4. Кубический сплайн. Построение. Экстремальное свойство.

Пусть некоторая функция *f(x)* задана на отрезке [A; B], разбитом на части $[x_i, x_{i+1}]$, $A = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = B$. Кубическим сплайном называется функция $S(x)$, которая:

- на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ является многочленом степени не выше третьей;
- имеет непрерывные первую и вторую производные на всём отрезке [A;B];
- в точках x_i выполняется равенство $S(x_i) = f(x_i)$, т.е. сплайн $S(x)$ интерполирует функцию *f(x)* в точках x_i (i=1, 2, …, N) – условие интерполяции.

Для однозначного задания сплайна перечисленных условий недостаточно, для построения сплайна необходимо наложить дополнительные требования – краевые условия:

1-го типа. Если известно точное значение первой производной на обеих границах, то такой сплайн называют фундаментальным. *S'(A)=f'(A), S'(B)=f'(B).*

2-го типа. *S''(A)= f''(A), S''(B)= f''(B).* На концах промежутка задаются значения второй производной искомой функции.

3-го типа. *S'(A)= S'(B) и S''(A)= S''(B).* Периодические – выполнение этих условий естественно требовать в тех случаях, когда интерполируемая функция является периодической с периодом T=A-B.

4-го типа. $S'''(y, x_1 - 0) = S'''(y, x_1 + 0)$, $S'''(y, x_{m-1} - 0) = S'''(y, x_{m+1} + 0)$. Во внутренних узлах сетки третья производная функции S(x), вообще говоря, разрывна. Однако число разрывов третьей производной можно уменьшить при помощи данного условия. В этом случае построенный сплайн будет трижды непрерывно дифференцируем на промежутках $[x_0,\ x_1]$ и $[x_{m-1}, x_m]$.

Теорема: Для любой функции *f(x)* и любого разбиения отрезка [A; B] существует ровно один естественный сплайн *S(x),* удовлетворяющий перечисленным выше условиям.

Принцип построения и будет являться доказательством данной теоремы.

Коэффициенты на каждом интервале определяются из условий сопряжения в узлах:

$f_i = y_i;\ \ f'(x_i - 0) = f'(x_i + 0);\ f''(x_i - 0) = f''(x_i + 0);\ \ i = 1,2, \dots, n-1$

Кроме того, на границе при $x=x_0$ и $x=x_n$ ставятся условия $f''(x_0) = 0;\ \ f''(x_n) = 0.$

Будем искать кубический полином в виде $f(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,\ \ x_{i-1} \le \xi \le \xi_i.$

Из условия $f_i=y_i$ имеем $f'(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1};\ \ f(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i;\ h_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1,2, \dots, n-1.$

Вычислим производные: $f'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2;\ f''(x) = 2c_i(x - x_{i-1}) + 6d_i(x - x_{i-1});\ x_{i-1}\xi \le \xi_i,$ и потребуем их непрерывности при $x=x_i$: $b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, i = 1,2, \dots, n-1.$

Общее число неизвестных коэффициентов, очевидно, равно *4n*, число уравнений равно *4n-2*. Недостающие два уравнения получаем из условия ограничений при $x=x_0$ и $x=x_n$: $c_1 = 0;\qquad c_n + 3d_n h_n = 0.$

Выражение $d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$, подставляя это выражение и исключая $a_i = y_{i-1}$, получим $b_i = \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right] - \frac{1}{3} h_i(c_{i+1} + 2c_i),\ i = 1,2, \dots, n-1, b_n = \left[\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right] - \frac{2}{3} h_n c_n.$

Подставив теперь выражения для b_i, d_{i+1} и d_i в первую формулу, после несложных преобразований получаем для определения c_i разностное уравнение второго порядка

$$h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right),$$
$$i = 1,2, \dots, n-1.$$

С краевыми условиями $c_1 = 0,\quad c_{n+1} = 0.$

Матрица этой системы 3-х диагональная. Такие системы экономно решаются методом прогонки.

В силу диагонального преобладания система имеет единственное решение.

После нахождения c_i определяются a_i, b_i и d_i и определяется вид кубических многочленов (сплайнов) на каждом отрезке.

Таким образом, доказано, что существует единственный кубический сплайн.

Экстремальное свойство.

Пусть сплайн S(t) интерполирует функцию f(t) на системе узлов $\{t_n\}_{n=0}^N;\ t_0 = A, t_N = B.$

Тогда S(t) с краевыми условиями *S''(A)= S''(B)=0* доставляет минимум функционалу

$$J(f) = \int_A^B (f''(t))^2 dt$$

Среди всех функций f(t), принадлежащих классу функций из пространства $C^2[a,b]$, проходящих через точки массива (x_i,y_i), i=0, 1,…, m, именно кубический сплайн S(x), удовлетворяющий вышеуказанным краевым условиям доставляет экстремум (минимум) функционалу $J(f)$.

Интерполяционный кубический сплайн обладает описанным выше экстремальным свойством на очень широком классе функций, а именно на классе $W_2^2[A, B]$– класс функций суммируемых вместе со второй производной.