Метод Монте-Карло интегрирования функций многих переменных

Пусть требуется вычислить приближенное значение интеграла

$$I(f) = \int_G f(P)dP$$

Для упрощения выкладок предполагаем, что $\mu(G)$ – мера области G равна 1.

$P_1, \dots, P_N$ – случайно попарно независимые точки, равномерно распределенные в G.

$M(s)$ – математическое ожидание случайной величины s.

$D(s)$ – дисперсия случайной величины s.

Случайные величины $s_j = f(P_j)$ попарно независимы и одинаково распределены.

$$M(s_j) = \int_G f(P)dP = I(f)$$

$$D(s_j) = M(s_j^2) - \left(M(s_j)\right)^2 = D(f)$$

где

$$D(f) = I(f^2) - (I(f))^2$$

положим

$$S_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} s_j$$

- квадратурная сумма (принимается за приближенное значение интеграла)

Вследствие указанных свойств величин s_j имеем

$$M(S_N(f)) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} M(s_j) = I(f)$$

$$D(S_N(f)) = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N} D(s_j) = \frac{1}{N}D(f)$$

С вероятностью $1 - \eta$ выполняется неравенство (неравенство Чебышева)

$$|S_N(f) - I(f)| \le \sqrt{D(f)/(\eta N)}$$

Полагая $\eta = 0{,}01$ получаем: с вероятностью 99% выполняется неравенство

$$|S_N(f) - I(f)| \le 10\sqrt{D(f)/N}$$

В правой части этих оценок стоит неизвестная величина $D(f) = I(f^2) - (I(f))^2$, которую можно оценить на основании информации о вычисленных значениях $f(P_j)$.

Источник: Бахвалов «Численные методы» http://elibrary.bsu.az/kitablar/1012.pdf