第10卷第3期 安顺学院学报 Vol.10 No.3
2008年6月 JOURNAL OF ANSHUN UNIVERSITY Jun.2008

理科教学研究

无量纲化的方法

刘锋 贾多杰 李晓礼 席国柱 吉永林

（西北师范大学物理与电子工程学院，甘肃 兰州730070）

摘 要：文章在详细叙述量纲Ⅱ定理后，举例说明具体怎样将一个物理函数关系式化成无量的式子，并详细讨论"回代"方法；还给出一种势函数薛定谔方程在选用自然单位制（其实就是做无量纲化处理）之后的方程形式，并应用量纲π定理求解旧物理量。

关键词：量纲；单位制；量纲π定理；无量纲

中图分类号：O303 **文献标识码**：A **文章编号**：1673-9507（2008）03-0078-03

引言：

量纲是物理学中的一个重要概念，在作理论运算和数值计算时，往往必须做无量纲化（其实就是用所求的体系的几个主要的特征量作为相应物理量的单位）处理，这样做可以使理论运算简单，数值计算方便，物理方程转换为特定的数学方程时，便于数学处理。另外，对那些无法严格求解只能做近似计算的方程往往要做小参数展开，如参数展开摄动法[1]，此时小参数才能有准确的"比较小"的意义。针对目前量子力学参考书提及的薛定谔方程的无量纲化变换[2]及自然单位法[3-4]，文章做了比较。将物理方程转化为无量纲方程，通常的方法是令方程中的物理常数为1，得无量纲方程后进行求解。在所求结果中用一些"关系式"回代。这样所得结果与原方程的解是一致的，避免了计算过程量纲的出现，以上做法的依据是量纲Ⅱ定理。

（一）量纲

由于各物理量以一定的关系式联系着，所以我们可以取其中的一些独立的物理量作为"基本量"并给它们规定一个"基本量度单位"，其它的物理量的量度单位将以确定的形式来导出。我们把基本量所采用的量度单位叫做基本量度单位，其它的物理量的单位称为导出单位。按照此种方法构成的一套单位，构成一定的"单位制"[5]。在不同的学科中我们通常取不同的物理量作为基本量。例如：在力学问题中，在物理学研究中取长度，时间和质量作为基本量，而在工程技术上则以长度，时间和力作为基本量[6]而且基本量的个数也可以不一样。

基本单位一旦确立，某种物理量的量度单位就由它们与基本量的关系式导出，通过基本量度单位表示的导出量度单位的表达式称为这个物理量的量纲式。量纲式可以用符号写成公式的形式，设 $x_1,x_2,\cdots x_m$，是所选用单位制中的 m 个基本单位（在我所举的例子中以符号 L 表示长度单位，T 表示时间单位，M 表示质量单位），剧 $[P]$ 代表导出量 P 的量纲式，如果有

$$[p]=[x_1]^{a_1}[x_1]^{a_2}\cdots[x_m]^{a_m} \tag{1}$$

则指数 $(a_1,a_2,\cdots a_m)$ 称为物理量 p 的"量纲"。一个物理量的量纲与单位制的选择有关，所以在没有选择单位制之前谈量纲是没有意义的。

量纲可以看成是某个"矢量空间"的矢量。对(1)式两端取自然对数则有：

$$ln[p]=a_1ln[x_1]+a_2ln[x_2]+\cdots+a_mln[x_m] \tag{2}$$

我们把 $ln[x_1],ln[x_2],\cdots,ln[x_m]$ 看作是 m 维空间的"正交基矢"，则 $(a_1,a_2,\cdots a_m)$ 就是矢量 $ln[p]$ 在各个基矢上的投影。则物理量 p 的"量纲"可以记作：

$$ln[p]\rightarrow(a_1,a_2,\cdots a_m)$$

（二）量纲π定理

量纲π定理：假设某个物理问题中涉及 n 个物理量 $p_1,p_2,\cdots p_n$。他们量纲为：

$$ln[p_i]\rightarrow(a_{1i},a_{2i},\cdots a_{mi})(i=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

而我们所选单位制中有 m 个基本量（选取不唯一），则由此可以组成 $(n-m)$ 个无量纲的量 $p_{m+1},p_{m+2},\cdots,p_{n-m}$，

收稿日期：2008-03-14

作者简介：刘锋（1982.06～），西北师范大学物理与电子工程学院研究生。研究方向：量子场论。

物理理 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,存在的关系式:

$f(p_1p_2,\cdots,p_n)=0$　　(5)

假设正好是前 m 个物理量是我们取的基本量,则还有 $n-m$ 个物理量的量纲式可由那 m 个基本量表示出来.例如:

$[p_{m+j}]=[p_1]^{x_{1j}}[p_2]^{x_{2j}}\cdots[p_m]^{x_{mj}}$

$(j=1,2,\cdots,n-m)$　　(6)

可以写作:

$ln[p_{m+j}]=x_{1j}ln[p_1]+x_{2j}ln[p_2]+\cdots+x_{mj}ln[p_m]$　(7)

其写成分量的形式为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \cdots \\ x_{mj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,m+j} \\ a_{2,m+j} \\ \cdots \\ a_{m,m+j} \end{vmatrix}$$

则 p_{m+j} 这个物理量可以得到一个无量纲量

$p_{m+j}{}'=p_1{}^{-x_{1j}}p_2{}^{-x_{2j}}\cdots p_m{}^{-x_{mj}}p_{m+j}$　　(9)

(5)式写成相应的无量纲的形式:

$f(m),p_{m+1},p_{m+2},\cdots,p_{m+(n-m)}=0$　(10)

所以从(5)式量纲的式子化成无量纲式子(10)式,只需把我们选择的基本物理量换成1,其它的物理量换成相对应的无量纲的量 p 即可,式子(5)的运算法则不变。

(三)举例

为了形象的说明无量纲的方法,下面举一例来说明:

例如我们要处理这样一个问题:将一质量为 m 的质点悬挂在劲度系数为 k 的弹簧下端,l 为弹簧的原长,g 为重力加速度,将质点从未伸长的弹簧个下端由静止释放,求弹簧长度 x 随时间6的变化(以弹簧上端点为坐标原点,竖直向下为正方向)。牛顿运动方程为:$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k(x-l)+mg$　(11)

初始条件为:

$t=0$ 时 $x=l$ 和 $\dfrac{dx}{dt}=0$　　(12)

我们如何使(11)式化成无量纲的式子,当然初始条件也要变换。

第一步:选取本问题中的基本物理量。先写出本问题所涉及的所有物理量的量纲(我将采用国际单位制)

	m	k	g	l	t	$\frac{d^2x}{dt^2}$	$\frac{dx}{dt}$	x
T	0	−2	−2	0	1	−2	−1	0
M	1	1	0	0	0	0	0	0
L	0	0	1	1	0	1	1	1

我们可以把以上六个物理量看成是三维空间中的矢量,所以其基本量最多可以选三个(由线性代数中的最大线性无关向量知识可以得到)又因为矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的秩是3。所以针对这个物理问题有3个线性独立的物理量(但这个选取不唯一)现在根据 π 定理选取 m,k,g 作为基本物理量,(他们的独立性可由他们量纲分量组成的行列式:

$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ 来证明)

第二步:寻找剩余物理量对应的无量纲量。根据(7)式则有:

$$\ln[l]=x_1\ln[m]+x_2\ln[k]+x_3\ln[g] \qquad (13)$$

根据(8)式则有:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

$x_1=1$

解得 $x_2=-1$

$x_3=1$

所以可以得到一个无量纲的量:

$$l'=m^{-x_1}k^{-x_2}g^{-x_3}l=\frac{kl}{mg} \qquad (16)$$

同理可以得到另四个无量纲量:

$$x'=\frac{kx}{mg} \qquad (16)$$

$$t'=\frac{k^{\frac{1}{2}}t}{m^{\frac{1}{2}}} \qquad (17)$$

$$\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx}{dt}\frac{k^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}g^{-1} \qquad (18)$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2}=\frac{d^2x}{dt^2}g^{-1} \qquad (19)$$

由(17)式可得 $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}$ 为时间量纲即为本问题的特征时间。

第三步:根据原来带量纲的函数关系,写出无量的关系式。

把(11)式中在第一步中选取的基本物理量 m,k,g 换成1。在第二步中找到无量纲的量 p 替换掉其相应的物理量 p′,则(11)式改写成无量纲的式子[对应于第(10)式]为:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2}=-(x'-l')+1 \qquad (20)$$

初始条件(12)式为[根据(16),(18)式]

$$x'=\frac{kx}{mg}=\frac{kl}{mg}=l' \qquad (21a)$$

$$\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx}{dt}\frac{k^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}g^{-1}=0 \qquad (21b)$$

解(20)式满足初始条件(21)式可得:

$$x'=l'+1-\cos t' \qquad (22)$$

第四步:回代

把(22)式根据(15),(16),(17)化成有量纲的结果:

$$\frac{kx}{mg}=\frac{kl}{mg}+1-\cos(\frac{k^{\frac{1}{2}}t}{m^{\frac{1}{2}}}) \tag{23}$$

即为:

$$x=l+\frac{mg}{k}(1-\cos(\frac{k^{\frac{1}{2}}t}{m^{\frac{1}{2}}}) \tag{24}$$

经检验(24)式是(11)式满足初始条们:(12)式的解。

第五步:验证(通常可以省略)

为了看得更清楚我下面来比较(11)式和(20)式。把(20)式中带"'"的量按照(15),(16),(19)式换成不带"'"的量得到:

$$\frac{d^2x}{dt^2}g^{-1}=-(\frac{kx}{mg}-\frac{kl}{mg})+1 \tag{25}$$

即为:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-l)+mg \tag{26}$$

(26)式利(11)式一样。

综上所述:我们进行无量纲化,首先选取基本物理量,找其余物理量对应的无量纲的量(带"'"的),然后把原函数中的物理量替换掉(所选基本物理量换成1,其它物理量用其相应的"'"换掉)即可,原函数的形式不变。无量纲的结果只需按照找寻带"'"的量所用的等式[类似于上例中的(15),(16),(17),(18),(19)式的地位]的右边式子替代就可得到在原单位制下的各个有单位的物理量[类似于上例中的(22)式变成(23)式]。

(四)薛定谔方程,在自然单位中,怎么应用量纲Ⅱ定理

选用自然单位制其实就是用所求的体系的几个主要的特征量作为相应物理量的单位,在具体计算中,令相应的物理量为1。例如:一维线性谐振子的势能函数为:

$$V(x)=\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2 \tag{27}$$

薛定谔方程:

$$-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\phi(x)=E\phi(x) \tag{28}$$

第一种方法:在自然单位制下即令:

$$h=u=\omega=1 \tag{29}$$

则无量纲的方程为:

$$-\frac{d^2\phi(x')}{dx'^2}+x'^2\phi(x')=2E'\phi(x') \tag{30}$$

解出无量纲的方程的结果后用:

$$x'=(\frac{\eta}{\mu\omega})^{\frac{1}{2}}x \tag{31}$$

$$E'=\frac{E}{h\omega} \tag{32}$$

(31)利(32)这两个式子回代即可回到原来单位制下的结果。

$\left(\frac{\mu\omega}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$ 为特征长度

$h\omega$ 为特征能量

第二种方法:常见的无量纲化方法(变量代换):令

$$x'(\frac{\eta}{\mu\omega})^{\frac{1}{2}}x \tag{33a}$$

$$E'=\frac{E}{h\omega} \tag{33b}$$

(30)式可化为:

(33b)

$$-\frac{d^2\phi(x')}{dx'^2}+x'^2\phi(x')=2E'\phi(x') \tag{34}$$

(30)式和(34)式一样都是无量纲的式子。可见无量纲化其实就是重新选择合适的单位制。

参考文献:

[1]顾德淦·振动方法[M].北京:高等教育山版社.1993.

[2]苏汝铿·量子力学[M].上海:复旦大学出版社.1997.

[3]曾谨言·量子力学(上册)[M].北京:科学山版社.1990.

[4]曾谨言,钱伯初·量子力学专题分析(上)[M].上海:高等教育出版社。1990.

[5]赵凯华·定性与半定量物理学[M].北京:高等教育山版社.1994.

[6](苏)л.н.·谢多夫著·力学中的相似方法与量纲理论[M].北京:科学出版社,1982.

[7]周世勋·量子力学教程[M].北京:高等教育山版社.1979.

Method of normalization

Liu Feng Jia Duo Li Xiaoli Xi Guozhu Yong lin

(College of Physics and Electrpnic Enginering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: We present the detailed content of the theorem of dimensionless, An example is given to show how to tyrn a dimension formula into dimentionless. In additon, the method how to get the dimension formula, is stated. Finally we make the Schrodinger Equation with a confining potential dimensionless by - using the method we stated previously.

Key wrods: Dimension; SI; Theorem of dimensionless; Dimentionless

(责任编辑: 王德红)