

Intégrales et tracés de courbes

I Couple de freinage

Les disques de freinage sont utilisés sur les véhicules automobiles mais aussi sur certains vélos qui ont besoin de hautes performances. Le fonctionnement consiste à presser sur un disque métallique une ou plusieurs plaquettes et de dissiper l'énergie cinétique par des frottements.

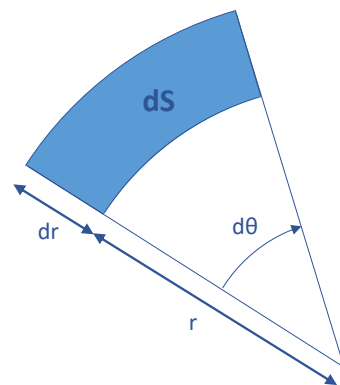


Le cas suivant présente un disque en contact avec une plaquette dont les caractéristiques sont les suivantes :

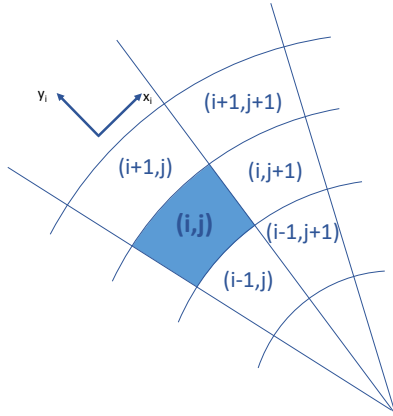
- Rayon intérieur : $R_{int} = 10$ cm,
- Rayon extérieur : $R_{ext} = 15$ cm,
- Angle de la plaquette : $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad,
- Le coefficient de frottement avec le disque est $f = 0,3$.

La liaison ne peut pas être modélisée par une liaison appui plan car l'effort du contact n'est pas homogène sur toute la surface. C'est pour cela que nous allons considérer que la liaison est constituée d'une infinité de contacts ponctuels. La liaison équivalente appui plan sera obtenue en ajoutant les torseurs des liaisons ponctuelles, celles-ci étant en parallèle.

Afin d'effectuer une étude numérique, nous découpons la surface de contact en plusieurs surfaces dS afin d'effectuer un calcul infinitésimal. L'angle θ sera décomposé en Nt angles $d\theta$ et la distance $(R_{ext} - R_{int})$ sera décomposée en Nr distances dr .



Question 1 : Écrire dr en fonction de R_{ext} , R_{int} et Nr . Écrire $d\theta$ en fonction de θ et Nt .



Afin de parcourir, l'ensemble de $Nt \times Nr$ surfaces dS ainsi créées, nous allons donner à chacune d'entre elles des coordonnées (i, j) , comme le montre la figure ci-contre. (i et j démarrent à 0).

Question 2 : Écrire dS en fonction de R_{int} , i , dr et $d\theta$.

Le coefficient $f = \frac{p}{q}$ permet de modéliser les frottement entre le disque et une plaquette. Il permet de lier l'effort normal et l'effort tangentiel qui s'appliquent entre les deux pièces. La force élémentaire normale exercée sur la surface (i, j) peut alors s'écrire $dF_n = P.dS$, avec P la pression exercée entre le disque et la plaquette. L'effort tangentiel s'écrit alors $dF_t = f.P.dS$.

Soit M le centre de la surface (i, j) , le torseur en un point M d'une liaison ponctuelle, avec frottement, entre le disque et la plaquette s'écrit s'écrit :

$$\{T_{D/P}\} = \begin{Bmatrix} dF_t & 0 \\ 0 & 0 \\ dF_n & 0 \end{Bmatrix}_{M(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z})}$$

Question 3 : Soit O le centre du disque, écrire le vecteur \vec{OM} en fonction de R_{int} , i et dr . En déduire le moment de force projeté autour de \vec{z} , lorsque l'action dF_t est ramenée au point O : $(\vec{OM} \wedge d\vec{F}_t) \cdot \vec{z}$.

Le couple de freinage est généré par l'ensemble de ces surfaces élémentaires dS , il faut donc intégrer ces moments sur toute la surface de contact.

Remarque : Attention, il y a une plaquette de frein de chaque côté du disque.

Dans un premier temps, la pression sera considérée constante sur toute la surface du disque : $P_0 = 0,05 \text{ MPa}$. Faire le calcul pour $Nt = Nr = 100$ et $Nt = Nr = 1000$.

Question 4 : Déterminer le couple de freinage généré par ce frein à disque.

Question 5 : Un calcul littéral donne $Cf = 2.\theta.f.P.\frac{R_{ext}^3 - R_{int}^3}{3}$. Que constatez-vous compte tenu des résultats de la question 4 ?

Dans la suite, la pression ne sera plus constante mais liée au rayon du point central de la surface par une formule de la forme : $P = a.r + b$, sachant que sur le rayon intérieur, la pression sera égale à 80 % de P_0 et sur le rayon extérieur 120 % de P_0 .

Question 6 : Déterminer la pression P en fonction de r et en déduire le couple de freinage généré par ce frein à disque.

II La course du coureur

Un coureur fait un exercice de course fractionné. C'est à dire qu'il va tenter de courir à une vitesse de :

1. 9 km h^{-1} pendant trois minutes,
2. 14 km h^{-1} pendant trois minutes,
3. 9 km h^{-1} pendant trois minutes,
4. 14 km h^{-1} pendant trois minutes,
5. 9 km h^{-1} pendant trois minutes,
6. 14 km h^{-1} pendant trois minutes.

Le fichier `Course.txt` renvoie en première colonne le temps à partir du départ de la course et la deuxième colonne la vitesse.

Rappel : La fonction `np.array=asarray(liste)` de la bibliothèque Numpy permet de convertir une `liste` en `array`.

Question 1 : Tracer la vitesse du coureur en fonction du temps.

Question 2 : Calculer le vecteur `position` qui définit la distance parcourue par le coureur à chaque instant. Déterminer la distance parcourue à la fin de l'entraînement.

Question 3 : Tracer le vecteur `position`. L'allure de la courbe vous paraît-elle cohérente?

III Correction

III.1 Couple de freinage

Question 1 : $dr = \frac{R_{ext} - R_{int}}{Nr}, d\theta = \frac{\theta}{Nt}$

Question 2 : $ds = (R_{int} + dr * (i + \frac{1}{2})) * dr * d\theta$

Question 3 : $\overrightarrow{OM} = (R1 + dr * (i + \frac{1}{2})) \cdot \overrightarrow{y_i}$
 $(\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{F_t}) \cdot \overrightarrow{z} = \left[(R1 + dr * (i + \frac{1}{2})) \cdot \overrightarrow{y_i} \wedge dS \cdot f \cdot P \cdot \overrightarrow{x_i} \right] \cdot \overrightarrow{z} = -(R1 + dr * (i + \frac{1}{2})) \cdot dS \cdot f \cdot P.$

Question 4 : [3]

```
theta=np.pi/2. R2=0.15 R1=0.1 fr=0.3
```

```
Nt=1000 Nr=1000 dr=(R2-R1)/Nr dt=theta/Nt
```

```
P0=0.05*10**6 C1=0
```

```
for i in range(Nr) : for j in range(Nt) : P=P0 ds=(R1+dr*(i+1/2.))*dr*dt F=fr*ds*P C1=C1-2*F*(R1+dr*(i+1/2.))
print(C1)
```

```
C2=-2*theta*fr*P*(R2**3-R1**3)/3. print(C2)
```

Question 5 : En augmentant Nt et Nr , le résultat tend vers le calcul littéral. Ceci s'explique car la diminution du pas d'intégration améliore sa précision.

Question 6 : [3]

```
theta=np.pi/2. R2=0.15 R1=0.1 fr=0.3
```

```
Nt=1000 Nr=1000 dr=(R2-R1)/Nr dt=theta/Nt
```

```
a=(0.4*P0)/(R2-R1) b=0.8*P0-R1*a C1=0
```

```
for i in range(Nr) : for j in range(Nt) : P=a*(R1+dr*(i+1/2.))+b ds=(R1+dr*(i+1/2.))*dr*dt F=fr*ds*P
C1=C1-2*F*(R1+dr*(i+1/2.))
print(C1)
```

III.2 La course du coureur

Question 1, 2 et 3 : [3]

```
def lireFichier(fichier) : lignes = [line for line in open(fichier,'r')] result=[] for element in lignes : temps,pace
= map(float,element.split()) result.append((temps,pace)) return result
```

```
def convertms(v) : return v/3.6
```

```
vitesse = np.asarray(lireFichier("Course.txt")) plt.plot(vitesse[:,0],vitesse[:,1],"bo-")
```

```
pos=np.zeros(len(vitesse[:,0]))
```

```
for i in range(len(vitesse[:,0])-1) : pos[i+1] = pos[i] + convertms(vitesse[i+1,1])*(vitesse[i+1,0]-vitesse[i,0])
```

```
print(pos[len(vitesse[:,0])-1]/1000.)
```

```
plt.plot(vitesse[:,0],vitesse[:,1],"bo-") plt.plot(vitesse[:,0],position,"r")
```

Question 3 : L'allure de la courbe paraît cohérente car les différentes vitesses de course se retrouvent sur la pente de la position.