10. Метод наименьших квадратов

Пусть даны n точек (x_i, y_i) $i=\overline{1,n}$.

Построить многочлен m-го порядка, где m < n-1

Задача заключается в нахождении коэффициентов полинома $P_m(x_i)$, при которых

$$Y = \sum_{i=1}^{n} (y_i - P_m(x_i))^2 \to min$$

Рассмотрим простейший случай при m=1:

Пусть $Y = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$

$P_1(x) = ax + b$

Составляется система из двух уравнений с двумя неизвестными a и b.

$$\begin{cases} \dfrac{\delta Y}{\delta a} = 0 \\ \dfrac{\delta Y}{\delta b} = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))x_i = 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b)) = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} b = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

$$<=> \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Решение системы производится любым удобным способом. В итоге получаем:

$$\begin{cases} a = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \end{cases}$$

На лекции в качестве доказательства факта о том, что система имеет решение было приведено неравенство вида $n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$. Доказательство этого факта занимает еще страницу, прочитать его можно тут.