21. Метод Якоби

Требуется решить систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$Ax = b$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . & . \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix} \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

При предположении, что диагональные коэффициенты ненулевые.

$$a_{ii} \neq 0 \qquad i = (1,2,..,n)$$

Метод решения

Решив 1-ое уравнение системы относительно x1 получим:

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)}{a_{11}}$$

2-ое - относительно x2 , n-ое - относительно xn

В итоге эквивалентная система, в которой диагональные элементы строки выражены через оставщиеся.

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\
x_2 = \dfrac{b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \\
\ldots \\
x_n = \dfrac{b_n - \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n(n-1)}x_{n-1}\right)}{a_{nn}}
\end{cases}
$$

или

$$x = \alpha x + \beta$$

$$
\alpha = \begin{pmatrix}
0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\
-\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \ldots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\
 & & \ldots & & \\
-\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \ldots & 0
\end{pmatrix}
\qquad
\beta = \begin{pmatrix}
\frac{b_1}{a_{11}} \\
\frac{b_2}{a_{22}} \\
. \\
\frac{b_n}{a_{nn}}
\end{pmatrix}
$$

Далее вводится некоторое начальное приближение - вектор x(0)=[b1/a11, ... ,bi/aii, ... ,bn/ann], затем используя x(1) находится x(2).

Данный процесс называется итерационным, условием окончания является достижение заданной точности (система сходится и есть решение) или прерывание процесса. Процесс прерывается когда число итераций превышает заданное допустимое количество, при этом система не сходится либо заданное количество итераций не хватило для достижения требуемой точности.

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)}\right)}{a_{11}} \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)}\right)}{a_{22}} \\
\ldots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)}\right)}{a_{nn}}
\end{cases}
$$

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$$

$x^{(1)} = \alpha x^{(0)} + \beta$ - первое приближение

$x^{(2)} = \alpha x^{(1)} + \beta$ - второе приближение

$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$ - (k+1) - ое приближение

Итерационный процесс. Верхний индекс в скобках - номер итерации.

Если последовательность приближений (x(0),x(1),...,x(k+1),...) имеет предел

$$x = \lim_{k \to \infty} x^{(\mathrm{k})}$$

то этот предел является решением. k=1,2,3,...N-1. , N-1 - заданное количество итераций

Достаточный признак сходимости метода Якоби:

Если в системе выполняется диагональное преобладание, то метод Якоби сходится.

$$|a_{\mathrm{ii}}| > \sum_{j=1,(j \neq i)}^{n} |a_{\mathrm{ij}}| \qquad i = 1,2,..,\mathrm{n}$$

Критерий окончания итераций при достижении требуемой точности имеет вид:

$$||x^{(\mathrm{k}+1)} - x^{\mathrm{k}}|| < \varepsilon$$

где ε - заданная точность вычисления.