

20. Шаблоны. Погрешность. Устойчивость для дифференциальных уравнений в частных производных

Поставим задачу $u'_t = a^2 u''_{xx} + f(x, t)$.

Первая краевая задача: $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Будем считать, что $x \in [0, l]$, $t \in [0, T]$.

Отрезок $[0, l]$ разделим с шагом h , отрезок $[0, T]$ разделим с шагом τ :

$$x_j = jh, \quad t_k = k\tau.$$

Сетка – совокупность узлов с шагами h и τ .

Чем меньше h и τ , тем лучше аппроксимация u .

Идея метода: заменить функцию в частных производных ее разностным аналогом для сеточной функции.

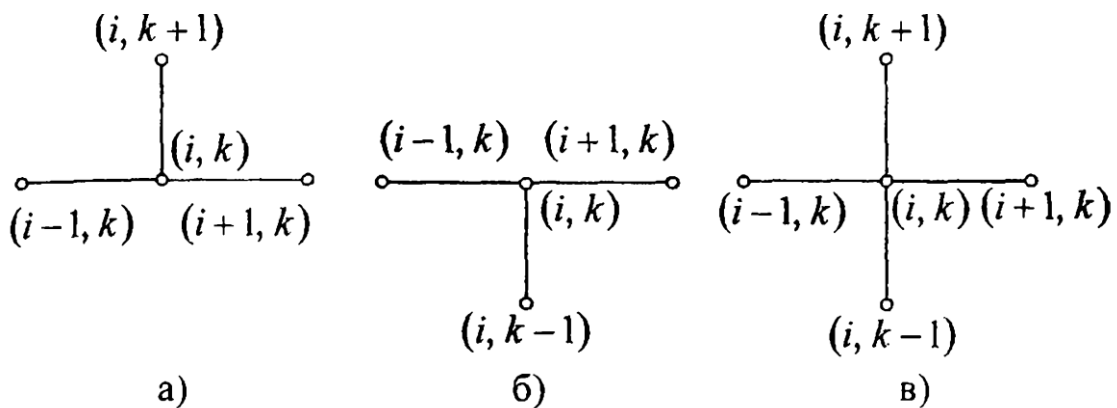
Нам достаточно знать не полностью функцию $u(x, t)$, а только ее значения в узлах сетки.

$$u(ih, jt) = u'_{ij} \text{ соответственно } u'_{ij_t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau}$$

$$\text{Для всех слоев, кроме первого, можно использовать центральную производную: } u''_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

$$\text{Подставляя в исходное уравнение, получаем: } \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + f_{i,j}.$$

Шаблон разностной схемы – конфигурация узлов, в которых связаны одним уравнением разностной схемы значения неизвестной функции.



а) шаблон для явной схемы (неустойчивый);

б) шаблон для неявной схемы (устойчивый);

в) шаблон для явной схемы (устойчивый).

Погрешность решения – $O(h^2 + \tau^2)$.

