



Géométrie pour la mécanique



Renaud Costadoat
Lycée Dorian



Vecteur

Champ de vecteur et torseur

Repères de projection

Introduction

Savoir

Vous êtes capables :

- de résoudre des équations différentielles à l'aide des transformées de Laplace,
- de représenter des réponses impulsionnelles et indicielles,
- de représenter un SLCI à l'aide d'un schéma blocs.

Problématique

Vous devez être capables :

- de déterminer la loi entrée/sortie d'une chaîne de transmission,
- de modéliser la géométrie d'un système.

Introduction mathématique

Objectif

La mécanique a pour objet l'étude du **mouvement**, des déformations ou des états d'équilibre des systèmes physiques.

Afin d'appréhender la **modélisation** et la **résolution** de ces problèmes il est nécessaire de revoir les notions de mathématique suivantes:

- le vecteur,
- le produit scalaire,
- le produit vectoriel,
- le champ de vecteurs,
- le torseur,
- les repères et axes de coordonnées.



Vecteur

Definition

Un vecteur non nul \overrightarrow{AB} est caractérisé par :

- : la droite (D) passant par A et B ,
- : de A vers B ,
- : la distance d entre les points A et B .

- **Vecteur glissant:** Un vecteur glissant (ou glisseur) est défini par une droite (D) et un vecteur \vec{V} . Deux vecteurs glissants sont équivalents s'ils ont même support et même vecteur représentant.
- **Vecteur lié:** Un vecteur lié est défini par une origine A et un vecteur \vec{V} .



Composantes d'un vecteur

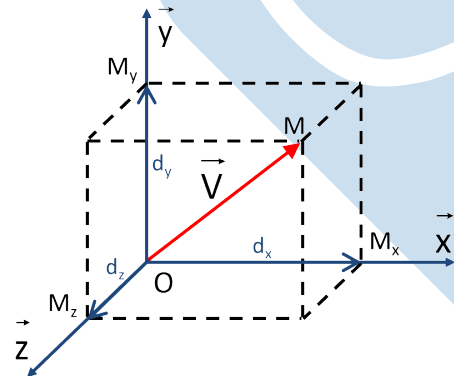
- **Repère orthonormé direct**: Un repère orthonormé direct de dimension 3, (R) , est constitué d'une base orthonormée directe de dimension 3.

Elle est définie par trois vecteurs unitaires (de norme 1) \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} tels que $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ et $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$, soit son origine O , on le note : $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Plan

Spatial

- Soit un point M , sa position dans $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le vecteur \vec{OM} ,
- $\vec{OM} = dx \cdot \vec{x} + dy \cdot \vec{y} + dz \cdot \vec{z}$.
- Écriture en colonne: $\vec{OM} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$
- Norme: $\|\vec{OM}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$



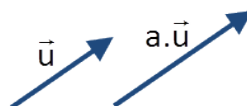
S03 - C01

5
26

Produit d'un vecteur par un scalaire

Le terme **scalaire** désigne ici un nombre réel. Le produit d'un vecteur \vec{u} par un scalaire a est un vecteur noté : $a \cdot \vec{u}$.

- de même direction et sens que \vec{u} , dont la longueur vaut: $a \cdot \|\vec{u}\|$, si $a > 0$,
- de même direction mais de sens contraire que \vec{u} , dont la longueur vaut : $-a \cdot \|\vec{u}\|$, si $a < 0$,
- il s'agit d'un vecteur nul si $a = 0$.



Le produit d'un vecteur par un scalaire est **distributif** sur l'addition des scalaires : $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$ mais il n'est pas commutatif : la notation $\vec{u} \cdot a$ n'a pas de sens.

Remarque : deux vecteurs sont colinéaires (parallèles) si et seulement s'ils sont proportionnels, c'est-à-dire s'il existe un nombre a tel que $\vec{u} = a \cdot \vec{v}$.



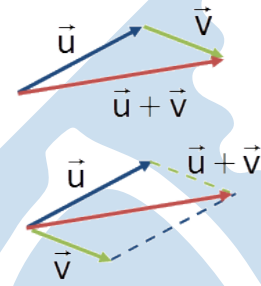
S03 - C01

6
26

Somme de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est un vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$, qui est construit de la manière suivante :

- on amène l'origine du deuxième vecteur à l'extrémité du premier
- la somme est le vecteur qui joint l'origine du premier vecteur à l'extrémité de second
- il s'agit du troisième côté d'un triangle formé par les deux premiers vecteurs



Definition

A partir de trois points A, B et C existe la relation de **Chasles**:
Cela permet d'introduire les vecteurs opposés: $-\vec{AB} = \vec{BA}$

En effet, $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$, donc $-\vec{AB} = \vec{BA}$.

Le produit d'un scalaire par un vecteur est distributif sur l'addition des vecteurs :

$$a.(\vec{u} + \vec{v}) = a.\vec{u} + a.\vec{v}$$



Produit scalaire de deux vecteurs

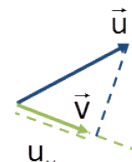
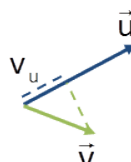
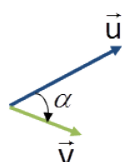
Definition

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs faisant un angle géométrique α , le produit scalaire noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel valant:

Le produit scalaire est nul

- Si l'un des vecteurs est nul
- Si l'angle entre eux est droit (c'est-à-dire si et $\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90$),
- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dans ce cas orthogonaux.

Le produit scalaire strictement positif si l'angle est aigu et strictement négatif si l'angle est obtus. Dans les cas suivants, $\vec{u} \cdot \vec{v} = v_u \cdot \|\vec{u}\| = u_v \cdot \|\vec{v}\|$.



Propriétés du produit scalaire de deux vecteurs

- Le produit scalaire est commutatif $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
- Il est distributif sur l'addition des vecteurs $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,
- Le vecteur nul est l'élément absorbant du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$,
- $\vec{u} \cdot \vec{u}$ s'appelle le carré scalaire du vecteur \vec{u} et se note \vec{u}^2 , ainsi $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$,
- Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et donc $\sqrt{\vec{u}^2} = \|\vec{u}\|$,
- Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, \vec{u} est perpendiculaire à \vec{v} si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$,
- Dans le plan rapporté à une base orthonormale (\vec{i}, \vec{j}) ,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$
- Dans le plan rapporté à une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$



Produit vectoriel de deux vecteurs

Definition

Le produit vectoriel des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est un vecteur:

- normal au plan vectoriel de base (\vec{u}, \vec{v}) ,
- dont la norme vaut
- tel que $(\vec{u}, \vec{v}, (\vec{u} \wedge \vec{v}))$ forme une base directe.

Ainsi, si $(\vec{u}$ et $\vec{v})$ sont colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Dans un repère orthonormé direct:

$$\begin{aligned} \vec{x} \wedge \vec{y} &= \vec{z} & \vec{y} \wedge \vec{x} &= -\vec{z} \\ \vec{y} \wedge \vec{z} &= \vec{x} & \vec{z} \wedge \vec{y} &= -\vec{x} \\ \vec{z} \wedge \vec{x} &= \vec{y} & \vec{x} \wedge \vec{z} &= -\vec{y} \end{aligned}$$

Remarque: Pour retrouver efficacement ces relations, on peut écrire (sur un coin de feuille) :

"x y z x y", en parcourant cette liste de gauche à droite, on obtient un signe positif et inversement.



Calcul en composantes du produit vectoriel

Soient les coordonnées $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ce qui permet de calculer leur produit vectoriel de la façon suivante:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_1 \cdot \vec{x} + u_2 \cdot \vec{y} + u_3 \cdot \vec{z}) \wedge (v_1 \cdot \vec{x} + v_2 \cdot \vec{y} + v_3 \cdot \vec{z})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = u_1 \cdot \vec{x} \wedge v_1 \vec{x} + u_1 \cdot \vec{x} \wedge v_2 \vec{y} + u_1 \cdot \vec{x} \wedge v_3 \vec{z} + u_2 \cdot \vec{y} \wedge v_1 \vec{x} + u_2 \cdot \vec{y} \wedge v_2 \vec{y} + u_2 \cdot \vec{y} \wedge v_3 \vec{z} + u_3 \cdot \vec{z} \wedge v_1 \vec{x} + u_3 \cdot \vec{z} \wedge v_2 \vec{y} + u_3 \cdot \vec{z} \wedge v_3 \vec{z}$$

$$\text{Donc, } \vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2) \cdot \vec{x} + (u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3) \cdot \vec{y} + (u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1) \cdot \vec{z}$$

$$\text{Ce qui s'écrit en colonne: } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{bmatrix}$$

Remarque

Un moyen mnémotechnique pour se rappeler de ce résultat revient à placer les deux premières composantes de chaque vecteur sous les autres et à faire 3 **produits en croix** (un pour chaque composante du résultant) à partir de la deuxième ligne.



Produit mixte

Definition

Soient trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , le produit mixte revient à calculer:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Ainsi:

- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$,
- $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$,
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (u_x v_y w_z + v_x w_y u_z + w_x u_y v_z) - (w_x v_y u_z + v_x u_y w_z + u_x w_y v_z)$

Si deux des trois vecteurs sont égaux ou colinéaires, le produit mixte est nul.

Si les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ont même origine, la valeur absolue du produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, est égale au volume du parallélépipède construit sur \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .



Double produit vectoriel

- Combiner trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} par deux produits vectoriels successifs permet d'obtenir un double produit vectoriel,
- Exemple: $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$,
- Attention: comme le produit vectoriel n'est ni associatif, ni commutatif, il est nécessaire d'utiliser comme ici des parenthèses et le résultat va dépendre à la fois de l'ordre dans lequel les opérations sont effectuées et de l'ordre de présentation des 3 vecteurs,

- Les 2 formules suivantes peuvent être démontrées:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$



Champ de vecteurs

Un champ de vecteurs est une application qui définit un vecteur \vec{V}_M en tout point de l'espace (champ de vecteurs vitesse, champ magnétique, champ de pesanteur,...),

Un champ de vecteurs \vec{M}_P équiprojectif est un champ de vecteurs qui répond au théorème de Varignon (parfois appelé théorème de BABAR « entre nous »).

Definition

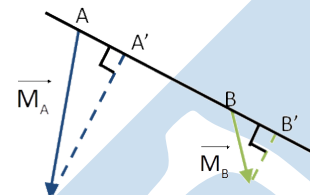
- \vec{R} est un vecteur caractéristique du champ de vecteurs appelé « résultante »
- \vec{M}_P sont les moments en chaque point P du champ de vecteurs.



L'équiprojectivité

Definition

La propriété d'équiprojectivité d'un tel champ de vecteurs est exprimée par le fait que deux moments \vec{M}_A et \vec{M}_B du champ de vecteurs ont la même projection sur la droite passant par les deux points A et B : $\vec{AA'} = \vec{BB'}$



Démonstration: En partant du théorème de Varignon et en multipliant par \vec{AB} , on obtient

$$\vec{M}_B \cdot \vec{AB} = \vec{M}_A \cdot \vec{AB} + (\vec{BA} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{AB} \text{ or } (\vec{BA} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{AB} = 0 \text{ donc } AA' = BB'.$$

Remarques:

- La distribution des vecteurs vitesse dans un solide indéformable est un champ de vecteurs équiprojectif puisque il respecte le théorème de Varignon,
- L'équiprojectivité entre les vecteurs vitesse peut, donc, être utilisée pour les constructions graphiques.



Le torseur

Un torseur est la représentation d'un champ de vecteurs équiprojectif, dont les vecteurs \vec{M}_P en chaque point P s'appellent « moments » du torseur. De par les propriétés d'un tel champ, les moments en deux points P et O vérifient la relation de Varignon.

Éléments de réduction d'un torseur

Un torseur est donc déterminé par deux vecteurs, constituant sa « réduction » en un point quelconque P de l'espace, à savoir :

Definition

- La résultante \vec{R} , ce vecteur est unique et indépendant du point de réduction,
- Le moment en P du torseur \vec{M}_P .

Remarque: La résultante est donc un vecteur caractéristique du champ qui permet, à partir du moment en un point particulier, de retrouver les autres moments



Invariants d'un torseur

Un torseur possède deux grandeurs indépendantes du point où on l'écrit:

- l'invariant vectoriel : la résultante \vec{R} ,
- l'invariant scalaire appelé aussi l'automoment: $A = \vec{R} \cdot \vec{M}_A = \vec{R} \cdot \vec{M}_B$

Torseurs particuliers

- Le torseur à résultante ou glisseur est un torseur dont:
 - ▶ l'automoment est nul, c'est à dire que le résultante et le moment sont orthogonaux en tout points
 - ▶ le moment est nul en tout point de de son axe.
- Le torseur couple est un torseur dont la résultante est nulle.



Opérations sur les torseurs

- Égalité de deux torseurs

$$\{T_1\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{array} \right\}_O = \{T_2\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{array} \right\}_O \rightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2, \vec{M}_1 = \vec{M}_2$$

- Somme de deux torseurs

$$\{T_1\}_O + \{T_2\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{array} \right\}_O + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \end{array} \right\}_O$$

- Multiplication d'un torseur par un scalaire

$$\lambda \cdot \{T_1\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \cdot \vec{R}_1 \\ \lambda \cdot \vec{M}_1 \end{array} \right\}_O$$



Éléments centraux d'un torseur

- Point central

Un point central d'un torseur est un point pour lequel la résultante et le moment sont colinéaires :

Si $\vec{M}_P = \lambda \cdot \vec{R}$ alors P est un point central, en P, le moment du torseur est minimum.

- Détermination de l'axe central

Soit un torseur $\{T\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \cdot \vec{R} \\ \lambda \cdot \vec{M} \end{array} \right\}_O$

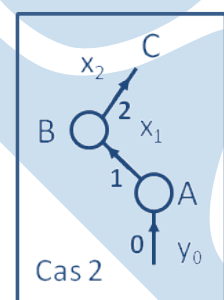
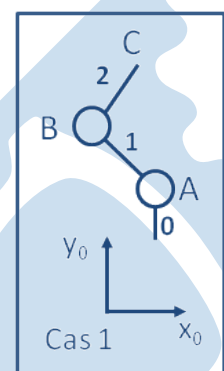
L'axe central du torseur est la droite parallèle à \vec{R} et passant par le point P tel que :

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{MO}}{\vec{R}^2}$$



Les repères de projection

- Les opérations sur les torseurs et les vecteurs présentées ci-dessus ne sont valables que si ces éléments sont présentés sur le même repère.
- Il sera souvent utile dans le cas d'une résolution de cinématique d'introduire plusieurs repères.
- Ainsi, la suite montre les méthodes pour ramener les torseurs et les vecteurs dans le même repère de description.
- Cas 1: Un repère global
 - ▶ R_0 : Lié à la pièce 0: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = a_1 \cdot \vec{x}_0 + a_2 \cdot \vec{y}_0 + b_1 \cdot \vec{x}_0 + b_2 \cdot \vec{y}_0$,
 - ▶ a_i et b_i sont des variables en fonction du déplacement des pièces.
- Cas 2: Un repère associé à chaque pièce
 - ▶ R_0 : Lié à la pièce 0, R_1 : Lié à la pièce 1, R_2 : Lié à la pièce 2.
 - ▶ $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = a_1 \cdot \vec{x}_1 + b_1 \cdot \vec{x}_2$
 - ▶ a_i et b_i sont des constantes liées aux dimensions des pièces.



Changement de repère dans les espaces affines

- Soient $R = (O, e)$ et $R' = (O', e')$ deux repères différents, alors les coordonnées.

$\vec{M}_{R'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ s'obtiennent à partir des coordonnées $\vec{M}_R = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du même point M

mais dans le repère R , à l'aide de 3 équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

- Matriciellement ces équations s'écrivent: $M_{R'} = A.M_R + B$ où $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ est la matrice de passage dans V .

Changement d'axes de coordonnées

- Les formules qui suivent permettent d'exprimer les coordonnées d'un point M dans l'un des repères en fonction des coordonnées dans l'autre repère,
- Soit un repère cartésien $O(\vec{x}, \vec{y})$ dans lequel les coordonnées (x, y) d'un point M s'expriment en fonction des coordonnées polaires (r, ϕ) par les formules élémentaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

- Dans le nouveau repère $O(\vec{x}', \vec{y}')$ déduit du précédent par une rotation d'angle θ les nouvelles coordonnées polaires sont r et $(\phi - \theta)$ et les coordonnées cartésiennes deviennent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Changement d'axes de coordonnées

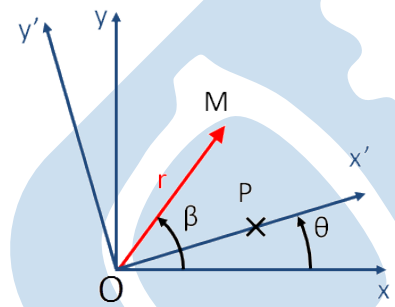
Definition

- Les formules suivantes permettant de passer d'un repère à l'autre.

.....

- En sens inverse,

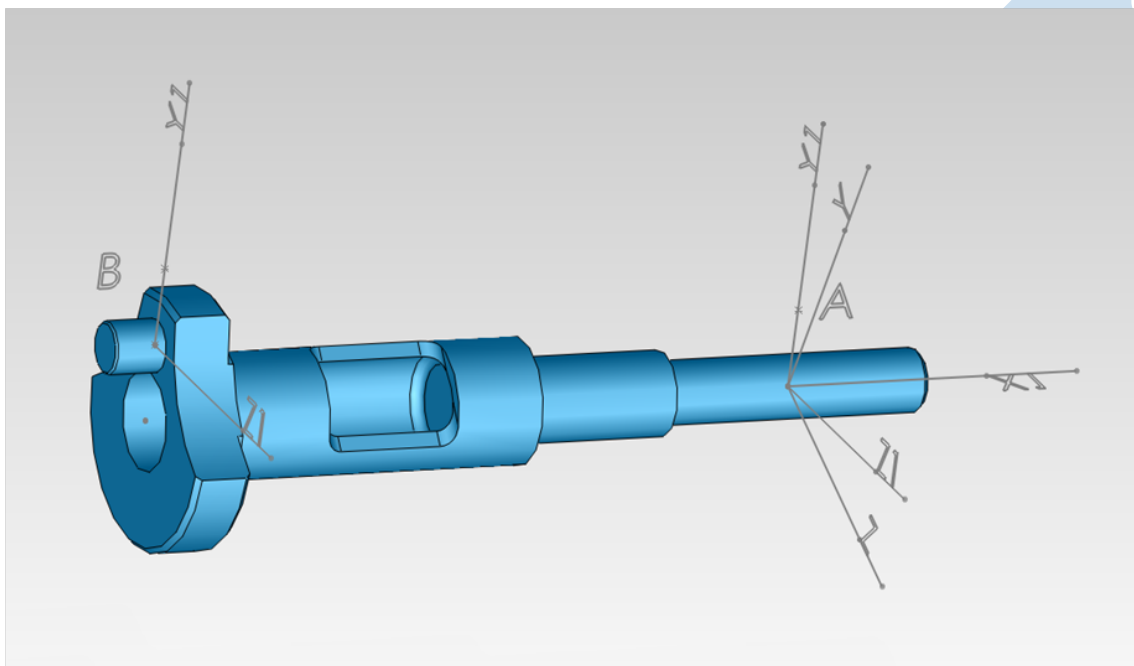
.....



Remarque : s'il peut s'avérer difficile de mémoriser le signe à mettre devant $\sin(\theta)$ (+ dans une ligne et - dans l'autre) l'astuce consiste à considérer un point particulier (tel que P sur la figure) avec $y = 0$ ou $y' = 0$ selon les besoins et de vérifier alors sur la figure le signe de la coordonnée voulue.

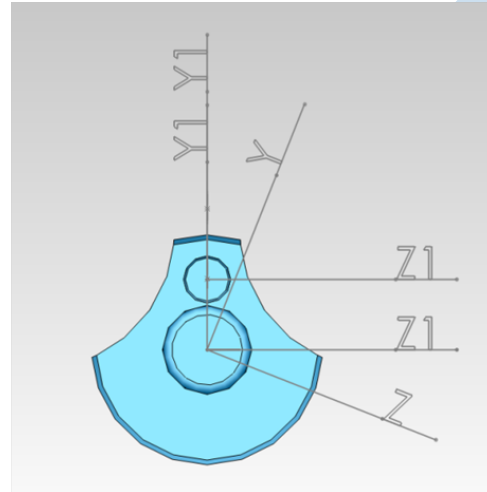
Application

Exemple de pièce munie de deux repères $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

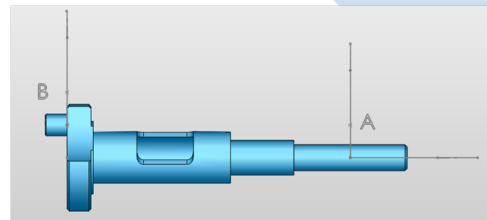


Projection de vecteurs dans une base

Soit θ , l'angle entre Z et Z_1 , écrire les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} , dans les deux repères (choisir les inconnues nécessaires).



Ainsi, les coordonnées d'un vecteur varient selon qu'elles sont écrites dans le repère local ou le repère global.



S03 - C01

25
26

Conclusion

Vous devez être capable de:

- définir un vecteur à partir de sa **direction**, de son **sens** et de sa **norme**,
- projeter des vecteurs dans une base,
- faire un produit scalaire,
- faire un produit vectoriel,
- décrire un champ de vecteur avec un torseur,
- manipuler les éléments de réduction du torseur,
- modifier le repère de projection d'un vecteur.