1. Формулы Ньютона-Котеса – это формулы с равноотстоящими узлами $x_0 = a, \dots, x_k = a + k \cdot h, \dots, x_n = b$ и шагом $h = \frac{b-a}{n}$. (осуществляется деление отрезка $[a, b]$ на n равных частей) Обозначим $Y_k = f(x_k), k = \overline{0,n}$. Используя для квадратурной формулы $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k Y_k$ многочлен Лагранжа с равноотстоящими узлами, получаем из квадратурных коэффициентов $A_k = \int_a^b \frac{w_n(x)}{(x-x_k)w_n'(x_k)} dx$ величины:

$A_k = h \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \int_0^n \frac{t^{[n+1]}}{t-k} dt,\ k = \overline{0,n},\ t = \frac{x-x_0}{h}$. С учетом $h = \frac{b-a}{n}$ имеем $A_k = (b-a)\frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k! \cdot (n-k)!} \cdot \int_0^n \frac{t^{[n+1]}}{t-k} dt$,

или $A_k = (b-a)H_k$, где $\boldsymbol{H_k} = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k! \cdot (n-k)!} \cdot \int_0^n \frac{t^{[n+1]}}{t-k} dt,\ k = \overline{0,n}$

Здесь $t^{[n+1]} = t(t-1) \dots (t-n)$. Поскольку H_k безразмерны, то их можно подсчитать для любого h.

Постоянные H_k называются *коэффициентами Котеса*. Их очевидные свойства: $\sum_{k=0}^{n} H_k = 1$, $H_k = H_{n-k}$.

С учетом связи между A_k и H_k получаем квадратурную формулу, называемую **формулой Ньютона-Котеса**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot \sum_{k=0}^{n} H_k Y_k \qquad \textbf{(1)}$$

Остаточный член этой формулы для n раз непрерывно дифференцируемой функции вычисляется по равенству $\rho_n(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi) w_n(x) dx$ и имеет вид: $\rho_n(f) = h^{n+2} \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\alpha) \cdot t^{[n+1]}}{(n+1)!} dt, \alpha = \alpha(t) \in [0, n]$.

Очевидно, для $|f^{(n+1)}(x)| \le M_{n+1}$ получаем оценку: $\rho_n(f) = M_{n+1} \cdot h^{n+2} \int_a^b \frac{t^{[n+1]}}{(n+1)!} dt$.

2.1 Формула прямоугольника. Пусть $n = 0$, тогда функция $f(x)$ приближается на $[a, b]$ многочленом $L_0(x) = f(x_0)$, где точка $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Используя формулу (1), имеем $\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(x_0) + \rho_0(f)$ **(2)**

Поскольку $|(b-a) \cdot f(x_0)|$ есть площадь прямоугольника, то полученную формулу называют формулой прямоугольника. Для дважды непрерывно дифференцируемой $f(x)$ её погрешность имеет вид:

$\rho_0(f) = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2 \cdot f''(\xi)dx,\ \xi = \xi(x) \in [a, b]$. Используя обобщенную теорему о среднем для определенного интеграла, получаем $\rho_0(f) = \frac{1}{2} \cdot f''(\alpha) \cdot \frac{(b-a)^3}{3},\ \alpha \in [a, b]$. Отсюда видно, что эта формула для применения мало годна из-за ее большой погрешности остатка на больших отрезках $[a, b]$. Поэтому на практике используют обобщенную формулу [без вывода]: $\int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k{}^*) + \frac{(b-a)^3}{6 \cdot n^2} \cdot f''(\xi),\ \xi \in [a, b]$ (или $\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k{}^*)$) **(2')**

Здесь $x_k{}^* = x_{k-1} + \frac{h}{2},\ k = \overline{0,n}$, а погрешность порядка (h^2)

2.2 Формула трапеции. Пусть $n = 1$, тогда функция $f(x)$ на $[a, b]$ заменяется многочленом $L_1(x)$, построенным для значений $f(a), f(b)$. Тем самым имеет формулу Ньютона-Котеса в простейшем виде. Её коэффициенты $H_0 = H_1 = \frac{1}{2}$.

Тогда интеграл $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) + \rho_1(f)$ **(3)**

Эта квадратурная формула называется формулой трапеций. Её погрешность для $f''(x)$ непрерывной будет

$\rho_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta),\ \eta \in [a, b]$ На практике используют обобщенную формулу трапеции [без вывода]:

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left((f(x_0) + f(x_n)) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) - \frac{h^3}{12} \cdot \sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k)$, где $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ **(3')**

2.3 Формула Симпсона. Пусть $n = 2$, тогда функция $f(x)$ на $[a, b]$ заменяется параболой $L_2(x)$. По формуле Ньютона-Котеса имеем: $\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)^3}{3} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + \rho_2(f)$ **(4)**,

если производная $f^{(4)}(x)$ непрерывна, погрешность: $\rho_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{90} \cdot f^{(4)}(\eta),\ \eta \in [a, b]$.

Обобщенная формула Симпсона: $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6 \cdot n} \cdot (y_0 + y_{2 \cdot n} + 4 \cdot \sigma_1 + 2 \cdot \sigma_2) - \frac{n \cdot h^5 \cdot f^{(4)}(\eta)}{90}$ **(4')**

где $\eta \in [a, b]$, $\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} Y_{2 \cdot k-1}$, $\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} Y_{2 \cdot k}$, $Y_k = f(x_k)$,

Источник: Учебно-методическое пособие ННГУ http://www.unn.ru/books/met_files/alkint.pdf с. 8–12