36. Условная и абсолютная сходимость метода. Неявный метод Эйлера

Пусть дана задачи Коши для уравнения первого порядка:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Заменим производную на разностный аналог

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Тогда решение находится по рекуррентной формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Это отличается от прямого метода Эйлера тем, что функция $f(x, y)$ вычисляется в конечной точке шага, а не в начальной. В отличие от прямого метода, где решение получается явно, здесь необходимо решить уравнение.

Неявный метод Эйлера имеет первый порядок сходимости, но является абсолютно устойчивым, в отличие от явного.

Если поведение решения не зависит от шага h, то такой метод называется абсолютно сходящимся, если такая зависимость существует – условно сходящимся.

Определим размер шага, рассмотрев тестовое уравнение $y' = \lambda y$. Тогда решение $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$ ограниченно $|y(x)| = |y_0||e^{\lambda x}|$, если $\lambda < 0$. Для явного метода Эйлера $y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1 + h\lambda)y_i$ или при многократном применении $y_n = y_0(1 + h\lambda)^n$ требуется, чтобы коэффициент был ограничен $|1 + h\lambda| < 1$. Поэтому явный метод Эйлера устойчив (условно), если $-1 < 1 + h\lambda < 1$, $-2 < h\lambda < 0$, $0 < h < -\frac{2}{\lambda}$, но т.к. шаг всегда положителен, то $h < -\frac{2}{\lambda}$.

Аналогично для неявного метода: $y_{i+1} = y_i + h\lambda y_{i+1}$, $(1 - h\lambda)y_{i+1} = y_i$, $y_{i+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_i$. Снова при многократном применении, получаем $y_n = y_0 \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^n$,требуется ограничение $\left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| < 1$, $|1 - h\lambda| > 1$,

получаем $1 - h\lambda > 1$ или $1 - h\lambda < -1$, проще $h\lambda < 0$ или $h\lambda > 2$. При $h > 0$ и $\lambda < 0$ мы всегда получаем $h\lambda < 0$, т.е. неявный метод Эйлера сходится абсолютно (безусловно).