Численное решение нелинейных уравнений $f\ (x) = \ 0$. Задача решения нелинейных уравнений состоит из двух этапов: отделения корней и уточнения корней. На первом этапе находится такой отрезок $[a, b]$, на котором существует коренв (в дальнейшем будем обозначать его θ), и он единственен. Эта работа, как правило, проводится аналитически. На втором этапе строится последовательность x_n , сходящаяся к корню.

Метод половинного деления

Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f\ (x)$ непрерывна и на концах отрезка принимает разные знаки: $f\ (a\ )f\ (b)\ <\ 0$, тогда по теореме Больцано-Коши на этом отрезке существует корень θ. На этом утверждении и основан метод. Находим середину отрезка $\mathrm{c}\ =\ (\mathrm{a}\ +\ b)/2$ и сужаем отрезок так, чтобы на его концах функция принимала разные знаки: если $f(a)f\ (\mathrm{c})\ <\ 0$, то в качестве нового значения правого конца отрезка нужно взять $b\ =\ \mathrm{c}$, иначе $\mathrm{a}\ =\ \mathrm{c}$. Далее деление отрезка повторяется до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше наперед заданной точности ε. Алгоритм всегда сходится, но его недостатком является большое число итераций: число итераций не зависит от функции, а только от длины отрезка

Метод касательных (Ньютона)

Возьмем в качестве начального приближения один из концов отрезка $[a, b]$ $x_0 = b$ из уравнения касательных выводится формула $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Метод хорд (неподвижных хорд)

Возьмем в качестве начального приближения один из концов отрезка $[a, b]$ $x_0 = b$ и возьмем первое приближение x_1. Через точки с координатами $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$ на графике функции проведем хорду. Точку пересечения хорды с осью абсцисс обозначим x_2. Далее проводим хорду через точки с координатами $(x_0, f\ (x_0))$ и $(x_2, f\ (x_2))$, пересечения этой хорды с осью абсцисс обозначим x_3 и т. д. Используя уравнение прямой линии, проходящей через две заданные точки, получаем формулу $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}$

Погрешность методов

Если x_n - очередное приближение, θ - корень уравнения, то требуемая точность ε, будет достигнута, если выполняется условие $|x_n - \theta|\ <\ \varepsilon$. Однако это условие нельзя использовать для окончания итерационного процесса, так как корень неизвестен. Выведем другую оценку погрешности. Разложим функцию по формуле Тейлора в окрестности приближения x_n и поставим в разложение корень θ, получим $0 = f(\theta) = f(x_n) + f'(c)(x_n - \theta), c \in [\theta, x_n]$.

Откуда $\theta - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\mathrm{c})}$. Предположим $|f'(x)|\ \geq m > 0$ на $[a, b]$, тогда $|x_n - \theta|\ <\ \frac{f(x_n)}{m}$, и следовательно критерий остановки $\frac{f(x_n)}{m} \leq\ \varepsilon$