18. Задача о минимальном максимуме отклонения от нуля

Задача: среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом 1 найти наименее отклоняющийся от нуля. Таким многочленом является полином Чебышева:

$$T_n(x) = cos(n\,arccos\,x)\,, \qquad x \in [-1, 1]$$

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad n > 0$$

Заметим, что $T_n(\cos x) = \cos nx$, тогда

$$+\begin{matrix}\cos(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x \\ \cos(n-1)x = \cos nx \cos x + \sin nx \sin x\end{matrix}$$

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x,$$

что равносильно $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$ или $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

Нормированный (усеченный) многочлен Чебышева $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}} = \overline{T}_n(x)$ – является многочленом, наименее отклоняющимся от нуля.

Если $P_n(x)$ – многочлен степени n со старшим коэф-ом 1, то $\max\limits_{[-1,1]}|P_n(x)| \geq \max\limits_{[-1,1]}\left|\overline{T}_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Док-во от противного: многочлен $\overline{T}_n(x) - P_n(x)$ имеет степень $n-1$; в тоже время он имеет n различных нулей, получили противоречие.