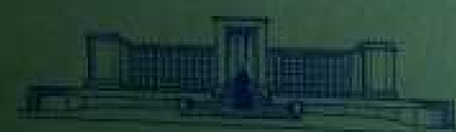
ACADEMIA MILITARA

Lector GEORGE GEORGESCU

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ



BUCUREŞTI — 1978

CAPITOLUL I

Elemente de teoria mulţimilor

In paragraful întîi al acestui capitol prezentăm cîteva noţiuni şi proprietăţi ale calculului propoziţional, absolut necesar pentru demonstrarea propoziţiilor de teoria mulţimilor referitoare la operaţiile finite cu mulţimi. Paragraful al doilea conţine definirea operaţiilor cu mulţimi (reuniune, intersecţie, complementară, etc.) şi proprietăţile lor principale.

Elemente foarte sumare ale calculului predicatelor sînt expuse în § 3, pentru a fi folosite în continuare în stabilirea proprietăţilor operaţiilor infinite cu mulţimi.

Relaţiile şi funcţiile sînt subiectul paragrafului 4, iar produsul cartezian infinit şi proprietatea sa de universalitate sînt prezentate în § 5.

Am considerat necesar să introducem un paragraf privind operaţiile cu cardinali, insistînd asupra mulţimilor numărabile. Ultimul paragraf se ocupă cu relaţiile de ordine şi preordine. Plasarea acestui paragraf în acest capitol este necesară pentru enunţarea axiomei lui Zorn, care este o axiomă a teoriei mulţimilor.

Nu am dezvoltat extensiv acest capitol, prezentînd numai un minim necesar pentru tratarea capitolelor următoare. O serie de proprietăţi au fost date sub formă de exerciţii. Precizăm că punctul de vedere adoptat este acela al „teoriei naive a mulțimilor".

§ 1. CALCULUL PROPOZIȚIONAL

In calculul propozițional se studiază propozițiile[1] din punctul de vedere al adevărului sau falsității lor, neluîndu-se în considerare conținutul lor. Fără îndoială, legile logicii sînt expresii ale unor legi naturale obiective, înct neconsiderarea conținutului este necesară pentru a surprinde relațiile logice ale fenomenelor naturale în toată generalitatea lor.

Vom nota propozițiile prin literele p, q, r,.... . Pentru orice propoziție p, definim valoarea ei logică v(p) prin:

$$v(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă propoziția } p \text{ este adevărată} \\ 0, & \text{dacă propoziția } p \text{ este falsă.} \end{cases}$$

Deci, pentru noi, o propoziție p este perfect determinată dacă îi cunoaștem valoarea logică v(p).

Dacă p,q sînt două propoziții oarecare, atunci conjuncția lor $p \wedge q$ este propoziția „p și q", iar valoarea ei de adevăr este dată de

$$v(p \wedge q) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p,\ q \text{ sînt simultan adevărate} \\ 0, & \text{dacă cel puțin una din propozițiile } p,\ q \text{ este falsă} \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, $v(p \wedge q) = 1$ dacă și numai dacă $v(p) = 1$ și $v(q) = 1$.

Disjuncția $p \vee q$ a propozițiilor p,q este propoziția „p sau q", iar valoarea ei logică este definită prin:

$v(p \vee q) = 1$ dacă și numai dacă $v(p) = 1$ sau $v(q) = 1$.

Negația $\neg p$ a unei propoziții p are următoarea valoare de adevăr:

1). In acest capitol conceptul de „propoziție" este cel uzual.

$$v(\neg p) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } p \text{ este adevărată} \\ 1, & \text{dacă } p \text{ este falsă.} \end{cases}$$

Date două propoziții p,q, implicația $p \Rightarrow q$ este propoziția „p implică q" a cărei valoare de adevăr este

$$v(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } v(p) = 1 \text{ și } v(q) = 0 \\ 1, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Echivalența $p \Leftrightarrow q$ a două propoziții p,q este propoziția „p echivalent cu q" a cărei valoare de adevăr este dată de

$v(p \Leftrightarrow q) = 1$ dacă și numai dacă $v(p) = v(q)$.

Aceste definiții pot fi concentrate în următoarele tabele de adevăr.

v(p)	v(q)	$v(p \wedge q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

conjuncția $\wedge$

v(p)	v(q)	$v(p \vee q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

disjuncția $\vee$

v(p)	v(q)	$v(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implicația $\Rightarrow$

v(p)	v(q)	$v(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

echivalența $\Leftrightarrow$

v(p)	v(¬p)
1	0
0	1

negația

Următoarele propoziții sînt adevărate, pentru orice propoziții p, q, r:

1. $(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$; $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$;
2. $[(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$; $[(p \wedge q) \wedge r] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$;
3. $(p \vee p) \Longleftrightarrow p$; $(p \wedge p) \Longleftrightarrow p$;
4. $[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$; $[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$;
5. $[p \vee (p \wedge q)] \Longleftrightarrow p$; $[p \wedge (p \vee q)] \Longleftrightarrow p$;
6. $p \vee \neg p$; $\neg (p \wedge \neg p)$;
7. $\neg (p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$; $\neg (p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;
8. $(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$; $(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$;
9. $\neg \neg p \Longleftrightarrow p$;
10. $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$
11. $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)]$
12. $\neg (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$

Vom arăta, de exemplu, că prima propoziție de la 7 este adevărată. Calculăm valoarea logică a propoziției $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, pentru orice valoare o sau 1 pe care o pot lua propozițiile componente p,q. . Sistematizăm acest calcul prin următorul tabel:

v(p)	v(q)	v(p∧q)	v(¬(p∧q))	v(¬p)	v(¬q)	v(¬p∨¬q)	v(¬(p∧q)⟺(¬p∨¬q))
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

În toate cazurile am obținut valoarea 1.

Demonstrația se face în aceeași manieră pentru toate proprietățile 1 - 12.

§ 2. MULȚIMI. OPERAȚII CU MULȚIMI

Pentru noi, conceptul de mulțime va avea semnificația uzuală de colecție, grămadă etc. Vom nota mulțimile prin literele A, B, C, X, Y, Z etc. Obiectele din care este formată o mulțime se vor numi elemente. Elementele unei mulțimi vor fi notate a,b,c,x,y, z,etc.

Faptul că elementul x face parte din mulțimea A va fi notat $x \in A$ și se va citi: „x aparține mulțimii A ".

Vom extinde conceptul de mulțime prin considerarea mulțimii vide $\emptyset$, care este „mulțimea fără nici un element".

Mulțimea A este inclusă în mulțimea B, dacă orice element al lui A este și element al lui B. Scriem aceasta prescurtat $A \subset B$. Definiția incluziunii $A \subset B$ poate fi dată și astfel:

$$x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

Reuniunea a două mulțimi A și B este mulțimea $A \cup B$ definită de

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow [x \in A] \vee [x \in B]$$

Un alt mod de-a scrie această definiție este

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

In cele ce urmează vom omite parantezele, scriind astfel

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

<u>Intersecția</u> a două mulțimi A și B este mulțimea $A \cap B$ definită de

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

Această definiție poate fi dată sub forma

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

<u>Diferența</u> a două mulțimi A și B este definită astfel

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

<u>OBSERVAȚIE</u>. Prin $x \notin B$ am notat propoziția $\neg(x \in B)$.

Dacă $A \subset B$ se spune că A este o <u>parte</u> (sau o <u>submulțime</u>) a lui B. Prin convenție, $\emptyset$ este submulțime a oricărei mulțimi. Pentru orice mulțime A, vom nota cu $\mathscr{P}(A)$ mulțimea tuturor părților lui A.

$$\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Fiind dată o mulțime A și o parte a sa B, definim „<u>complementara</u> $C_A(B)$ <u>a lui B în raport cu A</u>" prin

$$C_A(B) = A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

In teoria mulțimilor, concepută astfel, se pot ivi paradoxuri de următorul tip.

<u>Paradoxul lui Russell</u>: Presupunem că $A = \{x \mid x \notin x\}$ este o mulțime. Atunci pentru orice x, vom avea

$$x \in A \Longleftrightarrow x \notin x.$$

In particular, pentru $x = A$ vom avea

$$A \in A \Longleftrightarrow A \notin A,$$

ceea ce este evident contradictoriu.

Din cauza paradoxurilor, sîntem conduși la a considera colecții care nu sînt neapărat mulțimi, numite <u>clase</u>. Spre exemplu, vom vorbi de „clasa tuturor mulțimilor", care nu mai este o mulțime.

<u>PROPOZIȚIA 1</u>: Pentru orice mulțimi A, B, C sînt verificate următoarele relații:

(1) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(4) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

(5) $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$;

(6) $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;

(7) $A = B \Longleftrightarrow [A \subset B] \wedge [B \subset A]$;

(8) $A \subset A$;

(9) $[A \subset B] \wedge [B \subset C] \Longrightarrow A \subset C$;

(10) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$; $A - B \subset A$;

(11) $[A \subset B] \wedge [C \subset D] \Longrightarrow [(A \cup C) \subset (B \cup D)] \wedge [(A \cap C) \subset (B \cap D)]$

(12) $[A \subset B] \Longleftrightarrow [A \cup B = B] \Longleftrightarrow [A \cap B = A]$;

(13) $A \cap B = A - (A - B)$;

(14) $A \cup (B - A) = A \cup B$;

(15) $A - (A \cap B) = A - B$

(16) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

<u>Demonstrație</u>: Vom stabili, de exemplu, prima din relațiile (3):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aplicînd propoziția 4, § 1, rezultă echivalențele:

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\Longleftrightarrow (x \in A) \vee [x \in B \cap C] \\
&\Longleftrightarrow (x \in A) \vee [(x \in B) \wedge (x \in C)] \\
&\Longleftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \in A) \vee (x \in C)] \\
&\Longleftrightarrow [x \in A \cup B] \wedge [x \in A \cup C] \\
&\Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

A rezultat: $x \in A \cup (B \cap C) \Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ceea ce este acelaşi lucru cu egalitatea ce trebuie demonstrată.

In acelaşi mod se demonstrează toate relaţiile enumerate mai sus.

PROPOZITIA 2. Dacă B, C sînt submulţimi ale lui A, atunci avem relaţiile:

(17) $B \subset C \Longrightarrow \complement_A(C) \subset \complement_A(B);$

(18) $\complement_A(B \cup C) = \complement_A(B) \cap \complement_B(C);$ (relaţiile lui de Morgan)

(19) $\complement_A(B \cap C) = \complement_A(B) \cup \complement_A(C);$

(20) $\complement_A(A) = \emptyset \; ; \; \complement_A(\emptyset) = A .$

Lăsăm demonstraţia acestor relaţii pe seama cititorului.

Dacă sînt date mulţimile $A_1, \dots, A_n$, atunci definim intersecţia şi reuniunea lor astfel:

$$A_1 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid (x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \dots \wedge (x \in A_n)\}$$
$$A_1 \cup \dots \cup A_n = \{x \in (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \dots \vee (x \in A_n)\}$$

se mai folosesc şi notaţiile:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n ; \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n .$$

Menţionăm următoarele proprietăţi:

(21) $\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] \cup B = \bigcap_{i=1}^{n} \left[A_i \cup B\right];$

(22) $\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \left[A_i \cap B\right];$

(23) $\complement_A \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcap_{i=1}^{n} \complement_A(A_i) \; ;$

(24) $\complement_A \left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} \complement_A(A_i) \; .$

Fie A, B două mulţimi oarecare. Produsul cartezian al mulţimilor A şi B este mulţimea A x B definită astfel:

$$A \times B = \{(x,y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\} .$$

In general, produsul cartezian a n mulţimi $A_1, \dots, A_n$ este

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \wedge \dots \wedge (a_n \in A_n)\}.$$

Se folosesc notaţiile:

$$\prod_{i=1}^{n} A_n = A_1 \times \dots \times A_n ,$$

$$A^n = A_1 \times \dots \times A_n , \text{ dacă } A_1 = A_2 = \dots = A_n = A.$$

Produsul cartezian are următoarele proprietăţi:

(25) $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B);$

(26) $(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B);$

(27) $(A_1 - A_2) \times B = (A_1 \times B) - (A_2 \times B);$

(28) Dacă A_1, A_2, B_1, B_2 sînt nevide, atunci

$$\left[A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2\right] \Longrightarrow \left[A_1 = A_2\right] \wedge \left[B_1 = B_2\right] ;$$

(29) $A \times B = \emptyset$, dacă $A = \emptyset$ sau $B = \emptyset$.

§ 3. CALCULUL PREDICATELOR

In calculul propoziţional nu ne-am interesat de structura propoziţiilor, care au fost considerate ca nişte întregi, preocupîndu-ne numai de valoarea lor logică.

Considerînd propoziţia „Socrate este muritor", observăm în alcătuirea lui un individ, „Socrate" şi o proprietate „muritor". Propoziţiile „Platon este muritor" şi „Aristotel este muritor" au aceeaşi formă şi diferă doar individul despre care se afirmă că este muritor.

Toate aceste propoziţii au forma „x este muritor". In general, vom considera expresii de forma „x are proprietatea P", pe care le vom nota P(x).

Aceste expresii le vom numi <u>predicate</u> (Hilbert şi Bernays, Grundlagen der Mathematik, vol.I, 1934) sau funcţii <u>propoziţionale</u> (Russel şi Whitehead, Principia Mathematica, vol.I, 1910).

In Principia Mathematica, acest concept este definit astfel: „printr-o funcţie propoziţională înţelegem ceva care conţine o variabilă x şi exprimă o propoziţie de îndată ce lui x i se atribuie o valoare".

Cu alte cuvinte, <u>un predicat P(x) devine o propoziţie P(a) dacă se atribuie lui x o valoare determinată a.</u> Propoziţia P(a) poate fi adevărată sau falsă.

Vom presupune că x ia valori într-o mulţime A de indivizi, astfel încît pentru orice $a \in A$, P(a) este o propoziţie cu sens.

Pentru exemplificare, să luăm predicatul „x este muritor". Propoziţia „Socrate este muritor" are sens, pe cînd „numărul 7 este muritor" este fără sens.

Toate aceste consideraţii au fost luate din „Logica polivalentă", de A. Dumitriu (pag.74 - 75).

Fie P(x) un predicat oarecare. Din predicatul P(x) putem forma următoarele propoziţii:

$(\exists x)\ P(x)$: există x care are proprietatea P.

$(\forall x)\ P(x)$: pentru orice x are loc proprietatea P.

$\forall$ se numeşte <u>cuantificator universal</u>, iar $\exists$ <u>cuantificator existenţial</u>.

Vom spune că propoziţia $(\exists x)\ P(x)$ este <u>adevărată în mulţimea A</u>, dacă există $a \in A$, astfel încît P(a) este o propoziţie adevărată.

Propoziţia $(\forall x)\ P(x)$ este <u>adevărată în mulţimea A</u> dacă pentru orice $a \in A$, propoziţia P(a) este adevărată.

In mod analog, pot fi considerate predicate $P(x_1,\dots,x_n)$ care depind de n variabile. Aceste predicate se numesc <u>predicate n-are</u>; $x_1,\dots,x_n$ se vor numi <u>variabile</u>.

Dacă P(x,y) este un predicat binar, atunci $(\forall x)\ P(x,y)$ şi $(\exists x)\ P(x,y)$ sînt predicate unare în variabila y. Vom spune că în aceste predicate variabila x este <u>legată</u>, iar variabila y este <u>liberă</u>.

Aceste definiţii se pot generaliza pentru predicate în oricîte variabile. In scrierea predicatelor <u>orice variabilă liberă trebuie notată diferit de orice variabilă legată</u>.

De exemplu, nu putem avea $(\exists x)(\forall x)\ P(x,y)$, însă scrierea $(\exists y)(\forall y)\ P(x,y)$ este corectă.

Dacă P, Q sînt predicate, atunci

$$P,\ P \vee Q,\ P \wedge Q,\ P \Rightarrow Q,\ P \Leftrightarrow Q,$$

sînt de asemenea predicate.

Un predicat în care toate variabilele sînt legate se va numi <u>predicat constant sau enunţ.</u>

Pentru orice predicate P(x), Q(x) şi pentru orice mulţime A, în A sînt adevărate următoarele enunţuri:

(a) $\neg(\forall x)\ P(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg P(x)$

(b) $\neg(\exists x)\ P(x) \Leftrightarrow (\forall x) \neg P(x)$

(c) $(\forall x)\ P(x) \Rightarrow (\exists x)\ P(x)$

(d) $[(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))] \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)]$

(e) $[(\exists x)\ P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)] \Rightarrow [(\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x))]$

(f) $\forall x\ [P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)\ Q(x)]$

(g) $\exists x\ [P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \vee (\exists x)\ Q(x)]$

Dacă $P(x,y)$ este un predicat binar, atunci în A sînt adevărate enunţurile:

(h) $(\forall x)(\forall y)\ P(x,y) \Longleftrightarrow (\forall y)(\forall x)\ P(x,y)$

(i) $(\exists x)(\exists y)\ P(x,y) \Longleftrightarrow (\exists y)(\exists x)\ P(x,y)$

(j) $(\exists x)(\forall y)\ P(x,y) \Longrightarrow (\forall y)(\exists x)\ P(x,y)$

§ 4. RELAŢII ŞI FUNCŢII

Fie A o mulţime. O <u>relaţie n-ară</u> pe A este o submulţime R a lui A^n.

<u>Definiţia 1</u>. Fie A,B două mulţimi oarecare. O <u>funcţie definită pe A cu valori în B</u> este o relaţie unară pe $A \times B$ (adică $\Gamma \subset A \times B$) cu proprietatea că pentru orice $x \in A$ există un element $y \in B$ şi numai unul, astfel încît $(x,y) \in \Gamma$.

Vom nota o funcţie $\Gamma \subset A \times B$ prin $f: A \longrightarrow B$, simbolul f avînd semnificaţia următoare: fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $f(x) \in B$ astfel încît $(x,f(x)) \in \Gamma$.

A se numeşte <u>domeniul de definiţie</u> al funcţiei $f: A \longrightarrow B$ şi B se numeşte <u>domeniul valorilor</u> lui f.

Date funcţiile $f: A \longrightarrow B$ şi $g: B \longrightarrow C$, prin <u>compunerea</u> lor se înţelege funcţia $g \circ f: A \longrightarrow C$, definită de $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, pentru orice $x \in A$.

Compunerea funcţiilor este <u>asociativă</u>: pentru funcţiile $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, $h: C \longrightarrow D$, avem relaţia $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Pentru orice mulţime A, funcţia <u>identică</u> $1_A: A \longrightarrow A$ este definită de $1_A(x) = x$, pentru orice $x \in A$.

Vom spune, că diagramele următoare

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

sînt <u>comutative</u>, dacă $g \circ f = h$, respectiv $h \circ f = k \circ g$.

În general, o configuraţie compusă din diagrame de tipul de mai sus este o diagramă comutativă, dacă diagramele componente sînt comutative.

Funcţia $f: A \longrightarrow B$ este <u>injectivă</u> dacă pentru orice $x,y \in A$, avem:

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

Evident, această relaţie este echivalentă cu

$$x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

Funcţia $f: A \longrightarrow B$ este <u>surjectivă</u> dacă pentru orice $y \in B$, există $x \in A$, astfel încît $f(x) = y$.

O funcţie injectivă şi surjectivă se numeşte bijectivă. Pentru aceste trei categorii de funcţii se folosesc şi denumirile: <u>injecţie, surjecţie şi bijecţie</u>.

O funcţie $f: A \longrightarrow B$ este <u>inversabilă</u>, dacă există o funcţie $g: B \longrightarrow A$ cu proprietăţile $g \circ f = 1$ şi $f \circ g = 1$.

<u>Exerciţiu</u>. Dacă $f: A \longrightarrow B$ este inversabilă, să se arate că există o <u>singură</u> funcţie $g: B \longrightarrow A$ cu proprietăţile $g \circ f = 1$ şi $f \circ g = 1$.

Funcţia $g: B \longrightarrow A$ cu aceste proprietăţi se numeşte <u>inversa</u> lui f şi se notează f^{-1}. Deci avem relaţiile

$$f^{-1} \circ f = 1_A \ , \quad f \circ f^{-1} = 1_B \ .$$

<u>PROPOZIŢIA 1</u>. Pentru o funcţie $f: A \longrightarrow B$, sînt echivalente afirmaţiile următoare:

(i) f este bijectivă.

(ii) f este inversabilă.

<u>Demonstraţie</u> (i) $\Longrightarrow$ (ii). Presupunem că f este bijectivă. Fie $y \in B$. Cum f este surjectivă, există $x \in A$, astfel încît $f(x) = y$.

f fiind injectivă, acest element este unic, deci putem defini o funcţie $g: B \longrightarrow A$ prin $g(y) = x$. Rezultă imediat că această funcţie este inversa lui f.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Este un simplu exerciţiu pentru cititor.

Fie $f: A \longrightarrow B$ o funcţie oarecare. Dacă $X \subset A$ şi $Y \subset B$, atunci notăm:

$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$: imaginea directă a lui X prin f.

$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$: imaginea reciprocă a lui Y prin f.

PROPOZIŢIA 2. Fie $f: A \longrightarrow B$ o funcţie oarecare şi $X_1, X_2 \subset A$, $Y_1, Y_2 \subset B$. Atunci avem următoarele relaţii:

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$$
$$f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$$
$$f(X_1) - f(X_2) \subset f(X_1 - X_2)$$
$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$$
$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$$
$$f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$$

Fie I o mulţime nevidă. Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulţime A_i spunem că avem o familie de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$ indexată de mulţimea I.

Reuniunea şi intersecţia familiei $(A_i)_{i \in I}$ sînt definite astfel

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{există } i \in I, \text{ astfel încît } x \in A_i\}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ pentru orice } i \in I\}$$

PROPOZIŢIA 3. Pentru orice familie $(A_i)_{i \in I}$ de mulţimi şi pentru orice mulţime B, avem relaţiile următoare:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B); \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B);$$

PROPOZIŢIA 4. Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de părţi ale unei mulţimi X, atunci

$$C_X\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} C_X(A_i); \quad C_X\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} C_X(A_i)$$

Demonstraţia acestor două propoziţii este simplă. Spre exemplificare, să demonstrăm a doua relaţie a Propoziţiei 4:

$$\begin{aligned} x \in C_X\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &\Longleftrightarrow \neg\left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i\right) \\ &\Longleftrightarrow \neg(\forall i \in I)[x \in A_i] \\ &\Longleftrightarrow (\exists i \in I)[\neg(x \in A_i)] \\ &\Longleftrightarrow (\exists i \in I)[x \in C_X(A_i)] \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} C_X(A_i), \end{aligned}$$

folosind relaţia (a), § 3.

Fie acum R o relaţie binară pe mulţimea A ($R \subset A^2$). R se numeşte relaţie de echivalenţă pe A dacă pentru orice $x, y, z \in A$ sînt satisfăcute proprietăţile:

$(x,x) \in R$	(reflexivitate)
$(x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R$	(simetrie)
$(x,y) \in R,\ (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R$	(tranzitivitate)

Vom folosi următoarea notaţie: $x \sim y \Longleftrightarrow (x,y) \in R$. Proprietăţile de mai sus se transcriu astfel

$$x \sim x$$
$$x \sim y \Longrightarrow y \sim x$$
$$x \sim y,\ y \sim z \Longrightarrow x \sim z.$$

Pentru orice $x \in A$, vom nota $\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$. $\hat{x}$ se numeşte clasa de echivalenţă a lui x. Sînt imediate proprietăţile

$$x \sim y \iff \hat{x} = \hat{y}$$
$$x \not\sim y \implies \hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$$

O familie $(A_i)_{i\in I}$ se submulţimi ale lui A se numeşte *partiţie* dacă:

$$i,\ j \in I,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset;$$
$$\bigcup_{i\in I} A_i = A.$$

Orice partiţie $(A_i)_{i\in I}$ defineşte o relaţie de echivalenţă pe A:

$$x \sim y \iff \text{există } i\in I, \text{ astfel încît } x,\ y \in A_i.$$

Reciproc, orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe A pune în evidenţă o partiţie, dată de mulţimea claselor de echivalenţă.

Se poate arăta că această corespondenţă este bijectivă.

Dată relaţia de echivalenţă $\sim$ pe A, mulţimea claselor de echivalenţă ale elementelor lui A se numeşte *mulţimea cît a lui A prin $\sim$* şi se notează prin $A/\sim$.

Funcţia $p\colon A \to A/\sim$ definită de $p(x) = \hat{x}$, pentru orice $x\in A$, este surjectivă.

§ 5. PRODUS CARTEZIAN AL UNEI FAMILII DE MULŢIMI

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi indexată de mulţimea I. Prin *produsul cartezian* al familiei $(A_i)_{i\in I}$ înţelegem mulţimea următoare

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; f(i)\in A_i, \text{ pentru orice } i\in I \right\}.$$

În general, printr-o familie $(x_i)_{i\in I}$ de elemente ale unei mulţimi X se înţelege că fiecărui $i\in I$ îi este asociat un singur element x_i al lui X. I se numeşte mulţimea de indici a familiei $(x_i)_{i\in I}$.

Orice funcţie $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ este perfect determinată de familia $(f(i))_{i\in I}$, deci definiţia produsului cartezian $\prod_{i\in I} A_i$ mai poate fi dată astfel:

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ (x_i)_{i\in I} \;\middle|\; x_i \in A_i, \text{ pentru orice } i\in I \right\}.$$

Pentru orice $j\in I$, aplicaţia $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$ definită de

$$\pi_j\left((x_i)_{i\in I}\right) = x_j$$

este surjectivă $\{\pi_j \mid j\in I\}$ se numesc *proiecţiile canonice* ale lui $\prod_{i\in I} A_i$.

PROPOZIŢIA 1. Considerăm produsul cartezian $\prod_{i\in I} A_i$ şi proiecţiile canonice π_j, $j\in I$. Atunci pentru orice mulţime B şi pentru orice familie de aplicaţii $\{f_j\colon B \to A_j \mid j\in I\}$, există o funcţie $g\colon B \to \prod_{i\in I} A_i$ şi una singură, astfel încît diagramele următoare sînt comutative.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} A_i \arrow[rr, "\pi_j"] & & A_j \\
& B \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}, \quad j\in I$$

Cu alte cuvinte, pentru orice $j\in I$, avem $\pi_j \circ g = f_j$.

Demonstraţie. (Existenţă). Pentru orice $x\in B$, vom pune prin definiţie

$$g(x) = \left(f_i(x)\right)_{i\in I}.$$

Pentru orice $i\in I$, avem $f_i(x)\in A_i$, deci $\left(f_i(x)\right)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$. Dacă $j\in I$ şi $x\in B$, atunci

$$\pi_j(g(x)) = \pi_j\left(\left(f_i(x)\right)_{i\in I}\right) = f_j(x),$$

ceea ce arată că $\pi_j \circ g = f_j$, pentru orice $j\in I$.

(Unicitate) Fie $h: B \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ astfel încît $\pi_j \circ h = f_j$ pentru orice $j \in I$. Vom arăta că h coincide cu g. Pentru orice $x \in B$, vom avea $h(x) = (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, deci

$$f_j(x) = \pi_j(h(x)) = \pi_j\big((y_i)_{i\in I}\big) = y_j, \text{ pentru orice } j \in I.$$

De aici rezultă

$$g(x) = \big(f_i(x)\big)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} = h(x),$$

deci $g = h$. Propoziția a fost demonstrată.

Corolar. Fie două familii de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ și o familie de funcții $(f_i: A_i \longrightarrow B_i)_{i\in I}$. Atunci există o aplicație

$$g: \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} B_i$$

și una singură astfel încît sînt comutative următoarele diagrame.

$$\begin{tikzcd} \prod A_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_j"'] & \prod B_i \arrow[d, "\pi'_j"] \\ A_j \arrow[r, "f_j"'] & B_j \end{tikzcd}$$

π_j, π'_j fiind proiecțiile canonice.

§ 6. MULTIMI ECHIPOTENTE. CARDINALI

Pentru orice mulțime finită, numărul său de elemente este o noțiune bine precizată. Numărul natural n este reprezentarea abstractă a tuturor mulțimilor „cu n elemente". Conceptul de număr natural permite compararea mulțimilor finite.

Este evident că a spune că două mulțimi finite au același număr de elemente este echivalent cu faptul că ele se pot pune în

corespondență bijectivă.

Această observație sugerează introducerea unui concept care să reprezinte „numărul de elemente ale unei mulțimi oarecare".

Vom spune că două mulțimi A și B sînt echipotente sau că au aceeași putere dacă există o bijecție $f: A \longrightarrow B$. Se scrie acest lucru simbolic: $A \sim B$.

PROPOZITIA 1. Echipotența este o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Demonstrație. Aplicația identică $1_A: A \longrightarrow A$ este bijectivă, deci $A \sim A$. Dacă $A \sim B$, atunci există o bijecție $f: A \longrightarrow B$. Inversa $f^{-1}: B \longrightarrow A$ este bijectivă, deci $B \sim A$. Presupunînd că $A \sim B$ și $B \sim C$, rezultă bijecțiile $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$. Funcția compusă $g \circ f: A \longrightarrow B$ este bijectivă, deci $A \sim C$.

OBSERVATIE. Echipotența este o „relație de echivalență" definită pe clasa tuturor mulțimilor.

Pentru orice mulțime A, vom nota cu $\bar{\bar{A}}$ sau card A clasa de echivalență a mulțimilor echipotente cu A:

$$\text{card } A = \bar{\bar{A}} = \{B \mid \text{există } f: A \longrightarrow B \text{ bijectivă}\}.$$

Vom spune că $\bar{\bar{A}}$ este cardinalul mulțimii A.

OBSERVATIE. In cazul cînd A este o mulțime finită, $\bar{\bar{A}}$ poate fi asimilat cu numărul n al elementelor lui A, în sensul că n reprezintă toate mulțimile din $\bar{\bar{A}}$, identificate din punctul de vedere al „numărului lor de elemente".

Mulțimi numărabile. O mulțime A este numărabilă dacă este echipotentă cu mulțimea N a numerelor naturale. Vom nota cardinalul lui N cu $\aleph_0$ (aleph zero).

Cu alte cuvinte, o mulțime este numărabilă dacă elementele sale se pot așeza sub forma unui șir.

Este evident că mulţimea Z a numerelor întregi este numărabilă.

PROPOZIŢIA 2. Orice reuniune numărabilă de mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.

Demonstraţie. Fie $(A_n)_{n\in N}$ o familie numărabilă de mulţimi numărabile.

Dacă $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm}, \ldots\}$ pentru orice $n\in N$, atunci vom scrie elementele reuniunii $\bigcup_{n\in N} A_n$ sub forma unui tablou:

$$\begin{array}{llllll}
n=1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\ a_{1m} & \cdots \\
n=2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\ a_{2m} & \cdots \\
n=3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\ a_{3m} & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n=n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\ a_{nm} & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Elementele acestui tablou pot fi puse sub forma unui şir conform ordinii indicată prin săgeţi:

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{13},\ a_{22},\ a_{31}, \ldots$$

Corolar 1: Orice reuniune finită de mulţimi numărabile este numărabilă.

Corolar 2: Produsul cartezian a două mulţimi numărabile A,B este o mulţime numărabilă.

Demonstraţie: $A \times B = \bigcup_{x\in A} (\{x\} \times B)$.

Corolar 3: Produsul cartezian a n mulţimi numărabile $A_1, \ldots, A_n$ este o mulţime numărabilă.

Demonstraţie: Prin inducţie, aplicînd corolarul 2.

Corolar 4: Mulţimea Q a numerelor raţionale este numărabilă.

Demonstraţie: Dacă $A_n = \left\{\frac{m}{n} : m\in Z\right\}$, pentru orice $n = 1,2,\ldots$, atunci

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Corolar 5. Mulţimea şirurilor finite ai căror termeni aparţin unei mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă.

Demonstraţie: Fie A o mulţime numărabilă şi A_m mulţimea şirurilor cu m elemente din A. Atunci mulţimea menţionată în corolarul 5 este $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup \ldots$

Corolar 6. Mulţimea $Q[X]$ a polinoamelor cu coeficienţi raţionali este numărabilă.

Demonstraţie. Orice polinom $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ este definit de şirul finit $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, deci mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în Q poate fi pusă în corespondenţă bijectivă cu mulţimea şirurilor finite de numere raţionale.

Corolar 7. Mulţimea numerelor algebrice este numărabilă.

Demonstraţie. Reamintim că un număr algebric este o rădăcină a unui polinom din $Q[X]$. Conform corolarului 6, $Q[X]$ este o mulţime numărabilă:

$$Q[X] = \{P_1(X), P_2(X), \ldots, P_m(X), \ldots\}.$$

Pentru orice $m = 1, 2, \ldots$, mulţimea A_m a rădăcinilor lui $P_m(X)$ este finită. Observînd că mulţimea numerelor algebrice este $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, demonstraţia este încheiată.

Propoziţia 3. Mulţimea (0,1) nu este numărabilă.

Demonstraţie. Presupunem că intervalul (0,1) este numărabil, deci putem aranja elementele sale într-un şir:

$$\begin{array}{l}
a_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n} \cdots \\
a_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n = 0,\ a_{n1}\ a_{n2} \cdots a_{nn} \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Notînd

$$e_n = \begin{cases} o, & \text{dacă } a_{nn} \neq o \\ 1, & \text{dacă } a_{nn} = o, \end{cases}$$

se obține un număr o, $e_1 e_2, \dots, e_n \dots$ din intervalul (o,1) care este diferit de toți termenii șirului considerat. Contradicția este evidentă.

Corolar 1. Mulțimea R a numerelor reale este nenumărabilă.

OBSERVAȚIE. Din faptul că R este nenumărabilă, iar mulțimea numerelor algebrice este numărabilă, rezultă existența numerelor transcendente (numere reale care nu sînt algebrice).

Operații cu cardinali

Fie A, B două mulțimi oarecare. Atunci putem găsi două mulțimi A_1, B_1 astfel încît $A \sim A_1$, $B \sim B_1$ și $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. Intr-adevăr, luînd două elemente $a \neq b$ și punînd $A_1 = \{a\} \times A$, $B_1 = \{b\} \times B$, vom avea:

$A \sim A_1$: prin funcția bijectivă $f: A \longrightarrow A_1$ dată de $f(x)=(a,x)$, pentru orice $x \in A$;

$B \sim B_1$: prin funcția bijectivă $g: B \longrightarrow B_1$ dată de $g(y)=(b,y)$, pentru orice $y \in B$;

$A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

Prin definiție, suma cardinalilor $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$ este

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A_1 \cup B_1}}$$

Este necesar să arătăm că această definiție nu depinde de reprezentanți, adică:

$$\left.\begin{array}{l} A \sim A_1,\ B \sim B_1,\ A_1 \cap B_1 = \emptyset \\ A \sim A_2,\ B \sim B_2,\ A_2 \cap B_2 = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2.$$

Conform ipotezei din stînga implicației, există bijecțiile:

$$f_1: A \longrightarrow A_1,\quad g_1: B \longrightarrow B_1;$$
$$f_2: A \longrightarrow A_2,\quad g_2: B \longrightarrow B_2.$$

Notînd $f = f_2 \circ f_1^{-1}: A_1 \longrightarrow A_2$, $g: g_2 \circ g_1^{-1}: B_1 \longrightarrow B_2$, rezultă că f,g sînt bijective. Considerînd funcția $h: A_1 \cup B_1 \longrightarrow A_2 \cup B_2$ definită astfel

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A_1 \\ g(x), & \text{dacă } x \in B_1, \end{cases}$$

și ținînd seama $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_2 \cap B_2 = \emptyset$, se poate arăta ușor că h este o bijectivă. Rezultă $A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2$.

Pentru orice două mulțimi A, B, definim produsul cardinalilor $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$ prin

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$$

Se poate arăta (exercițiu) că definiția nu depinde de alegerea reprezentanților A, B ai claselor $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$, adică

$$A \sim A',\ B \sim B' \Longrightarrow A \times B \sim A' \times B'.$$

Tot pe seama cititorului lăsăm să arate și faptul că în cazul mulțimilor finite, cele două definiții corespund adunării și înmulțirii a două numere naturale.

Aceste definiții se generalizează pentru o familie oarecare de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$.

Se poate găsi la fel ca mai sus, o familie $(A_i')_{i \in I}$ de mulțimi cu proprietățile:

$$A_i \sim A_i', \quad \text{pentru orice } i \in I.$$

$$A_i' \cap A_j' = \emptyset, \text{ pentru orice } i, j \in I,\ i \neq j.$$

Atunci suma cardinalilor $(\overline{\overline{A_i}})_{i \in I}$ este

$$\sum_{i \in I} \overline{\overline{A_i}} = \overline{\overline{\bigcup_{i \in I} A_i'}}.$$

<u>Produsul</u> familiei $(\overline{\overline{A}}_i)_{i \in I}$ de cardinali va fi:

$$\prod_{i \in I} \overline{\overline{A}}_i = \overline{\overline{\prod_{i \in I} A_i}}$$

Fie acum A, B două mulţimi oarecare. Dacă notăm A^B mulţimea funcţiilor $f: B \longrightarrow A$, atunci cardinalul $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}}$ este, prin definiţie, $\overline{\overline{A^B}}$.

Menţionăm următoarele proprietăţi ale operaţiilor cu cardinali:

$$(1) \quad \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{A}}\ ; \quad (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}) + \overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}} + (\overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}})$$

$$(2) \quad \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}\ ; \quad \overline{\overline{A}} \,.\, \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}\ ; \quad \overline{\overline{A}} + n = \overline{\overline{A}}, \quad \overline{\overline{A}} \,.\, n = \overline{\overline{A}},$$

unde n este un număr natural oarecare.

$$(3) \quad \overline{\overline{A}} \,.\, (\overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}}) = \overline{\overline{A}} \,.\, \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{A}} \,.\, \overline{\overline{C}}$$

$$(4) \quad \overline{\overline{A}} \,.\, n = \underbrace{\overline{\overline{A}} + \cdots + \overline{\overline{A}}}_{\text{de n- ori}},$$

unde n este un număr de natural oarecare.

$$(5) \quad \overline{\overline{A}}^{\,\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}}} = \overline{\overline{A}}^{\,\overline{\overline{B}}} \,.\, \overline{\overline{A}}^{\,\overline{\overline{C}}}$$

$$(6) \quad (\overline{\overline{A}} \,.\, \overline{\overline{B}})^{\overline{\overline{C}}} = \overline{\overline{A}}^{\,\overline{\overline{C}}} \,.\, \overline{\overline{B}}^{\,\overline{\overline{C}}}\,.$$

$$(7) \quad (\overline{\overline{A}}^{\,\overline{\overline{B}}})^{\overline{\overline{C}}} = \overline{\overline{A}}^{\,\overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}}}$$

$$(8) \quad \overline{\overline{A}}^{\,n} = \overline{\overline{A}} \,.\, \underbrace{\overline{\overline{A}} \,.\, \cdots \,.\, \overline{\overline{A}}}_{\text{de n-ori}}, \text{ unde } n \in N.$$

Demonstrarea acestor relaţii este un exerciţiu util pentru cititor.

<u>PROPOZITIA 4</u>. Pentru orice mulţime A, $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$.

<u>Demonstraţie</u>. Considerînd o mulţime oarecare cu două elemente, fie ea $\{o,1\}$, va trebui să arătăm că $\mathcal{P}(A) \sim \{o,1\}^A$.

Pentru orice $B \subset A$, definim <u>funcţia sa caracteristică</u> $\chi_B : A \longrightarrow \{o,1\}$ prin

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in B \\ o, & \text{dacă } x \notin B. \end{cases}$$

Considerăm funcţia $\Phi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{o,1\}^A$ dată de

$$\Phi(B) = \chi_B, \text{ pentru orice } B \in \mathcal{P}(A).$$

Definim, acum o altă funcţie $\psi : \{o,1\}^A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ prin

$$\psi(f) = f^{-1}(\{1\}) = \{x \in A \mid f(x) = 1\},$$

pentru orice $f \in \{o,1\}^A$.

Se poate arăta că

$$\psi \circ \Phi = 1_{\mathcal{P}(A)} ; \Phi \circ \psi = 1_{\{o,1\}^A}.$$

deci $\mathcal{P}(A) \sim \{o,1\}^A$.

<u>PROPOZITIA 5</u>. (Cantor). Pentru orice mulţime A, avem $\overline{\overline{A}} \neq 2^{\overline{\overline{A}}}$

<u>Demonstraţie</u>: Vom arăta că orice funcţie $F : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ nu este surjectivă, de unde va rezulta că $A \not\sim \mathcal{P}(A)$. Presupunem că F este surjectivă.

Fie submulţimea lui A definită astfel

$$Z = \{x \in A \mid x \notin F(x)\}.$$

Cum am presupus că F este surjectivă, va exista $x_o \in A$, astfel încît $F(x_o) = Z$. Din definiţia lui Z rezultă echivalenţa

$$x \in Z \iff x \notin F(x),$$

deci

$$x \in F(x_o) \iff x \notin F(x).$$

Pentru $x = x_o$, obţinem contradicţia

$$x_o \in F(x_o) \iff x_o \notin F(x_o).$$

Cu aceasta, demonstrația s-a terminat.

Pentru orice doi cardinali $\overline{\overline{A}}$ și $\overline{\overline{B}}$, vom spune că $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ dacă există o injecție $f: A \longrightarrow B$.

Definiția nu depinde de reprezentanți: dacă $A \sim A'$, $B \sim B'$ și $f: A \longrightarrow B$ este o injecție, atunci putem defini o injecție $g: A' \longrightarrow B'$.

Cum $A \sim A'$, $B \sim B'$ există bijecțiile $h_1: A \longrightarrow A'$, $h_2: B \longrightarrow B'$. Definim pe g prin

$$g = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$$

Dacă $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ și $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$, atunci vom scrie $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

Pentru $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$ finiți, relația $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ revine la relația obișnuită de ordine între două numere naturale.

Relația $\leqslant$ are proprietățile următoare

(9) $A \subset B \Longrightarrow \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$;

(10) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{A}}$;

(11) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}},\ \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{C}} \Longrightarrow \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{C}}$;

(12) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}} \Longrightarrow \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{C}} \leqslant \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}}$ și $\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{C}} \leqslant \overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}}$

(13) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}} \Longrightarrow \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{C}}} \leqslant \overline{\overline{B}}^{\overline{\overline{C}}}$ și $\overline{\overline{C}}^{\overline{\overline{A}}} \leqslant \overline{\overline{C}}^{\overline{\overline{B}}}$

OBSERVAȚIE

(i) Din Corolarul Propoziției 3, rezultă $\aleph_0 = \overline{\overline{N}} < \overline{\overline{R}}$.

(ii) Teorema lui Cantor (Propoziția 5) se poate formula astfel:

$$\overline{\overline{A}} < 2^{\overline{\overline{A}}},\ \text{pentru orice mulțime } A.$$

Teorema Cantor - Bernstein : $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}},\ \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}} \Longrightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

Pentru demonstrație, se poate consulta K. Kuratowski, Introducere în teoria mulțimilor și în topologie, Ed. Tehnică,1969,pag. 79-80.

§ 7. RELAȚII DE ORDINE

O relație binară R pe o mulțime nevidă A se numește relație de preordine dacă pentru orice $x, y, z \in A$ avem:

(P_1) $x R x$ (reflexivitate)

(P_2) $x R y,\ y R z \Longrightarrow x R z$ (tranzitivitate)

Mulțimea A înzestrată cu o relație de preordine R se numește mulțime preordonată.

Relația de preordine R se numește relație de ordine dacă verifică relația

(P_3) $x R y;\ y R x \Longrightarrow x = y$ (antisimetrie)

pentru orice $x, y \in A$.

O relație de ordine se notează în mod uzual cu $\leqslant$, deci cele trei relații ce o definesc se transcriu astfel:

$x \leqslant x$

$x \leqslant y,\ y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$

$x \leqslant y,\ y \leqslant x \Longrightarrow x = y$

O mulțime ordonată este o mulțime A înzestrată cu o relație de ordine $\leqslant$. Vom nota: $x < y \Longleftrightarrow x \leqslant y$ și $x \neq y$.

Exemplu de relație de preordine care nu este relație de ordine. Considerăm o mulțime $A = \{x, y, z\}$ în care relația R este definită prin graful următor:

$(x \neq y \neq z)$.

și anume:

$x R x,\quad y R y,\quad z R z$

$x R y,\quad y R z,\quad z R y,\ x R z.$

Se observă că R este reflexivă și tranzitivă, dar nu este antisimetrică:

$$y R z, \quad z R y \not\Rightarrow y = z$$

O mulţime parţial ordonată $(A, \leq)$ se numeşte <u>mulţime total ordonată</u> dacă

(P_4) pentru orice $x, y \in A$, avem $x R y$ sau $y R x$.

<u>Exemplu de mulţime parţial ordonată care nu este total ordonată.</u> In mulţimea Z a numerelor întregi considerăm relaţia:

$$x R y \Longleftrightarrow x \text{ divide pe } y$$

Este evident că R este o relaţie de ordine care nu este totală.

Mulţimea R a numerelor reale înzestrată cu relaţia de ordine naturală este o mulţime total ordonată.

Dacă (A, R) şi (A', R') sînt două mulţimi preordonate, atunci o funcţie $f: A \longrightarrow A'$ se numeşte <u>izotonă</u> dacă pentru orice $x, y \in A$ avem:

$$x R y \Longrightarrow f(x) R' f(y).$$

In cazul cînd $(A, \leq)$, $(A', \leq)$ sînt două mulţimi parţial ordonate, $f: A \longrightarrow A'$ este izotonă dacă

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

<u>PROPOZIŢIA 1</u>. Fie (A, R) o mulţime parţial ordonată. Atunci există o mulţime parţial ordonată $(\tilde{A}, \leq)$ şi o funcţie izotonă $\lambda: A \longrightarrow \tilde{A}$ cu proprietatea următoare:

(*) Pentru orice mulţime parţial ordonată $(B, \leq)$ şi pentru orice funcţie izotonă $f: A \longrightarrow B$ există o <u>unică</u> funcţie izotonă $\bar{f}: \tilde{A} \longrightarrow B$, astfel încît următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "f"'] & & \tilde{A} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

<u>Demonstraţie</u>. In A introducem următoarea relaţie:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x R y \text{ şi } y R x.$$

Se deduce imediat că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe A. Considerăm mulţimea cît $\tilde{A} = A/\sim$ şi $\lambda: A \longrightarrow \tilde{A}$ surjecţia canonică:

$$\lambda(x) = \hat{x}, \text{ pentru orice } x \in A.$$

In A definim relaţia:

$$\hat{x} \leq \hat{y} \Longleftrightarrow x R y.$$

Definiţia lui $\leq$ nu depinde de reprezentanţi: dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci

$$x R y \Longleftrightarrow x' R y'$$

Intr-adevăr, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x R x'$, $x' R x$, $y R y'$ şi $y' R y$, deci

$$x R y \Longrightarrow x' R y \qquad (\text{deoarece } x' R x)$$

$$\Longrightarrow x' R y' \qquad (\text{deoarece } y R y')$$

Implicaţia cealaltă rezultă identic.

Relaţia $\leq$ este o relaţie de ordine pe A.

$$\hat{x} \leq \hat{x} \qquad (\text{deoarece } x R x)$$

$$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x R y,\ y R z \Longrightarrow x R z \Longrightarrow \hat{x} \leq \hat{z}.$$

$$x \leq y,\ y \leq x \Longrightarrow x R y,\ y R x \Longrightarrow x \sim y \Longrightarrow \hat{x} = \hat{y}.$$

Aplicaţia λ este izotonă: $x R y \Longrightarrow \hat{x} \leq \hat{y} \Longrightarrow \lambda(x) \leq \lambda(y)$.

Definim aplicaţia $\bar{f}$ în modul următor:

$$\bar{f}(\hat{x}) = f(x), \text{ pentru orice } \hat{x} \in \tilde{A}.$$

Definiţia lui $\bar{f}$ nu depinde de reprezentanţi.

$$x \sim y \Longrightarrow x R y,\ y R x \Longrightarrow f(x) \leq f(y),\ f(y) \leq f(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) = f(y).$$

deoarece, în B, $\leq$ este o relaţie de ordine parţială (deci antisimetrică).

$\bar{f}$ este o aplicaţie izotonă:

$$y R z,\ z R y \not\Rightarrow y = z$$

O mulţime parţial ordonată $(A, \leqslant)$ se numeşte <u>mulţime total ordonată</u> dacă

(P_4) pentru orice $x, y \in A$, avem $x R y$ sau $y R x$.

<u>Exemplu de mulţime parţial ordonată care nu este total ordonată.</u> In mulţimea Z a numerelor întregi considerăm relaţia:

$$x R y \Longleftrightarrow x \text{ divide pe } y$$

Este evident că R este o relaţie de ordine care nu este totală.

Mulţimea R a numerelor reale înzestrată cu relaţia de ordine naturală este o mulţime total ordonată.

Dacă (A, R) şi (A', R') sînt două mulţimi preordonate, atunci o funcţie $f: A \longrightarrow A'$ se numeşte <u>izotonă</u> dacă pentru orice $x, y \in A$ avem:

$$x R y \Longrightarrow f(x) R' f(y).$$

In cazul cînd $(A, \leqslant)$, $(A', \leqslant)$ sînt două mulţimi parţial ordonate, $f: A \longrightarrow A'$ este izotonă dacă

$$x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

<u>PROPOZIŢIA 1.</u> Fie (A, R) o mulţime parţial ordonată. Atunci există o mulţime parţial ordonată $(\tilde{A}, \leqslant)$ şi o funcţie izotonă $\lambda: A \longrightarrow \tilde{A}$ cu proprietatea următoare:

(*) Pentru orice mulţime parţial ordonată $(B, \leqslant)$ şi pentru orice funcţie izotonă $f: A \longrightarrow B$ există o <u>unică</u> funcţie izotonă $\bar{f}: \tilde{A} \longrightarrow B$, astfel încît următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "f"'] & & \tilde{A} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

<u>Demonstraţie</u>. In A introducem următoarea relaţie:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x R y \text{ şi } y R x.$$

Se deduce imediat că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe A. Considerăm mulţimea cît $\tilde{A} = A/\sim$ şi $\lambda: A \longrightarrow \tilde{A}$ surjecţia canonică:

$$\lambda(x) = \hat{x}, \text{ pentru orice } x \in A.$$

In A definim relaţia:

$$\hat{x} \leqslant \hat{y} \Longleftrightarrow x R y.$$

Definiţia lui $\leqslant$ nu depinde de reprezentanţi: dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci

$$x R y \Longleftrightarrow x' R y'$$

Intr-adevăr, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x R x'$, $x' R x$, $y R y'$ şi $y' R y$, deci

$$x R y \Longrightarrow x' R y \qquad (\text{deoarece } x' R x)$$
$$\Longrightarrow x' R y' \qquad (\text{deoarece } y R y')$$

Implicaţia cealaltă rezultă identic.

Relaţia $\leqslant$ este o relaţie de ordine pe A.

$$\hat{x} \leqslant \hat{x} \qquad (\text{deoarece } x R x)$$

$$x \leqslant y,\ y \leqslant z \Longrightarrow x R y,\ y R z \Longrightarrow x R z \Longrightarrow \hat{x} \leqslant \hat{z}.$$

$$x \leqslant y,\ y \leqslant x \Longrightarrow x R y,\ y R x \Longrightarrow x \sim y \Longrightarrow \hat{x} = \hat{y}.$$

Aplicaţia λ este izotonă: $x R y \Longrightarrow \hat{x} \leqslant \hat{y} \Longrightarrow \lambda(x) \leqslant \lambda(y)$.

Definim aplicaţia $\bar{f}$ în modul următor:

$$\bar{f}(\hat{x}) = f(x), \text{ pentru orice } \hat{x} \in \tilde{A}.$$

Definiţia lui $\bar{f}$ nu depinde de reprezentanţi.

$$x \sim y \Longrightarrow x R y,\ y R x \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y),\ f(y) \leqslant f(x) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f(x) = f(y).$$

deoarece, în B, $\leqslant$ este o relaţie de ordine parţială (deci antisimetrică).

$\bar{f}$ este o aplicaţie izotonă:

$$\hat{x} \leqslant \hat{y} \Rightarrow x \,R\, y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

Diagrama din teoremă este comutativă:

$$(\bar{f} \circ \lambda)(x) = \bar{f}(\lambda(x)) = \bar{f}(\hat{x}) = f(x), \text{ pentru orice } x \in A.$$

Să arătăm acum unicitatea lui $\bar{f}$. Propunem, prin absurd, că ar mai exista o funcţie izotonă $g: \tilde{A} \longrightarrow B$ astfel încît $g \circ \lambda = f$. Atunci avem:

$$g(\hat{x}) = g(\lambda(x)) = f(x) = \bar{f}(\hat{x}), \text{ pentru orice } \hat{x} \in \tilde{A}.$$

Rezultă $g = \bar{f}$, deci $\bar{f}$ este unică. Demonstraţia este terminată.

Fie acum $(x_i)_{i \in I}$ o familie oarecare de elemente ale unei mulţimi parţial ordonate $(A, \leqslant)$.

Un element $y \in A$ este un majorant al familiei $(x_i)_{i \in I}$ dacă $x_i \leqslant y$ pentru orice $i \in I$. Dual, $y \in A$ este un minorant al familiei $(x_i)_{i \in I}$ dacă $y \leqslant x_i$ pentru orice $i \in I$.

$y \in A$ este supremumul familiei $(x_i)_{i \in I}$ dacă pentru orice majorant z al familiei $(x_i)_{i \in I}$ avem $y \leqslant z$. Supremumul familiei $(x_i)_{i \in I}$ va fi notat

$$\bigvee_{i \in I} x_i$$

Deci elementul $\bigvee_{i \in I} x_i$ al lui A este caracterizat de următoarele două relaţii:

(i) $x_i \leqslant \bigvee_{i \in I} x_i$, pentru orice $i \in I$.

(ii) Dacă $x_i \leqslant y$ pentru orice $i \in I$, atunci $\bigvee_{i \in I} x_i \leqslant y$.

Dual, $y \in A$ este infimumul familiei $(x_i)_{i \in I}$ dacă pentru orice minorant z al familiei $(x_i)_{i \in I}$ avem $z \leqslant y$. Infimumul familiei $(x_i)_{i \in I}$ va fi notat

$$\bigwedge_{i \in I} x_i$$

şi este caracterizat de

(a) $\bigwedge_{i \in I} x_i \leqslant x_i$, pentru orice $i \in I$.

(b) Dacă $y \leqslant x_i$ pentru orice $i \in I$, atunci $y \leqslant \bigwedge_{i \in I} x_i$.

Supremumul (respectiv infimumul) familiei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ se va nota $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ (respectiv $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$). Pentru mulţimea $\{x, y\}$, notăm

$x \vee y$: supremumul mulţimii $\{x, y\}$.

$x \wedge y$: infimumul mulţimii $\{x, y\}$.

Definiţia 1. O mulţime ordonată $(A, \leqslant)$ se numeşte latice dacă pentru orice $x, y \in A$ există $x \vee y$ şi $y \wedge x$. $(A, \leqslant)$ se numeşte latice completă dacă pentru orice familie $(x_i)_{i \in I}$ de elemente ale lui A, există $\bigvee_{i \in I} x_i$ şi $\bigwedge_{i \in I} x_i$.

O mulţime parţial ordonată $(A, \leqslant)$ se numeşte inductivă dacă orice submulţime total ordonată a sa admite cel puţin un majorant.

Fie $(A, \leqslant)$ o mulţime parţial ordonată. Un element $x \in A$ se numeşte maximal dacă nu există nici un element $y \in A$ astfel încît $x < y$; cu alte cuvinte, dacă din $x \leqslant y$ rezultă $x = y$.

Axioma lui Zorn: Orice mulţime parţial ordonată inductivă admite un element maximal.

OBSERVAŢIE: Această axiomă a fost impusă de o serie de construcţii ale matematicii care vizează mulţimile infinite. Cunoscută mai ales sub o formă echivalentă (axioma alegerii), ea a generat multe controverse în matematică şi în filosofia matematicii. In prezent, situaţia este următoarea:

Pentru teoria mulţimilor s-au propus mai multe sisteme de axiome, mai cunoscute fiind sistemul Zermelo - Fraenkel şi sistemul Gödel - Bernays. Nu s-a reuşit pînă acum să se demonstreze pentru nici unul din aceste sisteme că este necontradictoriu.

Presupunîndu-se că sistemul de axiome Zermelo - Fraenkel este necontradictoriu, Kurt Gödel[1] a demonstrat în 1940 că prin adăugarea axiomei lui Zorn se obţine încă un sistem necontradictoriu. Ulterior s-a demonstrat că dacă adăugăm la sistemul Zermelo - Fraenkel negaţia axiomei lui Zorn se obţine încă un sistem necontradictoriu (A. Mostowski, P. Cohen).

Cu alte cuvinte, axioma lui Zorn este <u>independentă</u> de celelalte axiome ale teoriei mulţimilor. Independenţa axiomei lui Zorn este unul din rezultatele de vîrf ale matematicii secolului XX.

Se cuvine a preciza că cea mai mare parte a matematicienilor contemporani presupun în cercetările lor că axioma lui Zorn este verificată.

---

1) Este o părere unanimă aceea că K. Gödel este cel mai mare logician în viaţă.

<u>EXERCIŢII LA CAPITOLUL I</u>

1. Pentru orice submulţimi A, B, C, ale unei mulţimi X să se arate că

a) $A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

b) $A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$

c) $A - (A-B) = A \cap B$

d) $A - B = A - (A \cap B)$

e) $A \cap (B-C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

f) $(A-B) - C = (A-C) - (B-C) = A - (B \cup C)$

g) $A \cup B = A \cup (B-A)$

h) $(A \cap B) \cup (A \cap \complement_X(B)) = (A \cup B) \cap (A \cup \complement_X(B)) = A$

i) $A \cap \left[\complement_X(A) \cup B\right] = A \cap B$

j) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$

2. Să se stabilească următoarele echivalenţe:

a) $A \cup B \subset C \Longleftrightarrow A \subset C$ şi $B \subset C$

b) $A \subset B \cap C \Longleftrightarrow A \subset B$ ~~sau~~ şi $A \subset C$

c) $A \cap B \subset C \Longleftrightarrow A \subset C_X(B) \cup C$

d) $A \subset B \cup C \Longleftrightarrow A \cap C_X(B) \subset C$

e) $(A-B) \cup B = A \Longleftrightarrow B \subset A$

f) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Longleftrightarrow C \subset A$

3. Să se demonstreze că o mulţime formată din n elemente are 2^n submulţimi.

4. Este valabilă implicaţia:

$A \neq B,\ B \neq C \Longrightarrow A \neq C$? NU

5. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$A \cap X = B$$
$$A \cup X = C,$$

unde A, B, C sînt mulţimi date şi $B \subset A \subset C$.

6. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$A - X = B$$
$$X - A = C,$$

unde A, B, C sînt mulţimi date şi $B \subset A$, $A \cap C = \emptyset$.

7. Fie şirul descrescător:

$$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$$

Să se arate că intersecţia oricărui subşir infinit al acestui şir coincide cu intersecţia întregului şir.

8. Fie şirul crescător:

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \ldots$$

Să se arate că reuniunea oricărui subşir infinit al acestui şir coincide cu reuniunea întregului şir.

9. Să se demonstreze următoarele relaţii:

a) $\bigcup_{k\in K}\left(\bigcup_{e\in L} A_{ke}\right) = \bigcup_{e\in L}\left(\bigcup_{k\in K} A_{ke}\right)$

b) $\bigcap_{k\in K}\left(\bigcap_{e\in L} A_{ke}\right) = \bigcap_{e\in L}\left(\bigcap_{k\in K} A_{ke}\right)$

c) $X - \bigcup_{k\in K} A_k = \bigcap_{k\in K} (X - A_k)$

d) $X - \bigcap_{k\in K} A_k = \bigcup_{k\in K} (X - A_k)$

e) $\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) \cup \left(\bigcup_{t\in T} B_t\right) = \bigcup_{t\in T} (A_t \cup B_t)$

f) $\bigcup_{t\in T} (B \cap A_t) = B \cap \left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)$

g) $\bigcap_{t\in T} (B \cup A_t) = B \cup \left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)$

h) $\bigcup_{k\in K} \bigcap_{e\in L} A_{ke} \subset \bigcap_{e\in L} \bigcup_{k\in K} A_{ke}$

10. Să se arate că $A_t \subset B_t$, pentru orice $t\in T$, atunci

$$\bigcup_{t\in T} A_t \subset \bigcup_{t\in T} B_t \text{ şi } \bigcap_{t\in T} A_t \subset \bigcap_{t\in T} B_t.$$

11. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ un şir oarecare de mulţimi. Formăm şirul:

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2 - A_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$B_n = A_n - (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Să se arate că

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

12. Fie $A, B \subset X$. Definim <u>diferenţa simetrică</u> a submulţimilor A, B prin

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Să se stabilească proprietăţile următoare:

a) $A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$

b) $A \triangle B = B\triangle A$

c) $A\triangle(A\triangle C) = C$

d) $A \triangle B = C \Rightarrow B = A\triangle C$

e) $A\triangle B = A\triangle C \Longrightarrow B = C$

f) $A\cup B = (A\triangle B)\triangle(A\cap B)$

g) $\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right]\triangle\left[\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right]\subset\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\triangle B_i)$

h) $\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right]\triangle\left[\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right]\subset\bigcap_{i=1}^{n}(A_i\triangle B_i)$

13. Găsiţi patru mulţimi A, B, C, D astfel încît

$(A\cup B)\times(C\cup D)\neq(A\times C)\cup(B\times D)$

14. Să se stabilească relaţiile:

a) $(A\cup B)\times(C\cup D) = (A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$

b) $(A-B)\times C = (A\times C)-(B\times C)$

c) $A\subset B$ şi $C\subset D \Longrightarrow A\times C\subset B\times D$

d) $A\subset X,\ B\subset Y \Longrightarrow A\times B = (A\times Y)\cap(\ \times B)$

e) $A\times B = C\times D \Longrightarrow A = C$ şi $B = D$ (pentru A,B,C,D nevide)

15. Dacă $(A_s)_{s\in S}$, $(B_t)_{t\in T}$ sînt două familii de mulţimi, atunci avem:

$$\left[\bigcup_{s\in S} A_s\right]\times\left[\bigcup_{t\in T} B_t\right] = \bigcup_{(s,t)\in S\times T}(A_s\times B_t)$$

$$\left[\bigcap_{s\in T} A_s\right]\times\left[\bigcap_{t\in T} B_t\right] = \bigcap_{(s,t)\in S\times T}(A_s\times B_t)$$

16. Să se stabilească relaţiile:

$$\bigcup_{i\in I}\left[\bigcap_{j\in J_i} A_{ij}\right] = \bigcap_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left[\bigcup_{i\in I} A_{if(i)}\right]$$

$$\bigcap_{i\in I}\left[\bigcup_{j\in J_i} A_{ij}\right] = \bigcup_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left[\bigcap_{i\in I} A_{if(i)}\right]$$

17. Dacă $R_1,R_2\subset A^2$ sînt relaţii binare, atunci definim compunerea lor:

$$R_1\circ R_2 = \left\{(x,y)\in A^2 \,\middle|\, \text{există } z\in A,\ (x,z)\in R_1,(z,y)\in R_2\right\}$$

Să se arate că compunerea relaţiilor este asociativă, dar nu comutativă

18. Dacă $R\subset A^2$, atunci relaţia inversă R^{-1} este definită prin

$$R^{-1} = \left\{(x,y)\in A^2 \,\middle|\, (y,x)\in R\right\}$$

Să se arate că

a) $R\cup R = R\cap R = R$

b) $(R^{-1})^{-1} = R$

c) $(R_1\cup R_2)^{-1} = R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$

d) $(R_1\cap R_2)^{-1} = R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$

19. Pentru orice relaţii binare R_1, R_2, Q pe mulţimea A, sînt verificate relaţiile:

a) $(R_1\circ R_2)^{-1} = R_2^{-1}\circ R_1^{-1}$

b) $R_1\subset R_2 \Longrightarrow Q\circ R_1\subset Q\circ R_2$

c) $R_1\subset R_2 \Longrightarrow R_1\circ Q\subset R_2\circ Q$

20. Dacă Q, R_i, $i\in I$ sînt relaţii pe A, atunci

a $\left(\bigcup_{i\in I} R_i\right)\circ Q = \bigcup_{i\in I}(R_i\circ Q)$

b) $Q\circ\left(\bigcup_{i\in I} R_i\right) = \bigcup_{i\in I}(Q\circ R_i)$

21. Să se stabilească o corespondenţă bijectivă între mulţimile:

a) $A\times B$ şi $B\times A$

b) $A \times (B \times C)$ şi $(A \times B) \times C$

c) $(A \times B)^C$ şi $A^C \times B^C$

d) $(A^B)^C$ şi $A^{B \times C}$

e) $A^{B \cup C}$ şi $A^B \times A^C$, dacă $B \cap C = \emptyset$.

22. Fie A o mulţime oarecare. Pentru orice mulţime $B \subset A$, considerăm funcţia caracteristică $\chi_B : A \longrightarrow \{0,1\}$ a mulţimii B.

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin B \\ 1, & \text{dacă } x \in B. \end{cases}$$

Să se demonstreze că

a) $\chi_A(x) = 1$, $\chi_\emptyset(x) = 0$, pentru orice $x \in A$.

b) $\chi_{B \cap B'}(x) = \chi_B(x) \cdot \chi_{B'}(x)$

c) $\chi_{C_A(B)}(x) = 1 - \chi_B(x)$

d) $\chi_{B-B'}(x) = \chi_B(x) - \chi_{B \cap B'}(x)$

e) Dacă $B = \bigcup_{i \in I} B_i$, atunci $\chi_B(x) = \max_{i \in I} \chi_{B_i}(x)$

f) Dacă $B = \bigcap_{i \in I} B_i$, atunci $\chi_B(x) = \inf_{i \in I} \chi_{B_i}(x)$.

23. Presupunînd că R, R_1, R_2 sînt relaţii de echivalenţă pe A, atunci avem

a) R^{-1} este relaţie de echivalenţă.

b) $R_1 \circ R_2 = A^2 \Longleftrightarrow R_1 = A^2$

c $R_1 \circ R_2 = A^2 \Longrightarrow R_2 \circ R_1 = A^2$

24. Să se demonstreze că orice intersecţie de relaţii de e-chivalenţă este o relaţie de echivalenţă.

25. Pentru orice funcţie $f : A \longrightarrow B$, considerăm funcţiile

$f_* : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$: $f_*(M) = f(M)$, $M \subset A$

$f^* : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$: $f^*(N) = f^{-1}(N)$, $N \subset B$.

Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(a) f este injectivă;

(b) f_* este injectivă;

(c) f^* este surjectivă;

(d) $f(M \cap M') = f(M) \cap f(M')$, pentru orice $M, M' \subset A$;

(e) $f(C_A(M)) \subset C_B f(M)$, pentru orice $M \subset C$.

26. In condiţiile problemei 25, sînt echivalente afirmaţiile

(a) f este surjectivă;

(b) f_* este surjectivă;

(c) f^* este injectivă.

27. Pentru orice funcţie $f : A \longrightarrow B$ sînt echivalente afirmaţiile:

(a) f este injectivă;

(b) Dacă $g, h : X \longrightarrow A$ sînt două funcţii cu proprietatea $f \circ g = f \circ h$, atunci $g = h$.

28. Pentru orice funcţie $f : A \longrightarrow B$ sînt echivalente afirmaţiile:

(a) f este surjectivă;

(b) Dacă $g, h : B \longrightarrow C$ sînt două funcţii astfel încît $g \circ f = h \circ f$, atunci $g = h$.

29. In condiţiile problemei 25, sînt echivalente afirmaţiile:

(a) f este bijectivă;

(b) f_* şi f^* sînt surjective;

(c) f_* şi f^* sînt injective;

(d) f_* este bijectivă;

(e) f^* este bijectivă;

(f) $f(C_A(M)) = C_B(f(M))$, pentru orice $M \subset A$.

30. Dacă card $A = m$, card $B = n$, să se determine cîte funcţii sînt de la A în B.

31. Să se demonstreze că proprietăţile de reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate sînt independente.

32. Să se arate că orice mulţime finită poate fi ordonată total.

33. Dacă $A, B \subset X$, să se arate că

$$(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$$

$$C \times (A \triangle B) = (C \times A) \triangle (C \times B)$$

34. Notăm cu $N(X)$ numărul elementelor unei mulţimi finite X. Pentru orice mulţimi finite $A, B, C, A_1, \ldots, A_n$ să se arate că

(a) $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$;

(b) $N(A \cup B) = N(A) + N(B) \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$;

(c) $N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$

(d) $$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{i<j} N(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} N(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} N(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

35. Folosind exerciţiul anterior să se arate că numărul numerelor naturale mai mici decît n şi prime cu n este dat de formula:

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

unde $p_1, \ldots, p_n$ sînt toţi divizorii primi, distincţi, ai lui n.

36. Pe mulţimea Z a numerelor întregi definim relaţia binară $\mid$:

$$x \mid y \Longleftrightarrow (\exists z)(z \in Z \wedge y = z\, x)$$

Să se arate că $\mid$ este o relaţie reflexivă şi tranzitivă, dar nu este simetrică.

37. Definim următoarele relaţii binare:

$x \rho y \Longleftrightarrow x^2 = y^2$; pe mulţimea Z.

$x \rho' y \Longleftrightarrow |x| = |y|$; pe mulţimea R a numerelor reale

Să se arate că ρ şi ρ' sînt relaţii de echivalenţă şi să se determine mulţimile cît.

38. Să se determine toate relaţiile de echivalenţă pe mulţimea $\{1, 2, 3\}$ şi apoi mulţimile cît corespunzătoare.

39. Să se arate că singura relaţie de echivalenţă care este şi relaţia de ordine este egalitatea.

40. Fie X o mulţime finită cu n elemente. Să se arate că numărul relaţiilor de echivalenţă $\sim$ pe X, pentru care $X/\sim$ are exact două elemente este egal cu $2^{n-1} - 1$.

41. Fie funcţia $f: Z \longrightarrow N$ definită de

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & \text{dacă } z \geq 0 \\ 2|z| - 1, & \text{dacă } z < 0. \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă şi deci Z este numărabilă.

42. Să se arate că funcţia $f: N \times N \longrightarrow N$

$$f(m,n) = \begin{cases} C^2_{m+n+1} + m, & \text{pentru } m + n \geq 1 \\ 0 & , \text{în rest} \end{cases}$$

este o bijecţie.

43. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primele k numere prime ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, etc.).

Să se arate că funcţia $f: N^k \longrightarrow N$, definită de

$$f(x_1, \ldots, x_k) = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

este injectivă.