiilor binare pe A .
- Amintesc că: $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = id_A$ =relația de egalitate pe A .

Propoziția 8.1. *Fie $(R_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. $c \neq I \neq \emptyset$) de relații binare pe A. Atunci:*

- dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e reflexivă, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e reflexivă
- dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e simetrică, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e simetrică
- dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e tranzitivă, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e tranzitivă
- dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o preordine, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e o preordine
- dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o relație de echivalență, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e o relație de echivalență

Remarca 8.1. Propoziția anterioară arată că familia relațiilor binare reflexive/simetrice/ tranzitive/de preordine/de echivalență pe A este o familie Moore de părți ale lui A^2 .

Într-adevăr, A^2 satisface toate aceste proprietăți, fiind relație de echivalență pe A .
Și, de exemplu, pentru reflexivitate: familia relațiilor reflexive pe A conține pe A^2 , care este intersecția familiei vide din $\mathcal{P}(A^2)$, iar, conform propoziției anterioare, această familie este închisă la intersecții nevide arbitrare. Așadar, familia relațiilor reflexive pe A este închisă la intersecții arbitrare, i. e. este o familie Moore.

Remarca 8.2. Remarca anterioară și o serie de propoziții despre familii Moore și operatori de închidere de mai sus arată că, pentru orice relație binară R pe A , există o cea mai mică relație binară reflexivă pe A care include pe R , anume intersecția tuturor relațiilor binare reflexive pe A care includ pe R , adică unica relație binară \overline{R} pe A care satisface următoarele trei proprietăți:

- \overline{R} este reflexivă
- $R \subseteq \overline{R}$
- pentru orice relație reflexivă S pe A cu $R \subseteq S$, rezultă că $\overline{R} \subseteq S$

În plus, $\mathcal{R} : \mathcal{P}(A^2) \rightarrow \mathcal{P}(A^2)$, pentru orice $R \in \mathcal{P}(A^2)$, $\mathcal{R}(R) := \overline{R}$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(A^2)$. Toate aceste considerații rămân valabile dacă înlocuim proprietatea de reflexivitate cu oricare dintre proprietățile:

- simetrie – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu S
- tranzitivitate – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu T
- proprietatea de a fi preordine – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu Pre
- proprietatea de a fi relație de echivalență – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu \mathcal{E}

Aceste notații **nu** sunt consacrate, ci sunt notații ad-hoc pe care le adoptăm în expunerea care urmează.

Definiția 8.1. Fie R o relație binară pe A . Se numește:

- *închiderea reflexivă a lui R* cea mai mică relație binară reflexivă pe A care include pe R , adică $\mathcal{R}(R)$;
- *închiderea simetrică a lui R* cea mai mică relație binară simetrică pe A care include pe R , adică $\mathcal{S}(R)$;
- *închiderea tranzitivă a lui R* cea mai mică relație binară tranzitivă pe A care include pe R , adică $\mathcal{T}(R)$;
- *preordinea generată de R* (sau *închiderea reflexiv-tranzitivă a lui R*) cea mai mică preordine pe A care include pe R , adică $Pre(R)$;
- *relația de echivalență generată de R* cea mai mică relație de echivalență pe A care include pe R , adică $\mathcal{E}(R)$.

Remarca 8.3. Idempotența operatorilor de închidere arată că, pentru orice relație binară R pe A : $\mathcal{R}(\mathcal{R}(R)) = \mathcal{R}(R)$, $\mathcal{S}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(R)$, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(R)$, $Pre(Pre(R)) = Pre(R)$ și $\mathcal{E}(\mathcal{E}(R)) = R$.

Remarca 8.4. Fie R o relație binară pe A . Conform descrierii mulțimilor închise din secțiunea despre operatori de închidere și familii Moore, au loc:

- R este reflexivă ddacă $R = \mathcal{R}(R)$
- R este simetrică ddacă $R = \mathcal{S}(R)$
- R este tranzitivă ddacă $R = \mathcal{T}(R)$
- R este o preordine ddacă $R = Pre(R)$
- R este o relație de echivalență ddacă $R = \mathcal{E}(R)$

Propoziția 8.2. Fie R o relație binară pe A . Atunci:

- (i) $\mathcal{R}(R) = R \cup \Delta_A$
- (ii) $\mathcal{S}(R) = R \cup R^{-1}$
- (iii) $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$
- (iv) $Pre(R) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$

13

Remarca 9.2. Pentru orice mulțime A , Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan relație de echivalență și relație de ordine. Acest fapt rezultă din remarca anterioară și faptul că Δ_A este tranzitivă.

În plus, cum Δ_A este cea mai mică relație reflexivă pe A , în sensul incluziunii (i. e. Δ_A este reflexivă și este inclusă în orice relație binară reflexivă pe A), rezultă că Δ_A este cea mai mică relație de echivalență pe A și cea mai mică relație de ordine pe A , în sensul incluziunii.

Remarca 9.3 (obținerea unei relații de ordine dintr-o relație de preordine; aplicație: ordinele de complexitate ale algoritmilor). Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A^2$ o relație de preordine pe A .

Fie $\sim := R \cap R^{-1}$ (i. e. $\sim \subseteq A^2$, pentru orice $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă $[xRy \text{ și } yRx]$). Se demonstrează că \sim este o relație de echivalență pe A .

Considerăm mulțimea factor $A/\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$, unde $\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\} = \{y \in A \mid y \sim x\}$, pentru fiecare $x \in A$. Pe A/\sim definim relația binară \leq , astfel: pentru orice $x, y \in A$, $\hat{x} \leq \hat{y}$ ddacă xRy .

Se demonstrează că \leq este **bine definită**, adică este **independentă de reprezentanți**, i. e., pentru orice $x, y, z, t \in A$ a. i. $\hat{x} = \hat{z}$ (ceea ce este echivalent cu $x \sim z$) și $\hat{y} = \hat{t}$ (ceea ce este echivalent cu $y \sim t$), are loc echivalența: xRy ddacă zRt . Și se demonstrează că \leq este o relație de ordine pe A/\sim .

Remarca 9.4. Dacă A e o mulțime nevidă, atunci nu există nicio relație binară pe A care să fie și reflexivă, și ireflexivă, prin urmare nu există nicio relație binară pe A care să fie și relație de ordine, și relație de ordine strictă

Exercițiul 9.1 (ordine versus ordine strictă). Fie A o mulțime, O mulțimea relațiilor de ordine pe A și S mulțimea relațiilor de ordine strictă pe A .

Să se demonstreze că aplicațiile $\varphi : O \rightarrow S$ și $\psi : S \rightarrow O$, definite prin:

- pentru orice $\leq \in O$, $\varphi(\leq) = \leq \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$,
- pentru orice $< \in S$, $\psi(<) = < \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$,

sunt:

- corect definite, i. e. într-adevăr $Im(\varphi) \subseteq S$ și $Im(\psi) \subseteq O$, i. e.:
 - scăzând din orice relație de ordine pe A diagonala lui A , se obține o relație de ordine strictă pe A ;
 - reunind orice relație de ordine strictă pe A cu diagonala lui A , se obține o relație de ordine pe A ;
- inverse una alteia, i. e. $\psi \circ \varphi = id_O$ și $\varphi \circ \psi = id_S$, ceea ce înseamnă că φ și ψ sunt bijecții între O și S .

Definiția 9.1. Fie A o mulțime, \leq o relație de ordine pe A și $<$ o relație de ordine strictă pe A . Atunci:

- $\leq \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$ se numește *relația de ordine strictă asociată lui \leq* ;
- $< \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$ se numește *relația de ordine asociată lui $<$* .

(A se vedea exercițiul anterior.)

Remarca 9.5. Relația de ordine strictă asociată unei relații de ordine totale este o relație totală (desigur, nu completă, decât în cazul în care mulțimea pe care este definită este \emptyset).

Notația 9.1. Pentru orice mulțime A , orice $R \subseteq A^2$ și orice $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$, vom nota faptul că a_1Ra_2, a_2Ra_3, \dots și prin: $a_1Ra_2Ra_3 \dots$

Definiția 9.2. • O mulțime A înzestrată cu o relație de ordine $\leq \subseteq A^2$ se notează (A, \leq) și se numește *mulțime (parțial) ordonată sau poset* (de la englezescul “partially ordered set”).

- Dacă, în plus, \leq este o relație de ordine totală, atunci (A, \leq) se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Observația 9.1. Poseturile sunt un tip de **structuri algebrice**, diferite de cele studiate în liceu, precum monoizii, grupurile, inelele, corpurile etc., prin faptul că sunt înzestrate nu cu **operații**, ci cu o **relație binară**.

Terminologia cunoscută pentru structurile algebrice studiate până acum se păstrează: cu notațiile din definiția anterioară, A se numește *mulțimea elementelor*, sau *mulțimea suport*, sau *mulțimea subiacentă* posetului (A, \leq) ; vom vedea și noțiunile de **substructură** a unui poset și **morfism** de poseturi.

$$(v) \mathcal{E}(R) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup R^{-1} \cup \Delta_A)^n$$

Remarca 8.5 (temă). Dacă A este o mulțime finită și nevidă având $|A| = k \in \mathbb{N}^*$, atunci:

- (i) $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^k R^n$;
- (ii) șirul $R^0, R^1, R^2, \dots, R^n, \dots$ este periodic începând de la un anumit exponent.

Propoziția 8.3 (comutările închiderilor – temă, cu contraexemplu pentru comutarea de la ultimul punct – facultativă). Fie R o relație binară pe A . Atunci:

- (i) $\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(\mathcal{R}(R))$;
- (ii) $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(R))$;
- (iii) $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ și $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))$ nu sunt neapărat egale.

Adică: *închiderea reflexivă comută cu fiecare dintre închiderile simetrică și tranzitivă, dar (în general) închiderile simetrică și tranzitivă nu comută una cu cealaltă.*

Corolarul 8.1 (temă – facultativă). • \mathcal{R} păstrează simetria și tranzitivitatea, i. e.: dacă R este o relație binară simetrică (respectiv tranzitivă), atunci $\mathcal{R}(R)$ este simetrică (respectiv tranzitivă);

- S și T păstrează reflexivitatea, i. e.: dacă R este o relație binară reflexivă, atunci $\mathcal{S}(R)$ și $\mathcal{T}(R)$ sunt reflexive.

Propoziția 8.4 (temă – facultativă). • T păstrează simetria;

- S nu păstrează tranzitivitatea.

Remarca 8.6 (nu există închiderea antisimetrică sau ordinea generată). Fie R o relație binară pe A , arbitrară. De ce nu calculăm o închidere antisimetrică a lui R , sau o relație de ordine generată de R ?

Două motive sunt următoarele fapte, fiecare ușor de verificat:

- dacă R nu este antisimetrică, atunci nicio relație binară S pe A cu $R \subseteq S$ nu este antisimetrică (direct din definiția antisimetriei), și deci nu este nici relație de ordine;
- dacă $|A| \geq 2$, atunci A^2 nu este antisimetrică (pentru că, atunci, A conține cel puțin două elemente distincte a și b , așadar $(a, b), (b, a) \in A^2$, dar $a \neq b$), deci A^2 nu este o relație de ordine, prin urmare A^2 nu aparține familiei relațiilor antisimetrice pe A , deci nici familiei relațiilor de ordine pe A , așadar niciuna dintre aceste familii nu este o familie Moore de părți ale lui A^2 , pentru că niciuna dintre ele nu conține intersecția familiei vide de părți ale lui A^2 , anume pe A^2 .

9 Relații de ordine

Remarca 9.1. Pentru orice mulțime A , Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică și antisimetrică. Într-adevăr, dacă $R \subseteq A^2$, atunci:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este simetrică ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- prin urmare, dacă R este simetrică și antisimetrică, atunci $R = R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- dacă $R \subseteq \Delta_A$, atunci este imediat că R e simetrică și antisimetrică;
- așadar: R e simetrică și antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- în concluzie: R este reflexivă, simetrică și antisimetrică ddacă $\Delta_A \subseteq R$ și $R \subseteq \Delta_A$ ddacă $R = \Delta_A$.

14

Definiția 9.3. Fie (A, \leq) un poset și $< := \leq \setminus \Delta_A = \{(a, b) \in A^2 \mid a \leq b \text{ și } a \neq b\}$ relația de ordine strictă asociată lui \leq .

Relații de ordine \leq pe A i se asociază *relația de succesiune* (numită și *relația de acoperire*), notată $<$ și definită astfel: $< := \{(a, b) \in A^2 \mid a < b \text{ și nu există } x \in A \text{ a. i. } a < x < b\}$.

Pentru orice $a, b \in A$ cu $a < b$:

- b se numește *succesor* al lui a (se mai spune că b *acoperă* pe a)
- a se numește *predecesor* al lui b (sau se spune că a *este acoperit* de b)

Remarca 9.6 (temă). Cu notațiile din definiția anterioară, $<$ e asimetrică (deci și ireflexivă) și nu e tranzitivă.

Notația 9.2 (notații uzuale într-un poset). Cu notațiile din definiția anterioară: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} := \leq \setminus \Delta_A$ și $> := <^{-1}$.

Definiția 9.4. Fie (A, \leq) un poset și $<$ ordinea strictă asociată lui \leq . Spunem că mulțimea A este *densă raportat la ordinea \leq* , sau că \leq este o *ordine densă* pe A ddacă, oricare ar fi $a, b \in A$ cu $a < b$, există $x \in A$ a. i. $a < x < b$, i. e. ddacă $< = \emptyset$ în posetul (A, \leq) .

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse:

- Amintim că relațiile binare (pe mulțini finite și nevide) se pot reprezenta grafic prin grafuri orientate.
- Relațiile de ordine, însă, beneficiază de o reprezentare grafică mai avantajoasă, minimală în sensul că ține seama de proprietățile de reflexivitate, tranzitivitate și antisimetrie ale unei relații de ordine pentru a elimina redundanțele create în reprezentarea grafică de aceste proprietăți. Această reprezentare grafică a unei relații de ordine se numește *diagramă Hasse*.
- Și această reprezentare grafică este, de obicei, folosită pentru relații (de ordine) pe mulțini finite și nevide.
- Dacă (A, \leq) este un poset finit și nevid (i. e. cu A finită și nevidă), atunci diagrama Hasse a posetului (A, \leq) este graful neorientat având mulțimea nodurilor egală cu A și mulțimea muchiilor egală cu relația de succesiune $<$ asociată lui \leq și a cărei reprezentare grafică respectă regula:
 - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre succesorii săi** (i. e., pentru orice $a, b \in A$ a. i. $a < b$, a va fi reprezentat dedesubtul lui b),
- prin urmare:
 - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre nodurile cu care se găsește în relația de ordine strictă $<$ asociată lui \leq , i. e. nodurile “strict mai mari” decât el.**

Observația 9.2. Faptul că, într-un poset finit și nevid (A, \leq) , două elemente $x, y \in A$ satisfac $x < y$ (cu $< := \leq \setminus \Delta_A$) este reprezentat în diagrama Hasse a posetului (A, \leq) prin următoarele caracteristici:

- elementul x este reprezentat dedesubtul elementului y și
- x și y sunt conectate printr-un lanț (mai precis, prin cel puțin un lanț; aici, **lanț** în sensul de **drum** în graful neorientat dat de diagrama Hasse; dar sigur că submulțimea lui A formată din elementele ce corespund nodurilor de pe un astfel de drum este o submulțime total ordonată a posetului (A, \leq) , adică este un lanț cu ordinea indusă).

Observația 9.3. În diagramele Hasse nu există muchii orizontale, ci numai muchii verticale sau oblice.

Observația 9.4. Diagrama Hasse a unei mulțimi liniar ordonate este “liniară”.

Amintim că o **mulțime liniar ordonată** se mai numește **mulțime total ordonată** sau **lanț**.

Remarca 9.3. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, vom nota **lanțul** cu k **elemente** prin L_k (articolul hotărât va fi explicat în notația următoare). De obicei, mulțimea suport a lanțului L_k se notează cu L_k . Evident, orice mulțime cu exact k elemente poate servi drept suport pentru lanțul cu k elemente.

Remarca 9.7. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, lanțul cu k elemente este unic, modulo o permutare a elementelor, i. e. pe o mulțime cu k elemente se poate defini o unică ordine totală, modulo o permutare a elementelor.

Mai precis, dacă L_k este o mulțime cu exact k elemente, iar \leq și \sqsubseteq sunt două ordini totale pe L_k , atunci poseturile (L_k, \leq) și (L_k, \sqsubseteq) sunt **izomorfe**, i. e. există între ele un **izomorfism de poseturi**. Mai general: dacă L_k și M_k sunt mulțimi cu exact k elemente, iar \leq este o ordine totală pe L_k și \sqsubseteq este o ordine totală pe M_k , atunci poseturile (L_k, \leq) și (M_k, \sqsubseteq) sunt **izomorfe**. Vom vedea ce este un izomorfism de poseturi. Deocândă, ne mulțimim cu explicația intuitivă: două poseturi finite și nevide sunt **izomorfe** ddacă au **aceeași diagramă Hasse**.

Elemente distincte într-un poset:

- Până în momentul în care se va specifica altfel, fie (A, \leq) un poset și $X \subseteq A$.

Remarca 9.8. Este imediat faptul că relația binară pe X dată de mulțimea de perechi $\{(x, y) | x \in X, y \in X, x \leq y\} \subseteq \cap X^2$ este o ordine pe X , și că, dacă ordinea \leq pe A este totală, atunci această ordine pe X este, de asemenea, totală.

Definiția 9.5. Ordinea pe X din remarca anterioară se numește **ordinea indusă de \leq pe X** și se notează tot cu \leq . Posetul (X, \leq) se numește **subposet** sau **submulțime (parțial) ordonată** a lui (A, \leq) .

Dacă (X, \leq) este un lanț (i. e. are fiecare două elemente comparabile), atunci (X, \leq) se numește **submulțime total ordonată** a lui (A, \leq) .

Definiția 9.6. Un element $a \in A$ se numește:

- **minorant** pentru X ddacă, pentru orice $x \in X$, $a \leq x$
- **majorant** pentru X ddacă, pentru orice $x \in X$, $x \leq a$

Remarca 9.9. X poate avea mai mulți minoranți (majoranți), și poate să nu aibă niciun minorant (majorant).

Definiția 9.7. • Un minorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $m \in X$ cu $m \leq x$ pentru orice $x \in X$) se numește **minim** al lui X sau **prim element** al lui X sau **cel mai mic element** al lui X și se notează cu $\min(X)$ sau $\min(X, \leq)$.

- Un majorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $M \in X$ cu $x \leq M$ pentru orice $x \in X$) se numește **mazim** al lui X sau **ultim element** al lui X sau **cel mai mare element** al lui X și se notează cu $\max(X)$ sau $\max(X, \leq)$.

Remarca 9.10. Minimul nu există întotdeauna. Dar antisimetria lui \leq implică faptul că minimul (dacă există) este unic (ceea ce justifică notația de mai sus pentru minim, care indică faptul că minimul lui X este unic determinat de X (și \leq)). La fel pentru maxim.

Definiția 9.8. Un poset cu minim și maxim se numește **poset mărginit**. (Minimul și maximul trebuie să fie ale întregului poset, deci trebuie luat $X := A$ în definiția anterioară.)

Remarca 9.11. O mulțime care are minim sau maxim are cel puțin un element (pentru că minimul unei mulțimi aparține acelei mulțimi și la fel și maximul), deci nu poate fi vidă.

Definiția 9.9. Un element $x \in X$ se numește:

- **element minimal** al lui X ddacă este minimul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x , sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $y \leq x$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y < x$
- **element maximal** al lui X ddacă este maximul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x , sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $x \leq y$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y > x$

Remarca 9.12. Din definiția anterioară, rezultă imediat, pentru orice $x \in X$:

- x este simultan element minimal al lui X și minorant pentru X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element minimal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și majorant pentru X ddacă $x = \max(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \max(X)$

17

- Posetul (A, \geq) se numește **posetul dual** al posetului (A, \leq) .
- Este evident că dualul dualului unui poset (A, \leq) este chiar (A, \leq) .
- Ori de câte ori vom face apel la **Principiul dualității pentru poseturi**, vom scrie, simplu, "prin dualitate".
- Diagrama Hasse a dualului unui poset finit se obține prin "răsturnarea diagramei Hasse" a aceluși poset "cu sensul în jos".
- Lanțurile finite sunt **autoduale**, i. e. izomorfe (ca poseturi; vom vedea) cu poseturile duale lor.

Remarca 9.17. Fie (A, \leq) un poset și $a, b \in A$. Atunci:

- $b < a$ implică $a \not\leq b$,
- dacă (A, \leq) este lanț, atunci: $b < a$ ddacă $a \not\leq b$.

Remarca 9.18. Fie (L, \leq) un poset și $\emptyset \neq X \subseteq L$, a. i. există în (L, \leq) $\inf(X)$ și $\sup(X)$. Atunci $\inf(X) \leq \sup(X)$.

Remarca 9.19. Pentru orice mulțime T , în posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, oricare ar fi $X \subseteq \mathcal{P}(T)$:

- există $\sup(X) = \bigcup_{A \in X} A$
- există $\inf(X) = \bigcap_{A \in X} A$

Remarca 9.20 (temă: scrieți această remarcă pentru posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$). Fie (L, \leq) un poset și $X \subseteq L$, $Y \subseteq L$, a. i. $X \subseteq Y$. Atunci:

- dacă există în (L, \leq) $\sup(X)$ și $\sup(Y)$, atunci $\sup(X) \leq \sup(Y)$
- dacă există în (L, \leq) $\inf(X)$ și $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq \inf(X)$

Pentru tratarea cazurilor în care X este vidă, a se vedea remarca următoare. Cazul în care X este un singleton se scrie astfel: dacă $x \in Y \subseteq L$, atunci:

- dacă există în (L, \leq) $\sup(Y)$, atunci $x \leq \sup(Y)$
- dacă există în (L, \leq) $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq x$

Remarca 9.21. Într-un poset (L, \leq) , $\sup(\emptyset)$ există ddacă $\min(L)$ există, și, dacă acestea există, atunci sunt egale. Dual, la fel se întâmplă pentru $\inf(\emptyset)$ și $\max(L)$.

Propoziția 9.1. Fie (L, \leq) un poset. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în L ;
- pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în L .

10 Funcții izotone

Definiția 10.1. Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) două poseturi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție.

f se zice **izotonă** (sau **crescătoare**) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

f se zice **antitonă** (sau **descrescătoare**) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.

Funcțiile izotone se mai numesc **morfisme de poseturi**.

Observația 10.1. Se consideră că denumirea de **funcție crescătoare** este legată de ordinile naturale de pe mulțimile de numere, și, de aceea, se preferă denumirea de **funcție izotonă** în cazul funcțiilor între poseturi arbitrare.

Remarca 9.13. Orice poset finit și nevid are elemente maxinale și elemente mininale, mai precis, pentru orice element $a \in A$ al unui poset finit și nevid (A, \leq) , există un element minimal e și un element maximal E în posetul (A, \leq) , cu proprietatea că $e \leq a \leq E$.

În orice poset finit și nevid, orice element care nu este element maximal are cel puțin un succesor, și orice element care nu este element minimal are cel puțin un predecessor.

În orice poset finit și nevid, închiderea tranzitivă a relației de succesiune este relația de ordine strictă, iar închiderea reflexiv-tranzitivă a relației de succesiune (i. e. preordinea generată de relația de succesiune) este relația de ordine.

Definiția 9.10. **Infimumul** lui X este cel mai mare minorant al lui X , adică maximul mulțimii minoranților lui X , și se notează cu $\inf(X)$ sau $\inf(X, \leq)$.

Supremumul lui X este cel mai mic majorant al lui X , adică minimul mulțimii majoranților lui X , și se notează cu $\sup(X)$ sau $\sup(X, \leq)$.

Remarca 9.14. Infimumul nu există întotdeauna, nici măcar atunci când mulțimea minoranților este nevidă.

Dar, fiind maximul unei mulțimi, infimumul (dacă există) este unic (ceea ce îi justifică denumirea cu articol hotărât și notația, fiecare dintre acestea indicând faptul că infimumul este unic determinat de X (și \leq)).

La fel pentru supremum.

Remarca 9.15. Infimumul este un minorant, prin urmare infimumul aparține mulțimii ddacă este minimul mulțimii: $\exists \inf(X) \in X$ ddacă $\exists \min(X)$, și atunci $\min(X) = \inf(X)$.

Analog, supremumul este un majorant, prin urmare supremumul aparține mulțimii ddacă este maximul mulțimii: $\exists \sup(X) \in X$ ddacă $\exists \max(X)$, și atunci $\sup(X) = \max(X)$.

Remarca 9.16. Din definiția infimumului și a supremumului, rezultă următoarele caracterizări:

- există $\inf(X) = m$ ($\in A$) ddacă:
 - pentru orice $x \in X$, $m \leq x$ și
 - oricare ar fi $a \in A$ a. i., pentru orice $x \in X$, $a \leq x$, rezultă că $a \leq m$
- există $\sup(X) = M$ ($\in A$) ddacă:
 - pentru orice $x \in X$, $x \leq M$ și
 - oricare ar fi $a \in A$ a. i., pentru orice $x \in X$, $x \leq a$, rezultă că $M \leq a$

Lema 9.1. Fie (L, \leq) un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- $x \leq y$
- există în L $\inf\{x, y\} = x$
- există în L $\sup\{x, y\} = y$

Principiul dualității pentru poseturi:

- **Principiul dualității pentru poseturi:** Orice rezultat privind un poset arbitrar (fapt esențial) (A, \leq) rămâne valabil dacă înlocuim \leq cu \leq^{-1} (notată \geq ; conform definiției inversei unei relații binare, $\geq = \leq^{-1} \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \geq y$ ddacă $y \leq x$; la fel în continuare), $<$ cu $<^{-1}$ (notată $>$), $<$ cu $<^{-1}$ (notată $>$), \top și \bot minoranții cu majoranți (ca noțiuni) și vice-versa, toate elementele mininale cu elemente maxinale și vice-versa, toate minimurile cu maximuri și vice-versa și toate infimumurile cu supremumuri și vice-versa.

- Valabilitatea acestui principiu este ușor de observat din faptul că: pentru orice ordine \leq , \geq este tot o ordine, cu ordinea strictă asociată $>$ si relația de succesiune $>$, \leq este totală ddacă \geq este totală, pentru orice $X \subseteq A$, minoranții lui (X, \leq) sunt exact majoranții lui (X, \geq) și vice-versa, elementele mininale ale lui (X, \leq) sunt exact elementele maxinale ale lui (X, \geq) și vice-versa, $\min(X, \leq) = \max(X, \geq)$ și vice-versa (există simultan, i. e. $\min(X, \leq)$ există ddacă $\max(X, \geq)$ există, și, atunci când există, sunt egale; la fel vice-versa), $\inf(X, \leq) = \sup(X, \geq)$ și vice-versa (de asemenea, există simultan). Se spune că noțiunile de minorant și majorant sunt *duale una alteia*, și la fel pentru noțiunile de element minimal și element maximal, minim și maxim, infimum și supremum, respectiv.

18

Remarca 10.1. Cu notațiile din definiția de mai sus, f este funcție antitonă ddacă este morfism între posetul (A, \leq) și posetul dual lui (B, \sqsubseteq) , anume (B, \sqsupseteq) , unde $\sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Remarca 10.2. Compunerea a două funcții izotone este o funcție izotonă.

Exercițiul 10.1 (temă). Orice funcție izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.

I. e., dacă:

- (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) sunt două poseturi,
- $< := \leq \Delta_A$ și $\sqsubset := \sqsubseteq \Delta_B$ sunt ordinele stricte asociate lui \leq și, respectiv, \sqsubseteq ,
- iar $f : A \rightarrow B$ este o funcție izotonă injectivă,

atunci, pentru orice $x, y \in A$:

$$x < y \text{ implică } f(x) \sqsubset f(y).$$

Definiția 10.2. O funcție între două poseturi se numește **izomorfism de ordine** sau **izomorfism de poseturi** ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic **izomorfe**.

Exercițiul 10.2 (temă). Fie $f : L \rightarrow M$ o funcție bijectivă izotonă între două poseturi (L, \leq) și (M, \sqsubseteq) . Arătați că, dacă (L, \leq) este lanț, atunci inversa lui f , f^{-1} , este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.

Exercițiul 10.3 (temă). Fie $f : L \rightarrow M$ o funcție surjectivă izotonă între două poseturi (L, \leq) și (M, \sqsubseteq) . Arătați că, dacă (L, \leq) este lanț, atunci (M, \sqsubseteq) este lanț.

Remarca 10.3. Orice izomorfism de poseturi păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare.

Exercițiul 10.4 (Teorema Knaster–Tarski (temă)). Fie (L, \leq) un poset, iar $f : L \rightarrow L$ o funcție izotonă.

Dacă există în posetul (L, \leq) $\inf\{x \in L \mid f(x) \leq x\} \stackrel{\text{not}}{=} a \in L$, atunci:

- $f(a) = a$ (i. e. a este **punct fix** al lui f) și $a = \min\{x \in L \mid f(x) \leq x\}$;
- dacă $b \in L$ a. i. $f(b) = b$, atunci $a \leq b$ (i. e. a este cel mai mic punct fix al lui f).

Și **dual**: dacă există în posetul (L, \leq) $\sup\{x \in L \mid x \leq f(x)\} \stackrel{\text{not}}{=} c \in L$, atunci :

- $f(c) = c$ (i. e. c este **punct fix** al lui f) și $c = \max\{x \in L \mid x \leq f(x)\}$;
- dacă $d \in L$ a. i. $f(d) = d$, atunci $d \leq c$ (i. e. c este cel mai mare punct fix al lui f).

Mnemonic despre mulțimi parțial ordonate (poseturi):

Definiția 10.3. Se numește **mulțime (parțial) ordonată sau poset** (de la englezescul "partially ordered set") o pereche (A, \leq) formată dintr-o mulțime A și o **relație de ordine** \leq pe A , i. e.:

- este o **relație binară** pe A : $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ și $y \leq z$ implică $x \leq z$
- este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ și $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relația de ordine \leq este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci (A, \leq) se numește **mulțime total ordonată** sau **mulțime liniar ordonată** sau **lanț**.

Relația de ordine strictă asociată ordinii \leq este $< \stackrel{\text{not}}{=} \leq \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}$.

Relația de succesiune asociată ordinii \leq este $< \stackrel{\text{not}}{=} \leq \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\exists a \in A) (x < a < y)\}$.

Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} \geq \Delta_A$ și $> := <^{-1}$.

Remarca 10.4. Cu notațiile din definiția anterioară, avem:

- \geq este o relație de ordine pe A
- $>$ este relația de ordine strictă asociată lui \geq
- $>$ este relația de succesiune asociată lui \geq

11 Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Pe tot parcursul acestei secțiuni, (A, \leq) va fi un poset mărginit (implicit nevid) arbitrar.

Următoarea definiție o generalizează pe cea din Cursul III în care posetul de referință era $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, cu T mulțime arbitrară.

Definiția 11.1. • Se numește *sistem de închidere pe posetul mărginit* (A, \leq) o submulțime a lui A închisă la infimumuri arbitrare, i. e. o mulțime $M \subseteq A$ cu proprietatea că, pentru orice $S \subseteq M$, există în (A, \leq) $\inf(S) \in M$.

- Se numește *operator de închidere pe posetul mărginit* (A, \leq) o funcție $C : A \rightarrow A$, astfel încât, pentru orice $x, y \in A$, au loc proprietățile:
 - $C(C(x)) = C(x)$ (C este *idempotentă*);
 - $x \leq C(x)$ (C este *extensivă*);
 - dacă $x \leq y$, atunci $C(x) \leq C(y)$ (C este *izotonă*).

Remarca 11.1. Orice sistem de închidere pe (A, \leq) conține $\inf(\emptyset) = \max(A)$, așadar orice sistem de închidere pe (A, \leq) este nevid.

Exemplul 11.1. • id_A este un operator de închidere pe (A, \leq) .

- Funcția constantă $C : A \rightarrow A$, pentru orice $x \in A$, $C(x) := \max(A)$, este un operator de închidere pe (A, \leq) .
- A este un sistem de închidere pe (A, \leq) .
- $\{\max(A)\}$ este un sistem de închidere pe (A, \leq) .
- \emptyset nu este un sistem de închidere pe (A, \leq) .

Propoziția 11.1. Dacă M este un sistem de închidere pe (A, \leq) , atunci, pentru orice $x \in A$, există în (A, \leq) $\min\{m \in M \mid x \leq m\} = \inf\{m \in M \mid x \leq m\}$.

Iar, dacă definim $C_M : A \rightarrow A$ prin: oricare ar fi $x \in A$, $C_M(x) = \min\{m \in M \mid x \leq m\}$, atunci C_M este un operator de închidere pe (A, \leq) .

Propoziția 11.2. Fie $C : A \rightarrow A$ un operator de închidere pe (A, \leq) . Atunci imaginea lui C este un sistem de închidere pe (A, \leq) , având ca elemente exact punctele fixe ale lui C : $C(A) = \{x \in A \mid x = C(x)\}$. Vom nota cu $M_C = C(A)$.

Propoziția 11.3. Aplicațiile din cele două propoziții precedente sunt inverse una alteia, adică:

- pentru orice operator de închidere $C : A \rightarrow A$ pe (A, \leq) , $C_{M_C} = C$;
- pentru orice sistem de închidere M pe (A, \leq) , $M_{C_M} = M$.

Așadar aceste aplicații sunt bijecții, deci mulțimea operatorilor de închidere pe (A, \leq) și mulțimea sistemelor de închidere pe (A, \leq) sunt în bijecție.

precum și definițiile, notațiile și rezultatele următoare:

- se folosește următoarea convenție: dacă o mulțime A este suportul unei structuri algebrice \mathcal{A} , atunci prin A vom înțelege deopotrivă mulțimea A și structura algebrică \mathcal{A} , în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* dacă mulțimea ei suport este nevidă, respectiv finită;
- pentru orice mulțime A , notăm cu $|A|$ cardinalul lui A , iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulțimea părților lui A);
- pentru orice mulțimi A și B , vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecție cu B , care se transcrie prin: $|A| = |B|$;
- pentru orice mulțime A , notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulțimi* aici, produsul direct al unei mulțimi cu ea însăși; în general, notăm cu $A^1 = A$ și cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulțimi* (se definește și A^0 , care este un singleton, i. e. o mulțime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, și produsele directe de structuri algebrice, precum și puterile naturale ale unei structuri algebrice;
- pentru orice mulțime A , o *relație binară pe* A este o submulțime a lui A^2 ;
- dacă A este o mulțime și $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a \rho b$ și se citește *a este în relația ρ cu b*;
- pentru orice mulțime A , se notează cu Δ_A relația binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ și numită *diagonala lui A*; Δ_A este relația de **egalitate** pe A : pentru orice $a, b \in A$, avem: $a \Delta_A b$ dacă $a = b$;
- pentru orice mulțime A , se notează cu id_A *funcția identică a lui A*, i. e. funcția $id_A : A \rightarrow A$ definită prin: $id_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$; ca relație binară pe A , id_A coincide cu Δ_A ;
- o relație binară ρ pe o mulțime A se zice:
 - reflexivă* dacă orice $x \in A$ are proprietatea $x \rho x$;
 - ireflexivă* dacă nu există $x \in A$ cu proprietatea că $x \rho x$;
 - simetrică* dacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$, atunci $y \rho x$;
 - antisimetrică* dacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$ și $y \rho x$, atunci $x = y$;
 - asimetrică* dacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;
 - transitivă* dacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x \rho y$ și $y \rho z$, atunci $x \rho z$;
- o relație binară ρ pe o mulțime A se numește:
 - (relație de) preordine* dacă este reflexivă și tranzitivă;
 - (relație de) echivalență* dacă este o preordine simetrică;
 - (relație de) ordine (parțială)* dacă este o preordine antisimetrică;
 - (relație de) ordine totală (sau liniară)* dacă este o relație de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x \rho y$ sau $y \rho x$;
- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se definește *inversa lui ρ* ca fiind relația binară pe A notată cu ρ^{-1} și dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;

Acest breviar nu conține toate noțiunile care apar în cursul de Logică Matematică și Computațională, dar vă amintește unele noțiuni de bază din acest curs!

Vom folosi notația “ddacă” drept prescurtare pentru sintagma “dacă și numai dacă”. Amintim abrevierea “i. e.” (“id est”), semnificând “adică”. Vom nota cu \mathbb{N} mulțimea numerelor naturale și cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulțimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\bar{a}, \bar{b} = \{a, a+1, \dots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$. Amintim abrevierea $\exists!$, cu semnificația “există și este unic”; $\exists!$ nu este un cuantificator. Amintim denumirile alternative:

- *algebră* \equiv *structură algebrică*;
- *relație de ordine* \equiv *relație de ordine parțială*;
- *relație de ordine totală* \equiv *relație de ordine liniară*;
- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) \equiv *mulțime parțial ordonată* \equiv *mulțime ordonată* (i. e. mulțime înzestrată cu o relație de ordine pe ea);
- *lanț* \equiv *mulțime liniar ordonată* \equiv *mulțime total ordonată*;
- *funcție izotonă* \equiv *funcție care păstrează ordinea* \equiv *funcție crescătoare*;
- *algebră Boole* \equiv *algebră booleană*;
- *morfism boolean* \equiv *morfism de algebre Boole*;

noțiunile generice:

- dacă o structură algebrică \mathcal{A} are mulțimea *subiacentă* (i. e. *mulțimea suport*, adică mulțimea elementelor) A și este înzestrată cu un set de operații și relații, atunci o *structură algebrică subiacentă a lui \mathcal{A}* este o structură algebrică având tot mulțimea suport A și o parte dintre operațiile și relațiile structurii algebrice \mathcal{A} ;
- un *morfism de structuri algebrice* este o funcție între mulțimile suport a două structuri algebrice de același tip care comută cu operațiile acelor structuri algebrice;
- un *izomorfism de structuri algebrice* este un morfism inversabil între două algebre de același tip, i. e. un morfism care este o funcție inversabilă (deci bijectivă) și a cărei inversă este tot un morfism între acele algebre;
- o *subalgebră* a unei algebre \mathcal{A} este o submulțime S a mulțimii suport a lui \mathcal{A} închisă la operațiile algebrei \mathcal{A} ; S devine astfel algebră de același tip cu \mathcal{A} cu operațiile induse pe S de operațiile lui \mathcal{A} , i. e. restricțiile operațiilor algebrei \mathcal{A} la mulțimea S ;
- o *congruență* a unei algebre \mathcal{A} este o relație de echivalență (a se vedea mai jos) pe mulțimea suport a lui \mathcal{A} compatibilă cu operațiile algebrei \mathcal{A} , ceea ce permite ca mulțimea factor (a se vedea mai jos) a mulțimii subiacente lui \mathcal{A} prin acea relație de echivalență să fie organizată în mod canonic ca algebră de același tip cu \mathcal{A} ;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A și orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ dacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;
- pentru orice relații binare ρ și σ pe o mulțime A , avem:
 - $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
 - $\rho \subseteq \sigma$ dacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
 - $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relații binare pe A , $(\bigcup_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
 - $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relații binare pe A , $(\bigcap_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecției cu inversarea);
- inversa unei relații de ordine notate \leq se notează, uzual, cu \geq ;
- pentru orice mulțime A și orice relații binare ρ și σ pe A , compunerea dintre relațiile binare ρ și σ se notează cu $\rho \circ \sigma$ și se definește astfel: $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists b \in A) ((a, b) \in \sigma \text{ și } (b, c) \in \rho)\}$;
- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ și $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;
- dată o relație binară ρ pe o mulțime A , au loc echivalențele:
 - ρ este reflexivă dacă $\Delta_A \subseteq \rho$;
 - ρ este ireflexivă dacă $\Delta_A \cap \rho = \emptyset$;
 - ρ este simetrică dacă $\rho \subseteq \rho^{-1}$ dacă $\rho^{-1} \subseteq \rho$ dacă $\rho = \rho^{-1}$;
 - ρ este antisimetrică dacă $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$;
 - ρ este asimetrică dacă $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$;
 - ρ este tranzitivă dacă $\rho^2 = \rho \circ \rho \subseteq \rho$;
- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se numește *închiderea reflexivă/simetrică/transitivă a lui ρ* cea mai mică (în sensul incluziunii) relație binară reflexivă/simetrică/transitivă pe A care include pe ρ ;
- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , *închiderea reflexivă/simetrică/transitivă a lui ρ* se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;
- dată o relație binară ρ pe o mulțime A , au loc echivalențele:
 - ρ este reflexivă dacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;
 - ρ este simetrică dacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;
 - ρ este tranzitivă dacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;
- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A :
 - $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;
 - $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;
 - $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$;

- pentru orice mulțime nevidă A , o *partiție a lui A* este o familie nevidă de părți nevide ale lui A două câte două disjuncte și având reuniunea egală cu A ; vom nota mulțimea partițiilor lui A cu $\text{Part}(A)$;
- pentru orice mulțime A , notăm cu $\text{Eq}(A)$ mulțimea relațiilor de echivalență pe A ;
- pentru orice mulțime A , dacă $\sim \in \text{Eq}(A)$, atunci, oricare ar fi $x \in A$, se definește *clasa de echivalență a lui x în raport cu \sim* ca fiind mulțimea elementelor lui A care sunt în relația \sim cu x ; pentru orice $x \in A$, se notează cu x/\sim sau cu \bar{x} clasa de echivalență a lui x în raport cu \sim , i. e.: $\bar{x} = \{y \in A \mid y \sim x\} = \{y \in A \mid x \sim y\}$ (are loc a doua egalitate pentru că \sim , fiind relație de echivalență, în particular este simetrică);
- pentru orice mulțime A și orice $\sim \in \text{Eq}(A)$, se notează cu A/\sim *mulțimea factor* (sau *cât*) *a lui A prin \sim* , i. e. mulțimea claselor de echivalență ale relației de echivalență \sim : $A/\sim = \{\bar{x} \mid x \in A\}$ (A/\sim se obține prin “împărțirea” lui A în clasele de echivalență ale lui \sim); A/\sim este o partiție a lui A ;
- pentru orice mulțime nevidă A , $\text{Eq}(A) \cong \text{Part}(A)$, întrucât funcția $\varphi : \text{Eq}(A) \rightarrow \text{Part}(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/\sim$ pentru orice $\sim \in \text{Eq}(A)$, este o bijecție; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice $\pi = (A_i)_{i \in I} \in \text{Part}(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relația de echivalență pe A care are drept clase mulțimile A_i , cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$, adică: $x \sim y$ ddacă x și y se află într-o aceeași mulțime din familia $(A_i)_{i \in I}$;
- un *poset* este o mulțime înzestrată cu o relație de ordine; un *lanț* este o mulțime înzestrată cu o relație de ordine totală;
- o *funcție izotonă* între două poseturi este o funcție între acele poseturi care păstrează ordinea; un *izomorfism de poseturi* este o funcție izotonă bijectivă și cu inversa izotonă între acele poseturi;
- pentru orice n natural nenul, notăm cu \mathcal{L}_n lanțul cu n elemente și cu L_n mulțimea suport a lui \mathcal{L}_n ; L_n este unic modulo un *izomorfism de poseturi*, i. e. între oricare două lanțuri cu n elemente există un izomorfism de poseturi;
- pentru orice poset (P, \leq) , notăm cu $<$ *relația de ordine strictă asociată lui \leq* , i. e. relația binară pe mulțimea P definită prin: $< = \setminus \Delta_P = \{(a, b) \mid a, b \in P, a < b, a \neq b\}$, și cu $<$ *relația de succesiune* asociată lui \leq , i. e. relația binară pe mulțimea P definită prin: $< = \{(a, b) \mid a, b \in P, a < b, (\nexists x \in P) (a < x < b)\}$;
- notăm laticile sub forma (L, \vee, \wedge, \leq) sau (L, \vee, \wedge) , laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, cu semnificația uzuală pentru fiecare simbol din aceste notații;
- legătura dintre operațiile binare \vee și \wedge și relația de ordine \leq în orice latică (L, \vee, \wedge, \leq) este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalențele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- *duala unei latici* (L, \vee, \wedge) este latică (L, \wedge, \vee) ;
- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ și $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge)$ sunt două latici, atunci o funcție $f : L \rightarrow M$ este un *morfism de latici* între \mathcal{L} și \mathcal{M} ddacă, pentru orice $x, y \in L$, au loc:
$$\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \text{ și} \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y); \end{cases}$$
- izomorfismele de latici coincid cu morfismele bijective de latici, precum și cu izomorfismele de poseturi între poseturile subiacente acelor latici;

- se numește *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul (B, \leq) , adică un element $a \in B$ cu $0 < a$ (i. e. astfel încât $0 < a$ și nu există niciun $x \in B$ cu proprietatea că $0 < x < a$);
- de exemplu, dacă notăm cu $L_2 = \{0, 1\}$ mulțimea suport a lanțului cu 2 elemente, \mathcal{L}_2 , astfel că $L_2^B = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}\}$ este mulțimea subiacentă a algebrei Boole \mathcal{L}_2^B , atunci atomii lui \mathcal{L}_2^B sunt $(0, 0, \dots, 0, 0, 1)$, $(0, 0, \dots, 0, 1, 0)$, \dots , $(1, 0, \dots, 0, 0, 0)$; mai general, pentru orice mulțime I , atomii algebrei Boole \mathcal{L}_2^I sunt familiile de cifre binare $(x_k)_{k \in I} \in L_2^I$ cu proprietatea că $(\exists! k \in I) (x_k = 1)$;
- se numește *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ o submulțime nevidă F a lui B închisă la conjuncție și la majorare, i. e. o mulțime F cu proprietățile:
 - $\emptyset \neq F \subseteq B$;
 - pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;
 - pentru orice $x \in F$ și orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;
 mulțimea filtrelor lui \mathcal{B} se notează cu $\text{Filt}(\mathcal{B})$;
- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conține elementul 1;
- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ și orice $a \in B$, mulțimea notată $[a] = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui \mathcal{B} , numit *filtru principal generat de a*; notăm mulțimea filtrelor principale ale lui \mathcal{B} cu $\text{PFilt}(\mathcal{B})$;
- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale;
- se numește *congruență a unei algebre Boole* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ o relație de echivalență \sim pe B care, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, satisface proprietățile:
 - dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea lui \sim cu \vee**);
 - dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea lui \sim cu \wedge**);
 - dacă $x \sim x'$, atunci $\bar{x} \sim \bar{x'}$ (**compatibilitatea lui \sim cu \neg**);
 notăm cu $\text{Con}(\mathcal{B})$ mulțimea congruențelor lui \mathcal{B} ;
- referitor la definiția anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relații binare \sim pe B cu operațiile zeroare ale lui \mathcal{B} (i. e. constantele 0 și 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ și $1 \sim 1$, proprietăți care sunt satisfăcute nu numai de către orice relație de echivalență \sim pe B , ci chiar de către orice relație reflexivă \sim pe B ;
- mulțimea congruențelor unei algebre Boole \mathcal{B} este în bijecție cu mulțimea filtrelor lui \mathcal{B} ;
- dacă $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ este o algebră Boole, iar \sim este o congruență a lui \mathcal{B} , atunci mulțimea factor a lui \mathcal{B} prin \sim se organizează ca algebră Boole astfel: dacă, oricare ar fi $a \in B$, notăm cu \hat{a} clasa lui a în raport cu \sim , atunci, pentru orice $x, y \in B$, se definește:
 - $\hat{x} \vee \hat{y} = \widehat{x \vee y}$,
 - $\hat{x} \wedge \hat{y} = \widehat{x \wedge y}$,
 - $\bar{\hat{x}} = \widehat{\bar{x}}$,
 - $0 = \hat{0}$ și $1 = \hat{1}$;

- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, 0, 1)$ sunt două latici mărginite, atunci orice morfism surjectiv de latici de la (L, \vee, \wedge) la (M, \vee, \wedge) este morfism de latici mărginite de la \mathcal{L} la \mathcal{M} ;
- într-o latică mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ și} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puțin un complement;
- într-o latică mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;
- o latică este nedistributivă ddacă are o sublatică izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul;
- orice lanț este o latică (distributivă), cu operațiile binare $\vee = \max$ și $\wedge = \min$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, se definesc *implicația booleană*, \rightarrow , și *echivalența booleană*, \leftrightarrow , ca operații binare pe B , astfel: pentru orice $x, y \in B$:
 - $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$;
 - $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:
 - $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$ și: $\bar{\bar{x}} = x$ ddacă $x = 0$, iar: $\bar{\bar{x}} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latică mărginită, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și nu au alte complemente);
 - $\bar{\bar{x}} = x$;
 - legile lui de Morgan**: pentru orice $x, y \in B$, $\begin{cases} \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \text{ și} \\ \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}; \end{cases}$
 - $x \rightarrow y = 1$ ddacă $x \leq y$;
 - $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;
- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ și $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci o funcție $f : A \rightarrow B$ este un *morfism de algebre Boole* între \mathcal{A} și \mathcal{B} ddacă, pentru orice $x, y \in A$, au loc:
$$\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \\ f(\bar{x}) = \bar{f(x)}, \\ f(0) = 0 \text{ și } f(1) = 1; \end{cases}$$
- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ și $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci:
 - orice morfism de latici mărginite de la $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ la $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ este morfism boolean de la \mathcal{A} la \mathcal{B} ;
 - orice izomorfism de latici de la (A, \vee, \wedge) la (B, \vee, \wedge) este izomorfism boolean de la \mathcal{A} la \mathcal{B} ;
- pentru orice mulțime A , $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \neg, \emptyset, A)$ este o algebră Boole, unde am notat, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\bar{X} = A \setminus X$;
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{L}_n^A (puterea a n -a a lanțului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole \mathcal{L}_2 , numită *algebra Boole standard*;
- orice algebră Boole finită este izomorfă cu \mathcal{L}_2^n pentru un $n \in \mathbb{N}$; în particular, orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2;

- faptul că \sim este o congruență a algebrei Boole \mathcal{B} arată că operațiile de mai sus sunt bine definite, i. e. nu depind de reprezentanții claselor; $(B/\sim, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ este o algebră Boole, numită *algebra Boole factor* (sau *cât*) *a lui B prin \sim* ;
- notăm cu V mulțimea variabilelor calculului propozițional clasic;
 - notăm cu E mulțimea enunțurilor calculului propozițional clasic;
 - dată o *interpretare* în calculul propozițional clasic, i. e. o funcție $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$, notăm cu $\bar{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operații boolene;
 - se notează cu $h \models \varphi$, respectiv $h \models \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ *satisface un enunț $\varphi \in E$* , respectiv *o mulțime de enunțuri $\Sigma \subseteq E$* , i. e. $\bar{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\bar{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;
 - se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunț φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propozițională clasică;
 - se notează cu $\models \varphi$ faptul că un enunț φ este *universal adevărat* (*tautologie*, *adevăr semantic*) în logica propozițională clasică (adică orice interpretare satisface pe φ);
 - se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunț $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propozițională clasică;
 - se notează cu $\Sigma \models \varphi$ faptul că un enunț $\varphi \in E$ este *deductibil semantic* din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propozițională clasică (adică orice interpretare care satisface pe Σ satisface și pe φ);
 - pentru orice enunț $\varphi, \vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, și $\models \varphi$ ddacă $\emptyset \models \varphi$;
 - ca orice regulă de deducție scrisă în acest mod, regula de deducție **modus ponens** (abreviată **MP**) scrisă sub forma: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$, are semnificația: $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \models \psi$;
 - pentru orice mulțime $\Sigma \subseteq E$, notăm cu $(E/\sim_\Sigma, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \neg_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ algebra Lindenbaum-Tarski asociată mulținii de ipoteze Σ pentru logica propozițională clasică, despre care știm că este o algebră Boole; amintim că $\sim_\Sigma = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \text{Eq}(E)$; notăm cu $\hat{\varphi}^\Sigma \in E/\sim_\Sigma$ clasa unui enunț φ în E/\sim_Σ ;
 - cazul particular $\Sigma = \emptyset$ în cele de mai sus: notăm cu $(E/\sim_\Sigma, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ algebra Lindenbaum-Tarski a logicii propoziționale clasice, care este o algebră Boole; amintim că $\sim = \sim_\emptyset = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \text{Eq}(E)$; notăm cu $\hat{\varphi} \in E/\sim$ clasa unui enunț φ în E/\sim ;
 - pentru orice $\Sigma \subseteq E$ și orice $\varphi \in E$, are loc echivalența: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$ în algebra booleană E/\sim_Σ (**lemă din calculul propozițional clasic**);
 - caz particular: pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalența: $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$ în algebra Lindenbaum-Tarski E/\sim ;
 - pentru orice $\varphi, \psi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducției** pentru calculul propozițional clasic; abreviată **TD**);
 - pentru orice $\varphi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \models \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propozițional clasic; abreviată **TCT**); cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numește **Teorema de completitudine** a calculului propozițional clasic (**TC**);

1 Latici

- O latică este simultan un poset și o structură algebrică înzestrată cu două operații binare, fiecare dintre acestea cu anumite proprietăți specifice.
- Vom defini mai jos două tipuri de latici, anume

laticile Ore și laticile Dedekind.

Orice latică Ore poate fi organizată ca o latică Dedekind, și orice latică Dedekind poate fi organizată ca o latică Ore.

- Așadar, de fapt, există un singur fel de latică, care este simultan o latică Ore și o latică Dedekind.

Definiția 1.1. O latică Ore este un poset (L, \leq) cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\} \in L$ și $\sup\{x, y\} \in L$.

Remarca 1.1. Orice lanț este latică Ore, pentru că, dacă (L, \leq) este un lanț nevid, iar $x, y \in L$, atunci $x \leq y$ sau $y \leq x$, prin urmare există $\min\{x, y\}$ și $\max\{x, y\}$, așadar există în (L, \leq) $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.

Definiția 1.2. O latică Dedekind este o structură algebrică (L, \vee, \wedge) , unde L este o mulțime, iar \vee și \wedge sunt două operații binare pe L (adică $\vee : L^2 \rightarrow L$ și $\wedge : L^2 \rightarrow L$; aceste operații binare sunt notate infixat și numite, respectiv, sau și și, sau disjuncție și conjuncție, sau reuniune și intersecție) care satisfac următoarele proprietăți:

- **idempotență:** pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$ și $x \wedge x = x$;
- **comutativitate:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ și $x \wedge y = y \wedge x$;
- **asociativitate:** pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ și $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- **absorbție:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$.

Lema 1.1. Fie (L, \leq) un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- $x \leq y$
- există în L $\inf\{x, y\} = x$
- există în L $\sup\{x, y\} = y$

Lema 1.2. Fie (L, \vee, \wedge) o latică Dedekind. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- $x \wedge y = x$
- $x \vee y = y$

Teorema 1.1. Cele două definiții ale noțiunii de latică sunt echivalente. Mai precis, au loc următoarele fapte.

- Fie $\mathcal{L} := (L, \leq)$ o latică Ore. Definim $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, unde \vee și \wedge sunt operații binare pe mulțimea L , definite prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ în latică Ore \mathcal{L} . Atunci $\Phi(\mathcal{L})$ este o latică Dedekind.
- Fie $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ o latică Dedekind. Definim $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, unde \leq este o relație binară pe mulțimea L , definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ dacă $x \vee y = y$ (ceea ce este echivalent cu $x \wedge y = x$, după cum ne asigură o lemă de mai sus). Atunci $\Psi(\mathcal{L})$ este o latică Ore, în care, pentru orice $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ și $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
- Aplicațiile Φ și Ψ sunt inverse una alteia, adică: pentru orice latică Ore \mathcal{L} , $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$, și, pentru orice latică Dedekind \mathcal{L} , $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.

1

- mulțimea T a teoremelor formale ale logicii propoziționale clasice e satisfăcută de orice interpretare;
- o mulțime $\Sigma \subseteq E$ e *satisfiabilă* (adică există o interpretare care o satisface) ddacă Σ e *consistentă*, i. e. sistemul deductiv $\Delta(\Sigma)$ generat de Σ , anume $\Delta(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$, nu conține toate enunțurile, adică $\Delta(\Sigma) \subsetneq E$;
- pentru orice $\varphi \in E$, există o *formă normală conjunctivă (FNC)* (i. e. o conjuncție de disjuncții de *literali*, adică elemente din $V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$) $\gamma \in E$ astfel încât $\varphi \sim \gamma$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\hat{h}(\varphi) = \hat{h}(\gamma)$ pentru orice interpretare h ;
- un enunț φ în FNC e *nesatisfiabil* (i. e. nu e satisfăcut de nicio interpretare, ceea ce e echivalent cu $\models \neg \varphi$, așadar $\vdash \neg \varphi$ conform **TC**) ddacă există măcar o derivare prin rezoluție a clauzei vide \square din φ ;
- un enunț φ în FNC e satisfiabil ddacă nu există nicio derivare prin rezoluție a clauzei vide \square din φ .

Bibliografie

- [1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.
- [2] D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).
- [3] D. Bușneag, D. Piciu, *Probleme de logică și teoria mulțimilor*, Craiova (2003).
- [4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București (1974, 1975, 1976).
- [5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, București (1978).
- [6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, București (2010).
- [7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulțimilor și în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, București (1969).
- [8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București (1982).
- [9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulțimilor*, Editura Universității din București (1996).
- [10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică și computațională, precum și celelalte articole din *Revista de logică*, publicație online.
- [11] Cursurile de logică matematică și computațională de pe site-ul Facultății de Matematică și Informatică a Universității din București (pe serverul de cursuri: *moodle*).

- De acum încolo, vom numi orice latică Ore și orice latică Dedekind, simplu, *latică*.
- Conform teoremei anterioare, orice latică este simultan o latică Ore și o latică Dedekind.
- Ori de câte ori va fi dată o latică, vom lucra cu ordinea ei parțială (care o face latică Ore) și cu operațiile ei binare (disjuncția și conjuncția, care o fac latică Dedekind) fără a specifica la care dintre cele două definiții echivalente ale unei latici ne vom referi într-un anumit moment.
- Pentru orice latică L , vom folosi oricare dintre notațiile: (L, \leq) , (L, \vee, \wedge) și (L, \vee, \wedge, \leq) , în funcție de ce trebuie specificat despre structura de latică a lui L : ordinea ei parțială \leq , operațiile ei binare \vee și \wedge , sau toate acestea.

Exemplul 1.1. Cu ultima dintre notațiile de mai sus, următoarele structuri sunt latici:

- $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$, pentru orice mulțime T ;
- orice lanț (L, \max, \min, \leq) .

Propoziția 1.1 (două inegalități nestricte și de același sens într-o latică se pot compune cu \vee , precum și cu \wedge , membru cu membru; altfel spus, relația de ordine într-o latică este compatibilă cu \vee și cu \wedge). Pentru orice elemente x, y, a, b ale unei latici (L, \vee, \wedge, \leq) , dacă $x \leq a$ și $y \leq b$, atunci $x \wedge y \leq a \wedge b$ și $x \vee y \leq a \vee b$.

Principiul dualității pentru latici:

În concordanță cu **Principiul dualității pentru poseturi**, următoarele noțiuni legate de definiția unei latici sunt duale unele față de celelalte: \vee și \wedge , \leq și \geq , respectiv, unde, ca și la enunțarea **Principiului dualității pentru poseturi**, am notat $\geq := \leq^{-1}$.

Pentru a exprima acest fapt mai precis, dacă (L, \vee, \wedge, \leq) este o latică, atunci este imediat, din definiția unei latici și **principiul dualității pentru poseturi**, că (L, \wedge, \vee, \geq) este, de asemenea, o latică, iar această latică se numește *duala* latici (L, \vee, \wedge, \leq) .

Este evident că duala dualiei unei latici (L, \vee, \wedge, \leq) este chiar (L, \vee, \wedge, \leq) .

Aceste fapte ne conduc la **Principiul dualității pentru latici**: orice rezultat privind o latică arbitrară (L, \vee, \wedge, \leq) rămâne valabil dacă în el inter schimbăm \vee cu \wedge și \leq cu \geq .

Ca și la **Principiul dualității pentru poseturi**, este esențial ca latică să fie **arbitrară**, adică acest principiu se referă în mod strict la rezultate valabile în toate laticile.

De acum încolo, ori de câte ori vom apela la **Principiul dualității pentru latici**, vom scrie, simplu, “prin dualitate”.

2 Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiția 2.1. Fie (L, \vee, \wedge) și (M, \cup, \cap) două latici și $f : L \rightarrow M$ o funcție.

f se numește *morfism de latici* ddacă f comută cu operațiile de latici, i. e.: pentru orice $x, y \in L$,

- $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$
și
- $f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$.

Un morfism de latici de la o latică la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici.

Remarca 2.1. Compunerea a două morfisme de latici este un morfism de latici.

Remarca 2.2. Orice morfism de latici este funcție izotună, dar nu și reciproc.

Definiția 2.2. Un *izomorfism de latici* este un morfism de latici inversabil, i. e. un morfism de latici care este o funcție inversabilă și a cărei inversă este tot un morfism de latici.

Un *automorfism de latici* este un izomorfism de latici între o latică și ea însăși (adică un endomorfism de latici inversabil).

Definiția 2.3. Două latici între care există un izomorfism de latici se zic *izomorfe*.

În general, oricare două structuri algebrice de același tip între care există un izomorfism se vor zice *izomorfe*.

Propoziția 2.1. O funcție între două latici este un izomorfism de latici ddacă este un morfism bijectiv de latici, adică un morfism de latici care este funcție bijectivă.

Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici este, de asemenea, un morfism de latici.

Propoziția 2.2. O funcție între două latici este izomorfism de latici ddacă este izomorfism de ordine (între poseturile subnuclee celor două latici).

3 Latici mărginite

Definiția 3.1. Un poset mărginit care este latică se numește *latică mărginită*.

Dacă există, primul element al (adică minimul) unei latici se notează, de obicei, cu 0.

Dacă există, ultimul element al (adică maximum) unei latici se notează, de obicei, cu 1.

O latică mărginită va fi notată $(L, \leq, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, cu notațiile prezentate mai sus.

O latică mărginită se mai numește *latică* cu 0 și 1 sau *latică cu prim și ultim element*.

Definiția 3.2. Latică mărginită cu un singur element (adică latică mărginită cu $0 = 1$) se numește *latică mărginită trivială*.

Orice latică mărginită de cardinal strict mai mare decât 1 (adică orice latică mărginită în care $0 \neq 1$) se numește *latică mărginită netrivială*.

Definiția 3.3. Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \cup, \cap, \perp, \top)$ două latici mărginite și $f : L \rightarrow M$ o funcție.

f se numește *morfism de latici mărginite* ddacă este morfism de latici și $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$.

Un morfism de latici mărginite de la o latică mărginită la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici mărginite.

Remarca 3.1. Compunerea a două morfisme de latici mărginite este un morfism de latici mărginite.

Definiția 3.4. Un *izomorfism de latici mărginite* este un morfism de latici mărginite inversabil, i. e. un morfism de latici mărginite care este o funcție inversabilă a cărei inversă este tot un morfism de latici mărginite.

Un *automorfism de latici mărginite* este un izomorfism de latici mărginite între o latică mărginită și ea însăși (adică un endomorfism de latici mărginite inversabil).

Definiția 3.5. Două latici mărginite între care există un izomorfism de latici mărginite se zic *izomorfe*.

Propoziția 3.1. O funcție între două latici mărginite este un izomorfism de latici mărginite ddacă este un morfism bijectiv de latici mărginite, adică un morfism de latici mărginite care este funcție bijectivă.

Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici mărginite este, de asemenea, un morfism de latici mărginite.

Remarca 3.2. De fapt, conform următoarei remarci, izomorfismele de latici mărginite coincid cu izomorfismele de latici între latici mărginite, i. e.: orice izomorfism de latici între două latici mărginite este izomorfism de latici mărginite.

Remarca 3.3. Am văzut că orice funcție izotună păstrează minimele și maximele arbitrare.

Prin urmare, orice funcție izotună surjectivă între două poseturi mărginite păstrează minimul și maximum, i. e. duce minimul primului poset în minimul celui de-al doilea poset, și duce maximum primului poset în maximum celui de-al doilea poset.

Remarca 3.4. Am afirmat la un moment dat că ordinea totală pe o mulțime finită este unică, modulo o permutare a elementelor mulținii (desigur, și există o astfel de ordine totală).

Semnificația acestei afirmații este că oricare două lanțuri finite cu aceeași mulțime suport sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru, pentru că știm că izomorfismele de ordine coincid cu izomorfismele de latici), adică: pentru orice mulțime finită A , dacă \leq și \sqsubseteq sunt ordini totale pe A , atunci poseturile (laticile) (A, \leq) și (A, \sqsubseteq) sunt izomorfe.

Ca o consecință imediată, oricare două lanțuri finite de același cardinal (i. e. cu același număr de elemente, aici, în cazul finit) sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru), adică, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, lanțul cu n elemente este unic, modulo un izomorfism (altfel spus, până la un izomorfism), i. e. oricare două lanțuri cu n elemente sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru; deci și ca latici mărginite, conform remarcii anterioare).

4 Sublatici și sublatici mărginite

Definiția 4.1. Dată o latică (L, \vee, \wedge) , o submulțime M a lui L se numește *sublatică* a lui L ddacă este închisă la operațiile de latică ale lui L , adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$.

Data o latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, o submulțime M a lui L se numește *sublatice mărginită a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice mărginită ale lui L , adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$;
- $0, 1 \in M$.

Remarca 4.1. Este imediat că o sublatice (mărginită) M a unei latici (mărginite) L este o latice (mărginită) cu operațiile *induse* pe M de operațiile lui L , adică restricțiile operațiilor lui L la M :

- restricția lui \vee la M este operația binară \sqcup pe M , definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcup y := x \vee y$;
- restricția lui \wedge la M este operația binară \sqcap pe M , definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcap y := x \wedge y$;
- pentru latici mărginite: restricția lui 1 la M la M este 1 (aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente); restricția lui 0 la M la M este 0 (și aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente).

Operațiile induse se notează, de obicei, la fel ca operațiile latici L :

- operația \sqcup , definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu \vee ;
- operația \sqcap , definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu \wedge ;
- în cazul laticilor mărginite, primul și ultimul element al sublaticii mărginite M , ca prim și, respectiv, ultim element al latici mărginite M , se notează, de obicei tot cu 0 și 1 , respectiv.

Remarca 4.2. Cu notațiile din remarca anterioară, este trivial că ordinea parțială a unei sublatici M a lui L (ca latice cu operațiile induse de cele ale lui L) este exact ordinea parțială a lui L restricționată la M , care (amintim) se notează, în mod uzual, la fel ca ordinea parțială a lui L :

- notând cu \sqsubseteq ordinea latici M , pentru orice $x, y \in M$, avem: $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \sqcup y = y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \leq y$;
- deci ordinea \sqsubseteq a latici M este, într-adevăr, restricția lui \leq la M , și \sqsubseteq se notează, de obicei, tot cu \leq .

Remarca 4.3. Orice submulțime a unei latici L este (sub)poset cu ordinea indusă, dar nu este neapărat și sublatice, pentru că poate să nu conțină infimumurile și supremumurile din L ale perechilor de elemente ale sale.

Exercițiul 4.1 (temă). Orice submulțime total ordonată a unei latici L este sublatice a lui L .

Exercițiul 4.2 (temă). Să se demonstreze că:

- imaginea unui morfism de latici (mărginite) este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelu morfism;
- mai general: imaginea printr-un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a domeniului său este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelu morfism;
- preimaginea printr-un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a codomeniului său este o sublatice (mărginită) a domeniului acelu morfism.

(Desigur, preimaginea întregului codomeniu este întregul domeniu (pentru orice funcție), deci acest caz particular la punctul (iii) este trivial.)

5 Latici distributive

Propoziția 5.1. În orice latice (L, \vee, \wedge) , următoarele două afirmații, numite legile de distributivitate, sunt echivalente:

- pentru orice $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- pentru orice $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Definiția 5.1. O latice se zice *distributivă* ddacă satisface una (și deci pe amândouă) dintre condițiile (d_1) și (d_2) din propoziția precedentă.

4

- *produsul direct* al poseturilor (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) , notat $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$, unde $\leq \times \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe mulțimea produs direct $A \times B$: $\leq \times \sqsubseteq := \{(a_1, b_1), (a_2, b_2) \mid a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, a_1 \leq a_2, b_1 \sqsubseteq b_2\}$.

În cazul în care (A, \leq) are un maxim, pe care îl notăm cu 1 , iar (B, \sqsubseteq) are un minim, pe care îl notăm cu 0 , atunci suma *ordinală* a poseturilor (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) , notată $(A, \leq) + (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \sqcup B \setminus \{0\}, \leq + \sqsubseteq)$, unde $\leq + \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \sqcup B \setminus \{0\}$, cu aceleași identificări ca mai sus: $\leq + \sqsubseteq := \leq \cup \sqsubseteq \setminus \{(0, b) \mid b \in B\} \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Observația 5.1. Definiția de mai sus a relației binare $\leq \times \sqsubseteq$ este un caz particular al definiției unui produs direct arbitrar de relații binare, prezentate într-un curs anterior.

Remarca 8.1 (temă). Cu notațiile din definiția anterioară, relațiile binare sumă directă, $\leq \oplus \sqsubseteq$, produs direct, $\leq \times \sqsubseteq$, și sumă ordinală, $\leq + \sqsubseteq$, sunt **relații de ordine** pe $A \sqcup B$, $A \times B$ și $(A \sqcup B \setminus \{0\})$, respectiv. Adică: $(A \sqcup B, \leq \oplus \sqsubseteq)$, $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ și $(A \sqcup B \setminus \{0\}, \leq + \sqsubseteq)$ sunt **poseturi**.

Remarca 8.2 (temă). Se observă că:

- **suma directă și suma ordinală de poseturi sunt asociative, dar nu sunt comutative;**
- **produsul direct de poseturi este asociativ și comutativ, până la un izomorfism de poseturi,** i. e., pentru orice poseturi (A, \leq_A) , (B, \leq_B) și (C, \leq_C) , există un izomorfism de poseturi între $((A \times B) \times (B \times C)) \times (C \times C)$ și $(A, \leq_A) \times ((B \times B) \times (C \times C))$ (anume $f : (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$, pentru orice $a \in A, b \in B$ și $c \in C$, $f((a, b), c) = (a, (b, c))$) și există un izomorfism de poseturi între $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B)$ și $(B, \leq_B) \times (A, \leq_A)$ (anume $g : A \times B \rightarrow B \times A$, pentru orice $a \in A$ și $b \in B$, $g(a, b) = (b, a)$).

Se demonstrează simplu că și **produsul direct** de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (structuri pe care le vom studia mai târziu) **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism**, în aceste cazuri un izomorfism de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (a se vedea următoarea parte a acestui curs pentru definiția unui produs direct de algebre).

Remarca 8.3 (temă). Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) două poseturi.

- Dacă $|A| \geq 2$ și $|B| \geq 2$, atunci produsul direct $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu este lanț.
- Dacă A este un singleton (i. e. o mulțime cu un singur element), atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și (B, \sqsubseteq) sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism de poseturi între ele).
- Dacă B este un singleton, atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și (A, \leq) sunt izomorfe.
- Dacă $A = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (A, \leq)$.
- Dacă $B = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (B, \sqsubseteq)$.

Remarca 8.4. Remarca anterioară arată că lanțurile sunt **indecompozabile** raportat la produsul direct (i. e. lanțurile nu pot fi descompuse în produs direct de alte poseturi), pentru că, dacă un lanț arevid (L, \leq) este izomorf cu un produs direct de poseturi, atunci toate acele poseturi sunt nevide, iar unul dintre ele este izomorf cu (L, \leq) și fiecare dintre celelalte are câte un singur element.

A se vedea în curs cum arată **diagramele Hasse ale poseturilor sumă directă, produs direct și sumă ordinală între două poseturi finite**.

Definiția 8.2. **Produsul direct** poate fi generalizat la **familii arbitrare de poseturi**, astfel: fie $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ o familie arbitrară de poseturi. Atunci se definește *produsul direct* al acestei familii, notat $\prod_{i \in I} (A_i, \leq_i)$, ca fiind

$$\left(\prod_{i \in I} A_i, \leq \right), \text{ unde } \leq := \prod_{i \in I} \leq_i \text{ este următoarea relație binară pe produsul direct de mulțimi } \prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (f(i) \in A_i)\} : \text{ pentru orice } f, g \in \prod_{i \in I} A_i, \\ f \leq g \text{ ddacă } (\forall i \in I) (f(i) \leq_i g(i))$$

După cum știm din rezultatul privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare, relația \leq definită mai sus este o **relație de ordine** pe $\prod_{i \in I} A_i$, deci $(\prod_{i \in I} A_i, \leq) = \prod_{i \in I} (A_i, \leq_i)$ este un **poset**.

6

Remarca 5.1. A se observa că egalitățile din legile de distributivitate **nu** sunt echivalente pentru orice $x, y, z \in L$, ci este necesar ca fiecare dintre aceste egalități să fie satisfăcută **pentru orice** $x, y, z \in L$ pentru a rezulta că și cealaltă este satisfăcută (de asemenea, pentru orice $x, y, z \in L$).

Remarca 5.2. Pentru orice mulțime T , latica $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este distributivă.

Remarca 5.3. Orice lanț este o latice distributivă.

Remarca 5.4. Orice sublatice a unei latici distributive este distributivă.

Remarca 5.5. Imaginea oricărei latici distributive printr-un morfism de latici este o latice distributivă.

A se vedea în curs diagramele Hasse ale *diamantului* și *pentagonului* – cele mai mici latici nedistributive, întrucât:

Propoziția 5.2 (caracterizare a laticilor distributive). O latice L este distributivă ddacă nu are nicio sublatice izomorfă cu *diamantul* sau cu *pentagonul*.

6 Elemente complementate în latici mărginite

Definiția 6.1. Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ latice mărginită.

Un element $x \in L$ se zice *complementat* ddacă există un element $y \in L$ a. i. $x \vee y = 1$ și $x \wedge y = 0$.

Un astfel de element y se numește *complement* al lui x .

O latice mărginită se zice *complementată* ddacă toate elementele sale sunt complementate.

Remarca 6.1. În mod evident, dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită și $x, y \in L$ sunt a. i. y este un complement al lui x , atunci x este un complement al lui y , după cum arată comutativitatea lui \vee și \wedge .

Remarca 6.2. În orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, 0 și 1 sunt complemente unul aluia și niciunul dintre ele nu are alte complemente.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite:

Remarca 6.3. În orice latice distributivă mărginită, complementul unui element, dacă există, este unic.

7 Latici complete

Definiția 7.1. O latice (L, \leq) se zice *completă* ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, există $\inf(A)$ și $\sup(A)$ în posetul (L, \leq) . Pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ se mai notează cu $\bigwedge_{x \in A} x$, iar $\sup(A)$ se mai notează cu $\bigvee_{x \in A} x$.

Exemplul 7.1. Pentru orice mulțime T , latica $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, T)$ este mărginită, distributivă și completă.

Remarca 7.1. • Orice latice completă (L, \leq) este nevidă și mărginită, pentru că există $\inf(L) \in L$ și $\sup(L) \in L$, deci acestea sunt respectiv $\min(L) = 0$ și $\max(L) = 1$, cu notația clasică pentru primul și ultimul element al unei latici.

- Orice latice finită și nevidă este completă, pentru că, după cum am demonstrat mai sus, orice latice nevidă conține infimumurile și supremumurile tuturor submulțimilor sale finite și nevide și, în plus, orice latice finită și nevidă are prim și ultim element, iar acestea sunt, respectiv, supremumul și infimumul mulținii vide.

- O latice (L, \leq) este completă ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în (L, \leq) , ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în (L, \leq) .

8 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Definiția 8.1. Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) două poseturi. Se definește:

- **suma directă** a poseturilor (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) , notată $(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \sqcup B, \leq \oplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \oplus \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \sqcup B$: $\leq \oplus \sqsubseteq := \leq \cup \sqsubseteq \setminus \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, cu identificarea între fiecare element al lui $A \cup B$ și elementul reuniunii disjuncte $A \sqcup B$ care îi corespunde;

Notația 8.1. Pentru $(A_i, \leq_i) = (A, \leq)$, oricare ar fi $i \in I$, în definiția anterioară, produsul direct al familiei $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ devine (A^I, \leq) (notând ordinea de pe $A^I = \{f : I \rightarrow A\}$ la fel ca ordinea de pe A).

Ordinea strictă și succesiunea asociate ordinii produs:

Remarca 8.5. Cu notațiile din definiția anterioară, dacă notăm $\prod_{i \in I} A_i = A$ și, pentru fiecare $i \in I$, notăm cu $<_i$ relația de ordine strictă asociată lui \leq_i , iar cu $<$ relația de succesiune asociată lui \leq_i , și cu $<$ notăm relația de ordine strictă asociată ordinii produs \leq , iar cu $<$ notăm relația de succesiune asociată ordinii produs, \leq , atunci:

- $< = \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (a_i)_{i \in I} \leq (b_i)_{i \in I} \text{ și } (\exists k \in I) (a_k <_k b_k)\}$;
- $< = \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (\exists k \in I) [a_k <_k b_k \text{ și } (\forall i \in I \setminus \{k\}) (a_i = b_i)]\}$.

Remarca 8.6. Din remarca anterioară deducem că, dacă (A, \leq_A) și (B, \leq_B) sunt poseturi, iar relația de succesiune asociată lui \leq_A , respectiv \leq_B , este $<_A$, respectiv $<_B$, atunci relația de succesiune asociată ordinii produs, $\leq = \leq_A \times \leq_B$, este:

$$< = \{((a, b), (a', b')) \in (A \times B)^2 \mid (a = a' \text{ și } b <_B b') \text{ sau } (a <_A a' \text{ și } b = b')\}$$

A se observa, din această expresie a lui $<$, corectitudinea reprezentării de mai sus a produsului direct a două poseturi finite printr-o diagramă Hasse.

Remarca 8.7. **Produsul direct al familiei vide** de mulțimi este un **singleton**, adică o mulțime cu un singur element. Prin urmare, produsul direct al familiei vide de poseturi este un singleton $\{*\}$, organizat ca poset cu unica relație de ordine pe un singleton, anume $\{(*, *)\}$.

9 Algebre produs direct

A se revedea, de mai sus, definiția **produsului direct al unei familii de poseturi**.

În această definiție se pot înlocui poseturile cu mulțimi înzestrate cu **relații binare** arbitrare, și se obține produsul direct al respectivelor mulțimi înzestrate cu relația produs direct al respectivelor relații binare.

Această construcție poate fi generalizată la mulțimi înzestrate cu **relații n -are**.

Dar **produsul direct** se poate defini și pentru structuri algebrice de același tip înzestrate cu anumite **operații**, pe baza cărora se definesc, punctual, operațiile produsului direct.

Produsul direct al unor latici este simultan un poset produs direct (latice Ore) și o **algebră produs direct** cu două operații binare (latice Delekin).

Vom exemplifica mai jos noțiunea de **produs direct al unor mulțimi înzestrate și cu operații, și cu relații**.

Exercițiul 9.1 (temă). Pe baza celor de mai jos, să se scrie produsul de algebre și pentru cazul general al algebrelor înzestrate cu o **operație p -ară (de aritate p , cu p argumente)** și o **relație k -ară**, unde $p, k \in \mathbb{N}$ (sau \mathbb{N}^*).

Să exemplificăm pe o structură formată dintr-o mulțime înzestrată cu o relație binară și trei operații, dintre care una binară, una unară (adică având un singur argument) și una zeroară (adică fără argumente, adică o constantă: vom vedea).

Mai întâi pentru **produse directe finite nevide**.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și n structuri algebrice de același tip $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in \overline{1, n}$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \rightarrow A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \rightarrow A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i .

Atunci putem defini *algebra produs direct* (A, \odot, f, c, ρ) , cu:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n A_i$,
cu *operațiile produs direct*:

7

- $\odot \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n \odot_i \stackrel{\text{notație}}{=} (\odot_1, \dots, \odot_n),$
- $f \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n f_i \stackrel{\text{notație}}{=} (f_1, \dots, f_n),$
- $c \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n c_i \stackrel{\text{notație}}{=} (c_1, \dots, c_n)$
și relația binară produs direct:
- $\rho \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n \rho_i = \rho_1 \times \dots \times \rho_n,$

definite **pe componente**, i. e. ca mai jos, unde notația pentru un element $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ semnifică faptul că $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$:

- pentru orice $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in A, x \odot y \stackrel{\text{definiție}}{=} (x_1 \odot_1 y_1, \dots, x_n \odot_n y_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \dots, x_n) \in A, f(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in A$;
- constanta $c \stackrel{\text{definiție}}{=} (c_1, \dots, c_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in A$, prin definiție, xpy ddacă $x_1\rho_1y_1, \dots, x_n\rho_ny_n$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = \dots = (A_n, \odot_n, f_n, c_n, \rho_n) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$, atunci $A = B^n = \{(b_1, \dots, b_n) \mid b_1, \dots, b_n \in B\}$, și operațiile și relația binară produs pot fi notate la fel ca acelea ale lui B .

Și acum **cazul general**: fie $((A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i))_{i \in I}$ o familie arbitrară de structuri algebrice, unde, pentru fiecare $i \in I$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \rightarrow A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \rightarrow A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i .

Atunci putem defini *algebra produs direct* (A, \odot, f, c, ρ) , cu:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{h \mid h : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (h(i) \in A_i)\},$

cu operațiile produs direct \odot (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și relația binară produs direct p pe A definite **punctual**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $g, h \in A, g \odot h \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I, (g \odot h)(i) = g(i) \odot_i h(i)$;
- pentru orice $h \in A, f(h) \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I, (f(h))(i) = f_i(h(i))$;
- $c \in A$, definită prin: pentru orice $i \in I, c(i) = c_i \in A_i$;
- pentru orice $g, h \in A$, prin definiție, gph ddacă $g(i)\rho_i h(i)$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{h \mid h : I \rightarrow B\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B .

Sciere alternativă pentru *algebra produs direct* (A, \odot, f, c, ρ) :

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i)\},$

8

- Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu L_n mulțimea elementelor lanțului cu n elemente, iar cu \mathcal{L}_n întreaga structură algebrică a lanțului cu n elemente, fie ea de poset, poset mărginit, lattice, lattice mărginită (designur, distributivă) sau algebra Boole (în cazul lui \mathcal{L}_1 sau \mathcal{L}_2 : vom vedea). Așa cum am menționat mai sus, nu este obligatoriu să se facă această distincție.

La fel ca în cazul laticilor mărginite:

Remarca 10.2. O algebră Boole nu poate fi vidă, pentru că are minim și maxim.

Definiția 10.2. • Algebra Boole cu un singur element (adică algebra Boole cu $0 = 1$, anume lanțul cu un singur element, \mathcal{L}_1) se numește *algebra Boole trivială*.

- Orice algebră Boole de cardinal strict mai mare decât 1 (i. e. orice algebră Boole cu cel puțin 2 elemente distincte, adică orice algebră Boole cu $0 \neq 1$) se numește *algebră Boole netrivială*.

Exemplul 10.1. Lanțul cu două elemente, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \neg, 0, 1)$ este o algebră Boole.

Această algebră Boole se numește *algebra Boole standard*.

Remarca 10.3. Se arată imediat, direct cu definiția unei algebre Boole, că orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite punctual.

Remarca 10.4. În particular, considerând algebra Boole standard \mathcal{L}_2 și o mulțime arbitrară I , remarca anterioară ne asigură de faptul că produsul direct $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I = \{f \mid f : I \rightarrow L_2\}, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite **punctual**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \neg, 0, 1)$: pentru orice $f, g \in L_2^I$:

- $f \vee g, f \wedge g, \neg f, 0, 1 \in L_2^I$, definite prin: pentru orice $i \in I$:

- $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i)$
- $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i)$

(dacă $|I| \geq 2$, atunci \mathcal{L}_2^I nu e lanț, deci $\vee \neq \max$ și $\wedge \neq \min$ în \mathcal{L}_2^I)

- $\neg f(i) := \neg f(i)$

- $0(i) := 0$ și $1(i) := 1$

- $f \leq g$ în \mathcal{L}_2^I ddacă, pentru fiecare $i \in I, f(i) \leq g(i)$ în \mathcal{L}_2 .

Remarca 10.5. Aplicând remarca anterioară cazului în care I este finită, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, obținem că $\mathcal{L}_2^n = (L_2^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și relația de ordine definite **pe componente**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$: pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in L_2$:

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \dots, x_n \vee y_n)$
- $(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \dots, x_n \wedge y_n)$
- $\neg(x_1, x_2, \dots, x_n) := (\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n)$
- $0 := (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n)$ și $1 := (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n)$

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n)$ în \mathcal{L}_2^n ddacă $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, \dots, x_n \leq y_n$ în \mathcal{L}_2

- $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_1$ este algebra Boole trivială.
- $\mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}_2$ este algebra Boole standard.

Exemplul 10.2. Algebra Boole \mathcal{L}_2^2 se numește *rombul*, datorită formei diagramei ei Hasse. Algebra Boole \mathcal{L}_2^3 se numește *cubul*, datorită formei diagramei ei Hasse.

cu operațiile produs direct \odot (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și relația binară produs direct p pe A definite **pe componente**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A, (a_i)_{i \in I} \odot (b_i)_{i \in I} := (a_i \odot_i b_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I} \in A, f((a_i)_{i \in I}) := (f_i(a_i))_{i \in I} \in A$;
- $c := (c_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A$, prin definiție, $(a_i)_{i \in I} p (b_i)_{i \in I}$ ddacă $a_i \rho_i b_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in B)\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B .

Produsul direct al familiei vide de structuri algebrice de același tip:

În cazul în care $I = \emptyset$, obținem *algebra produs direct al familiei vide de algebre* de tipul de mai sus, anume (A, \odot, f, c, ρ) , unde:

- A este un *singleton*, adică o mulțime cu un singur element: $A = \{a\}$;
- operațiile \odot, f și c au singurele definiții posibile pe un singleton, anume: $a \odot a := a, f(a) := a$ și $c := a$;
- $\rho \subseteq A^2 = \{(a, a)\}$, deci ρ nu poate fi decât \emptyset sau $\{(a, a)\}$; dar ρ este produsul familiei vide de relații binare, care este tot un produs direct al familiei vide de mulțimi, deci este tot un singleton, așadar $\rho = \{(a, a)\}$.

Exercițiul 9.2 (temă). Să se demonstreze că un produs direct arbitrar de latici (mărginite) este o lattice (mărginită).

Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare. Operații zeroare \equiv constante:

Definiția 9.1. Dacă A este o structură algebrică, având mulțimea suport A , iar $n \in \mathbb{N}$, atunci o *operație n -ară* (operație de aritate n , operație cu n argumente) a lui A este o funcție $f : A^n \rightarrow A$.

- Pentru orice mulțime $A, A^0 = A^0 = \prod_{i \in \emptyset} A = \{a\}$ (produsul direct al familiei vide de mulțimi: un singleton).

- Așadar, cu notațiile din definiția de mai sus: o *operație 0-ară* (operație de aritate 0, operație fără argumente) a lui A este o funcție $f : A^0 \rightarrow A$, deci o funcție $f : \{a\} \rightarrow A$, care poate fi identificată cu $f(a) \in A$: o **constantă** din A .

- Constantele 0 și 1 dintr-o lattice mărginită sunt operații zeroare. La fel sunt: elementul neutru al unui grup, 0 și 1 dintr-un inel unitar etc..

10 Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate

Definiția 10.1. O *algebră Boole* (sau *algebră booleană*) este o lattice mărginită distributivă complementată.

Remarca 10.1. În orice algebră Boole, datorită distributivității, complementul oricărui element x este unic, ceea ce ne permite să îl notăm prin \overline{x} (sau $\neg x$).

Existența complementului oricărui element al unei algebre Boole de mulțime suport B (existență impusă în definiția anterioară), alături de unicitatea complementului, ne dau posibilitatea de a defini o operație unară $\neg : B \rightarrow B$ (sau $\neg : B \rightarrow B$), care duce fiecare element al lui B în complementul său.

Această operație se va numi *complementare* și se va citi *not*.

Notație și terminologie 10.1. O algebră Boole va fi notată $(B, \leq, \neg, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este lattice distributivă mărginită subiacentă algebrei Boole, iar \neg este operația ei de complementare.

Adecea, $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este numită *lattice Boole*, iar $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ este numită *algebră Boole*.

Exemple de algebra Boole:

- Orice structură algebrică poate fi desemnată de mulțimea elementelor sale, dar poate fi notată și altfel decât această mulțime.

9

Exemplul 10.3. Pentru orice mulțime $I, (\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \subseteq, \neg, \emptyset, I)$, unde $\overline{A} = I \setminus A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, este o algebră Boole.

Exercițiul 10.1 (temă). Demonstrați că singurele algebre Boole total ordonate sunt algebra Boole trivială și algebra Boole standard.

Propoziția 10.1 (temă). *Mulțimea elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite este o algebră Boole (cu operațiile induse, la care se adaugă operația de complementare).*

Uneori se face distincția între:

- *lattice booleană*: lattice distributivă mărginită complementată; și
- *algebră booleană (algebră Boole)*: lattice booleană înzestrată cu operația de complementare.

Definiția 10.3. Pentru orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, se definesc următoarele *operații binare derivate*:

- *implicația (booleană)*, \rightarrow : pentru orice $a, b \in B, a \rightarrow b := \overline{a} \vee b$;
- *echivalența (booleană)*, \leftrightarrow : pentru orice $a, b \in B, a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Remarca 10.6 (complementarea este autoduală (autoinversă)). Dată o algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, pentru orice $x \in B, \overline{\overline{x}} = x$.

11 Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice

Remarca 11.1. Pentru orice algebră Boole $B := (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, se arată ușor că $(B, \wedge, \vee, \geq, \neg, 1, 0)$ este o algebră Boole, numită *duala algebrei Boole B*.

Se știe, din capitolul despre latici al cursului, că:

- \vee și \wedge ,
- \leq și $\geq := \leq^{-1}$,
- 0 și 1

sunt duale una alteia, respectiv.

Este imediat că operația unară \neg este duală ei însăși. Spunem că operația \neg este *autoduală*.

Evident, duala dualei lui B este B .

Remarca anterioară stă la baza **Principiului dualității pentru algebre Boole**: orice rezultat valabil într-o algebră Boole arbitrară rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul lui interschimbăm: \vee cu \wedge, \leq cu $\geq, 0$ cu 1 (iar operația \neg rămâne neschimbată), supremumurile cu infimumurile arbitrate, maximele cu minimele arbitrate, elementele maxime cu elementele minimele.

- Peste tot în cele ce urmează, dacă nu se va menționa altfel, $B := (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ va fi o algebră Boole arbitrară.

Propoziția 11.1 (legile lui de Morgan). Pentru orice $x, y \in B$:

(i) $\overline{\overline{x \vee y}} = \overline{x} \wedge \overline{y}$

(ii) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Propoziția 11.2. Pentru orice $x, y \in B$, au loc următoarele echivalențe:

(i) $x = y$ ddacă $\overline{x} = \overline{y}$

(ii) $x \leq y$ ddacă $\overline{x} \leq \overline{y}$

(iii) $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$

- (iv) $x \leq y$ ddacă $x \rightarrow y = 1$
- (v) $x = y$ ddacă $x \leftrightarrow y = 1$

Propoziția 11.3 (legea de reziduație). Pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalența:

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \text{ ddacă } \alpha \wedge \beta \leq \gamma.$$

12 Echivalența algebre Boole – inele Boole – secțiune facultativă

În definiția și rezultatele de mai jos, notăm $x^2 := x \cdot x$ și $x \cdot y := xy$.

Definiția 12.1. Se numește *inel Boole* un inel unitar $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in B$.

Lema 12.1. În orice inel Boole B , au loc: pentru orice elemente $x, y \in B$, $xy = yx$ și $x + x = 0$ (cu alte cuvinte, orice inel Boole este comutativ și orice element nenul al unui inel Boole are ordinul 2 în grupul aditiv subiacent inelului; sigur că ordinul lui 0 este 1, 0 fiind elementul neutru al acestui grup aditiv: $0 = 0$).

Teorema 12.1 (echivalența algebră Boole \Leftrightarrow inel Boole). Orice algebră Boole poate fi organizată ca un inel Boole, și invers. Mai precis:

- Fie $B := (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ un inel Boole. Definim operațiile \vee, \wedge și \neg pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:

$$\begin{cases} x \vee y := x + y + xy \\ x \wedge y := xy \\ \overline{x} := x + 1 \end{cases}$$

Atunci $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ este o algebră Boole, pe care o vom nota cu $\mathcal{A}(B)$.

- Fie $B := (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ o algebră Boole. Definim operațiile $+$ și \cdot pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:

$$\begin{cases} x + y := (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \\ xy := x \wedge y \end{cases}$$

Atunci $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ este un inel Boole, pe care îl vom nota cu $\mathcal{I}(B)$ (unde am notat cu $-$ operația de inversare a grupului aditiv subiacent inelului).

- Aplicațiile \mathcal{A} și \mathcal{I} sunt "inverse una alteia", în sensul că, pentru orice inel Boole B , $\mathcal{I}(\mathcal{A}(B)) = B$, și, pentru orice algebră Boole B , $\mathcal{A}(\mathcal{I}(B)) = B$.

13 Subalgebre Boole și morfisme booleene

Definiția 13.1. O submulțime S a lui B se numește *subalgebră Boole* a lui B ddacă este închisă la operațiile de algebră Boole ale lui B , i. e.:

- (i) pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \vee y \in S$;
- (ii) pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \wedge y \in S$;
- (iii) pentru orice $x \in S$, rezultă $\overline{x} \in S$;
- (iv) $0, 1 \in S$.

Propoziția 13.1. Au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți din definiția unei subalgebre Boole, aplicate unei submulțimi nevide S a lui B :

- (1) \Leftrightarrow (2), (3)
- (2) \Leftrightarrow (1), (3)

12

- două operații binare \vee și \wedge pe B , notate infixat,
 - două constante $0, 1 \in B$,
 - o operație unară \neg pe B ,
- iar aceste componente au proprietățile:
- (B, \vee, \wedge, \leq) este o **lattice**, i. e.:
 - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul (B, \leq) ;
 - \vee și \wedge sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru \wedge ;
 - \vee și \wedge verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;
 - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
 - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
 - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;
 - latticea (B, \vee, \wedge, \leq) este **distributivă**, i. e.:
 - \vee este **distributivă** față de \wedge , i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
 - \wedge este **distributivă** față de \vee , i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
 - $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **lattice mărginită**, i. e., în plus:
 - 0 este **minimul** posetului (B, \leq) ;
 - 1 este **maximul** posetului (B, \leq) ;
 - latticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** și satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivității**, iar \neg este operația de **complementare**:
 - pentru orice $x \in B$, $\overline{\overline{x}}$ este **unicul complement** al lui x , adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface:

$$\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{și} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, se definesc următoarele **operații binare derivate**:

- **implicația (booleană)**, \rightarrow : pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalența (booleană)**, \leftrightarrow : pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

14 Filtre ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole $B := (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, arbitrară.
- Vom nota $\geq := \leq^{-1}$.

Definiția 14.1. O submulțime nevidă F a lui B se numește *filtru* al algebrei Boole B ddacă, pentru orice $x, y \in B$, următoarele condiții sunt satisfăcute:

- (F₁) dacă $x, y \in F$, atunci $x \wedge y \in F$;
- (F₂) dacă $x \in F$ și $x \leq y$, atunci $y \in F$.

Notăția 14.1. Mulțimea filtrelor lui B se notează cu $\text{Filt}(B)$.

Remarca 14.1. Orice filtru al lui B îl conține pe 1. Într-adevăr, dacă F este un filtru al lui B , atunci F este nevid prin definiție, deci există un element $x \in F$; dar, ca orice element al lui B , x satisface $x \leq 1$, prin urmare $1 \in F$, conform condiției (F₂) din definiția unui filtru.

- (4) \Leftarrow (1), (2), (3)
- (3) \Leftarrow (1), (2), (4)

Remarca 13.1. O subalgebră Boole S a unei algebre Boole B este o algebră Boole cu operațiile induse pe S de operațiile de algebră Boole ale lui B și cu ordinea parțială indusă pe S de ordinea parțială a lui B .

Notăția 13.1. Operațiile induse (adică restricțiile la S ale operațiilor lui B) se notează, de obicei, la fel ca operațiile de algebră Boole ale lui B , iar ordinea parțială indusă (adică ordinea parțială a lui B restricționată la S) se notează, de obicei, la fel ca ordinea parțială a lui B .

Remarca 13.2. Orice subalgebră Boole S a unei algebre Boole B este închisă la operațiile derivate \rightarrow și \leftrightarrow ale lui B (adică $x \rightarrow y, x \leftrightarrow y \in S$ pentru orice $x, y \in S$), și că operațiile pe care acestea le induc pe S sunt exact implicația și, respectiv, echivalența algebrei Boole S (notate, în mod uzual, la fel ca implicația și, respectiv, echivalența lui B).

În cele ce urmează, renunțăm la fixarea algebrei Boole notate B

Definiția 13.2. Date două algebre Boole $(A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, \perp, \top)$, o funcție $f : A \rightarrow B$ se numește *morfism boolean* (sau *morfism de algebre Boole*) ddacă f **comută cu operațiile de algebre Boole ale lui A și B** , i. e. ddacă f este morfism de lattice mărginite între $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, \top)$ și, pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$.

Scriș desăfușurat, o funcție $f : A \rightarrow B$ este *morfism boolean* ddacă:

- (i) pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
- (ii) pentru orice $x, y \in A$, $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$
- (iii) pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$
- (iv) $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$

Un *endomorfism boolean* (sau *endomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean între o algebră Boole și ea însăși.

Un *izomorfism boolean* (sau *izomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean bijectiv, ceea ce este același lucru cu un morfism boolean inversabil, pentru că inversa unui morfism Boolean bijectiv este morfism boolean, ceea ce se observă imediat, dacă aplicăm rezultatul similar de la latici (**temă pentru acasă**).

Un *automorfism boolean* (sau *automorfism de algebre Boole*) este un izomorfism boolean între o algebră Boole și ea însăși, adică un endomorfism boolean bijectiv.

Propoziția 13.2. Cu notațiile din definiția anterioară, au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți ale unui morfism boolean, aplicate unei funcții $f : A \rightarrow B$:

- (1) \Leftrightarrow (2), (3)
- (2) \Leftrightarrow (1), (3)
- (3) \Leftrightarrow (1), (2), (4)
- (4) \Leftrightarrow (1), (2), (3)

Remarca 13.3 (temă). Orice morfism boolean comută cu implicația și echivalența booleană.

Compunerea a două morfisme booleene este un morfism boolean.

Imaginea unui morfism boolean este o subalgebră Boole a codomeniului celui morfism boolean.

Propoziția 13.3. Pentru orice mulțime I , algebrele Boole $(\mathcal{P}(I), \sqcup, \sqcap, \neg, \emptyset, I)$ și $\mathcal{L}_I^2 = (L_I^2, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism boolean între ele).

Definiția unei algebre Boole – mnemonic:

O **algebră Boole** este o **lattice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ compusă din:

- o mulțime B ,
- o relație de ordine parțială \leq pe B ,

13

Remarca 14.2. Este imediat că $\{1\}$ și B sunt filtre ale lui B , iar aceste filtre sunt respectiv minimul (a se vedea remarca anterioară) și maximul posetului $(\text{Filt}(B), \subseteq)$.

Definiția 14.2. $\{1\}$ se numește *filtru trivial* al lui B , iar B se numește *filtru impropriu* al lui B . Orice filtru $F \neq \{1\}$ se numește *filtru netrivial*, și orice filtru $F \neq B$ se numește *filtru propriu* al lui B .

Remarca 14.3. Intersecția tuturor filtrelor lui B este $\{1\}$ (filtrul trivial). Acest lucru rezultă imediat din faptul că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui B în sensul incluziunii.

Remarca 14.4. Un filtru al lui B este propriu ddacă nu îl conține pe 0.

Într-adevăr, un filtru este egal cu B ddacă îl conține pe 0, pentru că B conține pe 0, iar, dacă un filtru F îl conține pe 0, atunci F conține toate elementele lui B , conform condiției (F₂).

Lema 14.1. Fie F un filtru al lui B . Atunci: $F = B$ ddacă există un element $a \in B$, $a \neq 1$, $a \in F$ și $\overline{a} \in F$.

Lema 14.2 (filtrele sunt închise la conjuncții finite). Fie F un filtru al lui B . Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x_1, \dots, x_n \in F$, rezultă că $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in F$.

15 Filtre generate de o mulțime

Propoziția 15.1. Intersecția oricărei familii de filtre ale lui B este un filtru al lui B .

Corolarul 15.1. Pentru orice submulțime X a lui B , există un cel mai mic filtru al lui B care include pe X , anume intersecția tuturor filtrelor lui B care includ pe X .

Definiția 15.1. Pentru orice submulțime X a lui B , cel mai mic filtru al algebrei Boole B care include pe X se notează cu $[X]$ sau $\langle X \rangle$ și se numește *filtrul lui B generat de X* .

Pentru orice element $x \in B$, filtrul generat de singletonul $\{x\}$ se notează cu $[x]$ sau $\langle x \rangle$ și se numește *filtrul principal al lui B generat de x* . (Deci filtrele principale sunt filtrele generate de singletonuri; altfel spus, filtrele principale sunt filtrele generate de câte un singur element.)

Remarca 15.1 (caracterizarea filtrelor generate de o mulțime). Definiția unui filtru generat arată că, pentru orice $X \subseteq B$, $F = [X]$ ddacă mulțimea F satisface următoarele trei condiții:

- (i) F este un filtru al lui B ;
- (ii) $X \subseteq F$;
- (iii) pentru orice filtru G al lui B , dacă $X \subseteq G$, atunci $F \subseteq G$.

Ultima dintre aceste trei condiții afirmă că, dacă un filtru G al lui B include o submulțime X a lui B , atunci G include filtrul lui B generat de X .

Remarca 15.2. Conform remarcii care arată că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui B , urmează că $\{\emptyset\} = \{1\}$.

Remarca 15.3. Este imediat, atât direct din definiția unui filtru generat de o mulțime, cât și din caracterizarea anterioară, că, oricare ar fi un filtru F al lui B , are loc egalitatea: $[F] = F$.

Propoziția 15.2. Pentru orice submulțime nevidă X a lui B , $[X] = \{a \in B \mid (\exists n \in \mathbb{N}^*) (\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in X) (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \leq a)\}$.

Corolarul 15.2. Pentru orice $x \in B$, $[x] = \{a \in B \mid x \leq a\}$.

Exemplul 15.1 (temă). Iată un exemplu de filtru care nu este principal, ceea ce înseamnă că nu este finit generat (vom vedea): astfel, acest exemplu arată și faptul că, în general, filtrele nu sunt închise la conjuncții arbitrare (vom vedea).

Fie X o mulțime. Considerăm algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ și următoarea submulțime a ei: $F = \{A \mid A \subseteq X, |\overline{A}| < \infty\}$, unde $\overline{A} = X \setminus A$ pentru orice $A \subseteq X$; i. e. F este mulțimea părților cofinite ale lui X .

Atunci F este un filtru al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ (evident, F este filtru propriu ddacă X este infinită). Și, dacă mulțimea X este infinită, atunci F nu este filtru principal al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$.

Corolarul 15.3. Pentru orice filtru F al lui B și orice element $x \in B$, $[F \cup \{x\}] = \{a \in B \mid (\exists f \in F) (f \wedge x \leq a)\}$.

Remarca 15.4 (temă). Funcția care duce fiecare $M \subseteq B$ în $[M]$ este un operator de închidere pe $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$.

Remarca 15.5. Propoziția următoare arată că filtrele finit generate coincid cu filtrele principale, întrucât reciproca ei este trivială.

Propoziția 15.3. *Orice filtru finit generat (i. e. generat de o mulțime finită) este principal.*

Corolarul 15.4. *Orice filtru finit este principal.*

Corolarul 15.5. *Orice filtru al unei algebre Boole finite este principal.*

Remarca 15.6. Demonstrația propoziției anterioare arată că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$,

$$\{ \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \} = [x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n],$$

fapt valabil și pentru $n = 0$, întrucât $\inf(\emptyset) = 1$ (a se vedea un curs anterior).

16 Ultrafiltre ale unei algebre Boole

Definiția 16.1. Un filtru propriu P al lui \mathcal{B} se numește *filtru prim* ddacă, pentru orice $a, b \in B$, $a \vee b \in P$ implică $a \in P$ sau $b \in P$.

Definiția 16.2. Un element maximal al mulținii filtrelor proprii ale lui \mathcal{B} (raportat la incluziune) se numește *filtru maximal* sau *ultrafiltru* al lui \mathcal{B} .

Cu alte cuvinte, un *ultrafiltru* al lui \mathcal{B} este un filtru propriu U a. i., pentru orice filtru propriu F , $U \subseteq F$ implică $U = F$.

Altfel formulat, un *ultrafiltru* al lui \mathcal{B} este un filtru propriu U cu proprietatea că, pentru orice filtru F , $U \subseteq F$ implică $U = F$ sau $F = B$.

Notafia 16.1. Mulțimea ultrafiltrelor (filtrelor maxiale ale) lui \mathcal{B} se notează cu $\text{Max}(\mathcal{B})$.

Lema 16.1. *Fie P un filtru al lui \mathcal{B} și $a, b \in B$. Atunci:*

(i) *$a \wedge b \in P$ ddacă $a \in P$ și $b \in P$;*

(ii) *dacă P este un filtru prim, atunci: $a \vee b \in P$ ddacă $a \in P$ sau $b \in P$.*

Propoziția 16.1 (caracterizare a ultrafiltrelor). *Fie U un filtru propriu al lui \mathcal{B} . Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) *U este un ultrafiltru al lui \mathcal{B} ;*

(ii) *U este un filtru prim al lui \mathcal{B} ;*

(iii) *orice element $a \in B$ satisface: $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$.*

Corolarul 16.1 (caracterizare a ultrafiltrelor). *Fie U un filtru al lui \mathcal{B} . Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) *U este un ultrafiltru al lui \mathcal{B} ;*

(ii) *oricare ar fi $a \in B$, **exact** unul dintre elementele a și \overline{a} se află în U ;*

(iii) *oricare ar fi $a \in B$, are loc echivalența: $a \in U$ ddacă $\overline{a} \notin U$.*

Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn:

Definiția 16.3. O *mulțime inductiv ordonată* este un poset cu proprietatea că orice parte total ordonată a sa are (cel puțin) un majorant.

- În definiția anterioară, **parte total ordonată** a unui poset (P, \leq) înseamnă submulțime S a lui P care este lanț cu ordinea indusă (**ordinea indusă** este $\leq \cap S^2$), i. e. submulțime $S \subseteq P$ cu proprietatea că oricare două elemente ale submulțimii S sunt comparabile în posetul (P, \leq) .

16

18 Congruențe ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole arbitrară, $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$.

Definiția 18.1. Se numește *congruență a algebrei Boole \mathcal{B}* o relație de echivalență \sim pe B care este compatibilă cu operațiile algebrei Boole \mathcal{B} , adică, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

(i) dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$;

(ii) dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$;

(iii) dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$.

Remarca 18.1. Dacă, în definiția anterioară, veți generaliza cele trei relații dând compatibilitatea lui \sim cu operațiile binare \vee și \wedge și operația unară \neg , pentru a obține relația care dă compatibilitatea unei relații de echivalență cu o operație de aritate oarecare, atunci veți observa că: compatibilitatea cu operațiile zeroare ale lui \mathcal{B} , i. e. constantele 0 și 1, se scrie astfel: $0 \sim 0$ și $1 \sim 1$. Deci compatibilitatea cu operațiile zeroare este satisfăcută de orice relație binară reflexivă pe B , în particular de orice relație de echivalență pe B . De aceea, compatibilitatea cu 0 și 1 nu a apărut ca o cerință în definiția de mai sus.

Remarca 18.2. O congruență a lui \mathcal{B} este o relație de echivalență pe B care este și subalgebră Boole a algebrei Boole produs direct $B^2 = B \times B$.

Propoziția 18.1. *În definiția de mai sus, a unei congruențe pe o algebră Boole, fiecare dintre condițiile (1) și (2) este implicată de celelalte două condiții.*

Propoziția 18.2. *Orice congruență a unei algebre Boole este compatibilă cu implicația și echivalența booleană. I. e., pentru orice congruență \sim a lui \mathcal{B} și orice $x, y, x', y' \in B$, avem:*

- dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y'$;*
- dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \leftrightarrow y \sim x' \leftrightarrow y'$.*

Remarca 18.3. Fie F un filtru al lui \mathcal{B} și $x, y \in B$. Atunci are loc echivalența: $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $x \rightarrow y \in F$ și $y \rightarrow x \in F$.

19 Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Notafia 19.1. Notăm prin $\text{Con}(\mathcal{B})$ mulțimea congruențelor lui \mathcal{B} .

Propoziția 19.1. *Mulțimea congruențelor unei algebre Boole este în bijecție cu mulțimea filtrelor sale.*

Existența unei bijecții se demonstrează construind două funcții între cele două mulțimi, în sensuri opuse, și arătând că sunt inverse una celeilalte, așadar sunt inversabile, deci sunt bijecții.

Iată definițiile celor două funcții pentru o algebră Boole oarecare \mathcal{B} :

- funcția de la mulțimea filtrelor la mulțimea congruențelor: oricărui filtru F îi asociem congruența \sim_F , definită prin: pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$;
- funcția de la mulțimea congruențelor la mulțimea filtrelor: oricărei congruențe \sim îi asociem filtrul F^\sim , definit prin: $F^\sim := \{x \in B \mid x \sim 1\}$ (F^\sim este clasa de echivalență a lui 1 raportat la \sim).

Propoziția 19.2. *Fie $a, b, x \in B$ și F un filtru al lui \mathcal{B} . Atunci, cu notațiile de mai sus, au loc:*

(i) *$a \sim_{\{a\}} b$ ddacă $a \wedge x = b \wedge x$;*

(ii) *$a \sim_F b$ ddacă există un element $f \in F$ astfel încât $a \wedge f = b \wedge f$.*

Remarca 16.1. Orice mulțime inductiv ordonată este nevidă, pentru că ea conține măcar un element, anume un majorant al submulțimii \emptyset a ei.

Remarca 16.2. După cum am demonstrat într-un curs anterior, orice element al unui poset nevid este majorant pentru \emptyset .

Remarca 16.3. Cele două remarci anterioare arată că, pentru a demonstra că un poset este mulțime inductiv ordonată, este suficient să demonstrăm că:

- posetul este nevid;
- orice parte total ordonată **nevidă** a sa are (cel puțin) un majorant.

Lema 16.2 (Lema lui Zorn). *Orice mulțime inductiv ordonată are (cel puțin) un element maximal.*

Remarca 16.4. Este evident, din faptul că filtrul trivial $\{1\}$ este inclus în orice filtru al lui \mathcal{B} , că au loc echivalențele: \mathcal{B} are filtre proprii ddacă $\{1\}$ este filtru propriu al lui \mathcal{B} ddacă \mathcal{B} este o algebră Boole netrivială.

Teorema 16.1 (Teorema de existență a ultrafiltrului). *Orice filtru propriu al lui \mathcal{B} este inclus într-un ultrafiltru al lui \mathcal{B} . Cu alte cuvinte, pentru orice filtru propriu F al lui \mathcal{B} , există un ultrafiltru U al lui \mathcal{B} , a. i. $F \subseteq U$.*

Corolarul 16.2. *Orice algebră Boole netrivială are (cel puțin) un ultrafiltru.*

17 Teorema de reprezentare a lui Stone

Caracterizare a injectivității morfismelor booleene:

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm două algebre Boole arbitrare $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ și $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$.

Remarca 17.1. Pentru orice morfism boolean $f : A \rightarrow B$, au loc:

- $f(0) = 0$, deci $0 \in f^{-1}(\{0\})$, adică $\{0\} \subseteq f^{-1}(\{0\})$;
- $f(1) = 1$, deci $1 \in f^{-1}(\{1\})$, adică $\{1\} \subseteq f^{-1}(\{1\})$.

Propoziția 17.1. *Fie $f : A \rightarrow B$ un morfism boolean. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) *f este injectiv;*

(ii) *$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$;*

(iii) *$f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$.*

Remarca 17.2. Algebra Boole trivială este izomorfă cu $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ și cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_2^0$, care are drept mulțime suport pe $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_2^0 = \{f \mid f : \emptyset \rightarrow \mathcal{L}_2\} = \{(\emptyset, \emptyset, \mathcal{L}_2)\}$ (acest triplet este, după cum știm, unica funcție de la \emptyset la \mathcal{L}_2).

- Pentru o formulare clară a următoarelor două rezultate, vom renunța, în cele ce urmează, la fixarea algebrei Boole \mathcal{B} .

Teorema 17.1 (Teorema de reprezentare a lui Stone). *Pentru orice algebră Boole netrivială \mathcal{B} , există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \neg, \emptyset, X)$.*

Corolarul 17.1 (reformulare a Teoremei de reprezentare a lui Stone). *Pentru orice algebră Boole netrivială \mathcal{B} , există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}_2^X$.*

Remarca 17.3. Algebra Boole standard, \mathcal{L}_2 , se scufundă în orice algebră Boole netrivială, i. e., oricare ar fi o algebră Boole netrivială \mathcal{B} , de la \mathcal{L}_2 la \mathcal{B} există un morfism injectiv de algebre Boole, anume morfismul care duce pe 0 în 0 și pe 1 în 1. (Morfismele injective se numesc *scufundări*.)

17

20 Algebre Boole factor

Propoziția 20.1. *Fie F un filtru al lui \mathcal{B} și \sim_F congruența asociată lui F .*

Pentru fiecare $x \in B$, se notează cu $x/F := \{y \in B \mid x \sim_F y\}$ clasa de echivalență a lui x raportat la \sim_F .

Mulțimea factor $B/\sim_F = \{x/F \mid x \in B\}$ (i. e. mulțimea claselor de echivalență ale elementelor lui B raportat la \sim_F) se mai notează cu B/F .

Atunci: B/F se poate organiza ca algebră Boole cu următoarele operații, pe care le vom nota la fel ca pe acelea ale lui B :

- pentru orice $x, y \in B$, $x/F \vee y/F := (x \vee y)/F$*
- pentru orice $x, y \in B$, $x/F \wedge y/F := (x \wedge y)/F$*
- pentru orice $x \in B$, $x/\overline{F} := \overline{x}/F$*
- $0 := 0/F$ și $1 := 1/F$*

Definiția 20.1. Algebra Boole $(B/F, \vee, \wedge, \neg, 0 = 0/F, 1 = 1/F)$ se numește *algebra Boole factor* (sau *algebra Boole cât*) a lui \mathcal{B} prin filtrul F .

Propoziția 20.2. *Pentru orice filtru F , surjecția canonică $p_F : B \rightarrow B/F$, definită prin: pentru orice $x \in B$, $p_F(x) := x/F$, este un morfism boolean surjectiv.*

Lema 20.1. *Fie F un filtru al lui \mathcal{B} . Atunci $F = 1/F$, așadar, pentru orice element $a \in B$, au loc echivalențele: $a \in F$ ddacă $a \sim_F 1$ ddacă $a/F = 1/F$.*

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm încă o algebră Boole arbitrară $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$. A se vedea demonstrațiile acestor rezultate într-o versiune viitoare a cursului.

Propoziția 20.3 (temă pentru seminar). *Fie $f : A \rightarrow B$ un morfism boolean, iar F un filtru al algebrei Boole \mathcal{A} și G un filtru al algebrei Boole \mathcal{B} . Atunci:*

(i) *$f^{-1}(G)$ este un filtru al lui \mathcal{A} ;*

(ii) *dacă f e surjectiv, atunci $f(F)$ este un filtru al lui \mathcal{B} .*

Propoziția 20.4 (temă pentru seminar). *Fie $f : A \rightarrow B$ un morfism boolean. Atunci $f(A)$ este o subalgebră Boole a lui B , izomorfă cu algebra Boole factor $A/f^{-1}(\{1\})$.*

Propoziția 20.5 (temă pentru seminar). *Fie U un filtru al algebrei Boole \mathcal{B} . Atunci: U este ultrafiltru ddacă algebra Boole factor B/U este izomorfă cu \mathcal{L}_2 .*

21 Structura algebrelor Boole finite

Definiția 21.1. Un *atom* al algebrei Boole \mathcal{B} este un succesor al lui 0 din \mathcal{B} (i. e. din posetul (B, \leq)). Adică, un *atom* al lui \mathcal{B} este un element $a \in B$ cu proprietățile:

- $a \neq 0$ și
- nu există niciun element $x \in B$ a. i. $0 < x < a$,

unde am notat cu $< := \setminus \Delta_B$, i. e. $<$ este relația de ordine strictă pe B corespunzătoare relației de ordine \leq de pe B , adică, pentru orice $x, y \in B$,

$$x < y \text{ ddacă } \begin{cases} x \leq y \\ \text{și} \\ x \neq y. \end{cases}$$

Remarca 21.1.

- Algebra Boole trivială nu are niciun atom (deci numărul atomilor săi coincide cu numărul ultrafiltrelor sale, anume 0).

- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, algebra Boole \mathcal{L}_2^n , cu mulțimea elementelor $L_2^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}$ are n atomi: atomii săi sunt elementele e_1, \dots, e_n , unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, $e_i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\text{vector de lungime } n, \text{ cu } 1 \text{ pe poziția } i \text{ și } 0 \text{ pe celelalte poziții}}$. La fel pentru algebra Boole \mathcal{L}_2^X , cu X mulțime arbitrară.

- Pentru orice mulțime nevidă X (nu neapărat finită), atomii algebei Boole $\mathcal{P}(X)$ sunt submulțimile lui X cu câte un singur element: $\{a\}$, cu $a \in X$.

Remarca 21.2. Ultrafiltrele unei algebre Boole finite sunt filtrele generate de câte un atom al acelei algebre Boole.

Remarca 21.3. Remarca anterioară arată că, dacă algebra Boole \mathcal{B} este finită, atunci există o bijecție între mulțimea atomilor lui \mathcal{B} și mulțimea ultrafiltrelor lui \mathcal{B} , care duce fiecare atom a al lui \mathcal{B} în $\{a\}$ (filtrul principal generat de a).

Teorema 21.1 (Teorema de structură a algebrilor Boole finite). Dacă \mathcal{B} este o algebră Boole finită, atunci \mathcal{B} este izomorfă cu \mathcal{L}_2^n , unde $n \in \mathbb{N}$ este numărul atomilor lui \mathcal{B} (care este egal cu numărul ultrafiltrelor lui \mathcal{B} , conform remarcii anterioare).

Corolarul 21.1. Orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2 (cu exponentul dat de numărul atomilor săi, care este egal cu numărul ultrafiltrelor sale).

Corolarul 21.2. Două algebre Boole finite de același cardinal sunt izomorfe.

Remarca 21.4. Pentru orice mulțime finită X , de cardinal $n \in \mathbb{N}$, au loc următoarele izomorfisme între algebre Boole: $\mathcal{L}_2^n \cong \mathcal{L}_2^{\overline{\mathbb{N}} \setminus n} \cong \mathcal{L}_2^n \cong \mathcal{P}(X) \cong \mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}} \setminus n)$ ($\overline{\mathbb{N}} \setminus n = \emptyset$).

Remarca 21.5. • **Teorema de reprezentare a lui Stone** spune că, pentru orice algebră Boole \mathcal{B} , există un morfism boolean injectiv $d: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui \mathcal{B} . Cu alte cuvinte, orice algebră Boole \mathcal{B} este izomorfă cu o subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui \mathcal{B} .

- **Teorema de structură a algebrilor Boole finite** afirmă că, în cazul particular al algebrilor Boole finite, are loc proprietatea că orice algebră Boole finită este chiar **izomorfă** cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui \mathcal{B} (a se vedea remarca anterioară).

Exercițiul 21.1 (temă). Fie B o algebră Boole completă, i. e. o algebră Boole care e lattice completă, $a, b \in B$, I și J mulțimi arbitrare, iar $(a_i)_{i \in I} \subseteq B$, $(b_j)_{j \in J} \subseteq B$. Să se demonstreze că în B au loc:

- **legile de distributivitate generalizate:** dacă $I \neq \emptyset$ și $J \neq \emptyset$, atunci:

$$a \wedge \left(\bigvee_{j \in J} b_j \right) = \bigvee_{j \in J} (a \wedge b_j) \text{ și } \left(\bigvee_{i \in I} a_i \right) \wedge \left(\bigvee_{j \in J} b_j \right) = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in J} (a_i \wedge b_j);$$

$$a \vee \left(\bigwedge_{j \in J} b_j \right) = \bigwedge_{j \in J} (a \vee b_j) \text{ și } \left(\bigwedge_{i \in I} a_i \right) \vee \left(\bigwedge_{j \in J} b_j \right) = \bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} (a_i \vee b_j);$$

- **legile lui De Morgan generalizate:**

$$\overline{\bigvee_{i \in I} a_i} = \bigwedge_{i \in I} \overline{a_i} \text{ și } \overline{\bigwedge_{i \in I} a_i} = \bigvee_{i \in I} \overline{a_i};$$

- următoarele proprietăți: dacă $I \neq \emptyset$ și $J \neq \emptyset$, atunci:

$$\left(\bigvee_{i \in I} a_i \right) \rightarrow b = \bigwedge_{i \in I} (a_i \rightarrow b) \text{ și } \left(\bigwedge_{i \in I} a_i \right) \rightarrow b = \bigvee_{i \in I} (a_i \rightarrow b);$$

$$a \rightarrow \left(\bigvee_{j \in J} b_j \right) = \bigvee_{j \in J} (a \rightarrow b_j) \text{ și } a \rightarrow \left(\bigwedge_{j \in J} b_j \right) = \bigwedge_{j \in J} (a \rightarrow b_j).$$

Care dintre egalitățile de la ultimul punct sunt valabile și pentru $I = \emptyset$, $J = \emptyset$?

v. *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x \rho y$ și $y \rho z$, atunci $x \rho z$;

- o relație binară ρ pe o mulțime A se numește:

- (relație de) *preordine* ddacă este reflexivă și tranzitivă;
- (relație de) *echivalență* ddacă este o preordine simetrică;
- (relație de) *ordine (parțială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
- (relație de) *ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relație de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x \rho y$ sau $y \rho x$;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se definește *inversa lui* ρ ca fiind relația binară pe A notată cu ρ^{-1} și dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A și orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;

- pentru orice relații binare ρ și σ pe o mulțime A , avem:

- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
- $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
- $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relații binare pe A , $(\bigcup_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
- $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relații binare pe A , $(\bigcap_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecției cu inversarea);

- inversa unei relații de ordine notate \leq se notează, uzual, cu \geq ;

- pentru orice mulțime A și orice relații binare ρ și σ pe A , compunerea dintre relațiile binare ρ și σ se notează cu $\rho \circ \sigma$ și se definește astfel: $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists b \in A)((a, b) \in \sigma \text{ și } (b, c) \in \rho)\}$;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ și $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;

- dată o relație binară ρ pe o mulțime A , au loc echivalențele:

- ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;
- ρ este simetrică ddacă $\rho = \rho^{-1}$;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se numește *închiderea reflexivă/simetrică/transitivă a lui* ρ cea mai mică (în sensul incluziunii) relație binară reflexivă/simetrică/transitivă pe A care include pe ρ ;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , *închiderea reflexivă/simetrică/transitivă a lui* ρ se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;

- dată o relație binară ρ pe o mulțime A , au loc echivalențele:

- ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;
- ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;
- ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;

Vom folosi notația “ddacă” drept prescurtare pentru sintagma “dacă și numai dacă”.

Amintim abrevierea “i. e.” (“id est”), semnificând “adică”.

Vom nota cu \mathbb{N} mulțimea numerelor naturale și cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulțimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $a, b = \{a, a+1, \dots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$. Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) \equiv *mulțime parțial ordonată* (i. e. mulțime înzestrată cu o relație de ordine pe ea);
- *lanț* \equiv *mulțime liniar ordonată* \equiv *mulțime total ordonată*;
- *funcție izotonă* \equiv *funcție care păstrează ordinea* \equiv *funcție crescătoare*;
- *algebră Boole* \equiv *algebră booleană*,

precum și definițiile, notațiile și rezultatele următoare:

- se folosește următoarea convenție: dacă o mulțime A este suportul unei structuri algebrice \mathcal{A} , atunci prin A vom înțelege deopotrivă mulțimea A și structura algebrică \mathcal{A} , în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;

- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* ddacă mulțimea ei suport este nevidă, respectiv finită;

- pentru orice mulțime A , notăm cu $|A|$ cardinalul lui A , iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulțimea părților lui A);

- pentru orice mulțimi A și B , vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecție cu B , care se transcrie prin: $|A| = |B|$;

- pentru orice mulțime A , notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian*, *produsul direct de mulțimi*; aici, produsul direct al unei mulțimi cu ea însăși: în general, notăm cu $A^1 = A$ și cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulțimi* (se definește și A^0 , care este un singleton, i. e. o mulțime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, și produsele directe de structuri algebrice, precum și puterile naturale ale unei structuri algebrice;

- pentru orice mulțime A , o *relație binară pe* A este o submulțime a lui A^2 ;

- dacă A este o mulțime și $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a \rho b$;

- pentru orice mulțime A , se notează cu Δ_A relația binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ și numită *diagonala lui* A ;

- o relație binară ρ pe o mulțime A se zice:

- reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x \rho x$;
- simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$, atunci $y \rho x$;
- antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$ și $y \rho x$, atunci $x = y$;
- asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A :

- $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;
- $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;
- $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$;

- pentru orice mulțime A , notăm cu $\text{Eq}(A)$ mulțimea relațiilor de echivalență pe A , și, pentru orice $\sim \in \text{Eq}(A)$, se notează cu A/\sim *mulțimea factor a lui* A prin \sim , i. e. mulțimea claselor de echivalență ale relației de echivalență \sim ;

- pentru orice mulțime nevidă A , o *partiție a lui* A este o familie nevidă de părți nevide ale lui A donă câte două disjuncte și având reuniunea egală cu A ; vom nota mulțimea partițiilor lui A cu $\text{Part}(A)$;

- pentru orice mulțime nevidă A , $\text{Eq}(A) \cong \text{Part}(A)$, întrucât funcția $\varphi: \text{Eq}(A) \rightarrow \text{Part}(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/\sim$ pentru orice $\sim \in \text{Eq}(A)$, este o bijecție; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice $\pi = (A_i)_{i \in I} \in \text{Part}(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relația de echivalență pe A care are drept clase mulțimile A_i , cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim_{\pi} \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$;

- pentru orice n natural nenul, notăm cu \mathcal{L}_n lanțul cu n elemente și cu L_n mulțimea suport a lui \mathcal{L}_n ; \mathcal{L}_n este unic modulo un *izomorfism de poseturi*, i. e. modulo o funcție izotonă bijectivă și cu inversa izotonă;

- pentru orice poset (P, \leq) , notăm cu $<$ *relația de ordine strictă asociată lui* \leq , i. e. relația binară pe mulțimea P definită prin: $< = \leq \setminus \Delta_P = \{(a, b) \mid a, b \in P, a \leq b, a \neq b\}$, și cu \prec *relația de succesiune* asociată lui \leq , i. e. relația binară pe mulțimea P definită prin: $\prec = \{(a, b) \mid a, b \in P, a < b, (\nexists x \in P) a < x < b\}$;

- notăm laticile sub forma (L, \vee, \wedge, \leq) sau (L, \vee, \wedge) , laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, cu semnificația uzuală pentru fiecare simbol din aceste notații;

- legătura dintre operațiile binare \vee și \wedge și relația de ordine \leq în orice lattice (L, \vee, \wedge, \leq) este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalențele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;

- într-o lattice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ și} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puțin un complement;

- într-o lattice mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;

- o lattice este nedistributivă ddacă are o sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul;

- orice lanț este o lattice (distributivă), cu operațiile binare $\vee = \max$ și $\wedge = \min$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, se definește *implicația booleană*, \rightarrow , și *echivalența booleană*, \leftrightarrow , ca operații binare pe B , astfel: pentru orice $x, y \in B$:

- $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$;
- $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \top, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:
 - i. $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$ și: $\bar{x} = 1$ ddacă $x = 0$, iar: $\bar{x} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice lattice mărginită, 0 și 1 sunt complementele unul altuia și nu au alte complemente);
 - ii. $\bar{\bar{x}} = x$;
 - iii. $x \rightarrow y = 1$ ddacă $x \leq y$;
 - iv. $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;
- pentru orice mulțime A , $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \top, \emptyset, A)$ este o algebră Boole, unde am notat, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\bar{X} = A \setminus X$;
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{L}_2^n (puterea a n -a a lanțului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole \mathcal{L}_2 , numită *algebra Boole standard*; dacă notăm cu $L_2 = \{0, 1\}$ mulțimea suport a lanțului cu 2 elemente, \mathcal{L}_2 , atunci $L_2^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}\}$ este mulțimea subiacentă a algebrei Boole \mathcal{L}_2^n ;
- orice algebră Boole finită este izomorfă cu \mathcal{L}_2^n pentru un $n \in \mathbb{N}$;
- se numește *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \top, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul (B, \leq) , adică un element $a \in B$ cu $0 < a$ (i. e. astfel încât $0 < a$ și nu există niciun $x \in B$ cu proprietatea că $0 < x < a$);
- se numește *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \top, 0, 1)$ o submulțime nevidă F a lui B închisă la conjuncție și la majorare, i. e. o mulțime F cu proprietățile:
 - i. $\emptyset \neq F \subseteq B$;
 - ii. pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;
 - iii. pentru orice $x \in F$ și orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;

mulțimea filtrelor lui \mathcal{B} se notează cu $\text{Filt}(\mathcal{B})$;

- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conține elementul 1;
- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \top, 0, 1)$ și orice $a \in B$, mulțimea notată $[a] = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui \mathcal{B} , numit *filtrul principal generat de a* ; notăm mulțimea filtrelor principale ale lui \mathcal{B} cu $\text{PFilt}(\mathcal{B})$;
- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale;
- se numește *congruență* a unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \top, 0, 1)$ o relație de echivalență \sim pe B compatibilă cu operațiile de algebră Boole ale lui \mathcal{B} , i. e. o relație binară \sim pe B cu proprietățile:
 - i. $\sim \in \text{Eq}(B)$;
 - ii. pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea cu \vee**);
 - iii. pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea cu \wedge**);
 - iv. pentru orice $x, x' \in B$, dacă $x \sim x'$, atunci $x \sim \bar{x'}$ (**compatibilitatea cu \neg**);

notăm cu $\text{Con}(\mathcal{B})$ mulțimea congruențelor lui \mathcal{B} ;

- referitor la definiția anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relații binare \sim pe B cu operațiile zeroare ale lui \mathcal{B} (i. e. constantele 0 și 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ și $1 \sim 1$, proprietăți care sunt satisfăcute nu numai de către orice relație de echivalență \sim pe B , ci chiar de către orice relație reflexivă \sim pe B ;
- mulțimea congruențelor unei algebre Boole \mathcal{B} este în bijecție cu mulțimea filtrelor lui \mathcal{B} ;
- notăm cu V mulțimea variabilelor calculului propozițional clasic;
- notăm cu E mulțimea enunțurilor calculului propozițional clasic;
- dată o *interpretare* în calculul propozițional clasic, i. e. o funcție $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$, notăm cu $h : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operații booleene;
- se notează cu $h \models \varphi$, respectiv $h \models \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ *satisface un enunț $\varphi \in E$* , respectiv *o mulțime de enunțuri $\Sigma \subseteq E$* , i. e. $h(\varphi) = 1$, respectiv $h(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;
- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunț φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propozițională clasică;
- se notează cu $\models \varphi$ faptul că un enunț φ este *universal adevărat (tautologie, adevăr semantic)* în logica propozițională clasică (adică orice interpretare satisface pe φ);
- se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunț $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propozițională clasică;
- se notează cu $\Sigma \models \varphi$ faptul că un enunț $\varphi \in E$ este *deductibil semantic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$* în logica propozițională clasică (adică orice interpretare care satisface pe Σ satisface și pe φ);
- pentru orice enunț φ , $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, și $\models \varphi$ ddacă $\emptyset \models \varphi$;
- pentru orice mulțime $\Sigma \subseteq E$, notăm cu $(E/\sim_\Sigma, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \top_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ algebra Lindenbaum–Tarski asociată mulțimii de ipoteze Σ pentru logica propozițională clasică, despre care știm că este o algebră Boole; amintim că $\sim_\Sigma = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \text{Eq}(E)$; notăm cu $\varphi^\Sigma \in E/\sim_\Sigma$ clasa unui enunț φ în E/\sim_Σ ;
- cazul particular $\Sigma = \emptyset$ în cele de mai sus: notăm cu $(E/\sim_\Sigma, \vee, \wedge, \leq, \top, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziționale clasice, care este o algebră Boole; amintim că $\sim = \sim_\emptyset = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \text{Eq}(E)$; notăm cu $\hat{\varphi} \in E/\sim$ clasa unui enunț φ în E/\sim ;
- pentru orice $\Sigma \subseteq E$ și orice $\varphi \in E$, are loc echivalența: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$ în algebra booleană E/\sim_Σ (**lemă** din calculul propozițional clasic);
- caz particular: pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalența: $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$ în algebra Lindenbaum–Tarski E/\sim ;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducției** pentru calculul propozițional clasic; abreviată **TD**);
- pentru orice $\varphi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \models \varphi$ (**Teorema de completitudine** tare a calculului propozițional clasic; abreviată **TCT**); cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numește **Teorema de completitudine** a calculului propozițional clasic (**TC**);
- mulțimea T a teoremelor formale ale logicii propoziționale clasice e satisfăcută de orice interpretare;

- o mulțime $\Sigma \subseteq E$ e *satisfiabilă* (adică există o interpretare care o satisface) ddacă Σ e *consistentă*, i. e. sistemul deductiv $\Delta(\Sigma)$ generat de Σ , anume $\Delta(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$, nu conține toate enunțurile, adică $\Delta(\Sigma) \subseteq E$;
- pentru orice $\varphi \in E$, există o *formă normală conjunctivă (FNC)* (i. e. o conjuncție de disjuncții de *literal*i, adică elemente din $V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$) $\gamma \in E$ astfel încât $\varphi \sim \gamma$, ceea ce este echivalent cu faptul că $h(\varphi) = h(\gamma)$ pentru orice interpretare h ;
- un enunț φ în FNC e *nesatisfiabil* (i. e. nu e satisfăcut de nicio interpretare, ceea ce e echivalent cu $\models \neg \varphi$, așadar $\vdash \neg \varphi$ conform **TC**) ddacă există măcar o derivare prin rezoluție a clauzei vide \square din φ ;
- un enunț φ în FNC e satisfiabil ddacă nu există nicio derivare prin rezoluție a clauzei vide \square din φ .

Bibliografie

- [1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.
- [2] D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).
- [3] D. Bușneag, D. Piciu, *Probleme de logică și teoria mulțimilor*, Craiova (2003).
- [4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București (1974, 1975, 1976).
- [5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, București (1978).
- [6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, București (2010).
- [7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulțimilor și în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, București (1969).
- [8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București (1982).
- [9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulțimilor*, Editura Universității din București (1996).
- [10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică și computațională, precum și celelalte articole din *Revista de logică*, publicație online.
- [11] Cursurile de logică matematică și computațională de pe site-ul Facultății de Matematică și Informatică a Universității din București (pe serverul de cursuri: *moodle*).

Breviar pentru o mare parte din cursul de LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Claudia MUREȘAN
Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poștal 010014, București, România
Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Vom folosi notația “ddacă” drept prescurtare pentru sintagma “dacă și numai dacă”. Amintim abrevierea “i. e.” (“id est”), semnificând “adică”.

Pentru noțiunile și rezultatele teoretice pe care le vom folosi în exercițiile următoare, recomandăm consultarea bibliografiei de la sfârșitul acestui text. Oferim în cele ce urmează un mic mnemonic de noțiuni și rezultate care ne vor fi necesare pentru rezolvarea acestor exerciții.

Vom nota cu \mathbb{N} mulțimea numerelor naturale și cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulțimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a, b} = \{a, a+1, \dots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$.

Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) \equiv *mulțime parțial ordonată* (i. e. mulțime înzestrată cu o relație de ordine pe ea);
- *lanț* \equiv *mulțime liniar ordonată* \equiv *mulțime total ordonată*;
- *funcție izotonă* \equiv *funcție care păstrează ordinea* \equiv *funcție crescătoare*;
- *algebră Boole* \equiv *algebră booleană*,

precum și definițiile, notațiile și rezultatele următoare:

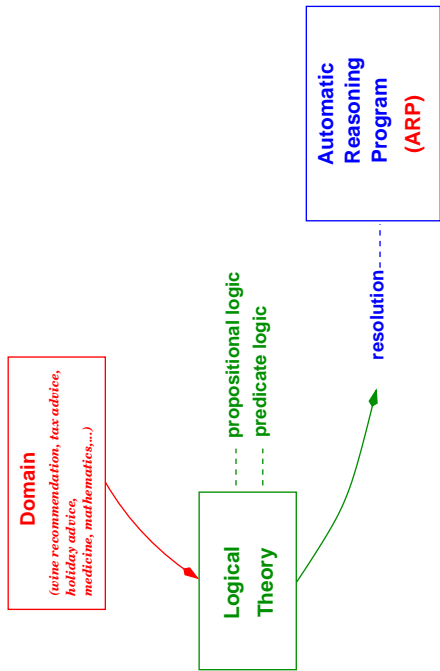
- se folosește următoarea convenție: dacă o mulțime A este suportul unei structuri algebrice \mathcal{A} , atunci prin A vom înțelege deopotrivă mulțimea A și structura algebrică \mathcal{A} , în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* ddacă mulțimea ei suport este nevidă, respectiv finită;
- pentru orice mulțime A , notăm cu $|A|$ cardinalul lui A , iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulțimea părților lui A);
- pentru orice mulțimi A și B , vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecție cu B , care se transcrie prin: $|A| = |B|$;
- pentru orice mulțime A , notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian*, *produsul direct de mulțimi*; aici, produsul direct al unei mulțimi cu ea însăși: în general, notăm cu $A^1 = A$ și cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulțimi* (se definește și A^0 , care este un singleton, i. e. o mulțime cu un singur element) și a se vedea, în materialele din bibliografie, și produsele directe de structuri algebrice, precum și puterile naturale ale unei structuri algebrice;

- pentru orice mulțime A , o *relație binară pe A* este o submulțime a lui A^2 ;
- dacă A este o mulțime și $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a \rho b$;
- pentru orice mulțime A , se notează cu Δ_A relația binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ și numită *diagonala lui A* ;
- o relație binară ρ pe o mulțime A se zice:
 - (i) *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x \rho x$;
 - (ii) *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$, atunci $y \rho x$;
 - (iii) *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$ și $y \rho x$, atunci $x = y$;
 - (iv) *asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;
 - (v) *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x \rho y$ și $y \rho z$, atunci $x \rho z$;
- o relație binară ρ pe o mulțime A se numește:
 - (i) *(relație de) preordine* ddacă este reflexivă și tranzitivă;
 - (ii) *(relație de) echivalență* ddacă este o preordine simetrică;
 - (iii) *(relație de) ordine (parțială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
 - (iv) *(relație de) ordine totală (sau liniară)* ddacă este o relație de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x \rho y$ sau $y \rho x$;
- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se definește *inversa lui ρ* ca fiind relația binară pe A notată cu ρ^{-1} și dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;
- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A și orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;
- pentru orice relații binare ρ și σ pe o mulțime A , avem:
 - (i) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
 - (ii) $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
 - (iii) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relații binare pe A , $(\bigcup_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
 - (iv) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relații binare pe A , $(\bigcap_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecției cu inversarea);
- inversa unei relații de ordine notate \leq se notează, uzual, cu \geq ;
- pentru orice mulțime A și orice relații binare ρ și σ pe A , compunerea dintre relațiile binare ρ și σ se notează cu $\rho \circ \sigma$ și se definește astfel: $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists b \in A) ((a, b) \in \sigma \text{ și } (b, c) \in \rho)\}$;
- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ și $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;
- dată o relație binară ρ pe o mulțime A , au loc echivalențele:
 - (i) ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;

- legătura dintre operațiile binare \vee și \wedge și relația de ordine \leq în orice latică (L, \vee, \wedge, \leq) este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalențele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- într-o latică mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ și} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puțin un complement;
- într-o latică mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;
- o latică este nedistributivă ddacă are o sublatică izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul;
- orice lanț este o latică (distributivă), cu operațiile binare $\vee = \max$ și $\wedge = \min$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, se definesc *implicația booleană*, \rightarrow , și *echivalența booleană*, \leftrightarrow , ca operații binare pe B , astfel: pentru orice $x, y \in B$:
 - (i) $x \rightarrow y = \neg x \vee y$;
 - (ii) $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:
 - (i) $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$ și: $\bar{\bar{x}} = x$ ddacă $x = 0$, iar: $\bar{\bar{x}} = x$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latică mărginită, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și nu au alte complemente);
 - (ii) $\bar{\bar{x}} = x$;
 - (iii) $x \rightarrow y = 1$ ddacă $x \leq y$;
 - (iv) $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;
- pentru orice mulțime A , $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \neg, \emptyset, A)$ este o algebră Boole, unde am notat, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\bar{X} = A \setminus X$;
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{L}_n^2 (puterea a n -a a lanțului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole \mathcal{L}_2 , numită *algebra Boole standard*; dacă notăm cu $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$ mulțimea suport a lanțului cu 2 elemente, \mathcal{L}_2 , atunci $\mathcal{L}_2^2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}\}$ este mulțimea subiacentă a algebrei Boole \mathcal{L}_2^2 ; vom păstra aceste notații în cele ce urmează;
- orice algebră Boole finită este izomorfă cu \mathcal{L}_2^n pentru un $n \in \mathbb{N}$;
- se numește *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul (B, \leq) , adică un element $a \in B$ cu $0 < a$ (i. e. astfel încât $0 < a$ și nu există niciun $x \in B$ cu proprietatea că $0 < x < a$);
- se numește *filtru* al unei algebre Boole $B = (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ o submulțime nevidă F a lui B închisă la conjuncție și la majorare, i. e. o mulțime F cu proprietățile:
 - (i) $\emptyset \neq F \subseteq B$;
 - (ii) pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;
 - (iii) pentru orice $x \in F$ și orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;
 mulțimea filtrelor lui B se notează cu $\text{Filt}(B)$;

- (ii) ρ este simetrică ddacă $\rho = \rho^{-1}$;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se numește *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui ρ* cea mai mică (în sensul incluziunii) relație binară reflexivă/simetrică/tranzitivă pe A care include pe ρ ;
- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui ρ* se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;
- dată o relație binară ρ pe o mulțime A , au loc echivalențele:
 - (i) ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;
 - (ii) ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;
 - (iii) ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;
- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A :
 - (i) $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;
 - (ii) $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;
 - (iii) $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$;
- pentru orice mulțime A , notăm cu $\text{Eq}(A)$ mulțimea relațiilor de echivalență pe A , și, pentru orice $\sim \in \text{Eq}(A)$, se notează cu A/\sim *mulțimea factor a lui A prin \sim* , i. e. mulțimea claselor de echivalență ale relației de echivalență \sim ;
- pentru orice mulțime nevidă A , o *partiție a lui A* este o familie nevidă de părți nevide ale lui A două câte două disjuncte și având reuniunea egală cu A ; vom nota mulțimea partițiilor lui A cu $\text{Part}(A)$;
- pentru orice mulțime nevidă A , $\text{Eq}(A) \cong \text{Part}(A)$, întrucât funcția $\varphi : \text{Eq}(A) \rightarrow \text{Part}(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/\sim$ pentru orice $\sim \in \text{Eq}(A)$, este o bijecție; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice $\pi = (A_i)_{i \in I} \in \text{Part}(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relația de echivalență pe A care are drept clase mulțimile A_i , cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim_{\pi} \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$;
- pentru orice n natural nemul, notăm cu \mathcal{L}_n lanțul cu n elemente și cu L_n mulțimea suport a lui \mathcal{L}_n ; cele n elemente ale lui L_n vor fi notate adecvat fiecărei situații în care vor apărea în cele ce urmează; \mathcal{L}_n este unic modulo un izomorfism de poseturi, i. e. modulo o funcție izotonă bijectivă și cu inversa izotonă;
- pentru orice poset (P, \leq) , notăm cu $<$ relația de ordine strictă asociată lui \leq , i. e. relația binară pe mulțimea P definită prin: $< = \leq \setminus \Delta_P = \{(a, b) \mid a, b \in P, a \leq b, a \neq b\}$, și cu $<$ relația de succesiune asociată lui \leq , i. e. relația binară pe mulțimea P definită prin: $< = \{(a, b) \mid a, b \in P, a < b, (\exists x \in P) a < x < b\}$;
- notăm laticile sub forma (L, \vee, \wedge, \leq) sau (L, \vee, \wedge) , laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, cu semnificația uzuală pentru fiecare simbol din aceste notații;
- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conține elementul 1;
- pentru orice algebră Boole $B = (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ și orice $a \in B$, mulțimea notată $[a] = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui B , numit *filtrul principal generat de a* ; notăm mulțimea filtrelor principale ale lui B cu $\text{PFilt}(B)$;
- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale;
- se numește *congruență* a unei algebre Boole $B = (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ o relație de echivalență \sim pe B compatibilă cu operațiile de algebră Boole ale lui B , i. e. o relație binară \sim pe B cu proprietățile:
 - (i) $\sim \in \text{Eq}(B)$;
 - (ii) pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea cu \vee**);
 - (iii) pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea cu \wedge**);
 - (iv) pentru orice $x, x' \in B$, dacă $x \sim x'$, atunci $\bar{x} \sim \bar{x'}$ (**compatibilitatea cu \neg**);
 notăm cu $\text{Con}(B)$ mulțimea congruențelor lui B ;
- referitor la definiția anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relații binare \sim pe B cu operațiile zeroare ale lui B (i. e. constantele 0 și 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ și $1 \sim 1$, proprietăți care sunt satisfăcute nu numai de către orice relație de echivalență \sim pe B , ci chiar de către orice relație reflexivă \sim pe B ;
- mulțimea congruențelor unei algebre Boole B este în bijecție cu mulțimea filtrelor lui B ;
- notăm cu V mulțimea variabilelor calculului propozițional clasic;
- notăm cu E mulțimea enunțurilor calculului propozițional clasic;
- notăm cu $(E/\sim, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ algebra Lindenbaum-Tarski a logicii propoziționale clasice, despre care știm că este o algebră Boole;
- notăm cu $\varphi \in E/\sim$ clasa unui enunț φ în algebra Lindenbaum-Tarski E/\sim ;
- dată o interpretare în calculul propozițional clasic, i. e. o funcție $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$, notăm cu $h : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operații boolene (notații alternative: $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, $h : E \rightarrow \mathcal{L}_2$);
- se notează cu \vdash faptul că un enunț φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propozițională clasică;
- se notează cu \models faptul că un enunț φ este universal adevărat (tautologie, adevăr semantic) în logica propozițională clasică;
- se notează cu $\Sigma \vdash$ faptul că un enunț $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propozițională clasică;
- se notează cu $\Sigma \models$ faptul că un enunț $\varphi \in E$ este deductibil semantic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propozițională clasică;



Goals for Today

- Refresh your memory about logic
- Make sure everyone understands the notation
- Learn the basic method for automated reasoning systems: resolution

⇒ forms the basis for a large part of the course

- pentru orice enunț φ , $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, și $\models \varphi$ ddacă $\emptyset \models \varphi$;
- se notează cu $h \models \varphi$, respectiv $h \models \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ satisface un enunț $\varphi \in E$, respectiv o mulțime de enunțuri $\Sigma \subseteq E$, i. e. $h(\varphi) = 1$, respectiv $h(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducției** pentru calculul propozițional clasic; abreviată **TD**);
- pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalența: $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$ (**lemă** din calculul propozițional clasic);
- pentru orice $\varphi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \models \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propozițional clasic; abreviată **TCT**); cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numește **Teorema de completitudine** a calculului propozițional clasic (**TC**).

Bibliografie

- [1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.
- [2] D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).
- [3] D. Bușneag, D. Piciu, *Probleme de logică și teoria mulțimilor*, Craiova (2003).
- [4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București (1974, 1975, 1976).
- [5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, București (1978).
- [6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, București (2010).
- [7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulțimilor și în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, București (1969).
- [8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București (1982).
- [9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulțimilor*, Editura Universității din București (1996).
- [10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică și computațională, precum și celelalte articole din *Revista de logică*, publicație online.
- [11] Cursurile de logică matematică și computațională de pe site-ul Facultății de Matematică și Informatică a Universității din București (pe serverul de cursuri: *moodle*).

Logic and Resolution

Representation and Reasoning

Proposition Logic

- Well-formed formulas \mathcal{F} : constants \square , propositional symbols (atoms) P , negation $\neg\varphi$, disjunction $(\varphi \vee \psi)$, conjunction $(\varphi \wedge \psi)$, implication $(\varphi \rightarrow \psi)$
- Interpreted with a function w :

$$w : \mathcal{F} \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$$

such that for w holds:

- $w(\neg\varphi) = \text{true}$ if and only if $w(\varphi) = \text{false}$
- $w(\varphi \wedge \psi) = \text{true}$ iff $w(\varphi) = \text{true}$ and $w(\psi) = \text{true}$
- etc.
- Equivalently, we could restrict ourselves to an **assignment of truth** to the propositional symbols
- If w is a **model** of φ then this is denoted by $w \models \varphi$

Logic and Resolution – p. 6/26

Warm-up Quiz

Which of the following statements are true?

- (a) $\text{IsHuman} \rightarrow \text{IsMammal}$
- (b) $\models \text{IsHuman} \rightarrow \text{IsMammal}$
- (c) $\models \neg(\text{IsMammal} \rightarrow \text{IsHuman})$
- (d) $\text{IsHuman} \not\models \text{IsMammal}$
- (e) $\text{IsHuman} \rightarrow \text{IsMammal} \models \text{IsMammal} \rightarrow \text{IsHuman}$
- (f) $\text{IsHuman} \rightarrow \text{IsMammal} \models \neg \text{IsMammal} \rightarrow \neg \text{IsHuman}$
- (g) $\exists x(\text{IsHuman}(x)) \models \text{IsHuman}(\text{child}(\text{Mary}))$
- (h) $\forall x(P(x) \vee \neg Q(a)) \models Q(a) \rightarrow P(b)$
- (i) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y(\neg P(f(y)) \vee R(y)) \models \forall z(Q(f(z)) \vee R(z))$

Logic and Resolution – p. 4/26

Propositional Logic: Example

“Because the classroom was small (S) and many students subscribed to the course (M), there was a shortage of chairs (C)”

Formally: $((S \wedge M) \rightarrow C)$

- If $w(S) = w(M) = w(C) = \text{true}$, then $w \models ((S \wedge M) \rightarrow C)$,
- Also: $((S \wedge M) \wedge ((S \wedge M) \rightarrow C)) \models C$; other notation: $\{S, M, (S \wedge M) \rightarrow C\} \models C$
- If $w'(S) = w'(M) = \text{true}$ and $w'(C) = \text{false}$:
 $\{S, M, \neg C, (S \wedge M) \rightarrow C\} \not\models \square$
- Short notation:** remove some brackets ...

Logic and Resolution – p. 7/26

Logic Concepts

- If a formula φ is true under a given interpretation M , one says that that M **satisfies** φ , $M \models \varphi$
- A formula is **satisfiable** if there is some interpretation under which it is true
- Otherwise, it is **unsatisfiable** (inconsistent)
- A formula is **valid** (a tautology), denoted by $\models \varphi$, if it is true in every interpretation
- for all M : $M \models \varphi$
- A formula φ is **entailed** (or is a logical consequence) by a conjunction of formulas (sometimes called a **theory**) Γ , denoted by $\Gamma \models \varphi$, if
for all M : $M \models \Gamma$ then $M \models \varphi$

Logic and Resolution – p. 5/26

Resolution

- Reason **only** with formulas in its **clausal form**:

$$L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$$

with L_i a literal, i.e., an atom or a negation of an atom; if $n = 0$, then it is \square (**empty clause**)

- Complementary literals**: L and L' , such that $L \equiv \neg L'$
- Resolution (rule) \mathcal{R}** (J.A. Robinson, 1965):

$$\frac{C \vee L, \quad C' \vee \neg L}{D}$$

with C, C' clauses, and D the **(binary) resolvent** equal to $C \vee C'$ (repeating literals may be removed)

Deduction Rules

- Instead of truth assignments (interpretations) we can focus only the syntax (the form ...)

Examples:

- modus ponens: $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$
- \wedge -introduction rule: $\frac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$
- Replace \models by **syntactical manipulation (derivation) \vdash**
- Examples:** Given: P, Q and $(P \wedge Q) \rightarrow R$, then
 - $\{P, Q\} \vdash P \wedge Q$ (\wedge -introduction)
 - $\{P, Q, (P \wedge Q) \rightarrow R\} \vdash R$ (\wedge -introduction and modus ponens)

Examples Resolution

- Given $V = \{P \vee Q \vee \neg R, U \vee \neg Q\}$, then

$$\frac{P \vee Q \vee \neg R, \quad U \vee \neg Q}{P \vee U \vee \neg R}$$
 so $V \vdash_{\mathcal{R}} P \vee U \vee \neg R$ by applying the resolution rule \mathcal{R} once
 - Given $V = \{\neg P \vee Q, \neg Q, P\}$, then $\frac{\neg P \vee Q, \neg Q}{\neg P}$ and $\frac{\neg P, P}{\square}$ so $V \vdash_{\mathcal{R}} \square$
 - If $V \vdash_{\mathcal{R}} \square$ then it will hold that V is **inconsistent** and the derivation will then be called a **refutation**
 - \mathcal{R} is sound
 - If $V \not\vdash_{\mathcal{R}} \square$, then V is **consistent**
 - \mathcal{R} is refutation-complete

Deduction Concepts

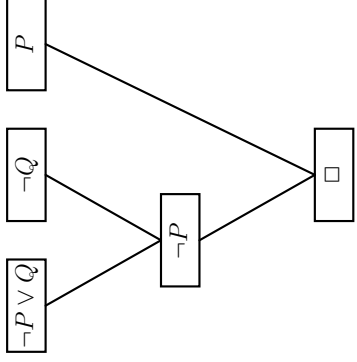
- A **deductive system** S is a set of axioms and rules of inference for deriving theorems
- A formula φ can be **deduced** by a set of formulae Γ if φ can be proven using a deduction system S , written as $\Gamma \vdash_S \varphi$
- A deductive system S is **sound** if

$$\Gamma \vdash_S \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$
- A deductive system S is **complete** if

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_S \varphi$$
- A deductive system S is **refutation-complete** if

$$\Gamma \models \square \Rightarrow \Gamma \vdash_S \square$$

Resolution (Refutation) Tree



Given $V = \{\neg P \vee Q, \neg Q, P\}$, then $V \vdash_{\mathcal{R}} \square$
 Note: resolution trees are *not* unique

Logic and Resolution – p. 14/26

Motivation for Resolution

- Proving unsatisfiability is **enough**, because:

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \square$$
 - If a theory Γ is inconsistent, then resolution will eventually **terminate** with a derivation such that

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \square$$
 - For first-order logic, resolution may not terminate for consistent theories...
- Many applications:
- Mathematics: Robbins' conjecture
 - Proving that medical procedures are correct
 - Logic programming

Logic and Resolution – p. 12/26

SLD Resolution

- Horn clause: clause with maximally **one positive literal**
 $\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m \vee B$, also denoted by $B \leftarrow A_1, \dots, A_m$
- **SLD resolution** (for Horn clauses):

$$\frac{\leftarrow B_1, \dots, B_n, \quad B_i \leftarrow A_1, \dots, A_m}{\leftarrow B_1, \dots, B_{i-1}, A_1, \dots, A_m, B_{i+1}, \dots, B_n}$$
- SLD derivation: a sequence G_0, G_1, \dots and C_1, C_2, \dots

Exercise:

$$\Gamma = \{R \leftarrow T, T \leftarrow, P \leftarrow R\}$$

Prove P from Γ using SLD resolution.

Logic and Resolution – p. 15/26

Soundness Resolution

- **Theorem: resolution is sound** (so, $V \vdash_{\mathcal{R}} C \Rightarrow V \models C$)
Proof (sketch). Suppose $C_1 = L \vee C'_1$ and $C_2 = \neg L \vee C'_2$, so using resolution we find:

$$\{C_1, C_2\} \vdash_{\mathcal{R}} D$$

with D equal to $C'_1 \vee C'_2$. We thus need to prove:

$$w \models (C_1 \wedge C_2) \Rightarrow w \models D$$

for every w . It holds that either L or $\neg L$ is true in w . Suppose L is true, then C'_2 must be true, so D is true. Similar for when $\neg L$ is true.

Logic and Resolution – p. 13/26

First-order Logic: Interpretations

Formulas are interpreted by a variable assignment v and I based on a **structure**

$$S = (D, \{f_i\}_i, \{P_j\}_j)$$

consisting of

- A **domain of discourse** D (typically non-empty)
- f_i is a **function** $D^n \rightarrow D$ for some n
- P_j is a **relation**, i.e., $P_j \subseteq D^n$ or $P_j : D^n \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$ for some n

Then:

- v maps all variables to a $d \in D$
- I maps all n -ary functions/predicates in the language to n -ary functions/relations in the structure

Logic and Resolution – p. 19/26

First-order Logic

- Allow the representation of **entities** (also called **objects**) and their **properties**, and **relations** among such entities
- More expressive than propositional logic
- Distinguished from propositional logic by its use of **quantifiers**
 - Each interpretation of first-order logic includes a **domain of discourse** over which the quantifiers range
- Additionally, it covers **predicates**
 - Used to represent either a property or a relation between entities
- Basis for many other representation formalisms

Logic and Resolution – p. 16/26

First-order Logic: Example Model

- A simple structure S could consist of:
 - D the set of natural numbers, $D = \{0, 1, 2, \dots\}$
 - 2-ary function ‘+’ (regular addition)
 - 2-ary relationship ‘>’ (regular greater than)
 - A function symbol $f/2$ can be interpreted as ‘+’
 $I(f) = +$
- The constant \perp can be interpreted by the constant 0
 $I(\perp) = 0$
- The predicate P could mean >, i.e., $P(x, y)$ means ‘ x is greater than y ’
 $I(P) = >$

Logic and Resolution – p. 19/26

First-order Logic: Syntax

Well-formed formulas are build up from:

- **Constants**: denoted by a, b, \dots (or sometimes names such as ‘Peter’ and ‘Martijn’)
- **Variables**: denoted by x, y, z, \dots
- **Functions**: maps (sets of) objects to other objects, e.g. *father*, *plus*, ...
- **Predicates**: resemble a function that returns either *true* or *false*: *Brother-of*, *Bigger-than*, *Has-color*, ...
- **Quantifiers**: allow the representation of properties that hold for a collection to objects. Consider a variable x ,
 - Existential: $\exists x$, ‘there is an x ’
 - Universal: $\forall x$, ‘for all x ’
- Logical connectives and auxiliary symbols

Logic and Resolution – p. 17/26

Skolemisation: Underlying Idea

What you have is that,

$$\forall x \left(g(x) \vee \exists y R(x, y) \right) \Rightarrow \forall x \left(g(x) \vee R(x, f(x)) \right)$$

where $f(x)$ is the (Skolem) function that maps x to y

- "For every x there is a y s.t. $R(x, y)$ " is converted into "There is a function f mapping every x into a y s.t. for every x $R(x, f(x))$ holds"
- $\forall x \exists y R(x, y)$ is satisfied by a model M iff
 - For each possible value for x there is a value for y that makes $R(x, y)$ true
 - which implies: there exists a function f s.t. $y = f(x)$ such that $R(x, y)$ holds

Logic and Resolution – p. 22/26

Skolemization: Example

- Given a formula
$$\exists x \text{Father}(x, \text{amalia}) \wedge \neg \exists x \exists y (\text{Father}(x, y) \wedge \neg \text{Parent}(x, y))$$
 1. **Move negations inwards:**
$$\exists x \text{Father}(x, \text{amalia}) \wedge \forall x \forall y (\neg \text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y))$$
 2. **Make variable names unique:**
$$\exists z \text{Father}(z, \text{amalia}) \wedge \forall x \forall y (\neg \text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y))$$
 3. **Skolemize** (suggestively replacing z by 'alex')
$$\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia}) \wedge \forall x \forall y (\neg \text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y))$$
 4. To **clausal normal form**:
$$\forall x \forall y (\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia}) \wedge (\neg \text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y)))$$

Logic and Resolution – p. 23/26

First-order Logic: Truth

- A predicate is true if the interpretation of the predicate evaluates to 'true' (in the structure)
- Logical connectives are interpreted just like in proposition logic
- $\forall x \varphi(x)$ is true if φ is true for **all** variable assignments
- $\exists x \varphi(x)$ is true if φ is true for **some** variable assignments

Example

- Consider the formula $\forall x \exists y \exists z P(f(y, z), x)$
- Given the structure S , this formula is clearly true
- Note, however, that this would not be the case if we had, for instance, interpreted P as 'less than'

Logic and Resolution – p. 20/26

First-order Clausal Form

First-order resolution only uses clauses

$$\forall x_1 \dots \forall x_s (L_1 \vee \dots \vee L_m) \text{ written as } L_1 \vee \dots \vee L_m$$

\Rightarrow we will translate formulas in predicate logic to a **clausal normal form**:

1. Convert to negation normal form: eliminate implications and move negations inwards
2. Make sure each bound variable has a unique name
3. Skolemize: replace $\exists x$ by terms with function symbols of previously universally quantified variables
$$\forall x \exists y P(x, y) \text{ becomes } \forall x P(x, f(x))$$
4. Put it into a **conjunctive normal form** by using the distributive laws and put the quantifiers up front

Each conjunct is now a clause

Logic and Resolution – p. 21/26

Making Things Equal

- Compare $\neg\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia})$ and $\neg\text{Father}(x, y)$. What are the **differences** and the **similarities**?
 - complementary sign
 - the same predicate symbol ('Father')
 - constant 'alex' versus variable x en constant 'amalia' versus variable y

Make things equal through substitution

$$\sigma = \{\text{alex}/x, \text{amalia}/y\}$$

- Compare $P(x, f(x))$ and $\neg P(g(a), f(g(a)))$; after removing the sign, make them equal with

$$\sigma = \{g(a)/x\}$$
- Making things syntactically equal = **unification**

Logic and Resolution – p. 26/26

Resolution and First-order Logic

- Problem: given

$$S = \{\forall x \forall y (\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia}) \wedge (\neg \text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y)))\}$$

We know $S \models \text{Parent}(\text{alex}, \text{amalia})$

Extract the clauses (for resolution):

$$S' = \{\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia}), \neg \text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y)\}$$

Solution: substitute x with 'alex' and substitute y with 'amalia'

$$\Rightarrow \text{substitution } \sigma = \{\text{alex}/x, \text{amalia}/y\}$$
- Application of resolution:

$$\frac{\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia}), \{\neg \text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y)\} \sigma}{\text{Parent}(\text{alex}, \text{amalia})}$$

so $S' \vdash_{\mathcal{R}} \text{Parent}(\text{alex}, \text{amalia})$

Logic and Resolution – p. 24/26

Unification

- Let $\theta = \{t_1/x_1, \dots, t_m/x_m\}$ and $\sigma = \{s_1/y_1, \dots, s_n/y_n\}$, then the **composition**, denoted by $\theta \circ \sigma$ or $\theta\sigma$, is defined by:

$$\{t_1\sigma/x_1, \dots, t_m\sigma/x_m, s_1/y_1, \dots, s_n/y_n\}$$

where each element $t_i\sigma/x_i$ is removed for which $x_i = t_i\sigma$ and also each element s_j/y_j for which $y_j \in \{x_1, \dots, x_m\}$
- A substitution σ is called a **unifier** of E and E' if $E\sigma = E'\sigma$; E and E' are then called **unifiable**
- A unifier θ of expressions E en E' is called the **most general unifier** (mgu) if and only if for each unifier σ of E and E' there exists a substitution λ such that $\sigma = \theta \circ \lambda \Rightarrow$ derive expressions which are as **general** as possible (with variables)

Logic and Resolution – p. 27/26

Substitution

- A **substitution** σ is a finite set of the form

$$\sigma = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$$
, with x_i a variable and t_i a term; $x_i \neq t_i$ and $x_i \neq x_j, i \neq j$
 - $E\sigma$ is an expression derived from E by **simultaneously** replacing all occurrences of the variables x_i by the terms t_i . $E\sigma$ is called an **instantiation**
 - If $E\sigma$ does not contain variables, then $E\sigma$ is called a **ground instance**
- Examples for $C = P(x, y) \vee Q(y, z)$:
- $\sigma_1 = \{a/x, b/y\}$, $\sigma_2 = \{y/x, x'/y\}$: $C\sigma_1 = P(a, b) \vee Q(b, z)$ en $C\sigma_2 = P(y, x) \vee Q(x, z)$
 - $\sigma_3 = \{f(y)/x, g(b)/z\}$: $C\sigma_3 = P(f(y), y) \vee Q(y, g(b))$

Logic and Resolution – p. 25/26

Resolution Rule for First-order Logic

- Notation: if L is a literal, dan $[L]$ is the atom
- Given the following two clauses $C_1 = C'_1 \vee L_1$ and $C_2 = C'_2 \vee L_2$, with L_1 an atom, and L_2 negated
- Suppose $[L_1]\sigma = [L_2]\sigma$, with σ an mgu
- **Binary resolution rule** \mathcal{B} for predicate logic:

$$\frac{(C'_1 \vee L_1)\sigma, (C'_2 \vee L_2)\sigma}{C'_1\sigma \vee C'_2\sigma}$$

$C'_1\sigma \vee C'_2\sigma$ is **binary resolvent**, and

$$\{C_1, C_2\} \vdash_{\mathcal{B}} C'_1\sigma \vee C'_2\sigma$$

Logic and Resolution – p. 30/26

Resolution: Summary

In summary, this is what occurs,

- Find two clauses containing the same predicate, where such predicate is negated in one clause but not in the other
- Perform a unification on the two complementary predicates
 - If the unification fails, you might have made a bad choice of predicates
 - Go back to the previous step and try again
- Discard the unified predicates, and combine the remaining ones from the two clauses into a new clause, also joined by the or-operator

Logic and Resolution – p. 31/26

Examples Unifiers

Consider the following logical expressions

$$R(x, f(a, g(y)))$$

and

$$R(b, f(z, w))$$

Some possible unifiers:

- $\sigma_1 = \{b/x, a/z, g(c)/w, c/y\}$
- $\sigma_2 = \{b/x, a/z, f(a)/y, g(f(a))/w\}$
- $\sigma_3 = \{b/x, a/z, g(y)/w\}$ (mgu)

Note that:

- $\sigma_1 = \sigma_3 \circ \{c/y\}$
- $\sigma_2 = \sigma_3 \circ \{f(a)/y\}$

Logic and Resolution – p. 28/26

Resolution in Predicate Logic

- Consider: $\{C_1 = P(x) \vee Q(x), C_2 = \neg P(f(y)) \vee R(y)\}$; $P(x)$ and $P(f(y))$ are *not* complementary, but they are unifiable, for example $\sigma = \{f(a)/x, a/y\}$
- Result: $C_1\sigma = P(f(a)) \vee Q(f(a))$
en
 $C_2\sigma = \neg P(f(a)) \vee R(a)$
 $P(f(a))$ en $\neg P(f(a))$ are complementary
 $\{C_1\sigma, C_2\sigma\} \vdash_{\mathcal{R}} Q(f(a)) \vee R(a)$
- Using the **mgu** $\theta = \{f(y)/x\}$
 $\{C_1\theta, C_2\theta\} \vdash_{\mathcal{R}} Q(f(y)) \vee R(y)$

Logic and Resolution – p. 29/26

Applying an ARP (Prover9)

```
===== PROOF =====
% Proof 1 at 0.02 (+ 0.00) seconds.
% Length of proof is 100.
% Level of proof is 47.
% Maximum clause weight is 20.
% Given clauses 229.

...

25 -Wolf(x) | animal(x). [clausify(1)].
26 -Fox(x) | animal(x). [clausify(2)].
27 -Bird(x) | animal(x). [clausify(3)].
29 -Snail(x) | animal(x). [clausify(5)].
30 -Grain(x) | plant(x). [clausify(6)].
31 Wolf(c1). [clausify(7)].
32 Fox(c2). [clausify(8)].
33 Bird(c3). [clausify(9)].

282 -animal(c3) | eats(c3,f3(c2,c3)) | -animal(c5)
    | eats(c3,c5). [resolve(278,a,99,b)].
283 -animal(c3) | eats(c3,f3(c2,c3)) | eats(c3,c5).
    [resolve(282,c,56,a)].
284 eats(c3,f3(c2,c3)) | eats(c3,c5). [resolve(283,a,54,a)].
287 eats(c3,c5) | eats(c1,c6) | eats(c1,c2) | -animal(c2)
    | -animal(c3). [resolve(284,a,224,e)].
297 eats(c3,c5) | eats(c1,c6) | eats(c1,c2) | -animal(c2).
    [resolve(287,e,54,a)].
298 eats(c3,c5) | eats(c1,c6) | eats(c1,c2). [resolve(297,d,53,a)].
302 eats(c1,c6) | eats(c1,c2) | -Bird(c3) | -Snail(c5).
    [resolve(298,a,49,c)].
305 eats(c1,c6) | eats(c1,c2) | -Bird(c3). [resolve(302,d,35,a)].
306 eats(c1,c6) | eats(c1,c2). [resolve(305,c,33,a)].
310 eats(c1,c2) | -Wolf(c1) | -Grain(c6). [resolve(306,a,48,c)].
313 eats(c1,c2) | -Grain(c6). [resolve(310,b,31,a)].
314 eats(c1,c2). [resolve(313,b,36,a)].
319 -Wolf(c1) | -Fox(c2). [resolve(314,a,47,c)].
321 -Fox(c2). [resolve(319,a,31,a)].
322 $F. [resolve(321,a,32,a)].

===== end of proof =====
```

Logic and Resolution – p. 3426

Logic and Resolution – p. 3426

Schubert's Steamroller

Wolves, foxes, birds, caterpillars, and snails are animals, and there are some of each of them

Also there are some grains, and grains are plants

Every animal either likes to eat all plants or all animals much smaller than itself that like to eat some plants

Caterpillars and snails are much smaller than birds, which are much smaller than foxes, which are in turn much smaller than wolves

Wolves do not like to eat foxes or grains, while birds like to eat caterpillars but not snails

Caterpillars and snails like to eat some plants

Prove there is an animal that likes to eat a grain-eating animal

Logic and Resolution – p. 3326

Representation

- Wolves are animals: $\forall x(Wolf(x) \rightarrow Animal(x))$
- There are wolfs: $\exists x Wolf(x)$
- Every animal either likes to eat all plants or all animals much smaller than itself that like to eat some plants
$$\forall x(Animal(x) \rightarrow (\forall y(Plant(y) \rightarrow Eats(x,y))) \vee (\forall z(Animal(z) \wedge Smaller(z,x) \wedge (\exists u(Plant(u) \wedge Eats(z,u))) \rightarrow Eats(x,z))))$$
- Caterpillars are smaller than birds
$$\forall x \forall y (Caterpillar(x) \wedge Bird(y) \rightarrow Smaller(x,y))$$
- etc.

Logic and Resolution – p. 3326