

## 20. Шаблоны. Погрешность. Устойчивость для дифференциальных уравнений в частных производных

Поставим задачу  $u'_t = a^2 u''_{xx} + f(x, t)$ .

Первая краевая задача:  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ .

Будем считать, что  $x \in [0, l]$ ,  $t \in [0, T]$ .

Отрезок  $[0, l]$  разделим с шагом  $h$ , отрезок  $[0, T]$  разделим с шагом  $\tau$ :

$$x_j = jh, \quad t_k = k\tau.$$

Сетка – совокупность узлов с шагами  $h$  и  $\tau$ .

Чем меньше  $h$  и  $\tau$ , тем лучше аппроксимация  $u$ .

Идея метода: заменить функцию в частных производных ее разностным аналогом для сеточной функции.

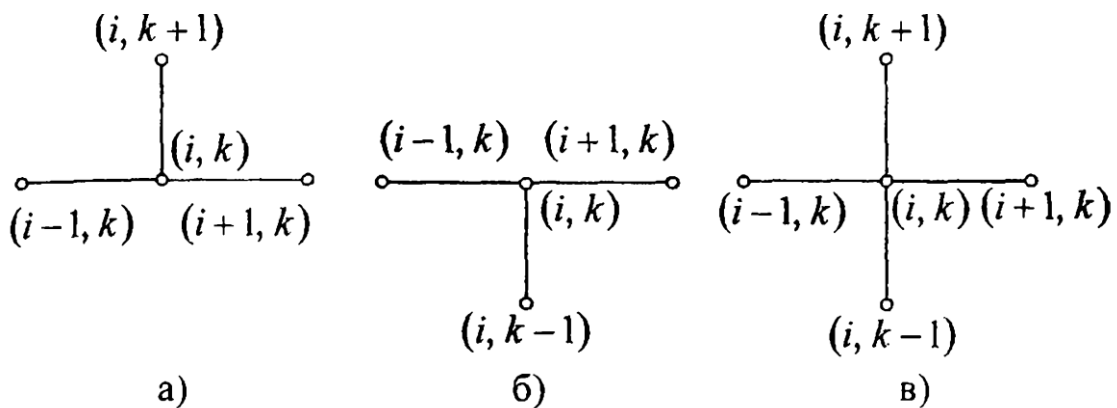
Нам достаточно знать не полностью функцию  $u(x, t)$ , а только ее значения в узлах сетки.

$$u(ih, jt) = u''_{ij} \text{ соответственно } u'_{ij_t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau}$$

Для всех слоев, кроме первого, можно использовать центральную производную:  $u''_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$ .

Подставляя в исходное уравнение, получаем:  $\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + f_{i,j}$ .

Шаблон разностной схемы – конфигурация узлов, в которых связаны одним уравнением разностной схемы значения неизвестной функции.



а) шаблон для явной схемы (неустойчивый);

б) шаблон для неявной схемы (устойчивый);

в) шаблон для явной схемы (устойчивый).

Погрешность решения –  $O(h^2 + \tau^2)$ .

