Probabilidad y estadística

Moreno Guerra José Alberto
División de Ciencias e Ingenierías,
Métodos Estadísticos en Cosmología de la Universidad de Guanajuato
Prof. Alma González and Gustavo Niz

August 24, 2015

1 Funciones Generatrices de Momentos

1.1 Asociadas a una distribución (densidad) de probabilidad existen funciones a partir de las cuales es posible obtener todos los momentos asociados a la distribución (densidad) como lo es la *media* y *desviacion estandar*, las cuales son los primeros dos momentos que se obtienen.

De manera general, para una variable x continua, puede escribirse como le sigue:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \tag{1}$$

Pero recordando que

$$e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \tag{2}$$

Podemos reescribir la ecuación (1) como:

$$M_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{-\infty} \infty x^k f(x) dx \tag{3}$$

De que por construcción, podemos definir el k-*ésimo* momento $\mu_k^{'}$ de la función de distribución (densidad) $f(x)$ como:

$$\mu_k^{'} \equiv \frac{M_x(t)}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \tag{4}$$

Distribución normal

- La función generadora de momentos, para una distribución normal de una variable aleatoria X centrada en μ, se define de la siguiente manera

  Es entonces:

$$m_{x-\mu}(t)\, E\left\lfloor exp\left(t\left(X-\mu\right)\right)\right\rfloor = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(t\left(X-\mu\right)\right) exp\left(\frac{-\left(X-\mu\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right) dx \tag{5}$$

Reescribiendo (5)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\left[(X-\mu)-\sigma^2 t\right]^2-\sigma^4 t^2\right\}\right) \tag{6}$$

Agrupando términos:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) exp\left(-\frac{\left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2}{2\sigma^2}\right) dx = exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \tag{7}$$

$$\mu_1 = \mu \tag{8}$$

$$\mu_2 = \sigma^2 \tag{9}$$

Distribución Uniforme

Se puede extender para una función de distribución uniforme

$$m_x(t) = \int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a}dx = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{(b-a)t} \tag{10}$$

$$\mu_1 = \frac{a+b}{2} \tag{11}$$

$$\mu_1 = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{12}$$

Distribución Beta

$$m_x(t) = \int_a^b \frac{e^{tx}}{\beta(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+k)\Gamma(p+q)t^k}{\Gamma(p+q+k)\Gamma(p)k!} \tag{13}$$

$$\mu_1 = \frac{p}{p+q} \tag{14}$$

$$\mu_2 = \frac{p}{(p+q)^2(p+q+1)} \tag{15}$$

Distribución Binomial

$$m_x(t) = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(e^t p)^x(1-p)^{n-x} = (e^t p+1-p)^n \tag{16}$$

$$\mu_1 = np \tag{17}$$

$$\mu_2 = np(1-p) \tag{18}$$

Distribución Poisson

$$m_x(t) = \sum_{x=0}^{n} \frac{e^{tx} e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = exp(\lambda(e^t - 1)) \tag{19}$$

$$\mu_1 = \lambda \tag{20}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{21}$$

Distribución Chi Square

$$m_x(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{x/2} dx = (1-2t)^{-k/2} \tag{22}$$

$$\mu_1 = k \tag{23}$$

$$\mu_2 = 2k \tag{24}$$