

# Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2023

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'UPSTI (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

## A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

## Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des droits d'auteur).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

## Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les Sciences de l'Ingénieur, l'orientation, les Grandes Ecoles ainsi que sur les Olympiades de Sciences de l'Ingénieur et sur les Sciences de l'Ingénieur au Féminin sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

# Chariot JacXson U70

Corrigé UPSTI

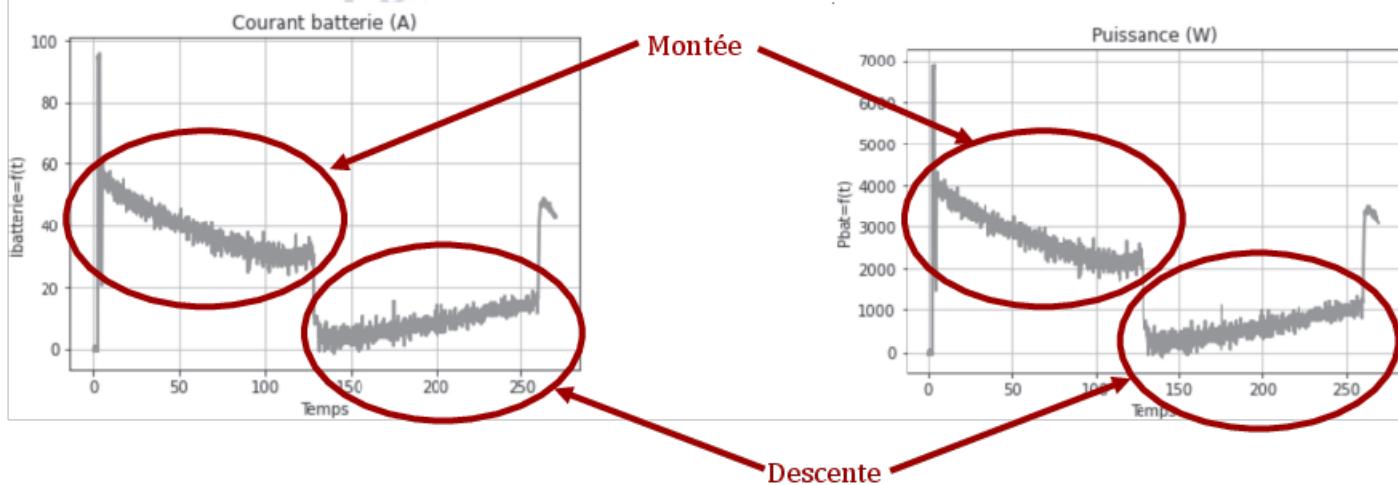
## PARTIE 1 : AUTONOMIE DU JACXSON U70

**Objectif :** évaluer les besoins en énergie lors d'un déplacement type du JacXson U70 (mode roulage) et lors d'une séquence de pose et dépose d'un moteur (mode pose/dépose).

**Question 1** Compléter le tableau relatif aux types d'échanges MEI (Matière, Energie ou Information) entre les divers blocs. Préciser, pour les énergies, la nature des grandeurs de flux (intensité du courant  $I$ , vitesse de translation  $V$ , vitesse de rotation  $\omega$ ) ainsi que la nature des grandeurs d'effort (tension  $U$ , force  $F$ , couple  $C$ ).

Identification	Type MEI	Flux	Effort
1	E	$I$	$U$
2	E	$\omega$	$C$
3	I		
4	E	$\omega$	$C$

**Question 2** Sur le DR, entourer les zones des courbes correspondant aux phases de montée et de descente de la charge lors de cet essai.



**Question 3** Sur le DR, compléter le script python, à partir de la ligne 35, afin de construire les valeurs de la puissance électrique fournie par la batterie stockées dans le tableau *Pbat* avec les éléments calculés à partir des données mesurées et des caractéristiques de la batterie en supposant la tension batteries *Ubat* constante. Compléter la définition de la fonction *energie(p,t)* qui prend en argument deux tableaux *p* et *t* contenant les valeurs respectivement de la puissance et des instants d'échantillonnages et qui renvoie l'énergie consommée.

```

29 #Lecture des données depuis le fichier csv
30 for i in range (n):
31     # ajout d'un élément au tableau t
32     t.append(float(feuille.cell_value(i+1,0)))
33     # ajout d'un élément au tableau Ibat
34     Ibat.append(float(feuille.cell_value(i+1,1)))
35     Pbat.append(Ubat*Ibat[i])

```

Remarque: sous Spyder, xlrd ne veut pas importer des fichiers ".csv"

```

def energie(p,t)
    W=0
    for i in range (len(t)-1):
        W+=(t[i+1]-t[i])*p[i] #ou len(p)-1
    return W

```

**Question 4** À partir des caractéristiques de la batterie données en annexe 5 et en considérant une disponibilité de 80 % de sa charge (20 % de sa capacité énergétique ne seront donc pas utilisés), déterminer le nombre disponible d'opérations de pose et de dépose. Vérifier la cohérence de ce résultat avec le cahier des charges donné par le constructeur.

La capacité totale de la batterie est

$$W_{bat} = U_{bat} \cdot C_{bat} = 72 \times 52 = 3744 \text{ Wh} = 13478400 \text{ J}$$

Soit 80 % utile

$$W_{utilbat} = 10782720 \text{ J} \approx 10783 \text{ kJ}$$

L'énergie consommée pour un aller-retour et un cycle de pose / dépose :

$$W_{conso} = W_{cycle} + W_{déplacement} = 420 \cdot 10^3 + 2392 \cdot 10^3 = 2812 \text{ kJ}$$

Avec ce type de batterie, le chariot peut faire 3,83 cycles. Or le système doit effectuer 3 cycles. Ce type de batterie permet donc de respecter l'exigence du cahier des charges.

## PARTIE 2 : PARAMETRES GEOMETRIQUES D'UN ENSEMBLE BRAS ELEVATEUR

**Objectif :** exprimer la loi entrée-sortie géométrique d'un ensemble bras élévateur et valider le choix de la course du vérin électrique.

**Question 5** Donner les expressions des distances  $H(t)$  et  $\lambda(t)$  en fonction de l'angle  $\theta(t)$  et de la longueur  $L$ .

$$\bar{OC} + \bar{CB} + \bar{BO} = \bar{0}$$

$$H(t) \cdot \bar{y}_0^- - L \cdot \bar{x}_2^- - L \cdot \bar{x}_1^- = \bar{0}$$

$$\begin{aligned} H(t) \cdot \bar{y}_0^- - L \cdot (\cos \beta \cdot \bar{x}_0^- + \sin \beta \cdot \bar{y}_0^-) - L \cdot (\cos \theta \cdot \bar{x}_0^- + \sin \theta \cdot \bar{y}_0^-) \\ = H(t) \cdot \bar{y}_0^- - L \cdot (-\cos \theta \cdot \bar{x}_0^- + \sin \theta \cdot \bar{y}_0^-) - L \cdot (\cos \theta \cdot \bar{x}_0^- + \sin \theta \cdot \bar{y}_0^-) = \bar{0} \end{aligned}$$

$$H(t) = 2 \cdot L \cdot \sin \theta(t)$$

$$\bar{OA} + \bar{AB} + \bar{BO} = \bar{0}$$

$$\lambda(t) \cdot \bar{x}_0^- + L \cdot \bar{x}_2^- - L \cdot \bar{x}_1^- = \bar{0}$$

$$\begin{aligned} \lambda(t) \cdot \bar{x}_0^- + L \cdot (\cos \beta \cdot \bar{x}_0^- + \sin \beta \cdot \bar{y}_0^-) - L \cdot (\cos \theta \cdot \bar{x}_0^- + \sin \theta \cdot \bar{y}_0^-) \\ = \lambda(t) \cdot \bar{y}_0^- + L \cdot (-\cos \theta \cdot \bar{x}_0^- + \sin \theta \cdot \bar{y}_0^-) - L \cdot (\cos \theta \cdot \bar{x}_0^- + \sin \theta \cdot \bar{y}_0^-) = \bar{0} \end{aligned}$$

$$\lambda(t) = 2 \cdot L \cdot \cos \theta(t)$$

**Question 6** En traduisant une fermeture géométrique de chaîne de solides, montrer que la distance  $l_3(t)$  peut s'exprimer en fonction de l'angle  $\theta(t)$  sous la forme :

$l_3(t) = \sqrt{(A_3 \cdot \cos(\theta(t)) + B_3 \cdot \sin(\theta(t)))^2 + (C_3 \cdot \cos(\theta(t)) + D_3 \cdot \sin(\theta(t)))^2}$  où  $A_3, B_3, C_3$  et  $D_3$  représentent des constantes à exprimer en fonction de  $l_1, l_2, e_1, e_2$  et de  $L$ .

$$\bar{OM} + \bar{MN} + \bar{NA} + \bar{AO} = \bar{0}$$

$$l_1 \cdot \bar{x}_1^- + e_1 \cdot \bar{y}_1^- + l_3(t) \cdot \bar{x}_3^- - l_2 \cdot \bar{x}_2^- - e_2 \cdot \bar{y}_2^- - \lambda(t) \cdot \bar{x}_0^- = \bar{0}$$

$$l_3(t) \cdot \bar{x}_3^- = l_2 \cdot \bar{x}_2^- + e_2 \cdot \bar{y}_2^- + \lambda(t) \cdot \bar{x}_0^- - l_1 \cdot \bar{x}_1^- - e_1 \cdot \bar{y}_1^- = l_2 \cdot \bar{x}_2^- + e_2 \cdot \bar{y}_2^- + 2 \cdot L \cdot \cos \theta(t) \cdot \bar{x}_0^- - l_1 \cdot \bar{x}_1^- - e_1 \cdot \bar{y}_1^-$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_3(t) \cdot \cos \delta = -l_2 \cdot \cos \theta(t) - e_2 \cdot \sin \theta(t) + 2 \cdot L \cdot \cos \theta(t) - l_1 \cdot \cos \theta(t) + e_1 \cdot \sin \theta(t) \\ l_3(t) \cdot \sin \delta = l_2 \cdot \sin \theta(t) - e_2 \cdot \cos \theta(t) - l_1 \cdot \sin \theta(t) - e_1 \cdot \cos \theta(t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_3(t) \cdot \cos \delta = (2 \cdot L - l_1 - l_2) \cdot \cos \theta(t) + (e_1 - e_2) \cdot \sin \theta(t) \\ l_3(t) \cdot \sin \delta = (-e_1 - e_2) \cdot \cos \theta(t) + (l_2 - l_1) \cdot \sin \theta(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$(1)^2 + (2)^2 = l_3^2$$

$$= ((2 \cdot L - l_1 - l_2) \cdot \cos \theta(t) + (e_1 - e_2) \cdot \sin \theta(t))^2 + ((-e_1 - e_2) \cdot \cos \theta(t) + (l_2 - l_1) \cdot \sin \theta(t))^2$$

$$l_3(t) = \sqrt{(A_3 \cdot \cos(\theta(t)) + B_3 \cdot \sin(\theta(t)))^2 + (C_3 \cdot \cos(\theta(t)) + D_3 \cdot \sin(\theta(t)))^2}$$

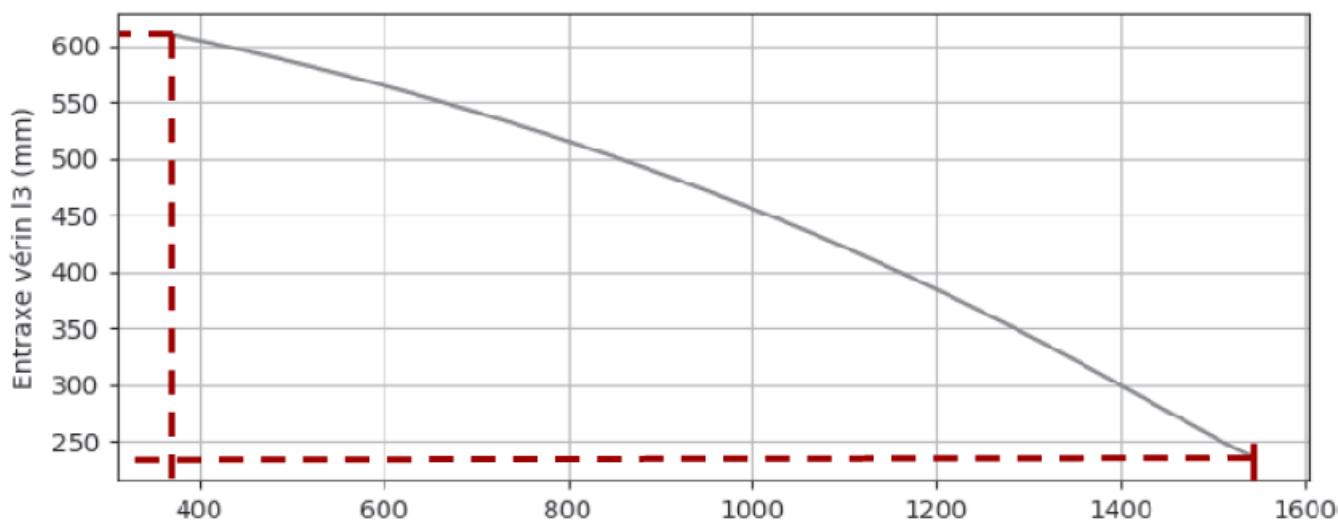
$$A_3 = 2 \cdot L - l_1 - l_2$$

$$B_3 = e_1 - e_2$$

$$C_3 = -e_1 - e_2$$

$$D_3 = l_2 - l_1$$

**Question 7** Relever la course utile du vérin nécessaire pour assurer le déplacement de l'extrémité C du bras principal depuis la position "butée mécanique basse" jusqu'à la position "butée mécanique haute".



Pour la position butée mécanique basse :  $H = 370 \text{ mm}$        $l_3 = 610 \text{ mm}$

Pour la position butée mécanique haute :  $H = 1545 \text{ mm}$        $l_3 = 235 \text{ mm}$

(Mesures recalculées ...)

Donc la course du vérin est :

$$\text{course} = 375 \text{ mm}$$

**Question 8** Le système vis-écrou du vérin électrique doit présenter une longueur filetée de la vis au minimum égale à la course utile augmentée de la longueur de l'écrou. Justifier la longueur filetée de la vis retenue par le constructeur (annexe 2).

La longueur minimum de la vis est de :

$$\text{longueur} = \text{course} + \text{longueur écrou} = 440 \text{ mm}$$

La longueur choisie est 510 mm. La longueur permet d'éviter de se retrouver dans les positions extrêmes de la tige (environ 13 % de marge)

## PARTIE 3 : VALIDATION DU MOTEUR D'UN VERIN ELECTRIQUE

**Objectif:** déterminer l'expression du couple moteur d'un vérin électrique et valider le choix de ce moteur.

**Question 9** En vous référant à l'architecture du vérin électrique (annexe 3), donner l'expression de la vitesse de sortie de la tige (4) par rapport au corps (3), notée  $v_{43}(t)$ , exprimée en  $\text{mm/s}$ , en fonction de la vitesse de rotation du moteur  $N_m(\text{tr/min})$  et des caractéristiques de la transmission.

$$v_{43}(t) = \frac{p}{2\pi} \cdot r \cdot \omega_m = \frac{p}{60} \cdot r \cdot N_m$$

**Question 10** Exprimer dans la base  $B_1(\bar{x}_1^-, \bar{y}_1^-, \bar{z}_0^-)$ , les torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V}_{1/0}^B\}$  puis  $\{\mathcal{V}_{2/0}^B\}$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$  et de  $L$ .

$$\{\mathcal{V}_{1/0}^B\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Omega}_{1/0} \\ \bar{V}_{1/0}^B \end{Bmatrix}_B$$

$$\bar{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^-$$

$$\bar{V}_{1/0}^B = \bar{B}\bar{O} \wedge \bar{\Omega}_{1/0} = -L \cdot \bar{x}_1^- \wedge \dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^- = L \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_1^-$$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}^B\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^- \\ L \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_1^- \end{Bmatrix}_B$$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}^B\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Omega}_{2/0} \\ \bar{V}_{2/0}^B \end{Bmatrix}_B$$

$$\bar{\Omega}_{2/0} = \dot{\beta} \cdot \bar{z}_0^- = -\dot{\theta} \cdot z_0^-$$

$$\bar{V}_{2/0}^B = \bar{V}_{2/1}^B + \bar{V}_{1/0}^B = \bar{V}_{1/0}^B$$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}^B\} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^- \\ L \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_1^- \end{Bmatrix}_B$$

**Question 11** Écrire 2 relations vectorielles liant respectivement le vecteur vitesse  $\bar{V}_{N,4/0}$  à  $\bar{V}_{B,2/0}$  et à  $\bar{\Omega}_{2/0}$  et le vecteur vitesse  $\bar{V}_{M,3/0}$  à  $\bar{V}_{B,2/0}$  et à  $\bar{\Omega}_{1/0}$ . Montrer que la vitesse algébrique  $v_{43}(t)$  peut être exprimée par  $v_{43}(t) = -(\bar{\Omega}_{1/0} \wedge (\bar{B}\bar{M} + \bar{B}\bar{N})) \cdot \bar{x}_3^-$  (le calcul de cette expression n'est pas demandé).

$$\bar{V}_{4/0}^N = \bar{V}_{4/2}^N + \bar{V}_{2/0}^N = \bar{V}_{2/0}^N = \bar{V}_{2/0}^B + \bar{N}\bar{B} \wedge \bar{\Omega}_{2/0} \quad (1)$$

$$\bar{V}_{3/0}^M = \bar{V}_{3/1}^M + \bar{V}_{1/0}^M = \bar{V}_{1/0}^M = \bar{V}_{1/0}^B + \bar{M}\bar{B} \wedge \bar{\Omega}_{1/0} \quad (2)$$

À la précédente question, les résultats obtenus sont :

$$\bar{\Omega}_{2/0} = -\bar{\Omega}_{1/0}$$

$$\bar{V}_{1/0}^B = \bar{V}_{2/0}^B$$

En exprimant (2) – (1) :

$$\bar{V}_{3/0}^M - \bar{V}_{4/0}^N = \bar{V}_{1/0}^B + \bar{M}\bar{B} \wedge \bar{\Omega}_{1/0} - \bar{V}_{2/0}^B - \bar{N}\bar{B} \wedge \bar{\Omega}_{2/0} = \bar{M}\bar{B} \wedge \bar{\Omega}_{1/0} + \bar{N}\bar{B} \wedge \bar{\Omega}_{1/0} = \bar{\Omega}_{1/0} \wedge (\bar{B}\bar{M} + \bar{B}\bar{N})$$

$$(\bar{V}_{3/0}^M - \bar{V}_{4/0}^N) \cdot \bar{x}_3^- = -v_{43}(t) = (\bar{\Omega}_{1/0} \wedge (\bar{B}\bar{M} + \bar{B}\bar{N})) \cdot \bar{x}_3^-$$

$$v_{43}(t) = -(\bar{\Omega}_{1/0} \wedge (\bar{B}\bar{M} + \bar{B}\bar{N})) \cdot x_3^-$$

**Question 12** Exprimer l'énergie cinétique  $T_{1/0}$  du bras (1) dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ . On écrira le résultat sous la forme  $T_{1/0} = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\theta}^2(t)$  en précisant l'expression de  $J_1$ .

$$T_{1/0} = \frac{1}{2} \cdot \{\mathcal{V}_{1/0}^o\} \otimes \{\mathcal{C}_{1/0}^o\}$$

$$\{\mathcal{V}_{1/0}^o\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^- \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_o$$

$$\{\mathcal{C}_{1/0}^o\} = \begin{Bmatrix} m_1 \cdot \bar{V}_{1/0}^{G_1} \\ \vec{\sigma}_{1/0}^o \end{Bmatrix}_o$$

$$\bar{V}_{1/0}^{G_1} = \bar{G}_1 \bar{O} \wedge \bar{\Omega}_{1/0} = -a_1 \cdot \bar{x}_1^- \wedge \dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^- = a_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_1^-$$

$$\vec{\sigma}_{1/0}^o = [I_{o(1)}] \cdot \bar{\Omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{vmatrix}_{(o, B_1)} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{x}_1^- \\ \bar{y}_1^- \\ \bar{z}_0^- \end{Bmatrix} = C_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^-$$

$$T_{1/0} = \frac{1}{2} \cdot \{\mathcal{V}_{1/0}^o\} \otimes \{\mathcal{C}_{1/0}^o\} = \frac{1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^- \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_o \otimes \begin{Bmatrix} m_1 a_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_1^- \\ C_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^- \end{Bmatrix}_o = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot \dot{\theta}^2$$

Donc :

$$J_1 = C_1$$

**Question 13** Exprimer dans la base  $\mathcal{B}_2(\bar{x}_2^-, \bar{y}_2^-, \bar{z}_0^-)$ , le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{2/0}^{G_2}\}$ ; montrer que le vecteur vitesse  $\bar{V}_{G_2,2/0}$  peut s'écrire  $\bar{V}_{G_2,2/0} = L \cdot \sin(2 \cdot \theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{x}_2^- - (L \cdot \cos(2 \cdot \theta(t)) + a_2) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{y}_2^-$ . On pourra utiliser la projection  $\bar{y}_1^- = \sin(2 \cdot \theta(t)) \cdot \bar{x}_2^- - \cos(2 \cdot \theta(t)) \cdot \bar{y}_2^-$ .

$$\{\mathcal{V}_{2/0}^{G_2}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Omega}_{2/0} \\ \bar{V}_{2/0}^{G_2} \end{Bmatrix}_{G_2}$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{2/0}^{G_2} &= \bar{V}_{2/0}^B + \bar{G}_2 \bar{B} \wedge \bar{\Omega}_{2/0} = L \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_1^- - a_2 \cdot \bar{x}_2^- \wedge (-\dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^-) = L \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_1^- - a_2 \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_2^- \\ &= L \cdot \dot{\theta} \cdot (\sin(2 \cdot \theta(t)) \cdot \bar{x}_2^- - \cos(2 \cdot \theta(t)) \cdot \bar{y}_2^-) - a_2 \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_2^- \end{aligned}$$

$$\bar{V}_{2/0}^{G_2} = L \cdot \sin(2 \cdot \theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{x}_2^- - (L \cdot \cos(2 \cdot \theta(t)) + a_2) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{y}_2^-$$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}^{G_2}\} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^- \\ L \cdot \sin(2 \cdot \theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{x}_2^- - (L \cdot \cos(2 \cdot \theta(t)) + a_2) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{y}_2^- \end{Bmatrix}_{G_2}$$

**Question 14** Exprimer le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}_{2/0}^{G_2}\}$  du bras (2) dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ .

$$\{\mathcal{C}_{2/0}^{G_2}\} = \begin{Bmatrix} m_2 \cdot \bar{V}_{2/0}^{G_2} \\ \vec{\sigma}_{2/0}^{G_2} \end{Bmatrix}_{G_2}$$

$$\vec{\sigma}_{2/0}^{G_2} = [I_{G_2(2)}] \cdot \bar{\Omega}_{2/0} = \begin{vmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{vmatrix}_{(G_2, B_2)} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_2^- \\ \bar{y}_2^- \\ z_0^- \end{vmatrix} = -\dot{\theta} \cdot (-D_2 \cdot \bar{y}_2^- + C_2 \cdot \bar{z}_0^-)$$

$$\left\{ \mathcal{C}_{2/0}^{G_2} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \cdot (L \cdot \sin(2 \cdot \theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{x}_2^- - (L \cdot \cos(2 \cdot \theta(t)) + a_2) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{y}_2^-) \\ -\dot{\theta} \cdot (-D_2 \cdot \bar{y}_2^- + C_2 \cdot \bar{z}_0^-) \end{array} \right\}_{G_2}$$

**Question 15** Déduire l'énergie cinétique  $T_{2/0}$  du bras (2) dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ , sous la forme  $T_{2/0} = \frac{1}{2} \cdot J_2(t) \cdot \dot{\theta}^2(t)$  en précisant l'expression de  $J_2(t)$  en fonction des données cinétiques de ce solide et des paramètres géométriques  $L, a_2$  et de  $\theta(t)$ .

$$T_{2/0} = \frac{1}{2} \cdot \{ \mathcal{V}_{2/0}^{G_2} \} \otimes \{ \mathcal{C}_{2/0}^{G_2} \} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ L \cdot \sin(2 \cdot \theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{x}_2^- - (L \cdot \cos(2 \cdot \theta(t)) + a_2) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{y}_2^- \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{array}{l} m_2 \cdot (L \cdot \sin(2 \cdot \theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{x}_2^- - (L \cdot \cos(2 \cdot \theta(t)) + a_2) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \bar{y}_2^-) \\ -\dot{\theta} \cdot (-D_2 \cdot \bar{y}_2^- + C_2 \cdot \bar{z}_0^-) \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$T_{2/0} = \frac{1}{2} \cdot \left( m_2 \cdot \left( (L \cdot \sin(2 \cdot \theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t))^2 + ((L \cdot \cos(2 \cdot \theta(t)) + a_2) \cdot \dot{\theta}(t))^2 \right) + C_2 \cdot \dot{\theta}^2(t) \right)$$

$$T_{2/0} = \frac{1}{2} \cdot \left( m_2 \cdot \left( (L \cdot \sin(2 \cdot \theta(t)))^2 + (L \cdot \cos(2 \cdot \theta(t)) + a_2)^2 \right) + C_2 \right) \cdot \dot{\theta}^2(t)$$

Donc :

$$J_2 = m_2 \cdot \left( (L \cdot \sin(2 \cdot \theta(t)))^2 + (L \cdot \cos(2 \cdot \theta(t)) + a_2)^2 \right) + C_2$$

**Question 16** Montrer que le vecteur vitesse  $\bar{V}_{C,2/0}$  s'écrit  $\bar{V}_{C,2/0} = V_C \cdot \bar{y}_0^-$  en précisant l'expression de  $V_C$ . Exprimer l'énergie cinétique  $T_{M_{ch}/0}$  de la masse concentrée  $M_{ch}$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ , sous la forme  $T_{M_{ch}/0} = \frac{1}{2} \cdot J_{M_{ch}}(t) \cdot \dot{\theta}^2(t)$  en précisant l'expression de  $J_{M_{ch}}(t)$  en fonction de  $M_{ch}, L$  et de  $\theta(t)$ .

$$\begin{aligned} \bar{V}_{2/0}^C &= \bar{V}_{2/0}^B + \bar{C} \bar{B} \wedge \bar{\Omega}_{2/0} = L \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_1^- - L \cdot \bar{x}_2^- \wedge (-\dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^-) = L \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_1^- - L \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_2^- = L \cdot \dot{\theta} \cdot (\bar{y}_1^- - \bar{y}_2^-) \\ &= L \cdot \dot{\theta} \cdot (-\sin \theta \cdot \bar{x}_0^- + \cos \theta \cdot \bar{y}_0^- + \sin \theta \cdot \bar{x}_0^- + \cos \theta \cdot \bar{y}_0^-) \end{aligned}$$

$$\bar{V}_{2/0}^C = 2 \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot \bar{y}_0^-$$

Avec  $V_c = 2 \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$

$$T_{M_{ch}/0} = \frac{1}{2} \cdot \{ \mathcal{V}_{M_{ch}/0}^C \} \otimes \{ \mathcal{C}_{M_{ch}/0}^C \}$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{M_{ch}/0}^C \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_{M_{ch}/0} \\ \bar{V}_{M_{ch}/0}^C \end{array} \right\}_C$$

$$\bar{\Omega}_{M_{ch}/0} = \bar{0}$$

$$\bar{V}_{M_{ch}/0}^C = \bar{V}_{2/0}^C = V_c \cdot y_0^-$$

$$\{\mathcal{C}_{M_{ch}/0}^C\} = \left\{ \begin{matrix} M_{ch} \cdot \bar{V}_{M_{ch}/0}^C \\ \vec{\sigma}_{M_{ch}/0}^C \end{matrix} \right\}_{M_{ch}}$$

$$\vec{\sigma}_{M_{ch}/0}^C = \bar{0}$$

$$T_{M_{ch}/0} = \frac{1}{2} \cdot \{\mathcal{V}_{M_{ch}/0}^C\} \otimes \{\mathcal{C}_{M_{ch}/0}^C\} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{matrix} \bar{0} \\ V_c \cdot \bar{y}_0^- \end{matrix} \right\} \otimes \left\{ \begin{matrix} M_{ch} \cdot V_c \cdot \bar{y}_0^- \\ \bar{0} \end{matrix} \right\}$$

$$T_{M_{ch}/0} = \frac{1}{2} \cdot M_{ch} \cdot V_c^2 = \frac{1}{2} \cdot M_{ch} \cdot (2 \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta)^2$$

$$T_{M_{ch}/0} = \frac{1}{2} \cdot M_{ch} \cdot (2 \cdot L \cdot \cos \theta)^2 \cdot \dot{\theta}^2(t)$$

$$J_{ch} = M_{ch} \cdot (2 \cdot L \cdot \cos \theta)^2$$

**Question 17** Exprimer l'énergie cinétique  $T_{mot/0}$  du rotor moteur en supposant que  $\bar{\Omega}_{3/0} \approx \bar{0}$ . Donner l'expression de l'énergie cinétique  $T_{\Sigma/0}$  de l'ensemble  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ , sous la forme  $T_{\Sigma/0} = \frac{1}{2} \cdot J_{\Sigma}(t) \cdot \omega_m^2(t)$  en précisant l'expression de  $J_{\Sigma}(t)$  en fonction de  $J_1(t), J_2(t), J_{M_{ch}}(t), J_m(t)$  et de  $k(t)$ .

$$T_{mot/0} = \frac{1}{2} \cdot J_m \cdot \omega_m^2(t)$$

$$T_{\Sigma/0} = T_{1/0} + T_{2/0} + T_{M_{ch}/0} + T_{mot/0} = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \cdot J_{M_{ch}} \cdot \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \cdot J_m \cdot \omega_m^2(t)$$

$$T_{\Sigma/0} = \frac{1}{2} \cdot \left( k^2(t) \cdot (J_1(t) + J_2(t) + J_{M_{ch}}(t)) + J_m(t) \right) \cdot \omega_m^2(t)$$

$$J_{\Sigma}(t) = k^2(t) \cdot (J_1(t) + J_2(t) + J_{M_{ch}}(t)) + J_m(t)$$

**Question 18** Faire un bilan des puissances des actions mécaniques extérieures et intérieures à l'ensemble  $\Sigma$  et donner leur expression en fonction des différentes données du problème.

Exprimer notamment la puissance  $P_{pes}$  de la force de pesanteur appliquée sur la masse  $M_{ch}$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  en écrivant le résultat sous la forme :

$$P_{pes} = C_{pes}(t) \cdot \omega_m(t)$$

en donnant l'expression de  $C_{pes}(t)$  en fonction de  $M_{ch}, L, \theta(t), g$  et  $k(t)$ .

Toutes les liaisons sont supposées parfaites, il n'y a donc pas de puissance générée ou perdue dans ces liaisons.

Puissance développée par le moteur :  $P_{mot} = C_m(t) \cdot \omega_m(t)$

Puissance due à la pesanteur sur le bras (1) :  $P_1 = \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^- \\ a_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_1^- \end{matrix} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} -m_1 \cdot g \cdot \bar{y}_0^- \\ \bar{0} \end{matrix} \right\}_{G_1} = -a_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$

Puissance due à la pesanteur sur le bras (2) :  $P_2 = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \cdot \bar{z}_0^- \\ L \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_1^- - a_2 \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_2^- \end{Bmatrix}_{G_2} \otimes \begin{Bmatrix} -m_2 \cdot g \cdot \bar{y}_0^- \\ 0 \end{Bmatrix}_{G_2}$

$$P_2 = -L \cdot m_2 \cdot g \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta - a_2 \cdot \dot{\theta} \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \theta = -m_2 \cdot g \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot (L + a_2)$$

Puissance due à la pesanteur sur la masse  $M_{ch}$  :  $P_{M_{ch}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ V_c \cdot \bar{y}_0^- \end{Bmatrix}_C \otimes \begin{Bmatrix} -M_{ch} \cdot g \cdot \bar{y}_0^- \\ 0 \end{Bmatrix}_C = -M_{ch} \cdot g \cdot V_c$

$$P_{M_{ch}} = -2 \cdot M_{ch} \cdot g \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$$

Remarque :  $P_1$  et  $P_2$  sont négligées dans l'énoncé.

$$P_{pes} = P_{M_{ch}} = -2 \cdot M_{ch} \cdot g \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$$

$$P_{pes} = -2 \cdot M_{ch} \cdot g \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta = -2 \cdot M_{ch} \cdot L \cdot g \cdot k \cdot \omega_m \cdot \cos \theta$$

$$C_{pes} = -2 \cdot M_{ch} \cdot L \cdot g \cdot k \cdot \cos \theta$$

**Question 19** En comparant les 2 courbes, que peut-on conclure quant aux valeurs des différents termes de l'expression du couple moteur obtenue avec le théorème de l'énergie cinétique.

Le terme  $C_a$  est peu prépondérant et pourra être négligé dans la suite de l'étude. De plus, l'écart est constant donc le terme  $J_\Sigma(t) \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt}$  l'est aussi. Donc  $J_\Sigma(t)$  pourra être considéré comme constant,  $\frac{d\omega_m(t)}{dt}$  étant constant (rampe pour la vitesse angulaire). Cette hypothèse sera confirmée Q25. On en déduit que le couple moteur  $C_m$  sert principalement à compenser le poids du réacteur  $C_{pes}$ , ce qui est cohérent avec la réalité physique étant donné l'importance de la masse de celui-ci par rapport aux autres grandeurs.

**Question 20** Compléter sur le DR, la définition de la fonction  $Ctherm(C, t)$  qui permet de retourner le couple thermique équivalent à partir de deux paramètres de type tableaux :  $C$  contenant les valeurs d'un couple au cours du temps et  $t$  contenant les valeurs des instants échantillonnés.

```
from math import *
def Ctherm(C, t):
    Cth = 0
    n=len(t)
    for i in range(n-1):
        Cth+=(t[i+1]-t[i])*(C[i]**2)
    Cth=sqrt(Cth/t[n-1])
    return Cth
```

**Question 21** À partir des résultats précédents et des caractéristiques du moteur données dans l'annexe 2, conclure sur le choix de ce dernier.

Le couple nominal du moteur choisi est  $2,9 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Le couple thermique est  $2,34 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Cette caractéristique est validée.

Le couple maximum du moteur choisi est  $9,9 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Le couple maximum mesuré sur les courbes de simulation thermique est  $4,4 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Cette caractéristique est validée.

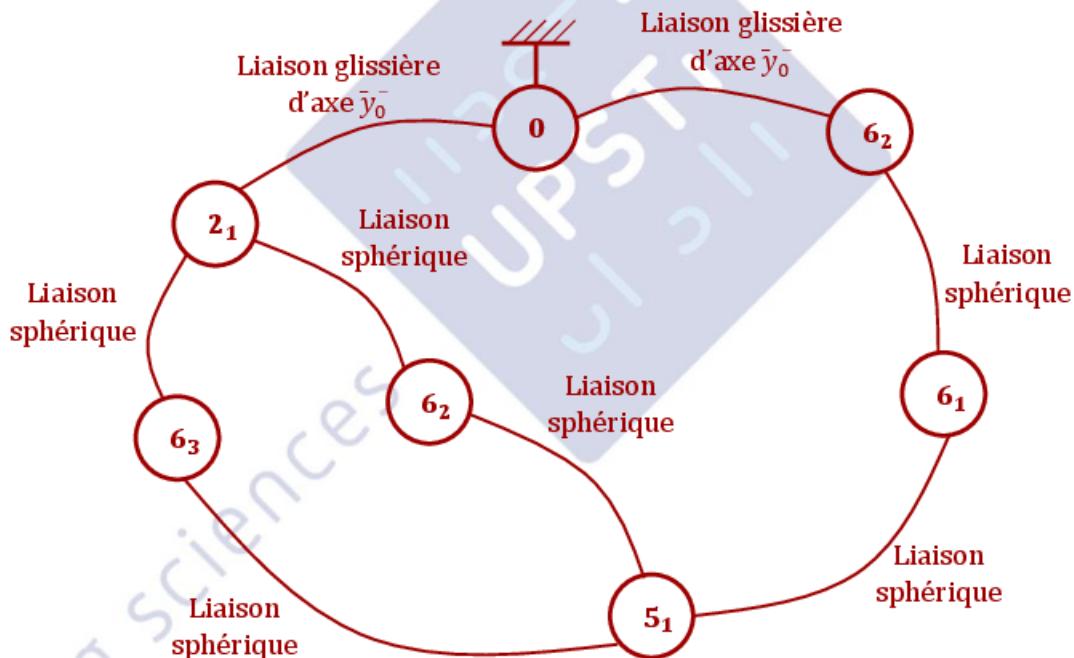
Le moteur choisi permet donc de répondre aux différentes exigences.

## PARTIE 4 : ANALYSE DE LA STRUCTURE DU CHARIOT JACXSON

**Objectif :** justifier l'architecture du système satisfaisant aux contraintes liées aux opérations de pose et dépose d'un moteur d'avion.

**Question 22** Montrer que le positionnement de la poutre ( $5_1$ ) par rapport au bâti est isostatique en précisant bien toutes les mobilités. Indiquer quelle exigence est satisfaite.

Graphe de liaisons :



$$h = 6 \cdot \gamma + m - I_c$$

2 boucles indépendantes :

$$I_c = \frac{\gamma}{3 \times 6} + 1 \times 2 = 20$$

*6 liaisons sphériques      2 liaisons glissières*

$$m = 3 + 3 + 2$$

3 mobilités fonctionnelles (mobilités internes fournies dans le sujet)

3 mobilités internes dans les trois bielles

2 mobilités utiles dans les glissières

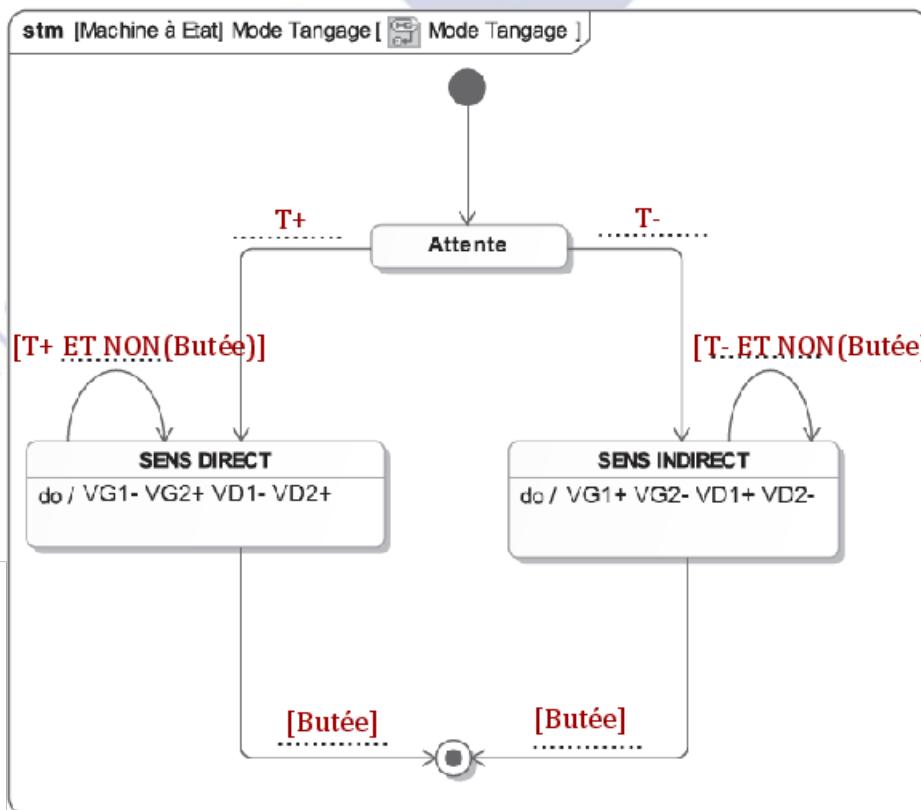
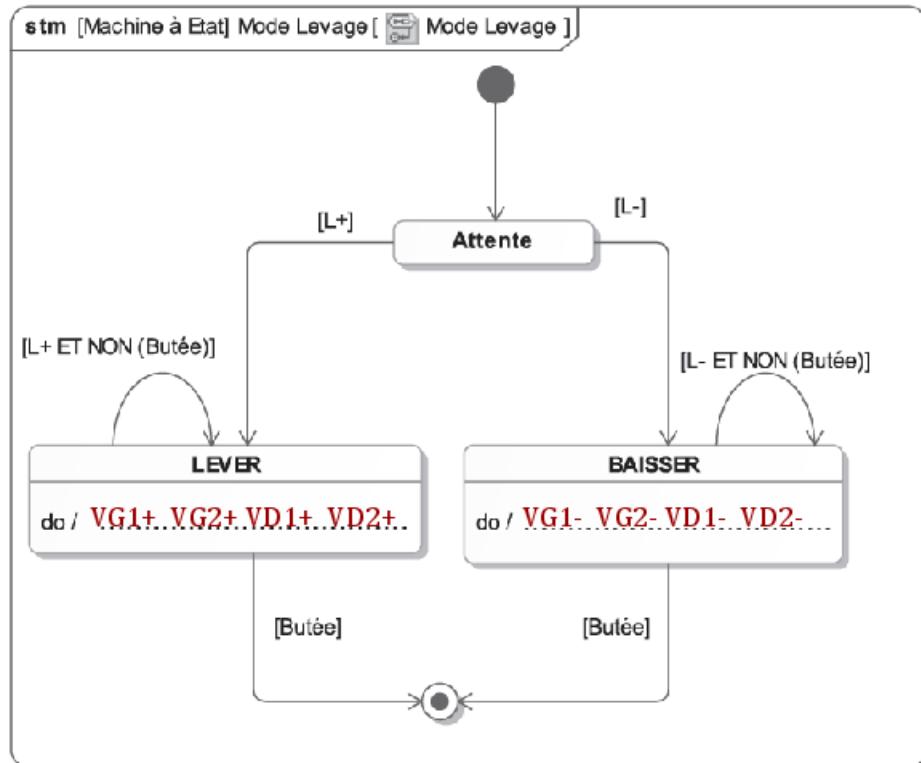
$$h = 6 \cdot \gamma + m - I_c = 12 + 8 - 20 = 0$$

Le système est bien isostatique et permet de respecter l'exigence Id="5.1"

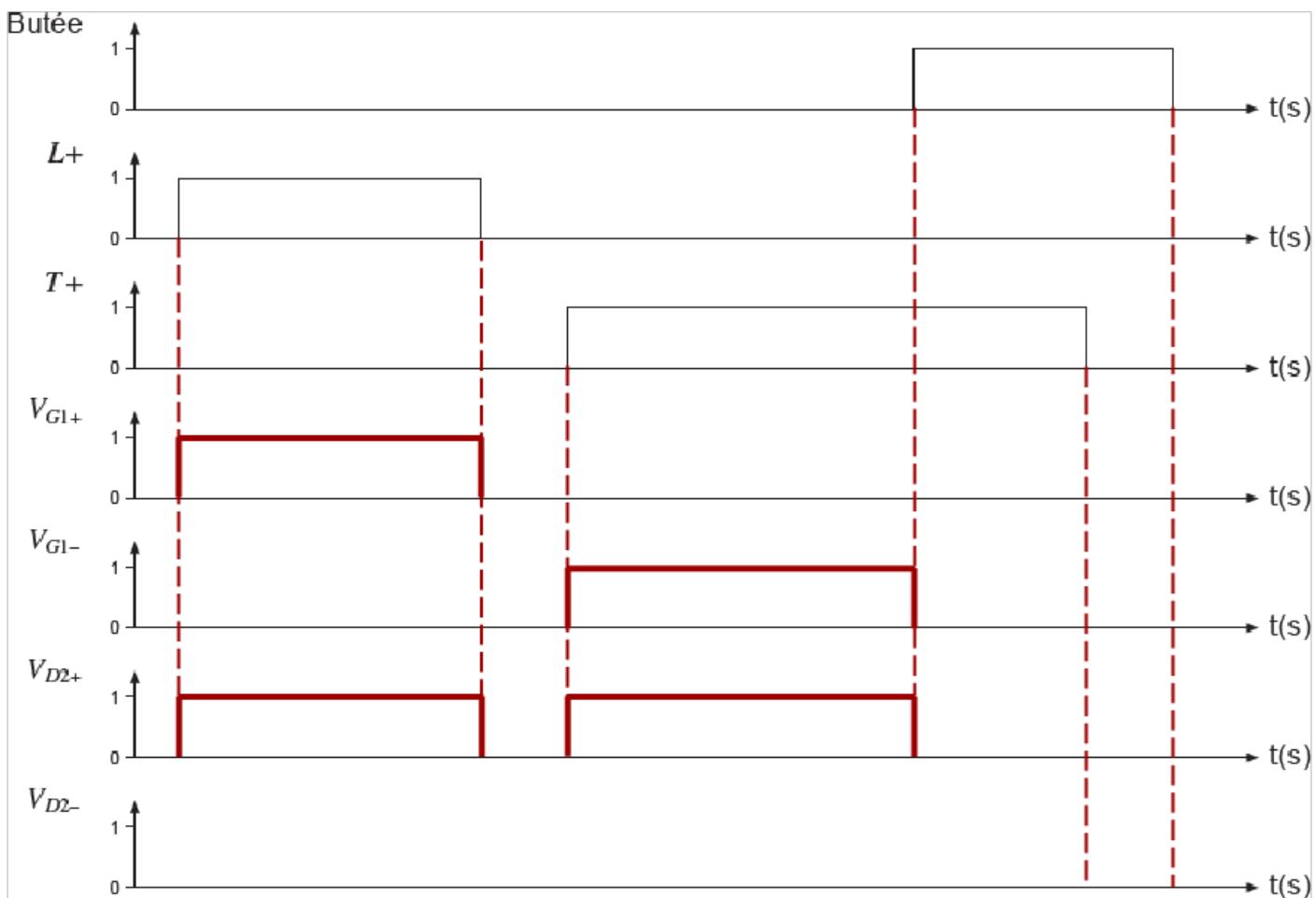
## PARTIE 5 : COMMANDES DES VERINS ELECTRIQUES

**Objectif :** élaborer le diagramme d'état de la commande du système de levage.

**Question 23** Compléter sur le DR les diagrammes d'états composites du *Mode Levage* et du *Mode Tangage* en précisant les actions et évènements manquants.



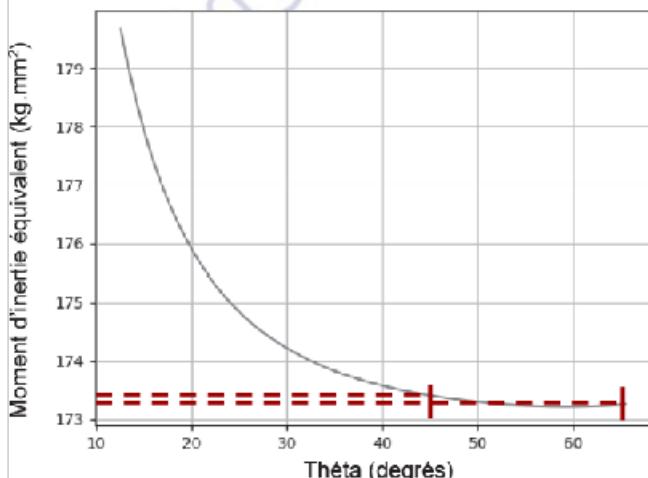
**Question 24** Compléter le chronogramme du DR, en traçant les signaux  $V_{G1+}$ ,  $V_{G1-}$ ,  $V_{D2+}$  et  $V_{D2-}$  résultant d'une commande de levage  $L+$  suivie d'une commande de tangage  $T+$



## PARTIE 6 : ASSERVISSEMENT EN POSITION D'UN BRAS

**Objectif :** concevoir le modèle de l'asservissement en position d'un bras de levage.

**Question 25** Indiquer quelle hypothèse peut être formulée au sujet de  $J_\Sigma$  sur l'intervalle d'étude et en déduire une valeur entière approchée (en  $kg \cdot mm^2$ ) pour la modélisation de l'asservissement.



Pour  $\theta = 45^\circ, J_\Sigma = 173,4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$

Pour  $\theta = 65^\circ, J_\Sigma = 173,25 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$

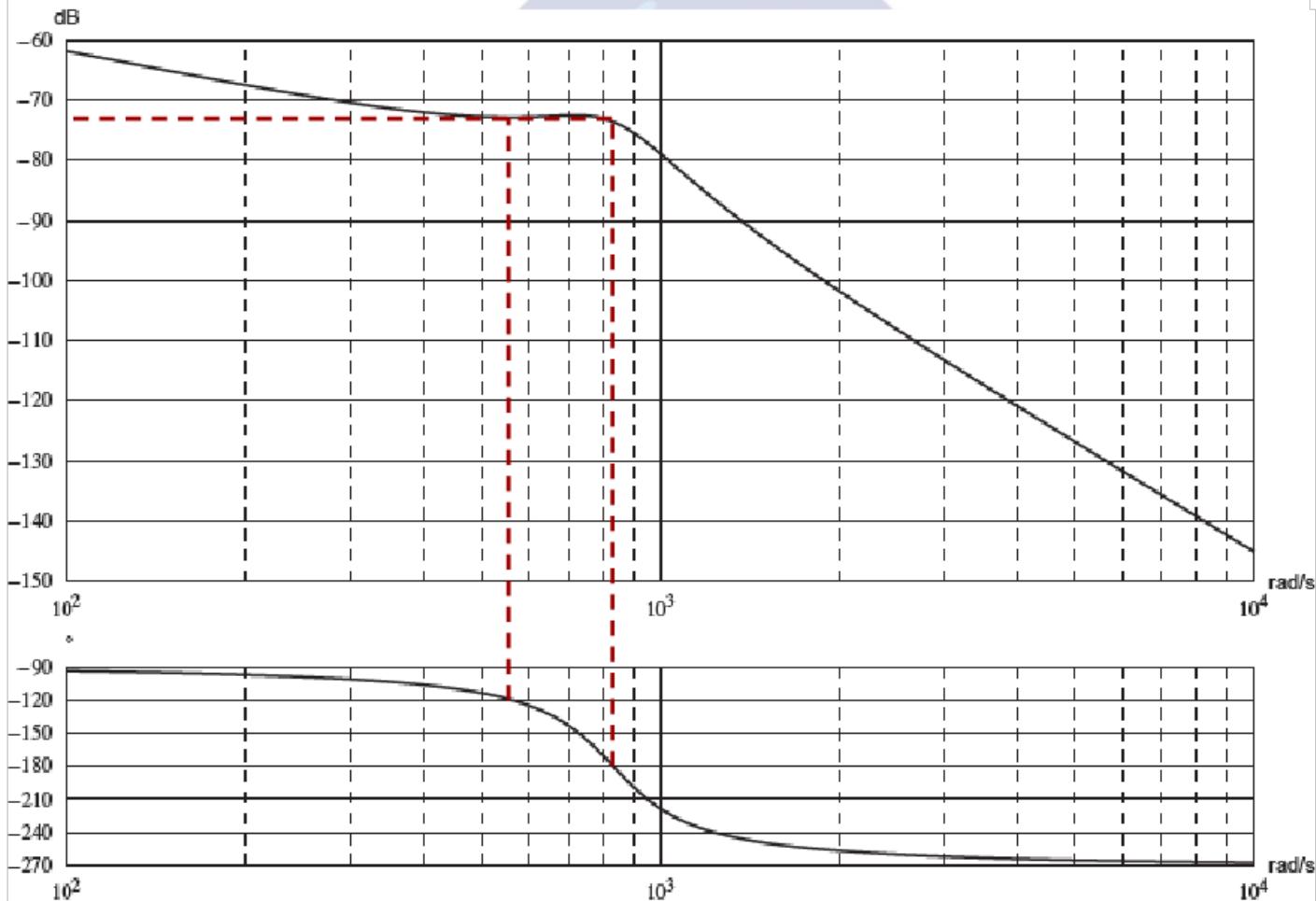
$J_\Sigma$  peut être considéré comme constant et égal à  $173 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$  (voir Q19).

**Question 26** Donner l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle ouverte  $F(p)$  sous forme canonique. Conclure sur le respect des exigences du critère de précision vis-à-vis de la consigne.

$$\begin{aligned}
 F(p) &= K_D \times \frac{K_C}{(R + L.p). (f + J_\Sigma.p)} \times \frac{1}{1 + \frac{K_E \cdot K_C}{(R + L.p). (f + J_\Sigma.p)}} \times K_R \times K_V \times \frac{1}{p} \\
 &= \frac{K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V}{p \cdot (K_E \cdot K_C + R \cdot f + (L \cdot f + R \cdot J_\Sigma) \cdot p + L \cdot J_\Sigma \cdot p^2)} \\
 F(p) &= \frac{\frac{K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V}{K_E \cdot K_C + R \cdot f}}{p \cdot \left( 1 + \frac{(L \cdot f + R \cdot J_\Sigma)}{K_E \cdot K_C + R \cdot f} \cdot p + \frac{L \cdot J_\Sigma}{K_E \cdot K_C + R \cdot f} \cdot p^2 \right)}
 \end{aligned}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1. L'erreur sera donc nulle pour une consigne de type échelon. L'exigence Id="4.3.1" est donc respectée.

**Question 27** Le diagramme de Bode de  $F(p)$  avec  $K_D = 1$  est donné sur le DR. Déterminer la valeur de  $K_D$  permettant de respecter les exigences de stabilité. Vous laisserez apparaître vos constructions graphiques sur le document réponse et donnerez les valeurs des marges de phase et de gain.



Diagrammes de Bode de  $F(p)$  avec  $K_D = 1$

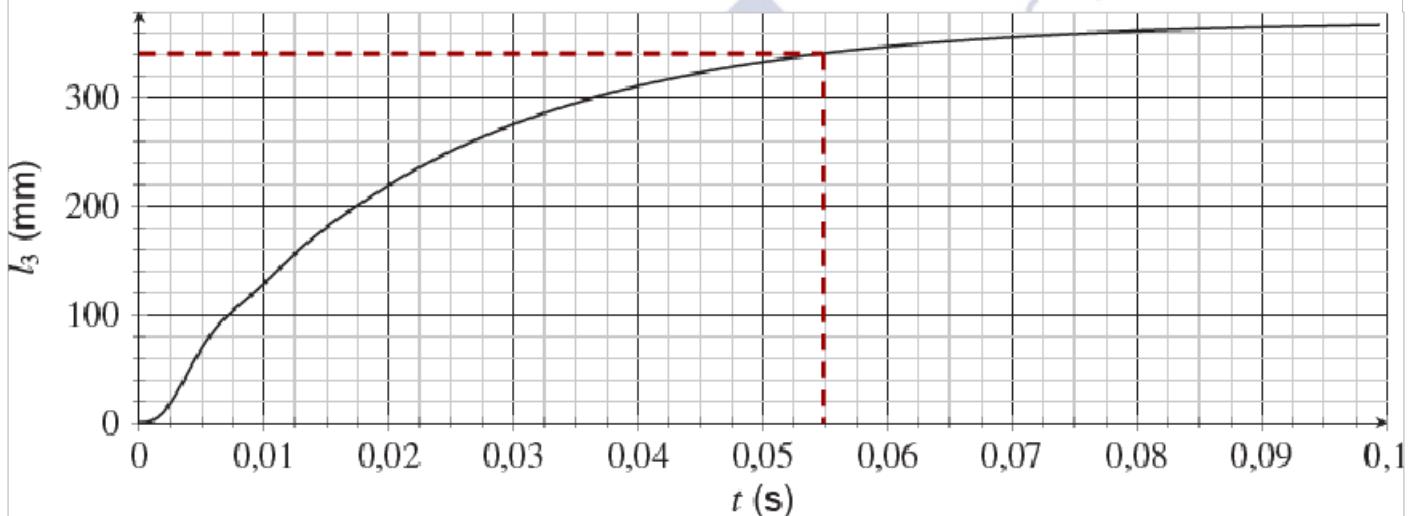
Pour avoir une marge de gain de 18 dB, il faut que le gain soit égal à  $-18 \text{ dB}$  quand la phase est égale à  $-180^\circ$ . Il faut donc "remonter" la courbe de gain de  $73 - 18 = 55 \text{ dB}$ . Donc :

$$K_D = 10^{\frac{55}{20}} = 562 \text{ V} \cdot \text{mm}^{-1}$$

Pour cette valeur de  $K_D$ , la marge de phase sera plus grande que  $60^\circ$ . La valeur maximum que  $K_D$  peut atteindre pour ne pas dépasser cette marge est :

$$K_D = 10^{\frac{73}{20}} = 4467 \text{ V} \cdot \text{mm}^{-1}$$

**Question 28** Évaluer, à partir de constructions graphiques à réaliser sur le DR, le temps de réponse à 5 %. À partir d'un raisonnement dans le domaine temporel à l'instant particulier  $t = 0^+$ , justifier la valeur maximale de la tension. En comparant celle-ci à la tension nominale du moteur de 72 V, conclure sur la validité du modèle mis en oeuvre.



95 % de 372 mm est égal à 353 mm, le temps de réponse est de 0,055 s. Ce qui satisfait largement l'exigence Id="4.1" (temps de réponse à 5 % inférieur à 120 s).

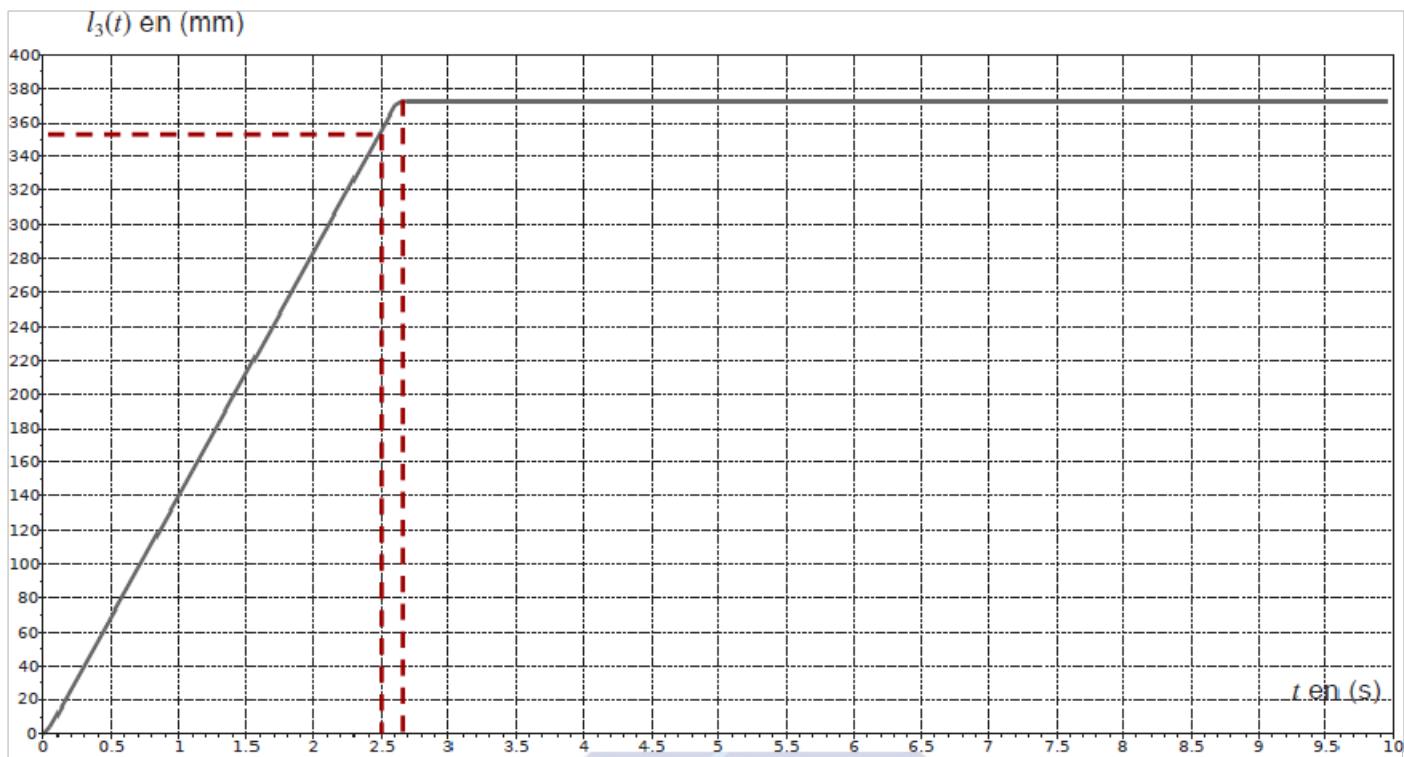
En revanche, la tension pour  $t = 0^+$  est environ 190000 V. La tension est le résultat de  $K_D \times (L_{sc} - L_3) = 500 \times 372 = 186000$ . En effet, à  $t = 0^+$ , l'écart est maximum, la consigne est  $l_{sc} = 372 \text{ mm}$  et la position réelle est  $l_3 = 0 \text{ mm}$ .

Ce qui est beaucoup trop important pour le moteur qui a une tension nominale de 72 V.

**Question 29** L'évolution de  $l_3(t)$  en réponse à un échelon de consigne de 372 mm avec cette nouvelle modélisation est donnée sur le DR. Identifier sur cette courbe les deux zones associées respectivement à un comportement saturé et à un comportement non saturé de l'asservissement. Évaluer, à partir de constructions graphiques à réaliser sur le DR, le temps de réponse à 5 %. Conclure sur le respect de l'exigence du cahier des charges en termes de rapidité.

Jusqu'à  $t \approx 2,75 \text{ s}$ , l'asservissement a un comportement saturé. Au-delà, l'asservissement ne devrait plus être saturé.

Le temps de réponse à 5 % ( $l_3 = 353 \text{ mm}$ ),  $t_{5\%} = 2,5 \text{ s}$ . Ce qui satisfait l'exigence Id="4.1" (temps de réponse à 5 % inférieur à 120 s) en terme de rapidité.



**Question 30** En considérant un comportement non saturé de l'asservissement, donner l'expression littérale de sa fonction de transfert  $G(p) = \frac{L_2(p)}{C_R(p)}$  sous forme canonique.

$$\left[ (-L_3 \cdot K_D - K_e \cdot \Omega) \cdot \frac{K_C}{R + L \cdot p} - C_R \right] \cdot \frac{K_R \cdot K_V}{p \cdot (f + J_\Sigma \cdot p)} = L_3$$

$$\left[ \left( -L_3 \cdot K_D - K_e \cdot \frac{p}{K_R \cdot K_V} \cdot L_3 \right) \cdot \frac{K_C}{R + L \cdot p} - C_R \right] \cdot \frac{K_R \cdot K_V}{p \cdot (f + J_\Sigma \cdot p)} = L_3$$

$$L_3 \cdot \left[ 1 + \frac{K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V}{p \cdot (R + L \cdot p) \cdot (f + J_\Sigma \cdot p)} + \frac{K_e \cdot K_C \cdot p}{p \cdot (R + L \cdot p) \cdot (f + J_\Sigma \cdot p)} \right] = -C_R \cdot \frac{K_R \cdot K_V}{p \cdot (f + J_\Sigma \cdot p)}$$

$$\frac{L_3}{C_R} = -\frac{K_R \cdot K_V \cdot (R + L \cdot p)}{p \cdot (R + L \cdot p) \cdot (f + J_\Sigma \cdot p) + K_e \cdot K_C \cdot p + K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V}$$

$$G(p) = \frac{L_3(p)}{C_R(p)} = -\frac{\frac{K_R \cdot K_V \cdot R \cdot \left( 1 + \frac{L}{R} \cdot p \right)}{K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V}}{1 + \frac{K_e \cdot K_C + R \cdot f}{K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V} \cdot p + \frac{L \cdot f + R \cdot J_\Sigma}{K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V} \cdot p^2 + \frac{L \cdot J_\Sigma}{K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V} \cdot p^3}$$

**Question 31** Donner l'expression de la valeur finale de la position  $l_{3\infty}$ . Faire l'application numérique avec  $C_{R0} = 2,3 N \cdot m$ . Vérifier si les exigences de précision sont respectées.

$$l_{3\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} l_3(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot L_3(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot C_R(p) \cdot G(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{C_{R0}}{p} \cdot \left( -\frac{\frac{K_R \cdot K_V \cdot R \cdot \left(1 + \frac{L}{R} \cdot p\right)}{K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V}}{1 + \frac{R \cdot f}{K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V} \cdot p + \frac{L \cdot f + R \cdot J_\Sigma}{K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V} \cdot p^2 + \frac{L \cdot J_\Sigma}{K_D \cdot K_C \cdot K_R \cdot K_V} \cdot p^3} \right) = -C_{R0} \cdot \frac{R}{K_D \cdot K_C}$$

$$l_{3\infty} = -0.0046 \text{ m} = -4,6 \text{ mm}$$

L'exigence de précision vis-à-vis d'une perturbation Id="4.3.2" n'est donc pas respectée puisque l'erreur de position est non nulle.

**Question 32** Donner le nom de ce nouveau correcteur et justifier le choix de celui-ci.

Ce correcteur est un correcteur PI qui va permettre d'améliorer la précision mais peut détériorer la stabilité et la rapidité.

**Question 33** Conclure sur la pertinence du choix et du réglage de ce correcteur vis-à-vis des exigences de précision.

Ce correcteur permet de respecter l'exigence précédente Id="4.3.2" puisque l'asservissement revient à la position de consigne. La perturbation ne fait pas sortir le système de l'intervalle de 5 % par rapport à la position finale.

## PARTIE 7 : SYNTHESE

**Question 34** Entourer les bonnes réponses et compléter le tableau de synthèse du DR.

Identifier le mode le plus énergivore	Pose d'un moteur	Dépose d'un moteur	Roulage
Identifier les termes prépondérants dans l'expression du couple moteur	<b>Couple dû à la charge</b>	Couple dû à l'accélération	
Identifier les commandes des vérins identiques lors d'une rotation de type Roulis dans le sens positif	$V_{G1} = V_{G2}$ = $V_{D1} = V_{D2}$	$V_{G1} = V_{G2}$ et $V_{D1} = V_{D2}$	$V_{G1} = V_{D1}$ et $V_{G2} = V_{D2}$
Préciser l'influence (amélioration, pas de changement, dégradation) du deuxième correcteur sur les exigences suivantes	<b>Id4.3.1</b>	<b>Id4.3.2</b>	<b>Id4.2</b>
	<b>Pas de changement</b>	<b>Amélioration</b>	<b>Dégénération</b>