№7

1) Метод Гаусса

Данный метод заключается в последовательном исключении неизвестных. Метод состоит из двух этапов. На первом(прямом) исходная система сводится к системе с треугольной матрицей, которая решается на втором (обратном) этапе.

Сложность: на прямой ход $2n^3/3$, на обратный n^2Итог:O(n^3)

2) Метод Крамера

Метод Крамера – способ решения систем линейных алгебраических уравнений, который применяется только к системам, у которых количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, а определитель отличен от нуля.

1 Шаг. Необходимо вычислить главный определитель матрицы и убедится, что он не равен нулю, т.е. $\Delta \neq 0$.
2 Шаг. Нужно найти определители матриц при замене столбцов на свободные члены $\Delta_1, \dots, \Delta_n$
3 Шаг. Вычислить неизвестные переменные по формуле

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

<u>сложность</u>:

Данный метод требует вычисления n+1 определителей размерности n x n и трудоемкость может оценивается как $O(n!)$

3) Метод прогонки

Метод прогонки используется для систем уравнений с трехдиагоналъной матрицей.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & b_n & c_n & f_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_n & 1 & f_{n+1} \end{array}\right).$$

Без уменьшения общности считаем, что $\sigma_i = 1$, если это не так, то все уравнение делим на σ_i.

Сначала выполняется прямой ход:

$x_k = A_{k+1}x_{k+1} + B_{k+1}$

$x_0 + \sigma_1 x_1 = f_0 \longrightarrow x_0 = -\sigma_1 x_1 + f_0 \longrightarrow A_1 = -\sigma_1, B_1 = f_0$

$A_{k+1} = \frac{-c_k}{(a_k A_k + b_k)}, B_{k+1} = \frac{f_k - a_k B_k}{(a_k A_k + b_k)}$

В итоге получаем систему:

$x_n = A_{n+1}x_{n+1} + B_{n+1}$

$x_{n+1} + \sigma_2 x_n = f_{n+1}$

после чего вычисляется решение с помощью обратного хода.

<u>Сложность:</u> Для прямого хода требуется 8(n-2)+2 операций, для выполнения обратного хода 2(n-1)+5 <u>Итог:</u> 10n+O(1)

4) Метод LU-разложения

Под LU-разложением подразумевается представление квадратной матрицы в виде произведения нижнетреугольной матрицы с ненулевыми диагональными элементами на верхнетреугольную матрицу с единицами на главной диагонали.

Полученное LU-разложение матрицы A (матрица коэффициентов системы) может быть использовано для решения семейства систем линейных уравнений с различными векторами b в правой части:

$$Ax = b.$$

Если известно LU-разложение матрицы A, то исходная система может быть записана как

$$LUx = b.$$

Эта система может быть решена в два шага. На <u>первом шаге</u> решается система: $Ly = b$.

На <u>втором шаге</u> решается система: $Ux = y$.

<u>Сложность</u>: $\frac{2}{3}n^3 + o(n^2)$(аналогично методу Гаусса)