

DS n° 03 – DS03

Les codes en python doivent être commentés et les indentations dans le code doivent être visibles.

I Exercice – Traduction et compréhension d'un algorithme

- À l'aide des opérateurs `//` et `%` écrire en Python :
 - une fonction `ent(x)` renvoyant la partie entière d'un nombre réel x positif ;
 - une fonction `par(n)` renvoyant 0 si un entier naturel n est pair et 1 sinon.
- On considère l'algorithme suivant, qui s'applique à deux entiers naturels i et j et utilise une variable auxiliaire t qui porte le résultat final :

Algorithme 1 : Algorithme à implanter en Python.

Données : i et j deux entiers naturels
Résultat : t

```

1  $t \leftarrow 0$ 
2 tant que  $i \geq 1$  faire
3   si par(i) = 1 alors
4      $t \leftarrow t + j$ 
5   sinon
6     Ne rien faire
7   fin
8    $j \leftarrow j \times 2$ 
9    $i \leftarrow \text{ent}(i/2)$ 
10 fin
```

Écrire en Python une fonction `mystere(i,j)` traduisant l'algorithme. On considérera les fonctions `ent(n)` et `par(n)` connues et on pourra les utiliser directement dans le code proposé.

- On exécute `mystere(8,9)`. Proposer sous forme de tableau à trois colonnes les valeurs prises pas à pas par les trois entiers (i, j, t) à la fin de chacune des itérations, chaque ligne représentant une itération de la boucle itérative utilisée dans le code.
- Même question pour `mystere(9,8)`.
- Dans le cas général, quel est le résultat final retourné par l'algorithme ?
- On se propose de prouver le résultat précédent en étudiant le terme $i \times j + t$. Pour cela :
 - prouver que ce terme est égal à $i \times j$ au début de la première itération ;
 - prouver que la propriété précédente reste vraie à la fin d'une itération quelconque (invariance) ;
 - prouver que le résultat final de l'algorithme est bien le résultat attendu.

II Question de cours – Méthode des rectangles

On calcule l'intégrale numérique en réalisant une somme de surfaces de rectangles. Le domaine d'intégration est découpé en intervalles et on fait comme si la fonction restait constante sur chaque intervalle avec comme valeur sa valeur au premier point de l'intervalle.

On souhaite approximer la valeur de $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x) dx$, grâce à la méthode précédente, en utilisant 2000 valeurs de la fonction pour des valeurs d'angle régulièrement espacées.

Proposer un code en Python calculant la valeur approchée recherchée et l'affichant à l'écran.

III Exercice – Travaux pratiques

1. On considère la suite définie par récurrence comme suit : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

Écrire en Python un programme qui calcule les dix premiers termes de la suite et les affiche tous à l'écran.

2. On considère maintenant la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Écrire un programme qui permet de calculer les dix premiers termes de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$.