БИЛЕТ 14

Метод прогонки

трехдиагональная матрица

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \delta_1 & & & & & f_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & & 0 & & f_1 \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & & \vdots \\ & & \cdots & & & & \\ & 0 & & a_n & b_n & c_n & f_n \\ & & & & \delta_2 & 1 & f_{n+1} \end{array}\right)$$

размер $n+2$

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$x_k = A_{k+1} \cdot x_{k+1} + B_{k+1}$$

$$x_0 + \delta_1 x_1 = f_0 \rightarrow x_0 = \underbrace{-\delta_1}_{A_1} x_1 + \underbrace{f_0}_{B_1}$$

$$a_1 (A_1 x_1 + B_1) + b_1 x_1 + c_1 x_2 = f_1 \rightarrow x_1 (a_1 A_1 + b_1) = -c_1 x_2 + f_1 - a_1 B_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = \underbrace{-\frac{c_1}{a_1 A_1 + b_1}}_{A_2} x_2 + \underbrace{\frac{f_1 - a_1 B_1}{a_1 A_1 + b_1}}_{B_2}$$

$$A_{k+1} = -\frac{c_k}{a_k A_k + b_k} \qquad B_{k+1} = \frac{f_k - a_k B_k}{a_k A_k + b_k}$$

$$\begin{cases} x_n = A_{n+1} x_{n+1} + B_{n+1} \\ \delta_2 x_n + x_{n+1} = f_{n+1} \end{cases}$$

$$x_{n+1} + \delta_2 A_{n+1} x_{n+1} + \delta_2 B_{n+1} = f_{n+1}$$

$$(1 + \delta_2 A_{n+1}) x_{n+1} = f_{n+1} - \delta_2 B_{n+1}$$

$$x_{n+1} = \frac{f_{n+1} - \delta_2 B_{n+1}}{1 + \delta_2 A_{n+1}}$$

Т. Существование решения в случае диагонального преобл.

Потребуем $|\delta_1| < 1$, $|\delta_2| < 1$, $\underbrace{|b_i| > |a_i| + |c_i|}$ - диаг. преоб.

Док-во. $|A_1| < 1$, т.к. $A_1 = -\delta_1$

$$|b_1| > |a_1| + |c_1| \geqslant |a_1| > |A_1| \cdot |a_1| \Rightarrow b_1 + a_1 A_1 \neq 0$$

$$\frac{|c_1|}{|a_1 A_1 + b_1|} < 1 \Rightarrow |c_1| < |a_1 A_1 + b_1| \text{ - докажем это}$$

$$|a_1 A_1 + b_1| \geqslant |b_1| - |a_1 A_1| > |b_1| - |a_1| > |c_1| \blacksquare$$