Краевая задача (граничная задача) — задача о нахождении решения заданного дифференциального уравнения, удовлетворяющего краевым (граничным) условиям в концах интервала или на границе области. Краевые задачи для гиперболических и параболических уравнений часто называют начально-краевыми или смешанными, потому что в них задаются не только граничные, но и начальные условия.

Рассмотрим Гиперболическое уравнение с 2-мя независимыми переменными $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ x \in (0,l), t > 0 - \text{нез. перем.}$

$u(x,t)$ – искомая функция. Заданы начальные условия $u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \gamma(x)$. граничные условия могут быть заданы 3 видами

Первая начально-краевая задача

$$u(0,t) = \varphi_0(t)$$

$$u(l,t) = \varphi_1(t)$$

$$u(x,0) = g_0(x)$$

$$\frac{\delta u(x,0)}{\delta t} = g_1(x)$$

вторая начально-краевая задача

$$\frac{\delta u(0,t)}{\delta x} = \varphi_0(t),$$

$$\frac{\delta u(X,t)}{\delta x} = \varphi_1(t)$$

$$u(x,0) = g_0(x)$$

$$\frac{\delta u(x,0)}{\delta t} = g_1(x)$$

третья начально-краевая задача

$$\frac{\delta u(0,t)}{\delta x} + \alpha(u(0,t) = \varphi_0(t),$$

$$\frac{\delta u(X,t)}{\delta x} + \beta(u(0,t) = \varphi_1(t)$$

$$u(x,0) = g_0(x)$$

$$\frac{\delta u(x,0)}{\delta t} = g_1(x)$$

Пусть дан линейный дифференциальный оператор L, действующий на функцию v=v(x). Заменяя входящие в Lv производные разностными отношениями, получим вместо Lv разностное выражение $L_h v_h$, являющееся линейными комбинациями значений сеточной функции v_h на некотором множестве узлов сетки. Такая приближенная замена Lv на $L_h v_h$ называется аппроксимацией дифференциального оператора разностным оператором.

Метод сеток: Будем считать, что $x \in [0,l], t \in [0,T]$.Отрезок $[0,l]$ разделим с шагом h, отрезок $[0,T]$ разделим с шагом τ: $x_j = jh,\ t_k = k\tau$. Сетка – совокупность узлов с шагами h и τ. Чем меньше h и τ, тем лучше аппроксимация u.

Идея метода: заменить функцию в частных производных ее разностным аналогом для сеточной функции. Нам достаточно знать не полностью функцию $u(x,t)$, а только ее значения в узлах сетки. Все значения функции на отрезке $[0,l]$ нам известны, также известны значения на боковых границах.

$u(ih,jt) = u''_{ij}$ соответственно $u''_{ij_t} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2}$

Слой – разностные точки для определенного значения j. (если $j = 0$ – нулевой слой и т.д.)

Для всех слоев, кроме первого, можно использовать центральную производную: $u''_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем: $\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + f_{i,j}$.