59. Dacă F este un filtru al algebrei Boole B, atunci $B/_F$ şi $B/_{F^+}$ sînt izomorfe.

6o. Să se caracterizeze idealele proprii maximale ale unei algebre Boole.



CAPITOLUL 3

# Sistemul formal al calculului propoziţional

Scopul acestui capitol este de-a descrie în detaliu sistemul formal al calculului propoziţional. Acest sistem formal este cel mai simplu sistem formal şi pe el se bazează toate celelalte sisteme formale (care sînt fundamentate de o logică bivalentă).

Paragraful 1 se ocupă cu prezentarea sintaxei acestui sistem formal: simboluri primitive, enunţuri, teoreme formale,etc,iar în paragraful 2 sînt prezentate o serie de teoreme formale ale sistemului. Paragraful 3 studiază semantica sistemului formal al calculului propoziţional, conţinînd cel mai important rezultat al capitolului: teorema de completitudine a lui Gödel.

Proprietăţile conectorilor auxiliari $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ sînt date în § 4. Paragraful 5 va preciza un adevăr intrat în folclorul ştiinţei: algebrele Boole sînt reflectarea algebrică a calculului propoziţional.

## § 1. PREZENTAREA SISTEMULUI FORMAL AL CALCULULUI PROPOZIŢIONAL

Alfabetul sistemului formal al calculului propoziţional, adică lista de simboluri primitive ce o vom utiliza, cuprinde următoarele elemente:

1). O mulţime infinită V de variabile propoziţionale, notate u, v, w,...(eventual cu indici sau cu accente).

2). Simbolurile logice (conectori):

$\neg$ : numit simbolul de negaţie (va fi citit: non)

$\rightarrow$ : numit simbolul de implicaţie (va fi citit:implică)

3). <u>Parantezele</u> (, ), [,]

Cu ajutorul acestor simboluri, vom construi <u>cuvinte</u> sau <u>asamblaje</u>. Prin definiție, un <u>cuvînt</u> este un șir finit de simboluri ale alfabetului dat mai sus, scrise unul după altul.

<u>Exemplu</u>: $u \rightarrow uv\neg)$

$u \rightarrow \neg v$

Din mulțimea cuvintelor, le vom selecta pe acelea care „au sens", noțiune precizată astfel:

Se numește <u>enunț</u> orice cuvînt $\varphi$ care verifică una din condițiile următoare:

(i ) $\varphi$ este o variabilă propozițională.

(ii ) Există un enunț $\Psi$, astfel încît $\varphi = \neg\Psi$.

(iii) Există enunțurile $\Psi$, $\theta$, astfel încît $\varphi = (\Psi \rightarrow \theta)$.

<u>OBSERVATIE</u>: Definiția conceptului de enunț este dată „din aproape în aproape", trecîndu-se de la un pas la următorul exact ca în cazul inducției. Se poate demonstra că într-adevăr aceasta este o definiție <u>prin inducție</u>, dar nu insistăm asupra acestui lucru.

Deci variabilele propoziționale sînt enunțuri, pe care le vom numi <u>enunțuri elementare</u> . Vom nota cu E mulțimea tuturor enunțurilor.

Pentru orice enunțuri $\varphi$, $\Psi$ introduce următoarele prescurtări:

$\varphi \vee \Psi = \neg\varphi \rightarrow \Psi$ (<u>disjuncția</u> lui $\varphi$ și $\Psi$)

$\varphi \wedge \Psi = \neg(\varphi \rightarrow \neg\Psi)$(<u>conjuncția</u> lui $\varphi$ și $\Psi$)

$\varphi \leftrightarrow \Psi = (\varphi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \varphi)$ (<u>echivalența logică</u> a lui $\varphi$ și $\Psi$)

<u>OBSERVATIE</u>: In prezentarea sistemului formal al calculului propozițional, am considerat negația și implicația drept conectori primitivi, ceilalți conectori fiind definiți cu ajutorul lor. Există alte construcții ale sistemului formal al calculului propozițional (echivalente cu cea din acest curs) în care sînt luați alți conectori primitivi.



In cele ce urmează vom detașa din mulțimea enunțurilor o submulțime a sa care va constitui mulțimea „adevărurilor sintactice" ale sistemului formal prezentat.

O <u>axiomă</u> a sistemului formal al calculului propozițional este un enunț care are una din următoarele forme:

(A 1) $\varphi \rightarrow (\Psi \rightarrow \varphi)$

(A 2) $[\varphi \rightarrow (\Psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$

(A 3) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\Psi) \rightarrow (\Psi \rightarrow \varphi)$

unde $\varphi$, $\Psi$ și $\chi$ sînt enunțuri arbitrare.

O <u>teoremă</u> a sistemului formal al calculului propozițional este un enunț $\varphi$ care verifică una din condițiile următoare:

(T 1) $\varphi$ este o axiomă.

(T 2) Există un enunț $\Psi$, astfel încît $\Psi$ și $\Psi \rightarrow \varphi$ sînt teoreme.

Proprietatea (T2) se mai scrie prescurtat

$$\frac{\Psi, \Psi \rightarrow \varphi}{\varphi}$$

și se numește regula de deducție „<u>modus ponens</u>" (m.p.)

Vom nota cu T mulțimea teoremelor, iar faptul că $\varphi$ este o teoremă cu $\vdash \varphi$.

Prin <u>demonstrație</u> formală a unui enunț $\varphi$ vom înțelege un șir finit $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, de enunțuri astfel încît $\Psi_n = \varphi$ și pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$ se verifică una din condițiile următoare:

(1) $\Psi_i$ este o axiomă.

(2) Există k, $j < i$, astfel încît $\Psi_k = \Psi_j \rightarrow \Psi_i$.

Se observă că $\vdash \varphi$ dacă şi numai dacă există o demonstraţie formală $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ a lui $\varphi$.

$m$ se numeşte <u>lungimea</u> demonstraţiei. O teoremă poate avea demonstraţii de lungimi diferite.

Fie $\Gamma$ o mulţime de enunţuri şi $\varphi$ un enunţ. Vom spune că <u>enunţul $\varphi$ este dedus din ipotezele $\Gamma$</u> dacă una din condiţiile următoare este verificată:

(D 1) $\varphi$ este o axiomă.

(D 2) $\varphi \in \Gamma$.

(D 3) Există un enunţ $\Psi$, astfel încît enunţurile $\Psi$ şi $(\Psi \rightarrow \varphi)$ sînt deduse din ipotezele $\Gamma$. D 3 se numeşte tot regula <u>modus ponens</u> (m.p.).

Dacă $\varphi$ este dedus din ipotezele $\Gamma$, vom scrie $\Gamma \vdash \varphi$.

<u>OBSERVATIE</u>

(i ) $\emptyset \vdash \varphi$ dacă şi numai dacă $\vdash \varphi$.

(ii) Dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

Cu aceasta, descrierea sistemului formal al calculului propoziţional este terminată. Vom nota cu L acest sistem formal. Observăm că, la nivelul prezentat aici, enunţurile şi teoremele sînt numai nişte <u>şiruri de simboluri</u>.

## § 2. <u>PROPRIETATI SINTACTICE ALE SISTEMULUI FORMAL L AL CALCULULUI PROPOZITIONAL</u>

Prin proprietăţile sintactice ale lui L le vom înţelege pe acelea ce se referă la enunţurile lui L ca simple şiruri de simboluri ale alfabetului prezentat în § 1, făcîndu-se abstracţie de orice interpretare a lor.

<u>PROPOZITIA 1.</u> Fie $\Gamma, \Delta \subset E$ şi $\varphi, \Psi \in E$. Atunci avem

(i ) Dacă $\Delta \subset \Gamma, \Delta \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.



(ii ) Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci există $\Sigma \subset \Gamma$ finită, astfel încît $\Sigma \vdash \varphi$.

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \chi$, pentru orice $\chi \in \Delta$ şi $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

<u>Demonstraţie</u>: (i) Dacă $\Delta \vdash \varphi$, atunci este verificată una din condiţiile (D 1) - (D 3) din § 1.

Le vom lua pe rînd:

- dacă $\varphi$ este axiomă, atunci avem evident $\Gamma \vdash \varphi$.
- dacă $\varphi \in \Delta$, atunci $\varphi \in \Gamma$, deci $\Gamma \vdash \varphi$.
- dacă ~~$\Psi, (\Psi \rightarrow \varphi) \in \Delta$~~ $\Delta \vdash \Psi$, $\Delta \vdash (\Psi \rightarrow \varphi)$, atunci $\Psi, (\Psi \rightarrow \varphi) \in \Gamma$, deci $\Gamma \vdash \varphi$.

(ii) Demonstrăm această proprietate din aproape în aproape:

- dacă $\varphi$ este axiomă, atunci $\emptyset \vdash \varphi$ şi $\emptyset \subset \Gamma$ este finită.
- dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci luăm $\Sigma = \{\varphi\}$ şi este evident că $\Sigma \vdash \varphi$.
- presupunînd că $\Gamma \vdash \Psi$ şi $\Gamma \vdash (\Psi \rightarrow \varphi)$ şi că există $\Sigma_1$, $\Sigma_2 \subset \Gamma$ finite astfel încît $\Sigma_1 \vdash \Psi$, $\Sigma_2 \vdash (\Psi \rightarrow \varphi)$, atunci luăm $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \Gamma$; $\Sigma$ este finită şi $\Sigma \vdash \Psi$, $\Sigma \vdash (\Psi \rightarrow \varphi)$, deci $\Sigma \vdash \varphi$.

(iii) Considerăm şi aici toate cazurile:

- dacă $\varphi$ este o axiomă, atunci este evident că $\Gamma \vdash \varphi$.
- dacă $\varphi \in \Delta$, este clar că $\Gamma \vdash \varphi$, prin ipoteză.
- presupunînd că $\Delta \vdash \Psi . \Delta \vdash (\Psi \rightarrow \varphi)$, deci pentru $\Psi, \Psi \rightarrow \varphi$ s-a verificat că $\Gamma \vdash \Psi$, $\Gamma \vdash (\Psi \rightarrow \varphi)$; atunci avem $\Gamma \vdash \varphi$.

<u>PROPOZITIA 2.</u> Pentru orice enunţ $\varphi$, avem

$$\vdash (\varphi \rightarrow \varphi)$$

<u>Demonstraţie</u>. Următoarea listă de enunţuri este o demonstraţie formală a lui $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$, în partea dreaptă indicînd argumentarea:

(1) $\left[\varphi \rightarrow [(\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi]\right] \rightarrow \left[[\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)] \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)\right]$ A 2.

(2) $\varphi \rightarrow [(\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi]$ A 1.

(3) $[\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)] \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ (1),(2), m.p.

(4) $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ A 1.

(5) $\varphi \to \varphi$ (3),(4), m.p.

PROPOZITIA 3. Fie $\Gamma$ o mulţime de enunţuri şi $\varphi \in E$. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ dacă şi numai dacă există un şir finit de enunţuri $\Psi_1,\dots,\Psi_m$ astfel încît $\Psi_m = \varphi$ şi pentru orice $i \leq m$ este verificată una din condiţiile următoare:

(i) $\Psi_i$ este o axiomă.

(ii) $\Psi_i \in \Gamma$.

(iii) Există $j, k < i$, astfel încît $\Psi_k = \Psi_j \to \Psi_i$.

Demonstraţie: Această condiţie este o retranscriere evidentă a definiţiei lui $\Gamma \vdash \varphi$.

OBSERVATIE: Vom spune că şirul $\Psi_1,\dots,\Psi_m$ este o demonstraţie formală din ipotezele $\Gamma$ sau $\Gamma$ - demonstraţie.

Următorul rezultat este cunoscut sub numele de teorema deducţiei:

PROPOZITIA 4. Dacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \Psi$, atunci $\Gamma \vdash (\varphi \to \Psi)$

Demonstraţie: Prin inducţie asupra lui m vom arăta că pentru orice $m \in N$ diferit de o, dacă $\chi_1,\dots,\chi_m$ este o $\Gamma \cup \{\varphi\}$-demonstraţie a lui $\Psi$, atunci $\Gamma \vdash (\varphi \to \Psi)$.

Presupunem afirmaţie adevărată pentru orice $n < m$ şi vom considera cazul cînd $\chi_1,\dots,\chi_m$ este o $\Gamma \cup \{\varphi\}$- demonstraţie a lui $\Psi$.

Trebuie să luăm în considerare următoarele patru cazuri:

Cazul 1: $\Psi$ este o axiomă.

Cum $\vdash \Psi$ şi $\vdash \Psi \to (\varphi \to \Psi)$ conform $A_1$, atunci aplicînd modus ponens rezultă $\vdash (\varphi \to \Psi)$, deci $\Gamma \vdash (\varphi \to \Psi)$.

Cazul 2: $\Psi \in \Gamma$.

Conform $A_1$, putem scrie $\Gamma \vdash [\Psi \to (\varphi \to \Psi)]$. Cum $\Psi \in \Gamma$, avem $\Gamma \vdash \Psi$, deci aplicînd m.p. rezultă $\Gamma \vdash (\varphi \to \Psi)$.



Cazul 3: $\Psi = \varphi$

Conform propoziţiei precedente, $\vdash (\varphi \to \varphi)$, deci $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi)$

Cazul 4: Există $j, k < m$, astfel încît $\chi_k = \chi_j \to \Psi$. Prin ipoteza inducţiei rezultă $\Gamma \vdash (\varphi \to \chi_k)$ şi $\Gamma \vdash (\varphi \to \chi_j)$, deci există următoarele $\Gamma$ - demonstraţii:

$\alpha_1,\dots, \alpha_r, \varphi \to \chi_k$
$\beta_1,\dots, \beta_s, \varphi \to \chi_j$

Atunci avem următoarea $\Gamma$ - demonstraţie a lui $\varphi \to \Psi$:

$\alpha_1$
$\vdots$
$\alpha_r$
$\varphi \to \chi_k$
$\beta_1$
$\vdots$
$\beta_s$
$\varphi \to \chi_j$
$[\varphi \to (\chi_j \to \Psi)] \to [(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \Psi)]$ $A_2$
$(\varphi \to \chi_j) \to (\varphi \to \Psi)$ m.p. $\chi_k = \chi_j \to \Psi$
$\varphi \to \Psi$ m.p.

OBSERVATIE. Teorema de deducţie este formalizarea unui procedeu folosit adeseori în raţionamentele matematice. Atunci cînd vrem să stabilim $\varphi \Rightarrow \Psi$ în anumite condiţii matematice $\Gamma$, întîi adăugăm pe $\varphi$ de la condiţiile $\Gamma$ şi apoi deducem pe $\Psi$.

PROPOZITIA 5. $\vdash (\varphi \to \Psi) \to [(\Psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)]$

Demonstraţie: Vom aplica succesiv m.p. şi apoi teorema deducţiei:

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$

$\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$

$\vdash (\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)]$

PROPOZITIA 6. $\vdash [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [\psi \to (\varphi \to \chi)]$

Demonstraţie: Aplicăm m.p. şi teorema deducţiei:

$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi$

$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$

$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to \chi$

$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi$

$\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \chi$

$\{\psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to \chi$

$\{\varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$

$\vdash [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [\psi \to (\varphi \to \chi)]$

PROPOZITIA 7. $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$

Demonstraţie

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ A.1

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ A.3

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ m.p.



$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \psi$ teorema deducţiei

$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ teorema deducţiei

PROPOZITIA 8. $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

Demonstraţie: Aplicînd Propoziţia 6, avem:

$\vdash [\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)] \to [\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)]$

Aplicînd Propoziţia 7 şi m.p., rezultă

$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

Exerciţiu: Să se demonstreze Propoziţia 8 în maniera Propoziţiei 7, folosind teorema deducţiei.

PROPOZITIA 9. $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$

Demonstraţie:

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$ A 1

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$ m.p.

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$ A 3

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$ m.p.

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$ A 3

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ m.p.

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ m.p.

$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ teorema deducţiei

PROPOZITIA 10. $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

Demonstraţie:

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (Propoziţia 9)

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$ .

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi$ ~~m.p.~~

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg\neg\psi)$ (Propoziţia 8)

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi \to \neg\neg\psi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ A 3

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$

$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

**PROPOZITIA 11.** $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

**Demonstraţie**

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ (Propoziţia 9)

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi$

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$

$\{\varphi\} \vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$ A.3

$\{\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$ m.p.

$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

**PROPOZITIA 12.** $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

**Demonstraţie:**

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (Propoziţia 9)



$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\varphi$

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi))$ Propoziţia 7

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash [\neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)] \to [(\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi]$ A 3

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi$ m.p.

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi)$ (Propoziţia 2)

$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ m.p.

$\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

PROPOZITIA 13. $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$

Demonstraţie:

$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$ m.p.

$\{\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$ teorema deducţiei

$\{\varphi\} \vdash [(\varphi \to \psi) \to \psi] \to [\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)]$ Propoziţia 10.

$\{\varphi\} \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$ m.p.

$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$ teorema deducţiei

## § 3. INTERPRETARI

Acest paragraf este contrapartea semantică a celor prezentate în paragrafele precedente ale acestui capitol.

Se numeşte interpretare a sistemului formal al calculului propoziţional orice funcţie

$$f: V \to L_2,$$

unde $L_2$ este algebră Boole $\{o,1\}$.

PROPOZIŢIA 1. Pentru orice interpretare $f: V \to L_2$ a lui L, există o funcţie unică

$$\tilde{f}: E \to L_2$$

care are proprietăţile următoare:

(a) $\tilde{f}(u) = f(u)$, pentru orice $u \in V$.

(b) $\tilde{f}(\neg\varphi) = 1$ dacă şi numai dacă $\tilde{f}(\varphi) = o$.

(c) $\tilde{f}(\varphi \to \psi) = o$ dacă şi numai dacă $\tilde{f}(\varphi) = 1$ şi $\tilde{f}(\psi) = o$.

Demonstraţie: Unicitatea. Presupunem că există două funcţii $g, h: E \to L_2$ care verifică proprietăţile (a) - (c). Vom arăta că $g(\varphi) = h(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$. Distingem trei cazuri, relativ la modul de formare al enunţurilor:

$\varphi$ este enunţ elementar. Conform (a), avem:

$$g(\varphi) = f(\varphi) = h(\varphi).$$

$\varphi$ este de forma $\neg\psi$ şi presupunem $g(\psi) = h(\psi)$. Conform (b), avem:

$$g(\varphi) = 1 \Longleftrightarrow g(\psi) = o$$
$$\Longleftrightarrow h(\psi) = o$$
$$\Longleftrightarrow h(\varphi) = 1$$

Este evident că de aici rezultă: $g(\varphi) = o \Longleftrightarrow h(\varphi) = o$. Aşadar

$$g(\varphi) = h(\varphi)$$

$\varphi$ este forma $\psi_1 \to \psi_2$ şi presupunem că $g(\psi_1) = h(\psi_1)$ şi $g(\psi_2) = h(\psi_2)$.

1). De acum înainte, semnul $\Longleftrightarrow$ va fi prescurtarea lui „dacă şi numai dacă" din limba română. Atragem atenţia a nu fi confundat cu simbolul $\to$ care aparţine lui L, pe cînd $\Longleftrightarrow$ este un semn în afara lui L.



Conform (c), rezultă

$$g(\varphi) = o \Longleftrightarrow g(\psi_1 \to \psi_2) = o$$
$$\Longleftrightarrow g(\psi_1) = 1 \text{ şi } g(\psi_2) = o$$
$$\Longleftrightarrow h(\psi_1) = 1 \text{ şi } h(\psi_2) = o$$
$$\Longleftrightarrow h(\psi_1 \to \psi_2) = o$$
$$\Longleftrightarrow h(\varphi) = o$$

De aici rezultă: $g(\varphi) = 1 \Longleftrightarrow h(\varphi) = 1$, deci $g(\varphi) = h(\varphi)$.

OBSERVAŢIE: Unicitatea a fost demonstrată prin inducţie, urmărindu-se modul de formare a enunţurilor lui L.

Existenţa. Definim pe $\tilde{f}$ prin inducţie:

$\tilde{f}(u) = f(u)$, pentru orice $u \in V$.

Presupunînd că $\tilde{f}(\varphi)$ este definit, vom pune

$$\tilde{f}(\neg\varphi) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } \tilde{f}(\varphi) = o \\ o, \text{ dacă } \tilde{f}(\varphi) = 1. \end{cases}$$

Presupunem că $\tilde{f}(\varphi)$, $\tilde{f}(\psi)$ sînt definite. Vom pune atunci

$$\tilde{f}(\varphi \to \psi) = \begin{cases} o, \text{ dacă } \tilde{f}(\varphi) = 1 \text{ şi } \tilde{f}(\psi) = o \\ 1, \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

In acest fel, funcţia $\tilde{f}$ a fost definită pe toată mulţimea E. Este evident ca f verifică proprietăţile (a) - (c), definiţia sa fiind sugerată chiar de ele. Cu aceasta, demonstraţia este terminată.

OBSERVAŢIE: Definiţia lui $\tilde{f}$ poate fi dată şi astfel:

$\tilde{f}(u) = f(u)$, pentru orice $u \in V$

$\tilde{f}(\neg\varphi) = \neg\tilde{f}(\varphi) \in L_2$

$\tilde{f}(\varphi \to \psi) = \tilde{f}(\varphi) \to \tilde{f}(\psi) \in L_2$.

Atragem atenţia că avem aici aceeaşi notaţie pentru două lucruri distincte. In timp ce $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$ sînt enunţuri ale lui L, semnele $\neg$, $\rightarrow$ din dreapta semnifică negația și implicația din algebra Boole $L_2$.

Deoarece vom vedea că există o anumită corespondență între algebrele Boole și sistemul formal al calculului propozițional, nu introducem notații separate.

Pentru orice enunț $\varphi$, vom spune că $\tilde{f}(\varphi)$ este <u>interpretarea lui $\varphi$ relativ la</u> f.

Spunem că enunțul $\varphi$ este <u>adevărat în interpretarea f</u>: $V \rightarrow L_2$, dacă $\tilde{f}(\varphi) = 1$. Enunțul $\varphi$ este <u>fals în interpretarea f</u> dacă $\tilde{f}(\varphi) = 0$.

Un enunț $\varphi$ este <u>universal adevărat</u> sau o <u>tautologie</u> dacă el este adevărat în orice interpretare. Vom nota aceasta prin $\models \varphi$.

<u>OBSERVAȚIE</u>. Interpretarea unui enunț este valoarea 0 sau 1 obținută atunci cînd tuturor enunțurilor elementare ce intră în componența lui $\varphi$ le atribuim anumite valori din $\{0,1\}$. Un enunț universal adevărat va avea valoarea 1 pentru orice valori luate de enunțurile elementare ce intră în componența sa.

Prin <u>proprietate semantică</u> a lui L vom înțelege orice proprietate legată de interpretările lui L.

Observăm că pînă acum am definit două tipuri de „adevăruri" relativ la sistemul formal al calculului propozițional: <u>teoremele</u>, care sînt <u>„adevărurile sintactice"</u> ale lui L și <u>tautologiile</u>, care sînt <u>„adevărurile semantice"</u> ale lui L. In mod natural se pune problema comparării celor două tipuri de „adevăruri". Teorema de completitudine, care este rezultatul fundamental al acestui paragraf, va arăta coincidența lor.

Vom spune că o interpretare f: $V \rightarrow L_2$ este un <u>model</u> al unei mulțimi de enunțuri $\Gamma$, dacă $\tilde{f}(\varphi) = 1$, pentru orice $\varphi \in \Gamma$.

Notăm prin $\Gamma \models \varphi$ proprietatea că $\tilde{f}(\varphi) = 1$, pentru orice model f al lui $\Gamma$. In cazul cînd $\Gamma = \emptyset$, prin $\emptyset \models \varphi$ vom înțelege că $\models \varphi$.



<u>PROPOZIȚIA 2.</u> Dacă $\vdash \varphi$, atunci avem $\models \varphi$.

<u>Demonstrație</u>. Presupunem că $\varphi$ este o teoremă a lui L. Va trebui să arătăm că pentru orice interpretare h: $V \rightarrow L_2$, avem $\tilde{h}(\varphi) = 1$. Vom considera întîi cazul axiomelor.

A 1: $\varphi$ este de forma $\psi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$

Atunci avem

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\varphi) &= \tilde{h}(\psi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \\ &= \tilde{h}(\psi) \rightarrow [\tilde{h}(\chi) \rightarrow \tilde{h}(\psi)] \\ &= \neg\tilde{h}(\psi) \vee \neg\tilde{h}(\chi) \vee \tilde{h}(\psi) = 1.\end{aligned}$$

<u>A 2</u>: $\varphi$ este de forma $[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)] \rightarrow [(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$

Cum $\tilde{h}(\varphi) = [\tilde{h}(\alpha) \rightarrow [\tilde{h}(\beta) \rightarrow \tilde{h}(\gamma)]] \rightarrow [[\tilde{h}(\alpha) \rightarrow \tilde{h}(\beta)] \rightarrow [\tilde{h}(\alpha) \rightarrow \tilde{h}(\gamma)]]$, este suficient să arătăm că pentru orice x, y, $z \in L_2$, avem

$$[x \rightarrow (y \rightarrow z)] \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = 1$$

Intr-adevăr, avem:

$$[x \rightarrow (y \rightarrow z)] \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = \neg(\neg x \vee \neg y \vee z) \vee$$
$$\vee [\neg(x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)] = \neg(\neg x \vee \neg y \vee z) \vee \neg(\neg x \vee y) \vee \neg x \vee z$$

Dar

$$\begin{aligned}\neg(\neg x \vee y) \vee \neg x \vee z &= (x \wedge \neg y) \vee \neg x \vee z = \\ &= (x \vee \neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee \neg x \vee z) \\ &= \neg y \vee \neg x \vee z,\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$[x \rightarrow (y \rightarrow z)] \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = \neg(\neg x \vee \neg y \vee z) \vee (\neg x \vee \neg y \vee z) = 1$$

<u>A 3</u>: $\varphi$ este forma $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.

La fel ca mai sus, este suficient să arătăm că

$$(\neg x \rightarrow \neg y) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1,$$

pentru orice x, $y \in L_2$. Această egalitate se obține astfel:

$$(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) = \neg(\neg x \to \neg y) \vee (y \to x)$$
$$= \neg(x \vee \neg y) \vee \neg y \vee x$$
$$= (\neg x \wedge y) \vee \neg y \vee x$$
$$= (\neg x \vee \neg y \vee x) \wedge (y \vee \neg y \vee x)$$
$$= 1 \wedge 1 = 1.$$

Presupunem acum că $\varphi$ a fost obţinută prin modus ponens din $\vdash \psi, \vdash \psi \to \varphi$ şi că $\tilde{h}(\psi) = 1$, $\tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$. Va trebui să arătăm că $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

Din relaţiile

$$\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi) = \neg\tilde{h}(\psi) \vee \tilde{h}(\varphi) = 1$$

$$\tilde{h}(\psi) = 1$$

rezultă $\neg 1 \vee \tilde{h}(\varphi) = 1$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

<u>OBSERVAŢIE</u>: Teorema de mai sus s-a demonstrat prin inducţie în raport cu lungimea demonstraţiilor formale ale teoremelor lui L.

<u>Corolar</u>. Nu există nici un enunţ $\varphi$ al lui L, astfel încît $\vdash \varphi$ şi $\vdash \neg\varphi$.

<u>Demonstraţie</u>: Presupunem că există $\varphi \in E$, astfel încît $\vdash \varphi$ şi $\vdash \neg\varphi$. Atunci, avem

$$\tilde{h}(\varphi) = 1 \text{ şi } \tilde{h}(\neg\varphi) = 1,$$

pentru orice interpretare $h: V \to L_2$.

Contradicţia este evidentă: din $\tilde{h}(\neg\varphi) = 1$, rezultă $\neg\tilde{h}(\varphi) = 1$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 0$.

<u>OBSERVAŢIE</u>: Acest corolar exprimă faptul că sistemul formal al calculului propoziţional este <u>necontradictoriu.</u>

<u>PROPOZIŢIA 3</u>. Fie $\Gamma \subset E$ şi $\varphi \in E$. Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \models \varphi$.

Demonstraţia acestei propoziţii este cu totul analoagă cu aceea a propoziţiei precedente.



Fie $\Gamma$ o mulţime de enunţuri. Vom spune că $\Gamma$ este <u>consistentă</u> dacă există $\varphi \in E$, astfel încît $\Gamma \nvdash \varphi$ ($\varphi$ nu se deduce din ipotezele $\Gamma$). $\Gamma$ este <u>inconsistentă</u> dacă nu este consistentă.

<u>PROPOZIŢIA 4.</u> Pentru orice $\Gamma \subset E$, următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(i) $\Gamma$ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$.

(iii) Există $\varphi \in E$, astfel încît $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.

<u>Demonstraţie</u>. Implicaţiile (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sînt evidente:

<u>(iii) $\Rightarrow$ (i)</u>. Presupunem că există $\varphi \in E$, astfel încît $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$. Fie $\psi$ un enunţ oarecare. Conform A 1, avem

$$\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi) \to [\neg\psi \to (\varphi \to \varphi)]$$

Dar $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi)$, deci aplicînd modus ponens rezultă :

$$\Gamma \vdash \neg\psi \to (\varphi \to \varphi)$$

Conform Propoziţiei 10, § 2,

$$\Gamma \vdash [\neg\psi \to (\varphi \to \varphi)] \to [\neg(\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\psi]$$

de unde rezultă, prin modus ponens :

$$\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\psi$$

Aplicînd ipoteza $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ şi modus ponens, rezultă $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$.

Conform Propoziţiei 11, § 2, avem $\Gamma \vdash \neg\neg\psi \to \psi$, deci $\Gamma \vdash \psi$. Am arătat că $\Gamma \vdash \psi$, pentru orice $\psi \in E$.

<u>PROPOZIŢIA 5</u>. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă $\Longleftrightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inc. $\Longleftrightarrow \Gamma \vdash \neg\neg\varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$

<u>Demonstraţie</u>: $\Longrightarrow$ : Dacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă, atunci $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, deci prin teorema deducţiei avem $\Gamma \vdash \varphi \to \neg\varphi$. Aplicînd Propoziţia 12, § 2 şi modus ponens, rezultă $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

$\Longleftarrow$ : Cum $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ şi $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, aplicînd de două ori modus ponens relației din Propoziția 7, § 2:

$$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$$

rezultă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, pentru orice $\psi \in E$.

<u>PROPOZIȚIA 6</u>: $\emptyset$ este consistentă.

<u>Demonstrație</u>: Presupunînd că $\emptyset$ este inconsistentă, ar rezulta $\emptyset \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$, deci $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$. Dar este știut că $\vdash (\varphi \rightarrow \varphi)$, conform Propoziției 2, § 2. Conform corolarului Propoziției 2, contradicția este evidentă.

O mulțime consistentă $\Gamma \subset E$ este maximal consistentă dacă pentru orice $\Sigma \subset E$ consistentă avem

$$\Gamma \subset \Sigma \Longrightarrow \Gamma = \Sigma.$$

<u>PROPOZIȚIA 7</u>. Pentru orice mulțime consistentă $\Gamma \subset E$, există o mulțime maximal consistentă $\Delta \subset E$ astfel încît $\Gamma \subset \Delta$.

<u>Demonstrație</u>: Fie

$$\mathcal{A} = \{\Sigma \subset E \mid \Sigma \text{ consistentă}, \Gamma \subset \Sigma\}.$$

Vom arăta că $(\mathcal{A}, \subset)$ este inductiv ordonată.

Fie $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ o submulțime a lui $\mathcal{A}$ total ordonată: pentru orice $i, j \in I$, avem $\Sigma_i \subset \Sigma_j$ sau $\Sigma_j \subset \Sigma_i$. Vom arăta că $\Sigma_0 = \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$ este un majorant al familiei total ordonate $(\Sigma_i)_{i \in I}$. Observăm întîi că $\Gamma \subset \Sigma_0$.

Presupunem prin absurd că $\Sigma_0$ ar fi inconsistentă, deci există $\varphi \in E$, astfel încît $\Sigma_0 \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$. Aplicînd Propoziția 1, (ii), § 1, există o submulțime finită $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ a lui $\Sigma_0$, astfel încît

$$\{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi).$$

Vom presupune că $\psi_1 \in \Sigma_{i_1}, \ldots, \psi_m \in \Sigma_{i_m}$, cu $i_1, \ldots, i_m \in I$. Cum $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ este total ordonată, există $i_k \in \{i_1, \ldots, i_m\}$, astfel încît



$$\Sigma_{i_j} \subset \Sigma_{i_k}, \text{ pentru orice } j = 1, \ldots, m.$$

Atunci $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \subset \Sigma_{i_k}$, deci conform Propoziției 1, (i), § 1, rezultă

$$\Sigma_{i_k} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi).$$

Deci, conform Propoziției 4, $\Sigma_{i_k}$ este inconsistentă, ceea ce contrazice ipoteza că $\Sigma_{i_k} \in \mathcal{A}$. Rezultă că $\Sigma_0$ este consistentă, deci $\Sigma_0 \in \mathcal{A}$.

Este evident că

$$\Sigma_i \subset \Sigma_0, \text{ pentru orice } i \in I,$$

deci $\Sigma_0$ este un majorant al lui $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$, ceea ce arată că $(\mathcal{A}, \subset)$ este inductiv ordonată.

Aplicînd axioma lui Zorn rezultă existența unui element maximal al lui $(\mathcal{A}, \subset)$, deci a unei mulțimi maximal consistente $\Delta$ astfel încît $\Gamma \subset \Delta$.

<u>PROPOZIȚIA 8</u>. (<u>teorema de completitudine</u>). Pentru orice enunț $\varphi \in E$, avem

$$\vdash \varphi \Longleftrightarrow \models \varphi.$$

<u>Demonstrație</u>: Implicația $\Longrightarrow$ este Propoziția 2.

Presupunem acum că $\models \varphi$. Dacă $\nvdash \varphi$, atunci avem $\nvdash \neg\neg\varphi$. Intr-adevăr, dacă $\vdash \neg\neg\varphi$, atunci din $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ prin aplicarea lui modus ponens ar rezulta $\vdash \varphi$.

Relația $\nvdash \neg\neg\varphi$ este tot una cu $\emptyset \nvdash \neg\neg\varphi$. Aplicînd Propoziția 5, rezultă că $\emptyset \cup \{\neg\varphi\} = \{\neg\varphi\}$ este o mulțime consistentă.

Atunci, conform Propoziției 7, avem o mulțime maximal consistentă $\Delta$, astfel încît $\{\neg\varphi\} \subset \Delta$, deci $\neg\varphi \in \Delta$.

Definim acum o interpretare $h: V \longrightarrow L_2$ prin

$$h(v) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } v \in \Delta \\ o, \text{ dacă } \neg v \in \Delta \end{cases}$$

pentru orice $v \in V$. Vom arăta că pentru orice $\psi \in E$, avem:

(1) $$\tilde{h}(\psi) = 1 \Longleftrightarrow \psi \in \Delta.$$

Pentru aceasta, este necesar să stabilim următoarele proprietăţi ale lui $\Delta$:

(2) $\Delta \vdash \psi \Longrightarrow \psi \in \Delta$, pentru orice $\psi \in E$.

(3) Pentru orice $\psi \in E$, avem $\psi \in \Delta$ sau $\neg \psi \in \Delta$.

(4) Pentru orice $\psi, \chi \in E$, avem:

$$(\psi \rightarrow \chi) \in \Delta \Longleftrightarrow \neg \psi \in \Delta \text{ sau } \chi \in \Delta$$

Pentru a demonstra (2), propunem prin absurd că $\Delta \vdash \psi$ şi $\psi \notin \Delta$, deci

$$\Delta \subsetneqq \Delta \cup \{\psi\}.$$

Avînd în vedere că $\Delta$ este o mulţime maximal consistentă, rezultă că $\Delta \cup \{\psi\}$ este inconsistentă. Conform Propoziţiei 5, obţinem $\Delta \vdash \neg \psi$.

Din Propoziţia 7, § 2, rezultă că pentru orice $\chi \in E$, avem

$$\Delta \vdash \psi \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \chi)$$

Ţinînd seama de $\Delta \vdash \psi$, $\Delta \vdash \neg \psi$ şi aplicînd de două ori modus ponens rezultă $\Delta \vdash \chi$, pentru orice $\chi \in E$, deci $\Delta$ ar fi inconsistentă. Contradicţia este evidentă, deci $\psi \in \Delta$. Cu aceasta, (2) a fost demonstrată.

Fie acum $\psi \in E$, astfel încît $\psi \notin \Delta$, deci $\Delta \cup \{\psi\}$ este inconsistentă, din cauza faptului că $\Delta$ este maximal consistentă. Conform Propoziţiei 5, avem $\Delta \vdash \neg \psi$, deci din (2) rezultă $\neg \psi \in \Delta$. Am stabilit şi proprietatea (3).

Să probăm implicaţia $\Longrightarrow$ din (4). Fie $(\psi \rightarrow \chi) \in \Delta$ şi presupunem prin absurd că $\neg \psi \notin \Delta$ şi $\chi \notin \Delta$. Conform (3), de aici ob-



ţinem că $\psi \in \Delta$ şi $\neg \chi \in \Delta$. Propoziţia 13, § 2 ne spune că

$$\Delta \vdash \psi \rightarrow [\neg \chi \rightarrow \neg (\psi \rightarrow \chi)]$$

Din $\psi \in \Delta$ şi $\neg \chi \in \Delta$ deducem $\Delta \vdash \psi$ şi $\Delta \vdash \neg \chi$, de unde deducem aplicînd de două ori modus ponens relaţiei precedente că $\Delta \vdash \neg (\psi \rightarrow \chi)$. Din această relaţie şi din $(\psi \rightarrow \chi) \in \Delta$ (deci $\Delta \vdash \psi \rightarrow \chi$), la fel ca în demonstraţia proprietăţii (2) se deduce că $\Delta$ este inconsistent, ceea ce este o contradicţie. Rezultă $\neg \psi \in \Delta$ sau $\chi \in \Delta$.

Pentru implicaţia $\Longleftarrow$, presupunem $\neg \psi \in \Delta$ deci $\Delta \vdash \neg \psi$. Conform Propoziţiei 8, § 2 avem

$$\Delta \vdash \neg \psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$$

deci aplicînd modus ponens rezultă $\Delta \vdash (\psi \rightarrow \chi)$, ceea ce ne dă $(\psi \rightarrow \chi) \in \Delta$ (vezi (2)).

Dacă $\chi \in \Delta$, atunci $\Delta \vdash \chi$. Aplicînd modus ponens pentru

$$\Delta \vdash \chi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \qquad \text{A 1}$$

rezultă $\Delta \vdash (\psi \rightarrow \chi)$, deci $(\psi \rightarrow \chi) \in \Delta$, conform (2).

Cu aceasta şi (4) a fost demonstrată. Vom stabili acum relaţia (1) prin inducţie:

(a) Dacă $\psi$ este o variabilă propoziţională $v \in V$, atunci avem

$$\tilde{h}(v) = h(v) = 1 \Longleftrightarrow v \in \Delta.$$

prin definiţia lui h.

(b) Dacă $\psi = \neg \psi'$ şi pentru $\psi'$ presupunem (1) adevărată, atunci avem:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\psi) = 1 &\Longleftrightarrow \tilde{h}(\neg \psi') = 1 \\ &\Longleftrightarrow \tilde{h}(\psi') = o && \text{(definiţia lui } \tilde{h}) \\ &\Longleftrightarrow \psi' \notin \Delta && \text{(ipoteza inducţiei)} \\ &\Longleftrightarrow \neg \psi' \in \Delta && (3) \\ &\Longleftrightarrow \psi \in \Delta \end{aligned}$$

(c) Dacă $\psi=\psi'\to\chi$ şi pentru $\psi',\chi$ presupunem (1) adevărată, atunci avem:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(\psi)=1 &\iff \tilde{h}(\psi'\to\chi)=1\\
&\iff \tilde{h}(\psi')=0 \text{ sau } \tilde{h}(\chi)=1 && \text{(definiţia lui } \tilde{h})\\
&\iff \tilde{h}(\psi')\neq 1 \text{ sau } \tilde{h}(\chi)=1\\
&\iff \psi'\in\Delta \text{ sau } \chi\in\Delta && \text{(ipoteza inducţiei)}\\
&\iff \neg\psi'\in\Delta \text{ sau } \chi\in\Delta && (3)\\
&\iff (\psi'\to\chi)\in\Delta && (4)\\
&\iff \psi\in\Delta
\end{aligned}$$

Deci interpretarea h verifică (1).

La începutul demonstraţiei am stabilit că $\neg\varphi\in\Delta$, deci conform (1) rezultă $\tilde{h}(\neg\varphi)=1$, adică $\tilde{h}(\varphi)=0$.

Dar $\models\varphi$ înseamnă că $\tilde{h}(\varphi)$, deci am obţinut o contradicţie, ceea ce face să avem $\vdash\varphi$.

In acest fel, teorema de completitudine a fost demonstrată complet.

OBSERVATII: (i) In demonstraţia de mai sus s-a folosit aproape implicit următoarea proprietate: pentru orice mulţime consistentă $\Gamma$ şi pentru orice $\varphi\in E$, nu putem avea simultan $\Gamma\vdash\varphi$ şi $\Gamma\vdash\neg\varphi$.

Intr-adevăr, presupunînd $\Gamma\vdash\varphi$ şi $\Gamma\vdash\neg\varphi$, atunci pentru orice $\psi\in E$, din

$$\Gamma\vdash\varphi\to(\neg\varphi\to\psi) \quad \text{(Propoziţia 7, § 2)}$$

se poate deduce aplicînd de două ori modus ponens că $\Gamma\vdash\psi$, ceea ce contrazice faptul că $\Gamma$ este consistent.

Această observaţie mai poate fi dedusă şi din Propoziţia 3.

(ii) Semnificaţia acestei teoreme este cu totul deosebită; ea identifică teoremele formale ale sistemului formal al calculului propoziţional cu enunţurile universal adevărate. De asemenea,



ea ne dă un procedeu comod de verificare a faptului că un enunţ este o teoremă formală.

(iii) Teorema de completitudine a fost stabilită (pentru cazul mai general al calculului predicatelor) de K.Gödel, în 1930. Ulterior i s-au dat numeroase alte demonstraţii şi a fost extinsă şi la alte sisteme formale. Printre alte demonstraţii, menţionăm una algebrică, cu ajutorul algebrelor Boole.

PROPOZITIA 9. Orice mulţime consistentă $\Gamma\subset E$ are un model.

Demonstraţie. Vom schiţa numai această demonstraţie, fiind foarte asemănătoare cu cea a propoziţiei precedente.

Conform Propoziţiei 7, există o mulţime maximal consistentă $\Delta$ astfel încît $\Gamma\subset\Delta$. La fel ca în demonstraţia propoziţiei precedente, se arată că

(1) $\Delta\vdash\varphi \Rightarrow \varphi\in\Delta$, pentru orice $\varphi\in E$

(2) Dacă $\varphi\in E$, atunci $\varphi\in\Delta$ sau $\neg\varphi\in\Delta$

(3) $(\varphi\to\psi)\in\Delta \iff \neg\varphi\in\Delta$ sau $\psi\in\Delta$.

Se defineşte interpretarea $h: V\to L_2$ prin

$$h(v)=\begin{cases}1, & \text{dacă } v\in\Delta\\ 0, & \text{dacă } v\notin\Delta\end{cases}, \text{ pentru orice } v\in V$$

şi se arată, cu ajutorul proprietăţilor (1) - (3) că pentru orice $\varphi\in E$ avem:

(4) $\tilde{h}(\varphi)=1 \iff \varphi\in\Delta$

Cum $\Gamma\subset\Delta$, este evident conform (4) că

$\tilde{h}(\varphi)=1$, pentru orice $\varphi\in\Gamma$,

deci h este un model al lui $\Gamma$.

Corolar. Pentru orice $\varphi\in E$ şi pentru orice $\Gamma\subset E$, avem

$$\Gamma\vdash\varphi \iff \Gamma\models\varphi.$$

**Demonstrație:** $\Rightarrow$: Propoziția 3.

$\Leftarrow$: Presupunînd $\Gamma \not\vdash \varphi$, la fel ca în demonstrația Propoziției 8, avem $\Gamma \not\vdash \neg\neg\varphi$, deci $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este consistent. Va exista deci un model $f: V \to L_2$ al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. $f$ este un model al lui $\Gamma$, dar nu al lui $\varphi$, deci $\Gamma \not\models \varphi$.

**OBSERVAȚIE.** Deducția din ipoteze „$\Gamma \vdash \varphi$" se mai numește deducție sintactică, iar „$\Gamma \models \varphi$" deducție semantică. Corolarul de mai sus identifică cele două feluri de „deducție", motiv pentru care se numește „teorema de completitudine extinsă".

## § 4. CONECTORII $\vee, \wedge, \leftrightarrow$.

Axiomele sistemului formal L au fost formulate folosind numai conectorii $\neg$, $\to$. Ceilalți conectori $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ au fost introduși prin:

$$\varphi \vee \psi = \neg\varphi \to \psi$$

$$\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

**PROPOZIȚIA 1:** Pentru orice interpretare $h: V \to L_2$ a lui L avem:

$$\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$$

$$\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$$

$$\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$$

**Demonstrație.** Operațiile din dreapta au loc în algebra Boole $L_2$. Vom avea deci:

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\varphi \vee \psi) &= \tilde{h}(\neg\varphi \to \psi)\\ &= \neg\tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)\\ &= \neg\neg\tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)\\ &= \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) &= \tilde{h}(\neg(\varphi \to \neg\psi))\\ &= \neg(\tilde{h}(\varphi) \to \neg\tilde{h}(\psi))\\ &= \neg(\neg\tilde{h}(\varphi) \vee \neg\tilde{h}(\psi))\\ &= \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) &= \tilde{h}((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))\\ &= (\tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)) \wedge (\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi))\\ &= \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi).\end{aligned}$$

**Definiția 1.** Pentru orice enunț $\varphi$ definim dualul lui $\varphi$, notat $\varphi^d$, prin:

(i) $v^d = v$, pentru orice $v \in V$.

(ii) $(\neg\psi)^d = \neg\psi^d$, dacă $\varphi = \neg\psi$.

(iii) $(\psi \to \chi)^d = \neg\psi^d \wedge \chi^d$, dacă $\varphi = \psi \to \chi$.

Următoarea propoziție ne va arăta că $\wedge$ și $\vee$ sînt noțiuni duale:

**PROPOZIȚIA 2.**

(a) $\vdash (\varphi \wedge \psi)^d \leftrightarrow \varphi^d \vee \psi^d$

(b) $\vdash (\varphi \vee \psi)^d \leftrightarrow \varphi^d \wedge \psi^d$

(c) $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^{dd}$

(d) dacă f,g sînt interpretări și dacă $\tilde{f}(v) = \tilde{g}(\neg v)$ pentru orice $v \in V$, atunci $\tilde{f}(\varphi) = \tilde{g}(\neg\varphi^d)$, pentru orice enunț $\varphi$.

(e) $\Gamma \vdash \varphi \iff \{\neg\psi^d \mid \psi \in \Gamma\} \vdash \neg\varphi^d$

(f) $\vdash \varphi \iff \vdash \neg\varphi^d$

(g) $\vdash \varphi \to \psi \iff \vdash \psi^d \to \varphi^d$

(h) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \iff \vdash \varphi^d \leftrightarrow \psi^d$.

**Demonstrație:** (a)

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge \psi)^d &= (\neg(\varphi \to \neg\psi))^d = \neg(\varphi \to \neg\psi)^d\\ &= \neg(\neg\varphi^d \wedge (\neg\psi)^d) = \neg(\neg\varphi^d \wedge \neg\psi^d)\end{aligned}$$

Vom arăta că $\vdash[\neg(\neg\varphi^d\wedge\neg\psi^d)\to(\varphi^d\vee\psi^d)]$ folosind teorema de completitudine: pentru orice interpretare $h: V\to L_2$, avem:

$$\tilde h[\neg(\neg\varphi^d\wedge\neg\psi^d)\to(\varphi^d\vee\psi^d)] =$$
$$=\neg[\neg\tilde h(\varphi^d)\wedge\neg\tilde h(\psi^d)]\to[\tilde h(\varphi^d)\vee\tilde h(\psi^d)] =$$
$$= [\tilde h(\varphi^d)\vee\tilde h(\psi^d)]\to[\tilde h(\varphi^d)\vee\tilde h(\psi^d)] = 1,$$

deoarece într-o algebră Boole $(x\to x) = 1$.

(b) Analog cu (a).

(c) Prin inducţie:

- Pentru $\varphi = v\in V$, avem $\varphi^{dd} = v^{dd} = v = \varphi$, deci $\vdash \varphi\to\varphi$.
- Pentru $\varphi=\neg\psi$, presupunem $\vdash\psi\to\psi^{dd}$ şi arătăm pentru $\neg\psi$:

Prin definiţie avem $(\neg\psi)^{dd} = \neg\psi^{dd}$ şi

$$(\psi\to\psi^{dd})\to(\neg\psi\to\neg\neg\psi^{dd})$$

este o tautologie, după cum se poate arăta cu teorema de completitudine.

Aplicînd modus ponens, rezultă

$$\vdash(\neg\psi\to(\neg\psi)^{dd}).$$

- Pentru $\varphi=\psi\to\chi$, presupunem $\vdash\psi\to\psi^{dd}$ şi $\vdash\chi\to\chi^{dd}$ şi arătăm că

$$\vdash[(\psi\to\chi)\to(\psi\to\chi)^{dd}]$$

Avem egalităţile:

$$(\psi\to\chi)^{dd} = (\neg\psi^d\wedge\chi^d)^d$$
$$= (\neg(\neg\psi^d\to\neg\chi^d))^d$$
$$= \neg(\neg\psi^d\to\neg\chi^d)^d$$
$$= \neg((\neg\psi^d)^d\wedge(\neg\chi^d)^d)$$
$$= \neg(\neg\neg\psi^{dd}\wedge\neg\chi^{dd})$$
$$= \neg\neg(\neg\neg\psi^{dd}\to\neg\neg\chi^{dd})$$



Cu ajutorul teoremei de completitudine se arată atunci că

$$\vdash(\psi\to\psi^{dd})\to((\chi\to\chi^{dd})\to[(\psi\to\chi)\to(\psi\to\chi)^{dd}])$$

Aplicînd de două ori modus ponens rezultă

$$\vdash[(\psi\to\chi)\to(\psi\to\chi)^{dd}]$$

(d) Prin inducţie:

- Pentru $\varphi = v\in V$, este evident, conform ipotezei.
- Presupunînd $\varphi=\neg\psi$ şi $\tilde f(\psi) = \tilde g(\neg\psi^d)$, atunci rezultă:

$$\tilde f(\varphi) = \tilde f(\neg\psi) = \neg\tilde f(\psi) = \neg\tilde g(\neg\psi^d) =$$
$$= \tilde g(\neg\neg\psi^d) = \tilde g(\neg(\neg\psi)^d) = \tilde g(\neg\varphi^d).$$

- Presupunînd $\varphi=\psi\to\chi$ şi $\tilde f(\psi) = \tilde g(\neg\psi^d)$, $\tilde f(\chi) = \tilde g(\neg\chi^d)$, atunci avem:

$$\tilde f(\varphi) = \tilde f(\psi\to\chi)$$
$$= \tilde f(\psi)\to\tilde f(\chi)$$
$$= \tilde g(\neg\psi^d)\to\tilde g(\neg\chi^d)$$
$$= \neg\tilde g(\psi^d)\to\neg\tilde g(\chi^d)$$
$$= \neg(\neg\tilde g(\psi^d)\wedge\tilde g(\chi^d))$$
$$= \neg\tilde g(\neg\psi^d\wedge\chi^d)$$
$$= \neg\tilde g((\psi\to\chi)^d) = \tilde g(\neg\varphi^d).$$

(e) Se demonstrează folosind (d) şi teorema de completitudine extinsă.

(f) Rezultă din (e), luînd $\Gamma = \emptyset$.

(g) Ţinînd seama de $(\varphi\to\psi)^d = \neg\varphi^d\wedge\psi^d$, rezultă

$$\vdash\neg(\varphi\to\psi)^d\to(\psi^d\to\varphi^d).$$

Aplicînd (f), rezultă

$$\vdash\varphi\to\psi\Longleftrightarrow\psi^d\to\varphi^d.$$

(h) Rezultă din (g).

Definiția 2: Dacă $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in E$, vom scrie

$$\bigvee_{i=1}^{n}\varphi_i = (\ldots((\varphi_1 \vee \varphi_2)\vee \varphi_3)\vee \ldots \vee \varphi_n)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_i = (\ldots((\varphi_1 \wedge \varphi_2)\wedge \varphi_3)\wedge \ldots \wedge \varphi_n)$$

PROPOZIȚIA 3: Pentru orice interpretare $h: V \longrightarrow L_2$, avem:

$\tilde{h}\left(\bigvee_{i=1}^{n}\varphi_i\right) = 1 \Longleftrightarrow$ există $i \in \{1,\ldots,n\}$, astfel încît $\tilde{h}(\varphi_i) = 1$.

$\tilde{h}\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_i\right) = 1 \Longleftrightarrow \tilde{h}(\varphi_i) = 1$, pentru orice $i = 1,\ldots,n$.

Demonstrația acestei propoziții este un simplu exercițiu.

PROPOZIȚIA 4: Fie $\Gamma, \Delta \subset E$ și $\Delta \neq \emptyset$. Dacă $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$, atunci există $m \in N$ și $\varphi_1,\ldots,\varphi_m \in \Delta$, astfel încît

$$\Gamma \vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m \longrightarrow \psi).$$

Demonstrație. Conform Propoziției 1, (ii), § 2, rezultă că putem presupune $\Delta$ finită.

Este deci suficient să demonstrăm prin inducție asupra lui $m$ că pentru orice $m \in N$ și pentru orice $\varphi_1,\ldots,\varphi_m \in E$, dacă $\Gamma \cup \{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\} \vdash \psi$ atunci

$$\Gamma \vdash (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m \longrightarrow \psi).$$

Pentru $m = 1$, dacă $\Gamma \cup \{\varphi_1\} \vdash \psi$, din teorema deducției rezultă $\Gamma \vdash (\varphi_1 \longrightarrow \psi)$. Presupunem afirmația adevărată pentru $m$ și pentru toate enunțurile. Dacă $\Gamma \cup \{\varphi_1,\ldots,\varphi_{m+1}\} \vdash \psi$, atunci aplicînd teorema deducției avem

$$\Gamma \cup \{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\} \vdash (\varphi_{m+1} \longrightarrow \psi).$$

Conform ipotezei inducției, avem



$$\Gamma \vdash \left[\bigwedge_{i=1}^{m}\varphi_i \longrightarrow (\varphi_{m+1} \longrightarrow \psi)\right].$$

Folosind Propoziția 3 și teorema de completitudine se poate demonstra că

$$\vdash \left[\bigwedge_{i=1}^{m}\varphi_i \longrightarrow (\varphi_{m+1} \longrightarrow \psi)\right] \longrightarrow \left(\bigwedge_{i=1}^{m+1}\varphi_i \longrightarrow \psi\right).$$

Aplicînd modus ponens, se obține

$$\Gamma \vdash \left(\bigwedge_{i=1}^{m+1}\varphi_i \longrightarrow \psi\right)$$

deci proprietatea este verificată și pentru $m+1$.

PROPOZIȚIA 5: Pentru orice mulțime $\Gamma$ de enunțuri, următoarele afirmații sînt echivalente:

(i) $\Gamma$ este inconsistentă.

(ii) Există $m \in N$ și $\varphi_1,\ldots,\varphi_m \in \Gamma$, astfel încît

$$\vdash \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i .$$

Demonstrație: (i) $\Longrightarrow$ (ii) : Presupunînd că $\Gamma$ este inconsistentă, avem

$$\Gamma \vdash \psi \wedge \neg \psi, \text{ pentru orice } \psi \in E.$$

Cum $\emptyset$ este consistentă, avem $\Gamma \neq \emptyset$. Conform propoziției precedente, există $m \in N$ și $\varphi_1,\ldots,\varphi_m \in \Gamma$, astfel încît

$$\vdash \bigwedge_{i=1}^{m}\varphi_i \longrightarrow \psi \wedge \neg \psi .$$

Cu ajutorul teoremei de completitudine, se poate arăta că

$$\vdash \left[\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i \to \psi \wedge \neg \psi\right] \to \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i .$$

Aplicînd modus ponens, rezultă $\vdash \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Presupunînd prin absurd că $\Gamma$ este consistentă, rezultă că $\Gamma$ are un model $f: V \to L_2$. Conform (ii), există $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \Gamma$, astfel încît $\vdash \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i$, deci $\models \bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i$. Rezultă $\tilde{f}\left(\bigvee_{i=1}^{m} \neg \varphi_i\right) = 1$, deci

$$\tilde{f}(\varphi_i) = 0, \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, n.$$

Aceasta contrazice faptul că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ şi că f este un model al lui $\Gamma$.

## § 5. ALGEBRA LINDENBAUM - TARSKI

Pentru orice $\Gamma \subset E$, consistentă, vom considera relaţia binară $\sim_\Gamma$ pe mulţimea E a enunţurilor, definită în felul următor:

$$\varphi \sim_\Gamma \psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

Lema 1. $\sim_\Gamma$ este o relaţie de echivalenţă pe E.

Demonstraţie. Trebuie să stabilim proprietăţile următoare:

(i ) $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi)$

(ii ) $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow \Gamma \vdash (\psi \leftrightarrow \varphi)$

(iii) $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi), \Gamma \vdash (\psi \leftrightarrow \chi) \Rightarrow \Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \chi)$

Proprietatea (i) rezultă în baza Propoziţiei 2, § 2. Vom demonstra, spre exemplu pe (iii), pe baza teoremei de completitudine extinsă.

Fie $f: V \to L_2$ o interpretare astfel încît $\tilde{f}(\gamma) = 1$, pentru orice $\gamma \in \Gamma$. Conform teoremei de completitudine extinsă avem



$\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ şi $\Gamma \vdash (\psi \leftrightarrow \chi)$, deci

$$\tilde{f}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1, \ \tilde{f}(\psi \leftrightarrow \chi) = 1.$$

Aplicînd Propoziţia 1, § 4, rezultă

$$\tilde{f}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{f}(\psi) = 1, \ \tilde{f}(\psi) \leftrightarrow \tilde{f}(\chi) = 1,$$

de unde avem $\tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\psi)$ şi $\tilde{f}(\psi) = \tilde{f}(\chi)$, deci $\tilde{f}(\varphi) = f(\chi)$.

Aşadar $\tilde{f}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{f}(\chi) = 1$, de unde se obţine $\tilde{f}(\varphi \leftrightarrow \chi) = 1$. Am arătat că $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \chi)$, deci $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \chi)$.

Analog (dar mai simplu) se poate demonstra şi (ii).

Exerciţiu: Să se demonstreze sintactic proprietăţile (ii) şi (iii).

Lema 2: Pentru orice $\varphi, \varphi', \psi, \psi' \in E$, avem:

(a) $\varphi \sim_\Gamma \psi \Longrightarrow \neg \varphi \sim_\Gamma \neg \psi$;

(b) $\varphi \sim_\Gamma \psi, \varphi' \sim_\Gamma \psi' \Longrightarrow \varphi \vee \varphi' \sim_\Gamma \psi \vee \psi', \varphi \wedge \varphi' \sim_\Gamma \psi \wedge \psi'$;

(c) $\varphi \wedge \neg \varphi \sim_\Gamma \psi \wedge \neg \psi$; $\varphi \vee \neg \varphi \sim_\Gamma \psi \vee \neg \psi$.

Demonstraţie: Folosind teorema de completitudine, totul se reduce la a arăta că:

$$\Gamma \models (\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow \Gamma \models (\neg \varphi \leftrightarrow \neg \psi)$$

$$\Gamma \models (\varphi \leftrightarrow \psi), \ \Gamma \models (\varphi' \leftrightarrow \psi') \Rightarrow \begin{cases} \Gamma \models (\varphi \vee \varphi' \leftrightarrow \psi \vee \psi') \\ \Gamma \models (\varphi \wedge \varphi' \leftrightarrow \psi \wedge \psi') \end{cases}$$

$$\Gamma \models [(\varphi \wedge \neg \varphi) \leftrightarrow (\psi \wedge \neg \psi)]$$

$$\Gamma \models [(\varphi \vee \neg \varphi) \leftrightarrow (\psi \vee \neg \psi)]$$

Vom demonstra, de exemplu, pe ultima din aceste relaţii. Fie $f: V \to L_2$ o interpretare oarecare. Atunci avem

$$\begin{aligned} \tilde{f}([(\varphi \vee \neg \varphi) \leftrightarrow (\psi \vee \neg \psi)]) &= (\tilde{f}(\varphi) \vee \neg \tilde{f}(\varphi)) \leftrightarrow (\tilde{f}(\psi) \vee \neg \tilde{f}(\psi)) \\ &= 1 \leftrightarrow 1 = 1. \end{aligned}$$

deci $\models [(\varphi \vee \neg\varphi) \longrightarrow (\psi \vee \neg\psi)]$ . Cu atît mai mult vom avea:

$$\Gamma \models [(\varphi \vee \neg\varphi) \longrightarrow (\psi \vee \neg\psi)].$$

Demonstrarea celorlalte proprietăţi (în aceeaşi manieră) este un exerciţiu util.

Exerciţiu: Să se dea o demonstraţie sintactică a acestei leme.

Considerăm acum mulţimea cît $B_\Gamma = E/\sim_\Gamma$. Conform celor două leme precedente, în $B_\Gamma$ putem defini următoarele operaţii:

$$\hat{\varphi} \vee \hat{\psi} = \widehat{\varphi \vee \psi}$$
$$\hat{\varphi} \wedge \hat{\psi} = \widehat{\varphi \wedge \psi}$$
$$\neg\hat{\varphi} = \widehat{\neg\varphi}$$
$$0 = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}$$
$$1 = \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}.$$

PROPOZITIA 1: $B_\Gamma$ este o algebră Boole.

Lăsăm demonstraţia acestei propoziţii pe seama cititorului.

$B_\Gamma$ se numeşte algebra Lindenbaum-Tarski asociată lui L şi lui $\Gamma$.

Definiţia 1. Fie B o algebră Boole oarecare şi $X \subset B$. Spunem că B este algebra Boole liberă generată de X dacă pentru orice algebră Boole B' şi pentru orice funcţie $f: X \longrightarrow B'$ există un unic morfism de algebre Boole $g: B \longrightarrow B'$ astfel încît $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$.

Exerciţiu: Orice două algebre Boole generate de X sînt izomorfe.

PROPOZITIA 2. $B_\emptyset$ este algebra Boole liberă generată de V.

Demonstraţie: Fie $f: V \longrightarrow B'$ o funcţie arbitrară (B' fiind o algebră Boole). In acelaşi mod ca în Propoziţia 1, § 3 se arată că există o unică funcţie $\tilde{f}: E \longrightarrow B'$ astfel încît:



(a) $\tilde{f}(v) = f(v)$, pentru orice $v \in V$.

(b) $\tilde{f}(\neg\varphi) = \neg\tilde{f}(\varphi)$

(c) $\tilde{f}(\varphi \longrightarrow \psi) = \tilde{f}(\varphi) \longrightarrow \tilde{f}(\psi)$

(d) $\tilde{f}(\varphi \vee \psi) = \tilde{f}(\varphi) \vee \tilde{f}(\psi)$

(e) $\tilde{f}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{f}(\varphi) \wedge \tilde{f}(\psi)$

(f) $\tilde{f}(\varphi \longleftrightarrow \psi) = \tilde{f}(\varphi) \longleftrightarrow \tilde{f}(\psi)$,

pentru orice $\varphi, \psi \in E$. Observăm că operaţiile din dreapta au loc în algebra Boole B'. Exact ca în demonstraţia Propoziţiei 2, § 3, se poate arăta că $\tilde{f}(\varphi) = 1$ pentru orice teoremă formală $\varphi$ .

Mulţimea V a variabilelor lui L poate fi considerată submulţime a lui $B_\emptyset$ prin funcţia injectivă $v \longmapsto \hat{v}$. Va trebui să probăm că

$$v \neq v' \Longrightarrow \hat{v} \neq \hat{v}', \text{ pentru orice } v, v' \in V.$$

Intr-adevăr, să presupunem prin absurd că $v \neq v'$, dar $v \sim_\emptyset v'$, adică $\vdash (v \longleftrightarrow v')$.

Dacă $v \neq v'$ atunci putem găsi o interpretare $h: V \longrightarrow L_2$ astfel încît $h(v) = 0$ şi $h(v') = 1$, deci $h(v) \neq h(v')$. Insă avem $\models (v \longleftrightarrow v')$, deci

$$\tilde{h}(v \longleftrightarrow v') = 1,$$

de unde rezultă

$$h(v) \longleftrightarrow h(v') = \tilde{h}(v) \longleftrightarrow \tilde{h}(v') = \tilde{h}(v \longleftrightarrow v') = 1.$$

Se obţine de aici $h(v) = h(v')$. Contradicţia este evidentă, deci implicaţia de mai sus este corectă.

Cu ajutorul funcţiei $\tilde{f}: E \longrightarrow B'$ de mai sus obţinem o funcţie

$$\bar{f}: E/_{\sim_\emptyset} \longrightarrow B',$$

definită astfel:

$\bar{f}(\hat{\varphi}) = \tilde{f}(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$.

Faptul că definiţia lui $\bar{f}$ nu depinde de reprezentanţi:

$$\varphi \sim_{\Gamma} \psi \Rightarrow \tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\psi)$$

rezultă astfel:

Dacă $\varphi \sim_{\Gamma} \psi$, atunci $\vdash (\varphi \to \psi)$, deci

$$\tilde{f}(\varphi \to \psi) = 1.$$

Din proprietatea (f) de mai sus se obţine

$\tilde{f}(\varphi) \to \tilde{f}(\psi) = \tilde{f}(\varphi \to \psi) = 1$,

deci $\tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\psi)$.

Aplicînd proprietăţile (a) - (f) de mai sus rezultă imediat că $\bar{f}: B_{\Gamma} \to B'$ este un morfism de algebre Boole.

Pentru orice $v \in V$, avem ,

$\bar{f}(\hat{v}) = \tilde{f}(v) = f(v)$.

Cu aceasta propoziţia a fost complet demonstrată.

<u>OBSERVAŢIE</u>: In demonstraţia de mai sus $\hat{v}$ şi $v$ s-au identificat.

<u>PROPOZIŢIA 3</u>. Fie $F$ un filtru al algebrei Lindenbaum-Tarski $B_{\Gamma}$. Dacă

$$\Delta = \bigcup_{\hat{\varphi} \in F} \hat{\varphi}$$

atunci $\Gamma \subset \Delta$ şi $B_{\Gamma/F}$ este izomorfă cu $B_{\Delta}$.

<u>Demonstraţie</u>. Reamintim că $\hat{\varphi}$ este clasa de echivalenţă a lui $\varphi \in E$ în raport cu relaţia de echivalenţă $\sim_{\Gamma}$. Pentru că avem trei mulţimi cît vom nota:

$[\varphi]_{\Gamma}$ : clasa de echivalenţă a lui $\varphi$ în raport cu $\sim_{\Gamma}$;

$[\varphi]_{\Delta}$ : clasa de echivalenţă a lui $\varphi$ în raport cu $\sim_{\Delta}$;



$[x]_F$ : clasa de echivalenţă a lui $x \in B_{\Gamma}$ în raport cu relaţia $\sim_F$ asociată filtrului $F$.

Este evident că $\hat{\varphi} = [\varphi]_{\Gamma}$ şi $\Delta = \bigcup_{[\varphi]_{\Gamma} \in F} [\varphi]_{\Gamma}$

Să arătăm întîi că $\Gamma \subset \Delta$:

$$\begin{aligned}
\varphi \in \Gamma &\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \\
&\Rightarrow \Gamma \models \varphi \\
&\Rightarrow \Gamma \models (\varphi \to (\varphi \vee \neg \varphi)) \\
&\Rightarrow \Gamma \vdash (\varphi \to (\varphi \vee \neg \varphi)) \\
&\Rightarrow \varphi \sim_{\Gamma} (\varphi \vee \neg \varphi) \\
&\Rightarrow [\varphi]_{\Gamma} = [\varphi \vee \neg \varphi]_{\Gamma} = 1 \\
&\Rightarrow [\varphi]_{\Gamma} \in F \Rightarrow \varphi \in \Delta .
\end{aligned}$$

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, vom arăta că

$$\big[[\varphi]_{\Gamma}\big]_F = \big[[\psi]_{\Gamma}\big]_F \Longleftrightarrow [\varphi]_{\Delta} = [\psi]_{\Delta}$$

Avem implicaţiile:

$$\begin{aligned}
\big[[\varphi]_{\Gamma}\big]_F = \big[[\psi]_{\Gamma}\big]_F &\Rightarrow \big([\varphi]_{\Gamma} \to [\psi]_{\Gamma}\big) \in F \\
&\Rightarrow [\varphi \to \psi]_{\Gamma} \in F \\
&\Rightarrow (\varphi \to \psi) \in \Delta \\
&\Rightarrow [\varphi]_{\Delta} = [\psi]_{\Delta}
\end{aligned}$$

Analog se demonstrează şi cealaltă implicaţie.

Conform celor demonstrate, putem să considerăm funcţia injectivă:

$$f: B_{\Gamma/F} \to B_{\Delta}$$

$f\Big(\big[[\varphi]_{\Gamma}\big]_F\Big) = [\varphi]_{\Delta}$, pentru orice $\big[[\varphi]_{\Gamma}\big]_F \in B_{\Gamma/F}$

Este evident faptul că $f$ este surjectivă. De asemenea, rezultă imediat şi faptul că $f$ este morfism de algebre Boole. Deci $B_{\Gamma/F}$, $B_{\Delta}$ sînt izomorfe.

PROPOZITIA 4: Pentru orice algebră Boole A există un sistem formal al calculului propoziţional şi o mulţime $\Gamma$ de enunţuri ale lui L astfel incît A este izomorfă cu $B_{\Gamma}$.

Demonstraţie. Considerăm limbajul formal L în care mulţimea V a variabilelor este A.

Fie $f: V \longrightarrow A$ funcţia identică. Conform Propoziţiei 2, există un morfism de algebre Boole

$$f^{+}: B_{\emptyset} \longrightarrow A$$

astfel incît

$f^{+}(a) = f(a) = a$, pentru orice $a \in A$.

Deci $f^{+}$ este un morfism surjectiv. Dacă

$F = M_{f^{+}} = \left\{ x \in B_{\emptyset} \mid f^{+}(x) = 1 \right\}$

atunci A este izomorfă cu $B_{\emptyset}/F$ (vezi Capitolul II, corolarul Propoziţiei 3, § 3).

Dacă $\Gamma = \bigcup_{[\varphi]_{\emptyset} \in F} [\varphi]_{\emptyset}$, atunci conform propoziţiei precedente $B_{\emptyset}/_{F}$ şi $B/_{\Gamma}$ sînt izomorfe. Deci A este izomorfă cu $B/_{\Gamma}$.

OBSERVATIE. Această teoremă are o semnificaţie deosebită, arătînd că toate algebrele Boole pot fi obţinute ca algebre Lindenbaum-Tarski.



EXERCITII LA CAPITOLUL III

1. Să se arate că următoarele enunţuri sînt teoreme ale sistemului formal L:

(1) $p \vee p \rightarrow p$

(2) $q \rightarrow p \vee q$

(3) $p \vee q \rightarrow q \vee p$

(4) $p \vee (q \vee r) \rightarrow q \vee (p \vee r)$

(5) $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$

(6) $p \rightarrow p \vee p$

(7) $p \vee \neg p$

(8) $p \vee \neg\neg\neg p$

(9) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

(1o) $p \vee (p \vee q \rightarrow p)$

(11) $\neg p \vee ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$

(12) $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$

(13) $p \vee (q \vee r) \rightarrow p \vee (r \vee q)$

(14) $p \vee (q \vee r) \rightarrow (p \vee q) \vee r$

(15) $(p \vee q) \vee r \rightarrow p \vee (q \vee r)$

(16) $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r \vee p)$

(17) $(q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow p \vee r)$

(18) $(q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee p \rightarrow r \vee p)$

(19) $(\neg p \vee (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(2o) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(21) $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p$

(22) $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg q$

(23) $\neg (p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(24) $\neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

(25) $\neg (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

(26) $\neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

(27) $\neg (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

(28) $p \vee q \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

(29) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow p \vee q$

(3o) $\neg p \rightarrow (p \vee q \rightarrow q)$

(31) $\neg q \rightarrow (p \vee q \rightarrow p)$

(32) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$

(33) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$

(34) $p \vee q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$

(35) $p \vee q \rightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow q)$

(36) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$

(37) $p \vee q \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))$

(38) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p \vee q)$

(39) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q \vee r \rightarrow q \vee r)$

(4o) $p \vee q \rightarrow ((p \vee q \rightarrow r) \rightarrow p \vee r)$

(41) $(q \rightarrow (r \rightarrow s)) \rightarrow (p \vee q \rightarrow (p \vee r \rightarrow p \vee s))$

(42) $p \vee q \vee r \rightarrow (p \vee \neg r \vee s \rightarrow p \vee q \vee s)$

(43) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow \left[(p \rightarrow (r \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow s))\right]$

(44) $(p \vee q \rightarrow p \vee r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$

(45) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow s)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow s))$

(46) $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$



(47) $q \rightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$

(48) $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$

(49) $\neg(p \wedge \neg p)$

(5o) $p \wedge q \rightarrow p$

(51) $p \wedge q \rightarrow q$

(52) $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

(53) $(p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

(54) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(55) $((q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(56) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

(57) $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge \neg r \rightarrow \neg q)$

(58) $p \wedge q \rightarrow (p \rightarrow q)$

(59) $(p \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

(6o) $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

(61) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$

(62) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$

(63) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r \wedge s)$

(64) $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r \vee s)$

(65) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

(66) $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$

(67) $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$

(68) $(p \wedge q \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (q \wedge r \rightarrow \neg p)$

(69) $p \leftrightarrow p$

(7o) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

(71) $((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

(72) $p \leftrightarrow (p \wedge p)$

(73) $p \leftrightarrow (p \vee p)$

(74) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

(75) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

(76) $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

(77) $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

(78) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \leftrightarrow q \wedge r)$

(79) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \vee r \leftrightarrow q \vee r)$

(8o) $(p \leftrightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow r \wedge s)$

(81) $(p \leftrightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \rightarrow (p \vee q \leftrightarrow r \vee s)$

(82) $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

(83) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

(84) $p \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$

(85) $p \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q))$

(86) $p \leftrightarrow p \vee (p \wedge q)$

(87) $p \leftrightarrow p \wedge (p \vee q)$

(88) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

(89) $\neg (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

(9o) $(p \rightarrow \neg q \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(91) $\neg (\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

(92) $(\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$

(93) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$

(94) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow p \wedge q)$

(95) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p \vee q)$

(96) $q \rightarrow (p \leftrightarrow p \wedge q)$

(97) $(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow \neg p$

(98) $(\neg p \rightarrow p) \leftrightarrow p$



(99) $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

(1oo) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

2. Să se demonstreze următoarele reguli de deducţie.

(1) $$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi}$$

(2) $$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi;\ \Gamma_2 \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi}$$

(3) $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$

(4) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$

(5) $$\frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi;\ \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg \psi}{\Gamma \vdash \neg \varphi}$$

(6) $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi;\ \Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$

(7) $$\frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \gamma;\ \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \gamma}{\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \gamma}$$

(8) $\Gamma \cup \{\neg\neg \varphi\} \vdash \varphi$

(9) $$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi;\ \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi \wedge \psi}$$

(1o) $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

(11) $$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

(12) $$\frac{\Gamma_1 \vdash (\varphi \rightarrow \psi),\ \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \vee \psi;\ \Gamma_2 \cup \{\varphi\} \vdash \gamma;\ \Gamma_3 \cup \{\psi\} \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \gamma} \tag{13}$$

3. Să se demonstreze că pentru orice enunţ $\varphi$ există $m, n_1, \ldots, n_m \in N$ şi enunţurile $\varphi_{ij}$, astfel încît

$$\vdash \left(\varphi \longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_i} \varphi_{ij}\right)$$

unde fiecare $\varphi_{ij}$ este o variabilă propoziţională sau negaţia unei variabile propoziţionale pentru $i \leqslant m, j \leqslant n_i$.

4. Pentru orice enunţ $\varphi$ există $m, n_1, \ldots, n_m \in N$ şi enunţurile $\varphi_{ij}$, astfel încît

$$\vdash \left(\varphi \longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n_i} \varphi_{ij}\right)$$

unde pentru orice $i \leqslant m, j \leqslant n_i$, $\varphi_{ij}$ este o variabilă propoziţională sau negaţia unei variabile propoziţionale.

5. Să se arate, pentru orice mulţime $\Sigma$ de enunţuri, că sînt echivalente afirmaţiile următoare:

(i) $\Sigma$ este consistentă.

(ii) Orice parte finită a lui $\Sigma$ este consistentă.

6. Să se arate demonstraţia că axiomele (A 1) - (A 3) ale sistemului formal al calculului propoziţional sînt independente.



CAPITOLUL 4

# Sistemul formal al calculului predicatelor

Un al doilea sistem formal, acela al calculului predicatelor, este subiectul prezentului capitol. In primul paragraf este prezentată construcţia sistemului formal al calculului predicatelor şi proprietăţile sale sintactice.

Al doilea paragraf tratează algebra Lindenbaum-Tarski a sistemului formal al calculului predicatelor, care este o algebră Boole obţinută prin factorizarea mulţimii formulelor printr-o relaţie de echivalenţă canonică. Proprietăţile sintactice ale sistemului formal se vor reflecta în proprietăţi algebrice ale algebrei Lindenbaum-Tarski.

Ultimul paragraf al capitolului defineşte conceptul important de model al unui enunţ şi conţine demonstraţia teoremei de completitudine pentru calculul predicatelor. Această demonstraţie este complet algebrică, bazîndu-se pe proprietăţile algebrei Lindenbaum-Tarski şi pe teorema Rasiowa-Sikorski.

De obicei calculul predicatelor este dezvoltat pe baza calculului propoziţional la care se adaugă axiomele specifice. Am preferat să abordăm acest capitol în altă manieră decît cea aleasă pentru capitolul precedent, pentru a avea în faţă două moduri de demonstraţie: unul algebric, ca cel de faţă, şi unul nealgebric, ca cel din capitolul precedent.

Vom remarca că acest ultim paragraf este doar începutul unui domeniu de mare actualitate al logicii: Teoria modelelor.

## § 1. SISTEMUL FORMAL AL CALCULULUI PREDICATELOR

Fie $\lambda$ o funcţie

$$\lambda : N \longrightarrow N$$

Definiția 1. Printr-o $\lambda$ - structură vom înțelege o pereche ordonată

$$\mathcal{A} = \langle A, \{R_n\}_{n\in N} \rangle,$$

unde A este o mulțime nevidă, numită domeniul structurii A și pentru orice $n \in N$, $R_n$ este o relație $\lambda(n)$ - ară ($R_n \subset A^{\lambda(x)}$).

Definiția 2. Două $\lambda$ - structuri se vor numi structuri similare, iar clasa tuturor $\lambda$ - structurilor se va numi clasă de similaritate.

Notăm cu $\mathcal{C}_\lambda$ clasa tuturor $\lambda$ - structurilor.

Fiecărei $\lambda : N \longrightarrow N$ îi vom asocia un sistem formal $L_\lambda$, numit sistemul formal al calculului predicatelor asociat lui $\lambda$.

Simbolurile primitive ale lui $L_\lambda$ sînt următoarele:

(1) O mulțime numărabilă V de simboluri numite variabile, notate x, y, z, u, v, w, ...

(2) O mulțime numărabilă de simboluri numite predicate:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

Pentru orice $n \in N$, $\lambda(n)$ se va numi gradul predicatului $P_n$.

(3) Simbolul de egalitate =

(4) Conectorii $\neg$ și $\wedge$

(5) Simbolul de cuantificare $\exists$.

(6) Parantezele: ( ), [ ] .

Prin simboluri logice vom înțelege simbolurile $\neg$, $\wedge$ și $\exists$. Celelalte simboluri se vor numi simboluri nelogice.

Un cuvînt va fi un șir finit de simboluri ale lui L.

O formulă atomică sau elementară este un cuvînt care are una din formele următoare:



(1) x = y, unde x, y sînt variabile oarecare

(2) $P_n(x_1, \ldots, x_{\lambda(n)})$, unde $P_n$ este un predicat de ordinul $\lambda(n)$.

OBSERVAȚIE: Aici este punctul unde începe să se observe că $L_\lambda$ este construit astfel încît să exprime formal proprietățile tuturor structurilor din clasa de similaritate $\mathcal{C}_\lambda$. Se vede că

- variabilele x, y, z,... vor reprezenta elementele arbitrare din structurile considerate;
- pentru orice $n \in N$, predicatul $P_n$ este reprezentarea formală a relației $\lambda(n)$ - are $R_n$.

Din mulțimea cuvintelor vom selecta submulțimea formulelor, care vor fi cuvintele „cu sens".

Definiția conceptului de formulă se va face prin inducție. Anume, un cuvînt $\varphi$ este o formulă dacă satisface una din condițiile următoare:

(1) $\varphi$ este o formulă atomică ;

(2) $\varphi = \neg\psi$, unde $\psi$ este o formulă ;

(3) $\varphi = \psi \wedge \chi$, unde $\psi$ și $\chi$ sînt formule ;

(4) $\varphi = (\exists x)\psi$ , unde $\chi$ este o variabilă și $\psi$ este o formulă.

Pe lîngă conectorii $\neg$, $\wedge$ definim următorii conectori:

$$\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$
$$\varphi \rightarrow \psi = \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) = \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\varphi)$$

De asemenea, introducem simbolul de cuantificare $\forall$ prin:

$$(\forall x)\varphi = \neg(\exists x)\neg\varphi$$

<u>Observaţie</u>: (a) Conectorii $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ se citesc astfel:

$\neg$ : non ;

$\wedge$ : şi ; $\vee$: sau;

$\rightarrow$: implică; $\leftrightarrow$: echivalent .

(b) $\exists$ se numeşte <u>cuantificator existenţial</u> şi se citeşte „există", iar $\forall$ se numeşte <u>cuantificator universal</u> şi se citeşte „oricare ar fi" sau „pentru orice".

Dacă într-o formulă apare $\exists x$, atunci $x$ se numeşte <u>variabilă legată</u> sau <u>cuantificată</u>. O variabilă care nu este legată se numeşte <u>liberă</u>.

Mai precis, variabilele libere sînt definite astfel prin inducţie:

(a) orice variabilă ce apare într-o formulă atomică este liberă ;

(b) dacă $x$ este o variabilă liberă a lui $\varphi$ , atunci $x$ este o variabilă liberă a lui $\neg\varphi$;

(c) dacă $x$ este o variabilă liberă a lui $\varphi$ sau a lui $\psi$ , atunci $x$ este o variabilă liberă a lui $\varphi \wedge \psi$ ;

(d) dacă $x$ este o variabilă liberă a lui $\varphi$ definită de variabile $y$, atunci $x$ este o variabilă liberă a lui $(\exists y)\varphi$ .

O formulă în care nu apare nici o variabilă liberă se numeşte <u>enunţ</u>. Vom nota cu $E$ mulţimea enunţurilor, iar cu $F$ mulţimea formulelor lui $L_\lambda$ .

<u>OBSERVATIE</u>: Pentru a specifica că $x_1,\dots,x_n$ sînt variabile libere ale unei formule $\varphi$ , vom nota $\varphi(x_1,\dots,x_n)$. Dacă avem o formulă $\varphi(x)$ şi $y$ este o altă variabilă, atunci prin $\varphi(y)$ vom înţelege formula obţinută înlocuind în $\varphi(x)$ pe $x$ cu $y$ peste tot unde apare $x$.



Pasul următor în descrierea sintaxei lui $L_\lambda$ este definirea <u>teoremelor</u> sale.

<u>Axiomele</u> lui $L_\lambda$ sînt formule care au una din următoarele forme:

A 1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

A 2. $[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$

A 3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

A 4. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$

A 5. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$

A 6. $(\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow [(\chi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow [\varphi \wedge \psi])]$

A 7. $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$

A 8. $\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$

A 9. $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ([\varphi \vee \psi] \rightarrow \chi)]$

A1o. $(\forall x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$

A11. $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$, dacă $\varphi$ nu conţine pe $x$ ca variabilă liberă.

A12. $(\forall x)(x = x)$

A13. $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow [\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)])$

<u>OBSERVATIE</u>: In capitolul precedent, A 1 - A 3 au fost axiomele sistemului formal L al calculului propoziţional. Se observă că în axiomatizarea calculului cu predicate ce o prezentăm aici axiomele prezentate folosesc conectorii $\wedge$ , $\vee$ , $\neg$ , $\rightarrow$. Ca un exerciţiu pentru cititor, după parcurgerea acestui capitol, rămîne a se arăta că sistemul de axiome A1 - A9 este echivalent cu sistemul de axiome prezentat în capitolul precedent.

Regulile de deducţie ale sistemului formal $L_\lambda$ sînt următoarele:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi} \quad \text{(modus ponens)}$$

$$\frac{\varphi}{(\forall x)} \quad \text{(generalizarea)}$$

Cele două reguli de deducție se exprimă astfel:

<u>modus ponens</u> : $\psi$ este o <u>consecință</u> a lui $\varphi$ și $\varphi \to \psi$, pentru orice formule $\varphi$ și $\psi$ ale lui $L_\lambda$;

<u>generalizarea</u>: $(\forall x)\varphi$ este o <u>consecință</u> a lui $\varphi$, unde $\varphi$ este o formulă și $x$ este o variabilă oarecare a lui $L_\lambda$.

O <u>demonstrație formală</u> a unei formule $\varphi$ este un șir finit de formule

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi.$$

astfel încît pentru orice $i = 1, \ldots, n$, să fie verificată una din condițiile următoare:

a) $\varphi_i$ este o axiomă;

b) există $j, k < i$, astfel încît $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$;

c) există $j < i$, astfel încît $\varphi_i = (\forall x)\varphi_j$.

$n$ se numește <u>lungimea</u> demonstrației formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Dacă pentru un enunț $\varphi$ există o demonstrație formală atunci $\varphi$ se numește <u>teoremă</u> a sistemului formal $L_\lambda$. Notăm cu $\vdash \varphi$ faptul că $\varphi$ este o teoremă a lui $L_\lambda$. Deci mulțimea $T$ a teoremelor lui $L_\lambda$ este obținută din axiomele lui $L_\lambda$ prin aplicarea celor două reguli de deducție de mai sus.

Fie $\Sigma$ o mulțime de formule ale lui $L_\lambda$. Spunem că o formulă $\varphi$ este <u>dedusă din ipotezele</u> $\Sigma$ dacă există un șir finit de formule

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$$



astfel încît pentru orice $i \leqslant n$ este verificată una din condițiile următoare:

(i) $\varphi$ este o axiomă ;

(ii) $\varphi \in \Sigma$ ;

(iii) există $j, k < i$, astfel încît $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ ;

(iv) există $j < i$, astfel încît $\varphi_i = (\forall x)\varphi_j$.

Vom nota cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că $\varphi$ este dedusă din $\Sigma$. Dacă $\Sigma = \emptyset$, atunci este evident că avem

$$\emptyset \vdash \varphi \iff \vdash \varphi$$

Deci teoremele sînt formulele deduse din ipoteza vidă.

<u>OBSERVATIE</u>. Dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$, pentru orice $\Sigma \subset F$.

<u>Lema 1</u>. Pentru orice formulă $\varphi$, avem

$$\vdash (\varphi \to \varphi)$$

<u>Demonstrație</u>. Următorul șir de formule este o demonstrație formală a lui $\varphi \to \varphi$:

(A 2) $[\varphi \to ([\varphi \to \varphi] \to \varphi)] \to [(\varphi \to ]\varphi \to \varphi]) \to (\varphi \to \varphi)]$

(A 1) $\varphi \to ([\varphi \to \varphi] \to \varphi)$

m.p. $(\varphi \to [\varphi \to \varphi] \to (\varphi \to \varphi))$

(A 1) $\varphi \to [\varphi \to \varphi]$

m.p. $\varphi \to \varphi$

<u>Lema 2</u>. Pentru orice formule $\varphi$, $\psi$ și $\chi$, avem

$$\vdash (\psi \to \chi) \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$$

<u>Demonstrație</u>

(A 2) $[\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$

(A 1) $([\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]) \to$
$\to ((\psi \to \chi) \to ([\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]))$

m.p. $(\psi\to\chi)\to\left([\varphi\to(\psi\to\chi)]\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)]\right)$

(A-2) $\left((\psi\to\chi)\to\left([\varphi\to(\psi\to\chi)]\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)]\right)\right)\to$

$\to\left(\left[(\psi\to\chi)\to[\varphi\to(\psi\to\chi)]\right]\to\left[(\psi\to\chi)\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)]\right]\right)$

m.p. $\left[(\psi\to\chi)\to[\varphi\to(\psi\to\chi)]\right]\to\left[(\psi\to\chi)\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)]\right]$

(A 1) $(\psi\to\chi)\to[\varphi\to(\psi\to\chi)]$

m.p. $(\psi\to\chi)\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)]$

**Lema 3**. Pentru orice formule $\varphi$, $\psi$ avem:

$$\vdash \neg\varphi\to(\varphi\to\psi)$$

**Demonstraţie**

(A 3) $(\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\varphi\to\psi)$

$[(\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\varphi\to\psi)]\to\left([\neg\varphi\to(\neg\psi\to\neg\varphi)]\to[\neg\varphi\to(\varphi\to\psi)]\right)$

(Lema 2)

m.p. $[\neg\varphi\to(\neg\psi\to\neg\varphi)]\to[\neg\varphi\to(\varphi\to\psi)]$

(A 1) $\neg\varphi\to(\neg\psi\to\neg\varphi)$

m.p. $\neg\varphi\to(\varphi\to\psi)$

**Lema 4**. Pentru orice formule $\varphi$, $\psi$, $\theta$, $\chi$ avem

(a) $\vdash (\varphi\wedge\psi)\to(\psi\wedge\varphi)$

(b) $\vdash \varphi\to[\psi\to(\varphi\wedge\psi)]$

(c) $\vdash [(\varphi\wedge\chi)\vee(\psi\wedge\chi)]\to[(\varphi\vee\psi)\wedge\chi]$

(d) $\vdash (\chi\to\theta)\to[(\varphi\to(\psi\to\chi))\to(\varphi\to(\psi\to\theta))]$

(e) $\vdash (\varphi\vee\psi)\to\left(\chi\to[(\varphi\wedge\chi)\vee(\psi\wedge\chi)]\right)$

(f) $\vdash [\varphi\to(\psi\to\chi)]\to[(\varphi\wedge\psi)\to\chi]$

(g) $\vdash [(\varphi\vee\psi)\wedge\chi]\to[(\varphi\wedge\chi)\vee(\psi\wedge\chi)]$

(h) $\vdash (\varphi\to\psi)\to[(\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi)]$

Demonstraţia acestei leme o lăsăm pe seama cititorului.



**Lema 5**. Pentru orice formulă $\varphi(x,y)$ a lui L, avem

$$\vdash(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\to(\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)$$

**Demonstraţie**. Conform A 9, avem

$$\vdash(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\to(\forall y)\varphi(x,y)$$

$$\vdash(\forall y)\varphi(x,y)\to\varphi(x,y)$$

Lema 4, (h) ne spune că

$$\vdash\left[(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\to(\forall y)\varphi(x,y)\right]\to$$
$$\to\left[[(\forall y)\varphi(x,y)\to\varphi(x,y)]\to[(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\to\varphi(x,y)]\right]$$

Aplicînd de două ori modus ponens rezultă

$$\vdash(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\to\varphi(x,y)$$

de unde, conform generalizării se obţine

$$\vdash\forall x\left[(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\to\varphi(x,y)\right]$$

Din A 11:

$$\vdash(\forall x)\left[(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\to\varphi(x,y)\right]\to\left[(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\to(\forall x)\varphi(x,y)\right]$$

se obţine prin modus ponens:

$$\vdash(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\to(\forall x)\varphi(x,y))$$

In acelaşi mod, folosind generalizarea A 11 şi modus ponens obţinem:

$$\vdash(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\to(\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)$$

**Corolar:**

$$\vdash(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\leftrightarrow(\forall y)(\forall x)\varphi(x,y).$$

O *formulă deschisă* este o formulă care nu conţine nici un cuantificator. Dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este o formulă ale cărei variabile libere sînt $x_1,\dots,x_n$ atunci prin *închiderea* lui $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ vom înţelege enunţul

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\, \varphi(x_1,\ldots,x_n).$$

Lema 6. Pentru orice formulă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ avem

$$\vdash \varphi(x_1,\ldots,x_n) \Longleftrightarrow\ \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\, \varphi(x_1,\ldots,x_n).$$

Demonstrație. Implicația $\Longrightarrow$ se obține aplicînd generalizarea de n ori.

$\Longleftarrow$ : Prin procedeul folosit în demonstrația lemei precedente se arată că

$$\vdash (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\, \varphi(x_1,\ldots,x_n) \to \varphi(x_1,\ldots,x_n).$$

Conform ipotezei, aplicînd modus ponens rezultă

$$\vdash \varphi(x_1,\ldots,x_n)$$

Deci o formulă a lui $L_\lambda$ este teoremă dacă și numai dacă închiderea ei este o teoremă. Cu alte cuvinte, din punct de vedere al „adevărurilor sintactice" este suficient să considerăm enunțurile care sînt teoreme.

Lema 7. Dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci există $\Sigma_0 \subset \Sigma$ finită astfel încît $\Sigma_0 \vdash \varphi$.

Lăsăm demonstrația acestei leme pe seama cititorului.

Exerciții:

(a) Pentru orice variabile x,y,z ale lui $L_\lambda$ avem

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\, [x = y \to y = x]$$

$$\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)\, [(x = y \wedge y = z) \to x = z]$$

(b) Dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este o formulă care are variabilele libere $x_1,\ldots,x_n$ și dacă $y_1,\ldots,y_n$ nu apar în $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, atunci

$$\vdash [(x_1 = y_1) \wedge \ldots \wedge (x_n = y_n)] \to [\varphi(x_1,\ldots,x_n) \to \varphi(y_1,\ldots,y_n)]$$



## § 2. ALGEBRA LINDENBAUM - TARSKI a lui $L_\lambda$

In capitolul precedent, am studiat algebra Lindenbaum-Tarski $B_\Gamma$ asociată unei mulțimi de enunțuri $\Gamma$ folosind teorema de completitudine extinsă.

Pentru scopurile noastre, algebra Lindenbaum-Tarski va juca un rol important. De aceea, în cazul lui $L_\lambda$, vom folosi mijloace strict sintactice pentru studiul său.

Pe mulțimea F a formulelor considerăm următoarea relație

$$\varphi \sim \psi \Longleftrightarrow\ \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \vdash \psi \to \varphi$$

Conform Lemei 1, § 1 $\sim$ este reflexivă și conform Lemei 2, § 2 este tranzitivă. Este evident că $\sim$ este simetrică, deci $\sim$ este o relație de echivalență pe F.

Pe mulțimea cît $F/\sim$ considerăm următoarea relație binară:

$$\tilde{\varphi} \leqslant \tilde{\psi} \Longleftrightarrow\ \vdash \varphi \to \psi$$

Lăsăm cititorului să arate că această definiție nu depinde de reprezentanți: dacă $\varphi \sim \varphi', \psi \sim \psi'$, atunci

$$\vdash \varphi \to \psi \Longleftrightarrow\ \vdash \varphi' \to \psi'$$

OBSERVATIE: Cu $\tilde{\varphi}$ am notat clasa de echivalență a lui $\varphi$.

PROPOZITIA 1. $(F/\sim, \leqslant)$ este o algebră Boole. In această algebră Boole avem:

$$\tilde{\varphi} = 1 \Longleftrightarrow\ \vdash \varphi$$

$$\tilde{\varphi} = 0 \Longleftrightarrow\ \vdash \neg\varphi$$

Demonstrație: Conform Lemelor 1 și 2, § 1, relația $\leqslant$ este reflexivă și tranzitivă. Conform definiției, ea este tranzitivă, deci $(F/\sim, \leqslant)$ este o mulțime parțial ordonată.

Fie $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ două elemente oarecare ale lui $F/\sim$. Vom arăta că $\widetilde{\varphi\wedge\psi}$ este infimumul mulțimii $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$. Din axiomele A4 și A5:

$$\vdash \varphi\wedge\psi \to \varphi$$
$$\vdash \varphi\wedge\psi \to \psi$$

se obține

$$\widetilde{\varphi\wedge\psi} \le \widetilde{\varphi} \text{ și } \widetilde{\varphi\wedge\psi} \le \widetilde{\psi}$$

Deci $\widetilde{\varphi\wedge\psi}$ este un minorant al mulțimii $\{\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}\}$. Să arătăm acum că $\widetilde{\varphi\wedge\psi}$ este cel mai mare minorant al acestei mulțimi. Pentru aceasta, presupunem că $\widetilde{\chi}\le\widetilde{\varphi}$ și $\widetilde{\chi}\le\widetilde{\psi}$, deci

$$\vdash \chi\to\varphi \text{ și } \vdash \chi\to\psi$$

Din axioma A 6:

$$\vdash (\chi\to\varphi)\to\left[(\chi\to\psi)\to(\chi\to(\varphi\wedge\psi))\right]$$

rezultă, aplicînd de două ori modus ponens:

$$\vdash \chi \to (\varphi\wedge\psi),$$

ceea ce înseamnă că $\widetilde{\chi}\le\widetilde{\varphi\wedge\psi}$. Cu aceasta, am arătat că $\widetilde{\varphi\wedge\psi}$ este cel mai mare minorant al mulțimii $\{\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}\}$. Similar se arată că

$$\widetilde{\varphi\vee\psi}$$

este supremumul mulțimii $\{\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}\}$.

Deci $F/\sim$ este o latice pentru care avem

$$\widetilde{\varphi}\wedge\widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi\wedge\psi}$$
$$\widetilde{\varphi}\vee\widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi\vee\psi}$$

Conform Lemei 4, (c) și (g), pentru orice formule $\varphi,\psi,\chi$ avem

$$\widetilde{(\varphi\vee\psi)\wedge\chi} = \widetilde{(\varphi\wedge\chi)\vee(\psi\wedge\chi)}$$

deci

$$(\widetilde{\varphi}\vee\widetilde{\psi})\wedge\widetilde{\chi} = (\widetilde{\varphi}\wedge\widetilde{\chi})\vee(\widetilde{\psi}\wedge\widetilde{\chi})$$

Aceasta este suficient pentru a afirma că $F/\sim$ este o latice distributivă.



Presupunem acum $\vdash\varphi$. Aplicînd modus ponens axiomei A 1:

$$\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$$

rezultă $\vdash \psi\to\varphi$, pentru orice $\psi\in F$. Cu alte cuvinte, dacă $\varphi\in T$, atunci

$$\widetilde{\psi}\le\widetilde{\varphi}, \text{ pentru orice } \psi\in F.$$

De aici rezultă, pentru $\vdash\varphi$ și $\vdash\varphi'$, că avem $\widetilde{\varphi}'\le\widetilde{\varphi}$ și , deci $\widetilde{\varphi}=\widetilde{\varphi}'$. Deducem că mulțimea T a teoremelor formează o clasă de echivalență, care va fi elementul ultim al laticii $F/\sim$ :

$$1 = \widetilde{\varphi}, \text{ pentru } \varphi\in T$$

Presupunem acum că $\vdash\neg\varphi$. Aplicînd modus ponens Lemei 3:

$$\vdash \neg\varphi \to (\varphi\to\psi)$$

rezultă $\vdash\varphi\to\psi$, pentru orice $\psi\in F$. Cu alte cuvinte, dacă $\neg\varphi\in T$, atunci

$$\widetilde{\varphi}\le\widetilde{\psi}, \text{ pentru orice } \psi\in F.$$

Deci pentru orice $\varphi, \varphi' \in F$, astfel încît $\vdash\neg\varphi$ și $\vdash\neg\varphi'$, vom avea $\widetilde{\varphi}=\widetilde{\varphi}'$. Aceasta arată că mulțimea

$$\{\varphi\in F \mid \vdash\neg\varphi\}$$

formează o clasă de echivalență care va fi elementul prim al laticii $F/\sim$ :

$$0 = \widetilde{\varphi}, \text{ pentru } \neg\varphi\in T.$$

Pentru orice formulă $\varphi$, avem

$$\vdash \varphi\to\varphi \qquad \text{(Lema 1)}$$

Conform definiției conectorului $\to$, aceasta este totuna cu:

$$\vdash \neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$$

În particular, punînd în locul lui $\varphi$ pe $\neg\varphi$, se obține:

$$\vdash \neg(\neg\varphi\wedge\neg\neg\varphi)$$

adică

$$\vdash \varphi\vee\neg\varphi$$

Din cele două relaţii demonstrate mai sus rezultă:

$$\widetilde{\varphi\wedge\neg\varphi}=0 \text{ şi } \widetilde{\varphi\vee\neg\varphi}=1$$

ceea ce se mai scrie astfel

$$\tilde{\varphi}\wedge\widetilde{\neg\varphi}=0 \text{ şi } \varphi\vee\widetilde{\neg\varphi}=1$$

Aceste două egalităţi arată că $\widetilde{\neg\varphi}$ este complementul lui $\varphi$, pentru orice formulă $\varphi$:

$$\neg\tilde{\varphi}=\widetilde{\neg\varphi}$$

In concluzie, $F/\sim$ este o algebră Boole care verifică cele două proprietăţi ale Propoziţiei 1.

<u>OBSERVATIE</u>. Făcînd legătura cu algebrele Lindenbaum-Tarski pentru sistemul formal al calculului propoziţional, observăm că aici am considerat numai cazul $\Gamma=\emptyset$, fiindu-ne suficient pentru scopurile noastre. In notaţiile de acolo, am avea $F/\sim\ = B_{\emptyset}$.

Pentru orice formulă de forma $(\forall x)\varphi(x)$ vom nota cu $\varphi(y)$ formula obţinută din $\varphi(x)$ înlocuind pe x cu y peste tot unde x apare ca variabilă liberă în $\varphi(x)$.

<u>PROPOZITIA 2</u>: Pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui $L_{\chi}$, în algebra Lindenbaum-Tarski $F/\sim$ este verificată egalitatea:

$$\widetilde{(\forall x)\varphi(x)}=\bigwedge\{\widetilde{\varphi(v)} \mid v\in V\}$$

<u>Demonstraţie</u>. Pentru orice $v\in V$, avem

$$\vdash(\forall x)\varphi(x)\to\varphi(v) \qquad \text{(A 10)}$$

deci

$$(\forall x)\varphi(x)\leqslant\widetilde{\varphi(v)}, \text{ pentru orice } v\in V.$$



Aceasta arată că $(\forall x)\varphi(x)$ este un minorant al mulţimii

$$\{\widetilde{\varphi(v)} \mid v\in V\}$$

Să arătăm că $\widetilde{(\forall x)\varphi(x)}$ este cel mai mare minorant al acestei mulţimi. Pentru aceasta, să considerăm o formulă $\Psi$ astfel încît

$$\tilde{\Psi}\leqslant\widetilde{\varphi(v)}, \text{ pentru orice } v\in V.$$

Fie v o variabilă ce nu apare în $\Psi$ sau $\varphi(x)$. Vom avea

$$\vdash\Psi\to\varphi(v)$$

conform definiţiei relaţiei de ordine $\leqslant$ în algebra Lindenbaum-Tarski. Aplicînd generalizarea, se obţine

$$\vdash(\forall v)(\Psi\to\varphi(v))$$

Din această relaţie şi din axioma A 11:

$$\vdash(\forall v)(\Psi\to\varphi(v))\to(\Psi\to(\forall v)\varphi(v))$$

rezultă prin modus ponens:

$$\text{(a)} \qquad \vdash\Psi\to(\forall v)\varphi(v)$$

Conform A 10:

$$\vdash(\forall v)\varphi(v)\to\varphi(x)$$

de unde prin generalizare rezultă

$$\vdash(\forall x)((\forall v)\varphi(v)\to\varphi(x))$$

Din această relaţie şi din axioma A 11:

$$\vdash(\forall x)((\forall v)\varphi(v)\to\varphi(x))\to[(\forall v)\varphi(v)\to(\forall x)\varphi(x)]$$

rezultă prin modus ponens:

$$\text{(b)} \qquad \vdash(\forall v)\varphi(v)\to(\forall x)\varphi(x)$$

Lema 2, § 1 arată că:

$$\vdash [(\forall v)\varphi(v) \to (\forall x)\varphi(x)] \to [(\psi \to (\forall v)\varphi(v)) \to (\psi \to (\forall x)\varphi(x))]$$

Din această relaţie şi din (a),(b) rezultă, aplicînd de două ori modus ponens:

$$\vdash \psi \to (\forall x)\varphi(x)$$

Deci

$$\widetilde{\psi} \leq \widetilde{(\forall x)\varphi(x)},$$

de unde rezultă că $\widetilde{(\forall x)\varphi(x)}$ este cel mai mare minorant al mulţimii

$$\{\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\}.$$

<u>Corolar</u>: Pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui $L_\lambda$, avem:

$$\widetilde{(\exists x)\varphi(x)} = \bigvee \{\widetilde{\varphi(v)};\ v \in V\}$$

<u>Demonstraţie</u>: Din relaţia:

$$\widetilde{\neg(\exists x)\varphi(x)} = \widetilde{(\forall x)\neg\varphi(x)} = \bigwedge \{\widetilde{\neg\varphi(v)} \mid v \in V\}$$

rezultă, prin aplicarea legilor lui de Morgan:

$$\begin{aligned}\widetilde{(\exists x)\varphi(x)} &= \neg\,\widetilde{\neg(\exists x)\varphi(x)}\\ &= \neg \bigwedge \{\neg\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\}\\ &= \bigvee \{\neg\neg\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\}\\ &= \bigvee \{\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\}\end{aligned}$$

## § 3. <u>M O D E L E</u>

Fie $\lambda: N \to N$ o funcţie oarecare şi

$$\mathcal{A} = \langle A, \{R_n\}_{n \in N} \rangle$$

o $\lambda$-structură. Considerăm o formulă $\varphi(x_1,\ldots,x_m)$ a lui $L_\lambda$ cu variabilele libere aflate în mulţimea $\{x_1,\ldots,x_m\}$.



Pentru orice elemente $a_1,\ldots,a_m$ ale lui A, vom defini acum relaţia:

„$a_1,\ldots,a_m$ <u>satisfac</u> formula $\varphi(x_1,\ldots,x_m)$ în $\mathcal{A}$", care va fi scrisă prescurtat

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\ldots,a_m].$$

Această definiţie este dată prin inducţie asupra modului de formare al formulelor sistemului formal $L_\lambda$:

(1) Dacă $\varphi$ este de forma $x = y$ şi $a, b \in A$, atunci

$$\mathcal{A} \models (x = y)[a,b] \iff a = b$$

(2) Dacă $\varphi$ este de forma $P_n(x_1,\ldots,x_{\lambda(n)})$ şi $a_1,\ldots,$ $\ldots, a_{\lambda(n)} \in A$, atunci

$$\mathcal{A} \models P_n[a_1,\ldots,a_{\lambda(n)}] \iff (a_1,\ldots,a_{\lambda(n)}) \in R_n.$$

(3) Dacă $\varphi$ este de forma $\neg\psi(x_1,\ldots,x_m)$ şi $a_1,\ldots,a_m \in A$, atunci

$$\mathcal{A} \models \neg\psi[a_1,\ldots,a_m] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[a_1,\ldots,a_m]$$

(4) Dacă $\varphi$ este de forma $\psi(x_1,\ldots,x_n) \wedge \chi(x_1,\ldots,x_m)$ şi $a_1,\ldots,a_n \in A$, atunci:

$$\mathcal{A} \models (\psi \wedge \chi)[a_1,\ldots,a_m] \iff \mathcal{A} \models \psi[a_1,\ldots,a_m] \text{ şi } \mathcal{A} \models \chi[a_1,\ldots,a_m]$$

(5) Dacă $\varphi$ este de forma $(\exists x)\psi(x,x_1,\ldots,x_m)$ şi $a_1,\ldots,a_m \in A$, atunci:

$$\mathcal{A} \models (\exists x)\psi\,[a_1,\ldots,a_m] \iff \begin{cases}\text{există } b \in A, \text{ astfel încît}\\ \mathcal{A} \models \psi[a, a_1,\ldots,a_m].\end{cases}$$

<u>Exerciţii</u>

(1) $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[a_1,\dots,a_n] \Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n]$

(2) $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[a_1,\dots,a_n] \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{dacă } \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \text{ atunci} \\ \mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n] \end{cases}$

(3) $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[a_1,\dots,a_n] \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \text{ dacă şi numai dacă} \\ \mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n] \end{cases}$

(4) $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[a_1,\dots,a_n] \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \models \varphi[b,a_1,\dots,a_n], \\ \text{pentru orice } b \in B \end{cases}$

Dacă avem un enunţ $\varphi$, atunci mulţimea variabilelor sale libere este vidă. In acest caz, conceptul definit mai sus:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$$

nu depinde de elementele $a_1,\dots,a_n \in A$, deci vom scrie simplu:

$$\mathcal{A} \models \varphi.$$

Spunem că un enunţ $\varphi$ este <u>adevărat</u> sau <u>valid</u> în $\lambda$- structura $\mathcal{A}$, dacă $\mathcal{A} \models \varphi$. In acest caz, $\mathcal{A}$ se numeşte <u>model al lui</u> $\varphi$.

Dată o mulţime $\Sigma$ de enunţuri, vom spune că $\mathcal{A}$ este model al lui $\Sigma$ dacă $\mathcal{A} \models \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Sigma$. Notăm acest lucru: $\mathcal{A} \models \Sigma$

Un enunţ $\varphi$ se numeşte <u>universal adevărat</u> dacă orice $\lambda$ - structură este model al lui $\varphi$.

O $\lambda$- structură este <u>model</u> al unei formule $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ dacă

$$\mathcal{A} \models (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\varphi(x_1,\dots,x_n)$$

O formulă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ se numeşte <u>universal adevărată</u> dacă $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este un enunţ universal adevărat.



Dacă $\varphi$ este o formulă universal adevărată, atunci vom nota aceasta prin $\models \varphi$.

<u>PROPOZITIA 1</u>. Dacă $\varphi$ este o formulă oarecare a lui $L_\lambda$, atunci

$$\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$$

<u>Demonstraţie</u>: Prin inducţie asupra modului de obţinere al teoremelor lui $L_\lambda$. Tratăm întîi cazul axiomelor:

(A 1). Este suficient să arătăm că pentru orice $\lambda$- structură $\mathcal{A}$, avem

$$\mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi \rightarrow \varphi$$

Ţinînd seama de Exerciţiul 2, aceasta rezultă imediat. In concluzie, avem

$$\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

(A 2). Presupunem că

(a) $\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

şi vrem să arătăm că

(b) $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

A demonstra (b) este echivalent cu a demonstra că

$$\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \chi$$

ceea ce este echivalent cu

$$\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi,\ \mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \chi$$

Conform (a), din $\mathcal{A} \models \varphi$ rezultă $\mathcal{A} \models \psi \rightarrow \chi$. Din $\mathcal{A} \models \varphi$ şi $\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi$ rezultă $\mathcal{A} \models \psi$. De asemenea, din $\mathcal{A} \models \psi$ şi $\mathcal{A} \models \psi \rightarrow \chi$ rezultă $\mathcal{A} \models \chi$

(A 3). Presupunem că

(c) $\mathcal{A} \models \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$

şi vom arăta că

(d) $\mathcal{A} \models \psi \rightarrow \varphi$

Pentru a stabili pe (d), presupunem că $\mathcal{A} \models \psi$, deci $\mathcal{A} \not\models \neg\psi$ atunci din (c) va rezulta că $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$, deci $\mathcal{A} \models \varphi$

In mod analog se arată pentru axiomele A 4 - A 9.

(A 10). Va trebui să arătăm că <u>închiderea</u> axiomei A 10 este validă în $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} \models (\forall y)\left[(\forall x)\varphi(x) \to \varphi(y)\right]$$

Fie $b \in A$. Vom arăta că

$$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x) \to \varphi[b]$$

ceea ce este totuna cu

$$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[b]$$

deoarece $\forall x\,\varphi(x)$ este un enunț.

Dar

$$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a] \text{, pentru orice } a \in A$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[b]$$

(A 11). Presupunînd că

(e) $\mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$

şi că $\varphi$ nu conține pe $x$ ca variabilă liberă, vom arăta că

$$\mathcal{A} \models \varphi \to (\forall x)\psi$$

Pentru aceasta, fie $\mathcal{A} \models \varphi$ şi $a \in A$. Din (e) rezultă

$$\mathcal{A} \models [\varphi \to \psi]\ (a)$$

adică

$$\mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[a]$$

deoarece $\varphi$ nu conține pe $x$ ca variabilă liberă.

Presupunînd că $\psi$ a fost obținută prin modus ponens

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$



şi că am arătat că $\mathcal{A} \models \varphi$, $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)$, va trebui să deducem că $\mathcal{A} \models \psi$. Aceasta rezultă din Exercițiul (2).

A rămas să mai tratăm cazul cînd $(\forall x)\varphi$ a fost obținută prin generalizare din $\varphi$.

Dacă $\varphi = \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$, atunci presupunem că închiderea lui $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ este validă în $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\forall x)\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$$

Rezultă că închiderea lui $(\forall x)\varphi$, care este totuna cu închiderea lui $\varphi$, este validă în $\mathcal{A}$.

<u>Definiția 1</u>. O mulțime $\Sigma$ de formule se numește <u>consistentă</u> sau <u>necontradictorie</u> dacă nu există nici o formulă $\varphi \in F$ astfel încît

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \text{şi} \quad \Sigma \vdash \neg\varphi.$$

<u>PROPOZIȚIA 2</u>. $\emptyset$ este consistentă.

<u>Demonstrație</u>: Presupunem prin absurd că există $\varphi \in F$ astfel încît $\emptyset \vdash \varphi$ şi $\emptyset \vdash \neg\varphi$, deci $\vdash \varphi$ şi $\vdash \neg\varphi$. Conform Propoziției 1, avem $\models \varphi$ şi $\models \neg\varphi$, deci pentru orice $\lambda$ structură $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \varphi' \quad \text{şi} \quad \mathcal{A} \models \neg\varphi'$$

unde $\varphi'$ este închiderea formulei $\varphi$. Contradicția este evidentă.

<u>OBSERVAȚIE</u>. Propoziția 1 spune că orice teoremă a sistemului formal $L_\lambda$ este un enunț universal adevărat. Reprezentăm aceasta simbolic astfel:

sintactic $\Longrightarrow$ semantic

Din Propoziția 2 s-a obținut direct faptul că o formulă a lui $L_\lambda$ nu poate fi teoremă în același timp cu negația ei, ceea ce exprimă <u>non-contradicția</u> lui $L_\lambda$. De aceea, putem afirma că esența faptului că sistemul formal al calculului predicatelor este necontradictoriu constă în implicația: „sintactic $\Longrightarrow$ semantic".

Reciproca Propoziţiei 1, va fi <u>teorema de completitudine a lui Gödel</u>.

<u>Propoziţia 3.</u> Pentru orice formulă $\varphi$ a lui $L_\lambda$, avem

$$\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$$

<u>Demonstraţie</u>. Fie $\sigma$ o formulă a lui $L_\lambda$ pentru care $\nvdash \sigma$. Vom arăta că există o $\lambda$- structură $\mathcal{A}$ astfel încît $\mathcal{A} \nvDash \sigma'$, unde $\sigma'$ este închiderea lui $\sigma$. Va rezulta că $\sigma$ nu este universal adevărată ($\nvDash \sigma$), deci demonstraţia va fi terminată cu aceasta.

Conform Lemei 6, § 1, avem $\nvdash \sigma'$. In algebra Lindenbaum-Tarski $F/\sim$ acest lucru se exprimă prin $\widetilde{\sigma'} \neq 1$, deci $\widetilde{\neg\sigma'} = \neg\widetilde{\sigma'} \neq 0$

Conform Propoziţiei 2, § 2, pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui L este valabilă relaţia

$$\text{(i)} \qquad \widetilde{(\forall x)\varphi(x)} = \bigwedge \{\widetilde{\varphi(v)} \mid v \in V\}$$

Cum mulţimea formulelor lui $L_\lambda$ este numărabilă, în (i) avem o mulţime numărabilă de infimumuri. Aplicînd teorema Rasiowa-Sikorski (vezi Capitolul 1, § 8) rezultă existenţa unui ultrafiltru $\Delta$ al lui $F/\equiv$ astfel încît $\widetilde{\neg\sigma'} \in \Delta$ şi pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui $L_\lambda$ să avem:

$$\text{(ii)} \qquad (\forall x)\varphi(x) \in \Delta \Longleftrightarrow \varphi(v) \in V \text{, pentru orice } v \in V.$$

Definim pe V următoarea relaţie binară $\approx$ :

$$x \approx y \Longleftrightarrow \widetilde{(x = y)} \in \Delta$$

Conform axiomei A 12, avem $\vdash x = y$, deci $\widetilde{x = y} = 1 \in \Delta$. Rezultă $x \approx x$, deci $\approx$ este reflexivă.

Din exerciţiul (a), § 1 rezultă

$$\vdash x = y \rightarrow y = x$$

$$\vdash x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$$

De aici se obţine



$$\widetilde{(x = y)} \leq \widetilde{(y = x)}$$

$$\widetilde{(x = y)} \wedge \widetilde{(y = z)} \leq \widetilde{(x = z)}$$

Din aceste relaţii şi din proprietăţile filtrului avem:

$$x \approx y \Rightarrow \widetilde{(x = y)} \in \Delta \Rightarrow \widetilde{(y = x)} \in \Delta \Rightarrow y \approx x$$

$$x \approx y,\ y \approx z \Rightarrow \widetilde{(x = y)} \in \Delta,\ \widetilde{(y = z)} \in \Delta$$

$$\Rightarrow \widetilde{(x = y)} \wedge (y = z) \in \Delta$$

$$\Rightarrow (x = z) \in \Delta$$

$$\Rightarrow x \approx z$$

In concluzie, $\approx$ este o relaţie de echivalenţă pe V. Notăm cu $A = V/\approx$ şi cu $\hat{x}$ clasa de echivalenţă a lui $x \in V$.

Pentru orice $n \in N$, definim relaţia $\lambda(x)$ - ară $R_n$ pe A prin

$$(*) \qquad (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{\lambda(n)}) \in R_n \Longleftrightarrow \widetilde{P_n(x_1, \ldots, x_{\lambda(n)})} \in \Delta$$

Să arătăm că definiţia nu depinde de reprezentanţi, adică

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \approx y_1 \\ \cdots\cdots \\ x_{\lambda(n)} \approx y_{\lambda(n)} \end{array}\right\} \Rightarrow \widetilde{P_n(x_1, \ldots, x_{\lambda(n)})} \in \Delta \Leftrightarrow \widetilde{P_n(y_1, \ldots, y_{\lambda(n)})} \in \Delta$$

Presupunem deci că

$$\widetilde{(x_i = y_i)} \in \Delta \text{ , } i = 1, \ldots, \lambda(n).$$

Din Exerciţiul (b), § 1 rezultă

$$\widetilde{(x_1 = y_1)} \wedge \ldots \wedge \widetilde{(x_{\lambda(n)} = y_{\lambda(n)})} \leq \widetilde{P_n(x_1, \ldots, x_{\lambda(n)}) \rightarrow P_n(y_1, \ldots, y_{\lambda(n)})}$$

Conform proprietăţilor filtrului, rezultă

$$\widetilde{(x_1 = y_1)} \wedge \ldots \wedge \widetilde{(x_{\lambda(n)} = y_{\lambda(n)})} \in \Delta$$

Din această relaţie şi din inegalitatea de mai sus se obţine

$$\widetilde{P_n(x_1,\ldots,x_{\lambda(n)})} \to \widetilde{P_n(y_1,\ldots,y_{\lambda(n)})} .$$

Dacă $\widetilde{P_n(x_1,\ldots,x_{\lambda(n)})}\in\Delta$, atunci din relaţia precedentă rezultă

$$\widetilde{P_n(y_1,\ldots,y_{\lambda(n)})}\in\Delta .$$

In mod analog se arată că

$$P_n(y_1,\ldots,y_{\lambda(n)})\in\Delta \Longrightarrow P_n(x_1,\ldots,x_{\lambda(n)})\in\Delta .$$

Prin inducţie asupra modului de formare a formulelor lui $L_\lambda$, vom arăta că pentru fiecare formulă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ a lui $L_\lambda$ ale cărei variabile libere se află printre $x_1,\ldots,x_n$, este valabilă relaţia:

$$(**)\quad \mathcal{A}\models\varphi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] \iff \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta$$

pentru orice $v_1,\ldots,v_n\in V$.

Pentru formule atomice, relaţia (∗∗) este chiar relaţia (∗).

Dacă $\varphi=\neg\psi(x_1,\ldots,x_n)$ şi presupunem (∗∗) adevărată pentru $\psi$, atunci

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\models\varphi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] &\iff \mathcal{A}\not\models\psi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n]\\ &\iff \widetilde{\psi(v_1,\ldots,v_n)}\notin\Delta\\ &\iff \widetilde{\neg\psi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta\\ &\iff \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta\end{aligned}$$

Dacă $\varphi=\psi_1\wedge\psi_2$ şi presupunem (∗∗) adevărată pentru $\psi_1$ şi $\psi_2$, atunci

$$\begin{aligned}\mathcal{A}=\varphi[\hat{v}_1,\ldots\hat{v}_n] &\iff \mathcal{A}\models\psi_1[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n]\ \text{şi}\ \mathcal{A}=\psi_2[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n]\\ &\iff \widetilde{\psi_1(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta\ \text{şi}\ \widetilde{\psi_2(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta\\ &\iff \widetilde{\psi_1(v_1,\ldots,v_n)}\wedge\widetilde{\psi_2(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}&\iff \widetilde{\psi_1(v_1,\ldots,v_n)\wedge\psi_2(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta\\ &\iff \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta .\end{aligned}$$

Din (ii) deducem, pentru orice formulă $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}\widetilde{(\exists x)\varphi(x)}\in\Delta &\iff \widetilde{\neg(\forall x)\neg\varphi(x)}\in\Delta\\ &\iff \widetilde{(\forall x)\neg\varphi(x)}\notin\Delta\\ &\iff \text{există } v\in V,\ \text{astfel încît } \widetilde{\neg\varphi(v)}\in\Delta\\ &\iff \text{există } v\in V,\ \text{astfel încît } \widetilde{\varphi(v)}\in\Delta\end{aligned}$$

ţinînd cont de proprietăţile de ultrafiltru ale lui $\Delta$.

Presupunem acum că $\varphi=(\exists x)\psi(x, x_1,\ldots,x_n)$ şi că (∗∗) este adevărată pentru $\psi(x, x_1,\ldots,x_n)$. Atunci avem:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\models\varphi[\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n] &\iff \text{există } \hat{v}\in A,\ \text{astfel încît } \mathcal{A}\models\psi[\hat{v},\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n]\\ &\iff \text{există } v\in V,\ \text{astfel încît } \widetilde{\psi(v,v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta\\ &\iff \widetilde{\exists x\psi(x, v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta\\ &\iff \widetilde{\varphi(v_1,\ldots,v_n)}\in\Delta .\end{aligned}$$

Cu aceasta, relaţia (∗∗) a fost demonstrată.

Din (∗∗) şi din faptul că $\widetilde{\neg\sigma'}\in\Delta$, rezultă $\mathcal{A}\models\neg\sigma'$ deci $\mathcal{A}\not\models\sigma'$. Am arătat deci că $\sigma'$ nu este valid în $\mathcal{A}$, deci $\not\models\sigma$. Teorema a fost demonstrată.

Propoziţiile 1 şi 3 pot fi formulate împreună astfel:

<u>PROPOZITIA 4</u>. Pentru orice formulă $\varphi$ a lui $L_\lambda$, avem

$$\vdash\varphi \iff \models\varphi .$$

<u>OBSERVATIE</u>. Propoziţia 4 identifică teoremele lui $L_\lambda$ cu enunţurile universal adevărate. Simbolic putem formula aceasta astfel:

$$\text{sintactic} \iff \text{semantic.}$$

## EXERCIȚII LA CAPITOLUL IV

1. Să se demonstreze că următoarele formule sînt teoreme ale lui $L_\lambda$ :

(a) $(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \longleftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)$

(b) $(\exists x)(\exists y)\varphi(x,y) \longleftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi(x,y)$

(c) $(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \longrightarrow (\forall x)\varphi(x,x)$

(d) $(\exists x)\varphi(x,x) \longrightarrow (\exists x)(\exists y)\varphi(x,y)$

(e) $\neg(\forall x)\varphi(x) \longleftrightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$

(f) $\neg(\exists x)\varphi(x) \longleftrightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$

(g) $(\forall x)(\varphi(x)\wedge\Psi(x)) \longleftrightarrow ((\forall x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\Psi(x))$

(h) $(\exists x)(\varphi(x)\vee\Psi(x)) \longleftrightarrow ((\exists x)\varphi(x)\vee(\exists x)\varphi(x))$

(i) $(\forall x)(\varphi\wedge\Psi(x)) \longleftrightarrow \varphi\wedge(\forall x)\Psi(x)$, dacă $\varphi$ nu conține pe $x$ ca variabilă liberă.

(j) $(\exists x)(\varphi\vee\Psi(x)) \longleftrightarrow \varphi\vee(\exists x)\Psi(x)$, dacă $\varphi$ nu conține pe $x$ ca variabilă liberă.

(l) $(\forall x)(\varphi\vee\Psi(x)) \longleftrightarrow \varphi\vee(\forall x)\Psi(x)$, dacă $\varphi$ nu conține pe $x$ ca variabilă liberă.

(m) $(\exists x)(\varphi\wedge\Psi(x)) \longleftrightarrow \varphi\wedge(\exists x)\Psi(x)$, dacă $\varphi$ nu conține pe $x$ ca variabilă liberă.

(n) $(\exists x)(\varphi(x)\wedge\Psi(x)) \longrightarrow ((\exists x)\varphi(x)\wedge(\exists x)\Psi(x))$

(o) $((\forall x)\varphi(x)\vee(\forall x)\Psi(x)) \longrightarrow (\forall x)(\varphi(x)\vee\Psi(x))$

(p) $(\forall x)(\varphi\longrightarrow\Psi(x)) \longleftrightarrow (\varphi\longrightarrow(\forall x)\Psi(x))$, dacă $x$ nu este variabilă liberă a lui $\varphi$.

(q) $(\forall x)(\varphi(x)\longrightarrow\Psi) \longleftrightarrow ((\exists x)\varphi(x)\longrightarrow\Psi)$, dacă $x$ nu este variabilă liberă a lui $\Psi$.

(r) $(\exists x)(\varphi(x)\longrightarrow\Psi) \longleftrightarrow ((\forall x)\varphi(x)\longrightarrow\Psi)$, dacă $x$ nu este variabilă liberă a lui $\Psi$.



(s) $(\exists x)(\varphi\longrightarrow\Psi(x)) \longleftrightarrow (\varphi\longrightarrow(\exists x)\Psi(x))$, dacă $x$ nu este variabilă liberă a lui $\varphi$.

(t) $(\exists x)(\varphi(x)\longrightarrow\Psi(x)) \longleftrightarrow ((\forall x)\varphi(x)\longrightarrow(\exists x)\Psi(x))$

2. Să se arate că dacă $\Sigma\vdash(\varphi\longleftrightarrow\Psi)$, atunci:

(a) $\Sigma\vdash(\neg\varphi\longleftrightarrow\neg\Psi)$

(b) $\Sigma\vdash(\varphi\wedge\chi\longleftrightarrow\Psi\wedge\chi)$

(c) $\Sigma\vdash(\varphi\vee\chi\longleftrightarrow\Psi\vee\chi)$

(d) $\Sigma\vdash((\varphi\longrightarrow\chi)\longleftrightarrow(\Psi\longrightarrow\chi))$

(e) $\Sigma\vdash((\chi\longrightarrow\varphi)\longleftrightarrow(\chi\longrightarrow\Psi))$

3. Să se arate că dacă $\Sigma\vdash(\varphi(x)\longleftrightarrow\Psi(x))$, atunci

$$\Sigma\vdash((\forall x)\varphi(x)\longleftrightarrow(\forall x)\Psi(x))$$

$$\Sigma\vdash((\exists x)\varphi(x)\longleftrightarrow(\exists x)\Psi(x))$$

4. Nu există nici o formulă $\varphi$ a lui $L_\lambda$ astfel încît să avem

$$\Sigma\vdash\varphi \text{ și } \Sigma\vdash\neg\varphi$$

5. Notăm cu $T(\Sigma)$ mulțimea formulelor deduse din ipotezele $\Sigma$

$$T(\Sigma)=\{\varphi\in F \mid \Sigma\vdash\varphi\}$$

Să se arate că

$\Sigma\cup T\subset T(\Sigma)$

$T(\Sigma)$ este închisă la modus ponens

$\Sigma\subset T\Rightarrow T(\Sigma)=T$

$\Sigma\subset\Sigma'\Rightarrow T(\Sigma)\subset T(\Sigma')$

$T(T(\Sigma))=T(\Sigma)$

6. $\Sigma\vdash\varphi$ dacă și numai dacă există $\Gamma\subset\Sigma$ finită astfel încît $\Gamma\vdash\varphi$.

7. Dacă $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$, atunci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, ceea ce se scrie simbolic

$$\frac{\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}{\Sigma, \varphi \vdash \psi}$$

8. $$\frac{\Sigma, \varphi \vdash \psi}{\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}$$

<u>Notă</u>: Exercițiul 8 reprezintă <u>teorema de deducție</u> pentru $L_\lambda$ .

9. Pentru orice mulțime de formule sînt echivalente afirmațiile:

(i) $\Sigma \vdash \varphi$

(ii) Există un număr finit de formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ale lui $\Sigma$, astfel încît:

$$\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow (\ldots(\psi_n \rightarrow \varphi))\ldots) \in T.$$

1o. $$\frac{\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi), \Sigma \vdash (\psi \rightarrow \chi)}{\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \chi)}$$

11. $$\Sigma \vdash \varphi \vee \psi \Longleftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$$

12. $$\frac{\Sigma \vdash \neg\varphi}{\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}$$

13. $$\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \neg\neg\varphi$$

14. O mulțime $\Delta$ de formule se numește <u>sistem deductiv</u> dacă

a) $T \subset \Delta$ ;

b) $\Delta \neq F$ ;

c) $\Delta$ este închisă la modus ponens:

$$\varphi \in \Delta, (\varphi \rightarrow \psi) \in \Delta \Longrightarrow \psi \in \Delta$$

Să se arate că $T(\Sigma) = \Sigma$, pentru orice sistem deductiv $\Sigma$.



15. Orice intersecție de sisteme deductive este un sistem deductiv.

16. Mulțimea sistemelor deductive ordonate de incluziune este inductivă.

17. Orice sistem deductiv este inclus într-un sistem deductiv maximal.

18. Pentru orice sistem deductiv $\Sigma$, sînt echivalente afirmațiile:

(i) $\Sigma$ este maximal.

(ii) Pentru orice $\varphi \in F$, $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \neg\varphi$

19. Orice sistem deductiv $\Sigma$ este intersecția tuturor sistemelor deductive maximale ce includ pe $\Sigma$.

2o. Dacă $\Sigma$ este un sistem deductiv maximal, atunci:

$$\varphi \in \Sigma \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$$

$$\neg\varphi \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \notin \Sigma$$

$$\varphi \vee \psi \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \in \Sigma \text{ sau } \psi \in \Sigma$$

$$\varphi \wedge \psi \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \in \Sigma \text{ și } \psi \in \Sigma$$

$$(\varphi \rightarrow \psi) \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \notin \Sigma \text{ sau } \psi \in \Sigma$$

21. Fie $F/\sim$ algebra Lindenbaum-Tarski a lui $L_\lambda$. Pentru orice $\Sigma \subset F$ sînt echivalente afirmațiile:

a) $\Sigma$ este sistem deductiv.

b) $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{\varphi} \mid \varphi \in \Sigma\}$ este un filtru propriu al lui $F/\sim$.

22. In condițiile exercițiului precedent sînt echivalente afirmațiile:

a) $\Sigma$ este un sistem deductiv maximal.

b) $\Sigma$ este un ultrafiltru al lui $F/\sim$ .

23. Să se descrie funcţia λ şi sistemul formal al calculului predicatelor corespunzător următoarelor clase de structuri:

a) mulţimi parţial ordonate ;

b) mulţimi total ordonate ;

c) latici distributive ;

d) algebre Boole ;

e) grupuri ;

f) inele ;

g) corpuri.

Cum se scriu axiomele structurilor respective în sistemele formale respective?



CAPITOLUL 5

# Algebre Lukasiewicz şi logici cu mai multe valori

Logicile cu mai multe valori (polivalente) au fost introduse şi studiate de logicianul polonez J. Lukasiewicz în urma unor cercetări legate de studiul modalităţilor. Legate de aceste logici, Gr. C. Moisil a studiat începînd din 1940 o clasă de structuri algebrice (numite algebre Lukasiewicz în onoarea logicianului polonez) care sînt reflectarea pe plan algebric a logicilor lui Lukasiewicz. Astăzi teoria algebrelor Lukasiewicz este destul de bogată, atît prin rezultatele lui Moisil şi ale elevilor săi, cît şi prin contribuţia a numeroşi cercetători străini. In primul paragraf prezentăm sumar ideile care l-au condus pe Lukasiewicz în considerarea logicilor cu mai multe valori. Paragraful 2 prezintă o serie de rezultate privind algebrele Lukasiewicz, cel mai important fiind teorema de reprezentare a lui Moisil. In sfîrşit, ultimul paragraf conţine cîteva elemente incipiente ale logicii trivalente neformalizate, făcîndu-se legătura cu algebrele Lukasiewicz trivalente.

## § 1. IDEI CARE AU CONDUS LA APARITIA LOGICILOR CU MAI MULTE VALORI

Logica trivalentă a apărut ca urmare a studierii propoziţiilor de forma „este posibil ca..." sau „este necesar ca...". Pentru fixarea ideilor, să considerăm o propoziţie oarecare p. Vom nota cu Mp[1] propoziţia „p este posibil".

1) Simbolul M derivă de la „möglich" (posibil).

**Putem forma următoarele combinaţii de propoziţii:**

(1) „p este fals" $\neg p$

(2) „p este posibil" $Mp$

(3) „p nu este posibil" $\neg Mp$

(4) „este posibil non-p" $M\neg p$

(5) „nu este posibil non-p" $\neg M \neg p$.

Propoziţia (5) este echivalentă cu „nu este posibil ca p să fie falsă", care este totuna cu „p este necesar adevărată" sau pe scurt „p este necesar". Vom nota această propoziţie cu Np. Propoziţia (3) se va mai citi „p este imposibil".

Lukasiewicz consideră că următoarele propoziţii trebuiesc acceptate ca evidente:

(I) $\neg Mp \to \neg p$

(II) $\neg p \to \neg Mp$

(III) $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

(IV) $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$

(V) $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$

(VI) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

Prima propoziţie este „dacă p este imposibil, atunci p este fals", iar a doua este „dacă p este fals, atunci p nu este posibil". Celelalte patru propoziţii nu fac să intervină conectorul M şi nu comportă nici o discuţie.

La aceste propoziţii, Lukasiewicz adaugă propoziţiile de forma:

„Pentru o anumită propoziţie p, este posibil p şi este posibil non-p". Lukasiewicz dă următorul exemplu: „Se poate ca acest bolnav să moară, dar se poate să şi nu moară".



Pentru formularea simbolică a acestei propoziţii este necesară introducerea unui cuantificator particular $\Sigma$ :

„ $\Sigma p$ = pentru un anumit p".

Propoziţia de mai sus ia următoarea formă simbolică:

VII. $\Sigma p\ (Mp \wedge \neg Mp)$.

Din propoziţiile (I) - (VI) se pot deduce următoarele propoziţii:

(a) $p \to Mp$

(b) $Mp \to p$

Cu alte cuvinte, orice propoziţie p este echivalentă cu propoziţia „p este posibil". Aceasta ar face superfluă considerarea propoziţiilor de tipul „p este posibil", ceea ce din punct de vedere real nu este acceptabil.

In prezenţa propoziţiei (VII) se poate deduce următoarea propoziţie :

(c) Mp.

Aplicînd modus ponens, din (b) şi (c) se deduce că orice propoziţie este adevărată, ceea ce arată contradicţia propoziţiilor acceptate ca axiome mai sus.

Aceste constatări l-au condus pe Lukasiewicz la concluzia următoare: principiul terţiului exclus, după care orice propoziţie p este adevărată sau falsă, nu funcţionează pentru propoziţii de forma „p este posibil".

De pildă, propoziţia „Anul viitor, la 1 septembrie, este posibil să plouă la Bucureşti" nu este nici adevărată, nici falsă.

In mod necesar se impune considerarea unei a treia valori de adevăr: „posibilul" , obţinîndu-se astfel punctul de plecare pentru ceea ce se cheamă „logica trivalentă".

<u>OBSERVATIE</u>. Aceste considerații aparțin lui J. Lukasiewicz. Pentru consultarea lor în detaliu și pentru demonstrarea unor afirmații făcute în acest paragraf, trimitem cititorul la cartea lui A. Dumitriu „Logica polivalentă", Cap.V, pag.157-2o7.

## § 2. <u>ALGEBRE LUKASIEWICZ n- VALENTE</u>

Algebrele Lukasiewicz n-valente au fost introduse de Gr.C. Moisil în anul 194o ca modele algebrice pentru logicile cu mai multe valori ale lui Lukasiewicz. Inainte de-a prezenta sistemul formal al logicii trivalente, vom studia cîteva proprietăți ale algebrilor Lukasiewicz n-valente.

Vom presupune în continuare că n este un număr natural fixat.

<u>Definiția 1</u>. O <u>algebră Lukasiewicz n-valentă</u> este o latice distributivă

$$(L, \vee, \wedge, o, 1)$$

cu prim element O și cu ultim element 1, astfel încît:

(I) Există o operație unară $\neg : L \longrightarrow L$ cu proprietățile:

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

$$\neg\neg x = x,$$

pentru orice $x, y \in L$.

(II) Există (n-1) aplicații $\sigma_i : L \longrightarrow L$, $i=1,\ldots,n-1$ cu proprietățile:

a) $\sigma_i(o) = o$; $\sigma_i(1) = 1$, pentru $i = 1,\ldots, n-1$.

b) $\sigma_i(x \vee y) = \sigma_i(x) \vee \sigma_i(y)$, $\sigma_i(x \wedge y) = \sigma_i(x) \wedge \sigma_i(y)$, pentru $i = 1,\ldots, n-1$ și $x, y \in L$.

c) $\sigma_i(x) \vee \neg\sigma_i(x) = 1$, $\sigma_i(x) \wedge \neg\sigma_i(y) = o$, pentru orice $x \in L$ și $i = 1,\ldots, n-1$.



d) $\sigma_k \circ \sigma_k = \sigma_k$, pentru h, k = 1,..., n-1.

e) $\sigma_i(\neg x) = \neg\sigma_j(x)$, pentru $i + j = n$ și pentru orice $x \in L$.

f) $\sigma_1(x) \leqslant \sigma_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \sigma_{n-1}(x)$, pentru orice $x \in L$.

g) Dacă $\sigma_i(x) = \sigma_i(y)$ pentru orice $i = 1,\ldots, n-1$, atunci $x = y$.

<u>OBSERVATIE</u>: Axioma g) se numește <u>principiul determinării al lui Moisil</u>.

$\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1}$ se numesc <u>endomorfisme chrysipiene</u>.

<u>Definiția 2</u>. Dacă L, L' sînt două algebre Lukasiewicz n-valente, atunci o funcție $f: L \longrightarrow L'$ se numește <u>morfism de algebre Lukasiewicz n-valente</u> dacă pentru orice $x, y \in L$ avem:

1) $f(o) = o$; $f(1) = 1$ ;

2) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ ;

3) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ ;

4) $f(\sigma_i(x)) = \sigma_i(f(x))$.

<u>Lema 1</u>. Dacă $f: L \longrightarrow L'$ este un morfism de algebre Lukasiewicz n-valente atunci $f(\neg x) = \neg f(x)$, pentru orice $x \in L$.

<u>Demonstrație</u>. Din relațiile

$$\sigma_i(x) \vee \neg\sigma_i(x) = 1, \quad \sigma_i(x) \wedge \neg\sigma_i(x) = o$$

rezultă, prin aplicarea lui f.

$$\sigma_i(f(x)) \vee f(\neg\sigma_i(x)) = o, \quad \sigma_i(f(x)) \wedge f(\neg\sigma_i(x)) = o.$$

De asemenea, avem relațiile:

$$\sigma_i(f(x)) \vee \neg f(\sigma_i(x)) = \sigma_i(f(x)) \vee \neg \sigma_i(f(x)) = 1$$

$$\sigma_i(f(x)) \wedge \neg f(\sigma_i(x)) = \sigma_i(f(x)) \wedge \neg \sigma_i(f(x)) = 0$$

Deci $f(\neg \sigma_i(x))$ şi $\neg f(\sigma_i(x))$ verifică proprietăţile de complement ale lui $\sigma_i(f(x))$. Din unicitatea complementului unui element într-o latice distributivă cu o şi 1, rezultă:

$$f(\neg \sigma_i(x)) = \neg f(\sigma_i(x)), \text{ pentru orice } i = 1, \dots, n-1.$$

Conform acestei relaţii şi a axiomei e) din Definiţia 1 rezultă, pentru $i + j = n$:

$$\sigma_i(f(\neg x)) = f(\sigma_i(\neg x)) = f(\neg \sigma_j(x)) = \neg f(\sigma_j(x)) =$$

$$= \neg \sigma_j(f(x)) = \sigma_i(\neg f(x)).$$

Din $\sigma_i(f(\neg x)) = \sigma_i(\neg f(x))$ pentru orice $i = 1, \dots, n-1$, se obţine $f(\neg x) = \neg f(x)$, conform principiului determinării.

EXEMPLE 1) Considerăm în mulţimea

$$L_n = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}$$

următoarele operaţii:

$$x \vee y = \max(x, y)$$

$$x \wedge y = \min(x, y)$$

$$x = 1 - x.$$

Definim funcţiile $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}: L \to L$ prin următorul tablou



| $x$ | $\sigma_1(x)$ | $\sigma_2(x)$ | ... | $\sigma_{n-2}(x)$ | $\sigma_{n-1}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 |
| $\frac{1}{n-1}$ | 0 | 0 | | 0 | 1 |
| $\frac{2}{n-1}$ | 0 | 0 | | 1 | 1 |
| $\vdots$ | | | | | |
| $\frac{n-2}{n-1}$ | 0 | 1 | | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 |

Se poate verifica cu uşurinţă că $L_n$ este o algebră Lukasiewicz n-valentă:

2). Detaliem exemplul 1) în cazul $n = 3$

$$L_3 = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

Scriem operaţiile lui $L_3$ sub formă de tabele:

| $y \backslash x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$x \vee y$

| $y \backslash x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |

$x \wedge y$

| $x$ | $x$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 |

$\neg x$

| $x$ | $\sigma_1(x)$ | $\sigma_2(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

<u>Exercițiu</u>. După modelul Exemplului 2 de mai sus, să se trateze cazul n = 4 și n = 5.

<u>OBSERVAȚIE</u>. Fie L o algebră Lukasiewicz trivalentă (n = 3). Pentru orice $x \in L$, aplicînd axioma e) din definiția 1 obținem:

$$\sigma_1(x) = \sigma_1(\neg\neg x) = \neg\, \sigma_2(\neg x)$$
$$\sigma_2(x) = \sigma_2(\neg\neg x) = \neg\, \sigma_1(\neg x)$$

Deci endomorfismele chrysipiene $\sigma_1, \sigma_2$ se pot exprima unul în funcție de celălalt.

<u>Definiția 3</u>. Un element x al unei algebre Lukasiewicz n-valente L se numește <u>element chrysipian</u> dacă $x \vee \neg x = 1$, $x \wedge \neg x = 0$.

<u>Lema 2</u>. Un element $x \in L$ este chrysipian dacă și numai dacă $\sigma_i(x) = x$, pentru orice i = 1,..., n-1.

<u>Demonstrație</u>: Dacă x este chrysipian, atunci $x \vee \neg x = 1$, $x \wedge \neg x = 1$, deci

$$\sigma_i(x) \vee \sigma_i(\neg x) = 1$$
$$\sigma_i(x) \wedge \sigma_i(\neg x) = 0.$$

Conform unicității complementului într-o latice distributivă cu 0 și 1, avem

$$\sigma_i(\neg x) = \neg\, \sigma_i(x), \text{ pentru orice } i = 1, \dots, n-1.$$

Dar $\sigma_i(\neg x) = \neg\, \sigma_{n-i}(x)$, deci $\neg\, \sigma_i(x) = \neg\, \sigma_{n-i}(x)$, de unde rezultă

$$\sigma_i(x) = \neg\neg\, \sigma_i(x) = \neg\neg\, \sigma_{n-i}(x) = \sigma_{n-i}(x)$$

Ținînd cont că

$$\sigma_1(x) \leq \sigma_2(x) \leq \dots \leq \sigma_{n-1}(x)$$

se obține că $\sigma_1(x) = \sigma_2(x) = \dots = \sigma_{n-1}(x)$.



Atunci, pentru orice i, j, avem $\sigma_j(x) = \sigma_i(x) = \sigma_j(\sigma_i(x))$. Conform principiului determinării rezultă $x = \sigma_i(x)$ pentru orice i = 1,..., n-1.

Afirmația reciprocă, rezultă din Definiția 1.

Vom nota cu C(L) mulțimea elementelor chrysipiene ale lui L, deci

$$C(L) = \left\{ x \;\middle|\; \sigma_i(x) = x, \text{ pentru } i = 1, \dots, n-1 \right\}.$$

<u>PROPOZIȚIA 1</u>. C(L) este algebră Boole.

<u>Demonstrație</u>. Conform Lemei 2, C(L) este închisă la $\wedge$, $\vee$ și $0 \in C(L)$, $1 \in C(L)$. De asemenea, orice $x \in C(L)$ admite un complement.

<u>Exerciții</u> (i). Dacă $F: L \to L'$ este un morfism de algebre Lukasiewicz n-valente, atunci

$$C(f) = f\big|_{C(L)}: C(L) \to C(L')$$

este un morfism de algebre Boole.

(ii). O algebră Lukasiewicz n-valentă este o algebră Boole dacă și numai dacă L = C(L).

Dacă B este o algebră Boole oarecare, notăm

$$D(B) = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B^{n-1} \;\middle|\; x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \right\}.$$

In D(B) introducem următoarele operații:

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \wedge (x_1', \dots, x_{n-1}') = (x_1 \wedge x_1', \dots, x_{n-1} \wedge x_{n-1}')$$
$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \vee (x_1', \dots, x_{n-1}') = (x_1 \vee x_1', \dots, x_{n-1} \vee x_{n-1}')$$
$$\neg(x_1, \dots, x_{n-1}) = (\neg x_{n-1}, \dots, \neg x_1)$$
$$\sigma_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_i, \dots, x_i), \text{ pentru orice } i = 1, \dots, n-1.$$