34. Задача Коши. Простейшие методы решения. Примеры

Простейшее ОДУ имеет вид: $y' = f(x, y)$. Для него может быть поставлена задача Коши: найти решение $y = y(x)$, $x \in [a, b]$ удовлетворяющее исходному уравнению и начальному условию $y(x_0) = y_0$. Другими словами, требуется получить интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M(a, y_0)$. Существование и единственность решения задачи следует из локальной теоремы Коши-Пикара: если $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x - x_0| \leq A, |y - y_0| \leq B\}$ и в нем удовлетворяет условию Липшица по y, т.е.

$$\exists L > 0\colon\ \forall y_1, y_2 \in [y_0 - B, y_0 + B], \forall x \in [x_0 - A, x_0 + A]$$
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

то на отрезке $x_0 - d \leq x \leq x_0 + d$, где $d = \min\left\{A; \frac{B}{M}\right\}$, $M = \max\limits_{\mathrm{D}}|f(x, y)|$, существует единственное решение задачи Коши. Локальная теорема Коши-Пикара дает достаточные условия разрешимости задачи Коши для широкого класса ОДУ, однако на практике проверка условия Липшица не удобна. Сформулируем еще одну локальную теорему существования и единственности с более простым условием: пусть $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной $f_y'(x, y)$ в некоторой области D, тогда $\forall (x_0, y_0) \in \mathrm{D}$ существует единственное решение с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Численное решение на отрезке $[a, b]$ задачи Коши $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ состоит в построении таблицы приближенных значений $y_0,\ y_1, \dots,\ y_i, \dots\ y_N$ решения $y(x)$ в узлах сетки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = b$.

1. Одношаговые
   a. Метод Эйлера (общий случай с весовым коэффициентом, при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ – получается явная и неявная схема соответственно)
      Погрешность на шаге $O(h^2)$ и в целом $O(h)$.
      $$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \alpha f(x_i, y_i) + (1 - \alpha) f(x_{i+1}, y_{i+1})$$
   b. Неявный метод Рунге-Кутта 2 порядка или модифицированный метод Эйлера «с пересчетом»
      Погрешность на шаге $O(h^3)$ и в целом $O(h^2)$.
      $$y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}$$
      Прогноз: $\hat{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$; Коррекция: $y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})}{2}$, можно делать несколько раз, подставляя $\hat{y}_{i+1} = y_{i+1}$.
   c. Метод Рунге-Кутта 4 порядка
      Погрешность на шаге $O(h^5)$ и в целом $O(h^4)$.

$$k_1 = f(x_i, y_i), \qquad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \qquad k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \qquad k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3),$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

2. Многошаговые. Методы Адамса (требуют предварительное вычисление в k начальных точках)
   Погрешность на шаге $O(h^k)$
   a. Метод Адамса-Башфорта (экстраполяционный, явный): $y_{i+1} = y_i + h\sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} f(x_{i-\lambda}, y_{i-\lambda})$
   b. Метод Адамса-Мультона (интерполяционный, неявный): $y_{i+1} = y_i + h\sum_{\lambda=-1}^{k} v_{-\lambda} f(x_{i-\lambda}, y_{i-\lambda})$

   При одинаковом k метод Адамса-Мультона точнее, но требует решения нелинейной системы уравнений для нахождения значения y_{i+1}.