№7

Прямые методы решения СЛУ:

1) Метод Гаусса

Главная идея метода Гаусса состоит в приведении матрицы системы к верхней треугольной форме. Это называется прямым ходом метода Гаусса. Решение полученной системы с верхней треугольной матрицей называется обратным ходом.

Решаем систему из n линейных уравнений с n неизвестными переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Предполагается, что определитель исходной матрицы не равен нулю. Пусть также $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то этого можно добиться перестановкой уравнений системы.

Далее необходимо исключить переменную x_1 из всей уравнений системы, начиная со второго. Прибавим ко второму уравнению системы первое, которое умножено на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, прибавим к третьему уравнению первое умноженное на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и т.д.

После вышеописанных действий система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}.$$

Далее производим аналогичные действия, но уже с частью системы. И так далее, постепенно исключаем неизвестные. В итоге получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}.$$

После того как система стала верхней треугольной формы, можно начать обратный ход метода Гаусса:

- вычисляем x_n из последнего уравнения как $x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$;
- с помощью полученного x_n находим x_{n-1} из последнего уравнения и т.д., находим x_1 из первого уравнения.

сложность данного метода:

Прямой ход метода Гаусса требует выполнения $n(n-1)(n+4)/3$ операции, где n – порядок матрицы, а для обратного хода может потребоваться приблизительно $n(n+1)/2$ операций.

Итог: Для метода Гаусса требуется $O(n^3)$ арифметических операций.

2) Метод Крамера

Метод Крамера – способ решения систем линейных алгебраических уравнений, который применяется только к системам, у которых количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, а определитель отличен от нуля.

1 Шаг. Необходимо вычислить главный определитель матрицы и убедится, что он не равен нулю, т.е. $\Delta \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2 Шаг. Нужно найти определители матриц при замене столбцов на свободные члены:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & b_n \end{vmatrix}$$

3 Шаг. Вычислить неизвестные переменные по формуле

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

<u>**сложность данного метода**</u>:

Данный метод требует вычисления n+1 определителей размерности n x n. Следовательно трудоемкость может оценивается как $O(n!)$

При использовании метода Гаусса для вычисления определителей метод имеет сложность порядка $O(n^4)$

3) Метод прогонки

Метод прогонки является модификацией метода Гаусса для частного случая разреженных систем – системы уравнений с трехдиагоналъной матрицей. Такие системы получаются при моделировании некоторых инженерных задач, а также при численном решении краевых задач для дифференциальных уравнений.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & b_n & c_n & f_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_n & 1 & f_{n+1} \end{array}\right).$$

Без уменьшения общности считаем, что $\sigma_i = 1$, если это не так, то все уравнение делим на σ_i.

Сначала выполняется прямой ход:

$x_k = A_{k+1}x_{k+1} + B_{k+1}$

$x_0 + \sigma_1 x_1 = f_0 \longrightarrow x_0 = -\sigma_1 x_1 + f_0 \longrightarrow A_1 = -\sigma_1, B_1 = f_0$

$a_1 x_1 A_1 + a_1 B_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2 = f_1$

$x_1(a_1 A_1 + b_1) = -c_1 x_2 + f_1 - a_1 B_1 \longrightarrow x_1 = \frac{-c_1\, x_2}{(a_1 A_1 + b_1)} + \frac{f_1 - a_1 B_1}{(a_1 A_1 + b_1)}$

…

$$A_{k+1} = \frac{-c_k}{(a_k A_k + b_k)}$$

$$B_{k+1} = \frac{f_k - a_k B_k}{(a_k A_k + b_k)}$$

В итоге получаем систему:

$x_n = A_{n+1}x_{n+1} + B_{n+1}$

$x_{n+1} + \sigma_2 x_n = f_{n+1}$

Откуда:

$$x_{n+1} = \frac{f_{n+1} - \sigma_2 B_{n+1}}{1 + \sigma_2 A_{n+1}}$$

после чего вычисляется решение с помощью обратного хода.

Сложность: Для прямого хода требуется 8(n-2)+2 операций, для выполнения обратного хода 2(n-1)+5

Итог: 10n+O(1)

4) Метод LU-разложения

Под LU-разложением подразумевается представление квадратной матрицы в виде произведения нижнетреугольной матрицы с ненулевыми диагональными элементами на верхнетреугольную матрицу с единицами на главной диагонали. Такое представление удобно для решения системы линейных алгебраических уравнений, поскольку оно позволяет перейти от решения исходной системы к последовательному решению систем с упомянутыми матрицами.

Полученное LU-разложение матрицы A (матрица коэффициентов системы) может быть использовано для решения семейства систем линейных уравнений с различными векторами b в правой части:

$$Ax = b.$$

Если известно LU-разложение матрицы A, то исходная система может быть записана как

$$LUx = b.$$

Эта система может быть решена в два шага. На первом шаге решается система

$$Ly = b.$$

Поскольку L – нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой.

На втором шаге решается система

$$Ux = y.$$

Поскольку U – верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой.

Найти матрицы L и U можно следующим образом:

$$u_{1j} = a_{1j}, \qquad j = 1 \dots n,$$

$$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}, \qquad j = 1 \dots n, \qquad (u_{11} \neq 0).$$

Для $i = 2 \dots n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}\,, \qquad j = i \dots n,$$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}\right), \qquad j = i \dots n.$$

Сложность: $\frac{2}{3}n^3 + o(n^2)$(аналогично методу Гаусса)