36. Условная и абсолютная сходимость метода. Неявный метод Эйлера

Пусть дана задачи Коши для уравнения первого порядка:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Заменим производную на разностный аналог

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Тогда решение находится по рекуррентной формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Это отличается от прямого метода Эйлера тем, что функция $f(x, y)$ вычисляется в конечной точке шага, а не в начальной. В отличие от прямого метода, где решение получается явно, здесь необходимо решить уравнение.

Неявный метод Эйлера имеет первый порядок сходимости, но является абсолютно устойчивым, в отличие от явного.

Если поведение решения не зависит от шага h, то такой метод называется абсолютно сходящимся, если такая зависимость существует – условно сходящимся.

Определим размер шага, рассмотрев тестовое уравнение $y' = \lambda y$. Тогда решение $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$ ограниченно $|y(x)| = |y_0||e^{\lambda x}|$. Для явного метода Эйлера $y_{i+1} = (1 - h\lambda)y_i$, требуется, чтобы коэффициент был ограничен $|1 + h\lambda| \le 1$. Метод Эйлера устойчив (условно), если $h \le \frac{2}{\lambda}$.