Интерполяционный полином Эрмита

Пусть на промежутке $[a, b] \subseteq D(f)$ расположены m + 1 несовпадающих узлов $x_0, x_1, \dots, x_m$, и пусть в этих точках известны значения $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \dots, y_m = f(x_m)$ данной функции, а также некоторые ее производные. Такие узлы будем называть кратными узлами. Конкретнее, будем считать, что заданы:

$$\begin{gathered}\text{в узле } x_0 \text{ значения } y_0, y_0', \dots, y_0^{(k_0-1)}\\ \text{в узле } x_1 \text{ значения } y_1, y_1', \dots, y_1^{(k_1-1)}\\ \dots\\ \text{в узле } x_m \text{ значения } y_m, y_m', \dots, y_m^{(k_m-1)}\end{gathered} \qquad (3)$$

тогда кратность узла x_0 считается равной k_0, узла x_1 - k_1, … , узла x_m - k_m

Предполагая, что суммарная кратность узлов есть $k_0 + k_1 + \dots + k_m$ = n + 1 составим задачу построения многочлена $H_n(x)$ степени n (не выше n) такого, что

$$H_n^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}\ \ \forall\, i\ \in \{0, 1, \dots, m\}\ \forall\, j\ \in \{0, 1, \dots, k_i - 1\} \quad (1)$$

где $m \geq 0,\ y_i^{(j)} \coloneqq f^{(j)}(x_i)$ – заданные посредством значения функции f(x) и ее производных и по определению считается $H_n^{(0)}(x_i) = H_n(x_i), y_i^{(0)} \coloneqq y_i$. Многочлен $H_n(x)$ будем называть интерполяционным многочленом Эрмита, а совокупность требований (1) – условиями эрмитовой интерполяции.

Формально можно считать, что нахождение такого многочлена состоит в том, чтобы однозначно определить n+1 коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ его канонического представления.

$$H_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (2)$$

из условий (1). В силу предположения $k_0 + k_1 + \dots + k_m$ = n + 1 о суммарной кратности узлов эрмитовой интерполяции, совокупность требований (1) можно рассматривать, как систему из n+1 уравнения относительно n+1 неизвестных – коэффициентов a_k многочлена (2).

$$\begin{array}{cccc} H_n(x_0) = y_0 & H_n'(x_0) = y_0' & & H_n^{(k_0-1)}(x_0) = y_0^{(k_0-1)} \\ H_n(x_1) = y_1 & H_n'(x_1) = y_1' & \dots & H_n^{(k_0-1)}(x_1) = y_1^{(k_0-1)} \\ & \dots & \dots & \dots \\ H_n(x_m) = y_m & H_n'(x_m) = y_m' & \dots & H_n^{(k_0-1)}(x_m) = y_m^{(k_0-1)} \end{array}$$

Общий вид интерполяционных многочленов Эрмита:

Пусть P_{n-1} – интерполяционный многочлен Лагранжа

По теореме о делении многочлена с остатком искомый многочлен Эрмита $W(x)$ можно представить в виде:

$$W(x) = R(x) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) + P_{n-1}(x)$$

Где $R(x)$ – некоторый неизвестный пока многочлен.

Для построения многочлена $R(x)$ будем привлекать информацию о производных данной функции $W(x) = y_i$, т.е. равенства $W'(x_i) = y_i'$ в тех узлах, где первые производные заданы.

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1, i\neq k}^{n} (x - x_i) R(x) + \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) R_x'(x) + P_{n-1}'(x) \qquad (4)$$

$$W'(x_p) = \prod_{i=1, i\neq p}^{n} (x_p - x_i)\, R(x_p) + P_{n-1}'(x_p) = y_p'$$

Выражаем $R(x_p)$ в узлах x_p:

$$R(x_p) = \frac{y_p' - P_{n-1}'(x_p)}{\prod_{i=1, i\neq p}^{n} (x_p - x_i)} = z_p$$

– задача свелась к нахождению интерполяционного полинома (например с помощью Лагранжевой интерполяции можем восстановить полином $R(x)$, если в условиях (3) (см начало) нет производных выше первого порядка)

После нахождения $R(x)$, его подстановка в $W(x)$ приводит к искомому интерполяционному многочлену Эрмита.

Если в условиях (3) имеются значения производных более высокого порядка, чем первый, то для восстановления многочлена $R(x)$ ставится задача эрмитовой интерполяции, для чего с полученными значениями z_p, находят значения его производных путем дифференцирования равенства (4). Эта процедура построения интерполяционных многочленов Эрмита все более низких степеней продолжается до исчерпания всей информации (3) о функции и ее производных.

Источник: https://vk.com/doc75405550_503374868?hash=e1b101b09f98f31dc5&dl=daabe4e19308d43c64 / лекции