Метод прогонки

Общий вид трехдиагональной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & |f_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & |f_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & |f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n & c_n & |f_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_2 & 1 & |f_{n+1} \end{pmatrix}$$

Размер матрицы n+2. x=$\begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$

$x_k = A_{k+1} * x_{k+1} + B_{k+1}$

$x_0 + \delta_1 x_1 = f_0 \rightarrow\ x_0 =\ -\delta_1 x_1 + f_0$, Отсюда $\mathrm{A}_1 = -\delta_1, B_1 = f_0$

$a_1(A_1 x_1 + B_1) +\ b_1 x_1 + c_1 x_2 = f_1 \rightarrow x_1(a_1 A_1 + b_1) = -c_1 x_2 + f_1 - a_1 B_1 \rightarrow$

$\rightarrow\ x_1 = -\frac{c_1}{a_1 A_1 + b_1} x_2 + \frac{f_1 - a_1 B_1}{a_1 A_1 + b_1}$, Отсюда $\mathrm{A}_2 = -\frac{c_1}{a_1 A_1 + b_1}$, $B_2 = \frac{f_1 - a_1 B_1}{a_1 A_1 + b_1}$.

Рекуррентные формулы будут выглядеть следующим образом:

$\mathrm{A}_{k+1} = -\frac{c_k}{a_k A_k + b_k}\quad B_{K+1} = \frac{f_k - a_k B_k}{a_k A_k + b_k}$

$$\begin{cases} x_n = A_{n+1} * x_{n+1} + B_{n+1} \\ \delta_2 x_n + x_{n+1} =\ f_{n+1} \end{cases}$$

Подставить первое во второе:

$x_{n+1} + \delta_2 A_{n+1} x_{n+1} + \delta_2 B_{n+1} = f_{n+1}$

$(1 + \delta_2 A_{n+1}) x_{n+1} = f_{n+1} - \delta_2 B_{n+1}$

Отсюда $x_{n+1} = \frac{f_{n+1} - \delta_2 B_{n+1}}{1 + \delta_2 A_{n+1}}$

Теорема о Существовании решения в случае диагонального преобладания.

Потребуем $|\delta_1| < 1, |\delta_2| < 1$, и условие диаг. преобл.: $|b_i| >\ |a_i| + |c_i|$

Док-во:

$|A_1| < 1$, так как $A_1 = -\delta_1$.

$|b_1| >\ |a_1| + |c_1| \geq |a_1| > |A_1| * |a_1| \Rightarrow\ b_1 + a_1 A_1 \neq 0$

$\frac{|c_1|}{|b_1 + a_1 A_1|} < 1 \Rightarrow |c_1| < |b_1 + a_1 A_1|$ – докажем это:

$|b_1 + a_1 A_1| \geq |b_1| -\ |A_1 a_1| > |b_1| - |a_1| > |c_1|$ чтд.