Пусть на [a,b] задана сетка $x_1 = a < x_2 < \dots < x_n = b$ и в ее узлах заданы значения функции $y(x)$, равные $y(x_1) = y_1, \dots, y(x_i) = y_i, \dots, y(x_n) = y_n$.

Требуется построить интерполятнту –функцию $f(x)$, совпадающую с функцией $y(x)$ в узлах сетки:

$$f(x_i) = y_i, i = 1,2, \dots, n$$

Введем понятие разделенных разностей:

Разделенная разность первого порядка: $y(x_1, x_2) = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$

Разделенная разность n-го порядка: $y(x_1, \dots, x_n) = \frac{y(x_2,\dots,x_n) - y(x_1,\dots,x_{n-1})}{x_n - x_1}$

Также справедлива формула: $y(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{y(x_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (x_j - x_i)}$ (Доказательство через индукцию)

<u>Полином Ньютона</u> имеет вид:

$$f(x) = y(x_1) + (x - x_1)y(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)y(x_1, x_2, x_3) + \dots + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})y(x_1, \dots, x_n)$$

Докажем, что интерполирует.

База индукции:

$$f(x_1) = y(x_1)$$

$$f(x_1) = y(x_1) + \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = y(x_2)$$

Допустим, что верно для n точек, докажем, что верно для n+1 точки:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= y(x_1) + \dots + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})y(x_1, \dots, x_n) \\ &= f_n(x) + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})y(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Заметим, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $f_{n+1}(x_i) = f_n(x_i) + 0$

Запишем: $f_n^-(x) = y(x_1) + \dots + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-2})y(x_1, \dots, x_{n-1}) + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-2})(x - \mathrm{x_n})y(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1})$

$f_n^-(\mathrm{x_{n+1}}) = y(\mathrm{x_{n+1}})$

Рассмотрим разность:

$$f_{n+1}(x_{n+1}) - f_n^-(\mathrm{x_{n+1}}) = y(x_1, \dots, x_n)(\mathrm{x_{n+1}} - x_1) \dots (\mathrm{x_{n+1}} - \mathrm{x_{n-1}}) + y(x_1, \dots, x_{n+1})(\mathrm{x_{n+1}} - x_1) \dots (\mathrm{x_{n+1}} - \mathrm{x_n}) - y(x_1, \dots, x_{n-1}, \mathrm{x_{n+1}})(\mathrm{x_{n+1}} - x_1) \dots (\mathrm{x_{n+1}} - \mathrm{x_{n-1}}) = (\mathrm{x_{n+1}} - x_1) \dots (\mathrm{x_{n+1}} - \mathrm{x_{n-1}})[y(x_1, \dots, x_n) + \boldsymbol{y(x_1, \dots, x_{n+1})}(\mathrm{x_{n+1}} - \mathrm{x_n}) - y(x_1, \dots, x_{n-1}, \mathrm{x_{n+1}})] =$$

$$(\text{в подчеркнутом слагаемом переставим } x_{\mathrm{n+1}} \text{ в начало. ничего не поменяется тк р. р симметричная функция}) =$$

$$(\dots) \dots (\dots)\left(\frac{y(x_1,\dots,x_n) - y(x_{n+1}, x_1, \dots, x_{n-1})}{\mathrm{x_n} - x_{n+1}}(\mathrm{x_{n+1}} - x_n) + y(x_1, \dots, x_n) - y(x_{n+1}, x_1, \dots, x_{n-1})\right) = 0 \text{ ч.т.д}$$

<u>Пример:</u>

x	-1	0	1	2
y	4	2	0	1

$y(0, -1) = -2$ $y(1, 0) = -2$ $y(2, 1) == 1$	$y(1, 0, -1) = 0$ $y(2,1,0) = 0$	$y(2, 1, 0, -1) = 1/2$	$P(x) = 4 - 2(x + 1) + \frac{(x+1)x(x-1)}{2}$