Tarea 2

Oscar De la Cruz Echeveste

30 de agosto del 2018

1 Distribución uniforme

$$P(x|\mu, W) = \frac{1}{W} \tag{1}$$

para: $|x-\mu| \leq \frac{W}{2}$
donde: $W = b - a$

1.1 Función de distribucion acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx' = \int_{-(\frac{w}{2}-\mu)}^{x} \frac{1}{W}dx' = \left[\frac{x}{W}\right]_{-(\frac{w}{2}-\mu)}^{x}$$

$$F(x) = \frac{x-\mu}{W} + \frac{1}{2} \tag{2}$$

1.2 Media

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-(\frac{w}{2}-\mu)}^{\frac{w}{2}-\mu} \frac{x}{W}dx = \frac{1}{W}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-(\frac{w}{2}-\mu)}^{\frac{w}{2}-\mu}$$

$$= \frac{1}{2W}\left[\left(\frac{W}{2}+\mu\right)^2 - \left(\frac{W}{2}-\mu\right)^2\right] = \frac{(W)(2\mu)}{2W} = \mu$$

Entonces, la media es:

$$E(x) = \mu \tag{3}$$

1.3 Varianza

$$Var(x) = \int_{-(\frac{w}{2}-\mu)}^{\frac{w}{2}-\mu} \frac{(x-\mu)^2}{W}dx = \int_{-(\frac{w}{2}-\mu)}^{\frac{w}{2}-\mu} \frac{x^2-2x\mu+\mu}{W}dx$$

$$= \frac{1}{W}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-(\frac{w}{2}-\mu)}^{\frac{w}{2}-\mu} - \frac{2\mu}{W}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-(\frac{w}{2}-\mu)}^{\frac{w}{2}-\mu} + \frac{\mu^2}{W}\left[x\right]_{-(\frac{w}{2}-\mu)}^{\frac{w}{2}-\mu}$$

La varianza resulta:

$$Var(x) = \frac{W^2}{12} \tag{4}$$

2 Distribución Gaussiana

La función de distribución de la distribución normal está definida como sigue:

$$p(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \tag{5}$$

Con $x \in \mathbb{R}$

2.1 Función de distribución acumulada

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dt \tag{6}$$

Usando $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ tenemos:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}u^2} du + \int_{0}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du\right] \tag{7}$$

Donde:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}u^2} du + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 2\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{2\pi}$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

Ademas, la segunda integral de la ecuación (7) es la funcion especial llamada *función error*:

$$erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Por lo tanto la función de distribución acumulada será:

$$P(x) = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{8}$$

2.2 Media

$$E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{9}$$

Haciendo $x = x + \mu - \mu$

$$E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Suatituyendo $u = x + \mu$ tenemos:

$$E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \tag{10}$$

El primer término es la integrar de $-l$ a l de una funcion impar por una par que es igual a una funcion impar, por lo tanto la integral es cero. Entonces:

$$E(x) = \mu\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\right] = \mu$$

$$E(x) = \mu \tag{11}$$

2.3 Varianza

$$Var(x) = E[(x-\mu)^2] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \tag{12}$$

Sabemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

Tomando la derivada respecto a σ, tenemos:

$$\frac{d}{d\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Multiplicando ambos lados por $\sigma^2/\sqrt{2\pi}$ tenemso:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

entonces:

$$Var(x) = \sigma^2 \tag{13}$$

3 Distribución Binomial

$$f(x|B_{n,p}) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \tag{14}$$

donde:
$n = 1, 2, 3, ...$
$0 \leq p \leq 1$
$x = 1, 2, 3, ..., n$

3.1 Función de distribución acumulada

$$F(x;n,p) = \sum_{x=0}^{n} \left(\frac{n!}{(x-n)!(x)!} \right) p^x (1-p)^{n-x} \tag{15}$$

3.2 Media

Tenemos que la media será:

$$E[x] = \sum_i x_i f(x_i) = 0n \tag{16}$$

El primer termino de la sumatroria es igual a cero. Ademas, si factorizamos una n y una x tenemos:

$$E[x] = 1n = \sum_{x=1}^{n} x \left(\frac{n}{x} \right) \left(\frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} \right) p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} n \left(\frac{(n-1)!}{((n-1)-(x-1))!(x-1)!} \right) p^x (1-p)^{n-x}$$

Cambiando $k = x - 1$, entonces:

$$E[x] = \sum_{k=0}^{n-1} n \left(\frac{(n-1)!}{((n-1)-k)!k!} \right) p^{k+1} (1-p)^{(n-1)-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(n-1)!}{((n-1)-k)!k!} \right) p^k (1-p)^{(n-1)-k}$$

Usando el teorema del binomio de Newton:

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) x^{n-k} y^k \tag{17}$$

Entonces:

$$E[x] = np \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(n-1)!}{((n-1)-k)!k!} \right) p^k (1-p)^{(n-1)-k} = np(p + (1-p))^{n-1} = np$$

por tanto:

$$E[x] = np \tag{18}$$

3.3 Varianza

por la ecuación (18) tenemos que:

$$Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2 = E[x^2] - n^2 p^2 \tag{19}$$

donde:

$$E[x^2] = \sum_{x=0}^{n} x^2 \left(\frac{n!}{(x-n)!(x)!} \right) p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} [x(x-1) + x] \left(\frac{n!}{(n-x)!(x)!} \right) p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} [x(x-1)] \left(\frac{n!}{(n-x)!(x)!} \right) p^x (1-p)^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x \left(\frac{n!}{(n-x)!(x)!} \right) p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \left(\frac{n!}{(n-x)!(x-2)!} \right) p^x (1-p)^{n-x} + np = n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \left(\frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} \right) p^{x-2} (1-p)^{n-x} + np$$

Usando $k = x - 2$:

$$E[x^2] = p^2 n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{(n-2)!}{((n-2)-k)!(k)!} \right) p^k (1-p)^{(n-2)-k} + np$$

Usando el teorema del binomio (ecuación (17)):

$$E[x^2] = p^2 n(n-1)[p + (1-p)]^{n-2} + np = (np)^2 - np^2 + np$$

Por lo tanto:

$$Var[x] = (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = np - np^2$$

$$Var[x] = np(1-p) \tag{20}$$

4 Distribución de Poisson

La distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto período de tiempo.

$$f(k, \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \tag{21}$$

$\lambda \in (0, \infty)$
$k \in \{0, 1, 2, 3...\}$

donde:

k es el número de ocurrencias del evento o fenómeno (la función nos da la probabilidad de que el evento suceda precisamente k veces).   es un parámetro positivo que representa el número de veces que se espera que ocurra el fenómeno durante un intervalo dado.

4.1 Función de distribución acumulada

$$F(k, \lambda) = P(x \leq k) = \sum_{x=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{k} \frac{\lambda^x}{x!} \tag{22}$$

4.2 Media

$$E[x] = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} \tag{23}$$

El primer temrmino de la suma es cero. Ademas, factorizamos λ y x:

$$E[x] = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{(\lambda)}{(x)} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

cambiando $i = x - 1$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda e^0 = \lambda$$

$$E[x] = \lambda \tag{24}$$

4.3 Varianza

$$Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2 = E[x(x-1) + x] - (E[x])^2 = E[x(x-1)] + E[x] - (E[x])^2 \tag{25}$$

Entonces, por la ecuacion (11), tenemos:

$$Var[x] = E[x(x-1)] + \lambda - (\lambda)^2$$

donde:

$$E[x(x-1)] = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$$

cambiando $i = x - 2$

$$E[x(x-1)] = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i)!} = \lambda^2$$

Entonces la varianza será:

$$Var[x] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$Var[x] = \lambda \tag{26}$$

5 Distribución Beta

$$f(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} \tag{27}$$

con: $0 \leq x \leq 1$

donde:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{28}$$

y

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{29}$$

5.1 Función de distribución acumulada

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \tag{30}$$

para $0 \leq t \leq 1$

5.2 Media

$$E(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 (x)x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx$$

Tomando en cuenta la ecuación (15) y (16):

$$E(x) = \frac{\beta(p+1,q)}{\beta(p.q)} = \frac{\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}}{\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+1)}$$

donde:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \tag{31}$$

de lo cual podemos mostrar que:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t}dt = \left[t^z e^t\right]_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{32}$$

Entonces:

$$E(x) = \frac{p\Gamma(p)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p+q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q}$$

$$E(x) = \frac{p}{p+q} \tag{33}$$

5.3 Variaza

$$Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

Donde:

$$E(x^2) = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 (x^2) x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1} dx$$

$$= \frac{\beta(p+2,q)}{\beta(p+q)} = \frac{\frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)}}{\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} = \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+2)}$$

Donde:

$$\Gamma(p+2) = \Gamma[(p+1)+1] = (P+1)\Gamma(p+1) = (p+1)p\Gamma(p)$$

y

$$\Gamma(p+q+2) = (p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)$$

Entonces:

$$E(x^2) = \frac{(p+1)p(p)\Gamma(p+q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)\Gamma(p)} = \frac{(p+1)p}{(p+q+1)(p+q)}$$

Por lo tanto, la varianza será:

$$Var(x) = \frac{(p+1)p}{(p+q+1)(p+q)} - \left(\frac{p}{p+q}\right)^2$$

$$Var(x) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \tag{34}$$

6 Distribución χ^2

En estadística, la distribucion chi^2 es una distribución de probabilidad continua con un parámetro k que representa los grados de libertad de la variable aleatoria

$$X = Z_1^2 + ... + Z_k^2 \tag{35}$$

Donde Z_i son variables aleatorias normales independientes de media cero y varianza uno.

Su función de desnidad es:

$$f(x;k) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} \tag{36}$$

Para $x > 0$

Donde $\Gamma(z)$ es la funcion gamma:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{37}$$

6.1 Función de distribuci.on acumulada

$$F_k(x) = \int_0^x \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x'^{(k/2)-1} e^{-x'/2} dx' = \frac{1}{2\Gamma(k/2)} \int_0^x \left(\frac{x'}{2}\right)^{(k/2)-1} e^{-x'/2} dx'$$

Podemos expresar esta ecuación en terminos de la función gamma incompleta. Es decir:

$$\gamma(a,x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt \tag{38}$$

Ademas, sustituimos $u = x'/2$

$$F_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \int_0^{x/2} (u)^{(k/2)-1} e^{-u} du$$

Entonces, la función de distribución acumulada se puede expresar como::

$$F_k(x) = \frac{\gamma(k/2, x/2)}{\Gamma(k/2)} \tag{39}$$

6.2 Media

$$E(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \int_0^\infty x \frac{x^{(k/2)-1}}{2^{k/2}} e^{-x/2} dx = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^{k/2} e^{-x/2} dx$$

Usando $u = x/2$ y la ecuación (32) tenemos:

$$= \frac{2}{\Gamma(k/2)} \int_0^\infty u^{k/2} e^{-u} du = \frac{2\Gamma((k/2)+1)}{\Gamma(k/2)} = 2\left(\frac{k}{2}\right) \frac{\Gamma(k/2)}{\Gamma(k/2)}$$

Entonces, la media es:

$$E(x) = k \tag{40}$$

6.3 Varianza

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \int_0^\infty (x^2) \frac{x^{(k/2)-1}}{2^{k/2}} e^{-x/2} dx - k^2 = \frac{2}{\Gamma(k/2)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^{(k/2)+1} e^{-x/2} dx - k^2$$

Usando $u = x/2$ y la ecuación (32) tenemos:

$$= \frac{4}{\Gamma(k/2)} \int_0^\infty u^{(k/2)+1} e^{-u} du - k^2 = \frac{4\Gamma(((k/2)+1)+1)}{\Gamma(k/2)} - k^2$$

$$= 4\left(\frac{k}{2}+1\right) \frac{\Gamma((k/2)+1)}{\Gamma(k/2)} - k^2 = 4\left(\frac{k}{2}+1\right)\left(\frac{k}{2}\right) - k^2$$

Entonces, la varianza será:

$$Var(x) = 2k \tag{41}$$

7 Distribución hipergeométrica

En la teoría de la probabilidad y las estadísticas, la distribución hipergeométrica es una distribución de probabilidad discreta que describe la probabilidad de que x éxitos (sorteos aleatorios para los cuales el objeto atraído por una característica específica) dibuje n, Sin reemplazo, de una población finita de tamaño N que contiene exactamente objetos K con esa característica, donde cada extracción es un éxito o una falla. En contraste, la distribución binomial describe la probabilidad de que x éxitos en n dibuje con reemplazo.

La distribución hipergeométrica se usa para calcular las probabilidades cuando se muestrea sin reemplazo. Por ejemplo, supongamos que primero muestras aleatoriamente una carta de un mazo de 52. Luego, sin volver a colocar la carta en el mazo, muestras un segundo y luego (nuevamente sin reemplazar cartas) un tercero. Dado este procedimiento de muestreo, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos de las cartas muestreadas sean ases (4 de las 52 cartas en la baraja son ases). Puede calcular esta probabilidad usando la siguiente fórmula basada en la distribución hipergeométrica:

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{42}$$

7.1 Función de sistribuion acumulada

$$F(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \tag{43}$$

7.2 Media

$$E[x] = \sum_{x=0}^{n} x\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} x\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} \frac{xK!}{x!(K-x)!}\binom{N-K}{n-x}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=1}^{n} \frac{K(K-1)!}{(x-1)!((K-1)-(x-1))!}\binom{(N-1)-(K-1)}{(n-1)-(x-1)}$$

Cambiando $m = x - 1$

$$E[x] = k\frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(K-1)!}{m!((K-1)-m)!}\binom{(N-1)-(K-1)}{(n-1)-(x-1)} = k\frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{K-1}{m}\binom{(N-1)-(K-1)}{(n-1)-m}$$

$$= k\frac{1}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1} = K\frac{(N-1)!)}{(n-1)!(N-n))!}\frac{n!(N-n)!}{N!} = K\frac{n}{N}$$

Entonces, la media será:

$$E[x] = K\frac{n}{N} \tag{44}$$

7.3 Varianza

$$E[x(x-1)] = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=2}^{n} \frac{x(x-1)K!}{x!(K-x)!}\binom{N-K}{n-x}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=2}^{n} \frac{K(K-1)(K-2)!}{(x-2)!((K-2)-(x-2))!} \binom{(N-2)-(K-2)}{(n-2)-(x-2)}$$

usando $m = x - 2$, entonces:

$$= \frac{K(K-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(K-2)!}{m!((K-2)-m)!} \binom{(N-2)-(K-2)}{(n-2)-m} = \frac{K(K-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{m=0}^{n-2} \binom{K-2}{m} \binom{(N-2)-(K-2)}{(n-2)-m}$$

$$= \frac{K(K-1)}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2} = K(K-1) \frac{(N-n)!n!}{N!} \frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}$$

$$= \frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)}$$

Entonces:

$$E[x^2] = E[x(x-1)] + E[x] = \frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{Kn}{N}$$

Por lo tanto la varianza será:

$$E[x^2] - (E[x])^2 = \frac{Kn}{N} \left[\frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)} + 1 - \frac{Kn}{N} \right] = \frac{Kn}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$Var[x] = \frac{Kn}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \tag{45}$$