Curs 3

Câmpul de prob. a lui Laplace:
Ω - discrete, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ - echiprob.

Pt. $A \in \mathcal{F}$: $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nr. caz. fav.}}{\text{nr. caz posibile}}$

Formula sumei: A, B mulțimi finite, disjuncte

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

$A + B = A \cup B$ unde $A \cap B = \emptyset$

Principiul includerii-excluderii

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

$|A| = \mathbb{P}(A) \underbrace{|\Omega|}$ → fixat const.

Formula produsului:
Fie A, B două mulțimi finite, $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

atunci $A \times B$ este finit și

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Obs: Dacă un obiect a poate fi ales în n moduri și apoi un element b poate fi ales în m moduri atunci cuplul (a,b) scris în această ordine poate fi ales în n×m moduri

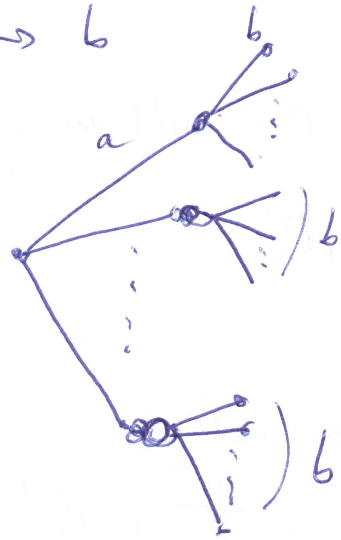
Exp: 10 persoane care participă la o cursă
Câte posibilități avem pt 1, 2, 3 loc?

10 posibilităţi pt a ocupa 1 loc, apoi avem 9 pos. pt locul al 2-lea şi 8 pos. pt locul 3

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

Experimentul A → a

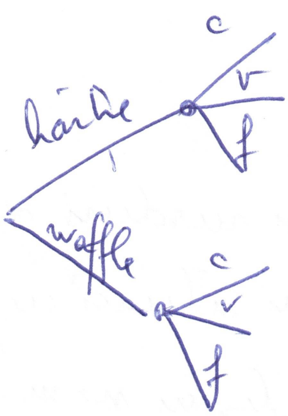
Experimentul B → b

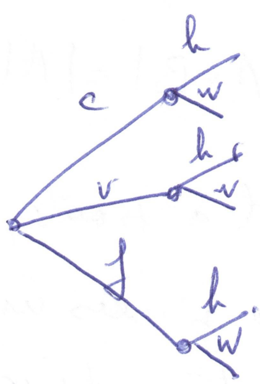


Cumpărăm îngheţată → 2 cornete: waffle, hârtie

→ 3 arome → ciocolată, vanilie, fructe

2×3 posibilităţi





Obs: În cazul a n mulţimi finite avem

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

Dacă $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n = \{(a_1, \ldots a_n) \mid a_i \in A\}$$

$$|A^n| = |A|^n$$

Exp: nr. de cuvinte posibile formate cu 5 litere $\rightarrow 26^5$

Schema de extragere cu revenire

Pp că avem o urnă cu n bile numerotate de la 1 la n și efectuăm k extrageri cu revenire

$$(x_1, x_2, \ldots x_k) \longrightarrow n^k$$

Același lucru obțineam dacă aveam k bile (numerotate de la 1 la k) și n urne numerotate $1 \ldots n$

$$(x_1, x_2, \ldots x_k) \qquad n^k$$

x_i - nr. urnei în care a fost distribuită bila i

Exp: $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots w_n\}$

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = ?$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subseteq \Omega\} = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid x_i \in \{0,1\}$$

$x_i = 1$ dacă $w_i \in A$
0 altfel $\}$

$$= \{0,1\}^n \Rightarrow |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$$

Schema de extragere fără revenire (fără întoarcere)

Pp că avem o urnă cu n bile numerotate $1 - n$ și efectuăm k extrageri fără revenire

$n=5$ $\{1,2,3,4,5\}$

$k=3$

(x_1, x_2, x_3)

$5\times 4\times 3$

$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)$

În particular, dacă $k=n$ avem $n!$ permutări

Exp: Ionel are 10 cărți: 4 de matematică, 3 chimie, 2 istorie, 1 biologie

În câte moduri poate să așeze cele 10 cărți?

A_1, A_2, A_3, A_4

$A_1\times A_2\times A_3\times A_4 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4)\}$

(x_1,x_2,x_3,x_4) (y_1,y_2,y_3) ...

$4!\,3!\,2!\,1!$

$4!\times(\ \ )$

$\underbrace{M \quad C \quad I \quad B}_{4!}$

Exp: (Problema aniversărilor)

Presupunem că avem n persoane la o întâlnire și ne întrebăm care este prob. ca cel puțin 2 să fie născuți în aceeași zi?

Ipoteze: - anul are 365 zile

- șansa ca o persoană să se nască într-o zi dată este $1/365$

$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \mid x_i \in \{1, 2, \dots 365\}\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ este echiprob. $\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{365^n}$, $w \in \Omega$

$|\Omega| = 365^n$

A - cel puțin 2 persoane sunt născute în aceeași zi

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}$(nicio pers. să nu fie născută în aceeași zi)

$= 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times (365-n+1)}{365^n}$ $\Big| (x_1, x_2, \dots x_n)$, $x_i \neq x_j$

n	10	15	22	$\boxed{23}$	55
$\mathbb{P}(A)$	0.12	0.25	0.48	$\boxed{0.51}$	0.99

$\binom{23}{2} \to 253$

(P) Fie $0 \leq k \leq n$. Atunci nr. de părți de cardinal k al unei mulțimi de cardinal n este $\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k = \binom{n}{k}$

Exp: Nr. de mâini într-un joc de cărți $\binom{52}{5}$

Exp: Câte mâini de 5 cărți conțin exact 2 ași, 2 popi și o damă?

$\begin{cases} \text{Figuri} \to 2, 3, \dots Q, K, A \quad (13 \text{ figuri}) \\ \text{Culori} \to (4 \text{ culori}) \end{cases}$

A - mulțimea pachetelor de ași

B - mulțimea perechilor de popi

C - mulțimea damelor

(a, b, c) $\quad a \in A,\ b \in B,\ c \in C$

$$|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C| = \binom{4}{2}\binom{4}{2} \cdot 4$$

Exp: MATEMATICA ← nr. de anagrame

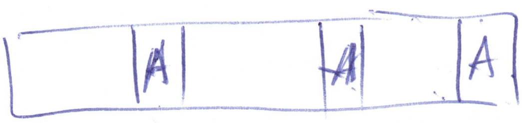
MATE → 4!

M → 2 ori
A → 3 ori
T → 2 ori
E, I, C → 1

$$\underbrace{\binom{10}{3}}_{\text{litera A}}\underbrace{\binom{7}{2}}_{\text{litera M}}\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{lit. T}}\underbrace{\binom{3}{1}}_{E}\underbrace{\binom{2}{1}}_{I}\underbrace{\binom{1}{1}}_{C}$$

$$= \frac{10!}{3!\,\cancel{7!}} \times \frac{\cancel{7!}}{2!\,\cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{2!\,\cancel{3!}} \cdot \frac{\cancel{3!}}{1!\,\cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{2!}}{1!\,1!} \cdot \frac{1!}{1!}$$

$$= \frac{10!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!} \leftarrow \text{coef. multinomial}$$



3!

Obs! Nr. de șiruri de lungime n care conțin n_1 elem. de tipul 1, n_2 elem. de tipul 2, ..., n_k elem. de tipul k a.î. $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ este egal cu

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

Exp (Prob. să avem FullHouse)

Care este prob. să avem FullHouse?

(KK 666) ; (AA QQQ)

52 cărți de joc — 13 figuri, 4 culori

$\Omega = \{\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\} \mid w_i \in$ mulț. cărților de joc, $w_i \neq w_j\}$

$|\Omega| = \binom{52}{5}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ - echiprob.

A - {să obținem FullHouse}

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

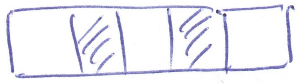
$|A|$: - putem alege figura pt cele 3 ~~figuri~~ cărți cu aceeași figură (Full în 13 moduri și putem selecta culorea în $\binom{4}{3}$ moduri

- apoi din cele 12 figuri rămase putem alege figura pt cele 2 cărți (Full) în 12 moduri și putem selecta culorea în $\binom{4}{2}$ moduri

$$|A| = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \binom{4}{2}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{13\binom{4}{3} 12 \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

b) Prob să avem o pereche:



B - {o pereche}

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$$

|B|: - alegem figura cărții din pereche: $\binom{13}{1}$

- alegem culoarea celor 2 cărți: $\binom{4}{2}$
- alegem celelalte 3 cărți: $\binom{12}{3}$
- pentru fiecare avem $\binom{4}{1}$ culori

$$|B| = \binom{13}{1}\times\binom{4}{2}\times\binom{12}{3}\cdot\binom{4}{1}^3$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{\binom{52}{5}}$$

Exp (Pb. lui Newton)

Care din următoarele evenimente are cea mai mare probabilitate?

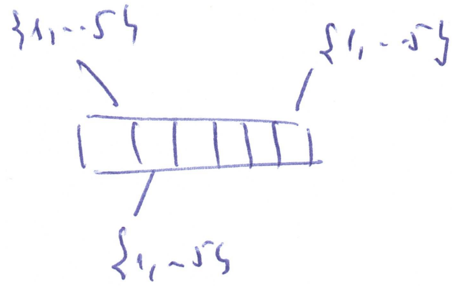
a) Cel puțin un 6 apare atunci când aruncăm 6 zaruri

b) Cel puțin 2 val. de 6 apar atunci când aruncăm 12 zaruri

c) ~ 3 val. de 6 ~ 18 zaruri

a) Rez. posibile $6^6, 6^{12}, 6^{18}$

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^6$$



$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{cel puțin un } 6)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\text{niciun } 6)$$
$$= 1 - \frac{5^6}{6^6} \simeq 0.67.$$

b) $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\text{cel puțin 2 val. de } 6)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\text{cel mult 1 val de } 6)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\text{nu avem nicio val. de 6 sau exact o val. de } 6)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\text{nicio val } 6) - \mathbb{P}(\text{exact o val. de } 6)$$
$$= 1 - \frac{5^{12}}{6^{12}} - \frac{\binom{12}{1} 5^{11}}{6^{12}} \simeq 0.62 < 0.67.$$

APLICAȚII

Formula lui Poincaré

a) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

b) $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$

Principiul includerii-excluderii

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Apl. 1: (Funcția lui Euler)

$\varphi(n)$ – nr. de nr. prime cu n ($\le$), $n \ge 2$

$n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$ – descompunerea în factori primi

$A_k \subseteq \{1, 2, \dots n\}$ elem. divizibile cu p_k, $k \in \{1, \dots r\}$

$n = 50 = 2 \cdot 5^2$ ($p_1 = 2$, $p_2 = 5$) $\qquad A_2 = \{5, 10, 15, 20, \dots, 50\}$

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r \rightarrow$ reprezintă toate nr. $m \le n$ divizibile cu cel puțin un p_k, $k \in \{1, \dots r\}$

$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r)^c$ – nr. nr. prime cu n

$$|B^c| = |\Omega| - |B|$$

$$\varphi(n) = |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r)^c|$$

$$= n - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le r} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}$$

dacă $d | n$ at nr. întregilor din $\{1, 2, \dots n\}$ divizibili cu d este $\frac{n}{d}$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_k}}$$

$$n - \varphi(n) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} \quad / : n$$

$$1 - \frac{\varphi(n)}{n} = \sum (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_k}}$$

$$\frac{\varphi(n)}{n} = 1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} \dots + (-1)^r \frac{1}{p_1 \dots p_r}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

$$\boxed{\varphi(n) = n \prod_{p | n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$

Apl 2 (Problema întâlnirilor) - de Montmort

n - plicuri cu destinatari diferiți

n - scrisori coresp. celor n destinatari

Se amestecă și ne întrebăm care este prob. ca al putin un destinatar să fi primit scrisoarea coresp.?

$$\Omega = \{\sigma \mid \sigma : \{1, \dots n\} \longrightarrow \{1, \dots n\}\} = S_n$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \qquad |\Omega| = n!$$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ echiprob : $\mathbb{P}(\sigma) = \frac{1}{n!}$

A – cel puțin un destinatar a primit scrisoarea coresp.

Fie E_i – destinatarul i a primit scrisoarea coresp. adresată lui

$$E_i = \{\sigma \in \Omega \mid \sigma(i) = i\} \qquad n = 4$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{1} & & & \end{pmatrix} \qquad |E_1| = 3! \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_i : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \boxed{i} & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \boxed{i} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$|E_i| = (n-1)!$$

$$\mathbb{P}(E_i) = \frac{|E_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$A = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) \overset{\text{f. Poincaré}}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k})$$

$|E_i \cap E_j| = (n-2)!$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \cdots & & i & \cdots & j & \cdots & \end{pmatrix}$

$|E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}| = (n-k)!$

$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$, $k \in \{1, \dots, n\}$

$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = \dfrac{1}{n!}$

A, B, C

$A \cap B$

$A \cap C$

$B \cap C$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\cancel{n!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \to \infty}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\mathbb{P}(A) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = -\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 1\right]$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - e^{-1} = 1 - 1/e \simeq 0.63$$

$B = A^c$ nicio întîlnire $\Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1/e$