Transformações de Variáveis Aleatórias

Kempes J.

6 de junho de 2015

Aplicação de Transformações de Variáveis Aleatórias

Dadas as distribuições de X calcular as transformações em Y para as situações a seguir. Em cada uma gerar 1000 observações para X e transformar em 1000 observações de Y. Sobre as transformações, gerar os histogramas de f_X e f_Y.

1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, transformar em $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, $Y = \frac{\sigma}{X-\mu}$ e $Y = (\frac{X-\mu}{\sigma})^3$
2. $X \sim \varepsilon(1)$, transformar em $Y = X^p$, para $p \neq 0$
3. $X \sim U(0,1)$, transformar em $Y = aX + b$

Resolução

1 Definição de transformações de variáveis aleatórias

Transformações de variáveis aleatórias são procedimentos que envolvem a passagem de uma variável aleatória para outra. Quando se modela um problema usando um variável aleatória X sobre um espaço amostral A pode-se não chegar a análise necessária, precisando que haja um mapeamento no espaço amostral B, apropriado a análise. Para isso define-se uma variável aleatória Y, que é uma transformação de X para incidir sobre B, sendo Y inversível.

Com isso

$$Y = g(X) \tag{1}$$

Ou

$$X = g^{-1}(Y) \tag{2}$$

Considerando que X é uma variável aleatória contínua Y também o será. X e Y possuem funções de distribuição acumulada $F_X(x)$ e $F_Y(y)$, além de funções de distribuição $F'_X(x)$ e $F_Y(y)$.

Pela definição de função de distribuição acumulada

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{Y \leq y\} \tag{3}$$

Aplicando 1 no resultado de 3 e tendo X crescente, tem-se

$$\mathbb{P}\{g(X) \leq y\} = \mathbb{P}\{X \leq g^{-1}(Y)\} \tag{4}$$

Mais uma vez, pela definição de função de distribuição acumuladada

$$\mathbb{P}\{X \leq g^{-1}(Y)\} = F_X(g^{-1}(Y)) \tag{5}$$

Pela definição de função de distribuição e por 3, 4 e 5

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y) \tag{6}$$

Para X decrescente e aplicando 1 no resultado de 3

$$\mathbb{P}\{g(X) \leq y\} = \mathbb{P}\{X \geq g^{-1}(Y)\} \tag{7}$$

Usando probabilidade complementar em 7

$$\mathbb{P}\{X \geq g^{-1}(Y)\} = 1 - \mathbb{P}\{X < g^{-1}(Y)\} \tag{8}$$

Pela definição de função de distribuição e por 3, 7 e 8

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = -\frac{d}{dy}F_X(g^{-1}(y)) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y) \tag{9}$$

Se X tiver comportamento crescente e decrescente pode-se generalizar 6 e 9 por

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \left| f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y) \right| \tag{10}$$

2 Resolução das transformações propostas

1. Tendo $X \sim N(\mu, \sigma)$

   A função gaussiana tem por função de distribuição

   $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

   (a) Para $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$

   $Y = g(X) = \frac{X-\mu}{\sigma}$, para $\sigma \neq 0$

   $g^{-1}(Y) = X = Y\sigma + \mu$

   $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}(y\sigma + \mu) = \sigma$

   A função gaussiana é crescente para $X \leq \mu$ e decrescente para $X > \mu$.

   $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = f_X(y\sigma + \mu)\sigma$

   $f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y\sigma+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y\sigma)^2}{2\sigma^2}}$

   $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

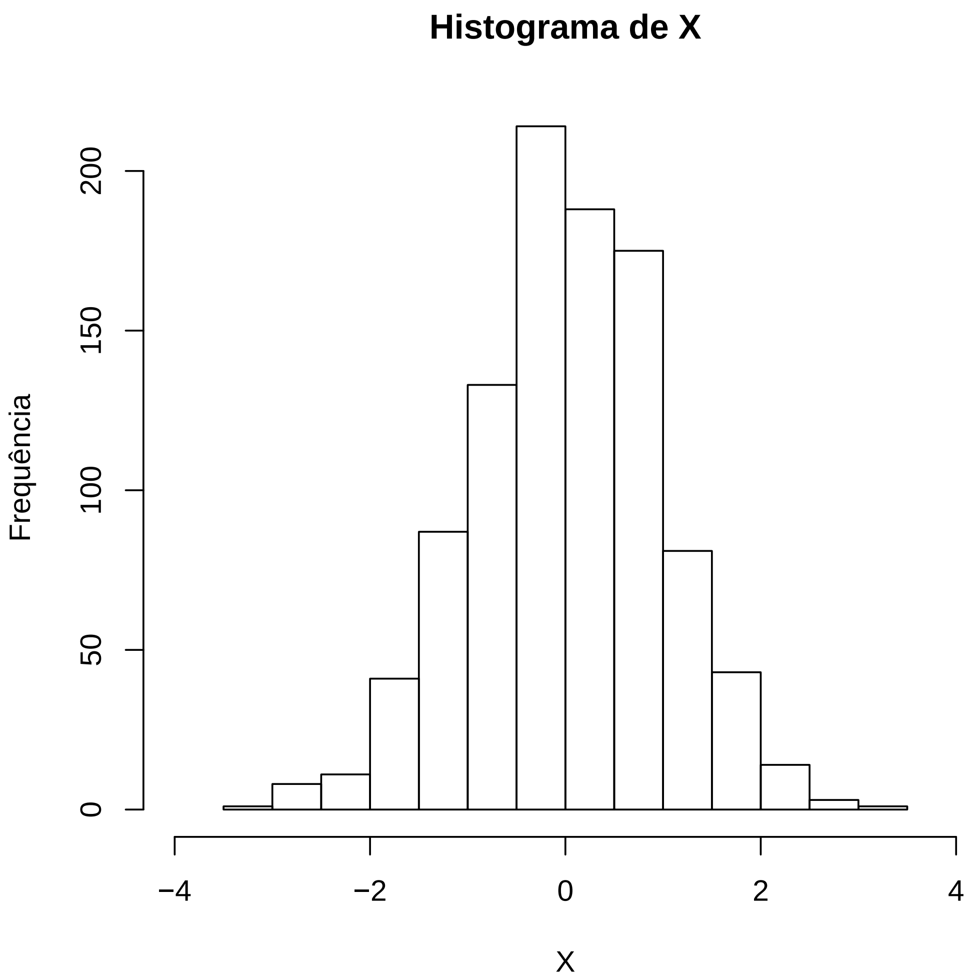
   Esta é a expressão para $X \leq \mu$, isto é, crescente. Para $X > \mu$

   $f_Y(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

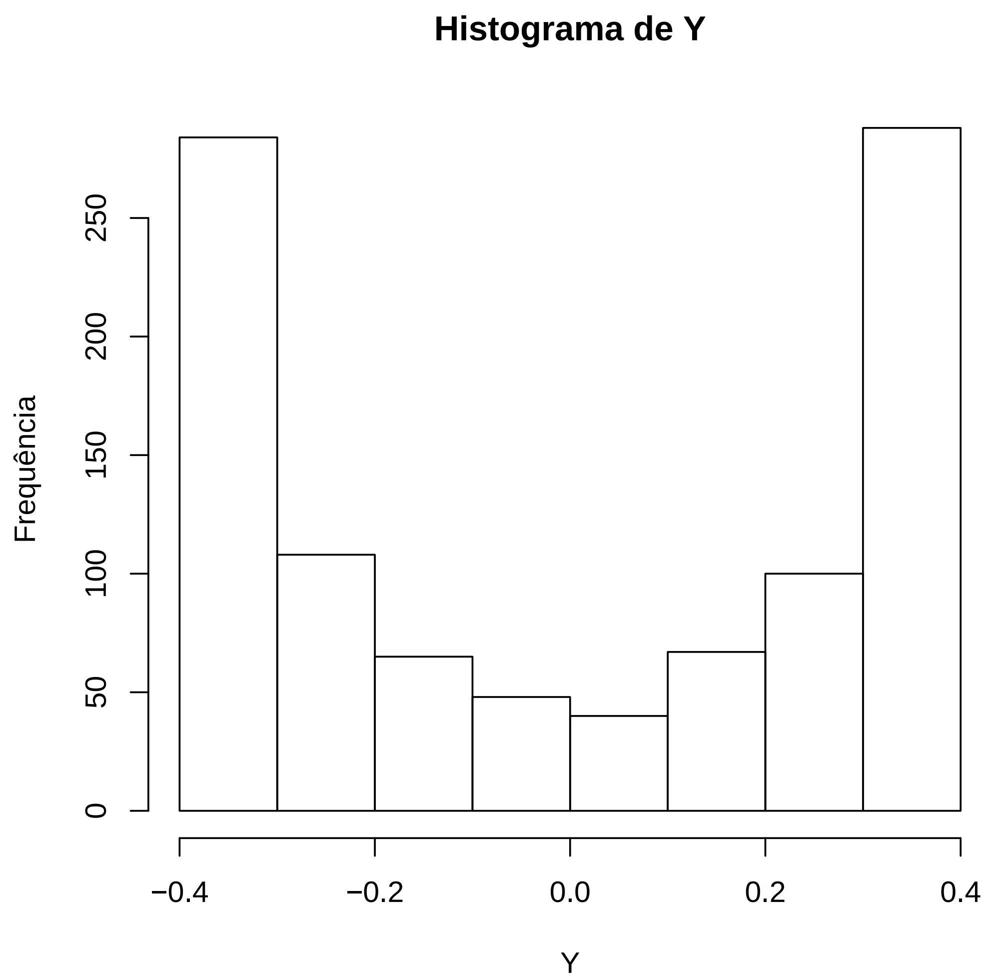
   Para demonstrar a transformação se usará $\sigma = 1$ e $\mu = 0$

```
> set.seed(236)
> sigma <- 1
> mu <- 0
> X <- rnorm(n=1000,mean=mu,sd=sigma)
> Ytrans <- function(x,mean=mu,sd=sigma){
+   yt <- (1/(sqrt(2*pi)))*exp(-((x-mean)^2)/(2*(sd^2)))
+   return <- ifelse(x<=mean,yt,-yt)
+ }
```

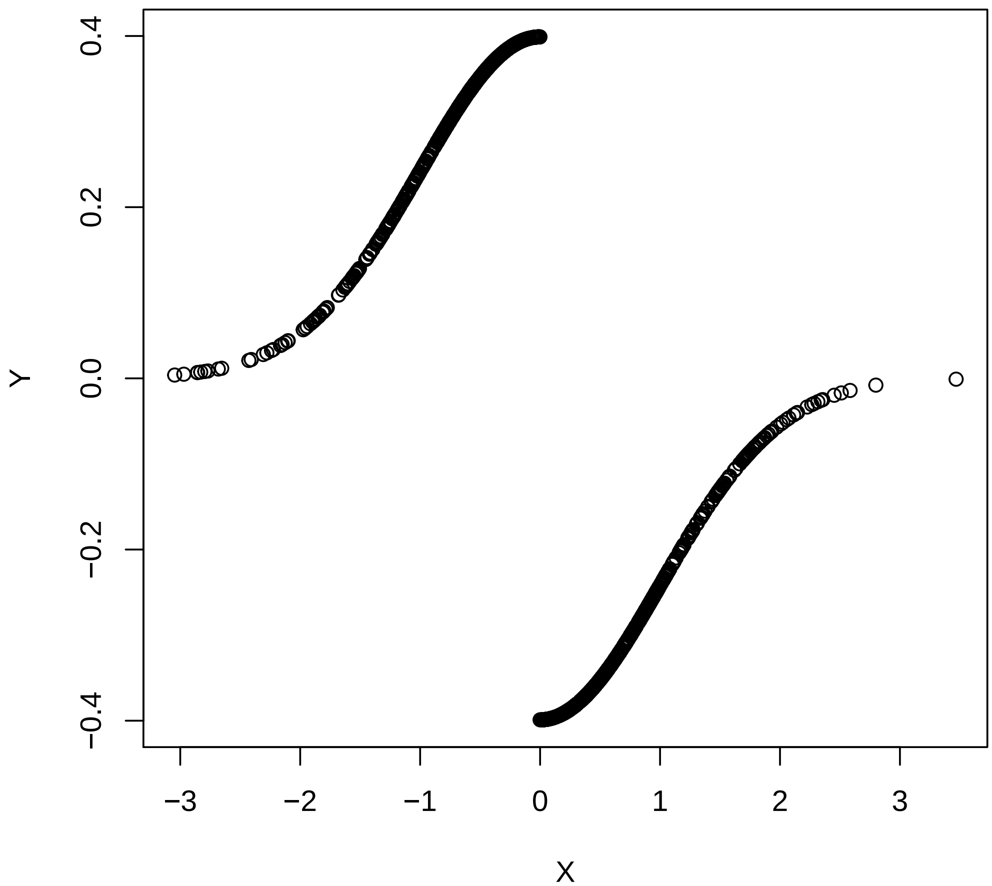
```
> Y <- Ytrans(X)
> hist(X,ylab="Frequência",main="Histograma de X",xlim=c(-4,4))
```




```
> hist(Y,ylab="Frequência",main="Histograma de Y")
>
```



> plot(X,Y)



(b) Para $Y = \frac{\sigma}{X-\mu}$

$Y = g(X) = \frac{\sigma}{X-\mu}$, para $X \neq \mu$

$g^{-1}(Y) = X = \frac{\sigma}{Y} + \mu$

$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}(\frac{\sigma}{y} + \mu) = -\sigma y^{-2}$

A função gaussiana é crescente para $X \leq \mu$ e decrescente para $X > \mu$.

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = f_X(\frac{\sigma}{y} + \mu)(-\sigma y^{-2})$

$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{\sigma}{y}+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}}(-\sigma y^{-2}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{y})^2}(-\sigma y^{-2})$

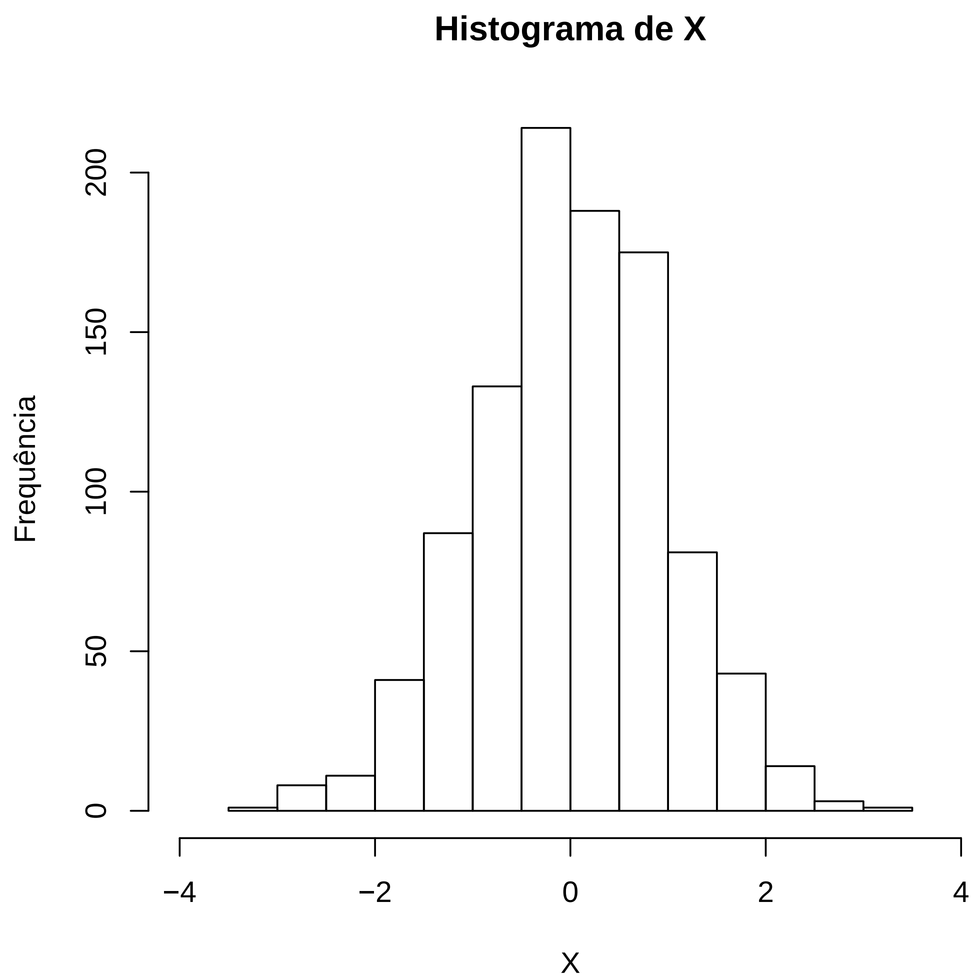
$$f_Y(y) = -y^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^{-2}} = -(\frac{\sigma}{x-\mu})^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sigma}{x-\mu})^{-2}}$$

$$f_Y(y) = -\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} = -\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

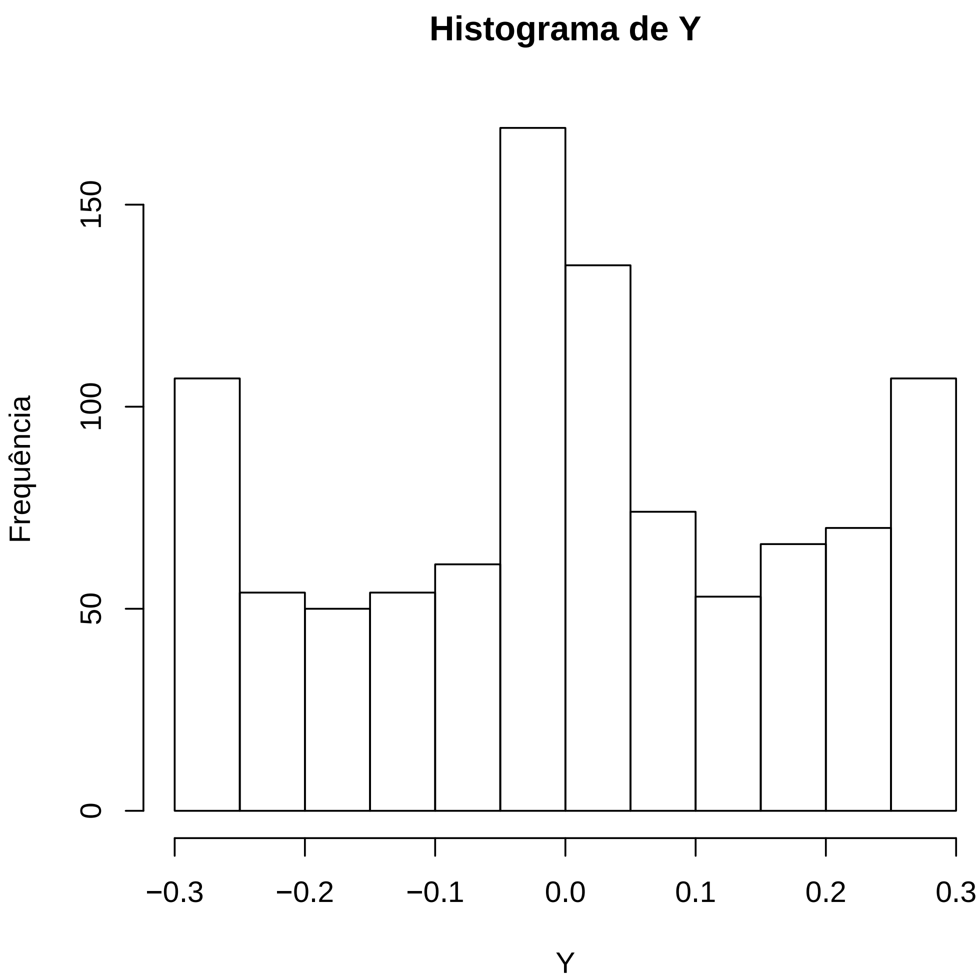
Esta é a expressão para $X \leq \mu$, isto é, crescente. Para $X > \mu$
$f_Y(y) = \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Para demonstrar a transformação se usará $\sigma = 1$ e $\mu = 0$

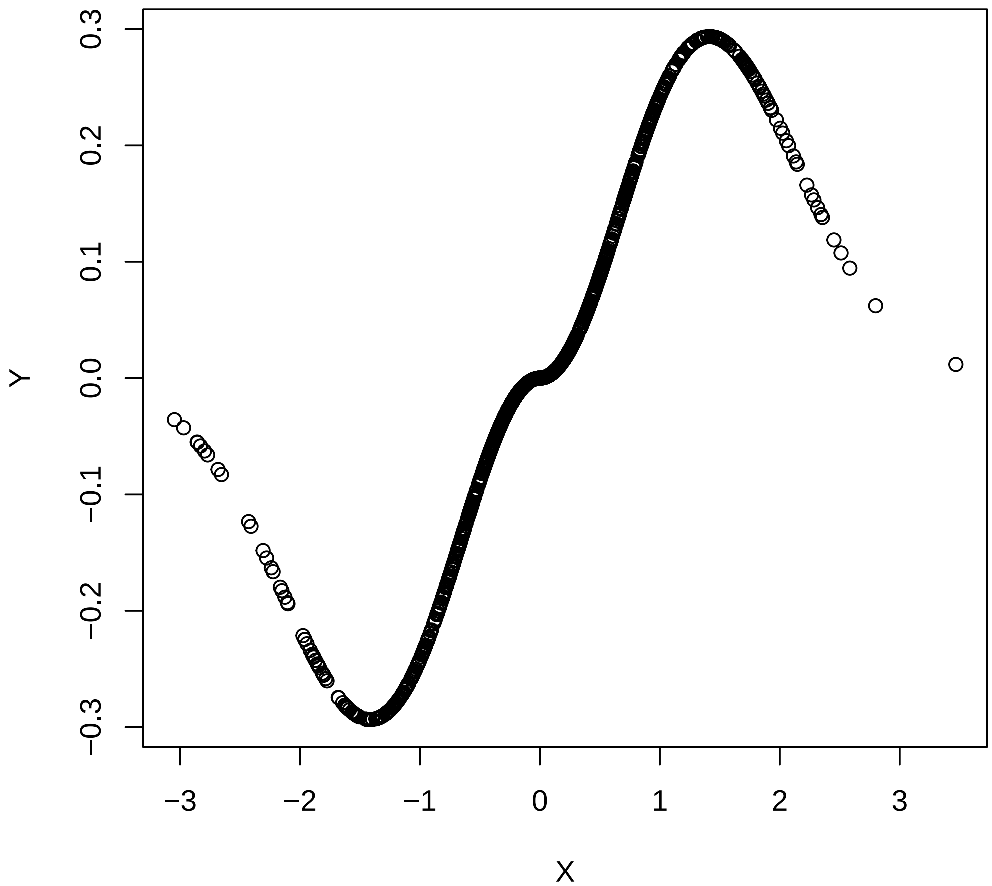
```
> set.seed(236)
> sigma <- 1
> mu <- 0
> X <- rnorm(n=1000,mean=mu,sd=sigma)
> Ytrans <- function(x,mean=mu,sd=sigma){
+   ret <- NULL
+   yt <- (((x-mean)^2)/((sd^2)*sqrt(2*pi)))*
+     exp(-(((x-mean)^2)/(2*(sd^2))));
+   if(x<mean){
+     ret <- -yt
+   }else{
+     if(x>mean){
+       ret <- yt
+     }
+   }
+   return <- ret
+ }
> Y <- sapply(X,Ytrans)
> Y<-subset(Y,Y!=0)
> hist(X,ylab="Frequência",main="Histograma de X",xlim=c(-4,4))
```




```
> hist(x=Y,ylab="Frequência",main="Histograma de Y")
>
```




```
> plot(X,Y)
```



(c) Para $Y = (\frac{X-\mu}{\sigma})^3$

$Y = g(X) = (\frac{X-\mu}{\sigma})^3$ para $\sigma \neq 0$

$g^{-1}(Y) = X = \sigma Y^{\frac{1}{3}} + \mu$

$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}(\sigma y^{\frac{1}{3}} + \mu) = \frac{1}{3}\sigma y^{-\frac{2}{3}}$

A função gaussiana é crescente para $X \leq \mu$ e decrescente para $X > \mu$.

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = f_X(\sigma y^{\frac{1}{3}} + \mu)(\frac{1}{3}\sigma y^{-\frac{2}{3}})$

$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sigma y^{\frac{1}{3}} + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} (\frac{1}{3}\sigma y^{-\frac{2}{3}}) = y^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^{\frac{2}{3}}}$

$f_Y(y) = ((\frac{x-\mu}{\sigma})^3)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}((\frac{x-\mu}{\sigma})^3)^{\frac{2}{3}}} = (\frac{x-\mu}{\sigma})^{-2} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

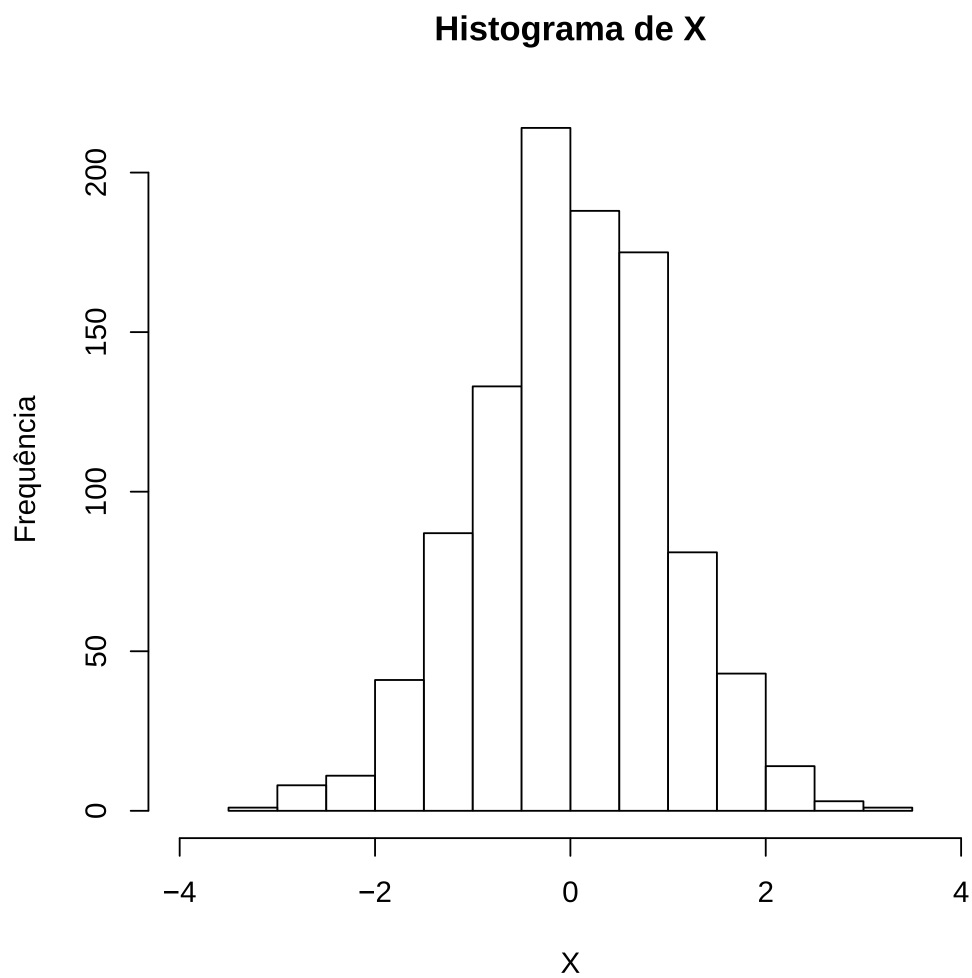
$f_Y(y) = \frac{\sigma^2}{3(x-\mu)^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

A função gaussiana é crescente para $X \leq \mu$ e decrescente para $X > \mu$.

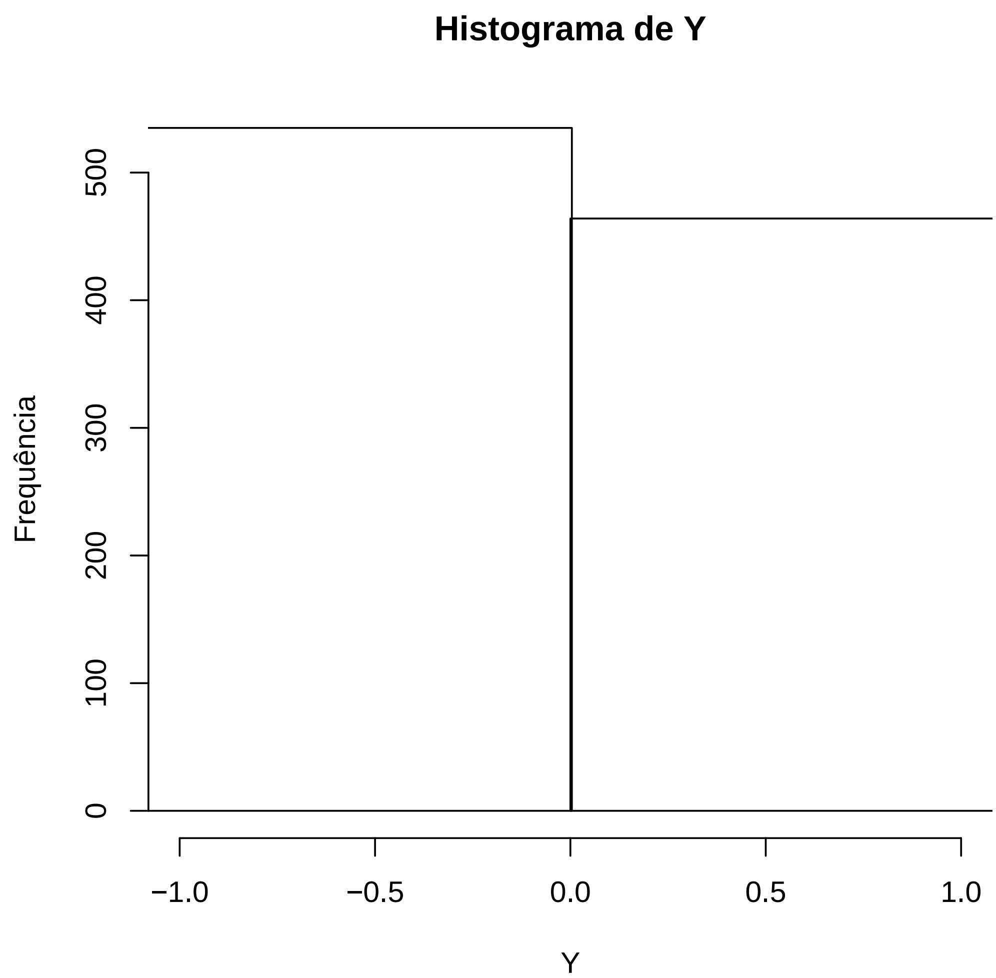
$f_Y(y) = -\frac{\sigma^2}{3(x-\mu)^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Para demonstrar a transformação se usará $\sigma = 1$ e $\mu = 0$

```
> set.seed(236)
> sigma <- 1
> mu <- 0
> X <- rnorm(n=1000,mean=mu,sd=sigma)
> Ytrans <- function(x,mean=mu,sd=sigma){
+   yt <- ((sd^2)/(3*((x-mean)^2)*sqrt(2*pi)))*exp(-(((x-mean)^2)/(2
+   return <- ifelse(x>mean,yt,-yt)
+ }
> Y <- Ytrans(X)
> hist(X,ylab="Frequência",main="Histograma de X",xlim=c(-4,4))
```

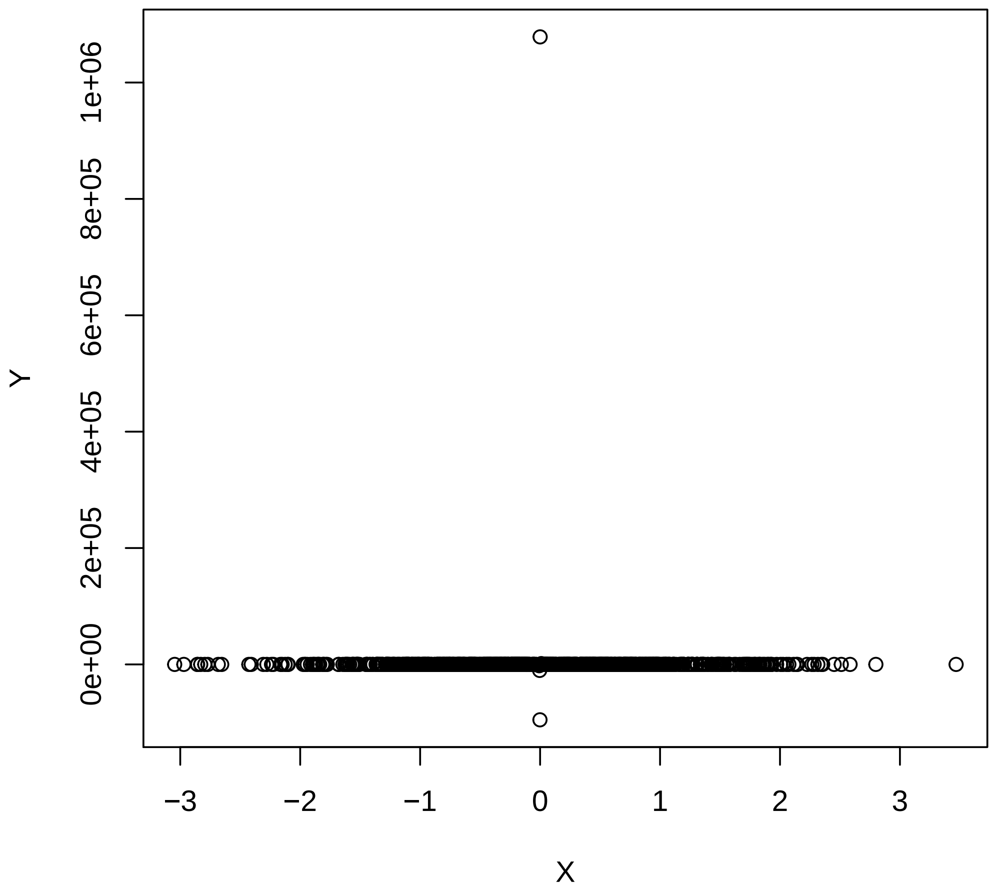



```
> hist(x=Y,ylab="Frequência",main="Histograma de Y",xlim=c(-1,1))
>
```



Histograma de Y
Frequência
0
100
200
300
400
500
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
Y


```
> plot(X,Y)
>
```



2. $X \sim \varepsilon(1)$, transformar em $Y = X^p$, para $p \neq 0$

   A função exponencial tem por função de distribuição

   $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

   Como solicitado

   $Y = g(X) = X^p$

   $g^{-1}(Y) = X = Y^{\frac{1}{p}}$

   $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy} y^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} y^{\frac{1-p}{p}}$

Como a função de distribuição exponencial é definida para $X \geq 0$ e é unicamente decrescente, pode-se indicar

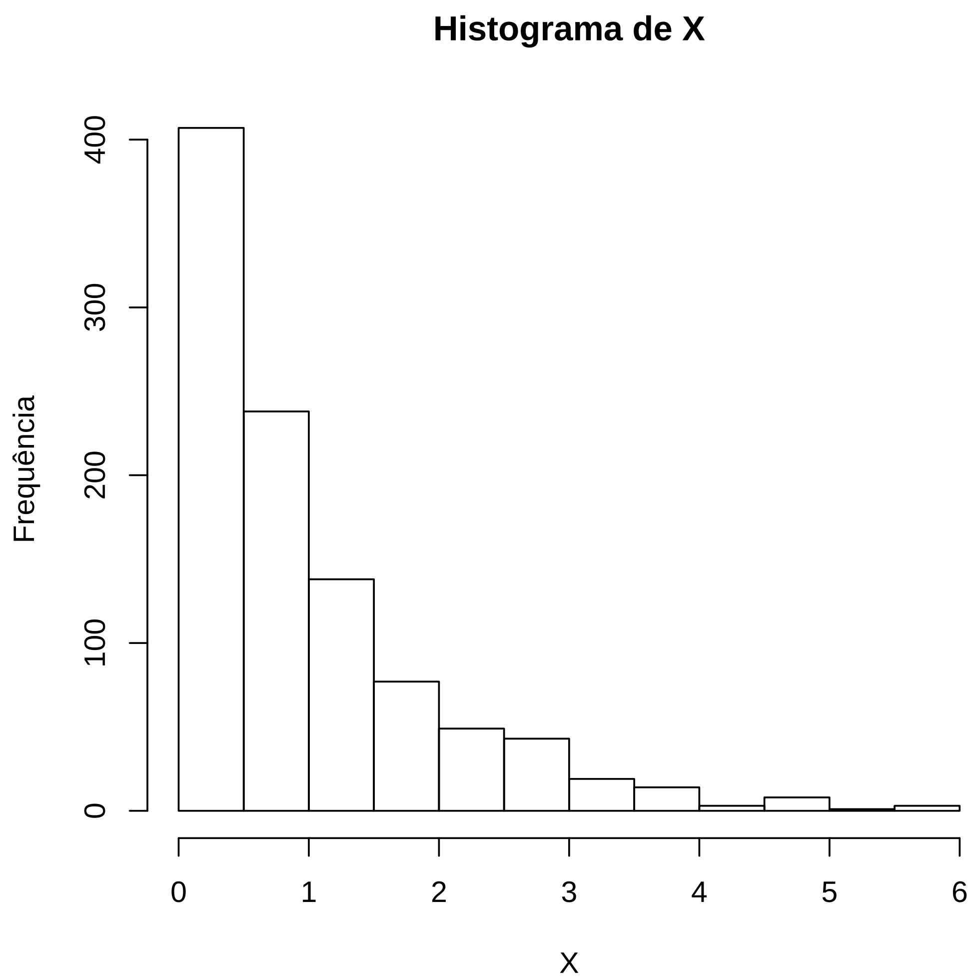
$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = -f_X(y^{\frac{1}{p}})\frac{1}{p}y^{\frac{1-p}{p}}$$

$$f_Y(y) = -(\lambda e^{-\lambda y^{\frac{1}{p}}})\frac{1}{p}y^{\frac{1-p}{p}} = -(\lambda e^{-\lambda (x^p)^{\frac{1}{p}}})\frac{1}{p}(x^p)^{\frac{1-p}{p}}$$

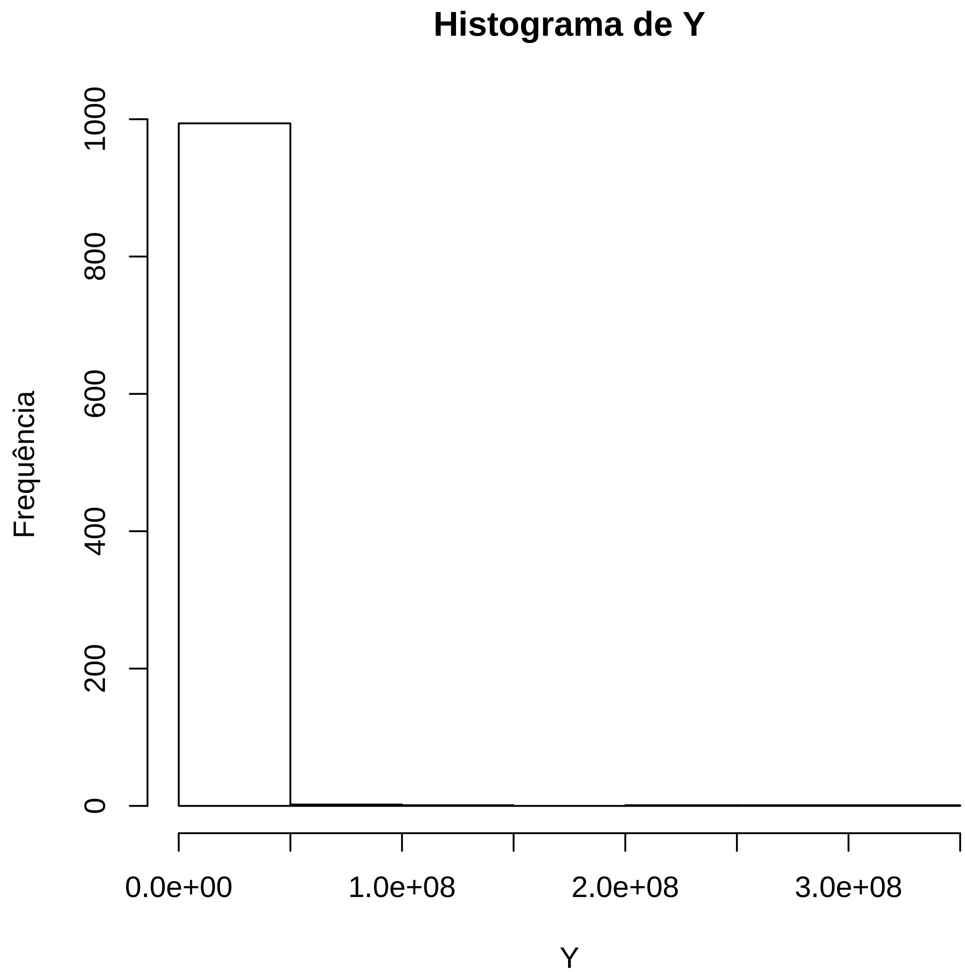
$$f_Y(y) = -\frac{x^{1-p}}{p}\lambda e^{-\lambda x}$$

Para demonstrar a transformação se usará $\lambda = 1$ e $p = 3$

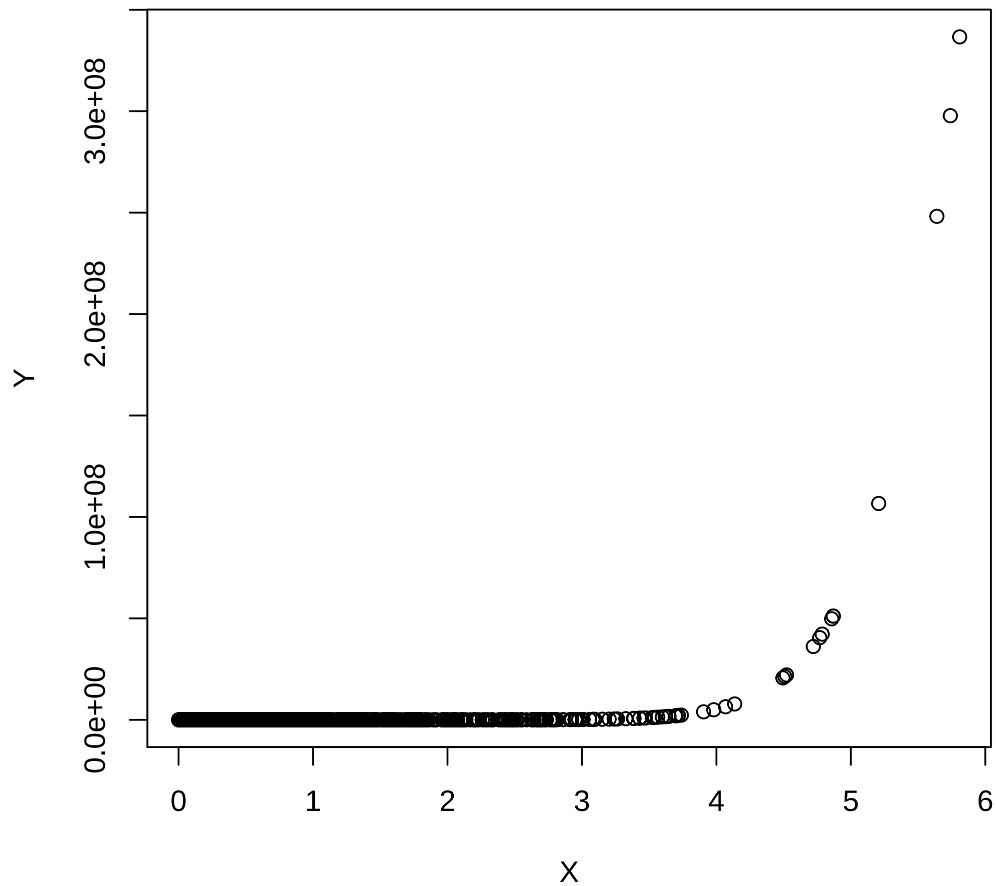
```
> set.seed(236)
> lambda <- 1
> p <- -15
> X <- rexp(n=1000,rate=lambda)
> Ytrans <- function(x,rate=lambda,ep=p){
+   return <- -((x^(1-ep))/(ep))*rate*exp(-rate*x)
+ }
> Y <- Ytrans(X)
> hist(X,ylab="Frequência",main="Histograma de X")
```




```
> hist(x=Y,ylab="Frequência",main="Histograma de Y")
>
```


Histograma de Y
Frequência
0
200
400
600
800
1000
0.0e+00
1.0e+08
2.0e+08
3.0e+08
Y

```
> plot(X,Y)
>
```



3. $X \sim U(0,1)$, transformar em $Y = aX + b$

A função de distribuição uniforme tem por expressão

$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$

Isto a limita ao intervalo $[a,b]$ para indicada transformação

$Y = g(X) = aX + b$

$g^{-1}(Y) = X = \frac{a}{Y} - b$

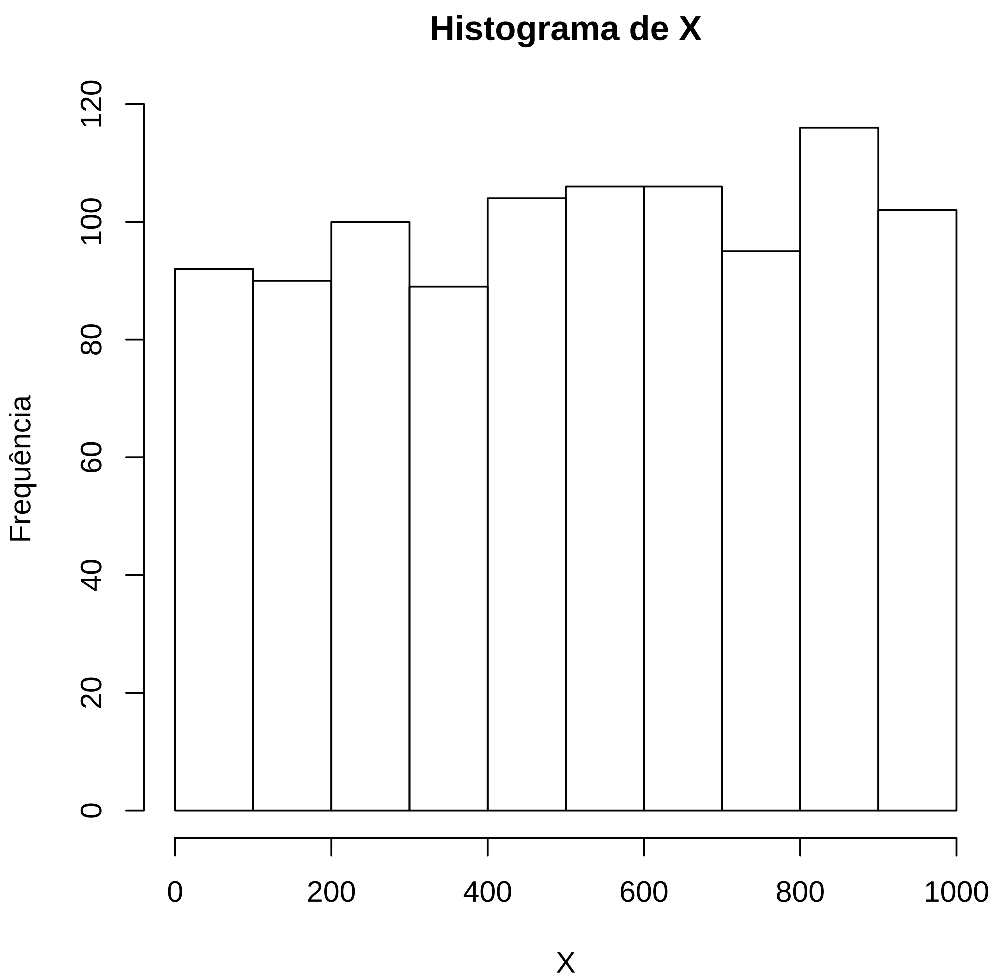
$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}(\frac{a}{y} - b) = -ay^{-2}$

Usando o resultado final da equação 6

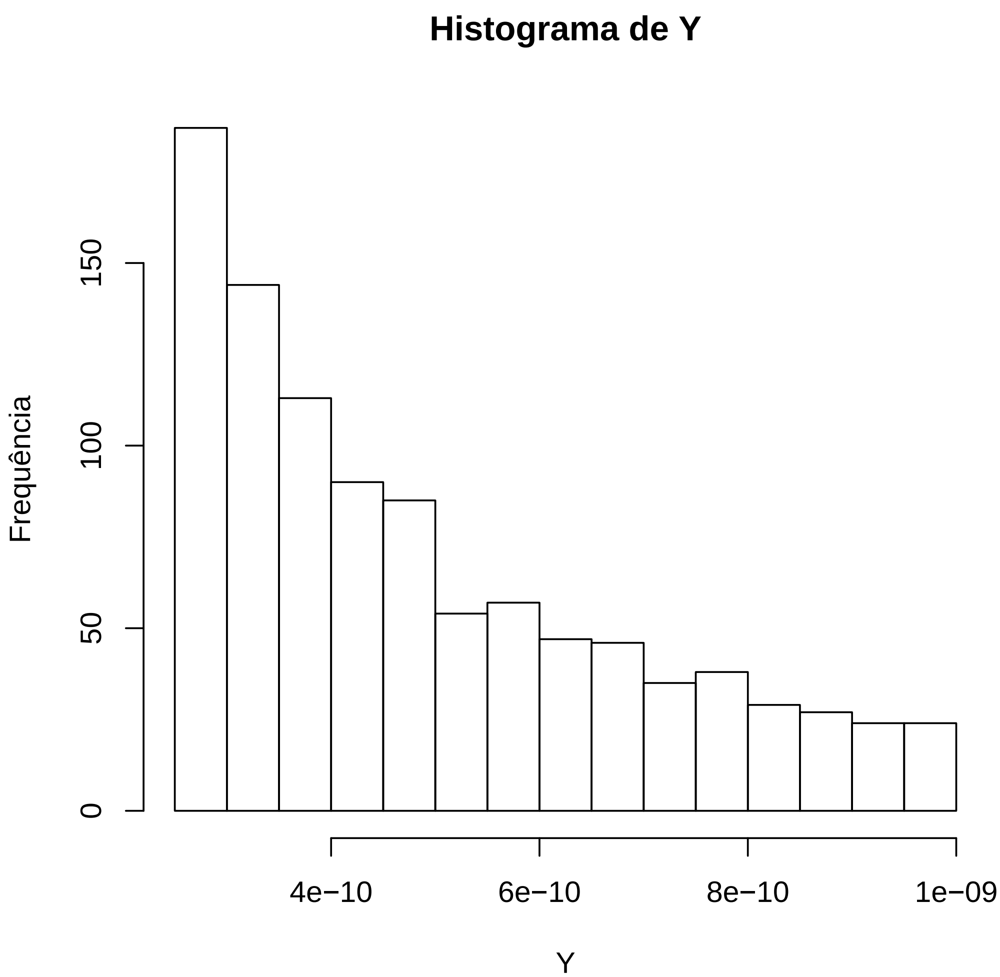
$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = f_X(\frac{a}{y} - b)(-ay^{-2})$

$f_Y(y) = \frac{1}{b-a}(-ay^{-2}) = \frac{1}{b-a}a(ax+b)^{-2}$

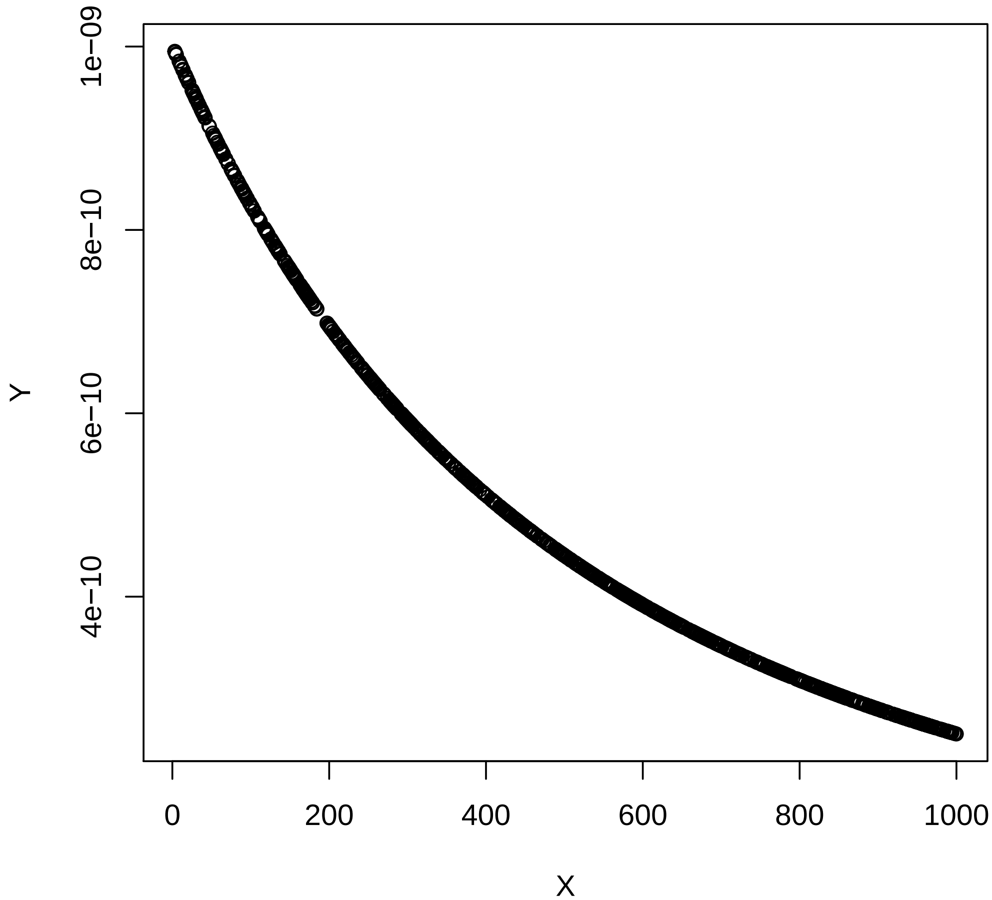
```
> set.seed(236)
> a <- 1
> b <- 1000
> X <- runif(n=1000,min=a,max=b)
> Ytrans <- function(x,min=a,max=b){
+   return <- (1/(max-min))*min*((min*x+max)^-2)
+ }
> Y <- Ytrans(X)
> hist(X,ylab="Frequência",main="Histograma de X")
```




```
> hist(x=Y,ylab="Frequência",main="Histograma de Y")
>
```




```
> plot(X,Y)
>
```


1e−09
8e−10
6e−10
4e−10
Y
0
200
400
600
800
1000
X