38. Решение дифференциальных уравнений 1 порядка. Метод Эйлера

Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения удается свести к конечному числу алгебраических операций, операций интегрирования и дифференцирования известных функций, то говорят, что уравнение *интегрируется в квадратурах*. В приложениях крайне редко встречаются уравнения, интегрируемые в квадратурах. Поэтому для исследования дифференциальных уравнений широко используются приближенные, численные методы их решения.

Численное решение на отрезке $[a, b]$ задачи Коши

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

состоит в построении таблицы приближенных значений

$$y_0, y_1, \dots, y_i, \dots y_N$$

решения $y(x)$ в узлах сетки

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_N = b$$

Если $x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{b-a}{N}$, то сетка называется *равномерной.*

Численный метод решения задачи Коши называется одношаговым, если для вычисления решения в точке $x_0 + h$ используется информация о решении только в точке x_0.

Простейший одношаговый метод численного решения задачи Коши – метод Эйлера. В методе Эйлера величины y_i вычисляются по формуле $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, которая получается заменой производной в исходной задаче на разностный аналог $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$.

Явный метод Эйлера имеет первый порядок сходимости и является условно устойчивым. Определим размер шага, рассмотрев тестовое уравнение $y' = \lambda y$. Тогда решение $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$ ограниченно $|y(x)| = |y_0|\left|e^{\lambda x}\right|$, если $\lambda < 0$. Для явного метода Эйлера $y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1 + h\lambda)y_i$ или при многократном применении $y_n = y_0(1 + h\lambda)^n$ требуется, чтобы коэффициент был ограничен $|1 + h\lambda| < 1$. Поэтому явный метод Эйлера устойчив (условно), если $-1 < 1 + h\lambda < 1$, $-2 < h\lambda < 0$, $0 < h < -\frac{2}{\lambda}$, но т.к. шаг всегда положителен, то $h < -\frac{2}{\lambda}$.