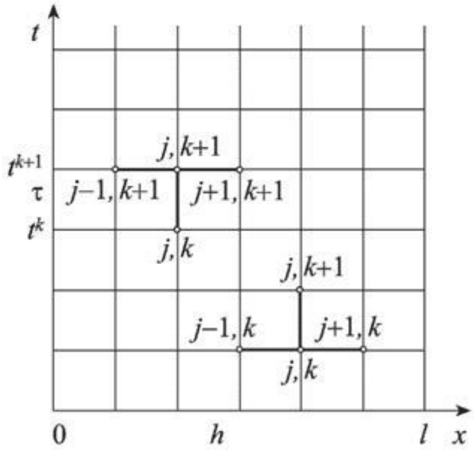
14. Численные решения дифференциальных уравнений в частных производных. Метод сеток



Поставим задачу $u'_t = a^2 u''_{xx} + f(x,t)$.

Первая краевая задача: $u(x,0) = \varphi(x)$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

Будем считать, что $x \in [0,l], t \in [0,T]$.

Отрезок $[0,l]$ разделим с шагом h, отрезок $[0,T]$ разделим с шагом τ:

$x_j = jh$, $t_k = k\tau$.

Сетка – совокупность узлов с шагами h и τ.

Чем меньше h и τ, тем лучше аппроксимация u.

Идея метода: заменить функцию в частных производных ее разностным аналогом для сеточной функции.

Нам достаточно знать не полностью функцию $u(x,t)$, а только ее значения в узлах сетки.

Все значения функции на отрезке $[0,l]$ нам известны, также известны значения на боковых границах.

$u(ih, jt) = u''_{ij}$ соответственно $u'_{ij_t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau}$

Слой – разностные точки для определенного значения j. (если $j = 0$ – нулевой слой и т.д.)

Для всех слоев, кроме первого, можно использовать центральную производную: $u''_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем: $\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + f_{i,j}$.

Возьмем также разностную схему: $\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + f_{i,j+1}$.

В левых частях стоит одна и та же аппроксимация первой производной. Дроби в правых частях этих уравнений представляют собой аппроксимации второй производной одного типа, но на разных слоях (на j и $j+1$).Есть смысл в том, чтобы взять не узловую точку прямой $x = x_i$, а какую-то промежуточную точку отрезка $[t_j, t_{j+1}]$ этой прямой. В зависимости от того, в каком отношении эта условная расчетная точка будет делать указанный отрезок, вторую производную будем подменять соответствующей линейной комбинацией ее аппроксимаций на слоях j и $j+1$. Получим:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = (1-\alpha) \cdot a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \alpha \cdot a^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + (1-\alpha) \cdot f_{i,j} + \alpha \cdot f_{i,j+1}.$$

$\alpha \in [0,1]$ – вещественный параметр (вес).