

# 1 Circuit RC

## 1.1 Présentation du système

Un circuit RC est un circuit électrique, composé d'une résistance et d'un condensateur. Dans leur configuration série, les circuits RC permettent de réaliser des filtres électroniques passe-bas ou passe-haut.

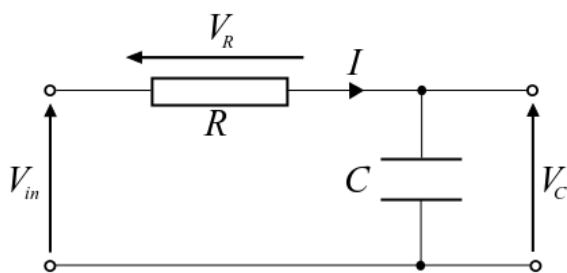


Figure 1 – Circuit RC

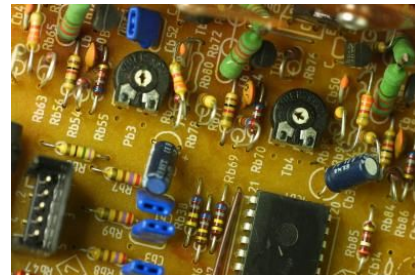


Figure 2 – Montage électronique

Le système est modélisé par la figure 1. A  $t=0$ , le condensateur se charge.

**Question 1 :** Déterminer l'équation différentielle qui régit le système. L'entrée du système sera la tension  $V(t)$  et la sortie la tension aux bornes du condensateur. Les valeurs numériques sont les suivantes :  $R = 10\Omega$  et  $C = 1mF = 10^{-3}F$ .

**Question 2 :** Résoudre cette équation à l'aide des transformées de Laplace. Déterminer l'expression de la sortie  $s(t)$  quand l'entrée  $e(t)$  est un échelon de valeur  $E_0 = 2V$  et en faire la représentation graphique pour  $0 < t < 0,05s$ .

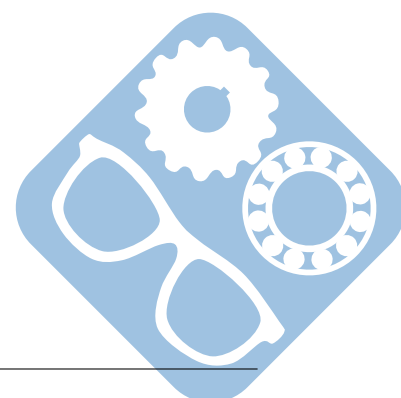
Déterminer l'écart statique  $\epsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t))$  quand l'entrée  $e(t)$  est un échelon

**Question 3 :** Déterminer  $tr_{5\%}$ , temps au bout duquel la sortie  $s(t)$  atteint 0,95 fois sa valeur à l'infini.

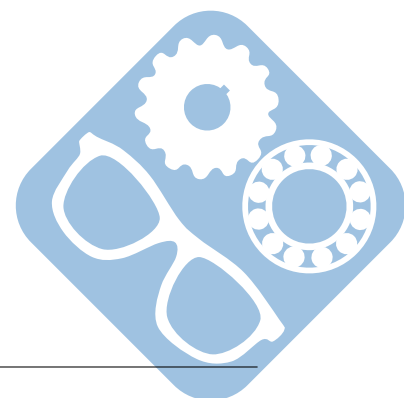
On présente à l'entrée une rampe de tension  $e(t) = \alpha.t.u(t)$  où  $u(t)$  est la fonction échelon avec  $\alpha = 1V.s^{-1}$ . On rappelle que :  $u(t)=0$  pour  $t < 0$  et  $u(t)=1$  pour  $t > 0$ .

Déterminer l'expression de la sortie  $s(t)$  et établir sur le même graphe les représentations graphiques de  $s(t)$  et  $e(t)$ .

Déterminer l'écart de traînage  $\epsilon_v = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t))$  quand l'entrée  $e(t)$  est une rampe.



Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$	Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
$f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\forall t \in ]0, t_1[ \quad f(t) = A$	$F(p) = A \cdot \frac{1 - e^{-pt_1}}{p}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$



## 2 Amortisseur

### 2.1 Présentation du système

Un amortisseur est un système destiné à limiter, voire supprimer les oscillations d'un objet ou à isoler un objet de vibrations par dissipation d'énergie. Les vibrations libres ou forcées correspondent au mouvement d'une masse sur un ressort.

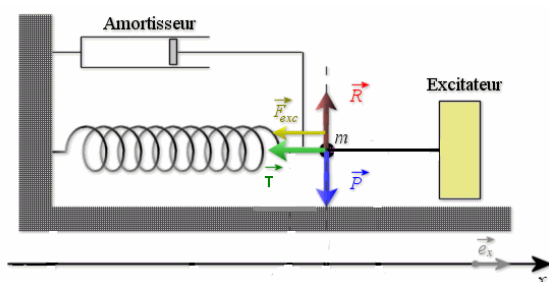


Figure 3 – Modèle d'un amortisseur



Figure 4 – Amortisseur automobile

La suspension d'un système est modélisée par un amortisseur et un ressort (figure 4). A  $t=0$ , un effort est exercé sur le système dont la masse est négligée.

**Question 1 :** Déterminer l'équation différentielle qui régit le système. L'entrée du système sera l'effort  $f(t)$  et la sortie l'oscillation de l'amortisseur. Les valeurs numériques sont les suivantes :  $k = 2 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1}$  et  $\lambda = 250 \text{ N.s.m}^{-1}$ .

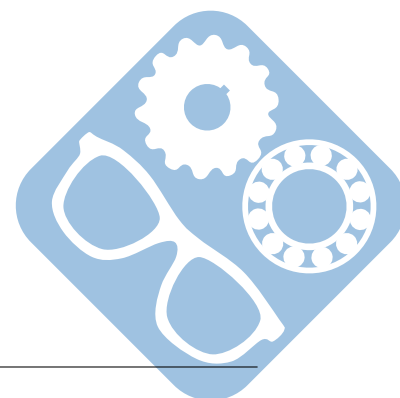
**Question 2 :** Résoudre cette équation à l'aide des transformées de Laplace. Déterminer l'expression de la sortie  $s(t)$  quand l'entrée  $e(t)$  est un échelon de valeur  $F = 750 \text{ N}$  et en faire la représentation graphique pour  $0 < t < 0,5 \text{ s}$ .

**Question 3 :** Déterminer  $tr_{5\%}$ , temps au bout duquel la sortie  $s(t)$  atteint 0,95 fois sa valeur à l'infini.

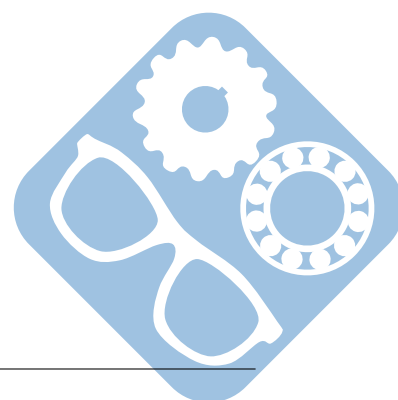
On présente à l'entrée une rampe d'effort  $f(t) = \alpha \cdot t \cdot u(t)$  où  $u(t)$  est la fonction échelon avec  $\alpha = 100 \text{ N.s}^{-1}$ . On rappelle que :  $u(t)=0$  pour  $t < 0$  et  $u(t)=1$  pour  $t > 0$ .

Déterminer l'expression de la sortie  $s(t)$  et établir sur le même graphe les représentations graphiques de  $s(t)$  et  $e(t)$ .

Déterminer l'écart de traînage  $\epsilon_v = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t))$  quand l'entrée  $e(t)$  est une rampe.



Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$	Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
$f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\forall t \in ]0, t_1[ \quad f(t) = A$	$F(p) = A \cdot \frac{1 - e^{-pt_1}}{p}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$



### 3 Réservoir

#### 3.1 Présentation du système

Un réservoir, est un aménagement accumulant l'eau de ruissellement d'un cours d'eau à l'aide d'un barrage. Dans le cas de notre étude seul trois paramètres nous intéressent, il s'agit de la hauteur de l'eau ( $s(t)$ ,  $s(0) = H_0$ ), le débit d'entrée ( $e(t)$ ) et le débit de fuite ( $q(t)$ ).



Figure 5 – Réservoir d'eau

**Question 1 :** Déterminer l'équation différentielle qui régit le système. L'entrée du système sera le débit d'entrée  $e(t)$  et la sortie la hauteur de l'eau. Les valeurs numériques sont les suivantes : section du réservoir  $S = 100\text{m}^2$  et  $H_0 = 2\text{m}$ . De plus, on fera l'hypothèse que le débit de la fuite sera proportionnel au poids de l'eau dans le réservoir avec la relation suivante :  $q(t) = K.P(t)$ , avec  $K = 12.10^{-5}.\text{m}^3.\text{N}^{-1}.\text{s}^{-1}$ .

**Question 2 :** Résoudre cette équation à l'aide des transformées de Laplace. Déterminer l'expression de la sortie  $s(t)$  quand l'entrée  $e(t)$  est un échelon de valeur  $F = 750\text{m}^3.\text{s}^{-1}$  et en faire la représentation graphique pour  $0 < t < 5\text{s}$ .

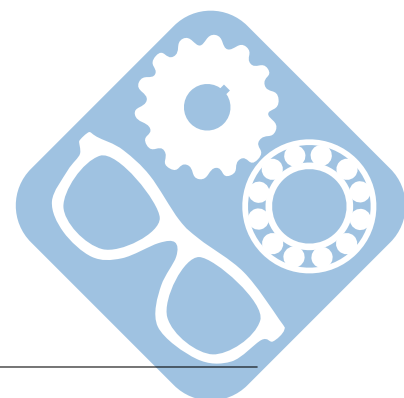
Le réservoir est-il en train de se remplir ou de se vider ?

**Question 3 :** Déterminer  $tr_{5\%}$ , temps au bout duquel la sortie  $s(t)$  atteint 0,95 fois sa valeur à l'infini.

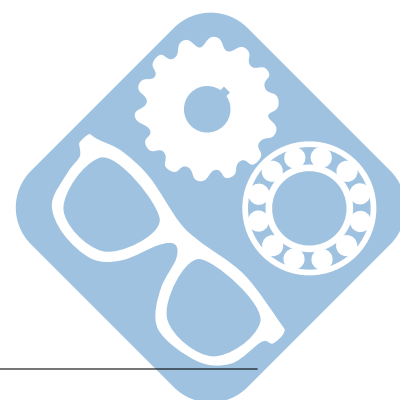
On présente à l'entrée une rampe d'effort  $f(t) = \alpha.t.u(t)$  où  $u(t)$  est la fonction échelon avec  $\alpha = 20\text{m}^3.\text{s}^{-2}$ . On rappelle que :  $u(t)=0$  pour  $t < 0$  et  $u(t)=1$  pour  $t > 0$ .

Déterminer l'expression de la sortie  $s(t)$  et établir sur le même graphe les représentations graphiques de  $s(t)$  et  $e(t)$ .

Déterminer l'écart de traînage  $\epsilon_v = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t))$  quand l'entrée  $e(t)$  est une rampe.



Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$	Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
$f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\forall t \in ]0, t_1[ \quad f(t) = A$	$F(p) = A \cdot \frac{1 - e^{-pt_1}}{p}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$



## 4 Amortisseur du second ordre

Cette étude s'intéresse au mouvement d'une roue par rapport au châssis par l'intermédiaire d'un amortisseur et ressort. Ce système peut être modélisé par une masse reliée en série à un ressort et un amortisseur montés en parallèle.



Figure 6 – Amortisseur moto

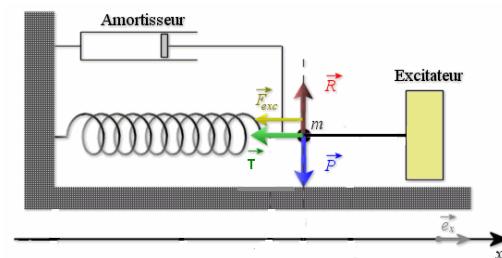


Figure 7 – Schéma de l'amortisseur

On note  $e(t)$  la force exercée sur la masse  $M$  et  $x(t)$  la position de cette masse par rapport à l'équilibre. La masse  $M$  est soumise :

- à l'action  $e(t)$
- à l'action du ressort :  $-k.x(t)$
- à l'action de l'amortisseur hydraulique :  $-f.v(t)$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la masse  $M$ , on obtient l'équation :

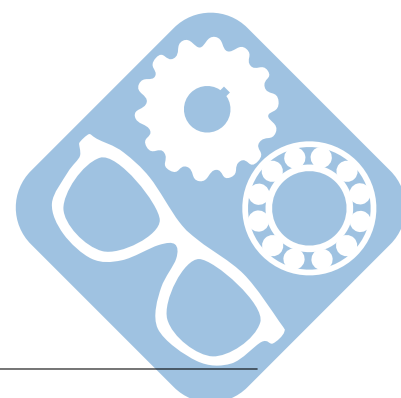
$$m.a(t) = e(t) - k.x(t) - f.v(t)$$

**Question 1 :** Donner la transformée de Laplace de cette équation.

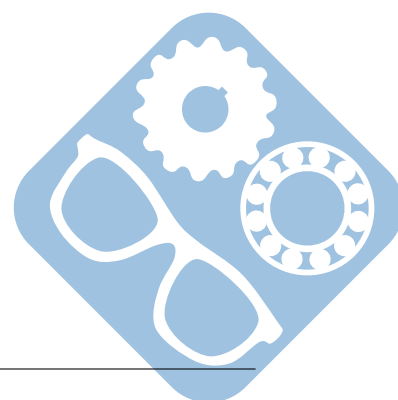
**Question 2 :** Donner la fonction de transfert du système  $H(p) = \frac{X(p)}{E(p)}$ , en identifiez la classe, l'ordre et le gain.

**Question 3 :** Déterminer les paramètres,  $K$ ,  $\omega_m$  et  $z$ .

**Question 4 :** Calculer la réponse temporelle à cet échelon pour  $\xi = 3$ ,  $K = 12$  et  $\omega_0 = 200 \text{ rad.s}^{-1}$ . Faire les simplifications nécessaires et tracer la réponse à un échelon ( $L(u(t)) = \frac{1}{p}$ ).



Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$	Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
$f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\forall t \in ]0, t_1[ \quad f(t) = A$	$F(p) = A \cdot \frac{1 - e^{-pt_1}}{p}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$





## 5 Moteur électrique à courant continu

La rotation des bobines dans le champ magnétique produit une force électromotrice  $e(t)$  proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor par rapport au bâti :  $\omega(t)$ .

$e(t) = K_e \cdot \omega(t)$  où  $K_e$  est la constante électrique du moteur.

L'intensité électrique  $i(t)$  qui traverse les bobines de l'induit produit un couple moteur sur l'arbre du rotor noté  $Cm(t)$  proportionnel à cette intensité  $i(t)$  :  $Cm(t) = K_t \cdot i(t)$  où  $K_t$  est la constante de couple du moteur.

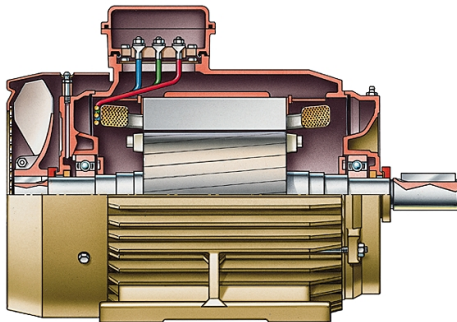


Figure 8 – Moteur électrique

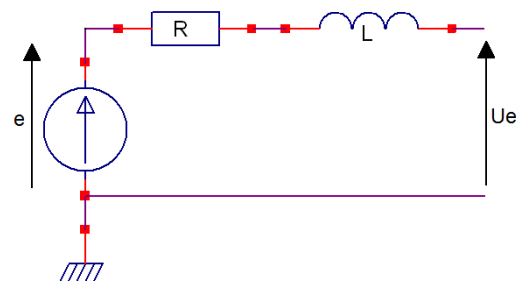


Figure 9 – Modèle électrique du moteur

L'arbre moteur est soumis à un couple de frottement visqueux proportionnel à la vitesse de rotation du rotor par rapport au bâti. Le moment d'inertie équivalent de l'ensemble des masses en mouvement dans la chaîne cinématique est noté  $J$ . Le principe fondamental de la dynamique donne alors :  $Cm(t) = f \cdot \omega(t) + J \cdot \dot{\omega}(t)$ .

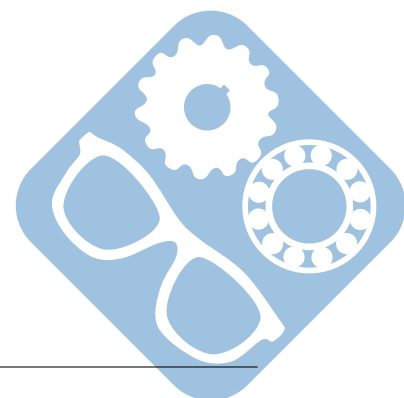
**Question 1 :** Écrire les relations entre les tensions aux bornes de la résistance  $R$  et de l'inductance  $L$ . En déduire l'équation différentielle qui régit le circuit électrique par application des lois de Kirchhoff.

**Question 2 :** Donner les transformées de Laplace de ces équations.

**Question 3 :** Donner la fonction de transfert du système  $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$ , en identifiez la classe, l'ordre et le gain.

**Question 4 :** Déterminer les paramètres,  $K$ ,  $\omega_m$  et  $z$ .

**Question 5 :** Calculer la réponse temporelle à cet échelon pour  $\xi = 2$ ,  $K = 18$  et  $\omega_0 = 230 \text{ rad.s}^{-1}$ . Faire les simplifications nécessaires et tracer la réponse à un échelon ( $L(u(t)) = \frac{1}{p}$ ).



Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$	Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
$f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\forall t \in ]0, t_1[ \quad f(t) = A$	$F(p) = A \cdot \frac{1 - e^{-pt_1}}{p}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$



## 6 Vérin piloté

Ce vérin permet de guider un bateau automatiquement.

Le comportement du vérin peut alors être modélisé à partir du modèle de structure ci-dessous et du paramétrage qui lui est associé.



Figure 10 – Vérin installé

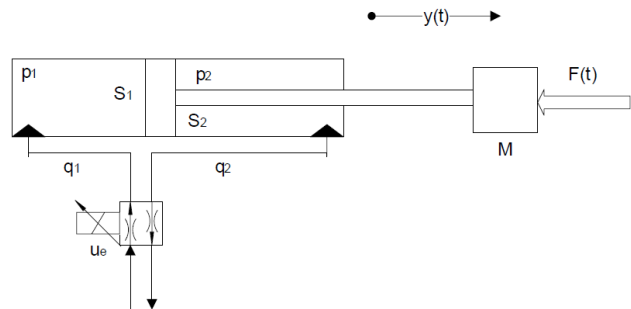


Figure 11 – Modèle du vérin

- $M = 10^4 \text{ kg}$  : masse de l'équipage mobile,
- $f = 3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$  : résistance due aux frottements visqueux,
- $K = 2,5 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  : la raideur hydraulique du vérin,
- $S_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$  : la surface du piston de la chambre d'admission.

L'ensemble « équipage mobile » est formé par : le tiroir, l'effort variable dû à la ferraille, noté  $F(t)$  et la tige du piston du vérin. La position notée  $y(t)$  est fonction du débit d'huile, noté  $q_1(t)$ , à l'entrée de la chambre d'admission du vérin. On se place dans l'hypothèse de petit déplacement autour d'un point de fonctionnement (position particulière d'équilibre). Le système peut donc être considéré comme linéaire, continu et invariant.

Modélisation de l'équipage mobile. L'équation temporelle donnant le déplacement  $y_1(t)$  en fonction du débit  $q_1(t)$  pour un effort  $F(t)$  nul est telle que :

$$M \cdot \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = K \cdot \int_0^t \frac{q_1(\tau)}{S_1} \cdot d\tau - K \cdot y_1(t) - f \frac{dy_1(t)}{dt}.$$

L'équation temporelle donnant le déplacement  $y_2(t)$  en fonction de l'effort  $F(t)$  pour un débit  $q_1(t)$  nul est telle que :

$$M \cdot \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = -K \cdot y_2(t) - f \frac{dy_2(t)}{dt} + F(t).$$

**Question 1 :** En supposant que les conditions initiales sont nulles, donner dans le domaine de Laplace et sous forme canonique :

- La fonction de transfert :  $H_1(p) = \frac{Y_1(p)}{Q_1(p)}$  liant le déplacement  $y_1(t)$  au débit  $q_1(t)$  pour un effort  $F(t)$  nul,
- La fonction de transfert :  $H_2(p) = \frac{Y_2(p)}{F(p)}$  liant le déplacement  $y_2(t)$  à l'effort  $F(t)$  pour un débit  $q_1(t)$  nul.

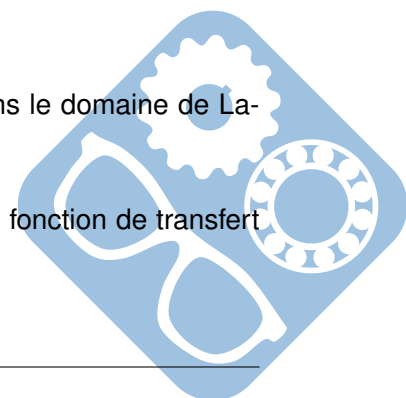
En donner l'ordre et la classe.

**Question 2 :** En appliquant le principe de superposition, donner l'équation, dans le domaine de Laplace, liant le déplacement  $Y(p)$  au débit  $Q_1(p)$  et à l'effort  $F(p)$ .

Modélisation générale du fonctionnement de l'ensemble vérin et distribution.

Pour étudier l'influence du débit, on néglige la contribution de l'effort  $F(t)$ . La fonction de transfert déplacement-débit est alors :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{Q_1(p)} = \frac{1}{p \cdot S_1 \cdot (1 + \frac{1}{K} \cdot (f \cdot p + M \cdot p^2))}$$

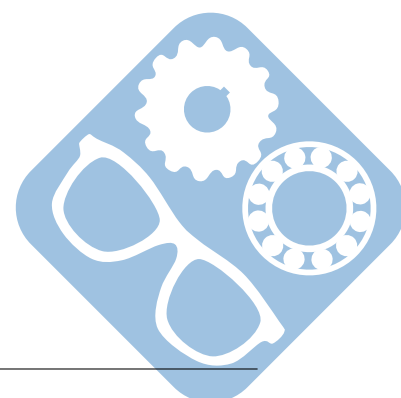


On admettra que ce résultat est généralisable pour toute position de la tige de vérin. Un servodistributeur proportionnel délivre un débit d'huile  $q_1(t)$  proportionnel à sa tension de commande  $u_e(t)$  tel que :  $q_1(t) = Ke \cdot u_e(t)$ , avec  $Ke = 2 \cdot 10^{-4} m^3 \cdot s^{-1} \cdot V^{-1}$ . Un détecteur de position délivre une tension  $u_s(t)$  proportionnelle à la position  $y(t)$  du tiroir telle que :  $u_s(t) = Kc \cdot y(t)$ , avec  $Kc = 10^3 V \cdot m^{-1}$ .

**Question 3 :** En déduire la fonction de transfert suivante :  $\frac{U_s(p)}{U_e(p)}$ .

**Question 4 :** Calculer  $u_s(t)$  pour une entrée en échelon unitaire.

Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$	Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
$f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\forall t \in ]0, t_1[ \quad f(t) = A$	$F(p) = A \cdot \frac{1 - e^{-pt_1}}{p}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$



## 7 Chaudière

L'étude porte sur la montée en température de l'eau qui sert à chauffer les pièces au travers de radiateurs. Cette température est obtenue à partir d'une puissance calorifique fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire de la chaudière.



Figure 12 – Chaudière

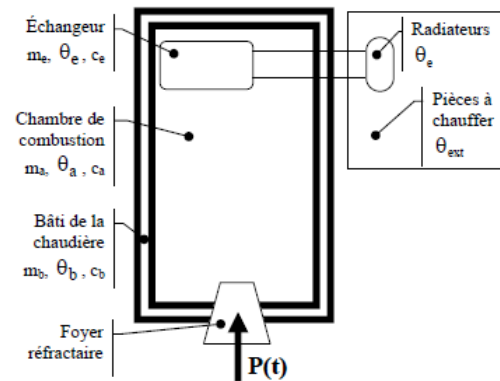


Figure 13 – Schéma de la chaudière

$p(t)$  est la puissance calorifique en Watt fournie par le bois brûlé. L'air situé dans la chambre de combustion permet de monter à la température  $\theta_e(t)$  l'eau située dans l'échangeur. L'eau chaude, au travers des radiateurs permet de chauffer les pièces à une température  $\theta_{ext}(t)$ .

On note :

- $\theta_b(t)$  la température du bâti de la chaudière,
- $m_b$  la masse du bâti à monter en température,  $m_b = 200\text{kg}$ ,
- $c_b$  la capacité calorifique massique du bâti,  $c_b = 500\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,
- $\theta_a(t)$  la température de l'air dans la chambre de combustion,
- $m_a$  la masse de l'air à monter en température ;  $m_a = 2\text{kg}$ ,
- $c_a$  la capacité calorifique massique de l'air,  $c_a = 700\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,
- $\theta_e(t)$  la température de l'eau dans l'échangeur et les radiateurs,
- $m_e$  la masse de l'eau à monter en température dans l'échangeur,  $m_e = 50\text{kg}$ ,
- $c_e$  la capacité calorifique massique de l'eau,  $c_e = 4000\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,
- $\theta_{ext}(t)$  la température ambiante des pièces à chauffer.

D'après le principe de conservation :

$$m_b \cdot c_b \cdot \frac{d\theta_b(t)}{dt} + K_{ab} \cdot (\theta_b(t) - \theta_a(t)) = p(t)$$

$$m_a \cdot c_a \cdot \frac{d\theta_a(t)}{dt} + K_{ae} \cdot (\theta_a(t) - \theta_e(t)) = K_{ab} \cdot (\theta_b(t) - \theta_a(t))$$

$$m_e \cdot c_e \cdot \frac{d\theta_e(t)}{dt} + K_{ae} \cdot (\theta_e(t) - \theta_{ext}(t)) = K_{ae} \cdot (\theta_a(t) - \theta_e(t))$$

Avec :

- $K_{ab}$  la conductance thermique bâti/air dans la chambre de combustion,  $K_{ab} = 40\text{J.s}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,
- $K_{ae}$  la conductance thermique air/eau au travers de l'échangeur/radiateurs.  $K_{ae} = 400\text{J.s}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

On suppose que le corps de chauffe est parfaitement isolé de l'extérieur.

Les transformées de Laplace seront notées :  $L[\theta_i(t)] = T_i(p)$  et  $L[p(t)] = P(p)$ .

**Question 1 :** En supposant que les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), donner dans le domaine de Laplace, la transformée des équations différentielles précédentes.

**Question 2 :** Exprimer  $T_b(p)$  en fonction de  $T_a(p)$  et de  $P(p)$  en faisant apparaître les variables  $m_b$ ,  $c_b$  et  $K_{ab}$  mettre sous la forme :  $T_b(p) = H_1(p) \cdot T_a(p) + H_2(p) \cdot P(p)$ .

Préciser l'ordre du système défini par la fonction de transfert  $H_1(p)$ , ainsi que, littéralement, ses caractéristiques. Calculer la valeur numérique approchée de  $\tau_1$ , la constante de temps de ce système.

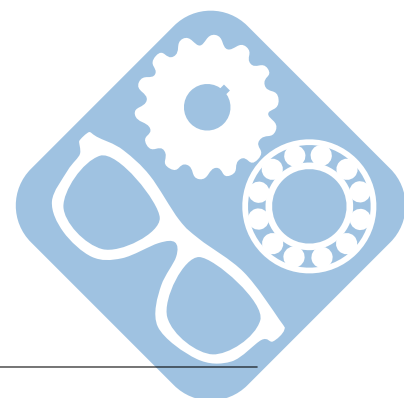
**Question 3 :** Exprimer  $T_a(p)$  en fonction de  $T_e(p)$  et de  $T_b(p)$  en faisant apparaître les variables  $m_a$ ,  $c_a$ ,  $K_{ae}$  et  $K_{ab}$ .

Mettre  $T_a(p)$  sous la forme  $T_a(p) = H_3(p) \cdot T_e(p) + H_4(p) \cdot T_b(p)$ .

Préciser l'ordre des systèmes définis par les fonctions de transfert respectives  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$ , ainsi que, littéralement, leurs caractéristiques.

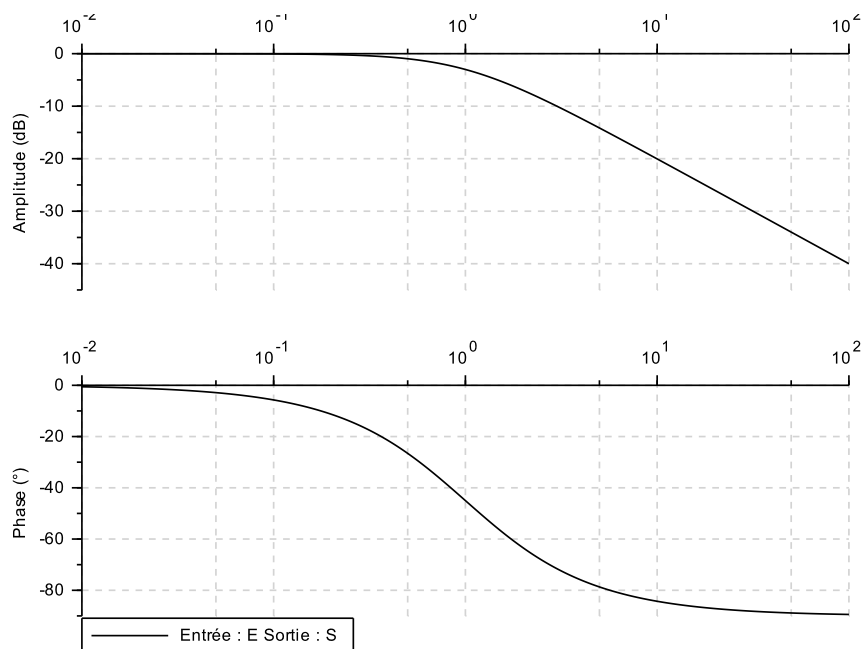
Calculer la valeur numérique approchée de  $\tau_3$ , la constante de temps de ces systèmes.

Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$	Temporel $f(t)$	Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
$f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\forall t \in ]0, t_1[ \quad f(t) = A$	$F(p) = A \cdot \frac{1 - e^{-pt_1}}{p}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$



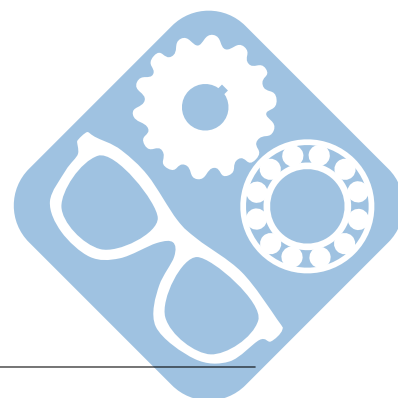
## 8 Identification fréquentielle 1

L'analyse fréquentielle d'un système a donné le tracé suivant.



**Question 1 :** Tracer les asymptotes à cette courbe.

**Question 2 :** Déterminer la fonction de transfert correspondante.

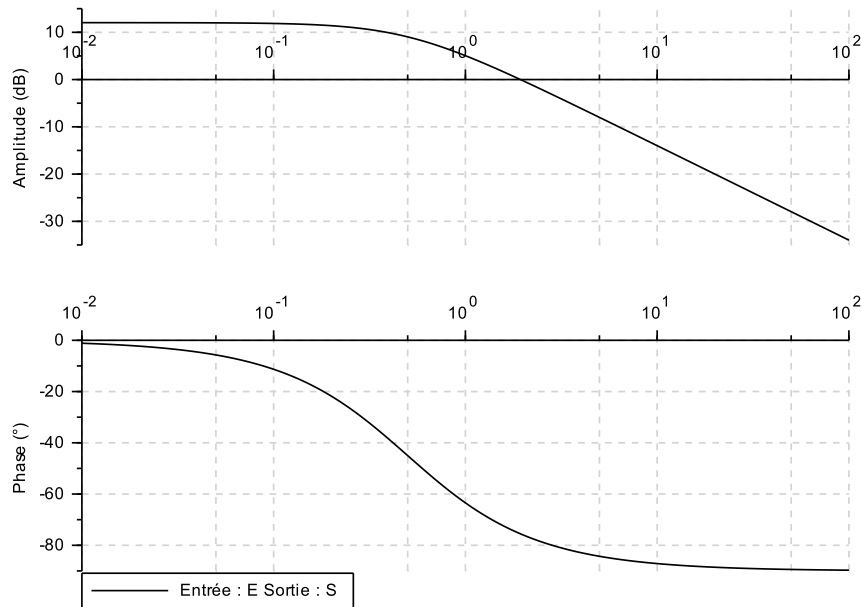






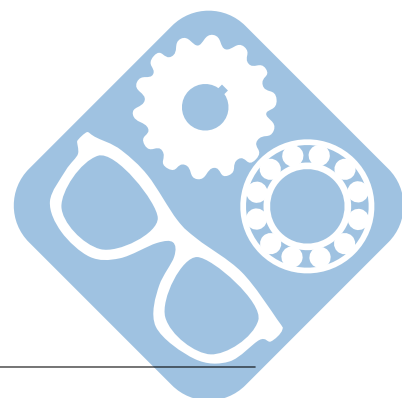
## 9 Identification fréquentielle 2

L'analyse fréquentielle d'un système a donné le tracé suivant.



**Question 1 :** Tracer les asymptotes à cette courbe.

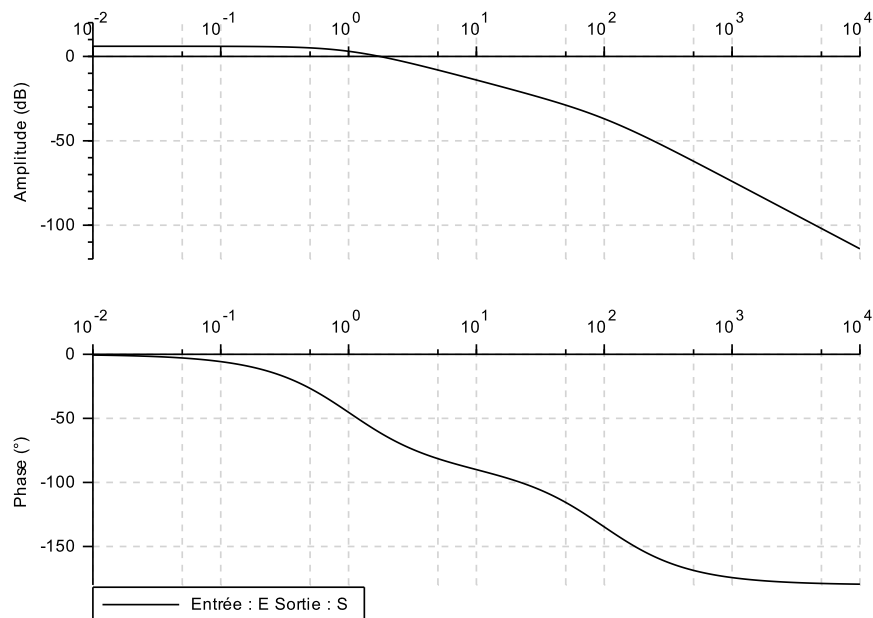
**Question 2 :** Déterminer la fonction de transfert correspondante.





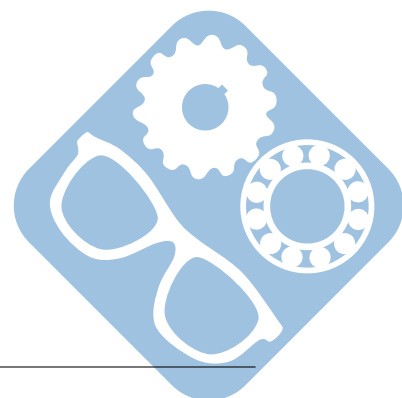
## 10 Identification fréquentielle 3

L'analyse fréquentielle d'un système a donné le tracé suivant.



**Question 1 :** Tracer les asymptotes à cette courbe.

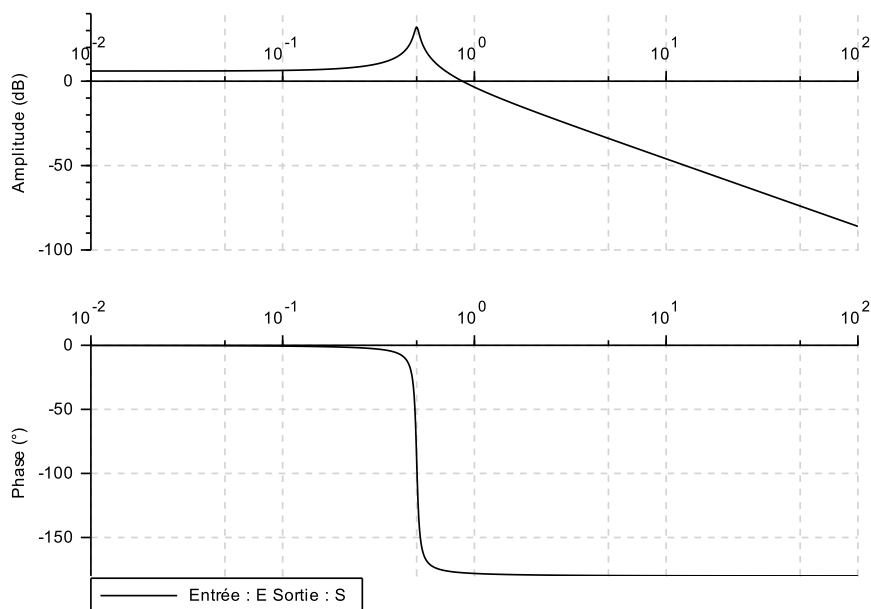
**Question 2 :** Déterminer la fonction de transfert correspondante.





## 11 Identification fréquentielle 4

L'analyse fréquentielle d'un système a donné le tracé suivant.



**Question 1 :** Tracer les asymptotes à cette courbe.

**Question 2 :** Déterminer la fonction de transfert correspondante.

