Aula 2 - Gabarito

Tutoria de BCC101 - Matemática Discreta I

Departamento de Computação. Universidade Federal de Ouro Preto.

Obs.: As soluções a seguir utilizam o formato padrão de demonstração e não estão de acordo com a abordagem estruturada de Daniel Velleman.

1. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se n é par então $n^2 + 2n + 4$ é par. Verdadeiro.
   Prova:
   Seja n um inteiro arbitrário.
   Se n é par, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$.
   Queremos mostrar que $n^2 + 2n + 4$ é par.
   Como $n = 2k$, temos que

   $$\begin{aligned} n^2 + 2n + 4 &= (2k)^2 + 2(2k) + 4 \\ &= 4k^2 + 4k + 4 \\ &= 2(2k^2 + 2k + 2) \end{aligned}$$

   Por definição, temos que $2k^2 + 2k + 2 \in \mathbb{Z}$.
   Então existe um $t \in \mathbb{Z}$ tal que $t = 2k^2 + 2k + 2$.
   Temos que $n^2 + 2n + 4 = 2t$.
   Portanto, pela definição de número par, concluímos que n^2+2n+4 também é par. $\square$

---

2. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se n é ímpar então $n^2 + 2n + 4$ é ímpar. Verdadeiro.
   Prova:
   Seja n um inteiro arbitrário.
   Se n é ímpar, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.
   Queremos mostrar que $n^2 + 2n + 4$ é ímpar.
   Como $n = 2k + 1$, temos que

   $$\begin{aligned} n^2 + 2n + 4 &= (2k + 1)^2 + 2(2k + 1) + 4 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 + 4 \\ &= 4k^2 + 8k + 6 + 1 \\ &= 2(2k^2 + 4k + 3) + 1 \end{aligned}$$

   Por definição, temos que $2k^2 + 4k + 3 \in \mathbb{Z}$.
   Então existe um $t \in \mathbb{Z}$ tal que $t = 2k^2 + 4k + 3$.
   Temos que $n^2 + 2n + 4 = 2t + 1$.
   Portanto, pela definição de número ímpar, concluímos que $n^2 + 2n + 4$ também é ímpar. $\square$

---

3. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se $n + 3$ é ímpar então n^3 é ímpar. Falso.
Contraexemplo:
Tome $n = 2$.
Temos que $2 + 3 = 5$, que é ímpar, mas $2^3 = 8$, que é par.

---

4. Para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, se n é divisível por m então n^2 é divisível por m. Verdadeiro.
Prova:
Sejam n e m inteiros arbitrários.
Se n é divisível por m então existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $n = mp$.
Queremos mostrar que n^2 é divisível por m.
Como $n = mp$, temos que $n^2 = (mp)^2 = m^2p^2 = m(mp^2)$.
Por definição, temos que $mp^2 \in \mathbb{Z}$.
Então existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $t = mp^2$.
Temos que $n^2 = mt$.
Portanto, pela definição de divisível, temos que n^2 é divisível por m. □

---

5. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se n é divisível por 49 então n é divisível por 3. Falso.
Contraexemplo:
Tome $n = 49$. $49 = 49 * 1$, mas não existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $49 = 3t$.

---

6. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se x e y são racionais e $y \neq 0$ então $\frac{x}{y}$ é racional. Verdadeiro.
Prova:
Sejam x e y números reais arbitrários.
Se x e y são racionais, então existem $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, com $b, d \neq 0$, tal que $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$.
Como $y \neq 0$, temos que $c \neq 0$.
Queremos mostrar que $\frac{x}{y}$ é racional.
Pela álgebra de divisão de frações, temos que $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.
Temos que $ad \in \mathbb{Z}$, $bc \in \mathbb{Z}$ e $bc \neq 0$, já que ambos b e c são diferentes de 0.
Portanto, pela definição de número racional, $\frac{x}{y}$ é racional. □

---

7. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se n é primo então $n^2 + 1$ é primo. Falso.
Contraexemplo:
Tome $n = 3$. 3 é primo mas $3^2 + 1 = 10$, que não é primo.

---

8. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se x e y não são racionais, então $x * y$ não é racional. Falso.
Contraexemplo:
Tome $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{8}$. Temos que $\sqrt{2} * \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

---

9. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se x e y são racionais então $2x + y^2$ é racional. Verdadeiro.
Prova:
Sejam x, y reais arbitrários.
Se x e y são racionais, então existem $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, com $b, d \neq 0$ tal que $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$.

Queremos mostrar que $2x + y^2$ é racional.
Temos que $2x + y^2 = \frac{2a}{b} + \frac{c^2}{d^2}$.
Pela propriedade do mínimo múltiplo comum, temos que $\frac{2a}{b} + \frac{c^2}{d^2} = \frac{2ad^2 + c^2 b}{bd^2}$.
Por definição, $2ad^2 + c^2 b \in \mathbb{Z}$ e $bd^2 \neq 0$.
Portanto, pela definição de número racional, $2x + y^2$ é racional. $\square$

---

10. Para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, se n e m são primos, então $n + 4m + 3$ é par. Falso.
    Contraexemplo:
    Tome $n = 2$ e $m = 3$.
    Temos que $2 + 12 + 3 = 17$, que é ímpar.