



# 龙格库塔公式的推导

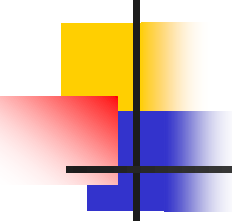
- 为了避免计算各阶导数和偏导数，将式(3.5.12)写成

$$y(t+h) = y(t) + h \sum_{i=1}^r b_i k_i \quad (3.5.13)$$

- 其中 $r$ 称为阶数， $b_i$  待定系数， $k_i$  由下式决定

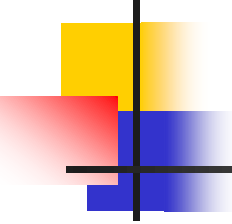
$$k_i = f(t + c_i h, y(t) + h \sum_{j=1}^{i-1} a_j k_j) \quad (3.5.14)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, r \quad c_1 = 0$$

- 
- 
- 下面针对 $r$ 的取值进行讨论:
  - $r=1$ , 此时, 有  $c_1=0, k_1=f(t, y)$   
因此有:

$$y(t+h) = y(t) + b_1 h f(t, y) \quad (3-5-15)$$

- 取  $b_1=1$  即得一阶**RK**公式, 它就是欧拉公式, 因此可以说欧拉公式是**RK**公式的特例。



## $r=2$ 时

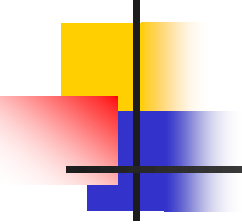
---

- 此时有：

$$\begin{cases} k_1 = f(t, y) \\ k_2 = f(t + c_2 h, y(t) + a_1 k_1 h) \end{cases} \quad (3-5-16)$$

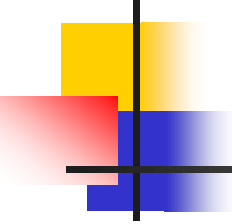
- 将  $f(t + c_2 h, y(t) + a_1 k_1 h)$  在点  $(t, y)$  展成泰勒级数

$$\begin{aligned} & f(t + c_2 h, y(t) + a_1 k_1 h) \quad (3-5-17) \\ & \approx f(t, y) + c_2 h \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) + a_1 k_1 h \frac{\partial}{\partial y} f(t, y) \end{aligned}$$

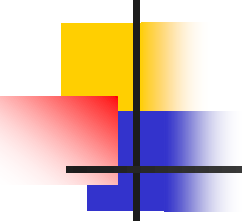
- 
- 将(3-5-17)式代入(3-5-16)式，再将式(3.5.16)代入式(3.5.13)，得

$$\begin{aligned}y(t+h) &= y(t) + h(b_1k_1 + b_2k_2) \\&= y(t) + h \left[ b_1f(t, y) + b_2f(t, y) + c_2b_2h \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + a_1b_2k_1h \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right] \\&= y(t) + (b_1 + b_2)hf(t, y) + b_2c_2h^2 \frac{\partial f}{\partial t} + a_1b_2h^2 \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y)\end{aligned}$$

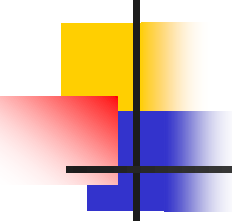
(3-5-18)

- 
- 将式(3.5.18)与式(3.5.12)逐项比较，按照对应项系数相等比较可得：

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 c_2 = 1/2 \\ a_1 b_2 = 1/2 \end{cases} \quad (3-5-19)$$

- 
- 式(3.5.19)是一个不定方程，它有无穷多个解。
  - 取  $a_1 = 1/2, b_1 = 0, b_2 = 1, c_2 = 1/2$ ，可得

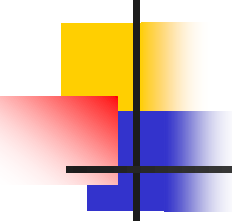
$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + hk_2 \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \end{array} \right. \quad (3-5-20)$$



■ 取  $a_1 = 1, b_1 = b_2 = 1/2, c_2 = 1$  , 可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1) \end{array} \right. \quad (3-5-21)$$

显然式(3.5.21)正好是前面介绍的改进的欧拉公式。



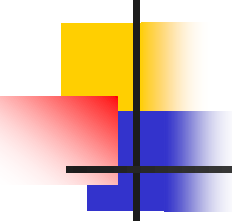
## $r=3$ 时

---

- 按照前面的推导方法可以得到常用的三阶**RK**公式：

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}k_2) \end{array} \right. \quad (3-5-22)$$





# r=4时

---

- 同样可以得到常用的四阶**RK**公式:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{array} \right. \quad (3-5-23)$$



# 最优步长控制策略

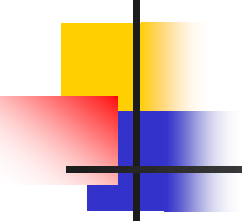
---

■ 由此作出判断：

1、若  $e_n \leq \varepsilon_0$ ，则本步积分成功，现确定下一步的最大步长  $h_{n+1}$ 。

假定  $h_{n+1}$  足够小，则  $\phi(t_n + h_{n+1}) \approx \phi(t_n)$ ，  
下一步误差为：

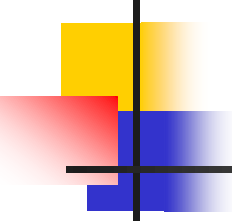
$$e_{n+1} = \frac{\phi(t_{n+1}) \cdot h_{n+1}^k}{|y_{n+1}| + 1} \approx \frac{\phi(t_n) \cdot h_{n+1}^k}{|y_n| + 1}$$

- 
- 
- 为使  $e_{n+1} \leq \varepsilon_0$  , 即:

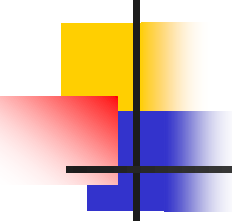
$$\frac{\phi(t_n) \cdot h_{n+1}^k}{|y_n| + 1} \leq \varepsilon_0$$

- 则有

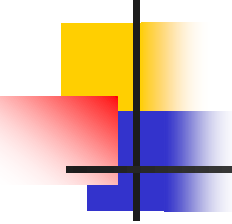
$$h_{n+1} \approx \left( \frac{\varepsilon_0 (|y_n| + 1)}{\phi(t_n)} \right)^{1/k}$$

- 
- 
- 将式(3.5.37)代入上式得:

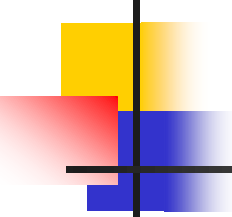
$$h_{n+1} \approx \left( \frac{\varepsilon_0 \cdot h_n^k}{e_n} \right)^{1/k} = \left( \frac{\varepsilon_0}{e_n} \right)^{1/k} \cdot h_n \quad (3-5-38)$$

- 
- 2、若  $e_n > \varepsilon_0$ ，则本步失败，按式(3.5.38) 求出一个积分步长，它表示重新积分的本步步长，再算一遍，即：

$$h_n \leftarrow \left( \frac{\varepsilon_0}{e_n} \right)^{1/k} \cdot h_n \quad (3-5-39)$$

- 
- 由于假定了  $h_{n+1}$  足够小，因此  $\phi(t_n)$  基本不变，故必须限制步长的缩小与放大，一般限制的最大放缩系数为**10**，即要求：

$$0.1h_n < h_{n+1} < 10h_n$$

- 
- 有关最优步长的控制，除此方法之外，还有吉尔(Gear)法等。
  - 采用最优步长控制后、 $f$  计算量有明显减少，但上述两种控制方法对于函数中含有间断特性的情况不适合。
  - 因为在间断点附近会出现步长频繁放大、缩小的振荡现象，由于最优步长控制法是以本步误差外推下一步步长，因此振荡现象更为严重。



# 根匹配法

---

- 关于最后一步，附加零点的说明：
- 因为一般的传递函数模型有： $m \leq n$
- 因此在s平面上有n-m个零点在负无穷远处。不妨假设均在  $-\infty$  处，由此可见，在z平面上尚有n-m个零点在  $e^{-\infty T} = 0$  处，即尚有n-m个零点在z平面的原点。





## 一个例子

---

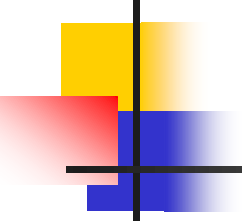
- 设  $G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$ ，试利用根匹配法，求与之相匹配的离散化模型，步骤如下：

(1)  $G(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$ ，求得

$$p_1 = -1, p_2 = -1, q_1 = 0, n = 2, m = 1$$

(2)

$$p'_1 = e^{-T}, p'_2 = e^{-T}, q' = 1$$

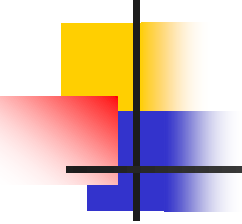


---

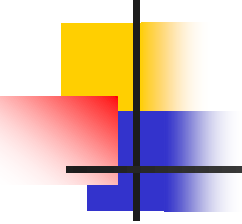
$$(3) \quad G(z) = \frac{K_z(z-1)}{(z-e^{-T})^2}$$

(4) 对斜坡函数  $u(t)=t$ ,  $G(s)$  具有非零且有限的稳态值:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s)U(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{s}{(s+1)^2} \frac{1}{s^2} \right] = 1$$

- 
- 
- 由  $G(z)$  可得:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z-1}{z} G(z) U(z) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z-1}{z} \frac{K_z(z-1)}{(z-e^{-T})^2} \frac{Tz}{(z-1)^2} \right] \\ &= \frac{K_z T}{(1-e^{-T})^2} \end{aligned}$$



(5) 确定  $K_z = \frac{(1-e^{-T})^2}{T}$

(6) 附加一个零点，为简单起见，令  $q'_2 = 0$   
即零点匹配在z平面的原点。故有：

$$G(z) = \frac{(1-e^{-T})^2}{T} \frac{z(z-1)}{(z-e^{-T})^2}$$

附加这个零点不影响  $k_z$



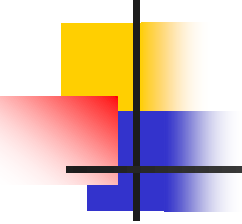
# 课堂测验

---

- 1、已知一微分方程模型模型为：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y + t \\ y_0 = 0 \\ t_0 = 0 \\ h = 0.5 \end{cases}$$

试用欧拉法作为预估公式，梯形法作为校正公式，  
写出**5**步仿真过程。



---

■ 2、已知  $G(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$  ,

试用根匹配法建立该系统的频域模型  $G(z)$ 。