

27. Численные решения систем нелинейных уравнений

Запишем систему нелинейных уравнений в виде

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases},$$

где x_i – неизвестные, $i = \overline{1, n}$.

Метод простейших итераций:

$$\Phi_i = x_i + F(x_1, \dots, x_n)$$

Для того, чтобы решить систему методом простейших итераций, преобразуем её к виду

$$x_1 = \Phi_1(x_1, \dots, x_n)$$

...

$$x_n = \Phi_n(x_1, \dots, x_n)$$

Итерационный процесс:

$$\begin{aligned} x_1^H &= \Phi_1(x_1^C, \dots, x_n^C) \\ &\dots \\ x_n^H &= \Phi_n(x_1^C, \dots, x_n^C) \end{aligned} \rightarrow x^H = \Phi(x^C)$$

Условие остановки:

$$\|x^H - x^C\| < \varepsilon$$

Сходимость:

$$\mathfrak{J}^\Phi(x^*) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{array} \right) \bigg|_{x=x^*} \quad - \text{ матрица Якоби первых производных}$$

Если $\|\mathfrak{J}^\Phi(x^*)\| < 1$ – то это сжимающееся отображение. Если функция не дифференцируема, то гарантий сходимости нет.

Метод Ньютона (касательных):

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

В основе метода Ньютона для системы уравнений лежит использование разложения функций

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, n}$$

в ряд Тейлора, причём члены, содержащие вторые и более высокие порядки производных, отбрасываются.

Запишем это так

$$\begin{aligned} \Delta x_j &= x_j^H - x_j^C \\ F_i(x_1^H, \dots, x_n^H) &= F_i(x_1^C, \dots, x_n^C) + \sum_{j=1}^n F'_{x_j} \Delta x_j + \dots = F_i(x_1^C, \dots, x_n^C) + \sum_{j=1}^n F'_{x_j} \Delta x_j + O(\rho) \end{aligned}$$

Если $\mathfrak{J} \neq 0 \Rightarrow \exists \mathfrak{J}^{-1}$ – обратная матрица. Тогда выражая вектор приращений Δx

$$\Delta x = - \left(\mathfrak{J}^F(x^C) \right)^{-1} F(x^C)$$

$$x^H = x^C - \left(\mathfrak{J}^F(x^C) \right)^{-1} F(x^C)$$

Однако, такая запись содержит трудоемкую операцию вычисления обратной матрицы, преобразуем ее к следующему виду

$$\mathfrak{J}^F(x^C) \Delta x = -F(x^C)$$