

# Lista Dedução Natural para a Lógica Clássica Proposicional

\*adaptação de material cedido gentilmente pelo professor João Marcos do DIMAP/UFRN (2016)

Desenvolva demonstrações no sistema de Dedução Natural para os seguintes sequentes:

1.  $\vdash (A \rightarrow A)$
2.  $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A))$
3.  $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$
4.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)), (A \rightarrow B) \vdash (A \rightarrow C)$
5.  $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
6.  $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \vdash (A \rightarrow B)$
7.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \vdash (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
8.  $(A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D))) \vdash (C \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow D)))$
9.  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
10.  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$
11.  $\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow C$
12.  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$
13.  $(A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D$
14.  $(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D) \rightarrow A \rightarrow ((A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D) \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D) \rightarrow C) \rightarrow D$
15.  $A \vdash (A \wedge A)$
16.  $(A \wedge B) \vdash (B \wedge A)$
17.  $(A \wedge (B \wedge C)) \vdash ((A \wedge B) \wedge C)$
18.  $(A \rightarrow C) \vdash ((A \wedge B) \rightarrow C)$
19.  $(A \rightarrow B) \vdash ((C \wedge A) \rightarrow (B \wedge C))$
20.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \vdash ((A \wedge B) \rightarrow C)$
21.  $((A \wedge B) \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
22.  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \vdash ((A \wedge B) \rightarrow C)$
23.  $(A \wedge (B \rightarrow C)) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C)$
24.  $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \vdash (A \rightarrow (B \wedge C))$
25.  $(A \rightarrow (B \wedge C)) \vdash ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$
26.  $(A \vee A) \vdash A$
27.  $(A \vee B) \vdash (B \vee A)$

28.  $(A \vee (B \vee C)) \vdash ((A \vee B) \vee C)$
29.  $((A \vee B) \vee C) \vdash (A \vee (B \vee C))$
30.  $(C \vee (A \vee B)) \vdash ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$
31.  $((B \vee (A \vee C)) \vee A) \vdash (C \vee (A \vee B))$
32.  $(A \rightarrow B) \vdash (A \rightarrow (B \vee C))$
33.  $((A \vee B) \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$
34.  $(A \vee B), (A \rightarrow C), (B \rightarrow D) \vdash (C \vee D)$
35.  $(A \rightarrow C), (B \rightarrow C) \vdash ((A \vee B) \rightarrow C)$
36.  $(A \rightarrow B) \vdash ((C \vee A) \rightarrow (B \vee C))$
37.  $(A \wedge (B \vee C)) \vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
38.  $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \vdash (A \wedge (B \vee C))$
39.  $(A \vee (B \wedge C)) \vdash ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
40.  $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \vdash (A \vee (B \wedge C))$
41.  $(A \wedge B) \vdash (A \vee B)$
42.  $(A \wedge B) \vdash (A \rightarrow B)$
43.  $A \vdash (A \wedge (A \vee B))$
44.  $(A \vee (A \wedge B)) \vdash A$
45.  $\vdash (A \vee \text{true})$
46.  $(A \wedge \text{false}) \vdash B$
47.  $\neg A \vdash (A \rightarrow \text{false})$
48.  $(A \rightarrow \text{false}) \vdash \neg A$
49.  $A \vdash \neg\neg A$
50.  $\neg\neg\neg A \vdash \neg A$
51.  $\neg\neg A \vdash A$
52.  $A, \neg A \vdash B$
53.  $\neg(A \wedge \neg A)$
54.  $(A \rightarrow B), (A \rightarrow \neg B) \vdash \neg A$
55.  $(\neg\neg A \rightarrow B), (\neg\neg A \rightarrow \neg B) \vdash \neg A$
56.  $(\neg A \rightarrow B), (\neg A \rightarrow \neg B) \vdash A$
57.  $\vdash (A \vee \neg A)$
58.  $(A \rightarrow B), (\neg A \rightarrow B) \vdash B$
59.  $\vdash ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A)$
60.  $\vdash ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$

61.  $(A \rightarrow B), \neg B \vdash \neg A$
62.  $(A \rightarrow \neg B), B \vdash \neg A$
63.  $(\neg A \rightarrow B), \neg B \vdash A$
64.  $(\neg A \rightarrow \neg B), B \vdash A$
65.  $\neg(A \wedge B), A \vdash \neg B$
66.  $\neg(A \wedge B), B \vdash \neg A$
67.  $\neg(A \wedge \neg B), A \vdash B$
68.  $\neg(\neg A \wedge B), B \vdash A$
69.  $\neg(A \wedge B \wedge C), B \vdash \neg(A \wedge C)$
70.  $\neg(A \wedge E \wedge B), \neg(C \wedge \neg E \wedge D) \vdash \neg(A \wedge B \wedge C \wedge D)$
71.  $(A \vee B), \neg A \vdash B$
72.  $(\neg A \vee B), A \vdash B$
73.  $(A \vee B), \neg B \vdash A$
74.  $(A \vee \neg B), B \vdash A$
75.  $A \vee E \vee B, C \vee \neg E \vee D \vdash A \vee B \vee C \vee D$
76.  $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$
77.  $\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
78.  $A \vdash \neg(\neg A \wedge B)$
79.  $B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$
80.  $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$
81.  $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$
82.  $\neg(\neg A \vee B) \vdash A$
83.  $\neg(A \vee \neg B) \vdash B$
84.  $(A \rightarrow B) \vdash (\neg A \vee B)$
85.  $(\neg A \rightarrow B) \vdash (A \vee B)$
86.  $(A \rightarrow B) \vdash \neg(A \wedge \neg B)$
87.  $(A \rightarrow \neg B) \vdash \neg(A \wedge B)$
88.  $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
89.  $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$
90.  $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg B$
91.  $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash B$
92.  $(\neg A \wedge \neg B) \vdash \neg(A \vee B)$
93.  $\neg(A \vee B) \vdash (\neg A \wedge \neg B)$

94.  $(A \vee B) \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$
95.  $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash (A \vee B)$
96.  $(A \wedge B) \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$
97.  $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash (A \wedge B)$
98.  $(\neg A \vee \neg B) \vdash \neg(A \wedge B)$
99.  $\neg(A \wedge B) \vdash (\neg A \vee \neg B)$
100.  $\neg(\neg A \wedge B \wedge \neg C), B \vdash (A \vee C)$
101.  $\vdash (A \leftrightarrow A)$
102.  $(A \leftrightarrow B) \vdash (B \leftrightarrow A)$
103.  $(A \leftrightarrow B), (B \leftrightarrow C) \vdash (A \leftrightarrow C)$
104.  $A, B \vdash (A \leftrightarrow B)$
105.  $\neg A, \neg B \vdash (A \leftrightarrow B)$
106.  $A, \neg B \vdash \neg(A \leftrightarrow B)$
107.  $\neg A, B \vdash \neg(A \leftrightarrow B)$
108.  $(A \leftrightarrow B), \neg A \vdash \neg B$
109.  $(A \leftrightarrow B), \neg B \vdash \neg A$
110.  $(\neg A \leftrightarrow B), A \vdash \neg B$
111.  $(A \leftrightarrow \neg B), B \vdash \neg A$
112.  $\neg(A \leftrightarrow B), A \vdash \neg B$
113.  $\neg(A \leftrightarrow B), B \vdash \neg A$
114.  $\neg(A \leftrightarrow B), \neg A \vdash B$
115.  $\neg(A \leftrightarrow B), \neg B \vdash A$
116.  $(A \leftrightarrow B), (A \leftrightarrow \neg B) \vdash \text{false}$
117.  $\vdash \neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow A)$
118.  $\vdash \neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow B)$
119.  $\vdash \neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$
120.  $\vdash (\neg A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$
121.  $\vdash (A \leftrightarrow (A \wedge \text{true}))$
122.  $\vdash (A \leftrightarrow (A \vee \text{false}))$
123.  $\vdash ((A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A))$
124.  $\vdash ((A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A))$
125.  $\vdash ((A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$
126.  $\vdash ((\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow A))$

- 127.  $(A \wedge B) \vdash ((A \vee B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B))$
- 128.  $(A \vee B) \vdash ((A \wedge B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B))$
- 129.  $\vdash ((A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (A \wedge B)))$
- 130.  $\vdash ((A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow (A \vee B)))$
- 131.  $\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)))$
- 132.  $\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)))$
- 133.  $\vdash ((A \wedge B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (A \rightarrow B)))$
- 134.  $\vdash ((A \wedge B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow (B \rightarrow A)))$
- 135.  $\vdash ((A \vee B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \rightarrow A)))$
- 136.  $\vdash ((A \vee B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow (A \rightarrow B)))$
- 137.  $\vdash ((A \vee B) \leftrightarrow ((A \leftrightarrow B) \rightarrow A))$
- 138.  $\vdash ((A \vee B) \leftrightarrow ((A \leftrightarrow B) \rightarrow B))$
- 139.  $\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)))$
- 140.  $\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)))$
- 141.  $(A \leftrightarrow B) \vdash (\neg A \leftrightarrow \neg B)$
- 142.  $(A \leftrightarrow B) \vdash ((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C))$
- 143.  $(A \leftrightarrow B) \vdash ((A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C))$
- 144.  $(A \leftrightarrow B) \vdash ((A \rightarrow C) \leftrightarrow (B \rightarrow C))$
- 145.  $(A \leftrightarrow B) \vdash ((C \rightarrow A) \leftrightarrow (C \rightarrow B))$
- 146.  $\vdash \neg(A \leftrightarrow \neg A)$
- 147.  $\vdash (((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow B) \leftrightarrow A)$
- 148.  $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)) \vdash ((C \leftrightarrow A) \leftrightarrow B)$
- 149.  $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)) \vdash (B \leftrightarrow (C \leftrightarrow A))$
- 150.  $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)) \vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$

Regras de Inferência:

$$\frac{x \quad y}{x \wedge y} (\wedge I) \quad \frac{x \wedge y}{x} (\wedge E_1) \quad \frac{x \wedge y}{y} (\wedge E_2)$$

$$\frac{x}{x \vee y} (\vee I_1) \quad \frac{y}{x \vee y} (\vee I_2) \quad \frac{x \vee y \quad [x] \vdash z \quad [y] \vdash z}{z} (\vee E)$$

$$\frac{\neg x \quad x}{false} (\neg E) \quad \frac{[x] \vdash false}{\neg x} (\neg I) \quad \frac{[\neg x] \vdash false}{x} (RAA)$$

$$\frac{x}{x} (ID) \quad \frac{false}{x} (CTR) \quad \frac{x \rightarrow y \quad x}{y} (\rightarrow E)$$

$$\frac{[x] \vdash y}{x \rightarrow y} (\rightarrow I)$$