

DS Informatique n°3 – Partie écrite. Durée : 1 heure

Lorsqu'on écrit un code Python : faire attention à ce que les indentations soient visibles sur la copie ; commenter le code de façon à expliquer les grandes étapes de l'algorithme en ajoutant un commentaire en fin de ligne de code après le symbole `#`.

Exercice 1

On considère la fonction suivante :

```
def algorithme(f,df,x0,n):  
    x=float(x0)  
    for i in range(1,n+1):  
        x=x-f(x)/df(x)  
    return(x)
```

- 1)
 - (a) Déterminer en fonction de n la complexité de l'algorithme en supposant que les appels de f et df valent une opération chacun.
 - (b) Quel est le nom de l'algorithme que code la fonction `algorithme` ? A quoi sert-il ?
 - (c) Donner un avantage et un inconvénient de cette méthode.
- 2) On va se servir de cette fonction pour calculer une approximation de $\sqrt{2}$. On prendra : $f(x) = x^2 - 2$ et $df(x) = 2x$.
 - (a) Donner en fonction de la valeur de x_0 le comportement de l'algorithme.
 - (b) Que renvoie `algorithme(f,df,1,0)`, `algorithme(f,df,1,1)`, `algorithme(f,df,1,2)` ? On donnera les résultats sous forme d'une fraction puis sous forme d'un nombre décimal avec 4 chiffres significatifs.
- 3) On veut écrire un algorithme utilisant la méthode de la dichotomie avec comme critère d'arrêt un nombre donné d'itérations.
 - (a) Écrire en python une fonction `dichotomie` qui prend comme entrée la fonction à étudier, les deux extrémités a et b de l'intervalle de départ et un nombre d'itérations n et qui renvoie c approximation de la solution.
 - (b) Donner un avantage et un inconvénient à cette méthode.
- 4) On reprend $f(x) = x^2 - 2$.
 - (a) Que renvoie `dichotomie(f,0,2,0)`, `dichotomie(f,0,2,1)`, `dichotomie(f,0,2,2)` ? On donnera les résultats sous forme d'une fraction puis sous forme d'un nombre décimal avec 4 chiffres significatifs.
 - (b) On donne comme valeur approximative de $\sqrt{2}$ à 11 chiffres significatifs :

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135624$$

Pour un nombre d'itérations égal à 0 puis 1 puis 2, donnez le nombre de décimales exactes obtenues avec la fonction `algorithme` et avec la fonction `dichotomie`. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 2 : pivot de Gauss

- 1) Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Donner en français les étapes de l'algorithme du pivot de Gauss permettant de résoudre le système $Ab = c$. On admettra que le système est un système de Cramer.
- 2) On considère une matrice carrée de taille $n : A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Ecrire en python une fonction `ligneRef` qui prend comme entrée une matrice A et un numéro de ligne i et qui renvoie le numéro de la ligne où se trouve le terme le plus grand en valeur absolue entre $a_{i,i}, \dots, a_{n,i}$.
- 3) Le rang d'une matrice est donné par le nombre de pivots non nuls. Ecrire une fonction `rang` qui prend comme entrée une matrice C carrée de taille $n \times n$ et qui renvoie le rang de la matrice. (on pourra utiliser la fonction `ligneRef`)
- 4) On considère la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec python, `rang(C)` renvoie 3. Qu'en pensez-vous ?