

Drumuri minime



Ca și în laboratorul trecut, fișierul `grafpond.in` are următoarea structură: numărul de vârfuri n , numărul de muchii/arce m și lista muchiilor/arcilor cu costul lor (o muchie fiind dată prin extremitățile sale și cost).

grafpond.in		
5	7	
1	4	1
1	3	5
1	2	10
2	3	2
4	2	6
4	5	12
5	2	11

Justificați complexitatea+corectitudinea algoritmilor propuși.

1. **Drum critic (Critical Path Method).** Se citesc din fișierul `activitati.in` următoarele informații despre activitățile care trebuie să se desfășoare în cadrul unui proiect:

- n – numărul de activități (activitățile sunt numerotate $1, \dots, n$)
- d_1, d_2, \dots, d_n durata fiecărei activități
- m – număr natural
- m perechi (i, j) cu semnificația: activitatea i trebuie să se încheie înainte să înceapă j

Activitățile se pot desfășura și în paralel.

- Să se determine timpul minim de finalizare a proiectului, știind că acesta începe la ora 0 (echivalent – să se determine durata proiectului) și o succesiune (critică) de activități care determină durata proiectului (un drum critic – v. curs) **$O(m + n)$** .
- Să se afișeze pentru fiecare activitate un interval posibil de desfășurare (!știind că activitățile se pot desfășura în paralel) **$O(m + n)$** .

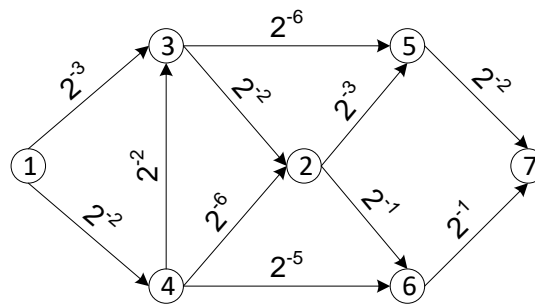
activitati.in	iesire
6	Timp minim 47
7 4 30 12 2 5	Activitati critice: 4 3 6
6	1: 0 7
1 2	2: 7 11
2 3	3: 12 42
3 6	4: 0 12
4 3	5: 42 44
2 6	6: 42 47
3 5	

Robert Sedgewick and Kevin Wayne, *Algorithms, 4th Edition, Addison-Wesley, 2011.*

- Se citesc din fișierul `grafpond.in` informații despre un graf **neorientat** ponderat și de la tastatură un număr k , o listă de k puncte de control ale grafului și un vârf s . Determinați cel mai apropiat punct de control de vârful s și afișați un lanț minim până la acesta, folosind algoritmul lui **Dijkstra** (problema B.1. din laboratorul 1 pentru cazul ponderat) - **$O(m \log(n))$** .

3. Pentru fiecare arc al unei rețele de comunicație acestui graf se cunoaște o pondere pozitivă subunitară reprezentând probabilitatea ca legătura corespunzătoare să nu se defecteze (de forma $1/2^p = 2^{-p}$). Aceste probabilități sunt independente, deci **siguranța unui drum** este egală cu produsul probabilităților asociate arcelor care îl compun. Arătați că problema determinării unui drum de siguranță maximă de la un vârf de start s la un vârf destinație t (accesibil din s) se poate reduce la o problemă de determinare a unui drum minim între s și t (pentru un graf cu ponderile modificate). Pornind de la acest fapt, implementați un algoritm bazat pe algoritmul lui **Dijkstra** pentru determinarea unui drum de siguranță maximă între două vârfuri s și t citite de la tastatură pentru o rețea orientată dată în fișierul `retea.in` prin următoarele informații:

- n, m – numărul de vârfuri, respectiv arce
- m linii conținând triplete de numere naturale i, j, p cu semnificația: (i, j) este arc în rețea cu probabilitatea să nu se defecteze egală cu 2^{-p} **$O(m \log(n))$** .



4. **Drumuri minime din surse multiple** <http://www.infoarena.ro/problema/catun> **$O(m \log(n))$** .

5. a) Dat un graf orientat ponderat (în fișierul `grafpond.in`), afișați matricea distanțelor dacă graful nu conține circuite de cost negativ și un circuit cu cost negativ în caz contrar. **$O(n^3)$**

b) Fie G un graf neorientat ponderat. Pentru două vârfuri u și v ale lui G , notăm cu $d(u, v)$ **distanța** de la vârful u la vârful v (numărul minim de muchii ale unui lanț de la u la v).

Pentru un vârf v , **excentricitatea** lui v este distanța maximă de la acest vârf la celelalte vârfuri:

$$e(v) = \max \{ d(v, u) \mid u \in V \}$$

Excentricitatea minimă a vârfurilor se numește **raza** grafului:

$$r(G) = \min \{ e(v) \mid v \in V \}$$

Mulțimea vârfurilor cu excentricitatea minimă (egală cu $r(G)$) se numește **centrul** grafului:

$$c(G) = \{ v \in V \mid e(v) = r(G) \}$$

Excentricitatea maximă a vârfurilor se numește **diametrul** grafului; altfel spus, diametrul este cea mai mare distanță dintre două vârfuri:

$$\text{diam}(G) = \max \{ e(v) \mid v \in V \} = \max \{ d(u, v) \mid v, u \in V \}$$

Se citesc din fișierul `grafpond.in` informații despre un graf **neorientat** ponderat G . Să se determine, folosind algoritmul **Floyd-Warhsall**, raza, diametrul, centrul grafului și un lanț diametral (un lanț minim P între două vârfuri u și v cu ponderea $w(P) = d(u, v) = \text{diam}(G)$). **$O(n^3)$**

6. Se dă un graf orientat ponderat (în fișierul `grafpond.in`) și un vârf `s` citit de la tastatură. Dacă graful nu conține circuite negative accesibile din `s` afișați câte un drum minim de la `s` la fiecare dintre celelalte vârfuri accesibile din `s`, altfel afișați un astfel de circuit (folosind algoritmul Bellman Ford) **$O(nm)$**