龙格库塔公式的推导

- 为了避免计算各阶导数和偏导数，将式(3.5.12)写成

$$y(t+h)=y(t)+h\sum_{i=1}^{r}b_i k_i \quad (3.5.13)$$

- 其中r称为阶数，b_i 待定系数，k_i 由下式决定

$$k_i=f(t+c_i h\,,\ y(t)+h\sum_{j=1}^{i-1}a_j k_j) \quad (3.5.14)$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\cdots r \qquad c_1=0$$

- 下面针对r的取值进行讨论：
- r=1，此时，有 $c_1 = 0, k_1 = f(t, y)$

  因此有：

$$y(t+h) = y(t) + b_1 h f(t, y) \quad （3—5—15）$$

- 取 $b_1 = 1$ 即得一阶RK公式，它就是欧拉公式，因此可以说欧拉公式是RK公式的特例。

r＝2时

- 此时有：

$$\begin{cases} k_1 = f(t,y) \\ k_2 = f(t+c_2h, y(t)+a_1k_1h) \end{cases} \qquad （3—5—16）$$

- 将 $f(t+c_2h, y(t)+a_1k_1h)$ 在点 (t,y) 展成泰勒级数

$$f(t+c_2h, y(t)+a_1k_1h) \qquad （3—5—17）$$

$$\approx f(t,y)+c_2h\frac{\partial}{\partial t}f(t,y)+a_1k_1h\frac{\partial}{\partial y}f(t,y)$$

- 将(3-5-17)式代入(3-5-16)式，再将式(3.5.16)代入式(3.5.13)，得

$$y(t+h)=y(t)+h\left(b_1k_1+b_2k_2\right)$$

$$=y(t)+h\left[b_1f(t,y)+b_2f(t,y)+c_2b_2h\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}+a_1b_2k_1h\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right]$$

$$=y(t)+(b_1+b_2)hf(t,y)+b_2c_2h^2\frac{\partial f}{\partial t}+a_1b_2h^2\frac{\partial f}{\partial y}f(t,y)$$

(3-5-18)

- 将式(3.5.18)与式(3.5.12)逐项比较，按照对应项系数相等比较可得：

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 c_2 = 1/2 \\ a_1 b_2 = 1/2 \end{cases} \qquad (3\text{-}5\text{-}19)$$

- 式(3.5.19)是一个不定方程，它有无穷多个解。
- 取 $a_1 = 1/2, b_1 = 0, b_2 = 1, c_2 = 1/2$，可得

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hk_2 \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \end{cases} \qquad (3\text{-}5\text{-}20)$$

- 取 $a_1 = 1, b_1 = b_2 = 1/2, c_2 = 1$ ，可得：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1) \end{cases} \qquad (3\text{-}5\text{-}21)$$

显然式(3.5.21)正好是前面介绍的改进的欧拉公式。

r＝3时

- 按照前面的推导方法可以得到常用的三阶RK公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \dfrac{h}{3}, y_n + \dfrac{h}{3}k_1) \\ k_3 = f(t_n + \dfrac{2h}{3}, y_n + \dfrac{2h}{3}k_2) \end{cases} \quad (3\text{-}5\text{-}22)$$

r=4时

- 同样可以得到常用的四阶RK公式：

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
k_1 = f(t_n, y_n) \\
k_2 = f(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1) \\
k_3 = f(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_2) \\
k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)
\end{cases}
\qquad (3\text{-}5\text{-}23)
$$

最优步长控制策略

- 由此作出判断：

1、若 $e_n \le \varepsilon_0$，则本步积分成功，现确定下一步的最大步长 h_{n+1} 。

假定 h_{n+1} 足够小，则 $\phi(t_n + h_{n+1}) \approx \phi(t_n)$，下一步误差为：

$$e_{n+1} = \frac{\phi(t_{n+1}) \cdot h_{n+1}^k}{|y_{n+1}| + 1} \approx \frac{\phi(t_n) \cdot h_{n+1}^k}{|y_n| + 1}$$

- 为使 $e_{n+1} \le \varepsilon_0$ ，即：

$$\frac{\phi(t_n)\cdot h_{n+1}^k}{|y_n|+1} \le \varepsilon_0$$

- 则有

$$h_{n+1} \approx \left(\frac{\varepsilon_0(|y_n|+1)}{\phi(t_n)}\right)^{1/k}$$

- 将式(3.5.37)代入上式得:

$$h_{n+1} \approx \left(\frac{\varepsilon_0 \cdot h_n^k}{e_n} \right)^{1/k} = \left(\frac{\varepsilon_0}{e_n} \right)^{1/k} \cdot h_n \qquad (3\text{-}5\text{-}38)$$

- 2、若$e_n > \varepsilon_0$， 则本步失败，按式(3.5.38)求出一个积分步长，它表示重新积分的本步步长，再算一遍，即：

$$h_n \leftarrow \left(\frac{\varepsilon_0}{e_n}\right)^{1/k} \cdot h_n \qquad (3\text{-}5\text{-}39)$$

- 由于假定了 h_{n+1}足够小，因此 $\phi(t_n)$ 基本不变，故必须限制步长的缩小与放大，一般限制的最大放缩系数为10，即要求：

$$0.1h_n < h_{n+1} < 10h_n$$

- 有关最优步长的控制，除此方法之外，还有吉尔(Gear)法等。
- 采用最优步长控制后、f 计算量有明显减少，但上述两种控制方法对于函数中含有间断特性的情况不适合。
- 因为在间断点附近会出现步长频繁放大、缩小的振荡现象，由于最优步长控制法是以本步误差外推下一步步长，因此振荡现象更为严重。

根匹配法

- 关于最后一步，附加零点的说明：
- 因为一般的传递函数模型有：$m \le n$
- 因此在s平面上有n-m个零点在负无穷远处。不妨假设均在 $-\infty$ 处，由此可见，在z平面上尚有n-m个零点在 $e^{-\infty T}=0$ 处，即尚有n-m个零点在z平面的原点。

一个例子

- 设 $G(s)=\dfrac{s}{s^2+2s+1}$ ，试利用根匹配法，求与之相匹配的离散化模型，步骤如下：

（1） $G(s)=\dfrac{s}{(s+1)^2}$ ，求得

$$p_1=-1, p_2=-1, q_1=0, n=2, m=1$$

（2）

$$p_1'=e^{-T}, p_2'=e^{-T}, q'=1$$

（3） $$G(z)=\frac{K_z(z-1)}{(z-e^{-T})^2}$$

（4）对斜坡函数 $u(t)=t,G(s)$ 具有非零且有限的稳态值：

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0}\left[sG(s)U(s)\right]=\lim_{s\to 0}\left[s\frac{s}{(s+1)^2}\frac{1}{s^2}\right]=1$$

- 由$G(z)$ 可得：

$$y(\infty)=\lim_{z\to 1}\left[\frac{z-1}{z}G(z)U(z)\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\left[\frac{z-1}{z}\frac{K_z(z-1)}{(z-e^{-T})^2}\frac{Tz}{(z-1)^2}\right]$$

$$=\frac{K_z T}{(1-e^{-T})^2}$$

（5） 确定 $K_z=\dfrac{(1-e^{-T})^2}{T}$

（6）附加一个零点，为简单起见，令 $q_2'=0$

即零点匹配在z平面的原点。故有：

$$G(z)=\frac{(1-e^{-T})^2}{T}\frac{z(z-1)}{(z-e^{-T})^2}$$

附加这个零点不影响 k_z

课堂测验

- 1、已知一微分方程模型模型为：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y + t \\ y_0 = 0 \\ t_0 = 0 \\ h = 0.5 \end{cases}$$

试用欧拉法作为预估公式，梯形法作为校正公式，写出5步仿真过程。

- 2、已知 $G(s)=\dfrac{s}{s^{2}+3s+2}$ ，

试用根匹配法建立该系统的频域模型 $G(z)$。