

#### 4. Кубический сплайн. Построение. Экстремальное свойство.

Пусть некоторая функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[A; B]$ , разбитом на части  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $A = x_0 < x_1 < \dots < x_N = B$ . Кубическим сплайном называется функция  $S(x)$ , которая:

- на каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  является многочленом степени не выше третьей;
- имеет непрерывные первую и вторую производные на всём отрезке  $[A; B]$ ;
- в точках  $x_i$  выполняется равенство  $S(x_i) = f(x_i)$ , т.е. сплайн  $S(x)$  интерполирует функцию  $f(x)$

в точках  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) – условие интерполяции.

Для однозначного задания сплайна перечисленных условий недостаточно, для построения сплайна необходимо наложить дополнительные требования – краевые условия:

- **1го типа.** Если известно точное значение первой производной на обеих границах, то такой сплайн называют фундаментальным.  $S'(A)=f'(A)$ ,  $S'(B)=f'(B)$ .

- **2го типа.**  $S''(A)=f''(A)$ ,  $S''(B)=f''(B)$ . На концах промежутка задаются значения второй производной искомой функции.

- **3го типа.**  $S'(A)=S'(B)$  и  $S''(A)=S''(B)$ . Периодические – выполнение этих условий естественно требовать в тех случаях, когда интерполируемая функция является периодической с периодом  $T=B-A$ .

- **4го типа.**  $S'''(y, x_1 - 0) = S'''(y, x_1 + 0)$ ,  $S'''(y, x_{m-1} - 0) = S'''(y, x_{m-1} + 0)$ . Во внутренних узлах сетки третья производная функции  $S(x)$ , вообще говоря, разрывна. Однако число разрывов третьей производной можно уменьшить при помощи данного условия. В этом случае построенный сплайн будет трижды непрерывно дифференцируем на промежутках  $[x_0, x_1]$  и  $[x_{m-1}, x_m]$ .

**Теорема:** Для любой функции  $f(x)$  и любого разбиения отрезка  $[A; B]$  существует ровно один естественный сплайн  $S(x)$ , удовлетворяющий перечисленным выше условиям.

Принцип построения и будет являться доказательством данной теоремы.

Коэффициенты на каждом интервале определяются из условий сопряжения в узлах:

$$f_i = y_i; \quad f'(x_i - 0) = f'(x_i + 0);$$

$$f''(x_i - 0) = f''(x_i + 0);$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1$$

Кроме того, на границе при  $x=x_0$  и  $x=x_n$  ставятся условия

$$f''(x_0) = 0;$$

$$f''(x_n) = 0.$$

Будем искать кубический полином в виде

$$f(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

$$x_{i-1} \leq \xi \leq x_i.$$

Из условия  $f_i=y_i$  имеем

$$f'(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1};$$

$$f(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i;$$

$$h_i = x_i - x_{i-1},$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Вычислим производные:

$$f'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2;$$

$$f''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1});$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$

и потребуем их непрерывности при  $x=x_i$ :

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2,$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Общее число неизвестных коэффициентов, очевидно, равно  $4n$ , число уравнений равно  $4n-2$ .

Недостающие два уравнения получаем из условия ограничений при  $x=x_0$  и  $x=x_n$ :

$$c_1 = 0; \quad c_n + 3d_n h_n = 0.$$

Выражение  $d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$ , подставляя это выражение и исключая  $a_i = y_{i-1}$ , получим

$$b_i = \left[ \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right] - \frac{1}{3} h_i (c_{i+1} + 2c_i),$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$b_n = \left[ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right] - \frac{2}{3} h_n c_n.$$

Подставив теперь выражения для  $b_i$ ,  $d_{i+1}$  и  $d_i$  в первую формулу, после несложных преобразований получаем для определения  $c_i$  разностное уравнение второго порядка

(\*)

$$h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2} = 3 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

С краевыми условиями

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 0.$$

Матрица этой системы 3-х диагональная. Такие системы экономно решаются методом прогонки.

В силу диагонального преобладания система имеет единственное решение.

После нахождения  $c_i$  определяются  $a_i$ ,  $b_i$  и  $d_i$  и определяется вид кубических многочленов (сплайнов) на каждом отрезке.

Таким образом, доказано, что существует единственный кубический сплайн.

### Экстремальное свойство.

Пусть сплайн  $S(t)$  интерполирует функцию  $f(t)$  на системе узлов  $\{t_n\}_{n=0}^N$ ;  $t_0 = A, t_N = B$ .

Тогда  $S(t)$  с краевыми условиями  $S''(A) = S''(B) = 0$  доставляет минимум функционалу

$$J(f) = \int_A^B (f''(t))^2 dt$$

Среди всех функций  $f(t)$ , принадлежащих классу функций из пространства  $C^2[a, b]$ , проходящих через точки массива  $(x_i, y_i)$ ,  $i=0, 1, \dots, m$ , именно кубический сплайн  $S(x)$ , удовлетворяющий вышеуказанным краевым условиям доставляет экстремум (минимум) функционалу  $J(f)$ .

Интерполяционный кубический сплайн обладает описанным выше экстремальным свойством на очень широком классе функций, а именно на классе  $W_2^2[A, B]$  – класс функций суммируемых вместе со второй производной.

<https://natalibrilenova.ru/blog/1481-teoriya-splaynov-primery-resheniya.html>