Частичная проблема собственных значений

Пусть А $-$ квадратная матрица размера $n * n$. Частичной проблемой собственных значений называется нахождение некоторой части собственных значений λ, так как во многих задачах интересны не все собственные значения, а только небольшая их часть. и, возможно, соответствующих собственных векторов х матрицы А из однородного уравнения Ах $=$ λх.

Одной из задач проблемы собственных значений является рассматриваемая в данной работе задача нахождения максимального по модулю собственного значения матрицы А. Далее будем полагать, что А - действительная симметричная матрица.

Степенной метод (похож на метод простой итерации)

Применяется для получения наибольшего по модулю собственного значения. Пусть $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \text{и т. д.}$ Собственное значение λ в данном случае должно быть вещественным, поскольку в противном случае собственным значением было бы также равное ему по модулю число $\bar{\lambda}$. Построим такой итерационный процесс: $x^{(s+1)} = Ax^{(s)}$.

Он не сходится в обычном смысле. Разложим нулевое приближение по собственным векторам матрицы:

$x^{(0)} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. Получается $x^{(1)} = Ax^{(0)}$, а это равно $x^{(1)} = \lambda_1\, a_1x_1 + \lambda_2\, a_2x_2 + \cdots + \lambda_n\, a_nx_n$. Тогда легко убедиться, что $x^{(s)} = \lambda_1^s a_1x_1 + \lambda_2^s a_2x_2 + \cdots + \lambda_n^s a_nx_n$ и при достаточно большом числе итераций

$x^{(s)} \approx \lambda_1^s a_1x_1$, т.е. $x^{(s)}$ сходится к собственному вектору по направлению.

Очевидно, что $x^{(s+1)} \approx \lambda_1\, x_1$. Процесс сходится линейно со знаменателем $q = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$.

Считается, что процесс практически сошелся, если отношения соответствующих координат векторов $x^{(s)}$ и $x^{(s+1)}$ с требуемой точностью одинаковы и не меняются на последних итерациях. При этом для более точного получения собственного значения целесообразно положить $\lambda_1 \approx \left|\frac{x^{(s+1)}}{x^{(s)}}\right| = \sqrt{\frac{(x^{(s+1)},x^{(s+1)})}{(x^{(s)},x^{(s)})}}$