TP n° 07 – Résolution d'équations simples

I Résolution d'équations du second ordre

L'objectif est de résoudre les équations de type $(E)\colon ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels, (donc seront des flottants dans vos programmes).

Exercice 1. Dans cet exercice, on suppose que $a \neq 0$.
Écrire une fonction `solution(a,b,c)` qui renvoie les solutions de $(E)\colon ax^2 + bx + c = 0$ et précise la nature de ses solutions. Par exemple :

```
>>> solution(2,-6,4)
Deux solutions reelles  x1=1.0 et x2=2.0
>>> solution(4,-4,1)
Une solution double  x=0.5
>>> solution(1,-2,2)
Deux solutions complexes  x1=1+1j et x2=1-1j
```

Exercice 2. Dans cet exercice, (E) n'est pas forcément une équation du second degré : a peut être nul.
Ecrire une fonction `solution2` pour prendre en compte tous les cas. (On commencera par construire sur feuille un algorigramme.)
Par exemple :

```
>>> solution2(1,-3,2)
Deux solutions reelles : x1=1.0 et x2=2.0
>>> solution2(0,2,0)
Une solution reelle : x=0.0
>>> solution2(0,0,1)
Pas de solution
>>> solution2(0,0,0)
Une infinite de solutions : tous les reels
```

Exercice 3. 1. Résolvez **à la main** l'équation suivante :

$$(E_5)\colon x^2 + (1 + 2^{-50})x + 0,25 + 2^{-51} = 0$$

2. Résolvez cette équation à l'aide de la fonction `solution`. Que constatez-vous ? Pourquoi ?

Exercice 4. 1. Résolvez **à la main** les deux équations suivantes :

$$(E_3)\colon x^2 + 6x + 9 \qquad (E_4)\colon 0.1x^2 + 0.6x + 0.9 = 0$$

2. Résolvez ces équations à l'aide de la fonction `solution`. Que constatez-vous ? Pourquoi ?

II Résolution par dichotomie

ATTENTION : vous aurez besoin de cet algorithme au TP n°10. Donc, sauvegardez proprement et au bon endroit votre programme.

II.1 Principe

Soit f continue telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe contraire. Alors un zéro de f est dans $[a, b]$.
On construit une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ qui contiennent ce zéro. A chaque étape :
on note $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
- si $f(a_n)$ et $f(c_n)$ sont de signe contraire, alors on pose : $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
- sinon, on pose : $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
On s'arrête quand $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ est une approximation à ϵ près d'une solution, autrement dit quand :

$$b_n - a_n \leqslant 2\epsilon$$

Avantages : dès lors que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire et que f est continue, la méthode converge vers une solution. On peut aussi prévoir à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour une précision choisie.
Inconvénient : la convergence n'est pas très rapide comparée à d'autres méthodes.

II.2 Application

Exercice 5. Écrire une fonction `dicho` qui prend comme entrée la fonction f à étudier, les bornes initiales a et b, la précision ϵ et qui renvoie $\dfrac{a_n + b_n}{2}$, approximation d'une solution à ϵ près.

Exercice 6.
1. Testez la fonction `dicho` sur $f(x) = x^2 - 2$ pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ à $\epsilon = 0,001$ près.
2. Si on prend $a = 2$ et $b = 3$, que renvoie le programme ? Est-ce bien l'approximation d'une solution ? Pourquoi le programme renvoie cette valeur ?
3. Faites en sorte que votre fonction `dicho` affiche un message d'erreur dans ces cas là.

III Résolution avec des suites récurrentes

III.1 Principe

L'objectif est de résoudre une équation du type $f(x) = x$.
On considère une suite définie par récurrence de la façon suivante :

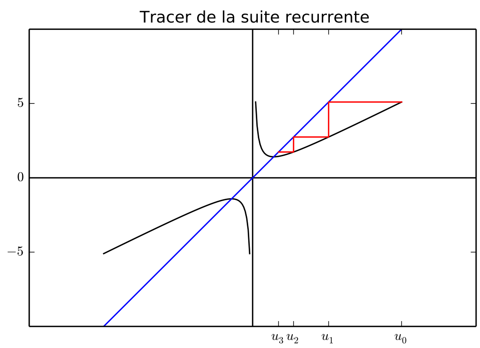
$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = \text{constante} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right. \qquad (*)$$

Dans certains cas favorables, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. À ce moment là, sa limite est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de $f(x) = x$.

III.2 Application

Exercice 7. Écrire une fonction `rec` qui prend comme entrée f, u_0, n et qui renvoie u_n, le $n$ième terme de la suite définie par récurence en $(*)$.

Exercice 8. Tester votre fonction `rec` avec $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ et $u_0 \in \mathbb{R}^*$.
On peut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que les points fixes de f sont : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.



Exercice 9. Avec la fonction `dicho` appliquée à $g(x) = f(x) - x$, on retrouve les solutions de $f(x) = x$.
Testez-le avec la fonction f de l'exercice précédent.
Entre `dicho` et `rec`, quel est l'algorithme le plus rapide ?

IV Annexe : les complexes

Un complexe se note : `z=1+2j`.
Attention : si vous voulez le complexe $z = j$, il faut écrire `z=1j` et non pas `z=j` car Python considère alors `j` comme une variable et non comme le complexe j.
Quelques fonctions :

`z.real`	partie réelle de z
`z.imag`	partie imaginiare de z
`z.conjugate()`	conjugué de z
`abs(z)`	module de z