Séquence : 04

Document : TD04
Lycée Dorian
Renaud Costadoat
Françoise Puig

Avec Correction

Cycles fermés et ouverts

Référence	S04 - TD04
Compétences	B2-12: Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques. B2-13: Proposer un modèle cinématique paramétré à partir d'un système réel, d'une maquette numérique ou d'u B2-17: Simplifier un modèle de mécanisme. B2-18: Modifier un modèle pour le rendre isostatique. C1-04: Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique. C2-05: Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère. C2-06: Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.
Description	Application des cycles fermés et ouverts sur Simone en lui faisait tracer un trait ou faire un squat.
Système	Simone

1 Tracer un trait

Le but de ce travail va être de faire tracer un trait « à main levée » à Simone afin de vérifier son aptitude à se passer d'une règle.

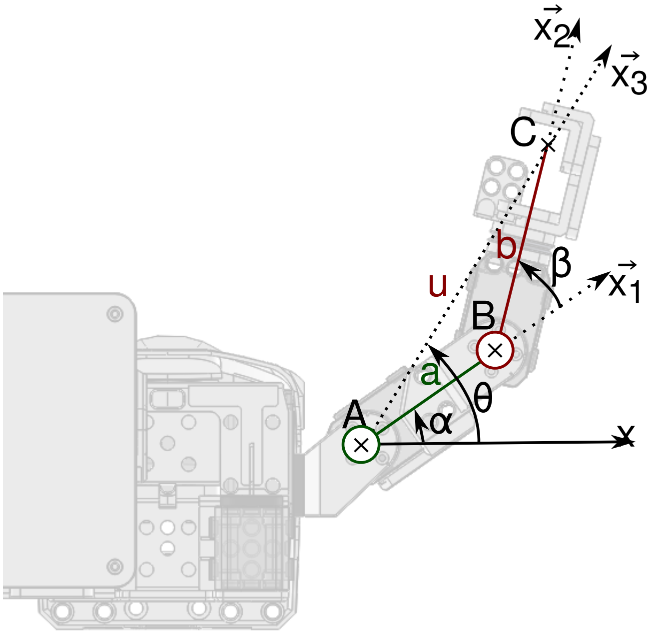

Figure 1 – Bras paramétré

Question 1 Tracer le graphe des liaisons de cette sous-partie de Simone.

Question 2 Justifier qu'il s'agit d'un cycle ouvert et déterminer son degré d'hyperstatisme.

On définit x et y tels que $\overrightarrow{AC} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y}$.

On cherche à tracer la droite $y(x) = c \cdot x + d$ reliant les points $\begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix}_R$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ a+b \end{pmatrix}_R$.

Question 3 Déterminer c et d en fonction de a et b.

Question 4 Déterminer x et y en fonction de α, de β et des dimensions du système.

Question 5 Déterminer x et y en fonction de θ et de $u = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$.

Question 6 Déterminer $u = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$ en fonction de θ et des dimensions du système.

Question 7 Déterminer α et β en fonction de θ, de $u = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$ et des dimensions du système. Et justifier que :

$$\alpha = \theta \pm \arccos\left(\frac{u^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot u \cdot a}\right) \text{ et } \beta = \theta - \alpha \pm \arccos\left(\frac{u^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot u \cdot b}\right)$$

Question 8 Tester le résultat à l'aide d'un code python.

2 Faire des squats

Le but de ce travail va être de faire faire des « squat » à Simone.

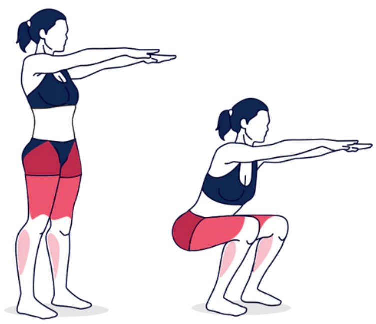

Figure 2 – Mouvement de Squat

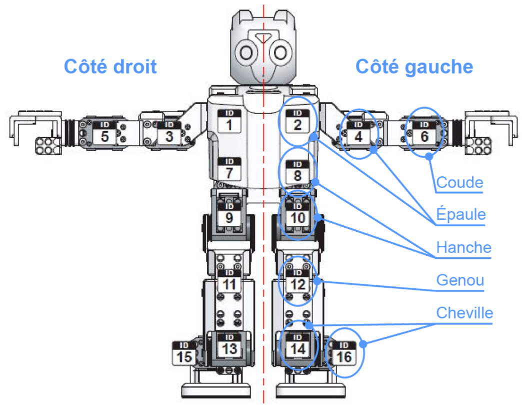

Figure 3 – Structure de Simone

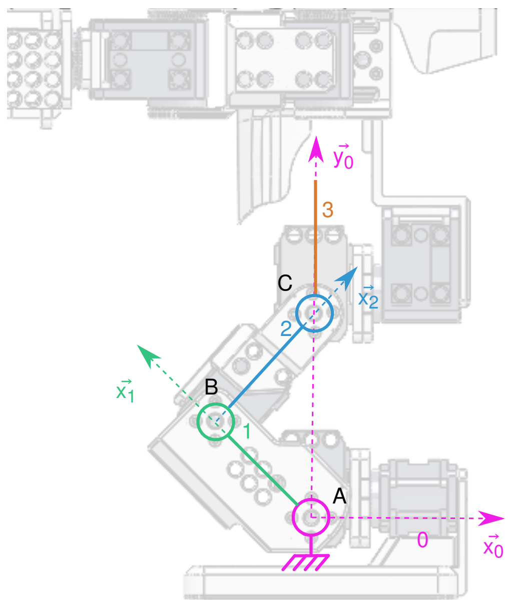

Figure 4 – Bras paramétré

On notera respectivement i_g et i_d les pièces des jambes gauche et droite. On considérera que les deux pieds font partie de la classe équivalente *sol*.

Question 9 Tracer le graphe des liaisons de cette sous-partie de Simone.

Question 10 Justifier qu'il s'agit d'un cycle fermé et déterminer son degré d'hyperstatisme.

Question 11 Proposer une modification d'une liaison pour rendre le système isostatique.

1 Correction

1.1 Tracer un trait

Question 1 :

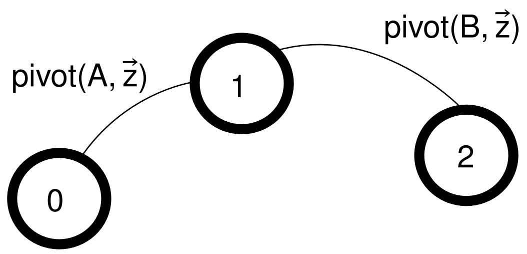

Figure 5 – Graphe de liaison 1

Question 2 : C'est un cycle ouvert car il n'y a pas de cycle fermé dans le graphe.

Question 3 : $y(0) = d = a + b$, donc $d = a + b$.
$y(a + b) = c \cdot (a + b) + a + b = 0$, donc $c = -1$

Question 4 : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AC} = a \cdot \vec{x_1} + b \cdot \vec{x_2}$
$\overrightarrow{AC} = (a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos(\alpha + \beta))\vec{x_0} + (a \cdot \sin\alpha + b \cdot \sin(\alpha + \beta))\vec{y_0}$
Ainsi : $\begin{cases} x = a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos(\alpha + \beta) \\ y = a \cdot \sin\alpha + b \cdot \sin(\alpha + \beta) \end{cases}$

Question 5 : Ainsi : $\begin{cases} x = u \cdot \cos\theta \\ y = u \cdot \sin\theta \end{cases}$

Question 6 : $u = \dfrac{a + b}{\sqrt{2} \cdot \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)}$

Question 7 : $\begin{cases} u \cdot \cos\theta = a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos(\alpha + \beta) \\ u \cdot \sin\theta = a \cdot \sin\alpha + b \cdot \sin(\alpha + \beta) \end{cases}$

$\begin{cases} (b \cdot \cos(\alpha + \beta))^2 = (u \cdot \cos\theta - a \cdot \cos\alpha)^2 \\ (b \cdot \sin(\alpha + \beta))^2 = (u \cdot \sin\theta - a \cdot \sin\alpha)^2 \end{cases}$

$b^2 = (u \cdot \cos\theta - a \cdot \cos\alpha)^2 + (u \cdot \sin\theta - a \cdot \sin\alpha)^2$

$b^2 = (u \cdot \cos\theta)^2 + (a \cdot \cos\alpha)^2 - 2 \cdot u \cdot \cos\theta \cdot a \cdot \cos\alpha + (u \cdot \sin\theta)^2 + (a \cdot \sin\alpha)^2 - 2 \cdot u \cdot \sin\theta \cdot a \cdot \sin\alpha$

$2 \cdot u \cdot a \cdot (\sin\theta \cdot \sin\alpha + \cos\theta \cdot \cos\alpha) = u^2 + a^2 - b^2$

$2 \cdot u \cdot a \cdot \cos(\theta - \alpha) = u^2 + a^2 - b^2$

$\cos(\theta - \alpha) = \dfrac{u^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot u \cdot a}$

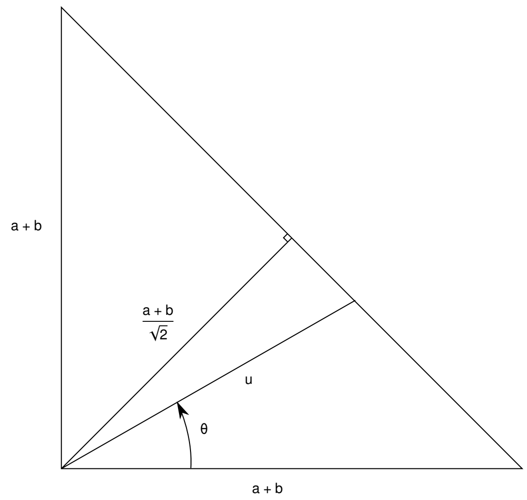

Figure 6 – Construction pour u

$$\theta - \alpha = \pm \arccos\left((\frac{u^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot u \cdot a} \right)$$

$$\alpha = \theta \pm \arccos\left((\frac{u^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot u \cdot a} \right)$$

On montre de même que :

$$\begin{cases} (a \cdot \cos\alpha)^2 = (u \cdot \cos\theta - b \cdot \cos(\alpha + \beta))^2 \\ (a \cdot \sin\alpha)^2 = (u \cdot \sin\theta - b \cdot \sin(\alpha + \beta))^2 \end{cases}$$

$$a^2 = (u \cdot \cos\theta - b \cdot \cos(\alpha + \beta))^2 + (u \cdot \sin\theta - b \cdot \sin(\alpha + \beta))^2$$

$$a^2 = u^2 + b^2 - 2 \cdot u \cdot \cos\theta \cdot b \cdot \cos(\alpha + \beta) - 2 \cdot u \cdot \sin\theta \cdot b \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$a^2 = u^2 + b^2 - 2 \cdot u \cdot b \cdot \cos(\theta - (\alpha + \beta))$$

$$\cos(\theta - (\alpha + \beta)) = \frac{u^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot u \cdot b}$$

$$\beta = \theta - \alpha \pm \arccos\left(\frac{u^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot u \cdot b} \right)$$

Question 8 :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a=45
b=65

theta=np.linspace(0,np.pi/2,100)
u=np.sqrt(2)/2*(a+b)/np.cos(theta-np.pi/4)
alpha=theta-np.arccos((u**2+a**2-b**2)/(2*u*a))
beta=theta-alpha+np.arccos((u**2-a**2+b**2)/(2*u*b))

x=a*np.cos(alpha)+b*np.cos(alpha+beta)
y=a*np.sin(alpha)+b*np.sin(alpha+beta)

```

```
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

1.2 Faire des squats

Question 1 :

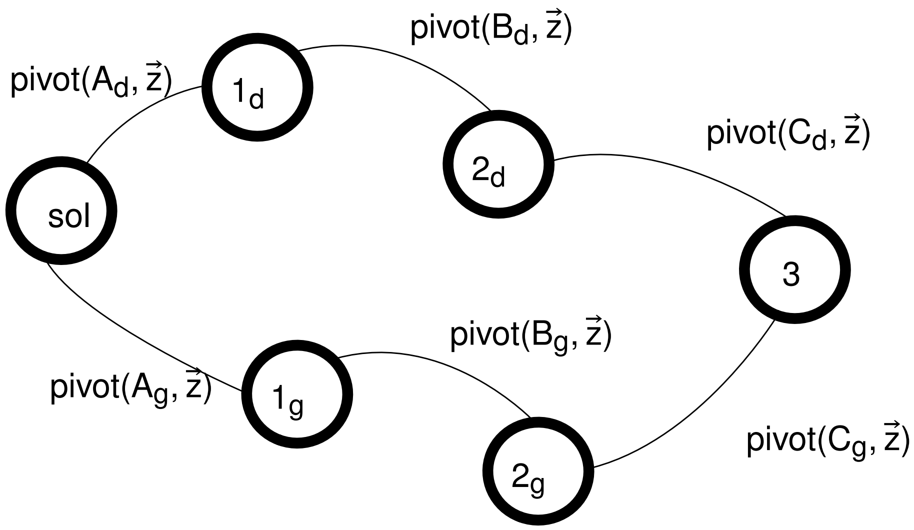

Figure 7 – Graphe de liaison 2

Question 2 : *Méthode statique :*

Il y a 6 liaisons pivot, donc $Ns = 6 \times 5 = 30$.

$rs = 6 \cdot (p - 1) - m = 6 \times (6 - 1) - 3 = 30 - 3 = 27$.

$h = 3$

Méthode cinématique :

Il y a 6 liaisons pivot, donc $Ic = 6 \times 1 = 6$.

Il n'y a qu'un cycle, donc $E = 6$.

$h = m - Ic + E$

$h = 3 - 6 + 6 = 3$

Question 3 : On pourrait remplacer la liaison pivot d'axe $(A, \vec{z_0})$ par une linéaire annulaire d'axe $(A, \vec{z_0})$.