8. Дифференциальные уравнения в частных производных. Параболические уравнения

При изучении большинства физических и иных пролцессов и явлений приходиться сталкиваться с тем, что исследуемые свойства объекта описываются функциями не одной переменной, а нескольких. В таких случаях при составлении математической модели, описывающей явления, вместо ОДУ возникают уравнения в частных производных. Эти уравнения принято классифицировать как уравнения математической физики. Общий вид линейного дифференциального уравнения в частных производных 2 порядка выглядит так: $A\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+2\mathrm{B}\frac{\delta^2 u}{\delta x\,\delta t}+C\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}+D\frac{\delta u}{\delta x}+D\frac{\delta u}{\delta t}+Gu=f(x,t)$. В зависимости от знака дискриминанта B^2-AC уравнение делится на несколько типов.(3 см.источники). При $B^2-AC=0$ - уравнение принимает параболический тип.

Простейшее параболическое неоднородное уравнение с 2 переменными имеет вид: (1) $\frac{\delta u}{\delta t}=k^2\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}+f$, $x\in[0,X]$ и $t\in[0,T]$, $(u(x,0)=\psi(x),0\le x\le X,t=0)$, где $u(x,t)$ - искомая функция — решение. С практической точки зрения уравнение позволяет изучать процессы распространения тепла, фильтрации жидкости и газа в пористой среде, некоторые вопросы теории вероятностей и т.д. Уравнение может быть дополнено различными начальными условиями. В зависимости от дополнительных условий, которые описывают границы, то общую задачу можно разграничить на несколько типов:

1. Если на границах $x=0\,u\,x=X$ заданы значения искомой функции $u(x,t)$: $(u(0,t)=\varphi_0(t),x=0,t>0)$ и $(u(X,t)=\varphi_1(t),x=X,t>0)$ - граничные условия первого рода, то вся задача может трактоваться как первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности. В терминах теории теплообмена $u(x,t)$ – распределение температуры в пространственно-временной области, описываемой параметрами *x* и *t*, k^2 – коэффициент температуропроводности, а начальные и граничные условия с помощью функций ψ и φ задают температуру на границах *x = 0* и *x = X*.
2. Если на границах $x=0\,u\,x=X$ заданы значения искомой функции $u(x,t)$: $(\frac{\delta u(0,t)}{\delta t}=\varphi_0(x),x=0,t>0)$ и $(\frac{\delta u(X,t)}{\delta t},x=X,t>0)$ - граничные условия второго рода и общая задача характреизуется как вторая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности.
3. Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее производной по пространственной переменной $\alpha\frac{\delta u(0,t)}{\delta t}+\beta(u(0,t)=\varphi_0(x),x=0,t>0)$ и $\gamma\frac{\delta u(X,t)}{\delta t}+\delta(u(X,t)=\varphi_0(x),x=X,t>0)$ - граничные условия 3 рода и задача называется третьей начально-краевой задачей.

Существует два вида методов решения подобного рода уравнений:

1) Аналитический, при котором результат выводится различными математическими преобразованиями(один из самых популярных методов - метод разделения переменных Фурье)
2) Численный, при котором полученный результат соответствует действительному с заданной точностью, но который требует много рутинных вычислений и поэтому выполним только при помощи вычислительной техники (ЭВМ)(метод конечных разностей или метод сеток).

Литература: 1) Н.С. Бахвалов. Численные методы. 2) Н.Н. Меркулова, М.Д. Михайлов Разностные схемы для дифференциальных уравнений.