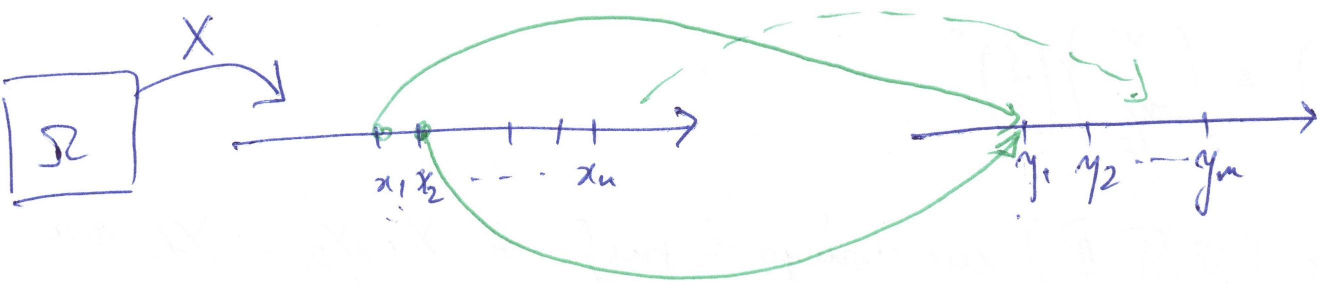
Curs 8

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a. (discretă) iar $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ atunci $g(X):\Omega\to\mathbb{R}$ este o v.a.

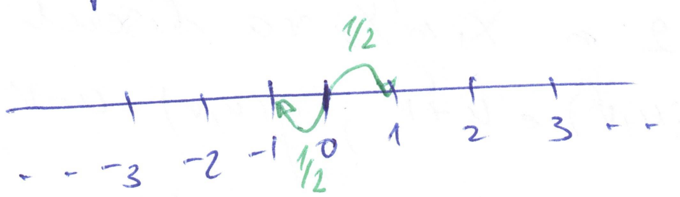
(P) Dacă X este o v.a. $\Omega\to\mathbb{R}$ discretă și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ atunci $Y=g(X)$ este o v.a. $\Omega\to\mathbb{R}$ discretă iar

$$\mathbb{P}(\underset{g(X)}{Y}=y)=\sum_{\{x|g(x)=y\}}\mathbb{P}(X=x)$$



$$\{Y=y_1\}=\{g(X)=y_1\}=\{X=x_1\}\cup\{X=x_2\}$$

Exp: (Mersul la întâmplare)



Y - poziția după n pași

$Y=2X-n$ unde X v.a. care ne dă nr. de pași spre dreapta

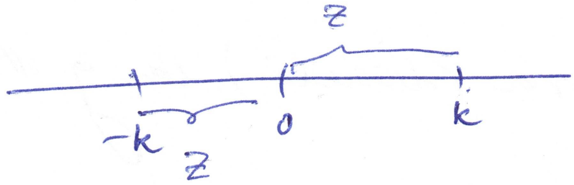
$X \sim B(n, 1/2)$

Ne interesează la distanța față de origine după n pași, n par.

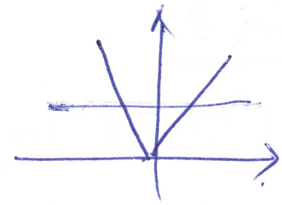
Z - distanța căutată

$Z=|Y|$, $|\cdot|$ nu este bijectivă

Dacă $Y=0 \Rightarrow Z=0$



$g(y) = |y|$



Pentru $k \in \{2, 4, \dots n\}$ avem $\{Z = k\} = \{|Y| = k\}$
$= \{Y = k\} \cup \{Y = -k\}$

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Y = k) + \mathbb{P}(Y = -k)$$
$$= \binom{n}{\frac{n+k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n}{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= 2\binom{n}{\frac{n+k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pt că } \binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}$$

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \binom{n}{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

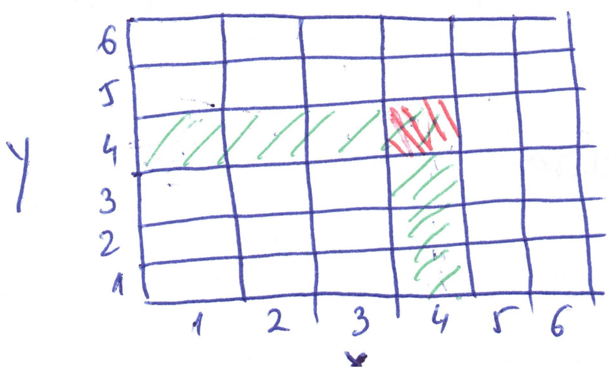
Obs: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de prob. și $X_1, X_2, \dots X_d$ v.a discrete $: \Omega \to \mathbb{R}$, $d \geq 1$ și $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ o funcție.
Atunci $Y = g(X_1, X_2, \dots X_d) : \Omega \to \mathbb{R}$ și este o v.a

Ex: dacă $d = 2$ și X_1 și X_2 v.a discrete atunci putem considera $g(u,v) = u + v$, $g(u,v) = u - v$, $g(u,v) = \max(u,v)$, etc

Ex: Aruncăm cu 2 zaruri și fie X nr. de puncte de pe primul zar și Y nr. de puncte de pe al doilea zar.
$Z = \max(X, Y)$ Vrem funcția de masă a lui Z.

$\mathbb{P}(Z = k) = ?$

$k \in \{1, 2, \dots 6\}$



$$\mathbb{P}(\max(X,Y) = 4) = \mathbb{P}(X = 4, Y = 4) + \mathbb{P}(X = 4, Y \leq 3) + \mathbb{P}(Y = 4, X \leq 3) = 7/36$$

Independența v.a. (discrete)

Reamintim: spunem că două ev. A și B sunt indep dacă

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Intuitiv: două v.a. X și Y sunt independente dacă știind valoarea uneia dintre ele nu avem nicio informație suplimentară despre cealaltă.

Def: Spunem că v.a. X și Y (discrete) sunt independente și notăm $X \perp\!\!\!\perp Y$ dacă evenimentele $\{X=x\}$ și $\{Y=y\}$ sunt independente pentru orice x, y.

Cu alte cuvinte,

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y) \quad \forall x,y$$

(P) v.a. X și Y (discrete) sunt independente ~~atunci~~ dacă și numai dacă

$$\mathbb{P}(X\le x, Y\le y)=\mathbb{P}(X\le x)\mathbb{P}(Y\le y), \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Def: Spunem că v.a. $X_1, X_2, \dots X_n$ sunt independente dacă

$$\mathbb{P}(X_1\le x_1, \dots, X_n\le x_n)=\mathbb{P}(X_1\le x_1)\times\dots\times\mathbb{P}(X_n\le x_n)$$

$$\forall x_1, x_2, \dots x_n\in\mathbb{R}$$

În cazul în care avem o infinitate de v.a. atunci spunem că acestea sunt independente dacă pt orice subfamilie finită v.a. sunt indep.

$(X_i)_{i\in A}$ v.a. indep dacă $\forall J\subset A$, $|J|<\infty$

avem $(X_i)_{i\in J}$ sunt indep în sensul

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in J}\{X_i\le x_i\}\Big)=\prod_{i\in J}\mathbb{P}(X_i\le x_i).$$

Media și momentele v.a discrete

Repetăm un experiment N ori și urmărim rezultatul unei v.a X de interes (e.g. experimentul → aruncarea cu banul de 10 ori și X să fie nr. de succese (H) în cele 10 aruncări)

Înregistrăm: $x_1, x_2, \dots, x_N$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \text{ - media aritmetică}$$

Dacă v.a X are funcția de masă $f(x) = \mathbb{P}(X=x)$ atunci avem că aproximativ $N f(x)$ dintre valori să fie egale cu x

$$m \simeq \frac{1}{N} \sum_{x} x \underbrace{N f(x)}_{\text{nr. de ori în care observ val. } x} = \sum_{x} x f(x) \leftarrow \text{sumă ponderată}$$

Def: Definim media unei v.a discrete X cu funcția de masă $f(x) = \mathbb{P}(X=x)$ prin

$$E[X] = \sum_{x} x f(x)$$

ori de câte ori seria $\sum_{x} |x| f(x) < \infty$

Dacă seria $\sum_{x} |x| f(x)$ este divergentă spunem că media nu este definită.

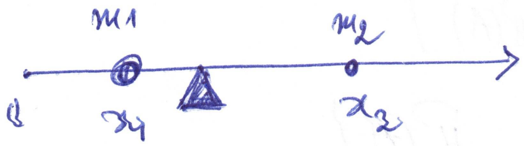
Exp: X este rezultatul aruncării cu zarul, $X \in \{1, 2, \dots, 6\}$

$$E[X] = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$$

Exp: $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$

$$E[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Obs: Media poate fi interpretată ca centrul de greutate (masă) a unui sistem finit de corpuri



$m_1 > m_2$

de la fizică $\bar{x} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

Exp: $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$

atunci: $E[X] = (-2) \times 1/4 + (-1) \times 1/8 + 1 \times 1/4 + 3 \times 1/8 = \frac{6}{8} = 3/4$

Prop: a) Dacă $X = c$ a.s. (aproape sigur $\Rightarrow P(X=c)=1$) atunci:

$E[X] = c$

b) Dacă $X \geq 0$ a.s $\Rightarrow E[X] \geq 0$

b') Dacă $X \geq Y \Rightarrow E[X] \geq E[Y]$

c) Dacă $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

Dem:

c) X v.a discretă, $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$ x_n

Y v.a discretă, $Y \in \{y_1, y_2, \dots\}$ y_m

Considerăm evenimentele $A_i = \{X = x_i\}$, $i \geq 1$

$B_j = \{Y = y_j\}$, $j \geq 1$.

$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$ $\leftarrow$ fct indicatoare a mulțimii A

$X = \sum_i x_i \mathbb{1}_{A_i}$, $Y = \sum_j y_j \mathbb{1}_{B_j}$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \quad \text{atunci} \quad \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{1}_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\mathbb{P}(A) & \mathbb{P}(A) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = 0 \times (1-\mathbb{P}(A)) + 1 \times \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)$$

$$aX+bY = a\sum_i x_i \mathbb{1}_{A_i} + b\sum_j y_j \mathbb{1}_{B_j} = \sum_{i,j}{}' (ax_i+by_j)\mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

$$\mathbb{E}[aX+bY] = \sum_{i,j} (ax_i+by_j)\mathbb{P}(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_i ax_i \sum_j by_j \mathbb{P}(A_i \cap B_j)$$

$$\sum_j \mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}(A_i \cap \underbrace{\bigcup_j B_j}_{\Omega}) = \mathbb{P}(A_i)$$

$$a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] = a\sum_i x_i \mathbb{P}(A_i) + b\sum_j y_j \mathbb{P}(B_j)$$

$$= a\sum_i x_i \sum_j \mathbb{P}(A_i \cap B_j) + b\sum_j y_j \sum_i \mathbb{P}(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i,j} (ax_i+by_j)\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{E}[aX+bY]$$

Obs: În general, $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

(P) Dacă $X \perp Y$ atunci $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$!

(P) Dacă X este v.a discretă și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție atunci $Y = g(X)$ are media

$$\boxed{\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \sum_x{}' g(x)\mathbb{P}(X=x)}$$

Exp: $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/8 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$ $\quad Y = X^2$

$Y \in \{1, 4, 9\}$ $\qquad \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=1)$
$= 1/8 + 1/4$

$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 3/8 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}[Y] = 1 \times 3/8 + 4 \times 1/4 + 9 \times 3/8 = 1 + \frac{15}{4}$

Putem calcula și aplicând formula $E(X^2) = \sum_x x^2 f(x)$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}(X^2) = (-2)^2 \times 1/4 + (-1)^2 \times 1/8 + 1^2 \times 1/4 + 3^2 \cdot 3/8$
$= \frac{4}{4} + 1/8 + 1/4 + 27/8 = 1 + 15/4$

Def: Numim moment de ordin k $(k \geq 1)$ al v.a. X (discretă) $\mathbb{E}[X^k]$ și moment centrat în a de ordin k, $\mathbb{E}[(X-a)^k]$.
Dacă $a = \mathbb{E}[X]$ atunci $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k]$ se numește moment centrat de ordin k.

În particular, pentru $k=2$, momentul centrat de ordin 2 se numește varianță și se notează cu

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2]$$ ← măsură care prezintă gradul de împrăștiere a datelor în jurul mediei

Obs: Dacă X este măsurată în u.m. atunci $Var(X)$ este măsurată în $(u.m.)^2$

Abaterea standard (s.d.) este definită prin

$$SD(X) := \sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Exp:

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$ rep. uniform. pe $\{1,2,3,4,5\}$

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$$

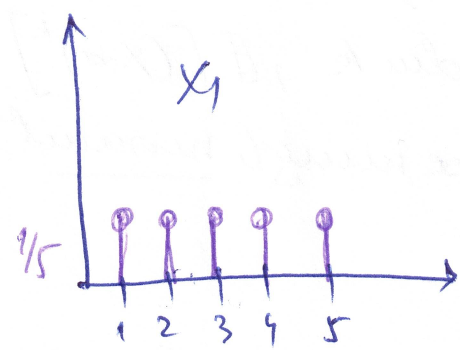
$$X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}[X_2] = 3$$

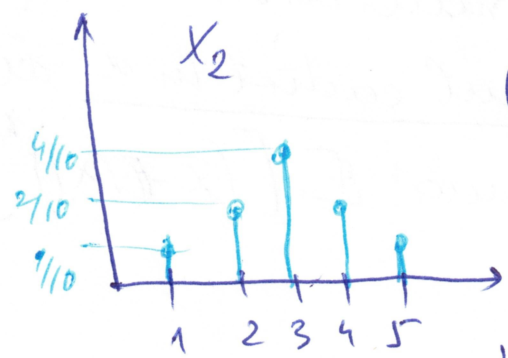
$$X_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}[X_3] = 3$$

$$X_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}[X_4] = 3$$

$$Var(X_1) = \mathbb{E}[(X_1-3)^2] = 2$$

$$(X_1-3)^2 \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

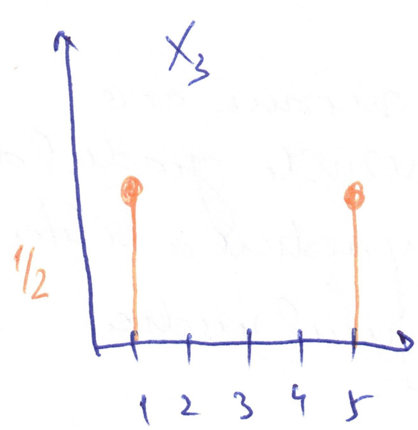


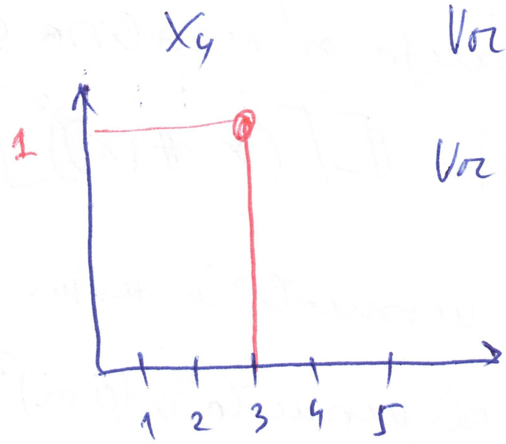


$$Var(X_2) = 1.2$$

$$Var(X_3) = 4$$

$$Var(X_4) = 0$$





Prop: a) $Var(X+a) = Var(X)$!

b) $Var(aX) = a^2 Var(X)$

c) Dacă X și Y sunt indep atunci: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

d) $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$

Dem: a)
$$Var(X+a) = E\left[\left(X+a-E[X+a]\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left(X+a-E[X]-E[a]\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left(X+a-E[X]-a\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left(X-E[X]\right)^2\right]$$

b)
$$Var(aX) = E\left[\left(aX-E[aX]\right)^2\right]$$
$$= a^2 E\left[\left(X-E[X]\right)^2\right] = a^2 Var(X)$$

$$\boxed{Var(aX+b) = a^2 Var(X)} \quad , \forall a,b \in \mathbb{R}$$

d)
$$Var(X) = E\left[\left(X-E[X]\right)^2\right]$$
$$= E\left[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2\right]$$
$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2$$
$$= E[X^2] - E[X]^2$$

c)
$$Var(X+Y) = \cancel{Var(}\, E\left[\left(X+Y-E[X+Y]\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left(X+Y-E[X]-E[Y]\right)^2\right]$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2 + 2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y]) + (Y-\mathbb{E}[Y])^2\right]$$

$$= \mathrm{Var}(X) + 2\,\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right] + \mathrm{Var}(Y)$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow X-\mathbb{E}[X] \perp\!\!\!\perp Y-\mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right] = \underbrace{\mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X]]}_{=0}\ \underbrace{\mathbb{E}[Y-\mathbb{E}[Y]]}_{=0} = 0$$

$$\underline{\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)}$$

Ex1:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Repartiţiile v.a. $5X-2$, X^2, X^3, $X+X^2$ şi să calculăm mediile, varianţele v.a. precum şi prob.

$$\mathbb{P}(X > -1/6) \text{ şi } \mathbb{P}(X < 1/8 \mid X \geq -\tfrac{1}{8})$$

Sol:

$X^3 \in \{-1, 0, 1\}$

$$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[X^3] = (-1)\times 0.3 + 0\times 0.2 + 1\times 0.5 = 0.2$$

$$Var(X^3) = \mathbb{E}[(X^3 - \mathbb{E}[X^3])^2]$$

$$Var(X^3) = \mathbb{E}[(X^3 - 0.2)^2]$$

$Y = X^3$ atunci $Var(Y) = \mathbb{E}[\overbrace{(Y-0.2)^2}^{g(y)=(y-0.2)^2}] = (-1-0.2)^2\times 0.3 + (0-0.2)^2\times 0.2 + (1-0.2)^2 \times 0.5 = 0.76$

$$Y - 0.2 \sim \begin{pmatrix} -1.2 & -0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(Y-0.2)^2 \sim \begin{pmatrix} (-1.2)^2 & (-0.2)^2 & (0.8)^2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.64 & 1.44 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[(Y-0.2)^2] = 0.04\times 0.2 + 0.64\times 0.5 + 1.44\times 0.3 = 0.76$$

$Var(X^3) = \mathbb{E}[X^6] - \mathbb{E}[X^3]^2$ | $Var(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$

$$X^6 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \quad \mathbb{E}[X^6] = 0.8$$

$$\mathbb{E}[X^6] = g(-1)\times 0.3 + g(0)\times 0.2 + g(1)\times 0.5 = 0.8$$

$\Rightarrow Var(X^3) = 0.8 - 0.04 = 0.76$

$\hookrightarrow \boxed{g(x) = x^6}$

$$5X-2 \sim \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}[5X-2] = 5\,\mathbb{E}[X]-2 = 5\times 0.2 - 2 = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} Var(5X-2) = 25\,Var(X) \\ Var(X) = 0.76 \end{array}\right\} \Rightarrow Var(5X-2) = 25\times 0.76 = 19$$

$$Var(aX+b) = a^2\,Var(X)$$

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}[X^2] = 0.8$$

$$Var(X^2) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}[X^2]^2$$

$$X^4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \qquad = 0^2\times 0.2 + 1^2\times 0.8 - 0.8^2 = 0.8\times 0.2$$

$$= 0.16$$

$$X+X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow (X+X^2)^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[X+X^2] = 0.5\times 2 = 1$$

$$Var(X+X^2) = \mathbb{E}[(X+X^2)^2] - \mathbb{E}[X+X^2]^2$$

$$= 2 - 1 = 1.$$

$$\mathbb{P}(X \geq -1/6) = \mathbb{P}(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 0.7.$$

$\to 0$

$$\mathbb{P}(\underbrace{X < 1/8}_{A} \mid \underbrace{X \geq -1/8}_{B}) = \frac{\mathbb{P}(-1/8 \leq X < 1/8)}{\mathbb{P}(X \geq -1/8)} = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7}.$$

$\to 0,1$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$A\cap B = \{X < 1/8\} \cap \{X \geq -1/8\} = \{-1/8 \leq X < 1/8\}$$

$$= \{X = 0\}.$$

Ex2: Aruncăm repetat cu o monedă pt care $\mathbb{P}(H) = p$

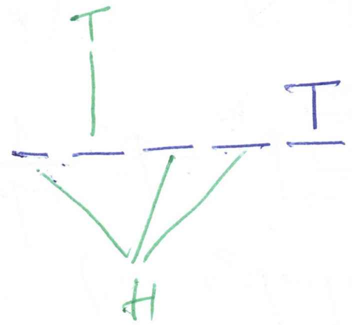
X – nr. de succese înainte de al 2-lea eșec într-o secvență de aruncări repetate

$\{X=3\} \Rightarrow \omega = HTHHT$

Vrem să determinăm $\mathbb{P}(X=k) = ?$ $k \geq 0$

Pp $k=3$

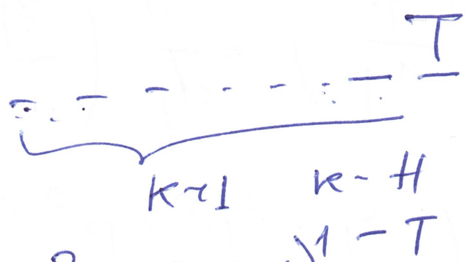
$\binom{4}{1}$



$$\mathbb{P}(HTHHT) = p(1-p)pp(1-p) = p^3(1-p)^2$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \binom{4}{1} p^3(1-p)^2 = 4p^3(1-p)^2$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k+1}{1} p^k(1-p)^2 = (k+1)p^k(1-p)^2, \quad k \geq 0$$



$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \mathbb{P}(X=0) & \mathbb{P}(X=1) & \cdots & \end{pmatrix}$$

Cât este $\mathbb{E}[X] = ?$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k \geq 0}^{\infty} k(k+1)p^k(1-p)^2 = (1-p)^2 \sum_{k \geq 0}^{\infty} k(k+1)p^k$$

$$E(X) = (1-p)^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p^k$$

$$(p^{k-1})' = (k-1)p^k$$

$$(p^{k-1})'' = k(k-1)p^{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p^k = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p^k$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} (p^{k-1})'' = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}\right)''$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} = p^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^k = p^2 \frac{1}{1-p}$$

$$p^2 + p^3 + p^4 + \dots = p^2(1+p+p^2+\dots)$$

$$1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad x \in (0,1)$$

$n \to \infty$ $\quad 1+x+x^2+\dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

$\frac{\partial}{\partial x}$

$$\left(\frac{p^2}{1-p}\right)'' = \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p^2}{1-p}\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{2p(1-p)-(-1)p^2}{(1-p)^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dp}\left(\frac{2p-2p^2+p^2}{(1-p)^2}\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{2p-p^2}{(1-p)^2}\right)$$

$$= \frac{(2-2p)(1-p)^2-(2p-p^2)2(1-p)(-1)}{(1-p)^4}$$

$$= \frac{2(1-p)^2+2(2p-p^2)}{(1-p)^3} \quad // \quad \frac{2p}{1-p}$$

$$E[X] = \cancel{(1-p)^2} \cdot p \cdot \frac{2(1-p)^2+2(2p-p^2)}{(1-p)^{\cancel{3}}} = p\,\frac{2+\cancel{2p^2}-\cancel{4p}+\cancel{4p}-\cancel{2p^2}}{1-p}$$

Ex 3: a) $X \sim \mathcal{B}(p)$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}[X] = p$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

b) $X \sim B(n,p)$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ \dots & \dots & & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \dots & \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \times \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cancel{k} \cdot \frac{n!}{\underset{(k-1)!}{\cancel{k!}}(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$= np \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}}_{= 1 = (p+1-p)^{n-1}} = np$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad X_i \sim \mathcal{B}(p) \text{ indep}$$

(each X_i takes values 0, 1)

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = np$$

$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}(X=k) = n(n-1)p^2 + np$$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $X_i \sim B(p)$ indep

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n) \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

Temă: media și varianța pentru Poisson(λ), Geom(p), NB(r, p)