

Transformações de Variáveis Aleatórias

Kempes J.

8 de junho de 2015

Aplicação de Transformações de Variáveis Aleatórias

Dadas as distribuições de X calcular as transformações em Y para as situações a seguir. Em cada uma gerar 1000 observações para X e transformar em 1000 observações de Y . Sobre as transformações, gerar os histogramas de f_X e f_Y .

1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, transformar em $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, $Y = \frac{\sigma}{X-\mu}$ e $Y = (\frac{X-\mu}{\sigma})^3$
2. $X \sim \varepsilon(1)$, transformar em $Y = X^p$, para $p \neq 0$
3. $X \sim U(0, 1)$, transformar em $Y = aX + b$

Resolução

1 Definição de transformações de variáveis aleatórias

Transformações de variáveis aleatórias são procedimentos que envolvem a passagem de uma variável aleatória para outra. Quando se modela um problema usando um variável aleatória X sobre um espaço amostral A pode-se não chegar a análise necessária, precisando que haja um mapeamento no espaço amostral B , apropriado a análise. Para isso define-se uma variável aleatória Y , que é uma transformação de X para incidir sobre B , sendo Y inversível.

Com isso

$$Y = g(X) \tag{1}$$

Ou

$$X = g^{-1}(Y) \quad (2)$$

Considerando que X é uma variável aleatória contínua Y também o será. X e Y possuem funções de distribuição acumulada $F_X(x)$ e $F_Y(y)$, além de funções de distribuição $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

Pela definição de função de distribuição acumulada

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{Y \leq y\} \quad (3)$$

Aplicando 1 no resultado de 3 e tendo X crescente, tem-se

$$\mathbb{P}\{g(X) \leq y\} = \mathbb{P}\{X \leq g^{-1}(Y)\} \quad (4)$$

Mais uma vez, pela definição de função de distribuição acumulada

$$\mathbb{P}\{X \leq g^{-1}(Y)\} = F_X(g^{-1}(Y)) \quad (5)$$

Pela definição de função de distribuição e por 3, 4 e 5

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y) \quad (6)$$

Para X decrescente e aplicando 1 no resultado de 3

$$\mathbb{P}\{g(X) \leq y\} = \mathbb{P}\{X \geq g^{-1}(Y)\} \quad (7)$$

Usando probabilidade complementar em 7

$$\mathbb{P}\{X \geq g^{-1}(Y)\} = 1 - \mathbb{P}\{X < g^{-1}(Y)\} \quad (8)$$

Pela definição de função de distribuição e por 3, 7 e 8

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = -\frac{d}{dy}F_X(g^{-1}(y)) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y) \quad (9)$$

Se X tiver comportamento crescente e decrescente pode-se generalizar 6 e 9 por

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \left| f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y) \right| \quad (10)$$

2 Resolução das transformações propostas

1. Tendo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

A função gaussiana tem por função de distribuição

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(a) Para $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$Y = g(X) = \frac{X-\mu}{\sigma}, \text{ para } \sigma \neq 0$$

$$g^{-1}(Y) = X = Y\sigma + \mu$$

$$\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}(y\sigma + \mu) = \sigma$$

A função gaussiana é crescente para $X \leq \mu$ e decrescente para $X > \mu$.

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy}g^{-1}(y) = f_X(y\sigma + \mu)\sigma$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y\sigma + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

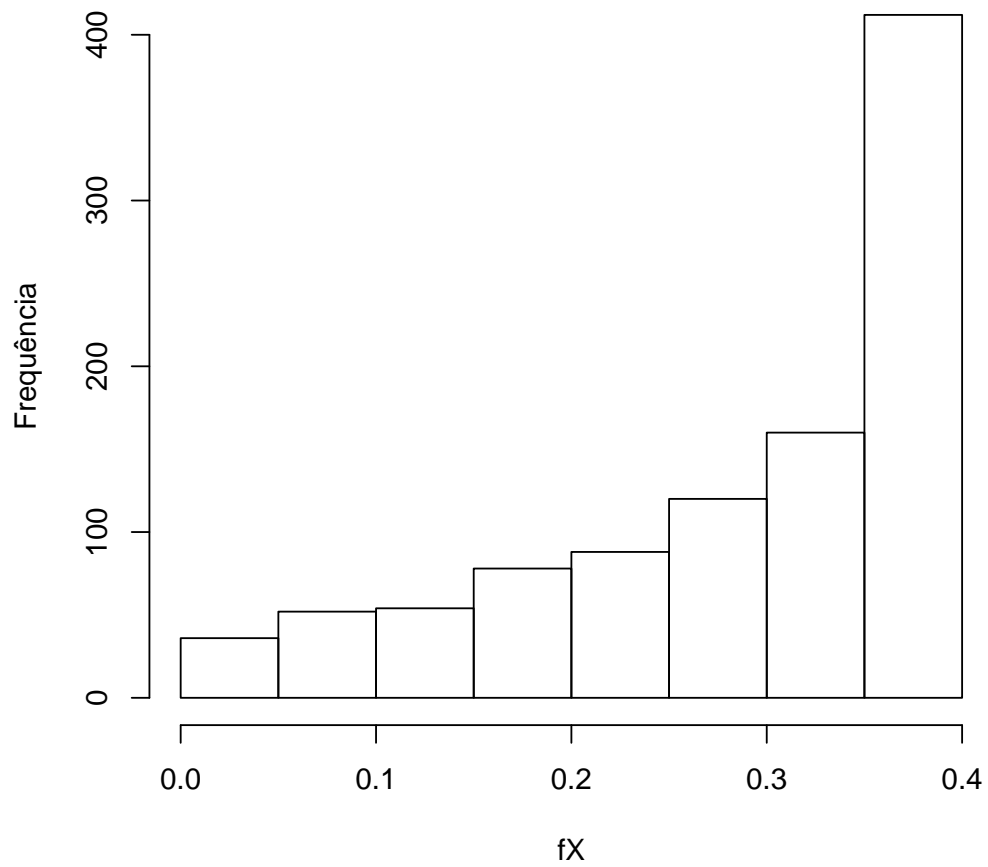
Esta é a expressão para $X \leq \mu$, isto é, crescente. Para $X > \mu$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Para demonstrar a transformação se usará $\sigma = 1$ e $\mu = 0$

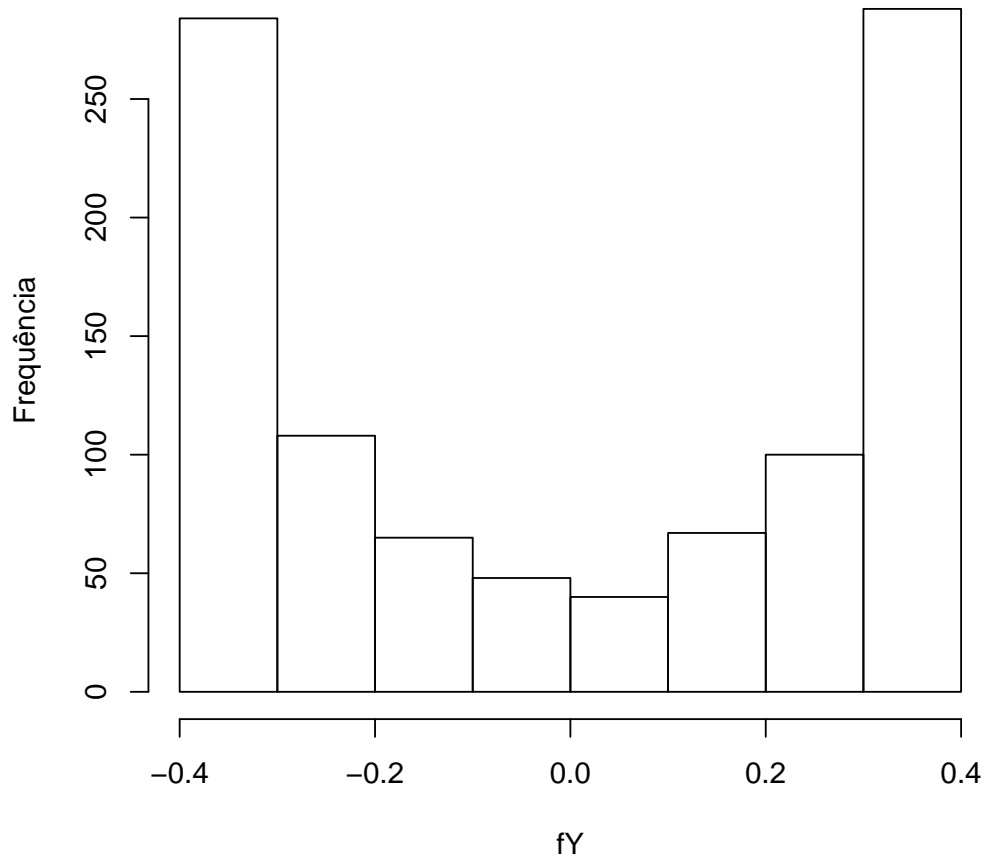
```
> set.seed(236)
> sigma <- 1
> mu <- 0
> X <- rnorm(n=1000, mean=mu, sd=sigma)
> Ytrans <- function(y, mean=mu, sd=sigma){
+   yt <- (1/sqrt(2*pi))*exp(-(y^2)/2)
+   return <- ifelse(y<=mean, yt, -yt)
+ }
> fY <- Ytrans(X)
> fX <- dnorm(X, mean=mu, sd=sigma)
> hist(fX, ylab="Frequência", main="Histograma de fX")
```

Histograma de fX



```
> hist(fY,ylab="Frequência",main="Histograma de fY")
```

Histograma de fY



(b) Para $Y = \frac{\sigma}{X-\mu}$

$$Y = g(X) = \frac{\sigma}{X-\mu}, \text{ para } X \neq \mu$$

$$g^{-1}(Y) = X = \frac{\sigma}{Y} + \mu$$

$$\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\sigma}{y} + \mu\right) = -\sigma y^{-2}$$

A função gaussiana é crescente para $X \leq \mu$ e decrescente para $X > \mu$.

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy}g^{-1}(y) = f_X\left(\frac{\sigma}{y} + \mu\right)(-\sigma y^{-2})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{\sigma}{y} + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} (-\sigma y^{-2}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}\right)^2} (-\sigma y^{-2})$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{y^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2y^2}}$$

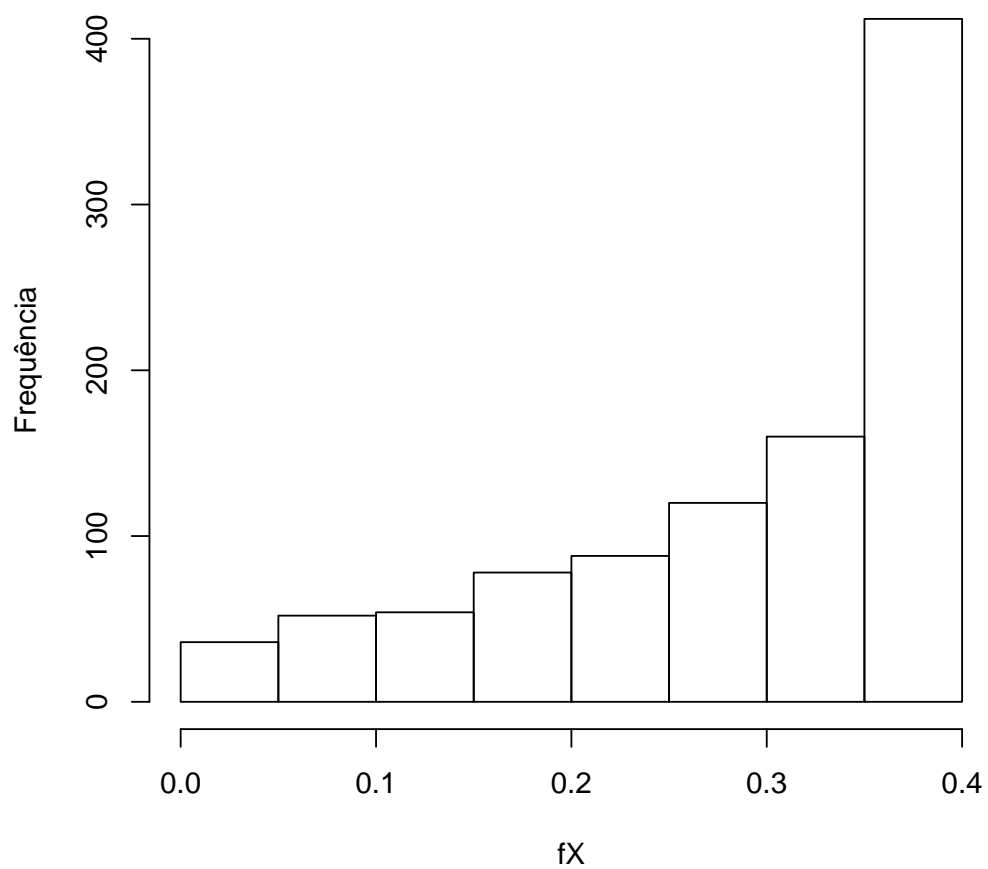
Esta é a expressão para $X \leq \mu$, isto é, crescente. Para $X > \mu$

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2y^2}}$$

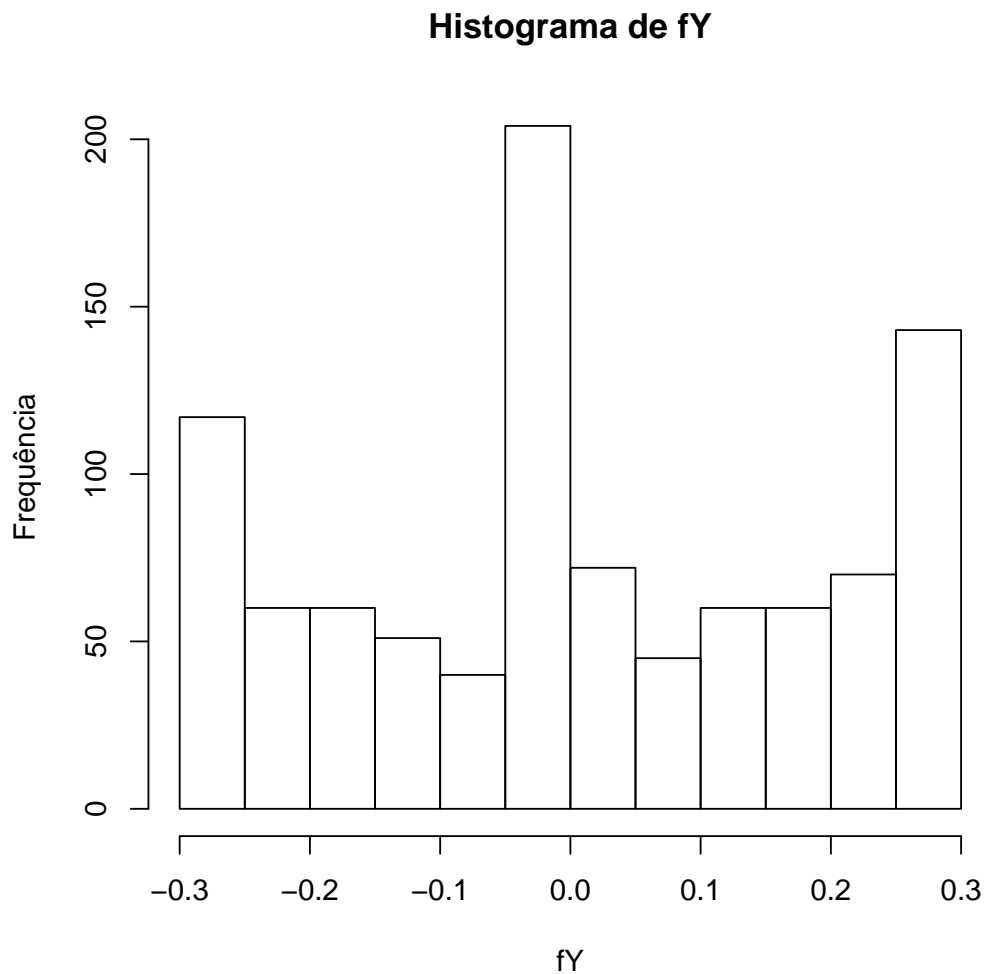
Para demonstrar a transformação se usará $\sigma = 1$ e $\mu = 0$

```
> set.seed(236)
> sigma <- 1
> mu <- 0
> X <- rnorm(n=1000,mean=mu,sd=sigma)
> Ytrans <- function(y,mean=mu,sd=sigma){
+   ret <- NULL
+   yt <- (1/((y^2)*sqrt(2*pi)))*exp(-1/(2*y^2));
+   if(y<mean){
+     ret <- -yt
+   }else{
+     if(y>mean){
+       ret <- yt
+     }
+   }
+   return <- ret
+ }
> fX <- dnorm(X,mean=mu,sd=sigma)
> fY <- sapply(X,Ytrans)
> fY<-subset(fY,fY!=0)
> hist(fX,ylab="Frequência",main="Histograma de fX")
```

Histograma de fX



```
> hist(x=fY,ylab="Frequência",main="Histograma de fY")
```



(c) Para $Y = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3$
 $Y = g(X) = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3$ para $\sigma \neq 0$

$$g^{-1}(Y) = X = \sigma Y^{\frac{1}{3}} + \mu$$

$$\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}(\sigma y^{\frac{1}{3}} + \mu) = \frac{1}{3}\sigma y^{-\frac{2}{3}}$$

A função gaussiana é crescente para $X \leq \mu$ e decrescente para $X > \mu$.

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy}g^{-1}(y) = f_X(\sigma y^{\frac{1}{3}} + \mu) \left(\frac{1}{3}\sigma y^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sigma y^{\frac{1}{3}} + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{1}{3}\sigma y^{-\frac{2}{3}}\right) = y^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}}$$

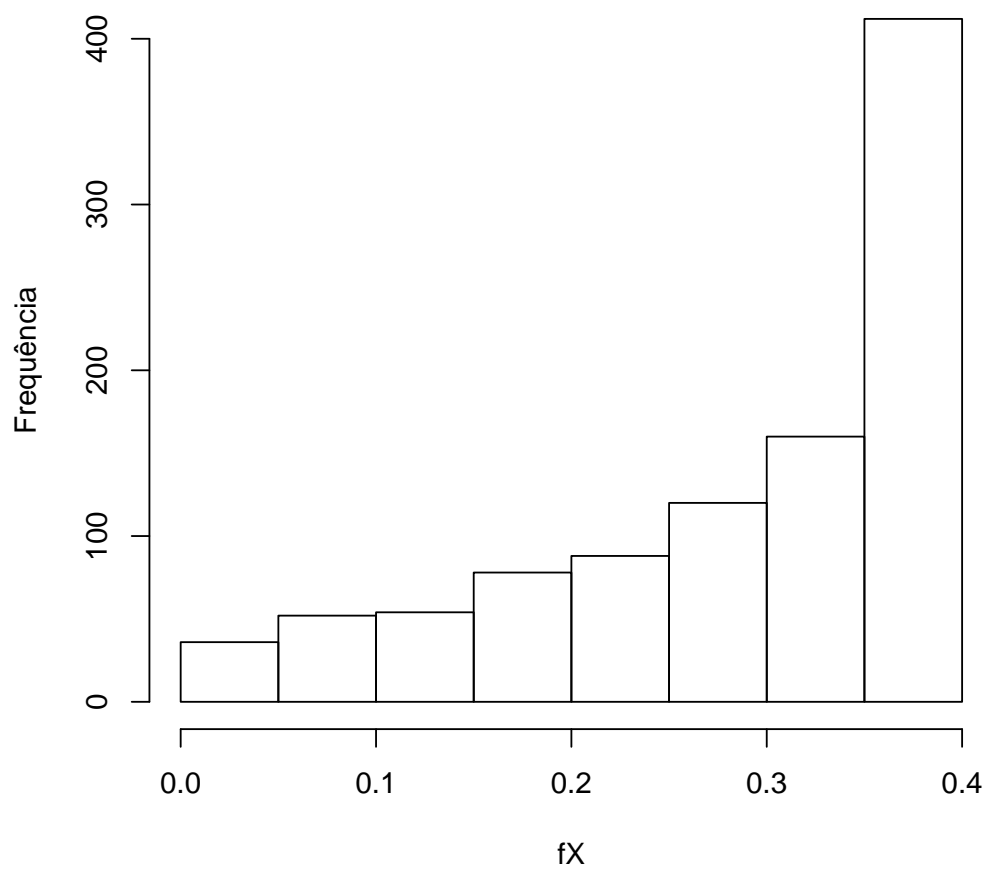
A função gaussiana é crescente para $X \leq \mu$ e decrescente para $X > \mu$.

$$f_Y(y) = -y^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}}$$

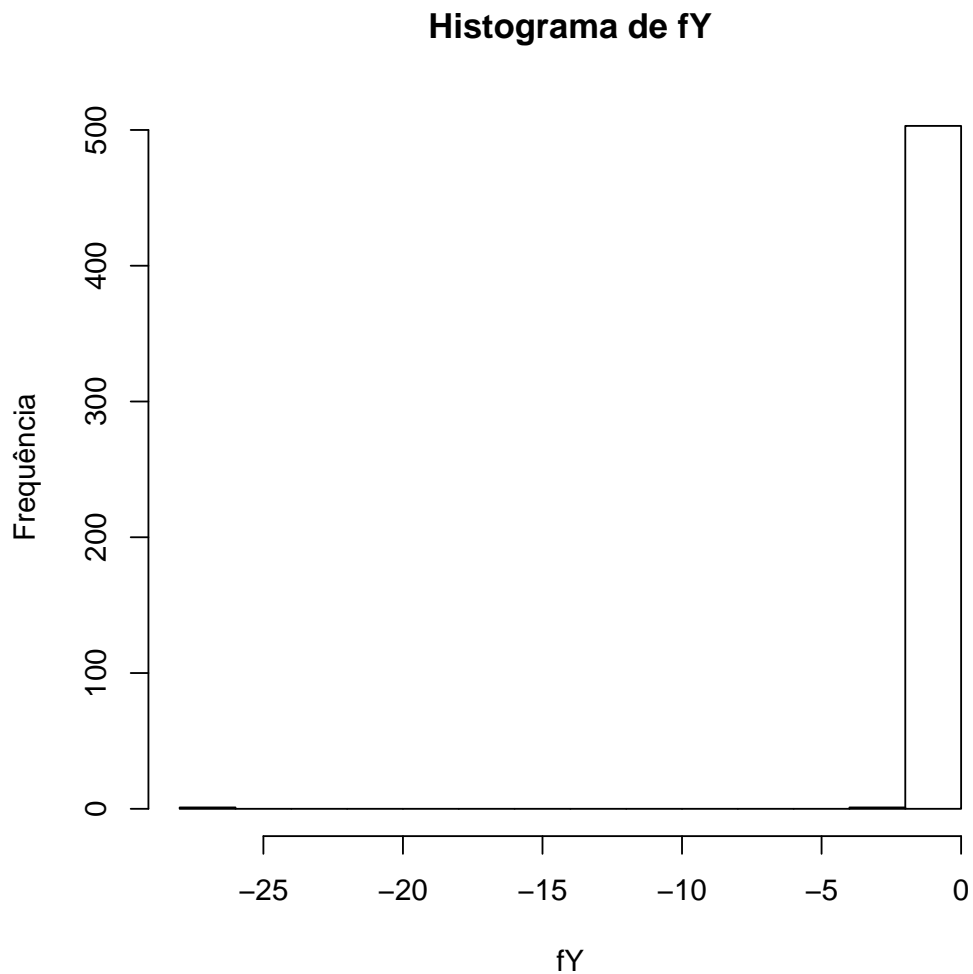
Para demonstrar a transformação se usará $\sigma = 1$ e $\mu = 0$

```
> set.seed(236)
> sigma <- 1
> mu <- 0
> X <- rnorm(n=1000,mean=mu,sd=sigma)
> Ytrans <- function(y,mean=mu,sd=sigma){
+   yt <- -(y^(-2/3))*(1/(3*sqrt(2*pi)))*exp(-(1/2)*y^(2/3))
+   return <- ifelse(y>mean,yt,-yt)
+ }
> fX <- dnorm(X,mean=mu,sd=sigma)
> fY <- Ytrans(X)
> hist(fX,ylab="Frequência",main="Histograma de fX")
```

Histograma de fX



```
> hist(x=fY,ylab="Frequência",main="Histograma de fY")  
>
```



2. $X \sim \varepsilon(1)$, transformar em $Y = X^p$, para $p \neq 0$

A função exponencial tem por função de distribuição

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Como solicitado

$$Y = g(X) = X^p$$

$$g^{-1}(Y) = X = Y^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}y^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}y^{\frac{1-p}{p}}$$

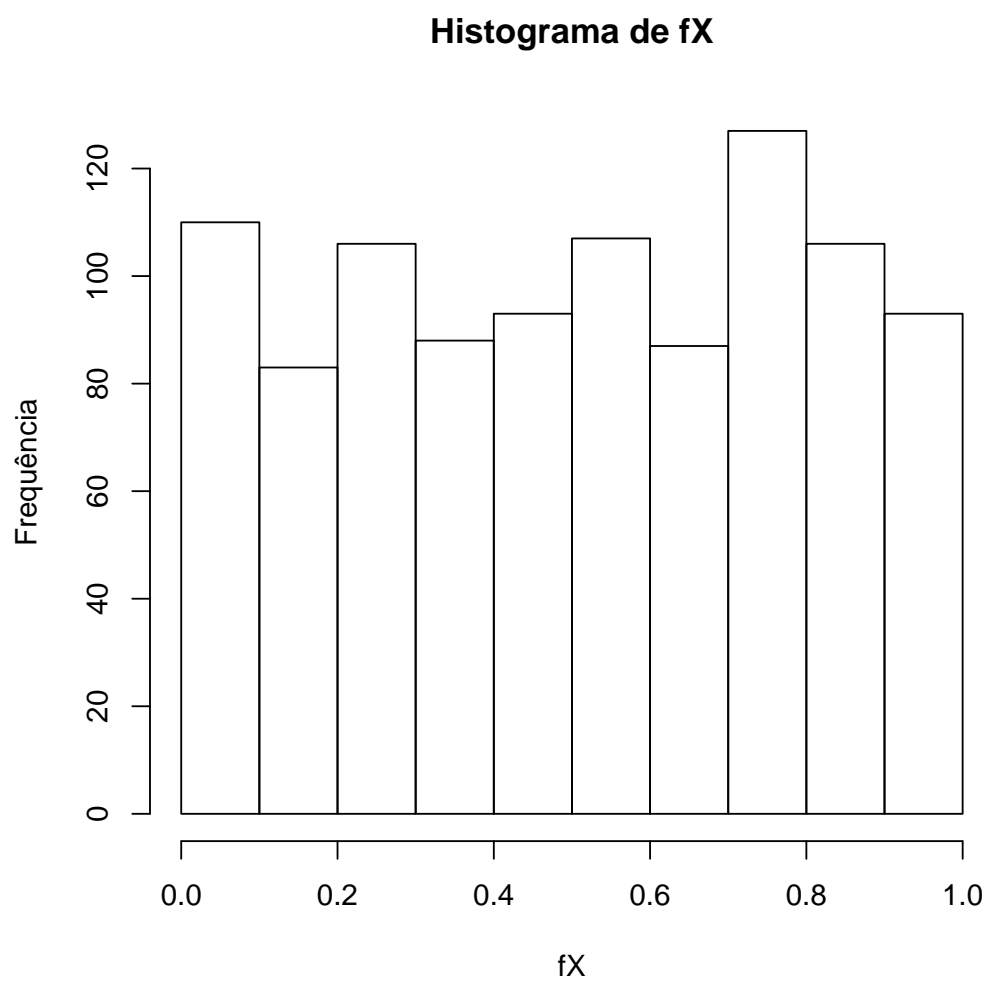
Como a função de distribuição exponencial é definida para $X \geq 0$ e é unicamente decrescente, pode-se indicar

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = -f_X(y^{\frac{1}{p}}) \frac{1}{p} y^{\frac{1-p}{p}}$$

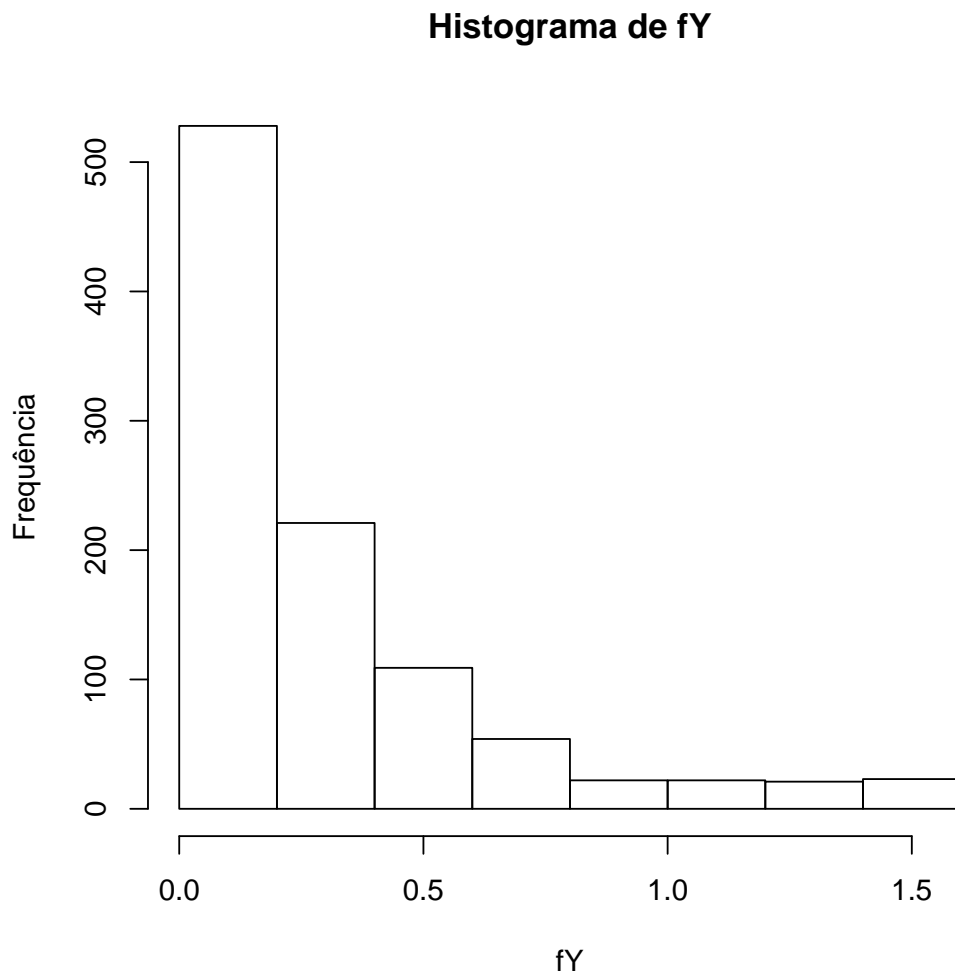
$$f_Y(y) = -(\lambda e^{-\lambda y^{\frac{1}{p}}}) \frac{1}{p} y^{\frac{1-p}{p}}$$

Para demonstrar a transformação se usará $\lambda = 1$ e $p = 3$

```
> set.seed(236)
> lambda <- 1
> p <- -3
> X <- rexp(n=1000,rate=lambda)
> Ytrans <- function(y,rate=lambda,ep=p){
+   return <- -rate*exp(-rate*y^(1/ep))*(1/ep)*y^((1-p)/p)
+ }
> fX <- dexp(X,rate=lambda)
> fY <- Ytrans(X)
> hist(fX,ylab="Frequência",main="Histograma de fX")
```



```
> hist(x=fY,ylab="Frequência",main="Histograma de fY")  
>
```



3. $X \sim U(0, 1)$, transformar em $Y = aX + b$

A função de distribuição uniforme tem por expressão

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

Isto a limita ao intervalo $[a, b]$ para indicada transformação

$$Y = g(X) = aX + b$$

$$g^{-1}(Y) = X = \frac{a}{Y} - b$$

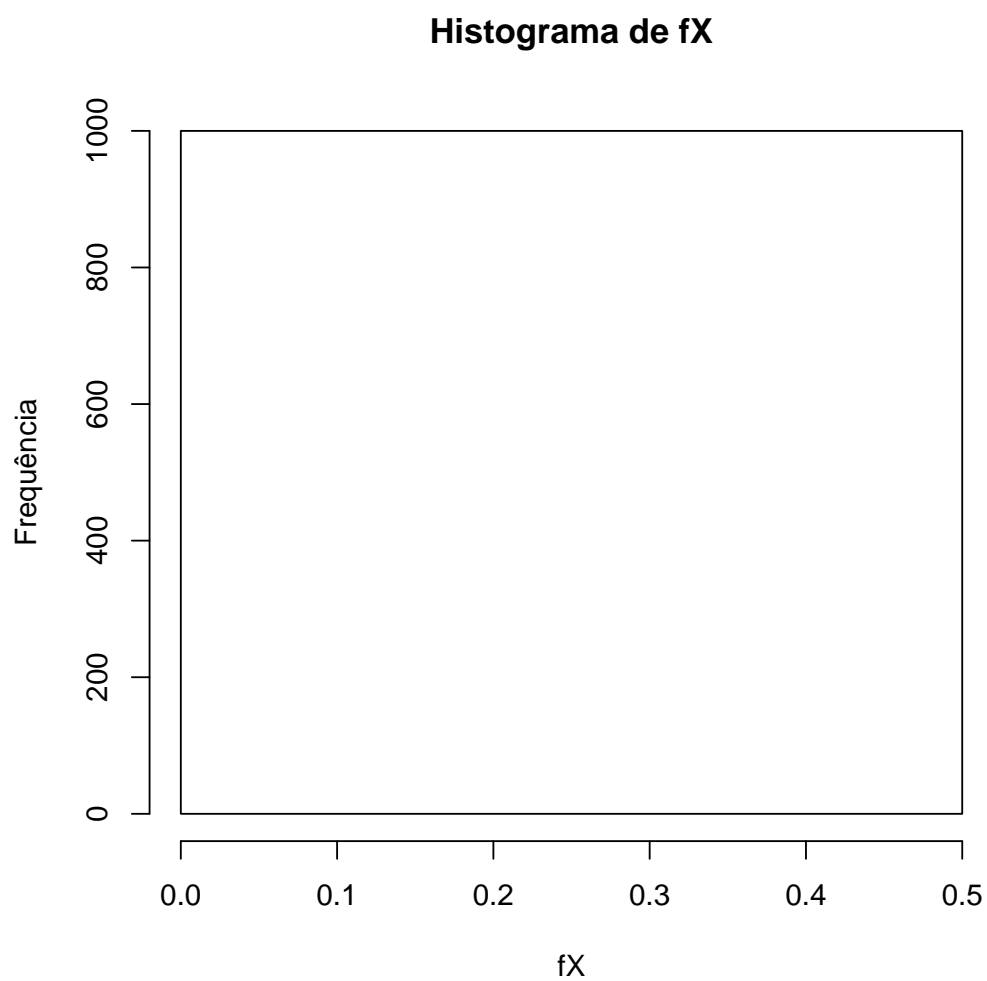
$$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{a}{y} - b \right) = -ay^{-2}$$

Usando o resultado final da equação 6

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = f_X\left(\frac{a}{y} - b\right)(-ay^{-2})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{b-a}(-ay^{-2}) = -\frac{a}{y^2(b-a)}$$

```
> set.seed(236)
> a <- 1
> b <- 3
> X <- runif(n=1000,min=a,max=b)
> Ytrans <- function(y,min=a,max=b){
+   return <- -min/((y^2)*(max-min))
+ }
> fX <- dunif(X,min=a,max=b)
> fY <- Ytrans(X)
> hist(fX,ylab="Frequência",main="Histograma de fX")
```



```
> hist(x=fY,ylab="Frequência",main="Histograma de fY")  
>
```


Histograma de fY

