

## 24. Линейные разностные уравнения

Пусть заданы числа  $n \in \mathbb{N}$  и  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{A}$ . Уравнение  $x_{n+K} = a_1 x_{n+K-1} + \dots + a_n x_K$  при  $K \in \{0, 1, 2, \dots\}$  и  $a_n \neq 0$  называется линейным однородным разностным уравнением  $n$ -ого порядка. Пусть числа  $x_0, \dots, x_{n-1}$  заданы, тогда уравнение определяет линейную рекуррентную последовательность  $n$ -ого порядка: начиная с  $K = 0$ , каждый элемент  $x_{n+K}$  этой последовательности определяется через  $n$  предшествующих. Уравнение второго порядка  $x_{K+2} = x_{K+1} + x_K$  при  $x_0 = 1, x_1 = 1$  задает последовательность чисел Фибоначчи  $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ .

Более сложный тип – уравнение вида  $x_{n+K} = a_1(K)x_{n+K-1} + \dots + a_n(K)x_K + b_n(K)$ , где  $a_1(K), \dots, a_n(K), b_n(K)$  – некоторые функции от номера  $K$ , называются линейно неоднородными разностными уравнениями с переменными коэффициентами.

Решить разностное уравнение, т.е. найти выражение для  $x_K$  в виде явной функции от номера  $K$  и «начальных данных»  $x_0, \dots, x_{n-1}$ . Будем говорить об общем решении, если  $x_0, \dots, x_{n-1}$  считаются произвольными. Рассмотрим идею решения только для линейных однородных уравнений 2-ого порядка с постоянными коэффициентами.

Для уравнения  $ax_{K+2} + bx_{K+1} + cx_K = 0$  сделаем формальную замену  $x_{K+2} \rightarrow q^2, x_{K+1} \rightarrow q, x_K \rightarrow 1$ , получив алгебраическое уравнение – получив так называемое характеристическое уравнение:  $aq^2 + bq + c = 0$ . Анализируем корни с помощью дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$ :

1.  $D > 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$

Решение отыскивается в виде:  $x_K = C_1 \lambda_1^K + C_2 \lambda_2^K$ , где  $C_1, C_2 = \text{const}$

2.  $D = 0 \Rightarrow \lambda$

Решение отыскивается в виде:  $x_K = (C_1 + C_2 K) \lambda^K$ , где  $C_1, C_2 = \text{const}$

3.  $D < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = re^{i\pm\varphi}$

Решение отыскивается в виде:  $x_K = C_1 r^K \cos K\varphi + C_2 r^K \sin K\varphi$ , где  $C_1, C_2 = \text{const}$