Mulțimea numerelor reale

majorant. minorant. supremum. infimum

Def. Fie $(X, \leq)$ mulțime ordonată ; $A \subseteq X$, $m \in X$

m se numește majorant dacă $a \leq m$, $\forall a \in A$

—— " —— minorant dacă $m \leq a$, $\forall a \in A$

Dacă m este majorant (minorant) al lui A și $m \in A$, spunem că A are maxim (minim) ($m = \max A$ ($\min A$))

Propoziție. Dacă A are minim/maxim atunci acesta este unic.

Dem : Pp. prin absurd că $\exists$ m, m' - minime în A

$\Rightarrow$ $m \leq a$, $\forall a \in A$

$m' \leq a$, $\forall a \in A$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} m \leq a \\ m' \in A \end{array}\right\} \Rightarrow m \leq m' \\ \\ \left.\begin{array}{l} m' \leq a \\ m \in A \end{array}\right\} \Rightarrow m' \leq m \end{array}\right\} \Rightarrow m = m' \Rightarrow$$ Așadar, minimul este unic

Analog și dem. pt. maxim

Teoremă. (Caracterizarea marginilor unei mulțimi cu ε)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A mărginită superior

Atunci urm. af. sunt echivalente :

a). $a = \sup A$

b). (i) a este majorant

(ii). $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ a.î. $a - \varepsilon < x$

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A mărg. inferior

Următoarele af. sunt echivalente:

a). $a = \inf A$

b). (i). a este minorant pt A

(ii). $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ x \in A$ aî $a + \varepsilon > x$

Axioma lui Cantor

$A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$

A - mărginită superior $\Rightarrow \exists \sup A \in \mathbb{R}$

Exerciții. Aflați infimum/supremum pentru următoarele mulțimi + demonstrați

1). $A = \left\{ \frac{m}{m+n} \,/\, m, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$; $m, n \geq 1$

2). $A = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \,/\, m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ (idee - inegalitatea mediilor)

3). $A_0 = \left\{ \frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N} \right\}$

4). $A = \left\{ \frac{1}{2^n} \,/\, n \in \mathbb{N} \right\}$

5). $A = \left\{ \sqrt{n} - [\sqrt{n}] \,/\, n \in \mathbb{N} \right\}$

TUTORIAT 2

- ȘIRURI -

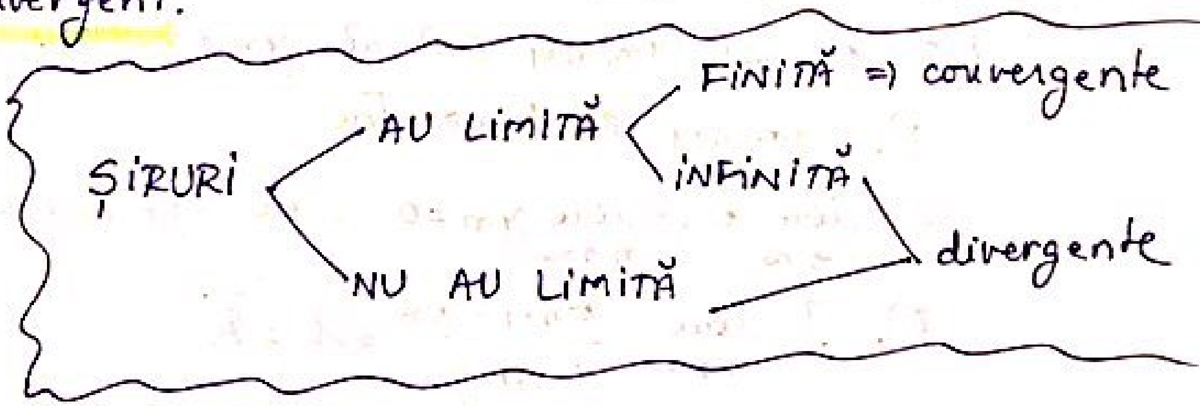
TEORIE.

1). $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|a_n - \alpha| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_\varepsilon$

2). $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n > \varepsilon, \forall\, n \geq n_\varepsilon$

3). $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n < -\varepsilon, \forall\, n \geq n_\varepsilon$

Def. Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ s.n. convergent dacă are limita finită.
Altfel, dacă are limită infinită sau nu are limită s.n. divergent.



Proprietăți și criterii de convergență a șirurilor:

1). Orice șir convergent este mărginit (convergent $\Downarrow$ mărginit)

2). Orice șir monoton și mărginit este convergent (Weierstrass)

3). $(x_n)_{n\geq 1}; (y_n)_{n\geq 1}$
$x_n \leq y_n,\ \forall\, n \geq 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

4). Dacă un șir are limită, atunci limita șirului este unică.

5). Criteriul cleştelui

$(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ - şiruri de nr. reale aî

$a_n \leq b_n \leq c_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

6). Criteriul raportului

Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ - şir de nr. pozitive şi $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

Atunci :

- dacă $l \in [0,1)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- dacă $l \in (1, \infty)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

7). Lema Stolz - Cesaro

Fie $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ aî $y_n \neq 0, \forall n$.

1). $(y_n)_{n\geq 1}$ strict monoton

2). $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ sau $(y_n)_{n\geq 1}$ nemărginit

3). $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

EXERCIȚII.

(1). $x_n \subseteq \mathbb{R}$, $(x_n)_{n\geq 1}$ mărginit cu $x_{n+1} \geq x_n - \frac{1}{2^n}$, $\forall n$

Dem. că $(x_n)_n$ convergent.

(2). Arătați folosind definiția cu ε că:

a). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}$

b). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$

c). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+1}{8n+9} = \frac{1}{2}$

d). $\lim\limits_{n\to\infty} 2n^2+n+1 = \infty$

(3). Să se calculeze limita șirului folosind criteriul raportului:

a). $x_n = \frac{2^n}{n^k}$, $k \geq 0$

b). $x_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$

(4). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = ?$

(5). Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2+n}$$