

## Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2023

Filière : TSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](#) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles).

**La distribution et la publication de ce document sont strictement interdites !**

### Conditions de diffusion

Ce document n'a pas vocation à être diffusé, et sa consultation est exclusivement réservée aux adhérents de l'UPSTI.

Les adhérents peuvent en revanche s'en inspirer librement pour toute utilisation pédagogique.

Si vous constatez que ce document est disponible en téléchargement sur un site tiers, veuillez s'il vous plaît nous en informer [à cette adresse](#), afin que nous puissions protéger efficacement le travail de nos adhérents.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

L'équipe UPSTI

# Système robotisé d'entraînement à la marche Lokomat®

Corrigé UPSTI

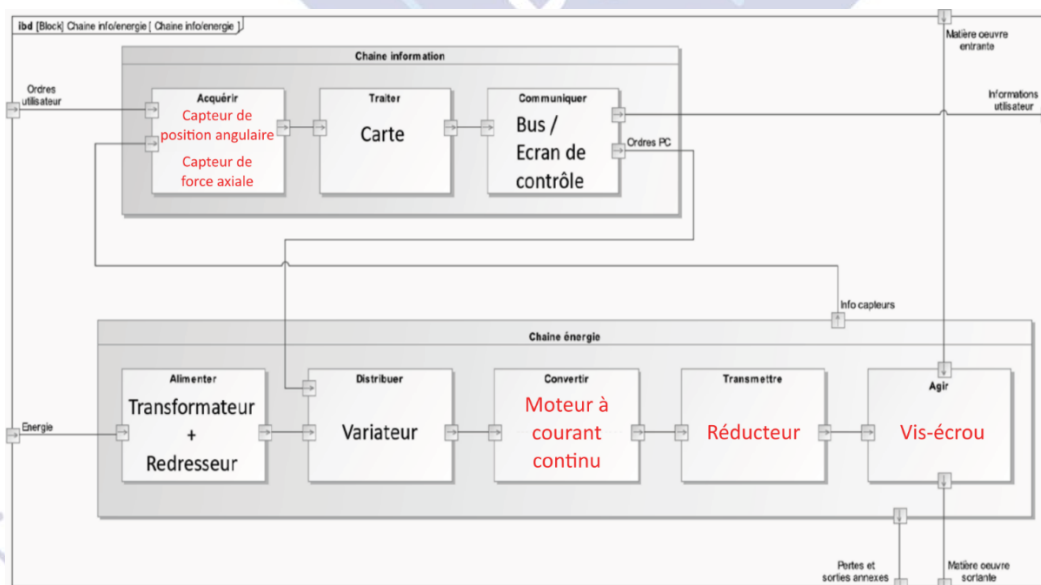
## I - Exigence fonctionnelle « Limiter l'amplitude articulaire »

**Objectif :** vérifier la capacité de l'exosquelette à reproduire un comportement similaire du point de vue de l'amplitude articulaire des hanches lors de la marche normale.

### I.1 - Étude préliminaire

**Objectif :** analyser et valider une modélisation de l'exosquelette.

**Question 1** Compléter sur le **Document Réponse (DR)**, la chaîne fonctionnelle qui détaille l'organisation structurelle de la motorisation de la hanche.



**Question 2** À l'aide de l'annexe 2 et des figures 4 et 5, désigner et justifier le plan dans lequel est proposé le modèle des membres inférieurs équipés de l'exosquelette.

Justifier également le modèle d'étude proposé.

D'après l'annexe 2, le modèle est proposé dans le plan sagittal. Il s'agit en effet du plan dans lequel se produisent les mouvements de flexion et d'extension de la hanche.

Dans ce modèle, les différentes parties du corps (le buste, les cuisses, les jambes et les pieds) sont considérés comme indéformables et reliés entre elles par des liaisons pivots au niveau des articulations (les hanches, les genoux et les chevilles), négligeant en première approche les rotations hors du plan sagittal.

## I.2 - Caractérisation géométrique de la marche

**Question 3** Donner l'expression de la longueur d'un pas  $L_{pas}$  pour une cadence  $cad = 85 \text{ pas} \cdot \text{min}^{-1}$  et une vitesse naturelle de  $v = 1,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Application numérique.

$$L_{pas} = \frac{v}{cad} = 0,85 \text{ m} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v = 1,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ cad = 85 \text{ pas} \cdot \text{min}^{-1} = 1,4 \text{ pas} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

**Question 4** Déterminer le temps de cycle de marche  $T_{cycle}$ .

D'après les figures 6 et 8, un pas étant réalisé en un cycle, on a :

$$T_{cycle} = \frac{1}{cad} = 0.71 \text{ s}$$

**Question 5** Écrire la relation vectorielle associée à la fermeture géométrique ( $ITO_1T'I$ ).

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{IT} + \vec{TO_1} + \vec{O_1T'} + \vec{T'I} \\ &= -L_4\vec{x_2} + L_1\vec{y_2} - L_2\vec{y_2'} - L\vec{x_0} \end{aligned}$$

**Question 6** À l'aide d'une projection à énoncer, préciser l'expression de  $L$  en fonction de  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_4$ ,  $\theta_{flex}$  et de  $\theta_{ext}$ .

En déduire l'expression du demi-pas postérieur  $d_{pas}$ , puis de la longueur d'un pas  $L_{pas}$  en fonction de  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_4$ ,  $\theta_{flex}$  et de  $\theta_{ext}$ .

En projetant cette relation sur  $\vec{x_0}$ , on a (attention, l'angle  $\theta_{ext}$  est négatif sur la figure 8) :

$$\begin{aligned} 0 &= -L_4 \cos(\theta_{ext}) - L_1 \sin(\theta_{ext}) + L_2 \sin(\theta_{flex}) - L \\ \Leftrightarrow L &= -L_4 \cos(\theta_{ext}) - L_1 \sin(\theta_{ext}) + L_2 \sin(\theta_{flex}) \end{aligned}$$

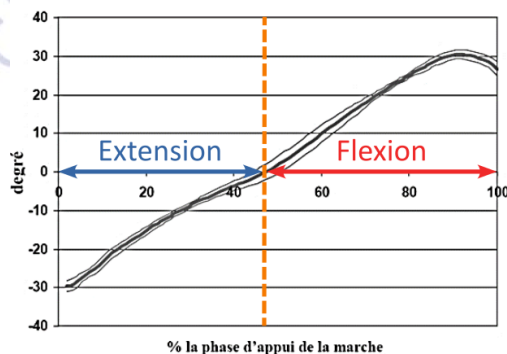
D'où :

$$\begin{aligned} d_{pas} &= L + L_4 = L_4(1 - \cos(\theta_{ext})) - L_1 \sin(\theta_{ext}) + L_2 \sin(\theta_{flex}) \\ L_{pas} &= 2 \cdot d_{pas} = 2L_4(1 - \cos(\theta_{ext})) - 2L_1 \sin(\theta_{ext}) + 2L_2 \sin(\theta_{flex}) \end{aligned}$$

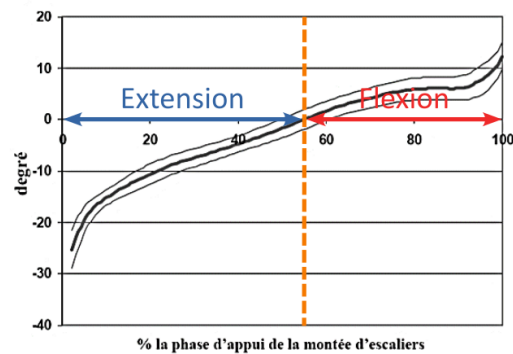
**Question 7** Préciser sur les figures des courbes du DR les phases de flexion et d'extension de la hanche.

D'après l'annexe 2, la flexion et l'extension de la hanche sont définis par un angle respectivement positif et négatif de l'articulation de la hanche dans le plan sagittal.

Angle dans le plan sagittal



(a)



(b)

**Question 8** À l'aide de la **figure 9**, proposer une relation liant les angles  $\theta_{flex}$  et  $\theta_{ext}$  dans le cadre de l'étude proposée.

Il est impossible de répondre à cette question, la figure 9 ne montrant que la phase d'appui, c'est-à-dire que 60 % du cycle de marche. On admet pour la suite que  $\theta_{flex} = -\theta_{ext}$ .

**Question 9** En déduire la valeur numérique de  $\theta_{flex,max}$ , angle maximal atteint lors de la flexion de la hanche.

D'après la question 3 et l'annexe 5, sachant que  $H = 1,75 \text{ m}$ , on a :

$$\theta_{flex,max} = \arccos\left(-\frac{L_4 - \frac{1}{2}L_{pas}}{\sqrt{(L_1 + L_2)^2 + L_4^2}}\right) - \arctan\left(\frac{L_1 + L_2}{L_4}\right) = 3,3^\circ \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L_{pas} = 0,85 \text{ m} \\ L_1 = L_2 = 0,530 \cdot H = 0,928 \text{ m} \\ L_4 = 0,152 \cdot H = 0,266 \text{ m} \end{cases}$$

Cela est nettement insuffisant pour répondre au cahier des charges de la figure 3, qui demande une plage angulaire de flexion d'au moins  $15^\circ$ .

**Question 10** Analyser les réglages effectués par le praticien et entourés sur l'**annexe 3**.

Les réglages du praticien sont semblables aux valeurs déterminées aux questions 8 et 9 : le mouvement est symétrique ( $\theta_{flex} = -\theta_{ext}$ ) avec un angle maximal de  $12^\circ \approx \theta_{flex,max}$ .

**Question 11** Par le biais de l'interface logiciel, le praticien a la possibilité de limiter l'amplitude articulaire. Indiquer l'intérêt de la présence des butées mécaniques mises en évidence sur l'**annexe 1**.

D'après la page 4 du sujet, les butées mécaniques sont liées aux recommandations médicales relatives aux restrictions articulaires du patient : elles permettent donc de garantir que l'amplitude ne dépassent pas une valeur limite dangereuse pour le patient.

La limitation par le biais de l'interface logiciel, elle, permet au praticien d'imposer le type de mouvement adapté à l'exercice de son choix, en le faisant possiblement évoluer au cours d'une séance.

**Question 12** Au vu des résultats précédents, critiquer le modèle utilisé pour l'exosquelette. Peut-on affirmer que l'exigence « Limiter l'amplitude articulaire » est respectée ?

Hormis la zone aux alentours de 30 % à 40 % du cycle de marche, c'est-à-dire le début de la phase de propulsion de la jambe droite, les deux courbes sont proches, et le modèle utilisé est donc satisfaisant. On constate notamment que les valeurs extrêmes,  $-10^\circ$  et  $+15^\circ$ , sont identiques pour les deux courbes qui permettent donc toutes les deux d'affirmer que l'exigence « Limiter l'amplitude articulaire » puisqu'elle est bien comprise dans l'intervalle  $[-15^\circ; +15^\circ]$ .

## II - Exigence fonctionnelle « Assurer le positionnement de la hanche »

**Objectif :** vérifier que le moteur choisi est en capacité de fournir le couple à la hanche.

**Question 13** Quelle(s) hypothèse(s) mise(s) en place justifie(nt) la forme des matrices d'inertie des solides 2', 3' et 4' ?

Les matrices d'inertie des solides 2', 3' et 4' sont diagonales, avec trois moments d'inertie *a priori* distincts. Les solides associés possèdent donc deux plans de symétries orientés par les vecteurs  $\vec{x}_2'$ ,  $\vec{y}_2'$  ou  $\vec{z}_0$ .

Si une telle modélisation semble acceptable pour les solides 2' et 3', elle est plus discutable pour le solide 4'.

**Question 14** On considère le système  $\Sigma' = \{\text{rotor} + 2' + 3' + 4'\}$ . Déterminer les énergies cinétiques de chacun des solides du système  $\Sigma'$  dans leur mouvement par rapport au repère  $R_0$ .

En négligeant l'énergie cinétique de translation du centre de gravité, ainsi que celle de rotation autour de la direction  $\vec{z}_0$ , on a :

$$E_{c, \text{rotor}/0} = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$$

Le point  $O_1$  étant fixe par rapport au référentiel galiléen, on a :

$$\begin{aligned} E_{c, 2'/0} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{2'/0}} \cdot I(O_1, 2') \overrightarrow{\Omega_{2'/0}} \\ &= \frac{1}{2} J_{2', (O_1, \vec{z}_0)} \omega_{flex}^2 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{\Omega_{2'/0}} = \omega_{flex} \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Huygens :

$$\begin{aligned} J_{2', (O_1, \vec{z}_0)} &= J_{2', (G_2, \vec{z}_0)} + m_2 d^2 \quad \text{avec } d \text{ la distance entre les axes } (O_1, \vec{z}_0) \text{ et } (G_2, \vec{z}_0) \\ &= C_2 + m_2 \left( \frac{L_2}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$E_{c, 2'/0} = \frac{1}{2} \omega_{flex}^2 \left[ C_2 + m_2 \left( \frac{L_2}{2} \right)^2 \right]$$

En constatant que les solides 3' et 4' sont fixes par rapport au solide 2' (le genou et la cheville étant bloqué), c'est-à-dire que  $\overrightarrow{\Omega_{4'/0}} = \overrightarrow{\Omega_{3'/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2'/0}} = \omega_{flex} \vec{z}_0$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{3', (O_1, \vec{z}_0)} = C_3 + m_3 \left( L_2 + \frac{L_3}{2} \right)^2 \\ J_{4', (O_1, \vec{z}_0)} = C_4 + m_4 \left( L_2 + L_3 + \frac{L_4}{2} \right)^2 \end{array} \right. \text{ et donc } \left\{ \begin{array}{l} E_{c, 3'/0} = \frac{1}{2} J_{3', (O_1, \vec{z}_0)} \omega_{flex}^2 = \frac{1}{2} \omega_{flex}^2 \left[ C_3 + m_3 \left( L_2 + \frac{L_3}{2} \right)^2 \right] \\ E_{c, 4'/0} = \frac{1}{2} J_{4', (O_1, \vec{z}_0)} \omega_{flex}^2 = \frac{1}{2} \omega_{flex}^2 \left[ C_4 + m_4 \left( L_2 + L_3 + \frac{L_4}{2} \right)^2 \right] \end{array} \right.$$

**Question 15** Isoler l'ensemble  $\Sigma'$  et déterminer les puissances des actions mécaniques extérieures agissant sur  $\Sigma'$ .

Trois types d'actions mécaniques extérieures agissent sur l'ensemble  $\Sigma'$  :

- le couple moteur ;
- la pesanteur ;
- l'effort de la liaison pivot de 1 sur 2' en  $O_1$ .

Calculons les puissances associées :

$$P_{1 \rightarrow \text{rotor}/0}^{\text{mot}} = \mathcal{F}_{1 \rightarrow \text{rotor}}^{\text{mot}} \otimes \mathcal{V}_{\text{rotor}/0} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m(t) \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \omega_m \vec{z}_0 \\ * \end{array} \right\}_{O_1} = C_m(t) \omega_m$$

$$P_{\text{ext} \rightarrow 2'/0}^{\text{pes}} = \mathcal{F}_{\text{ext} \rightarrow 2'}^{\text{pes}} \otimes \mathcal{V}_{2'/0} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \omega_{flex} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{matrix} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{matrix} \omega_{flex} \vec{z}_0 \\ \frac{L_2}{2} \vec{y}_{2'} \wedge \omega_{flex} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{G_2} \\
&= \left\{ \begin{matrix} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{matrix} \omega_{flex} \vec{z}_0 \\ \frac{L_2}{2} \omega_{flex} \vec{x}_{2'} \end{matrix} \right\}_{G_2} \\
&= -m_2 g \frac{L_2}{2} \omega_{flex} \sin(\theta_{flex})
\end{aligned}$$

On a de même :

$$\begin{aligned}
P_{ext \rightarrow 3'/0}^{pes} &= -m_3 g \left( L_2 + \frac{L_3}{2} \right) \omega_{flex} \sin(\theta_{flex}) \\
P_{ext \rightarrow 4'/0}^{pes} &= -m_4 g \left( L_2 + L_3 + \frac{L_4}{2} \right) \omega_{flex} \sin(\theta_{flex})
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
P_{1 \rightarrow 2'/0}^{liaison} &= P_{1 \rightarrow 2'/1}^{liaison} \quad \text{car 1 est fixe par rapport à 0} \\
&= P_{1 \leftrightarrow 2'}^{liaison} \\
&= 0 \quad \text{car les liaisons sont parfaites}
\end{aligned}$$

**Question 16** Déterminer les puissances des efforts intérieurs au système  $\Sigma'$ .

Les seules actions intérieures à  $\Sigma'$  sont les actions de liaisons. Les liaisons étant parfaites, les puissances des inter-efforts associés sont nulles :

$$P_{int} = 0$$

**Question 17** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique (Énergie Puissance) au système  $\Sigma'$ .

D'après la question 14, on a :

$$\begin{aligned}
E_{c,\Sigma'/0} &= E_{c,rotor/0} + E_{c,2'/0} + E_{c,3'/0} + E_{c,4'/0} \\
&= \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} \omega_{flex}^2 \left[ C_2 + C_3 + C_4 + m_2 \left( \frac{L_2}{2} \right)^2 + m_3 \left( L_2 + \frac{L_3}{2} \right)^2 + m_4 \left( L_2 + L_3 + \frac{L_4}{2} \right)^2 \right] \\
&\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{J_{2'3'4'}} \\
&= \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_{2'3'4'} \omega_{flex}^2
\end{aligned}$$

D'où, d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{c,\Sigma'/0}}{dt} &= P_{1 \rightarrow rotor/0}^{mot} + P_{ext \rightarrow 2'/0}^{pes} + P_{ext \rightarrow 3'/0}^{pes} + P_{ext \rightarrow 4'/0}^{pes} + P_{1 \rightarrow 2'/0}^{liaison} + P_{int} \\
&= J_m \frac{d\omega_m}{dt} \omega_m + J_{2'3'4'} \frac{d\omega_{flex}}{dt} \omega_{flex} \\
&= C_m(t) \omega_m - g \omega_{flex} \sin(\theta_{flex}) \left[ m_2 \frac{L_2}{2} + m_3 \left( L_2 + \frac{L_3}{2} \right) + m_4 \left( L_2 + L_3 + \frac{L_4}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

**Question 18** Mettre la relation de la question Q17 sous la forme :

$$J_{eq} \frac{d\omega_m}{dt} = C_m(t) - C_r(t)$$

où les termes  $J_{eq}$  et  $C_r(t)$  seront à expliciter.



Le rapport de réduction de l'articulation de la hanche permet d'écrire  $\omega_{flex} = k\omega_m$ . La relation précédente devient donc :

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} \omega_m + J_{2'3'4'} k^2 \frac{d\omega_m}{dt} \omega_m = C_m(t) \omega_m - gk \omega_m \sin(\theta_{flex}) \left[ m_2 \frac{L_2}{2} + m_3 \left( L_2 + \frac{L_3}{2} \right) + m_4 \left( L_2 + L_3 + \frac{L_4}{2} \right) \right]$$

Lorsque  $\omega_m \neq 0$ , on peut simplifier par  $\omega_m$  et on a alors :

$$(J_m + J_{2'3'4'} k^2) \frac{d\omega_m}{dt} = C_m(t) - gk \sin(\theta_{flex}) \left[ m_2 \frac{L_2}{2} + m_3 \left( L_2 + \frac{L_3}{2} \right) + m_4 \left( L_2 + L_3 + \frac{L_4}{2} \right) \right]$$

D'où :

$$J_{eq} \frac{d\omega_m}{dt} = C_m(t) - C_r(t)$$

Avec :

$$J_{eq} = J_m + J_{2'3'4'} k^2 = J_m + k^2 \left[ C_2 + C_3 + C_4 + m_2 \left( \frac{L_2}{2} \right)^2 + m_3 \left( L_2 + \frac{L_3}{2} \right)^2 + m_4 \left( L_2 + L_3 + \frac{L_4}{2} \right)^2 \right]$$

$$C_r(t) = gk \sin(\theta_{flex}) \left[ m_2 \frac{L_2}{2} + m_3 \left( L_2 + \frac{L_3}{2} \right) + m_4 \left( L_2 + L_3 + \frac{L_4}{2} \right) \right]$$

**Question 19** Sans faire de calculs, donner très clairement et précisément la démarche qui permet d'obtenir l'équation précédente à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.

Préciser quel(s) est(sont) le(s) système(s) étudié(s), quel(s) est(sont) le(s) théorème(s) ou principe(s) utilisé(s) et quels sont les termes qu'il faudrait calculer. Justifier clairement vos choix.

L'équation précédente aurait pu être obtenue en isolant le système  $\Sigma'$ , et en lui appliquant le principe fondamental de la dynamique en moment, au point  $O_1$ , projeté sur l'axe  $\vec{z}_0$ . Cela évite de faire apparaître les inconnues de liaison, mais permet de faire intervenir l'action du moteur et les efforts de la pesanteur.

Ce principe nécessite le calcul de la projection sur  $\vec{z}_0$  des moments dynamiques de chacun des solides du système au point  $O_1$ . Celui-ci étant fixe, on a directement  $\vec{\delta}_{O_1, S_i/O_1} \cdot \vec{z}_0 = J_{S_i, (O_1, \vec{z}_0)} \frac{d\omega_{flex}}{dt}$ .

**Question 20** Le réducteur utilisé est un réducteur de type train épicycloïdal à trois étages. Un schéma cinématique est fourni en **figure 13**.

On note  $D_i$  le diamètre de la roue dentée  $i$ ,  $i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ .

Donner les relations entre les différents diamètres des roues dentées permettant de garantir la coaxialité des planétaires, des couronnes et des porte-satellites.

Notons  $D_{ps}$  le diamètre du porte-satellite, c'est-à-dire l'entraxe entre 1 et 3. Pour garantir la coaxialité et le bon engrènement, on doit avoir :

$$\frac{D_0}{2} = \frac{D_3}{2} + D_1 \quad \text{et} \quad \frac{D_{ps}}{2} = \frac{D_3}{2} + \frac{D_1}{2}$$

**Question 21** Calculer le rapport de transmission du premier étage.

Le premier étage est constitué :

- des planétaires 0 et 3 ;
- du satellite 1 ;
- du porte-satellite 2.

La raison basique de ce train épicycloïdal est donc :

$$\lambda = \frac{\omega_{pl1/0} - \omega_{ps/0}}{\omega_{pl2/0} - \omega_{ps/0}} = \frac{\omega_{0/0} - \omega_{2/0}}{\omega_{3/0} - \omega_{2/0}} = (-1)^1 \frac{Z_3 Z_1}{Z_1 Z_0} \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{-\omega_{2/0}}{\omega_{3/0} - \omega_{2/0}} = -\frac{Z_3}{Z_0}$$

Or, le rapport de transmission du premier étage est défini par  $k_{\text{étage}} = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}}$ . Donc :

$$\begin{aligned} \lambda(\omega_{3/0} - \omega_{2/0}) &= -\omega_{2/0} \Leftrightarrow \lambda\omega_{3/0} = \omega_{2/0}(\lambda - 1) \\ \Leftrightarrow k_{\text{étage}} &= \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{-Z_3/Z_0}{-Z_3/Z_0 - 1} = \frac{Z_3}{Z_3 + Z_0} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

**Question 22** Les étages étant tous identiques, en déduire le rapport de transmission global du réducteur ainsi que la référence du réducteur choisi à l'aide de l'extrait du catalogue du constructeur Maxon fourni en annexe 4.

Les étages étant tous identiques, on a :

$$k_{\text{red}} = k_{\text{étage}}^3 = \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{8}{343}$$

On constate sur l'annexe 4 que ce rapport de réduction exact correspond à la référence 203120.

**Question 23** Exprimer le paramètre  $x$  en fonction du paramètre d'entrée  $\beta$ .

Le pas de vis  $p$  est défini par  $p = 2\pi \frac{\Delta x}{\Delta \beta}$ . Or,  $x = x_0 + \Delta x$  et  $\beta = \beta_0 + \Delta \beta$ . En supposant que  $\beta_0 = 0$ , on a donc :

$$x = x_0 + \Delta x = x_0 + \frac{p}{2\pi} \cdot \Delta \beta = x_0 + \frac{p}{2\pi} \cdot \beta$$

**Question 24** À l'aide de la fermeture géométrique (OBCAO), donner la relation liant les paramètres du mécanisme de mise en mouvement de la hanche sous la forme  $\beta = f(\theta)$ .

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{OB} + \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AO} \\ &= b\vec{y}_1 + x\vec{x}_4 - c\vec{x}_5 - a\vec{x}_1 \end{aligned}$$

En remarquant que  $\vec{x}_4 = \vec{x}_2$ , et en projetant cette relation dans le repère  $R_1$ , on a (attention, l'angle  $\alpha$  est négatif sur la figure 14) :

$$\begin{aligned} \text{Sur } \vec{x}_1 : 0 &= x \cos(\alpha) - c \cos(\theta) - a \\ \text{Sur } \vec{y}_1 : 0 &= b + x \sin(\alpha) - c \sin(\theta) \end{aligned}$$

On cherche à éliminer l'angle  $\alpha$ . Or, on a :

$$\begin{cases} x \cos(\alpha) = a + c \cos(\theta) \\ x \sin(\alpha) = -b + c \sin(\theta) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} x^2(\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2) &= (a + c \cos(\theta))^2 + (-b + c \sin(\theta))^2 \\ \Rightarrow x^2 &= \left(x_0 + \frac{p}{2\pi} \cdot \beta\right)^2 = (a + c \cos(\theta))^2 + (-b + c \sin(\theta))^2 \end{aligned}$$



Et donc :

$$\beta = \frac{2\pi}{p} \left( \sqrt{(a + c \cos(\theta))^2 + (-b + c \sin(\theta))^2} - x_0 \right)$$

**Question 25** Au vu de la **figure 15**, critiquer le modèle utilisé pour déterminer le couple nécessaire à la mise en mouvement de l'articulation de la hanche.

Les résultats expérimentaux sont proches de ceux obtenus par simulation dans la première moitié du cycle de marche. Dans la seconde moitié, même si l'allure globale est identique, les écarts relatifs sont bien plus importants.

Ces écarts ne devraient pas avoir d'incidence majeur sur le choix du moteur, le couple maximal étant identique dans les deux cas.

**Question 26** À l'aide de l'**annexe 5**, déterminer la masse totale des solides correspondant au membre inférieur en oscillation.

D'après l'**annexe 5**, le patient ayant une masse  $M = 70 \text{ kg}$ , la masse totale de la cuisse, de la jambe et du pied est :

$$m = M \cdot (0,1000 + 0,0465 + 0,0145) = 11,3 \text{ kg}$$

**Question 27** Valider le choix du moteur Maxon EC 45 réf.136212 d'un point de vue du couple. Les données nécessaires à cette validation sont présentes en **annexe 6**.

D'après la **figure 15**, le couple maximal au niveau de la hanche est  $C_{\text{hanche,max}} = 1,6 \cdot m = 18 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Le rendement du réducteur étant supposé unitaire, cela correspond à un couple moteur :

$$C_{m,\text{max}} = C_{\text{hanche,max}} \cdot k_{\text{red}} = 421 \text{ mN} \cdot \text{m}$$

Cette valeur est largement inférieure au couple maximal de  $6\,110 \text{ mN} \cdot \text{m}$  que peut fournir le moteur (« *stall torque* »). En revanche, elle est supérieure au couple continu maximal de  $316 \text{ mN} \cdot \text{m}$  (« *max. continuous torque* ») ; comme ces hautes valeurs de couple ne sont maintenues que pendant un court pourcentage du cycle de marche, il est fort probable que le couple thermique équivalent, c'est-à-dire la valeur efficace du couple, soit bien inférieur à cette valeur limite. L'étude est cependant compliquée à mener graphiquement.

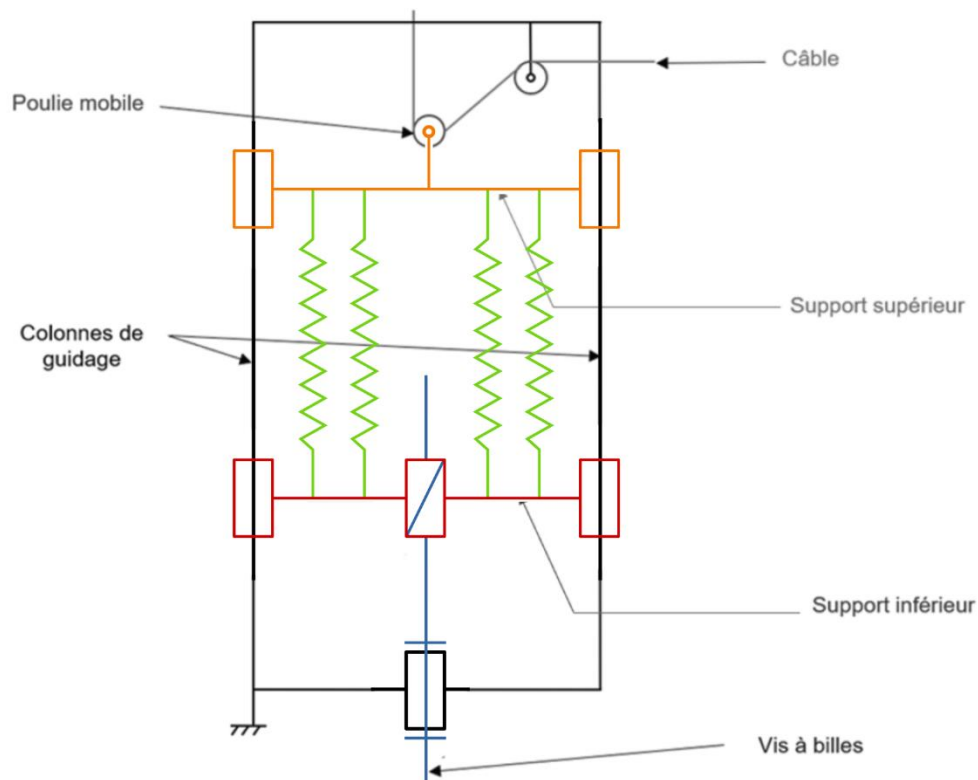
### III - Exigence fonctionnelle « Assurer le déchargement corporel »

**Objectif :** vérifier que le système de décharge corporelle actif permet de réaliser un contrôle en boucle fermée de la force de décharge, soit pour maintenir un niveau de décharge constant durant le cycle de marche qui tient compte des mouvements dynamiques de la masse supportée, soit pour moduler cette décharge en fonction du cycle de marche.

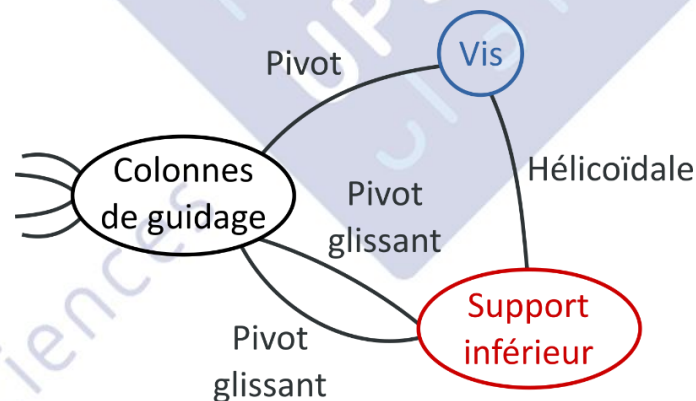
#### III.2 - Étude de l'architecture générale du système de décharge corporelle

**Objectif :** évaluer les efforts mécaniques dus aux ressorts.

**Question 28** À partir de la **figure 16**, compléter, sur le **DR**, le schéma cinématique du système interne constituant le mécanisme de décharge corporelle.



**Question 29** Donner le graphe des liaisons associé au sous-ensemble  $S = \{\text{vis, colonnes de guidage, support inférieur}\}$ .



**Question 30** Déterminer le degré d'hyperstatisme du sous-système S.

Raisonnons du point de vue cinématique :

- le sous-système S ne possède qu'une seule mobilité, à savoir sa mobilité utile :  $m = 1$  ;
- il y a deux boucles cinématiques indépendantes :  $E_c = 6 \cdot \mu = 12$  ;
- $I_c = 1 \times 1$  (pivot) +  $1 \times 1$  (hélicoïdale) +  $2 \times 2$  (pivot glissant) = 6.

D'où :

$$h = m - I_c + E_c = 7$$

**Question 31** Donner la conséquence de ce degré d'hyperstatisme.

Ce degré d'hyperstatisme élevé entraîne la nécessité d'avoir soit un tolérancement dimensionnel très faible (ce qui ne semble pas le cas ici, le cadre du bâti ressemblant à un assemblage de profilés), soit un système de réglage, au risque d'obtenir des contraintes élevées dans les différentes pièces et liaisons.

**Question 32** On souhaite modéliser le comportement des 4 ressorts identiques de raideur  $k$  par un seul ressort de raideur équivalente  $k_{eq}$ . En justifiant de manière rigoureuse votre démarche, donner l'expression de  $k_{eq}$  en fonction de  $k$ .

Soient  $F_i$  l'effort développé par le  $i^{\text{ème}}$  ressort et  $\Delta y_i$  le déplacement vertical de ce ressort. On a alors  $F_i = k \cdot \Delta y_i$ . Or, les quatre ressorts étant en parallèle,  $\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3 = \Delta y_4 = \Delta y$ . Donc :

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 4k\Delta y = k_{eq}\Delta y \quad \text{avec} \quad k_{eq} = 4k$$

**Question 33** Déterminer l'expression de l'effort  $F_R$  développé par le ressort équivalent dans le cas d'un déplacement vertical noté  $y$  du centre de gravité du patient, l'effort  $F_R$  étant nul pour un déplacement  $y$  nul.

On a  $F_R = k_{eq}\Delta y = k_{eq}(y - y_0)$ . Or, lorsque  $y = 0$ ,  $F_R = 0 = k_{eq}(0 - y_0)$  et donc  $y_0 = 0$ . D'où :

$$F_R = k_{eq}y$$

**Question 34** À partir des différentes courbes de la **figure 17**, déterminer l'effort maximal  $F_R$  réel disponible sachant que la raideur de chacun des ressorts est de  $k = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Sur la figure 17, on constate que le déplacement maximal du centre de gravité est obtenu lors d'une allure rapide, et on a alors  $y_{max} = 0,07 \text{ m}$ . Par conséquent,  $F_{R,max} = 4ky_{max} = 0,56 \text{ kN}$ .

### III.3 - Contrôle de la force de décharge du système de décharge corporelle

#### III.3.a - Caractérisation de l'effort $F_R$

**Objectif :** déterminer la plage de variation de l'effort de contre-réaction du ressort  $F_R$ .

**Question 35** Pour quelle raison la force de tension dans le câble ne doit-elle pas être nulle ?

Si la force de tension dans le câble devient nulle, cela signifie qu'il est détendu. Il n'est alors plus guidé correctement par les poulies et le treuil, la force de tension n'est plus asservi par le moteur, et le retour soudain à une force de tension non-nulle peut entraîner un choc nuisible au système et dangereux pour le patient.

**Question 36** En exploitant les courbes de l'**annexe 7** (relevés qui correspondent à un mouvement sinusoïdal d'amplitude de  $25 \text{ mm}$ ), relever la valeur maximale et la valeur minimale du couple moteur  $M_m$ .

$$M_{m,min} = -240 \text{ mN} \cdot \text{m} \quad M_{m,max} = +240 \text{ mN} \cdot \text{m}$$

En supposant qu'il n'y a pas de déphasage entre le couple moteur et les forces de tension, on en déduit que  $M_m = M_{m,max} \sin(\omega t)$ .

**Question 37** Si on considère  $M_{m,F} = M_m$ , déterminer l'expression de  $F_T(t) - F_R(t)$  avec le résultat de cette différence exprimé en  $N$ .

$$F_T(t) - F_R(t) = \frac{M_{m,F} \cdot i_r \cdot \eta_c \cdot \eta_r}{R_t} = \frac{M_{m,max} \cdot i_r \cdot \eta_c \cdot \eta_r}{R_t} \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad \Delta F_{amp} = \frac{M_{m,max} \cdot i_r \cdot \eta_c \cdot \eta_r}{R_t} = 290 \text{ N}$$

**Question 38** Démontrer que  $F_R(t) = 480 - 88,92 \sin(\omega t)$ . En déduire la plage de variation de la force  $F_R$ .

$$F_R(t) = F_T(t) - (F_T(t) - F_R(t)) = F_{T_0} + F_{T_{amp}} \sin(\omega t) - \Delta F_{amp} \sin(\omega t) = F_{T_0} + (F_{T_{amp}} - \Delta F_{amp}) \sin(\omega t)$$

On a bien  $F_{R_0} = F_{T_0} = 480 \text{ N}$  et  $F_{R_{amp}} = F_{T_{amp}} - \Delta F_{amp} \approx -88.92 \text{ N}$ . On en déduit la plage de variation de la force  $F_R$  :

$$F_{R,min} = F_{R_0} - F_{R_{amp}} = 391 \text{ N} \quad F_{R,max} = F_{R_0} + F_{R_{amp}} = 569 \text{ N}$$

### III.3.b - Étude de l'asservissement de l'effort de contre-réaction du ressort $F_R$

**Objectif :** vérifier la performance du système en termes de précision.

**Question 39** Exprimer littéralement la fonction de transfert  $T_{mot}(p) = \frac{\Omega_{mot}(p)}{U(p)}$ .

On suppose nul le couple résistant. Dans le domaine de Laplace, les équations de comportement du moteur à courant continu s'écrivent :

$$U(p) = I(p) \cdot (R + Lp) + E(p) \quad E(p) = k_v \Omega_{mot}(p) \quad Jp \Omega_{mot}(p) = M_m(p) - C_{rés}(p) \quad M_m(p) = k_i I_{mot}(p)$$

Dès lors, on a :

$$\begin{aligned} T_2(p) &= \frac{I_{mot}(p)}{U(p) - E(p)} = \frac{1}{R + Lp} \\ T_3(p) &= \frac{M_m(p)}{I_{mot}(p)} = k_i \\ T_4(p) &= \frac{\Omega_{mot}(p)}{M_m(p) - C_{rés}(p)} = \frac{1}{Jp} \\ T_{10}(p) &= \frac{E(p)}{\Omega_{mot}(p)} = k_v \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$T_{mot}(p) = \left( \frac{\Omega_{mot}(p)}{U(p)} \right)_{C_{rés}(p)=0} = \frac{FTCD_{mot}(p)}{1 + FTBO_{mot}(p)} = \frac{T_2(p)T_3(p)T_4(p)}{1 + T_2(p)T_3(p)T_4(p)T_{10}(p)} = \frac{\frac{1}{R + Lp} k_i \frac{1}{Jp}}{1 + \frac{1}{R + Lp} k_i \frac{1}{Jp} k_v}$$

Bien que ce ne soit pas demandé, on peut mettre cette fonction de transfert sous forme canonique :

$$T_{mot}(p) = \frac{k_i}{(R + Lp)Jp + k_i k_v} = \frac{\frac{1}{k_v}}{1 + \frac{RJ}{k_i k_v} p + \frac{LJ}{k_i k_v} p^2}$$

**Question 40** Exprimer littéralement et numériquement les fonctions de transferts  $T_5(p)$ ,  $T_6(p)$ ,  $T_7(p)$  et  $T_8(p)$ .

$$\begin{aligned} T_5(p) &= \frac{\Omega_{rés}(p)}{\Omega_{mot}(p)} = \frac{1}{i_r} = 0,0152 < 1 \\ T_6(p) &= \frac{V_{vis}(p)}{\Omega_{rés}(p)} = \frac{p_{vis}}{2\pi} = 0,64 \text{ mm} \cdot \text{rad}^{-1} \\ T_7(p) &= \frac{1}{p} \\ T_8(p) &= \frac{F_R(p)}{L(p)} = k_{eq} = 8 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \end{aligned}$$

**Question 41** À partir de  $H_{BF}(p)$  et du schéma-blocs (**figure 20**), déterminer littéralement la fonction de transfert

$$H_1(p) = \frac{U_{var}(p)}{U_{cons}(p)}.$$

$$\begin{aligned} H_1(p) &= \frac{U_{var}(p)}{U_{cons}(p)} = \frac{U_{cons}(p) - T_9(p)F_R(p)}{U_{cons}(p)} = 1 - T_9(p) \frac{F_R(p)}{U_{cons}(p)} = 1 - T_9(p)H_{BF}(p) \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2}{K_9 \tau_3} p} = \frac{\frac{1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2}{K_9 \tau_3} p}{1 + \frac{1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2}{K_9 \tau_3} p} = \frac{(1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2)p}{K_9 \tau_3 + (1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2)p} \end{aligned}$$

**Question 42** Déterminer littéralement la fonction de transfert  $H_2(p) = \frac{\varepsilon_1(p)}{F_{cons}(p)}$  si  $U_{cons}(p) = K_9 F_{cons}(p)$ .

Remarquons que  $T_9(p) = K_9 = \frac{U_{var}(p)}{\varepsilon_1(p)}$ . On a alors :

$$H_2(p) = \frac{\varepsilon_1(p)}{F_{cons}(p)} = \frac{U_{var}(p)/K_9}{U_{cons}(p)/K_9} = \frac{U_{var}(p)}{U_{cons}(p)} = H_1(p)$$

**Question 43** Calculer l'erreur indicielle de cet asservissement si  $F_{cons}$  est un échelon de 500 N. Dans ce cas,  $F_{cons}(p) = \frac{500}{p}$ .

Appelons  $\varepsilon_s$  l'erreur indicielle, et appliquons le théorème de la valeur final :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_1(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H_2(p) \cdot F_{cons}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{(1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2)p}{K_9 \tau_3 + (1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2)p} \cdot \frac{500}{p} = 0$$

**Question 44** Calculer l'erreur de poursuite de cet asservissement si la consigne de force est  $F_{cons}(p) = \frac{500}{p^2}$ .

Appelons  $\varepsilon_t$  l'erreur de poursuite, et appliquons le théorème de la valeur final, en posant  $a = 500 \text{ N} \cdot \text{s}^{-1}$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_1(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H_2(p) \cdot F_{cons}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{(1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2)p}{K_9 \tau_3 + (1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2)p} \cdot \frac{a}{p^2} \\ &= \frac{a}{K_9 \tau_3} = 66,6 \text{ N} \end{aligned}$$

**Question 45** En vous référant au cahier des charges **figure 18**, que pouvez-vous conclure suite aux résultats que vous avez obtenus aux **Q43** et **Q44** concernant la précision ?

Faut-il envisager la mise en place d'un correcteur ?

Si oui, de quel type ?

Ce correcteur peut-il être source de problèmes ?

Le critère sur l'erreur indicielle est bien vérifié, puisque  $\varepsilon_s = 0 < 0,02 \cdot F_{cons} = 10 \text{ N}$ . En revanche, le critère sur l'erreur de poursuite n'est pas vérifié, puisque  $\varepsilon_t = 66,6 \text{ N} > 0,05 \cdot F_{cons} = 25 \text{ N}$ .

Un correcteur améliorant la précision est donc nécessaire, par exemple un correcteur proportionnel-intégral. Il est toutefois susceptible de déstabiliser le système. On pourra donc ajouter, si nécessaire, un correcteur à avance de phase pour garantir sa stabilité.



## III.4 - Étude du capteur de force mesurant la tension dans le câble

**Objectif :** choisir un capteur de force et valider la structure permettant d'obtenir une grandeur électrique proportionnelle à la force de tension dans le câble.

**Question 46** À partir des informations fournies, déterminer l'équation des déplacements verticaux  $y(t)$  (allure donnée à la **figure 17**) ainsi que l'équation de l'accélération  $a_y(t)$ .

On précise que  $y(0) = 0$  ; en déduire la valeur maximale de la force  $F_t$ .

Les déplacements verticaux étant sinusoïdaux d'amplitude  $25\text{ mm}$ , de période  $0,5\text{ s}$  et nul en  $t = 0$ , on a :

$$y(t) = Y_{amp} \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Y_{amp} = 25\text{ mm} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 13\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

Et donc :

$$a_y(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -Y_{amp} \omega^2 \sin(\omega t)$$

$$F_{t,max} = (m_s + a \cdot m_{b,max})(a_{y,max} + g) = (m_s + a \cdot m_{b,max})(Y_{amp} \omega^2 + g) = \begin{cases} 0,97\text{ kN pour } a = 0,5 \\ 1,9\text{ kN pour } a = 1 \end{cases}$$

**Question 47** À quel type de sollicitation mécanique est soumis le câble ?

Le câble est soumis à une sollicitation de traction.

**Question 48** À partir des informations fournies précédemment, calculer le facteur de jauge  $K = \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L}$ .

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} = (1 - 2\nu) \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} + \nu \frac{\Delta L}{L} + \nu \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L} (1 - 2\nu + 1 + 2\nu) = 2 \frac{\Delta L}{L}$$

D'où :

$$K = \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L} = 2$$

**Question 49** Le capteur qui équipe le système est un capteur référence CO 100 – Y2 choisi dans la gamme des capteurs CO Y2 proposés par la société SAUTER en **annexe 8**.

En vous référant à l'extrait du cahier des charges indiqué **figure 22**, justifier ce choix.

D'après l'annexe 8, le capteur CO 100 – Y2 supporte une charge de  $1\text{ kN}$ . Il s'agit donc du capteur juste suffisant pour supporter la force de tension maximale dans le câble indiquée par le cahier des charges, c'est-à-dire  $1,05 \cdot 950\text{ N} = 997,5\text{ N}$ .

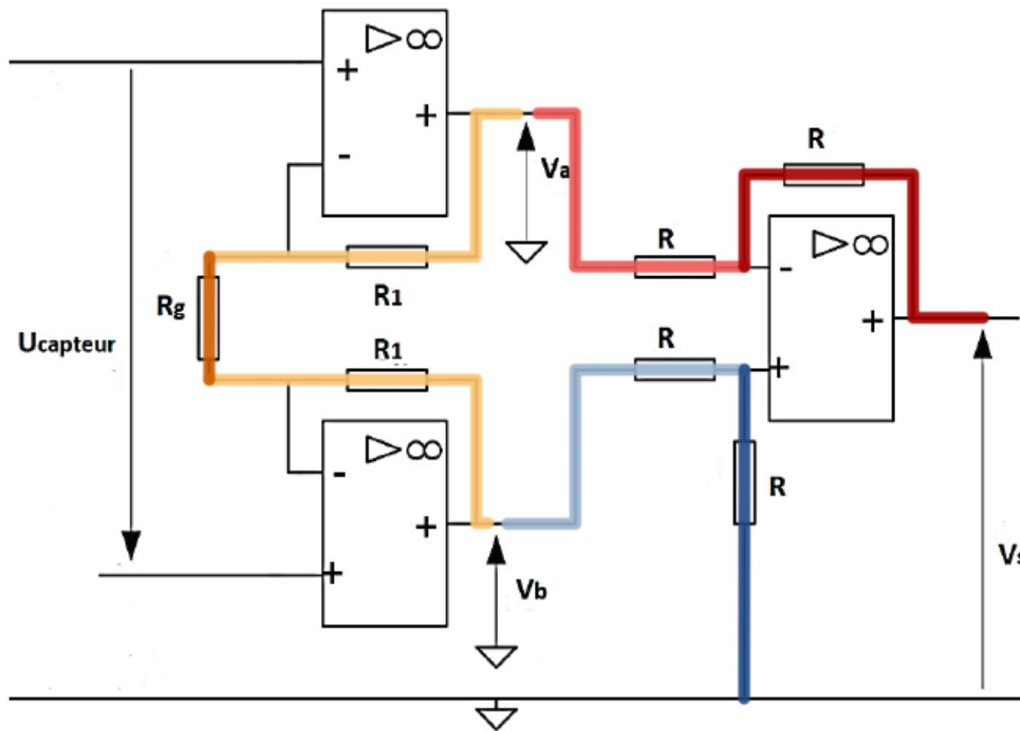
**Question 50** Calculer la valeur de la tension électrique fournie par le capteur pour un effort mécanique maximal  $F_t$  d'environ  $950\text{ N}$ . On considère que la sensibilité du capteur est de  $2\text{ mV/V}$ .



$$U_{\text{capteur}} = \frac{s \cdot U_{\text{alim}}}{F_{t,\text{max}}} F_t = 19 \text{ mV} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} s = 2 \text{ mV/V} \\ U_{\text{alim}} = 10 \text{ V} \\ F_t = 950 \text{ N} \\ F_{t,\text{max}} = 1 \text{ kN} \end{cases}$$

**Question 51** Le but est de déterminer le gain de l'amplificateur d'instrumentation et pour cela il faut :

- déterminer la relation entre  $V_s$ ,  $V_a$  et  $V_b$  ;
- déterminer la relation entre  $V_a$ ,  $V_b$  et  $U_{\text{capteur}}$  ;
- en déduire la relation entre  $V_s$  et  $U_{\text{capteur}}$ .



Première étape : au niveau de l'amplificateur opérationnel de droite, les courants  $i^-$  et  $i^+$  sont nuls. On peut donc appliquer la formule du pont diviseur de tension (respectivement le long des circuits rouge et bleu sur le schéma), et on a alors :

$$V^- - V_s = \frac{R}{R + R} (V_a - V_s) = \frac{V_a - V_s}{2} \quad \text{donc} \quad V^- = V_s + \frac{V_a - V_s}{2} = \frac{V_a + V_s}{2}$$

$$V^+ = \frac{R}{R + R} V_b = \frac{V_b}{2}$$

Par ailleurs, l'amplificateur opérationnel possède une boucle de rétroaction négative. Il est donc en fonctionnement linéaire, et donc  $V^- = V^+$ . D'où :

$$\frac{V_a + V_s}{2} = \frac{V_b}{2} \quad \text{donc} \quad V_s = V_b - V_a$$

Deuxième étape : au niveau des amplificateurs opérationnels de gauche, les courants  $i_a^-$  et  $i_b^-$  sont nuls. On peut donc appliquer la formule du pont diviseur de tension (le long du circuit orange sur le schéma), et on a alors :

$$V_a^- - V_b^- = \frac{R_g}{R_g + 2R_1} (V_a - V_b)$$

Par ailleurs, les deux amplificateurs opérationnels possèdent une boucle de rétroaction négative. Ils sont donc en fonctionnement linéaire, et donc  $V_a^- = V_a^+$  et  $V_b^- = V_b^+$ . D'où :

$$U_{\text{capteur}} = V_b^+ - V_a^+ = V_b^- - V_a^- = \frac{R_g}{R_g + 2R_1} (V_b - V_a)$$

Troisième étape : on peut donc en déduire le gain  $G$  de l'amplificateur d'instrumentation :

$$U_{\text{capteur}} = \frac{R_g}{R_g + 2R_1} V_s \quad \text{donc} \quad G = \frac{V_s}{U_{\text{capteur}}} = \frac{R_g + 2R_1}{R_g} = 1 + 2 \frac{R_1}{R_g}$$

**Question 52** Quel est le rôle de la résistance  $R_g$  ?

La résistance  $R_g$  permet donc de régler le gain de l'amplificateur d'instrumentation.

**Question 53** Expliquer pourquoi ce montage permet d'amplifier la tension  $U_{\text{capteur}}$  sans perturber sa mesure.

Les courants  $i_a^+$  et  $i_b^+$ , au niveau des amplificateurs de gauche, sont nuls. Électriquement, le capteur n'est donc pas influencé par ce montage, qui ne perturbe pas la mesure.

Par ailleurs, comme  $G > 1$ , il s'agit bien d'un montage amplificateur.

**Question 54** Le raccordement du capteur vers le conditionneur de signal est fait à l'aide de conducteur en cuivre d'un diamètre de 3 mm et d'une longueur de 2 m. Pourquoi avoir choisi un diamètre aussi important ?

Le diamètre de ces câbles n'a pas d'importance du point de vue électrique. Les conducteurs ont une résistance :

$$R = \rho \frac{L}{S} = 5,0 \text{ m}\Omega$$

Toutefois, si les courants  $i_a^+$  et  $i_b^+$  ne sont effectivement pas parfaitement nuls en pratique, l'ordre des grandeurs des courants de fuite est, au pire, de 100 nA. Cela correspond à une chute de tension de 0.5 nV dans les câbles, largement négligeable.

## III.5 - Étude de la motorisation du mécanisme de précontrainte

### III.5.a - Commande du moteur

**Objectif** : déterminer comment limiter l'ondulation du courant.

**Question 55** À l'aide de l'annexe 10, déterminer les valeurs numériques de  $\tau_e$  et  $\tau_m$ . Tracer le diagramme asymptotique de Bode du gain de cette fonction de transfert sur le DR.

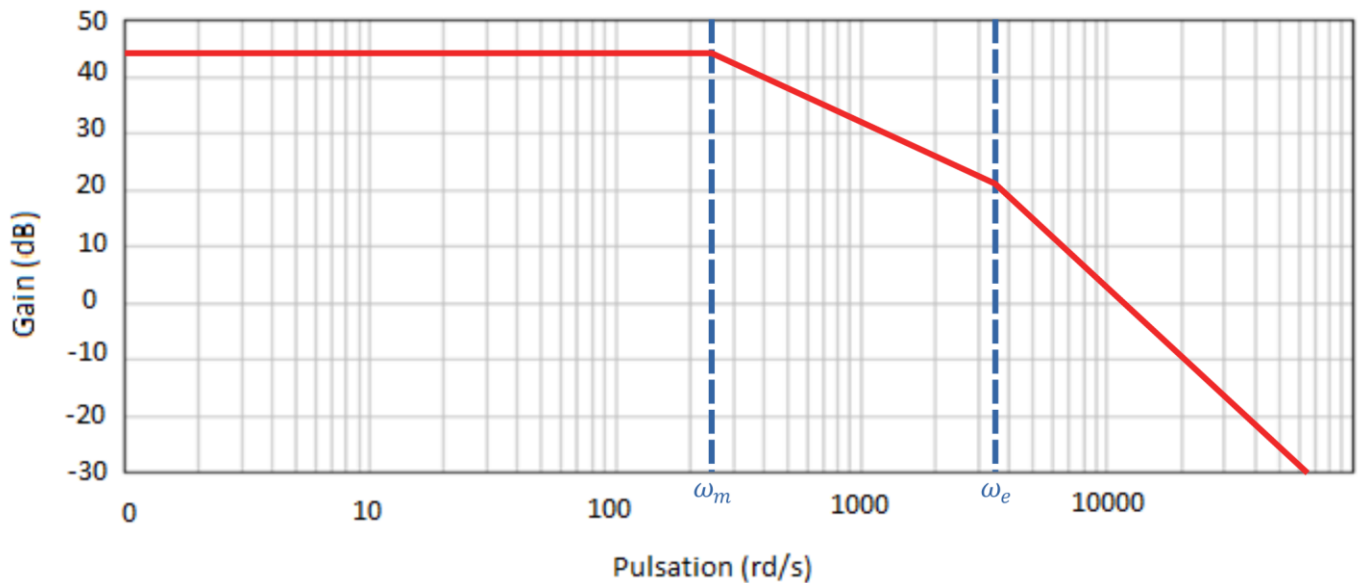
À quel type de filtre peut-on assimiler le moteur ?

On lit sur l'annexe 10 que  $L = 0,329 \text{ mH}$  (« terminal inductance »),  $R = 1,13 \Omega$  (« terminal resistance ») et  $\tau_m = 4,28 \text{ ms}$  (« mechanical time constant »). On en déduit donc  $\tau_e = \frac{L}{R} = 0,291 \text{ ms}$ .

La fonction de transfert  $T(p)$  est donc le produit de deux premiers ordres, de pulsation de cassure respectives :

$$\omega_m = \frac{1}{\tau_m} = 234 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \omega_e = \frac{1}{\tau_e} = 3\,430 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Et de gain en basse fréquence  $G_{dB} = 20 \cdot \log(H_{mo}) = 44,0 \text{ dB}$ .



Le moteur se comporte donc comme un filtre passe-bas, le gain tendant vers zéro pour les hautes fréquences.

**Question 56** Justifier alors le fait que le moteur puisse être alimenté par une tension modulée en largeur d'impulsion. On précisera l'intérêt d'une telle modulation.

Si la fréquence de découpage de la modulation de largeur d'impulsion est suffisamment élevée, les composantes hautes fréquences de la tension seront filtrées par le moteur, qui ne réagit mécaniquement qu'aux basses fréquences, et notamment à la composante continue, c'est-à-dire la valeur moyenne.

Une telle modulation permet de faire varier la valeur moyenne de la tension d'alimentation du moteur, et donc sa vitesse de rotation, suivant un profil déterminé par une tension de commande appelée « modulant ».

**Question 57** La tension en sortie du hacheur est une tension rectangulaire de fréquence  $f_h$ . Comment doit être choisie la période  $T_h = \frac{1}{f_h}$  par rapport à la constante de temps électrique  $\tau_e$  ?

On doit choisir  $T_h < \tau_e$ .

**Question 58** Établir l'expression de la valeur moyenne de la tension  $U_m$ , notée  $U_{moy}$ , aux bornes du moteur en fonction de la tension de la source continue  $V_e$  et du rapport cyclique  $\alpha$ .

Pour  $t \in [0; \alpha T_h]$ , les transistors  $K_1$  et  $K_3$  sont passants et  $K_2$  et  $K_4$  sont bloqués. On a donc  $U_m(t) = V_e$ .

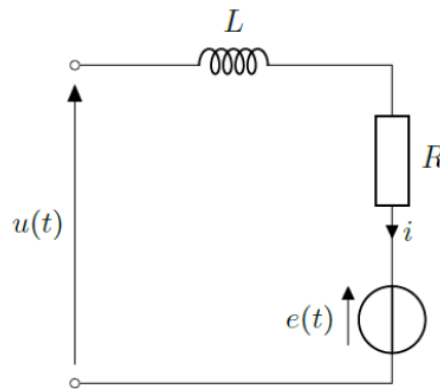
Pour  $t \in [\alpha T_h; T_h]$ , les transistors  $K_1$  et  $K_3$  sont bloqués et  $K_2$  et  $K_4$  sont passants. On a donc  $U_m(t) = -V_e$ .

On a donc :

$$U_{moy} = \frac{1}{T_h} \int_0^{T_h} U_m(t) dt = \frac{1}{T_h} [\alpha T_h V_e + (T_h - \alpha T_h)(-V_e)] = V_e(2\alpha - 1)$$

**Question 59** Donner le schéma électrique équivalent du moteur à courant continu à aimant permanent.

En se plaçant en convention récepteur, on a :



**Question 60** À partir du schéma équivalent de la question Q59 dans lequel on néglige la résistance d'induit, (chute de tension aux bornes de la résistance de l'induit négligeable devant toutes les autres), établir l'expression du courant d'induit  $i(t)$ .

En utilisant la propriété de continuité du courant en  $\alpha T_h$ , déterminer l'ondulation  $\Delta I = I_{max} - I_{min}$  en fonction de  $V_e$ ,  $\alpha$ ,  $L$  et de  $f_h$ .

Sur quels paramètres peut-on agir pour diminuer l'ondulation de courant ?

On se place en régime établi, donc  $e(t) = E$ , et on néglige la résistance d'induit, donc  $u_R(t) = 0$ . D'après la loi des mailles, on a donc :

$$U_m(t) = L \frac{di(t)}{dt} + E \quad \text{donc} \quad \frac{di(t)}{dt} = \frac{U_m(t) - E}{L}$$

Donc :

- pour  $t \in [0; \alpha T_h]$ ,  $\frac{di(t)}{dt} = \frac{V_e - E}{L} > 0$  et donc  $i(t) = \frac{V_e - E}{L} t + I_{min}$  car  $I_{min} = i(0)$  ;
- pour  $t \in [\alpha T_h; T_h]$ ,  $\frac{di(t)}{dt} = \frac{-V_e - E}{L} < 0$  et donc  $i(t) = \frac{-V_e - E}{L} (t - \alpha T_h) + I_{max}$  car  $I_{max} = i(\alpha T_h)$ .

Or, par continuité du courant en  $\alpha T_h$ , ces deux équations de  $i(t)$  sont égales pour  $t = \alpha T_h$  :

$$\frac{V_e - E}{L} \alpha T_h + I_{min} = I_{max}$$

Par ailleurs,  $U_{moy} = \langle U_m(t) \rangle = \langle L \frac{di(t)}{dt} \rangle + \langle E \rangle = 0 + E = E$ , la valeur moyenne d'une dérivée temporelle étant nul en régime établi. D'après la question 58, on a donc  $E = V_e(2\alpha - 1)$ , et donc :

$$\Delta I = I_{max} - I_{min} = \frac{V_e - E}{L} \alpha T_h = \frac{V_e - V_e(2\alpha - 1)}{L} \alpha \frac{1}{f_h} = \frac{2V_e}{Lf_h} \alpha(1 - \alpha)$$

On peut donc diminuer l'ondulation de courant :

- en augmentant la fréquence de découpage  $f_h$  ;
- en augmentant l'inductance du circuit  $L$ , notamment en rajoutant une bobine en série avec le moteur.

On ne peut pas diminuer  $V_e$ , au risque de ne pas pouvoir faire atteindre au moteur les vitesses demandées.

**Question 61** Quel est alors le risque électrique de ce mode de pilotage de commande bipolaire ?

Lorsque tous les composants sont passants, la source d'alimentation est court-circuitée. Un fort courant (limité en pratique pas les résistances parasites des différents composants) va alors y circuler, ce qui risque de l'endommager.

### III.5.b - Vérifications expérimentales des caractéristiques du moteur

**Objectif :** énoncer les procédés expérimentaux permettant de vérifier les caractéristiques électriques et mécaniques du moteur lors d'une opération de maintenance.

**Question 62** Proposer une démarche avec plusieurs protocoles expérimentaux permettant de déterminer :

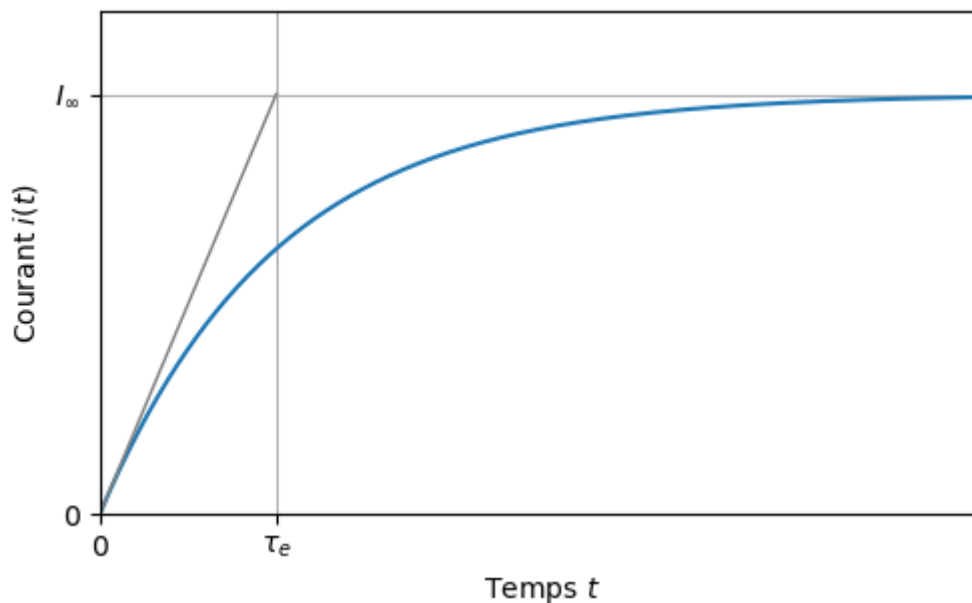
- la résistance  $R$  de l'induit ;
- l'inductance de l'induit  $L$  ;
- le coefficient de la force contre électromotrice.

En bloquant le rotor, on impose  $E = 0$ . En imposant un échelon de tension  $U_m(t) = U_m$  avec la source de tension réglable, on a alors  $U_m = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ . En considérant  $i(t)$  comme le signal de sortie, il s'agit alors d'un système du premier ordre :

$$\frac{I(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{R + Lp} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + \frac{L}{R}p}$$

En relevant le courant à l'aide d'une sonde de tension branché à l'oscilloscope, on obtient donc la courbe caractéristique de la réponse d'un système du premier ordre, sur laquelle on peut mesurer :

- la valeur finale  $I_\infty = \frac{U_m}{R}$  dont on peut déduire  $R$  ;
- le temps caractéristique  $\tau_e = \frac{L}{R}$  dont on peut déduire  $L$ .



Dans une deuxième expérience, on ne bloque plus le rotor. On impose une tension  $U_m(t) = U_m$  constante avec la source de tension réglable, puis, en régime permanent, on mesure le courant  $I$  traversant le moteur avec l'ampèremètre et sa vitesse de rotation  $\Omega$  avec le capteur de vitesse. On a alors l'équation  $U_m = RI + E = RI + k\Omega$ , dont on peut déduire  $k$ .

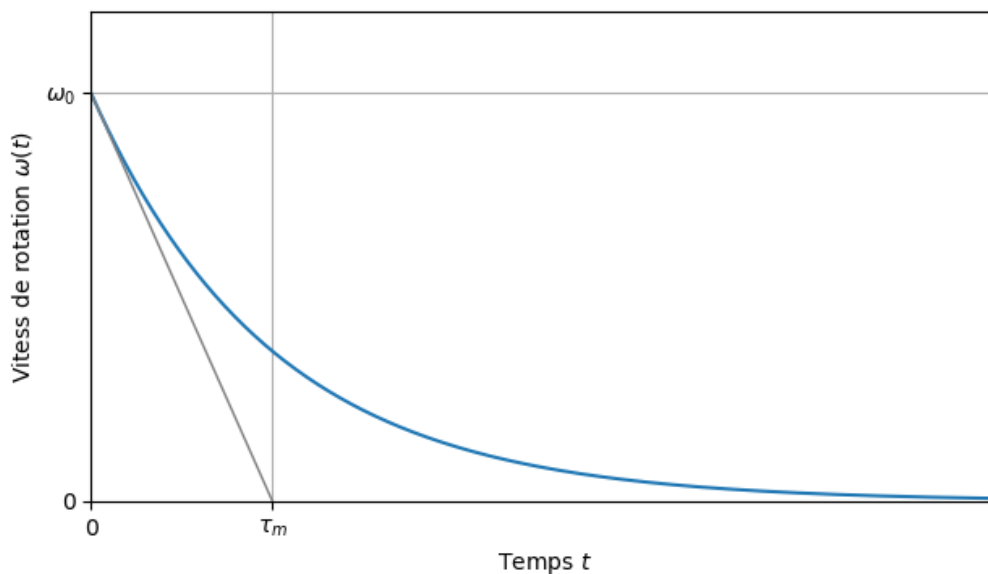
**Question 63** Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse de rotation angulaire  $\omega(t)$  (exprimée en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ). Donner l'expression de la constante de temps mécanique  $\tau_m$ .

Isolons l'arbre moteur. À vide, le seul couple qui s'applique est le couple de frottement. D'après le principe fondamental de la dynamique en moment projeté sur l'axe moteur, on a :

$$J_{mot} \frac{d\omega(t)}{dt} = -C_F(t) = -f\omega(t) \quad \text{donc} \quad \underbrace{\frac{J_{mot}}{f}}_{\tau_m} \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = 0$$

La constante de temps mécanique est donc  $\tau_m = \frac{J_{mot}}{f}$ .

**Question 64** Tracer sur la copie l'allure de la courbe de ralentissement. Comment peut-on déterminer le coefficient de frottement visqueux ?



On peut déterminer la constante de temps mécanique, qui est l'instant où la tangente à l'origine coupe l'asymptote. On a alors  $f = \frac{J_{mot}}{\tau_m}$ .