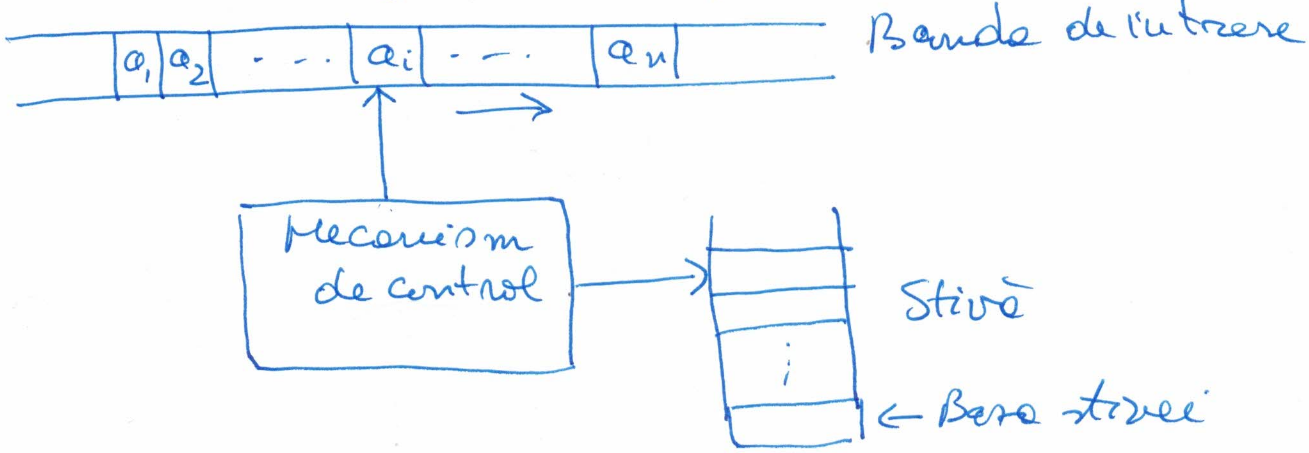
CURS 11 LFA

AUTOMATE STIVĂ (PUSHDOWN)

Un automat stivă este de fapt un automat finit cu λ-tranziții care are, în plus, o stivă cu ajutorul căreia poate să stocheze informații de dimensiune oricât de mare.

De fapt, automatele stivă recunosc (acceptă) limbaje independente de context.

Capul de citire este read-only și se deplasează doar de la stânga la dreapta.



La fiecare pas, automatul citește simbolul curent din intrare și simbolul din vârful stivei; în funcție de starea curentă și de simbolul din vârful stivei, automatul extrage vârful stivei pe care îl înlocuiește cu un șir de simboluri, posibil λ, avansează la următorul simbol din intrare și își schimbă starea.

<u>Definiție 1</u> Un automat stivă (pushdown) are o structură de forma:

$$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$$

unde:

- Q este mulțimea (finită) stărilor;
- Σ este alfabetul de intrare
- Γ este alfabetul stivei
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to P_{fin}(Q \times \Gamma^*)$ este funcția de tranziție; $P_{fin}(Q \times \Gamma^*)$ este mulțimea părților finite ale lui $Q \times \Gamma^*$
- $q_0 \in Q$ este starea inițială
- $z_0 \in \Gamma$ este simbolul inițial al stivei

Dacă $(q, Z_1 \ldots Z_K) \in \delta(p, a, Z)$ aceasta înseamnă că atunci când automatul este în starea p, citește simbolul din intrare a și în vârful stivei este Z, atunci scoate Z de pe stivă, pune pe stivă $Z_K, \ldots, Z_1$ (în această ordine), astfel încât în vârful stivei va fi acum Z_1, apoi trece în starea q.

Vom reprezenta grafic aceasta prin:

$$p \xrightarrow{a, Z | Z_1 \ldots Z_K} q \qquad a \in \Sigma,\ Z, Z_1, \ldots, Z_K \in \Gamma$$

Dacă $(q, Z_1 \ldots Z_K) \in \delta(p, \lambda, Z)$, aceasta înseamnă că atunci când automatul este în starea p, cu Z în vârful stivei, lasă intrarea neschimbată (capul de citire rămâne pe loc), scoate Z din stivă și introduce $Z_k, \dots, Z_1$ pe stivă, astfel încât Z_1 este ultimul introdus.

Automatul este <u>nedeterminist</u>, deoarece pentru o stare dată, un simbol terminal (posibil λ) și un simbol din Γ, pot exista mai multe tranziții.

<u>Exemplu</u> 1) $A_1 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

unde δ definită prin:

1. $\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$, $\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$

Aceste reguli se aplică inițial în starea q_0, când în vârful stivei apare Z_0.

Citim primul simbol din intrare (1 sau 0) și îl punem pe stivă, lăsând Z_0 pe stivă pentru a marca baza stivei

2. $\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$, $\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$,

$\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$, $\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$.

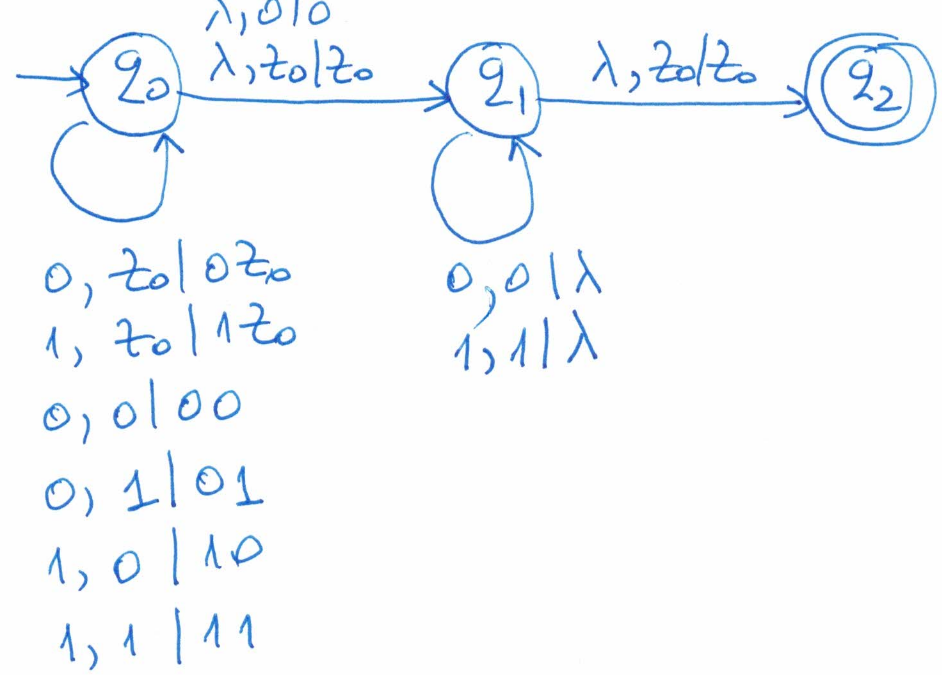
Aceste patru tranziții permit automatului să rămână în q_0 și să pună pe stivă simbolul din intrare citit, lăsând pe stivă simbolul anterior.

3. $\delta(q_0, \lambda, z_0) = \{(q_1, z_0)\}$, $\delta(q_0, \lambda, 0) = \{(q_1, 0)\}$, $\delta(q_0, \lambda, 1) = \{(q_1, 1)\}$. Aceste trei tranziții permit ca A_1 să treacă din starea q_0 în starea q_1, fără a citi nimic din intrare și lăsând stiva neschimbată.

4. $\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \lambda)\}$, $\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \lambda)\}$
În starea q_1, dacă simbolul din intrare este același cu cel din vârful stivei, atunci automatul avansează la următorul simbol din intrare și șterge vârful stivei.

5. $\delta(q_1, \lambda, z_0) = \{(q_2, z_0)\}$. În final, când în vârful stivei avem Z_0, trecem în starea finală q_2. Atunci când șirul de intrare w a fost în întregime citit și A_1 a trecut în starea finală q_2, rezultă că $|x|$ este de forma zz^R, $z \in \{a, b\}^*$, unde z^R este răsturnatul lui z (șirul z citit de la coadă spre cap).

Vom reprezenta grafic A_1, unde prin $\rightarrow\bigcirc$ marcăm starea inițială și prin $\circledcirc$ o stare finală:



<u>Definiție 2</u> Descrierea instantanee (instanța, configurație curentă) a unui APD (automat pushdown) $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ este un triplet de forma (q, w, γ), unde:

- $q \in Q$ starea curentă a automatului
- $w \in \Sigma^*$ șirul rămas de citit pe banda de intrare
- $\gamma \in \Gamma^*$ reprezintă ceea ce conține stiva la momentul curent. Primul simbol al lui γ, pentru $\gamma \neq \lambda$, este considerat vârful stivei.

<u>Definiție 3</u> Fie $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ un APD.

Numim <u>mișcare</u> sau <u>schimbare de configurație</u> a lui A relația notată cu $\vdash_A$ sau $\vdash$ dacă A se subînțelege, definită prin:

$(p, aw, Z\alpha) \vdash (q, w, \beta\alpha)$ dacă și numai dacă $(q, \beta) \in \delta(p, a, Z)$, unde $p, q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $w \in \Sigma^*$, $Z \in \Gamma$, $\alpha, \beta \in \Gamma^*$.

Notăm cu $\vdash_A^*$ (sau $\vdash^*$ când A este subînțeles) închiderea reflexivă și tranzitivă a lui $\vdash_A$ ($\vdash$), ceea ce înseamnă zero sau mai multe mișcări ale lui A.

<u>LIMBAJUL ACCEPTAT DE UN AUTOMAT STIVĂ</u>

Fie $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ un APD.

<u>Definiție 4</u> Limbajul acceptat de A <u>cu stări finale</u> este:

$$L(A,F) = L(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, z_0) \vdash^* (q, \lambda, \alpha), q \in F, \alpha \in \Gamma^* \}$$

În acest caz, un șir $w \in \Sigma^*$ este acceptat (recunoscut) dacă automatul citește în întregime pe w, trece într-o stare finală, fără să conteze ce rămâne pe stivă.

O altă modalitate de a recunoaște un șir este prin vidarea stivei:

<u>Definiție 5</u> Limbajul acceptat de A prin <u>vidarea stivei</u> este:

$$L_\lambda(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, z_0) \vdash^* (q, \lambda, \lambda), q \in Q \}$$

În acest caz șirul $w \in \Sigma^*$ este recunoscut dacă A pleacă din configurația inițială (q_0, w, z_0) și după mai multe mișcări citește în întregime pe w, golește stiva, ajungând într-o stare oarecare. În acest caz nu se mai ţine cont de stările finale.

Pentru A_1 din Exemplul 1 cu şirul 0110 la intrare, obţinem:

$(q_0, 0110, Z_0) \to (q_1, 0110, Z_0) \vdash (q_2, 0110, Z_0)$

$\downarrow$

$(q_0, 110, 0Z_0) \to (q_1, 110, 0Z_0)$

$\downarrow$

$(q_0, 10, 10Z_0) \to (q_1, 10, 10Z_0) \vdash (q_1, 0, 0Z_0) \vdash (q_1, \lambda, Z_0) \vdash (q_2, \lambda, Z$

$\downarrow$

$(q_0, 0, 110Z_0) \to (q_1, 0, 110Z_0)$

$\downarrow$

$(q_0, \lambda, 0110Z_0)$

<u>EXEMPLE</u> 2) $A_2 = (\{q_0\}, \{[,]\}, \{[, Z_0\}, \delta_2, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\delta_2(q_0, [, Z_0) = \{(q_0, [Z_0)\}$

$\delta_2(q_0, [, [) = \{(q_0, [[)\}$

$\delta_2(q_0,], [) = \{(q_0, \lambda)\}$

$\delta_2(q_0, \lambda, Z_0) = \{(q_0, \lambda)\}$

Acest automat recunoaşte mulţimea şirurilor corect parantezate utilizând parantezele pătrate, '[' şi ']'.

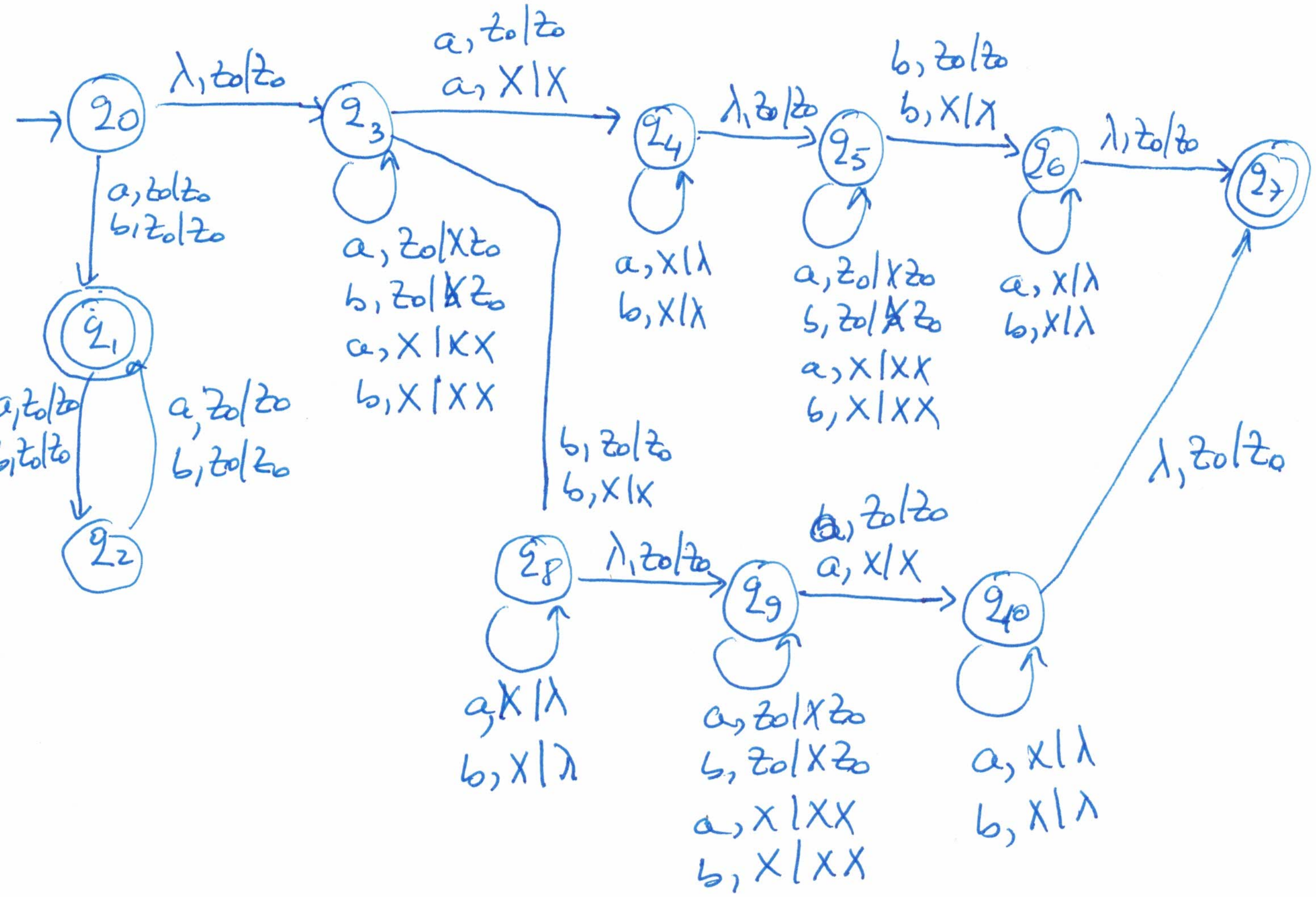
3) A_3 care acceptă $\{a,b\}^* - \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Construim A_3 în felul următor.

- Inițial verificăm dacă șirul de intrare are lungimea impară. Dacă da, îl acceptăm.
- Pentru șirurile de lungime pară, verificăm dacă sunt de forma $xayubv$ sau $xbyuav$, unde $|x|=|y|$, $|u|=|v|$. Într-adevăr, dacă $t=|yu|$, atunci $t=|y|+|u|$ și putem scrie $yu=y'u'$, unde $|y'|=|u|=|v|$, $|u'|=|y|=|x|$, deci

$$xayubv = \underline{x}\,a\,\underline{\underline{y'}}\,\underline{u'}\,b\,\underline{\underline{v}} \in \{a,b\}^* - \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

Vom folosi stiva pentru a contoriza numărul simbolurilor lui x, apoi reținem cu ajutorul stării curente că am citit 'a', apoi pentru fiecare simbol al lui y ștergem un simbol de pe stivă până ajungem la Z_0, apoi citim un număr oarecare de simboluri (u) pe care le contorizăm cu ajutorul stivei, apoi citim 'b', după care pentru fiecare simbol citit din intrare (v) ștergem un simbol de pe stivă. În final, când ajungem la Z_0, suntem siguri că șirul este de forma $xayubv$, $|x|=|y|$, $|u|=|v|$. Procedăm analog pentru șiruri de forma $xbyuav$, $|x|=|y|$, $|u|=|v|$, care sunt de asemenea în $L(A_3)$. Automatul este:



<u>Teorema 1</u> Pentru orice automat stivă $A=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z_0,F)$ există un automat stivă A' astfel încât $L_\lambda(A')=L(A,F)$

<u>Demonstrație</u> Fie $A'=(Q\cup\{f\},\Sigma,\Gamma,\delta',q_0,z_0,\phi)$, unde

$\delta'(q,\lambda,z)=\{(f,\lambda)\}\cup\delta(q,\lambda,z)$, $\forall\, q\in F$, $\forall z\in\Gamma$

$\delta'(f,\lambda,z)=\{(f,\lambda)\}$, $\forall z\in\Gamma$

$\delta'(q,a,z)=\delta(q,a,z)$, în rest

Avem:

$w \in L(A) \Leftrightarrow (q_0, w, z_0) \vdash_A^* (q, \lambda, z_1 \dots z_m)$, $q \in F$,

$z_1 \dots z_m \in \Gamma^*$, $m \geq 0 \Leftrightarrow (q_0, w, z_0) \vdash_{A'}^* (q, \lambda, z_1 \dots z_m)$

Dacă $m = 0$, atunci $(q_0, w, z_0) \vdash_{A'}^* (q, \lambda, \lambda)$, deci

$w \in L_\lambda(A')$.

Dacă $m \geq 1$, atunci $(q_0, w, z_0) \vdash_{A'}^* (q, \lambda, z_1 \dots z_m) \vdash_{A'}$

$(f, \lambda, z_2 \dots z_m) \vdash_{A'}^{m-1} (f, \lambda, \lambda) \Leftrightarrow w \in L_\lambda(A')$.

<u>Teorema 2</u> Pentru orice automat stivă

$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, \phi)$ există A' cu stări

finale astfel încât $L(A') = L_\lambda(A)$

<u>Demonstrație</u> Considerăm automatul stivă

$A' = (Q \cup \{s, f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{S_0\}, \delta', s, S_0, \{f\})$, unde

$\delta'(s, \lambda, S_0) = \{(q_0, z_0 S_0)\}$

$\delta'(q, a, z) = \delta(q, a, z)$, $\forall q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $z \in \Gamma$

$\delta'(q, \lambda, S_0) = \{(f, S_0)\}$, $\forall q \in Q$

Atunci:

$w \in L(A') \Leftrightarrow (s, w, S_0) \vdash_{A'}^* (f, \lambda, S_0) \Leftrightarrow \exists q \in Q$,

$(s, w, S_0) \vdash_{A'} (q_0, w, z_0 S_0) \vdash_{A'}^* (q, \lambda, S_0) \vdash_{A'} (f, \lambda, S_0)$, unde în $(q_0, w, z_0 S_0) \vdash^{*}_{A'} (q, \lambda, S_0)$ s-au folosit doar mișcări bazate pe $\delta \Leftrightarrow (q_0, w, z_0) \vdash^{*}_{A} (q, \lambda, \lambda)$ $\Leftrightarrow w \in L_\lambda(A)$.

<u>Exerciții</u> Să se scrie un automat stivă care recunoaște limbajul:

$L_1 = \{ a^n b^n a^m b^m \mid n, m \geq 0 \}$

$L_2 = \{ a^i b^j c^k \mid i + j = 2k,\ i, j, k \geq 0 \}$

$L_3 = \{ a^m b^n \mid m \geq n \geq 0 \}$

$L_5 = \{ a^i b^j \mid j \geq i \geq 0 \}$

$L_6 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b \}$

$L_7 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid 2|w|_a = 3|w|_b \}$

$L_8 = \{a, b\}^* - \{ w w^R \mid w \in \{a, b\}^* \}$