Fonctions de transfert dans le domaine de Laplace

Renaud Costadoat

Lycée Dorian

S02 - C01

Fonctions de transfert dans le domaine de Laplace

Objectif

Déterminer la fonction de transfert qui régit le comportement d'un S.L.C.I.

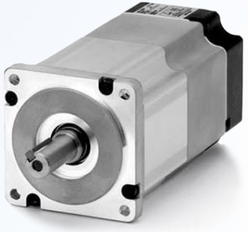
1. Mise en équation (Moteur à Courant Continu $\frac{\omega_m}{u_m}$)
2. Transformées de Laplace
3. Fonction de transfert

Fonctions de transfert dans le domaine de Laplace

Objectif

Déterminer la fonction de transfert qui régit le comportement d'un S.L.C.I.

1. Mise en équation (Moteur à Courant Continu $\frac{\omega_m}{u_m}$)
2. Transformées de Laplace
3. Fonction de transfert



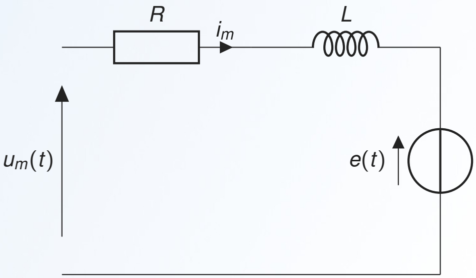
Mise en équation

$$u_m(t) = R_m \cdot i_m(t) + L_m \cdot \frac{d\,i_m(t)}{dt} + e(t) \qquad (1)$$

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t) \qquad (2)$$

$$c_m(t) = K_i \cdot i_m(t) \qquad (3)$$

$$J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) \qquad (4)$$



Mise en équation

$$u_m(t) = R_m \cdot i_m(t) + L_m \cdot \frac{d\, i_m(t)}{dt} + e(t) \qquad (1)$$

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t) \qquad (2)$$

$$c_m(t) = K_i \cdot i_m(t) \qquad (3)$$

$$J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) \qquad (4)$$

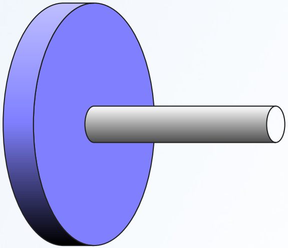
Mise en équation

$$u_m(t) = R_m \cdot i_m(t) + L_m \cdot \frac{d\, i_m(t)}{dt} + e(t) \qquad (1)$$

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t) \qquad (2)$$

$$c_m(t) = K_i \cdot i_m(t) \qquad (3)$$

$$J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) \qquad (4)$$



Équation différentielle

$$\frac{u_m(t)}{K_e} = \frac{L_m \cdot J}{K_i \cdot K_e} \cdot \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2} + \frac{R_m \cdot J}{K_i \cdot K_e} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) \tag{5}$$

Équation différentielle d'**ordre 2 avec second membre**. Méthode de résolution:

- Recherche de la solution de l'équation sans second membre à l'aide du **discriminant**,
- Recherche d'une **solution particulière** afin d'obtenir la solution générale.

Autre solution possible: **La transformée de Laplace** qui permet de résoudre des équations différentielles **linéaires** à **coefficients constants**.

Passage dans le domaine de Laplace

$$u_m(t) = R_m \cdot i_m(t) + L_m \cdot \frac{d\, i_m(t)}{dt} + e(t) \qquad (1)$$

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t) \qquad (2)$$

$$c_m(t) = K_i \cdot i_m(t) \qquad (3)$$

$$J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) \qquad (4)$$

Passage dans le domaine de Laplace

$$u_m(t) = R_m \cdot i_m(t) + L_m \cdot \frac{d\, i_m(t)}{dt} + e(t) \qquad (1)$$

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t) \qquad (2)$$

$$c_m(t) = K_i \cdot i_m(t) \qquad (3)$$

$$J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) \qquad (4)$$

Théorème de la dérivée première:

$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p) - f(0^+)$ Hypothèse:

- Conditions initiales nulles (obligatoire pour la Fonction de Transfert)

Passage dans le domaine de Laplace

$$u_m(t) = R_m \cdot i_m(t) + L_m \cdot \frac{d\, i_m(t)}{dt} + e(t) \qquad (1)$$

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t) \qquad (2)$$

$$c_m(t) = K_i \cdot i_m(t) \qquad (3)$$

$$J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) \qquad (4)$$

$$U_m(p) = R_m \cdot I_m(p) + L_m \cdot p \cdot I_m + E(p) \qquad (5)$$

$$E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p) \qquad (6)$$

$$C_m(p) = K_i \cdot I_m(p) \qquad (7)$$

$$J \cdot p \cdot \Omega_m(p) = C_m(p) \qquad (8)$$

Fonction de transfert

$$U_m(p) = R_m \cdot I_m(p) + L_m \cdot p \cdot I_m(p) + E(p) \tag{5}$$

$$E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p) \tag{6}$$

$$C_m(p) = K_i \cdot I_m(p) \tag{7}$$

$$J \cdot p \cdot \Omega_m(p) = C_m(p) \tag{8}$$

Fonction de transfert

$$U_m(p) = R_m \cdot I_m(p) + L_m \cdot p \cdot I_m(p) + E(p) \tag{5}$$

$$E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p) \tag{6}$$

$$C_m(p) = K_i \cdot I_m(p) \tag{7}$$

$$J \cdot p \cdot \Omega_m(p) = C_m(p) \tag{8}$$

Fonction de transfert

$$U_m(p) = R_m \cdot I_m(p) + L_m \cdot p \cdot I_m(p) + E(p) \tag{5}$$

$$E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p) \tag{6}$$

$$C_m(p) = K_i \cdot I_m(p) \tag{7}$$

$$J \cdot p \cdot \Omega_m(p) = C_m(p) \tag{8}$$

$$I_m(p) = \frac{C_m(p)}{K_i} \text{ et } E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p) \Rightarrow U_m(p) = R_m \cdot \frac{C_m(p)}{K_i} + L_m \cdot p \cdot \frac{C_m(p)}{K_i} + K_e \cdot \Omega_m(p) \tag{9}$$

Fonction de transfert

$$U_m(p) = R_m \cdot \frac{C_m(p)}{K_i} + L_m \cdot p \cdot \frac{C_m(p)}{K_i} + K_e \cdot \Omega_m(p) \tag{9}$$

Fonction de transfert

$$U_m(p) = R_m \cdot \frac{C_m(p)}{K_i} + L_m \cdot p \cdot \frac{C_m(p)}{K_i} + K_e \cdot \Omega_m(p) \tag{9}$$

$$C_m(p) = J \cdot p \cdot \Omega_m(p) \text{ (12)} \Rightarrow U_m(p) = R_m \cdot \frac{J \cdot p \cdot \Omega_m(p)}{K_i} + L_m \cdot p \cdot \frac{J \cdot p \cdot \Omega_m(p)}{K_i} + K_e \cdot \Omega_m(p) \tag{10}$$

Fonction de transfert

$$U_m(p) = R_m \cdot \frac{C_m(p)}{K_i} + L_m \cdot p \cdot \frac{C_m(p)}{K_i} + K_e \cdot \Omega_m(p) \tag{9}$$

$$U_m(p) = R_m \cdot \frac{J \cdot p \cdot \Omega_m(p)}{K_i} + L_m \cdot p \cdot \frac{J \cdot p \cdot \Omega_m(p)}{K_i} + K_e \cdot \Omega_m(p) \tag{10}$$

$$U_m(p) = \left(\frac{R_m \cdot J \cdot p}{K_i} + \frac{L_m \cdot J \cdot p^2}{K_i} + K_e \right) \cdot \Omega_m(p) \tag{11}$$

Fonction de transfert

$$U_m(p) = R_m \cdot \frac{J \cdot p \cdot \Omega_m(p)}{K_i} + L_m \cdot p \cdot \frac{J \cdot p \cdot \Omega_m(p)}{K_i} + K_e \cdot \Omega_m(p) \tag{10}$$

$$U_m(p) = \left(\frac{R_m \cdot J \cdot p}{K_i} + \frac{L_m \cdot J \cdot p^2}{K_i} + K_e \right) \cdot \Omega_m(p) \tag{11}$$

Fonction de transfert

$$U_m(p) = \left(\frac{R_m \cdot J \cdot p}{K_i} + \frac{L_m \cdot J \cdot p^2}{K_i} + K_e \right) \cdot \Omega_m(p) \tag{11}$$

$$\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{K_e + \frac{R_m \cdot J}{K_i} \cdot p + \frac{L_m \cdot J}{K_i} \cdot p^2} \tag{12}$$

Fonction de transfert

$$\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{K_e + \frac{R_m \cdot J}{K_i} \cdot p + \frac{L_m \cdot J}{K_i} \cdot p^2} \tag{12}$$

Forme canonique:

$$\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R_m \cdot J}{K_i \cdot K_e} \cdot p + \frac{L_m \cdot J}{K_i \cdot K_e} \cdot p^2} \tag{13}$$

Fonction de transfert

$$\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{K_e + \frac{R_m \cdot J}{K_i} \cdot p + \frac{L_m \cdot J}{K_i} \cdot p^2} \tag{12}$$

Forme canonique:

Partie constante unitaire

$$\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{K_e}}{\boxed{1} + \frac{R_m \cdot J}{K_i \cdot K_e} \cdot p + \frac{L_m \cdot J}{K_i \cdot K_e} \cdot p^2} \tag{13}$$

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that sho
have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how
many pages to expect for this document.