Breviar pentru Cursurile I şi II de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

Cuprinsul cursului de Logică Matematică şi Computaţională

Capitolul 1: Preliminarii algebrice:

- Mulţimi, funcţii şi relaţii. Relaţii binare. Relaţii de echivalenţă
- Relaţii de ordine. Mulţimi (parţial) ordonate
- Latici
- Algebre Boole. Morfisme de algebre Boole. Filtre şi congruenţe în algebre Boole. Ultrafiltre. Teorema de reprezentare a lui Stone *(algebra Boole cu exact două elemente determină structura tuturor algebrelor Boole)*. Structura algebrelor Boole finite

Capitolul 2: Logica propoziţională clasică:

- Sintaxa *(o primă prezentare pentru logica propoziţională clasică: sistemul Hilbert)*
- Algebra Lindenbaum–Tarski *(o algebră Boole asociată logicii propoziţionale clasice)*
- Semantica *(calcul cu valori de adevăr, în algebra Boole cu exact două elemente:* $0 =$ *fals,* $1 =$ *adevărat)*
- Teorema de completitudine *(deducţia sintactică, coincide cu deducţia semantică)*
- Rezoluţia propoziţională *(echivalentă cu sistemul Hilbert)*
- Deducţia naturală *(echivalentă cu sistemul Hilbert)*

Capitolul 3: Logica clasică a predicatelor *(predicat = propoziţie cu variabile)*:

- Structuri de ordinul I *(structuri algebrice în care iau valori variabilele din predicate)*
- Sintaxa
- Semantica
- Teorema de completitudine *(deducţia sintactică, coincide cu deducţia semantică)*
- Rezoluţia în logica clasică a predicatelor

A se vedea **bibliografia** acestui curs, în Cursul I.
Prescurtări uzuale:

- **i. e.** = id est = adică
- **ddacă** = dacă şi numai dacă
- **a. î.** = astfel încât
- **ş. a. m. d.** = şi aşa mai departe
- “:=“: abreviere pentru: $\stackrel{\text{definiţie}}{=}$, $\stackrel{\text{notaţie}}{=}$
- $\underline{\ \ /\!/\ \ }$: notaţie pentru: ”să se demonstreze că”

1 Teoria mulţimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

- O definiţie din **teoria naivă a mulţimilor**: o *mulţime* este o colecţie de obiecte **bine determinate** şi **distincte**, numite *elementele mulţimii.*
- **distincte**: o mulţime nu conţine un acelaşi obiect de mai multe ori; un element apare într-o mulţime o singură dată
- **bine determinate**: orice mulţime are o descriere precisă, care o identifică în mod unic, adică îi identifică în mod unic elementele

A se vedea în Cursul I Paradoxul lui Bertrand Russell, care arată că **nu există mulţimea tuturor mulţimilor**.

Totalitatea mulţimilor nu formează o mulţime, ci o **clasă**.

Din punctul de vedere al teoriei naive a mulţimilor, nu se pot spune multe lucruri despre noţiunea de *clasă*, decât că este "ceva mai vag/mai mare/mai cuprinzător decât o mulţime". Se consideră că orice mulţime este o clasă, dar nu şi invers. Clasele care nu sunt mulţimi se numesc *clase proprii.*

Semnul (simbolul) de apartenenţă **nu** poate apărea la dreapta unei clase proprii, adică nu se consideră a avea sens faptul că o clasă proprie aparţine unui alt obiect.

Aşadar **nu există clasa tuturor claselor**, din simplul motiv că nu există un obiect care să aibă clase proprii ca elemente.

- O *axiomă* este un fapt **dat** ca fiind adevărat într-o teorie matematică.
- O **axiomă** nu se demonstrează, ci pur şi simplu este **dată** ca fiind adevărată.
- Faptul de a fi axiomă **nu este o proprietate intrinsecă** a unei afirmaţii.
- *formalizare*: exprimare folosind **numai** simboluri matematice
- *metalimbaj*: "limbajul natural", "vorbirea curentă (obişnuită)", "exprimarea în cuvinte", "fără simboluri matematice"

2 Echivalenţe logice între diferite tipuri de enunţuri

Lucrăm numai cu enunţuri care sunt **fie false, fie adevărate**.

Conectorii logici: folosiţi pentru a lega enunţuri, formând astfel *enunţuri compuse:*

- *disjuncţia:* sau
- *conjuncţia:* şi
- *negaţia:* non
- *implicaţia:* $\Rightarrow$
- *echivalenţa:* $\Leftrightarrow$

Pentru orice enunţuri (propoziţii, afirmaţii, proprietăţi) p, q şi r, au loc echivalenţele următoare:

- $[p \text{ sau } (q \text{ şi } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \text{ sau } q) \text{ şi } (p \text{ sau } r)]$
- $[p \text{ şi } (q \text{ sau } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \text{ şi } q) \text{ sau } (p \text{ şi } r)]$
- $\text{non } (p \text{ sau } q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ şi } (\text{non } q)]$
- $\text{non } (p \text{ şi } q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$
- $(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ sau } q]$
- $(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)]$ (**principiul reducerii la absurd**)
- $(p \Leftrightarrow q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \Leftrightarrow (\text{non } q)]$ (consecinţă imediată a principiului reducerii la absurd şi a faptului că $(p \Leftrightarrow q) \stackrel{\text{def.}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ şi } (q \Rightarrow p)]$)

- implicaţia $[p \Rightarrow q]$ este echivalentă cu $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$

Cuantificatorii:

- *cuantificatorul universal:* $\forall$
- *cuantificatorul existenţial:* $\exists$

Dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate referitoare la x (mai precis o proprietate referitoare la elementele pe care le parcurge/le poate denumi x), atunci:

- $\text{non } [(\forall\, x)\,(p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(\text{non } p(x))$
- $\text{non } [(\exists\, x)\,(p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(\text{non } p(x))$

Notaţia 2.1. Alăturarea de simboluri $\exists!$ semnifică "există un unic", "există şi este unic".

Observaţia 2.1. $\exists!$ nu este un cuantificator, ci este o notaţie prescurtată pentru enunţuri compuse: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate asupra lui x, atunci scrierea $(\exists\,!\,x)\,(p(x))$ este o abreviere pentru enunţul scris, desfăşurat, astfel:

$$(\exists\, x)\,(p(x)) \text{ şi } (\forall\, y)\,(\forall\, z)\,[(p(y) \text{ şi } p(z)) \Rightarrow y = z],$$

unde y şi z sunt variabile.

Cuantificatori aplicaţi fixând un domeniu al valorilor:

Fie M o mulţime, x o variabilă, iar $p(x)$ o proprietate referitoare la elementele lui M. Atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru scrierile fără domeniu al valorilor lângă cuantificatori:

- $(\forall\, x \in M)\,(p(x)) \overset{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,(x \in M \Rightarrow p(x))$
- $(\exists\, x \in M)\,(p(x)) \overset{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\exists\, x)\,(x \in M \text{ şi } p(x))$

Toate proprietăţile logice pentru enunţuri cuantificate din acest curs se scriu la fel şi sunt valabile şi pentru cuantificatori urmaţi de un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată.

Cuantificatorii de acelaşi fel comută, cei diferiţi nu:

Fie x şi y variabile, iar $p(x, y)$ o proprietate asupra lui x şi y. Atunci:

- $(\forall\, x)\,(\forall\, y)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$
- $(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, y)\,(\exists\, x)\,(p(x, y))$
- $(\forall\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \overset{\nRightarrow}{\Leftarrow} (\exists\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$ (pentru fiecare valoare a lui x, valoarea lui y pentru care e satisfăcut enunţul din stânga depinde de valoarea lui x)

Analog, dacă A şi B sunt mulţimi, avem:

- $(\forall\, x \in A)\,(\forall\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x, y))$
- $(\exists\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, y \in B)\,(\exists\, x \in A)\,(p(x, y))$
- $(\forall\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x, y)) \overset{\nRightarrow}{\Leftarrow} (\exists\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x, y))$

Desigur, la fel pentru cazul în care doar unul dintre cuantificatori este aplicat cu un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată: $(\forall\, x)\,(\forall\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y \in B)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$ etc..

Cuantificatori, disjuncţii şi conjuncţii logice:

Să observăm şi următoarele proprietăţi logice: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ şi $q(x)$ sunt enunţuri referitoare la x, atunci:

- $(\forall\, x)\,(p(x) \text{ şi } q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(p(x)) \text{ şi } (\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(p(x)) \text{ sau } (\exists\, x)\,(q(x))$
- $(\forall\, x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \overset{\nRightarrow}{\Leftarrow} (\forall\, x)\,(p(x)) \text{ sau } (\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x) \text{ şi } q(x)) \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} (\exists\, x)\,(p(x)) \text{ şi } (\exists\, x)\,(q(x))$

Scoaterea de sub un cuantificator a unui enunţ care nu depinde de variabila cuantificată:

Dacă, în enunţurile compuse cuantificate de mai sus, în locul lui $q(x)$ avem un enunţ q care nu depinde de x, atunci:

$$(\forall\, x)\, q \;\Leftrightarrow\; q \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\, q,$$

aşadar, în acest caz, din proprietăţile anterioare obţinem:

- $(\forall\, x)\,(p(x)$ şi $q) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(p(x))$ şi q
- $(\exists\, x)\,(p(x)$ sau $q) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(p(x))$ sau q
- $(\forall\, x)\,(p(x)$ sau $q) \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; (\forall\, x)\,(p(x))$ sau q
- $(\exists\, x)\,(p(x)$ şi $q) \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; (\exists\, x)\,(p(x))$ şi q

Acum fie p, q şi r enunţuri. Atunci, din proprietăţile: $[p$ sau $(q$ şi $r)] \Leftrightarrow [(p$ sau $q)$ şi $(p$ sau $r)]$, $[p$ şi $(q$ sau $r)] \Leftrightarrow [(p$ şi $q)$ sau $(p$ şi $r)]$, non $(p$ sau $q) \Leftrightarrow [($non $p)$ şi $($non $q)]$, non $(p$ şi $q) \Leftrightarrow [($non $p)$ sau $($non $q)]$ şi $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [($non $p)$ sau $q]$, se pot deduce următoarele proprietăţi:

- $[p \Rightarrow (q$ şi $r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \Rightarrow q)$ şi $(p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q$ şi $r)] \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; [(p \Rightarrow q)$ sau $(p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q$ sau $r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \Rightarrow q)$ sau $(p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q$ sau $r)] \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; [(p \Rightarrow q)$ şi $(p \Rightarrow r)]$
- $[(q$ sau $r) \Rightarrow p] \;\Leftrightarrow\; [(q \Rightarrow p)$ şi $(r \Rightarrow p)]$
- $[(q$ sau $r) \Rightarrow p] \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; [(q \Rightarrow p)$ sau $(r \Rightarrow p)]$
- $[(q$ şi $r) \Rightarrow p] \;\Leftrightarrow\; [(q \Rightarrow p)$ sau $(r \Rightarrow p)]$
- $[(q$ şi $r) \Rightarrow p] \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; [(q \Rightarrow p)$ şi $(r \Rightarrow p)]$

3 Operaţii cu mulţimi şi relaţii între mulţimi

Notaţia 3.1.
- Păstrăm notaţia consacrată $\in$ pentru **simbolul de apartenenţă**, ce indică faptul că un obiect este element al altui obiect (mulţime, clasă).
- Păstrăm notaţia clasică, folosind acolade, pentru specificarea elementelor unei mulţimi (fie prin enumerare, fie printr–o proprietate a lor).

Amintim că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulţimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.

Notaţia 3.2. Păstrăm notaţiile cunoscute $\cup$, $\cap$, $\setminus$ şi Δ pentru **reuniunea**, **intersecţia**, **diferenţa** şi, respectiv, **diferenţa simetrică** între mulţimi.

Amintim că, pentru orice mulţimi A şi B, se definesc:

- $A \cup B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$;
- $A \cap B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A$ şi $x \in B\}$;
- $A \setminus B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$;
- $A \,\Delta\, B \stackrel{\text{def.}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

A se revedea proprietăţile operaţiilor cu mulţimi demonstrate la seminar, precum şi cele lăsate ca temă pentru acasă în cursul orelor de seminar!

Vom face mereu apel şi la cunoştinţe din gimnaziu şi liceu, dintre care pe unele le vom aminti, de regulă doar enunţându–le.

Notaţia 3.3. Păstrăm notaţiile $\subseteq$, $\subsetneq$, $\supseteq$ şi $\supsetneq$ pentru **incluziunile** şi **incluziunile stricte** dintre mulţimi **în fiecare sens**. Vom mai nota incluziunile stricte şi cu $\subset$ şi respectiv $\supset$, dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă şi nu poate avea loc egalitatea de mulţimi nu ne foloseşte în cele prezentate.

Amintim că, pentru orice mulţimi A şi B:

- $A = B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\,[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (prin definiţie, două mulţimi sunt egale ddacă au aceleaşi elemente);
- $A \subseteq B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\,[x \in A \Rightarrow x \in B]$;
- $A \supseteq B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A$;
- $A \subsetneq B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} [A \subseteq B$ şi $A \neq B]$;
- $A \supsetneq B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subsetneq A$.

Notaţia 3.4. Vom nota cu $\emptyset$ **mulţimea vidă**, adică mulţimea fără elemente, i.e. unica (conform definiţiei egalităţii de mulţimi) mulţime care satisface: $(\nexists\, x)\,(x \in \emptyset)$, sau, echivalent: $(\forall\, x)\,(x \notin \emptyset)$.

Definiţia 3.1. Dacă A şi B sunt mulţimi, atunci A se numeşte:

- *submulţime a lui* B (sau *parte a lui* B) ddacă $A \subseteq B$;
- *submulţime proprie* (sau *strictă*) *a lui* B ddacă $A \subsetneq B$.

Notaţia 3.5. Pentru orice mulţime T, vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ **mulţimea părţilor lui** T, i. e. **mulţimea submulţimilor lui** T: $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Să notăm cu **xor** conectorul logic *sau exclusiv*, definit astfel: pentru orice enunţuri p şi q, enunţul (p xor q) este adevărat exact atunci când **exact unul** dintre enunţurile p şi q este adevărat, adică exact atunci când [(p e adevărat şi q e fals) sau (q e adevărat şi p e fals)]. Formal:

- (p xor q) $\Leftrightarrow$ [(p şi non q) sau (q şi non p)]

Remarca 3.1. Definiţia diferenţei simetrice arată că, pentru orice mulţimi A şi B:

- $A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ xor } x \in B\}$.

A se vedea, în Cursul I, proprietăţile logice (cu enunţuri) în care se transcriu următoarele proprietăţi pentru calculul cu mulţimi.

Şi a se observa faptul că, pentru operaţii comutative, precum reuniunea şi intersecţia de mulţimi, distributivitatea la stânga faţă de alte operaţii este echivalentă cu distributivitatea la dreapta.

Pentru orice mulţimi A, B, C, D, au loc:

- $A = B$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \subseteq A]$
- **idempotenţa reuniunii:** $A \cup A = A$
- **idempotenţa intersecţiei:** $A \cap A = A$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \Delta A = \emptyset$
- **comutativitatea reuniunii:** $A \cup B = B \cup A$
- **comutativitatea intersecţiei:** $A \cap B = B \cap A$
- **comutativitatea diferenţei simetrice:** $A \Delta B = B \Delta A$
- **asociativitatea reuniunii:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **asociativitatea intersecţiei:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **asociativitatea diferenţei simetrice:** $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

- **distributivitatea la stânga a reuniunii faţă de intersecţie:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **distributivitatea la dreapta a reuniunii faţă de intersecţie:** $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$
- **distributivitatea la stânga a intersecţiei faţă de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **distributivitatea la dreapta a intersecţiei faţă de reuniune:** $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$
- $A \subsetneq B$ ddacă $[(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$ şi $(\exists x)\,(x \in B \setminus A)]$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \setminus A \neq \emptyset]$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \nsubseteq A]$
- $A \subseteq B$ ddacă $(A \subsetneq B$ sau $A = B)$
- $A \subseteq A$
- non$(A \subsetneq A)$
- **tranzitivitatea incluziunii nestricte**: $(A \subseteq B$ şi $B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$
- $(A \subsetneq B$ şi $B \subseteq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $(A \subseteq B$ şi $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- **tranzitivitatea incluziunii stricte**: $(A \subsetneq B$ şi $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$
- $A \cup B = B$ ddacă $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$
- $\emptyset \subseteq A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$
- $A \setminus B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq B$
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, adică: $A \subseteq \emptyset$ ddacă $A = \emptyset$
- $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $A = B$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \setminus B = A$ ddacă $B \setminus A = B$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D) \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$
- $(A \subseteq C$ şi $B \subseteq C)$ ddacă $A \cup B \subseteq C$
- $(A \subseteq B$ şi $A \subseteq C)$ ddacă $A \subseteq B \cap C$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C \subseteq B \setminus C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D) \Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$

- $A \setminus B \subseteq A$
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Considerăm o mulţime T, iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ (*complementara lui X faţă de T*). Au loc:

- $\overline{A} \in \mathcal{P}(T)$, adică $\overline{A} \subseteq T$
- $\overline{\emptyset} = T$
- $\overline{T} = \emptyset$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- **operaţia de trecere la complementară este autoduală:** $\overline{\overline{A}} = A$
- **legile lui De Morgan:** $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (uşor de demonstrat folosind proprietăţile de mai sus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; mai mult:
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$
- $A \cup \overline{A} = T$; mai mult:
- $A \cup B = T$ ddacă $A \supseteq \overline{B}$ ddacă $B \supseteq \overline{A}$
- A **şi** B **sunt părţi complementare ale lui** T **ddacă fiecare este complementara celeilalte faţă de** T**:** $\begin{cases} A \cup B = T \\ \text{şi} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$ ddacă $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$

4 Alte operaţii cu mulţimi

Produsul direct a două mulţimi:

Notaţia 4.1 (a se vedea definiţia axiomatică a unei perechi ordonate în CURSUL I). Pentru orice elemente a şi b, notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a şi b.

Definiţia 4.1 (egalitatea de perechi semnifică egalitatea pe componente). Pentru orice elemente a_1, a_2, x_1, x_2:

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = x_1 \\ \text{şi} \\ a_2 = x_2 \end{cases}$$

Definiţia 4.2. Pentru orice mulţimi A şi B, se defineşte *produsul cartezian* dintre A şi B (numit şi *produsul direct* dintre A şi B) ca fiind mulţimea de perechi ordonate $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$$

Remarca 4.1 (produsul cartezian cu $\emptyset$ este $\emptyset$; produsul cartezian este distributiv faţă de reuniunea, intersecţia, diferenţa şi diferenţa simetrică între mulţimi (şi la stânga, şi la dreapta). Pentru orice mulţimi A, B şi C, au loc egalităţile:

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ şi $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ şi $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ şi $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
- $A \times (B \,\Delta\, C) = (A \times B) \,\Delta\, (A \times C)$ şi $(B \,\Delta\, C) \times A = (B \times A) \,\Delta\, (C \times A)$

Reuniunea disjunctă a două mulţimi:

Definiţia 4.3. Fie A şi B două mulţimi. Se defineşte *reuniunea disjunctă* a mulţimilor A şi B ca fiind mulţimea notată $A \coprod B$ şi definită prin:

$$A \coprod B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Observaţia 4.1. Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulţimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin ataşarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulţimi a unui indice corespunzător mulţimii respective (un element diferit de cel ataşat elementelor celeilalte mulţimi) (vom vorbi despre **indici** într–o discuţie despre **familii arbitrare de mulţimi**).

5 Mulţimi şi funcţii

Definiţia 5.1. Fie A şi B mulţimi oarecare. Se numeşte *funcţie* de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. î., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.

Formal: $(\forall\, a \in A)\,(\exists\,!\, b \in B)\,((a, b) \in G)$.

Faptul că f este o funcţie de la A la B se notează cu $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Mulţimea A se numeşte *domeniul* funcţiei f, B se numeşte *codomeniul* sau *domeniul valorilor* lui f, iar G se numeşte *graficul* lui f.

Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ şi se numeşte *valoarea funcţiei f în punctul a*.

Remarca 5.1 ($(a, b) \in G \;\Leftrightarrow\; f(a) = b$). Dacă $f = (A, G, B)$ este o funcţie ($f : A \to B$), atunci graficul G al lui f este mulţimea de perechi: $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

Definiţia 5.2. Fie $f = (A, F, B)$ şi $g = (C, G, D)$ două funcţii ($f : A \to B$, iar $g : C \to D$).

- Egalitatea $f = g$ semnifică egalitatea de triplete $(A, F, B) = (C, G, D)$, i. e. spunem că $f = g$ ddacă:

$A = C$	(are loc egalitatea domeniilor),
$B = D$	(are loc egalitatea codomeniilor) şi
$F = G$	(are loc egalitatea graficelor celor două funcţii, ceea ce, conform scrierii acestor grafice din remarca anterioară, se transcrie în egalitate punctuală, adică egalitate în fiecare punct: pentru orice $a \in A = C$, $f(a) = g(a)$).

- Dacă X este o mulţime a. î. $X \subseteq A$ şi $X \subseteq C$, atunci spunem că *f şi g coincid pe X* ddacă f şi g au aceleaşi valori în elementele lui X, adică: oricare ar fi $x \in X$, $f(x) = g(x) \in B \cap D$.

Notaţia 5.1 (putere de mulţimi). Pentru orice mulţimi A şi B, se notează cu B^A mulţimea funcţiilor de la A la B:

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

Remarca 5.2 (există o unică funcţie de la $\emptyset$ la o mulţime arbitrară). Fie B o mulţime oarecare (**poate fi vidă şi poate fi nevidă**). Atunci $B^{\emptyset} = \{(\emptyset, \emptyset, B)\}$.

Remarca 5.3 (nu există nicio funcţie de la o mulţime nevidă la $\emptyset$). Fie A o mulţime a. î. $A \neq \emptyset$). Atunci $\emptyset^A = \emptyset$.

Definiţia 5.3. Pentru orice mulţimi A şi B, orice funcţie $f : A \to B$ şi orice submulţimi $X \subseteq A$ şi $Y \subseteq B$, se definesc:

- *imaginea lui X prin f* sau *imaginea directă a lui X prin f*, notată $f(X)$, este submulţimea lui B:

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$

- $f(A)$ se mai notează cu $Im(f)$ şi se numeşte *imaginea lui f*:

$$Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

- *preimaginea lui Y prin f* sau *imaginea inversă a lui Y prin f*, notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărţi, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f, care există numai atunci când f este inversabilă, deci numai atunci când f este bijectivă – a se vedea în cele ce urmează –, pe când preimaginea unei submulţimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcţie), este submulţimea lui A:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Definiţia 5.4. Fie A şi B mulţimi şi $f : A \to B$ o funcţie. f se zice:

- *injectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- *surjectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există (cel puţin un) $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists\, a \in A)\,(f(a) = b))$
  - $f(A) = B$
- *bijectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  - f este simultan injectivă şi surjectivă
  - pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists\,!\, a \in A)\,(f(a) = b))$

Funcţiile injective, surjective, respectiv bijective se mai numesc *injecţii*, *surjecţii*, respectiv *bijecţii*.

Când notăm $f : A \to B$, subînţelegem că A şi B sunt mulţimi.

Remarca 5.4. Pentru orice funcţie $f : A \to B$:

- $f^{-1}(B) = A$;
- $f(\emptyset) = \emptyset$ şi $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$;
- dacă $V \subseteq W \subseteq B$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$;
- pentru orice $M \subseteq A$, $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$, cu egalitate pentru f injectivă;
- pentru orice $N \subseteq B$, $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$, cu egalitate pentru f surjectivă;
- în schimb, pentru orice $N \subseteq f(A) = Im(f)$, $f(f^{-1}(N)) = N$.

Definiţia 5.5 (funcţia identitate a unei mulţimi). Pentru orice mulţime A, notăm cu id_A *funcţia identică a lui A* (numită şi *funcţia identitate a lui A* sau *identitatea lui A*): $id_A : A \to A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.

Definiţia 5.6 (compunerea de funcţii). Dacă A, B, C sunt mulţimi, iar $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ sunt funcţii, atunci *compunerea funcţiei g cu funcţia f* este funcţia notată cu $g \circ f$ şi definită astfel: $g \circ f : A \to C$, pentru orice $a \in A$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$.

Definiţia 5.7 (inversa unei funcţii). Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$. f se zice *inversabilă* ddacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$.

Remarca 5.5 (dacă există, inversa unei funcţii este unică). Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$ o funcţie inversabilă. Atunci există o unică funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$.

Definiţia 5.8. Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$ o funcţie inversabilă. Atunci unica funcţie $g : B \to A$ cu proprietăţile $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$ se notează cu f^{-1} ($f^{-1} = g : B \to A$) şi se numeşte *inversa lui* f.

Remarca 5.6. Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$. Atunci: f este inversabilă ddacă este bijectivă.

Exerciţiul 5.1 (caracterizarea surjectivităţii prin existenţa unei inverse la dreapta, şi a injectivităţii prin existenţa unei inverse la stânga – temă). Fie A şi B mulţimi nevide, iar $f : A \to B$. Atunci:

(i) f este surjectivă ddacă $(\exists\, g : B \to A)\, (f \circ g = id_B)$; în plus, conform (iii) de mai jos, în caz afirmativ, g este injectivă;

(ii) f este bijectivă ddacă $(\exists!\, g : B \to A)\, (f \circ g = id_B)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la dreapta g a lui f este $g = f^{-1}$, care este simultan inversă la dreapta şi inversă la stânga pentru f;

(iii) f este injectivă ddacă $(\exists\, h : B \to A)\, (h \circ f = id_A)$; în plus, conform (i) de mai sus, în caz afirmativ, h este surjectivă;

(iv) f este bijectivă ddacă $(\exists!\, h : B \to A)\, (h \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la stânga h a lui f este $h = f^{-1}$, care este simultan inversă la stânga şi inversă la dreapta pentru f;

(v) după cum ştim, f este bijectivă ddacă este inversabilă, i. e. f este bijectivă ddacă $(\exists\, j : B \to A)\, (f \circ j = id_B$ şi $j \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, j este unică, se notează cu f^{-1} şi se numeşte *inversa lui* f; dar, conform (i) şi (iii), avem şi următoarea caracterizare a bijectivităţii: f este bijectivă ddacă $(\exists\, g, h : B \to A)\, (f \circ g = id_B$ şi $h \circ f = id_A)$; în plus, conform (ii) şi (iv), în caz afirmativ, g şi h sunt unice şi $g = h = f^{-1}$.

Exerciţiul 5.2 (funcţiile imagine directă şi imagine inversă – temă). Fie A şi B mulţimi nevide, iar $f : A \to B$. Considerăm funcţiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), & (\forall\, M \subseteq A)\, (f_*(M) := f(M)); \\ f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), & (\forall\, N \subseteq B)\, (f^*(M) := f^{-1}(M)). \end{cases}$$

Atunci au loc următoarele echivalenţe:

(i) f este injectivă ddacă f_* este injectivă ddacă f^* este surjectivă ddacă $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$ (i. e. $(\forall\, M \subseteq A)\, (f^{-1}(f(M)) = M)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\, (f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$;

(ii) f este surjectivă ddacă f_* este surjectivă ddacă f^* este injectivă ddacă $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$ (i. e. $(\forall\, N \subseteq B)\, (f(f^{-1}(N)) = N)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\, (f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$;

(iii) din (i) şi (ii), obţinem: f este bijectivă ddacă f_* este bijectivă ddacă f^* este bijectivă ddacă f^* şi f_* sunt inverse una alteia ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\, (f(A \setminus M) = B \setminus f(M))$.

6 Teoria cardinalelor

Definiţia 6.1. Două mulţimi A şi B se zic *echipotente* sau *cardinal echivalente* ddacă există o funcţie bijectivă de la A la B, fapt notat prin: $A \cong B$.

Definiţia 6.2. Pentru orice mulţime A, se numeşte *cardinalul lui* A sau *numărul cardinal al lui* A clasa tuturor mulţimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$.

Să observăm că:

- pentru orice mulţime A, $A \cong A$ (pentru că $id_A : A \to A$ este o bijecţie), deci $A \in |A|$
- pentru orice mulţimi A şi B, dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ şi $|A| = |B|$, i. e. orice mulţime C satisface $A \cong C$ ddacă satisface $B \cong C$; aşadar avem chiar echivalenţele: $A \cong B$ ddacă $B \cong A$ ddacă $|A| = |B|$

- pentru orice mulţimi A şi B, dacă $A \ncong B$, atunci nu există nicio mulţime C cu proprietăţile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) şi $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$); aşadar avem chiar echivalenţele: $A \ncong B$ ddacă $|A| \neq |B|$ ddacă $|A| \cap |B| = \emptyset$

Definiţia 6.3 (suma, produsul şi puterea de numere cardinale). Pentru orice mulţimi A şi B, avem, prin definiţie:

- $|A| + |B| := |A \coprod B|$
- $|A| \cdot |B| := |A \times B|$
- $|B|^{|A|} := |B^A|$

Propoziţia 6.1 (independenţa de reprezentanţi a operaţiilor cu numere cardinale). *Operaţiile cu numere cardinale, definite ca mai sus,* **nu depind de reprezentanţii claselor de cardinal echivalenţă**, *adică: pentru orice mulţimi A, A', B şi B' astfel încât $|A| = |A'|$ şi $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ şi $B \cong B'$), au loc:*

- $|A \coprod B| = |A' \coprod B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$

Definiţia 6.4 (inegalităţi între numere cardinale). Pentru orice mulţimi A şi B, notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecţie $j : A \to B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ şi $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecţie $j : A \to B$, dar nu există nicio bijecţie $f : A \to B$

Remarca 6.1. Definiţia anterioară este **independentă de reprezentanţii claselor de cardinal echivalenţă**, i. e., pentru orice mulţimi A, A', B şi B' astfel încât $|A| = |A'|$ şi $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ şi $B \cong B'$):

- există o injecţie de la A la B ddacă există o injecţie de la A' la B';
- $A \cong B$ ddacă $A' \cong B'$, aşadar: $A \ncong B$ ddacă $A' \ncong B'$.

Remarca 6.2. Dacă A şi B sunt mulţimi şi $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$, întrucât **funcţia incluziune:** $i : A \to B$, $i(a) := a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă.

Remarca 6.3 (definiţii echivalente pentru inegalităţi între numere cardinale). Pentru orice mulţimi A şi B:

- $|A| \leq |B|$ ddacă există o surjecţie $t : B \to A$ ddacă [există o mulţime C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]
- $|A| < |B|$ ddacă [există o surjecţie $t : B \to A$, dar nu există nicio bijecţie $g : B \to A$] ddacă [există o mulţime nevidă C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]

Remarca 6.4. Inegalitatea $\leq$ este corect definită ca mai sus, în sensul că, pentru orice mulţimi A şi B, $|A| = |B|$ ddacă [$|A| \leq |B|$ şi $|B| \leq |A|$].

Notaţia 6.1. Desigur, folosim şi notaţiile $\geq$ şi $>$, cu semnificaţia: $|B| \geq |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| \leq |B|$, respectiv $|B| > |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| < |B|$, pentru orice mulţimi A şi B.

Teorema 6.1 (Cantor). *Pentru orice mulţime X, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

O construcţie pentru mulţimea numerelor naturale:

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), printr–o construcţie echivalentă cu cea menţionată în primul curs:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

Mereu se consideră mulţimea având drept elemente toate mulţimile de la paşii anteriori: succesorul unui n este $n+1 := |\{0, 1, 2, \dots, n\}|$. Iar mulţimea tuturor elementelor construite astfel, denumite *numere naturale*, se notează cu $\mathbb{N}$.

În **definiţiile** de mai sus pentru **numerele naturale** trebuie rezolvată, într–un fel sau altul, problema următoare: cu definiţia de mai sus, orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este o clasă proprie, care nu poate aparţine unei mulţimi sau clase. Putem înlocui aceste clase cu etichete ale lor, de exemplu chiar cu, reprezentanţii lor de mai sus: $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$.

Definiţia de mai sus pentru **mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale** arată corectitudinea **principiului inducţiei matematice**: dacă o submulţime $S \subseteq \mathbb{N}$ satisface:

- $0 \in S$,
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $[n \in S \Rightarrow n+1 \in S]$,

atunci $S = \mathbb{N}$.

Având mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, se construiesc $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ şi se definesc operaţiile şi relaţiile de ordine pe aceste mulţimi în modul cunoscut din liceu.

Mulţimea numerelor naturale, $\mathbb{N}$, este o mulţime infinită, mai precis o mulţime numărabilă.

Notaţia 6.2 ($\aleph_0 := |\mathbb{N}|$). Cardinalul mulţimii numerelor naturale se notează cu $\aleph_0$, pronunţat "alef 0".

Definiţia 6.5. O mulţime X se zice *numărabilă* ddacă $|X| = \aleph_0$, i. e. ddacă $X \cong \mathbb{N}$.

Remarca 6.5. Orice $n \in \mathbb{N}$ satisface $n < \aleph_0$.

Definiţia 6.6. O mulţime X se zice *infinită*:

(i) *în sens Dedekind*, ddacă există $S \subsetneq X$ a. î. $S \cong X$

(ii) *în sens Cantor*, ddacă există $S \subseteq X$, a. î. S este numărabilă

(iii) *în sens obişnuit*, ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \ncong \{1, 2, \dots, n\}$

Teorema 6.2. *Cele trei definiţii de mai sus ale mulţimilor infinite sunt echivalente.*

Desigur, o *mulţime finită* este, prin definiţie, o mulţime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiţia de mai sus a mulţimilor infinite *în sens obişnuit*:

Definiţia 6.7. O *mulţime finită* este o mulţime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \dots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Remarca 6.6. Conform definiţiei anterioare, **cardinalele finite**, i. e. cardinalele mulţimilor finite, sunt exact numerele naturale.

Remarca 6.7. Definiţia mulţimilor infinite în sens Cantor arată că $\aleph_0$ (i. e. cardinalul mulţimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde *cardinal infinit* (sau *cardinal transfinit*) înseamnă cardinal al unei mulţimi infinite.

Definiţia 6.8. O *mulţime cel mult numărabilă* este o mulţime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu $\aleph_0$).

Notaţia 6.3. Amintim următoarele notaţii consacrate pentru un segment al mulţimii $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, $\overline{a,b} := [a, b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \begin{cases} \{a, a+1, \dots, b\}, & \text{dacă } a \leq b; \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$

Remarca 6.8. Mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi este numărabilă.

Mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale este numărabilă.

Definiţia 6.9. O *mulţime nenumărabilă* este, prin definiţie, o mulţime infinită care nu este numărabilă, i. e. o mulţime având cardinalul strict mai mare decât $\aleph_0$.

Remarca 6.9. Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este nenumărabilă.

Definiţia 6.10 ($\mathcal{C} := |\mathbb{R}|$). Cardinalul lui $\mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{C}$ şi se numeşte *puterea continuumului.*

- Conform celor de mai sus, $\aleph_0 < \mathcal{C}$.

Vom vedea că $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ pentru orice mulţime M.

Remarca 6.10 ($\mathcal{C} = 2^{\aleph_0}$). $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Remarca 6.11. Oricare ar fi mulţimile A şi B:

- după cum am observat mai sus, $A \subseteq B$ implică $|A| \leq |B|$;
- dacă B este finită şi $A \subsetneq B$, atunci $|A| < |B|$.

În plus, după cum arată definiţia lui Cantor a mulţimilor infinite:

- dacă $|A| \leq |B|$ şi A este infinită, atunci B este infinită;
- dacă $|A| \leq |B|$ şi B este finită, atunci A este finită.

Observaţia 6.1. Conform celor de mai sus, faptul că o mulţime A este finită se exprimă, în simboluri, prin: $|A| < \aleph_0$. Pentru comoditate, vom folosi şi notaţia $|A| < \infty$ pentru faptul că o mulţime A este finită.

7 Familii arbitrare de mulţimi

Definiţia 7.1 (familie de elemente ale lui A indexată de I). Fie I şi A mulţimi arbitrare.
O *familie* $(x_i)_{i \in I} \subseteq A$ este o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$.
Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in \mathbb{R}$.
Elementele mulţimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i \in I}$.

- Există o singură familie vidă de elemente ale unei mulţimi arbitrare A, pentru că există o singură funcţie de la $\emptyset$ la A (a se vedea şi mai jos).
- Familia vidă nu este egală cu nicio familie nevidă, ci este egală doar cu ea însăşi.

Fie I şi A două mulţimi nevide, iar $(a_i)_{i \in I}$ şi $(b_i)_{i \in I}$ două familii de elemente din A indexate de I:

- $I \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$
- $(a_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $a_i \in A$
- $(b_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $b_i \in A$

Cele două familii sunt egale ddacă sunt egale pe componente:

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \quad \text{ddacă,} \quad \text{pentru orice } i \in I, \ a_i = b_i.$$

Familii arbitrare de mulţimi:

Definiţia 7.2. Fie T o mulţime arbitrară. Se numeşte *şir de submulţimi ale lui T indexat de* $\mathbb{N}$ o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, se notează $A_n := f(n) \in \mathcal{P}(T)$, iar şirul de submulţimi ale lui T se notează cu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Scriem $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificaţia că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{P}(T)$.

Definiţia 7.3. Fie T şi I două mulţimi arbitrare. Se numeşte *familie de submulţimi ale lui T indexată de I* o funcţie $f : I \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulţimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i \in I}$. Scriem $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificaţia că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulţimii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i \in I}$.

Pentru a generaliza definiţia anterioară la familii de mulţimi oarecare avem nevoie de acea definiţie mai cuprinzătoare a noţiunii de funcţie (a se vedea sistemul axiomatic pentru teoria mulţimilor din Cursul I), care permite unei funcţii f definite pe I să aibă drept codomeniu o clasă (nu neapărat o mulţime), anume clasa tuturor mulţimilor în acest caz.

Operaţii cu familii arbitrare de mulţimi:

Definiţia 7.4. Fie I o mulţime arbitrară şi $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi (părţi ale unei mulţimi T sau mulţimi arbitrare) indexată de I.
Se definesc următoarele operaţii:

- *reuniunea familiei* $(A_i)_{i\in I}$ este mulţimea notată $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid (\exists\, i\in I)\,(x\in A_i)\} = \{x \mid (\exists\, i)\,(i\in I \text{ şi } x\in A_i)\}$$

- *intersecţia familiei* $(A_i)_{i\in I}$ este mulţimea notată $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid (\forall\, i\in I)\,(x\in A_i)\} = \{x \mid (\forall\, i)\,(i\in I \Rightarrow x\in A_i)\}$$

- *produsul cartezian al familiei* $(A_i)_{i\in I}$ (numit şi *produsul direct al familiei* $(A_i)_{i\in I}$) este mulţimea notată $\prod\limits_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i\in I)\,(a_i\in A_i)\} =$$
$$= \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i)\,(i\in I \Rightarrow a_i\in A_i)\},$$

  sau, altfel scris (cu definiţia unei familii de elemente exemplificate mai sus pe familii de numere reale):

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i\in I)\,(f(i)\in A_i)\} =$$
$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i)\,(i\in I \Rightarrow f(i)\in A_i)\}.$$

Notaţia 7.1. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Produsul direct $\prod\limits_{i\in\overline{1,n}} A_i$ se mai notează cu $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$, iar un element $(a_i)_{i\in\overline{1,n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. În cazul particular în care $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, $\prod\limits_{i\in\overline{1,n}} A \overset{\text{notaţie}}{=} \prod\limits_{i=1}^{n} A \overset{\text{notaţie}}{=} A^n$.

Remarca 7.1 (puterile unei mulţimi: caz particular al produsului direct). În definiţia anterioară, dacă $I\neq\emptyset$ şi, pentru orice $i\in I$, $A_i = A$, atunci $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I} A = A$, aşadar $\prod\limits_{i\in I} A = \{f \mid f : I\to A, (\forall\, i\in I)\,(f(i)\in A)\} = \{f \mid f : I\to A\} = A^I$. În particular, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, dacă $|I| = n$, avem: $A^n = \{(a_1,\ldots,a_n) \mid (\forall\, i\in\overline{1,n})\,(a_i\in A)\} = \{f \mid f : \overline{1,n}\to A\} = A^{\overline{1,n}} = A^I$.

Remarca 7.2. Pentru orice mulţimi A, I şi J, dacă $I\cong J$, atunci $A^I\cong A^J$. Acest fapt rezultă direct din independenţa de reprezentanţi a operaţiei de exponenţiere asupra numerelor cardinale.

Exerciţiul 7.1 (temă – distributivitatea produsului cartezian faţă de reuniuni şi intersecţii arbitrare). Fie A o mulţime, I o mulţime nevidă (de fapt poate fi şi vidă – vom vedea), iar $(B_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Să se demonstreze că:

- $A\times(\bigcup\limits_{i\in I} B_i) = \bigcup\limits_{i\in I}(A\times B_i)$ şi $(\bigcup\limits_{i\in I} B_i)\times A = \bigcup\limits_{i\in I}(B_i\times A)$
- $A\times(\bigcap\limits_{i\in I} B_i) = \bigcap\limits_{i\in I}(A\times B_i)$ şi $(\bigcap\limits_{i\in I} B_i)\times A = \bigcap\limits_{i\in I}(B_i\times A)$

Exerciţiul 7.2 (temă – distributivitatea generalizată a produsului cartezian faţă de intersecţie). Fie I şi J o mulţimi nevide (de fapt pot fi şi vide – vom vedea), iar $(A_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ o familie de mulţimi (indexată de $I\times J$; poate fi scrisă şi sub forma: $(A_{(i,j)})_{(i,j)\in I\times J}$). Să se demonstreze că:

$$\prod_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{i,j} = \bigcap_{j\in J}\prod_{i\in I} A_{i,j}$$

Amintesc că asociativitatea unei operaţii binare, cum sunt reuniunea şi intersecţia a două mulţimi, permite scrierea unui şir de astfel de operaţii fără paranteze: pentru orice mulţimi A_1, A_2, A_3:

- $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \overset{\text{notaţie}}{=} A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \overset{\text{notaţie}}{=} A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Propoziţia 7.1 (asociativitatea produsului direct ca operaţie binară). *Fie A_1, A_2, A_3 mulţimi arbitrare. Atunci: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^{3} A_i$, întrucât următoarele funcţii sunt bijecţii: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\varphi} (A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^{3} A_i$, pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ şi orice $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ şi $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$.*

În plus, fiecare dintre bijecţiile φ şi ψ se identifică cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenţie egalităţile: $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ şi orice $a_3 \in A_3$.

Prin urmare, putem scrie: $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^{3} A_i$.

Ca şi la funcţii aplicate unor perechi de elemente, folosim **licenţa de scriere (convenţia):** pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, orice funcţie $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \to B$ şi orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) := f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere).

Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenţie**, şi va fi clar la elementele căror mulţimi ne vom referi, prin notaţii de forma:

- $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ vom subînţelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ vom subînţelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ vom subînţelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A^n$ vom subînţelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînţelege: $a \in A$ şi $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînţelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulţimi, I este o mulţime nevidă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie (nevidă) de mulţimi.

Definiţia 7.5. Fie I o mulţime arbitrară şi $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi (părţi ale unei mulţimi T sau mulţimi arbitrare) indexată de I.

Se defineşte *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i \in I}$ ca fiind mulţimea notată $\coprod_{i \in I} A_i$ şi definită prin:

$$\coprod_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\})$$

Observaţia 7.1. Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulţimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin ataşarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulţimi a indicelui mulţimii respective.

Notaţia 7.2. Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii ataşati, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înţelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Notaţia 7.3. La fel ca la produsul direct, dacă avem o familie finită şi nevidă de mulţimi, $(A_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notaţiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i\in\overline{1,n}} A_i \stackrel{\text{notaţie}}{=} \coprod_{i=1}^{n} A_i \stackrel{\text{notaţie}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n$$

Remarca 7.3. Ultima dintre notaţiile de mai sus este permisă datorită **asociativităţii reuniunii disjuncte** ca operaţie binară (adică aplicată unei familii formate din două mulţimi): pentru orice mulţimi A_1, A_2, A_3, se arată imediat (folosind definiţia reuniunii disjuncte şi câte o identificare de indici, i. e. câte o bijecţie între mulţimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) \cong (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 \cong \coprod_{i=1}^{3} A_i$, adică, prin identificarea acestor bijecţii cu identitatea, putem scrie: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) = (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 = \coprod_{i=1}^{3} A_i$.

Aritatea unei operaţii a unei structuri algebrice (cu o singură *mulţime suport*, o singură mulţime de elemente) este **numărul argumentelor (operanzilor, variabilelor) acelei operaţii**. Dacă structura algebrică are mulţimea suport A, iar f este o operaţie n–ară pe A, cu $n \in \mathbb{N}$, atunci $f : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A} \to A$ (f este o funcţie cu n argumente din A, cu valori tot în A).

Remarca 7.4 (reuniunea familiei vide este vidă). Dacă recitim definiţia reuniunii unei familii arbitrare, observăm că reuniunea familiei vide este mulţimea elementelor pentru care există un $i \in \emptyset$ cu o anumită proprietate, condiţie care este întotdeauna falsă, deci reuniunea familiei vide este $\emptyset$.

Remarca 7.5 (produsul direct al familiei vide este un singleton). Cele de mai sus arată că produsul direct al familiei vide este mulţimea cu unicul element dat de unica funcţie de la $\emptyset$ la $\emptyset$, anume $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, adică produsul direct al familiei vide este singletonul $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Operaţiile zeroare sunt constantele structurilor algebrice: de exemplu, elementul neutru al unui grup G este o funcţie φ de la un singleton (anume $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$) la G: $\varphi : \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \to G$, iar o funcţie definită pe un singleton are o singură valoare ($\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in G$), deci poate fi identificată cu această unică valoare a ei, care este un element distins, o constantă din G: $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = e \in G$, şi identificăm $\varphi = e$.

Remarca 7.6 (reuniunea disjunctă a familiei vide este vidă). Definiţia reuniunii disjuncte a unei familii arbitrare de mulţimi arată că reuniunea disjunctă a familiei vide de mulţimi este egală cu, reuniunea familiei vide de mulţimi, care este $\emptyset$.

Exemplul 7.1. Dacă A şi B sunt mulţimi, iar $f : A \to B$ şi $g : A \to B$, iar pe mulţimea B avem, de exemplu, o operaţie binară $+$ şi o **relaţie binară** (vom vedea) $\leq$, atunci putem defini, **punctual**, operaţia $+$, respectiv relaţia $\leq$, între funcţiile f şi g, astfel:

- $f + g : A \to B$, pentru orice $x \in A$, $(f + g)(x) \stackrel{\text{definiţie}}{=} f(x) + g(x)$
- prin definiţie, $f \leq g$ ddacă, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.

Definiţia 7.6 (familii de funcţii între două mulţimi fixate A şi B). Fie I, A şi B mulţimi arbitrare. O *familie de funcţii de la A la B indexată de I* este o familie de elemente ale mulţimii B^A indexată de I, i. e. o funcţie $h : I \to B^A$ (pentru orice $i \in I$, $f_i \stackrel{\text{notaţie}}{=} h(i) : A \to B$).

Se pot defini şi operaţii cu familii arbitrare de funcţii, tot **punctual**:

Exemplul 7.2. Dacă I, A şi B sunt mulţimi nevide, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii de la A la B (adică, pentru orice $i \in I$, $f_i : A \to B$), B este o **mulţime ordonată** (vom vedea) şi, pentru orice $x \in A$, submulţimea $\{f_i(x) \mid i \in I\} \subseteq B$ are un cel mai mare element (un **maxim**), atunci putem defini funcţia:

$$\max\{f_i \mid i \in I\} : A \to B,$$

astfel: pentru orice $x \in A$,

$$(\max\{f_i \mid i \in I\})(x) \stackrel{\text{definiţie}}{=} \max\{f_i(x) \mid i \in I\}.$$

Definiţia 7.7 (familii de funcţii – cazul general – material facultativ). Fie I o mulţime arbitrară, iar $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ familii de mulţimi indexate de I.

O *familie de funcţii* $(f_i)_{i\in I}$ *indexată de* I cu $f_i : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$ este un element al produsului direct $\prod\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, adică o familie de elemente ale mulţimii $\bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$ indexată de I cu elementul de indice i aparţinând lui $B_i^{A_i}$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. o funcţie $h : I \to \bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, cu $f_i = h(i) : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Definiţia 7.8 (operaţiile cu familii arbitrare de funcţii generalizează compunerea de funcţii – material facultativ). Dacă I este o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulţimi, C este o mulţime, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii şi g este o funcţie a. î., pentru fiecare $i \in I$, $f_i : A_i \to B_i$, iar $g : \prod\limits_{i\in I} B_i \to C$, atunci putem defini funcţia $g((f_i)_{i\in I}) : \prod_{i\in I} A_i \to C$ prin: oricare ar fi $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, $g((f_i)_{i\in I}))((x_i)_{i\in I}) := g((f_i(x_i))_{i\in I})$: *operaţia* g (de aritate, i. e. număr de argumente, $|I|$) *aplicată familiei de funcţii* $(f_i)_{i\in I}$*, definită* **punctual**.

Cazul finit: $I = \overline{1,n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$: $g(f_1, \ldots, f_n) : A_1 \times \ldots \times A_n \to C$, pentru orice $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$, $g(f_1, \ldots, f_n)(x_1, \ldots, x_n) := g(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$.

La fel se pot generaliza relaţiile binare între funcţii la relaţii de aritate arbitrară, chiar infinită, adică, pentru familia $(f_i)_{i\in I}$ de mai sus, submulţimi ale lui $\prod\limits_{i\in I} B_i$: relaţii de aritate (i. e. număr de argumente) $|I|$ – a se vedea în Cursul III definiţia unei relaţii n–are:

Definiţia 7.9 (material facultativ). Dacă I este o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulţimi, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii cu $f_i : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$, iar $R \subseteq \prod\limits_{i\in I} B_i$, atunci: *familia* $(f_i)_{i\in I}$ *de funcţii se află în relaţia* R, notat $(f_i)_{i\in I} \in R$, ddacă $(f_i(x_i))_{i\in I} \in R$ pentru fiecare $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} A_i$.

Cazul finit: $I = \overline{1,n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că $R \subseteq B_1 \times \ldots \times B_n$ este o relaţie n–ară: $(f_1, \ldots, f_n) \in R$ ddacă, pentru orice $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$, $(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in R$.

Exerciţiul 7.3 (imagini şi preimagini de reuniuni şi intersecţii arbitrare de mulţimi printr–o funcţie). Fie A, B, I şi J mulţimi nevide (de fapt, pot fi şi vide – vom vedea), $f : A \to B$, iar $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ şi $(B_j)_{j\in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Să se demonstreze că:

(i) $f^{-1}(\bigcup\limits_{j\in J} B_j) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

(ii) $f(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$;

(iii) $f^{-1}(\bigcap\limits_{j\in J} B_j) = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

(iv) $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$;

(v) f este injectivă ddacă, pentru orice mulţime nevidă K şi orice $(M_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $f(\bigcap\limits_{k\in K} M_k) = \bigcap\limits_{k\in K} f(M_k)$.

(vi) Să se dea un exemplu pentru incluziune strictă la punctul (iv).

8 Funcţii caracteristice

Definiţia 8.1. Fie T o mulţime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim *funcţia caracteristică a lui* A *(raportat la* T*)*: $\chi_A : T \to \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$

În cazul particular în care mulţimea totală T este finită şi nevidă: $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcţia caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \ldots, \chi_A(x_n))$; acest vector de valori din mulţimea $\{0, 1\}$ se numeşte *vectorul caracteristic al lui A*. A se observa că suma valorilor din acest vector este egală cu, cardinalul lui A: $\chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) + \ldots + \chi_A(x_n) = |A|$.

Propoziţia 8.1 (principiul includerii şi al excluderii). *Pentru orice n natural nenul şi orice mulţimi finite $M_1, M_2, \dots, M_n$, are loc egalitatea:*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \dots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \dots M_n| =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots i_s\leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots M_{i_s}|.$$

Şi dual: $|\bigcap_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \dots +$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup M_2 \cap \dots M_n| = \sum_{s=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots i_s\leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots M_{i_s}|.$$

Propoziţia 8.2 (proprietăţile funcţiilor caracteristice). *Fie T o mulţime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcţia caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcţiile constante: $\mathbf{0} : T \to \{0,1\}$ şi $\mathbf{1} : T \to \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $\mathbf{0}(x) = 0$ şi $\mathbf{1}(x) = 1$.*

Atunci au loc proprietăţile:

- $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$ *şi* $\chi_T = \mathbf{1}$
- *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalenţa:* $A \subseteq B$ *ddacă* $\chi_A \leq \chi_B$ *(punctual, i. e.: pentru orice* $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$*)*
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalenţa:* $A = B$ *ddacă* $\chi_A = \chi_B$
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$
- *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \max\{\chi_A, \chi_B\}$
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$
- *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T\setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$
- $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Remarca 8.1. Fie T şi I două mulţimi nevide şi $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părţi ale lui T indexată de I. Atunci au loc:

- $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i\in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Remarca 8.2 (legile de distributivitate generalizată pentru $\cup$ şi $\cap$). Pentru orice mulţime nevidă I, orice mulţime A şi orice familie de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$, au loc egalităţile:

- **distributivitatea generalizată a $\cup$ faţă de $\cap$:** $A \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i)$
- **distributivitatea generalizată a $\cap$ faţă de $\cup$:** $A \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(A \cap A_i)$

Propoziţia 8.3. *Pentru orice mulţime nevidă T, $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T$.*

Corolarul 8.1. *Pentru orice mulţime T, $|\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.*

A se vedea precizările despre **examen** şi **temele obligatorii** de la sfârşitul Cursului II.

Breviar pentru Cursurile I şi II de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

CUPRINSUL CURSULUI DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

A se vedea **bibliografia** acestui curs, în Cursul I.
Prescurtări uzuale:

- **i. e.** = id est = adică
- **ddacă** = dacă şi numai dacă
- **a. î.** = astfel încât
- **ş. a. m. d.** = şi aşa mai departe
- ":=": abreviere pentru: $\overset{\text{definiţie}}{=}$, $\overset{\text{notaţie}}{=}$
- $-\!\!/\!\!/\!\!-$: notaţie pentru: "să se demonstreze că"

1 Teoria mulţimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

- O definiţie din **teoria naivă a mulţimilor**: o *mulţime* este o colecţie de obiecte **bine determinate** şi **distincte**, numite *elementele mulţimii.*
- **distincte**: o mulţime nu conţine un acelaşi obiect de mai multe ori; un element apare într-o mulţime o singură dată
- **bine determinate**: orice mulţime are o descriere precisă, care o identifică în mod unic, adică îi identifică în mod unic elementele

A se vedea în Cursul I Paradoxul lui Bertrand Russell, care arată că **nu există mulţimea tuturor mulţimilor**. Totalitatea mulţimilor nu formează o mulţime, ci o **clasă**.

Din punctul de vedere al teoriei naive a mulţimilor, nu se pot spune multe lucruri despre noţiunea de *clasă*, decât că este "ceva mai vag/mai mare/mai cuprinzător decât o mulţime". Se consideră că orice mulţime este o clasă, dar nu şi invers. Clasele care nu sunt mulţimi se numesc *clase proprii.*

Semnul (simbolul) de apartenenţă **nu** poate apărea la dreapta unei clase proprii, adică nu se consideră a avea sens faptul că o clasă proprie aparţine unui alt obiect.

Aşadar **nu există clasa tuturor claselor**, din simplul motiv că nu există un obiect care să aibă clase proprii ca elemente.

- O *axiomă* este un fapt **dat** ca fiind adevărat într-o teorie matematică.
- O **axiomă** nu se demonstrează, ci pur şi simplu este **dată** ca fiind adevărată.
- Faptul de a fi axiomă **nu este o proprietate intrinsecă** a unei afirmaţii.
- *formalizare*: exprimare folosind **numai** simboluri matematice
- *metalimbaj*: "limbajul natural", "vorbirea curentă (obişnuită)", "exprimarea în cuvinte", "fără simboluri matematice"

2 Echivalenţe logice între diferite tipuri de enunţuri

Lucrăm numai cu enunţuri care sunt **fie false, fie adevărate**.

Conectorii logici: folosiţi pentru a lega enunţuri, formând astfel *enunţuri compuse:*

- *disjuncţia:* sau
- *conjuncţia:* şi
- *negaţia:* non
- *implicaţia:* $\Rightarrow$
- *echivalenţa:* $\Leftrightarrow$

Pentru orice enunţuri (propoziţii, afirmaţii, proprietăţi) p, q şi r, au loc echivalenţele următoare:

- $[p \text{ sau } (q \text{ şi } r)] \ \Leftrightarrow\ [(p \text{ sau } q) \text{ şi } (p \text{ sau } r)]$
- $[p \text{ şi } (q \text{ sau } r)] \ \Leftrightarrow\ [(p \text{ şi } q) \text{ sau } (p \text{ şi } r)]$
- $\text{non } (p \text{ sau } q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \text{ şi } (\text{non } q)]$
- $\text{non } (p \text{ şi } q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$
- $(p \Rightarrow q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \text{ sau } q]$
- $(p \Rightarrow q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)]$ (**principiul reducerii la absurd**)
- $(p \Leftrightarrow q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \Leftrightarrow (\text{non } q)]$ (consecinţă imediată a principiului reducerii la absurd şi a faptului că $(p \Leftrightarrow q) \stackrel{\text{def.}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ şi } (q \Rightarrow p)]$)

- implicaţia $[p \Rightarrow q]$ este echivalentă cu [(non p) sau q]

Cuantificatorii:

- *cuantificatorul universal:* $\forall$
- *cuantificatorul existenţial:* $\exists$

Dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate referitoare la x (mai precis o proprietate referitoare la elementele pe care le parcurge/le poate denumi x), atunci:

- non $[(\forall\, x)\,(p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(\text{non } p(x))$
- non $[(\exists\, x)\,(p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(\text{non } p(x))$

Notaţia 2.1. Alăturarea de simboluri $\exists\,!$ semnifică "există un unic", "există şi este unic".

Observaţia 2.1. $\exists!$ nu este un cuantificator, ci este o notaţie prescurtată pentru enunţuri compuse: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate asupra lui x, atunci scrierea $(\exists\,!\,x)\,(p(x))$ este o abreviere pentru enunţul scris, desfăşurat, astfel:

$$(\exists\, x)\,(p(x)) \text{ şi } (\forall\, y)\,(\forall\, z)\,[(p(y) \text{ şi } p(z)) \Rightarrow y = z],$$

unde y şi z sunt variabile.

Cuantificatori aplicaţi fixând un domeniu al valorilor:

Fie M o mulţime, x o variabilă, iar $p(x)$ o proprietate referitoare la elementele lui M. Atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru scrierile fără domeniu al valorilor lângă cuantificatori:

- $(\forall\, x \in M)\,(p(x)) \overset{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,(x \in M \Rightarrow p(x))$
- $(\exists\, x \in M)\,(p(x)) \overset{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\exists\, x)\,(x \in M \text{ şi } p(x))$

Toate proprietăţile logice pentru enunţuri cuantificate din acest curs se scriu la fel şi sunt valabile şi pentru cuantificatori urmaţi de un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată.

Cuantificatorii de acelaşi fel comută, cei diferiţi nu:

Fie x şi y variabile, iar $p(x, y)$ o proprietate asupra lui x şi y. Atunci:

- $(\forall\, x)\,(\forall\, y)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$
- $(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, y)\,(\exists\, x)\,(p(x, y))$
- $(\forall\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \;\substack{\nRightarrow \\ \Leftarrow}\; (\exists\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$ (pentru fiecare valoare a lui x, valoarea lui y pentru care e satisfăcut enunţul din stânga depinde de valoarea lui x)

Analog, dacă A şi B sunt mulţimi, avem:

- $(\forall\, x \in A)\,(\forall\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x, y))$
- $(\exists\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, y \in B)\,(\exists\, x \in A)\,(p(x, y))$
- $(\forall\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\substack{\nRightarrow \\ \Leftarrow}\; (\exists\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x, y))$

Desigur, la fel pentru cazul în care doar unul dintre cuantificatori este aplicat cu un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată: $(\forall\, x)\,(\forall\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y \in B)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$ etc..

Cuantificatori, disjuncţii şi conjuncţii logice:

Să observăm şi următoarele proprietăţi logice: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ şi $q(x)$ sunt enunţuri referitoare la x, atunci:

- $(\forall\, x)\,(p(x) \text{ şi } q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(p(x)) \text{ şi } (\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(p(x)) \text{ sau } (\exists\, x)\,(q(x))$
- $(\forall\, x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \;\substack{\nRightarrow \\ \Leftarrow}\; (\forall\, x)\,(p(x)) \text{ sau } (\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x) \text{ şi } q(x)) \;\substack{\Rightarrow \\ \nLeftarrow}\; (\exists\, x)\,(p(x)) \text{ şi } (\exists\, x)\,(q(x))$

Scoaterea de sub un cuantificator a unui enunţ care nu depinde de variabila cuantificată:

Dacă, în enunţurile compuse cuantificate de mai sus, în locul lui $q(x)$ avem un enunţ q care nu depinde de x, atunci:

$$(\forall\, x)\, q \;\Leftrightarrow\; q \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\, q,$$

aşadar, în acest caz, din proprietăţile anterioare obţinem:

- $(\forall\, x)\, (p(x) \text{ şi } q) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\, (p(x)) \text{ şi } q$
- $(\exists\, x)\, (p(x) \text{ sau } q) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\, (p(x)) \text{ sau } q$
- $(\forall\, x)\, (p(x) \text{ sau } q) \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; (\forall\, x)\, (p(x)) \text{ sau } q$
- $(\exists\, x)\, (p(x) \text{ şi } q) \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; (\exists\, x)\, (p(x)) \text{ şi } q$

Acum fie p, q şi r enunţuri. Atunci, din proprietăţile: $[p \text{ sau } (q \text{ şi } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ sau } q) \text{ şi } (p \text{ sau } r)]$, $[p \text{ şi } (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ şi } q) \text{ sau } (p \text{ şi } r)]$, non $(p \text{ sau } q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ şi } (\text{non } q)]$, non $(p \text{ şi } q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$ şi $(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ sau } q]$, se pot deduce următoarele proprietăţi:

- $[p \Rightarrow (q \text{ şi } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \Rightarrow q) \text{ şi } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ şi } r)] \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; [(p \Rightarrow q) \text{ şi } (p \Rightarrow r)]$
- $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \;\Leftrightarrow\; [(q \Rightarrow p) \text{ şi } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ şi } r) \Rightarrow p] \;\Leftrightarrow\; [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ şi } r) \Rightarrow p] \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; [(q \Rightarrow p) \text{ şi } (r \Rightarrow p)]$

3 Operaţii cu mulţimi şi relaţii între mulţimi

Notaţia 3.1.

- Păstrăm notaţia consacrată $\in$ pentru **simbolul de apartenenţă**, ce indică faptul că un obiect este element al altui obiect (mulţime, clasă).
- Păstrăm notaţia clasică, folosind acolade, pentru specificarea elementelor unei mulţimi (fie prin enumerare, fie printr–o proprietate a lor).

Amintim că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulţimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.

Notaţia 3.2. Păstrăm notaţiile cunoscute $\cup$, $\cap$, $\setminus$ şi Δ pentru **reuniunea**, **intersecţia**, **diferenţa** şi, respectiv, **diferenţa simetrică** între mulţimi.

Amintim că, pentru orice mulţimi A şi B, se definesc:

- $A \cup B \overset{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;
- $A \cap B \overset{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$;
- $A \setminus B \overset{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$;
- $A \,\Delta\, B \overset{\text{def.}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

A se revedea proprietăţile operaţiilor cu mulţimi demonstrate la seminar, precum şi cele lăsate ca temă pentru acasă în cursul orelor de seminar!

Vom face mereu apel şi la cunoştinţe din gimnaziu şi liceu, dintre care pe unele le vom aminti, de regulă doar enunţându–le.

Notaţia 3.3. Păstrăm notaţiile $\subseteq$, $\subsetneq$, $\supseteq$ şi $\supsetneq$ pentru **incluziunile** şi **incluziunile stricte** dintre mulţimi **în fiecare sens**. Vom mai nota incluziunile stricte şi cu $\subset$ şi respectiv $\supset$, dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă şi nu poate avea loc egalitatea de mulţimi nu ne foloseşte în cele prezentate.

Amintim că, pentru orice mulţimi A şi B:

- $A = B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\, [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (prin definiţie, două mulţimi sunt egale ddacă au aceleaşi elemente);
- $A \subseteq B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\, [x \in A \Rightarrow x \in B]$;
- $A \supseteq B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A$;
- $A \subsetneq B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} [A \subseteq B$ şi $A \neq B]$;
- $A \supsetneq B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subsetneq A$.

Notaţia 3.4. Vom nota cu $\emptyset$ **mulţimea vidă**, adică mulţimea fără elemente, i.e. unica (conform definiţiei egalităţii de mulţimi) mulţime care satisface: $(\nexists\, x)\, (x \in \emptyset)$, sau, echivalent: $(\forall\, x)\, (x \notin \emptyset)$.

Definiţia 3.1. Dacă A şi B sunt mulţimi, atunci A se numeşte:

- *submulţime a lui* B (sau *parte a lui* B) ddacă $A \subseteq B$;
- *submulţime proprie* (sau *strictă*) *a lui* B ddacă $A \subsetneq B$.

Notaţia 3.5. Pentru orice mulţime T, vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ **mulţimea părţilor lui** T, i. e. **mulţimea submulţimilor lui** T: $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Să notăm cu **xor** conectorul logic *sau exclusiv*, definit astfel: pentru orice enunţuri p şi q, enunţul (p xor q) este adevărat exact atunci când **exact unul** dintre enunţurile p şi q este adevărat, adică exact atunci când [(p e adevărat şi q e fals) sau (q e adevărat şi p e fals)]. Formal:

- (p xor q) $\Leftrightarrow$ [(p şi non q) sau (q şi non p)]

Remarca 3.1. Definiţia diferenţei simetrice arată că, pentru orice mulţimi A şi B:

- $A\Delta B = \{x \mid x \in A \text{ xor } x \in B\}$.

A se vedea, în Cursul I, proprietăţile logice (cu enunţuri) în care se transcriu următoarele proprietăţi pentru calculul cu mulţimi.

Şi a se observa faptul că, pentru operaţii comutative, precum reuniunea şi intersecţia de mulţimi, distributivitatea la stânga faţă de alte operaţii este echivalentă cu distributivitatea la dreapta.

Pentru orice mulţimi A, B, C, D, au loc:

- $A = B$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \subseteq A]$
- **idempotenţa reuniunii:** $A \cup A = A$
- **idempotenţa intersecţiei:** $A \cap A = A$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $A\Delta A = \emptyset$
- **comutativitatea reuniunii:** $A \cup B = B \cup A$
- **comutativitatea intersecţiei:** $A \cap B = B \cap A$
- **comutativitatea diferenţei simetrice:** $A\Delta B = B\Delta A$
- **asociativitatea reuniunii:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **asociativitatea intersecţiei:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **asociativitatea diferenţei simetrice:** $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$

- **distributivitatea la stânga a reuniunii faţă de intersecţie:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **distributivitatea la dreapta a reuniunii faţă de intersecţie:** $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$
- **distributivitatea la stânga a intersecţiei faţă de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **distributivitatea la dreapta a intersecţiei faţă de reuniune:** $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$
- $A \subsetneq B$ ddacă $[(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$ şi $(\exists x)\,(x \in B \setminus A)]$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \setminus A \neq \emptyset]$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \nsubseteq A]$
- $A \subseteq B$ ddacă $(A \subsetneq B$ sau $A = B)$
- $A \subseteq A$
- non$(A \subsetneq A)$
- **tranzitivitatea incluziunii nestricte**: $(A \subseteq B$ şi $B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$
- $(A \subsetneq B$ şi $B \subseteq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $(A \subseteq B$ şi $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- **tranzitivitatea incluziunii stricte**: $(A \subsetneq B$ şi $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$
- $A \cup B = B$ ddacă $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$
- $\emptyset \subseteq A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$
- $A \setminus B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq B$
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, adică: $A \subseteq \emptyset$ ddacă $A = \emptyset$
- $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $A = B$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \setminus B = A$ ddacă $B \setminus A = B$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D) \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$
- $(A \subseteq C$ şi $B \subseteq C)$ ddacă $A \cup B \subseteq C$
- $(A \subseteq B$ şi $A \subseteq C)$ ddacă $A \subseteq B \cap C$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C \subseteq B \setminus C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D)\Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$

- $A \setminus B \subseteq A$
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Considerăm o mulţime T, iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ (*complementara lui X faţă de T*). Au loc:

- $\overline{A} \in \mathcal{P}(T)$, adică $\overline{A} \subseteq T$
- $\overline{\emptyset} = T$
- $\overline{T} = \emptyset$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- **operaţia de trecere la complementară este autoduală:** $\overline{\overline{A}} = A$
- **legile lui De Morgan:** $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (uşor de demonstrat folosind proprietăţile de mai sus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; mai mult:
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$
- $A \cup \overline{A} = T$; mai mult:
- $A \cup B = T$ ddacă $A \supseteq \overline{B}$ ddacă $B \supseteq \overline{A}$
- **A şi B sunt părţi complementare ale lui T ddacă fiecare este complementara celeilalte faţă de T:** $\begin{cases} A \cup B = T \\ \text{şi} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$ ddacă $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$

4 Alte operaţii cu mulţimi

Produsul direct a două mulţimi:

Notaţia 4.1 (a se vedea definiţia axiomatică a unei perechi ordonate în CURSUL I). Pentru orice elemente a şi b, notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a şi b.

Definiţia 4.1 (egalitatea de perechi semnifică egalitatea pe componente). Pentru orice elemente a_1, a_2, x_1, x_2:

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = x_1 \\ \text{şi} \\ a_2 = x_2 \end{cases}$$

Definiţia 4.2. Pentru orice mulţimi A şi B, se defineşte *produsul cartezian* dintre A şi B (numit şi *produsul direct* dintre A şi B) ca fiind mulţimea de perechi ordonate $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$$

Remarca 4.1 (produsul cartezian cu $\emptyset$ este $\emptyset$; produsul cartezian este distributiv faţă de reuniunea, intersecţia, diferenţa şi diferenţa simetrică între mulţimi (şi la stânga, şi la dreapta). Pentru orice mulţimi A, B şi C, au loc egalităţile:

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ şi $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ şi $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ şi $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
- $A \times (B \,\Delta\, C) = (A \times B) \,\Delta\, (A \times C)$ şi $(B \,\Delta\, C) \times A = (B \times A) \,\Delta\, (C \times A)$

Reuniunea disjunctă a două mulţimi:

Definiţia 4.3. Fie A şi B două mulţimi. Se defineşte *reuniunea disjunctă* a mulţimilor A şi B ca fiind mulţimea notată $A \coprod B$ şi definită prin:

$$A \coprod B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Observaţia 4.1. Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulţimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin ataşarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulţimi a unui indice corespunzător mulţimii respective (un element diferit de cel ataşat elementelor celeilalte mulţimi) (vom vorbi despre **indici** într–o discuţie despre **familii arbitrare de mulţimi**).

5 Mulţimi şi funcţii

Definiţia 5.1. Fie A şi B mulţimi oarecare. Se numeşte *funcţie* de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. î., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.

Formal: $(\forall\, a \in A)\,(\exists\,!\, b \in B)\,((a, b) \in G)$.

Faptul că f este o funcţie de la A la B se notează cu $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Mulţimea A se numeşte *domeniul* funcţiei f, B se numeşte *codomeniul* sau *domeniul valorilor* lui f, iar G se numeşte *graficul* lui f.

Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ şi se numeşte *valoarea funcţiei f în punctul a*.

Remarca 5.1 ($(a, b) \in G \;\Leftrightarrow\; f(a) = b$). Dacă $f = (A, G, B)$ este o funcţie ($f : A \to B$), atunci graficul G al lui f este mulţimea de perechi: $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

Definiţia 5.2. Fie $f = (A, F, B)$ şi $g = (C, G, D)$ două funcţii ($f : A \to B$, iar $g : C \to D$).

- Egalitatea $f = g$ semnifică egalitatea de triplete $(A, F, B) = (C, G, D)$, i. e. spunem că $f = g$ ddacă:

  $$\begin{array}{ll} A = C & \text{(are loc egalitatea domeniilor),} \\ B = D & \text{(are loc egalitatea codomeniilor) şi} \\ F = G & \text{(are loc egalitatea graficelor celor două funcţii,} \\ & \text{ceea ce, conform scrierii acestor grafice} \\ & \text{din remarca anterioară, se transcrie în egalitate} \\ & \text{punctuală, adică egalitate în fiecare punct:} \\ & \text{pentru orice } a \in A = C,\ f(a) = g(a)). \end{array}$$

- Dacă X este o mulţime a. î. $X \subseteq A$ şi $X \subseteq C$, atunci spunem că *f şi g coincid pe X* ddacă f şi g au aceleaşi valori în elementele lui X, adică: oricare ar fi $x \in X$, $f(x) = g(x) \in B \cap D$.

Notaţia 5.1 (putere de mulţimi). Pentru orice mulţimi A şi B, se notează cu B^A mulţimea funcţiilor de la A la B:

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

Remarca 5.2 (există o unică funcţie de la $\emptyset$ la o mulţime arbitrară). Fie B o mulţime oarecare (**poate fi vidă şi poate fi nevidă**). Atunci $B^{\emptyset} = \{(\emptyset, \emptyset, B)\}$.

Remarca 5.3 (nu există nicio funcţie de la o mulţime nevidă la $\emptyset$). Fie A o mulţime a. î. $A \neq \emptyset$). Atunci $\emptyset^A = \emptyset$.

Definiţia 5.3. Pentru orice mulţimi A şi B, orice funcţie $f : A \to B$ şi orice submulţimi $X \subseteq A$ şi $Y \subseteq B$, se definesc:

- *imaginea lui X prin f* sau *imaginea directă a lui X prin f*, notată $f(X)$, este submulţimea lui B:

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$

- $f(A)$ se mai notează cu $Im(f)$ şi se numeşte *imaginea lui f*:

$$Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

- *preimaginea lui Y prin f* sau *imaginea inversă a lui Y prin f*, notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărţi, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f, care există numai atunci când f este inversabilă, deci numai atunci când f este bijectivă – a se vedea în cele ce urmează –, pe când preimaginea unei submulţimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcţie), este submulţimea lui A:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Definiţia 5.4. Fie A şi B mulţimi şi $f : A \to B$ o funcţie. f se zice:

- *injectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- *surjectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există (cel puţin un) $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists\, a \in A)\,(f(a) = b))$
  - $f(A) = B$
- *bijectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  - f este simultan injectivă şi surjectivă
  - pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists !\, a \in A)\,(f(a) = b))$

Funcţiile injective, surjective, respectiv bijective se mai numesc *injecţii*, *surjecţii*, respectiv *bijecţii*.

Când notăm $f : A \to B$, subînţelegem că A şi B sunt mulţimi.

Remarca 5.4. Pentru orice funcţie $f : A \to B$:

- $f^{-1}(B) = A$;
- $f(\emptyset) = \emptyset$ şi $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$;
- dacă $V \subseteq W \subseteq B$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$;
- pentru orice $M \subseteq A$, $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$, cu egalitate pentru f injectivă;
- pentru orice $N \subseteq B$, $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$, cu egalitate pentru f surjectivă;
- în schimb, pentru orice $N \subseteq f(A) = Im(f)$, $f(f^{-1}(N)) = N$.

Definiţia 5.5 (funcţia identitate a unei mulţimi). Pentru orice mulţime A, notăm cu id_A *funcţia identică a lui A* (numită şi *funcţia identitate a lui A* sau *identitatea lui A*): $id_A : A \to A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.

Definiţia 5.6 (compunerea de funcţii). Dacă A, B, C sunt mulţimi, iar $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ sunt funcţii, atunci *compunerea funcţiei g cu funcţia f* este funcţia notată cu $g \circ f$ şi definită astfel: $g \circ f : A \to C$, pentru orice $a \in A$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$.

Definiţia 5.7 (inversa unei funcţii). Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$. f se zice *inversabilă* ddacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$.

Remarca 5.5 (dacă există, inversa unei funcţii este unică). Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$ o funcţie inversabilă. Atunci există o unică funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$.

Definiţia 5.8. Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$ o funcţie inversabilă. Atunci unica funcţie $g : B \to A$ cu proprietăţile $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$ se notează cu f^{-1} ($f^{-1} = g : B \to A$) şi se numeşte *inversa lui f*.

Remarca 5.6. Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$. Atunci: f este inversabilă ddacă este bijectivă.

Exerciţiul 5.1 (caracterizarea surjectivităţii prin existenţa unei inverse la dreapta, şi a injectivităţii prin existenţa unei inverse la stânga – temă). Fie A şi B mulţimi nevide, iar $f : A \to B$. Atunci:

(i) f este surjectivă ddacă $(\exists\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, conform (iii) de mai jos, în caz afirmativ, g este injectivă;

(ii) f este bijectivă ddacă $(\exists!\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la dreapta g a lui f este $g = f^{-1}$, care este simultan inversă la dreapta şi inversă la stânga pentru f;

(iii) f este injectivă ddacă $(\exists\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, conform (i) de mai sus, în caz afirmativ, h este surjectivă;

(iv) f este bijectivă ddacă $(\exists!\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la stânga h a lui f este $h = f^{-1}$, care este simultan inversă la stânga şi inversă la dreapta pentru f;

(v) după cum ştim, f este bijectivă ddacă este inversabilă, i. e. f este bijectivă ddacă $(\exists\, j : B \to A)\,(f \circ j = id_B$ şi $j \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, j este unică, se notează cu f^{-1} şi se numeşte *inversa lui f*; dar, conform (i) şi (iii), avem şi următoarea caracterizare a bijectivităţii: f este bijectivă ddacă $(\exists\, g, h : B \to A)\,(f \circ g = id_B$ şi $h \circ f = id_A)$; în plus, conform (ii) şi (iv), în caz afirmativ, g şi h sunt unice şi $g = h = f^{-1}$.

Exerciţiul 5.2 (funcţiile imagine directă şi imagine inversă – temă). Fie A şi B mulţimi nevide, iar $f : A \to B$. Considerăm funcţiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), & (\forall\, M \subseteq A)\,(f_*(M) := f(M)); \\ f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), & (\forall\, N \subseteq B)\,(f^*(M) := f^{-1}(M)). \end{cases}$$

Atunci au loc următoarele echivalenţe:

(i) f este injectivă ddacă f_* este injectivă ddacă f^* este surjectivă ddacă $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$ (i. e. $(\forall\, M \subseteq A)\,(f^{-1}(f(M)) = M)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$;

(ii) f este surjectivă ddacă f_* este surjectivă ddacă f^* este injectivă ddacă $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$ (i. e. $(\forall\, N \subseteq B)\,(f(f^{-1}(N)) = N)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$;

(iii) din (i) şi (ii), obţinem: f este bijectivă ddacă f_* este bijectivă ddacă f^* este bijectivă ddacă f^* şi f_* sunt inverse una alteia ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) = B \setminus f(M))$.

6 Teoria cardinalelor

Definiţia 6.1. Două mulţimi A şi B se zic *echipotente* sau *cardinal echivalente* ddacă există o funcţie bijectivă de la A la B, fapt notat prin: $A \cong B$.

Definiţia 6.2. Pentru orice mulţime A, se numeşte *cardinalul lui A* sau *numărul cardinal al lui A* clasa tuturor mulţimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$.

Să observăm că:

- pentru orice mulţime A, $A \cong A$ (pentru că $id_A : A \to A$ este o bijecţie), deci $A \in |A|$

- pentru orice mulţimi A şi B, dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ şi $|A| = |B|$, i. e. orice mulţime C satisface $A \cong C$ ddacă satisface $B \cong C$; aşadar avem chiar echivalenţele: $A \cong B$ ddacă $B \cong A$ ddacă $|A| = |B|$
- pentru orice mulţimi A şi B, dacă $A \ncong B$, atunci nu există nicio mulţime C cu proprietăţile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) şi $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$); aşadar avem chiar echivalenţele: $A \ncong B$ ddacă $|A| \neq |B|$ ddacă $|A| \cap |B| = \emptyset$

Definiţia 6.3 (suma, produsul şi puterea de numere cardinale). Pentru orice mulţimi A şi B, avem, prin definiţie:

- $|A| + |B| := |A \coprod B|$
- $|A| \cdot |B| := |A \times B|$
- $|B|^{|A|} := |B^A|$

Propoziţia 6.1 (independenţa de reprezentanţi a operaţiilor cu numere cardinale). *Operaţiile cu numere cardinale, definite ca mai sus,* **nu depind de reprezentanţii claselor de cardinal echivalenţă**, *adică: pentru orice mulţimi A, A', B şi B' astfel încât $|A| = |A'|$ şi $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ şi $B \cong B'$), au loc:*

- $|A \coprod B| = |A' \coprod B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$

Definiţia 6.4 (inegalităţi între numere cardinale). Pentru orice mulţimi A şi B, notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecţie $j : A \to B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ şi $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecţie $j : A \to B$, dar nu există nicio bijecţie $f : A \to B$

Remarca 6.1. Definiţia anterioară este **independentă de reprezentanţii claselor de cardinal echivalenţă**, i. e., pentru orice mulţimi A, A', B şi B' astfel încât $|A| = |A'|$ şi $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ şi $B \cong B'$):

- există o injecţie de la A la B ddacă există o injecţie de la A' la B';
- $A \cong B$ ddacă $A' \cong B'$, aşadar: $A \ncong B$ ddacă $A' \ncong B'$.

Remarca 6.2. Dacă A şi B sunt mulţimi şi $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$, întrucât **funcţia incluziune:** $i : A \to B$, $i(a) := a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă.

Remarca 6.3 (definiţii echivalente pentru inegalităţi între numere cardinale). Pentru orice mulţimi A şi B:

- $|A| \leq |B|$ ddacă există o surjecţie $t : B \to A$ ddacă [există o mulţime C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]
- $|A| < |B|$ ddacă [există o surjecţie $t : B \to A$, dar nu există nicio bijecţie $g : B \to A$] ddacă [există o mulţime nevidă C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]

Remarca 6.4. Inegalitatea $\leq$ este corect definită ca mai sus, în sensul că, pentru orice mulţimi A şi B, $|A| = |B|$ ddacă [$|A| \leq |B|$ şi $|B| \leq |A|$].

Notaţia 6.1. Desigur, folosim şi notaţiile $\geq$ şi $>$, cu semnificaţia: $|B| \geq |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| \leq |B|$, respectiv $|B| > |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| < |B|$, pentru orice mulţimi A şi B.

Teorema 6.1 (Cantor). *Pentru orice mulţime X, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

O construcţie pentru mulţimea numerelor naturale:

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), printr–o construcţie echivalentă cu cea menţionată în primul curs:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

Mereu se consideră mulţimea având drept elemente toate mulţimile de la paşii anteriori: succesorul unui n este $n+1 := |\{0, 1, 2, \ldots, n\}|$. Iar mulţimea tuturor elementelor construite astfel, denumite *numere naturale*, se notează cu $\mathbb{N}$.

În **definiţiile** de mai sus pentru **numerele naturale** trebuie rezolvată, într–un fel sau altul, problema următoare: cu definiţia de mai sus, orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este o clasă proprie, care nu poate aparţine unei mulţimi sau clase. Putem înlocui aceste clase cu etichete ale lor, de exemplu chiar cu, reprezentanţii lor de mai sus: $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$.

Definiţia de mai sus pentru **mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale** arată corectitudinea **principiului inducţiei matematice**: dacă o submulţime $S \subseteq \mathbb{N}$ satisface:

- $0 \in S$,
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $[n \in S \Rightarrow n + 1 \in S]$,

atunci $S = \mathbb{N}$.

Având mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, se construiesc $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ şi se definesc operaţiile şi relaţiile de ordine pe aceste mulţimi în modul cunoscut din liceu.

Mulţimea numerelor naturale, $\mathbb{N}$, este o mulţime infinită, mai precis o mulţime numărabilă.

Notaţia 6.2 ($\aleph_0 := |\mathbb{N}|$). Cardinalul mulţimii numerelor naturale se notează cu $\aleph_0$, pronunţat "alef 0".

Definiţia 6.5. O mulţime X se zice *numărabilă* ddacă $|X| = \aleph_0$, i. e. ddacă $X \cong \mathbb{N}$.

Remarca 6.5. Orice $n \in \mathbb{N}$ satisface $n < \aleph_0$.

Definiţia 6.6. O mulţime X se zice *infinită*:

(i) *în sens Dedekind*, ddacă există $S \subsetneq X$ a. î. $S \cong X$

(ii) *în sens Cantor*, ddacă există $S \subseteq X$, a. î. S este numărabilă

(iii) *în sens obişnuit*, ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \ncong \{1, 2, \ldots, n\}$

Teorema 6.2. *Cele trei definiţii de mai sus ale mulţimilor infinite sunt echivalente.*

Desigur, o *mulţime finită* este, prin definiţie, o mulţime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiţia de mai sus a mulţimilor infinite *în sens obişnuit*:

Definiţia 6.7. O *mulţime finită* este o mulţime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Remarca 6.6. Conform definiţiei anterioare, **cardinalele finite**, i. e. cardinalele mulţimilor finite, sunt exact numerele naturale.

Remarca 6.7. Definiţia mulţimilor infinite în sens Cantor arată că $\aleph_0$ (i. e. cardinalul mulţimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde *cardinal infinit* (sau *cardinal transfinit*) înseamnă cardinal al unei mulţimi infinite.

Definiţia 6.8. O *mulţime cel mult numărabilă* este o mulţime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu $\aleph_0$).

Notaţia 6.3. Amintim următoarele notaţii consacrate pentru un segment al mulţimii $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, $\overline{a, b} := [a, b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \begin{cases} \{a, a+1, \ldots, b\}, & \text{dacă } a \leq b; \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$

Remarca 6.8. Mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi este numărabilă.

Mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale este numărabilă.

Definiţia 6.9. O *mulţime nenumărabilă* este, prin definiţie, o mulţime infinită care nu este numărabilă, i. e. o mulţime având cardinalul strict mai mare decât $\aleph_0$.

Remarca 6.9. Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este nenumărabilă.

Definiţia 6.10 ($\mathcal{C} := |\mathbb{R}|$). Cardinalul lui $\mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{C}$ şi se numeşte *puterea continuumului.*

- Conform celor de mai sus, $\aleph_0 < \mathcal{C}$.

Vom vedea că $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ pentru orice mulţime M.

Remarca 6.10 ($\mathcal{C} = 2^{\aleph_0}$). $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Remarca 6.11. Oricare ar fi mulţimile A şi B:

- după cum am observat mai sus, $A \subseteq B$ implică $|A| \leq |B|$;
- dacă B este finită şi $A \subsetneq B$, atunci $|A| < |B|$.

În plus, după cum arată definiţia lui Cantor a mulţimilor infinite:

- dacă $|A| \leq |B|$ şi A este infinită, atunci B este infinită;
- dacă $|A| \leq |B|$ şi B este finită, atunci A este finită.

Observaţia 6.1. Conform celor de mai sus, faptul că o mulţime A este finită se exprimă, în simboluri, prin: $|A| < \aleph_0$. Pentru comoditate, vom folosi şi notaţia $|A| < \infty$ pentru faptul că o mulţime A este finită.

7 Familii arbitrare de mulţimi

Definiţia 7.1 (familie de elemente ale lui A indexată de I: $(x_i)_{i\in I} \subseteq A$). Fie I şi A mulţimi arbitrare.

O *familie de elemente ale lui A indexată de I* este o funcţie $f : I \to A$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in A$, astfel că familia f se mai notează sub forma $(x_i)_{i\in I} \subseteq A$.

Elementele mulţimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i\in I}$.

- Există o singură familie vidă de elemente ale unei mulţimi arbitrare A, pentru că există o singură funcţie de la $\emptyset$ la A (a se vedea şi mai jos).
- Familia vidă nu este egală cu nicio familie nevidă, ci este egală doar cu ea însăşi.

Fie I şi A două mulţimi nevide, iar $(a_i)_{i\in I}$ şi $(b_i)_{i\in I}$ două familii de elemente din A indexate de I:

- $I \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$
- $(a_i)_{i\in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $a_i \in A$
- $(b_i)_{i\in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $b_i \in A$

Cele două familii sunt egale ddacă sunt egale pe componente:

$$(a_i)_{i\in I} = (b_i)_{i\in I} \quad \text{ddacă,} \quad \text{pentru orice } i \in I,\ a_i = b_i.$$

Familii arbitrare de mulţimi:

Definiţia 7.2. Fie T şi I două mulţimi arbitrare. Se numeşte *familie de submulţimi ale lui T indexată de I* o funcţie $f : I \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulţimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i\in I}$. Scriem $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificaţia că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulţimii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i\in I}$.

Pentru a generaliza definiţia anterioară la familii de mulţimi oarecare avem nevoie de acea definiţie mai cuprinzătoare a noţiunii de funcţie (a se vedea sistemul axiomatic pentru teoria mulţimilor din Cursul I), care permite unei funcţii f definite pe I să aibă drept codomeniu o clasă (nu neapărat o mulţime), anume clasa tuturor mulţimilor în acest caz.

Operaţii cu familii arbitrare de mulţimi:

Definiţia 7.3. Fie I o mulţime arbitrară şi $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi (părţi ale unei mulţimi T sau mulţimi arbitrare) indexată de I.

Se definesc următoarele operaţii:

- *reuniunea familiei* $(A_i)_{i\in I}$ este mulţimea notată $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid (\exists\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\exists\, i)\,(i \in I \text{ şi } x \in A_i)\}$$

- *intersecţia familiei* $(A_i)_{i\in I}$ este mulţimea notată $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid (\forall\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$$

- *produsul cartezian al familiei* $(A_i)_{i\in I}$ (numit şi *produsul direct al familiei* $(A_i)_{i\in I}$) este mulţimea notată $\prod\limits_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\} =$$
$$= \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow a_i \in A_i)\},$$

  sau, altfel scris (cu definiţia unei familii de elemente exemplificate mai sus pe familii de numere reale):

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A_i)\} =$$
$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i)\}.$$

Notaţia 7.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Produsul direct $\prod\limits_{i\in\overline{1,n}} A_i$ se mai notează cu $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$, iar un element $(a_i)_{i\in\overline{1,n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. În cazul particular în care $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, $\prod\limits_{i\in\overline{1,n}} A \overset{\text{notaţie}}{=} \prod\limits_{i=1}^{n} A \overset{\text{notaţie}}{=} A^n$.

Remarca 7.1 (puterile unei mulţimi: caz particular al produsului direct). În definiţia anterioară, dacă $I \neq \emptyset$ şi, pentru orice $i \in I$, $A_i = A$, atunci $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I} A = A$, aşadar $\prod\limits_{i\in I} A = \{f \mid f : I \to A, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A)\} = \{f \mid f : I \to A\} = A^I$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $|I| = n$, avem: $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n})\,(a_i \in A)\} = \{f \mid f : \overline{1,n} \to A\} = A^{\overline{1,n}} = A^I$.

Remarca 7.2. Pentru orice mulţimi A, I şi J, dacă $I \cong J$, atunci $A^I \cong A^J$. Acest fapt rezultă direct din independenţa de reprezentanţi a operaţiei de exponenţiere asupra numerelor cardinale.

Exerciţiul 7.1 (temă – distributivitatea produsului cartezian faţă de reuniuni şi intersecţii arbitrare). Fie A o mulţime, I o mulţime nevidă (de fapt poate fi şi vidă – vom vedea), iar $(B_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Să se demonstreze că:

- $A \times (\bigcup\limits_{i\in I} B_i) = \bigcup\limits_{i\in I}(A \times B_i)$ şi $(\bigcup\limits_{i\in I} B_i) \times A = \bigcup\limits_{i\in I}(B_i \times A)$
- $A \times (\bigcap\limits_{i\in I} B_i) = \bigcap\limits_{i\in I}(A \times B_i)$ şi $(\bigcap\limits_{i\in I} B_i) \times A = \bigcap\limits_{i\in I}(B_i \times A)$

Exerciţiul 7.2 (temă – distributivitatea generalizată a produsului cartezian faţă de intersecţie). Fie I şi J o mulţimi nevide (de fapt pot fi şi vide – vom vedea), iar $(A_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ o familie de mulţimi (indexată de $I \times J$; poate fi scrisă şi sub forma: $(A_{(i,j)})_{(i,j)\in I\times J}$). Să se demonstreze că:

$$\prod_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{i,j} = \bigcap_{j\in J}\prod_{i\in I} A_{i,j}$$

Amintesc că asociativitatea unei operaţii binare, cum sunt reuniunea şi intersecţia a două mulţimi, permite scrierea unui şir de astfel de operaţii fără paranteze: pentru orice mulţimi A_1, A_2, A_3:

- $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \overset{\text{notaţie}}{=} A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \overset{\text{notaţie}}{=} A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Propoziţia 7.1 (asociativitatea produsului direct ca operaţie binară). *Fie A_1, A_2, A_3 mulţimi arbitrare. Atunci: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^{3} A_i$, întrucât următoarele funcţii sunt bijecţii: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\varphi} (A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^{3} A_i$, pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ şi orice $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ şi $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$.*

În plus, fiecare dintre bijecţiile φ şi ψ se identifică cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenţie egalităţile: $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ şi orice $a_3 \in A_3$.

Prin urmare, putem scrie: $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^{3} A_i$.

Ca şi la funcţii aplicate unor perechi de elemente, folosim **licenţa de scriere (convenţia):** pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulţimi $A_1, A_2, \dots, A_n, B$, orice funcţie $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \to B$ şi orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \dots, a_n) := f((a_1, a_2, \dots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere).

Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenţie**, şi va fi clar la elementele căror mulţimi ne vom referi, prin notaţii de forma:

- $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ vom subînţelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ vom subînţelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \dots a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ vom subînţelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a_1, a_2, \dots a_n) \in A^n$ vom subînţelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînţelege: $a \in A$ şi $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînţelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt mulţimi, I este o mulţime nevidă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie (nevidă) de mulţimi.

Definiţia 7.4. Fie I o mulţime arbitrară şi $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi (părţi ale unei mulţimi T sau mulţimi arbitrare) indexată de I.

Se defineşte *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i \in I}$ ca fiind mulţimea notată $\coprod_{i \in I} A_i$ şi definită prin:

$$\coprod_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\})$$

Observaţia 7.1. Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulţimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin ataşarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulţimi a indicelui mulţimii respective.

Notaţia 7.2. Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii ataşati, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înţelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Notaţia 7.3. La fel ca la produsul direct, dacă avem o familie finită şi nevidă de mulţimi, $(A_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notaţiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i\in\overline{1,n}} A_i \overset{\text{notaţie}}{=} \coprod_{i=1}^{n} A_i \overset{\text{notaţie}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n$$

Remarca 7.3. Ultima dintre notaţiile de mai sus este permisă datorită **asociativităţii reuniunii disjuncte** ca operaţie binară (adică aplicată unei familii formate din două mulţimi): pentru orice mulţimi A_1, A_2, A_3, se arată imediat (folosind definiţia reuniunii disjuncte şi câte o identificare de indici, i. e. câte o bijecţie între mulţimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) \cong (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 \cong \coprod\limits_{i=1}^{3} A_i$, adică, prin identificarea acestor bijecţii cu identitatea, putem scrie: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) = (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 = \coprod\limits_{i=1}^{3} A_i$.

Aritatea unei operaţii a unei structuri algebrice (cu o singură *mulţime suport*, o singură mulţime de elemente) este **numărul argumentelor (operanzilor, variabilelor) acelei operaţii**. Dacă structura algebrică are mulţimea suport A, iar f este o operaţie n–ară pe A, cu $n \in \mathbb{N}$, atunci $f : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A} \to A$ (f este o funcţie cu n argumente din A, cu valori tot în A).

Remarca 7.4 (reuniunea familiei vide este vidă). Dacă recitim definiţia reuniunii unei familii arbitrare, observăm că reuniunea familiei vide este mulţimea elementelor pentru care există un $i \in \emptyset$ cu o anumită proprietate, condiţie care este întotdeauna falsă, deci reuniunea familiei vide este $\emptyset$.

Remarca 7.5 (produsul direct al familiei vide este un singleton). Cele de mai sus arată că produsul direct al familiei vide este mulţimea cu unicul element dat de unica funcţie de la $\emptyset$ la $\emptyset$, anume $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, adică produsul direct al familiei vide este singletonul $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Operaţiile zeroare sunt constantele structurilor algebrice: de exemplu, elementul neutru al unui grup G este o funcţie φ de la un singleton (anume $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$) la G: $\varphi : \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \to G$, iar o funcţie definită pe un singleton are o singură valoare ($\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in G$), deci poate fi identificată cu această unică valoare a ei, care este un element distins, o constantă din G: $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = e \in G$, şi identificăm $\varphi = e$.

Remarca 7.6 (reuniunea disjunctă a familiei vide este vidă). Definiţia reuniunii disjuncte a unei familii arbitrare de mulţimi arată că reuniunea disjunctă a familiei vide de mulţimi este egală cu, reuniunea familiei vide de mulţimi, care este $\emptyset$.

Exemplul 7.1. Dacă A şi B sunt mulţimi, iar $f : A \to B$ şi $g : A \to B$, iar pe mulţimea B avem, de exemplu, o operaţie binară $+$ şi o **relaţie binară** (vom vedea) $\leq$, atunci putem defini, **punctual**, operaţia $+$, respectiv relaţia $\leq$, între funcţiile f şi g, astfel:

- $f + g : A \to B$, pentru orice $x \in A$, $(f + g)(x) \overset{\text{definiţie}}{=} f(x) + g(x)$
- prin definiţie, $f \leq g$ ddacă, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.

Definiţia 7.5 (familii de funcţii între două mulţimi fixate A şi B). Fie I, A şi B mulţimi arbitrare. O *familie de funcţii de la A la B indexată de I* este o familie de elemente ale mulţimii B^A indexată de I, i. e. o funcţie $h : I \to B^A$ (pentru orice $i \in I$, $f_i \overset{\text{notaţie}}{=} h(i) : A \to B$).

Se pot defini şi operaţii cu familii arbitrare de funcţii, tot **punctual**:

Exemplul 7.2. Dacă I, A şi B sunt mulţimi nevide, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii de la A la B (adică, pentru orice $i \in I$, $f_i : A \to B$), B este o **mulţime ordonată** (vom vedea) şi, pentru orice $x \in A$, submulţimea $\{f_i(x) \mid i \in I\} \subseteq B$ are un cel mai mare element (un **maxim**), atunci putem defini funcţia:

$$\max\{f_i \mid i \in I\} : A \to B,$$

astfel: pentru orice $x \in A$,

$$(\max\{f_i \mid i \in I\})(x) \overset{\text{definiţie}}{=} \max\{f_i(x) \mid i \in I\}.$$

Definiţia 7.6 (familii de funcţii – cazul general – material facultativ). Fie I o mulţime arbitrară, iar $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ familii de mulţimi indexate de I.

O *familie de funcţii* $(f_i)_{i\in I}$ *indexată de* I cu $f_i : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$ este un element al produsului direct $\prod\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, adică o familie de elemente ale mulţimii $\bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$ indexată de I cu elementul de indice i aparţinând lui $B_i^{A_i}$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. o funcţie $h : I \to \bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, cu $f_i = h(i) : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Definiţia 7.7 (operaţiile cu familii arbitrare de funcţii generalizează compunerea de funcţii – material facultativ). Dacă I este o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulţimi, C este o mulţime, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii şi g este o funcţie a. î., pentru fiecare $i \in I$, $f_i : A_i \to B_i$, iar $g : \prod\limits_{i\in I} B_i \to C$, atunci putem defini funcţia $g((f_i)_{i\in I}) : \prod_{i\in I} A_i \to C$ prin: oricare ar fi $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, $g((f_i)_{i\in I}))((x_i)_{i\in I}) := g((f_i(x_i))_{i\in I})$: *operaţia* g (de aritate, i. e. număr de argumente, $|I|$) *aplicată familiei de funcţii* $(f_i)_{i\in I}$*, definită* **punctual**.

Cazul finit: $I = \overline{1,n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$: $g(f_1,\ldots,f_n) : A_1 \times \ldots \times A_n \to C$, pentru orice $x_1 \in A_1,\ldots,x_n \in A_n$, $g(f_1,\ldots,f_n)(x_1,\ldots,x_n) := g(f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n))$.

La fel se pot generaliza relaţiile binare între funcţii la relaţii de aritate arbitrară, chiar infinită, adică, pentru familia $(f_i)_{i\in I}$ de mai sus, submulţimi ale lui $\prod\limits_{i\in I} B_i$: relaţii de aritate (i. e. număr de argumente) $|I|$ – a se vedea în Cursul III definiţia unei relaţii n–are:

Definiţia 7.8 (material facultativ). Dacă I este o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulţimi, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii cu $f_i : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$, iar $R \subseteq \prod\limits_{i\in I} B_i$, atunci: *familia* $(f_i)_{i\in I}$ *de funcţii se află în relaţia* R, notat $(f_i)_{i\in I} \in R$, ddacă $(f_i(x_i))_{i\in I} \in R$ pentru fiecare $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} A_i$.

Cazul finit: $I = \overline{1,n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că $R \subseteq B_1 \times \ldots \times B_n$ este o relaţie n–ară: $(f_1,\ldots,f_n) \in R$ ddacă, pentru orice $x_1 \in A_1,\ldots,x_n \in A_n$, $(f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n)) \in R$.

Exerciţiul 7.3 (imagini şi preimagini de reuniuni şi intersecţii arbitrare de mulţimi printr–o funcţie). Fie A, B, I şi J mulţimi nevide (de fapt, pot fi şi vide – vom vedea), $f : A \to B$, iar $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ şi $(B_j)_{j\in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Să se demonstreze că:

(i) $f^{-1}(\bigcup\limits_{j\in J} B_j) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

(ii) $f(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$;

(iii) $f^{-1}(\bigcap\limits_{j\in J} B_j) = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

(iv) $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$;

(v) f este injectivă ddacă, pentru orice mulţime nevidă K şi orice $(M_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $f(\bigcap\limits_{k\in K} M_k) = \bigcap\limits_{k\in K} f(M_k)$.

(vi) Să se dea un exemplu pentru incluziune strictă la punctul (iv).

8 Funcţii caracteristice

Definiţia 8.1. Fie T o mulţime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim *funcţia caracteristică a lui* A *(raportat la* T*)*: $\chi_A : T \to \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$

În cazul particular în care mulţimea totală T este finită şi nevidă: $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcţia caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \ldots, \chi_A(x_n))$; acest vector de valori din mulţimea $\{0,1\}$ se numeşte *vectorul caracteristic al lui* A. A se observa că suma valorilor din acest vector este egală cu, cardinalul lui A: $\chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) + \ldots + \chi_A(x_n) = |A|$.

Propoziţia 8.1 (principiul includerii şi al excluderii). *Pentru orice n natural nenul şi orice mulţimi finite $M_1, M_2, \ldots, M_n$, are loc egalitatea:*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \ldots M_n| =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots i_s\leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots M_{i_s}|.$$

Şi dual: $|\bigcap_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \ldots +$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup M_2 \cap \ldots M_n| = \sum_{s=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots i_s\leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \ldots M_{i_s}|.$$

Propoziţia 8.2 (proprietăţile funcţiilor caracteristice). *Fie T o mulţime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcţia caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcţiile constante: $\mathbf{0} : T \to \{0,1\}$ şi $\mathbf{1} : T \to \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $\mathbf{0}(x) = 0$ şi $\mathbf{1}(x) = 1$.*

Atunci au loc proprietăţile:

- $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$ *şi* $\chi_T = \mathbf{1}$
- *pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$*
- *pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, are loc echivalenţa: $A \subseteq B$ ddacă $\chi_A \leq \chi_B$ (punctual, i. e.: pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$)*
- *pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, are loc echivalenţa: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$*
- *pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$*
- *pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$*
- *pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \max\{\chi_A, \chi_B\}$*
- *pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$*
- *pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T\setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$*
- $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Remarca 8.1. Fie T şi I două mulţimi nevide şi $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părţi ale lui T indexată de I. Atunci au loc:

- $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i\in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Remarca 8.2 (legile de distributivitate generalizată pentru $\cup$ şi $\cap$). Pentru orice mulţime nevidă I, orice mulţime A şi orice familie de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$, au loc egalităţile:

- **distributivitatea generalizată a $\cup$ faţă de $\cap$:** $A \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i)$
- **distributivitatea generalizată a $\cap$ faţă de $\cup$:** $A \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(A \cap A_i)$

Propoziţia 8.3. *Pentru orice mulţime nevidă T, $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T$.*

Corolarul 8.1. *Pentru orice mulţime T, $|\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.*

A se vedea precizările despre **examen** şi **temele obligatorii** de la sfârşitul Cursului II.

Breviar pentru Cursurile III şi IV de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

1 Relaţii binare

Relaţii n–are, relaţii binare:

Definiţia 1.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulţimi. Se numeşte *relaţie n–ară* între mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o submulţime a produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Observaţia 1.1. Pentru $n = 1$ în definiţia anterioară se obţine noţiunea de *relaţie unară* pe o mulţime: prin definiţie, o *relaţie unară* pe o mulţime A este o submulţime a lui A.

Pentru $n = 2$ în definiţia anterioară se obţine noţiunea de *relaţie binară*.

Definiţia 1.2. Fie A şi B două mulţimi. Se numeşte *relaţie binară* între A şi B o submulţime R a produsului direct $A \times B$.

Pentru fiecare $a \in A$ şi fiecare $b \in B$, faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează cu $a\,R\,b$ şi se citeşte: *a este în relaţia R cu b.*

Exemplul 1.1. Pentru orice mulţimi A şi B, produsul direct $A \times B$ este o relaţie binară între A şi B (evident, cea mai mare în sensul incluziunii dintre toate relaţiile binare între A şi B).

Tipuri de relaţii binare:

Definiţia 1.3 (tipuri de relaţii binare). Fie A şi B mulţimi, iar $R \subseteq A \times B$ (i. e. R o relaţie binară între A şi B). R se zice:

- *funcţională* ddacă: pentru orice $a \in A$ şi orice $b_1, b_2 \in B$, dacă $a\,R\,b_1$ şi $a\,R\,b_2$, atunci $b_1 = b_2$; o relaţie funcţională între A şi B se mai numeşte *funcţie parţială* de la A la B;
- *totală* ddacă: pentru orice $a \in A$, există $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$; o relaţie funcţională totală între A şi B se mai numeşte *funcţie* de la A la B;
- *injectivă* ddacă, pentru orice $a_1, a_2 \in A$ şi orice $b \in B$, dacă $a_1\,R\,b$ şi $a_2\,R\,b$, atunci $a_1 = a_2$;
- *surjectivă* ddacă, pentru orice $b \in B$, există $a \in A$, astfel încât $a\,R\,b$.

Remarca 1.1. Definiţia de mai sus a unei funcţii este exact definiţia din cursul al doilea, în care identificăm o funcţie cu graficul ei: o funcţie $f = (A, G, B)$ se identifică cu $G \subseteq A \times B$.

De asemenea, cu această identificare, noţiunea de funcţie injectivă, respectiv surjectivă, respectiv bijectivă, coincide cu aceea de relaţie funcţională totală injectivă, respectiv surjectivă, respectiv injectivă şi surjectivă.

Într–adevăr:

Remarca 1.2. Pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţie binară $R \subseteq A \times B$:

- R este o **relaţie funcţională (funcţie parţială)** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel mult un $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie totală** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel puţin un $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- aşadar, R este o **funcţie** ddacă este o **relaţie funcţională totală**, i. e.: pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie injectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel puţin un $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie injectivă şi surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există un unic $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie funcţională totală injectivă/surjectivă/injectivă şi surjectivă** ddacă este o **funcţie injectivă/surjectivă/bijectivă**, respectiv.

Definiţia 1.4. Pentru orice mulţime A,

$$\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$$

este o relaţie binară între A şi A, numită *diagonala lui A*.

Remarca 1.3 (Δ_A = egalitatea pe A). Pentru orice mulţime A, Δ_A este chiar **relaţia de egalitate pe** A, adică, pentru orice $a, b \in A$, avem:

$$a \, \Delta_A \, b \text{ ddacă } a = b.$$

Remarca 1.4 ($\Delta_A = id_A$). Pentru orice mulţime A, Δ_A este o funcţie, chiar o funcţie bijectivă, anume **funcţia identică a lui A (identitatea lui A)**:

$$\Delta_A = id_A : A \to A, \text{ pentru orice } a \in A, \, id_A(a) = a.$$

Operaţii cu relaţii binare:

- Relaţiile sunt mulţimi, aşadar li se pot aplica operaţiile obişnuite cu mulţimi: reuniunea, intersecţia, diferenţa etc..
- Astfel, pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţii binare R şi S între A şi B: $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $\overline{R} := (A \times B) \setminus R$ (*complementara* lui R) sunt tot relaţii binare între A şi B.

Definiţia 1.5. Pentru orice mulţimi A, B, A', B' şi orice relaţii binare $R \subseteq A \times B$ şi $R' \subseteq A' \times B'$, se defineşte *produsul direct* al relaţiilor R şi R', notat $R \times R'$, ca fiind următoarea relaţie binară între $A \times A'$ şi $B \times B'$: $R \times R' := \{((a, a'), (b, b')) \mid a \in A, a' \in A', b \in B, b' \in B', (a, b) \in R, (a', b') \in R'\} \subseteq (A \times A') \times (B \times B')$.

Generalizare: pentru orice mulţime I, orice familii de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$ şi $(B_i)_{i \in I}$ şi orice familie de relaţii binare $(R_i)_{i \in I}$, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, se defineşte *produsul direct* al familiei $(R_i)_{i \in I}$, notat $\prod\limits_{i \in I} R_i$, ca fiind următoarea relaţie binară între $\prod\limits_{i \in I} A_i$ şi $\prod\limits_{i \in I} B_i$: $\prod\limits_{i \in I} R_i := \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \mid (\forall \, i \in I) \, (a_i \in A_i, b_i \in B_i \text{ şi } a_i \, R_i \, b_i)\} \subseteq \prod\limits_{i \in I} A_i \times \prod\limits_{i \in I} B_i$.

Observaţia 1.2. Definiţia produsului direct de relaţii binare este diferită de definiţia produsului direct de mulţimi al aceloraşi relaţii binare, adică de produsul lor direct ca mulţimi. Mulţimile obţinute prin cele două tipuri de produs direct sunt în bijecţie, dar nu sunt egale, dacă nu considerăm produsul direct de mulţimi ca fiind comutativ, prin asimilarea bijecţiei în cauză cu identitatea.

Remarca 1.5 (facultativă). Cu notaţiile din definiţia anterioară, dacă avem încă o pereche de relaţii binare $S \subseteq A \times B$ şi $S' \subseteq A' \times B'$, atunci, în cazul în care R, R', S şi S' sunt nevide:

$$R \times R' = S \times S' \text{ ddacă } [R = S \text{ şi } R' = S']$$

În general, dacă avem încă o familie de relaţii binare $(S_i)_{i \in I}$, cu $S_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, atunci, în cazul în care $I \neq \emptyset$ şi, pentru fiecare $i \in I$, $R_i \neq \emptyset$ şi $S_i \neq \emptyset$:

$$\prod_{i \in I} R_i = \prod_{i \in I} S_i \;\Leftrightarrow\; (\forall \, i \in I) \, (R_i = S_i)$$

Într–adevăr, dacă ne referim la cazul general, echivalenţa de mai sus rezultă, prin dublă implicaţie, din faptul că:

- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} R_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in R_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} S_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in S_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $\prod\limits_{i \in I} R_i = \prod\limits_{i \in I} S_i$ ddacă are loc echivalenţa: $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} R_i \Leftrightarrow ((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} S_i$;
- pentru fiecare $i \in I$, $R_i = S_i$ ddacă are loc echivalenţa: $(a_i, b_i) \in R_i \Leftrightarrow (a_i, b_i) \in S_i$.

Remarca 1.6 (facultativă). Desigur, şi pentru două familii de mulţimi nevide $(A_i)_{i \in I}$ şi $(B_i)_{i \in I}$ indexate de aceeaşi mulţime nevidă I, avem:

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} B_i \;\Leftrightarrow\; (\forall \, i \in I) \, (A_i = B_i),$$

pentru că, având o familie de elemente arbitrare $(x_i)_{i \in I}$, avem: $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \;\Leftrightarrow\; (\forall \, i \in I) \, (x_i \in A_i)$, şi la fel pentru $(B_i)_{i \in I}$, de unde rezultă că: $(A_i)_{i \in I}$ şi $(B_i)_{i \in I}$ au aceleaşi elemente ddacă, pentru fiecare $i \in I$, A_i şi B_i au aceleaşi elemente.

Definiţia 1.6. Pentru orice mulţimi A, B, C şi orice relaţii binare $R \subseteq A \times B$ şi $S \subseteq B \times C$, se defineşte *compunerea lui S cu R* ca fiind relaţia binară între A şi C notată $S \circ R$ şi definită prin: $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, (\exists b \in B) [(a, b) \in R \text{ şi } (b, c) \in S]\} \subseteq A \times C$.

Remarca 1.7 (temă). Diagonala unei mulţimi este element neutru la compunere şi la dreapta, şi la stânga, i. e., pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţie binară $R \subseteq A \times B$, $R \circ \Delta_A = R$ şi $\Delta_B \circ R = R$.

Remarca 1.8. Compunerea ca relaţii binare a două funcţii coincide cu compunerea lor ca funcţii. În particular, rezultatul ei este tot o funcţie.

Definiţia 1.7. Pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţie binară $R \subseteq A \times B$, se defineşte *inversa lui R*, notată R^{-1}, ca fiind următoarea relaţie binară între B şi A:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$$

Altfel scris: prin definiţie, $R^{-1} \subseteq B \times A$, a. î., pentru orice $a \in A$ şi orice $b \in B$:

$$b\, R^{-1}\, a \Leftrightarrow a\, R\, b$$

Remarca 1.9. A se observa faptul că, pentru orice relaţie binară R, se defineşte inversa ei R^{-1}, spre deosebire de cazul inverselor de funcţii, care se definesc numai pentru funcţiile bijective, această restricţie provenind atât din constrângerea ca relaţia binară să fie funcţie, cât si din constrângerea ca inversa ei să fie tot funcţie (a se vedea o remarcă de mai jos, care arată că definiţia funcţiei este exact definiţia bijectivităţii (i. e. a injectivităţii şi surjectivităţii) în oglindă).

Remarca 1.10. Este imediat faptul că inversa ca relaţie a unei funcţii bijective este inversa ei ca funcţie (a se vedea şi remarca următoare).

Remarca 1.11 (temă). Fie A, B mulţimi şi $R \subseteq A \times B$. Atunci:

- R este injectivă ddacă R^{-1} este funcţională;
- R este surjectivă ddacă R^{-1} este totală;
- prin urmare: R este injectivă şi surjectivă ddacă R^{-1} este funcţie.

Remarca 1.12. A se observa că o relaţie binară injectivă şi surjectivă nu este neapărat o funcţie (bijectivă), pentru că nu i se impune condiţia de a fi funcţională, şi nici cea de a fi totală.

Exerciţiul 1.1 (temă). Fie A, B mulţimi şi $R \subseteq A \times B$. Dacă R este injectivă, atunci:

- $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$;
- $R^{-1} \circ R = \Delta_A$ ddacă R este totală.

Remarca 1.13 (asociativitatea compunerii de relaţii binare). Fie A, B, C, D mulţimi, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ şi $T \subseteq C \times D$. Atunci:

- $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Remarca 1.14. Fie A, B, C mulţimi, $R \subseteq A \times B$ şi $S \subseteq B \times C$. Atunci:

- $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Exerciţiul 1.2 (temă). Fie A, B, C şi I mulţimi nevide (de fapt, pot fi şi vide – vom vedea), $P \subseteq C \times A$, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq A \times B$ şi $T \subseteq B \times C$ relaţii binare, iar $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relaţii binare de la A la B, i. e., pentru orice $i \in I$, $R_i \subseteq A \times B$.

Să se demonstreze că:

- $R \circ \emptyset = \emptyset = \emptyset \circ R$
- $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$
- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $R \subseteq S$ ddacă $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

- $R = S$ ddacă $R^{-1} = S^{-1}$
- **inversa comută cu reuniunea şi cu intersecţia:**

  (i) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

  (ii) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

  Generalizare:

  (i) $(\bigcup\limits_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i \in I} R_i^{-1}$

  (ii) $(\bigcap\limits_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i \in I} R_i^{-1}$

- **compunerea este distributivă faţă de reuniune, la stânga şi la dreapta:**

  (i) $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$

  (ii) $(R \cup S) \circ P = (R \circ P) \cup (S \circ P)$

  Generalizare:

  (i) $T \circ (\bigcup\limits_{i \in I} R_i) = \bigcup\limits_{i \in I} (T \circ R_i)$

  (ii) $(\bigcup\limits_{i \in I} R_i) \circ P = \bigcup\limits_{i \in I} (R_i \circ P)$

- **compunerea nu este distributivă faţă de intersecţie (contraexemplu pentru această distributivitate:** dacă $x \in A$, $y, z \in B$ cu $y \neq z$ şi $t \in C$, iar $R := \{(x, y)\}$, $S := \{(x, z)\}$ şi $T := \{(y, t), (z, t)\}$, atunci: $T \circ (R \cap S) = T \circ \emptyset = \emptyset \neq \{(x, t)\} = T \circ R = T \circ S = (T \circ R) \cap (T \circ S)$)
- **compunerea (la stânga şi la dreapta) păstrează incluziunile nestricte:**

  (i) $R \subseteq S$ implică $T \circ R \subseteq T \circ S$ (dar $R \subsetneq S$ nu implică $T \circ R \subsetneq T \circ S$)

  (ii) $R \subseteq S$ implică $R \circ P \subseteq S \circ P$ (dar $R \subsetneq S$ nu implică $R \circ P \subsetneq S \circ P$)

  prin urmare:

  (i) $T \circ (\bigcap\limits_{i \in I} R_i) \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} (T \circ R_i)$

  (ii) $(\bigcap\limits_{i \in I} R_i) \circ P \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} (R_i \circ P)$

Să ne amintim definiţia puterilor unei mulţimi:
Fie I o mulţime arbitrară şi $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi.
Amintesc definiţia **produsului cartezian al familiei** $(A_i)_{i \in I}$ (numit şi **produsul direct al familiei** $(A_i)_{i \in I}$):

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall\, i \in I)\, (a_i \in A_i)\} =$$

$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\, (f(i) \in A_i)\}.$$

Fie A o mulţime arbitrară.
Amintesc că **puterile unei mulţimi** sunt un caz particular al produsului direct, anume cazul $A_i = A$, pentru orice $i \in I$:

$$A^I = \{f \mid f : I \to A\} = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall\, i \in I)\, (a_i \in A)\} = \prod_{i \in I} A.$$

Notaţia următoare, a *puterii a* n*–a a unei mulţimi* A, A^n, pentru un număr natural nenul n, corespunde cazului particular $I = \overline{1, n}$ şi $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$.

Notaţia 1.1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice mulţime A, se notează:

$$A^n := A^{\overline{1,n}} = \{f \mid f : \overline{1,n} \to A\} =$$

$$= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n})\,(a_i \in A)\} = \prod_{i=1}^{n} A = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ de } A}.$$

Caz particular: pentru $n = 2$: $A^2 = A \times A$.

2 Relaţii binare pe o mulţime

În cele ce urmează, când nu se va menţiona altfel, A va fi o mulţime arbitrară.

Definiţia 2.1. Se numeşte *relaţie binară pe* A o relaţie binară între A şi A, i. e. o submulţime a produsului direct $A^2 = A \times A$.

Exemplul 2.1. A^2 şi Δ_A sunt relaţii binare pe A.

Remarca 2.1. Dacă A este finită şi nevidă, iar R este o relaţie binară pe A, atunci perechea (A, R) este un graf orientat (cu mulţimea vârfurilor A şi mulţimea arcelor R), aşadar relaţia binară R poate fi reprezentată grafic chiar prin acest graf orientat.

3 Operaţii cu relaţii binare pe o mulţime

Definiţia 3.1 (puterile naturale ale unei relaţii binare pe o mulţime). Pentru orice relaţie binară $R \subseteq A \times A$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, se defineşte *puterea a n–a a lui R*, notată $R^n \subseteq A \times A$, recursiv, astfel:

$$\begin{cases} R^0 := \Delta_A; \\ R^{n+1} := R^n \circ R, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarca 3.1. Asociativitatea compunerii de relaţii binare permite următoarea scriere fără paranteze pentru orice relaţie binară R pe A şi orice număr natural nenul n:

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n \text{ de } R}.$$

Nota 3.1. Pentru o relaţie binară R şi un $n \in \mathbb{N}$, se va deduce din context dacă notaţia R^n semnifică: $\underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n \text{ de } R}$ (operaţie care poate fi definită numai dacă R este o relaţie binară pe o mulţime, nu între două mulţimi diferite) sau produsul direct de relaţii binare $\underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{n \text{ de } R}$ sau produsul direct de mulţimi $\underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{n \text{ de } R}$.

Remarca 3.2. $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$.

Remarca 3.3. Pentru orice relaţie binară $R \subseteq A \times A$ şi orice $n \in \mathbb{Z}$:

$$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n.$$

Remarca 3.4 (comutarea şi adunarea exponenţilor întregi de acelaşi semn la compunerea puterilor unei relaţii binare pe o mulţime – facultativă). Fie $R \subseteq A^2$ şi n, k două numere întregi de acelaşi semn, adică $n, k \geq 0$ sau $n, k \leq 0$. Atunci:

$$R^n \circ R^k = R^k \circ R^n = R^{n+k}.$$

4 Tipuri de relaţii binare pe o mulţime

Definiţia 4.1 (tipuri de relaţii binare pe o mulţime). Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relaţie binară pe A). R se zice:

- *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;

- *ireflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, $(a, a) \notin R$, i. e. nu există $a \in A$ cu aRa;
- *simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *antisimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb şi bRa, atunci $a = b$;
- *asimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă $(a, b) \in R$, atunci $(b, a) \notin R$;
- *tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb şi bRc, atunci aRc;
- *totală* (într-un al doilea sens) ddacă, pentru orice $a, b \in A$ cu $a \neq b$, au loc aRb sau bRa;
- *completă* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, au loc aRb sau bRa.

Observaţia 4.1. Acest **al doilea sens** pentru denumirea de **relaţie binară totală** este specific **relaţiilor binare pe o mulţime**. **Primul sens** a fost întâlnit la **relaţii binare în general (relaţii binare între două mulţimi)**, şi **nu coincide cu sensul de aici** pe acest caz particular al relaţiilor binare pe o mulţime.

Remarca 4.1 (caracterizarea acestor tipuri de relaţii binare prin operaţii cu mulţimi). Fie R o relaţie binară pe A. Atunci au loc:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap R = \emptyset$;
- în cazul în care $A \neq \emptyset$: dacă R este ireflexivă, atunci R nu este reflexivă, dar nu şi reciproc;
- R este simetrică ddacă $R \subseteq R^{-1}$ ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- R este simetrică şi antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- singura relaţie binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică şi antisimetrică este Δ_A;
- R este asimetrică ddacă $R \cap R^{-1} = \emptyset$;
- dacă R este asimetrică, atunci R este antisimetrică, dar nu şi reciproc;
- singura relaţie binară pe A care este simultan simetrică şi asimetrică este $\emptyset$;
- dacă R este asimetrică, atunci R este ireflexivă, dar nu şi reciproc;
- R este asimetrică şi tranzitivă ddacă R este ireflexivă şi tranzitivă;
- R este tranzitivă ddacă $R^2 \subseteq R$;
- dacă R este reflexivă, atunci $R \subseteq R^2$;
- R este totală ddacă $\Delta_A \cup R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă $R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă R este reflexivă şi totală.

Definiţia 4.2 (tipuri de relaţii binare pe o mulţime). Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relaţie binară pe A). R se numeşte:

- *(relaţie de) preordine* ddacă e reflexivă şi tranzitivă;
- *(relaţie de) echivalenţă* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relaţie reflexivă, simetrică şi tranzitivă;
- *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă e o preordine antisimetrică, i. e. o relaţie reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică;
- *(relaţie de) ordine totală* ddacă e simultan o relaţie de ordine şi o relaţie totală (în acest al doilea sens de mai sus);

- *(relaţie de) ordine strictă* ddacă e asimetrică şi tranzitivă.

Remarca 4.2 (consecinţă a remarcii anterioare). • Întrucât orice relaţie de ordine este reflexivă, rezultă că o relaţie de ordine este totală (în acest al doilea sens) ddacă este completă.

- Întrucât Δ_A este tranzitivă, rezultă că Δ_A este unica relaţie binară pe A care este simultan relaţie de echivalenţă şi relaţie de ordine.
- Dacă R este o preordine, atunci $R = R^2$.

Remarca 4.3. Orice relaţie de ordine este reflexivă, şi orice relaţie de ordine strictă este ireflexivă.

Nu există relaţii binare pe o mulţime nevidă care să fie simultan reflexive şi ireflexive. Prin urmare, nu există relaţii binare pe o mulţime nevidă care să fie simultan relaţii de ordine şi relaţii de ordine strictă.

A se vedea, în Cursul III, secţiunea facultativă despre matrici caracteristice.

5 Despre produsul direct de relaţii binare pe o mulţime

Lema 5.1. *Fie I o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ şi $(C_i)_{i\in I}$ familii de mulţimi, iar $(Q_i)_{i\in I}$, $(R_i)_{i\in I}$ şi $(S_i)_{i\in I}$ familii de relaţii binare, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, $S_i \subseteq A_i \times B_i$ şi $Q_i \subseteq B_i \times C_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:*

- $\prod\limits_{i\in I} R_i \subseteq \prod\limits_{i\in I} S_i$ *ddacă* $(\exists\, i_0 \in I)\,(R_{i_0} = \emptyset)$ *sau* $(\forall\, i \in I)\,(R_i \subseteq S_i)$;
- $\prod\limits_{i\in I} R_i = \prod\limits_{i\in I} S_i$ *ddacă* $(\exists\, i_0, i_1 \in I)\,(R_{i_0} = \emptyset, S_{i_1} = \emptyset)$ *sau* $(\forall\, i \in I)\,(R_i = S_i)$;
- $(\prod\limits_{i\in I} R_i) \cap (\prod\limits_{i\in I} S_i) = \prod\limits_{i\in I}(R_i \cap S_i)$ *(şi la fel pentru $\cup$, $\setminus$, Δ în loc de $\cap$)*;
- $(\prod\limits_{i\in I} Q_i) \circ (\prod\limits_{i\in I} R_i) = \prod\limits_{i\in I}(Q_i \circ R_i)$;
- $(\prod\limits_{i\in I} R_i)^{-1} = \prod\limits_{i\in I} R_i^{-1}$.

Propoziţia 5.1. *Fie I o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi şi $(R_i)_{i\in I}$ o familie de relaţii binare, cu $\emptyset \neq R_i \subseteq A_i^2 = A_i \times A_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:*

(i) $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este reflexivă ddacă R_i este reflexivă, pentru fiecare $i \in I$*

(ii) dacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} ireflexivă, atunci $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este ireflexivă*

(iii) $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este simetrică ddacă R_i este simetrică, pentru fiecare $i \in I$*

(iv) $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este antisimetrică ddacă R_i este antisimetrică, pentru fiecare $i \in I$*

(v) dacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} asimetrică, atunci $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este asimetrică*

(vi) $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este tranzitivă ddacă R_i este tranzitivă, pentru fiecare $i \in I$*

Prin urmare:

- $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este o preordine, respectiv echivalenţă, respectiv ordine, ddacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i este o preordine, respectiv echivalenţă, respectiv ordine;*

- $\prod_{i \in I} R_i$ *este o ordine strictă ddacă există* $i_0 \in I$ *a.î.* R_{i_0} *este o ordine strictă şi, pentru fiecare* $i \in I \setminus \{i_0\}$, R_i *este o ordine,*

pentru că: dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i *este antisimetrică, atunci:* $\prod_{i \in I} R_i$ *este asimetrică ddacă există* $i_0 \in I$ *cu* R_{i_0} *asimetrică.*

6 Relaţii de echivalenţă şi partiţii a unei mulţimi

Exemplul 6.1. Δ_A şi A^2 sunt relaţii de echivalenţă pe A, anume cea mai mică şi, respectiv, cea mai mare relaţie de echivalenţă pe A, în sensul incluziunii, adică raportat la relaţia de incluziune între mulţimi.

Definiţia 6.1. Fie A nevidă şi $(A_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de submulţimi ale lui A. Familia $(A_i)_{i \in I}$ se numeşte *partiţie* a lui A ddacă satisface următoarele condiţii:

(i) pentru orice $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$

(ii) pentru orice $i, j \in I$, dacă $i \neq j$, atunci $A_i \cap A_j = \emptyset$ (i. e. mulţimile din familia $(A_i)_{i \in I}$ sunt două câte două disjuncte)

(iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Propoziţia 6.1. *Fie* A *nevidă şi* $(A_i)_{i \in I}$ *o partiţie a lui* A*. Atunci, pentru orice* $x \in A$*, există un unic* $i_0 \in I$*, a. î.* $x \in A_{i_0}$.

Observaţia 6.1. În cele ce urmează vom defini **clasele unei relaţii de echivalenţă**. Aici vom folosi cuvântul **clasă** cu un alt sens decât acela din Cursul I, unde am vorbit despre teoria axiomatică a mulţimilor. Aici, toate clasele de echivalenţă sunt mulţimi, în această accepţiune a relaţiilor binare ca fiind definite între mulţimi. Dacă adoptăm definiţia relaţiilor binare din sistemul axiomatic prezentat în Cursul I, care permitea unei relaţii binare să fie definită între două clase, atunci putem spune că relaţia de **cardinal echivalenţă**, studiată în Cursul II, este o relaţie de echivalenţă pe **clasa mulţimilor**, iar clasele ei de echivalenţă sunt **clase proprii, cu excepţia clasei lui** $\emptyset$ (de data aceasta, **clase** în sensul din Cursul I).

Pentru cele ce urmează, vom considera mulţimea A nevidă, şi o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe A, i. e.:

- $\sim$ este o relaţie binară pe A: $\sim \subseteq A^2$
- $\sim$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \sim x$
- $\sim$ este **simetrică**: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \sim y$, atunci $y \sim x$
- $\sim$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, dacă $x \sim y$ şi $y \sim z$, atunci $x \sim z$

Să observăm că, în definiţia simetriei, putem interschimba x şi y şi continua seria de implicaţii, obţinând implicaţie dublă, adică: $\sim$ este **simetrică** ddacă, pentru orice $x, y \in A$, are loc echivalenţa: $x \sim y$ ddacă $y \sim x$.

Definiţia 6.2. Pentru fiecare $x \in A$, definim *clasa de echivalenţă a lui* x *raportat la* $\sim$ ca fiind următoarea submulţime a lui A, notată cu $\widehat{x}$ sau cu $x/_\sim$: $\widehat{x} := x/_\sim := \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Remarca 6.1. Observăm că simetria lui $\sim$ ne asigură de faptul că: pentru orice $x \in A$, $\widehat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\}$.

Propoziţia 6.2 (proprietăţile claselor de echivalenţă). *(i) Pentru orice* $x \in A$, $x \in \widehat{x}$*, şi, aşadar,* $\widehat{x} \neq \emptyset$.

(ii) Pentru orice $x, y \in A$*, avem:*

- *dacă* $x \sim y$*, atunci* $\widehat{x} = \widehat{y}$*;*
- *dacă* $(x, y) \notin \sim$*, atunci* $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$.

Propoziţia 6.3 (proprietăţile claselor de echivalenţă). *Pentru orice* $x, y \in A$*:*

- $x \sim y$ *ddacă* $y \sim x$ *ddacă* $x \in \widehat{y}$ *ddacă* $y \in \widehat{x}$ *ddacă* $\widehat{x} = \widehat{y}$*;*

- $(x, y) \notin \sim$ *ddacă* $(y, x) \notin \sim$ *ddacă* $x \notin \widehat{y}$ *ddacă* $y \notin \widehat{x}$ *ddacă* $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$.

Definiţia 6.3. Fiecare $x \in A$ se numeşte *reprezentant al clasei* $\widehat{x}$.

Remarca 6.2 (proprietăţile claselor de echivalenţă). Pentru fiecare $x, y \in A$, y este reprezentant al clasei $\widehat{x}$ ddacă $y \in \widehat{x}$.

Definiţia 6.4. Mulţimea claselor de echivalenţă ale lui $\sim$ se notează cu $A/\sim$ şi se numeşte *mulţimea factor a lui A prin $\sim$* sau *mulţimea cât a lui A prin $\sim$*: $A/\sim = \{\widehat{x} \mid x \in A\}$.

Observaţia 6.2. Denumirile de **mulţime factor** şi **mulţime cât** se datorează faptului că mulţimea $A/\sim$ din definiţia anterioară se obţine prin "împărţirea mulţimii A în clasele de echivalenţă ale lui $\sim$" (a se vedea următoarea propoziţie).

Propoziţia 6.4 (clasele de echivalenţă formează o partiţie). *Mulţimea factor $A/\sim$ este o partiţie a lui A.*

Remarca 6.3. Funcţia $p : A \to A/\sim$, definită prin: pentru orice $x \in A$, $p(x) := \widehat{x}$, este surjectivă (sigur că este corect definită, pentru că $\widehat{x}$ este unic determinat de x, oricare ar fi $x \in A$).

Definiţia 6.5. Cu notaţiile de mai sus, funcţia p se numeşte *surjecţia canonică de la A la $A/\sim$*.

Notaţia 6.1. Notăm cu:

- $\mathrm{Part}(A)$ mulţimea partiţiilor lui A;
- $\mathrm{Eq}(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe mulţimea A.

Propoziţia 6.5. *Mulţimea partiţiilor unei mulţimi nevide este în bijecţie cu mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe acea mulţime.*

Într–adevăr, funcţiile:

$$\mathrm{Eq}(A) \underset{\varphi}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Part}(A)$$

definite prin:

- pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, $\varphi(\sim) = A/\sim$,
- pentru orice $(A_i)_{i \in I} \in \mathrm{Part}(A)$, $\psi((A_i)_{i \in I}) = \{(x, y) \mid x, y \in A, (\exists\, i \in I)\, (x, y \in A_i)\} = \bigcup_{i \in I} A_i^2 \subseteq A^2$,

sunt inverse una alteia, aşadar sunt inversabile, deci bijective.

- În cazul **morfismelor** între structuri algebrice (de acelaşi tip) (i. e. funcţiile care comută cu operaţiile acelor structuri algebrice), **nucleul** se defineşte în funcţie de un element distins din structura codomeniu, cum este elementul neutru la grupuri.
- În cazul **funcţiilor**, definite între două mulţimi pe care nu se dau structuri algebrice, pentru definirea unei noţiuni de **nucleu**, o funcţie nu poate fi raportată decât la ea însăşi, de unde şi denumirea din definiţia următoare.
- Pentru cele ce urmează, fie A şi B două mulţimi nevide arbitrare şi $f : A \to B$ o funcţie arbitrară.
- Următoarea diagramă (reprezentare grafică) este doar pentru intuiţie:

$$A \underset{f}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

Definiţia 6.6 (nucleul de săgeată dublă). Se numeşte *nucleul (de săgeată dublă al) lui f* următoarea relaţie binară pe A, notată $Ker(f)$:

$$Ker(f) := \{(x, y) \mid x, y \in A, f(x) = f(y)\} \subseteq A^2.$$

- În cazul morfismelor, au loc proprietăţi de forma: morfismul este injectiv ddacă nucleul său este trivial.
- Şi aici avem o proprietate de acest tip:

Remarca 6.4. (i) $Ker(f) \supseteq \Delta_A$;

(ii) $Ker(f) = \Delta_A$ ddacă f este injectivă.

Remarca 6.5. $Ker(f) = \{(x, y) \mid x, y \in A, (f(x), f(y)) \in \Delta_B\}$ este o relaţie de echivalenţă pe A.

- Nucleele de săgeată dublă ale morfismelor între structuri algebrice de acelaşi tip sunt **congruenţe**, adică relaţii de echivalenţă care păstrează operaţiile structurilor algebrice respective. (Vom vorbi despre **congruenţe** pe algebre Boole în unele dintre cursurile următoare.) Am precizat: nucleele **de săgeată dublă** ale morfismelor, deci **nu** nucleele morfismelor în primul sens.

- Cu privire la proprietatea care urmează: intuitiv, o **diagramă** (cu mulţimi şi funcţii, ca aceea din propoziţia următoare, de exemplu) se zice *comutativă* ddacă, indiferent pe ce drum "urmărim săgeţile" şi compunem funcţiile, între oricare două mulţimi din diagramă se obţine aceeaşi funcţie, i. e. toate compunerile de funcţii între acele mulţimi sunt egale (mulţimile pot fi şi 4 sau mai multe, nu neapărat 3, ca în cazul diagramei următoare).

Pentru cele ce urmează, renunţăm la fixarea lui A, B şi f.

Propoziţia 6.6 (proprietatea de universalitate a mulţimii factor). *Fie A o mulţime nevidă, $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A şi $p : A \to A/_{\sim}$ surjecţia canonică: pentru orice $x \in A$, $p(x) = \widehat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$.*

Atunci: pentru orice mulţime nevidă B şi orice funcţie $f : A \to B$ cu $\sim \subseteq Ker(f)$, există o unică funcţie $\tilde{f} : A/_{\sim} \to B$ care face comutativă următoarea diagramă, i. e. cu proprietatea că:

$$\tilde{f} \circ p = f,$$

i. e., pentru orice $x \in A$:

$$\tilde{f}(\widehat{x}) = f(x).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f"'] & & A/_{\sim} \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

7 Operatori de închidere şi familii Moore

- Vom studia în cele ce urmează **operatorii de închidere** pe mulţimea părţilor unei mulţimi şi **familiile Moore (sistemele de închidere)** de părţi ale unei mulţimi.

- Aceste noţiuni pot fi definite şi studiate pe **mulţimi ordonate arbitrare** (vom vedea ce sunt acestea), adică, în consideraţiile de mai jos, se poate înlocui mulţimea părţilor unei mulţimi cu o mulţime arbitrară M, incluziunea de mulţimi cu o relaţie de ordine arbitrară $\leq$ pe M, iar intersecţia cu **infimumul** în **mulţimea ordonată** $(M, \leq)$ (în timp ce reuniunea va avea drept generalizare o noţiune numită **supremum**) (vom vedea ce sunt toate acestea).

- Vom vedea că, în mulţimi ordonate arbitrare:

  (i) supremumul familiei vide este minimul (cele două există simultan);

  (ii) infimumul familiei vide este maximul (cele două există simultan).

- Pentru familii de mulţimi:

  (i) am demonstrat că reuniunea familiei vide de mulţimi este $\emptyset$ (cea mai mică mulţime în sensul incluziunii, adică raportat la incluziunea de mulţimi: $\emptyset \subseteq A$, pentru orice mulţime A);

  (ii) nu există o cea mai mare mulţime (dintre toate mulţimile) în sensul incluziunii, pentru că, dacă ar exista, atunci aceasta ar include pe $\mathcal{P}(A)$, pentru orice mulţime A, deci ar conţine fiecare mulţime A, deci ar avea ca submulţime mulţimea tuturor mulţimilor, care nu există (a se revedea Cursul I); dar există o cea mai mare mulţime dintre părţile unei anumite mulţimi. Deci ce mulţime va fi intersecţia familiei vide de mulţimi?

Remarca 7.1. Intersecţia familiei vide nu există decât raportat la o mulţime totală T: intersecţia familiei vide de părţi ale lui T (adică infimumul familiei vide în mulţimea ordonată $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ – vom vedea), se **defineşte** în următorul mod, şi este egală cu mulţimea totală T:

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i := \{x \in T \mid (\forall\, i \in \emptyset)\,(x \in A_i)\} = \{x \in T \mid (\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)\} = T,$$

întrucât proprietatea $(\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)$ este adevărată pentru orice x.

Exerciţiul 7.1. Fie T o mulţime, iar $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (mulţimi de părţi ale lui T care satisfac această incluziune). Atunci au loc incluziunile:

(i) $\bigcup\limits_{A \in X} A \subseteq \bigcup\limits_{A \in Y} A$

(ii) $\bigcap\limits_{A \in X} A \supseteq \bigcap\limits_{A \in Y} A$

În particular, dacă $M \in Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (i. e. $\emptyset \neq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ şi $M \in Y$, adică pentru $X = \{M\}$ mai sus (un *singleton*, i. e. o mulţime cu un singur element)), atunci:

(i) $M \subseteq \bigcup\limits_{A \in Y} A$

(ii) $M \supseteq \bigcap\limits_{A \in Y} A$

Definiţia 7.1. Fie T o mulţime arbitrară.

- Se numeşte *familie Moore de părţi ale lui* T (sau *sistem de închidere pe mulţimea părţilor lui* T) o familie de părţi ale lui T închisă la intersecţii arbitrare, i. e. o familie de mulţimi $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$, cu I mulţime arbitrară, având proprietatea că, pentru orice $S \subseteq I$, $\bigcap\limits_{s \in S} M_s \in \mathcal{M}$ (i. e., pentru orice $S \subseteq I$, există $i_S \in I$, astfel încât $\bigcap\limits_{s \in S} M_s = M_{i_S}$). Familiile Moore se mai numesc *sisteme de închidere*.
- Se numeşte *operator de închidere pe* $\mathcal{P}(T)$ o funcţie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, astfel încât, pentru orice $X, Y \in \mathcal{P}(T)$, au loc proprietăţile:

  (i) $C(C(X)) = C(X)$ (C este *idempotent*);

  (ii) $X \subseteq C(X)$ (C este *extensiv*);

  (iii) dacă $X \subseteq Y$, atunci $C(X) \subseteq C(Y)$ (C este *crescător*).

Peste tot în restul acestei secţiuni, T va fi o mulţime arbitrară.

Remarca 7.2. Orice familie Moore de părţi ale lui T conţine intersecţia familiei vide de părţi ale lui T, adică pe T.

Exemplul 7.1.
- $id_{\mathcal{P}(T)}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- Funcţia constantă $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $(\forall\, X \in \mathcal{P}(T))\,(C(X) = T)$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- $\mathcal{P}(T)$ este o familie Moore de părţi ale lui T.
- $\{T\}$ este o familie Moore de părţi ale lui T.
- $\emptyset$ nu este o familie Moore de părţi ale lui T, pentru că nu îl conţine pe T.

Aşadar:

Remarca 7.3. Orice familie Moore este nevidă.

Propoziţia 7.1. *Dacă $\mathcal{M}$ este o familie Moore de părţi ale lui T, atunci, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, există o (unică) cea mai mică mulţime din $\mathcal{M}$ care include pe A (cea mai mică în sensul incluziunii), şi aceasta este egală cu intersecţia mulţimilor din $\mathcal{M}$ care includ pe A.*

Propoziţia 7.2 ($\star$). *Fie I o mulţime nevidă şi $\mathcal{M} = (M_i)_{i\in I}$ o familie Moore de părţi ale lui T.*

Definim funcţia $C_{\mathcal{M}} : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ astfel: pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}}(X)$ este, prin definiţie, cea mai mică mulţime din $\mathcal{M}$ care include pe X, adică $C_{\mathcal{M}}(X) := \bigcap\limits_{\substack{M\in\mathcal{M},\\ X\subseteq M}} M$.

Atunci $C_{\mathcal{M}}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.

Definiţia 7.2 (mulţimi închise). Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Elementele din imaginea lui C, $C(\mathcal{P}(T))$, adică mulţimile de forma $C(X)$, cu $X \in \mathcal{P}(T)$, se numesc *mulţimi închise* raportat la operatorul de închidere C.

Propoziţia 7.3 (caracterizare echivalentă pentru mulţimile închise). *Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Atunci mulţimile închise raportat la operatorul de închidere C sunt exact acele mulţimi $X \in \mathcal{P}(T)$ care satisfac $X = C(X)$, i. e.: $\{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\}$.*

Propoziţia 7.4 ($\star\star$). *Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Definim $\mathcal{M}_C = C(\mathcal{P}(T)) = \{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\} \subseteq \mathcal{P}(T)$ (familia mulţimilor închise din $\mathcal{P}(T)$ raportat la operatorul de închidere C).*

Atunci $\mathcal{M}_C$ este o familie Moore de părţi ale lui T.

Propoziţia 7.5. *Aplicaţiile din cele Propoziţiile ($\star$) şi ($\star\star$) sunt inverse una alteia, adică:*

(i) pentru orice operator de închidere $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}_C} = C$;

(ii) pentru orice familie Moore $\mathcal{M}$ de părţi ale lui T, $\mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}} = \mathcal{M}$.

Aşadar aceste aplicaţii sunt bijecţii, deci mulţimea operatorilor de închidere pe $\mathcal{P}(T)$ şi mulţimea familiilor Moore de părţi ale lui T sunt în bijecţie.

Exemplul 7.2.

- Familia Moore asociată operatorului de închidere $id_{\mathcal{P}(T)}$ pe $\mathcal{P}(T)$ este $id_{\mathcal{P}(T)}(\mathcal{P}(T)) = \mathcal{P}(T)$.
- Familia Moore asociată operatorului de închidere dat de funcţia constantă $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $(\forall\, X \in \mathcal{P}(T))\,(C(X) = T)$, este $C(\mathcal{P}(T)) = \{T\}$.

8 Închiderile relaţiilor binare pe o mulţime

- Peste tot în această secţiune, A va fi o mulţime arbitrară.
- $\mathcal{P}(A^2)$ este mulţimea submulţimilor lui $A^2 = A \times A$, adică mulţimea relaţiilor binare pe A.
- Amintesc că: $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\} = id_A$ =relaţia de egalitate pe A.

Propoziţia 8.1. *Fie $(R_i)_{i\in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de relaţii binare pe A. Atunci:*

(i) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e reflexivă, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e reflexivă

(ii) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e simetrică, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e simetrică

(iii) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e tranzitivă, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e tranzitivă

(iv) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o preordine, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e o preordine

(v) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o relaţie de echivalenţă, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e o relaţie de echivalenţă

Remarca 8.1. Propoziţia anterioară arată că familia relaţiilor binare reflexive/simetrice/ tranzitive/de preodine/de echivalenţă pe A este o familie Moore de părţi ale lui A^2.

Într–adevăr, A^2 satisface toate aceste proprietăţi, fiind relaţie de echivalenţă pe A.

Şi, de exemplu, pentru reflexivitate: familia relaţiilor reflexive pe A conţine pe A^2, care este intersecţia familiei vide din $\mathcal{P}(A^2)$, iar, conform propoziţiei anterioare, această familie este închisă la intersecţii nevide arbitrare. Aşadar, familia relaţiilor reflexive pe A este închisă la intersecţii arbitrare, i. e. este o familie Moore.

Remarca 8.2. Remarca anterioară şi o serie de propoziţii despre familii Moore şi operatori de închidere de mai sus arată că, pentru orice relaţie binară R pe A, există o cea mai mică relaţie binară reflexivă pe A care include pe R, anume intersecţia tuturor relaţiilor binare reflexive pe A care includ pe R, adică unica relaţie binară $\overline{R}$ pe A care satisface următoarele trei proprietăţi:

- $\overline{R}$ este reflexivă
- $R \subseteq \overline{R}$
- pentru orice relaţie reflexivă S pe A cu $R \subseteq S$, rezultă că $\overline{R} \subseteq S$

În plus, $\mathcal{R} : \mathcal{P}(A^2) \to \mathcal{P}(A^2)$, pentru orice $R \in \mathcal{P}(A^2)$, $\mathcal{R}(R) := \overline{R}$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(A^2)$. Toate aceste consideraţii rămân valabile dacă înlocuim proprietatea de reflexivitate cu oricare dintre proprietăţile:

- simetrie – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{S}$
- tranzitivitate – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{T}$
- proprietatea de a fi preordine – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu Pre
- proprietatea de a fi relaţie de echivalenţă – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{E}$

Aceste notaţii **nu** sunt consacrate, ci sunt notaţii ad–hoc pe care le adoptăm în expunerea care urmează.

Definiţia 8.1. Fie R o relaţie binară pe A. Se numeşte:

- *închiderea reflexivă a lui* R cea mai mică relaţie binară reflexivă pe A care include pe R, adică $\mathcal{R}(R)$;
- *închiderea simetrică a lui* R cea mai mică relaţie binară simetrică pe A care include pe R, adică $\mathcal{S}(R)$;
- *închiderea tranzitivă a lui* R cea mai mică relaţie binară tranzitivă pe A care include pe R, adică $\mathcal{T}(R)$;
- *preordinea generată de* R (sau *închiderea reflexiv–tranzitivă a lui* R) cea mai mică preordine pe A care include pe R, adică $Pre(R)$;
- *relaţia de echivalenţă generată de* R cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A care include pe R, adică $\mathcal{E}(R)$.

Remarca 8.3. Idempotenţa operatorilor de închidere arată că, pentru orice relaţie binară R pe A: $\mathcal{R}(\mathcal{R}(R)) = \mathcal{R}(R)$, $\mathcal{S}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(R)$, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(R)$, $Pre(Pre(R)) = Pre(R)$ şi $\mathcal{E}(\mathcal{E}(R)) = R$.

Remarca 8.4. Fie R o relaţie binară pe A. Conform descrierii mulţimilor închise din secţiunea despre operatori de închidere şi familii Moore, au loc:

- R este reflexivă ddacă $R = \mathcal{R}(R)$
- R este simetrică ddacă $R = \mathcal{S}(R)$
- R este tranzitivă ddacă $R = \mathcal{T}(R)$
- R este o preordine ddacă $R = Pre(R)$
- R este o relaţie de echivalenţă ddacă $R = \mathcal{E}(R)$

Propoziţia 8.2. *Fie R o relaţie binară pe A. Atunci:*

(i) $\mathcal{R}(R) = R \cup \Delta_A$

(ii) $\mathcal{S}(R) = R \cup R^{-1}$

(iii) $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

(iv) $Pre(R) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$

(v) $\mathcal{E}(R) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup R^{-1} \cup \Delta_A)^n$

Remarca 8.5 (temă). Dacă A este o mulţime finită şi nevidă având $|A| = k \in \mathbb{N}^*$, atunci:

(i) $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{k} R^n$;

(ii) şirul $R^0,\ R^1,\ R^2,\ \ldots, R^n,\ \ldots$ este periodic începând de la un anumit exponent.

Propoziţia 8.3 (comutările închiderilor – temă, cu contraexemplu pentru comutarea de la ultimul punct – facultativă). *Fie R o relaţie binară pe A. Atunci:*

(i) $\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(\mathcal{R}(R))$*;*

(ii) $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(R))$*;*

(iii) $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ *şi* $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))$ *nu sunt neapărat egale.*

Adică: închiderea reflexivă comută cu fiecare dintre închiderile simetrică şi tranzitivă, dar (în general) închiderile simetrică şi tranzitivă nu comută una cu cealaltă.

Corolarul 8.1 (temă – facultativă).

- *$\mathcal{R}$ păstrează simetria şi tranzitivitatea, i. e.: dacă R este o relaţie binară simetrică (respectiv tranzitivă), atunci $\mathcal{R}(R)$ este simetrică (respectiv tranzitivă);*
- *$\mathcal{S}$ şi $\mathcal{T}$ păstrează reflexivitatea, i. e.: dacă R este o relaţie binară reflexivă, atunci $\mathcal{S}(R)$ şi $\mathcal{T}(R)$ sunt reflexive.*

Propoziţia 8.4 (temă – facultativă).

- *$\mathcal{T}$ păstrează simetria;*
- *$\mathcal{S}$ nu păstrează tranzitivitatea.*

Remarca 8.6 (nu există închiderea antisimetrică sau ordinea generată). Fie R o relaţie binară pe A, arbitrară. De ce nu calculăm o închidere antisimetrică a lui R, sau o relaţie de ordine generată de R?

Două motive sunt următoarele fapte, fiecare uşor de verificat:

- dacă R nu este antisimetrică, atunci nicio relaţie binară S pe A cu $R \subseteq S$ nu este antisimetrică (direct din definiţia antisimetriei), şi deci nu este nici relaţie de ordine;
- dacă $|A| \geq 2$, atunci A^2 nu este antisimetrică (pentru că, atunci, A conţine cel puţin două elemente distincte a şi b, aşadar $(a,b),(b,a) \in A^2$, dar $a \neq b$), deci A^2 nu este o relaţie de ordine, prin urmare A^2 nu aparţine familiei relaţiilor antisimetrice pe A, deci nici familiei relaţiilor de ordine pe A, aşadar niciuna dintre aceste familii nu este o familie Moore de părţi ale lui A^2, pentru că niciuna dintre ele nu conţine intersecţia familiei vide de părţi ale lui A^2, anume pe A^2.

9 Relaţii de ordine

Remarca 9.1. Pentru orice mulţime A, Δ_A este singura relaţie binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică şi antisimetrică. Într–adevăr, dacă $R \subseteq A^2$, atunci:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este simetrică ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- prin urmare, dacă R este simetrică şi antisimetrică, atunci $R = R \cap R \subseteq \Delta_A$;
- dacă $R \subseteq \Delta_A$, atunci este imediat că R e simetrică şi antisimetrică;
- aşadar: R e simetrică şi antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- în concluzie: R este reflexivă, simetrică şi antisimetrică ddacă $\Delta_A \subseteq R$ şi $R \subseteq \Delta_A$ ddacă $R = \Delta_A$.

Remarca 9.2. Pentru orice mulţime A, Δ_A este singura relaţie binară pe A care este simultan relaţie de echivalenţă şi relaţie de ordine. Acest fapt rezultă din remarca anterioară şi faptul că Δ_A este tranzitivă.

În plus, cum Δ_A este cea mai mică relaţie reflexivă pe A, în sensul incluziunii (i. e. Δ_A este reflexivă şi este inclusă în orice relaţie binară reflexivă pe A), rezultă că Δ_A este cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A şi cea mai mică relaţie de ordine pe A, în sensul incluziunii.

Remarca 9.3 (obţinerea unei relaţii de ordine dintr–o relaţie de preordine; aplicaţie: ordinele de complexitate ale algoritmilor). Fie A o mulţime nevidă şi $R \subseteq A^2$ o relaţie de preordine pe A.

Fie $\sim := R \cap R^{-1}$ (i. e. $\sim \subseteq A^2$, pentru orice $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă $[xRy$ şi $yRx]$). Se demonstrează că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe A.

Considerăm mulţimea factor $A/_\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$, unde $\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\} = \{y \in A \mid y \sim x\}$, pentru fiecare $x \in A$. Pe $A/_\sim$ definim relaţia binară $\leq$, astfel: pentru orice $x, y \in A$, $\hat{x} \leq \hat{y}$ ddacă xRy.

Se demonstrează că $\leq$ este **bine definită**, adică este **independentă de reprezentanţi**, i. e., pentru orice $x, y, z, t \in A$ a. î. $\hat{x} = \hat{z}$ (ceea ce este echivalent cu $x \sim z$) şi $\hat{y} = \hat{t}$ (ceea ce este echivalent cu $y \sim t$), are loc echivalenţa: xRy ddacă zRt. Şi se demonstrează că $\leq$ este o relaţie de ordine pe $A/_\sim$.

Remarca 9.4. Dacă A e o mulţime nevidă, atunci nu există nicio relaţie binară pe A care să fie şi reflexivă, şi ireflexivă, prin urmare nu există nicio relaţie binară pe A care să fie şi relaţie de ordine, şi relaţie de ordine strictă

Exerciţiul 9.1 (ordine versus ordine strictă). Fie A o mulţime, O mulţimea relaţiilor de ordine pe A şi S mulţimea relaţiilor de ordine strictă pe A.

Să se demonstreze că aplicaţiile $\varphi : O \to S$ şi $\psi : S \to O$, definite prin:

- pentru orice $\leq \in O$, $\varphi(\leq) = \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y$ şi $x \neq y\}$,
- pentru orice $< \in S$, $\psi(<) = < \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y$ sau $x = y\}$,

sunt:

- corect definite, i. e. într-adevăr $Im(\varphi) \subseteq S$ şi $Im(\psi) \subseteq O$, i. e.:
  - scăzând din orice relaţie de ordine pe A diagonala lui A, se obţine o relaţie de ordine strictă pe A;
  - reunind orice relaţie de ordine strictă pe A cu diagonala lui A, se obţine o relaţie de ordine pe A;
- inverse una alteia, i. e. $\psi \circ \varphi = id_O$ şi $\varphi \circ \psi = id_S$, ceea ce înseamnă că φ şi ψ sunt bijecţii între O şi S.

Definiţia 9.1. Fie A o mulţime, $\leq$ o relaţie de ordine pe A şi $<$ o relaţie de ordine strictă pe A.
Atunci:

- $\leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y$ şi $x \neq y\}$ se numeşte *relaţia de ordine strictă asociată lui* $\leq$;
- $< \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y$ sau $x = y\}$ se numeşte *relaţia de ordine asociată lui* $<$.

(A se vedea exerciţiul anterior.)

Remarca 9.5. Relaţia de ordine strictă asociată unei relaţii de ordine totale este o relaţie totală (desigur, nu completă, decât în cazul în care mulţimea pe care este definită este $\emptyset$).

Notaţia 9.1. Pentru orice mulţime A, orice $R \subseteq A^2$ şi orice $a_1, a_2, a_3, \ldots \in A$, vom nota faptul că a_1Ra_2, $a_2Ra_3, \ldots$ şi prin: $a_1Ra_2Ra_3 \ldots$.

Definiţia 9.2.
- O mulţime A înzestrată cu o relaţie de ordine $\leq \subseteq A^2$ se notează $(A, \leq)$ şi se numeşte *mulţime (parţial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set").
- Dacă, în plus, $\leq$ este o relaţie de ordine totală, atunci $(A, \leq)$ se numeşte *mulţime total ordonată* sau *mulţime liniar ordonată* sau *lanţ*.

Observaţia 9.1. Poseturile sunt un tip de **structuri algebrice**, diferite de cele studiate în liceu, precum monoizii, grupurile, inelele, corpurile etc., prin faptul că sunt înzestrate nu cu **operaţii**, ci cu o **relaţie binară.**

Terminologia cunoscută pentru structurile algebrice studiate până acum se păstrează: cu notaţiile din definiţia anterioară, A se numeşte *mulţimea elementelor*, sau *mulţimea suport*, sau *mulţimea subiacentă* posetului $(A, \leq)$; vom vedea şi noţiunile de **substructură** a unui poset şi **morfism** de poseturi.

Definiţia 9.3. Fie $(A, \leq)$ un poset şi $<:=\leq \setminus \Delta_A = \{(a,b) \in A^2 \mid a \leq b \text{ şi } a \neq b\}$ relaţia de ordine strictă asociată lui $\leq$.

Relaţiei de ordine $\leq$ pe A i se asociază *relaţia de succesiune* (numită şi *relaţia de acoperire*), notată $\prec$ şi definită astfel: $\prec := \{(a,b) \in A^2 \mid a < b \text{ şi nu există } x \in A \text{ a. î. } a < x < b\} \subseteq A^2$.

Pentru orice $a, b \in A$ cu $a \prec b$:

- b se numeşte *succesor al lui* a (se mai spune că b *acoperă pe* a)
- a se numeşte *predecesor al lui* b (sau se spune că a *este acoperit de* b)

Remarca 9.6 (temă). Cu notaţiile din definiţia anterioară, $\prec$ e asimetrică (deci şi ireflexivă) şi nu e tranzitivă.

Notaţia 9.2 (notaţii uzuale într–un poset). Cu notaţiile din definiţia anterioară: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ şi $\succ := \prec^{-1}$.

Definiţia 9.4. Fie $(A, \leq)$ un poset şi $<$ ordinea strictă asociată lui $\leq$. Spunem că mulţimea A este *densă raportat la ordinea* $\leq$, sau că $\leq$ este o *ordine densă pe* A ddacă, oricare ar fi $a, b \in A$ cu $a < b$, există $x \in A$ a. î. $a < x < b$, i. e. ddacă $\prec = \emptyset$ în posetul $(A, \leq)$.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse:

- Amintim că relaţiile binare (pe mulţimi finite şi nevide) se pot reprezenta grafic prin grafuri orientate.
- Relaţiile de ordine, însă, beneficiază de o reprezentare grafică mai avantajoasă, minimală în sensul că ţine seama de proprietăţile de reflexivitate, tranzitivitate şi antisimetrie ale unei relaţii de ordine pentru a elimina redundanţele create în reprezentarea grafică de aceste proprietăţi. Această reprezentare grafică a unei relaţii de ordine se numeşte *diagramă Hasse*.
- Şi această reprezentare grafică este, de obicei, folosită pentru relaţii (de ordine) pe mulţimi finite şi nevide.
- Dacă $(A, \leq)$ este un poset finit şi nevid (i. e. cu A finită şi nevidă), atunci diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ este graful neorientat având mulţimea nodurilor egală cu A şi mulţimea muchiilor egală cu relaţia de succesiune $\prec$ asociată lui $\leq$ şi a cărui reprezentare grafică respectă regula:
  - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre succesorii săi** (i. e., pentru orice $a, b \in A$ a. î. $a \prec b$, a va fi reprezentat dedesubtul lui b),
- prin urmare:
  - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre nodurile cu care se găseşte în relaţia de ordine strictă $<$ asociată lui $\leq$, i. e. nodurile "strict mai mari" decât el.**

Observaţia 9.2. Faptul că, într–un poset finit şi nevid $(A, \leq)$, două elemente $x, y \in A$ satisfac $x < y$ (cu $<:=\leq \setminus \Delta_A$) este reprezentat în diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ prin următoarele caracteristici:

- elementul x este reprezentat dedesubtul elementului y şi
- x şi y sunt conectate printr–un lanţ (mai precis, prin cel puţin un lanţ; aici, **lanţ** în sensul de **drum** în graful neorientat dat de diagrama Hasse; dar sigur că submulţimea lui A formată din elementele ce corespund nodurilor de pe un astfel de drum este o submulţime total ordonată a posetului $(A, \leq)$, adică este un lanţ cu ordinea indusă).

Observaţia 9.3. În diagramele Hasse nu există muchii orizontale, ci numai muchii verticale sau oblice.

Observaţia 9.4. Diagrama Hasse a unei **mulţimi liniar ordonate** este "liniară".

Amintim că o **mulţime liniar ordonată** se mai numeşte **mulţime total ordonată** sau **lanţ**.

Notaţia 9.3. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, vom nota **lanţul cu k elemente** prin $\mathcal{L}_k$ (articolul hotărât va fi explicat în remarca următoare). De obicei, mulţimea suport a lanţului $\mathcal{L}_k$ se notează cu L_k. Evident, orice mulţime cu exact k elemente poate servi drept suport pentru lanţul cu k elemente.

Remarca 9.7. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, lanţul cu k elemente este unic, modulo o permutare a elementelor, i. e. pe o mulţime cu k elemente se poate defini o unică ordine totală, modulo o permutare a elementelor.

Mai precis, dacă L_k este o mulţime cu exact k elemente, iar $\leq$ şi $\sqsubseteq$ sunt două ordini totale pe L_k, atunci poseturile $(L_k, \leq)$ şi $(L_k, \sqsubseteq)$ sunt **izomorfe**, i. e. există între ele un **izomorfism de poseturi**. Mai general: dacă L_k şi M_k sunt mulţimi cu exact k elemente, iar $\leq$ este o ordine totală pe L_k şi $\sqsubseteq$ este o ordine totală pe M_k, atunci poseturile $(L_k, \leq)$ şi $(M_k, \sqsubseteq)$ sunt **izomorfe**. Vom vedea ce este un izomorfism de poseturi. Deocamdată, ne mulţumim cu explicaţia intuitivă: două poseturi finite şi nevide sunt **izomorfe** ddacă **au aceeaşi diagramă Hasse.**

Elemente distinse într–un poset:

- Până în momentul în care se va specifica altfel, fie $(A, \leq)$ un poset şi $X \subseteq A$.

Remarca 9.8. Este imediat faptul că relaţia binară pe X dată de mulţimea de perechi $\{(x, y) | x \in X, y \in X, x \leq y\} = \leq \cap X^2$ este o ordine pe X, şi că, dacă ordinea $\leq$ pe A este totală, atunci această ordine pe X este, de asemenea, totală.

Definiţia 9.5. Ordinea pe X din remarca anterioară se numeşte *ordinea indusă de* $\leq$ *pe* X şi se notează tot cu $\leq$.

Posetul $(X, \leq)$ se numeşte *subposet* sau *submulţime (parţial) ordonată a lui* $(A, \leq)$.

Dacă $(X, \leq)$ este un lanţ (i. e. are fiecare două elemente comparabile), atunci $(X, \leq)$ se numeşte *submulţime total ordonată a lui* $(A, \leq)$.

Definiţia 9.6. Un element $a \in A$ se numeşte:

- *minorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $a \leq x$
- *majorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $x \leq a$

Remarca 9.9. X poate avea mai mulţi minoranţi (majoranţi), şi poate să nu aibă niciun minorant (majorant).

Definiţia 9.7.

- Un minorant al lui X care aparţine lui X (i. e. un element $m \in X$ cu $m \leq x$ pentru orice $x \in X$) se numeşte *minim al lui* X sau *prim element al lui* X sau *cel mai mic element al lui* X şi se notează cu $\min(X)$ sau $\min(X, \leq)$.
- Un majorant al lui X care aparţine lui X (i. e. un element $M \in X$ cu $x \leq M$ pentru orice $x \in X$) se numeşte *maxim al lui* X sau *ultim element al lui* X sau *cel mai mare element al lui* X şi se notează cu $\max(X)$ sau $\max(X, \leq)$.

Remarca 9.10. Minimul nu există întotdeauna. Dar antisimetria lui $\leq$ implică faptul că minimul (dacă există) este unic (ceea ce justifică notaţia de mai sus pentru minim, care indică faptul că minimul lui X este unic determinat de X (şi $\leq$)). La fel pentru maxim.

Definiţia 9.8. Un poset cu minim şi maxim se numeşte *poset mărginit.* (Minimul şi maximul trebuie să fie ale întregului poset, deci trebuie luat $X := A$ în definiţia anterioară.)

Remarca 9.11. O mulţime care are minim sau maxim are cel puţin un element (pentru că minimul unei mulţimi aparţine acelei mulţimi şi la fel şi maximul), deci nu poate fi vidă.

Definiţia 9.9. Un element $x \in X$ se numeşte:

- *element minimal al lui* X ddacă este minimul submulţimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $y \leq x$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y < x$
- *element maximal al lui* X ddacă este maximul submulţimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $x \leq y$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y > x$

Remarca 9.12. Din definiţia anterioară, rezultă imediat, pentru orice $x \in X$:

- x este simultan element minimal al lui X şi minorant pentru X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element minimal al lui X şi element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element maximal al lui X şi majorant pentru X ddacă $x = \max(X)$
- x este simultan element maximal al lui X şi element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \max(X)$

Remarca 9.13. Orice poset finit şi nevid are elemente maximale şi elemente minimale, mai precis, pentru orice element $a \in A$ al unui poset finit şi nevid $(A, \leq)$, există un element minimal e şi un element maximal E în posetul $(A, \leq)$, cu proprietatea că $e \leq a \leq E$.

În orice poset finit şi nevid, orice element care nu este element maximal are cel puţin un succesor, şi orice element care nu este element minimal are cel puţin un predecesor.

În orice poset finit şi nevid, închiderea tranzitivă a relaţiei de succesiune este relaţia de ordine strictă, iar închiderea reflexiv–tranzitivă a relaţiei de succesiune (i. e. preordinea generată de relaţia de succesiune) este relaţia de ordine.

Definiţia 9.10. *Infimumul lui* X este cel mai mare minorant al lui X, adică maximul mulţimii minoranţilor lui X, şi se notează cu $\inf(X)$ sau $\inf(X, \leq)$.

Supremumul lui X este cel mai mic majorant al lui X, adică minimul mulţimii majoranţilor lui X, şi se notează cu $\sup(X)$ sau $\sup(X, \leq)$.

Remarca 9.14. Infimumul nu există întotdeauna, nici măcar atunci când mulţimea minoranţilor este nevidă.

Dar, fiind maximul unei mulţimi, infimumul (dacă există) este unic (ceea ce îi justifică denumirea cu articol hotărât şi notaţia, fiecare dintre acestea indicând faptul că infimumul este unic determinat de X (şi $\leq$)).

La fel pentru supremum.

Remarca 9.15. Infimumul este un minorant, prin urmare infimumul aparţine mulţimii ddacă este minimul mulţimii: $\exists \inf(X) \in X$ ddacă $\exists \min(X)$, şi atunci $\min(X) = \inf(X)$.

Analog, supremumul este un majorant, prin urmare supremumul aparţine mulţimii ddacă este maximul mulţimii: $\exists \sup(X) \in X$ ddacă $\exists \max(X)$, şi atunci $\sup(X) = \max(X)$.

Remarca 9.16. Din definiţia infimumului şi a supremumului, rezultă următoarele caracterizări:

- există $\inf(X) = m$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $m \leq x$ şi
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $a \leq x$, rezultă că $a \leq m$
- există $\sup(X) = M$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $x \leq M$ şi
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $x \leq a$, rezultă că $M \leq a$

Lema 9.1. *Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $x \leq y$

(ii) există în L $\inf\{x, y\} = x$

(iii) există în L $\sup\{x, y\} = y$

Principiul dualităţii pentru poseturi:

- **Principiul dualităţii pentru poseturi:** *Orice rezultat privind un poset* **arbitrar (fapt esenţial)** $(A, \leq)$ *rămâne valabil dacă înlocuim $\leq$ cu $\leq^{-1}$ (notată $\geq$;* conform definiţiei inversei unei relaţii binare, $\geq = \leq^{-1} \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \geq y$ ddacă $y \leq x$; la fel în continuare*), $<$ cu $<^{-1}$ (notată $>$), $\prec$ cu $\prec^{-1}$ (notată $\succ$), toţi minoranţii cu majoranţi (ca noţiuni) şi vice–versa, toate elementele minimale cu elemente maximale şi vice-versa, toate minimurile cu maximuri şi vice-versa şi toate infimumurile cu supremumuri şi vice–versa.*
- Valabilitatea acestui principiu este uşor de observat din faptul că: pentru orice ordine $\leq$, $\geq$ este tot o ordine, cu ordinea strictă asociată $>$ si relaţia de succesiune $\succ$, $\leq$ este totală ddacă $\geq$ este totală, pentru orice $X \subseteq A$, minoranţii lui $(X, \leq)$ sunt exact majoranţii lui $(X, \geq)$ şi vice–versa, elementele minimale ale lui $(X, \leq)$ sunt exact elementele maximale ale lui $(X, \geq)$ şi vice–versa, $\min(X, \leq) = \max(X, \geq)$ şi vice–versa (există simultan, i. e. $\min(X, \leq)$ există ddacă $\max(X, \geq)$ există, şi, atunci când există, sunt egale; la fel vice–versa), $\inf(X, \leq) = \sup(X, \geq)$ şi vice–versa (de asemenea, există simultan). Se spune că noţiunile de minorant şi majorant sunt *duale una alteia*, şi la fel pentru noţiunile de element minimal şi element maximal, minim şi maxim, infimum şi supremum, respectiv.

- Posetul $(A, \geq)$ se numeşte *posetul dual* al posetului $(A, \leq)$.
- Este evident că dualul dualului unui poset $(A, \leq)$ este chiar $(A, \leq)$.
- Ori de câte ori vom face apel la **Principiul dualităţii pentru poseturi**, vom scrie, simplu, "prin dualitate".
- Diagrama Hasse a dualului unui poset finit se obţine prin "răsturnarea diagramei Hasse" a acelui poset "cu susul în jos".
- Lanţurile finite sunt *autoduale*, i. e. izomorfe (ca poseturi; vom vedea) cu poseturile duale lor.

Remarca 9.17. Fie $(A, \leq)$ un poset şi $a, b \in A$. Atunci:

- $b < a$ implică $a \nleq b$;
- dacă $(A, \leq)$ este lanţ, atunci: $b < a$ ddacă $a \nleq b$.

Remarca 9.18. Fie $(L, \leq)$ un poset şi $\emptyset \neq X \subseteq L$, a. î. există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ şi $\sup(X)$. Atunci $\inf(X) \leq \sup(X)$.

Remarca 9.19. Pentru orice mulţime T, în posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, oricare ar fi $X \subseteq \mathcal{P}(T)$:

- există $\sup(X) = \bigcup\limits_{A \in X} A$
- există $\inf(X) = \bigcap\limits_{A \in X} A$

Remarca 9.20 (temă: scrieţi această remarcă pentru posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$). Fie $(L, \leq)$ un poset şi $X \subseteq L$, $Y \subseteq L$, a. î. $X \subseteq Y$. Atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(X)$ şi $\sup(Y)$, atunci $\sup(X) \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ şi $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq \inf(X)$

Pentru tratarea cazurilor în care X este vidă, a se vedea remarca următoare.
Cazul în care X este un singleton se scrie astfel: dacă $x \in Y \subseteq L$, atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(Y)$, atunci $x \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq x$

Remarca 9.21. Într–un poset $(L, \leq)$, $\sup(\emptyset)$ există ddacă $\min(L)$ există, şi, dacă acestea există, atunci sunt egale. Dual, la fel se întâmplă pentru $\inf(\emptyset)$ şi $\max(L)$.

Propoziţia 9.1. *Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în L;

(ii) pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în L.

10 Funcţii izotone

Definiţia 10.1. Fie $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \to B$ o funcţie.

f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.

Funcţiile izotone se mai numesc *morfisme de poseturi.*

Observaţia 10.1. Se consideră că denumirea de **funcţie crescătoare** este legată de ordinile naturale de pe mulţimile de numere, şi, de aceea, se preferă denumirea de **funcţie izotonă** în cazul funcţiilor între poseturi arbitrare.

Remarca 10.1. Cu notaţiile din definiţia de mai sus, f este funcţie antitonă ddacă este morfism între posetul $(A, \leq)$ şi posetul dual lui $(B, \sqsubseteq)$, anume $(B, \sqsupseteq)$, unde $\sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Remarca 10.2. Compunerea a două funcţii izotone este o funcţie izotonă.

Exerciţiul 10.1 (temă). Orice funcţie izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.
I. e., dacă:

- $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ sunt două poseturi,
- $< := \leq \setminus \Delta_A$ şi $\sqsubset := \sqsubseteq \setminus \Delta_B$ sunt ordinile stricte asociate lui $\leq$ şi, respectiv, $\sqsubseteq$,
- iar $f : A \to B$ este o funcţie izotonă injectivă,

atunci, pentru orice $x, y \in A$:

$$x < y \text{ implică } f(x) \sqsubset f(y).$$

Definiţia 10.2. O funcţie între două poseturi se numeşte *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă şi cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic *izomorfe*.

Exerciţiul 10.2 (temă). Fie $f : L \to M$ o funcţie bijectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ şi $(M, \sqsubseteq)$. Arătaţi că, dacă $(L, \leq)$ este lanţ, atunci inversa lui f, f^{-1}, este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.

Exerciţiul 10.3 (temă). Fie $f : L \to M$ o funcţie surjectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ şi $(M, \sqsubseteq)$. Arătaţi că, dacă $(L, \leq)$ este lanţ, atunci $(M, \sqsubseteq)$ este lanţ.

Remarca 10.3. Orice izomorfism de poseturi păstrează infimumurile şi supremumurile arbitrare.

Exerciţiul 10.4 (Teorema Knaster–Tarski (temă)). Fie $(L, \leq)$ un poset, iar $f : L \to L$ o funcţie izotonă.
Dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\inf\{x \in L \mid f(x) \leq x\} \stackrel{\text{not.}}{=} a \in L$, atunci:

(i) $f(a) = a$ (i. e. a este *punct fix al lui* f) şi $a = \min\{x \in L \mid f(x) \leq x\}$;

(ii) dacă $b \in L$ a. î. $f(b) = b$, atunci $a \leq b$ (i. e. a este cel mai mic punct fix al lui f).

Şi **dual:** dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\sup\{x \in L \mid x \leq f(x)\} \stackrel{\text{not.}}{=} c \in L$, atunci :

(i) $f(c) = c$ (i. e. c este *punct fix al lui* f) şi $c = \max\{x \in L \mid x \leq f(x)\}$;

(ii) dacă $d \in L$ a. î. $f(d) = d$, atunci $d \leq c$ (i. e. c este cel mai mare punct fix al lui f).

Mnemonic despre mulţimi parţial ordonate (poseturi):

Definiţia 10.3. Se numeşte *mulţime (parţial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set") o pereche $(A, \leq)$ formată dintr–o mulţime A şi o **relaţie de ordine** $\leq$ pe A, i. e.:

- $\leq$ este o **relaţie binară** pe A: $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- $\leq$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- $\leq$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ şi $y \leq z$ implică $x \leq z$
- $\leq$ este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ şi $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relaţia de ordine $\leq$ este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci $(A, \leq)$ se numeşte *mulţime total ordonată* sau *mulţime liniar ordonată* sau *lanţ*.

Relaţia de ordine strictă asociată ordinii $\leq$ este $< \stackrel{\text{not.}}{=} \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}$.
Relaţia de succesiune asociată ordinii $\leq$ este $\prec \stackrel{\text{not.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\nexists\, a \in A)\,(x < a < y)\}$.
Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ şi $\succ := \prec^{-1}$.

Remarca 10.4. Cu notaţiile din definiţia anterioară, avem:

- $\geq$ este o relaţie de ordine pe A
- $>$ este relaţia de ordine strictă asociată lui $\geq$
- $\succ$ este relaţia de succesiune asociată lui $\geq$

11 Operatori de închidere şi sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Pe tot parcursul acestei secţiuni, $(A, \leq)$ va fi un poset mărginit (implicit nevid) arbitrar.

Următoarea definiţie o generalizează pe cea din Cursul III în care posetul de referinţă era $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, cu T mulţime arbitrară.

Definiţia 11.1.
- Se numeşte *sistem de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o submulţime a lui A închisă la infimumuri arbitrare, i. e. o mulţime $M \subseteq A$ cu proprietatea că, pentru orice $S \subseteq M$, există în $(A, \leq)$ $\inf(S) \in M$.
- Se numeşte *operator de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o funcţie $C : A \to A$, astfel încât, pentru orice $x, y \in A$, au loc proprietăţile:
  (i) $C(C(x)) = C(x)$ (C este *idempotentă*);
  (ii) $x \leq C(x)$ (C este *extensivă*);
  (iii) dacă $x \leq y$, atunci $C(x) \leq C(y)$ (C este *izotonă*).

Remarca 11.1. Orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ conţine $\inf(\emptyset) = \max(A)$, aşadar orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ este nevid.

Exemplul 11.1.
- id_A este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- Funcţia constantă $C : A \to A$, pentru orice $x \in A$, $C(x) := \max(A)$, este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- A este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.
- $\{\max(A)\}$ este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.
- $\emptyset$ nu este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.

Propoziţia 11.1. *Dacă M este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$, atunci, pentru orice $x \in A$, există în $(A, \leq)$ $\min\{m \in M \mid x \leq m\} = \inf\{m \in M \mid x \leq m\}$.*

Iar, dacă definim $C_M : A \to A$ prin: oricare ar fi $x \in A$, $C_M(x) = \min\{m \in M \mid x \leq m\}$, atunci C_M este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.

Propoziţia 11.2. *Fie $C : A \to A$ un operator de închidere pe $(A, \leq)$. Atunci imaginea lui C este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$, având ca elemente exact punctele fixe ale lui C: $C(A) = \{x \in A \mid x = C(x)\}$. Vom nota cu $M_C = C(A)$.*

Propoziţia 11.3. *Aplicaţiile din cele două propoziţii precedente sunt inverse una alteia, adică:*

(i) pentru orice operator de închidere $C : A \to A$ pe $(A, \leq)$, $C_{M_C} = C$;

(ii) pentru orice sistem de închidere M pe $(A, \leq)$, $M_{C_M} = M$.

Aşadar aceste aplicaţii sunt bijecţii, deci mulţimea operatorilor de închidere pe $(A, \leq)$ şi mulţimea sistemelor de închidere pe $(A, \leq)$ sunt în bijecţie.

Breviar pentru o parte din cursul de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Acest breviar nu conţine toate noţiunile care apar în cursul de Logică Matematică şi Computaţională, dar vă aminteşte unele noţiuni de bază din acest curs!

Vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Vom nota cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale şi cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulţimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a, b} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$.

Amintim abrevierea $\exists!$, cu semnificaţia "există şi este unic"; $\exists!$ **nu** este un cuantificator.

Amintim denumirile alternative:

- *algebră* $\equiv$ *structură algebrică;*
- *relaţie de ordine* $\equiv$ *relaţie de ordine parţială*;
- *relaţie de ordine totală* $\equiv$ *relaţie de ordine liniară*;
- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată* $\equiv$ *mulţime ordonată* (i. e. mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine pe ea);
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată;*
- *funcţie izotonă* $\equiv$ *funcţie care păstrează ordinea* $\equiv$ *funcţie crescătoare;*
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană;*
- *morfism boolean* $\equiv$ *morfism de algebre Boole;*

noţiunile generice:

- dacă o structură algebrică $\mathcal{A}$ are *mulţimea subiacentă* (i. e. *mulţimea suport*, adică mulţimea elementelor) A şi este înzestrată cu un set de operaţii şi relaţii, atunci o *structură algebrică subiacentă a lui* $\mathcal{A}$ este o structură algebrică având tot mulţimea suport A şi o parte dintre operaţiile şi relaţiile structurii algebrice $\mathcal{A}$;
- un *morfism de structuri algebrice* este o funcţie între mulţimile suport a două structuri algebrice de acelaşi tip care comută cu operaţiile acelor structuri algebrice;
- un *izomorfism de structuri algebrice* este un morfism inversabil între două algebre de acelaşi tip, i. e. un morfism care este o funcţie inversabilă (deci bijectivă) şi a cărei inversă este tot un morfism între acele algebre;
- o *subalgebră* a unei algebre $\mathcal{A}$ este o submulţime S a mulţimii suport a lui $\mathcal{A}$ închisă la operaţiile algebrei $\mathcal{A}$; S devine astfel algebră de acelaşi tip cu $\mathcal{A}$ cu operaţiile induse pe S de operaţiile lui $\mathcal{A}$, i. e. restricţiile operaţiilor algebrei $\mathcal{A}$ la mulţimea S;
- o *congruenţă* a unei algebre $\mathcal{A}$ este o relaţie de echivalenţă (a se vedea mai jos) pe mulţimea suport a lui $\mathcal{A}$ compatibilă cu operaţiile algebrei $\mathcal{A}$, ceea ce permite ca mulţimea factor (a se vedea mai jos) a mulţimii subiacente lui $\mathcal{A}$ prin acea relaţie de echivalenţă să fie organizată în mod canonic ca algebră de acelaşi tip cu $\mathcal{A}$;

precum şi definiţiile, notaţiile şi rezultatele următoare:

- se foloseşte următoarea convenţie: dacă o mulţime A este suportul unei structuri algebrice $\mathcal{A}$, atunci prin A vom înţelege deopotrivă mulţimea A şi structura algebrică $\mathcal{A}$, în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* ddacă mulţimea ei suport este nevidă, respectiv finită;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $|A|$ cardinalul lui A, iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulţimea părţilor lui A);
- pentru orice mulţimi A şi B, vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecţie cu B, care se transcrie prin: $|A| = |B|$;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a,b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulţimi*; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a,b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulţimi* (se defineşte şi A^0, care este un singleton, i. e. o mulţime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice, precum şi puterile naturale ale unei structuri algebrice;
- pentru orice mulţime A, o *relaţie binară pe* A este o submulţime a lui A^2;
- dacă A este o mulţime şi $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a,b) \in \rho$ se mai notează: $a \, \rho \, b$ şi se citeşte *a este în relaţia ρ cu b;*
- pentru orice mulţime A, se notează cu Δ_A relaţia binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ şi numită *diagonala lui A*; Δ_A este relaţia de **egalitate** pe A: pentru orice $a, b \in A$, avem: $a \Delta_A b$ ddacă $a = b$;
- pentru orice mulţime A, se notează cu id_A *funcţia identică a lui A,* i. e. funcţia $id_A : A \to A$ definită prin: $id_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$; ca relaţie binară pe A, id_A coincide cu Δ_A;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se zice:
  i. *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x \, \rho \, x$;
  ii. *ireflexivă* ddacă nu există $x \in A$ cu proprietatea că $x \, \rho \, x$;
  iii. *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \, \rho \, y$, atunci $y \, \rho \, x$;
  iv. *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \, \rho \, y$ şi $y \, \rho \, x$, atunci $x = y$;
  v. *asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \, \rho \, y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;
  vi. *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x \, \rho \, y$ şi $y \, \rho \, z$, atunci $x \, \rho \, z$;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se numeşte:
  i. *(relaţie de) preordine* ddacă este reflexivă şi tranzitivă;
  ii. *(relaţie de) echivalenţă* ddacă este o preordine simetrică;
  iii. *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
  iv. *(relaţie de) ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relaţie de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x \, \rho \, y$ sau $y \, \rho \, x$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se defineşte *inversa lui ρ* ca fiind relaţia binară pe A notată cu ρ^{-1} şi dată de: $\rho^{-1} = \{(b,a) \mid a, b \in A, (a,b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A şi orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;
- pentru orice relaţii binare ρ şi σ pe o mulţime A, avem:
  i. $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
  ii. $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
  iii. $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i\in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcup\limits_{i\in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i\in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
  iv. $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i\in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcap\limits_{i\in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i\in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecţiei cu inversarea);
- inversa unei relaţii de ordine notate $\leq$ se notează, uzual, cu $\geq$;
- pentru orice mulţime A şi orice relaţii binare ρ şi σ pe A, compunerea dintre relaţiile binare ρ şi σ se notează cu $\rho\circ\sigma$ şi se defineşte astfel: $\rho\circ\sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists\, b \in A)\,((a, b) \in \sigma \text{ şi } (b, c) \in \rho)\}$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ şi $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:
  i. ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;
  ii. ρ este ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap \rho = \emptyset$;
  iii. ρ este simetrică ddacă $\rho \subseteq \rho^{-1}$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \rho$ ddacă $\rho = \rho^{-1}$;
  iv. ρ este antisimetrică ddacă $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$;
  v. ρ este asimetrică ddacă $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$;
  vi. ρ este tranzitivă ddacă $\rho^2 = \rho \circ \rho \subseteq \rho$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se numeşte *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ cea mai mică (în sensul incluziunii) relaţie binară reflexivă/simetrică/tranzitivă pe A care include pe ρ;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:
  i. ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;
  ii. ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;
  iii. ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A:
  i. $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;
  ii. $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;
  iii. $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \rho^n$;

- pentru orice mulţime nevidă A, o *partiţie a lui A* este o familie nevidă de părţi nevide ale lui A două câte două disjuncte şi având reuniunea egală cu A; vom nota mulţimea partiţiilor lui A cu $\mathrm{Part}(A)$;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $\mathrm{Eq}(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A;

- pentru orice mulţime A, dacă $\sim\in \mathrm{Eq}(A)$, atunci, oricare ar fi $x \in A$, se defineşte *clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\sim$* ca fiind mulţimea elementelor lui A care sunt în relaţia $\sim$ cu x; pentru orice $x \in A$, se notează cu $x/_\sim$ sau cu $\widehat{x}$ clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\sim$, i. e.: $\widehat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\} = \{y \in A \mid x \sim y\}$ (are loc a doua egalitate pentru că $\sim$, fiind relaţie de echivalenţă, în particular este simetrică);

- pentru orice mulţime A şi orice $\sim\in \mathrm{Eq}(A)$, se notează cu $A/_\sim$ *mulţimea factor* (sau *cât*) *a lui A prin $\sim$*, i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $\sim$: $A/_\sim = \{\widehat{x} \mid x \in A\}$ ($A/_\sim$ se obţine prin "împărţirea" lui A în clasele de echivalenţă ale lui $\sim$); $A/_\sim$ este o partiţie a lui A;

- pentru orice mulţime nevidă A, $\mathrm{Eq}(A) \cong \mathrm{Part}(A)$, întrucât funcţia $\varphi : \mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/_\sim$ pentru orice $\sim\in \mathrm{Eq}(A)$, este o bijecţie; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice $\pi = (A_i)_{i\in I} \in \mathrm{Part}(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relaţia de echivalenţă pe A care are drept clase mulţimile A_i, cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) =\sim\subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$, adică: $x \sim y$ ddacă x şi y se află într–o aceeaşi mulţime din familia $(A_i)_{i\in I}$;

- un *poset* este o mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine; un *lanţ* este o mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine totală;

- o *funcţie izotonă* între două poseturi este o funcţie între acele poseturi care păstrează ordinea; un *izomorfism de poseturi* este o funcţie izotonă bijectivă şi cu inversa izotonă între acele poseturi;

- pentru orice n natural nenul, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente şi cu L_n mulţimea suport a lui $\mathcal{L}_n$; $\mathcal{L}_n$ este unic modulo un *izomorfism de poseturi*, i. e. între oricare două lanţuri cu n elemente există un izomorfism de poseturi;

- pentru orice poset $(P, \leq)$, notăm cu $<$ *relaţia de ordine strictă asociată lui* $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $<=\leq \setminus\Delta_P = \{(a, b) \mid a, b \in P, a \leq b, a \neq b\}$, şi cu $\prec$ *relaţia de succesiune* asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $\prec= \{(a, b) \mid a, b \in P, a < b, (\nexists\, x \in P)\,(a < x < b)\}$;

- notăm laticile sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq)$ sau $(L, \vee, \wedge)$, laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;

- legătura dintre operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;

- *duala unei latici* $(L, \vee, \wedge)$ este laticea $(L, \wedge, \vee)$;

- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ şi $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge)$ sunt două latici, atunci o funcţie $f : L \to M$ este un *morfism de latici* între $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ ddacă, pentru orice $x, y \in L$, au loc: $\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \text{ şi} \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y); \end{cases}$

- izomorfismele de latici coincid cu morfismele bijective de latici, precum şi cu izomorfismele de poseturi între poseturile subiacente acelor latici;

- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ şi $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, 0, 1)$ sunt două latici mărginite, atunci orice morfism surjectiv de latici de la $(L, \vee, \wedge)$ la $(M, \vee, \wedge)$ este morfism de latici mărginite de la $\mathcal{L}$ la $\mathcal{M}$;
- într–o latice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ şi} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puţin un complement;
- într–o latice mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;
- o latice este nedistributivă ddacă are o sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul;
- orice lanţ este o latice (distributivă), cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc *implicaţia booleană,* $\rightarrow$, şi *echivalenţa booleană,* $\leftrightarrow$, ca operaţii binare pe B, astfel: pentru orice $x, y \in B$:

  i. $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$;

  ii. $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:

  i. $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ şi: $\overline{x} = 1$ ddacă $x = 0$, iar: $\overline{x} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latice mărginită, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia şi nu au alte complemente);

  ii. $\overline{\overline{x}} = x$;

  iii. **legile lui de Morgan:** pentru orice $x, y \in B$, $\begin{cases} \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \text{ şi} \\ \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}; \end{cases}$

  iv. $x \rightarrow y = 1$ ddacă $x \leq y$;

  v. $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;

- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci o funcţie $f : A \rightarrow B$ este un *morfism de algebre Boole* între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ ddacă, pentru orice $x, y \in A$, au loc: $\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \\ f(\overline{x}) = \overline{f(x)}, \\ f(0) = 0 \text{ şi } f(1) = 1; \end{cases}$
- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci:

  i. orice morfism de latici mărginite de la $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ la $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ este morfism boolean de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$;

  ii. orice izomorfism de latici de la $(A, \vee, \wedge)$ la $(B, \vee, \wedge)$ este izomorfism boolean de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$;

- pentru orice mulţime A, $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ este o algebră Boole, unde am notat, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\overline{X} = A \setminus X$;
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_2^n$ (puterea a n–a a lanţului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole $\mathcal{L}_2$, numită *algebra Boole standard*;
- orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$; în particular, orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2;

- se numeşte *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul $(B, \leq)$, adică un element $a \in B$ cu $0 \prec a$ (i. e. astfel încât $0 < a$ şi nu există niciun $x \in B$ cu proprietatea că $0 < x < a$);

- de exemplu, dacă notăm cu $L_2 = \{0, 1\}$ mulţimea suport a lanţului cu 2 elemente, $\mathcal{L}_2$, astfel că $L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}\}$ este mulţimea subiacentă a algebrei Boole $\mathcal{L}_2^n$, atunci atomii lui $\mathcal{L}_2^n$ sunt $(0, 0, \ldots, 0, 0, 1), (0, 0, \ldots, 0, 1, 0), \ldots, (1, 0, \ldots, 0, 0, 0)$; mai general, pentru orice mulţime I, atomii algebrei Boole $\mathcal{L}_2^I$ sunt familiile de cifre binare $(x_i)_{i \in I} \in L_2^I$ cu proprietatea că $(\exists\, !\, k \in I)\, (x_k = 1)$;

- se numeşte *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o submulţime nevidă F a lui B închisă la conjuncţie şi la majorare, i. e. o mulţime F cu proprietăţile:

  i. $\emptyset \neq F \subseteq B$;
  ii. pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;
  iii. pentru orice $x \in F$ şi orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;

  mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Filt}(\mathcal{B})$;

- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conţine elementul 1;

- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi orice $a \in B$, mulţimea notată $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, numit *filtrul principal generat de a*; notăm mulţimea filtrelor principale ale lui $\mathcal{B}$ cu $\mathrm{PFilt}(\mathcal{B})$;

- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale;

- se numeşte *congruenţă a unei algebre Boole* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B care, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, satisface proprietăţile:

  i. dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $\vee$**);
  ii. dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $\wedge$**);
  iii. dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $^-$**);

  notăm cu $\mathrm{Con}(\mathcal{B})$ mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$;

- referitor la definiţia anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relaţii binare $\sim$ pe B cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$ (i. e. constantele 0 şi 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, proprietăţi care sunt satisfăcute nu numai de către orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B, ci chiar de către orice relaţie reflexivă $\sim$ pe B;

- mulţimea congruenţelor unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este în bijecţie cu mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$;

- dacă $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ este o algebră Boole, iar $\sim$ este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$, atunci mulţimea factor a lui B prin $\sim$ se organizează ca algebră Boole astfel: dacă, oricare ar fi $a \in B$, notăm cu $\widehat{a}$ clasa lui a în raport cu $\sim$, atunci, pentru orice $x, y \in B$, se definesc:

  i. $\widehat{x} \vee \widehat{y} = \widehat{x \vee y}$,
  ii. $\widehat{x} \wedge \widehat{y} = \widehat{x \wedge y}$,
  iii. $\overline{\widehat{x}} = \widehat{\overline{x}}$,
  iv. $0 = \widehat{0}$ şi $1 = \widehat{1}$;

faptul că $\sim$ este o congruenţă a algebrei Boole $\mathcal{B}$ arată că operaţiile de mai sus sunt bine definite, i. e. nu depind de reprezentanţii claselor; $(B/_\sim, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, numită *algebra Boole factor* (sau *cât*) *a lui* $\mathcal{B}$ *prin* $\sim$;

- notăm cu V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic;
- notăm cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;
- dată o *interpretare* în calculul propoziţional clasic, i. e. o funcţie $h : V \to \mathcal{L}_2$, notăm cu $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene;
- se notează cu $h \vDash \varphi$, respectiv $h \vDash \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ *satisface un enunţ* $\varphi \in E$, respectiv *o mulţime de enunţuri* $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;
- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\vDash \varphi$ faptul că un enunţ φ este *universal adevărat (tautologie, adevăr semantic)* în logica propoziţională clasică (adică orice interpretare satisface pe φ);
- se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\Sigma \vDash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este *deductibil semantic din ipotezele* $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică (adică orice interpretare care satisface pe Σ satisface şi pe φ);
- pentru orice enunţ φ, $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, şi $\vDash \varphi$ ddacă $\emptyset \vDash \varphi$;
- ca orice regulă de deducţie scrisă în acest mod, regula de deducţie **modus ponens** (abreviată **MP**) scrisă sub forma: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$, are semnificaţia: $\{\varphi,\ \varphi \to \psi\} \vdash \psi$;
- pentru orice mulţime $\Sigma \subseteq E$, notăm cu $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^{\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ algebra Lindenbaum–Tarski asociată mulţimii de ipoteze Σ pentru logica propoziţională clasică, despre care ştim că este o algebră Boole; amintim că $\sim_\Sigma = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \mathrm{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi}^{\Sigma} \in E/_{\sim_\Sigma}$ clasa unui enunţ φ în $E/_{\sim_\Sigma}$;
- cazul particular $\Sigma = \emptyset$ în cele de mai sus: notăm cu $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, care este o algebră Boole; amintim că $\sim = \sim_\emptyset = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \mathrm{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi} \in E/_\sim$ clasa unui enunţ φ în $E/_\sim$;
- pentru orice $\Sigma \subseteq E$ şi orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi}^{\Sigma} = 1_\Sigma$ în algebra booleană $E/_{\sim_\Sigma}$ (**lemă** din calculul propoziţional clasic);
- caz particular: pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi} = 1$ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_\sim$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducţiei** pentru calculul propoziţional clasic; abreviată **TD**);
- pentru orice $\varphi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic; abreviată **TCT**); cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numeşte **Teorema de completitudine** a calculului propoziţional clasic (**TC**);

- mulţimea T a teoremelor formale ale logicii propoziţionale clasice e satisfăcută de orice interpretare;
- o mulţime $\Sigma \subseteq E$ e *satisfiabilă* (adică există o interpretare care o satisface) ddacă Σ e *consistentă*, i. e. sistemul deductiv $\Delta(\Sigma)$ generat de Σ, anume $\Delta(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$, nu conţine toate enunţurile, adică $\Delta(\Sigma) \subsetneq E$;
- pentru orice $\varphi \in E$, există o *formă normală conjunctivă (FNC)* (i. e. o conjuncţie de disjuncţii de *literali*, adică elemente din $V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$) $\gamma \in E$ astfel încât $\varphi \sim \gamma$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\gamma)$ pentru orice interpretare h;
- un enunţ φ în FNC e *nesatisfiabil* (i. e. nu e satisfăcut de nicio interpretare, ceea ce e echivalent cu $\vDash \neg\varphi$, aşadar $\vdash \neg\varphi$ conform **TC**) ddacă există măcar o derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\square$ din φ;
- un enunţ φ în FNC e satisfiabil ddacă nu există nicio derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\square$ din φ.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova (2003).

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1974, 1975, 1976).

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti (1978).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti (2010).

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti (1969).

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).

Breviar pentru Cursurile de Logică Matematică şi Computaţională despre Laticí şi Algebre Boole

Claudia MUREŞAN

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

1 Latici

- O latice este simultan un poset şi o structură algebrică înzestrată cu două operaţii binare, fiecare dintre acestea cu anumite proprietăţi specifice.
- Vom defini mai jos două tipuri de latici, anume

  laticile Ore şi **laticile Dedekind**.

  Orice latice Ore poate fi organizată ca o latice Dedekind, şi orice latice Dedekind poate fi organizată ca o latice Ore.
- Aşadar, de fapt, există un singur fel de latice, care este simultan o latice Ore şi o latice Dedekind.

Definiţia 1.1. O *latice Ore* este un poset $(L, \leq)$ cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\} \in L$ şi $\sup\{x, y\} \in L$.

Remarca 1.1. Orice lanţ este latice Ore, pentru că, dacă $(L, \leq)$ este un lanţ nevid, iar $x, y \in L$, atunci $x \leq y$ sau $y \leq x$, prin urmare există $\min\{x, y\}$ şi $\max\{x, y\}$, aşadar există în $(L, \leq)$ $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ şi $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.

Definiţia 1.2. O *latice Dedekind* este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$, unde L este o mulţime, iar $\vee$ şi $\wedge$ sunt două operaţii binare pe L (adică $\vee : L^2 \to L$ şi $\wedge : L^2 \to L$; aceste operaţii binare sunt notate infixat şi numite, respectiv, *sau* şi *şi*, sau *disjuncţie* şi *conjuncţie*, sau *reuniune* şi *intersecţie*) care satisfac următoarele proprietăţi:

- **idempotenţă:** pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$ şi $x \wedge x = x$;
- **comutativitate:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ şi $x \wedge y = y \wedge x$;
- **asociativitate:** pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ şi $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- **absorbţie:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ şi $x \wedge (x \vee y) = x$.

Lema 1.1. *Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $x \leq y$

(ii) *există în L* $\inf\{x, y\} = x$

(iii) *există în L* $\sup\{x, y\} = y$

Lema 1.2. *Fie $(L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $x \wedge y = x$

(ii) $x \vee y = y$

Teorema 1.1. *Cele două definiţii ale noţiunii de latice sunt echivalente. Mai precis, au loc următoarele fapte.*

(i) Fie $\mathcal{L} := (L, \leq)$ o latice Ore. Definim $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, unde $\vee$ şi $\wedge$ sunt operaţii binare pe mulţimea L, definite prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ şi $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ în laticea Ore $\mathcal{L}$. Atunci $\Phi(\mathcal{L})$ este o latice Dedekind.

(ii) Fie $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Definim $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, unde $\leq$ este o relaţie binară pe mulţimea L, definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ (ceea ce este echivalent cu $x \wedge y = x$, după cum ne asigură o lemă de mai sus). Atunci $\Psi(\mathcal{L})$ este o latice Ore, în care, pentru orice $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ şi $\sup\{x, y\} = x \vee y$.

(iii) Aplicaţiile Φ şi Ψ sunt inverse una alteia, adică: pentru orice latice Ore $\mathcal{L}$, $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$, şi, pentru orice latice Dedekind $\mathcal{L}$, $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.

- De acum încolo, vom numi orice latice Ore şi orice latice Dedekind, simplu, *latice.*
- Conform teoremei anterioare, orice latice este simultan o latice Ore şi o latice Dedekind.
- Ori de câte ori va fi dată o latice, vom lucra cu ordinea ei parţială (care o face latice Ore) şi cu operaţiile ei binare (disjuncţia şi conjuncţia, care o fac latice Dedekind) fără a specifica la care dintre cele două definiţii echivalente ale unei latici ne vom referi într–un anumit moment.
- Pentru orice latice L, vom folosi oricare dintre notaţiile: $(L, \leq)$, $(L, \vee, \wedge)$ şi $(L, \vee, \wedge, \leq)$, în funcţie de ce trebuie specificat despre structura de latice a lui L: ordinea ei parţială $\leq$, operaţiile ei binare $\vee$ şi $\wedge$, sau toate acestea.

Exemplul 1.1. Cu ultima dintre notaţiile de mai sus, următoarele structuri sunt latici:

- $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$, pentru orice mulţime T;
- orice lanţ $(L, \max, \min, \leq)$.

Propoziţia 1.1 (două inegalităţi nestricte şi de acelaşi sens într–o latice se pot compune cu $\vee$, precum şi cu $\wedge$, membru cu membru; altfel spus, relaţia de ordine într–o latice este compatibilă cu $\vee$ şi cu $\wedge$). *Pentru orice elemente x, y, a, b ale unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$, dacă $x \leq a$ şi $y \leq b$, atunci $x \wedge y \leq a \wedge b$ şi $x \vee y \leq a \vee b$.*

Principiul dualităţii pentru latici:

În concordanţă cu **Principiul dualităţii pentru poseturi**, următoarele noţiuni legate de definiţia unei latici sunt duale unele faţă de celelalte: $\vee$ şi $\wedge$, $\leq$ şi $\geq$, respectiv, unde, ca şi la enunţarea **Principiului dualităţii pentru poseturi**, am notat $\geq := \leq^{-1}$.

Pentru a exprima acest fapt mai precis, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este o latice, atunci este imediat, din definiţia unei latici şi **principiul dualităţii pentru poseturi**, că $(L, \wedge, \vee, \geq)$ este, de asemenea, o latice, iar această latice se numeşte *duala* laticii $(L, \vee, \wedge, \leq)$.

Este evident că duala dualei unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este chiar $(L, \vee, \wedge, \leq)$.

Aceste fapte ne conduc la **Principiul dualităţii pentru latici**: *orice rezultat privind o latice arbitrară $(L, \vee, \wedge, \leq)$ rămâne valabil dacă în el interschimbăm $\vee$ cu $\wedge$ şi $\leq$ cu $\geq$.*

Ca şi la **Principiul dualităţii pentru poseturi**, este esenţial ca laticea să fie **arbitrară**, adică acest principiu se referă **în mod strict** la rezultate valabile în **toate** laticile.

De acum încolo, ori de câte ori vom apela la **Principiul dualităţii pentru latici**, vom scrie, simplu, "prin dualitate".

2 Funcţii izotone versus morfisme de latici

Definiţia 2.1. Fie $(L, \vee, \wedge)$ şi $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici şi $f : L \to M$ o funcţie.

f se numeşte *morfism de latici* ddacă f comută cu operaţiile de latici, i. e.: pentru orice $x, y \in L$,

(i) $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$

şi

(ii) $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$.

Un morfism de latici de la o latice la ea însăşi se numeşte *endomorfism* al acelei latici.

Remarca 2.1. Compunerea a două morfisme de latici este un morfism de latici.

Remarca 2.2. Orice morfism de latici este funcţie izotonă, dar nu şi reciproc.

Definiţia 2.2. Un *izomorfism de latici* este un morfism de latici inversabil, i. e. un morfism de latici care este o funcţie inversabilă şi a cărei inversă este tot un morfism de latici.

Un *automorfism de latici* este un izomorfism de latici între o latice şi ea însăşi (adică un endomorfism de latici inversabil).

Definiţia 2.3. Două latici între care există un izomorfism de latici se zic *izomorfe.*

În general, oricare două structuri algebrice de acelaşi tip între care există un izomorfism se vor zice *izomorfe.*

Propoziţia 2.1. *O funcţie între două latici este un izomorfism de latici ddacă este un morfism bijectiv de latici, adică un morfism de latici care este funcţie bijectivă.*

Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici este, de asemenea, un morfism de latici.

Propoziţia 2.2. *O funcţie între două latici este izomorfism de latici ddacă este izomorfism de ordine (între poseturile subiacente celor două latici).*

3 Latici mărginite

Definiţia 3.1. Un poset mărginit care este latice se numeşte *latice mărginită.*

Dacă există, primul element al (adică minimul) unei latici se notează, de obicei, cu 0.

Dacă există, ultimul element al (adică maximul) unei latici se notează, de obicei, cu 1.

O latice mărginită va fi notată $(L, \leq, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, cu notaţiile prezentate mai sus.

O latice mărginită se mai numeşte *latice cu* 0 *şi* 1 sau *latice cu prim şi ultim element.*

Definiţia 3.2. Laticea mărginită cu un singur element (adică laticea mărginită cu $0 = 1$) se numeşte *laticea mărginită trivială.*

Orice latice mărginită de cardinal strict mai mare decât 1 (adică orice latice mărginită în care $0 \neq 1$) se numeşte *latice mărginită netrivială.*

Definiţia 3.3. Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ şi $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ două latici mărginite şi $f : L \to M$ o funcţie.

f se numeşte *morfism de latici mărginite* ddacă este morfism de latici şi $f(0) =\perp$ şi $f(1) = \top$.

Un morfism de latici mărginite de la o latice mărginită la ea însăşi se numeşte *endomorfism* al acelei latici mărginite.

Remarca 3.1. Compunerea a două morfisme de latici mărginite este un morfism de latici mărginite.

Definiţia 3.4. Un *izomorfism de latici mărginite* este un morfism de latici mărginite inversabil, i. e. un morfism de latici mărginite care este o funcţie inversabilă a cărei inversă este tot un morfism de latici mărginite.

Un *automorfism de latici mărginite* este un izomorfism de latici mărginite între o latice mărginită şi ea însăşi (adică un endomorfism de latici mărginite inversabil).

Definiţia 3.5. Două latici mărginite între care există un izomorfism de latici mărginite se zic *izomorfe.*

Propoziţia 3.1. *O funcţie între două latici mărginite este un izomorfism de latici mărginite ddacă este un morfism bijectiv de latici mărginite, adică un morfism de latici mărginite care este funcţie bijectivă.*

Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici mărginite este, de asemenea, un morfism de latici mărginite.

Remarca 3.2. De fapt, conform următoarei remarci, izomorfismele de latici mărginite coincid cu izomorfismele de latici între latici mărginite, i. e.: orice izomorfism de latici între două latici mărginite este izomorfism de latici mărginite.

Remarca 3.3. Am văzut că orice funcţie izotonă păstrează minimele şi maximele arbitrare.

Prin urmare, orice funcţie izotonă surjectivă între două poseturi mărginite păstrează minimul şi maximul, i. e. duce minimul primului poset în minimul celui de–al doilea poset, şi duce maximul primului poset în maximul celui de–al doilea poset.

Remarca 3.4. Am afirmat la un moment dat că ordinea totală pe o mulţime finită este unică, modulo o permutare a elementelor mulţimii (desigur, şi există o astfel de ordine totală).

Semnificaţia acestei afirmaţii este că oricare două lanţuri finite cu aceeaşi mulţime suport sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este acelaşi lucru, pentru că ştim că izomorfismele de ordine coincid cu izomorfismele de latici), adică: pentru orice mulţime finită A, dacă $\leq$ şi $\sqsubseteq$ sunt ordini totale pe A, atunci poseturile (laticile) $(A, \leq)$ şi $(A, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe.

Ca o consecinţă imediată, oricare două lanţuri finite de acelaşi cardinal (i. e. cu acelaşi număr de elemente, aici, în cazul finit) sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este acelaşi lucru), adică, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, lanţul cu n elemente este unic, modulo un izomorfism (altfel spus, până la un izomorfism), i. e. oricare două lanţuri cu n elemente sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este acelaşi lucru; deci şi ca latici mărginite, conform remarcii anterioare).

4 Sublatici şi sublatici mărginite

Definiţia 4.1. Dată o latice $(L, \vee, \wedge)$, o submulţime M a lui L se numeşte *sublatice a lui* L ddacă este închisă la operaţiile de latice ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$.

Dată o latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, o submulţime M a lui L se numeşte *sublatice mărginită a lui* L ddacă este închisă la operaţiile de latice mărginită ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$;
- $0, 1 \in M$.

Remarca 4.1. Este imediat că o sublatice (mărginită) M a unei latici (mărginite) L este o latice (mărginită) cu operaţiile *induse* pe M de operaţiile lui L, adică restricţiile operaţiilor lui L la M:

- restricţia lui $\vee$ la M este operaţia binară $\sqcup$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcup y := x \vee y$;
- restricţia lui $\wedge$ la M este operaţia binară $\sqcap$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcap y := x \wedge y$;
- pentru latici mărginite: restricţia lui 1 la M la M este 1 (aceasta este o constantă, i. e. o *operaţie zeroară*, adică o operaţie fără argumente); restricţia lui 0 la M la M este 0 (şi aceasta este o constantă, i. e. o *operaţie zeroară*, adică o operaţie fără argumente).

Operaţiile induse se notează, de obicei, la fel ca operaţiile laticii L:

- operaţia $\sqcup$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\vee$;
- operaţia $\sqcap$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\wedge$;
- în cazul laticilor mărginite, primul şi ultimul element al sublaticii mărginite M, ca prim şi, respectiv, ultim element al laticii mărginite M, se notează, de obicei tot cu 0 şi 1, respectiv.

Remarca 4.2. Cu notaţiile din remarca anterioară, este trivial că ordinea parţială a unei sublatici M a lui L (ca latice cu operaţiile induse de cele ale lui L) este exact ordinea parţială a lui L restricţionată la M, care (amintim) se notează, în mod uzual, la fel ca ordinea parţială a lui L:

- notând cu $\sqsubseteq$ ordinea laticii M, pentru orice $x, y \in M$, avem: $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \sqcup y = y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \leq y$;
- deci ordinea $\sqsubseteq$ a laticii M este, într–adevăr, restricţia lui $\leq$ la M, şi $\sqsubseteq$ se notează, de obicei, tot cu $\leq$.

Remarca 4.3. Orice submulţime a unei latici $\mathcal{L}$ este (sub)poset cu ordinea indusă, dar nu este neapărat şi sublatice, pentru că poate să nu conţină infimumurile şi supremumurile din $\mathcal{L}$ ale perechilor de elemente ale sale.

Exerciţiul 4.1 (temă). Orice submulţime total ordonată a unei latici $\mathcal{L}$ este sublatice a lui $\mathcal{L}$.

Exerciţiul 4.2 (temă). Să se demonstreze că:

(i) imaginea unui morfism de latici (mărginite) este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;

(ii) mai general: imaginea printr–un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a domeniului său este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;

(iii) preimaginea printr–un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a codomeniului său este o sublatice (mărginită) a domeniului acelui morfism.

(Desigur, preimaginea întregului codomeniu este întregul domeniu (pentru orice funcţie), deci acest caz particular la punctul (iii) este trivial.)

5 Latici distributive

Propoziţia 5.1. *În orice latice $(L, \vee, \wedge)$, următoarele două afirmaţii, numite* legile de distributivitate, *sunt echivalente:*
(d_1) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
(d_2) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Definiţia 5.1. O latice se zice *distributivă* ddacă satisface una (şi deci pe amândouă) dintre condiţiile (d_1) şi (d_2) din propoziţia precedentă.

Remarca 5.1. A se observa că egalităţile din legile de distributivitate **nu** sunt echivalente pentru orice $x, y, z \in L$, ci este necesar ca fiecare dintre aceste egalităţi să fie satisfăcută **pentru orice** $x, y, z \in L$ pentru a rezulta că şi cealaltă este satisfăcută (de asemenea, pentru orice $x, y, z \in L$).

Remarca 5.2. Pentru orice mulţime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este distributivă.

Remarca 5.3. Orice lanţ este o latice distributivă.

Remarca 5.4. Orice sublatice a unei latici distributive este distributivă.

Remarca 5.5. Imaginea oricărei latici distributive printr–un morfism de latici este o latice distributivă.

A se vedea în curs diagramele Hasse ale *diamantului* şi *pentagonului* – cele mai mici latici nedistributive, întrucât:

Propoziţia 5.2 (caracterizare a laticilor distributive). *O latice L este distributivă ddacă nu are nicio sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul.*

6 Elemente complementate în latici mărginite

Definiţia 6.1. Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ latice mărginită.
Un element $x \in L$ se zice *complementat* ddacă există un element $y \in L$ a. î. $x \vee y = 1$ şi $x \wedge y = 0$.
Un astfel de element y se numeşte *complement al lui x*.
O latice mărginită se zice *complementată* ddacă toate elementele sale sunt complementate.

Remarca 6.1. În mod evident, dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită şi $x, y \in L$ sunt a. î. y este un complement al lui x, atunci x este un complement al lui y, după cum arată comutativitatea lui $\vee$ şi $\wedge$.

Remarca 6.2. În orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia şi niciunul dintre ele nu are alte complemente.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite:

Remarca 6.3. În orice latice distributivă mărginită, complementul unui element, dacă există, este unic.

7 Latici complete

Definiţia 7.1. O latice $(L, \leq)$ se zice *completă* ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, există $\inf(A)$ şi $\sup(A)$ în posetul $(L, \leq)$.
Pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ se mai notează cu $\displaystyle\bigwedge_{x \in A} x$, iar $\sup(A)$ se mai notează cu $\displaystyle\bigvee_{x \in A} x$.

Exemplul 7.1. Pentru orice mulţime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, T)$ este mărginită, distributivă şi completă.

Remarca 7.1.
- Orice latice completă $(L, \leq)$ este nevidă şi mărginită, pentru că există $\inf(L) \in L$ şi $\sup(L) \in L$, deci acestea sunt respectiv $\min(L) = 0$ şi $\max(L) = 1$, cu notaţia clasică pentru primul şi ultimul element al unei latici.
- Orice latice finită şi nevidă este completă, pentru că, după cum am demonstrat mai sus, orice latice nevidă conţine infimumurile şi supremumurile tuturor submulţimilor sale finite şi nevide şi, în plus, orice latice finită şi nevidă are prim şi ultim element, iar acestea sunt, respectiv, supremumul şi infimumul mulţimii vide.
- O latice $(L, \leq)$ este completă ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în $(L, \leq)$, ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în $(L, \leq)$.

8 Suma directă, produsul direct şi suma ordinală de poseturi

Definiţia 8.1. Fie $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi. Se definesc:

- *suma directă* a poseturilor $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \oplus \sqsubseteq$ este următoarea relaţie binară pe $A \coprod B$: $\leq \oplus \sqsubseteq := \leq \cup \sqsubseteq \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, cu identificarea între fiecare element al lui $A \cup B$ şi elementul reuniunii disjuncte $A \coprod B$ care îi corespunde;

- *produsul direct* al poseturilor $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$, notat $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$, unde $\leq \times \sqsubseteq$ este următoarea relaţie binară pe mulţimea produs direct $A \times B$: $\leq \times \sqsubseteq := \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, a_1 \leq a_2, b_1 \sqsubseteq b_2\}$.

În cazul în care $(A, \leq)$ are un maxim, pe care îl notăm cu 1, iar $(B, \sqsubseteq)$ are un minim, pe care îl notăm cu 0, atunci *suma ordinală* a poseturilor $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \dotplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \dotplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \dotplus \sqsubseteq$ este următoarea relaţie binară pe $A \coprod (B \setminus \{0\})$, cu aceleaşi identificări ca mai sus: $\leq \dotplus \sqsubseteq := \leq \cup (\sqsubseteq \setminus \{(0, b) \mid b \in B\}) \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Observaţia 8.1. Definiţia de mai sus a relaţiei binare $\leq \times \sqsubseteq$ este un caz particular al definiţiei unui produs direct arbitrar de relaţii binare, prezentate într–un curs anterior.

Remarca 8.1 (temă). Cu notaţiile din definiţia anterioară, relaţiile binare sumă directă, $\leq \oplus \sqsubseteq$, produs direct, $\leq \times \sqsubseteq$, şi sumă ordinală, $\leq \dotplus \sqsubseteq$, sunt **relaţii de ordine** pe $A \coprod B$, $A \times B$ şi $(A \coprod (B \setminus \{0\})$, respectiv. Adică:$(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$, $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ şi $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \dotplus \sqsubseteq)$ sunt **poseturi**.

Remarca 8.2 (temă). Se observă că:

- **suma directă** şi **suma ordinală** de poseturi **sunt asociative**, dar **nu sunt comutative**;
- **produsul direct** de poseturi **este asociativ şi comutativ, până la un izomorfism de poseturi**, i. e., pentru orice poseturi $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ şi $(C, \leq_C)$, există un izomorfism de poseturi între $((A, \leq_A) \times (B, \leq_B)) \times (C, \leq_C)$ şi $(A, \leq_A) \times ((B, \leq_B) \times (C, \leq_C))$ (anume $f : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$, pentru orice $a \in A$, $b \in B$ şi $c \in C$, $f((a, b), c) = (a, (b, c)))$ şi există un izomorfism de poseturi între $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B)$ şi $(B, \leq_B) \times (A, \leq_A)$ (anume $g : A \times B \to B \times A$, pentru orice $a \in A$ şi $b \in B$, $g(a, b) = (b, a)$).

Se demonstrează simplu că şi **produsul direct** de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (structuri pe care le vom studia mai târziu) **este asociativ şi comutativ, până la un izomorfism**, în aceste cazuri un izomorfism de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (a se vedea următoarea parte a acestui curs pentru definiţia unui produs direct de algebre).

Remarca 8.3 (temă). Fie $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi.

(i) Dacă $|A| \geq 2$ şi $|B| \geq 2$, atunci produsul direct $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu este lanţ.

(ii) Dacă A este un singleton (i. e. o mulţime cu un singur element), atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism de poseturi între ele).

(iii) Dacă B este un singleton, atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ şi $(A, \leq)$ sunt izomorfe.

(iv) Dacă $A = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (A, \leq)$.

(v) Dacă $B = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (B, \sqsubseteq)$.

Remarca 8.4. Remarca anterioară arată că lanţurile sunt **indecompozabile** raportat la produsul direct (i. e. lanţurile nu pot fi descompuse în produs direct de alte poseturi), pentru că, dacă un lanţ nevid $(L, \leq)$ este izomorf cu un produs direct de poseturi, atunci toate acele poseturi sunt nevide, iar unul dintre ele este izomorf cu $(L, \leq)$ şi fiecare dintre celelalte are câte un singur element.

A se vedea în curs cum arată **diagramele Hasse ale poseturilor sumă directă, produs direct şi sumă ordinală între două poseturi finite**.

Definiţia 8.2. Produsul direct poate fi generalizat la **familii arbitrare de poseturi**, astfel: fie $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ o familie arbitrară de poseturi. Atunci se defineşte *produsul direct* al acestei familii, notat $\prod_{i \in I} (A_i, \leq_i)$, ca fiind $(\prod_{i \in I} A_i, \leq)$, unde $\leq := \prod_{i \in I} \leq_i$ este următoarea relaţie binară pe produsul direct de mulţimi $\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\, (f(i) \in A_i)\}$: pentru orice $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$,

$$f \leq g \text{ ddacă } (\forall\, i \in I)\, (f(i) \leq_i g(i))$$

După cum ştim din rezultatul privind proprietăţile unui produs direct arbitrar de relaţii binare, relaţia $\leq$ definită mai sus este o **relaţie de ordine** pe $\prod_{i \in I} A_i$, deci $(\prod_{i \in I} A_i, \leq) = \prod_{i \in I} (A_i, \leq_i)$ este un **poset**.

Notaţia 8.1. Pentru $(A_i, \leq_i) = (A, \leq)$, oricare ar fi $i \in I$, în definiţia anterioară, produsul direct al familiei $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ devine $(A^I, \leq)$ (notând ordinea de pe $A^I = \{f : I \to A\}$ la fel ca ordinea de pe A).

Ordinea strictă şi succesiunea asociate ordinii produs:

Remarca 8.5. Cu notaţiile din definiţia anterioară, dacă notăm $\prod_{i \in I} A_i = A$ şi, pentru fiecare $i \in I$, notăm cu $<_i$ relaţia de ordine strictă asociată lui $\leq_i$, iar cu $\prec_i$ relaţia de succesiune asociată lui $\leq_i$, şi cu $<$ notăm relaţia de ordine strictă asociată ordinii produs $\leq$, iar cu $\prec$ notăm relaţia de succesiune asociată lui $\leq$, atunci:

- $<= \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (a_i)_{i \in I} \leq (b_i)_{i \in I}$ şi $(\exists\, k \in I)\,(a_k <_k b_k)\}$;
- $\prec= \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (\exists\, k \in I)\,[a_k \prec_k b_k$ şi $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)]\}$.

Remarca 8.6. Din remarca anterioară deducem că, dacă $(A, \leq_A)$ şi $(B, \leq_B)$ sunt poseturi, iar relaţia de succesiune asociată lui $\leq_A$, respectiv $\leq_B$, este $\prec_A$, respectiv $\prec_B$, atunci relaţia de succesiune asociată ordinii produs, $\leq = \leq_A \times \leq_B$, este:

$$\prec= \{((a, b), (a', b')) \in (A \times B)^2 \mid (a = a' \text{ şi } b \prec_B b') \text{ sau } (a \prec_A a' \text{ şi } b = b')\}$$

A se observa, din această expresie a lui $\prec$, corectitudinea reprezentării de mai sus a produsului direct a două poseturi finite printr–o diagramă Hasse.

Remarca 8.7. Produsul direct al familiei vide de mulţimi este **un singleton**, adică o mulţime cu un singur element. Prin urmare, produsul direct al familiei vide de poseturi este un singleton $\{*\}$, organizat ca poset cu unica relaţie de ordine pe un singleton, anume $\{(*, *)\}$.

9 Algebre produs direct

A se revedea, de mai sus, definiţia **produsului direct al unei familii de poseturi**.

În această definiţie se pot înlocui poseturile cu mulţimi înzestrate cu **relaţii binare** arbitrare, şi se obţine produsul direct al respectivelor mulţimi înzestrat cu relaţia produs direct al respectivelor relaţii binare.

Această construcţie poate fi generalizată la mulţimi înzestrate cu **relaţii** n**–are**.

Dar **produsul direct** se poate defini şi pentru structuri algebrice de acelaşi tip înzestrate cu anumite **operaţii**, pe baza cărora se definesc, punctual, operaţiile produsului direct.

Produsul direct al unor latici este **simultan un poset produs direct** (latice Ore) şi **o algebră produs direct cu două operaţii binare** (latice Dedekind).

Vom exemplifica mai jos noţiunea de **produs direct al unor mulţimi înzestrate şi cu operaţii, şi cu relaţii**.

Exerciţiul 9.1 (temă). Pe baza celor de mai jos, să se scrie produsul de algebre şi pentru cazul general al algebrelor înzestrate cu o **operaţie** p**–ară (de aritate** p**, cu** p **argumente)** şi o **relaţie** k**–ară**, unde $p, k \in \mathbb{N}$ (sau $\mathbb{N}^*$).

Să exemplificăm pe o structură formată dintr–o mulţime înzestrată cu o relaţie binară şi trei operaţii, dintre care una binară, una unară (adică având un singur argument) şi una zeroară (adică fără argumente, adică o constantă: vom vedea).

Mai întâi pentru **produse directe finite nevide**.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi n structuri algebrice de acelaşi tip $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in \overline{1, n}$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \to A_i$ este o operaţie binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \to A_i$ este o operaţie unară,
- $c_i \in A_i$ este o operaţie zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relaţie binară,

fiecare dintre acestea pe mulţimea A_i.

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$, cu:

- $A \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i=1}^{n} A_i$,

  cu *operaţiile produs direct*:

- $\odot \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i=1}^{n} \odot_i \overset{\text{notaţie}}{=} (\odot_1, \ldots, \odot_n)$,

- $f \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i=1}^{n} f_i \overset{\text{notaţie}}{=} (f_1, \ldots, f_n)$,

- $c \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i=1}^{n} c_i \overset{\text{notaţie}}{=} (c_1, \ldots, c_n)$

  şi *relaţia binară produs direct*:

- $\rho \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i=1}^{n} \rho_i = \rho_1 \times \ldots \times \rho_n$,

definite **pe componente**, i. e. ca mai jos, unde notaţia pentru un element $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ semnifică faptul că $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$:

- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, $x \odot y \overset{\text{definiţie}}{=} (x_1 \odot_1 y_1, \ldots, x_n \odot_n y_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, $f(x) \overset{\text{definiţie}}{=} (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in A$;
- constanta $c \overset{\text{definiţie}}{=} (c_1, \ldots, c_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, prin definiţie, $x \rho y$ ddacă $x_1 \rho_1 y_1, \ldots, x_n \rho_n y_n$.

Dacă $(A_1, \odot_1, f_1, c_1, \rho_1) = \ldots = (A_n, \odot_n, f_n, c_n, \rho_n) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$, atunci $A = B^n = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_1, \ldots, b_n \in B\}$, şi operaţiile şi relaţia binară produs pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Şi acum **cazul general**: fie $((A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i))_{i \in I}$ o **familie arbitrară** de structuri algebrice, unde, pentru fiecare $i \in I$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \to A_i$ este o operaţie binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \to A_i$ este o operaţie unară,
- $c_i \in A_i$ este o operaţie zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relaţie binară,

fiecare dintre acestea pe mulţimea A_i.

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$, cu:

- $A \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{h \mid h : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\, (h(i) \in A_i)\}$,

cu *operaţiile produs direct* $\odot$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) şi *relaţia binară produs direct* ρ pe A definite **punctual**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $g, h \in A$, $g \odot h \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(g \odot h)(i) = g(i) \odot_i h(i)$;
- pentru orice $h \in A$, $f(h) \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f(h))(i) = f_i(h(i))$;
- $c \in A$, definită prin: pentru orice $i \in I$, $c(i) = c_i \in A_i$;
- pentru orice $g, h \in A$, prin definiţie, $g \rho h$ ddacă $g(i) \rho_i h(i)$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{h \mid h : I \to B\}$, şi operaţiile şi relaţia binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Scriere alternativă pentru *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$:

- $A \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall\, i \in I)\, (a_i \in A_i)\}$, cu *operaţiile produs direct* $\odot$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) şi *relaţia binară produs direct* ρ pe A definite **pe componente**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in A$, $(a_i)_{i\in I} \odot (b_i)_{i\in I} := (a_i \odot_i b_i)_{i\in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i\in I} \in A$, $f((a_i)_{i\in I}) := (f_i(a_i))_{i\in I} \in A$;
- $c := (c_i)_{i\in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in A$, prin definiţie, $(a_i)_{i\in I}\rho(b_i)_{i\in I}$ ddacă $a_i\rho_i b_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{(a_i)_{i\in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in B)\}$, şi operaţiile şi relaţia binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Produsul direct al familiei vide de structuri algebrice de acelaşi tip:

În cazul în care $I = \emptyset$, obţinem **algebra produs direct al familiei vide de algebre** de tipul de mai sus, anume $(A, \odot, f, c, \rho)$, unde:

- A este un *singleton*, adică o mulţime cu un singur element: $A = \{a\}$;
- operaţiile $\odot$, f şi c au singurele definiţii posibile pe un singleton, anume: $a \odot a := a$, $f(a) := a$ şi $c := a$;
- $\rho \subseteq A^2 = \{(a, a)\}$, deci ρ nu poate fi decât $\emptyset$ sau $\{(a, a)\}$; dar ρ este produsul familiei vide de relaţii binare, care este tot un produs direct al familiei vide de mulţimi, deci este tot un singleton, aşadar $\rho = \{(a, a)\}$.

Exerciţiul 9.2 (temă). Să se demonstreze că un produs direct arbitrar de latici (mărginite) este o latice (mărginită).

Produsul direct al familiei vide de mulţimi şi operaţiile zeroare. Operaţii zeroare $\equiv$ constante:

Definiţia 9.1. Dacă $\mathcal{A}$ este o structură algebrică, având mulţimea suport A, iar $n \in \mathbb{N}$, atunci o *operaţie n–ară* (*operaţie de aritate n*, *operaţie cu n argumente*) a lui $\mathcal{A}$ este o funcţie $f : A^n \to A$.

- Pentru orice mulţime A, $A^0 = A^\emptyset = \prod\limits_{i\in\emptyset} A = \{a\}$ (produsul direct al familiei vide de mulţimi: un singleton).
- Aşadar, cu notaţiile din definiţia de mai sus: o *operaţie* 0*–ară* (*operaţie de aritate* 0, *operaţie fără argumente*) a lui $\mathcal{A}$ este o funcţie $f : A^0 \to A$, deci o funcţie $f : \{a\} \to A$, care poate fi identificată cu $f(a) \in A$: **o constantă din** A.
- Constantele 0 şi 1 dintr–o latice mărginită sunt operaţii zeroare. La fel sunt: elementul neutru al unui grup, 0 şi 1 dintr–un inel unitar etc..

10 Algebre Boole – definiţie, exemple, operaţii derivate

Definiţia 10.1. O *algebră Boole* (sau *algebră booleană*) este o latice mărginită distributivă complementată.

Remarca 10.1. În orice algebră Boole, datorită distributivităţii, complementul oricărui element x este unic, ceea ce ne permite să îl notăm prin $\overline{x}$ (sau $\neg\, x$).

Existenţa complementului oricărui element al unei algebre Boole de mulţime suport B (existenţă impusă în definiţia anterioară), alături de unicitatea complementului, ne dau posibilitatea de a defini o operaţie unară $^- : B \to B$ (sau $\neg : B \to B$), care duce fiecare element al lui B în complementul său.

Această operaţie se va numi *complementare* şi se va citi *not*.

Notaţie şi terminologie 10.1. O algebră Boole va fi notată $(B, \leq, ^-, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \leq, ^-, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este laticea distributivă mărginită subiacentă algebrei Boole, iar $^-$ este operaţia ei de complementare.

Adesea, $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este numită *latice Boole*, iar $(B, \vee, \wedge, \leq, ^-, 0, 1)$ este numită *algebră Boole*.

Exemple de algebre Boole:

- Orice structură algebrică poate fi desemnată de mulţimea elementelor sale, dar poate fi notată şi altfel decât această mulţime.

- Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu L_n mulţimea elementelor lanţului cu n elemente, iar cu $\mathcal{L}_n$ întreaga structură algebrică a lanţului cu n elemente, fie ea de poset, poset mărginit, latice, latice mărginită (desigur, distributivă) sau algebră Boole (în cazul lui $\mathcal{L}_1$ sau $\mathcal{L}_2$: vom vedea). Aşa cum am menţionat mai sus, nu este obligatoriu să se facă această distincţie.

La fel ca în cazul laticilor mărginite:

Remarca 10.2. O algebră Boole nu poate fi vidă, pentru că are minim şi maxim.

Definiţia 10.2.
- Algebra Boole cu un singur element (adică algebra Boole cu $0 = 1$, anume lanţul cu un singur element, $\mathcal{L}_1$) se numeşte *algebra Boole trivială*.
- Orice algebră Boole de cardinal strict mai mare decât 1 (i. e. orice algebră Boole cu cel puţin 2 elemente distincte, adică orice algebră Boole cu $0 \neq 1$) se numeşte *algebră Boole netrivială*.

Exemplul 10.1. Lanţul cu două elemente, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole.
Această algebră Boole se numeşte *algebra Boole standard*.

Remarca 10.3. Se arată imediat, direct cu definiţia unei algebre Boole, că orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole, cu operaţiile şi ordinea parţială definite punctual.

Remarca 10.4. În particular, considerând algebra Boole standard $\mathcal{L}_2$ şi o mulţime arbitrară I, remarca anterioară ne asigură de faptul că produsul direct $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I = \{f | f : I \to L_2\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operaţiile şi ordinea parţială definite **punctual**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$: pentru orice $f, g \in L_2^I$:

- $f \vee g, f \wedge g, \overline{f}, 0, 1 \in L_2^I$, definite prin: pentru orice $i \in I$:

(i) $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i)$

(ii) $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i)$

(dacă $|I| \geq 2$, atunci $\mathcal{L}_2^I$ nu e lanţ, deci $\vee \neq \max$ şi $\wedge \neq \min$ în $\mathcal{L}_2^I$)

(i) $\overline{f}(i) := \overline{f(i)}$

(ii) $0(i) := 0$ şi $1(i) := 1$

- $f \leq g$ în $\mathcal{L}_2^I$ ddacă, pentru fiecare $i \in I$, $f(i) \leq g(i)$ în $\mathcal{L}_2$.

Remarca 10.5. Aplicând remarca anterioară cazului în care I este finită, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, obţinem că $\mathcal{L}_2^n = (L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operaţiile şi relaţia de ordine definite **pe componente**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$: pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in L_2$:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$
- $\overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$
- $0 := \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ de } 0}$ şi $1 := \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ de } 1}$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în $\mathcal{L}_2^n$ ddacă $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, …, $x_n \leq y_n$ în $\mathcal{L}_2$

- $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_1$ este algebra Boole trivială.
- $\mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}_2$ este algebra Boole standard.

Exemplul 10.2. Algebra Boole $\mathcal{L}_2^2$ se numeşte *rombul*, datorită formei diagramei ei Hasse.
Algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ se numeşte *cubul*, datorită formei diagramei ei Hasse.

Exemplul 10.3. Pentru orice mulţime I, $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \subseteq, ^{-}, \emptyset, I)$, unde $\overline{A} = I \setminus A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, este o algebră Boole.

Exerciţiul 10.1 (temă). Demonstraţi că singurele algebre Boole total ordonate sunt algebra Boole trivială şi algebra Boole standard.

Propoziţia 10.1 (temă). *Mulţimea elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite este o algebră Boole (cu operaţiile induse, la care se adaugă operaţia de complementare).*

Uneori se face distincţia între:

- *latice booleană:* latice distributivă mărginită complementată;

  şi

- *algebră booleană (algebră Boole):* latice booleană înzestrată cu operaţia de complementare.

Definiţia 10.3. Pentru orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$, se definesc următoarele *operaţii binare derivate*:

- *implicaţia (booleană)*, $\rightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \rightarrow b := \overline{a} \vee b$;
- *echivalenţa (booleană)*, $\leftrightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Remarca 10.6 (complementarea este autoduală (autoinversă)). Dată o algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, ^{-}, 0, 1)$, pentru orice $x \in B$, $\overline{\overline{x}} = x$.

11 Principiul dualităţii, legile lui de Morgan, alte proprietăţi aritmetice

Remarca 11.1. Pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, ^{-}, 0, 1)$, se arată uşor că $(B, \wedge, \vee, \geq, ^{-}, 1, 0)$ este o algebră Boole, numită *duala algebrei Boole* $\mathcal{B}$.

Se ştie, din capitolul despre latici al cursului, că:

- $\vee$ şi $\wedge$,
- $\leq$ şi $\geq := \leq^{-1}$,
- 0 şi 1

sunt duale una alteia, respectiv.

Este imediat că operaţia unară $^{-}$ este duală ei însăşi. Spunem că operaţia $^{-}$ este *autoduală*.

Evident, duala dualei lui $\mathcal{B}$ este $\mathcal{B}$.

Remarca anterioară stă la baza **Principiului dualităţii pentru algebre Boole**: *orice rezultat valabil într–o algebră Boole arbitrară rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul lui interschimbăm: $\vee$ cu $\wedge$, $\leq$ cu $\geq$, 0 cu 1 (iar operaţia $^{-}$ rămâne neschimbată), supremumurile cu infimumurile arbitrare, maximele cu minimele arbitrare, elementele maximale cu elementele minimale.*

- Peste tot în cele ce urmează, dacă nu se va menţiona altfel, $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, ^{-}, 0, 1)$ va fi o algebră Boole arbitrară.

Propoziţia 11.1 (legile lui de Morgan). *Pentru orice $x, y \in B$:*

(i) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$

(ii) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Propoziţia 11.2. *Pentru orice $x, y \in B$, au loc următoarele echivalenţe:*

(i) $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$

(ii) $x \leq y$ *ddacă* $\overline{y} \leq \overline{x}$

(iii) $x \leq y$ *ddacă* $x \wedge \overline{y} = 0$ *ddacă* $\overline{x} \vee y = 1$

(iv) $x \leq y$ *ddacă* $x \to y = 1$

(v) $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$

Propoziţia 11.3 (legea de reziduaţie). *Pentru orice elemente* $\alpha, \beta, \gamma \in B$*, are loc echivalenţa:*

$$\alpha \leq \beta \to \gamma \text{ ddacă } \alpha \wedge \beta \leq \gamma.$$

12 Echivalenţa algebre Boole – inele Boole – secţiune facultativă

În definiţia şi rezultatele de mai jos, notăm $x^2 := x \cdot x$ şi $x \cdot y := xy$.

Definiţia 12.1. Se numeşte *inel Boole* un inel unitar $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in B$.

Lema 12.1. *În orice inel Boole* B*, au loc: pentru orice elemente* $x, y \in B$*,* $xy = yx$ *şi* $x + x = 0$ *(cu alte cuvinte, orice inel Boole este comutativ şi orice element nenul al unui inel Boole are ordinul* 2 *în grupul aditiv subiacent inelului; sigur că ordinul lui* 0 *este* 1*,* 0 *fiind elementul neutru al acestui grup aditiv:* $0 = 0$*).*

Teorema 12.1 (echivalenţa algebră Boole $\Leftrightarrow$ inel Boole). *Orice algebră Boole poate fi organizată ca un inel Boole, şi invers. Mai precis:*

- *Fie* $\mathcal{B} := (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *un inel Boole. Definim operaţiile* $\vee$*,* $\wedge$ *şi* $^-$ *pe* B *prin: pentru orice* $x, y \in B$*:*

$$\begin{cases} x \vee y := x + y + xy \\ x \wedge y := xy \\ \overline{x} := x + 1 \end{cases}$$

  Atunci $(B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ *este o algebră Boole, pe care o vom nota cu* $\mathcal{A}(\mathcal{B})$*.*

- *Fie* $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ *o algebră Boole. Definim operaţiile* $+$ *şi* $\cdot$ *pe* B *prin: pentru orice* $x, y \in B$*:*

$$\begin{cases} x + y := (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \\ xy := x \wedge y \end{cases}$$

  Atunci $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *este un inel Boole, pe care îl vom nota cu* $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ *(unde am notat cu* $-$ *operaţia de inversare a grupului aditiv subiacent inelului).*

- *Aplicaţiile* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{I}$ *sunt "inverse una alteia", în sensul că, pentru orice inel Boole* $\mathcal{B}$*,* $\mathcal{I}(\mathcal{A}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$*, şi, pentru orice algebră Boole* $\mathcal{B}$*,* $\mathcal{A}(\mathcal{I}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$*.*

13 Subalgebre Boole şi morfisme booleene

Definiţia 13.1. O submulţime S a lui B se numeşte *subalgebră Boole a lui* $\mathcal{B}$ ddacă este **închisă la operaţiile de algebră Boole ale lui** $\mathcal{B}$, i. e.:

(i) pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \vee y \in S$;

(ii) pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \wedge y \in S$;

(iii) pentru orice $x \in S$, rezultă $\overline{x} \in S$;

(iv) $0, 1 \in S$.

Propoziţia 13.1. *Au loc următoarele implicaţii între cele* 4 *proprietăţi din definiţia unei subalgebre Boole, aplicate unei submulţimi nevide* S *a lui* B*:*

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$

- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$
- $(3) \not\Leftarrow (1), (2), (4)$

Remarca 13.1. O subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este o algebră Boole cu operaţiile induse pe S de operaţiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$ şi cu ordinea parţială indusă pe S de ordinea parţială a lui $\mathcal{B}$.

Notaţia 13.1. Operaţiile induse (adică restricţiile la S ale operaţiilor lui $\mathcal{B}$) se notează, de obicei, la fel ca operaţiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, iar ordinea parţială indusă (adică ordinea parţială a lui $\mathcal{B}$ restricţionată la S) se notează, de obicei, la fel ca ordinea parţială a lui $\mathcal{B}$.

Remarca 13.2. Orice subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este închisă la operaţiile derivate $\rightarrow$ şi $\leftrightarrow$ ale lui $\mathcal{B}$ (adică $x \rightarrow y, x \leftrightarrow y \in S$ pentru orice $x, y \in S$), şi că operaţiile pe care acestea le induc pe S sunt exact implicaţia şi, respectiv, echivalenţa algebrei Boole S (notate, în mod uzual, la fel ca implicaţia şi, respectiv, echivalenţa lui $\mathcal{B}$).

În cele ce urmează, renunţăm la fixarea algebrei Boole notate $\mathcal{B}$

Definiţia 13.2. Date două algebre Boole $(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ şi $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, \bot, \top)$, o funcţie $f : A \rightarrow B$ se numeşte *morfism boolean* (sau *morfism de algebre Boole*) ddacă f **comută cu operaţiile de algebre Boole ale lui** A **şi** B, i. e. ddacă f este morfism de latici mărginite între $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ şi $(B, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ şi, pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$.

Scris desfăşurat, o funcţie $f : A \rightarrow B$ este *morfism boolean* ddacă:

(i) pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$

(ii) pentru orice $x, y \in A$, $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$

(iii) pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$

(iv) $f(0) = \bot$ şi $f(1) = \top$

Un *endomorfism boolean* (sau *endomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean între o algebră Boole şi ea însăşi.

Un *izomorfism boolean* (sau *izomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean bijectiv, ceea ce este acelaşi lucru cu un morfism boolean inversabil, pentru că inversa unui morfism Boolean bijectiv este morfism boolean, ceea ce se observă imediat, dacă aplicăm rezultatul similar de la latici (**temă pentru acasă**).

Un *automorfism boolean* (sau *automorfism de algebre Boole*) este un izomorfism boolean între o algebră Boole şi ea însăşi, adică un endomorfism boolean bijectiv.

Propoziţia 13.2. *Cu notaţiile din definiţia anterioară, au loc următoarele implicaţii între cele* 4 *proprietăţi ale unui morfism boolean, aplicate unei funcţii* $f : A \rightarrow B$*:*

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(3) \Leftarrow (1), (2), (4)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$

Remarca 13.3 (temă). Orice morfism boolean comută cu implicaţia şi echivalenţa booleană.

Compunerea a două morfisme booleene este un morfism boolean.

Imaginea unui morfism boolean este o subalgebră Boole a codomeniului acelui morfism boolean.

Propoziţia 13.3. *Pentru orice mulţime* I*, algebrele Boole* $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, I)$ *şi* $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ *sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism boolean între ele).*

Definiţia unei algebre Boole – mnemonic:

O **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, ^{-}, 0, 1)$ compusă din:

- o mulţime B,
- o relaţie de ordine parţială $\leq$ pe B,

- două operaţii binare $\vee$ şi $\wedge$ pe B, notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operaţie unară $^-$ pe B,

iar aceste componente au proprietăţile:

- $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este o **latice**, i. e.:
  - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ şi $\inf\{x, y\}$ în posetul $(B, \leq)$;
  - $\vee$ şi $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** şi **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, şi la fel pentru $\wedge$;
  - $\vee$ şi $\wedge$ verifică **absorbţia**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ şi $x \wedge (x \vee y) = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;
- laticea $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este **distributivă**, i. e.:
  - $\vee$ este **distributivă** faţă de $\wedge$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
  - $\wedge$ este **distributivă** faţă de $\vee$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
  - 0 este **minimul** posetului $(B, \leq)$;
  - 1 este **maximul** posetului $(B, \leq)$;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** şi satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivităţii**, iar $^-$ este operaţia de **complementare**:
  - pentru orice $x \in B$, $\overline{x}$ este **unicul complement** al lui x, adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{şi} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, ^-, 0, 1)$, se definesc următoarele **operaţii binare derivate**:

- **implicaţia (booleană)**, $\rightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalenţa (booleană)**, $\leftrightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

14 Filtre ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, ^-, 0, 1)$, arbitrară.
- Vom nota $\geq := \leq^{-1}$.

Definiţia 14.1. O submulţime nevidă F a lui B se numeşte *filtru* al algebrei Boole $\mathcal{B}$ ddacă, pentru orice $x, y \in B$, următoarele condiţii sunt satisfăcute:
(F_1) dacă $x, y \in F$, atunci $x \wedge y \in F$;
(F_2) dacă $x \in F$ şi $x \leq y$, atunci $y \in F$.

Notaţia 14.1. Mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Filt}(\mathcal{B})$.

Remarca 14.1. Orice filtru al lui $\mathcal{B}$ îl conţine pe 1. Într–adevăr, dacă F este un filtru al lui $\mathcal{B}$, atunci F este nevid prin definiţie, deci există un element $x \in F$; dar, ca orice element al lui B, x satisface $x \leq 1$, prin urmare $1 \in F$, conform condiţiei (F_2) din definiţia unui filtru.

Remarca 14.2. Este imediat că $\{1\}$ şi B sunt filtre ale lui $\mathcal{B}$, iar aceste filtre sunt respectiv minimul (a se vedea remarca anterioară) şi maximul posetului $(\text{Filt}(\mathcal{B}), \subseteq)$.

Definiţia 14.2. $\{1\}$ se numeşte *filtrul trivial* al lui $\mathcal{B}$, iar B se numeşte *filtrul impropriu* al lui $\mathcal{B}$. Orice filtru $F \neq \{1\}$ se numeşte *filtru netrivial*, şi orice filtru $F \neq B$ se numeşte *filtru propriu* al lui $\mathcal{B}$.

Remarca 14.3. Intersecţia tuturor filtrelor lui $\mathcal{B}$ este $\{1\}$ (filtrul trivial). Acest lucru rezultă imediat din faptul că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ în sensul incluziunii.

Remarca 14.4. Un filtru al lui $\mathcal{B}$ este propriu ddacă nu îl conţine pe 0.

Într–adevăr, un filtru este egal cu B ddacă îl conţine pe 0, pentru că B conţine pe 0, iar, dacă un filtru F îl conţine pe 0, atunci F conţine toate elementele lui B, conform condiţiei (F_2).

Lema 14.1. *Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci: $F = B$ ddacă există un element $a \in B$ a. î. $a \in F$ şi $\overline{a} \in F$.*

Lema 14.2 (filtrele sunt închise la conjuncţii finite). *Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x_1, \ldots, x_n \in F$, rezultă că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$.*

15 Filtre generate de o mulţime

Propoziţia 15.1. *Intersecţia oricărei familii de filtre ale lui $\mathcal{B}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.*

Corolarul 15.1. *Pentru orice submulţime X a lui B, există un cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include pe X, anume intersecţia tuturor filtrelor lui $\mathcal{B}$ care includ pe X.*

Definiţia 15.1. Pentru orice submulţime X a lui B, cel mai mic filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$ care include pe X se notează cu $[X)$ sau $\langle X\rangle$ şi se numeşte *filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X*.

Pentru orice element $x \in B$, filtrul generat de singletonul $\{x\}$ se notează cu $[x)$ sau $\langle x\rangle$ şi se numeşte *filtrul principal al lui $\mathcal{B}$ generat de x*. (Deci filtrele principale sunt filtrele generate de singletonuri; altfel spus, filtrele principale sunt filtrele generate de câte un singur element.)

Remarca 15.1 (caracterizarea filtrelor generate de o mulţime). Definiţia unui filtru generat arată că, pentru orice $X \subseteq B$, $F = [X)$ ddacă mulţimea F satisface următoarele trei condiţii:

(i) F este un filtru al lui $\mathcal{B}$;

(ii) $X \subseteq F$;

(iii) pentru orice filtru G al lui $\mathcal{B}$, dacă $X \subseteq G$, atunci $F \subseteq G$.

Ultima dintre aceste trei condiţii afirmă că, dacă un filtru G al lui $\mathcal{B}$ include o submulţime X a lui B, atunci G include filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X.

Remarca 15.2. Conform remarcii care arată că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$, urmează că $[\emptyset) = \{1\}$.

Remarca 15.3. Este imediat, atât direct din definiţia unui filtru generat de o mulţime, cât şi din caracterizarea anterioară, că, oricare ar fi un filtru F al lui $\mathcal{B}$, are loc egalitatea: $[F) = F$.

Propoziţia 15.2. *Pentru orice submulţime nevidă X a lui B, $[X) = \{a \in B \mid (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\, (\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X)\, (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a)\}$.*

Corolarul 15.2. *Pentru orice $x \in B$, $[x) = \{a \in B \mid x \leq a\}$.*

Exemplul 15.1 (temă). Iată un exemplu de filtru care nu este principal, ceea ce înseamnă că nu este finit generat (vom vedea); astfel, acest exemplu arată şi faptul că, în general, filtrele nu sunt închise la conjuncţii arbitrare (vom vedea).

Fie X o mulţime. Considerăm algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ şi următoarea submulţime a ei: $F = \{A \mid A \subseteq X, |\overline{A}| < \infty\}$, unde $\overline{A} = X \setminus A$ pentru orice $A \subseteq X$; i. e. F este mulţimea părţilor cofinite ale lui X.

Atunci F este un filtru al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ (evident, F este filtru propriu ddacă X este infinită). Şi, dacă mulţimea X este infinită, atunci F nu este filtru principal al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$.

Corolarul 15.3. *Pentru orice filtru F al lui $\mathcal{B}$ şi orice element $x \in B$, $[F \cup \{x\}) = \{a \in B \mid (\exists\, f \in F)\, (f \wedge x \leq a)\}$.*

Remarca 15.4 (temă). Funcţia care duce fiecare $M \subseteq B$ în $[M)$ este un operator de închidere pe $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$.

Remarca 15.5. Propoziţia următoare arată că filtrele finit generate coincid cu filtrele principale, întrucât reciproca ei este trivială.

Propoziţia 15.3. *Orice filtru finit generat (i. e. generat de o mulţime finită) este principal.*

Corolarul 15.4. *Orice filtru finit este principal.*

Corolarul 15.5. *Orice filtru al unei algebre Boole finite este principal.*

Remarca 15.6. Demonstraţia propoziţiei anterioare arată că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$,

$$[\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n),$$

fapt valabil şi pentru $n = 0$, întrucât $\inf(\emptyset) = 1$ (a se vedea un curs anterior).

16 Ultrafiltre ale unei algebre Boole

Definiţia 16.1. Un filtru propriu P al lui $\mathcal{B}$ se numeşte *filtru prim* ddacă, pentru orice $a, b \in B$, $a \vee b \in P$ implică $a \in P$ sau $b \in P$.

Definiţia 16.2. Un element maximal al mulţimii filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$ (raportat la incluziune) se numeşte *filtru maximal* sau *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$.

Cu alte cuvinte, un *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$ este un filtru propriu U a. î., pentru orice filtru propriu F, $U \subseteq F$ implică $U = F$.

Altfel formulat, un *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$ este un filtru propriu U cu proprietatea că, pentru orice filtru F, $U \subseteq F$ implică $U = F$ sau $F = B$.

Notaţia 16.1. Mulţimea ultrafiltrelor (filtrelor maximale ale) lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Max}(\mathcal{B})$.

Lema 16.1. *Fie P un filtru al lui $\mathcal{B}$ şi $a, b \in B$. Atunci:*

(i) $a \wedge b \in P$ ddacă $a \in P$ şi $b \in P$;

(ii) dacă P este un filtru prim, atunci: $a \vee b \in P$ ddacă $a \in P$ sau $b \in P$.

Propoziţia 16.1 (caracterizare a ultrafiltrelor). *Fie U un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$;

(ii) U este un filtru prim al lui $\mathcal{B}$;

(iii) orice element $a \in B$ satisface: $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$.

Corolarul 16.1 (caracterizare a ultrafiltrelor). *Fie U un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$;

(ii) oricare ar fi $a \in B$, **exact** *unul dintre elementele a şi $\overline{a}$ se află în U;*

(iii) oricare ar fi $a \in B$, are loc echivalenţa: $a \in U$ ddacă $\overline{a} \notin U$.

Mulţimi inductiv ordonate şi Lema lui Zorn:

Definiţia 16.3. O *mulţime inductiv ordonată* este un poset cu proprietatea că orice parte total ordonată a sa are (cel puţin) un majorant.

- În definiţia anterioară, **parte total ordonată** a unui poset $(P, \leq)$ înseamnă submulţime S a lui P care este lanţ cu ordinea indusă (**ordinea indusă** este $\leq \cap S^2$), i. e. submulţime $S \subseteq P$ cu proprietatea că oricare două elemente ale submulţimii S sunt comparabile în posetul $(P, \leq)$.

Remarca 16.1. Orice mulţime inductiv ordonată este nevidă, pentru că ea conţine măcar un element, anume un majorant al submulţimii $\emptyset$ a ei.

Remarca 16.2. După cum am demonstrat într–un curs anterior, orice element al unui poset nevid este majorant pentru $\emptyset$.

Remarca 16.3. Cele două remarci anterioare arată că, pentru a demonstra că un poset este mulţime inductiv ordonată, este suficient să demonstrăm că:

- posetul este nevid;
- orice parte total ordonată **nevidă** a sa are (cel puţin) un majorant.

Lema 16.2 (Lema lui Zorn). *Orice mulţime inductiv ordonată are (cel puţin) un element maximal.*

Remarca 16.4. Este evident, din faptul că filtrul trivial $\{1\}$ este inclus în orice filtru al lui $\mathcal{B}$, că au loc echivalenţele: $\mathcal{B}$ are filtre proprii ddacă $\{1\}$ este filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ ddacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole netrivială.

Teorema 16.1 (Teorema de existenţă a ultrafiltrului). *Orice filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ este inclus într–un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$. Cu alte cuvinte, pentru orice filtru propriu F al lui $\mathcal{B}$, există un ultrafiltru U al lui $\mathcal{B}$, a. î. $F \subseteq U$.*

Corolarul 16.2. *Orice algebră Boole netrivială are (cel puţin) un ultrafiltru.*

17 Teorema de reprezentare a lui Stone

Caracterizare a injectivităţii morfismelor booleene:

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm două algebre Boole arbitrare $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ şi $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$.

Remarca 17.1. Pentru orice morfism boolean $f : A \to B$, au loc:

- $f(0) = 0$, deci $0 \in f^{-1}(\{0\})$, adică $\{0\} \subseteq f^{-1}(\{0\})$;
- $f(1) = 1$, deci $1 \in f^{-1}(\{1\})$, adică $\{1\} \subseteq f^{-1}(\{1\})$.

Propoziţia 17.1. *Fie $f : A \to B$ un morfism boolean. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f *este injectiv;*

(ii) $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$*;*

(iii) $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$.

Remarca 17.2. Algebra Boole trivială este izomorfă cu $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ şi cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^{\emptyset} = \mathcal{L}_2^0$, care are drept mulţime suport pe $L_2^0 = L_2^{\emptyset} = \{f \mid f : \emptyset \to L_2\} = \{(\emptyset, \emptyset, L_2)\}$ (acest triplet este, după cum ştim, unica funcţie de la $\emptyset$ la L_2).

- Pentru o formulare clară a următoarelor două rezultate, vom renunţa, în cele ce urmează, la fixarea algebrei Boole $\mathcal{B}$.

Teorema 17.1 (Teorema de reprezentare a lui Stone). *Pentru orice algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, există o mulţime nevidă X şi un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \bar{\ }, \emptyset, X)$.*

Corolarul 17.1 (reformulare a Teoremei de reprezentare a lui Stone). *Pentru orice algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, există o mulţime nevidă X şi un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2^X$.*

Remarca 17.3. Algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$, se scufundă în orice algebră Boole netrivială, i. e., oricare ar fi o algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, de la $\mathcal{L}_2$ la $\mathcal{B}$ există un morfism injectiv de algebre Boole, anume morfismul care duce pe 0 în 0 şi pe 1 în 1. (Morfismele injective se numesc *scufundări*.)

18 Congruenţe ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole arbitrară, $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, ^-, 0, 1)$.

Definiţia 18.1. Se numeşte *congruenţă a algebrei Boole* $\mathcal{B}$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B care este compatibilă cu operaţiile algebrei Boole $\mathcal{B}$, adică, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

(i) dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$;

(ii) dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$;

(iii) dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$.

Remarca 18.1. Dacă, în definiţia anterioară, veţi generaliza cele trei relaţii dând compatibilitatea lui $\sim$ cu operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi operaţia unară $^-$, pentru a obţine relaţia care dă compatibilitatea unei relaţii de echivalenţă cu o operaţie de aritate oarecare, atunci veţi observa că: compatibilitatea cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$, i. e. constantele 0 şi 1, se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$. Deci compatibilitatea cu operaţiile zeroare este satisfăcută de orice relaţie binară reflexivă pe B, în particular de orice relaţie de echivalenţă pe B. De aceea, compatibilitatea cu 0 şi 1 nu a apărut ca o cerinţă în definiţia de mai sus.

Remarca 18.2. O congruenţă a lui $\mathcal{B}$ este o relaţie de echivalenţă pe B care este şi subalgebră Boole a algebrei Boole produs direct $B^2 = B \times B$.

Propoziţia 18.1. *În definiţia de mai sus, a unei congruenţe pe o algebră Boole, fiecare dintre condiţiile* (1) *şi* (2) *este implicată de celelalte două condiţii.*

Propoziţia 18.2. *Orice congruenţă a unei algebre Boole este compatibilă cu implicaţia şi echivalenţa booleană. I. e., pentru orice congruenţă $\sim$ a lui $\mathcal{B}$ şi orice $x, y, x', y' \in B$, avem:*

- *dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y'$;*
- *dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \leftrightarrow y \sim x' \leftrightarrow y'$.*

Remarca 18.3. Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ şi $x, y \in B$. Atunci are loc echivalenţa: $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $x \rightarrow y \in F$ şi $y \rightarrow x \in F$.

19 Corespondenţa bijectivă filtre – congruenţe

Notaţia 19.1. Notăm prin $\mathrm{Con}(\mathcal{B})$ mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$.

Propoziţia 19.1. *Mulţimea congruenţelor unei algebre Boole este în bijecţie cu mulţimea filtrelor sale.*

Existenţa unei bijecţii se demonstrează construind două funcţii între cele două mulţimi, în sensuri opuse, şi arătând că sunt inverse una celeilalte, aşadar sunt inversabile, deci sunt bijecţii.

Iată definiţiile celor două funcţii pentru o algebră Boole oarecare $\mathcal{B}$:

- funcţia de la mulţimea filtrelor la mulţimea congruenţelor: oricărui filtru F îi asociem congruenţa $\sim_F$, definită prin: pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$;
- funcţia de la mulţimea congruenţelor la mulţimea filtrelor: oricărei congruenţe $\sim$ îi asociem filtrul $F^\sim$, definit prin: $F^\sim := \{x \in B \mid x \sim 1\}$ ($F^\sim$ este clasa de echivalenţă a lui 1 raportat la $\sim$).

Propoziţia 19.2. *Fie $a, b, x \in B$ şi F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci, cu notaţiile de mai sus, au loc:*

(i) $a \sim_{[x)} b$ ddacă $a \wedge x = b \wedge x$;

(ii) $a \sim_F b$ ddacă există un element $f \in F$ astfel încât $a \wedge f = b \wedge f$.

20 Algebre Boole factor

Propoziţia 20.1. *Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ şi $\sim_F$ congruenţa asociată lui F.*

Pentru fiecare $x \in B$, se notează cu $x/F := \{y \in B \mid x \sim_F y\}$ clasa de echivalenţă a lui x raportat la $\sim_F$.

Mulţimea factor $B/{\sim_F} = \{x/F \mid x \in B\}$ (i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale elementelor lui B raportat la $\sim_F$) se mai notează cu B/F.

Atunci: B/F se poate organiza ca algebră Boole cu următoarele operaţii, pe care le vom nota la fel ca pe acelea ale lui $\mathcal{B}$:

- *pentru orice $x, y \in B$, $x/F \vee y/F := (x \vee y)/F$*
- *pentru orice $x, y \in B$, $x/F \wedge y/F := (x \wedge y)/F$*
- *pentru orice $x \in B$, $\overline{x/F} := \overline{x}/F$*
- $0 := 0/F$ *şi* $1 := 1/F$

Definiţia 20.1. Algebra Boole $(B/F, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0 = 0/F, 1 = 1/F)$ se numeşte *algebra Boole factor (*sau *algebra Boole cât) a lui $\mathcal{B}$ prin filtrul F.*

Propoziţia 20.2. *Pentru orice filtru F, surjecţia canonică $p_F : B \to B/F$, definită prin: pentru orice $x \in B$, $p_F(x) := x/F$, este un morfism boolean surjectiv.*

Lema 20.1. *Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci $F = 1/F$, aşadar, pentru orice element $a \in B$, au loc echivalenţele: $a \in F$ ddacă $a \sim_F 1$ ddacă $a/F = 1/F$.*

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm încă o algebră Boole arbitrară $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$. A se vedea demonstraţiile acestor rezultate într–o versiune viitoare a cursului.

Propoziţia 20.3 (temă pentru seminar). *Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism boolean, iar F un filtru al algebrei Boole $\mathcal{A}$ şi G un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$. Atunci:*

(i) *$f^{-1}(G)$ este un filtru al lui $\mathcal{A}$;*

(ii) *dacă f e surjectiv, atunci $f(F)$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.*

Propoziţia 20.4 (temă pentru seminar). *Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism boolean. Atunci $f(A)$ este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$, izomorfă cu algebra Boole factor $A/f^{-1}(\{1\})$.*

Propoziţia 20.5 (temă pentru seminar). *Fie U un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$. Atunci: U este ultrafiltru ddacă algebra Boole factor B/U este izomorfă cu $\mathcal{L}_2$.*

21 Structura algebrelor Boole finite

Definiţia 21.1. Un *atom* al algebrei Boole $\mathcal{B}$ este un succesor al lui 0 din $\mathcal{B}$ (i. e. din posetul $(B, \leq)$). Adică, un *atom* al lui $\mathcal{B}$ este un element $a \in B$ cu proprietăţile:

- $a \neq 0$ şi
- nu există niciun element $x \in B$ a. î. $0 < x < a$,

unde am notat cu $< := \leq \setminus \Delta_B$, i. e. $<$ este relaţia de ordine strictă pe B corespunzătoare relaţiei de ordine $\leq$ de pe B, adică, pentru orice $x, y \in B$,

$$x < y \text{ ddacă } \begin{cases} x \leq y \\ \text{şi} \\ x \neq y. \end{cases}$$

Remarca 21.1. • Algebra Boole trivială nu are niciun atom (deci numărul atomilor săi coincide cu numărul ultrafiltrelor sale, anume 0).

- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, algebra Boole $\mathcal{L}_2^n$, cu mulţimea elementelor $L_2^n = \{(x_1, \dots x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}$ are n atomi: atomii săi sunt elementele $e_1, \dots, e_n$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, $e_i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\substack{\text{vector de lungime } n, \\ \text{cu 1 pe poziţia } i \text{ şi} \\ \text{0 pe celelalte poziţii}}}$. La fel pentru algebra Boole $\mathcal{L}_2^X$, cu X mulţime arbitrară.

- Pentru orice mulţime nevidă X (nu neapărat finită), atomii algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ sunt submulţimile lui X cu câte un singur element: $\{a\}$, cu $a \in X$.

Remarca 21.2. Ultrafiltrele unei algebre Boole finite sunt filtrele generate de câte un atom al acelei algebre Boole.

Remarca 21.3. Remarca anterioară arată că, dacă algebra Boole $\mathcal{B}$ este finită, atunci există o bijecţie între mulţimea atomilor lui $\mathcal{B}$ şi mulţimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$, care duce fiecare atom a al lui $\mathcal{B}$ în $[a)$ (filtrul principal generat de a).

Teorema 21.1 (Teorema de structură a algebrelor Boole finite). *Dacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole finită, atunci $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este numărul atomilor lui $\mathcal{B}$ (care este egal cu numărul ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$, conform remarcii anterioare).*

Corolarul 21.1. *Orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui* 2 *(cu exponentul dat de numărul atomilor săi, care este egal cu numărul ultrafiltrelor sale).*

Corolarul 21.2. *Două algebre Boole finite de acelaşi cardinal sunt izomorfe.*

Remarca 21.4. Pentru orice mulţime finită X, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, au loc următoarele izomorfisme între algebre Boole: $\mathcal{L}_2^n \cong \mathcal{L}_2^{\overline{1,n}} \cong \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X) \cong \mathcal{P}(\overline{1, n})$ $(\overline{1, 0} = \emptyset)$.

Remarca 21.5.
- **Teorema de reprezentare a lui Stone** spune că, pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, există un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulţimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$. Cu alte cuvinte, orice algebră Boole $\mathcal{B}$ este izomorfă cu o subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulţimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$.

- **Teorema de structură a algebrelor Boole finite** afirmă că, în cazul particular al algebrelor Boole finite, are loc proprietatea că orice algebră Boole finită este chiar **izomorfă** cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulţimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$ (a se vedea remarca anterioară).

Exerciţiul 21.1 (temă). Fie B o algebră Boole **completă**, i. e. o algebră Boole care e latice completă, $a, b \in B$, I şi J mulţimi arbitrare, iar $(a_i)_{i \in I} \subseteq B$, $(b_j)_{j \in J} \subseteq B$. Să se demonstreze că în B au loc:

- **legile de distributivitate generalizate:** dacă $I \neq \emptyset$ şi $J \neq \emptyset$, atunci:

  $a \wedge (\bigvee\limits_{j \in J} b_j) = \bigvee\limits_{j \in J} (a \wedge b_j)$ şi $(\bigvee\limits_{i \in I} a_i) \wedge (\bigvee\limits_{j \in J} b_j) = \bigvee\limits_{i \in I} \bigvee\limits_{j \in J} (a_i \wedge b_j)$;

  $a \vee (\bigwedge\limits_{j \in J} b_j) = \bigwedge\limits_{j \in J} (a \vee b_j)$ şi $(\bigwedge\limits_{i \in I} a_i) \vee (\bigwedge\limits_{j \in J} b_j) = \bigwedge\limits_{i \in I} \bigwedge\limits_{j \in J} (a_i \vee b_j)$;

- **legile lui de Morgan generalizate:**

  $\overline{\bigvee\limits_{i \in I} a_i} = \bigwedge\limits_{i \in I} \overline{a_i}$ şi $\overline{\bigwedge\limits_{i \in I} a_i} = \bigvee\limits_{i \in I} \overline{a_i}$;

- următoarele proprietăţi: dacă $I \neq \emptyset$ şi $J \neq \emptyset$, atunci:

  $(\bigvee\limits_{i \in I} a_i) \to b = \bigwedge\limits_{i \in I} (a_i \to b)$ şi $(\bigwedge\limits_{i \in I} a_i) \to b = \bigvee\limits_{i \in I} (a_i \to b)$;

  $a \to (\bigvee\limits_{j \in J} b_j) = \bigvee\limits_{j \in J} (a \to b_j)$ şi $a \to (\bigwedge\limits_{j \in J} b_j) = \bigwedge\limits_{j \in J} (a \to b_j)$.

  Care dintre egalităţile de la ultimul punct sunt valabile şi pentru $I = \emptyset$, $J = \emptyset$?

Breviar pentru o mare parte din cursul de
Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Vom nota cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale şi cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulţimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a, b} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$.

Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată* (i. e. mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine pe ea);
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată;*
- *funcţie izotonă* $\equiv$ *funcţie care păstrează ordinea* $\equiv$ *funcţie crescătoare;*
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană,*

precum şi definiţiile, notaţiile şi rezultatele următoare:

- se foloseşte următoarea convenţie: dacă o mulţime A este suportul unei structuri algebrice $\mathcal{A}$, atunci prin A vom înţelege deopotrivă mulţimea A şi structura algebrică $\mathcal{A}$, în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* ddacă mulţimea ei suport este nevidă, respectiv finită;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $|A|$ cardinalul lui A, iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulţimea părţilor lui A);
- pentru orice mulţimi A şi B, vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecţie cu B, care se transcrie prin: $|A| = |B|$;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulţimi*; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulţimi* (se defineşte şi A^0, care este un singleton, i. e. o mulţime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice, precum şi puterile naturale ale unei structuri algebrice;
- pentru orice mulţime A, o *relaţie binară pe* A este o submulţime a lui A^2;
- dacă A este o mulţime şi $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a \,\rho\, b$;
- pentru orice mulţime A, se notează cu Δ_A relaţia binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ şi numită *diagonala lui* A;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se zice:
  i. *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x \,\rho\, x$;
  ii. *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$, atunci $y \,\rho\, x$;
  iii. *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$ şi $y \,\rho\, x$, atunci $x = y$;
  iv. *asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;

v. *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x \,\rho\, y$ şi $y \,\rho\, z$, atunci $x \,\rho\, z$;

- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se numeşte:

    i. *(relaţie de) preordine* ddacă este reflexivă şi tranzitivă;

    ii. *(relaţie de) echivalenţă* ddacă este o preordine simetrică;

    iii. *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă este o preordine antisimetrică;

    iv. *(relaţie de) ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relaţie de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x \,\rho\, y$ sau $y \,\rho\, x$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se defineşte *inversa lui* ρ ca fiind relaţia binară pe A notată cu ρ^{-1} şi dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A şi orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;

- pentru orice relaţii binare ρ şi σ pe o mulţime A, avem:

    i. $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;

    ii. $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;

    iii. $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcup\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);

    iv. $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecţiei cu inversarea);

- inversa unei relaţii de ordine notate $\leq$ se notează, uzual, cu $\geq$;

- pentru orice mulţime A şi orice relaţii binare ρ şi σ pe A, compunerea dintre relaţiile binare ρ şi σ se notează cu $\rho \circ \sigma$ şi se defineşte astfel: $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists\, b \in A)\, ((a, b) \in \sigma \text{ şi } (b, c) \in \rho)\}$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ şi $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;

- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

    i. ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;

    ii. ρ este simetrică ddacă $\rho = \rho^{-1}$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se numeşte *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ cea mai mică (în sensul incluziunii) relaţie binară reflexivă/simetrică/tranzitivă pe A care include pe ρ;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;

- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

    i. ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;

    ii. ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;

    iii. ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A:

  i. $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;
  ii. $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;
  iii. $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \rho^n$;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $\mathrm{Eq}(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A, şi, pentru orice $\sim\in \mathrm{Eq}(A)$, se notează cu $A/_\sim$ *mulţimea factor a lui A prin* $\sim$, i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $\sim$;

- pentru orice mulţime nevidă A, o *partiţie a lui A* este o familie nevidă de părţi nevide ale lui A două câte două disjuncte şi având reuniunea egală cu A; vom nota mulţimea partiţiilor lui A cu $\mathrm{Part}(A)$;

- pentru orice mulţime nevidă A, $\mathrm{Eq}(A) \cong \mathrm{Part}(A)$, întrucât funcţia $\varphi : \mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/_\sim$ pentru orice $\sim\in \mathrm{Eq}(A)$, este o bijecţie; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice $\pi = (A_i)_{i\in I} \in \mathrm{Part}(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relaţia de echivalenţă pe A care are drept clase mulţimile A_i, cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) =\sim\subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$;

- pentru orice n natural nenul, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente şi cu L_n mulţimea suport a lui $\mathcal{L}_n$; $\mathcal{L}_n$ este unic modulo un *izomorfism de poseturi*, i. e. modulo o funcţie izotonă bijectivă şi cu inversa izotonă;

- pentru orice poset $(P, \leq)$, notăm cu $<$ *relaţia de ordine strictă asociată lui* $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $<=\leq \setminus\Delta_P = \{(a, b) \mid a, b \in P, a \leq b, a \neq b\}$, şi cu $\prec$ *relaţia de succesiune* asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $\prec= \{(a, b) \mid a, b \in P, a < b, (\nexists\, x \in P)\, a < x < b\}$;

- notăm laticile sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq)$ sau $(L, \vee, \wedge)$, laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;

- legătura dintre operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;

- într–o latice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ şi} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puţin un complement;

- într–o latice mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;

- o latice este nedistributivă ddacă are o sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul;

- orice lanţ este o latice (distributivă), cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc *implicaţia booleană,* $\to$, şi *echivalenţa booleană,* $\leftrightarrow$, ca operaţii binare pe B, astfel: pentru orice $x, y \in B$:

  i. $x \to y = \overline{x} \vee y$;
  ii. $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:

  i. $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ şi: $\overline{x} = 1$ ddacă $x = 0$, iar: $\overline{x} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latice mărginită, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia şi nu au alte complemente);

  ii. $\overline{\overline{x}} = x$;

  iii. $x \rightarrow y = 1$ ddacă $x \leq y$;

  iv. $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;

- pentru orice mulţime A, $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ este o algebră Boole, unde am notat, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\overline{X} = A \setminus X$;

- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_2^n$ (puterea a n–a a lanţului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole $\mathcal{L}_2$, numită *algebra Boole standard*; dacă notăm cu $L_2 = \{0, 1\}$ mulţimea suport a lanţului cu 2 elemente, $\mathcal{L}_2$, atunci $L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}\}$ este mulţimea subiacentă a algebrei Boole $\mathcal{L}_2^n$;

- orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$;

- se numeşte *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul $(B, \leq)$, adică un element $a \in B$ cu $0 \prec a$ (i. e. astfel încât $0 < a$ şi nu există niciun $x \in B$ cu proprietatea că $0 < x < a$);

- se numeşte *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o submulţime nevidă F a lui B închisă la conjuncţie şi la majorare, i. e. o mulţime F cu proprietăţile:

  i. $\emptyset \neq F \subseteq B$;

  ii. pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;

  iii. pentru orice $x \in F$ şi orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;

  mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Filt}(\mathcal{B})$;

- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conţine elementul 1;

- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi orice $a \in B$, mulţimea notată $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, numit *filtrul principal generat de a*; notăm mulţimea filtrelor principale ale lui $\mathcal{B}$ cu $\mathrm{PFilt}(\mathcal{B})$;

- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale;

- se numeşte *congruenţă* a unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B compatibilă cu operaţiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, i. e. o relaţie binară $\sim$ pe B cu proprietăţile:

  i. $\sim \in \mathrm{Eq}(B)$;

  ii. pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea cu** $\vee$);

  iii. pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea cu** $\wedge$);

  iv. pentru orice $x, x' \in B$, dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea cu** $\bar{\cdot}$);

  notăm cu $\mathrm{Con}(\mathcal{B})$ mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$;

- referitor la definiţia anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relaţii binare $\sim$ pe B cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$ (i. e. constantele 0 şi 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, proprietăţi care sunt satisfăcute nu numai de către orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B, ci chiar de către orice relaţie reflexivă $\sim$ pe B;

- mulţimea congruenţelor unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este în bijecţie cu mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$;

- notăm cu V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic;

- notăm cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;

- dată o *interpretare* în calculul propoziţional clasic, i. e. o funcţie $h : V \to \mathcal{L}_2$, notăm cu $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene;

- se notează cu $h \vDash \varphi$, respectiv $h \vDash \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ *satisface un enunţ* $\varphi \in E$, respectiv *o mulţime de enunţuri* $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;

- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;

- se notează cu $\vDash \varphi$ faptul că un enunţ φ este *universal adevărat (tautologie, adevăr semantic)* în logica propoziţională clasică (adică orice interpretare satisface pe φ);

- se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;

- se notează cu $\Sigma \vDash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este *deductibil semantic din ipotezele* $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică (adică orice interpretare care satisface pe Σ satisface şi pe φ);

- pentru orice enunţ φ, $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, şi $\vDash \varphi$ ddacă $\emptyset \vDash \varphi$;

- pentru orice mulţime $\Sigma \subseteq E$, notăm cu $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ algebra Lindenbaum–Tarski asociată mulţimii de ipoteze Σ pentru logica propoziţională clasică, despre care ştim că este o algebră Boole; amintim că $\sim_\Sigma = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \mathrm{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi}^\Sigma \in E/_{\sim_\Sigma}$ clasa unui enunţ φ în $E/_{\sim_\Sigma}$;

- cazul particular $\Sigma = \emptyset$ în cele de mai sus: notăm cu $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, care este o algebră Boole; amintim că $\sim = \sim_\emptyset = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \mathrm{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi} \in E/_\sim$ clasa unui enunţ φ în $E/_\sim$;

- pentru orice $\Sigma \subseteq E$ şi orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$ în algebra booleană $E/_{\sim_\Sigma}$ (**lemă** din calculul propoziţional clasic);

- caz particular: pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi} = 1$ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_\sim$;

- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducţiei** pentru calculul propoziţional clasic; abreviată **TD**);

- pentru orice $\varphi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic; abreviată **TCT**); cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numeşte **Teorema de completitudine** a calculului propoziţional clasic (**TC**);

- mulţimea T a teoremelor formale ale logicii propoziţionale clasice e satisfăcută de orice interpretare;

- o mulţime $\Sigma \subseteq E$ e *satisfiabilă* (adică există o interpretare care o satisface) ddacă Σ e *consistentă*, i. e. sistemul deductiv $\Delta(\Sigma)$ generat de Σ, anume $\Delta(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$, nu conţine toate enunţurile, adică $\Delta(\Sigma) \subsetneq E$;

- pentru orice $\varphi \in E$, există o *formă normală conjunctivă (FNC)* (i. e. o conjuncţie de disjuncţii de *literali*, adică elemente din $V \cup \{\neg\, p \mid p \in V\}$) $\gamma \in E$ astfel încât $\varphi \sim \gamma$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\gamma)$ pentru orice interpretare h;

- un enunţ φ în FNC e *nesatisfiabil* (i. e. nu e satisfăcut de nicio interpretare, ceea ce e echivalent cu $\vDash \neg\,\varphi$, aşadar $\vdash \neg\,\varphi$ conform **TC**) ddacă există măcar o derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\square$ din φ;

- un enunţ φ în FNC e satisfiabil ddacă nu există nicio derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\square$ din φ.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova (2003).

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1974, 1975, 1976).

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti (1978).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti (2010).

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti (1969).

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).

Breviar pentru o mare parte din cursul de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Vom folosi notaţia “ddacă“ drept prescurtare pentru sintagma “dacă şi numai dacă“.

Amintim abrevierea “i. e.“ (“id est“), semnificând “adică“.

Pentru noţiunile şi rezultatele teoretice pe care le vom folosi în exerciţiile următoare, recomandăm consultarea bibliografiei de la sfârşitul acestui text. Oferim în cele ce urmează un mic mnemonic de noţiuni şi rezultate care ne vor fi necesare pentru rezolvarea acestor exerciţii.

Vom nota cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale şi cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulţimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a, b} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$.

Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată* (i. e. mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine pe ea);
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată;*
- *funcţie izotonă* $\equiv$ *funcţie care păstrează ordinea* $\equiv$ *funcţie crescătoare;*
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană,*

precum şi definiţiile, notaţiile şi rezultatele următoare:

- se foloseşte următoarea convenţie: dacă o mulţime A este suportul unei structuri algebrice $\mathcal{A}$, atunci prin A vom înţelege deopotrivă mulţimea A şi structura algebrică $\mathcal{A}$, în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* ddacă mulţimea ei suport este nevidă, respectiv finită;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $|A|$ cardinalul lui A, iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulţimea părţilor lui A);
- pentru orice mulţimi A şi B, vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecţie cu B, care se transcrie prin: $|A| = |B|$;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulţimi*; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulţimi* (se defineşte şi A^0, care este un singleton, i. e. o mulţime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice, precum şi puterile naturale ale unei structuri algebrice;

- pentru orice mulţime A, o *relaţie binară pe* A este o submulţime a lui A^2;
- dacă A este o mulţime şi $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a \, \rho \, b$;
- pentru orice mulţime A, se notează cu Δ_A relaţia binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ şi numită *diagonala lui* A;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se zice:
  - (i) *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x \, \rho \, x$;
  - (ii) *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \, \rho \, y$, atunci $y \, \rho \, x$;
  - (iii) *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \, \rho \, y$ şi $y \, \rho \, x$, atunci $x = y$;
  - (iv) *asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \, \rho \, y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;
  - (v) *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x \, \rho \, y$ şi $y \, \rho \, z$, atunci $x \, \rho \, z$;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se numeşte:
  - (i) *(relaţie de) preordine* ddacă este reflexivă şi tranzitivă;
  - (ii) *(relaţie de) echivalenţă* ddacă este o preordine simetrică;
  - (iii) *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
  - (iv) *(relaţie de) ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relaţie de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x \, \rho \, y$ sau $y \, \rho \, x$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se defineşte *inversa lui* ρ ca fiind relaţia binară pe A notată cu ρ^{-1} şi dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A şi orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;
- pentru orice relaţii binare ρ şi σ pe o mulţime A, avem:
  - (i) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
  - (ii) $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
  - (iii) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcup\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
  - (iv) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecţiei cu inversarea);
- inversa unei relaţii de ordine notate $\leq$ se notează, uzual, cu $\geq$;
- pentru orice mulţime A şi orice relaţii binare ρ şi σ pe A, compunerea dintre relaţiile binare ρ şi σ se notează cu $\rho \circ \sigma$ şi se defineşte astfel: $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists \, b \in A) \, ((a, b) \in \sigma \text{ şi } (b, c) \in \rho)\}$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ şi $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:
  - (i) ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;

(ii) ρ este simetrică ddacă $\rho = \rho^{-1}$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se numeşte *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ cea mai mică (în sensul incluziunii) relaţie binară reflexivă/simetrică/tranzitivă pe A care include pe ρ;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

  (i) ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;

  (ii) ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;

  (iii) ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A:

  (i) $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;

  (ii) $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;

  (iii) $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $\mathrm{Eq}(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A, şi, pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, se notează cu $A/\!\sim$ *mulţimea factor a lui* A *prin* $\sim$, i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $\sim$;
- pentru orice mulţime nevidă A, o *partiţie a lui* A este o familie nevidă de părţi nevide ale lui A două câte două disjuncte şi având reuniunea egală cu A; vom nota mulţimea partiţiilor lui A cu $\mathrm{Part}(A)$;
- pentru orice mulţime nevidă A, $\mathrm{Eq}(A) \cong \mathrm{Part}(A)$, întrucât funcţia $\varphi : \mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/\!\sim$ pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, este o bijecţie; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice $\pi = (A_i)_{i\in I} \in \mathrm{Part}(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relaţia de echivalenţă pe A care are drept clase mulţimile A_i, cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$;
- pentru orice n natural nenul, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente şi cu L_n mulţimea suport a lui $\mathcal{L}_n$; cele n elemente ale lui L_n vor fi notate adecvat fiecărei situaţii în care vor apărea în cele ce urmează; $\mathcal{L}_n$ este unic modulo un izomorfism de poseturi, i. e. modulo o funcţie izotonă bijectivă şi cu inversa izotonă;
- pentru orice poset $(P, \leq)$, notăm cu $<$ relaţia de ordine strictă asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $< = \leq \setminus \Delta_P = \{(a, b) \mid a, b \in P, a \leq b, a \neq b\}$, şi cu $\prec$ relaţia de succesiune asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $\prec = \{(a, b) \mid a, b \in P, a < b, (\nexists\, x \in P)\, a < x < b\}$;
- notăm laticile sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq)$ sau $(L, \vee, \wedge)$, laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;

- legătura dintre operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- într–o latice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ şi} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puţin un complement;
- într–o latice mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;
- o latice este nedistributivă ddacă are o sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul;
- orice lanţ este o latice (distributivă), cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc *implicaţia booleană,* $\rightarrow$, şi *echivalenţa booleană,* $\leftrightarrow$, ca operaţii binare pe B, astfel: pentru orice $x, y \in B$:

  (i) $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$;

  (ii) $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:

  (i) $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ şi: $\overline{x} = 1$ ddacă $x = 0$, iar: $\overline{x} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latice mărginită, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia şi nu au alte complemente);

  (ii) $\overline{\overline{x}} = x$;

  (iii) $x \rightarrow y = 1$ ddacă $x \leq y$;

  (iv) $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;

- pentru orice mulţime A, $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ este o algebră Boole, unde am notat, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\overline{X} = A \setminus X$;
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_2^n$ (puterea a n–a a lanţului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole $\mathcal{L}_2$, numită *algebra Boole standard*; dacă notăm cu $L_2 = \{0, 1\}$ mulţimea suport a lanţului cu 2 elemente, $\mathcal{L}_2$, atunci $L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}\}$ este mulţimea subiacentă a algebrei Boole $\mathcal{L}_2^n$; vom păstra aceste notaţii în cele ce urmează;
- orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$;
- se numeşte *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul $(B, \leq)$, adică un element $a \in B$ cu $0 \prec a$ (i. e. astfel încât $0 < a$ şi nu există niciun $x \in B$ cu proprietatea că $0 < x < a$);
- se numeşte *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o submulţime nevidă F a lui B închisă la conjuncţie şi la majorare, i. e. o mulţime F cu proprietăţile:

  (i) $\emptyset \neq F \subseteq B$;

  (ii) pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;

  (iii) pentru orice $x \in F$ şi orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;

  mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Filt}(\mathcal{B})$;

- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conţine elementul 1;
- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi orice $a \in B$, mulţimea notată $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, numit *filtrul principal generat de a*; notăm mulţimea filtrelor principale ale lui $\mathcal{B}$ cu $\mathrm{PFilt}(\mathcal{B})$;
- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale;
- se numeşte *congruenţă* a unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B compatibilă cu operaţiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, i. e. o relaţie binară $\sim$ pe B cu proprietăţile:

  (i) $\sim \in \mathrm{Eq}(B)$;

  (ii) pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea cu** $\vee$);

  (iii) pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea cu** $\wedge$);

  (iv) pentru orice $x, x' \in B$, dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea cu** $\bar{\cdot}$);

  notăm cu $\mathrm{Con}(\mathcal{B})$ mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$;
- referitor la definiţia anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relaţii binare $\sim$ pe B cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$ (i. e. constantele 0 şi 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, proprietăţi care sunt satisfăcute nu numai de către orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B, ci chiar de către orice relaţie reflexivă $\sim$ pe B;
- mulţimea congruenţelor unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este în bijecţie cu mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$;
- notăm cu V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic;
- notăm cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;
- notăm cu $(E/\sim, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, despre care ştim că este o algebră Boole;
- notăm cu $\hat{\varphi} \in E/\sim$ clasa unui enunţ φ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/\sim$;
- dată o interpretare în calculul propoziţional clasic, i. e. o funcţie $h : V \to \mathcal{L}_2$, notăm cu $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene (notaţii alternative: $h : V \to L_2 = \{0, 1\}$, $\tilde{h} : E \to L_2$);
- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\vDash \varphi$ faptul că un enunţ φ este universal adevărat (tautologie, adevăr semantic) în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\Sigma \vDash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil semantic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;

- pentru orice enunţ φ, $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, şi $\vDash \varphi$ ddacă $\emptyset \vDash \varphi$;
- se notează cu $h \vDash \varphi$, respectiv $h \vDash \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ satisface un enunţ $\varphi \in E$, respectiv o mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducţiei** pentru calculul propoziţional clasic; abreviată **TD**);
- pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$ (**lemă** din calculul propoziţional clasic);
- pentru orice $\varphi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic; abreviată **TCT**); cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numeşte **Teorema de completitudine** a calculului propoziţional clasic (**TC**).

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova (2003).

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1974, 1975, 1976).

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti (1978).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti (2010).

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti (1969).

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

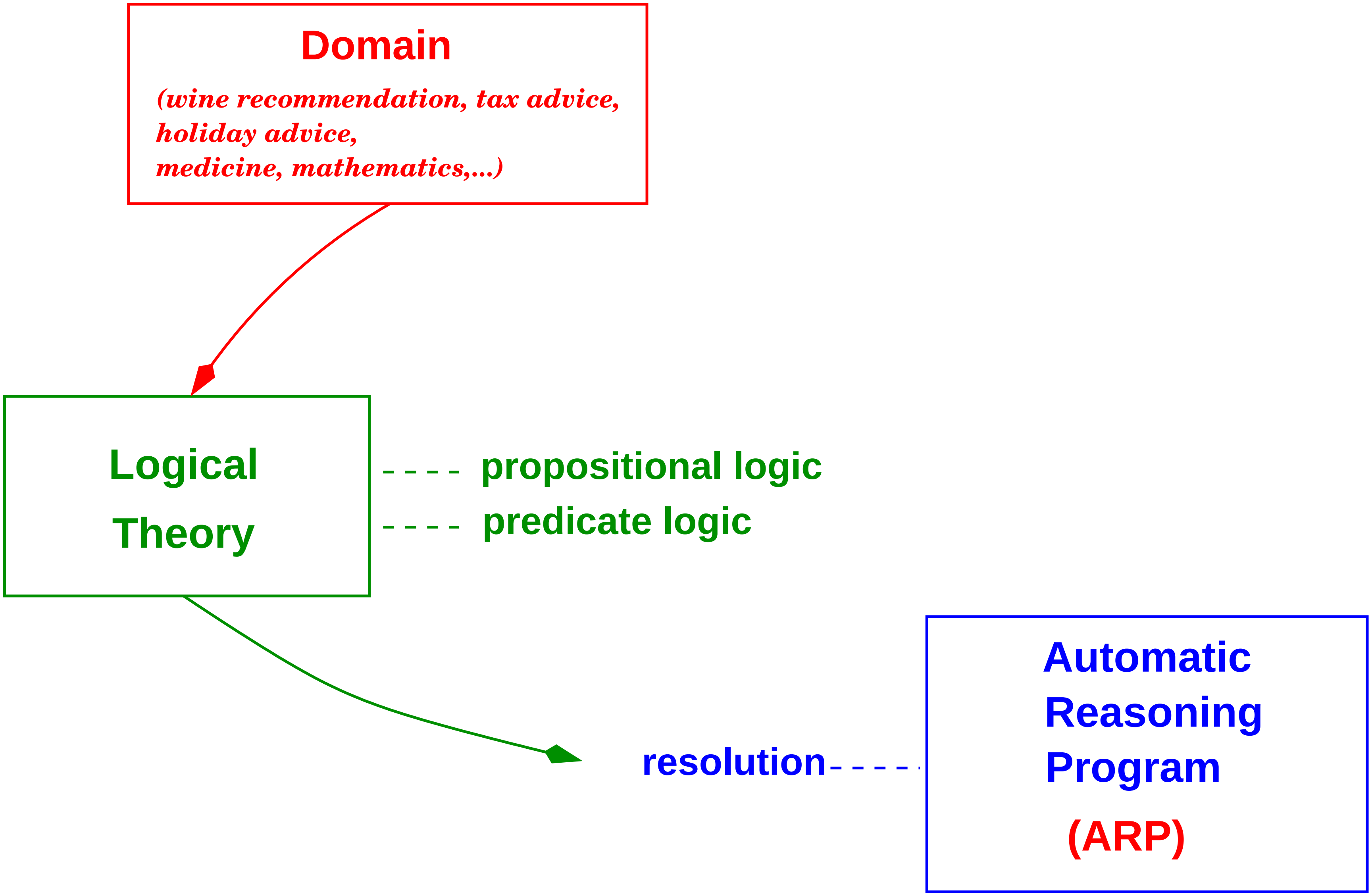
[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).

Logic and Resolution

Representation and Reasoning

KR&R using Logic



Goals for Today

- Refresh your memory about logic
- Make sure everyone understands the notation
- Learn the basic method for automated reasoning systems: resolution

$\Rightarrow$ forms the basis for a large part of the course

Warm-up Quiz

Which of the following statements are true?

(a) IsHuman $\rightarrow$ IsMammal

(b) $\models$ IsHuman $\rightarrow$ IsMammal

(c) $\models \neg($IsMammal $\rightarrow$ IsHuman$)$

(d) IsHuman $\not\models$ IsMammal

(e) IsHuman $\rightarrow$ IsMammal $\models$ IsMammal $\rightarrow$ IsHuman

(f) IsHuman $\rightarrow$ IsMammal $\models \neg$IsMammal $\rightarrow \neg$IsHuman

(g) $\exists x($IsHuman$(x)) \models$ IsHuman$($child$($Mary$))$

(h) $\forall x(P(x) \vee \neg Q(a)) \models Q(a) \rightarrow P(b)$

(i) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y(\neg P(f(y)) \vee R(y)) \models \forall z(Q(f(z)) \vee R(z))$

Logic Concepts

- If a formula φ is true under a given interpretation M, one says that that M satisfies φ, $M \models \varphi$
- A formula is satisfiable if there is some interpretation under which it is true
- Otherwise, it is unsatisfiable (inconsistent)
- A formula is valid (a tautology), denoted by $\models \varphi$, if it is true in every interpretation

$$\text{for all } M\colon M \models \varphi$$

- A formula φ is entailed (or is a logical consequence) by a conjunction of formulas (sometimes called a theory) Γ, denoted by $\Gamma \models \varphi$, if

$$\text{for all } M\colon M \models \Gamma \text{ then } M \models \varphi$$

Proposition Logic

- Well-formed formulas $\mathcal{F}$: *constants* $\Box$, *propositional symbols* (atoms) P, *negation* $\neg\varphi$, *disjunction* $(\varphi \vee \psi)$, *conjunction* $(\varphi \wedge \psi)$, *implication* $(\varphi \rightarrow \psi)$
- Interpreted with a function w:

$$w : \mathcal{F} \rightarrow \{\textit{true}, \textit{false}\}$$

  such that for w holds:
  - $w(\neg\varphi) = \textit{true}$ if and only if $w(\varphi) = \textit{false}$
  - $w(\varphi \wedge \psi) = \textit{true}$ iff $w(\varphi) = \textit{true}$ and $w(\psi) = \textit{true}$
  - etc.
- Equivalently, we could restrict ourselves to an assignment of truth to the propositional symbols
- If w is a model of φ then this is denoted by $\boxed{w \vDash \varphi}$

Propositional Logic: Example

"Because the classroom was small (S) and many students subscribed to the course (M), there was a shortage of chairs (C)"

Formally: $((S \wedge M) \to C)$

- If $w(S) = w(M) = w(C) =$ ***true***, then $w \vDash ((S \wedge M) \to C)$,
- Also: $((S \wedge M) \wedge ((S \wedge M) \to C)) \vDash C$; other notation: $\{S, M, (S \wedge M) \to C\} \vDash C$
- If $w'(S) = w'(M) =$ ***true*** and $w'(C) =$ ***false***:

$$\{S, M, \neg C, (S \wedge M) \to C\} \vDash \Box$$

- Short notation: remove some brackets ...

Deduction Rules

- Instead of truth assignments (interpretations) we can focus only the syntax (the form ...)

  Examples:

  - modus ponens: $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$
  - $\wedge$-introduction rule: $\frac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$

- Replace $\models$ by syntactical manipulation (derivation) $\vdash$

  Examples: Given: P, Q and $(P \wedge Q) \rightarrow R$, then

  - $\{P, Q\} \vdash P \wedge Q$ ($\wedge$-introduction)
  - $\{P, Q, (P \wedge Q) \rightarrow R\} \vdash R$ ($\wedge$-introduction and modus ponens)

Deduction Concepts

- A deductive system S is a set of axioms and rules of inference for deriving theorems
- A formula φ can be deduced by a set of formulae Γ if φ can be proven using a deduction system S, written as $\Gamma \vdash_S \varphi$
- A deductive system S is sound if

$$\Gamma \vdash_S \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

- A deductive system S is complete if

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_S \varphi$$

- A deductive system S is refutation-complete if

$$\Gamma \models \Box \Rightarrow \Gamma \vdash_S \Box$$

Resolution

- Reason only with formulas in its clausal form:

$$L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n$$

  with L_i a literal, i.e., an atom or a negation of an atom; if $n = 0$, then it is $\Box$ (empty clause)

- Complementary literals: L and L', such that $L \equiv \neg L'$

- Resolution (rule) $\mathcal{R}$ (J.A. Robinson, 1965):

$$\frac{C \vee L, \quad C' \vee \neg L}{D}$$

  with C, C' clauses, and D the (binary) resolvent equal to $C \vee C'$ (repeating literals may be removed)

Examples Resolution

- Given $V = \{P \vee Q \vee \neg R, U \vee \neg Q\}$, then

$$\frac{P \vee Q \vee \neg R, \quad U \vee \neg Q}{P \vee U \vee \neg R}$$

  so $V \vdash_{\mathcal{R}} P \vee U \vee \neg R$ by applying the resolution rule $\mathcal{R}$ once
- Given $V = \{\neg P \vee Q, \neg Q, P\}$, then $\frac{\neg P \vee Q, \quad \neg Q}{\neg P}$ and $\frac{\neg P, \quad P}{\Box}$ so $V \vdash_{\mathcal{R}} \Box$
- If $V \vdash_{\mathcal{R}} \Box$ then it will hold that V is inconsistent and the derivation will then be called a refutation
  - $\mathcal{R}$ is sound
- If $V \nvdash_{\mathcal{R}} \Box$, then V is consistent
  - $\mathcal{R}$ is refutation-complete

Motivation for Resolution

- Proving unsatisfiability is enough, because:

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \Box$$

- If a theory Γ is inconsistent, then resolution will eventually terminate with a derivation such that

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Box$$

- For first-order logic, resolution may not terminate for consistent theories...

Many applications:

- Mathematics: Robbins' conjecture
- Proving that medical procedures are correct
- Logic programming

Soundness Resolution

- Theorem: resolution is sound (so, $V \vdash_{\mathcal{R}} C \Rightarrow V \models C$)

  Proof (sketch). Suppose $C_1 = L \vee C_1'$ and $C_2 = \neg L \vee C_2'$, so using resolution we find:

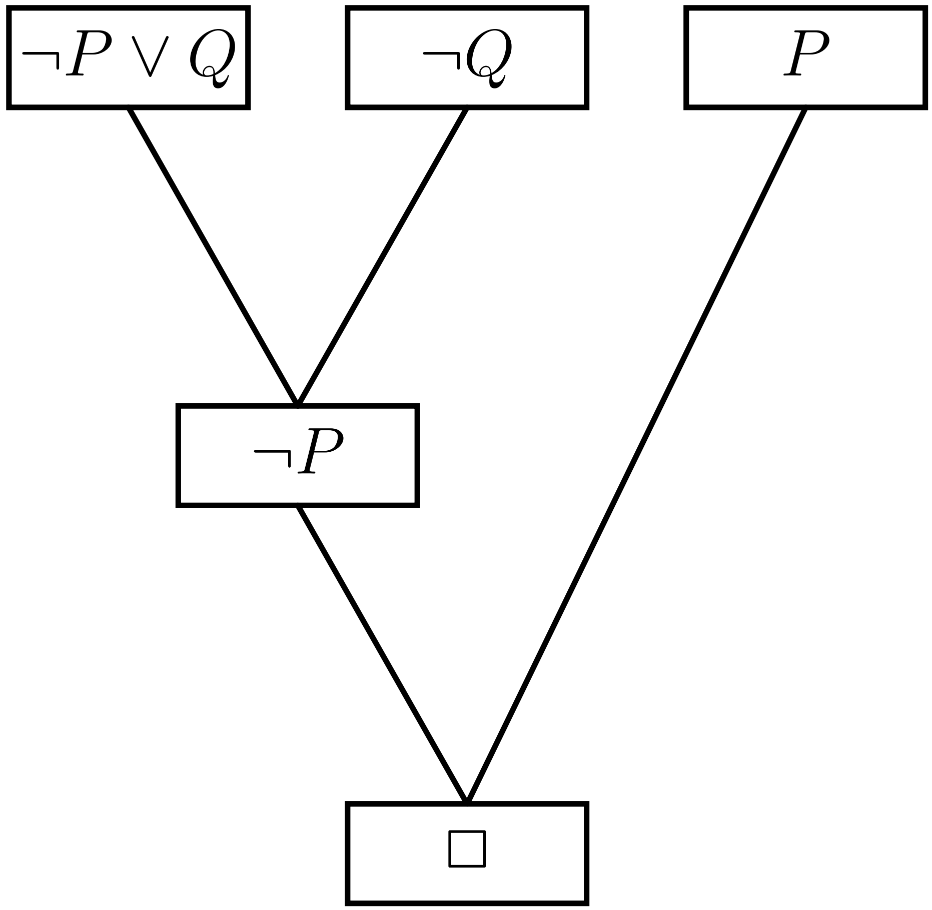
  $$\{C_1, C_2\} \vdash_{\mathcal{R}} D$$

  with D equal to $C_1' \vee C_2'$. We thus need to prove:

  $$w \models (C_1 \wedge C_2) \;\Rightarrow\; w \models D$$

  for every w. It holds that either L or $\neg L$ is true in w. Suppose L is true, then C_2' must be true, so D is true Similar for when $\neg L$ is true.

Resolution (Refutation) Tree



Given $V = \{\neg P \vee Q, \neg Q, P\}$, then $V \vdash_{\mathcal{R}} \Box$
Note: resolution trees are *not* unique

SLD Resolution

- Horn clause: clause with maximally one positive literal $\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_m \vee B$, also denoted by $B \leftarrow A_1, \ldots, A_m$
- SLD resolution (for Horn clauses):

$$\frac{\leftarrow B_1, \ldots, B_n, \qquad B_i \leftarrow A_1, \ldots, A_m}{\leftarrow B_1, \ldots, B_{i-1}, A_1, \ldots, A_m, B_{i+1}, \ldots, B_n}$$

- SLD derivation: a sequence $G_0, G_1, \ldots$ and $C_1, C_2, \ldots$

Exercise:

$$\Gamma = \{R \leftarrow T, T \leftarrow, P \leftarrow R\}$$

Prove P from Γ using SLD resolution.

First-order Logic

- Allow the representation of entities (also called objects) and their properties, and relations among such entities
- More expressive than propositional logic
- Distinguished from propositional logic by its use of quantifiers
  - Each interpretation of first-order logic includes a domain of discourse over which the quantifiers range
- Additionally, it covers predicates
  - Used to represent either a property or a relation between entities
- Basis for many other representation formalisms

First-order Logic: Syntax

Well-formed formulas are build up from:

- Constants: denoted by $a, b, \ldots$ (or sometimes names such as ‘Peter’ and ‘Martijn’)
- Variables: denoted by $x, y, z \ldots$
- Functions: maps (sets of) objects to other objects, e.g. *father*, *plus*, $\ldots$
- Predicates: resemble a function that returns either *true* or *false*: *Brother-of*, *Bigger-than*, *Has-color*, $\ldots$
- Quantifiers: allow the representation of properties that hold for a collection fo objects. Consider a variable x,
  - Existential: $\exists x$, ‘there is an x’
  - Universal: $\forall x$, ‘for all x’
- Logical connectives and auxiliary symbols

First-order Logic: Interpretations

Formulas are interpreted by a variable assignment v and I based on a structure

$$S = (D, \{f_i\}_i, \{P_j\}_j)$$

consisting of

- A domain of discourse D (typically non-empty)
- f_i is a function $D^n \to D$ for some n
- P_j is a relation, i.e., $P_j \subseteq D^n$ or $P_j : D^n \to \{\textit{true}, \textit{false}\}$ for some n

Then:

- v maps all variables to a $d \in D$
- I maps all n-ary functions/predicates in the language to n-ary functions/relations in the structure

First-order Logic: Example Model

- A simple structure S could consist of:
  - D the set of natural numbers, $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$
  - 2-ary function '$+$' (regular addition)
  - 2-ary relationship '$>$' (regular greater than)
- A function symbol f/2 can be interpreted as '$+$'

$$I(f) = +$$

- The constant $\perp$ can be interpreted by the constant 0

$$I(\perp) = 0$$

- The predicate P could mean $>$, i.e., $P(x, y)$ means 'x is greater than y'

$$I(P) = >$$

First-order Logic: Truth

- A predicate is true if the interpretation of the predicate evaluates to ‘true’ (in the structure)
- Logical connectives are interpreted just like in proposition logic
- $\forall x \varphi(x)$ is true if φ is true for all variable assignments
- $\exists x \varphi(x)$ is true if φ is true for some variable assignments

Example

- Consider the formula $\forall x \exists y \exists z P(f(y, z), x)$
- Given the structure S, this formula is clearly true
- Note, however, that this would not be the case if we had, for instance, interpreted P as ‘less than’

First-order Clausal Form

First-order resolution only uses clauses

$$\forall x_1 \ldots \forall x_s (L_1 \vee \ldots \vee L_m) \text{ written as } L_1 \vee \ldots \vee L_m$$

$\Rightarrow$ we will translate formulas in predicate logic to a clausal normal form:

1. Convert to negation normal form: eliminate implications and move negations inwards
2. Make sure each bound variable has a unique name
3. Skolemize: replace $\exists x$ by terms with function symbols of previously universally quanified variables
   $\forall x \exists y P(x, y)$ becomes $\forall x P(x, f(x))$
4. Put it into a conjunctive normal form by using the distributive laws and put the quantifiers up front

Each conjunct is now a clause

Skolemisation: Underlying Idea

What you have is that,

$$\forall x \Big(g(x) \vee \exists y R(x, y) \Big) \Rightarrow \forall x \Big(g(x) \vee R(x, f(x)) \Big)$$

where $f(x)$ is the (Skolem) function that maps x to y

- "For every x there is a y s.t. $R(x, y)$" is converted into "There is a function f mapping every x into a y s.t. for every x $R(x, f(x))$ holds"
- $\forall x \exists y R(x, y)$ is satisfied by a model M iff
  - For each possible value for x there is a value for y that makes $R(x, y)$ true
  - which implies: there exists a function f s.t. $y = f(x)$ such that $R(x, y)$ holds

Skolemization: Example

- Given a formula
  $\exists x \text{Father}(x, \text{amalia}) \wedge \neg \exists x \exists y (\text{Father}(x, y) \wedge \neg \text{Parent}(x, y))$

1. Move negations inwards:

   $$\exists x \text{Father}(x, \text{amalia}) \wedge \forall x \forall y (\neg \text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y))$$

2. Make variable names unique:

   $$\exists z \text{Father}(x, \text{amalia}) \wedge \forall x \forall y (\neg \text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y))$$

3. Skolemize (suggestively replacing z by ‘alex’)

   $$\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia}) \wedge \forall x \forall y (\neg \text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y))$$

4. To clausal normal form:

   $$\forall x \forall y (\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia}) \wedge (\neg \text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y))$$

Resolution and First-order Logic

- Problem: given

  $S = \{\forall x \forall y(\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia}) \wedge (\neg\text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y))\}$

  We know $S \vDash \text{Parent}(\text{alex}, \text{amalia})$
- Extract the clauses (for resolution):

  $S' = \{\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia}), \neg\text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y)\}$
- Solution: substitute x with 'alex' and substitute y with 'amalia'

  $\Rightarrow$ substitution $\sigma = \{\text{alex}/x, \text{amalia}/y\}$
- Application of resolution:

$$\frac{\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia}), \{\neg\text{Father}(x, y) \vee \text{Parent}(x, y)\}\sigma}{\text{Parent}(\text{alex}, \text{amalia})}$$

so $S' \vdash_{\mathcal{R}} \text{Parent}(\text{alex}, \text{amalia})$

Substitution

- A substitution σ is a finite set of the form $\sigma = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$, with x_i a variabele and t_i a term; $x_i \neq t_i$ and $x_i \neq x_j$, $i \neq j$
- $E\sigma$ is an expression derived from E by simultaneously replacing all occurences of the variables x_i by the terms t_i. $E\sigma$ is called an instantiation
- If $E\sigma$ does not contain variables, then $E\sigma$ is called a ground instance

Examples for $C = P(x, y) \vee Q(y, z)$:

- $\sigma_1 = \{a/x, b/y\}$, $\sigma_2 = \{y/x, x/y\}$: $C\sigma_1 = P(a, b) \vee Q(b, z)$ en $C\sigma_2 = P(y, x) \vee Q(x, z)$
- $\sigma_3 = \{f(y)/x, g(b)/z\}$: $C\sigma_3 = P(f(y), y) \vee Q(y, g(b))$

Making Things Equal

- Compare $\neg\text{Father}(\text{alex}, \text{amalia})$ and $\neg\text{Father}(x, y)$. What are the differences and the similarities?
  - complementary sign
  - the same predicate symbol (‘Father’)
  - constant ‘alex’ versus variable x en constant ‘amalia’ versus variable y

  Make things equal through substitution

  $$\sigma = \{\text{alex}/x, \text{amalia}/y\}$$

- Compare $P(x, f(x))$ and $\neg P(g(a), f(g(a)))$; after removing the sign, make them equal with

  $$\sigma = \{g(a)/x\}$$

- Making things syntactically equal = unification

Unification

- Let $\theta = \{t_1/x_1, \ldots, t_m/x_m\}$ and $\sigma = \{s_1/y_1, \ldots, s_n/y_n\}$, then the composition, denoted by $\theta \circ \sigma$ or $\theta\sigma$, is defined by:

$$\{t_1\sigma/x_1, \ldots, t_m\sigma/x_m, s_1/y_1, \ldots, s_n/y_n\}$$

  where each element $t_i\sigma/x_i$ is removed for which $x_i = t_i\sigma$ and also each element s_j/y_j for which $y_j \in \{x_1, \ldots, x_m\}$

- A substitution σ is called a unifier of E and E' if $E\sigma = E'\sigma$; E and E' are then called unifiable

- A unifier θ of expressions E en E' is called the most general unifier (mgu) if and only if for each unifier σ of E and E' there exists a substitution λ such that $\sigma = \theta \circ \lambda$
  $\Rightarrow$ derive expressions which are as general as possible (with variables)

Examples Unifiers

Consider the following logical expressions

$$R(x, f(a, g(y)))$$

and

$$R(b, f(z, w))$$

Some possible unifiers:

- $\sigma_1 = \{b/x, a/z, g(c)/w, c/y\}$
- $\sigma_2 = \{b/x, a/z, f(a)/y, g(f(a))/w\}$
- $\sigma_3 = \{b/x, a/z, g(y)/w\}$ (mgu)

Note that:

- $\sigma_1 = \sigma_3 \circ \{c/y\}$
- $\sigma_2 = \sigma_3 \circ \{f(a)/y\}$

Resolution in Predicate Logic

- Consider: $\{C_1 = P(x) \vee Q(x), C_2 = \neg P(f(y)) \vee R(y)\}$; $P(x)$ and $P(f(y))$ are *not* complementary, but they are unifiable, for example $\sigma = \{f(a)/x, a/y\}$
- Result: $C_1\sigma = P(f(a)) \vee Q(f(a))$
  en
  $$C_2\sigma = \neg P(f(a)) \vee R(a)$$
  $P(f(a))$ en $\neg P(f(a))$ are complementary
  $$\{C_1\sigma, C_2\sigma\} \vdash_{\mathcal{R}} Q(f(a)) \vee R(a)$$
- Using the mgu $\theta = \{f(y)/x\}$
  $$\{C_1\theta, C_2\theta\} \vdash_{\mathcal{R}} Q(f(y)) \vee R(y)$$

Resolution Rule for First-order Logic

- Notation: if L is a literal, dan $[L]$ is the atom
- Given the following two clauses $C_1 = C_1' \vee L_1$ and $C_2 = C_2' \vee L_2$, with L_1 an atom, and L_2 negated
- Suppose $[L_1]\sigma = [L_2]\sigma$, with σ an mgu
- Binary resolution rule $\mathcal{B}$ for predicate logic:

$$\frac{(C_1' \vee L_1)\sigma, \ (C_2' \vee L_2)\sigma}{C_1'\sigma \vee C_2'\sigma}$$

$C_1'\sigma \vee C_2'\sigma$ is binary resolvent, and

$$\{C_1, C_2\} \vdash_{\mathcal{B}} C_1'\sigma \vee C_2'\sigma$$

Resolution: Summary

In summary, this is what occurs,

- Find two clauses containing the same predicate, where such predicate is negated in one clause but not in the other
- Perform a unification on the two complementary predicates
  - If the unification fails, you might have made a bad choice of predicates
    Go back to the previous step and try again
- Discard the unified predicates, and combine the remaining ones from the two clauses into a new clause, also joined by the or-operator

Schubert’s Steamroller

Wolves, foxes, birds, caterpillars, and snails are animals, and there are some of each of them

Also there are some grains, and grains are plants

Every animal either likes to eat all plants or all animals much smaller than itself that like to eat some plants

Caterpillars and snails are much smaller than birds, which are much smaller than foxes, which are in turn much smaller than wolves

Wolves do not like to eat foxes or grains, while birds like to eat caterpillars but not snails

Caterpillars and snails like to eat some plants

Prove there is an animal that likes to eat a grain-eating animal

Representation

- Wolfs are animals: $\forall x(\mathit{Wolf}(x) \rightarrow \mathit{Animal}(x))$
- There are wolfs: $\exists x \mathit{Wolf}(x)$
- Every animal either likes to eat all plants or all animals much smaller than itself that like to eat some plants

$$\begin{aligned}\forall x(\mathit{Animal}(x) \rightarrow \quad & (\forall y(\mathit{Plant}(y) \rightarrow \mathit{Eats}(x,y))) \\ & \vee(\forall z(\mathit{Animal}(z) \wedge \mathit{Smaller}(z,x) \\ & \qquad \wedge(\exists u(\mathit{Plant}(u) \wedge \mathit{Eats}(z,u))) \\ & \quad \rightarrow \mathit{Eats}(x,z))))\end{aligned}$$

- Caterpillars are smaller than birds

$$\forall x \forall y(\mathit{Caterpillar}(x) \wedge \mathit{Bird}(y) \rightarrow \mathit{Smaller}(x,y))$$

- etc.

Applying an ARP (Prover9)

```
============================== PROOF =================================

% Proof 1 at 0.02 (+ 0.00) seconds.
% Length of proof is 100.
% Level of proof is 47.
% Maximum clause weight is 20.
% Given clauses 229.

...

25 -Wolf(x) | animal(x).  [clausify(1)].
26 -Fox(x) | animal(x).  [clausify(2)].
27 -Bird(x) | animal(x).  [clausify(3)].
29 -Snail(x) | animal(x).  [clausify(5)].
30 -Grain(x) | plant(x).  [clausify(6)].
31 Wolf(c1).  [clausify(7)].
32 Fox(c2).  [clausify(8)].
33 Bird(c3).  [clausify(9)].
```

Continuation ...

```
282 -animal(c3) | eats(c3,f3(c2,c3)) | -animal(c5)
   | eats(c3,c5).  [resolve(278,a,99,b)].
283 -animal(c3) | eats(c3,f3(c2,c3)) | eats(c3,c5).
   [resolve(282,c,56,a)].
284 eats(c3,f3(c2,c3)) | eats(c3,c5).  [resolve(283,a,54,a)].
287 eats(c3,c5) | eats(c1,c6) | eats(c1,c2) | -animal(c2)
   | -animal(c3).  [resolve(284,a,224,e)].
297 eats(c3,c5) | eats(c1,c6) | eats(c1,c2) | -animal(c2).
  [resolve(287,e,54,a)].
298 eats(c3,c5) | eats(c1,c6) | eats(c1,c2).  [resolve(297,d,53,a)].
302 eats(c1,c6) | eats(c1,c2) | -Bird(c3) | -Snail(c5).
  [resolve(298,a,49,c)].
305 eats(c1,c6) | eats(c1,c2) | -Bird(c3).  [resolve(302,d,35,a)].
306 eats(c1,c6) | eats(c1,c2).  [resolve(305,c,33,a)].
310 eats(c1,c2) | -Wolf(c1) | -Grain(c6).  [resolve(306,a,48,c)].
313 eats(c1,c2) | -Grain(c6).  [resolve(310,b,31,a)].
314 eats(c1,c2).  [resolve(313,b,36,a)].
319 -Wolf(c1) | -Fox(c2).  [resolve(314,a,47,c)].
321 -Fox(c2).  [resolve(319,a,31,a)].
322 $F.  [resolve(321,a,32,a)].
============================== end of proof ==========================
```