24. Линейные разностные уравнения

Пусть заданы числа $n \in \mathbb{N}$ и $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{A}$. Уравнение $x_{n+K} = a_1 x_{n+K-1} + \dots + a_n x_K$ при $K \in \{0,1,2 \dots\}$ и $a_n \neq 0$ называется линейным однородным разностным уравнением n-ого порядка. Пусть числа $x_0, \dots x_{n-1}$ заданы, тогда уравнение определяет линейную рекуррентную последовательность n-ого порядка: начиная с $K = 0$, каждый элемент x_{n+K} этой последовательности определяется через n предшествующих. Уравнение второго порядка $x_{K+2} = x_{K+1} + x_K$ при $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ задает последовательность чисел Фибоначчи $\{1,1,2,3,5,8,13, \dots\}$.

Более сложный тип – уравнения вида $x_{n+K} = a_1(K) x_{n+K-1} + \dots + a_n(K) x_K + b_n(K)$, где $a_1(K), \dots, a_n(K), b_n(K)$ – некоторые функции от номера K, называются линейно неоднородными разностными уравнениями с переменными коэффициентами.

Решить разностное уравнение, т.е. найти выражение для x_K в виде явной функции от номера K и «начальных данных» $x_0, \dots x_{n-1}$. Будем говорить об общем решении, если $x_0, \dots x_{n-1}$ считаются произвольными. Рассмотрим идею решения только для линейных однородных уравнений 2-ого порядка с постоянными коэффициентами.

Для уравнения $a x_{K+2} + b x_{K+1} + c x_K = 0$ сделаем формальную замену $x_{K+2} \to q^2$, $x_{K+1} \to q$, $x_K \to 1$, получив алгебраическое уравнение – так называемое характеристическое уравнение: $aq^2 + bq + c = 0$. Анализируем корни с помощью дискриминанта $D = b^2 - 4ac$:

1. $D > 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$

   Решение отыскивается в виде: $x_K = C_1 \lambda_1^K + C_2 \lambda_2^K$, где $C_1, C_2 = const$
2. $D = 0 \Rightarrow \lambda$

   Решение отыскивается в виде: $x_K = (C_1 + C_2 K)\lambda^K$, где $C_1, C_2 = const$
3. $D < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = re^{i \pm \varphi}$

   Решение отыскивается в виде: $x_K = C_1 r^K \cos K\varphi + C_2 r^K \sin K\varphi$, где $C_1, C_2 = const$

Далее необходимо найти неопределенные коэффициенты C_1 и C_2, они ищутся из «начальных условий»: формулы остаются справедливыми при $K = 0$ и $K = 1$. Таким образом, мы получаем следующую систему (для случая 1)

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ x_1 = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 \end{cases}$$

После нахождения C_1 и C_2 нам известна выражение в виде функции для нахождения x_K от номера K.