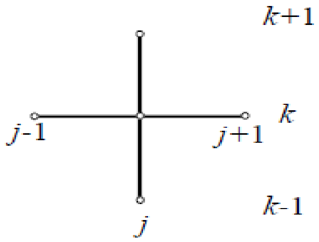
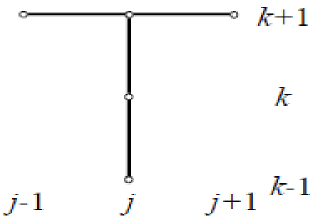
12. Энергетическое неравенство

При исследовании устойчивости разностных схем более сложного устройства(по сравнению с приведеными ниже) с разными типами граничных условий (2 и 3) используется не метод





Фурье или принцип максимума(в большинстве случаев их невозможно использовать), а метод энергетических оценок. На примере неоднородного параболического уравнения: (пусть $u(x,t)$ - решение уравнения (1) $\frac{\delta u}{\delta t}=\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}+f$, (2) $u(0,t)=u(X,t)=0$, где $x\in[0,X]$ и $t\in[0,T]$. Кроме того предполагается, что при любом t(на отрезке выше) существует интеграл $A=\int_0^X (\frac{\delta u}{\delta t})^2\, dx$, где $-\infty<A<+\infty$. Домножая уравнение (1) на u и интегрируя по x можно прийти к энергетическому тождеству (3) $\frac{1}{2}\int_0^X ((\frac{\delta}{\delta t})u^2)\,dx+\int_0^X (\frac{\delta u}{\delta t})^2\, dx=\int_0^X fu\,dx$. Для функции $\varphi(x,t)$, которая при любом $t\in[0,T]$ принадлежит множеству решений - сеточных функций, удовлетворяющих граничным условиям и исходному уравнению)(обозначим это множество как L), норму $(\|\varphi(t)\|)_1^2=\int_0^X (\frac{\delta\varphi}{\delta t})^2\, dx$ (аналог скалярного произведения). Если для $f(x,t)$ такова, что для любой g из того же множества, которому подчиняется $\varphi(x,t)$, существует интеграл $\int_0^X f(x,t)g(x)\,dx$, то через $(\|f(t)\|)_{-1}=supremum_{g\in L}\frac{1}{(\|g\|)_1}\int_0^X |fg|\,dx$. Тогда получается (согласно определению $(\|.\|)_{(-1)}$ (см. в источнике ниже) $\left|\int_0^X fu\,dx\right|\le(\|f(t)\|)_{-1}(\|u(t)\|)_1\le(\|u(t)\|)_1^2+(\frac{1}{e})\frac{(\|f(t)\|)_{-1}^2*1}{4}$. Псоледнее неравенство получено при использовании ε- неравенства ($|ab|\le\varepsilon a^2+\frac{\frac{b^2}{\varepsilon}*1}{4}$, получаемого из соотношений $0\le(\sqrt{\varepsilon}a\pm\frac{\frac{b}{\sqrt{(\varepsilon)}}*1}{2})^2\le\varepsilon a^2+\frac{\frac{b^2}{\varepsilon}*1}{4}\pm ab$. ($a=(\|u(t)\|)_1 , b=(\|f(t)\|)_{-1}$). Тогда из (3) следует неравенство $\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta t}\int_0^X u^2\,dx+(1-\varepsilon)(\|u(t)\|)_1^2\le\frac{\frac{1}{\varepsilon}*1}{4}(\|f(t)\|)_{-1}^2$. Интегрируя это неравенство по t в области определения: $\frac{1}{2}(\|u(T)\|)+_1^2(1-\varepsilon)\int_0^T (\|u(t)\|)_1^2\,dt\le\frac{1}{2}\|u_0|^2|+\frac{\frac{1}{\varepsilon}*1}{4}\int_0^T (\|f(t)\|)_{-1}^2\,dt$. Здесь $\|u(t)\|=\int_0^X (u(x,t)^2\,dx)^{(\frac{1}{2})}$. Последнее неравенство — энергетическое. Из него следует, что u(x,t) зависит начальных условий и значений правой части в исходном уравнении.

Литература: 1) Н.С. Бахвалов. Численные методы, 2) А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики.