40. Разностные производные 3 и 4 порядков. Погрешность

Чтобы приблизить производную к произвольному порядку точности, можно использовать конечную разность. Конечная разница может быть центральной, прямой или обратной (левой или правой).

Для составления разностной производной в точке y_i можно пользоваться следующий стратегией. Для начала, необходимо определить какую производную мы будем заменять на разностный аналог и какие точки будут его аппроксимировать, шаг между точками примем равным h. Для примера рассмотрим составление такой формулы для производной 4 порядка с точками $\{y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}\}$ (для производной k-ого порядка потребуется как минимум $k+1$ точек, можно и больше – улучшим погрешность).

Разностная производная будет иметь следующий вид:

$$y_i'''' \approx Ay_{i-2} + By_{i-1} + Cy_i + Dy_{i+1} + Ey_{i+2}$$

Далее воспользуемся разложением в ряд Тейлора относительно точки y_i:

$$Ay_{i-2} = Ay_i + Ay_i'(-2h) + A\frac{1}{2!}y_i''(-2h)^2 + A\frac{1}{3!}y_i'''(-2h)^3 + A\frac{1}{4!}y_i''''(-2h)^4 + O(h^5)$$

$$By_{i-1} = By_i + By_i'(-h) + B\frac{1}{2!}y_i''(-h)^2 + B\frac{1}{3!}y_i'''(-h)^3 + B\frac{1}{4!}y_i''''(-h)^4 + O(h^5)$$

$$Cy_i = Cy_i$$

$$Dy_{i+1} = Dy_i + Dy_i'(h) + D\frac{1}{2!}y_i''(h)^2 + D\frac{1}{3!}y_i'''(h)^3 + D\frac{1}{4!}y_i''''(h)^4 + O(h^5)$$

$$Ey_{i+2} = Ey_i + Ey_i'(2h) + E\frac{1}{2!}y_i''(2h)^2 + E\frac{1}{3!}y_i'''(2h)^3 + E\frac{1}{4!}y_i''''(2h)^4 + O(h^5)$$

Теперь нужно подобрать коэффициенты A, B, C, D, E так, чтобы суммы при всех y_i, y_i', y_i'', y_i''' обнулились, а сумма при y_i'''' дала 1. Это приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned}
y_i&:\ A + B + C + D + E = 0\\
y_i'&:\ (-2h)A + (-h)B + (h)D + (2h)E = 0\\
y_i''&:\ (-2h)^2A + (-h)^2B + (h)^2D + (2h)^2E = 0\\
y_i'''&:\ (-2h)^3A + (-h)^3B + (h)^3D + (2h)^3E = 0\\
y_i''''&:\ (-2h)^4A + (-h)^4B + (h)^4D + (2h)^4E = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B + C + D + E = 0 \\ -2A - B + D + 2E = 0 \\ 4A + B + D + 4E = 0 \\ -2A - B + D + 8E = 0 \\ 16A + B + D + 16E = \dfrac{24}{h^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \frac{1}{h^4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 16 & 1 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} = \frac{1}{h^4}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Решая её, мы получаем необходимые коэффициенты:

$$y_i'''' \approx \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4} + O(h^2)$$

Таким образом могут быть получены и другие разностные производные 3 и 4 порядков с различной погрешностью, к примеру центральная разностная производная 3 порядка с погрешностью 2 порядка:

$$y_i''' \approx \frac{-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^3} + O(h^2)$$