

Breviar pentru Cursurile I și II de Logică Matematică și Computațională

Claudia MUREȘAN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

CUPRINSUL CURSULUI DE LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Capitolul 1: Preliminarii algebrice:

- Mulțimi, funcții și relații. Relații binare. Relații de echivalență
- Relații de ordine. Mulțimi (parțial) ordonate
- Latici
- Algebre Boole. Morfisme de algebre Boole. Filtre și congruențe în algebre Boole. Ultrafiltre. Teorema de reprezentare a lui Stone (*algebra Boole cu exact două elemente determină structura tuturor algebrelor Boole*). Structura algebrelor Boole finite

Capitolul 2: Logica propozițională clasică:

- Sintaxa (*o primă prezentare pentru logica propozițională clasică: sistemul Hilbert*)
- Algebra Lindenbaum–Tarski (*o algebră Boole asociată logicii propoziționale clasice*)
- Semantica (*calculul cu valori de adevăr, în algebra Boole cu exact două elemente: 0 = fals, 1 = adevărat*)
- Teorema de completitudine (*deducția sintactică, coincide cu deducția semantică*)
- Rezoluția propozițională (*echivalentă cu sistemul Hilbert*)
- Deducția naturală (*echivalentă cu sistemul Hilbert*)

Capitolul 3: Logica clasică a predicatelor (*predicat = propoziție cu variabile*):

- Structuri de ordinul I (*structuri algebrice în care iau valori variabilele din predicate*)
- Sintaxa
- Semantica
- Teorema de completitudine (*deducția sintactică, coincide cu deducția semantică*)
- Rezoluția în logica clasică a predicatelor

A se vedea **bibliografia** acestui curs, în Cursul I.
Prescurtări uzuale:

- **i. e.** = id est = adică
- **ddacă** = dacă și numai dacă
- **a. î.** = astfel încât
- **ș. a. m. d.** = și așa mai departe
- “:=”: abreviere pentru: $\stackrel{\text{definiție}}{=}$, $\stackrel{\text{notație}}{=}$
- \dashv : notație pentru: ”să se demonstreze că”

1 Teoria mulțimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

- O definiție din **teoria naivă a mulțimilor**: o *mulțime* este o colecție de obiecte **bine determinate** și **distincte**, numite *elementele mulțimii*.
- **distincte**: o mulțime nu conține un același obiect de mai multe ori; un element apare într-o mulțime o singură dată
- **bine determinate**: orice mulțime are o descriere precisă, care o identifică în mod unic, adică îi identifică în mod unic elementele

A se vedea în Cursul I Paradoxul lui Bertrand Russell, care arată că **nu există mulțimea tuturor mulțimilor**. Totalitatea mulțimilor nu formează o mulțime, ci o **clasă**.

Din punctul de vedere al teoriei naive a mulțimilor, nu se pot spune multe lucruri despre noțiunea de *clasă*, decât că este “ceva mai vag/mai mare/mai cuprinzător decât o mulțime”. Se consideră că orice mulțime este o clasă, dar nu și invers. Clasele care nu sunt mulțimi se numesc *clase proprii*.

Semnul (simbolul) de apartenență **nu** poate apărea la dreapta unei clase proprii, adică nu se consideră a avea sens faptul că o clasă proprie aparține unui alt obiect.

Așadar **nu există clasa tuturor claselor**, din simplul motiv că nu există un obiect care să aibă clase proprii ca elemente.

- O *axiomă* este un fapt **dat** ca fiind adevărat într-o teorie matematică.
- O *axiomă* nu se demonstrează, ci pur și simplu este **dată** ca fiind adevărată.
- Faptul de a fi axiomă **nu este o proprietate intrinsecă** a unei afirmații.
- *formalizare*: exprimare folosind **numai** simboluri matematice
- *metalimbaj*: “limbajul natural”, “vorbirea curentă (obișnuită)”, “exprimarea în cuvinte”, “fără simboluri matematice”

2 Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Lucrăm numai cu enunțuri care sunt **fie false, fie adevărate**.

Conectorii logici: folosiți pentru a lega enunțuri, formând astfel *enunțuri compuse*:

- *disjuncția*: sau
- *conjuncția*: și
- *negația*: non
- *implicația*: \Rightarrow
- *echivalența*: \Leftrightarrow

Pentru orice enunțuri (propoziții, afirmații, proprietăți) p , q și r , au loc echivalențele următoare:

- $[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)]$
- $[p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)]$
- $\text{non } (p \text{ sau } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)]$
- $\text{non } (p \text{ și } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } q]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)]$ (**principiul reducerii la absurd**)
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \Leftrightarrow (\text{non } q)]$ (consecință imediată a principiului reducerii la absurd și a faptului că $(p \Leftrightarrow q) \stackrel{\text{def.}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ și } (q \Rightarrow p)]$)

- implicația $[p \Rightarrow q]$ este echivalentă cu $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$

Cuantificatorii:

- *cuantificatorul universal:* \forall
- *cuantificatorul existențial:* \exists

Dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate referitoare la x (mai precis o proprietate referitoare la elementele pe care le parcurge/le poate denumi x), atunci:

- $\text{non } [(\forall x) (p(x))] \Leftrightarrow (\exists x) (\text{non } p(x))$
- $\text{non } [(\exists x) (p(x))] \Leftrightarrow (\forall x) (\text{non } p(x))$

Notația 2.1. Alăturarea de simboluri $\exists!$ semnifică “există un unic”, “există și este unic”.

Observația 2.1. $\exists!$ nu este un cuantificator, ci este o notație prescurtată pentru enunțuri compuse: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate asupra lui x , atunci scrierea $(\exists! x) (p(x))$ este o abreviere pentru enunțul scris, desfășurat, astfel:

$$(\exists x) (p(x)) \text{ și } (\forall y) (\forall z) [(p(y) \text{ și } p(z)) \Rightarrow y = z],$$

unde y și z sunt variabile.

Cuantificatori aplicați fixând un domeniu al valorilor:

Fie M o mulțime, x o variabilă, iar $p(x)$ o proprietate referitoare la elementele lui M . Atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru scrierile fără domeniu al valorilor lângă cuantificatori:

- $(\forall x \in M) (p(x)) \stackrel{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\forall x) (x \in M \Rightarrow p(x))$
- $(\exists x \in M) (p(x)) \stackrel{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\exists x) (x \in M \text{ și } p(x))$

Toate proprietățile logice pentru enunțuri cuantificate din acest curs se scriu la fel și sunt valabile și pentru cuantificatori urmați de un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată.

Cuantificatorii de același fel comută, cei diferiți nu:

Fie x și y variabile, iar $p(x, y)$ o proprietate asupra lui x și y . Atunci:

- $(\forall x) (\forall y) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y) (\forall x) (p(x, y))$
- $(\exists x) (\exists y) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y) (\exists x) (p(x, y))$
- $(\forall x) (\exists y) (p(x, y)) \not\Leftrightarrow (\exists y) (\forall x) (p(x, y))$ (pentru fiecare valoare a lui x , valoarea lui y pentru care e satisfăcut enunțul din stânga depinde de valoarea lui x)

Analog, dacă A și B sunt mulțimi, avem:

- $(\forall x \in A) (\forall y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in B) (\forall x \in A) (p(x, y))$
- $(\exists x \in A) (\exists y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in B) (\exists x \in A) (p(x, y))$
- $(\forall x \in A) (\exists y \in B) (p(x, y)) \not\Leftrightarrow (\exists y \in B) (\forall x \in A) (p(x, y))$

Desigur, la fel pentru cazul în care doar unul dintre cuantificatori este aplicat cu un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată: $(\forall x) (\forall y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in B) (\forall x) (p(x, y))$ etc..

Cuantificatori, disjuncții și conjuncții logice:

Să observăm și următoarele proprietăți logice: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ și $q(x)$ sunt enunțuri referitoare la x , atunci:

- $(\forall x) (p(x) \text{ și } q(x)) \Leftrightarrow (\forall x) (p(x)) \text{ și } (\forall x) (q(x))$
- $(\exists x) (p(x) \text{ sau } q(x)) \Leftrightarrow (\exists x) (p(x)) \text{ sau } (\exists x) (q(x))$
- $(\forall x) (p(x) \text{ sau } q(x)) \not\Leftrightarrow (\forall x) (p(x)) \text{ sau } (\forall x) (q(x))$
- $(\exists x) (p(x) \text{ și } q(x)) \not\Leftrightarrow (\exists x) (p(x)) \text{ și } (\exists x) (q(x))$

Scoaterea de sub un cuantificator a unui enunț care nu depinde de variabila cuantificată:

Dacă, în enunțurile compuse cuantificate de mai sus, în locul lui $q(x)$ avem un enunț q care nu depinde de x , atunci:

$$(\forall x) q \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (\exists x) q,$$

așadar, în acest caz, din proprietățile anterioare obținem:

- $(\forall x) (p(x) \text{ și } q) \Leftrightarrow (\forall x) (p(x)) \text{ și } q$
- $(\exists x) (p(x) \text{ sau } q) \Leftrightarrow (\exists x) (p(x)) \text{ sau } q$
- $(\forall x) (p(x) \text{ sau } q) \not\equiv (\forall x) (p(x)) \text{ sau } q$
- $(\exists x) (p(x) \text{ și } q) \not\equiv (\exists x) (p(x)) \text{ și } q$

Acum fie p, q și r enunțuri. Atunci, din proprietățile: $[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)], [p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)], \text{non } (p \text{ sau } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)], \text{non } (p \text{ și } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)] \text{ și } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } q], \text{ se pot deduce următoarele proprietăți:}$

- $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \not\equiv [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \not\equiv [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
- $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \not\equiv [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \not\equiv [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$

3 Operații cu mulțimi și relații între mulțimi

Notăția 3.1. • Păstrăm notația consacrată \in pentru **simbolul de apartenență**, ce indică faptul că un obiect este element al altui obiect (mulțime, clasă).

- Păstrăm notația clasică, folosind acolade, pentru specificarea elementelor unei mulțimi (fie prin enumerare, fie printr-o proprietate a lor).

Amintim că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulțimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.

Notăția 3.2. Păstrăm notațiile cunoscute \cup, \cap, \setminus și Δ pentru **reuniunea, intersecția, diferența** și, respectiv, **diferența simetrică** între mulțimi.

Amintim că, pentru orice mulțimi A și B , se definesc:

- $A \cup B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\};$
- $A \cap B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\};$
- $A \setminus B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\};$
- $A \Delta B \stackrel{\text{def.}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$

A se revedea proprietățile operațiilor cu mulțimi demonstrate la seminar, precum și cele lăsate ca temă pentru acasă în cursul orelor de seminar!

Vom face mereu apel și la cunoștințe din gimnaziu și liceu, dintre care pe unele le vom aminti, de regulă doar enunțându-le.

Notăția 3.3. Păstrăm notațiile \subseteq , \subsetneq , \supseteq și \supsetneq pentru **incluziunile** și **incluziunile stricte** dintre mulțimi în fiecare sens. Vom mai nota incluziunile stricte și cu \subset și respectiv \supset , dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă și nu poate avea loc egalitatea de mulțimi nu ne folosește în cele prezentate.

Amintim că, pentru orice mulțimi A și B :

- $A = B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x) [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (prin definiție, două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elemente);
- $A \subseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x) [x \in A \Rightarrow x \in B]$;
- $A \supseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A$;
- $A \subsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} [A \subseteq B \text{ și } A \neq B]$;
- $A \supsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subsetneq A$.

Notăția 3.4. Vom nota cu \emptyset **mulțimea vidă**, adică mulțimea fără elemente, i.e. unica (conform definiției egalității de mulțimi) mulțime care satisface: $(\nexists x) (x \in \emptyset)$, sau, echivalent: $(\forall x) (x \notin \emptyset)$.

Definiția 3.1. Dacă A și B sunt mulțimi, atunci A se numește:

- *submulțime a lui B* (sau *parte a lui B*) dacă $A \subseteq B$;
- *submulțime proprie* (sau *strictă*) *a lui B* dacă $A \subsetneq B$.

Notăția 3.5. Pentru orice mulțime T , vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ **mulțimea părților** lui T , i. e. **mulțimea submulțimilor** lui T : $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Să notăm cu **xor** conectorul logic *sau exclusiv*, definit astfel: pentru orice enunțuri p și q , enunțul $(p \text{ xor } q)$ este adevărat exact atunci când **exact unul** dintre enunțurile p și q este adevărat, adică exact atunci când $[(p \text{ e adevărat și } q \text{ e fals}) \text{ sau } (q \text{ e adevărat și } p \text{ e fals})]$. Formal:

- $(p \text{ xor } q) \Leftrightarrow [(p \text{ și non } q) \text{ sau } (q \text{ și non } p)]$

Remarca 3.1. Definiția diferenței simetrice arată că, pentru orice mulțimi A și B :

- $A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ xor } x \in B\}$.

A se vedea, în Cursul I, proprietățile logice (cu enunțuri) în care se transcriu următoarele proprietăți pentru calculul cu mulțimi.

Și a se observa faptul că, pentru operații comutative, precum reuniunea și intersecția de mulțimi, distributivitatea la stânga față de alte operații este echivalentă cu distributivitatea la dreapta.

Pentru orice mulțimi A, B, C, D , au loc:

- $A = B$ dacă $[A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A]$
- **idempotența reuniunii:** $A \cup A = A$
- **idempotența intersecției:** $A \cap A = A$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \Delta A = \emptyset$
- **comutativitatea reuniunii:** $A \cup B = B \cup A$
- **comutativitatea intersecției:** $A \cap B = B \cap A$
- **comutativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta B = B \Delta A$
- **asociativitatea reuniunii:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **asociativitatea intersecției:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **asociativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

- **distributivitatea la stânga a reuniunii față de intersecție:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **distributivitatea la dreapta a reuniunii față de intersecție:** $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$
- **distributivitatea la stânga a intersecției față de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **distributivitatea la dreapta a intersecției față de reuniune:** $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$
- $A \subsetneq B$ ddacă $[(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ și } (\exists x)(x \in B \setminus A)]$ ddacă $[A \subseteq B \text{ și } B \setminus A \neq \emptyset]$ ddacă $[A \subseteq B \text{ și } B \not\subseteq A]$
- $A \subseteq B$ ddacă $(A \subsetneq B \text{ sau } A = B)$
- $A \subseteq A$
- $\text{non}(A \subsetneq A)$
- **tranzitivitatea incluziunii nestrictă:** $(A \subseteq B \text{ și } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$
- $(A \subsetneq B \text{ și } B \subseteq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $(A \subseteq B \text{ și } B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- **tranzitivitatea incluziunii stricte:** $(A \subsetneq B \text{ și } B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $A \subseteq A \cup B; B \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A; A \cap B \subseteq B$
- $A \cup B = B$ ddacă $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$
- $\emptyset \subseteq A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$
- $A \setminus B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq B$
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, adică: $A \subseteq \emptyset$ ddacă $A = \emptyset$
- $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $A = B$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \setminus B = A$ ddacă $B \setminus A = B$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$
- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$
- $(A \subseteq C \text{ și } B \subseteq C) \text{ ddacă } A \cup B \subseteq C$
- $(A \subseteq B \text{ și } A \subseteq C) \text{ ddacă } A \subseteq B \cap C$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C \subseteq B \setminus C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$
- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$

- $A \setminus B \subseteq A$
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Considerăm o mulțime T , iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ (*complementara lui X față de T*). Au loc:

- $\overline{\overline{A}} \in \mathcal{P}(T)$, adică $\overline{\overline{A}} \subseteq T$
- $\overline{\emptyset} = T$
- $\overline{T} = \emptyset$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- **operația de trecere la complementară este autoduală:** $\overline{\overline{A}} = A$
- **legile lui De Morgan:**
$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (ușor de demonstrat folosind proprietățile de mai sus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; mai mult:
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$
- $A \cup \overline{A} = T$; mai mult:
- $A \cup B = T$ ddacă $A \supseteq \overline{B}$ ddacă $B \supseteq \overline{A}$
- **A și B sunt părți complementare ale lui T ddacă fiecare este complementara celeilalte față de T :**
$$T: \begin{cases} A \cup B = T \\ \text{și} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases} \quad \text{ddacă } A = \overline{B} \text{ ddacă } B = \overline{A}$$

4 Alte operații cu mulțimi

Produsul direct a două mulțimi:

Notăția 4.1 (a se vedea definiția axiomatică a unei perechi ordonate în CURSUL I). Pentru orice elemente a și b , notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b .

Definiția 4.1 (egalitatea de perechi semnifică egalitatea pe componente). Pentru orice elemente a_1, a_2, x_1, x_2 :

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = x_1 \\ \text{și} \\ a_2 = x_2 \end{cases}$$

Definiția 4.2. Pentru orice mulțimi A și B , se definește *produsul cartezian* dintre A și B (numit și *produsul direct* dintre A și B) ca fiind mulțimea de perechi ordonate $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Remarca 4.1 (produsul cartezian cu \emptyset este \emptyset ; produsul cartezian este distributiv față de reuniunea, intersecția, diferența și diferența simetrică între mulțimi (și la stânga, și la dreapta). Pentru orice mulțimi A, B și C , au loc egalitățile:

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ și $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ și $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ și $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
- $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ și $(B \Delta C) \times A = (B \times A) \Delta (C \times A)$

Reuniunea disjunctă a două mulțimi:

Definiția 4.3. Fie A și B două mulțimi. Se definește *reuniunea disjunctă* a mulțimilor A și B ca fiind mulțimea notată $A \amalg B$ și definită prin:

$$A \amalg B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Observația 4.1. Reuniunea disjunctă este “un fel de reuniune” în care mulțimile care se reunesc sunt “făcute disjuncte”, prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a unui indice corespunzător mulțimii respective (un element diferit de cel atașat elementelor celeilalte mulțimi) (vom vorbi despre **indici** într-o discuție despre **familii arbitrare de mulțimi**).

5 Mulțimi și funcții

Definiția 5.1. Fie A și B mulțimi oarecare. Se numește *funcție* de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. î., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.

Formal: $(\forall a \in A) (\exists! b \in B) ((a, b) \in G)$.

Faptul că f este o funcție de la A la B se notează cu $f : A \rightarrow B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Mulțimea A se numește *domeniul* funcției f , B se numește *codomeniul* sau *domeniul valorilor* lui f , iar G se numește *graficul* lui f .

Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ și se numește *valoarea funcției f în punctul a* .

Remarca 5.1 $((a, b) \in G \Leftrightarrow f(a) = b)$. Dacă $f = (A, G, B)$ este o funcție ($f : A \rightarrow B$), atunci graficul G al lui f este mulțimea de perechi: $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

Definiția 5.2. Fie $f = (A, F, B)$ și $g = (C, G, D)$ două funcții ($f : A \rightarrow B$, iar $g : C \rightarrow D$).

- Egalitatea $f = g$ semnifică egalitatea de triplete $(A, F, B) = (C, G, D)$, i. e. spunem că $f = g$ dacă:

$A = C$ (are loc egalitatea domeniilor),
 $B = D$ (are loc egalitatea codomeniilor) și
 $F = G$ (are loc egalitatea graficelor celor două funcții,
 ceea ce, conform scrierii acestor grafice
 din remarca anterioară, se transcrie în egalitate
 punctuală, adică egalitate în fiecare punct:
 pentru orice $a \in A = C$, $f(a) = g(a)$).

- Dacă X este o mulțime a. î. $X \subseteq A$ și $X \subseteq C$, atunci spunem că f și g *coincid pe X* dacă f și g au aceleași valori în elementele lui X , adică: oricare ar fi $x \in X$, $f(x) = g(x) \in B \cap D$.

Notăția 5.1 (putere de mulțimi). Pentru orice mulțimi A și B , se notează cu B^A mulțimea funcțiilor de la A la B :

$$B^A = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$$

Remarca 5.2 (există o unică funcție de la \emptyset la o mulțime arbitrară). Fie B o mulțime oarecare (poate fi vidă și poate fi nevidă). Atunci $B^\emptyset = \{(\emptyset, \emptyset, B)\}$.

Remarca 5.3 (nu există nicio funcție de la o mulțime nevidă la \emptyset). Fie A o mulțime a. î. $A \neq \emptyset$. Atunci $\emptyset^A = \emptyset$.

Definiția 5.3. Pentru orice mulțimi A și B , orice funcție $f : A \rightarrow B$ și orice submulțimi $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$, se definesc:

- *imaginea lui X prin f sau imaginea directă a lui X prin f* , notată $f(X)$, este submulțimea lui B :

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$

- $f(A)$ se mai notează cu $Im(f)$ și se numește *imaginea lui f* :

$$Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

- *preimaginea lui Y prin f sau imaginea inversă a lui Y prin f* , notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărți, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f , care există numai atunci când f este inversabilă, deci numai atunci când f este bijectivă – a se vedea în cele ce urmează –, pe când preimaginea unei submulțimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcție), este submulțimea lui A :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Definiția 5.4. Fie A și B mulțimi și $f : A \rightarrow B$ o funcție. f se zice:

- *injectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
 - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
 - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- *surjectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - pentru orice $b \in B$, există (cel puțin un) $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall b \in B) (\exists a \in A) (f(a) = b)$)
 - $f(A) = B$
- *bijectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - f este simultan injectivă și surjectivă
 - pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall b \in B) (\exists! a \in A) (f(a) = b)$)

Funcțiile injective, surjective, respectiv bijective se mai numesc *injectii*, *surjectii*, respectiv *bijectii*.

Când notăm $f : A \rightarrow B$, subînțelegem că A și B sunt mulțimi.

Remarca 5.4. Pentru orice funcție $f : A \rightarrow B$:

- $f^{-1}(B) = A$;
- $f(\emptyset) = \emptyset$ și $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$;
- dacă $V \subseteq W \subseteq B$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$;
- pentru orice $M \subseteq A$, $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$, cu egalitate pentru f injectivă;
- pentru orice $N \subseteq B$, $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$, cu egalitate pentru f surjectivă;
- în schimb, pentru orice $N \subseteq f(A) = Im(f)$, $f(f^{-1}(N)) = N$.

Definiția 5.5 (funcția identitate a unei mulțimi). Pentru orice mulțime A , notăm cu id_A funcția identică a lui A (numită și funcția identitate a lui A sau identitatea lui A): $id_A : A \rightarrow A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.

Definiția 5.6 (compunerea de funcții). Dacă A, B, C sunt mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ sunt funcții, atunci compunerea funcției g cu funcția f este funcția notată cu $g \circ f$ și definită astfel: $g \circ f : A \rightarrow C$, pentru orice $a \in A$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$.

Definiția 5.7 (inversa unei funcții). Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$. f se zice *inversabilă* dacă există o funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Remarca 5.5 (dacă există, inversa unei funcții este unică). Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție inversabilă. Atunci există o unică funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Definiția 5.8. Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție inversabilă. Atunci unica funcție $g : B \rightarrow A$ cu proprietățile $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$ se notează cu f^{-1} ($f^{-1} = g : B \rightarrow A$) și se numește *inversa lui f* .

Remarca 5.6. Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$. Atunci: f este inversabilă dacă este bijectivă.

Exercițiul 5.1 (caracterizarea surjectivității prin existența unei inverse la dreapta, și a injectivității prin existența unei inverse la stânga – temă). Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \rightarrow B$. Atunci:

- (i) f este surjectivă dacă $(\exists g : B \rightarrow A) (f \circ g = id_B)$; în plus, conform (iii) de mai jos, în caz afirmativ, g este injectivă;
- (ii) f este bijectivă dacă $(\exists ! g : B \rightarrow A) (f \circ g = id_B)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la dreapta g a lui f este $g = f^{-1}$, care este simultan inversă la dreapta și inversă la stânga pentru f ;
- (iii) f este injectivă dacă $(\exists h : B \rightarrow A) (h \circ f = id_A)$; în plus, conform (i) de mai sus, în caz afirmativ, h este surjectivă;
- (iv) f este bijectivă dacă $(\exists ! h : B \rightarrow A) (h \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la stânga h a lui f este $h = f^{-1}$, care este simultan inversă la stânga și inversă la dreapta pentru f ;
- (v) după cum știm, f este bijectivă dacă este inversabilă, i. e. f este bijectivă dacă $(\exists j : B \rightarrow A) (f \circ j = id_B \text{ și } j \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, j este unică, se notează cu f^{-1} și se numește *inversa lui f* ; dar, conform (i) și (iii), avem și următoarea caracterizare a bijectivității: f este bijectivă dacă $(\exists g, h : B \rightarrow A) (f \circ g = id_B \text{ și } h \circ f = id_A)$; în plus, conform (ii) și (iv), în caz afirmativ, g și h sunt unice și $g = h = f^{-1}$.

Exercițiul 5.2 (funcțiile imagine directă și imagine inversă – temă). Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \rightarrow B$. Considerăm funcțiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B), & (\forall M \subseteq A) (f_*(M) := f(M)); \\ f^* : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), & (\forall N \subseteq B) (f^*(N) := f^{-1}(N)). \end{cases}$$

Atunci au loc următoarele echivalențe:

- (i) f este injectivă dacă f_* este injectivă dacă f^* este surjectivă dacă $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$ (i. e. $(\forall M \subseteq A) (f^{-1}(f(M)) = M)$) dacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$;
- (ii) f este surjectivă dacă f_* este surjectivă dacă f^* este injectivă dacă $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$ (i. e. $(\forall N \subseteq B) (f(f^{-1}(N)) = N)$) dacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$;
- (iii) din (i) și (ii), obținem: f este bijectivă dacă f_* este bijectivă dacă f^* este bijectivă dacă f^* și f_* sunt inverse una alteia dacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) = B \setminus f(M))$.

6 Teoria cardinalelor

Definiția 6.1. Două mulțimi A și B se zic *echipotente* sau *cardinal echivalente* dacă există o funcție bijectivă de la A la B , fapt notat prin: $A \cong B$.

Definiția 6.2. Pentru orice mulțime A , se numește *cardinalul lui A* sau *numărul cardinal al lui A* clasa tuturor mulțimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$.

Să observăm că:

- pentru orice mulțime A , $A \cong A$ (pentru că $id_A : A \rightarrow A$ este o bijecție), deci $A \in |A|$
- pentru orice mulțimi A și B , dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ și $|A| = |B|$, i. e. orice mulțime C satisface $A \cong C$ dacă satisface $B \cong C$; așadar avem chiar echivalențele: $A \cong B$ dacă $B \cong A$ dacă $|A| = |B|$

- pentru orice mulțimi A și B , dacă $A \not\cong B$, atunci nu există nicio mulțime C cu proprietățile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) și $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$); așadar avem chiar echivalențele: $A \not\cong B$ ddacă $|A| \neq |B|$ ddacă $|A| \cap |B| = \emptyset$

Definiția 6.3 (suma, produsul și puterea de numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B , avem, prin definiție:

- $|A| + |B| := |A \coprod B|$
- $|A| \cdot |B| := |A \times B|$
- $|B|^{|A|} := |B^A|$

Propoziția 6.1 (independența de reprezentanți a operațiilor cu numere cardinale). Operațiile cu numere cardinale, definite ca mai sus, nu depind de reprezentanții claselor de cardinal echivalentă, adică: pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$), au loc:

- $|A \coprod B| = |A' \coprod B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$

Definiția 6.4 (inegalități între numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B , notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecție $j : A \rightarrow B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ și $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecție $j : A \rightarrow B$, dar nu există nicio bijecție $f : A \rightarrow B$

Remarca 6.1. Definiția anterioară este **independentă de reprezentanții claselor de cardinal echivalentă**, i. e., pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$):

- există o injecție de la A la B ddacă există o injecție de la A' la B' ;
- $A \cong B$ ddacă $A' \cong B'$, așadar: $A \not\cong B$ ddacă $A' \not\cong B'$.

Remarca 6.2. Dacă A și B sunt mulțimi și $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$, întrucât **funcția incluziune**: $i : A \rightarrow B$, $i(a) := a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă.

Remarca 6.3 (definiții echivalente pentru inegalități între numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B :

- $|A| \leq |B|$ ddacă există o surjecție $t : B \rightarrow A$ ddacă [există o mulțime C , a. î. $|B| = |A| + |C|$]
- $|A| < |B|$ ddacă [există o surjecție $t : B \rightarrow A$, dar nu există nicio bijecție $g : B \rightarrow A$] ddacă [există o mulțime nevidă C , a. î. $|B| = |A| + |C|$]

Remarca 6.4. Inegalitatea \leq este corect definită ca mai sus, în sensul că, pentru orice mulțimi A și B , $|A| = |B|$ ddacă $[|A| \leq |B| \text{ și } |B| \leq |A|]$.

Notăția 6.1. Desigur, folosim și notațiile \geq și $>$, cu semnificația: $|B| \geq |A| \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| \leq |B|$, respectiv $|B| > |A| \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| < |B|$, pentru orice mulțimi A și B .

Teorema 6.1 (Cantor). Pentru orice mulțime X , $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

O construcție pentru mulțimea numerelor naturale:

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), printr-o construcție echivalentă cu cea menționată în primul curs:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

Mereu se consideră mulțimea având drept elemente toate mulțimile de la pașii anteriori: succesorul unui n este $n + 1 := |\{0, 1, 2, \dots, n\}|$. Iar mulțimea tuturor elementelor construite astfel, denumite *numere naturale*, se notează cu \mathbb{N} .

În definițiile de mai sus pentru **numerele naturale** trebuie rezolvată, într-un fel sau altul, problema următoare: cu definiția de mai sus, orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este o clasă proprie, care nu poate aparține unei mulțimi sau clase. Putem înlocui aceste clase cu etichete ale lor, de exemplu chiar cu, reprezentanții lor de mai sus: $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, ...

Definiția de mai sus pentru **mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale** arată corectitudinea **principiului inducției matematice**: dacă o submulțime $S \subseteq \mathbb{N}$ satisface:

- $0 \in S$,
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $[n \in S \Rightarrow n + 1 \in S]$,

atunci $S = \mathbb{N}$.

Având mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale, se construiesc \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} și se definesc operațiile și relațiile de ordine pe aceste mulțimi în modul cunoscut din liceu.

Mulțimea numerelor naturale, \mathbb{N} , este o mulțime infinită, mai precis o mulțime numărabilă.

Notăția 6.2 ($\aleph_0 := |\mathbb{N}|$). Cardinalul mulțimii numerelor naturale se notează cu \aleph_0 , pronunțat “alef 0”.

Definiția 6.5. O mulțime X se zice *numărabilă* ddacă $|X| = \aleph_0$, i. e. ddacă $X \cong \mathbb{N}$.

Remarca 6.5. Orice $n \in \mathbb{N}$ satisface $n < \aleph_0$.

Definiția 6.6. O mulțime X se zice *infinită*:

- în sens Dedekind, ddacă există $S \subsetneq X$ a. i. $S \cong X$
- în sens Cantor, ddacă există $S \subseteq X$, a. i. S este numărabilă
- în sens obișnuit, ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \not\cong \{1, 2, \dots, n\}$

Teorema 6.2. Cele trei definiții de mai sus ale mulțimilor infinite sunt echivalente.

Desigur, o *mulțime finită* este, prin definiție, o mulțime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiția de mai sus a mulțimilor infinite în sens obișnuit:

Definiția 6.7. O *mulțime finită* este o mulțime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \dots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Remarca 6.6. Conform definiției anterioare, **cardinalele finite**, i. e. cardinalele mulțimilor finite, sunt exact numerele naturale.

Remarca 6.7. Definiția mulțimilor infinite în sens Cantor arată că \aleph_0 (i. e. cardinalul mulțimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde *cardinal infinit* (sau *cardinal transfinit*) înseamnă cardinal al unei mulțimi infinite.

Definiția 6.8. O *mulțime cel mult numărabilă* este o mulțime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu \aleph_0).

Notăția 6.3. Amintim următoarele notații consacrate pentru un segment al mulțimii \mathbb{Z} a numerelor întregi: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, $\overline{a, b} := [a, b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \begin{cases} \{a, a + 1, \dots, b\}, & \text{dacă } a \leq b; \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$

Remarca 6.8. Mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi este numărabilă.

Mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale este numărabilă.

Definiția 6.9. O *mulțime nenumărabilă* este, prin definiție, o mulțime infinită care nu este numărabilă, i. e. o mulțime având cardinalul strict mai mare decât \aleph_0 .

Remarca 6.9. Mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale este nenumărabilă.

Definiția 6.10 ($\mathcal{C} := |\mathbb{R}|$). Cardinalul lui \mathbb{R} se notează cu \mathcal{C} și se numește *puterea continuumului*.

- Conform celor de mai sus, $\aleph_0 < \mathcal{C}$.

Vom vedea că $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ pentru orice mulțime M .

Remarca 6.10 ($\mathcal{C} = 2^{\aleph_0}$). $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Remarca 6.11. Oricare ar fi mulțimile A și B :

- după cum am observat mai sus, $A \subseteq B$ implică $|A| \leq |B|$;
- dacă B este finită și $A \subsetneq B$, atunci $|A| < |B|$.

În plus, după cum arată definiția lui Cantor a mulțimilor infinite:

- dacă $|A| \leq |B|$ și A este infinită, atunci B este infinită;
- dacă $|A| \leq |B|$ și B este finită, atunci A este finită.

Observația 6.1. Conform celor de mai sus, faptul că o mulțime A este finită se exprimă, în simboluri, prin: $|A| < \aleph_0$. Pentru comoditate, vom folosi și notația $|A| < \infty$ pentru faptul că o mulțime A este finită.

7 Familii arbitrare de mulțimi

Definiția 7.1 (familie de elemente ale lui A indexată de I). Fie I și A mulțimi arbitrare.

O familie $(x_i)_{i \in I} \subseteq A$ este o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in \mathbb{R}$.

Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i \in I}$.

- Există o singură familie vidă de elemente ale unei mulțimi arbitrare A , pentru că există o singură funcție de la \emptyset la A (a se vedea și mai jos).
- Familia vidă nu este egală cu nicio familie nevidă, ci este egală doar cu ea însăși.

Fie I și A două mulțimi nevide, iar $(a_i)_{i \in I}$ și $(b_i)_{i \in I}$ două familii de elemente din A indexate de I :

- $I \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$
- $(a_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $a_i \in A$
- $(b_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $b_i \in A$

Cele două familii sunt egale dacă sunt egale pe componente:

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \quad \text{dacă, pentru orice } i \in I, a_i = b_i.$$

Familii arbitrare de mulțimi:

Definiția 7.2. Fie T o mulțime arbitrară. Se numește *șir de submulțimi ale lui T indexat de \mathbb{N}* o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, se notează $A_n := f(n) \in \mathcal{P}(T)$, iar șirul de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Scriem $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{P}(T)$.

Definiția 7.3. Fie T și I două mulțimi arbitrare. Se numește *familie de submulțimi ale lui T indexată de I* o funcție $f : I \rightarrow \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i \in I}$. Scriem $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i \in I}$.

Pentru a generaliza definiția anterioară la familii de mulțimi oarecare avem nevoie de acea definiție mai cuprinzătoare a noțiunii de funcție (a se vedea sistemul axiomatic pentru teoria mulțimilor din Cursul I), care permite unei funcții f definite pe I să aibă drept codomeniu o clasă (nu neapărat o mulțime), anume clasa tuturor mulțimilor în acest caz.

Operații cu familii arbitrare de mulțimi:

Definiția 7.4. Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I .

Se definesc următoarele operații:

- *reuniunea familiei* $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcup_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I) (x \in A_i)\} = \{x \mid (\exists i) (i \in I \text{ și } x \in A_i)\}$$

- *intersecția familiei* $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcap_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I) (x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall i) (i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$$

- *produsul cartezian al familiei* $(A_i)_{i \in I}$ (numit și *produsul direct al familiei* $(A_i)_{i \in I}$) este mulțimea notată $\prod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \{(a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i)\} = \\ &= \{(a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall i) (i \in I \Rightarrow a_i \in A_i)\}, \end{aligned}$$

sau, altfel scris (cu definiția unei familii de elemente exemplificate mai sus pe familii de numere reale):

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (f(i) \in A_i)\} = \\ &= \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i) (i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i)\}. \end{aligned}$$

Notăția 7.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile A_1, A_2, \dots, A_n . Produsul direct $\prod_{i \in \overline{1, n}} A_i$ se mai notează cu $\prod_{i=1}^n A_i$, iar un element $(a_i)_{i \in \overline{1, n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu (a_1, a_2, \dots, a_n) . În cazul particular în care $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, $\prod_{i \in \overline{1, n}} A$ $\stackrel{\text{notație}}{=} \prod_{i=1}^n A$ $\stackrel{\text{notație}}{=} A^n$.

Remarca 7.1 (puterile unei mulțimi: caz particular al produsului direct). În definiția anterioară, dacă $I \neq \emptyset$ și, pentru orice $i \in I$, $A_i = A$, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A = A$, așadar $\prod_{i \in I} A = \{f \mid f : I \rightarrow A, (\forall i \in I) (f(i) \in A)\} = \{f \mid f : I \rightarrow A\} = A^I$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $|I| = n$, avem: $A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid (\forall i \in \overline{1, n}) (a_i \in A)\} = \{f \mid f : \overline{1, n} \rightarrow A\} = A^{\overline{1, n}} = A^n$.

Remarca 7.2. Pentru orice mulțimi A , I și J , dacă $I \cong J$, atunci $A^I \cong A^J$. Acest fapt rezultă direct din independența de reprezentanți a operației de exponențiere asupra numerelor cardinale.

Exercițiul 7.1 (temă – distributivitatea produsului cartezian față de reuniuni și intersecții arbitrare). Fie A o mulțime, I o mulțime nevidă (de fapt poate fi și vidă – vom vedea), iar $(B_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi. Să se demonstreze că:

- $A \times (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i)$ și $(\bigcup_{i \in I} B_i) \times A = \bigcup_{i \in I} (B_i \times A)$
- $A \times (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \times B_i)$ și $(\bigcap_{i \in I} B_i) \times A = \bigcap_{i \in I} (B_i \times A)$

Exercițiul 7.2 (temă – distributivitatea generalizată a produsului cartezian față de intersecție). Fie I și J o mulțimi nevide (de fapt pot fi și vide – vom vedea), iar $(A_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ o familie de mulțimi (indexată de $I \times J$; poate fi scrisă și sub forma: $(A_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$). Să se demonstreze că:

$$\prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}$$

Amintesc că asociativitatea unei operații binare, cum sunt reuniunea și intersecția a două mulțimi, permite scrierea unui șir de astfel de operații fără paranteze: pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3 :

- $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Propoziția 7.1 (asociativitatea produsului direct ca operație binară). Fie A_1, A_2, A_3 mulțimi arbitrare.

Atunci: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^3 A_i$, întrucât următoarele funcții sunt bijecții: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\varphi} (A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^3 A_i$, pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ și orice $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ și $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$.

În plus, fiecare dintre bijecțiile φ și ψ se identifică cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenție egalitățile: $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ și orice $a_3 \in A_3$.

Prin urmare, putem scrie: $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^3 A_i$.

Ca și la funcții aplicate unor perechi de elemente, folosim **licența de scriere (convenția)**: pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulțimi A_1, A_2, \dots, A_n, B , orice funcție $f : \prod_{i=1}^n A_i \rightarrow B$ și orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \dots, a_n) := f((a_1, a_2, \dots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere).

Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenție**, și va fi clar la elementele căror mulțimi ne vom referi, prin notații de forma:

- $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînțelege: $a \in A$ și $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînțelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt mulțimi, I este o mulțime nevidă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie (nevidă) de mulțimi.

Definiția 7.5. Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I .

Se definește *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i \in I}$ ca fiind mulțimea notată $\coprod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\coprod_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\})$$

Observația 7.1. Reuniunea disjunctă este “un fel de reuniune” în care mulțimile care se reunesc sunt “făcute disjuncte”, prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulțimii respective.

Notația 7.2. Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașati, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Notația 7.3. La fel ca la produsul direct, dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i \in \overline{1, n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i \in \overline{1, n}} A_i \stackrel{\text{notație}}{=} \coprod_{i=1}^n A_i \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \dots \coprod A_n$$

Remarca 7.3. Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3 , se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și câte o identificare de indici, i. e. câte o bijecție între mulțimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) \cong (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 \cong \coprod_{i=1}^3 A_i$, adică, prin identificarea acestor bijecții cu identitatea, putem scrie: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) = (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 = \coprod_{i=1}^3 A_i$.

Aritatea unei operații a unei structuri algebrice (cu o singură *mulțime suport*, o singură mulțime de elemente) este **numărul argumentelor (operandilor, variabilelor) acelei operații**. Dacă structura algebrică are mulțimea suport A , iar f este o operație n -ară pe A , cu $n \in \mathbb{N}$, atunci $f : \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ de } A} \rightarrow A$ (f este o funcție cu n argumente din A , cu valori tot în A).

Remarca 7.4 (reuniunea familiei vide este vidă). Dacă recitim definiția reuniunii unei familii arbitrare, observăm că reuniunea familiei vide este mulțimea elementelor pentru care există un $i \in \emptyset$ cu o anumită proprietate, condiție care este întotdeauna falsă, deci reuniunea familiei vide este \emptyset .

Remarca 7.5 (produsul direct al familiei vide este un singleton). Cele de mai sus arată că produsul direct al familiei vide este mulțimea cu unicul element dat de unica funcție de la \emptyset la \emptyset , anume $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, adică produsul direct al familiei vide este singletonul $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Operațiile zeroare sunt constantele structurilor algebrice: de exemplu, elementul neutru al unui grup G este o funcție φ de la un singleton (anume $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$) la G : $\varphi : \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \rightarrow G$, iar o funcție definită pe un singleton are o singură valoare ($\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in G$), deci poate fi identificată cu această unică valoare a ei, care este un element distins, o constantă din G : $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = e \in G$, și identificăm $\varphi = e$.

Remarca 7.6 (reuniunea disjunctă a familiei vide este vidă). Definiția reuniunii disjuncte a unei familii arbitrare de mulțimi arată că reuniunea disjunctă a familiei vide de mulțimi este egală cu, reuniunea familiei vide de mulțimi, care este \emptyset .

Exemplul 7.1. Dacă A și B sunt mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ și $g : A \rightarrow B$, iar pe mulțimea B avem, de exemplu, o operație binară $+$ și o **relație binară** (vom vedea) \leq , atunci putem defini, **punctual**, operația $+$, respectiv relația \leq , între funcțiile f și g , astfel:

- $f + g : A \rightarrow B$, pentru orice $x \in A$, $(f + g)(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} f(x) + g(x)$
- prin definiție, $f \leq g$ dacă, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.

Definiția 7.6 (familii de funcții între două mulțimi fixate A și B). Fie I , A și B mulțimi arbitrare. O *familie de funcții de la A la B indexată de I* este o familie de elemente ale mulțimii B^A indexată de I , i. e. o funcție $h : I \rightarrow B^A$ (pentru orice $i \in I$, $f_i \stackrel{\text{notație}}{=} h(i) : A \rightarrow B$).

Se pot defini și operații cu familii arbitrare de funcții, tot **punctual**:

Exemplul 7.2. Dacă I , A și B sunt mulțimi nevide, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții de la A la B (adică, pentru orice $i \in I$, $f_i : A \rightarrow B$), B este o **mulțime ordonată** (vom vedea) și, pentru orice $x \in A$, submulțimea $\{f_i(x) \mid i \in I\} \subseteq B$ are un cel mai mare element (un **maxim**), atunci putem defini funcția:

$$\max\{f_i \mid i \in I\} : A \rightarrow B,$$

astfel: pentru orice $x \in A$,

$$(\max\{f_i \mid i \in I\})(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} \max\{f_i(x) \mid i \in I\}.$$

Definiția 7.7 (familii de funcții – cazul general – material facultativ). Fie I o mulțime arbitrară, iar $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ familii de mulțimi indexate de I .

O familie de funcții $(f_i)_{i \in I}$ indexată de I cu $f_i : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$ este un element al produsului direct $\prod_{i \in I} B_i^{A_i}$, adică o familie de elemente ale mulțimii $\bigcup_{i \in I} B_i^{A_i}$ indexată de I cu elementul de indice i aparținând lui $B_i^{A_i}$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. o funcție $h : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} B_i^{A_i}$, cu $f_i = h(i) : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Definiția 7.8 (operațiile cu familii arbitrare de funcții generalizează compunerea de funcții – material facultativ). Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ sunt familii de mulțimi, C este o mulțime, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții și g este o funcție a. î., pentru fiecare $i \in I$, $f_i : A_i \rightarrow B_i$, iar $g : \prod_{i \in I} B_i \rightarrow C$, atunci putem defini funcția $g((f_i)_{i \in I}) : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow C$ prin: oricare ar fi $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$, $g((f_i)_{i \in I})((x_i)_{i \in I}) := g((f_i(x_i))_{i \in I})$: operația g (de aritate, i. e. număr de argumente, $|I|$) aplicată familiei de funcții $(f_i)_{i \in I}$, definită **punctual**.

Cazul finit: $I = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$: $g(f_1, \dots, f_n) : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow C$, pentru orice $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$, $g(f_1, \dots, f_n)(x_1, \dots, x_n) := g(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$.

La fel se pot generaliza relațiile binare între funcții la relații de aritate arbitrară, chiar infinită, adică, pentru familia $(f_i)_{i \in I}$ de mai sus, submulțimi ale lui $\prod_{i \in I} B_i$: relații de aritate (i. e. număr de argumente) $|I|$ – a se vedea în Cursul III definiția unei relații n -are:

Definiția 7.9 (material facultativ). Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ sunt familii de mulțimi, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții cu $f_i : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$, iar $R \subseteq \prod_{i \in I} B_i$, atunci: familia $(f_i)_{i \in I}$ de funcții se află în relația R , notat $(f_i)_{i \in I} \in R$, ddacă $(f_i(x_i))_{i \in I} \in R$ pentru fiecare $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$.

Cazul finit: $I = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că $R \subseteq B_1 \times \dots \times B_n$ este o relație n -ară: $(f_1, \dots, f_n) \in R$ ddacă, pentru orice $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$, $(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in R$.

Exercițiul 7.3 (imagini și preimagini de reuniuni și intersecții arbitrare de mulțimi printr-o funcție). Fie A, B, I și J mulțimi nevide (de fapt, pot fi și vide – vom vedea), $f : A \rightarrow B$, iar $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ și $(B_j)_{j \in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Să se demonstreze că:

$$(i) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j);$$

$$(ii) \quad f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i);$$

$$(iii) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j);$$

$$(iv) \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i);$$

$$(v) \quad f \text{ este injectivă ddacă, pentru orice mulțime nevidă } K \text{ și orice } (M_k)_{k \in K} \subseteq \mathcal{P}(A), \quad f\left(\bigcap_{k \in K} M_k\right) = \bigcap_{k \in K} f(M_k).$$

(vi) Să se dea un exemplu pentru incluziune strictă la punctul (iv).

8 Funcții caracteristice

Definiția 8.1. Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim funcția caracteristică a lui A (raportat la T): $\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$

În cazul particular în care mulțimea totală T este finită și nevidă: $T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcția caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \dots, \chi_A(x_n))$; acest vector de valori din mulțimea $\{0, 1\}$ se numește *vectorul caracteristic al lui A*. A se observa că suma valorilor din acest vector este egală cu, cardinalul lui A : $\chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) + \dots + \chi_A(x_n) = |A|$.

Propoziția 8.1 (principiul includerii și al excluderii). Pentru orice n natural nenul și orice mulțimi finite M_1, M_2, \dots, M_n , are loc egalitatea:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n M_i \right| &= \sum_{i=1}^n |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n| = \\ &\quad \sum_{s=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_s}|. \end{aligned}$$

Și dual: $\left| \bigcap_{i=1}^n M_i \right| = \sum_{i=1}^n |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \dots +$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n| = \sum_{s=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_s}|.$$

Propoziția 8.2 (proprietățile funcțiilor caracteristice). Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcția caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcțiile constante: $\mathbf{0} : T \rightarrow \{0, 1\}$ și $\mathbf{1} : T \rightarrow \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$, $\mathbf{0}(x) = 0$ și $\mathbf{1}(x) = 1$.

Atunci au loc proprietățile:

- $\chi_{\emptyset} = \mathbf{0}$ și $\chi_T = \mathbf{1}$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, are loc echivalența: $A \subseteq B$ dacă și numai dacă $\chi_A \leq \chi_B$ (punctual, i. e.: pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$)
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, are loc echivalența: $A = B$ dacă și numai dacă $\chi_A = \chi_B$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \max\{\chi_A, \chi_B\}$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T \setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$
- $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Remarca 8.1. Fie T și I două mulțimi nevide și $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părți ale lui T indexată de I . Atunci au loc:

- $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Remarca 8.2 (legile de distributivitate generalizată pentru \cup și \cap). Pentru orice mulțime nevidă I , orice mulțime A și orice familie de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$, au loc egalitățile:

- distributivitatea generalizată a \cup față de \cap : $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$
- distributivitatea generalizată a \cap față de \cup : $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$

Propoziția 8.3. Pentru orice mulțime nevidă T , $\mathcal{P}(T) \cong \{0, 1\}^T$.

Corolarul 8.1. Pentru orice mulțime T , $|\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.

A se vedea precizările despre **examen** și **temele obligatorii** de la sfârșitul Cursului II.