(64) Fie A o mulț. $\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ uniform cont.
Atunci f e integrabilă Riemann

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \{E \subset \mathbb{R}^n \mid E$ elementară$\}$

Proprietăți:

1) $A, B \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$

2) $D_1 = \bigtimes_{i=1}^{m} [a_i^1, b_i^1]$; $D_2 = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i^2, b_i^2]$

$\Rightarrow D_1 \cap D_2 = \bigtimes_{i=1}^{n} [\max(a_{i_1}, a_{i_2}), \min(b_{i_1}, b_{i_2})]$

3) $E_1 = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$; $E_2 = \bigcup_{j=1}^{m} G_j$

$E_1 \cap E_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (D_i \cap G_j)$

61 T. Fubini:

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ cont. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx =$

$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$

62 ?

63 Teorema lui Darboux

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ mărginită. Urm. afirm. sunt echival.:

1) f e integrabilă Riemann

2) $\overline{\int_A} f = \underline{\int_A} f$

3) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \mathcal{A}$ o descomp. Jordan a lui A a.î.

$S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall \mathcal{A}$ desc. Jordan a lui A cu

$\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$

28/21 1/91 1/4

(57) Proprietăți:

Fie A, B 2 mulț. mărginite din $\mathbb{R}^n$

1) $\mu^*(A\cup B) + \mu^*(A\cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$

2) $\mu_*(A\cup B) + \mu_*(A\cap B) \geq \mu_*(A) + \mu_*(B)$

3) Dacă $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A\cup B, A\cap B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și
$\mu(A\cup B) + \mu(A\cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

4) $\mu^*(A\setminus B) \leq \mu^*(A) - \mu_*(B)$

5) $\mu_*(A\setminus B) \geq \mu_*(A) - \mu^*(B)$

6) $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ cu $A \subset B \Rightarrow B\setminus A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și
$\mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(58) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărg. Atunci urm. afirm. sunt echival.:

1) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

2) $\bar{A}, \mathring{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\mathring{A}) = \mu(\bar{A})$

3) $\mu(Fr(A)) = 0$

(59) $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ mărg. $\Rightarrow$

1) $\mu^*(A\times B) \leq \mu^*(A)\cdot\mu^*(B)$

2) $\mu_*(A\times B) \geq \mu_*(A)\cdot\mu_*(B)$

3) $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mu^*(A\times B) = \mu^*(A)\cdot\mu(B)$

(60) $D = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$ se num. dreptunghi $a_i \leq b_i \; \forall i = \overline{1,n}$

$\bar{D} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ - dreptunghi închis $\mathring{D} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ - dr. deschis.

$E \subset \mathbb{R}^n$ se num. mulț. elementară dacă E e o reuniune finită de dreptunghiuri $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$, $D_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$= f\circ\gamma(b) - f\circ\gamma(a)$

<u>Caz 2</u>: $\gamma \in C_1$ pe porțiuni $\Rightarrow \exists\, \Delta = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
a"

a.î. $\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]} \in C_1$ $\quad \gamma_i = \gamma|_{[x_i, x_{i+1}]}$

$\int_\gamma df = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} df = \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(x_{i+1})) - f(\gamma(x_i)) =$

$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

(54) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integr. Riemann și $F:[a,b]\to\mathbb{R}$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow \forall c\in[a,b]$ a.î. f e cont. în c

$F'(c) = f(c)$

(55) <u>Lema lui Poincare</u>

~~Fie w o formă diferențială continuă, B(a, r) și~~

~~$f: B(a,r) \to \mathbb{R}$~~

~~$f(x) = \int_{[a,x]} w$; $f'(a) = w$~~

Fie D un domeniu stelat și w o formă diferențială închisă de clasă C_1 pe D. Atunci există $f: D \to \mathbb{R}$ a.î. $df = w$

(56) X - mulțime, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ - inel, $\nu: \mathcal{A} \to [0,\infty)$ s.n. măsurabilă dacă pt. $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A\cap B = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ spațiu cu măsură aditivă

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită

$\mu^*(A) = \inf_{E\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} V(E)$ - măsura sup. jordan a lui A

$\mu_*(A) = \sup_{\substack{E\subset A \\ E\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)}} V(E)$ — " — inf — " —

$\mu^*(A) = \mu_*(A) \Rightarrow A$ măs. jordan

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$ $\gamma : [a,b] \to D$. $\gamma \in C_1$ și $f : D \to \mathbb{R}$ cont.

1) $\int_\gamma f \, dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$

2) $\gamma \in C_1$ pe porțiuni:

$\exists \ \Delta = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ a.î. $\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]} \in C_1$

$\Rightarrow \int_\gamma f \, dl = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]}} f \, dl$

Proprietăți:

1) $\int_\gamma (f+g) \, dl = \int_\gamma f \, dl + \int_\gamma g \, dl$

2) $\int_\gamma \alpha f \, dl = \alpha \int_\gamma f \, dl$

3) $\left| \int_\gamma f \, dl \right| \leq \sup_{x \in \gamma[a,b]} |f(x)| \, l_\gamma$

4) $(\gamma_1 \ldots \gamma_n)$ o desc. a lui $\gamma \Rightarrow \int_\gamma f \, dl = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f \, dl$

5) $\int_{\gamma^-} f \, dl = \int_\gamma f \, dl$

6) $f_n \xrightarrow{u} f$ $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$

7) $\gamma_n' \xrightarrow{u} \gamma \Rightarrow \int_{\gamma_n} f \to \int_\gamma f$

8) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f \, dl = \int_{\gamma_2} f \, dl$

(53) Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f \in C'$ și $\gamma : [a,b] \to D$

Atunci $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Dem:

Caz 1: $\gamma \in C_1$

$\int_\gamma df = \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \, \gamma_i'(t) \, dt =$

$= \int_a^b f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) \, dt =$

6) $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0 \Rightarrow f$ e const.

7) $f \nearrow \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = f(b) - f(a)$

$f \searrow \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = f(a) - f(b)$

8) $\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

9) $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty \Rightarrow \exists\, g, h : [a,b] \to \mathbb{R} \nearrow$ a.î. $f = g - h$

10) $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$

11) f' integr. Riemann $\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'(t)|\,dt$

(52) Fie (X, d) un spațiu metric. O fct. cont.

$\gamma : [a,b] \to X$ se num. drum

$\gamma(a)$ - capătul inițial, $\gamma(b)$ - capătul final

$\gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow \gamma$ e un drum închis

Δ diviz. a lui $[a,b] \Rightarrow \boxed{V_\Delta(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})}$

$$\boxed{l_\gamma = \overset{b}{\underset{a}{V}}(\gamma) = \sup_\Delta V_\Delta(\gamma)} \to \text{lungimea drumului}$$

$\gamma^{-1} : [a,b] \to X$

$\gamma^{-}(t) = \gamma(b + a - t)$; $\gamma^{-}(a) = \gamma(b)$

$\Delta = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$\gamma_i = \gamma|_{[x_i, x_{i+1}]}$ $\quad (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$ o descomp. a lui γ

$l_\gamma = l_{\gamma_0} + l_{\gamma_1} + \ldots + l_{\gamma_{n-1}}$

$\gamma : [c,d] \to X$; $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ cont. bij. $\nearrow$

$\gamma_1 = \gamma \circ \varphi \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma$

$l_{\gamma_1} = l_\gamma = l_{\gamma^-}$

Aplicăm T. Lagrange funcției f pe $[x_i^n, x_{i+1}^n] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c_i^n \in (x_i^n, x_{i+1}^n)$ a.î. $\dfrac{f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n)}{x_{i+1}^n - x_i^n} = f'(c_i^n)$.

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=0}^{m^n-1} f'(c_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n) = \sigma_{\Delta_n}\left(f', (c_i^n)_{i=\overline{0,m^n-1}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\Delta_n\| \to 0} \int_a^b f'(t)\,dt$$

(50) • Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deriv. cu f' și g' integr. Riemann. Atunci $f \cdot g'$ și $g \cdot f'$ sunt integr. Riemann și

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

• Fie $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ cont., $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ bij. $\nearrow$ și $\varphi \in C_1$. Atunci $f \circ \varphi$ și $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ sunt integr. Riemann și $\int_c^d f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$

(51) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită și $\Delta = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Se numește variația unei funcții

$$V_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

$$\bigvee_a^b(f) = \sup_\Delta V_\Delta(f), \quad \text{var. mărg.} \Leftrightarrow \bigvee_a^b(f) < \infty$$

Proprietăți:

1) $V_\Delta(f) \geq |f(b) - f(a)| \Rightarrow \bigvee_a^b(f) \geq |f(b) - f(a)|$

2) $\Delta_1 < \Delta_2 \Rightarrow V_{\Delta_1}(f) \geq V_{\Delta_2}(f)$

3) $V_\Delta(\alpha f) = |\alpha|\, V_\Delta(f) \Rightarrow \bigvee_a^b(\alpha f) = |\alpha| \bigvee_a^b(f)$

4) $\bigvee_a^b(f+g) \leq \bigvee_a^b(f) + \bigvee_a^b(g)$

5) $\bigvee_a^b(f \cdot g) \leq \|f\|_\infty \bigvee_a^b(g) + \|g\|_\infty \bigvee_a^b(f)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

~~f_n este~~ f_n este integrabilă Riemann $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta_\varepsilon$ a.î.

$S_{\Delta_\varepsilon}(f_n) - s_{\Delta_\varepsilon}(f_n) < \varepsilon$

$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le \varepsilon(1 + 2(b-a)) \xRightarrow{\text{T. Darboux}} f$ e integr. Riemann

$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x) - f_n(x)\,dx\right| \le$

$\le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \le \varepsilon(b-a) \Rightarrow$ q.e.d.

$\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$

48. T. Lebesgue

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărg., f e integr. Riemann $\Leftrightarrow$

$D_f = \{x \mid f$ discont. în $x\}$ este neglijabilă Lebesgue

~~49~~ f_n integr. Riemann $\Rightarrow D_{f_n}$ sunt negl. Lebesgue

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită și $c \in (a,b)$. f e integr. Riemann $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f|_{[a,c]}$ și $f|_{[c,b]}$ sunt integr. Riemann $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

49. Teorema Leibniz - Newton

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deriv. cu f' integr. Riemann

Atunci $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$

Dem: Alegem $\Delta_n = \underset{a}{\underbrace{x_0}} < x_1 < \dots < x_{m_n} = b$ a.î. $\|\Delta_n\| \to 0$

$\Rightarrow \sigma_{\Delta_n}(f, (c_i)_{i=\overline{0, m_n-1}}) \longrightarrow \int_a^b f'(x)\,dx$

$f(b) - f(a) = \sum_{i=0}^{m_n-1} f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n)$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \leq$$

$$\leq \|\Delta\| \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) = \|\Delta\| (f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

$$\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} \qquad \Downarrow$$

f int. Riemann

(46.) *Proprietăți:*

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integr. Riemann. Atunci:

$f+g, \alpha f, f \cdot g, |f|$ sunt integr. Riemann

Dacă $f(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$ și $\frac{1}{f}$ e mărg. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{f}$ e integr. Riemann

(47) Fie $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$. Atunci

f integrabilă Riemann și

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

Dem: $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in [a,b]$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i^f (x_{i+1} - x_i) \qquad M_i^f = \sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_i^f \leq \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} (\varepsilon + f_n(x)) = \varepsilon + M_i^{f_n}$$

$$S_\Delta(f) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (M_i^{f_n} + \varepsilon)(x_{i+1} - x_i) = S_\Delta(f_n) + \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} - x_i$$

$$= S_\Delta(f_n) + \varepsilon(b-a)$$

Analog $s_\Delta(f) \geq s_\Delta(f_n) - \varepsilon(b-a)$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq S_\Delta(f_n) - s_\Delta(f_n) + 2\varepsilon(b-a)$$

Teoremă (Darboux)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărg. Atunci urm. afirm. sunt echival.:

1) f e integrabilă Riemann

2) $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

3) $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon>0$ a.î. $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$

4) $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \Delta$ a.î. $S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$

45 Teoremă:
Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă. Atunci f e int. Riemann.

Dem:
$\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall x,y\in[a,b]$ a.î. $|x-y|<\delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\|\Delta\|<\delta_\varepsilon \Rightarrow M_i-m_i=\sup\limits_{x,y\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$

$|x-y|\leq|x_{i+1}-x_i|\leq\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$

$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}M_i(x_{i+1}-x_i)-\sum\limits_{i=0}^{n-1}m_i(x_{i+1}-x_i)=$

$=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)\leq\varepsilon\sum\limits_{i=0}^{n-1}x_{i+1}-x_i=\varepsilon(b-a)$

$\xRightarrow{\text{T. Darboux}}$ f integr. Riemann

Teoremă:
Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotonă. Atunci f e int. Riemann

Dem: P.p. f cresc. $\varepsilon>0$, $\delta_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)-1}$

$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)$

$f\nearrow \Rightarrow m_i=f(x_i)\quad M_i=f(x_{i+1})$

(41) Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită, $\Delta = \overset{\text{diviziune}}{}\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Suma Darboux superioară asociată diviziunii Δ și fct. f:

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) \qquad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = \sup f([x_i, x_{i+1}])$$

Suma Riemann:

$$\sigma_\Delta(f, (\xi_i)_{i=\overline{0,n-1}}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Suma Darboux ~~aso~~ inferioară asociată div. Δ și fct. f:

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) \qquad m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} (f(x))$$

(42) O fct. mărginită $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ se num. integrabilă Riemann dacă $\exists\, I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon$ a.î.

$$\|\Delta\| = \max_{i=\overline{0,n-1}} (x_{i+1} - x_i) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |I - \sigma_\Delta(f, (\xi_i)_{i=\overline{0,n-1}})| < \varepsilon$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_\Delta S_\Delta(f)$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_\Delta s_\Delta(f)$$

?. (43)

(44) Lemă (Darboux)

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărg. Atunci $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ $\Rightarrow S_\Delta(f) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon \iff \overline{\int_a^b} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} S_\Delta(f) \iff \forall (\Delta_n)_{n \geq 1}$ a.î. $\|\Delta_n\| \to 0 \Rightarrow S_{\Delta_n}(f) \to \overline{\int_a^b} f$

19/20

(37.) Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f: D \to \mathbb{R}$ deriv. pe D a. î. $\exists f''(a)$. Atunci:

~~1) Dacă a e min local~~

1) Dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) > 0 \Rightarrow a$ e min local

2) Dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) < 0 \Rightarrow a$ e max local

(În toate celelalte cazuri, a este punct șa)

(38.) T. multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $D = \mathring{D} \in \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ $f \in C_1$, $g: D \to \mathbb{R}^m$ unde $g \in C_1$ și $m < n$ și $a \in D$ a. î. $a =$ pct. ext. local pt. f pe mulț. pct. $x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0$ și rang $g' = m$.

Atunci $\exists$ un elem. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^n$ a. î. $h'_\lambda(a) = 0$, unde $h'_\lambda(x) = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m$

(39.) T. funcțiilor implicite

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(a,b) \in D$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

$f: D \to \mathbb{R}^m$ a. î. $f(a,b) = 0$, $f \in C_1$ pe D și $\frac{df}{dy}(a,b)$ inversabilă. Atunci $\exists\, v \in V_a$, $\exists\, w \in V_b$ a. î.

$\exists!\, \varphi: v \to w$ cu $f(\varphi(x), x) = 0$ și $v \times w \in D$

φ e deriv. în b

(40.) T. de inversare locală

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f: D \to \mathbb{R}^n$ a. î. $f \in C_1$ pe D și $\exists (f'(a))^{-1}$

$\Rightarrow \exists\, G_1 = \mathring{G}_1 \subset D$ și $G_2 = \mathring{G}_2 \subset \mathbb{R}^n$ a. î. $f: G_1 \to G_2$ să fie bij. și cont. $\Rightarrow (f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$

(34) T. Young

Fie $f: D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deriv. pe $a \in D$ și

$u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Dacă $\exists f''(x) \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și

$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a) = f''(a)(u,v) = f''(a)(v,u)$

T. Schwartz

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^n$, $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și $a \in D$ a.î.

$\exists \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ să fie constantă în a.

Atunci $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a)$

(35). T. Fermat

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ și $a \in D$ a.î. $\exists f'(a)$ și a să fie pct. de extrem local pt. f. Atunci $f'(a) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$

(36). T. Taylor de ord. 2

$D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ a.î. $f(a)$ pe D și $f''(a)$. Atunci

$\exists \, \omega: D \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(x-a, x-a) + \|x-a\|^2 \omega(x)$

2) $\lim_{x \to a} \omega(a) = 0$

(31). Proprietăți:

1) Derivata este unică

2) Dacă f este derivabilă în a $\Rightarrow$ f este continuă în a

3) Dacă $\exists f'(a) \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a)(v)\ \forall v \in \mathbb{R}^n$

4) Fie $f: B(a,r) \longrightarrow \mathbb{R}$ a.î. $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}\ \forall i = \overline{1,n}$ și M a.î. $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| < M, \forall i = \overline{1,n}, \forall x \in B(a,r) \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ e cont. în a

5) Fie $f: B(a,r) \longrightarrow \cancel{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, a.î. $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$ pe $B(a,r)$ $\forall i = \overline{1,n}$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ să fie cont. în a. Atunci $\exists f'(a)$

(32). Prop: Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $G = \mathring{G} \subset \mathbb{R}^m$

$f: D \to G$, $g: G \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in D$ a.î.

$\exists f'(a)$ și $\exists g'(f(a))$. ~~Atunci~~

Atunci $\exists (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$

Prop: $D = \mathring{D}$, $G = \mathring{G} \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to G$ bij., $a \in D$ a.î. $\exists f'(a)$ și $\det(f'(a)) \neq 0$ (sau $\exists (f'(a))^{-1}$) și f^{-1} să fie cont. în $f(a)$.

Atunci $\exists (f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$

(33). Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ și $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(a)\right)$$

$u = v$: $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$

Teorema lui Taylor II (cu restul Lagrange)

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabilă de $n+1$ ori pe (a,b) și $c\in(a,b)$ $\forall x\in(a,b) \Rightarrow \exists\, \alpha$ între x și c a.î.

$$f(x) = T_{f,n,c}(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\alpha)\,(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}}_{= R_{f,n+1,c}}$$

$n=0 \quad f(x) = f(c) + f'(\alpha)(x-c)$

(30.) **Def:** O funcție $f:(a,b)\to\mathbb{R}^m$ se num. derivabilă în c dacă $\exists \lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$

$f=(f_1,\dots,f_m) \Rightarrow f'(c) = (f_1'(c),\dots f_m'(c))$

Def: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $a\in D$, $v\in\mathbb{R}^n$, $v\neq 0$ și $f:D\to\mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

$v = e_i = (0\dots 0, 1, 0\dots 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{x_i} = \lim_{x_i\to a_i}\frac{f(a_1,\dots a_{i-1}, x, a_{i+1},\dots, a_n) - f(a_1,\dots,a_n)}{x_i-a_i}$$

Def: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}^m$ și $a\in D$. Sp. că f este deriv. (diferențială) dacă $\exists\, T\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ a.î.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|_2} = 0$$

$T = f'(a)$

Bba

9

(28.) Teorema Cauchy-Hadamard

Fie $s = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$

$\rho = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ se num. raza de convergență și D dom. de convergență

1) Dacă $\rho = \infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$, dacă $\rho = 0 \Rightarrow D = \{0\}$ și dacă $\rho \in (0, \infty) \Rightarrow (-\rho, \rho) \subset D \subset [-\rho, \rho]$

2) Dacă $0 < R < \rho \Rightarrow s$ e normal cvg. pe $(-R, R)$

3) Dacă $S(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} \Rightarrow \rho_1 = \rho$ unde ρ_1 raza lui ρ

4) $\Rightarrow$ Pe s^0 $s^1 = s_1$, $s^{(k)} = s_k$ unde $s_k = \sum_{n \geq k} n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot a_n x^{n-k}$

(29). Teorema Taylor I

Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a.î. $\exists$ $f^{(n)}$ pe (a, b) și $f^{(n-1)}(c)$.

Atunci $\exists$ $w : (a, b) \to \mathbb{R}$ a.î.

1) $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(k)}{k!} (x-c)^k}_{} + (x-c)^{n-1} w(x)$

$T_{f, n+1, c}$ – Polinomul Taylor asociat lui f de ordin $n+1$ în c

2) $\lim_{x \to c} w(x) = 0$

h e cont. pe $[a,b]$ şi deriv. pe $[a,b]$ $\xRightarrow{T.L.}$ $\exists\ c\in(a,b)$ a.î.
$h'(c)=0 \Rightarrow f'(c)-\alpha g'(c)=0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)}=\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Teorema lui Darboux

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ deriv. pe (a,b). Atunci f' are proprietatea lui Darboux.

$a<c<d<b$ $\quad \alpha=f'(c)$ şi $\beta=f'(d)$

Dem: P.p. $\alpha<\beta$. Fie $\gamma\in(\alpha,\beta)$

Fie $g:(a,b)\to\mathbb{R}$. $g(x)=f(x)-\gamma x$

$g'(c)=f'(c)-\gamma=\alpha-\gamma<0$

$g'(d)=f'(d)-\gamma=\beta-\gamma>0$

g e cont. pe $[c,d]\Rightarrow\exists\ x_0\in[c,d]$ a.î. $g(x_0)=\inf\limits_{x\in[c,d]} g(x)$

Dacă $x_0\in(c,d)\Rightarrow x_0$ e pct. de min. local $\Rightarrow g'(x_0)=0$

$\Leftrightarrow f'(x_0)-\gamma=x_0$ sau $f'(x_0)=\gamma$

$x_0\neq c$: $g'(c)=\alpha-\gamma<0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x>c}}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=g'(c)<0\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists\ \varepsilon>0$ a.î. $c+\varepsilon<d$ şi $\forall x\in(c,c+\varepsilon)\Rightarrow\frac{g(x)-g(c)}{x-c}<0$

$\Leftrightarrow g(x)<g(c)\Rightarrow c\neq x_0\ \forall x\in(c,c+\varepsilon)$

Teorema lui L'Hospital

(27) Fie $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ deriv. pe (a,b) cu $g'(x)\neq0\ \forall x\in(a,b)$

a.î. $\exists\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}=\lim\limits_{x\nearrow b}g(x)=L$, $L\in\{0;\pm\infty\}$

Atunci $\exists\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

(28)

$\underline{\text{cazul 1}}$: $M > f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in [a,b)$ a.î. $M = f(c) \Rightarrow$
$\Rightarrow c \in (a,b)$. c pct. de max local $\overset{T.F.}{\Longrightarrow} f'(c) = 0$

$\underline{\text{cazul 2}}$: $m < f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b]$ a.î. $m = f(c)$.
c e min local $\overset{T.F.}{\Longrightarrow} f'(c) = 0$

$\underline{\text{cazul 3}}$: Dacă $M = m = f(a) = f(b) \Rightarrow f$ e const. $\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Teorema lui Lagrange

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. f e deriv. pe (a,b) şi cont. pe $[a,b]$.
Atunci $\exists\, c \in (a,b)$ a.î. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Demonstraţie:

Fie $h: [a,b] \to \mathbb{R}$ ~~dacă~~ $h(x) = f(x) - \alpha x$ a.î. $h(a) = h(b)$

$f(a) - \alpha a = f(b) - \alpha b \Rightarrow \alpha(b-a) = f(b) - f(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

h e deriv. pe (a,b), cont. pe $[a,b]$ $\overset{T.R.}{\Longrightarrow} \exists\, c \in (a,b)$ a.î.
$h'(c) = 0 \Rightarrow$ ~~h(c)=~~ $h(c) = f'(c) - \alpha = 0 \Rightarrow f'(c) = \alpha$

Teorema lui Cauchy

Fie $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. pe $[a,b]$, deriv. pe (a,b) a.î.
$g'(x) \neq 0$ pt. $\forall x \in (a,b)$. Atunci $g(b) \neq g(a)$ şi $\exists\, c \in (a,b)$
a.î. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Demonstraţie:

Din T.L. aplicată fct. g pe $(a,b) \Rightarrow \exists\, d \in (a,b)$ a.î.
$\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(d) \neq 0$

Considerăm $h: [a,b] \to \mathbb{R}$; $h(x) = f(x) - \alpha \cdot g(x)$ a.î.
$h(a) = h(b)$. Avem $f(a) - \alpha g(a) = f(b) - \alpha g(b) \Rightarrow \alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

12/29

10/29

(25.) Proprietăți:

1) Fie $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ deriv. în $c \Rightarrow \exists (f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$ și $(fg)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$

2) Fie $f : (a,b) \to (c,d)$ și $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a,b)$.
Dacă $\exists f'(x_0)$ și $\exists g'(f(x_0)) \Rightarrow \exists (g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$

3) Fie $f : (a,b) \to (c,d)$ bij. și $x_0 \in (a,b)$ a.î. $\exists f'(x_0) \neq 0$ și f^{-1} să fie cont. în $f(x_0) = y_0 \Rightarrow \exists (f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

(26.) Teorema lui Fermat

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ și $c \in (a,b)$ a.î. $\exists f'(c)$ și c pct. de extrem local. Atunci $f'(c) = 0$

Demonstrație:
Presupunem că c e pct. de min local $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ a.î. $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset (a,b)$ a.î. pt. $\forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$
$\Rightarrow f(x) \geq f(c)$

Dacă $x < c \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

Dacă $x > c \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$

$\Rightarrow f'(c) = 0$

Teorema lui Rolle

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deriv. pe (a,b), cont. în $a, b \Rightarrow f$ e cont. pe $[a,b]$ a.î. $f(a) = f(b)$. Atunci $\exists c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$

Demonstrație:
Deoarece f e cont. pe $[a,b] \Rightarrow \exists M, m$ a.î. $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ și ~~a.î. $M = f(c) \Rightarrow c \in (a,b)$~~
~~c pct. de max~~ $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Fie (X,d) spațiu metric. $K \subset X$ este compactă $\Leftrightarrow$
$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon) \Rightarrow \exists\, x_1, x_2, \dots, x_n$ a.î. $K \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, \varepsilon)$

(22.) Fie $f: X_1 \to X_2$, X_1, X_2 spații metrice.

~~f cont. $\Rightarrow \forall\, x \in X_1$ și $\forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta_{\varepsilon, x} > 0$ a.î.~~

f e uniform continuă $\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon$ a.î. $\forall\, x, y$
$d_1(x,y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este uniform continuă.

(23.) Fie $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T})$, $A \subset X$, $f: A \to X$ și $a \in A'$. Sp. că f are limită $\alpha \in Y$ în a și not. $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}_\alpha \Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{V}_a$ a.î. $\forall\, x \in W \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V$

$\tilde{A} = A \cup \{a\}$ $\tilde{f}: \tilde{A} \to Y$ $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ \alpha, & x = a \end{cases}$, $x \in A$

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \tilde{f}$ e cont. în a

(24) Fie $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ și $c \in (a,b)$. Sp. că f este deriv. în c dacă $\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ și not. cu $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

Fie $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ și $c \in (a,b)$. Sp. că f e deriv. în c dacă $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ și $\omega: (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î.

1) $f(x) = f(c) + \alpha(x-c) + \omega(x)(x-c)$

2) $\lim \omega(x) = 0$

$\omega(x) = \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)}{x - c}$

$2 \Rightarrow 3$

$F \subset X_2$ închisă $\Rightarrow X_2 \setminus F \in \tau_2$

$X_1 = f^{-1}(X_2) = f^{-1}(F \cup (X_2 \setminus F)) = f^{-1}(F) \cup f^{-1}(X_2 \setminus F) \in \tau_1$

$f^{-1}(F) \cap f^{-1}(X_2 \setminus F) = f^{-1}(F \cap (X_2 \setminus F)) = \phi$

$\underset{\text{închisă}}{\underbrace{f^{-1}(F)}} = X_1 \setminus \underbrace{f(X_2 \setminus F)}_{\in \tau_1}$

(18) Fie A o mulțime și (X, d) un spațiu metric și $f_n, f: A \to X$

Spunem că f_n converge simplu la f $f_n \xrightarrow{s} f$ dacă

pt. $\forall x \in A \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$

$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_{\varepsilon, x}$ a. î. $\forall n \geq n_{\varepsilon, x} \Rightarrow$

$\Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

f_n converge uniform la f $f_n \xrightarrow{u} f$ dacă

pt. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon$ a. î. pt. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$
$\forall x \in A$

(19) Fie $f_n, f: (a, b) \to \mathbb{R}$ și $c \in (a, b)$ a. î.

$f_n \xrightarrow{u} f$ și f_n să fie cont. în c $\forall n \geq 1$. Atunci

f e cont. în c

(20) Fie $f_n: [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci $\exists\, c \in [a, b]$ a. î.

$f(c) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$

(21) Fie $(\mathbb{R}^n, d_2)$, o mulțime K este ~~completă~~ compactă $\Rightarrow$ este închisă și mărginită

~~Fie (X, τ) spațiu topologic. O mulț. $K \subset X$ se num. compactă dacă $\forall (D_i)_{i \in I}$ a. î. $K \subset \bigcup D_i \Rightarrow \exists\, J \subset I$ finită $K \subset \bigcup_{i \in J} D_i$~~

Fie $\eta = \delta_\varepsilon$

$\forall n \geq n_{\delta_\varepsilon} \Rightarrow d_1(x_n, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$

$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(a)$

$3 \Rightarrow 2$

P.p. că nu este îndeplinită 2)

$\exists\ \varepsilon > 0$ a.î. $\forall\ \delta > 0 \Rightarrow \exists\ x_\delta$ a.î. $d_1(x_\delta, a) < \delta$

şi $d_2(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$

Pt. $\delta = \frac{1}{n}$, $y_n = x_{\frac{1}{n}}$

$d_1(y_n, a) \leq \frac{1}{n}$ $\quad y_n \to a$

$d_2(f(y_n), f(a)) \geq \varepsilon \Rightarrow f(y_n) \not\to f(a)$ contradicţie

Teoremă: Fie (X_1, τ_1) şi (X_2, τ_2) spaţii topologice şi $f: X_1 \to X_2$. Atunci urm. afirmaţii sunt echivalente:

1) f e continuă pe X_1

2) $\forall\ D \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_1$

3) $\forall\ F \subset X_2$ închisă $\Rightarrow f^{-1}(F)$ este închisă în X_1

Demonstraţie:

$1 \Rightarrow 2$

$D \in \tau_2$ şi $x \in f^{-1}(D) \Rightarrow f(x) \in D \Rightarrow D \in \mathcal{V}_{f(x)} \Rightarrow f^{-1}(D) \in \mathcal{V}_x$

$\Rightarrow D_x \in \tau_1$ a.î. $x \in D_x \subset f^{-1}(D) \Rightarrow f^{-1}(D) = \bigcup_{x \in f^{-1}(D)} D_x \in \tau_1$

$2 \Rightarrow 1$

$a \in X_1$ şi $V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow \exists\ D \in \tau_2$ a.î. $f(a) \in D \subset V \mid f^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \underbrace{f^{-1}(D)}_{\in \tau_1} \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$

(16.) Proprietăți: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic, $a \in X$ și $g, f : X \to \mathbb{R}$ continue în a. Atunci:

1) f e local mărginită
2) $f+g$ și $f \cdot g$ sunt continue în a
3) $|f|$ e cont. în a $\Rightarrow$ $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sunt cont. în a
4) Dacă $f(x) \neq 0$ $\forall x \in X \Rightarrow \frac{1}{f}$ e cont. în a

(17.) $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ două spații metrice, $a \in X_1$ și $f : X_1 \to X_2$
Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
1) f e continuă în a
2) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_1(x, a) < \varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$
3) $\forall (x_n)_n \subset X_1$ a.î. $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

Demonstrație:

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow B(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_a \Rightarrow f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $B(a, \delta_\varepsilon) < f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$
$f(B(a, \delta_\varepsilon)) \subset B(f(a), \varepsilon)$

$2 \Rightarrow 1$
$V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $B(f(a), \varepsilon) \subset V \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon$ a.î. $f(B(a, \delta_\varepsilon)) \subset B(f(a), \varepsilon) \subset V / f^{-1}$
$f(B(a, \delta_\varepsilon)) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$

$2 \Rightarrow 3$
$x_n \to a$, $\forall \eta > 0$ $\exists\, n_\eta$ a.î. pt. $\forall n \geq n_\eta \Rightarrow$
$\Rightarrow d(x_n, a) < \eta \Leftrightarrow x_n \in B(a, \eta)$
f cont. în a $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon$ $\Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$

7/29

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic $(x_n)_n \subset X$ și $a \in X$

$x_n \to a$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right)$ $\forall\, V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists\, n_V$ a.î. $x_n \in V$

$\forall n \geq n_V$ sau $\forall\, D \in \mathcal{T}$ a.î. $a \in D \Rightarrow \exists\, n_D$ a.î. $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$x_n \in D$

Fie $(X, \mathcal{T})$ spațiu topologic și $\mathcal{F}$ = fam. mulț. închise:

1) $\phi, X \in \mathcal{F}$

2) $D_1, D_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow D_1 \cup D_2 \in \mathcal{F}$

3) $(D_i)_{i\in I} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} D_i \in \mathcal{F}$

(12) În $\mathbb{R}$ o mulțime deschisă D este o reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise și disjuncte

(13) Foaie cu serii

(14). Fie $(X, \mathcal{T}_x)$, $(Y, \mathcal{T}_y)$, $f: X \to Y$ și $a \in X$

Funcția f e continuă în a dacă pt $\forall\, V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(V) = \mathcal{V}_a$

(15) Fie $(X_1, \mathcal{T}_{X_1})$, $(X_2, \mathcal{T}_{X_2})$, $(X_3, \mathcal{T}_{X_3})$ spații topologice,

$a_1 \in X_1$, $f: X_1 \to X_2$ și $g: X_2 \to X_3$

Dacă f e cont. în a și g e cont. în $f(a) \Rightarrow g \circ f$ e cont. în a

<u>Demonstrație</u>:

$V \in \mathcal{V}_{g\circ f} \Rightarrow$ Deoarece g e cont. în $f(a) \Rightarrow g^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{f(a)}$

Deoarece f e cont. în $g(a) \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{V}_{f(a)}$

$f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g\circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$

$\cancel{f^{-1} \circ g^{-1} = (g\circ f)^{-1}}$

$a-\frac{1}{2} < u_{m_2} - \frac{1}{2} < x_{m_2} < u_{m_2} < a+\frac{1}{2} \Rightarrow |a - x_{m_2}| < \frac{1}{2}$

(8) $(\mathbb{R}^n, d_2)$ este un spațiu metric complet adică orice șir Cauchy este convergent.

~~R~~ Teorema Cezaro-Stolz

(9.) Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ șiruri de numere reale astfel încât $b_n \nearrow \infty$ și $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

(10) Se numește serie o pereche de șiruri $((x_n)_{n\geq p}, (y_n)_{n\geq p})$ unde $y_n = \sum\limits_{k=p}^{n} x_k$, x_n se numesc termenii seriei, iar y_n reprezintă sumele parțiale ale seriei.

(11) O mulțime $V \subset \mathbb{R}$ se numește vecinătate a lui a dacă există $\varepsilon > 0$ a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$

Fie (X, d) un spațiu metric, $a \in V$ și $V \subset X$
V se numește vecinătate a lui a dacă $\exists r > 0$ a.î. $B(a,r) \subset V$

Fie (X,d) un spațiu metric. O mulțime $D \subset X$ este deschisă dacă $\forall x \in D \Rightarrow D \in \mathcal{V}_x$ $\quad \mathcal{T} = \{D \subset X \mid D \text{ deschisă}\}$ - topologie asociată (X, d)

O mulțime $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ se numește topologie dacă:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2) $D_1, D_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$

3) $(D_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}$

O mulțime F se numește închisă dacă $\complement F$ e deschisă

7. Criteriul lui Abel

$|y_0+y_1+\dots+y_n|\le M$

$(x_n)_n \downarrow$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} x_n y_n$ convg.

8. Criteriul lui Cauchy
(x_n) monoton mărginit, $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ convg. $\Rightarrow$

$\sum x_n y_n$ convg.

9. Criteriul lui Leibniz

$(x_n)_n \downarrow$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n x_n$ convg.

Topologii:

$\mathring{A}$ = interiorul lui A

$x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists r>0,\ B(x,r)\subset A$

$\overline{A}$ = închiderea lui A

$x\in\overline{A} \Rightarrow \forall r>0,\ B(x,r)\cap A \neq \emptyset$

A' = mulț. pct. de acumulare

$x\in A' \Rightarrow \forall r>0\ \ B(x,r)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$

$Fr(A)$ = frontiera

$izo(A)$ = mulț. pct. izolate

$A'\subseteq\overline{A}$

$\overline{A} = A\cup A'$

$Fr(A) = \overline{A}\setminus\mathring{A}$

$izo(A) = \overline{A}\setminus A'$

Criterii Serii

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \rightarrow \text{conv. } p \geq 1 \\ \rightarrow \text{div. } p \leq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \begin{cases} \rightarrow 0, \text{ inconclusiv} \\ \rightarrow \neq 0, \text{ divergent} \end{cases}$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} q^n \begin{cases} \rightarrow \text{div. } q \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ \rightarrow \text{conv. } q \in (-1, 1) \end{cases}$$

1. Criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} \rightarrow l < 1 \text{ s. conv.} \\ \rightarrow l > 1 \text{ s. div.} \end{cases}$$

2. Criteriul radicalului

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \begin{cases} \rightarrow l < 1 \text{ s. conv.} \\ \rightarrow l > 1 \text{ s. div.} \end{cases}$$

3. Criteriul Raabe-Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l \begin{cases} \rightarrow l < 1 \text{ s. div.} \\ \rightarrow l > 1 \text{ s. conv.} \end{cases}$$

4. Criteriul condensării

$$(a_n)_n \searrow \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \sim \sum_{n\geq 1} 2^n \cdot a_{2^n}$$

5. Criteriul comparației (limită)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \begin{cases} \rightarrow l \in (0, \infty) \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \sim \sum_{n\geq 1} b_n \\ \rightarrow l = 0 \text{ și } \sum_{n\geq 1} b_n \xrightarrow{\text{conv}} \sum_{n\geq 1} a_n \text{ conv.} \\ \rightarrow l = \infty \text{ și } \sum_{n\geq 1} b_n \text{ div} \rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \text{ div.} \end{cases}$$

6. Criteriul comparației $a_n \leq b_n$

$\sum_{n\geq 1} b_n$ conv. $\rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ conv.

$\sum_{n\geq 1} a_n$ div. $\rightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ div.

Proprietăți:

1) $\overline{\lim}\,(-x_n) = \underline{\lim}\,(x_n)$

2) $\overline{\lim}\,(a x_n) = a\,\overline{\lim}\,x_n \quad a>0$

3) $\overline{\lim}\,(x_n+y_n) \le \overline{\lim}\,x_n + \overline{\lim}\,y_n$

4) $\overline{\lim}\,(x_n+y_n) \geq \underline{\lim}\,x_n + \overline{\lim}\,y_n$

5) $\underline{\lim}\,(x_n+y_n) \geq \underline{\lim}\,x_n + \underline{\lim}\,y_n$

6) $\underline{\lim}\,(x_n+y_n) \le \overline{\lim}\,x_n + \underline{\lim}\,y_n$

7) $x_n>0 \quad \overline{\lim}\,\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}\,x_n}$

8) $\overline{\lim}\,x_n\cdot y_n \le \overline{\lim}\,x_n \cdot \overline{\lim}\,y_n$

$x_n \geq 0$

$y_n \geq 0$

(7). Dacă x_n este un șir mărginit de numere reale atunci există un subșir x_{n_k} convergent la $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$

Demonstrație:

$\exists\, x_{n_k}$ a.î. $|x_{n_k}-a| < \frac{1}{k}$, unde $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$

$n_{k+1} > n_k$

$k=1$ $\quad a = \inf\limits_{n\geq 1} u_n \Rightarrow \exists\, m_1$ a.î. $a \le u_{m_1} < a+1$ $\Big| \Rightarrow$

$u_{m_1} = \sup\limits_{k\geq m} x_k \Rightarrow \exists\, n_1 \geq m_1$ a.î. $u_{m_1} < x_{n_1}+1$

$\Rightarrow x_{n_1} \le u_{m_1} < x_{n_1}+1$

$a-1 \le u_{m_1}-1 < x_{n_1} \le u_{m_1} < a+1 \Rightarrow |a-x_{n_1}| < 1$

$k=2$ $\quad a = \inf\limits_{n\geq 1} u_n \Rightarrow \exists\, m_2 > n_2$ a.î. $a < u_{m_2} < a+1$

$u_{m_2} = \sup\limits_{k\geq m} x_k \Rightarrow \exists\, n_2 \geq m_2$ a.î. $u_{m_2} - \frac{1}{2} < x_{n_2} < u_{m_2}$

Fie (X, d) un spațiu metric, $(x_n)_n \subset X$ și $a \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ converge la a și notăm $x_n \to a$ sau $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow d(x_n, a) \to 0$

$M \subset X$ se numește mărginită dacă $\exists B(a, r)$ a.î. $M \subset B(a, r)$

Fie (X, d) un spațiu metric. Un șir $(x_n) \subset X$ se numește șir Cauchy dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n, m > n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

4. Proprietăți: Fie (X, d) un spațiu metric și $(x_n) \subset X$

1) Dacă $(x_n)_n$ e convergent $\Rightarrow$ este șir Cauchy
2) Dacă $(x_n)_n$ e șir Cauchy $\Rightarrow (x_n)_n$ mărginit
3) $\forall$ șir convergent este mărginit
4) Dacă $(x_n)_n$ este șir Cauchy și există un subșir $x_{n_k} \to a \in X$

$\Rightarrow x_n \to a$

5. O funcție $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ se numește normă dacă verifică:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ $\forall a \in \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}^n$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

6. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Notăm cu $u_n = \sup_{k \geq n} x_k$ și $v_n = \inf_{k \geq n} x_k$

Atunci $v_n \leq v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n$

Se numește limită ~~inferioară~~ ~~superioară~~ superioară a șirului x_n și se notează

$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \inf_{n\geq 1} u_n \; \cancel{(\sup x_k)} = \inf_{n\geq 1}(\sup_{k\geq n} x_k)$

$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup_{n\geq 1} v_n = \lim_{n\to\infty} v_n$

~~$x_n \to a \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n'_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow$~~

$n \geq \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) = n_\varepsilon$

$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| = |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a|$

$\exists M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M \ \forall n \geq 1$

$\forall n > n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) \Rightarrow |x_n y_n - ab| \leq |M + |b|| \varepsilon$

3) $x_n \to a \Rightarrow |x_n| \to |a|$

~~$||x_n| - |y_n|| \leq |x_n - y_n|$~~

$x_n \to a \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\geq ||x_n| - |a||$

5) $x_n \to a \quad \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{|x_n||a|}$

$x_n \to a$

$\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0 \ \forall n \geq n_0 = n\frac{|a|}{2} \Rightarrow |x_n| = |x_n - a + a| \geq$

$\geq |a| - |x_n - a| \geq |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$

$\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|a|}$

$n'_\varepsilon = \max(n_0, n_\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| \leq \frac{2\varepsilon}{|a|^2}$

(2.) Teoremă: Orice şir monoton şi mărginit este convergent

(3) Fie X o mulţime nevidă. O funcţie $d: X \times X \to [0, \infty)$ se numeşte distanţă dacă verifică:

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$

(X,d) se numeşte spaţiu metric

$a \in X$ şi $r > 0$ $B(a,r) = \{x \mid d(a,x) < r\}$

Teorie Analiză

Def:
(1) Fie $(x_n) \subset \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul x_n converge la a și notăm $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ sau $x_n \to a$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall$ $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$x_n \to \infty$ dacă $\forall M$ $\exists n_M$ a.î. $\forall n \geq n_M \Rightarrow x_n \geq M$

Proprietăți:

Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ șiruri de nr. reale a.î. $x_n \to a$ și $y_n \to b$.

Atunci:

1) $(x_n)_n$ este mărginit
2) $x_n + y_n \to a+b$ și $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$
3) $|x_n| \to |a|$
4) Dacă $x_n \leq y_n \Rightarrow a < b$
5) Dacă $x_n \neq 0$ $\forall n$ și $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

Demonstrație:

1) $x_n \to a$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| \leq |a| + \varepsilon$

$\varepsilon = 1$ $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n| \leq 1 + |a|$

$M = \max(1 + |a|, \max_{i=1}^{n} |x_i|) + 1$

2) $x_n \to a$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n'_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$y_n \to b$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n''_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_n + y_n - (a+b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$