Пусть функция f(x) определена и ограничена на ограниченном замкнутом интервале [a, b]. Разобьём этот интервал на n интервалов $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. обозначим $d = \max(\Delta x_i)$. Выберем в каждом из интервалов по произвольной точке $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1})$

Если существует конечный предел интегральных сумм при $\delta \to 0$, и этот предел не зависит ни от выбора разбиения, ни от выбора точек ε_i, то такой предел называется определённым интегралом Римана от функции f(x) на отрезке[a,b], $\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$

Условие существования $\forall\epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, что для любого разбиения $\max(\Delta x_i) < \delta$ выполняется неравенство $|S - s| < \epsilon$. Где $S = \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta x_i$, $s = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta x_i$, где $M_i = \max\{f(x)\}$, $m_i = \min\{f(x)\}$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$

Численное интегрирование: функция задана таблично $(x_i, f(x_i))$, пусть T-разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что $\max(\Delta x_i) \to 0$

Задача численного интегрирования состоит в нахождении приближенного значения определенного интеграла с помощью некоторой приближенной формулы через известные значения подынтегральной функции f(x) в заданных точках. Пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах x_i заданы значения $f(x_i)$. Требуется приближенно вычислить интеграл Римана $I = \int_a^b f(x)dx$. Его можно вычислить с помощью квадратурных форму.

Простые квадратурные формулы можно вывести непосредственно из определения интеграла зафиксировав там некоторые $n \geq 1$получим $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1})$-общая формула прямоугольников. Или ее можно записать как $\sum_i A_i f(\varepsilon_i)$. Где$\varepsilon_i$ – узлы, A_i-весами (коэффициентами) квадратурной формулы.

Другие примеры квадратурных формул.

Если отрезок интегрирования $[a; b]$ разбить на равные части длины h точками $h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, i = 1,2, \ldots, n$ и в качестве точек ε_i выбрать середины элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2, \ldots, n$ то есть $\varepsilon_i = x_{i-1} + \frac{h}{2}$ то приближенное равенство $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$ можно записать в виде $\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ – формула средних прямоугольников. погрешность $R(f) = \frac{f'(\varepsilon)}{2}(b-a)h^2$

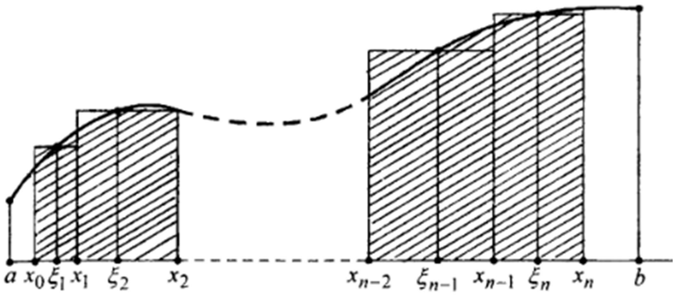

Рис. 12.1. Геометрическая интерпретация общей формулы прямоугольников (12.3)

По аналогии:

Если $\varepsilon_i = x_{i-1}$ то получаем$\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$- это формула метода левых прямоугольников.

Если $\varepsilon_i = x_i$ то получаем $\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$- это формула метода правых прямоугольников.

Погрешность обоих методов $R(f) = \frac{f'(\varepsilon)}{2}(b-a)h$

Метод трапеций. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} * (f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n))$. погрешность $R(f) = \frac{f''(\varepsilon)}{2} nh^3$

Метод Симпсона. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6} * \left(f(a) + 4f\left(\frac{(a+b)}{2}\right) + f(b)\right)$