Curs 2

Ω - spațiul stărilor

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ - mulț. ev. posibile asociate exp. aleator

a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

} algebră peste Ω

Exp: Aruncăm o monedă până când obț. pt prima oară cap și ne interesăm la nr. de aruncări

$$\Omega = \{\underset{H}{1}, \underset{TH}{2}, \underset{TTH}{3}, \dots\}$$

$A = \{$primul cap după un nr. par de aruncări$\}$

$= \{2, 4, 6, \dots\} = \bigcup_{i \geq 1} \{2i\}$

c') dacă $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Def: O colecție $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ care verifică prop:

a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

c') $(A_n)_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

s.n. σ-algebră peste Ω

σ ↓ numărabilitate

Prop: a) $\Omega \in \mathcal{F}$

b) $A_1, A_2 \dots A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_n \in \mathcal{F}$ și $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

$(\Omega, \mathcal{F})$ s.n. spațiul probabilizabil

Să presupunem că repetăm un experiment (în condiții identice) de N ori și considerăm A un eveniment de interes.

$N(A)$ - nr. de apariții ale A în cele N repetări

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad A = \{2,4,6\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

Notăm cu $\mathbb{P}(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(A)}{N} \in [0,1]$

$A \in \emptyset \Rightarrow N(\emptyset) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

$A = \Omega \Rightarrow N(\Omega) = N \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$

A, B disjuncte $A \cap B = \emptyset$

$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ ($\mathbb{P}$ finit aditivă)

Def: o funcție $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ care satisface prop:

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ și $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normalizare)

b) dacă $A_1, A_2, \dots$ șir de evenimente disjuncte 2 câte 2 ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$) atunci

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad (\sigma\text{-aditivă})$$

s.n. măsură de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$

Def: Tripletul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s.n. câmp de probabilitate

Exp: 1) Aruncarea cu banul: $\Omega = \{H, T\}$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega\}$$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ $\quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0, \ \mathbb{P}(\Omega) = 1$

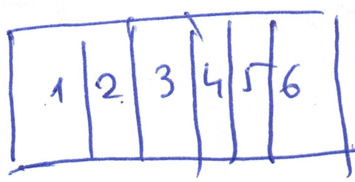
$$\mathbb{P}(H) = p \in [0,1] \Rightarrow \mathbb{P}(T) = 1 - p$$

2) Aruncăm zar $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{0,1\}^{\Omega}$

$A^B = \{\varphi : B \longrightarrow A\}$ $\qquad p_i = \mathbb{P}(\{i\})$, $i \in \{1, \dots 6\}$, $p_i \in [0,1]$

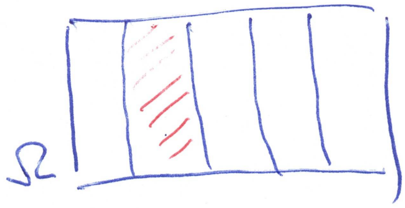
$A \in \mathcal{F}$ $\qquad \mathbb{P}(A) \overset{?}{=} \sum_{i \in A} p_i$ $\qquad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$



$\Omega = \bigcup_{i=1}^{6} \{i\}$

$p_i = 1/6$, $i = \overline{1,6}$ → zar perfect



Prop: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. Atunci

a) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

b) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (monotonie)

c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

d) (Formula lui Poincaré)

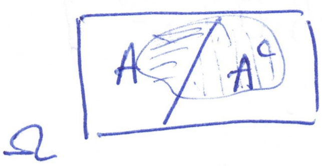
$A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

(Ex)

Idei:

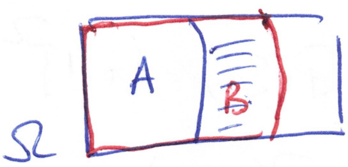
a)



$A \cup A^c = \Omega$ $\qquad$ $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$

$A \cap A^c = \emptyset$

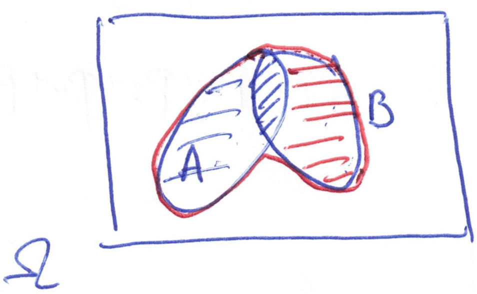
b)



$B = A \cup (B \cap A^c)$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \cap A^c)}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(A)$

c)



$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$

$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ $\qquad$ $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$\Downarrow$

$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

---

d) (Ineg. lui Boole)

$(A_n)_n \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Exp: $\Omega = \{H, T\}^{\mathbb{N}}$ $\qquad$ $\mathbb{P}(\{H\}) = p \in (0,1)$

$A_n = \{$ in primele n aruncări am obținut H $\}$

?

A = { un cap apare mai devreme sau mai târziu }

$\boxed{\mathbb{P}(A) = 1}$

Modelul clasic de probabilitate (modelul lui Laplace)

Fie $N \geq 1$ un nr. natural

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots w_N\}$$

Considerăm $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (-2^N elemente)

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ definită prin $\mathbb{P}(\{w_i\}) = 1/N$ ← echirepartiție

În acest caz, $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{w_i \in A} \mathbb{P}(w_i) = \frac{1}{N} \sum_{\{i \mid w_i \in A\}} 1 = \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$$

Elemente de algebră combinatorială:

1) (Formula sumei) Dacă A și B sunt 2 mulțimi finite, $A \cap B = \emptyset$ at.

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Reformulare: dacă un obiect a poate fi ales în n moduri și un ~~a~~ obiect b poate fi ales în m moduri atunci avem $(n+m)$ moduri de a alege a sau b.

Principiul includerii - excluderii:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Obs: $\mathbb{P}$ echirep. $\Rightarrow |A| = \mathbb{P}(A) \underbrace{|\Omega|}_{\text{const}}$