Пусть на [a,b] задана сетка $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ и в ее узлах заданы значения функции $y(x)$, равные $y(x_0) = y_0, \dots, y(x_i) = y_i, \dots, y(x_n) = y_n$.

Требуется построить интерполятнту –функцию $f(x)$, совпадающую с функцией $y(x)$ в узлах сетки:

$$f(x_i) = y_i, i = 1,2, \dots, n$$

Основная цель интерполяции – получить быстрый алгоритм вычисления значений $f(x)$ для значений x, не содержащ. в таблице данных.

Также возникает вопрос оценки погрешности $y(x) - f(x)$?

Введем понятие разделенных разностей:

Разделенная разность первого порядка: $y(x_i, x_j) = \frac{y(x_i) - y(x_j)}{x_i - x_j}$ (1)

Разделенная разность второго порядка: $y(x_i, x_j, x_k) = \frac{y(x_i,x_j) - y(x_j,x_k)}{x_i - x_k}$ (2) и т.д.

Если $y(x) = P_n(x)$ —полином n-степени, то для него первая разделенная разность $P(x, x_0) = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}$ — полином n-1 степени, вторая разность- полином n-2 степени и т.д. Получаем, что (n+1) разделенная разность равна 0.

Из (1), (2):

$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)P(x, x_0)$

$P(x, x_0) = P(x_0, x_1) + (x - x_1)P(x, x_0, x_1)$

$P(x, x_0, x_1) = P(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)P(x, x_0, x_1, x_2)$ и т.д

Следовательно:

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)P(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)P(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)P(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

Если P(x)-интерполяционный полином для функции y(x), следовательно, совпадают и разделенные разности.

$f(x) = y(x_0) + \sum_{k=1}^{n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})P(x_0, x_1, \dots, x_k)$ —**<u>Полином Ньютона</u>**

<u>Пример:</u>

x	-1	0	1	2
y	4	2	0	1

<table>
<tr><td>$y(0,-1) = \frac{2-4}{1} = -2$</td><td rowspan="2">$y(1,0,-1) = 0$</td><td rowspan="3">$y(2,1,0,-1) = 1/2$</td></tr>
<tr><td>$y(1,0) = \frac{0-2}{1} = -2$</td></tr>
<tr><td>$y(2,1) = \frac{1-0}{2-1} = 1$</td><td>$y(2,1,0) = 0$</td></tr>
</table>

$P(x) = 4 - 2(x + 1) + \frac{(x+1)x(x-1)}{2}$