

DS 06- Vélo Cargo

Avec Correction

PTSI

Samedi 5 avril 2025

Table des matières

I	Introduction	2
II	Effort de mise en stationnement	3
III	Étude du capteur de couple	9
IV	Modélisation de l'association { onduleur + machine synchrone }	12
V	Asservissement du couple délivré par le groupe d'assistance	15

Vélo Cargo

I Introduction



FIGURE 1 – Vélo cargo

Le secteur des transports est la première source d'émissions de gaz à effet de serre en France avec 31% des émissions du pays. Ces émissions sont, pour plus de moitié, dues aux véhicules individuels motorisés (voitures, motos) qui restent utilisés au quotidien par 68% des Français alors que plus de la moitié des trajets effectués fait moins de 5 km¹.

À l'inverse, non content d'être un très faible émetteur de gaz à effet de serre, le vélo s'avère peu consommateur en ressources et en énergie tout en étant bon pour la santé individuelle et collective. Le vélo constitue également une solution viable pour décongester les villes. Son utilisation est encouragée par de nombreux acteurs institutionnels de par la création d'aménagements cyclables, les aides à l'achat de vélo à assistance électrique ou encore la création du forfait mobilité durable.

L'essor des vélos à assistance électrique (VAE) a libéré de nombreux cyclistes de l'appréhension du relief. Le développement des VAE s'est accompagné de celui des vélos cargos qui permettent d'effectuer des livraisons ou encore de transporter des enfants. Ce sujet porte sur un de ces vélos cargo.

I.1 Présentation du système

La société Douze cycles conçoit et réalise des vélos cargo destinés aux professionnels comme aux particuliers. Cette société est implantée en Bourgogne où elle emploie 25 collaborateurs.

Le système étudié est un biporteur à assistance électrique, le G4e, conçu et réalisé par Douze cycles. Soucieuse d'allier durabilité, praticité et esthétique, la société Douze cycles innove continument pour faire évoluer sa gamme de produits. Ce vélo, présenté par l'entreprise comme « une solution vélogistique tout-en-un répondant à la plupart des usages pour les familles ou les professionnels », a été lancé en 2017 pour le cinquième anniversaire de la marque.

1. Données extraites de l'article « Bouger autrement au quotidien » publié par l'ADEME <https://librairie.ademe.fr/cadic/7338/guide-bouger-autrement-au-quotidien.pdf>

I.2 Étude proposée

Les études proposées dans ce sujet portent sur différentes problématiques spécifiques à la conception du vélo cargo étudié :

- L'étude s'ouvre, partie 2 sur la détermination de l'effort que doit fournir le cycliste pour garer le vélo sur sa béquille,
- La modélisation du capteur utilisé pour mesurer le couple appliqué par le cycliste sur le pédalier occupe la partie 3,
- La partie 4 se focalise sur l'étude de l'association { onduleur + machine } qui anime le groupe d'assistance,
- Enfin, les modèles obtenus lors des deux parties précédentes sont exploités partie 5 lors de l'étude de l'asservissement du couple délivré par la machine.

II Effort de mise en stationnement

Objectif Déterminer l'effort à exercer par l'usager lors de la mise en stationnement sur béquille.

La mise en position parking du vélo cargo (le « béquillage ») nécessite d'exercer un effort sur le guidon. Cette partie vise à déterminer cet effort et à vérifier sa compatibilité avec les exigences d'ergonomie.

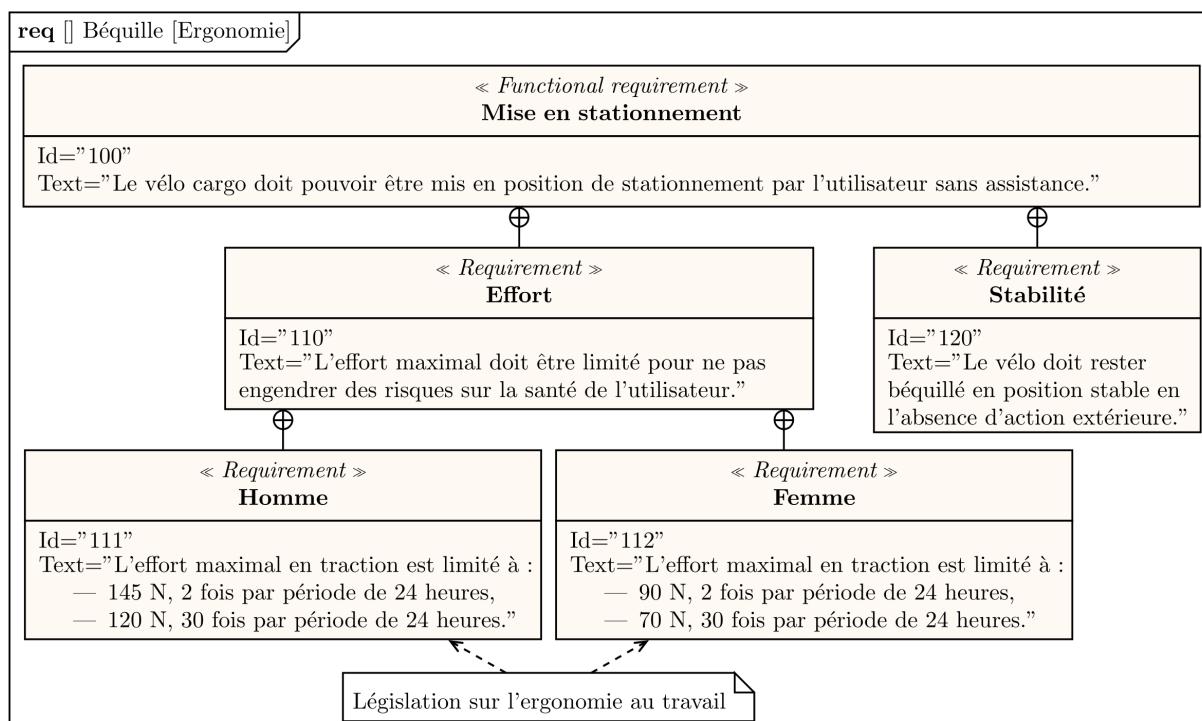
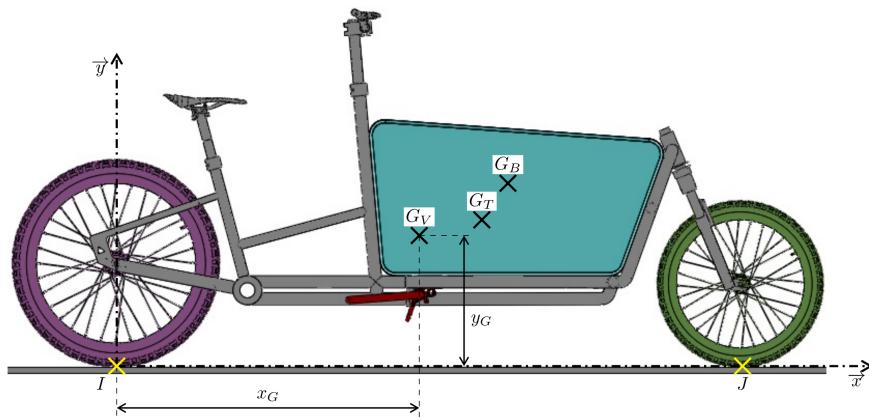


FIGURE 2 – Extrait du cahier des charges relatif à l'ergonomie de la mise en stationnement du vélo



- $\vec{IJ} = L \cdot \vec{x}$
- $L = 2050\text{mm}$
- $\vec{IG_V} = x_G \cdot \vec{x} + y_G \cdot \vec{y}$
- $\vec{IG_B} = x_B \cdot \vec{x} + y_B \cdot \vec{y}$
- $x_B = 1250\text{mm}$
- $\vec{IG_T} = x_T \cdot \vec{x} + y_T \cdot \vec{y}$

FIGURE 3 – Paramétrage adopté pour la détermination des caractéristiques inertielles du vélo

II.1 Caractéristiques inertielles du vélo

Définition des ensembles

- V : ensemble du vélo hors béquille (supposée de masse négligeable) et hors black-box,
- B : black-box chargée au maximum,
- T = V \cup B.

II.1.1 Centre de gravité G_V du vélo à vide

On étudie le vélo G4e à vide (ensemble V). La masse totale de cet ensemble est alors $m_V = 50\text{kg}$. Les roues du vélo ainsi équipée sont positionnées sur des balances, l'ensemble étant en équilibre dans le plan vertical (I, \vec{x}, \vec{y}). On mesure au niveau des points de contact :

- arrière, I : $m_I = 26\text{kg}$,
- avant, J : $m_J = 24\text{kg}$.

La distance entre les points I et J est notée $L = 2050\text{mm}$ (voir figure 3).

Question 1 : Déterminer l'expression littérale de la position x_G suivant \vec{x} du centre de gravité de l'ensemble. En déduire la valeur de x_G en mm.

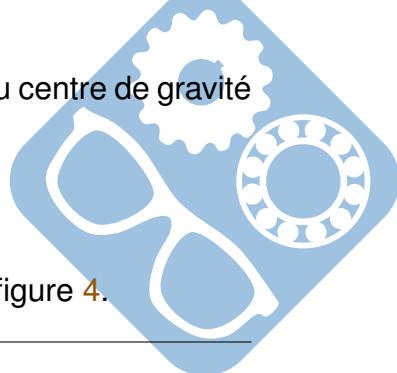
II.1.2 Centre de gravité G_T du vélo chargé

On considère à présent que la black box est chargée à son maximum ($m_B = 100\text{kg}$). On appelle G_B , le centre de gravité de la masse chargée où $x_B = 1250\text{mm}$.

Question 2 : Déterminer l'expression littérale de la position x_T suivant \vec{x} du centre de gravité de l'ensemble chargé. Calculer la valeur de x_T .

II.2 Étude géométrique

L'étude est menée dans le plan (I, \vec{x}, \vec{y}) à partir du paramétrage défini figure 4.



Procédure de béquillage Le béquillage se réalise en poussant la béquille avec le pied sur le sol puis en exerçant une action de traction sur le guidon.

L'utilisateur garde son pied sur la béquille pour la plaquer au sol durant toute la phase de béquillage afin de maintenir le contact en K de la béquille avec le sol.

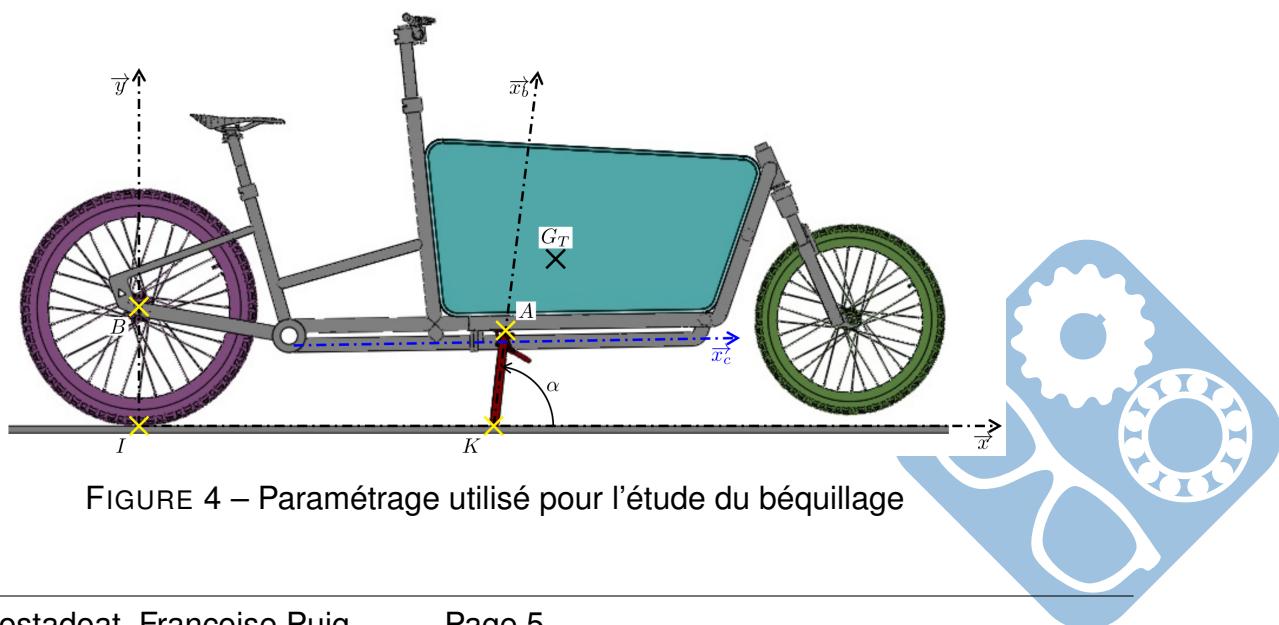
Mouvement du vélo On suppose dans cette partie que la fourche avant est rigide durant la phase de béquillage. Dès lors, la roue avant se décollera du sol sous l'action de traction du vélo par l'usager tandis que la roue arrière reculera.

Définition de l'ensemble étudié : L'ensemble étudié se compose des solides suivants :

- le sol (0), repère associé ($I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$),
- la roue arrière (1),
- le cadre (2), repère associé ($A, \vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}$),
- la béquille (4), repère associé ($A, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}$),
- la roue avant (3).

Modèle cinématique On modélise la cinématique de l'ensemble par une liaison :

- sphère/plan de normale (I, \vec{y}) entre la roue arrière (1) et le sol (0),
- pivot d'axe (B, \vec{z}) entre la roue (1) et le cadre (2),
- pivot d'axe (A, \vec{z}) entre le cadre (2) et la béquille (4),
- pivot d'axe (K, \vec{z}) entre la béquille (4) et le sol (0) (modélisation associée au blocage de la béquille par le pied).



- $\vec{KI} = \mu(t) \cdot \vec{x}$
- $\vec{KA} = a \cdot \vec{x}_b$
- $\vec{IB} = R_B \cdot \vec{y}$
- $\vec{AB} = -b \cdot \vec{x}_c + e \cdot \vec{y}_c$
- $\vec{AG_T} = (x_T - b) \cdot \vec{x}_c + (y_T - h) \cdot \vec{y}_c$
- $a = 290\text{mm}$
- $R_B = 340\text{mm}$
- $b = 1030\text{mm}$
- $e = 70\text{mm}$
- $h = 270\text{mm}$
- $x_T = 1150\text{mm}$
- $y_T = 400\text{mm}$

- $\alpha(t) = (\vec{x}, \vec{x}_b) = (\vec{y}, \vec{y}_b)$
- $\beta(t) = (\vec{x}, \vec{x}_c) = (\vec{y}, \vec{y}_c)$

La partie basse du cadre est à l'horizontale avant le béquillage : \vec{x}_c et \vec{x} sont colinéaires lorsque les deux roues sont en contact avec le sol.

Question 3 : Compléter le schéma cinématique esquisqué sur le document réponse conformément au modèle proposé en faisant apparaître les liaisons, les solides et les repères qui leurs sont associés.

Question 4 : Compléter les figures de changement de base esquissées sur le document réponse.

Question 5 : À partir d'une fermeture géométrique, montrer que l'équation scalaire qui lie la valeur de β à α , a , b , e et R_B est de la forme : $a \cdot \sin(\alpha) = b \cdot \sin(\beta) - e \cdot \cos(\beta) + R_B$.

Valeurs limites de α On note α_i et α_f ($\alpha_i < \alpha_f$) les valeurs de l'angle α entre lesquelles la roue avant est décollée du sol. On suppose que β étant faible, $\cos\beta = 1$ et $\sin\beta = 0$.

Question 6 : Déterminer les expressions des angles α_i et α_f en fonction de R_B , e et a . En calculer les valeurs en degrés.

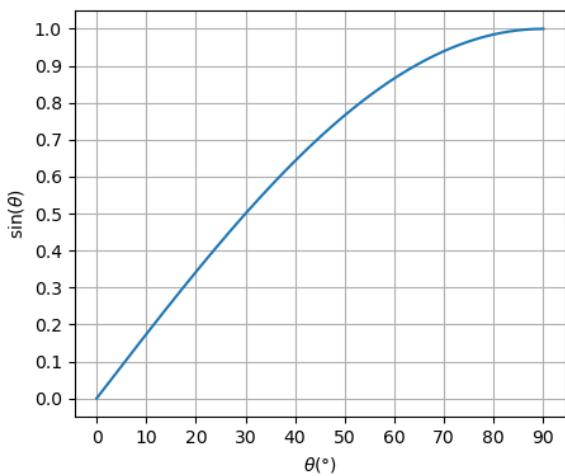


FIGURE 5 – Tracé de $\sin\theta$ en fonction de θ .

Les valeurs calculées précédemment arrondies conduisent à $\alpha_i \approx 70^\circ$ et $\alpha_f \approx 110^\circ$. L'évolution de l'angle β en fonction de α , pour la plage de béquillage, est donnée figure 6 ci-contre.

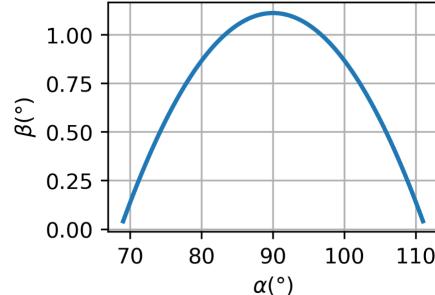
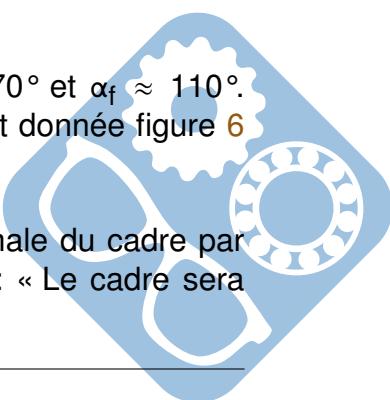


FIGURE 6 – Évolution de β en fonction de α au cours du béquillage.

Question 7 : Déduire de la courbe fournie la valeur d'inclinaison maximale du cadre par rapport au sol, notée β_{max} . Conclure sur l'hypothèse d'étude suivante : « Le cadre sera supposé horizontal lors du béquillage ».



II.3 Effort de béquillage

On se propose à présent d'estimer l'action mécanique que doit développer le cycliste sur le guidon lors du béquillage dans le cas où la béquille est perpendiculaire au cadre ($\alpha = 90^\circ$, on admet qu'il s'agit de la position critique en termes d'effort). Le paramétrage adopté pour cette étude est défini figure 7.

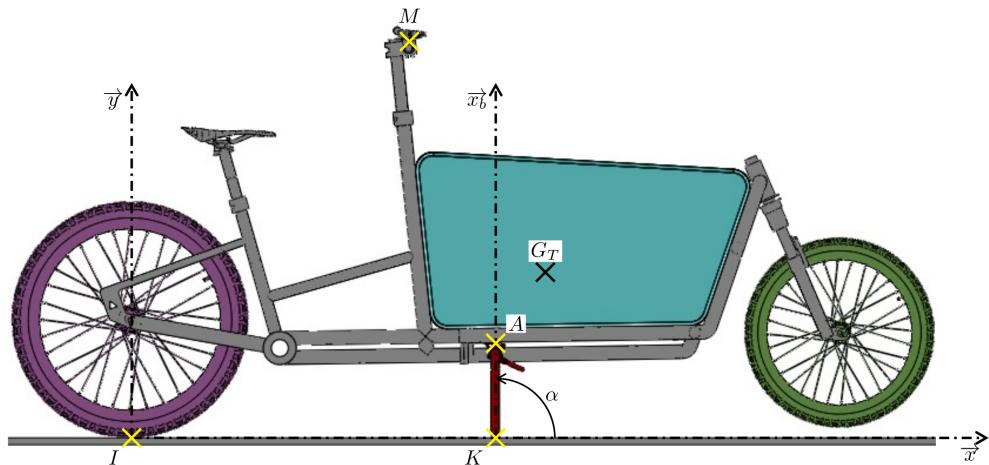


FIGURE 7 – Paramétrage utilisé pour l'étude du béquillage

- $\vec{KI} = \mu(t) \cdot \vec{x}$
- $\vec{KA} = a \cdot \vec{y}$
- $\vec{KG_T} = k \cdot \vec{x}_C + q \cdot \vec{y}_C$
- $\vec{AM} = -d \cdot \vec{x}_C + y_M \cdot \vec{y}_C$
- $a = 290\text{mm}$
- $\mu = -1030\text{mm}$
- $k = 120\text{mm}$
- $q = 130\text{mm}$
- $d = 180\text{mm}$
- $y_M \in [900, 1000]\text{mm}$
- $\alpha(t) = (\vec{x}, \vec{x}_B) = (\vec{y}, \vec{y}_B) = 90^\circ$
- $\beta(t) = (\vec{x}, \vec{x}_C) = (\vec{y}, \vec{y}_C) = 1^\circ$

Notation Le torseur de l'action mécanique exercée par le solide i sur j, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, dans l'hypothèse de problème plan, est noté :

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ \sim \\ N_{ij}^K \end{array} \right\}_{K, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{ou} \quad \{T_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{ij} \cdot \vec{x} + Y_{ij} \cdot \vec{y} \\ N_{ij}^K \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_K$$

Données et hypothèses

- L'action mécanique exercée par le cycliste est un glisseur \vec{F}_C appliqué en M tel que $\vec{F}_C = -F_C \cdot \vec{x}$,
- L'accélération de la pesanteur vaut $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}$ où on approche g par $g = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$,
- La masse de l'ensemble, pour rappel, est notée m_T et vaut $m_T = 150\text{kg}$,
- On suppose les liaisons sans frottements à l'exception du contact Roue/Sol, où l'on suppose un frottement suivant le modèle de Coulomb de coefficient $f = 1$.

Question 8 : Donner la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles du sol (0) sur la béquille (4) en K dans la base ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$).

Question 9 : Donner la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles du sol (0) sur la roue (1) en I dans la base ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$).

Question 10 : Donner la forme du torseur des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ en G_T dans la base ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$).

Question 11 : Appliquer le théorème du moment statique à Σ en I en projection sur \vec{z} . En déduire la relation qui lie F_C à Y_{04} en fonction de μ , a , k , q , d , y_M , β , m_T et g .

On rappelle que β est suffisamment petit pour considérer que $\sin\beta \approx 0$ et $\cos\beta \approx 1$.

Question 12 : Montrer qu'alors, on peut exprimer F_C sous la forme :

$$F_C \approx \frac{\mu \cdot Y_{04} - (\mu - k) \cdot m_T \cdot g}{y_M + a}$$

Déterminer la condition sur y_M qui conduit alors à une action à développer par le cycliste F_C maximale.

Question 13 : En isolant l'ensemble Σ et en appliquant le théorème de la résultante statique, écrire les équations scalaires qui relient les différentes composantes des torseurs d'actions mécaniques exercées par le sol.

Question 14 : Montrer alors, que même en supposant le glissement en I, l'isolement de l'ensemble ne permet pas de déterminer l'action du cycliste.

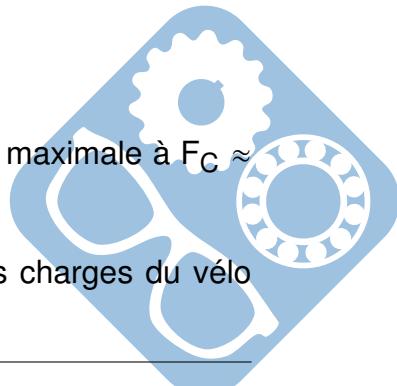
On se propose à présent d'isoler la béquille (4) seule. On fait l'hypothèse que son poids est négligeable devant les autres actions mécaniques.

Question 15 : Montrer en appliquant le PFS à la béquille (4) et en choisissant une équation scalaire pertinente parmi celles disponibles, que pour la position étudiée ($\alpha = 90^\circ$) et pour l'isolement choisi, $X_{04} = 0$.

On montre alors en utilisant les résultats précédents :

$$F_C = \frac{f \cdot k \cdot m_T \cdot g}{\mu + f \cdot (y_M + a)}$$

On estime alors l'effort minimal pour assurer le bœquillage en charge maximale à $F_C \approx 80N$.



Question 16 : Conclure sur le respect de l'exigence 110 du cahier des charges du vélo (figure 2)

III Étude du capteur de couple

Le groupe d'assistance dont est pourvu le vélo cargo assiste le cycliste en fonction du couple que celui-ci applique sur le pédalier. Ce groupe d'assistance comporte donc un capteur destiné à acquérir le couple appliqué par le cycliste sur le pédalier. Cette section vise à modéliser ce capteur et à en dimensionner certains éléments.

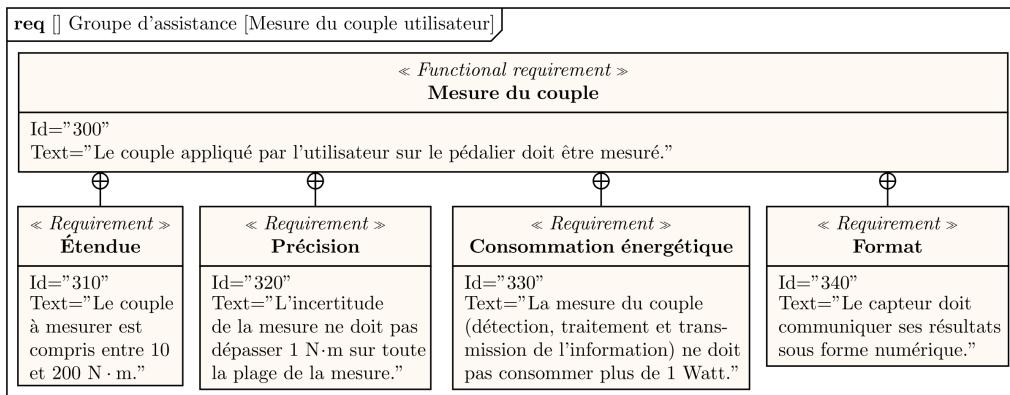


FIGURE 8 – Extrait du cahier des charges relatif à la mesure du couple appliqu\u00e9 par l'utilisateur sur le p\u00e9dalier.

III.1 Présentation du capteur

Le capteur utilisé est composé d'un transducteur à reluctance variable (présenté ci-dessous), d'un circuit d'amplification et de détection d'amplitude (non étudié) et d'un convertisseur analogique numérique.

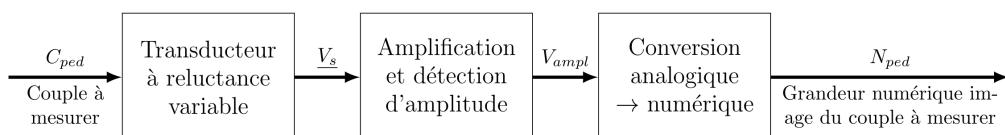


FIGURE 9 – Extrait du cahier des charges relatif à la mesure du couple appliqu\u00e9 par l'utilisateur sur le p\u00e9dalier.

Constitution du transducteur à reluctance variable Un schéma de principe du transducteur à reluctance variable autour duquel est construit le capteur de couple étudié est donné figure 10. Ce transducteur est constitué de quatre ensembles :

- l'arbre A1 sur lequel est monté un anneau magnétique Am1,
- l'arbre A2 sur lequel sont montés les anneaux magnétiques Am21 et Am22,
- l'arbre de torsion At qui relie les arbres A1 et A2,
- un bâti (non représenté sur la figure 10). Les arbres A1 et A2 sont guidés en rotation par rapport à ce bâti. Les bobines de détection Bd et de compensation Bc sont solidaires du bâti.



Principe de la mesure Les bobines Bd et Bc sont alimentées par une source de tension sinusoïdale. Le circuit magnétique constitué par la bobine de compensation et les anneaux magnétiques Am21 et Am22 est indéformable. Son inductance est donc indépendante du couple transmis (cette bobine sert à compenser la dérive en température).

Le circuit magnétique constitué par la bobine de détection et les anneaux magnétiques Am1 et Am21 se déforme en même temps que l'arbre de torsion. Cette déformation provoque une variation de l'inductance de la bobine de détection. Le transducteur est construit de telle sorte que cette variation d'inductance soit proportionnelle au couple à mesurer.

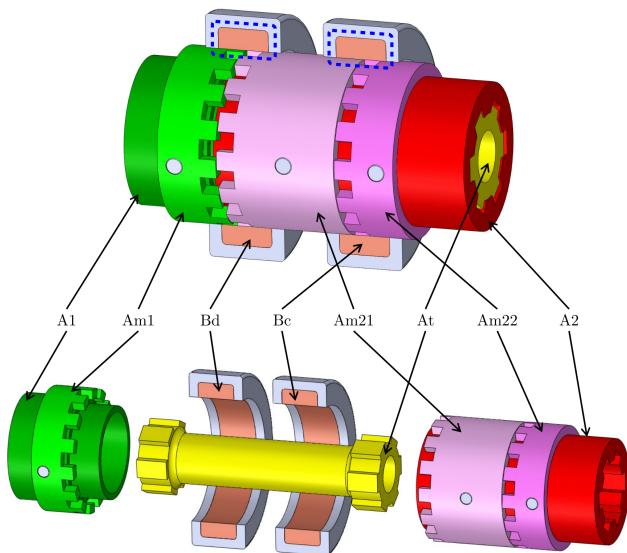


FIGURE 10 – Principaux éléments du transducteur de couple

III.2 Tension de sortie du transducteur

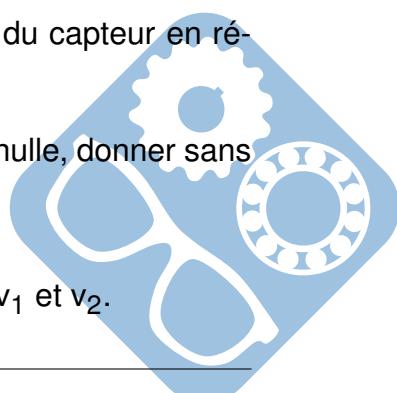
Objectif Exprimer la tension de sortie vs du transducteur de couple en fonction de la variation d'inductance ΔL .

Le transducteur de couple est modélisé par deux bobines d'inductances respectives L_1 (bobine de compensation) et $L_1 + \Delta L$ (bobine de détection). La résistance de ces bobines n'est pas négligée. Ces bobines sont insérées dans le montage schématisé figure 11. Les deux sources de tension sinusoïdales v_1 et v_2 ont même valeur moyenne, même amplitude et sont en opposition de phase. La différence de potentiel vs entre les points A et B du schéma de la figure 11 constitue la tension de sortie du transducteur.

Régime continu On étudie dans un premier temps le fonctionnement du capteur en régime continu.

Question 17 : En supposant que l'amplitude A des tensions v_1 et v_2 est nulle, donner sans justification les valeurs :

- de la tension v_s ,
- de la puissance débitée par chacune des deux sources de tension v_1 et v_2 .



Régime alternatif L'étude du régime continu a permis de montrer qu'il est possible de remplacer les deux sources de tension v_1 et v_2 par une unique de source de tension $v_{12} = v_1 - v_2$. Le transducteur fonctionnant en régime sinusoïdal forcé, on utilise les notations complexes des grandeurs électriques. À partir de la question 18, l'étude est menée sur la base du schéma de la figure 12. Les valeurs numériques définies figure 11 sont conservées. La tension $V_{12} = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot A \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ ($\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$) est prise pour référence de phases.

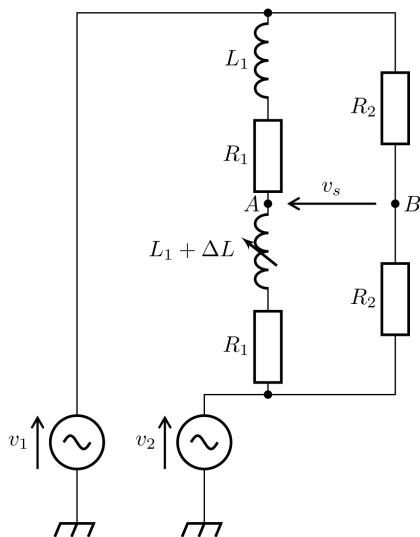


FIGURE 11 – Modèle électrique du transducteur de couple et grandeurs associées

- $L_1 = 5\text{mH}$,
- $-\Delta L_{\text{Max}} \leq \Delta L \leq 0\text{mH}$ avec :
 $\Delta L_{\text{Max}} = 1\text{mH}$,
- $R_1 = 5\Omega$,
- $v_1 = \frac{E}{2} + \sqrt{2} \cdot A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$,
- $v_2 = \frac{E}{2} - \sqrt{2} \cdot A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$,
- $E = 24\text{V}$
- $A = 8\text{V}$,
- $f = 20\text{kHz}$.

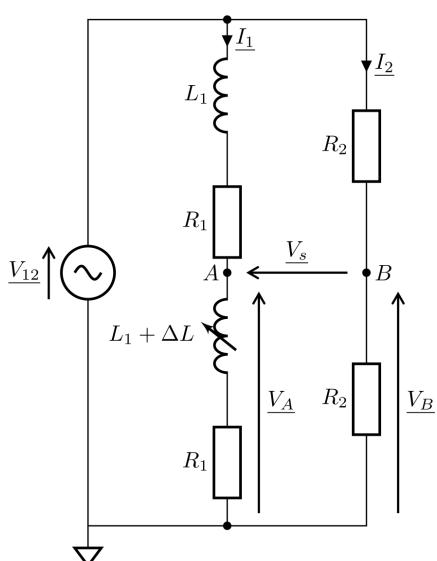


FIGURE 12 – Modèle électrique du transducteur de couple en régime alternatif

Question 18 : Exprimer les tensions V_A et V_B en fonction de V_{12} et des paramètres définis figure 11.

Question 19 : En déduire les expressions des paramètres X_{var} , R_{tot} et X_{tot} tels que : $V_S = \frac{j \cdot X_{\text{var}}}{2 \cdot (R_{\text{tot}} + j \cdot X_{\text{tot}})} \cdot V_{12}$

Question 20 : Calculer la valeur de R_{tot} ainsi que les valeurs extrêmes de X_{tot} . Proposer alors une simplification de la grandeur $\left| \frac{V_S}{V_{12}} \right|$.

Question 21 : Indiquer la condition que doivent satisfaire les grandeurs L_1 et ΔL afin de pouvoir considérer le transducteur linéaire (V_S proportionnel à ΔL).

III.3 Consommation énergétique du transducteur

Objectif Dimensionner les résistances R_2 .

Rappel : le transducteur est étudié sur la base du modèle donné figure 12, les valeurs numériques relatives à ce modèle sont données figure 11.

Exigence de consommation Afin de respecter l'exigence 330 (figure 8), la puissance consommée par le transducteur ne doit pas dépasser 0.5 W.

Hypothèse supplémentaire L'étude de la consommation énergétique du transducteur est menée en supposant $\Delta L = 0H$.

Question 22 : Montrer que la valeur du courant efficace $I_1 = \frac{A}{\sqrt{R_1^2 + (L_1 \cdot \omega)^2}}$. Calculer sa valeur numérique. On rappelle que $V_{12} = 2 \cdot A$.

Question 23 : Exprimer la puissance P_{trans} absorbée par le transducteur en fonction de R_1 , R_2 et A .

Question 24 : Déduire des questions précédentes la valeur minimale de R_2 qui permet de limiter la puissance P_{trans} absorbée par le transducteur à 0.5W.

IV Modélisation de l'association { onduleur + machine synchrone }

Objectif Modéliser le fonctionnement de l'association { Machine synchrone à fcem trapézoïdales + onduleur }.

Le groupe d'assistance est animé par une machine synchrone triphasée dont les forces contre-électromotrices présentent une évolution temporelle trapézoïdale (figure 13).

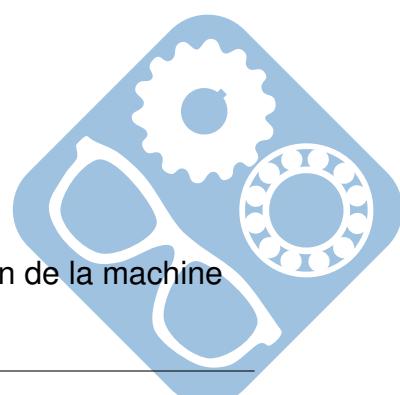
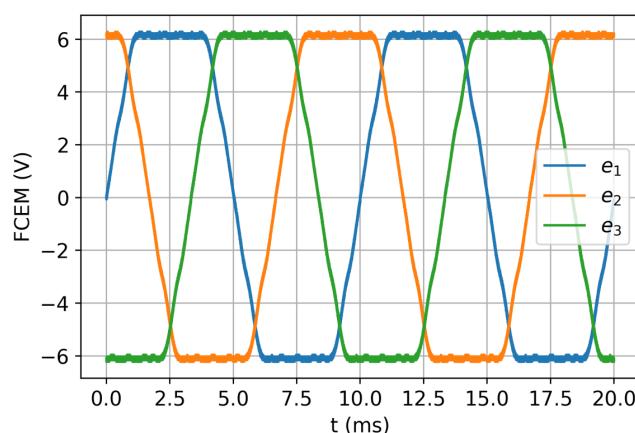


FIGURE 13 – Forces électromotrices induites lors de la mise en rotation de la machine

Du fait de son comportement analogue à une machine à courant continu, l'association { machine à fcem trapézoïdales + onduleur } porte la désignation commerciale de « machine à courant continu sans balais »(de l'anglais BLDC pour « BrushLess Direct Courant motor »). Cette partie vise à modéliser le fonctionnement de cette association machine - modulateur.

Les grandeurs et notations utiles dans la suite de cette partie sont définies dans le tableau 13 ainsi que sur les figures 14 et 15. La figure 15 détaille l'architecture de l'association onduleur + machine. L'onduleur est piloté de telle sorte que les courants i_1 , i_2 et i_3 absorbés par chaque phase suivent le profil idéal défini figure 14.

IV.1 Acquisition du courant

L'asservissement du courant absorbé par la machine est réalisé en appliquant une commande de type MLI (modulation de largeur d'impulsion) sur les transistors. Les transistors pilotés évoluent en fonction de la phase électrique θ_e . La résistance R_s (figure 15) est un shunt de $3m\Omega$ utilisé pour l'acquisition du courant absorbé par la machine.

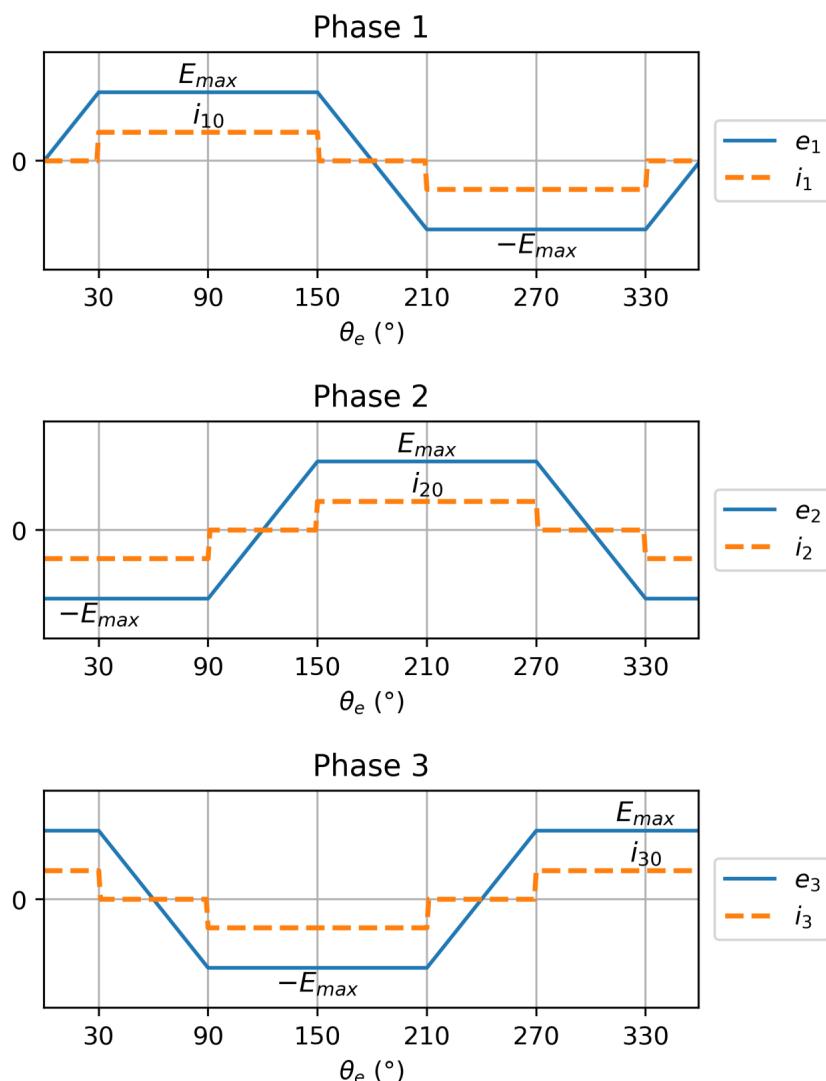
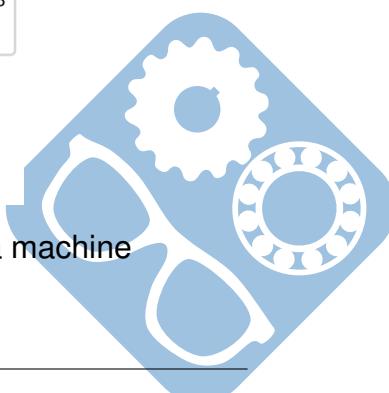


FIGURE 14 – FCEM et courants idéaux dans chaque phase de la machine



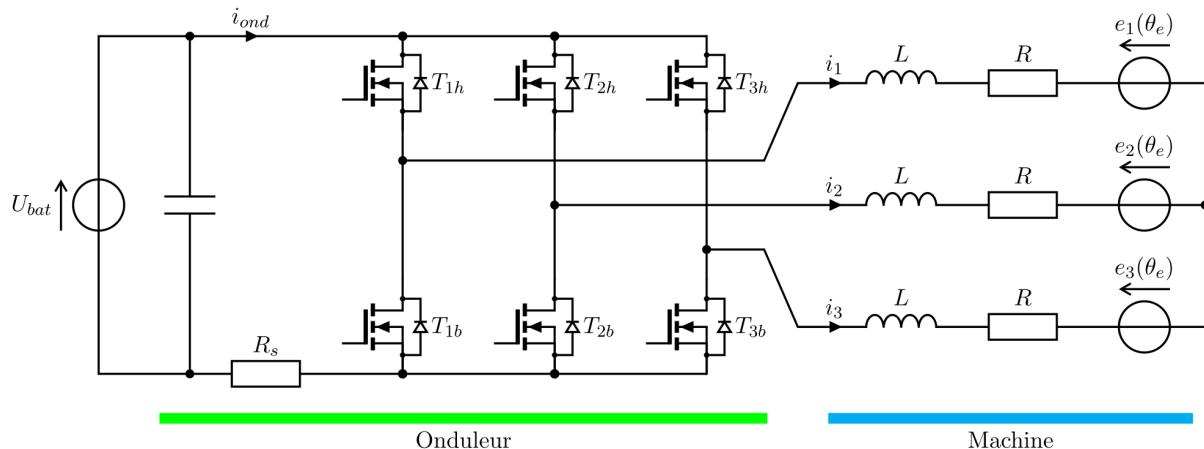


FIGURE 15 – Machine synchrone à FEM trapézoïdale et modulateur associé

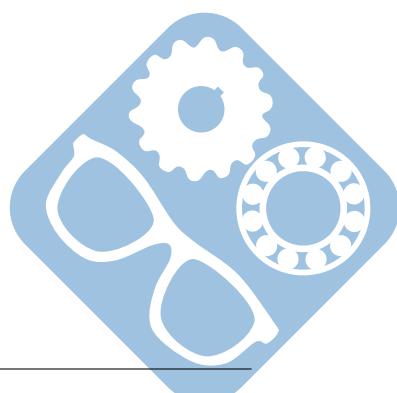
Séquence de commande des transistors On s'intéresse au cas où θ_e est compris entre 30 et 90°. Au cours de cette phase, l'onduleur est piloté de la manière suivante :

- les transistors T_{3b} et T_{3h} sont constamment bloqués (ouverts),
- le transistor T_{2b} est constamment saturé (fermés),
- le transistor T_{1h} est piloté de manière périodique. En notant T la période de découpage et α le rapport cyclique de découpage, ce transistor est piloté de la manière suivante :
 - T_{1h} est saturé pour $t \in [0, \alpha \cdot T[$,
 - T_{1h} est bloqué pour $t \in [\alpha \cdot T, T[$.

La période de découpage T est choisie beaucoup plus petite que la période des FCEM.

Question 25 : Sur le document réponse, surligner la maille dans laquelle circule un courant au cours de chacun des deux temps de la période de découpage.

Question 26 : Tracer alors l'évolution temporelle de la tension aux bornes du shunt R_s au cours d'une période de découpage.



V Asservissement du couple délivré par le groupe d'assistance

L'architecture du groupe d'assistance dont est pourvu le vélo est présentée figure 18. Ce groupe d'assistance ajoute au couple C_{pc} appliqué par le cycliste sur le pédalier un couple C_{pm} délivré par la motorisation. Ce système est asservi de telle sorte que le couple C_{pm} appliqué par la motorisation est proportionnel au couple C_{pc} fourni par le cycliste : $C_{pm} = K_{as} \cdot C_{pc}$ (le couple C_{pm} sature à $90N \cdot m$). Le cycliste peut faire varier le niveau d'assistance entre 0 (groupe d'assistance désactivé) et 4 (assistance maximale). Chaque niveau d'assistance correspond à une valeur du coefficient d'assistance K_{as} (figure 17).

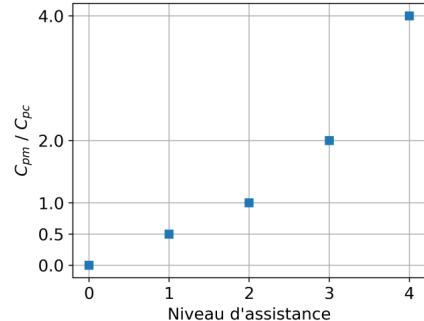


FIGURE 16 – Évolution du coefficient d'assistance K_{as} en fonction du niveau d'assistance

Cahier des charges de l'asservissement en couple Les spécifications relatives à l'asservissement du couple appliqué par le groupe d'assistance au niveau de l'axe du pédalier sont données figure 16.

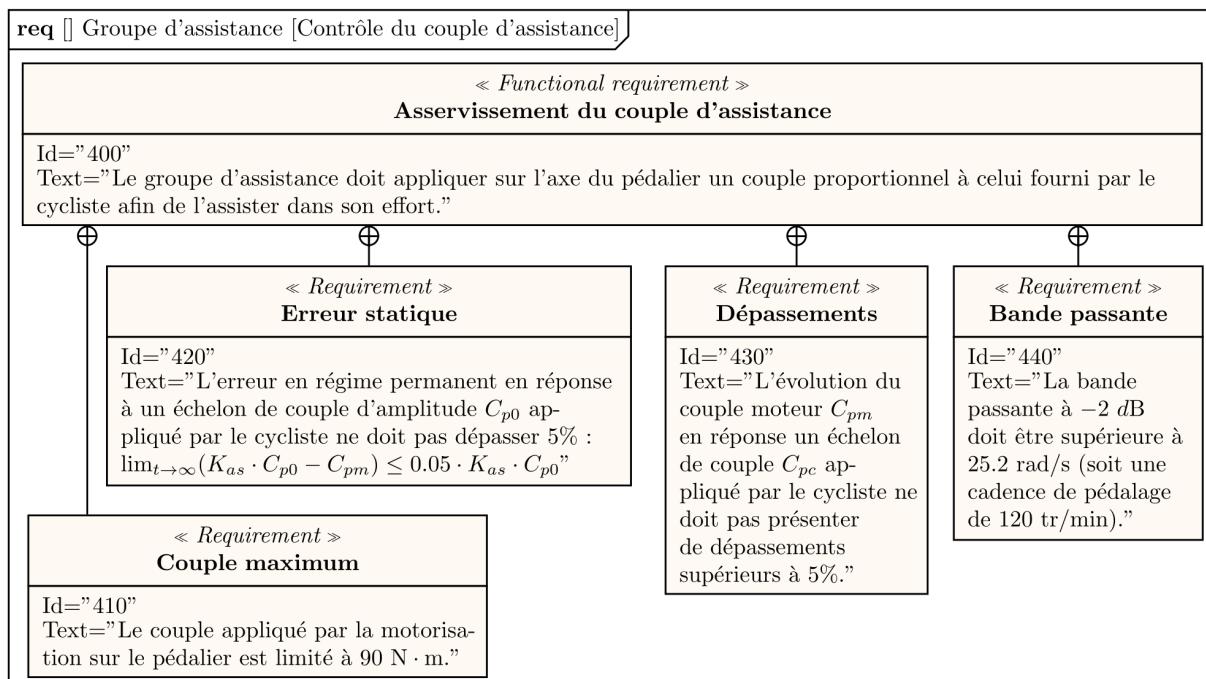


FIGURE 17 – Extrait du cahier des charges relatif au contrôle du couple d'assistance

V.1 Modélisation de l'asservissement du couple C_{pm}

L'asservissement du couple délivré par le groupe d'assistance est modélisé sous la forme du schéma-bloc donné figure 19.

Notations et hypothèses

- p désigne la variable de Laplace, la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$ est notée $F(p)$,
- Les conditions de Heaviside sont supposées satisfaites.
- Les grandeurs introduites sur le schéma de la figure 19 sont recensées dans le tableau 1.

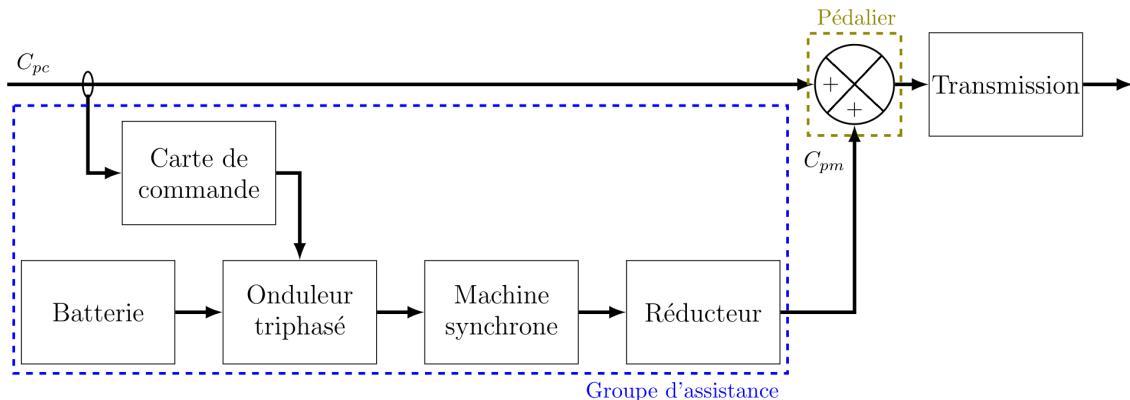


FIGURE 18 – Schéma d'architecture du groupe d'assistance

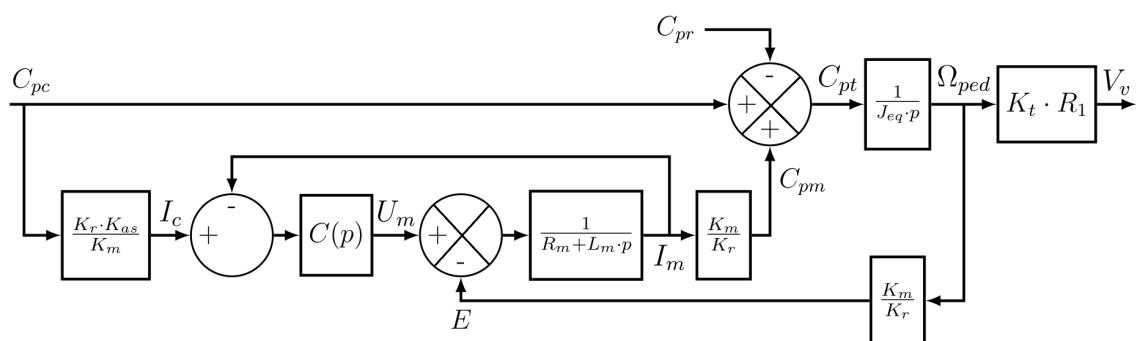
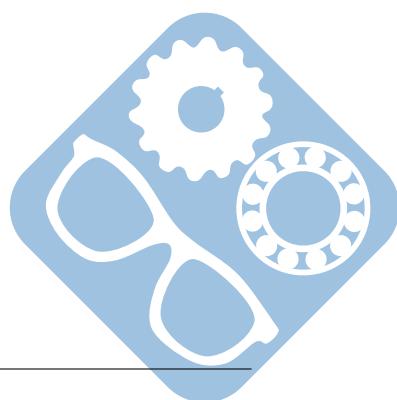


FIGURE 19 – Schéma-bloc de l'asservissement du couple appliqué par le groupe d'assistance sur l'axe du pédalier



Grandeur	Symbol	Valeur
Coefficient d'assistance (sans unité)	K_{as}	
Fonction de transfert du correcteur	$C(p)$	
Rapport de transmission du réducteur du groupe d'assistance	K_t	1/50
Moment d'inertie de tout l'ensemble en mouvement ramené sur l'axe du pédalier	J_{eq}	
Rapport de transmission du pédalier à la roue	K_t	42/12
Rayon de la roue arrière	R_1	0.34m
Couple appliqué par le cycliste sur le pédalier	$C_{pc}(p)$	
Couple appliqué par la motorisation sur le pédalier	$C_{pm}(p)$	
Couple résistant ramené sur l'axe du pédalier	$C_{pr}(p)$	
Vitesse de rotation du pédalier	$\Omega_{ped}(p)$	
Vitesse de déplacement du vélo	$V_v(p)$	
Masse de l'ensemble en mouvement	m_T	250kg
Constante de couplage	K_m	$4 \cdot 10^{-2} N \cdot m \cdot A^{-1} = 4 \cdot 10^{-2} V \cdot s \cdot rad^{-1}$
Résistance d'induit	R_m	0.1Ω
Inductance d'induit	L_m	$7 \cdot 10^{-4} H$
Force contre-électromotrice	$E(p)$	
Tension d'induit	$U_m(p)$	

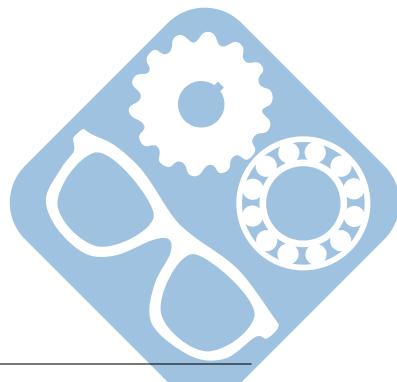
TABLEAU 1 – Grandeurs intervenant dans le schéma-bloc de la figure 19

Énergies cinétiques et inertie équivalente Au cours de son mouvement, le vélo accumule de l'énergie cinétique :

- de par son mouvement de translation par rapport au sol,
- du fait des rotations par rapport à son cadre de certains éléments composent le vélo (roues, rotor du moteur, partie mobiles du réducteur, pédalier).

On admet que l'énergie cinétique accumulée par le mouvement de translation du vélo par rapport au sol est très grande devant l'énergie cinétique accumulée par les mouvements de rotation.

Question 27 : Déterminer la valeur du moment d'inertie équivalent $J_{eq} = m_T \cdot (R_1 \cdot K_t)^2$ de l'ensemble du vélo ramené sur l'axe du pédalier.



V.2 Simplification du modèle

Le schéma-blocs donné figure 19 peut se mettre sous la forme du schéma simplifié donné figure 20.

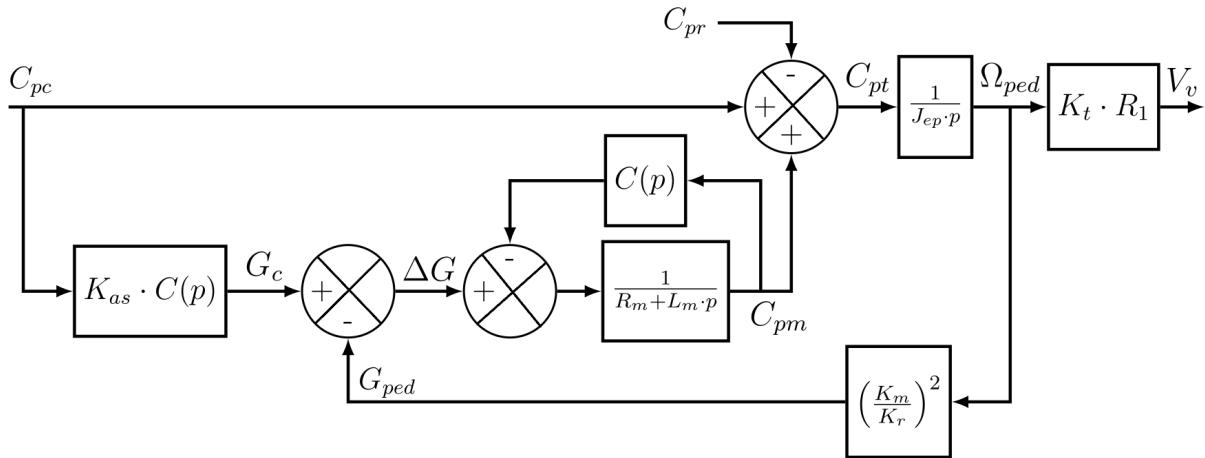


FIGURE 20 – Schéma-bloc simplifié de l'asservissement du couple d'assistance

Question 28 : À partir du schéma-bloc donné figure 19, déterminer la dimension de $C(p)$. Justifier alors que les grandeurs G_c et G_{ped} sont homogènes.

Question 29 : Déterminer la fonction de transfert

$$H_G(p) = \frac{C_{pm}(p)}{\Delta G(p)}$$

en fonction de $C(p)$, R_m et L_m .

Question 30 : Déterminer l'expression de $\Delta G(p)$ en fonction de $C_{pc}(p)$, $C_{pm}(p)$ et $C_{pr}(p)$ et des constantes du système.

V.3 Correction proportionnelle (P)

Objectif Évaluer le respect des exigences dans le cas d'une correction proportionnelle.

On opte dans un premier temps pour une correction proportionnelle : $C(p) = K_c$.

Question 31 : En supposant $C_{pr} = 0$, déterminer l'expression de la fonction de transfert :

$$H_{as}(p) = \left. \frac{C_{pm}(p)}{C_{pc}(p)} \right|_{C_{pr}=0}$$

en fonction des grandeurs constantes définies dans le tableau 1.

Question 32 : Montrer alors que la correction proportionnelle ne permet pas de satisfaire l'exigence 420 portant sur l'erreur statique.



V.4 Correction proportionnelle intégrale (PI)

Objectif Dimensionner un correcteur proportionnel intégral permettant de satisfaire le cahier des charges.

On évalue désormais le comportement de l'asservissement du couple d'assistance dans le cas d'une correction proportionnelle-intégrale :

$$C(p) = K_c \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$$

Avec ce correcteur, la fonction de transfert $H_{as}(p)$ devient :

$$H_{as}(p) = \frac{K_{as} \cdot (K_r)^2 \cdot J_{eq} \cdot K_c - (K_m)^2 \cdot T_i + K_{as} \cdot (K_r)^2 \cdot J_{eq} \cdot K_c \cdot T_i \cdot p}{K_c \cdot (K_r)^2 \cdot J_{eq} + (K_m)^2 \cdot T_i + (K_r)^2 \cdot J_{eq} \cdot T_i \cdot [R_m + K_c] \cdot p + (K_r)^2 \cdot J_{eq} \cdot L_m \cdot T_i \cdot p^2}$$

Exigence de précision Le respect de l'exigence 420 impose :

$$\frac{K_c}{T_i} \geq \frac{100 + 95 \cdot K_{as}}{5 \cdot K_{as}} \cdot \frac{(K_m)^2}{K_r \cdot J_{eq}}$$

soit : $\frac{K_c}{T_i} \geq 12.3 \cdot 10^{-3} V \cdot A^{-1} \cdot s^{-1}$ pour $K_{as} = 0.5$ (cas le plus sévère).

Exigence de bande passante Afin de respecter l'exigence 440 portant sur la bande passante de l'asservissement, on impose $\omega_0 = 252 \text{ rad} \cdot s^{-1}$.

Question 33 : Exprimer le dénominateur de H_{as} sous forme canonique et en déduire l'expression de sa pulsation propre ω_0 .

Question 34 : Déterminer la valeur du rapport $\frac{K_c}{T_i}$ qui permet d'obtenir $\omega_0 = 252 \text{ rad} \cdot s^{-1}$.

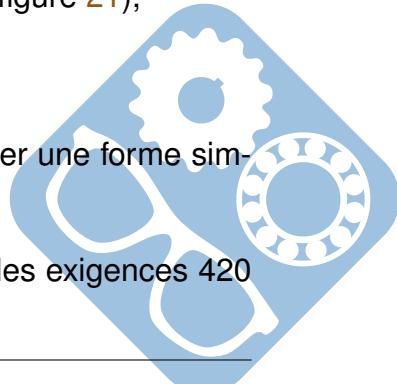
Exigence portant sur les dépassements Le concepteur a choisi de régler le coefficient d'amortissement z à 1 ce qui conduit aux valeurs suivantes : $K_c \approx 0.253 V \cdot A^{-1}$ et $T_i \approx 5.69 \cdot 10^{-3} s$.

Simulation Le fonctionnement de l'asservissement du couple d'assistance est simulé pour $K_{as} = 0.5$ avec les valeurs de K_c et T_i déterminées précédemment. De cette simulation sont extraits :

- l'évolution du couple C_{pm} en réponse à un échelon de couple C_{pc} (figure 21),
- le diagramme de Bode du rapport $\frac{C_{pm}}{C_{pc}}$ (figure 22).

Question 35 : Au regard du diagramme de Bode de la figure 22, proposer une forme simplifiée pour la fonction de transfert H_{as} .

Question 36 : À partir des figures 21 et 22, conclure quant au respect des exigences 420 et 430 du diagramme des exigences de la figure 17.



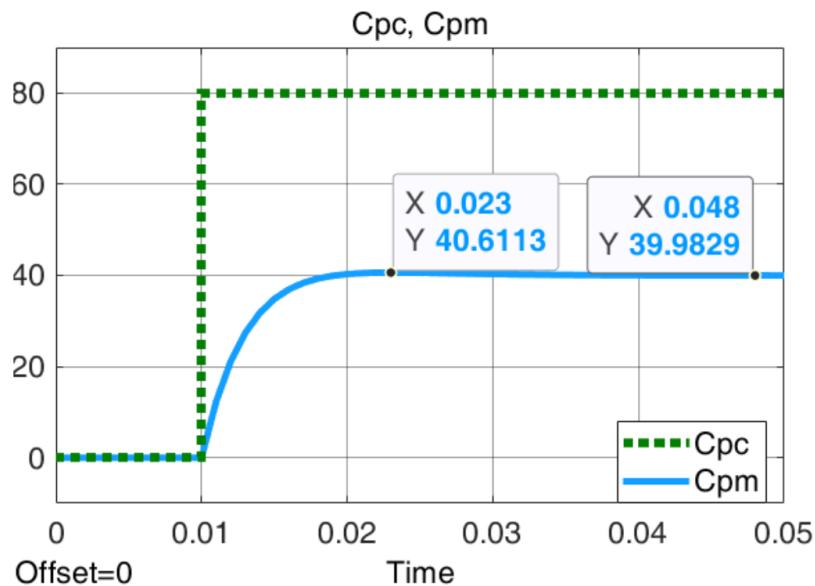


FIGURE 21 – Évolution du couple d'assistance C_{pm} pour $K_{as} = 0.5$ en réponse à un échelon d'amplitude $80\text{N} \cdot \text{m}$ sur C_{pc}

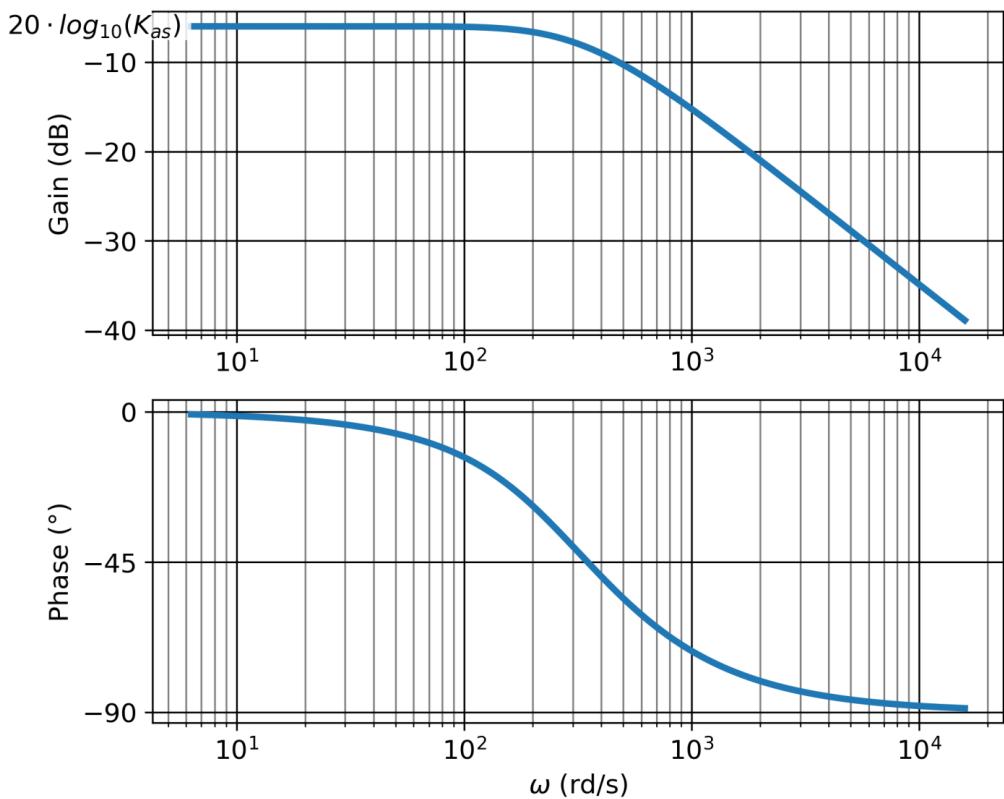


FIGURE 22 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert $H_{as}(p)$ pour $K_{as} = 0.5$

FIN

Correction

Question 1 :

On isole le vélo, et on calcule le théorème du moment statique au point G_V sur \vec{z} :

$$m_I \cdot x_G - m_J \cdot (L - x_G) = 0 \text{ donc } x_G = \frac{m_J}{m_I + m_J} \cdot L$$

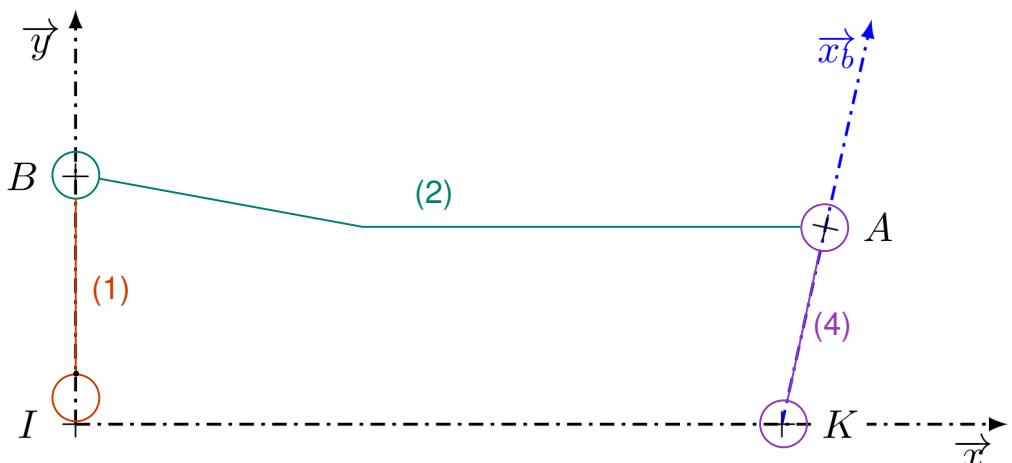
$$x_G = \frac{m_J}{m_I + m_J} \cdot L = \frac{24}{24 + 26} \cdot 2050 = 24 \cdot 41 = 984 \text{ mm}$$

Question 2 :

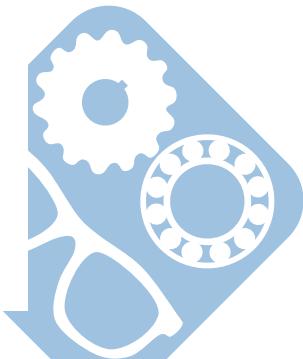
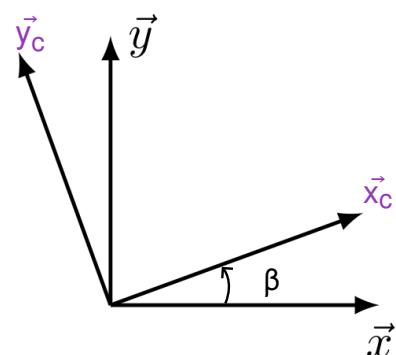
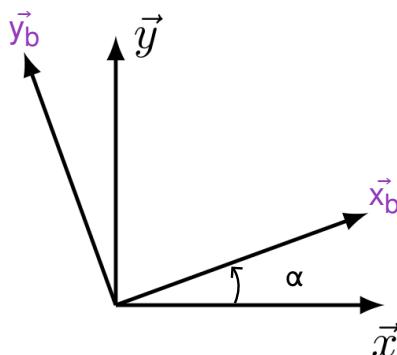
De même : $(m_B + m_V) \cdot IG_T = m_B \cdot IG_B + m_V \cdot IG_V$ donc $(m_B + m_V) \cdot x_T = m_B \cdot x_B + m_V \cdot x_V$,
donc $x_T = \frac{m_B \cdot x_B + m_V \cdot x_G}{m_B + m_V}$

$$x_T = \frac{100 \cdot 1250 + 50 \cdot 984}{100 + 50} = \frac{2500 + 984}{3} = 833 + 328 = 1161 \text{ mm.}$$

Question 3 :



Question 4 :



Correction

Question 5 :

$$\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$$

$$-\mu(t) \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x}_b - b \cdot \vec{x}_c + e \cdot \vec{y}_c - R_B \cdot \vec{y} = 0$$

en projetant sur \vec{y} , on obtient : $a \cdot \sin\alpha = b \cdot \sin\beta - e \cdot \cos\beta + R_B$.

Question 6 :

$\cos\beta = 1$ et $\sin\beta = 0$, donc

$$a \cdot \sin\alpha = R_B - e$$

$$\sin\alpha = \frac{R_B - e}{a} = \frac{340 - 70}{290} = \frac{27}{29} \approx 0.9$$

Ainsi, on retrouve graphiquement sur la figure 5 : $\alpha = 63^\circ$ ou $\alpha = 180 - 63 = 117^\circ$

Question 7 :

On trouve $\beta_{\max} = 1.1^\circ$, donc on peut valider l'hypothèse de β petit et que le cadre est supposé horizontal lors du bequillage.

Question 8 :

$$\{T_{0 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{04} \cdot \vec{x} + Y_{04} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_K$$

Question 9 :

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \cdot \vec{x} + Y_{01} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

Question 10 :

$$\{T_{P \rightarrow \Sigma}\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_T \cdot g \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_T}$$

Question 11 :

$$\{T_{0 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{04} \cdot \vec{x} + Y_{04} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_K = \left\{ \begin{array}{l} X_{04} \cdot \vec{x} + Y_{04} \cdot \vec{y} \\ -\mu \cdot Y_{04} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_I$$

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \cdot \vec{x} + Y_{01} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

$$\{T_{P \rightarrow \Sigma}\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_T \cdot g \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_T} = \left\{ \begin{array}{l} -m_T \cdot g \cdot \vec{y} \\ (\mu - k \cdot \cos\beta + q \cdot \sin\beta) \cdot m_T \cdot g \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_I$$

$$\{T_{cycliste \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_C \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{l} -F_C \cdot \vec{x} \\ (a - d \cdot \sin\beta + y_M \cdot \cos\beta) \cdot F_C \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_I$$

Donc : $-\mu \cdot Y_{04} + (\mu - k \cdot \cos\beta + q \cdot \sin\beta) \cdot m_T \cdot g + (a - d \cdot \sin\beta + y_M \cdot \cos\beta) \cdot F_C = 0$

$$\text{Donc, } F_C = \frac{\mu \cdot Y_{04} - (\mu - k \cdot \cos\beta + q \cdot \sin\beta) \cdot m_T \cdot g}{(a - d \cdot \sin\beta + y_M \cdot \cos\beta)}$$

Question 12 :

$\cos\beta = 1$ et $\sin\beta = 0$, donc

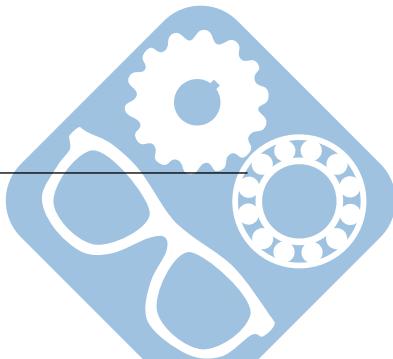
$$F_C \approx \frac{\mu \cdot Y_{04} - (\mu - k) \cdot m_T \cdot g}{a + y_M}$$

L'action est alors maximale si y_M est minimale, soit $y_M = 900\text{mm}$.

Question 13 :

D'après les résultats de l'isolement :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{01} + X_{04} - F_C = 0 \\ Y_{01} + Y_{04} - m_T \cdot g = 0 \end{array} \right.$$



Correction

Question 14 :

Il y a 3 équations liées à l'isolement + 1 liée au glissement en I, soit 4 équations et 5 inconnues (X_{04} , Y_{04} , X_{01} , Y_{01} et F_C), il n'est pas possible de résoudre.

Question 15 :

On isole la bâquille (4) et on applique le théorème du moment statique en A : $a \cdot X_{04} + 0 = 0$, donc $X_{04} = 0$.

Question 16 :

Une femme ne peut pas exercer un effort de plus de 70N 30 fois par jour, cela ne permet donc pas d'effectuer des livraisons.

Question 17 :

Si A est nulle, alors $v_s = 0$ et les sources ne délivrent aucune tension.

Question 18 :

$$\underline{V_A} = \frac{\underline{R_1} + j \cdot (L_1 + \Delta L) \cdot \omega}{\underline{R_1} + j \cdot L_1 \cdot \omega + \underline{R_1} + j \cdot (L_1 + \Delta L) \cdot \omega} \cdot \underline{V_{12}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\underline{R_1} + j \cdot (L_1 + \Delta L) \cdot \omega}{\underline{R_1} + j \cdot \left(L_1 + \frac{\Delta L}{2}\right) \cdot \omega} \cdot \underline{V_{12}}$$

$$\text{De même, } \underline{V_B} = \frac{\underline{R_2}}{\underline{R_2} + \underline{R_2}} \cdot \underline{V_{12}} = \frac{1}{2} \cdot \underline{V_{12}}$$

Question 19 :

D'après la loi des mailles : $\underline{V_A} = \underline{V_S} + \underline{V_B}$, donc

$$\underline{V_S} = \underline{V_A} - \underline{V_B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{j \cdot \frac{\Delta L}{2} \cdot \omega}{\underline{R_1} + j \cdot \left(L_1 + \frac{\Delta L}{2}\right) \cdot \omega} \cdot \underline{V_{12}}$$

$$\text{Donc, } R_{\text{tot}} = R_1, X_{\text{var}} = \frac{\Delta L}{2} \cdot \omega \text{ et } X_{\text{tot}} = \left(L_1 + \frac{\Delta L}{2}\right) \cdot \omega$$

Question 20 :

$$R_{\text{tot}} = 5\Omega$$

$$X_{\text{tot max}} = L_1 \cdot \omega = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^3 = 200 \cdot \pi = 628\Omega$$

$$X_{\text{tot min}} = \left(L_1 - \frac{\Delta L_{\text{Max}}}{2}\right) \cdot \omega = 4,5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 20 = 180 \cdot \pi = 628 - 62,8 = 565,2\Omega$$

$$\text{On voit que } R_{\text{tot}} \text{ est négligeable devant } X_{\text{tot}}, \text{ donc } \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_{12}}} = \frac{X_{\text{var}}}{2 \cdot X_{\text{tot}}} = \frac{\Delta L}{4 \cdot \left(L_1 + \frac{\Delta L}{2}\right)}.$$

Question 21 :

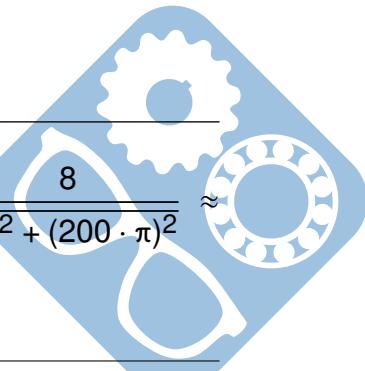
$\underline{V_S}$ est proportionnel à ΔL si $L_1 + \frac{\Delta L}{2}$ est constant, donc si $L_1 \gg \frac{\Delta L}{2}$, dans ce cas,

$$\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_{12}}} = \frac{\Delta L}{4 \cdot L_1}.$$

Question 22 :

$$I_1 = \frac{\underline{V_{12}}}{2 \cdot |Z_1|} = \frac{A}{\sqrt{\underline{R_1}^2 + (L_1 \cdot \omega)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5^2 + (5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5^2 + (200 \cdot \pi)^2}} \approx$$

$$\frac{8}{200 \cdot \pi} \approx \frac{12}{1000} \approx 12\text{mA}$$



Correction

Question 23 :

La puissance est absorbée par les résistances, donc $P_{\text{trans}} = 2 \cdot P_{R_1} + 2 \cdot P_{R_2} = 2 \cdot R_1 \cdot I_1^2 +$

$$2 \cdot \frac{V_{12}^2}{4 \cdot R_2} = \frac{2 \cdot R_1 \cdot A^2}{R_1^2 + (L_1 \cdot \omega)^2} + \frac{2 \cdot A^2}{R_2}$$

Question 24 :

$$\frac{2 \cdot R_1 \cdot A^2}{R_1^2 + (L_1 \cdot \omega)^2} + \frac{2 \cdot A^2}{R_2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{2 \cdot A^2}{R_2} \leq \frac{1}{2} - \frac{2 \cdot R_1 \cdot A^2}{R_1^2 + (L_1 \cdot \omega)^2}$$

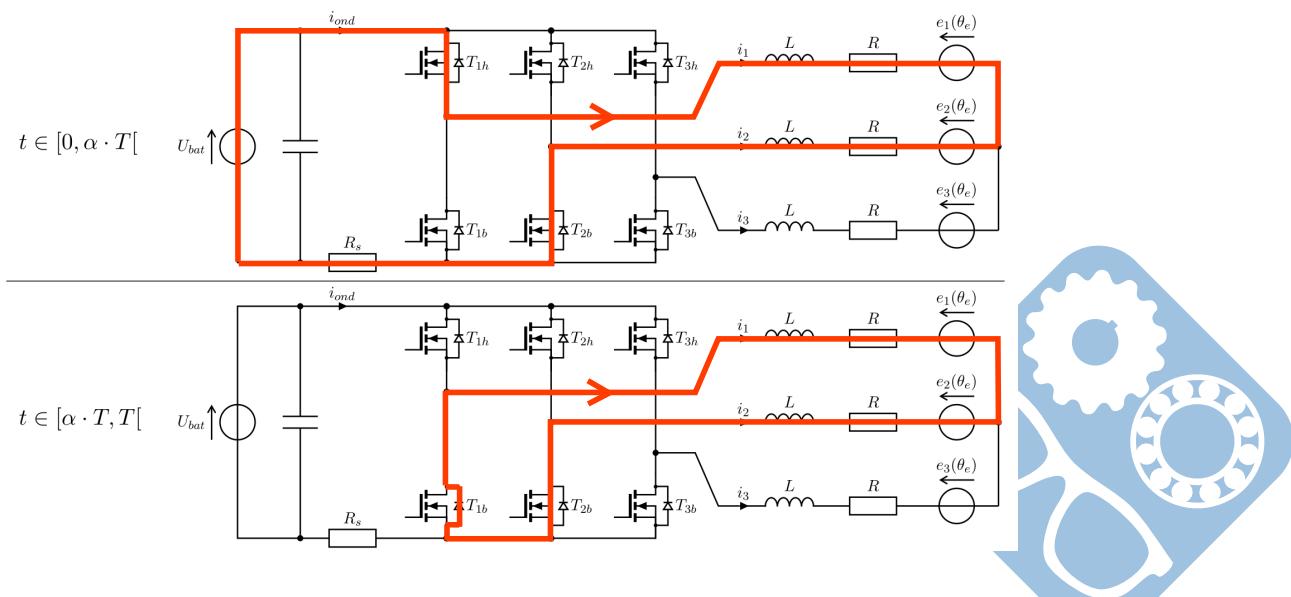
$$\frac{2 \cdot A^2}{R_2} \leq \frac{R_1^2 + (L_1 \cdot \omega)^2 - 4 \cdot R_1 \cdot A^2}{2 \cdot (R_1^2 + (L_1 \cdot \omega)^2)}$$

$$R_2 \min = \frac{4 \cdot A^2 \cdot (R_1^2 + (L_1 \cdot \omega)^2)}{R_1^2 + (L_1 \cdot \omega)^2 - 4 \cdot R_1 \cdot A^2}$$

$$R_2 \min = \frac{4 \cdot 8^2 \cdot (5^2 + (5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 20)^2)}{5^2 + (5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 20)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8^2}$$

$$R_2 \min = \frac{256 \cdot (25 + (200 \cdot \pi)^2)}{25 + (200 \cdot \pi)^2 - 1280} \approx 256 \Omega$$

Question 25 :

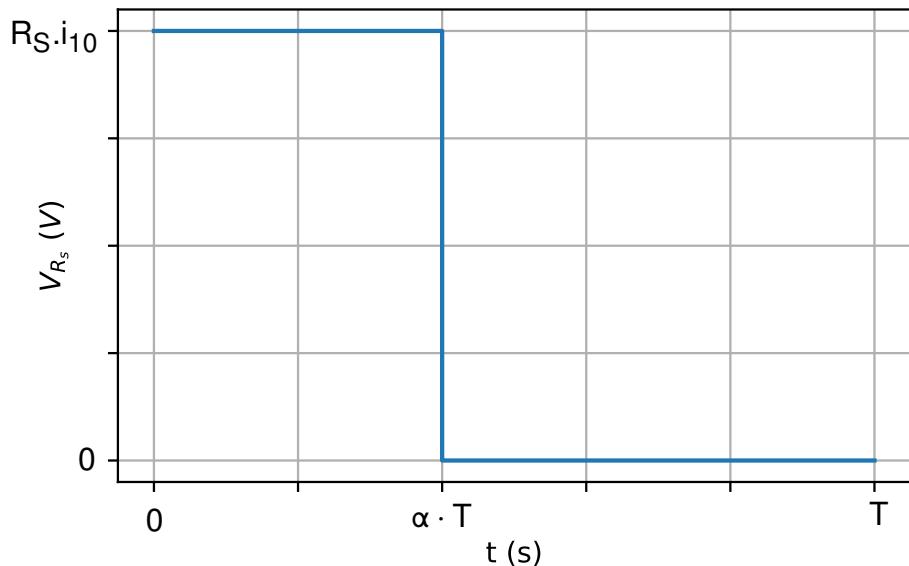


Correction

Question 26 :

Pour $t \in [0, \alpha \cdot T[\rightarrow i_S = i_{10}$

Pour $t \in [\alpha \cdot T, T[\rightarrow i_S = 0$



Question 27 :

$$J_{eq} = m_T \cdot (R_1 \cdot K_t)^2 = 250 \cdot \left(0.34 \cdot \frac{42}{12}\right)^2 = 250 \cdot (0.17 \cdot 7)^2 = 250 \cdot 0.0289 \cdot 49 = 250 \cdot 1.5 = 375 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Question 28 :

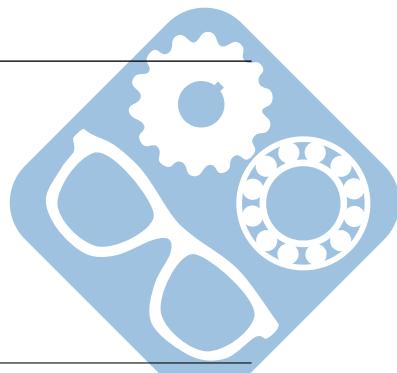
L'entrée de $C(p)$ est un courant, la sortie une tension, alors $C(p)$ est homogène à des Ω .

- $G_C(p)$ est en $V \cdot A^{-1} \cdot N \cdot m$,
- $G_{ped}(p)$ est en $(N \cdot m \cdot A^{-1})(V \cdot s \cdot rad^{-1})(rad \cdot s^{-1})$, soit des $N \cdot m \cdot A^{-1} \cdot V$ comme $G_C(p)$.

Question 29 :

$$H_G(p) = \frac{C_{pm}(p)}{\Delta G(p)} = \frac{1}{\frac{R_m + L_m \cdot p}{1 + \frac{C(p)}{R_m + L_m \cdot p}}}$$

$$H_G(p) = \frac{1}{C(p) + R_m + L_m \cdot p}$$



Correction

Question 30 :

$$\Delta G(p) = G_c(p) - G_{ped}(p)$$

$$G_c(p) = K_{as} \cdot C(p) \cdot C_{pc}(p)$$

$$G_{ped}(p) = \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \cdot C_{pt}(p)$$

$$C_{pt}(p) = C_{pc}(p) + C_{pm}(p) - C_{pr}(p)$$

$$\Delta G(p) = \left[K_{as} \cdot C(p) - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \right] \cdot C_{pc}(p) - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} (C_{pm}(p) - C_{pr}(p))$$

Question 31 :

$$C_{pm}(p) = H_G(p) \cdot \Delta G(p) \text{ et } \Delta G(p) = K_{as} \cdot K_c \cdot C_{pc}(p) - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \cdot (C_{pm}(p) + C_{pc}(p))$$

$$C_{pm}(p) = H_G(p) \cdot \left[K_{as} \cdot K_c \cdot C_{pc}(p) - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \cdot (C_{pm}(p) + C_{pc}(p)) \right]$$

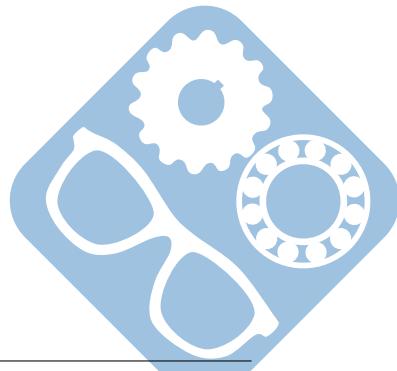
$$C_{pm}(p) \left(1 + \frac{1}{K_c + R_m + L_m \cdot p} \cdot \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \right) = \frac{1}{K_c + R_m + L_m \cdot p}$$

$$\left(K_{as} \cdot K_c - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \right) \cdot C_{pc}(p)$$

$$H_{as}(p) = \frac{\frac{1}{K_c + R_m + L_m \cdot p} \cdot \left(K_{as} \cdot K_c - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \right)}{1 + \frac{1}{K_c + R_m + L_m \cdot p} \cdot \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p}}$$

$$H_{as}(p) = \frac{K_{as} \cdot K_c - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p}}{(K_c + R_m + L_m \cdot p) + \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p}}$$

$$H_{as}(p) = - \left(\frac{1 - \frac{K_{as} \cdot K_c \cdot K_r^2 \cdot J_{eq}}{K_m^2} \cdot p}{1 + \frac{K_p^2}{K_m^2} \cdot J_{eq} \cdot (K_c + R_m) \cdot p + \frac{K_p^2}{K_m^2} \cdot L_m \cdot J_{eq} \cdot p^2} \right)$$



Correction

Question 32 :

Soit l'entrée $C_{pc}(p) = \frac{C_{p0}}{p}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C_{pm}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot C_{pm}(p) = -C_{p0}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (K_{as} \cdot C_{p0} - C_{pm}(t)) = (K_{as} + 1) \cdot C_{p0}$$

On a alors :

K_{as}	$0.05 \cdot K_{as}$	$1 + K_{as}$
0	0	1
0.5	0.025	1.5
1	0.05	2
2	0.1	3
4	0.2	5

$(1 + K_{as}) \cdot C_{p0} > 0.05 \cdot K_{as} \cdot C_{p0}$, donc l'exigence 420 n'est pas respectée.

Question 33 :

Soit, $D(p)$ le dénominateur de $H_{as}(p)$.

$$D(p) = K_c \cdot (K_r)^2 \cdot J_{eq} + (K_m)^2 \cdot T_i + (K_r)^2 \cdot J_{eq} \cdot T_i \cdot [R_m + K_c] \cdot p + (K_r)^2 \cdot J_{eq} \cdot L_m \cdot T_i \cdot p^2$$

$$D(p) = \left(K_c \cdot K_r^2 \cdot J_{eq} + K_m^2 \cdot T_i \right) \cdot \left(1 + \frac{K_r^2 \cdot J_{eq} \cdot T_i \cdot [R_m + K_c]}{K_c \cdot K_r^2 \cdot J_{eq} + K_m^2 \cdot T_i} \cdot p + \frac{K_r^2 \cdot J_{eq} \cdot T_i \cdot L_m}{K_c \cdot K_r^2 \cdot J_{eq} + K_m^2 \cdot T_i} \cdot p^2 \right)$$

$$\text{Donc, } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_c \cdot K_r^2 \cdot J_{eq} + K_m^2 \cdot T_i}{K_r^2 \cdot J_{eq} \cdot T_i \cdot L_m}}.$$

Question 34 :

$$\omega_0^2 = \frac{K_c \cdot K_r^2 \cdot J_{eq} + K_m^2 \cdot T_i}{K_r^2 \cdot J_{eq} \cdot T_i \cdot L_m} \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{K_c}{T_i \cdot L_m} + \frac{K_m^2}{K_r^2 \cdot J_{eq} \cdot L_m} \Leftrightarrow \frac{K_c}{T_i} = L_m \cdot$$

$$\left(\omega_0^2 - \frac{K_m^2}{K_r^2 \cdot J_{eq} \cdot L_m} \right) \Leftrightarrow \frac{K_c}{T_i} = L_m \cdot \omega_0^2 - \frac{K_m^2}{K_r^2 \cdot J_{eq}} \Leftrightarrow \frac{K_c}{T_i} = 7 \cdot 10^{-4} \cdot 252^2 - \frac{(4 \cdot 10^{-2})^2}{\left(\frac{1}{50}\right)^2 \cdot 360} \Leftrightarrow \frac{K_c}{T_i} =$$

$$44 - \frac{16 \cdot 10^{-4}}{\frac{1}{250} \cdot 360} \Leftrightarrow \frac{K_c}{T_i} \approx 44 V \cdot A^{-1} \cdot s^{-1}$$

Question 35 :

On peut reconnaître une fonction du 1er ordre $H_{as}(p) = \frac{K_{as}}{1 + \tau_{as} \cdot p}$.

On lit :

— $20 \cdot \log(K_{as}) = -6$, donc $K_{as} = 0.5$,

— $\frac{1}{400} s \leq \tau_{as} \leq \frac{1}{300} s \Rightarrow 2.5 \text{ ms} \leq \tau_{as} \leq 3.3 \text{ ms}$.

Question 36 :

L'erreur statique est $0.5 \cdot 80 - 39.9829 = 0.0171 N \cdot m < 5\% \cdot 40$, donc 420 est respectée.

Le dépassement est de $\frac{40.6113 - 39.9829}{39.9829} = \frac{0.6284}{39.9829} \approx 0.015 < 5\%$, donc 430 est respectée.

