6. Задача численного дифференцирования. Построение формул численного дифференцирования, погрешность. Некорректность задачи численного дифференцирования. Разностные производные 1 и 2 порядков.

Численное дифференцирование - нахождение значений производных заданной функции y=f(x) в заданных точках x по значениям функции в этих точках.

Случаи, обуславливающие необходимость численного диффер: незнание аналитического вида f(x), сильное усложнение функции после дифференцирования и тд.

Источником формул численного дифференцирования, является полиномиальная интерполяция. Для этого достаточно заменить функцию её интерполяционным многочленом Ln(x) и вычислить производные многочлена.

Рассмотрим неравномерную сетку:

$$\omega_h = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, N}$$

Получим формулы числ. диф. с помощью многочлена Лагранжа $L_{2,i}(x)$ построенного для функции f(x)по трём точкам x_{i-1},x_i,x_{i+1}: (Для построение формул можно использовать ЛЮБОЙ интерполяционный многочлен: Ньютона, Сплайны и тд.)

$$L_{2,i}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{h_i(h_i + h_{i+1})} f_{i-1} - \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{h_i h_{i+1}} f_i + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} f_{i+1}$$

$$L_{2,\iota}'(x) = \frac{(2 - x_i - x_{i+1})}{h_i(h_i + h_{i+1})} f_{i-1} - \frac{(2x - x_{i-1} - x_{i+1})}{h_i h_{i+1}} f_i + \frac{(2x - x_{i-1} - x_i)}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} f_{i+1}$$

Данное выражение можно принять за приближенное значение $f'(x)$ в любой точке $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Запишем его в виде: $L_{2,\iota}'(x) = \frac{1}{\bar{h}_\iota}[\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} + \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x\right)\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}]$,

Где $\bar{h_\iota} = 0{,}5(h_i + h_{i+1})$, $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - 0{,}5h_i$, аналог. $x_{i+\frac{1}{2}}$.

При x=x_i, $L_{2,\iota}'(x) = \frac{1}{2}[\frac{h_i}{\bar{h}_\iota}\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{\bar{h}_\iota}\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}]$, и если сетка равномерна $h_i = h_{i+1} = h$,

То получим центральную разностную производную: $L_{2,\iota}'(x) = \frac{f_{i+1}-f_i}{2h}$

Вычисляя вторую производную $L_{2,i}(x)$, получим приближённое выражение для $f''(x)$:

$L_{2,i}(x)'' = \frac{1}{\bar{h}_\iota}[\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}]$, на равномерной сетке получим вторую разностную производную: $L_{2,i}(x)'' = \frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}$

Для вычисления дальнейших производных необходимо привлекать многочлены более высокого порядка, при этом увеличивая число узлов, участвующих в аппроксимации.

В формулах численного дифференцирования с постоянным шагом h значения функции f(x) делятся на h^r, где r -порядок вычисляемой производной. Поэтому при малом h неустранимые погрешности в значениях функции f(x) оказывают сильное влияние на результат численного дифференцирования. Таким образом, возникает задача выбора оптимального шага h, так как погрешность собственно метода стремится к нулю при $h \to 0$, а неустранимая погрешность растет. В результате общая погрешность, которая возникает при численном дифференцировании, может неограниченно возрастать при $h \to 0$. Поэтому операцию численного дифференцирования считают некорректной.