15. Нахождение экстремума функции одной переменной

Способы:

1) Метод перебора
2) Метод случайного выстрела
3) Метод дихотомии для производной от первоначальной функции

   Существует теорема: «Если непрерывная функция на конках интервала имеет значения разных знаков, то внутри этого интервала у неё есть как минимум один корень».

   На основании этой теоремы можно построить следующий алгоритм для поиска нуля функции $f'(x)$:

   1) Задать начальный интервал $[a, b]$
   2) Убедиться, что на концах функция имеет разный знак ($f'(a) * f'(b) < 0$)
   3) Повторять:
      1) Выбрать внутри интервала точку x
      2) Если $|f'(x)| < \varepsilon$ тогда точка x считается корнем, выходим из цикла
      3) Сравнить знак функции в точке x со знаком функции в одном из концов
         1) Если совпадает, то переместить этот конец в точку x
         2) Иначе переместить в точку x другой конец интервала
4) Метод золотого сечения

   Алгоритм для поиска минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

   1) Задаются начальные значения границ отрезка a, b и точность ε
   2) Рассчитываются значения:

   $$x_1 = b - \frac{b-a}{\varphi}$$

   $$x_2 = a + \frac{b-a}{\varphi}$$

      Где φ-пропорция золотого сечения:

   $$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$$

      Если $f(x_1) \geq f(x_2)$, то $a = x_1$, иначе $b = x_2$.

   3) Если $|b - a| < \varepsilon$, то $x = \frac{a+b}{2}$ и останов. Иначе возврат к шагу 2.
5) Аналитическое решение
6) Метод Ньютона – итерационный численный метод нахождения нуля заданной функции. В нашем случае нуля функции $f'(x)$.

   Если x_k - точка, полученная на k-ом шаге, то функция $f'(x)$ в окрестности x_k приближается своим уравнением касательной $y(x)$:

$$y(x) = f'(x) + (x - x_k)f''(x_k)$$

А точка x_{k+1}выбирается как пересечений этой прямой с осью Ox, т.е. x_{k+1} находится из уравнения $y(x_{k+1}) = 0$, а значит выражается по формуле:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Если

$$S(x) = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

то метод Ньютона сходится при условии:

$$|S'(x)| = \left|\frac{f'(x)f'''(x)}{f''(x)^2}\right| \leq q < 1$$

7) Метод градиентного спуска

Идея метода состоит в «движении» по области аргументов функции в сторону антиградиента – наискорейшего убывания функции

Пусть дана функция $f(x)$. Тогда её градиент $\nabla f(x) = f'(x)$ в случае функции от одной переменной.

Алгоритм:

1) Повторять:
   a. $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x)$
   b. Если выполнен критерий останова, то вернуть текущее значение x_{k+1}

Возможные критерии останова:

1) $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$
2) $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \varepsilon$

Коэффициент α_k выбирается одним из следующих образов:

1) Постоянная величина – метод может расходиться
2) Длина шага в процессе спуска делится на некоторое число
3) **(!)** Вариант, преобразующий градиентный спуск в метод наискорейшего спуска

$$\alpha_k = arg\min_{\alpha} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$