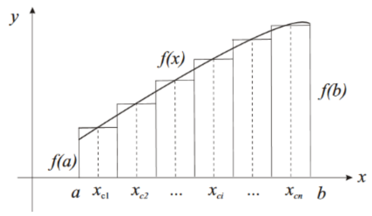
Составные квадратурные формулы.

На практике, если требуется вычислить приближенно интеграл, обычно делят заданный отрезок $[a, b]$ на n равных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $x_i = \mathrm{a} + \mathrm{i} \cdot \mathrm{h}$, $i = 0,1, \dots, n$; $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$. На каждом частичном отрезке используют каноническую квадратурную формулу и суммируют полученные результаты. При применении формул средних прямоугольников и трапеций длину частичных отрезков удобно принять за h, а при использовании формулы Симпсона — за $2h$. В результате получаются следующие формулы, которые будем называть *составными*.

1. Составная квадратурная формула средних прямоугольников записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot (f_{c1} + f_{c2} + \dots + f_{cn})$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, $f_{ci} = f(x_{ci})$; $x_{ci} = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h$, $i = 1, \dots, n$ – координаты средних точек частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$.



Погрешность R_n получается в результате суммирования погрешностей по частичным отрезкам

$$R_n = \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = \frac{h^3}{24} n \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)\right)$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Последнее выражение для R_n можно переписать в виде:

$R_n = \frac{h^3}{24} \cdot n \cdot f''(\xi) = h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot f''(\xi)$, $\xi \in [a, b]$. [*В соответствии с леммой, см. источник (2 строчки)*]

Пусть M – максимальное значение модуля второй производной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$,

т. е. $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$; тогда из выражения для R_n получаем следующую оценку:

$$|R_n| \le h^2 \cdot \frac{(b-a) \cdot M}{24},$$

это означает, что погрешность формулы средних прямоугольников на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ есть величина $O(h^2)$. В этом случае говорят, что квадратурная формула имеет второй порядок точности.

2. Составная квадратурная формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right)$$

где $f_i = f(x_i)$; $x_i = a + i \cdot h$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Аналогично, получаем выражения для погрешности и оценки:

$$R_n = -h^2 \cdot \frac{b-a}{12} \cdot f''(\xi),\ \xi \in [a, b] \qquad |R_n| \le h^2 \cdot \frac{(b-a) \cdot M}{12},\ M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Таким образом формула трапеции так же имеет второй порядок точности ($R_n = O(h^2)$). Следует заметить, что ее погрешность оценивается величиной в два раза большей, чем погрешность формулы средних прямоугольников.

3. Составная квадратурная формула Симпсона записывается так

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot \left(f_0 + f_{2n} + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i}\right),$$

где $f_i = f(x_i)$; $x_i = a + i \cdot h$, $h = \frac{b-a}{2n}$, $i = 0, 1, \dots, 2n$. Погрешность и оценка составной формулы Симпсона имеют вид:

$$R_n = -h^4 \cdot \frac{b-a}{180} \cdot f^{(IV)}(\xi),\ \xi \in [a, b] \qquad |R_n| \le h^4 \cdot \frac{(b-a) \cdot M}{180},\ M = \max_{x \in [a,b]} |f^{(IV)}(x)|$$

т. е. составная формула Симпсона существенно точнее, чем формулы средних прямоугольников и трапеций – имеет четвертый порядок точности.

Из выражений погрешностей видно, что формулы средних прямоугольников и трапеций точны для многочленов первой степени, т.е. для линейных функций, а формула Симпсона точна для многочленов третьей степени (для них погрешность равна нулю). //Источник: Пособие от МГТУ им. Н.Э.Баумана с. 11-14