Reinforcement learning (II)

IA 2025/2026

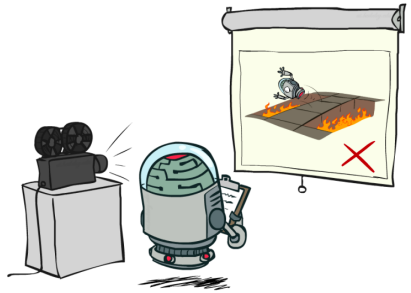
Conținut

Reinforcement learning

- Proces de decizie Markov
  - Mulțimea de stări S, mulțimea de acțiuni A
  - Modelul de tranziții $P(s'|s, a)$ este cunoscut
  - Funcția de recompensă $R(s)$ este cunoscută
  - Calculează o politică optimă
- Învățare cu întărire
  - Se bazează pe procese de decizie Markov, dar:
  - Modelul de tranziții este necunoscut
  - Funcția de recompensă este necunoscută
  - Învață o politică optimă

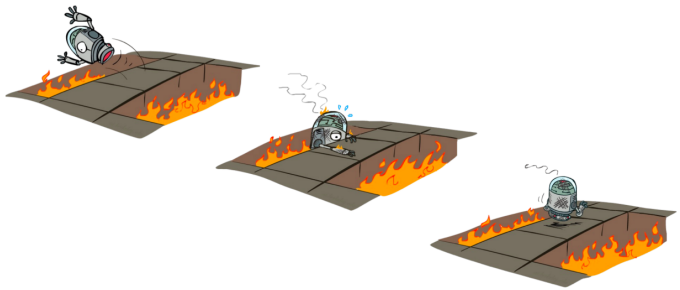
Tipuri de învățare cu întărire

- Pasivă: agentul învață utilitatea de a fi în anumite stări.
  Agentul execută o politică fixă și o evaluează.



  Agentul nu are control asupra acțiunilor sale. Aplicații: robotică.

- Activă: agentul trebuie să învețe ce să facă.



  Agentul trebuie să exploreze mediul și să utilizeze informația învățată.
  Agentul își actualizează politica pe măsură ce învață.

Tipuri de învățare cu întărire

- Bazată pe model
  - învață modelul de tranziții și recompense, și
  - îl folosește pentru a descoperi politica optimă
- Fără model: descoperă politica optimă fără a învăța modelul

Conținut

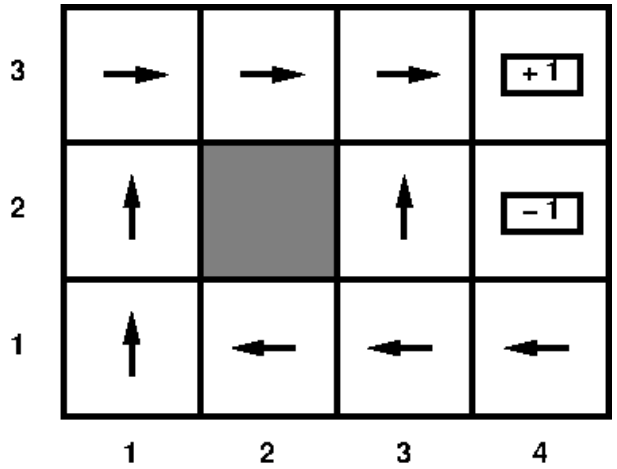
Învățarea pasivă

- Politica este fixă: în starea s execută întotdeauna acțiunea $\pi(s)$
- Scopul: învață cât de bună este politica π
  - învață utilitatea $U^{\pi}(s)$

    cum?

    execută politica și învață din experiență
  - abordare similară cu pasul (1) de evaluare a politicii din cadrul algoritmului *Iterarea politicilor*; diferența: nu cunoaștem modelul de tranziții $P(s'|s,a)$ și nici $R(s)$
- Învățarea pasivă este o modalitate de explorare a mediului.

Învățarea pasivă



- Agentul execută o serie de încercări (*trials*)
  $(1,1)_{-.04} \rightsquigarrow (1,2)_{-.04} \rightsquigarrow (1,3)_{-.04} \rightsquigarrow (1,2)_{-.04} \rightsquigarrow (1,3)_{-.04} \rightsquigarrow (2,3)_{-.04} \rightsquigarrow (3,3)_{-.04} \rightsquigarrow (4,3)_{+1}$
  $(1,1)_{-.04} \rightsquigarrow (1,2)_{-.04} \rightsquigarrow (1,3)_{-.04} \rightsquigarrow (2,3)_{-.04} \rightsquigarrow (3,3)_{-.04} \rightsquigarrow (3,2)_{-.04} \rightsquigarrow (3,3)_{-.04} \rightsquigarrow (4,3)_{+1}$

  $(1,1)_{-.04} \rightsquigarrow (2,1)_{-.04} \rightsquigarrow (3,1)_{-.04} \rightsquigarrow (3,2)_{-.04} \rightsquigarrow (4,2)_{-1}$
- Politica este aceeași, dar mediul este nedeterminist
- Scopul este să învețe utilitatea așteptată $U^{\pi}(s) = E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t R(S_t)\right]$

Conținut

Învățarea bazată pe model: Programarea dinamică adaptivă (ADP)

1. Învățăm modelul de tranziții
   Estimăm $P(s'|s, \pi(s))$ și $R(s)$ din încercări.

   Utilizăm un tabel de probabilități. Estimăm probabilitatea de tranziție. Cât de des apare rezultatul unei acțiuni?

   Exemplu:
   $(1,1)_{-.04} \rightsquigarrow (1,2)_{-.04} \rightsquigarrow (1,3)_{-.04} \rightsquigarrow (1,2)_{-.04} \rightsquigarrow (1,3)_{-.04} \rightsquigarrow (2,3)_{-.04} \rightsquigarrow (3,3)_{-.04} \rightsquigarrow (4,3)_{+1}$
   $(1,1)_{-.04} \rightsquigarrow (1,2)_{-.04} \rightsquigarrow (1,3)_{-.04} \rightsquigarrow (2,3)_{-.04} \rightsquigarrow (3,3)_{-.04} \rightsquigarrow (3,2)_{-.04} \rightsquigarrow (3,3)_{-.04} \rightsquigarrow (4,3)_{+1}$

   $(1,1)_{-.04} \rightsquigarrow (2,1)_{-.04} \rightsquigarrow (3,1)_{-.04} \rightsquigarrow (3,2)_{-.04} \rightsquigarrow (4,2)_{-1}$

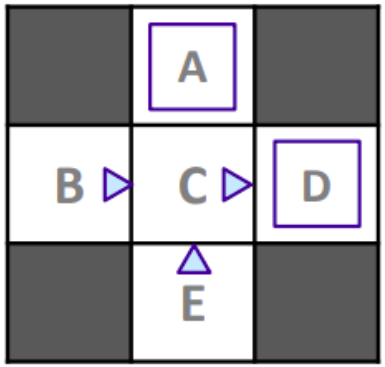
   Acțiunea *Right* este executată de 3 ori în starea (1,3) și în 2 cazuri starea care rezultă este (2,3)
   $\implies P((2,3)|(1,3), Right) = 2/3$

2. Rezolvăm MDP

Programarea dinamică adaptivă (ADP)

1. Învățarea modelului empiric
   Exemplu:

Input Policy π



Assume: $\gamma = 1$

Observed (s, a, s', R) Transitions

Episode 1

B, east, C, -1
C, east, D, -1
D, exit, x, +10

Episode 2

B, east, C, -1
C, east, D, -1
D, exit, x, +10

Episode 3

E, north, C, -1
C, east, D, -1
D, exit, x, +10

Episode 4

E, north, C, -1
C, east, A, -1
A, exit, x, -10

Learned Model

$\hat{T}(s, a, s')$

T(B, east, C) = 1.00
T(C, east, D) = 0.75
T(C, east, A) = 0.25
...

$\hat{R}(s, a, s')$

R(B, east, C) = -1
R(C, east, D) = -1
R(D, exit, x) = +10
...

Programarea dinamică adaptivă

2. Utilizăm programarea dinamică pentru rezolvarea procesului de decizie Markov.

   Probabilitățile și recompensele învățate se introduc în ecuațiile Bellman (politica fixă).

$$U^{\pi}(s) = R(s) + \gamma \sum_{s'} P(s'|s, \pi(s)) U^{\pi}(s')$$

   Se rezolvă sistemul de ecuații liniare cu necunoscutele $U^{\pi}(s)$.

ADP este ineficientă dacă spațiul stărilor este mare.

- Sistem de ecuații liniare de ordin n
- Jocul de table: 10^{20} ecuații cu 10^{20} necunoscute

Conținut

Învățare fără model: Estimarea directă a utilității

- Utilitatea unei stări este recompensa totală așteptată de la acea stare înainte (**reward-to-go**)

  Exemplu: $(1,1)_{-.04} \rightsquigarrow (1,2)_{-.04} \rightsquigarrow (1,3)_{-.04} \rightsquigarrow (1,2)_{-.04} \rightsquigarrow (1,3)_{-.04} \rightsquigarrow (2,3)_{-.04} \rightsquigarrow (3,3)_{-.04} \rightsquigarrow (4,3)_{+1}$
  $(1,1)_{-.04} \rightsquigarrow (1,2)_{-.04} \rightsquigarrow (1,3)_{-.04} \rightsquigarrow (2,3)_{-.04} \rightsquigarrow (3,3)_{-.04} \rightsquigarrow (3,2)_{-.04} \rightsquigarrow (3,3)_{-.04} \rightsquigarrow (4,3)_{+1}$

  $(1,1)_{-.04} \rightsquigarrow (2,1)_{-.04} \rightsquigarrow (3,1)_{-.04} \rightsquigarrow (3,2)_{-.04} \rightsquigarrow (4,2)_{-1}$

  Prima încercare produce:
  - starea (1,1) recompensa totală 0.72 (1 - .04 x 7)
  - starea (1,2) două recompense totale 0.76 și 0.84
  - starea (1,3) două recompense totale 0.80 și 0.88, ...

- Utilitatea estimată: **media** valorilor eșantionate
  - U(1,1) = 0.72, U(1,2) = 0.80, U(1,3) = 0.84 etc.

Estimarea directă a utilității

- Presupune că utilitățile sunt independente (fals).
  Nu ține cont de faptul că utilitatea unei stări depinde de utilitățile stărilor succesoare (constrângerile date de ecuațiile Bellman)

$$U^{\pi}(s) = R(s) + \gamma \sum_{s'} P(s'|s, \pi(s)) U^{\pi}(s')$$

  - căutarea într-un spațiu mult mai mare
  - convergența este foarte lentă

- Avem toate episoadele dinainte

Conținut

Învățarea diferențelor temporale (*Temporal Differences*)

- Combină avantajele abordărilor *Programarea dinamică adaptivă* și *Estimarea directă a utilității*
  - satisface aproximativ ecuațiile Bellman
  - actualizează doar stările direct afectate

- Scopul: **estimarea utilităților** $U^\pi(s)$, date episoadele generate utilizând politica π; acțiunile sunt decise de politica π.

- Utilitățile sunt ajustate după fiecare tranziție observată.

  Exemplu:
  - După prima încercare: estimările $U^\pi(1,3) = 0.84$, $U^\pi(2,3) = 0.92$.
  - În a doua încercare: tranziția $(1,3) \rightarrow (2,3)$.
    Constrângerea dată de ecuația Bellman impune actualizarea $U^\pi(1,3)$.

Învățarea diferențelor temporale

- Ecuația diferențelor temporale utilizează diferența utilităților între stări succesive:

$$U^{\pi}(s) \leftarrow U^{\pi}(s) + \alpha(R(s) + \gamma U^{\pi}(s') - U^{\pi}(s))$$

α rata de învățare
Actualizarea implică doar starea următoare s', pe când condițiile de echilibru (ec. Bellman) implică toate stările următoare posibile.

- Metoda aplică o serie de corecții pentru a converge

- Obs: metoda nu are nevoie de un model de tranziții P pentru a realiza actualizările

Diferențe temporale: pseudocod

function PASSIVE-TD-AGENT(*percept*) **returns** an action

inputs: *percept*, a percept indicating the current state s' and reward signal r'

persistent: π, a fixed policy

U, a table of utilities, initially empty

N_s, a table of frequencies for states, initially zero

s, a, r, the previous state, action, and reward, initially null

if s' is new **then** $U[s'] \leftarrow r'$

if s is not null **then**

increment $N_s[s]$

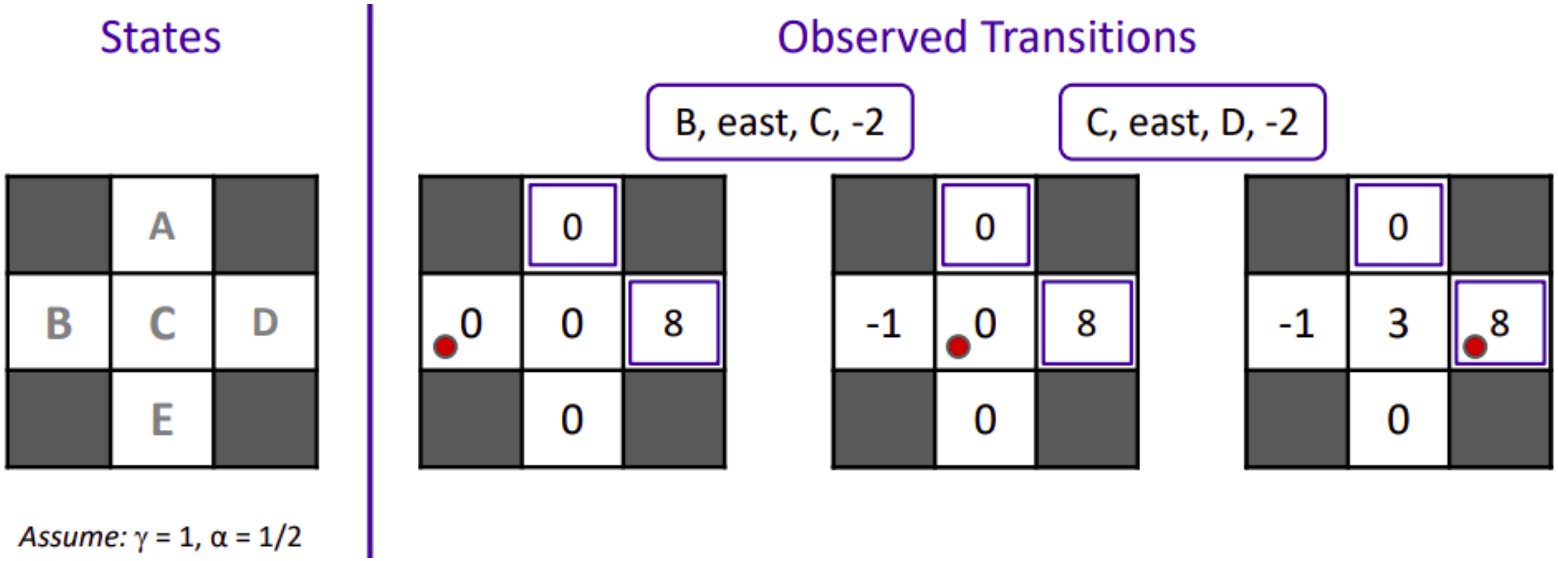
$U[s] \leftarrow U[s] + \alpha(N_s[s])(r + \gamma\, U[s'] - U[s])$

if s'.TERMINAL? **then** $s, a, r \leftarrow$ **null else** $s, a, r \leftarrow s', \pi[s'], r'$

return a

Demo: `https://cs.stanford.edu/people/karpathy/reinforcejs/gridworld_td.html`

Învățarea diferențelor temporale: exemplu

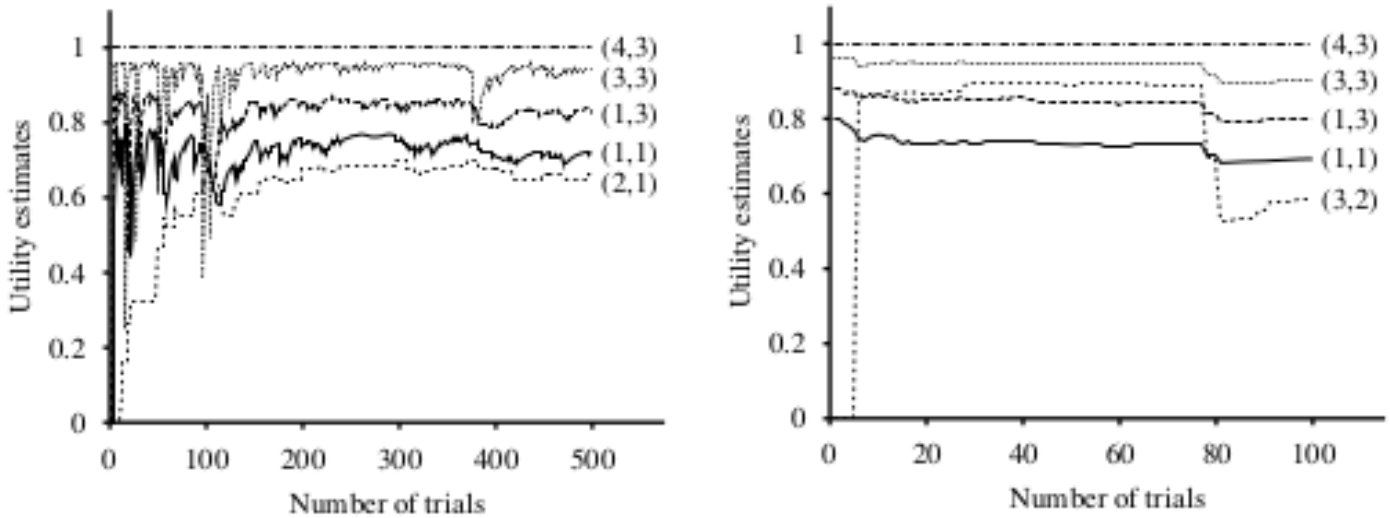


Învățarea diferențelor temporale

- Rata de învățare α determină viteza de convergență la utilitatea reală
- Valoarea medie a $U^{\pi}(s)$ va converge la valoarea corectă
  - suficiente încercări, tranzițiile rare apar rar
  - dacă α este o funcție care scade pe măsură ce nr. de vizitări ale unei stări crește, atunci $U^{\pi}(s)$ converge la valoarea corectă
    - funcția $\alpha(n) = 1/n$ sau $\alpha(n) = 1/(1+n) \in (0, 1]$

Diferențe temporale vs. Programare dinamică adaptivă

- TD nu are nevoie de model, ADP este bazată pe model
- TD utilizează doar succesorul observat pentru actualizare și nu toți succesorii
- TD converge mai lent, dar execută calcule mai simple



- TD poate fi văzut ca o aproximare a ADP

Conținut

Învățarea pasivă vs. învățarea activă

- Agentul pasiv are o politică fixă vs.

  agentul activ trebuie să decidă acțiunile

- Agentul pasiv învață (probabilitățile tranzițiilor și) utilitățile stărilor și alege acțiunile optime

  vs.

  Agentul activ își actualizează politica pe măsură ce învață
  - scopul este să învețe politica optimă
  - însă, funcția utilitate nu este cunoscută decât aproximativ

Exploatare vs. explorare

Dilema exploatare-explorare a agentului

- să își maximizeze utilitatea, pe baza cunoștințelor curente, sau
- să își îmbunătățească cunoștințele

Este necesar un compromis între

- exploatare
  - agentul oprește învățarea și execută acțiunile date de politică
- explorare
  - agentul învață încercând acțiuni noi

Dilema exploatare - explorare: soluții

Metoda ϵ-greedy

- Fie $\epsilon \in [0, 1]$
- Acțiunea următoare selectată va fi:
  - o acțiune aleatoare, cu probabilitatea ϵ
  - acțiunea optimă, cu probabilitatea $1 - \epsilon$

- Implementare
  - inițial $\epsilon = 1$ (explorare)
  - când se termină un episod de învățare, ϵ scade (de ex. cu 0.05) - crește progresiv rata de exploatare
  - ϵ nu scade niciodată sub un prag, de ex. 0.1
    - agentul are mereu o șansă de explorare, pentru a evita optimele locale

Conținut

Algoritmul Q-Learning (Watkins, 1989)

- Învață o funcție acțiune-valoare $Q(s, a)$ (Q *quality*).
  $Q(s, a)$ valoarea asociată realizării acțiunii a în starea s.
  Relația dintre utilități și valorile Q: $U(s) = max_a Q(s, a)$.

- Ecuațiile adevărate la echilibru când valorile Q sunt corecte

$$Q(s, a) = R(s) + \gamma \sum_{s'} P(s'|s, a) max_{a'} Q(s', a')$$

  Acestea pot fi utilizate într-un proces iterativ care calculează valorile Q exacte.

Algoritmul Q-Learning

- Un agent TD care învață o funcție Q nu are nevoie de un model probabilist $P(s'|s,a)$ (*învățare fără model*).
- Pentru fiecare eșantion (s,a,s',r), se actualizează valoarea Q.
  Ecuația de actualizare pentru TD Q-Learning:

$$Q(s,a) = Q(s,a) + \alpha(R(s) + \gamma max_{a'} Q(s',a') - Q(s,a))$$

(executând acțiunea a în starea s rezultă s')

Coeficientul de învățare α determină viteza de actualizare a estimărilor; de obicei, $\alpha \in (0,1)$

Algoritmul Q-Learning: pseudocod

function Q-LEARNING-AGENT(*percept*) **returns** an action
  inputs: *percept*, a percept indicating the current state s' and reward signal r'
  persistent: Q, a table of action values indexed by state and action, initially zero
    N_{sa}, a table of frequencies for state–action pairs, initially zero
    s, a, r, the previous state, action, and reward, initially null

  if TERMINAL?(s) **then** $Q[s, None] \leftarrow r'$
  if s is not null **then**
    increment $N_{sa}[s, a]$
    $Q[s, a] \leftarrow Q[s, a] + \alpha(N_{sa}[s, a])(r + \gamma \max_{a'} Q[s', a'] - Q[s, a])$
  $s, a, r \leftarrow s', \text{argmax}_{a'} f(Q[s', a'], N_{sa}[s', a']), r'$
  return a

f funcție de explorare

- Q-learning converge la o politică optimă
- Q-Learning este mai lent decât ADP

Q-learning

Exemplul 1

Pacman is in an unknown MDP where there are three states [A, B, C] and two actions [Stop, Go]. We are given the following samples generated from taking actions in the unknown MDP. For the following problems, assume $\gamma = 1$ and $\alpha = 0.5$.

(a) We run Q-learning on the following samples:

s	a	s'	r
A	Go	B	2
C	Stop	A	0
B	Stop	A	-2
B	Go	C	-6
C	Go	A	2
A	Go	A	-2

What are the estimates for the following Q-values as obtained by Q-learning? All Q-values are initialized to 0.

$Q(C, Stop) = ?, Q(C, Go) = ?$

Exemplul 2

`https://huggingface.co/learn/deep-rl-course/unit2/q-learning-example`

SARSA

- Ecuația de actualizare

$$Q(s,a) = Q(s,a) + \alpha(R(s) + \gamma Q(s',a') - Q(s,a))$$

(s', a') perechea (starea următoare, acțiunea următoare)

SARSA utilizează abordarea TD: se actualizează tabelul Q după fiecare pas până cand soluția converge/nr. max. de iterații.

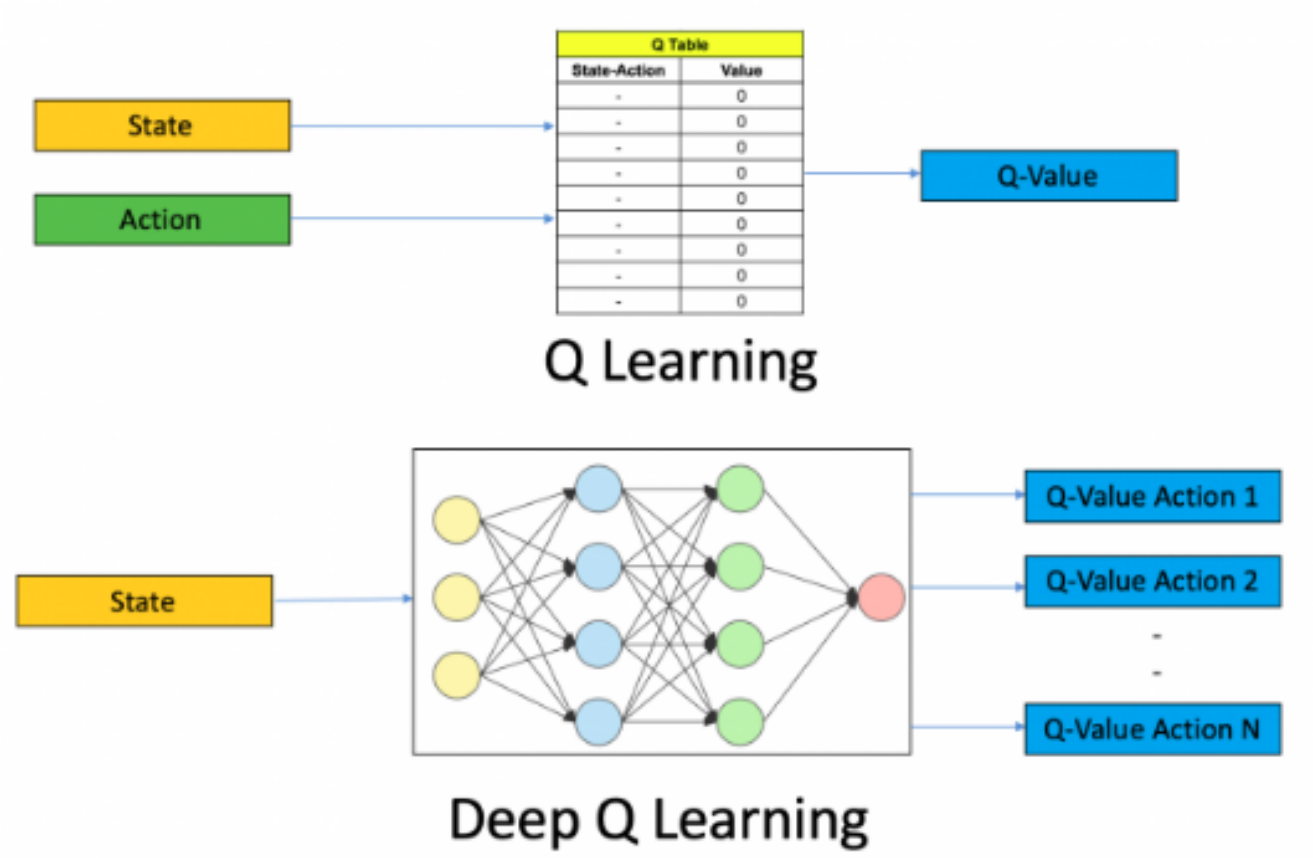
- Exemplu aplicație: *Windy Gridworld*
http://www.incompleteideas.net/book/ebook/node64.html

Conținut

Deep Reinforcement Learning

Utilizează o rețea neurală (profundă) pentru a aproxima valorile Q

- intrare: o stare
  ieșire: o estimare a lui Q, pentru fiecare acțiune posibilă



Deep Reinforcement Learning

- Considerăm ec. de actualizare a valorii Q (derivată din ec. Bellman):

$$\begin{aligned} Q(s,a) &= Q(s,a) + \alpha[r + \gamma max_{a'} Q(s',a') - Q(s,a)] \\ &= (1-\alpha)Q(s,a) + \alpha[r + \gamma max_{a'} Q(s',a')] \end{aligned}$$

- Funcția de cost: eroarea medie patratică dintre valorea Q prezisă și valorea țintă Q^* (nu se cunoaște).
  Valoarea țintă: $target(s') = r + \gamma max_{a'} Q(s',a')$
  Minimizăm $loss(s,a,s') = (Q(s,a) - target(s'))^2$.

- Utilizăm metoda *Gradient descent* pentru a optimiza funcția de cost

Descriere: `https://deeplearningmath.org/deep-reinforcement-learning.html`
Demo: https://cs.stanford.edu/people/karpathy/reinforcejs/

Deep Q-learning

Probleme:

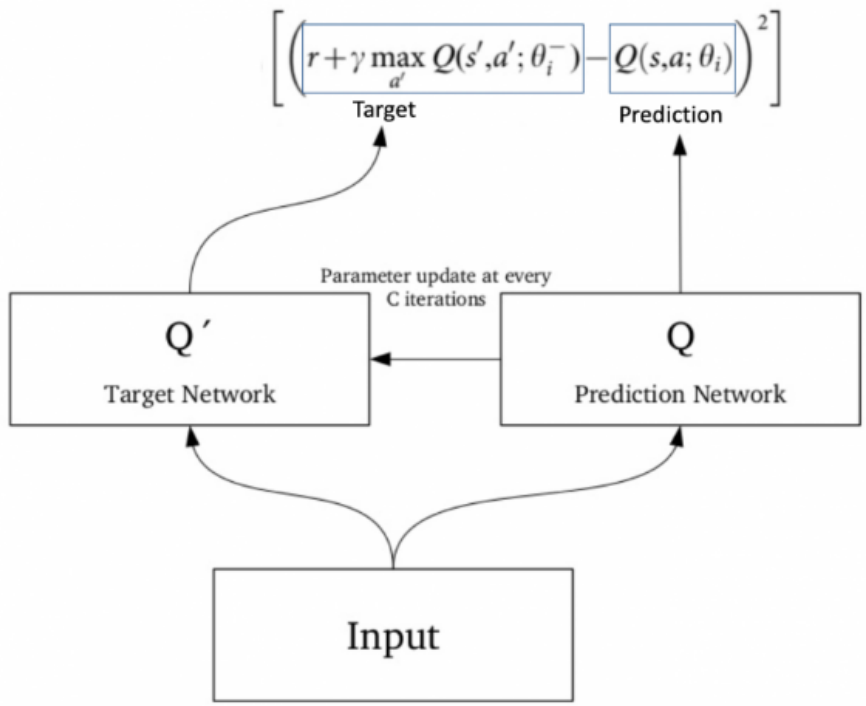
- eșantioanele sunt corelate $\rightarrow$ rețeaua nu poate generaliza
- $target(s')$ este o estimare $\rightarrow$ convergență lentă/alg. nu e stabil

Soluții:

- ϵ-greedy policy
- *experience replay*: memorăm experiențele (s, a, r, s') și le folosim pentru antrenare (*mini-batch*)

Double Deep Q-network

- Valoarea țintă se modifică la fiecare iterație;
  Soluție: o rețea separată pentru a estima valoarea țintă.



- la fiecare C iterații, parametrii din rețeaua de predicție sunt copiați în rețeaua țintă

Function approximation

$$\hat{U}_\theta(s) = \theta_1 f_1(s) + \theta_2 f_2(s) + \ldots \theta_n f_n(s)$$

$f_1, \ldots f_n$ atribute

Învață valorile parametrilor $\theta = \theta_1, \ldots \theta_n$ a.i. funcția $\hat{U}_\theta$ aproximează funcția utilitate.

- actualizează parametrii după fiecare încercare
- Funcție de eroare

$$E_j(s) = (\hat{U}_\theta(s) - u_j(s))^2/2$$

$u_j(s)$ recompensa totală observată din starea s pentru încercarea j
Calculăm gradienții în raport cu θ.

$$\theta_i \leftarrow \theta_i - \alpha \frac{\delta E_j(s)}{\delta \theta_i} = \theta_i + \alpha(u_j(s) - \hat{U}_\theta(s)) \frac{\delta \hat{U}_\theta(s)}{\delta \theta_i}$$

- putere de generalizare (stări vizitate $\rightarrow$ stări nevizitate)

Conținut

Concluzii

- Învățarea cu întărire este necesară pentru agenții care evoluează în medii necunoscute
- Învățarea pasivă presupune evaluarea unei politici date
- Învățarea activă presupune învățarea unei politici optime

Bibliografie

- *Artificial Intelligence: A modern Approach*. Ch. 21. Reinforcement Learning
- Sutton&Barto. *Reinforcement Learning. An introduction* `http://incompleteideas.net/book/RLbook2020.pdf`