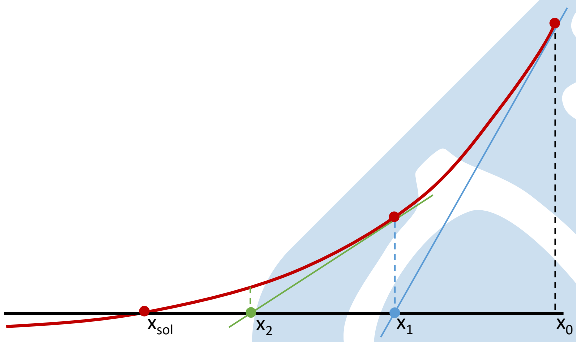
Méthode de Newton

Renaud Costadoat
Lycée Dorian

Développement de Taylor

Hypothèses de départ:

- f est continue sur l'intervalle $[a, b]$,
- f s'annule en un unique point de $[a, b]$, que l'on notera x_{sol},
- f une fonction dérivable sur $[a, b]$,
- f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.



Definition

Théorème du développement de Taylor à l'ordre 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $u \in I$. Le développement de Taylor à l'ordre 1 de f est donné par:

$$f(x) = f(u) + f'(u).(x - u) + o(x - u)$$

Géométriquement, lorsqu'on néglige le reste, le développement de Taylor donne l'équation de la tangente en u. L'intersection de cette tangente avec l'axe $(O, \overrightarrow{x})$ tend vers x_{sol}.

Démarche

Notons $\Delta(x)$ cette équation, l'abscisse c de l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses est donnée par la résolution de $\Delta(c) = 0() \Leftrightarrow f(u) + f'(u).(c-u) = 0 \Leftrightarrow c = u - \dfrac{f(u)}{f'(u)}$.

Pseudo code:

1. Soit x_0, un réel dans I,
2. La tangente à Cf au point d'abscisse x_0, a pour équation $y = f'(x_0).(x-x_0) + f(x_0)$,
3. x_1 est le réel vérifiant: $f'(x_0).(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0$, ainsi $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$,
4. Récurrence: le réel x_n étant construit, calculer $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Conditions d'arrêt

- lorsque l'écart entre deux termes consécutifs est inférieur à une valeur définie,
- lorsque l'image du milieu de notre intervalle par f est inférieur à une valeur définie,
- lorsque le nombre d'itérations est supérieur à un nombre défini.

Le dernier terme x_n sera une approximation de x_{sol}.

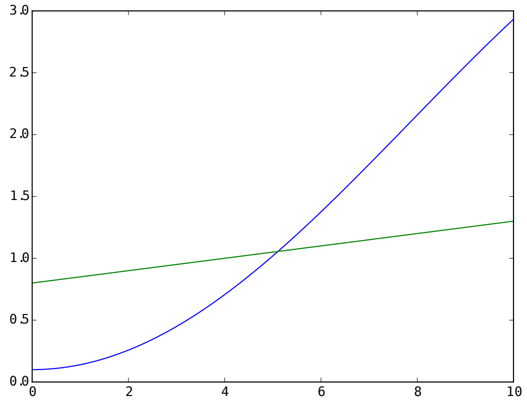
Code python

Proposer le code python de la fonction `methode_Newton` .

Exercice

Déterminer en utilisant Python le point d'intersection des deux fonctions suivantes sur l'intervalle $[0, 10]$.

- $f_1(x) = -2.cos(\frac{x}{5}) + 2,1$,
- $f_2(x) = 0,05.x + 0,8$.



Comparaison des deux méthodes

Deux critères permettent de déterminer l'efficacité des deux méthodes.

- **Rapidité de convergence:** Dans les hypothèses où les deux méthodes convergent, la méthode de Newton converge plus « rapidement ». Exemple dans le cas précédent `(résultat, nombre d'itérations) :`

```
(5.1059522149400793, 5)
(5.105952024459839, 25)
```

- **Hypothèses et fonctions étudiées:** Sur ce critère, la méthode est moins contraignante, de plus, il n'est pas nécessaire avec la méthode de la dichotomie de déterminer la dérivée de la fonction.