Curs 10

Universalitatea variabilei aleatoare uniforme

Această proprietate este cunoscută și sub denumirea de teorema fundamentală a simulării.

(T) Fie X o variabilă aleatoare cu funcția de repartiție F, continuă și strict crescătoare (prin urmare există F^{-1}). Atunci:

a) Dacă $U \sim \mathcal{U}((0,1))$ atunci $F^{-1}(U)$ are aceeași rep. cu X

b) $F(X) \sim \mathcal{U}((0,1))$

Dem: Deoarece F este continuă și strict crescătoare $\Rightarrow$ F este bij. prin urmare există inversa F^{-1}

a) $U \sim \mathcal{U}((0,1))$ și $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(F^{-1}(U) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(U \leq F(x)\right) = F(x)$$

astfel $F^{-1}(U)$ și X sunt repartizate la fel

b) X are f.d.r. F și să considerăm $Y = F(X)$

$F: \mathbb{R} \to (0,1) \Rightarrow Y \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = ? \quad \text{pentru } y \in (0,1)$$

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(F(X) \leq y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aplicăm } F^{-1}\ (\nearrow)}}{=} \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$$

Cum $\mathbb{P}(Y \leq y) = 0$ pt $y < 0$ și $\mathbb{P}(Y \leq y) = 1$ pt $y \geq 1$ avem

$Y \sim \mathcal{U}((0,1))$

Exp: Pentru repartiția logistică:

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dacă $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ și F^{-1} este inversa lui F atunci $F^{-1}(U)$ este repartizată logistic.

$$F^{-1}(u) = ?$$

Rezolvăm ecuația $F(x) = u \Rightarrow \frac{e^x}{1+e^x} = u$, $u \in (0,1)$

$$\Rightarrow e^x(1-u) = u \Rightarrow e^x = \frac{u}{1-u} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$$

$$F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$$

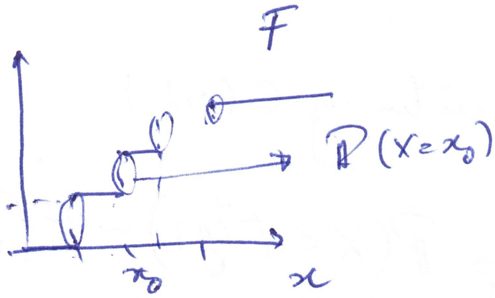
Atunci $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \sim$ logistic

Obs: Rezultatul din teorema precedentă este valabil în cazul general.

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \mid F(x) \geq u\} \leftarrow \text{funcția cuantilă}$$

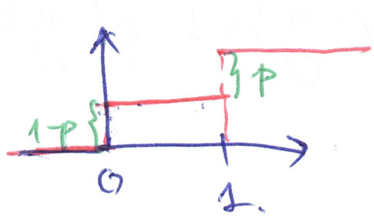
În cazul în care F este bijectivă atunci F^{-1} este chiar inversa lui F.

Cazul discret



Cum putem genera v.a. discrete plecând de la uniforme pe $(0,1)$?

Exp: $X \sim B(p)$, $X \in \{0,1\}$, $P(X=1) = p$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 0, & u \le 1-p \\ 1, & u > 1-p \end{cases}$$

Generăm $U \sim \mathcal{U}((0,1))$ și considerăm $F^{-1}(U) = \begin{cases} 0, & U \le 1-p \\ 1, & U > 1-p \end{cases}$

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} 0, & p \le 1-U \\ 1, & p > 1-U \end{cases}$$

$U \sim \mathcal{U}((0,1))$
$\Downarrow$
$1-U \sim \mathcal{U}((0,1))$

Pentru a genera o v.a. Bernoulli de parametru p:

- generăm $U \sim \mathcal{U}((0,1))$
- dacă $U < p$ atunci $X = 1$ altfel $X = 0$.

Repartiția Exponențială

Varianta continuă a rep. Geometrice.

Modelează timpul de așteptare până la apariția unui eveniment de interes.

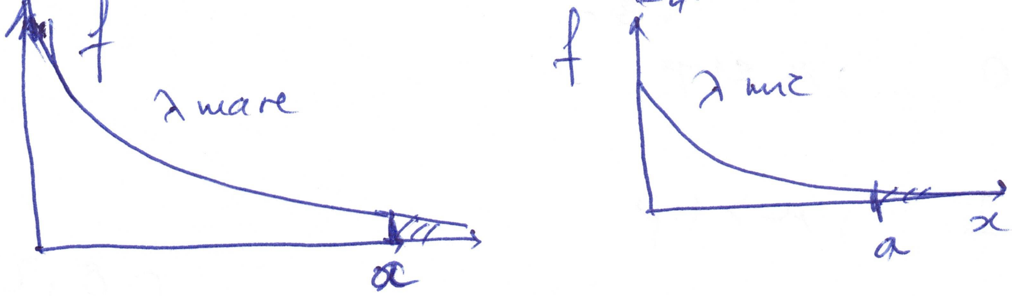
Def: O variabilă aleatoare X este repartizată exponențial de parametru $\lambda > 0$ și notăm $X \sim Exp(\lambda)$ dacă densitatea de rep. f a lui X este de forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

În acest caz, funcția de repartiție este

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\,dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \qquad (\text{pt } x \le 0 \text{ avem } F(x) = 0)$$



$X \sim Exp(\lambda)$ să calculăm

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda a}$$

- probabilitatea ca X să depășească pragul a scade exponențial

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty x\left(-e^{-\lambda x}\right)'dx$$

$$= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= 0 - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

În mod similar,

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{\left(-e^{-\lambda x}\right)'}\,dx$$

$$= \underbrace{\left(-x^2 e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{\mathbb{E}[X]} = \frac{2}{\lambda^2}$$

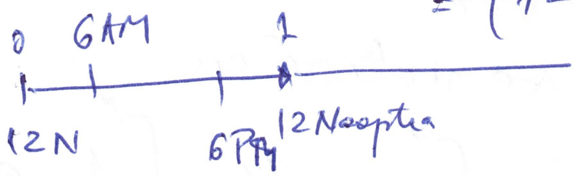
$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exp: Presupunem că timpul până la căderea unui meteorit de mică dimensiune pt prima oară pe suprafața României este modelat prin intermediul unei v.a rep. Exp de medie 10 zile. Să presupunem că suntem la miezul nopții. Care este prob. ca un meteorit să cadă în România între 6 dimineața și ora 6 seara (în prima zi)?

X - timpul scurs până la realizarea evenimentului

$X \sim Exp(\lambda)$ știm că media $1/\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 1/10$

$$\mathbb{P}\left(\tfrac{1}{4} \le X \le \tfrac{3}{4}\right) = \mathbb{P}(X \le 3/4) - \mathbb{P}(X \le 1/4)$$
$$= (1 - e^{-3/40}) - (1 - e^{-1/40}) = e^{-1/40} - e^{-3/4}$$



Dacă acum probabilitatea să fi căzut pt prima oară în a cincea zi între 6 AM și 6 PM:

$$\mathbb{P}\left(4 + \tfrac{1}{4} \le X \le 4 + \tfrac{3}{4}\right) = \dots$$

(P) (Lipsa de memorie)

Spunem că o v.a X are proprietatea lipsei de memorie dacă

$$\mathbb{P}(X \ge s+t \mid X \ge s) = \mathbb{P}(X \ge t), \quad \forall\, s,t \ge 0$$

a) Va. rep $Exp(\lambda)$ admite proprietatea lipsei de memorie

b) Dacă X este o va. cont., pozitivă care admite proprietatea lipsei de memorie atunci X este repartizată exponențial

Temă

Repartiția normală

Def: Spunem că o v.a X este repartizată normal (sau Gaussian) de parametri μ și σ^2, și notăm $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dacă admite densitatea

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

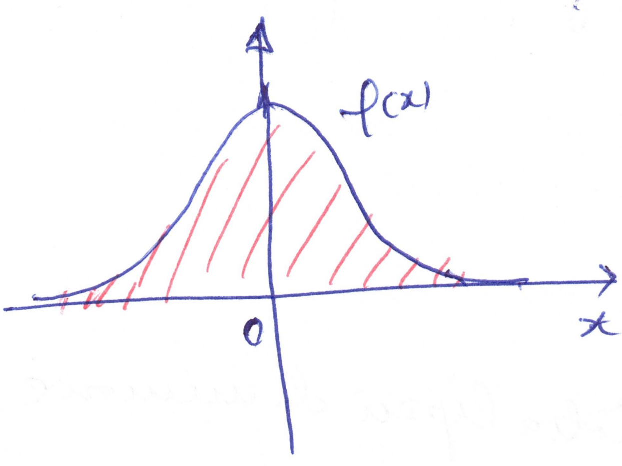
În cazul în care $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ spunem că v.a X este repartizată normal standard și notăm $X \sim N(0,1)$

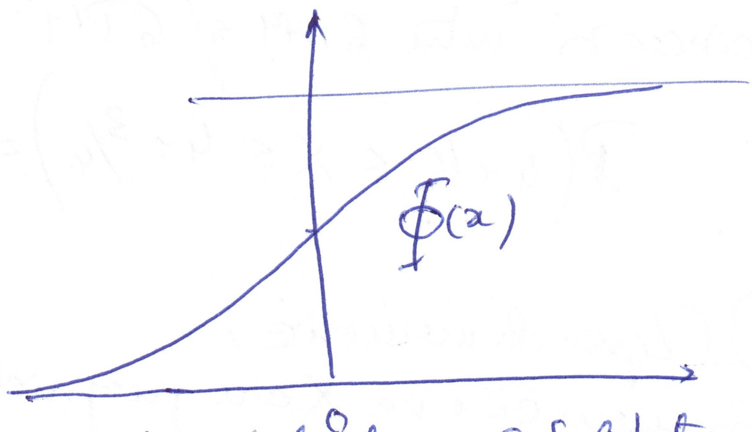
În acest caz, densitatea de repartiție se notează cu

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

iar funcția de repartiție se notează cu

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$$





Vrem să arătăm că $f(x)$ este o densitate de probabilitate:

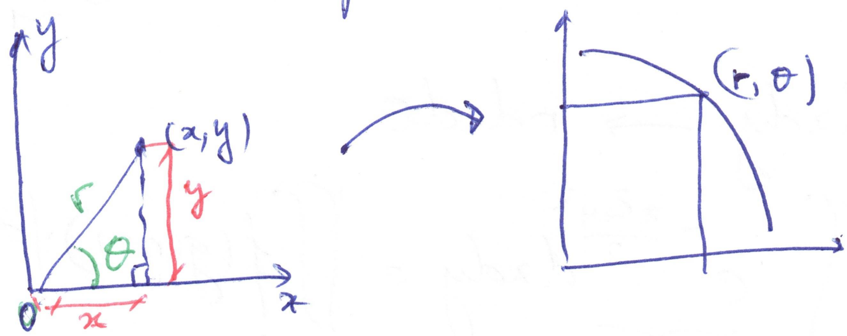
a) $\varphi(x) \geq 0, \forall x$ adevărat

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$

Fie $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$ și vrem să calculăm I^2

$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)\times\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy\right) \overset{\text{Fubini}}{=} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$

– transformăm în coordonate polare

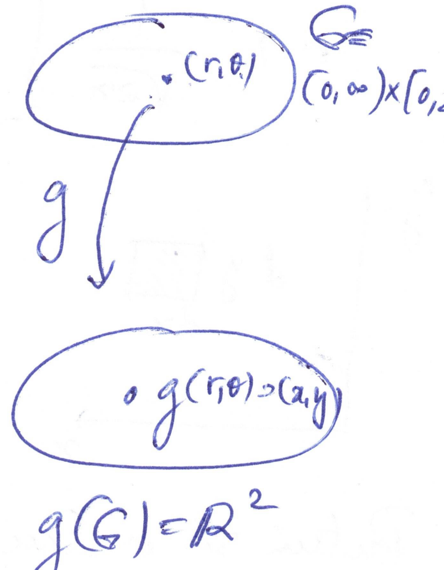


$$(x,y) \longrightarrow (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

Avem următoarea teoremă de la analiză:

(T) Fie G o mulțime deschisă din R^n și $g: G \to R^n$ dif. Presupunem că g este injectivă și cu derivatele parțiale cont. Presupunem că Jacobianul lui g este nenul. Atunci pentru f astfel încât f pe G este pozitivă sau integrabilă avem

$$\int_{g(G)} f(y)\,dy = \int_G f(g(x))\,|\det J_g(x)|\,dx$$



$$g=(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

$$J_g=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$g(r,\theta)=(\underbrace{r\cos\theta}_{g_1},\ \underbrace{r\sin\theta}_{g_2})$$

$$J_g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\det J_g = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}) = r$$

$$dx\,dy \longrightarrow r\,dr\,d\theta$$

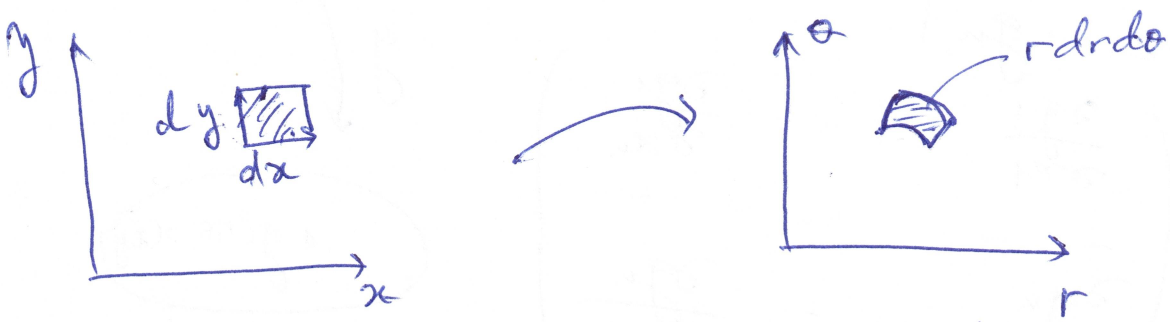
$$I^2 = \iint_{\underbrace{\mathbb{R}^2}_{g(G)}} \underbrace{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}_{f} dx\,dy = \iint_{G = [0,\infty)\times[0,2\pi]} f(g(r,\theta)) \cdot |\det J_g|\, dr\,d\theta$$

$$= \iint_{[0,\infty)\times[0,2\pi]} e^{-r^2/2} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r e^{-r^2/2} d\theta\, dr$$

$$= \int_0^\infty 2\pi r e^{-r^2/2} dr = 2\pi \Rightarrow \boxed{I = \sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1.$$



Putem să calculăm $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$ când $X \sim N(0,1)$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2/2}}_{\text{fct impară}} dx = 0$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left(-e^{-x^2/2}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{\left(-x e^{-x^2/2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} x' e^{-x^2/2}\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1.$$

$Var(X) = 1 - 0 = 1.$ prin urmare o v.a. repartizată normal standard are media 0 și varianța 1.

În general, o v.a. X rep $N(\mu,\sigma^2)$ se poate scrie sub forma

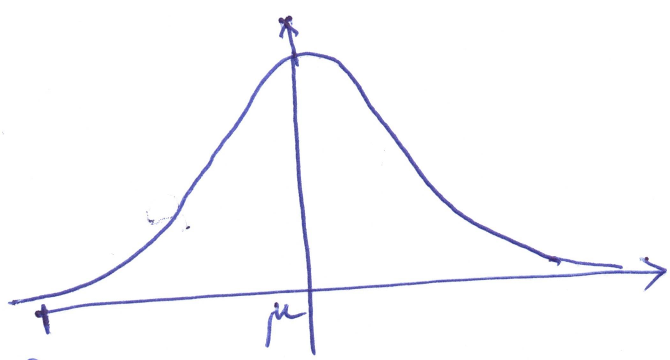
$$X = \mu + \sigma Z \quad \text{unde } Z \sim N(0,1)$$

ceea ce conduce la $E[X] = \mu + \sigma E[Z] = \mu$

$$Var(X) = Var(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 Var(Z) = \sigma^2$$

$N(\mu,\sigma^2)$ → varianța

→ media



Simetrică în raport cu media (μ)