Breviar pentru o mare parte din cursul de
Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Vom nota cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale şi cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulţimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a,b} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$.

Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată* (i. e. mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine pe ea);
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată;*
- *funcţie izotonă* $\equiv$ *funcţie care păstrează ordinea* $\equiv$ *funcţie crescătoare;*
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană,*

precum şi definiţiile, notaţiile şi rezultatele următoare:

- se foloseşte următoarea convenţie: dacă o mulţime A este suportul unei structuri algebrice $\mathcal{A}$, atunci prin A vom înţelege deopotrivă mulţimea A şi structura algebrică $\mathcal{A}$, în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* ddacă mulţimea ei suport este nevidă, respectiv finită;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $|A|$ cardinalul lui A, iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulţimea părţilor lui A);
- pentru orice mulţimi A şi B, vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecţie cu B, care se transcrie prin: $|A| = |B|$;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulţimi*; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulţimi* (se defineşte şi A^0, care este un singleton, i. e. o mulţime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice, precum şi puterile naturale ale unei structuri algebrice;
- pentru orice mulţime A, o *relaţie binară pe* A este o submulţime a lui A^2;
- dacă A este o mulţime şi $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a \,\rho\, b$;
- pentru orice mulţime A, se notează cu Δ_A relaţia binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ şi numită *diagonala lui* A;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se zice:
  i. *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x \,\rho\, x$;
  ii. *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$, atunci $y \,\rho\, x$;
  iii. *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$ şi $y \,\rho\, x$, atunci $x = y$;
  iv. *asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;

v. *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x \rho y$ şi $y \rho z$, atunci $x \rho z$;

- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se numeşte:

  i. *(relaţie de) preordine* ddacă este reflexivă şi tranzitivă;
  ii. *(relaţie de) echivalenţă* ddacă este o preordine simetrică;
  iii. *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
  iv. *(relaţie de) ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relaţie de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x \rho y$ sau $y \rho x$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se defineşte *inversa lui* ρ ca fiind relaţia binară pe A notată cu ρ^{-1} şi dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A şi orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;

- pentru orice relaţii binare ρ şi σ pe o mulţime A, avem:

  i. $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
  ii. $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
  iii. $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcup\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
  iv. $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecţiei cu inversarea);

- inversa unei relaţii de ordine notate $\leq$ se notează, uzual, cu $\geq$;

- pentru orice mulţime A şi orice relaţii binare ρ şi σ pe A, compunerea dintre relaţiile binare ρ şi σ se notează cu $\rho \circ \sigma$ şi se defineşte astfel: $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists\, b \in A)\, ((a, b) \in \sigma \text{ şi } (b, c) \in \rho)\}$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ şi $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;

- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

  i. ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;
  ii. ρ este simetrică ddacă $\rho = \rho^{-1}$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se numeşte *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ cea mai mică (în sensul incluziunii) relaţie binară reflexivă/simetrică/tranzitivă pe A care include pe ρ;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;

- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

  i. ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;
  ii. ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;
  iii. ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A:

  i. $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;
  ii. $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;
  iii. $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $\mathrm{Eq}(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A, şi, pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, se notează cu $A/_\sim$ *mulţimea factor a lui A prin $\sim$*, i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $\sim$;

- pentru orice mulţime nevidă A, o *partiţie a lui A* este o familie nevidă de părţi nevide ale lui A două câte două disjuncte şi având reuniunea egală cu A; vom nota mulţimea partiţiilor lui A cu $\mathrm{Part}(A)$;

- pentru orice mulţime nevidă A, $\mathrm{Eq}(A) \cong \mathrm{Part}(A)$, întrucât funcţia $\varphi : \mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/_\sim$ pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, este o bijecţie; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice $\pi = (A_i)_{i \in I} \in \mathrm{Part}(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relaţia de echivalenţă pe A care are drept clase mulţimile A_i, cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$;

- pentru orice n natural nenul, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente şi cu L_n mulţimea suport a lui $\mathcal{L}_n$; $\mathcal{L}_n$ este unic modulo un *izomorfism de poseturi*, i. e. modulo o funcţie izotonă bijectivă şi cu inversa izotonă;

- pentru orice poset $(P, \leq)$, notăm cu $<$ *relaţia de ordine strictă asociată lui* $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $< = \leq \setminus \Delta_P = \{(a, b) \mid a, b \in P, a \leq b, a \neq b\}$, şi cu $\prec$ *relaţia de succesiune* asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $\prec = \{(a, b) \mid a, b \in P, a < b, (\nexists\, x \in P)\, a < x < b\}$;

- notăm laticile sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq)$ sau $(L, \vee, \wedge)$, laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;

- legătura dintre operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;

- într–o latice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ şi} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puţin un complement;

- într–o latice mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;

- o latice este nedistributivă ddacă are o sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul;

- orice lanţ este o latice (distributivă), cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc *implicaţia booleană,* $\rightarrow$, şi *echivalenţa booleană,* $\leftrightarrow$, ca operaţii binare pe B, astfel: pentru orice $x, y \in B$:

  i. $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$;
  ii. $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:

  i. $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ şi: $\overline{x} = 1$ ddacă $x = 0$, iar: $\overline{x} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latice mărginită, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia şi nu au alte complemente);

  ii. $\overline{\overline{x}} = x$;

  iii. $x \rightarrow y = 1$ ddacă $x \leq y$;

  iv. $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;

- pentru orice mulţime A, $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ este o algebră Boole, unde am notat, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\overline{X} = A \setminus X$;

- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_2^n$ (puterea a n–a a lanţului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole $\mathcal{L}_2$, numită *algebra Boole standard*; dacă notăm cu $L_2 = \{0, 1\}$ mulţimea suport a lanţului cu 2 elemente, $\mathcal{L}_2$, atunci $L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}\}$ este mulţimea subiacentă a algebrei Boole $\mathcal{L}_2^n$;

- orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$;

- se numeşte *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul $(B, \leq)$, adică un element $a \in B$ cu $0 \prec a$ (i. e. astfel încât $0 < a$ şi nu există niciun $x \in B$ cu proprietatea că $0 < x < a$);

- se numeşte *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o submulţime nevidă F a lui B închisă la conjuncţie şi la majorare, i. e. o mulţime F cu proprietăţile:

  i. $\emptyset \neq F \subseteq B$;

  ii. pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;

  iii. pentru orice $x \in F$ şi orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;

  mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Filt}(\mathcal{B})$;

- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conţine elementul 1;

- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi orice $a \in B$, mulţimea notată $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, numit *filtrul principal generat de a*; notăm mulţimea filtrelor principale ale lui $\mathcal{B}$ cu $\mathrm{PFilt}(\mathcal{B})$;

- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale;

- se numeşte *congruenţă* a unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B compatibilă cu operaţiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, i. e. o relaţie binară $\sim$ pe B cu proprietăţile:

  i. $\sim \in \mathrm{Eq}(B)$;

  ii. pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea cu** $\vee$);

  iii. pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea cu** $\wedge$);

  iv. pentru orice $x, x' \in B$, dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea cu** $\bar{\cdot}$);

  notăm cu $\mathrm{Con}(\mathcal{B})$ mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$;

- referitor la definiţia anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relaţii binare $\sim$ pe B cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$ (i. e. constantele 0 şi 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, proprietăţi care sunt satisfăcute nu numai de către orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B, ci chiar de către orice relaţie reflexivă $\sim$ pe B;

- mulţimea congruenţelor unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este în bijecţie cu mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$;

- notăm cu V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic;

- notăm cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;

- dată o *interpretare* în calculul propoziţional clasic, i. e. o funcţie $h : V \to \mathcal{L}_2$, notăm cu $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene;

- se notează cu $h \vDash \varphi$, respectiv $h \vDash \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ *satisface un enunţ* $\varphi \in E$, respectiv *o mulţime de enunţuri* $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;

- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;

- se notează cu $\vDash \varphi$ faptul că un enunţ φ este *universal adevărat (tautologie, adevăr semantic)* în logica propoziţională clasică (adică orice interpretare satisface pe φ);

- se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;

- se notează cu $\Sigma \vDash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este *deductibil semantic din ipotezele* $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică (adică orice interpretare care satisface pe Σ satisface şi pe φ);

- pentru orice enunţ φ, $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, şi $\vDash \varphi$ ddacă $\emptyset \vDash \varphi$;

- pentru orice mulţime $\Sigma \subseteq E$, notăm cu $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ algebra Lindenbaum–Tarski asociată mulţimii de ipoteze Σ pentru logica propoziţională clasică, despre care ştim că este o algebră Boole; amintim că $\sim_\Sigma = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \mathrm{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi}^\Sigma \in E/_{\sim_\Sigma}$ clasa unui enunţ φ în $E/_{\sim_\Sigma}$;

- cazul particular $\Sigma = \emptyset$ în cele de mai sus: notăm cu $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, care este o algebră Boole; amintim că $\sim = \sim_\emptyset = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \mathrm{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi} \in E/_\sim$ clasa unui enunţ φ în $E/_\sim$;

- pentru orice $\Sigma \subseteq E$ şi orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$ în algebra booleană $E/_{\sim_\Sigma}$ (**lemă** din calculul propoziţional clasic);

- caz particular: pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi} = 1$ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_\sim$;

- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducţiei** pentru calculul propoziţional clasic; abreviată **TD**);

- pentru orice $\varphi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic; abreviată **TCT**); cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numeşte **Teorema de completitudine** a calculului propoziţional clasic (**TC**);

- mulţimea T a teoremelor formale ale logicii propoziţionale clasice e satisfăcută de orice interpretare;

- o mulţime $\Sigma \subseteq E$ e *satisfiabilă* (adică există o interpretare care o satisface) ddacă Σ e *consistentă*, i. e. sistemul deductiv $\Delta(\Sigma)$ generat de Σ, anume $\Delta(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$, nu conţine toate enunţurile, adică $\Delta(\Sigma) \subsetneq E$;

- pentru orice $\varphi \in E$, există o *formă normală conjunctivă (FNC)* (i. e. o conjuncţie de disjuncţii de *literali*, adică elemente din $V \cup \{\neg\, p \mid p \in V\}$) $\gamma \in E$ astfel încât $\varphi \sim \gamma$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\gamma)$ pentru orice interpretare h;

- un enunţ φ în FNC e *nesatisfiabil* (i. e. nu e satisfăcut de nicio interpretare, ceea ce e echivalent cu $\vDash \neg\, \varphi$, aşadar $\vdash \neg\, \varphi$ conform **TC**) ddacă există măcar o derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\square$ din φ;

- un enunţ φ în FNC e satisfiabil ddacă nu există nicio derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\square$ din φ.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova (2003).

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1974, 1975, 1976).

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti (1978).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti (2010).

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti (1969).

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).