21. Метод Якоби

Требуется решить систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

, то есть $Ax = b$, где:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots. & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)n} & a_{(n-2)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При предположении, что диагональные коэффициенты ненулевые.

$a_{ii} \neq 0, i = \overline{1,n}$.

Метод решения

Решив 1-ое уравнение системы относительно x1 получим: $x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)}{a_{11}}$

2-ое - относительно x2 , n-ое - относительно xn

В итоге эквивалентная система, в которой диагональные элементы строки выражены через оставшиеся:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \\ \quad \dots \\ x_n = \frac{b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n(n-1)}x_{n-1})}{a_{nn}} \end{cases}$$

Или: $x = \alpha x + \beta$, где: $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots & \dots \\ -\frac{a_{1n}}{a_{nn}} & -\frac{a_{2n}}{a_{nn}} & -\frac{a_{3n}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$

Далее вводится некоторое начальное приближение - вектор $x(0) = \left[\frac{b_1}{a_{11}}, \dots, \frac{b_i}{a_{ii}}, \dots, \frac{b_n}{a_{nn}}\right]$, затем используя $x(1)$ находится $x(2)$).

Данный процесс называется итерационным, условием окончания является достижение заданной точности (система сходится и есть решение) или прерывание процесса. Процесс прерывается, когда число итераций превышает заданное допустимое количество, при этом система не сходится либо заданное количество итераций не хватило для достижения требуемой точности.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)}\right)}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)}\right)}{a_{22}} \\ \quad \dots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \dots + a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)}\right)}{a_{nn}} \end{cases}$$

. Или $x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$, где:

$x^{(1)} = \alpha x^{(0)} + \beta$ - первое приближение;

$x^{(2)} = \alpha x^{(1)} + \beta$ - второе приближение;

$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$ - (k+1)-ое приближение.

Итерационный процесс. Верхний индекс в скобках - номер итерации.

Если последовательность приближений (x(0),x(1),...,x(k+1),...) имеет предел $x = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}$, то этот предел является решением. k=1,2,3,...N-1. Где N-1 - заданное количество итераций

Достаточный признак сходимости метода Якоби:

Если в системе выполняется диагональное преобладание, то метод Якоби сходится.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,(j \neq i)}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Критерий окончания итераций при достижении требуемой точности имеет вид: $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| < \varepsilon$, где ε - заданная точность вычисления.