27. Численные решения систем нелинейных уравнений

Запишем систему нелинейных уравнений в виде

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases},$$

где x_i – неизвестные, $i = \overline{1, n}$.

<u>Метод простейших итераций:</u>

$$\Phi_i = x_i + F(x_1, \dots, x_n)$$

Для того, чтобы решить систему методом простейших итераций, преобразуем её к виду

$$\begin{gathered} x_1 = \Phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = \Phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{gathered}$$

Итерационный процесс:

$$\begin{gathered} x_1^{\text{Н}} = \Phi_1\left(x_1^{\text{С}}, \dots, x_n^{\text{С}}\right) \\ \dots \\ x_n^{\text{Н}} = \Phi_n\left(x_1^{\text{С}}, \dots, x_n^{\text{С}}\right) \end{gathered} \longrightarrow x^{\text{Н}} = \Phi\left(x^{\text{С}}\right)$$

Условие остановки:

$$\left\| x^{\text{Н}} - x^{\text{С}} \right\| < \varepsilon$$

Сходимость:

$$\mathfrak{I}^{\Phi}(x^*) = \left. \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right|_{x = x^*} - \text{ матрица Якоби первых производных}$$

Если $\left\| \mathfrak{I}^{\Phi}(x^*) \right\| < 1$ – то это сжимающееся отображение. Если функция не дифференцируема, то гарантий сходимости нет.

<u>Метод Ньютона (касательных):</u>

$$\Delta x_j = x_j^{\text{Н}} - x_j^{\text{С}}$$

В основе метода Ньютона для системы уравнений (1.1) лежит использование разложения функций

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \; i = \overline{1, n}$$

в ряд Тейлора, причём члены, содержащие вторые и более высокие порядки производных, отбрасываются. Запишем это так

$$F_i\left(x_1^{\text{Н}}, \dots, x_n^{\text{Н}}\right) = F_i\left(x_1^{\text{С}}, \dots, x_n^{\text{С}}\right) + \sum_{j=1}^{n} F'_{x_j} \Delta x_j + \cdots$$

$$F_i\left(x_1^{\text{Н}}, \dots, x_n^{\text{Н}}\right) = F_i\left(x_1^{\text{С}}, \dots, x_n^{\text{С}}\right) + \sum_{j=1}^{n} F'_{x_j} \Delta x_j + O(\rho)$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$$\mathfrak{I}^{F}\left(x^{\text{С}}\right) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = -F_i\left(x^{\text{С}}\right)$$

Если $\mathfrak{I} \neq 0 \Longrightarrow \exists \mathfrak{I}^{-1}$ – обратная матрица. Тогда выражая вектор приращений Δx

$$\Delta x = -\left(\mathfrak{I}^{F}\left(x^{\text{С}}\right)\right)^{-1} F\left(x^{\text{С}}\right)$$

$$x^{\text{Н}} = x^{\text{С}} - \left(\mathfrak{I}^{F}\left(x^{\text{С}}\right)\right)^{-1} F\left(x^{\text{С}}\right)$$