Curs 5

Ne propunem să arătăm că probabilitățile condiționate sunt prob.

Dacă $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $A \in \mathcal{F}$ a.î. $\mathbb{P}(A) > 0$ atunci

$$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid A) \text{ este o probabilitate}$$

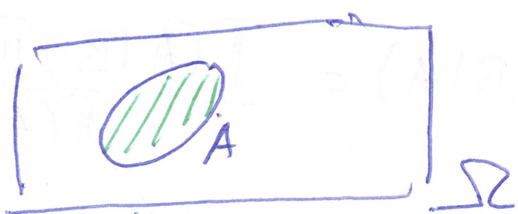
Dem. Orice $B \in \mathcal{F}$ avem că $Q(B) = \mathbb{P}(B \mid A) \in [0,1]$

$$Q : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$$

$$\underset{\text{ev. sigur}}{Q(\Omega)} = \mathbb{P}(\Omega \mid A) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$$

Mai mult, $Q(A) = 1$

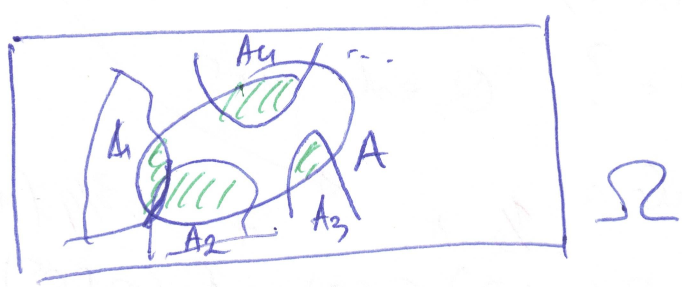
$\parallel$ $\mathbb{P}(A \mid A) = 1$



$$Q(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \mid A) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(A)} = 0$$

Dacă $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ disjuncte 2 câte 2 $(A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j)$

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$$



$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

Exp: Formula lui Bayes în care condiționăm încă odată:

$A, B, C \in \mathcal{F}$ a.î. $\mathbb{P}(A \cap C) > 0$, $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$

$$\mathbb{P}(A \mid \underset{B \cap C}{B, C}) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A, C)\, \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$$

$$Q(A \mid B) = \frac{Q(B \mid A)\, Q(A)}{Q(B)}$$

$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C)$

Exp: Să presupunem că avem 2 monede — una echilibrată, una trucată cu șansa de apariție H de $3/4$

Alegem la întâmplare una dintre monede ($1/2$) și o aruncăm de 3 ori și obținem HHH

a) Având această informație care este prob. ca moneda aleasă să fie echilibrată

b) Aruncăm pt a 4-a oară, care este prob să obținem H

Sol:

a) A - am obținut HHH în cele 3 aruncări

B - moneda aleasă este echilibrată

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{2}}$$

b) C - la a 4-a aruncare am obținut H

$\mathbb{P}(C|A) = ?$ $\qquad Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|A)$

Vrem să găsim $Q(C) = ?$ Q este prob.

Din formula prob. totale:

$\frac{1}{2} \times \qquad + \qquad \frac{3}{4}(1- \quad)$

$$Q(C) = Q(C|B)Q(B) + Q(C|B^c)Q(B^c)$$

$Q(B) = \mathbb{P}(B|A)$, $Q(B^c) = 1 - Q(B)$

$Q(C|B) = 1/2$, $Q(C|B^c) = 3/4$.

Independență:

Intuitiv 2 evenimente A și B sunt independente dacă realizarea unuia dintre ele nu influențează realizarea celuilalt.

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Def: Spunem că două evenimente A și B sunt indep dacă
$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Obs: Independența este diferită de noțiunea de ev. disjuncte

Dacă $A\cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = 0$

Exp: Aruncăm cu banul de 2 ori și A_1 - am obținut H la prima aruncare și A_2 - am obținut H la a doua aruncare

Sunt A_1 și A_2 indep?

$A_1\cap A_2$ - am obținut H la ambele aruncări

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(A_1) = 1/2, \quad \mathbb{P}(A_2) = 1/2\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2)$$

Notație: A și B sunt indep scriem $A \perp\!\!\!\perp B$

Obs: Dacă A și B sunt indep atunci A și B^c indep, A^c și B sunt indep și resp A^c și B^c sunt indep. (Ex)

Def: a) Spunem că ev. $A_1, A_2, \ldots A_n$ sunt indep. dacă
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i), \quad \forall I \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$$

Mai spunem și că ev. sunt mutual indep.

Exp: A, B, C sunt (mutual) independente

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C) \end{cases}$$

doar cele 3 relații implică faptul că A, B și C sunt indep. 2 câte 2

Câte egalități trebuie verificate?

$$\underbrace{C_n^0 + C_n^1 +}\ C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - C_n^1 - C_n^0$$

mul. cu 2 elem; cu 3 elem

$$= 2^n - n - 1 \text{ verificări}$$

Obs: În contextul prob. condiționate putem vorbi despre independența condiționată:

Evenimentele A și B sunt indep. cond. de ev. C dacă

$$\mathbb{P}(A\cap B|C) = \mathbb{P}(A|C)\times\mathbb{P}(B|C)$$

$$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|C) \hookrightarrow Q(A\cap B) = Q(A)\cdot Q(B)$$

Exp: În contextul unei afecțiuni cu $\mathbb{P}(D) = 0.1\%$ și a unui test cu acuratețea de 95%

sensitivitate = specificitate = 0.95

$$\mathbb{P}(T+|D+) = \mathbb{P}(T-|D-)$$

Am văzut că $\mathbb{P}(D+|T+) \simeq 1.5\%$

Presupunem că efectuăm un nou test independent de primul test (independent dat fiind statusul bolii) și are aceeași acuratețe. Din nefericire am obținut tot un rezultat pozitiv. Care este prob. să avem afecțiunea?

Fie T_1 - ev. prin care primul test a ieşit pozitiv
T_2 - ~ cel de-al 2-lea test a ieşit pozitiv

$$\mathbb{P}(D+ \mid T_1 \cap T_2) = ? \qquad \mathbb{P}(D+ \mid T_2)$$

Noul test este indep. faţă de vechiul test în fct de statusul bolii

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D+) = \mathbb{P}(T_1 \mid D+)\,\mathbb{P}(T_2 \mid D+)$$

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D-) = \mathbb{P}(T_1 \mid D-) \times \mathbb{P}(T_2 \mid D-)$$

$$\mathbb{P}(D+ \mid T_1 \cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D+)\,\mathbb{P}(D+)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)}$$

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) \overset{\text{f. prob totale}}{=} \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D+)\,\mathbb{P}(D+) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D-)\,\mathbb{P}(D-)$$

$$= \mathbb{P}(T_1 \mid D+)\,\mathbb{P}(T_2 \mid D+)\,\mathbb{P}(D+) + \mathbb{P}(T_1 \mid D-)\,\mathbb{P}(T_2 \mid D-)\,\mathbb{P}(D-)$$

$$\mathbb{P}(D+ \mid T_1 \cap T_2) = \frac{0.95^2 \cdot \frac{1}{100}}{0.95^2 \cdot \frac{1}{10^2} + 0.05^2 \cdot \frac{99}{10^2}} = \frac{0.95^2}{0.95^2 + 0.05^2 \times 99}$$

$$\simeq 0.784$$

Variabile aleatoare. Variabile aleatoare discrete

a) Aruncăm 2 zaruri

$$\Omega = \{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3,\dots,6\}\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

i) suma valorilor celor 2 zaruri să ia val 3

ii) nr. de 6 în cele 2 aruncări

iii) valoarea celui de al 2-lea zar la puterea a 7-a

b) Vrem să transmitem un bit $\{0,1\}$ printr-un canal codificând transmiterea bitului de n ori și

$n = 5 \qquad 0\,0\,1\,1\,0 \longrightarrow 0$

Ideea de v.a. (variabilă aleatoare) este de a asocia unui ev. elementar $\omega \in \Omega$ o valoare numerică ($\mathbb{R}$)

$$X : \underset{\omega}{\Omega} \longrightarrow \underset{X(\omega)}{\mathbb{R}}$$

exp. aleatoare

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de prob. O variabilă aleatoare este o fct reală $X : \Omega \to \mathbb{R}$ care are prop. că

$$\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Exp: Aruncăm cu banul de 2 ori

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ne definim X = nr. de H în cele 2 aruncări

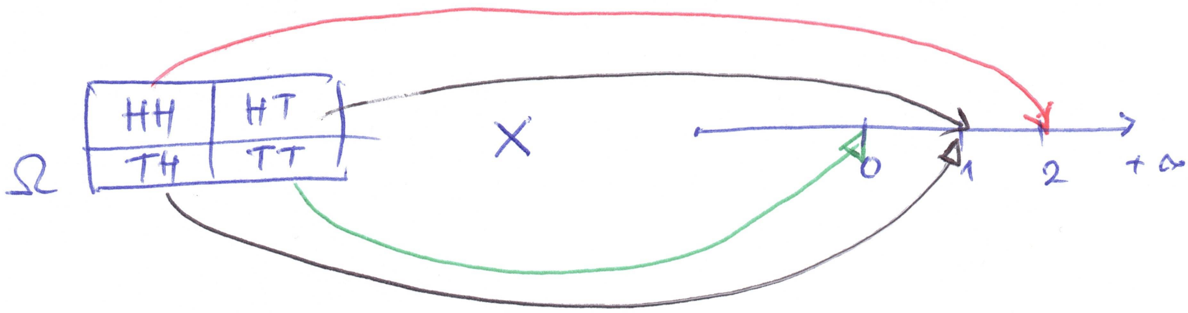
$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad X(\underset{\omega}{HH}) = 2$

$X(HT) = X(TH) = 1$

$X(TT) = 0$

$x = 1.5 \in \mathbb{R}$

$$\{X \leq x\} = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} = \{TT, HT, TH\} \subset \Omega$$



Not: Se folosesc litere mari $X, Y, Z, T, W, \dots$

Def: Spunem că v.a. X este discretă dacă $X(\Omega)$ (mult. val pe care le poate lua X) este cel mult numărabilă.

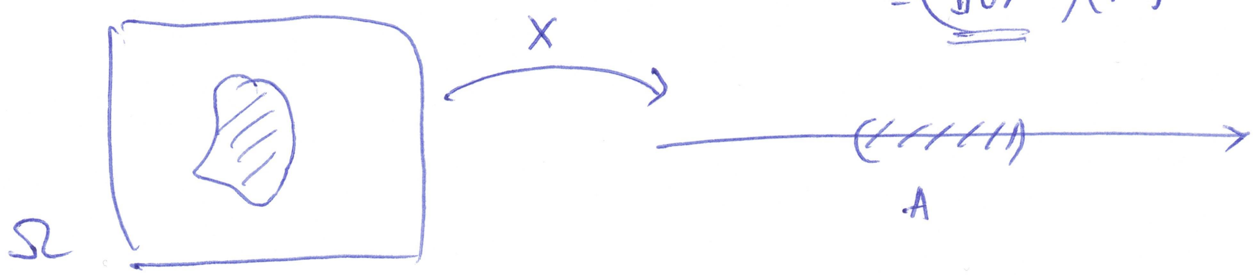
În caz contrar spunem că X este continuă.

Exp: Să presupunem că alegem la întâmplare un punct din $[0,1]$. Atunci v.a. X care asociază punctului (a) valoarea $\arcsin(a)$ este cont. iar v.a. Y care asociază numărul

$$Y = \operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} -1, & a<0 \\ 0, & a=0 \\ 1, & a>0 \end{cases}$$ este discretă

În general, pentru v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vrem să calculăm probabilități de tipul $\{X \in A\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(\{w \mid X(w) \in A\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$
$$= (\mathbb{P}\circ X^{-1})(A)$$



Mulțimea $\{w \mid X(w) \in A\} = X^{-1}(A)$ s.n. preimaginea lui A

Exemple:

① Într-o urnă sunt $\overset{24}{a}$ bile albe și $\overset{9}{n}$ bile negre. Extragem fără întoarcere 3 bile și ne întrebăm care este prob ca bilele extrase să fie în ordinea alb, alb, negru? ~~dar~~ alb, negru, alb? ca 2 din cele 3 bile să fie albe?

Sol:

Fie A_i - evenimentul ca la a i-a extragere să avem o bilă albă

Bilele sunt extrase în ordinea alb, alb, negru:

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3^c) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\times\mathbb{P}(A_3^c|A_1\cap A_2)$$

formula produs

$$= \frac{a}{a+n}\times\frac{a-1}{a-1+n}\times\frac{n}{a-2+n}$$

alb, negru, alb

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2^c\cap A_3) = \dots$$

$\{$2 din cele 3 bile extrase să fie albe$\} = \overbrace{(A_1\cap A_2\cap A_3^c)}^{B_1}\cup\overbrace{(A_1\cap A_2^c\cap A_3)}^{B_2}\cup\underbrace{(A_1^c\cap A_2\cap A_3)}_{B_3}$

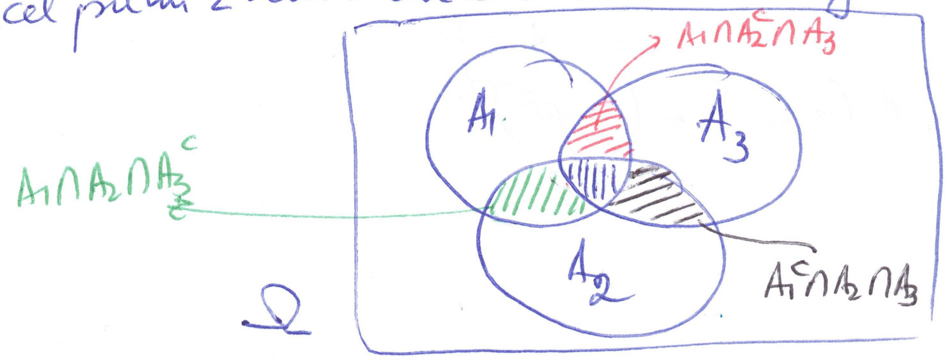
Am văzut că $\mathbb{P}(B_1)=\mathbb{P}(B_2)=\mathbb{P}(B_3)$

$B_1\cap B_2=\emptyset$, $B_1\cap B_3=\emptyset$

$B_2\cap B_3=\emptyset$

$$\mathbb{P}(B_1\cup B_2\cup B_3)=\mathbb{P}(B_1)+\mathbb{P}(B_2)+\mathbb{P}(B_3)=3\,\mathbb{P}(B_1)$$

$\{$cel puțin 2 dintre cele 3 bile sunt albe$\} = (A_1\cap A_2\cap A_3)\cup B_1\cup B_2\cup B_3$



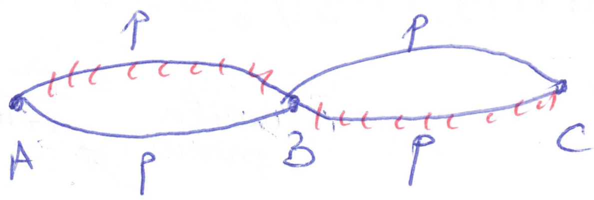
② Să presupunem că avem $\overset{-2-}{3}$ localități A, B, C
Buc.
Cluj

Pp că avem 2 drumuri între A și B și 2 drumuri între B și C
trecere dintre cele 4 drumuri are prob. p să fie blocat de zăpadă, independent de celelalte.

a) Care este prob. să avem un drum liber de la A la C?

b) Să presupunem că există un drum direct între A și C și acesta se blochează tot cu prob. p, indep. de celelalte.
Care este prob. să ajungem de la A la C?

Sol: a)



$\mathbb{P}$(drum deschis A la C) = $\mathbb{P}$(drum deschis între A și B $\cap$ drum deschis între B și C)

$\overset{\text{indep}}{=}$ $\mathbb{P}$(drum deschis între A și B) $\times$ $\mathbb{P}$(drum deschis B și C)

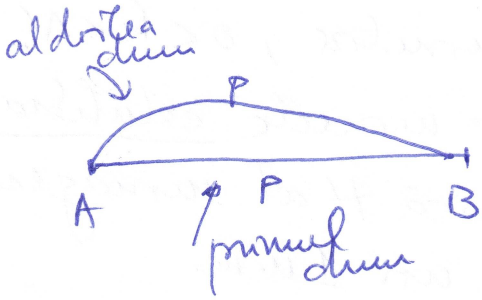
$\mathbb{P}$(drum deschis între A și B) = 1 − $\mathbb{P}$(ambele drumuri între A și B sunt blocate)

= 1 − $\mathbb{P}$(drumul de jos între A și B blocat) $\times$ $\mathbb{P}$(drumul de sus între A și B blocat)

$= 1 - p^2$

$\Rightarrow \mathbb{P}$(drum deschis A la C) $= (1-p^2)^2$

$\mathbb{P}(\text{drum deschis între A și B}) = \mathbb{P}(\text{primul drum deschis} \cup \text{al doilea drum deschis})$



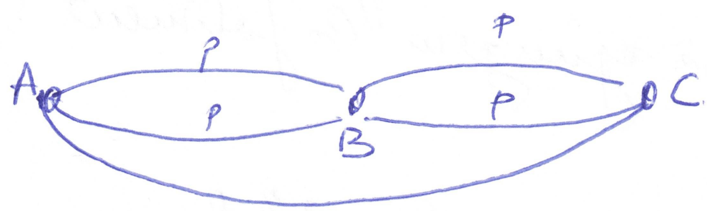
$= \mathbb{P}(D_1 \cup D_2)$

$= \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_2) - \mathbb{P}(D_1 \cap D_2)$

$= (1-p) + (1-p) - \underbrace{\mathbb{P}(D_1) \times \mathbb{P}(D_2)}_{(1-p)^2}$

$= 1 - p^2$

b)



$\mathbb{P}(\text{dr. deschis A-C}) = \mathbb{P}(\text{dr. deschis A-C} \mid \text{dr. direct deschis}) \times \mathbb{P}(\text{dr. direct deschis}) + \mathbb{P}(\text{dr. deschis A-C} \mid \text{dr. direct blocat}) \times \mathbb{P}(\text{dr. direct blocat})$

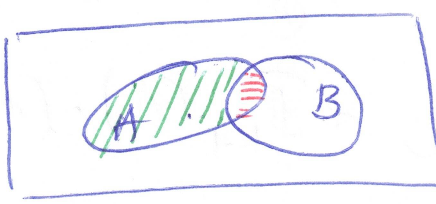
formula prob. totale

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c)\,\mathbb{P}(B^c)}$$

$\mathbb{P}(\text{dr. deschis A-C}) = 1 \times (1-p) + (1-p^2)^2 \times p$

Fie A și B 2 evenimente cu $\mathbb{P}(B) \in (0,1)$

$\mathbb{P}(A) = ?$



$\Omega = B \cup B^c$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A \cap (B \cup B^c)) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap B^c))$

$= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$

$= \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c)\,\mathbb{P}(B^c)$

condiționare

③ (Mersul la întâmplare)

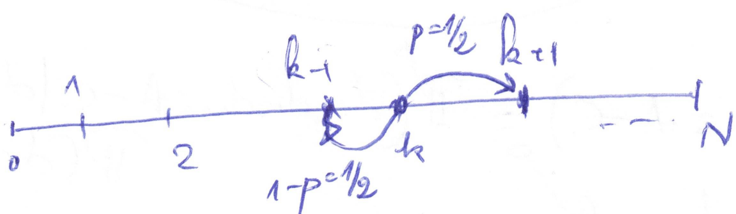
Vrem să ne cumpărăm o casă care costă N unități monetare și avem la dispoziție k unități monetare, $0<k<N$.

'Managerul băncii': aruncăm o monedă echilibrată (p) în mod repetat; dacă moneda pică H atunci managerul ne dă 1 u.m. în caz contrar îi dăm noi 1 u.m.

Jocul cont. până când sau am câștigat suma necesară sau am pierdut averea (faliment)

Care este prob. să ajungem la faliment?

Sol:



A - evenimentul prin care ajungem la faliment - ruină

B - ev. ca la prima aruncare să obținem H

$$\mathbb{P}(A \mid \text{am pornit cu } k) = ?$$

Notăm $\mathbb{P}_k(A) = \mathbb{P}(A \mid \text{am pornit cu } k)$

$$\mathbb{P}_k(A) \overset{\text{formula prob. totale}}{=} \mathbb{P}_k(A\mid B)\,\mathbb{P}_k(B) + \mathbb{P}_k(A\mid B^c)\,\mathbb{P}_k(B^c)$$

$$= \mathbb{P}_{k+1}(A)\cdot \tfrac{1}{2} + \mathbb{P}_{k-1}(A)\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}_{k+1}(A) = \mathbb{P}_k(A\mid B)$$

$$\mathbb{P}_k(A\mid B^c) = \mathbb{P}_{k-1}(A)$$

Notăm $p_k = \mathbb{P}_k(A)$

$$\boxed{p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1}} \quad k\in\{1,\dots,N-1\}$$

Condiţii iniţiale:

$$\begin{cases} p_0 = 1 & \text{dacă am plecat cu 0 u.m. am fost ruinat} \\ p_N = 0 & \text{dacă am atins suma nu joc} \end{cases}$$

Vrem să găsim $p_k = ?$ din rel.

$$\begin{cases} p_k = \overset{p}{\tfrac{1}{2}}\, p_{k+1} + \overset{1-p=q}{\tfrac{1}{2}}\, p_{k-1}, \quad k \in \{1, 2, \dots, N-1\} \\ p_0 = 1;\ p_N = 0 \end{cases}$$

$p_k = p\,p_{k+1} + q\,p_{k-1}$

$$2p_k = p_{k+1} + p_{k-1} \Rightarrow p_k - p_{k-1} = p_{k+1} - p_k$$

$$a_k = p_k - p_{k-1},\ k \geq 1 \Rightarrow a_{k+1} = a_k \Rightarrow a_k = a_1 = p_1 - p_0$$

$$\Rightarrow p_k - p_{k-1} = p_1 - p_0 \Rightarrow p_k = p_{k-1} + (p_1 - p_0)$$

$$p_k = \cancel{p_{k-1}} + \overbrace{(p_1 - p_0)}^{a_1}$$

$$\cancel{p_{k-1}} = \cancel{p_{k-2}} + a_1$$

$$\cancel{p_{k-2}} = p_{k-3} + a_1$$

$$\dots$$

$$\cancel{p_1} = p_0 + a_1$$

$(+)$

$$p_k = p_0 + k a_1$$

$$k = N \Rightarrow p_N = p_0 + N a_1 \Rightarrow a_1 = -1/N$$

$$\Rightarrow \boxed{p_k = 1 - \frac{k}{N}} \Rightarrow \text{prob. să câştigăm este } \frac{k}{N}$$

Ex: Ce se întâmplă pentru $p \neq 1/2$?