Curs 12:

Repartiții comune, marginale și condiționate

a) Cazul v.a discrete

Definiție: Fie X și Y două v.a discrete cu $X \in \{x_1, \dots x_m\}$ și $Y \in \{y_1, \dots y_n\}$

$$p_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y) \quad \text{– rep. comună}$$

Având dată rep. comună $p_{X,Y}(x,y)$ avem

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X=x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$$

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y=y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$$

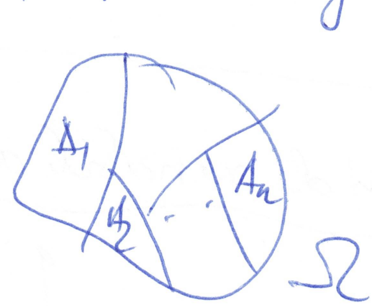
rep. marginale a lui X și Y

Rep. condiționată la un eveniment A, $\mathbb{P}(A) > 0$

$$p_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X=x|A)$$

$$\sum_x \mathbb{P}(X=x|A) = 1$$

Formula probabilității totale: $A_1, A_2, \dots A_n$ disjuncte a.î. $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$



$$p_X(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\, p_{X|A_i}(x)$$

$\{X=x\} = B$ și atunci din formula prob. totale pt evenimente

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$

Repartiția condiționată a lui X la Y = y este

$$\boxed{p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X=x \mid Y=y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} p_{X,Y}(x,y) &= p_Y(y)\cdot p_{X|Y}(x|y) \\ &= p_X(x)\, p_{Y|X}(y|x) \end{aligned}}$$

Formula prob. totale:

$$\boxed{p_X(x) = \sum_y{}' \, p_Y(y)\, p_{X|Y}(x|y)}$$

Obs: Putem considera în formula prob. totale de la evenimente că $B = \{X = x\}$ și $A_i = \{Y = y_i\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{p_X(x)\, p_{Y|X}(y|x)}{p_Y(y)}$$

$$\boxed{p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_X(x)\, p_{Y|X}(y|x)}{\sum_{x'}{}' \, p_X(x')\, p_{Y|X}(y|x')}}$$

Formula lui Bayes

Funcții de variabile aleatoare:

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad Z = g(X,Y)$$

$$p_Z(z) = \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\{(x,y) \mid g(x,y) = z\}}{}' \, p_{X,Y}(x,y)$$

$$\boxed{\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_x{}' \sum_y{}' \, g(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)}$$

Dacă $g(x,y) = ax + by + c$ atunci

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] + c$$

<u>Exp</u>: O găină depune un nr. aleator N de ouă, $N \sim Pois(\lambda)$. Să presupunem că fiecare eclozează cu prob. p independent de celelalte. Fie X nr. de ouă care au eclozat și Y nr. care nu au eclozat, $X+Y=N$. Vrem să determinăm repartiția comună a lui X și Y.

<u>Sol</u>:

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = ? \qquad , i,j \geq 0$$

Știind nr. de ouă depuse, $\{N=n\}$ atunci $X|N=n \sim B(n,p)$ și în același mod $Y|N=n \sim B(n,1-p)$

Putem calcula $\mathbb{P}(X=i, Y=j \mid N=n) = 0 \quad , n \neq i+j$

și dacă $n=i+j$ atunci

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j \mid N=i+j) = \mathbb{P}(X=i \mid N=i+j)$$
$$= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j$$

Astfel,

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i, Y=j \mid N=i+j)\,\mathbb{P}(N=i+j)$$
$$= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}$$
$$= \frac{\cancel{(i+j)!}}{i!\,j!} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^i \lambda^j}{\cancel{(i+j)!}}$$

$1 = p + (1-p) \Rightarrow \lambda = \lambda p + \lambda(1-p)$.

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \underbrace{\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}}_{\sim Pois(\lambda p)} \times \underbrace{e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}}_{\sim Pois(\lambda(1-p))}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=i) = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!} \qquad \Rightarrow \begin{cases} X \sim Pois(\lambda p) \\ Y \sim Pois(\lambda(1-p)) \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y=j) = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$$

Observăm că $\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$, $\forall i,j$

$\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$ indep.

<u>Obs</u>: a) Dacă $X \sim Pois(\lambda p)$, $Y \sim Pois(\lambda(1-p))$ cu X și Y indep atunci $N = X+Y \sim Pois(\lambda)$ și $X | N=n \sim B(n,p)$

b) Dacă $N \sim Pois(\lambda)$ și $X|N=n \sim B(n,p)$ atunci $X \sim Pois(\lambda p)$ și $Y = N-X \sim Pois(\lambda(1-p))$ cu $X \perp\!\!\!\perp Y$

b) Cazul v.a continue

Extindem rezultatele de la cazul discret la cazul continuu.

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate și X și Y două v.a cont.

Spunem că perechea (X,Y) formează un cuplu de v.a cont. dacă $\exists f_{(X,Y)} \geq 0$ a.î.

$$\mathbb{P}((X,Y)\in A) = \iint_{(x,y)\in A} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \quad , \forall A \subseteq \mathbb{R}^2$$

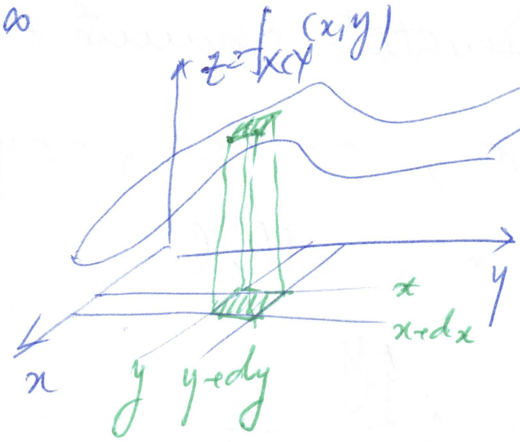
$f_{(X,Y)}$ (notată și $f_{X,Y}$) s.n densitatea comună a lui X, Y

Cazul particular, $A=[a,b]\times[c,d]$ atunci

$$\mathbb{P}((X,Y)\in A)=\mathbb{P}(a\le X\le b,\ c\le Y\le d)=\int_a^b\int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Dacă în plus $A=\mathbb{R}^2$ atunci $\mathbb{P}((X,Y)\in\mathbb{R}^2)=1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1$$



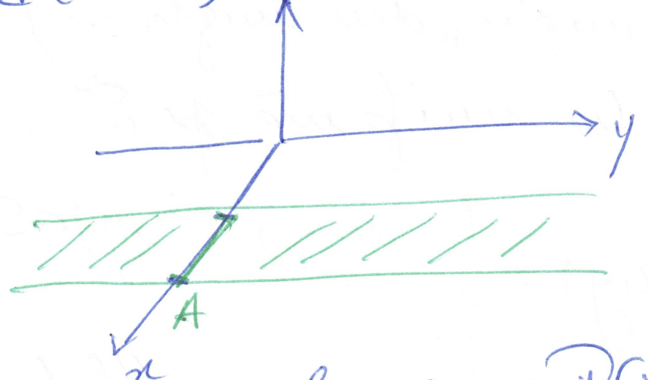
$$\mathbb{P}(X\in(x,x+dx),\ Y\in(y,y+dy))=\int_x^{x+dx}\int_y^{y+dy} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

$$\simeq f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

înălțimea
aria

Densitatea $f_{X,Y}(x,y)$ conține toată informația despre X și Y, putem calcula probabilitatea oricărui eveniment ce implică pe X și Y

În particular, $\mathbb{P}(X\in A)=\mathbb{P}((X,Y)\in A\times\mathbb{R})=\int_A\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy}\,dx$



Dacă X admite densitatea f_X atunci $\mathbb{P}(X\in A)=\int_A \overbrace{f_X(x)}\,dx$

Densitatea marginală a lui X este

$$\boxed{f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy}$$

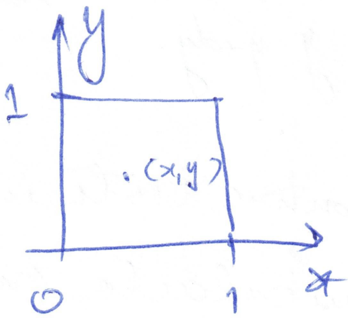
În mod similar,

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx}$$ densitatea marginală a lui Y

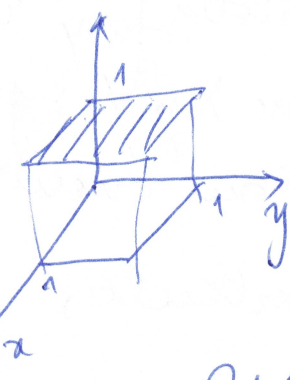
Exp: Romeo și Julieta își dau întâlnire într-o zi specifică la o anumită oră și ajung la punctul de întâlnire cu o întârziere (aleatoare) care variază între 0 și 1 h. Fie X și Y durata de întârziere. Densitatea comună (X,Y)?

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$$



$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^1 c\,dx\,dy = 1 \Rightarrow c = 1$$



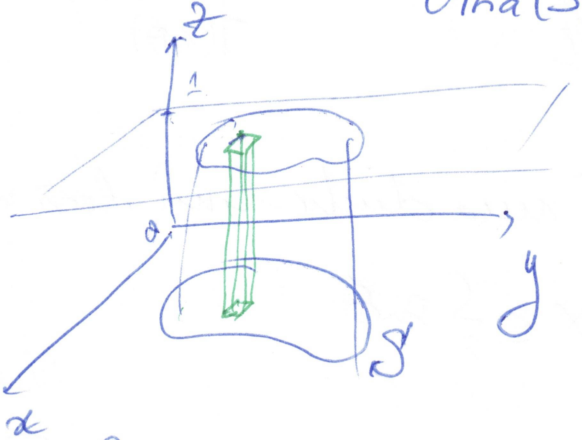
Fie $S \subseteq \mathbb{R}^2$ (triunghi, dreptunghi, ...) definim densitatea uniformă pe S, $(X,Y) \sim \mathcal{U}(S)$

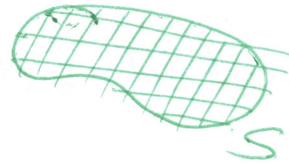
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in S \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}, \quad c\text{-const.}$$

Cine este c? $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} c\,\mathbb{1}_S(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\Rightarrow c\iint_S dx\,dy = 1 \quad \Rightarrow c = \frac{1}{Aria(S)}$$



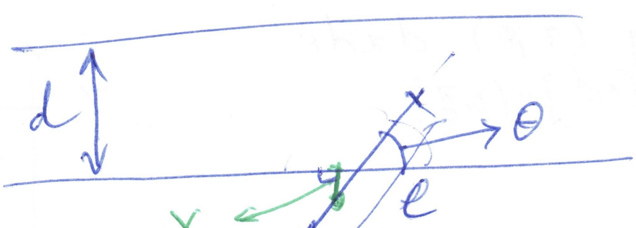


$$\mathbb{P}((X,Y)\in A) = \iint_A \frac{1}{Aria(S)}\,dx\,dy = \frac{Aria(A)}{Aria(S)}.$$

Exp: (Problema acului lui Buffon)

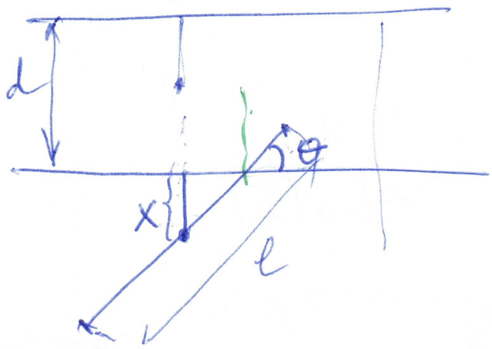
O suprafață este marcată cu linii paralele la distanța d una față de cealaltă. Să presupunem că aruncăm un ac de lungime $l < d$. Care este probabilitatea ca acul să intersecteze una dintre linii?

Pentru a modela poziția acului ne vom întoarce la următorii parametri:



- θ - unghiul ascuțit format de axa acului cu dreptele paralele
- X - distanța de la mijlocul acului la cea mai apropiată dr. paralelă

Presupunem că perechea (X, θ) este uniform repartizată pe mulțimea A

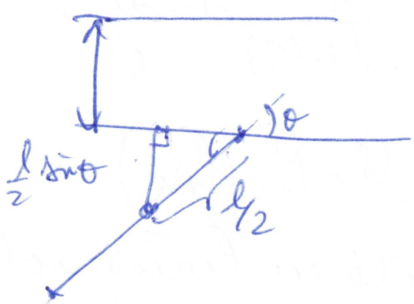


$A = \{(x,\theta) \mid 0 \le x \le \frac{d}{2},\ 0 \le \theta \le \pi/2\}$

$$f_{(X,\theta)}(x,\theta) = \begin{cases} \frac{4}{\pi d}, & 0 \le x \le d/2,\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Acul intersectează una dintre linii dacă și numai dacă

$$X \le \frac{\ell}{2}\sin\theta$$



Vrem să calculăm

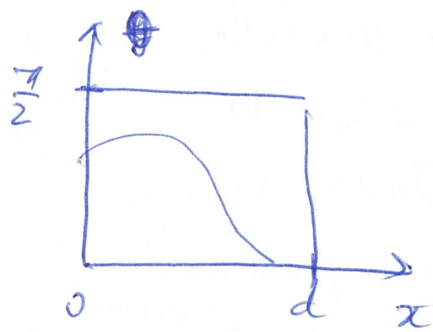
$\mathbb{P}(X \le \frac{\ell}{2}\sin\theta)$

v.a.

$$\mathbb{P}(X \le \sin\theta \cdot \ell/2) = \mathbb{P}((X,\theta) \in B) = \iint_B f_{X,\theta}(x,\theta)\,dx\,d\theta$$

$$B = \{(x,\theta) \in A \mid x \le \frac{\ell}{2}\sin\theta\}$$

$$= \iint_B \frac{4}{\pi d} \mathbb{1}_{[0,\frac{d}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]}(x,\theta)\,dx\,d\theta$$



$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\ell/2 \sin\theta} \frac{4}{\pi d}\,dx\,d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi d}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\ell/2\sin\theta} dx\,d\theta = \frac{4}{\pi d}\int_0^{\pi/2}\frac{\ell}{2}\sin\theta\,d\theta = \frac{2\ell}{\pi d}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \boxed{\frac{2\ell}{\pi d}}$$

Def: Fie X și Y două v.a. pe $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definim fct de rep. a cuplului (X,Y) prin

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

Obs: Densitatea este

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)}$$

Media unei funcții $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Z = g(X,Y)$ este

$$\boxed{\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy}$$

Aplicatul:

① Fie X v.a. care să reprezinte cantitatea de recoltă dintr-o anumită zi

Y v.a. care ne dă starea meteo

$$Y = \begin{cases} a, & \text{bate vântul} \\ b, & \text{nu bate vântul dar plouă} \\ c, & \text{nu bate vântul și nici nu plouă} \end{cases}$$

$A = \{\text{afară bate vântul}\}$ $\qquad \{Y=a\} = A$

$B = \{\text{afară plouă}\}$ $\qquad \{Y=b\} = A^c \cap B$

$\{Y=c\} = A^c \cap B^c$

Din ipoteză avem:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A) = 1/6 \\ \mathbb{P}(B \mid A^c) = 3/10 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B \mid A^c) = (1-\mathbb{P}(A))\,\mathbb{P}(B \mid A^c)$$

$$= 5/6 \times 3/10 = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\,\mathbb{P}(B^c \mid A^c) = \mathbb{P}(A^c)(1-\mathbb{P}(B \mid A^c))$$

$$= 5/6 \times 7/10 = \frac{7}{12}$$

Am obținut,

$$Y \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1/6 & 1/4 & 7/12 \end{pmatrix}$$

Legătura dintre cantitatea de recoltă și starea vremii:

$X = 0$ dacă $Y = a$

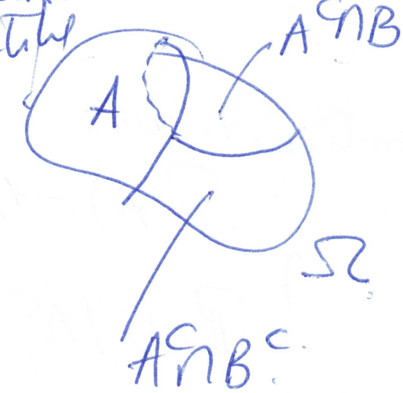
$$X \mid Y=b \sim \mathcal{U}([4,6])$$

$$X \mid Y=c \sim \mathcal{U}([1,9])$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \le x)}_{F_X(x)} \overset{\text{formula prob. totale}}{=} \mathbb{P}(X \le x \mid Y=a)\mathbb{P}(Y=a) + \mathbb{P}(X \le x \mid Y=b)\mathbb{P}(Y=b) + \mathbb{P}(X \le x \mid Y=c)\mathbb{P}(Y=c)$$

În același mod puteam să scriem în raport cu evenimentele

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_2 = A^c \cap B \\ A_3 = A^c \cap B^c \end{cases} \leftarrow \text{formează o partiție}$$



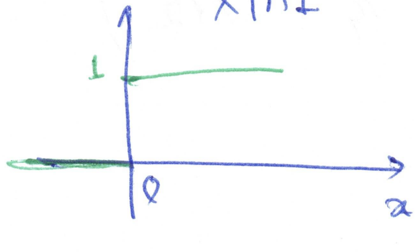
$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X \le x \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(X \le x \mid A_2)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(X \le x \mid A_3)\mathbb{P}(A_3)$$

Știm că

$$X \mid A_1 \equiv 0, \quad X \mid A_2 \sim \mathcal{U}([4,6]), \quad X \mid A_3 \sim \mathcal{U}([1,9])$$

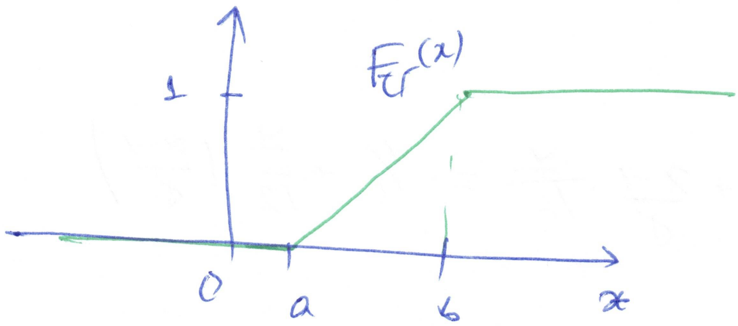
$$\mathbb{P}(X \le x \mid A_1) = \mathbb{P}(X \le x \mid Y=a) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

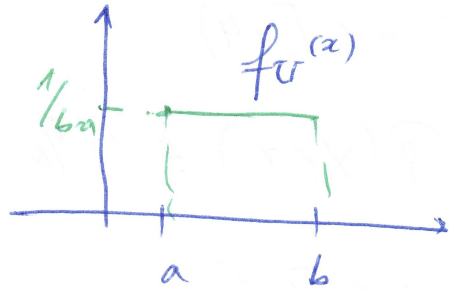
$X \mid A_1$



Dacă $U \sim \mathcal{U}([a,b])$ atunci

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$





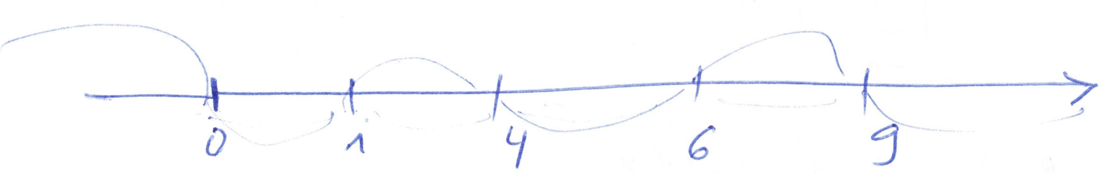
$X | A_2 \sim \mathcal{U}([4,6])$

$$\mathbb{P}(X \le x | A_2) = \begin{cases} 0, & x < 4 \\ \dfrac{x-4}{2}, & 4 \le x \le 6 \\ 1, & x \ge 6 \end{cases}$$

$X | A_3 \sim \mathcal{U}([1,9])$

$$\mathbb{P}(X \le x | A_3) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{x-1}{8}, & 1 \le x \le 9 \\ 1, & x \ge 9 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(A_1) = 1/6, \quad \mathbb{P}(A_2) = 1/4, \quad \mathbb{P}(A_3) = 7/12$$



$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X \le x | A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(X \le x | A_2)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(X \le x | A_3)\mathbb{P}(A_3)$$

$x \in \mathbb{R}$

Dacă $x<0$ atunci $\mathbb{P}(X\leq x)=0$

Dacă $x\in[0,1)$

$$\mathbb{P}(X\leq x) = 1\times 1/6 + 0\times 1/4 + 0\times 7/12 = 1/6$$

Dacă $x\in[1,4)$

$$\mathbb{P}(X\leq x) = 1\times 1/6 + 0\times 1/4 + \frac{x-1}{8}\cdot\frac{7}{12} = 1/6 + \frac{7}{12}\left(\frac{x-1}{8}\right)$$

Dacă $x\in[4,6)$

$$\mathbb{P}(X\leq x) = 1\times 1/6 + \frac{x-4}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{x-1}{8}\times\frac{7}{12} = \frac{1}{6} + \frac{x-4}{8} + \frac{7}{12}\left(\frac{x-1}{8}\right)$$

Dacă $x\in[6,9)$

$$\mathbb{P}(X\leq x) = 1\times 1/6 + 1\times 1/4 + \frac{x-1}{8}\times\frac{7}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{7}{12}\left(\frac{x-1}{8}\right)$$

Dacă $x\geq 9$

$$\mathbb{P}(X\leq x) = 1\times 1/6 + 1\times 1/4 + 1\times\frac{7}{12} = 1$$

$$E[X|A] = \begin{cases} \sum_x x\, p_{X|A}(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|A}(x)\,dx \end{cases}$$

Media

$$\sum_x x\, p_X(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx$$

$$\mathbb{P}(X\in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)\,dx$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X|A_i]\,\mathbb{P}(A_i)$$

În cazul nostru:

$\mathbb{E}[X|A_1]=0$ pt că $X|A_1=0$

$\mathbb{E}[X|A_2]=5$

$\mathbb{E}[X|A_3]=5$

$U\sim\mathcal{U}([a,b])$ at.

$\mathbb{E}(U)=\frac{b+a}{2}$

$$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X|A_1]\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{E}[X|A_2]\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{E}[X|A_3]\mathbb{P}(A_3)$$
$$=0\times 1/6+5\times 1/4+5\times\frac{7}{12}=\frac{50}{12}$$

$Var(X)=?$

$$Var(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2$$

$\mathbb{E}[X^2]=?$ $\quad$ ~~$\mathbb{E}[g(x)]=\mathbb{E}[g$~~

$$\mathbb{E}[g(x)]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[g(x)|A_i]\mathbb{P}(A_i)$$

$g(x)=x^2$ atunci $\mathbb{E}[X^2]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X^2|A_i]\mathbb{P}(A_i)$

$\mathbb{E}[X^2|A_1]=0$ $\quad$ $X|A_2\sim\mathcal{U}([4,6])$

$\mathbb{E}[X^2|A_2]=$

$U\sim\mathcal{U}([a,b])\Rightarrow\mathbb{E}[U^2]=?$ $\quad\frac{a^2+ab+b^2}{3}$

$$f_U(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$$

$$E[U^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_U(x)\,dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b$$

$$= \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$E[X^2 | A_2] = \frac{4^2+4\times 6+6^2}{3}$$

$$E[X^2 | A_3] = \frac{1^2+1\times 9+9^2}{3}$$

$$E[X^2] = 0\times \frac{1}{6} + \frac{76}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{91}{3}\times\frac{7}{12}$$

$$Var(X) = \quad - \left(\frac{50}{12}\right)^2$$

Trasăm fct. de rep. pe $(-1, 10)$

Exp Să se determine prob. ca suma a 2 nr. luate la întâmplare în $[0,1]$ să nu depășească valoarea 1 iar produsul lor să nu depășească $2/9$.

$X, Y \sim U[0,1]$ independenți

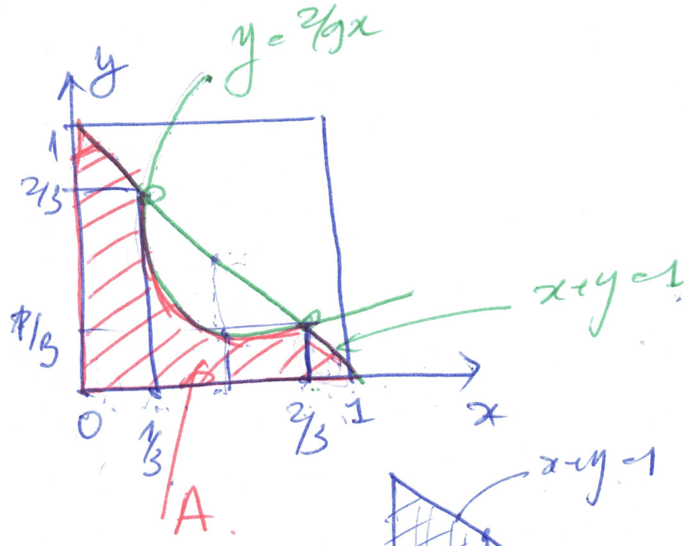
$$\mathbb{P}(\underbrace{X+Y \le 1}_{E}, \underbrace{XY \le 2/9}_{F}) = ?$$

$$= \mathbb{P}((X,Y)\in A) = \iint_A$$

$$A = \{(x,y)\in[0,1]^2 \mid x+y \le 1,\ xy \le 2/9\}$$

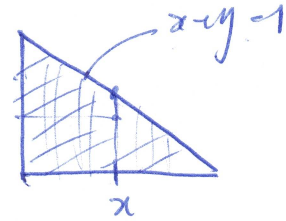
$$\mathbb{P}((X,Y)\in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint_A \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dx\,dy$$

$$\iint_A \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dx\,dy$$



$$A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y \le 1, \\ xy \le 2/9 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy = 2/9 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-y \\ y^2 - y + 2/9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2/3 \\ x_2 = 1/3 \end{cases}$$

$xy \le 2/9 \longrightarrow$ Calculul temă!