Logică Matematică şi Computaţională
Cursul I

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2019–2020, Semestrul I

Scopul acestui curs

- bază teoretică pentru alte cursuri de matematică și informatică
- exersarea unor tehnici fundamentale de raționament matematic
- formalizarea (adică exprimarea matematică, exprimarea în simboluri matematice a) acestor tehnici de raționament ca metode generale de a raționa, și studiul lor cu mijloace matematice, prin intermediul acestui cadru formal care permite exprimarea lor matematică (vom vedea)
- nu este un curs de programare! Doritorilor le pot da exerciții de programare care se referă în mod direct la noțiunile și rezultatele teoretice învățate la acest curs, exerciții al căror scop este, aici, doar exersarea acestor noțiuni teoretice. Spre finalul cursului, vom parcurge o temă de algoritmică.

Cerințe pentru bunul mers al acestui curs

- Studenții trebuie să–și salveze cursul meu de logică matematică și computațională existent serverul de cursuri (*moodle*) al facultății. Nu garantez că voi posta foarte curând pe moodle versiunea actuală a cursului.
- Un reprezentant al seriei sau câte un reprezentant al fiecărei grupe trebuie să–mi scrie simultan pe fiecare dintre adresele de email:

  cmuresan@fmi.unibuc.ro
  c.muresan@yahoo.com

  și să–mi ceară, în subiectul mesajului, materiale pentru cursul de logică. Eu voi răspunde acestor mesaje, și voi trimite o serie de materiale ajutătoare la începutul semestrului, apoi, în fiecare săptămână, o versiune preliminară a cursului următor. La un moment dat, voi trimite, prin email, și versiunile finale ale cursurilor anterioare. Reprezentantul seriei/reprezentanții grupelor va/vor distribui aceste materiale la întreaga serie/fiecare grupă.
- Studenții trebuie să–și salveze materialele pe care le voi trimite pe mail la începutul semestrului, precum și pe cele pe care le voi trimite săptămânal.
- Este de dorit ca studenții să înceapă să învețe după primele versiuni ale cursurilor pe care li le trimit. Nu garantez că voi trimite foarte repede versiunile finale ale cursurilor.

Cerințe pentru bunul mers al acestui curs

- Studenții trebuie să aducă la fiecare curs prezentările cursurilor mele de pe moodle, precum și versiunea preliminară a prezentării cursului curent, printate sau pe laptopuri/tablete/alte suporturi electronice cu bateriile încărcate.
- Studenții care întârzie la orele mele au voie să intre în sală indiferent cât au întârziat, cu condiția ca intrarea lor la oră și așezarea lor în bancă să se facă în liniște, fără a perturba ora. O regulă similară se aplică pentru plecarea de la orele mele.
- Prezența la cursurile și seminariile mele nu este necesară, dar este recomandată, în sensul că absențele nu duc la scăderea notei finale la această materie, dar atrag după ele obligația studenților care absentează de a parcurge o parte din materie fără ca eu să le–o predau la oră. Aceeași regulă se aplică în cazul absențelor în masă ori în unanimitate.

Introducere

- **Logica matematică**: modelare matematică a legilor gândirii;

  mai precis, exprimare în simboluri matematice a modurilor de a raționa, și, pe baza acestei exprimări, studierea tipurilor de raționamente cu mijloace matematice (inclusiv algebrice, topologice, probabiliste etc.; ultimele două enumerate depășesc cadrul acestui curs)

Înainte de a trece la prezentarea unor sisteme logice, este necesar un capitol de preliminarii algebrice, în care va fi introdusă o structură algebrică numită **algebră Boole**, structură cu foarte multe aplicații în matematică și informatică. **Algebrele Boole** ne vor servi la studiul **logicii clasice** cu mijloace algebrice.

Aplicații ale **algebrelor Boole** în informatică:

- la proiectarea circuitelor electronice
- la crearea de sisteme și aplicații software
- în fundamentarea matematică a multor ramuri ale informaticii

Cuprinsul acestui curs, pe scurt

Capitolul 1: Preliminarii algebrice:

- Mulțimi, funcții și relații. Relații binare. Relații de echivalență
- Relații de ordine. Mulțimi (parțial) ordonate
- Latici
- Algebre Boole. Morfisme de algebre Boole. Filtre și congruențe în algebre Boole. Ultrafiltre. Teorema de reprezentare a lui Stone. Structura algebrelor Boole finite

(Pentru acest capitol al cursului, a se vedea și cursul de Structuri Algebrice în Informatică de pe acest semestru.)

Cuprinsul acestui curs, pe scurt

Capitolul 2: Calculul propozițional clasic:

- Sintaxa
- Algebra Lindenbaum–Tarski *(vom vedea o construcție prin care logicii propoziționale clasice îi vom asocia o algebră Boole)*
- Semantica *(calcul cu valori de adevăr, în algebra Boole cu exact două elemente:* $0 =$ *fals,* $1 =$ *adevărat; această algebră Boole determină structura tuturor algebrelor Boole)*
- Teorema de completitudine

Capitolul 3: Calculul cu predicate clasic:

- Structuri de ordinul I
- Sintaxa
- Semantica

Bibliografie

- S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.
- D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.
- D. Bușneag, D. Piciu, *Probleme de logică și teoria mulțimilor*, Craiova, 2003.
- V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București, 1974, 1975, 1976.
- G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, București, 1978, disponibilă online (scanată).
- G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, București, 2010.
- K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulțimilor și în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, București, 1969.
- S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București, 1982.
- A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulțimilor*, Editura Universității din București, 1996.
- Articolele de logică (inclusiv cele cu probleme date la examenul de logică matematică și computațională) din *Revista de logică* a Profesorului Adrian Atanasiu, publicație online.
- Cursurile de logică matematică și computațională postate pe serverul de cursuri (*moodle*) al facultății.

Prescurtări uzuale

- **i. e.** = id est = adică
- **ddacă** = dacă și numai dacă
- **a. î.** = astfel încât
- **ș. a. m. d.** = și așa mai departe

- Vom folosi și notația “:=“, cu semnificația de atribuire, ca prescurtare pentru scrierea $\overset{\text{definiție}}{=}$ sau $\overset{\text{notație}}{=}$.

Exemplu

Scrierea “$x := f(y)$“ poate semnifica:

- se atribuie lui x valoarea $f(y)$
- se definește x ca fiind $f(y)$
- se notează $f(y)$ cu x

Semnificația exactă se va deduce din context, în fiecare apariție a unei notații de acest tip.

Teoria mulțimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

Începem Capitolul 1 al cursului: "Preliminarii algebrice", cu secțiunea "Mulțimi".

- Ce este o **mulțime**?
- **Teoria naivă a mulțimilor** versus **teoria axiomatică a mulțimilor**
- O definiție din **teoria naivă a mulțimilor**: o *mulțime* este o colecție de obiecte **bine determinate** și **distincte**, numite *elementele mulțimii*.
- **distincte**: o mulțime nu conține un același obiect de mai multe ori; un element apare într-o mulțime o singură dată
- **bine determinate**: orice mulțime are o descriere precisă, care o identifică în mod unic, adică îi identifică în mod unic elementele

Exemplu

Să considerăm mulțimea zerourilor (i. e. a rădăcinilor) funcției zeta a lui Riemann. Nu sunt cunoscute toate elementele acestei mulțimi (a se vedea **ipoteza lui Riemann**, care este o parte din **a 8-a problemă a lui Hilbert**, problemă de un milion de dolari, în enciclopedia online wikipedia sau în cartea *Vârsta de aur a matematicii* a lui Devlin etc.), dar nu există două mulțimi distincte (diferite) fiecare având ca elemente zerourile funcției zeta a lui Riemann, deci această definiție descrie o mulțime, o identifică în mod unic.

Teoria naivă a mulțimilor

Teoria naivă a mulțimilor a fost inițiată de matematicianul Georg Cantor, care, în 1884, a definit pentru prima dată noțiunea de *mulțime*, ca fiind o "grupare într-un tot a unor obiecte distincte ale intuiției sau gândirii noastre".
O mulțime este considerată ca un tot unitar, deci ca un obiect unitar, care poate fi așadar element al altei mulțimi.

- teorie **naivă**: ambiguitatea exprimării în această definiție, care lasă loc de interpretări: ce este un "obiect (al intuiției sau gândirii noastre)", ce este o "grupare într-un tot"?
- teorie **naivă**: din definiții exprimate în limbaj natural (metalimbaj) (vom vedea), adesea ambigue când descriu noțiuni abstracte, se încearcă stabilirea unor proprietăți ale noțiunilor definite
- matematica lucrează cu noțiuni precise $\Rightarrow$ necesitatea fundamentării axiomatice (vom vedea)
- teorie **axiomatică**: se lucrează cu noțiuni distinse inițial doar prin denumirile lor, asupra cărora se impun axiome (vom vedea), proprietăți, reguli de lucru precise cu acele noțiuni; de ce este mai avantajoasă această abordare? pentru că matematica este interesată de **proprietățile** noțiunilor cu care lucrează, nu de **natura** lor; vom relua această discuție când vom vorbi despre **egalitate** versus **izomorfism**

Paradoxul lui Russell $\Rightarrow \nexists$ mulțimea tuturor mulțimilor

Noțiunea de mulțime se dovedește a nu fi suficient de cuprinzătoare: în 1903, Bertrand Russell demonstrează că nu există **mulțimea tuturor mulțimilor**, prin paradoxul care îi poartă numele.
Este unanim acceptat faptul că, dacă M este o mulțime, iar P este o proprietate referitoare la elementele mulțimii M, atunci colecția tuturor elementelor lui M care satisfac (au) proprietatea P este tot o mulțime, notată uzual astfel:

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

Facem apel aici la cunoștințele despre notațiile legate de mulțimi învățate în gimnaziu și liceu, unde se studiază teoria naivă a mulțimilor: M este o literă (o notație, un nume, o variabilă) ce desemnează o mulțime arbitrară (dar fixată), x este o literă ce desemnează un element arbitrar al mulțimii M, $\in$ este *simbolul de apartenență*, scrierea $x \in M$ semnifică faptul că x este un element al mulțimii M, iar scrierea $P(x)$ semnifică faptul că elementul x satisface proprietatea P.
Acoladele încadrează o mulțime, dată fie prin enumerarea elementelor ei separate de virgule, fie prin specificarea unei proprietăți asupra elementelor unei mulțimi "mai mari" și a faptului că mulțimea la care ne referim se obține din acea mulțime "mai mare" prin selectarea elementelor care au acea proprietate, cum este cazul de față.

Vom folosi și simbolul $\notin$, care este negația apartenenței, adică scrierea $x \notin M$ semnifică faptul că nu are loc $x \in M$, i. e. x nu este un element al lui M.

- "arbitrar, (dar) fixat" = care poate fi înlocuit cu **orice** obiect "de același tip" (de exemplu, în cazul de mai sus, cu orice mulțime), dar, din momentul în care l–am denumit și am început să lucrăm cu un astfel de obiect, atunci acel obiect (cu care lucrăm) este **fixat**, adică "nu se schimbă", "nu este înlocuit" cu un alt obiect în timp ce lucrăm cu el

Ce s–ar întâmpla dacă ar exista **mulțimea tuturor mulțimilor**, adică mulțimea având ca elemente toate mulțimile? Să presupunem prin absurd că această mulțime a tuturor mulțimilor există, și s–o notăm cu M. Am presupus că M este mulțime, deci, întrucât M conține toate mulțimile, înseamnă că M se conține pe sine: $M \in M$, un fapt "neobișnuit" în condițiile în care până acum am lucrat doar cu mulțimi care nu se conțin pe ele însele ca elemente (mulțimea numerelor naturale conține numai numerele naturale, nu și mulțimea acestor numere, adică pe sine, ca element; și la fel stau lucrurile cu toate mulțimile pe care le–am întâlnit în gimnaziu și liceu).

Acest fapt ne furnizează ideea de a considera proprietatea ca o mulțime să nu se conțină pe sine. Fie așadar P proprietatea referitoare la elementele lui M, adică la mulțimi, definită astfel: o mulțime A satisface proprietatea P ddacă $A \notin A$ (i. e. A nu se conține pe sine):

$$P(A) : A \notin A$$

Și acum să considerăm mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin pe ele însele, adică mulțimea $\{A \in M \mid P(A)\}$ a mulțimilor care satisfac proprietatea P, sau, altfel scris, mulțimea:

$$X := \{A \in M \mid A \notin A\}$$

Paradoxul lui Russell: X satisface proprietatea P sau n-o satisface? Adică $X \notin X$ sau $X \in X$ (este adevărat că $X \notin X$ sau că $X \in X$)?
Dacă $X \in X$, atunci, întrucât elementele lui X sunt mulțimile care nu se conțin pe ele însele, înseamnă că X nu se conține pe sine: $X \notin X$. Am obținut o contradicție, pentru că nu pot avea loc simultan proprietățile $X \in X$ și $X \notin X$: una dintre ele este adevărată, cealaltă este falsă, pentru că fiecare dintre aceste proprietăți este negația celeilalte.
Dacă $X \notin X$, atunci, întrucât X conține **toate** mulțimile care nu se conțin pe ele însele, înseamnă că X nu este una dintre mulțimile care nu se conțin pe ele însele, adică X se conține pe sine: $X \in X$. Iarăși am obținut o contradicție.
Sigur că, pentru orice mulțime X, are loc una dintre situațiile: $X \in X$ și $X \notin X$ (și numai una), pentru că, dacă una dintre aceste două proprietăți nu este satisfăcută, atunci cealaltă este satisfăcută (așadar avem "ddacă").
Deci oricare dintre cazurile posibile duce la o contradicție. De unde a provenit contradicția? Din presupunerea că există mulțimea tuturor mulțimilor. Înseamnă că această presupunere este falsă, i. e. **nu există mulțimea tuturor mulțimilor**.

Mulțimi versus clase proprii

Totalitatea mulțimilor nu formează o mulțime, ci o **clasă**. Din punctul de vedere al teoriei naive a mulțimilor, nu se pot spune multe lucruri despre noțiunea de *clasă*, decât că este "ceva mai vag/mai mare/mai cuprinzător decât o mulțime". Se consideră că orice mulțime este o clasă, dar nu și invers. Clasele care nu sunt mulțimi se numesc *clase proprii.*

Semnul (simbolul) de apartenență **nu** poate apărea la dreapta unei clase proprii, adică nu se consideră a avea sens faptul că o clasă proprie aparține unui alt obiect. O mulțime poate aparține unei clase (chiar și unei mulțimi), dar nicio clasă proprie nu aparține unei mulțimi, și, mai mult, nicio clasă proprie nu aparține unei clase (sau vreunui alt fel de obiect). În particular, ultima dintre observațiile anterioare arată că **nu există clasa tuturor claselor**, din simplul motiv că s–a impus restricția ca o clasă proprie, i. e. o clasă care nu este mulțime, să nu fie element al niciunui obiect, și deci nu există un obiect care să aibă clase proprii ca elemente. Dacă nu s–ar fi impus această restricție, atunci clasele nu s–ar fi deosebit semnificativ de mulțimi, și procesul de a considera mereu obiecte matematice "mai cuprinzătoare" ar fi continuat la infinit: să denumim ε tipul de obiect în care se încadrează obiectul care are drept elemente toate clasele, să denumim Ω tipul de obiect în care se încadrează obiectul care are drept elemente toate ε–urile, ș. a. m. d..

- Ce este o **axiomă**?

Teoria axiomatică a mulțimilor

- O *axiomă* este un fapt **dat** ca fiind adevărat într-o teorie matematică.
- O **axiomă** nu se demonstrează, ci pur și simplu este **dată** ca fiind adevărată.
- Orice teorie matematică trebuie să aibă la bază (i. e. ca **fundament**) un sistem (i. e. o colecție) de **axiome**. Pornind de la aceste axiome, se demonstrează teoremele (rezultatele matematice) ale acelei teorii.
- Scopul **axiomatizării**, adică al construirii unui **sistem de axiome** pentru o teorie matematică, este acela de **a elimina ambiguitățile** din definirea noțiunilor, conceptelor cu care lucrează acea teorie matematică.
- Desigur, axiomele unei teorii matematice care modelează un fenomen din lumea înconjurătoare trebuie să reflecte proprietățile acelui fenomen, de regulă obținute experimental. Însă respectiva construcție (teorie) matematică în sine, ca orice teorie matematică, trebuie să beneficieze de un sistem de axiome, din rațiuni ce țin de natura matematicii ca știință, de ceea ce se numește **rigoare matematică**, anume **lipsa ambiguităților**, de necesitatea oricărei teorii matematice de a fi o construcție de sine stătătoare, independent de fenomenul pe care îl modelează. Aceste trăsături ale matematicii sunt esențiale pentru îndeplinirea rolului ei în alte științe, în care este aplicată.

Teoria axiomatică a mulțimilor

- **Exemplu de axiomă**: **axioma paralelelor** pentru geometria euclidiană: "două drepte paralele tăiate de o secantă formează unghiuri alterne interne congruente".
- Faptul de a fi axiomă **nu este o proprietate intrinsecă** a unei afirmații, chiar dacă la originea sistemelor axiomatice se află "proprietăți observabile", "judecăți primare", fapte considerate "fundamentale", considerate a fi necesare ca "bază" a unei teorii matematice, care nu se demonstrează pornind de la alte fapte, ci tocmai invers, ele servesc la demonstrarea altor fapte în acea teorie matematică.
- Există mai multe sisteme axiomatice pentru geometria euclidiană, iar enunțul denumit mai sus **axioma paralelelor** nu este considerat ca axiomă în toate aceste sisteme. De aceea spunem că acest enunț **nu** are ca **proprietate intrinsecă** faptul de a fi axiomă.
- Acest enunț este **echivalent** cu alte enunțuri, adică acele alte enunțuri se deduc din el (atunci când el este considerat ca **axiomă**), dar și el se deduce din fiecare dintre acele alte enunțuri (atunci când acele enunțuri sunt considerate ca **axiome**, și atunci spunem că acest enunț de mai sus este un rezultat, o **teoremă** a geometriei euclidiene, bazate pe un alt sistem axiomatic).

- Sigur că oricare două **sisteme axiomatice** pentru o **aceeași** teorie matematică trebuie să fie **echivalente**, adică din fiecare dintre ele trebuie să se deducă fiecare altul dintre ele, iar acest lucru înseamnă nimic altceva decât faptul că din oricare două sisteme axiomatice pentru o teorie **se deduc aceleași rezultate**, adică **se construiește aceeași teorie matematică**.
- De exemplu, toate axiomatizările geometriei euclidiene sunt **echivalente**.
- De asemenea, toate axiomatizările teoriei mulțimilor (dintre care vom vedea în continuare una) sunt **echivalente**. De exemplu, **axioma alegerii** și **axioma lui Zorn** (din axiomatizări diferite ale teoriei mulțimilor) sunt **echivalente**, și când prima este aleasă ca axiomă, atunci a doua se numește **lema lui Zorn** (și se deduce din prima), iar când a doua este aleasă ca axiomă, atunci prima se numește **lema alegerii** (și se deduce din a doua). A se vedea alte enunțuri echivalente cu **axioma alegerii**, de exemplu în cartea de A. Scorpan din bibliografia cursului.
- În cazurile date ca exemple mai sus, avem **enunțuri (individuale) echivalente**, dar, așa cum am menționat, putem avea **sisteme de enunțuri echivalente**, caz în care **fiecare enunț** din oricare dintre acele sisteme **se deduce dintr–un întreg alt sistem de enunțuri**, adică **din toate enunțurile acelui alt sistem luate la un loc**.

Teoria axiomatică a mulțimilor

Precum am menționat mai sus, sunt cunoscute mai multe **sisteme axiomatice** (i. e. **sisteme de axiome**) pentru teoria mulțimilor. De exemplu următoarele, denumite astfel după matematicienii care le-au creat:

- **sistemul axiomatic Zermelo–Fraenkel**, care lucrează numai cu mulțimi
- **sistemul axiomatic von Neumann–Bernays**, numit și **sistemul axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel**, care admite și existența claselor

S-a demonstrat că:

- Orice rezultat **despre mulțimi** care poate fi demonstrat pornind de la (axiomele) sistemul(ui) axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel poate fi demonstrat și pornind de la sistemul axiomatic Zermelo–Fraenkel.

Este de menționat faptul că problema fundamentării prin sisteme axiomatice a teoriei mulțimilor (care este ea însăși un fundament al întregii matematici) a dat naștere la controverse care nu sunt încheiate nici în ziua de azi, pentru că **scopul principal al elaborării oricăror sisteme axiomatice**, anume **eliminarea tuturor ambiguităților (de limbaj, din definiții, din formulări de proprietăți etc.) dintr-o teorie matematică**, este foarte greu de atins în cazul teoriei mulțimilor, tocmai datorită caracterului ei primar, de bază, de fundament al întregii matematici.

Sistemul axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel

Vom face acum o scurtă prezentare a **sistemului axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel**, după cartea *Foundations of Set Theory*, de Abraham A. Fraenkel, Yehoshua Bar–Hillel și Azriel Levy (seria "Studies in Logic and the Foundations of Mathematics", volumul 67).

Primul lucru de care vom avea nevoie este o formalizare a limbajului teoriei mulțimilor, care să elimine ambiguitățile din acest limbaj.

- *formalizare*: exprimare folosind **numai** simboluri matematice
- *metalimbaj*: "limbajul natural", "vorbirea curentă (obișnuită)", "exprimarea în cuvinte", "fără simboluri matematice"
- un enunț (complet) formalizat nu conține elemente (cuvinte, exprimări) din metalimbaj
- putem transforma, traduce enunțuri exprimate în limbaj natural în enunțuri formalizate, dacă avem, în teoria matematică în care lucrăm, un vocabular suficient de bogat și reguli sintactice care să permită această transformare
- desigur, orice enunț formalizat poate fi exprimat, tradus, în limbaj natural

O paranteză: nivele de limbaj

În capitolele de logică ale cursului, unde vom studia raționamentele logice cu mijloace matematice, obiectele cu care vom lucra vor avea denumirile obișnuite de: axiome, teoreme, deducții, deducții din ipoteze, pentru că vor fi denumite după conceptele pe care le modelează. Despre aceste obiecte, vom formula și vom demonstra leme, propoziții, teoreme, corolare. Vom avea teoreme despre teoreme, vom deduce proprietăți ale deducțiilor.

În acele capitole, vom avea, așadar, două nivele de limbaj: *limbajul* teoriei matematice a logicii clasice (a propozițiilor, apoi a predicatelor), cu vocabularul său de simboluri și denumiri și propriile sale reguli de sintaxă, și *metalimbajul*: vorbirea obișnuită, limbajul natural.

O analogie imediată pentru a înțelege conceptul de *nivele diferite de limbaj* provine din informatică:

- codul mașină
- limbajele de asamblare
- limbajele de programare

sunt limbaje de nivele diferite pe care un computer le poate procesa, traducând codul scris într–un limbaj de programare în limbaj de asamblare, apoi în cod mașină, iar, pe acesta din urmă, transpunând–ul în operații fizice în componentele sale electronice.

Sistemul axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel

Precum am anunțat mai sus, acest sistem axiomatic operează atât cu **mulțimi**, cât și cu **clase**. Natura mulțimilor și a claselor este neprecizată, în sensul că ele sunt considerate a fi obiecte matematice date doar prin denumirile de **mulțime** și **clasă**, și tot ce știm despre ele sunt proprietățile care vor fi enumerate mai jos (a se vedea mai sus o discuție despre abordarea axiomatică și avantajele ei).
Așadar, primele elemente ale limbajului pe care îl vom construi sunt:

- *mulțimile* și *clasele*, denumite generic *obiecte*, care satisfac condiția că orice mulțime este o clasă (dar nu orice clasă este o mulțime); clasele care nu sunt mulțimi vor fi numite *clase proprii*

Pentru a scrie axiomele, vom avea nevoie să putem atribui (asocia) nume mulțimilor și claselor arbitrare, dar și mulțimilor și claselor precizate, fixate, constante.
Deci vom folosi noțiunile de:

- *variabilă* sau *nume variabil*, care semnifică un nume atribuit unui obiect arbitrar și neprecizat
- *constantă* sau *nume constant*, care semnifică un nume atribuit unui obiect fixat, precizat

Sistemul axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel

- **regulă**: în definițiile și axiomele acestui sistem axiomatic, numele variabile și numele constante vor fi litere din alfabetul latin; numele atribuite mulțimilor vor fi litere mici, iar numele atribuite claselor (care pot fi mulțimi, dar despre care nu se precizează dacă sunt sau nu sunt mulțimi) vor fi litere mari
- în prezentarea limbajului acestui sistem axiomatic, vom folosi litere grecești ca nume variabile pentru orice fel de obiecte, i. e. și pentru mulțimi, și pentru clase care pot să nu fie mulțimi
- în majoritatea cazurilor, vom folosi litere de tipurile enumerate mai sus fără a preciza că ele denumesc mulțimi, clase care nu sunt neapărat mulțimi sau obiecte de oricare dintre aceste tipuri, iar convențiile pe care tocmai le–am stabilit ne vor spune la ce fel de obiecte ne vom referi

Vom folosi următoarele simboluri pentru a enunța proprietăți ale obiectelor: $\in$, $\notin$, $=$, $\neq$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.

$\in$ și $\notin$:

- $\in$ se numește *simbolul de apartenență*; $\alpha \in \beta$ (*este un enunț (i. e. o proprietate), care*) se citește "α aparține lui β" sau "β conține pe α"
- un obiect care aparține unui alt obiect va fi numit *element* sau *membru* al obiectului căruia îi aparține
- simbolul $\notin$ va fi folosit cu semnificația: $\alpha \notin \beta$ (*este un enunț (i. e. o proprietate), care este satisfăcut*) ddacă nu are loc $\alpha \in \beta$ (și se citește "α nu aparține lui β" sau "β nu conține pe α")

Am precizat că obiectele cu care lucrăm se numesc **mulțimi** sau **clase**. Deci orice element la care ne vom referi este la rândul său o mulțime sau o clasă (de fapt un element nu va fi niciodată o clasă care nu e mulțime, i. e. o clasă proprie, ci orice element va fi o mulțime; o clasă proprie nu aparține niciunui obiect; nu vom întâlni în acest sistem axiomatic clase proprii care sunt elemente ale unui obiect; a se vedea o discuție de mai sus referitoare la acest aspect legat de clase și de proprietatea de apartenență).

$=$ și $\neq$:

- $=$ se numește *simbolul de egalitate*; $\alpha = \beta$ (*este un enunț (i. e. o proprietate), care*) se citește "α coincide cu β" și semnifică faptul că α și β sunt *(nume pentru) (denumesc) (reprezintă)* același obiect
- simbolul $=$ se consideră a avea următoarele proprietăți:
  - *reflexivitate*: pentru orice obiect α, are loc $\alpha = \alpha$
  - *simetrie*: pentru orice obiecte α și β, dacă $\alpha = \beta$, atunci are loc și $\beta = \alpha$
  - *tranzitivitate*: pentru orice obiecte α, β și γ, dacă $\alpha = \beta$ și $\beta = \gamma$, atunci are loc și $\alpha = \gamma$
  - *substitutivitate*: pentru orice obiecte α și β și orice proprietate P referitoare la obiecte, dacă $P(\alpha)$ (adică α satisface proprietatea P; am mai folosit această notație) și $\alpha = \beta$, atunci are loc și $P(\beta)$
- simbolul $\neq$ va fi folosit cu semnificația: $\alpha \neq \beta$ (*este un enunț (i. e. o proprietate), care este satisfăcut*) ddacă nu are loc $\alpha = \beta$ (și se citește "α nu coincide cu β")

Simbolurile $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ și $\leftrightarrow$ se numesc *conectorii logici*.

- $\neg$ se numește *negația* și se citește "non" sau "not"; dacă E este un enunț (o proprietate) referitor la obiecte, atunci $\neg E$ se citește "non E" sau "not E" și semnifică negația proprietății E, adică acea proprietate care este adevărată ddacă E este falsă (și, desigur, falsă ddacă E este adevărată)
- $\vee$ se numește *disjuncția* și se citește "sau"; dacă E și F sunt enunțuri (proprietăți) referitoare la obiecte, atunci $E \vee F$ se citește "E sau F" și semnifică acea proprietate care este adevărată ddacă măcar (cel puțin) una dintre proprietățile E și F este adevărată
- $\wedge$ se numește *conjuncția* și se citește "și"; dacă E și F sunt enunțuri (proprietăți) referitoare la obiecte, atunci $E \wedge F$ se citește "E și F" și semnifică acea proprietate care este adevărată ddacă ambele proprietăți E și F sunt adevărate (i. e. ddacă fiecare dintre proprietățile E și F este adevărată)

Conectorii logici $\rightarrow$ și $\leftrightarrow$ se pot defini pe baza conectorilor logici $\neg$, $\vee$ și $\wedge$, astfel: pentru orice enunțuri E și F:

$$E \rightarrow F \text{ este, prin definiție, enunțul } \neg E \vee F$$
$$E \leftrightarrow F \text{ este, prin definiție, enunțul } (E \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow E)$$

Urmează definițiile lor "în cuvinte".

Sistemul axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel

- $\rightarrow$ se numește *implicația* și se citește "implică"; dacă E și F sunt enunțuri (proprietăți) referitoare la obiecte, atunci $E \rightarrow F$ se citește "E implică F" și semnifică acea proprietate care este adevărată ddacă din E rezultă (i. e. se deduce) F, i. e. acea proprietate care este adevărată ddacă, în situația când E este adevărată, atunci și F este adevărată, i. e. acea proprietate care este adevărată ddacă fie E este falsă, fie F este adevărată (fie ambele)
- definiția de mai sus a *implicației* pare să contrazică intuiția noastră, dar ea ilustrează de fapt foarte bine modul de a raționa matematic: cum demonstrăm că o proprietate E implică o proprietate F? (că din E rezultă F? că din E se deduce F?); ce avem, de fapt, de arătat? avem de arătat că, dacă E este adevărată, atunci și F este adevărată; deci, dacă E este falsă, atunci **nu avem nimic de demonstrat**: faptul că E este falsă nu invalidează implicația "E implică F"; "E implică F" este falsă numai când E e adevărată, dar F e falsă; dacă E este adevărată, atunci trebuie ca F să fie adevărată pentru ca această implicație să fie adevărată; deci, indiferent cum este E, dacă F este adevărată, atunci implicația respectivă este adevărată; și, dacă recitim acest paragraf, observăm că implicația "E implică F" este adevărată **exact atunci când** (adică **atunci și numai atunci când**) fie E este falsă, fie F este adevărată (fie ambele)

Remarcă (schematic, valoarea de adevăr a unei implicații)

(**fals** $\Rightarrow$ **orice**) este **adevărat**
(**adevărat** $\Rightarrow$ **fals**) este **fals**
(**adevărat** $\Rightarrow$ **adevărat**) este **adevărat**
 așadar: (**orice** $\Rightarrow$ **adevărat**) este **adevărat**

- $\leftrightarrow$ se numește *echivalența* și se citește "echivalent"; dacă E și F sunt enunțuri (proprietăți) referitoare la obiecte, atunci $E \leftrightarrow F$ se citește "E este echivalentă cu F" și semnifică acea proprietate care este adevărată ddacă au loc și $E \rightarrow F$, și $F \rightarrow E$, i. e. acea proprietate care este adevărată ddacă E și F sunt simultan false sau simultan adevărate (adică sunt ambele false sau ambele adevărate, i. e. au aceeași "valoare de adevăr")

Exercițiu (temă)

Citiți de mai sus semnificația implicației și justificați (i. e. arătați "în cuvinte") faptul că proprietatea $E \leftrightarrow F$ (adică ambele proprietăți $E \rightarrow F$ și $F \rightarrow E$, adică proprietatea $(E \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow E)$, după cum arată definiția conjuncției) este adevărată ddacă E și F sunt fie ambele false, fie ambele adevărate).

Observație

Se lucrează numai cu enunțuri (mai precis **propoziții** – vom vedea) care sunt **fie false, fie adevărate,** adică **au valoare de adevăr**, și aceasta poate fi **numai "fals" sau "adevărat".** Cu astfel de enunțuri vom lucra în **logica propozițională clasică**, pe care o vom studia într–o serie de cursuri viitoare.

Observație

Cerința ca un enunț **să aibă valoare de adevăr, și aceasta să fie "fals" sau adevărat", nu este trivială,** nici măcar pentru enunțurile afirmative, dacă ne referim la limbajul natural (cele interogative sau exclamative **nu au valori de adevăr**).

De **exemplu:** ce valoare de adevăr are enunțul A de mai jos? Dar enunțul B?

A : *Mestecenii sunt frumoși.*

B : *Afirmația pe care eu o rostesc în acest moment este falsă.*

În cazul enunțului A, se simte nevoia introducerii a mai mult de două valori de adevăr, din cauza naturii **subiective** a respectivei afirmații.

Enunțul B duce la un **paradox** (binecunoscutul **paradox al mincinosului**) dacă vrem să–i evaluăm valoarea de adevăr la fals sau adevărat (dacă e fals, atunci rezultă că e adevărat, iar, dacă e adevărat, atunci rezultă că e fals). Așadar enunțul B nu este nici fals, nici adevărat.

Simbolurile $\forall$ și $\exists$ se numesc *cuantificatorii*.

- $\forall$ se numește *cuantificatorul universal* și se citește "oricare ar fi"; dacă α este o variabilă (un nume variabil) și P este o proprietate referitoare la obiecte, atunci $\forall \alpha P(\alpha)$ se citește "pentru orice α, $P(\alpha)$" și este acea proprietate care este adevărată ddacă orice obiect α satisface proprietatea P (α poate fi un nume variabil pentru mulțimi, caz în care condiția anterioară devine: orice mulțime satisface proprietatea P, sau poate fi un nume variabil pentru clase, caz în care condiția anterioară devine: orice clasă satisface proprietatea P)
- $\exists$ se numește *cuantificatorul existențial* și se citește "există"; dacă α este o variabilă (un nume variabil) și P este o proprietate referitoare la obiecte, atunci $\exists \alpha P(\alpha)$ se citește "există α, a. î. $P(\alpha)$" și este acea proprietate care este adevărată ddacă există (măcar, cel puțin) un obiect α care satisface proprietatea P (α poate fi un nume variabil pentru mulțimi, caz în care condiția anterioară devine: există (măcar) o mulțime care satisface proprietatea P, sau poate fi un nume variabil pentru clase, caz în care condiția anterioară devine: există (măcar) o clasă care satisface proprietatea P)

- Vom folosi și parantezele rotunde și pătrate, pentru a delimita enunțuri (i. e. proprietăți) și obiecte cu notații compuse din mai multe simboluri (vom vedea ce sunt acestea).

Am prezentat limbajul pe care îl vom folosi. Acum începem prezentarea (efectivă a) acestui sistem axiomatic pentru teoria mulțimilor, prezentarea **axiomelor** care îl compun.
În primul rând, se consideră că există cel puțin o mulțime.

Definiție

Pentru orice mulțimi x și y, dacă, oricare ar fi z, faptul că $z \in x$ implică $z \in y$ (adică orice element al lui x este și element al lui y), atunci scriem $x \subseteq y$ și spunem că x este o *submulțime* a lui y.

I. Axioma extensionalității de mulțimi:

- *Intuitiv*: Dacă $x \subseteq y$ și $y \subseteq x$, atunci $x = y$.
- *Formal (i. e. formalizat)*: $\begin{cases} \forall x \forall y[(x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \rightarrow x = y] \\ \text{sau} \\ \forall x \forall y[\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y] \end{cases}$

Dacă citim a doua exprimare formalizată a acestei axiome, observăm că ea spune că două mulțimi cu aceleași elemente coincid.
Pentru cele ce urmează, această primă axiomă arată unicitatea mulțimilor la care ne vom referi mai jos, care sunt descrise prin precizarea elementelor lor.
Reciproca afirmației din această axiomă, anume faptul că două mulțimi care coincid au aceleași elemente, este o consecință a proprietății de **substitutivitate** a simbolului $=$.

Definiție

O mulțime n care nu conține niciun element (i. e. pentru care are loc: $\neg\exists x(x \in n)))$ se numește *mulțime vidă*.

Teoremă

Există o unică mulțime vidă.

În acest punct își are locul doar unicitatea din teorema anterioară, care este o consecință a **Axiomei I**. Pentru a demonstra existența, se aplică **Axioma XI** pentru a arăta că există o clasă N având ca elemente acele obiecte x care satisfac proprietatea $x \neq x$, și **Axioma V** pentru a arăta că "intersecția" dintre clasa N și o mulțime arbitrară a este o mulțime, pe care o notăm cu n. Deci $n = \{x \in a \mid x \neq x\}$, folosind notațiile cunoscute din teoria naivă a mulțimilor. Sigur că niciun obiect x nu satisface proprietatea $x \neq x$, ceea ce înseamnă că n nu are niciun element. Deci partea de existență din această teoremă își are locul după **Axioma XI**.

Notație

Vom nota cu n mulțimea vidă (dacă aceasta există).

n este un **nume constant** (a se vedea mai sus limbajul acestui sistem axiomatic).

- *Intuitiv*: Pentru orice elemente a și b, există o mulțime y care conține doar a și b.
- *Formal*: $\forall a \forall b \exists y \forall x[x \in y \leftrightarrow (x = a \vee x = b)]$

Definiție

O mulțime care conține doar elementele a și b se numește *perechea* formată din a și b și se notează $\{a, b\}$ sau $\{b, a\}$. *Perechea ordonată* formată din a și b se notează $\langle a, b\rangle$ și se definește prin: $\langle a, b\rangle = \{a, \{a, b\}\}$.

Să remarcăm că, în **Axioma II** și definiția anterioară, nu a fost impusă condiția ca a să nu coincidă cu b.

Ordonarea perechii $\{a, \{a, b\}\}$ este dată de faptul că $a \in \{a, b\}$. Conform **Axiomei a IX–a (a fundării –** a se vedea mai jos), relația de apartenență este *antisimetrică*: nu putem avea două obiecte α, β cu $\alpha \neq \beta$, astfel încât $\alpha \in \beta$ și $\beta \in \alpha$. Conform aceleiași **Axiome a IX–a**, nu putem avea un obiect α cu $\alpha \in \alpha$. Așadar, pentru orice obiecte α, β, $\alpha \in \beta \Rightarrow \beta \notin \alpha$. Prin urmare, faptul că $a \in \{a, b\}$ arată că $\{a, b\} \notin a$.

Sistemul axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel

Definiție

O clasă se numește *relație* ddacă toate elementele ei sunt perechi ordonate.

Definiție

Dacă F este o clasă (relație sau clasă oarecare), atunci definim:

- *domeniul* lui F, notat $D(F)$, ca fiind clasa ce are ca membri exact acele elemente x pentru care există y astfel încât $\langle x, y\rangle \in F$
- *imaginea* lui F, notată $R(F)$, ca fiind clasa ce are ca membri exact acele elemente y pentru care există x astfel încât $\langle x, y\rangle \in F$ (R de la englezescul "range")

Sistemul axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel

Definiție

O clasă F se numește *funcție* ddacă F este relație și are loc:

$$\forall x \forall y \forall z [(\langle x, y \rangle \in F \wedge \langle x, z \rangle \in F) \rightarrow y = z]$$

(intuitiv: pentru orice x, există cel mult un y (desigur, $y \in R(F)$) a. î. $\langle x, y \rangle \in F$, sau, cu o exprimare echivalentă: pentru orice $x \in D(F)$, există un unic y (desigur, $y \in R(F)$) a. î. $\langle x, y \rangle \in F$).

Notație

Să notăm cu Fnc proprietatea care se aplică claselor și spune că o clasă este funcție, adică, pentru orice clasă F, notația $Fnc(F)$ semnifică faptul că F este o funcție.

Notație

Dacă F este o funcție și $x \in D(F)$, atunci notăm cu $F(x)$ unicul element y (desigur, $y \in R(F)$) care verifică: $\langle x, y \rangle \in F$.

III. Axioma reuniunii:

- *Intuitiv*: Pentru orice mulțime a, există mulțimea ale cărei elemente sunt exact membrii membrilor lui a ("exact" = "nici mai mult, nici mai puțin" = "sunt toate acestea și numai acestea").
- *Formal*: $\forall a \exists y \forall x[x \in y \leftrightarrow \exists z(x \in z \wedge z \in a)]$

Definiție

Pentru orice mulțimi a și b, mulțimea ale cărei elemente sunt membrii membrilor perechii $\{a, b\}$ (adică membrii lui a și membrii lui b, adică membrii lui a sau b) se numește *reuniunea* lui a și b și se notează $a \cup b$.

În axioma de mai sus intervine o **reuniune arbitrară** (adică reuniunea unei familii (mulțimi) arbitrare de mulțimi, familie (mulțime) de mulțimi care poate fi infinită; vom vedea) (se reunesc membrii lui a).

IV. Axioma mulțimii părților:

- *Intuitiv*: Pentru orice mulțime a, există mulțimea ale cărei elemente sunt exact submulțimile lui a.
- *Formal*: $\forall a \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \subseteq a)$

Știm că mulțimea submulțimilor unei mulțimi a se mai numește *mulțimea părților* lui a.

V. Axioma submulțimilor:

- *Intuitiv*: Pentru orice clasă P și orice mulțime a, există o mulțime ale cărei elemente sunt exact acei membri ai lui a care sunt și membri ai lui P (în limbajul cunoscut al teoriei naive a mulțimilor, intersecția unei mulțimi cu o clasă este o mulțime, și, prin urmare, orice submulțime a unei mulțimi este, la rândul ei, o mulțime, sau, dacă dorim să renunțăm la restricția simbolului $\subseteq$ la mulțimi, impusă în definiția acestui simbol, care face afirmația anterioară trivială, orice "subclasă" a unei mulțimi este, la rândul ei, o mulțime).
- *Formal*: $\forall P \forall a \exists y \forall x [x \in y \leftrightarrow (x \in a \wedge x \in P)]$

VI. Axioma infinității:

- *Intuitiv*: Pentru orice element o, există o mulțime z cu următoarele proprietăți: $\begin{cases} o \in z \\ \text{și} \\ \text{dacă } x \in z, \text{ atunci } (x \cup \{x\}) \in z. \end{cases}$
- *Formal*: $\forall o \exists z [o \in z \wedge \forall x (x \in z \rightarrow (x \cup \{x\}) \in z)]$

De ce se numește **axioma infinității** această axiomă? Observăm că această a VI-a axiomă "seamănă" cu **principiul inducției matematice**. În fapt, această axiomă poate fi folosită pentru a defini numerele naturale, pentru a "construi" mulțimea numerelor naturale. Cum? În primul rând, ce vor fi numerele naturale? Ca să fie obiecte în cadrul acestui sistem axiomatic (altfel spus, în teoria matematică fundamentată pe (generată de) acest sistem axiomatic), vor trebui să fie **mulțimi** sau **clase**, pentru că acestea sunt obiectele aici. Ca să fie elemente ale unei mulțimi, pe care o vom numi *mulțimea numerelor naturale*, vor trebui să fie **mulțimi**, pentru că nicio clasă proprie nu va fi element al unui obiect, în particular element al mulțimii numerelor naturale.

Și atunci, cum putem construi numerele naturale $0, 1, 2, 3, \ldots, m, \ldots$, și mulțimea lor, notată $\mathbb{N}$, pe baza **axiomei infinității**? Pur și simplu:

- alegem în locul variabilei o din această axiomă un element arbitrar, pe care îl fixăm și îl notăm cu 0,
- mulțimea obținută din această axiomă, din **Axioma XI** (vom vedea) și **Axioma V (a submulțimilor)** pornind de la elementul 0 în locul lui o și neavând niciun element în plus față de elementele obținute din 0 "prin procedeul descris în această axiomă", adică mulțimea având ca elemente exact pe 0 și elementele de mai jos, va fi notată cu $\mathbb{N}$,
- iar numerele naturale "nenule" vor fi definite "recurent", sau "din aproape în aproape":

$$\begin{cases} 1 := 0 \cup \{0\}, \\ 2 := 1 \cup \{1\}, \\ 3 := 2 \cup \{2\}, \\ \vdots \\ m+1 := m \cup \{m\}, \\ \vdots \end{cases}$$

Iar, cu această construcție, **Axioma I (a extensionalității de mulțimi)** (care spune că două mulțimi cu aceleași elemente coincid) implică **principiul inducției matematice**:

- dacă mulțimea M a numerelor naturale care verifică o anumită proprietate conține pe 0 și, pentru orice număr natural m pe care îl conține, M conține și numărul natural $m+1$, atunci $\mathbb{N} \subseteq M$.

VII. Axioma înlocuirii:

- *Intuitiv*: Dacă F este o funcție și a este o mulțime, atunci există o mulțime ale cărei elemente sunt exact elementele $F(x)$, pentru toți membrii x ai lui a care se află în $D(F)$.
- *Formal*: $\forall F[Fnc(F) \rightarrow \forall a \exists b \forall y[y \in b \leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge x \in D(F) \wedge y = F(x))]]$

Cine este acea mulțime b, în limbajul cunoscut din teoria naivă a mulțimilor? b este imaginea mulțimii $a \cap D(F)$ prin funcția F, notată uzual cu $F(a \cap D(F))$.

VIII. Axioma alegerii globale:

- *Intuitiv*: Există o funcție F al cărei domeniu conține toate mulțimile nevide și astfel încât, pentru fiecare mulțime nevidă y, $F(y)$ este membru al lui y (desigur, o *mulțime nevidă* este, prin definiție, o mulțime care nu coincide cu mulțimea vidă, n).
- *Formal*: $\exists F[Fnc(F) \wedge \forall y[y \neq n \rightarrow (y \in D(F) \wedge F(y) \in y)]]$

Funcția F "alege" câte un element $F(y)$ din fiecare mulțime nevidă y.

În esență, această axiomă spune că: din fiecare mulțime nevidă se poate alege un element.
Această axiomă asigură corectitudinea începerii demonstrațiilor cu propoziții de forma: "Fie $x \in M$, (arbitrar, fixat).", atunci când M este o mulțime nevidă.

IX. Axioma fundării:

- *Intuitiv*: Orice clasă P care are cel puțin un membru are un membru minimal u, i. e. există un element u cu proprietatea că u este membru al lui P, dar niciun membru al lui u nu este membru al lui P.
- *Formal*: $\forall P[\exists u(u \in P) \rightarrow \exists u[u \in P \wedge \forall x(x \in u \rightarrow x \notin P)]]$

Această axiomă spune că orice șir $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ de membri ai unei clase P, cu $u_1 \in u_0$, $u_2 \in u_1$, $u_3 \in u_2$ ș. a. m. d., este finit (i. e. nu există un astfel de șir infinit; cu notațiile cunoscute din teoria naivă a mulțimilor, nu există un șir $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq P$ cu $u_{m+1} \in u_m$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$).

X. Axioma extensionalității claselor:

- *Intuitiv*: Oricare ar fi clasele A și B, dacă, pentru fiecare element x, x este membru al clasei A ddacă x este membru al clasei B, atunci A coincide cu B.
- *Formal*: $\forall A \forall B [\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B]$

Această axiomă spune că două clase cu aceleași elemente coincid, întocmai cum se întâmplă în cazul particular al mulțimilor, în care acest fapt era cunoscut din **Axioma I (a extensionalității de mulțimi)**.

XI. Axioma comprehensiunii predicative:

- *Intuitiv*: Dacă P este o proprietate referitoare la obiecte, care nu conține cuantificatori aplicați unor clase (adică expresii de forma "oricare ar fi o clasă X" sau "există o clasă X astfel încât"), atunci există o clasă având ca membri exact acele elemente x care satisfac proprietatea P.
- *Formal*, pentru o proprietate P ca mai sus: $\exists A \forall x (x \in A \leftrightarrow P(x))$

Așa cum am anunțat mai sus, într–o referire la teoria naivă a mulțimilor și în mai multe aplicații, dacă, în axioma anterioară, elementele x nu sunt oarecare, ci sunt elemente ale unei mulțimi y, atunci, conform **Axiomei V (a submulțimilor)**, A este o mulțime, anume, cu notațiile cunoscute din teoria naivă a mulțimilor, $A = \{x \in y \mid P(x)\}$.

Restricția impusă în această axiomă este cea menționată și mai sus: obiectele care **aparțin** unei clase sunt **mulțimi**.

Sistemul axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel

Motivul pentru care **Axioma XI (a comprehensiunii predicative)** poartă acest nume este faptul că astfel de proprietăți P, care capătă sens *(înțeles, "valoare de adevăr", adică putem spune despre ele că sunt adevărate sau false)* numai atunci când sunt aplicate unor obiecte "concrete", fixate, constante, adică numai atunci când scriem $P(\omega)$, cu ω obiect fixat, constant, se numesc *predicate*, sau *propoziții (enunțuri) cu variabile (variabilă* în acest caz, dar în general putem avea mai multe variabile, și să scriem $P(\alpha, \beta)$, $P(\alpha, \beta, \gamma)$ etc.*)*.
Proprietățile (enunțurile) "fără variabile", care nu se aplică unor obiecte, ci sunt "în sine (ele însele)" adevărate sau false, se numesc *propoziții*.
Aceste definiții fac parte din limbajul logicii matematice, și vor fi formulate riguros mai târziu.

Exemplu

Enunțul "2 este un număr par" este o *propoziție* (adevărată).
Enunțul "x este un număr par" este un *predicat* cu variabila x, în care înlocuirea lui x cu 2 produce o propoziție adevărată (anume chiar propoziția de mai sus), iar înlocuirea lui x cu 1 produce o propoziție falsă.

Teoria mulțimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

Notă

În restul cursurilor și seminariilor, vom adopta punctul de vedere al teoriei naive a mulțimilor, cu excepția cazurilor în care vom menționa că facem apel la o axiomă a teoriei mulțimilor.

A nu se înțelege că aceasta înseamnă ceva distinct de faptul de a ne situa în teoria axiomatică a mulțimilor, întrucât toate rezultatele pe care le cunoaștem din gimnaziu și liceu despre mulțimi și funcții pot fi demonstrate pornind de la orice sistem axiomatic al teoriei mulțimilor, în particular de la cel de mai sus, deci, în orice moment, în ce vom studia, ne vom afla în cadrul acestor sisteme axiomatice.

Definiția **funcției** însă nu o vom da în cazul general de mai sus, ci vom adopta definiția din gimnaziu și liceu, unde o funcție este considerată a fi definită între două mulțimi, nu între două clase oarecare.

Notă

Materialul prezentat până în acest moment nu face parte din materia pentru examen, cu excepția primei definiții naive a noțiunii de **mulțime**, a modului în care se raportează noțiunea de **mulțime** la noțiunea de **clasă**, precum și a denumirii de **clasă proprie**. Dar parcurgerea acestui material este importantă pentru înțelegerea următoarelor cursuri și seminarii.

Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Conectorii logici: folosiți pentru a lega enunțuri, formând astfel *enunțuri compuse:*

- *disjuncția:* sau
- *conjuncția:* și
- *negația:* non
- *implicația:* $\Rightarrow$
- *echivalența:* $\Leftrightarrow$

Amintim următoarele proprietăți logice, pe care le–am folosit sau le vom folosi la seminar, pentru demonstrarea unor egalități corespunzătoare între mulțimi, în care conectorii logici sunt înlocuiți cu operații cu mulțimi: dacă p, q și r sunt enunțuri (propoziții, afirmații, proprietăți), atunci au loc echivalențele următoare, în care parantezele sunt folosite pentru a delimita enunțurile compuse:

- $[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \ \Leftrightarrow\ [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)]$
- $[p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \ \Leftrightarrow\ [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)]$
- $\text{non } (p \text{ sau } q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)]$
- $\text{non } (p \text{ și } q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$
- $(p \Rightarrow q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \text{ sau } q]$
- $(p \Rightarrow q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)]$ (**principiul reducerii la absurd**)
- $(p \Leftrightarrow q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \Leftrightarrow (\text{non } q)]$ (consecință imediată a principiului reducerii la absurd și a faptului că $(p \Leftrightarrow q) \stackrel{\text{def.}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ și } (q \Rightarrow p)]$)

Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Amintim, din secțiunea anterioară a cursului, că are loc echivalența:

- implicația $[p \Rightarrow q]$ este echivalentă cu $[(\text{non } p)$ sau $q]$,

ceea ce arată că:

- implicația $[p \Rightarrow q]$ este adevărată ddacă p e falsă sau q e adevărată ([**fals** implică **orice**] este **adevărat**, și [**adevărat** implică **adevărat**] este **adevărat**),
- implicația $[p \Rightarrow q]$ este falsă ddacă p e adevărată și q e falsă ([**adevărat** implică **fals**] este **fals**),

și că această echivalență poate fi demonstrată astfel:

- implicația directă ($[p \Rightarrow q]$ implică $[(\text{non } p)$ sau $q]$) observând că, dacă are loc $[p \Rightarrow q]$, atunci, când $[\text{non } p]$ e falsă, adică p e adevărată, rezultă că e adevărată și q, așadar, ori de câte ori $[p \Rightarrow q]$ este adevărată, rezultă că și $[(\text{non } p)$ sau $q]$ este adevărată;
- implicația inversă ($[(\text{non } p)$ sau $q]$ implică $[p \Rightarrow q]$) prin faptul că, dacă $[(\text{non } p)$ sau $q]$ este adevărată, atunci, când p este adevărată și deci $[\text{non } p]$ este falsă, rezultă că este adevărată q, prin urmare implicația $[p \Rightarrow q]$ este adevărată.

Amintim că lucrăm numai cu enunțuri (afirmații) care sunt **fie false, fie adevărate**.

Cuantificatorii și simbolul $\exists\,!$

Cuantificatorii:

- *cuantificatorul universal:* $\forall$
- *cuantificatorul existențial:* $\exists$

Dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate referitoare la x (mai precis o proprietate referitoare la elementele pe care le parcurge/le poate denumi x), atunci:

- non $[(\forall\, x)\,(p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(\text{non } p(x))$
- non $[(\exists\, x)\,(p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(\text{non } p(x))$

Notație

Alăturarea de simboluri $\exists\,!$ semnifică "există un unic", "există și este unic".

Observație

$\exists!$ nu este un cuantificator, ci este o notație prescurtată pentru enunțuri compuse: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate, atunci scrierea $(\exists\,!\,x)\,(p(x))$ este o abreviere pentru enunțul scris, desfășurat, astfel:

$$(\exists\, x)\,(p(x)) \text{ și } (\forall\, y)\,(\forall\, z)\,[(p(y) \text{ și } p(z)) \Rightarrow y = z],$$

unde y și z sunt variabile.

Negarea enunțurilor cuantificate

Cum se neagă un enunț cu mai mulți cuantificatori? Aplicând proprietățile de mai sus, și iterând acest procedeu:

Exemplu

Fie x, y, z, t, u variabile, iar $p(x, y, z, t, u)$ o proprietate depinzând de x, y, z, t, u. Atunci:

$$\begin{array}{l}
\text{non } [(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t)(\exists u)(p(x,y,z,t,u))] \Leftrightarrow \\
(\exists x)[\text{non } [(\forall y)(\exists z)(\forall t)(\exists u)(p(x,y,z,t,u))]] \Leftrightarrow \\
(\exists x)(\exists y)[\text{non } [(\exists z)(\forall t)(\exists u)(p(x,y,z,t,u))]] \Leftrightarrow \\
(\exists x)(\exists y)(\forall z)[\text{non } [(\forall t)(\exists u)(p(x,y,z,t,u))]] \Leftrightarrow \\
(\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists t)[\text{non } [(\exists u)(p(x,y,z,t,u))]] \Leftrightarrow \\
(\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists t)(\forall u)(\text{non } p(x,y,z,t,u))
\end{array}$$

Nu vom mai aplica acest procedeu pas cu pas. Reținem că procedeul constă în transformarea fiecărui cuantificator universal într–unul existențial și invers, și negarea proprietății de sub acești cuantificatori.

Cuantificatori aplicați fixând un domeniu al valorilor

Fie M o mulțime, x o variabilă, iar $p(x)$ o proprietate referitoare la elementele lui M. Atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru scrierile fără domeniu al valorilor lângă cuantificatori:

- $(\forall\, x \in M)\,(p(x)) \overset{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,(x \in M \Rightarrow p(x))$
- $(\exists\, x \in M)\,(p(x)) \overset{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\exists\, x)\,(x \in M \text{ și } p(x))$

Toate proprietățile logice pentru enunțuri cuantificate din acest curs se scriu la fel și sunt valabile și pentru cuantificatori urmați de un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată.

Cuantificatorii de același fel comută, cei diferiți nu

Fie x și y variabile, iar $p(x, y)$ o proprietate asupra lui x și y. Atunci:

- $(\forall\, x)\,(\forall\, y)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$
- $(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, y)\,(\exists\, x)\,(p(x, y))$
- $(\forall\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; (\exists\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$ (pentru fiecare valoare a lui x, valoarea lui y pentru care e satisfăcut enunțul din stânga depinde de valoarea lui x)

Exemplu

Enunțul $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(\exists\, y \in \mathbb{Z})\,(x + y = 0)$ este adevărat.
Enunțul $(\exists\, y \in \mathbb{Z})\,(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(x + y = 0)$ este fals.

Cuantificatori, disjuncții și conjuncții logice

Să observăm și următoarele proprietăți logice: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ și $q(x)$ sunt enunțuri referitoare la x, atunci:

- $(\forall x)\,(p(x) \text{ și } q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\forall x)\,(p(x)) \text{ și } (\forall x)\,(q(x))$
- $(\exists x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\exists x)\,(p(x)) \text{ sau } (\exists x)\,(q(x))$
- $(\forall x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; (\forall x)\,(p(x)) \text{ sau } (\forall x)\,(q(x))$
- $(\exists x)\,(p(x) \text{ și } q(x)) \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; (\exists x)\,(p(x)) \text{ și } (\exists x)\,(q(x))$

Exemplu

Enunțul $(\forall x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x \text{ sau } 2 \nmid x)$ este adevărat.
Enunțul $(\forall x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x)$ este fals. Enunțul $(\forall x \in \mathbb{N})\,(2 \nmid x)$ este tot fals. Prin urmare, enunțul $[(\forall x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x) \text{ sau } (\forall x \in \mathbb{N})\,(2 \nmid x)]$ este fals.

Exemplu

Enunțul $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x < 0 \text{ și } x \geq 10)$ este fals.
Enunțul $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x < 0)$ este adevărat. Enunțul $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x \geq 10)$ este tot adevărat. Prin urmare, enunțul $[(\exists x \in \mathbb{R})\,(x < 0) \text{ și } (\exists x \in \mathbb{R})\,(x \geq 10)]$ este adevărat.

Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Scrieri echivalente ale enunțurilor din exemplele anterioare, fără domeniu al valorilor după cuantificatori:

$$\begin{array}{l}
(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x \text{ sau } 2 \nmid x) \;\Leftrightarrow \\
(\forall\, x)\,[x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (2 \mid x \text{ sau } 2 \nmid x)] \;\Leftrightarrow \\
(\forall\, x)\,[x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (2 \mid x \text{ sau } 2 \nmid x)] \;\Leftrightarrow \\
(\forall\, x)\,[(x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 2 \mid x) \text{ sau } (x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 2 \nmid x)]; \\
[(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x) \text{ sau } (\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \nmid x)] \;\Leftrightarrow \\
[(\forall\, x)\,(x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \mid x) \text{ sau } (\forall\, x)\,(x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \nmid x)]; \\
(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0 \text{ și } x \geq 10) \;\Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,(x \in \mathbb{R} \text{ și } x < 0 \text{ și } x \geq 10) \;\Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,[(x \in \mathbb{R} \text{ și } x < 0) \text{ și } (x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq 10)]; \\
[(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0) \text{ și } (\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x \geq 10)] \;\Leftrightarrow \\
[(\exists\, x)\,(x \in \mathbb{R} \text{ și } x < 0) \text{ și } (\exists\, x)\,(x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq 10)].
\end{array}$$

Acum fie p, q și r enunțuri. Atunci, din proprietățile:
$[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)]$,
$[p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)]$,
non $(p \text{ sau } q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)]$, non $(p \text{ și } q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$ și $(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ sau } q]$, se pot deduce următoarele proprietăți:

Temă

1. $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
2. $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
3. $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
4. $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
5. $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \;\Leftrightarrow\; [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$
6. $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
7. $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \;\Leftrightarrow\; [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
8. $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$

Exercițiu (temă)

Dați contraexemple pentru implicațiile directe din proprietățile (2), (4), (6) și (8) de mai sus, i. e., așa cum am procedat în exemplele anterioare, înlocuiți p, q și r cu enunțuri concrete (sau enunțuri arbitrare având valorile de adevăr necesare), astfel încât acele implicații să nu fie satisfăcute pentru respectivele valori (semnificații, instanțieri), sau respectivele valori de adevăr ale lui p, q, r.

Operații cu mulțimi și relații între mulțimi

Notație

- Păstrăm notația consacrată $\in$ pentru **simbolul de apartenență**, ce indică faptul că un obiect este element al altui obiect (mulțime, clasă).
- Păstrăm notația clasică, folosind acolade, pentru specificarea elementelor unei mulțimi (fie prin enumerare, fie printr–o proprietate a lor).

- Amintim că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulțimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.

Notație

Păstrăm notațiile cunoscute $\cup$, $\cap$, $\setminus$ și Δ pentru **reuniunea**, **intersecția**, **diferența** și, respectiv, **diferența simetrică** între mulțimi.
Amintim că, pentru orice mulțimi A și B, se definesc:

- $A \cup B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;
- $A \cap B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;
- $A \setminus B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$;
- $A \Delta B \stackrel{\text{def.}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Operații cu mulțimi și relații între mulțimi

- A se revedea proprietățile operațiilor cu mulțimi demonstrate la seminar, precum și cele lăsate ca temă pentru acasă în cursul orelor de seminar!
- Vom face mereu apel și la cunoștințe din gimnaziu și liceu, dintre care pe unele le vom aminti, de regulă doar enunțându–le.

Notație

Păstrăm notațiile $\subseteq$, $\subsetneq$, $\supseteq$ și $\supsetneq$ pentru **incluziunile** și **incluziunile stricte** dintre mulțimi **în fiecare sens**. Vom mai nota incluziunile stricte și cu $\subset$ și respectiv $\supset$, dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă și nu poate avea loc egalitatea de mulțimi nu ne folosește în cele prezentate.
Amintim că, pentru orice mulțimi A și B:

- $A = B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (prin definiție, două mulțimi sunt egale ddacă au aceleași elemente);
- $A \subseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,[x \in A \Rightarrow x \in B]$;
- $A \supseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A$;
- $A \subsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} [A \subseteq B$ și $A \neq B]$;
- $A \supsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subsetneq A$.

Mulțimea părților unei mulțimi, apoi conectorul xor

Notație

Vom nota cu $\emptyset$ **mulțimea vidă**, adică mulțimea fără elemente, i.e. unica (conform definiției egalității de mulțimi) mulțime care satisface: $(\nexists\, x)\,(x \in \emptyset)$, sau, echivalent: $(\forall\, x)\,(x \notin \emptyset)$.

Definiție

Dacă A și B sunt mulțimi, atunci A se numește:

- *submulțime a lui* B (sau *parte a lui* B) ddacă $A \subseteq B$;
- *submulțime proprie* (sau *strictă*) *a lui* B ddacă $A \subsetneq B$.

Notație

Pentru orice mulțime T, vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ **mulțimea părților lui** T, i. e. **mulțimea submulțimilor lui** T: $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Să notăm cu **xor** conectorul logic *sau exclusiv*, definit astfel: pentru orice enunțuri p și q, enunțul (p xor q) este adevărat exact atunci când **exact unul** dintre enunțurile p și q este adevărat, adică exact atunci când [(p e adevărat și q e fals) sau (q e adevărat și p e fals)]. Formal:

- (p xor q) $\Leftrightarrow$ [(p și non q) sau (q și non p)]

Remarcă

Definiția diferenței simetrice arată că, pentru orice mulțimi A și B:

- $A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ xor } x \in B\}$.

Remarcă

Fie A și B mulțimi arbitrare, fixate. Atunci au loc echivalențele:
$A = B$ ddacă $(\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ ddacă
$(\forall x)\,[(x \in A \Rightarrow x \in B)$ și $(x \in B \Rightarrow x \in A)]$ ddacă
$[(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$ și $(\forall x)\,(x \in B \Rightarrow x \in A)]$ ddacă $[A \subseteq B$ și $B \subseteq A]$.
Faptul că **egalitatea de mulțimi este echivalentă cu dubla incluziune** s–a demonstrat folosind faptul că echivalența logică este echivalentă cu dubla implicație și faptul că un cuantificator universal se distribuie la termenii unei conjuncții logice.

Similar remarcii anterioare, în cele ce urmează, vom enumera o serie de proprietăți ale operațiilor și relațiilor între mulțimi, alături de proprietățile logice (cu enunțuri) în care acestea se transcriu; nu vom mai transcrie în proprietăți logice afirmațiile care se obțin în mod trivial din cele anterioare, de exemplu prin înlocuirea unui enunț arbitrar cu negația lui. Demonstrarea acestor proprietăți cu mulțimi constituie **temă pentru seminar.**

Proprietăți ale operațiilor și relațiilor între mulțimi

Considerăm mulțimile arbitrare A, B, C, D și enunțurile arbitrare p, q, r, s. Să se demonstreze că au loc următoarele proprietăți:

- **idempotența reuniunii:** $A \cup A = A$ ((p sau p) $\Leftrightarrow$ p)
- **idempotența intersecției:** $A \cap A = A$ ((p și p) $\Leftrightarrow$ p)
- $A \setminus A = \emptyset$ ((p și non p) este **fals**)
- $A \Delta A = \emptyset$ ((p xor p) este **fals**)
- **comutativitatea reuniunii:** $A \cup B = B \cup A$ ((p sau q) $\Leftrightarrow$ (q sau p))
- **comutativitatea intersecției:** $A \cap B = B \cap A$ ((p și q) $\Leftrightarrow$ (q și p))
- **comutativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta B = B \Delta A$ ((p xor q) $\Leftrightarrow$ (q xor p))
- **asociativitatea reuniunii:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ([p sau (q sau r)] $\Leftrightarrow$ [(p sau q) sau r])
- **asociativitatea intersecției:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ([p și (q și r)] $\Leftrightarrow$ [(p și q) și r])
- **asociativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ (se demonstrează foarte ușor cu **funcții caracteristice** – vom vedea) ([p xor (q xor r)] $\Leftrightarrow$ [(p xor q) xor r])

Pentru operații comutative, precum reuniunea și intersecția de mulțimi, distributivitatea la stânga față de alte operații este echivalentă cu distributivitatea la dreapta

- **distributivitatea la stânga a reuniunii față de intersecție:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ($[p$ sau $(q$ și $r)] \Leftrightarrow [(p$ sau $q)$ și $(p$ sau $r)]$)
- **distributivitatea la dreapta a reuniunii față de intersecție:** $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$ ($[(q$ și $r)$ sau $p] \Leftrightarrow [(q$ sau $p)$ și $(r$ sau $p)]$)
- **distributivitatea la stânga a intersecției față de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ($[p$ și $(q$ sau $r)] \Leftrightarrow [(p$ și $q)$ sau $(p$ și $r)]$)
- **distributivitatea la dreapta a intersecției față de reuniune:** $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ ($[(q$ și $r)$ sau $p] \Leftrightarrow [(q$ sau $p)$ și $(r$ sau $p)]$)

Proprietăți ale relațiilor între mulțimi

- $A \subsetneq B$ ddacă $[(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ și $(\exists x)(x \in B \setminus A)]$ ddacă $[A \subseteq B$ și $B \setminus A \neq \emptyset]$ $([(p \Rightarrow q)$ și $(p \nLeftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q)$ și $(q \nRightarrow p)])$
- $A \subseteq B$ ddacă $(A \subsetneq B$ sau $A = B)$ $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [[(p \Rightarrow q)$ și $(q \nRightarrow p)]$ sau $(p \Leftrightarrow q)])$
- $A \subseteq A$ $(p \Rightarrow p)$
- non$(A \subsetneq A)$ (non$[(p \Rightarrow p)$ și $(p \nRightarrow p)])$
- **tranzitivitatea incluziunii nestricte**: $(A \subseteq B$ și $B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ $((p \Rightarrow q)$ și $q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r))$
- **tranzitivitatea incluziunii stricte**: $(A \subsetneq B$ și $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$ $([[(p \Rightarrow q)$ și $(q \nRightarrow p)]$ și $[(q \Rightarrow r)$ și $(r \nRightarrow q)]] \Rightarrow [(p \Rightarrow r)$ și $(r \nRightarrow p)])$
- $(A \subsetneq B$ și $B \subseteq C) \Rightarrow A \subsetneq C$ $([[(p \Rightarrow q)$ și $(q \nRightarrow p)]$ și $(q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow r)$ și $(r \nRightarrow p)])$
- $(A \subseteq B$ și $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$ $([(p \Rightarrow q)$ și $[(q \Rightarrow r)$ și $(r \nRightarrow q)]] \Rightarrow [(p \Rightarrow r)$ și $(r \nRightarrow p)])$

Proprietăți cu operații și relații între mulțimi

- $A \subseteq A \cup B$ ($p \Rightarrow$(p sau q)); $B \subseteq A \cup B$ ($q \Rightarrow$(p sau q))
- $A \cap B \subseteq A$ ((p și q)$\Rightarrow p$); $A \cap B \subseteq B$ ((p și q)$\Rightarrow q$)
- $A \cup B = B$ ddacă $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$ ([(p sau q)$\Leftrightarrow q$] $\Leftrightarrow$ ($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow$[(p și q)$\Leftrightarrow p$])
- $\emptyset \subseteq A$ ((**fals** $\Rightarrow p$) este **adevărat**)
- $A \cup \emptyset = A$ ((p sau **fals**)$\Leftrightarrow p$)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ ((p și **fals**) este **fals**)
- $A \setminus B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq B$ ([non (p și non q)] $\Leftrightarrow$ ($p \Rightarrow q$))
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$ ((**fals** și non p) este fals)
- $A \subseteq \emptyset$ ddacă $A = \emptyset$ (adică $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$) ((($p \Rightarrow$**fals**) este **adevărat**) ddacă (p este **fals**); altfel scris: ($p \Rightarrow$ **fals**)$\Leftrightarrow$ (non p))
- $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $A = B$ (((p xor q) este **fals**) ddacă ($p \Leftrightarrow q$); altfel scris: [non (p xor q)] $\Leftrightarrow$ ($p \Leftrightarrow q$))

Proprietăți cu operații și relații între mulțimi

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \text{ sau } r) \Rightarrow (q \text{ sau } r)))$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \text{ și } r) \Rightarrow (q \text{ și } r)))$
- $(A \subseteq B$ și $C \subseteq D) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$ $((p \Rightarrow q \text{ și } r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p \text{ sau } q) \Rightarrow (r \text{ sau } s)))$
- $(A \subseteq B$ și $C \subseteq D) \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$ $((p \Rightarrow q \text{ și } r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p \text{ și } q) \Rightarrow (r \text{ și } s)))$
- $(A \subseteq C$ și $B \subseteq C)$ ddacă $A \cup B \subseteq C$ $((p \Rightarrow r \text{ și } q \Rightarrow r)$ ddacă $(p \text{ sau } q) \Rightarrow r)$
- $(A \subseteq B$ și $A \subseteq C)$ ddacă $A \subseteq B \cap C$ $((p \Rightarrow q \text{ și } p \Rightarrow r)$ ddacă $(p \Rightarrow (q \text{ și } r))$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C \subseteq B \setminus C)$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \text{ și non } r) \Rightarrow (q \text{ și non } r)])$
- $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \text{ și non } q) \Rightarrow (r \text{ și non } p)])$
- $(A \subseteq B$ și $C \subseteq D) \Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$ $((p \Rightarrow q \text{ și } r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p \text{ și non } s) \Rightarrow (q \text{ și non } r)))$

Proprietăți cu trecerea la complementară

Considerăm o mulțime T, iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ (*complementara lui X față de T*). Fie p, q și r enunțuri. Să se demonstreze că au loc următoarele proprietăți:

- $A \setminus B \subseteq A$ ((p și non q)$\Rightarrow$ p)
- $\overline{A} \subseteq T$ (((non p)$\Rightarrow$**adevărat**) este **adevărat**)
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ ((p și q și non p) este **falsă**)
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ ((p și non p) este **falsă**)
- $A \cup \overline{A} = T$ ((p sau non p) este **adevărată**)
- **operația de trecere la complementară este idempotentă:** $\overline{\overline{A}} = A$ ((non non p) $\Leftrightarrow$ p)
- **legile lui de Morgan:** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (non (p sau q) $\Leftrightarrow$ (non p și non q)) și $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ([non (p și q)] $\Leftrightarrow$ [(non p) sau (non q)])
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$ (($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow$ [(non q) $\Rightarrow$ (non p)]) (faptul că trecerea la complementară inversează sensul incluziunii se traduce în principiul reducerii la absurd)
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$ (($p \Leftrightarrow q$) $\Leftrightarrow$ [(non p) $\Leftrightarrow$ (non q)])
- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$ ([($p \Rightarrow q$) și ($p \not\Leftrightarrow q$)] $\Leftrightarrow$ [((non q) $\Rightarrow$ (non p)) și ((non q) $\not\Leftrightarrow$ (non p))])

Proprietăți cu trecerea la complementară

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (trivial: (p și non q) $\Leftrightarrow$ (p și non q); dar, de fapt, proprietatea aceasta spune că: a alege dintre obiectele care satisfac p pe cele care nu satisfac q este totuna cu a alege dintre obiectele care nu satisfac q pe cele care satisfac p; aceasta s–ar putea scrie astfel: [p și (non q)] $\Leftrightarrow$ [(non q) și p])
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ ((p și non q) $\Leftrightarrow$ [p și non(p și q)])
- $A \setminus B = A$ ddacă $A \cap B = \emptyset$ ddacă $B \setminus A = B$ ([(p și (non q))$\Leftrightarrow$ p] ddacă [(p și q) este **falsă**] ddacă [(q și (non p))$\Leftrightarrow$ q]
- $A \setminus \emptyset = A$ ((p și (non **fals**))$\Leftrightarrow$ p)
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$ ([(p și q) este **falsă**] ddacă [p $\Rightarrow$(non q)] ddacă [q $\Rightarrow$(non p)]])
- $A \cup B = T$ ddacă $A \supseteq \overline{B}$ ddacă $B \supseteq \overline{A}$ ([(p sau q) este **adevărată**] ddacă [(non q)$\Rightarrow$ p] ddacă [(non p)$\Rightarrow$ q]])
- ($A \cup B = T$ și $A \cap B = \emptyset$) ddacă $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$ ([[(p sau q) este **adevărată**] și [(p și q) este **falsă**]] ddacă ($p \Leftrightarrow$ non q) ddacă ($q \Leftrightarrow$ non p))