Метод квадратного корня

Пусть А-симметрическая квадратная матрицы системы Ax=b порядка n. Решим задачу ее представления в виде А=$U^T U$,

Где $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$, $U^T = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$

Находя произведение $U^T U$, составим систему уравнений относительно неизвестных элементов матрицы U.

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{11}^2 = a_{11}, \;\; u_{11} * u_{12} = a_{12}, \dots, u_{11} * u_{1n} = a_{1n}; \\ u_{12}^2 + u_{22}^2 = a_{22}, \dots, u_{12} * u_{1n} + u_{22} * u_{2n} = a_{2n}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad u_{1n}^2 + u_{2n}^2 + \cdots + u_{nn}^2 = a_{nn}. \end{cases}$$

Из первой строки системы находим $u_{11} = \sqrt{a_{11}}$, $u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}$, j=2,3…n

Из второй строки определяем $u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2}$, $u_{2j} = \frac{a_{2j} - u_{12} * u_{1j}}{u_{22}}$, j=3,4,…n

Из последней строки имеем $u_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} u_{kn}^2}$

Таким образом, элементы матрицы U находятся из соотношений:

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{n-1} u_{ki}^2}\,, \quad i = 1,2, \dots n$$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right),$$ j=2,3,..n; j>i.

Если матрица А представима в форме $U^T U$, то система Ax=b имеет вид $U^T U$ x=b.

Решение этой системы сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами. В итоге процедура решения состоит из двух этапов.

1.Прямой ход- Произведение Ux обозначается через y. В результате решения системы $U^T y$=b находится столбец y.

2.Обратный ход-В результате решения системы Ux=y находится решение задачи-столбец x.