DS n° 03

Faites les deux exercices sur deux feuilles séparées.

Exercice 1 – Résolution d'équations

Soit f une fonction donnée. On cherche à calculer une approximation d'une solution de l'équation : $f(x) = 0$.

1. Avec la méthode de la dichotomie :
   Écrire une fonction `dicho` qui prend comme entrée la fonction f à étudier, les bornes initiales a et b, la précision ϵ et qui renvoie $\dfrac{a_n + b_n}{2}$, approximation d'une solution à ϵ près.
2. Avec la méthode de Newton :
   Écrire une fonction `Newton` qui prend comme entrée la fonction à étudier, sa dérivée, une valeur initiale de la suite x_0, la précision ϵ et qui renvoie x_n approximation de la solution.
3. Donner un avantage et un inconvénient de la méthode de Newton par rapport à la méthode de la dichotomie.

Exercice 2 – Approximation d'une intégrale

Soit f une fonction donnée. On souhaite approximer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ avec différentes méthodes.

.1 Cas où f est connue

Dans cette partie, on travaille avec une fonction f connue sur tout l'intervalle $[a, b]$. On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles du type $[x_i, x_{i+1}]$, de même longueur avec : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

1. Avec la méthode des rectangles :
   sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on approxime f par une constante.
   Coder un algorithme qui calcule une approximation de $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)dx$ avec 2019 intervalles.
2. Avec la méthode de Simpson :
   sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on approxime f par un polynôme de degré deux. Dans ce cas, l'intégrale est approximée par :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})\right)$$

   Ecrire un programme qui calcule une approximation de $\displaystyle\int_a^b f$ par la méthode de Simpson.
   (On supposera que `f`, `n`, `a` et `b` sont déjà définis dans le programme.)

.2 Avec lecture de fichiers

Dans cette partie, la fonction f n'est connue qu'en certains points, dont les coordonnées sont situées dans un fichier. Ce fichier `coordonnee.csv`, situé dans le répertoire de travail, contient une quinzaine de lignes selon le modèle suivant :

$$0.0; 1.00988282142$$

$$0.1; 1.0722126449$$

Chaque ligne contient deux valeurs flottantes séparées par un point-virgule, représentant respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point. Les points sont ordonnés par abscisses croissantes.

1. Rappeler quels sont les différents modes d'ouverture d'un fichier texte à l'aide de Python, et les différences entre ces modes.

2. Écrire une séquence d'instructions en Python permettant d'effectuer les opérations suivantes sur le fichier `coordonnee.csv` :
   Ouvrir le fichier en lecture, le lire et construire deux listes de flottants : la liste `LX` des abscisses et la liste `LY` des ordonnées contenues dans ce fichier.
3. Avec la méthode des trapèzes :
   sur chaque intervalle, on approxime f par un polynôme de degré 1.
   Ecrire une fonction **`trapeze`** qui prend comme entrée deux listes de taille $n+1$: $(x_0, \cdots x_n)$ et $(y_0, \cdots, y_n)$ et qui renvoie :
   $$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\frac{y_{i+1}+y_i}{2}$$
4. Valeur moyenne et écart-type :
   Par définition, la valeur moyenne et l'écart-type d'une fonction f sur $[x_0, x_n]$ sont donnés par :
   — valeur moyenne : $M_f = \dfrac{1}{x_n - x_0}\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$
   — écart-type : $\sigma_f = \sqrt{\dfrac{1}{x_n - x_0}\displaystyle\int_{x_0}^{x_n}(f(x)-M_f)^2dx}$
   Ecrire un programme qui calcule une valeur approximative de σ_f. (On pourra faire appel à la fonction `trapeze`)