

## TP n° 07 – Résolution d'équations simples

### I Résolution d'équations du second ordre

L'objectif est de résoudre les équations de type  $(E): ax^2 + bx + c = 0$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels, (donc seront des flottants dans vos programmes).

**Exercice 1.** Dans cet exercice, on suppose que  $a \neq 0$ .

Écrire une fonction `solution(a,b,c)` qui renvoie les solutions de  $(E): ax^2 + bx + c = 0$  et précise la nature de ses solutions. Par exemple :

---

```
>>> solution(2,-6,4)
Deux solutions reelles  x1=1.0 et x2=2.0
>>> solution(4,-4,1)
Une solution double  x=0.5
>>> solution(1,-2,2)
Deux solutions complexes  x1=1+1j et x2=1-1j
```

---

**Exercice 2.** Dans cet exercice,  $(E)$  n'est pas forcément une équation du second degré :  $a$  peut être nul. Ecrire une fonction `solution2` pour prendre en compte tous les cas. (on commencera par construire sur feuille un organigramme.)

Par exemple :

---

```
>>> solution2(1,-3,2)
Deux solutions reelles : x1=1.0 et x2=2.0
>>> solution2(0,2,0)
Une solution reelle : x=0.0
>>> solution2(0,0,1)
Pas de solution
>>> solution2(0,0,0)
Une infinite de solutions : tous les reels
```

---

**Exercice 3.** 1. Résolvez à la main l'équation suivante :

$$(E_5): x^2 + (1 + 2^{-50})x + 0,25 + 2^{-51} = 0$$

2. Résolvez cette équation à l'aide de la fonction `solution`. Que constatez-vous ? Pourquoi ?

**Exercice 4.** 1. Résolvez à la main les deux équations suivantes :

$$(E_3): x^2 + 6x + 9 \quad (E_4): 0.1x^2 + 0.6x + 0.9 = 0$$

2. Résolvez ces équations à l'aide de la fonction `solution`. Que constatez-vous ? Pourquoi ?

### II Résolution par dichotomie

**ATTENTION :** vous aurez besoin de cet algorithme au TP n°10. Donc, sauvegardez proprement et au bon endroit votre programme.

#### II.1 Principe

Soit  $f$  continue telle que  $f(a)$  et  $f(b)$  soient de signe contraire. Alors un zéro de  $f$  est dans  $[a, b]$ .

On construit une suite d'intervalles  $[a_n, b_n]$  qui contiennent ce zéro. A chaque étape :

on note  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

- si  $f(a_n)$  et  $f(c_n)$  sont de signe contraire, alors on pose :  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = c_n$ .

- sinon, on pose :  $a_{n+1} = c_n$  et  $b_{n+1} = b_n$ .

On s'arrête quand  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$  est une approximation à  $\epsilon$  près d'une solution, autrement dit quand :

$$b_n - a_n \leq 2\epsilon$$

Avantages : dès lors que  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signe contraire et que  $f$  est continue, la méthode converge vers une solution. On peut aussi prévoir à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour une précision choisie.

Inconvénient : la convergence n'est pas très rapide comparée à d'autres méthodes.

## II.2 Application

**Exercice 5.** Écrire une fonction `dicho` qui prend comme entrée la fonction  $f$  à étudier, les bornes initiales  $a$  et  $b$ , la précision  $\epsilon$  et qui renvoie  $\frac{a_n + b_n}{2}$ , approximation d'une solution à  $\epsilon$  près.

**Exercice 6.** 1. Testez la fonction `dicho` sur  $f(x) = x^2 - 2$  pour obtenir une approximation de  $\sqrt{2}$  à  $\epsilon = 0,001$  près.

2. Si on prend  $a = 2$  et  $b = 3$ , que renvoie le programme ? Est-ce bien l'approximation d'une solution ? Pourquoi le programme renvoie cette valeur ?

3. Faites en sorte que votre fonction `dicho` affiche un message d'erreur dans ces cas là.

## III Résolution avec des suites récurrentes

### III.1 Principe

L'objectif est de résoudre une équation du type  $f(x) = x$ .

On considère une suite définie par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = \text{constante} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (*)$$

Dans certains cas favorables, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. À ce moment là, sa limite est un point fixe de  $f$ , c'est-à-dire une solution de  $f(x) = x$ .

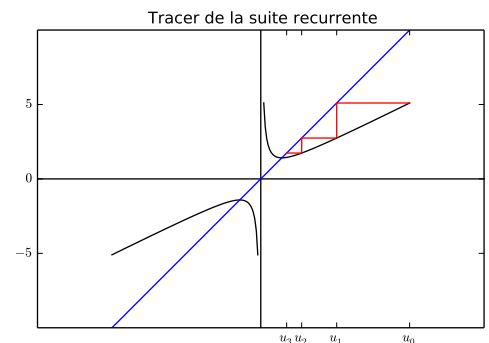
### III.2 Application

**Exercice 7.** Écrire une fonction `rec` qui prend comme entrée  $f, u_0, n$  et qui renvoie  $u_n$ , le  $n$ ième terme de la suite définie par récurrence en  $(*)$ .

**Exercice 8.** Tester votre fonction `rec` avec  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right)$

et  $u_0 \in \mathbb{R}^*$ .

On peut montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que les points fixes de  $f$  sont :  $\sqrt{2}$  et  $-\sqrt{2}$ .



**Exercice 9.** Avec la fonction `dicho` appliquée à  $g(x) = f(x) - x$ , on retrouve les solutions de  $f(x) = x$ . Testez-le avec la fonction  $f$  de l'exercice précédent.

Entre `dicho` et `rec`, quel est l'algorithme le plus rapide ?

## IV Annexe : les complexes

Un complexe se note :  $z=1+2j$ .

**Attention** : si vous voulez le complexe  $z = j$ , il faut écrire  $z=1j$  et non pas  $z=j$  car Python considère alors  $j$  comme une variable et non comme le complexe  $j$ .

Quelques fonctions :

<code>z.real</code>	partie réelle de $z$
<code>z.imag</code>	partie imaginaire de $z$
<code>z.conjugate()</code>	conjugué de $z$
<code>abs(z)</code>	module de $z$