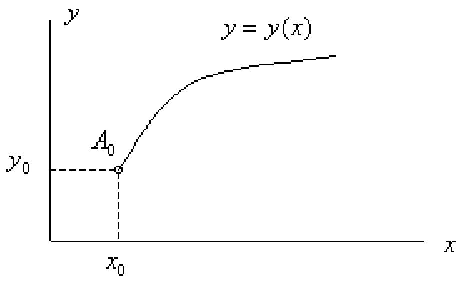
30. Методы типа Рунге-Кутты. Примеры.

Формулировка задачи Коши для ДУ 1-го порядка: Дано ОДУ первого порядка, разрешенное относительно производной: $\acute{y} = f(x,y)$ (1). Необходимо найти решение (1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ (2). То есть, в задаче Коши необходимо найти кривую $y(x)$, проходящую через заданную точку $(x_0,\ y_0)$.



Решение задачи Коши является частным решением (1) при условии (2). Достаточные условия существования и единственности задачи Коши содержатся в следующей теореме:

Теорема 1: Пусть функция $f(x,y)$ - правая часть ДУ (1) - непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в некоторой области D на плоскости {x, y}. Тогда при любых начальных значениях $\{x_0, y_0\} \in D$ задача Коши (1) - (2) имеет единственное решение $y(x)$.

При выполнении условий теоремы через точку $(x_0,\ y_0)$ проходит единственная кривая.

Метод Рунге-Кутта 1-го порядка (Метод Эйлера): Рассмотрим задачу Коши $\acute{y} = f(x,y),\ a \le x \le b;\quad y(a) = y_0$. Зададим равномерную сетку: $x_i = a + i \cdot h$, где $i = \overline{0,n}$. Введем обозначения $y(x_i) = y_i$. **Тогда имеем вычислительную формулу для метода Рунге-Кутта 1-го порядка**: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$, где $i = \overline{0, n-1}$. Данная формула позволяет, начиная от начального условия $(x_0,\ y_0)$ найти последовательно величины $y_1, y_2, \dots, y_n$ с шагом h и, таким образом, решить задачу Коши.

Погрешность метода: $\varepsilon = \max_{i=\overline{0,n}} |y(x) - y_i| \le e^{L(b-a)}\,(b-a)\frac{M_2}{2} \cdot h$, где $y(x)$ - точное решение, y_i - численное решение, $L = \max_{x\in[a;b]} |f_y'|,\ M_i = \max_{x\in[a;b]} |y^{(i)}(x)|$. Метод Эйлера - метод первого порядка точности.

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка точности: На равномерной сетке имеем формулу Рунге-Кутта второго порядка точности: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i))$ (3) .

Погрешность метода: $\overline{\varepsilon} \sim (b-a)M_3h^2$**.**

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности: Вычислим интеграл в (3) по формуле Симпсона. Получим вычислительную формулу:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x_i, y_i) \\ k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1(x_i, y_i)) \\ k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2(x_i, y_i)) \\ k_4 = h \cdot f\big(x_i + h, y_i + k_3(x_i, y_i)\big) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1(x_i, y_i) + 2k_2(x_i, y_i) + 2k_3(x_i, y_i) + k_4(x_i, y_i)] \end{cases}$$

Погрешность метода: $\overline{\varepsilon} \sim (b-a)M_5h^4$

Схемы Рунге-Кутта имеют ряд достоинств:

1. Все они (кроме метода Эйлера) имеют хорошую точность;
2. Они являются явными, то есть значения y_{i+1} вычисляются по ранее найденным значениям $y_1, y_2, \dots, y_i$;
3. Схемы допускают введение переменного шага h;

Источник: http://orloff.am.tpu.ru/chisl_metod_labs_2/Lab2/teoriya.htm