

22. Числа Фибоначчи.

Последовательность Фибоначчи $\{y_m\}$: $y_0 = 1, y_1 = 1, y_{i+2} = y_{i+1} + y_i$.

$$y_{i+2} - y_{i+1} - y_i = 0$$

Характеристическое уравнение: $q^2 - q - 1 = 0$, корни: $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Тогда $y_m = k_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + k_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$.

Положим, что $m=0$ и $m=1$. Найдем k_1 и k_2 :

$$\begin{cases} k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 1 = 1 \\ k_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + k_2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ \frac{1}{2}(k_1 + k_2) + \frac{\sqrt{5}}{2}(k_1 - k_2) = 1. \end{cases}$$

Таким образом, последовательность имеет вид:

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{m+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{m+1}.$$

Свойства и тождества чисел, если что, на Википедии:

https://ru.wikipedia.org/wiki/Числа_Фибоначчи