Гиперболическое уравнение с 2-мя независимыми переменными $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\; x \in (0,l), t > 0$ – нез. перем.

$u(x,t)$ – искомая функция. Заданы начальные условия $u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \gamma(x)$.

Существует 3 разных граничных задачи:

1. $u(0,t) = g_0(t), u(l,t) = g_1(t)$
2. $u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$
3. $u_x(0,t) = g_0(t), u_x(l,t) = g_1(t)$

Если вместо граничных значений 1-го рода рассматриваются граничные условия 2-го или 3-го рода, то соответствующие задачи называются второй или третьей краевой задачами. Краевая задача называется смешанной, если граничные условия при x = 0 и x = l имеют различные типы.

Эта задача интерпретируется как процесс колебаний однородного твердого тела (струны) длиной l в зависимости от времени t. Здесь a^2 - коэффициент упругости, $f(x,t)$- действующая на тело сила.

Уравнениям эллиптического типа к ним приводит изучение стационарных, т. е. не меняющихся во времени, процессов различной физической природы. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение

Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ часто рассматривается более общее уравнение Пуассона $\Delta u = f(x,y,z)$.

Метод Фурье – метод разделения переменных применяется для решения краевых задач для линейных уравнений второго порядка гиперболического, параболического и эллиптического типов, а также для некоторых классов нелинейных уравнений и уравнений высших порядков.

Приведем схему метода для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах, т.е. гиперболическое уравнение с 1 краевой задачей.

Будем искать тождественно не равные нулю решения уравнения, удовлетворяющие краевым условиям в виде произведения $u(x,t) = X(x)T(t)$ подставляя в краевые условия, получаем $X(0) = X(l) = 0$. Подставим предполагаемый вид решения в уравнение и поделим на $a^2 X(x)T(t)$

Получаем: $\frac{X(x)''}{X(x)} = \frac{T(t)''}{a^2 T(t)}$ Левая часть равенства является функцией только переменного x, правая – только t. Следовательно, обе части не зависят ни от x, ни от t и равны некоторой константе μ. Получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$:

$X(x)'' + \mu X(x) = 0, X(x) \neq 0$

$T(t)'' + a^2 \mu T(t) = 0, T(t) \neq 0$

Приходим к задаче Штурма-Лиувилля $X(x)'' + \mu X(x) = 0, X(x) \neq 0 \; и \; X(0) = X(l) = 0$

Эта задача имеет нетривиальные решения (собственные функции) $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$ определяемые с точностью до произвольного множителя только при значениях μ, равных собственным значениям $\mu_n = (\frac{\pi n}{l})^2, n = 1,2,3 \ldots$

Этим же значениям μ_n соответствуют решения уравнения $T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at$, где A_n и B_n — произвольные постоянные. Таким образом, функции $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$. Решение получается в виде бесконечной суммы частных решений $u(x,t) = \sum_1^\infty u_n(x,t) = \sum_1^\infty X_n(x)T_n(t)$, где A_n и B_n могут быть найдены как коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\gamma(x)$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx, \quad B_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx$$