

Robot à câble pour manipulation de charges lourdes

Corrigé UPSTI

I - Gestion de l'attitude de la plate-forme dans le plan médian

Objectif : le but de cette partie est d'analyser les contraintes de pilotage des longueurs des câbles afin de gérer l'attitude de la plate-forme dans le plan médian, soit sa position et son orientation.

I.A- Relations entre longueurs des câbles et angles d'inclinaison des câbles et de la plate-forme

Question 1 En projetant la fermeture vectorielle $\overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{M_1M_3} + \overrightarrow{M_3D} = \overrightarrow{CD}$ sur les directions $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$, en déduire deux équations scalaires entre les longueurs L, ℓ, λ_1 et λ_3 et les angles α_1, α_3 et β .

$$\overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{M_1M_3} + \overrightarrow{M_3D} = \overrightarrow{CD}$$

$$-\lambda_1 \overrightarrow{u_1} + 2\ell \overrightarrow{x_4} + \lambda_3 \overrightarrow{u_3} = 2L \overrightarrow{x_0}$$

$$-\lambda_1 (\cos \alpha_1 \overrightarrow{y_0} - \sin \alpha_1 \overrightarrow{x_0}) + 2\ell (\cos \beta \overrightarrow{x_0} + \sin \beta \overrightarrow{y_0}) + \lambda_3 (\cos \alpha_3 \overrightarrow{x_0} + \sin \alpha_3 \overrightarrow{y_0}) = 2L \overrightarrow{x_0}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \sin \alpha_1 + 2\ell \cos \beta + \lambda_3 \cos \alpha_3 = 2L \\ -\lambda_1 \cos \alpha_1 + 2\ell \sin \beta + \lambda_3 \sin \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Question 2 En projetant la relation vectorielle $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{M_1G}$ sur les directions $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$, déterminer les expressions des coordonnées x et y du centre géométrique G en fonction des longueurs λ_1, ℓ, h et H et des angles α_1 et β . En déduire l'expression de la longueur λ_1 du câble équivalent (1) sous la forme

$$\lambda_1 = \sqrt{(x - f_1(\beta))^2 + (y - f_2(\beta))^2}$$

où les deux fonctions f_1 et f_2 sont à exprimer en fonction de l'angle β et des longueurs constantes ℓ, h et H .

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{M_1G}$$

$$x \overrightarrow{x_0} + y \overrightarrow{y_0} = 2H \overrightarrow{y_0} - \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \ell \overrightarrow{x_4} - h \overrightarrow{y_4}$$

$$x \overrightarrow{x_0} + y \overrightarrow{y_0} = 2H \overrightarrow{y_0} - \lambda_1 (\cos \alpha_1 \overrightarrow{y_0} - \sin \alpha_1 \overrightarrow{x_0}) + \ell (\cos \beta \overrightarrow{x_0} + \sin \beta \overrightarrow{y_0}) - h (\cos \beta \overrightarrow{y_0} - \sin \beta \overrightarrow{x_0})$$

$$\begin{cases} x = \lambda_1 \sin \alpha_1 + \ell \cos \beta + h \sin \beta \\ y = 2H - \lambda_1 \cos \alpha_1 + \ell \sin \beta - h \cos \beta \end{cases}$$

Expression de la longueur λ_1

$$\begin{cases} \lambda_1 \sin \alpha_1 = x - \ell \cos \beta - h \sin \beta \\ \lambda_1 \cos \alpha_1 = -y + 2H + \ell \sin \beta - h \cos \beta \end{cases}$$

$$\lambda_1^2 (\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1) = (x - \ell \cos \beta - h \sin \beta)^2 + (-y + 2H + \ell \sin \beta - h \cos \beta)^2$$

$$\lambda_1 = \sqrt{(x - \ell \cos \beta - h \sin \beta)^2 + (y - 2H - \ell \sin \beta + h \cos \beta)^2}$$

$$f_1(\beta) = \ell \cos \beta + h \sin \beta \quad f_2(\beta) = 2H + \ell \sin \beta - h \cos \beta$$

Question 3 Pour déplacer (paramètres x et y) et orienter (paramètre β) la plate-forme avec son centre géométrique G maintenu dans le plan médian, indiquer sans calcul (mais en le justifiant rigoureusement), le nombre de câbles équivalents qui doivent être pilotés en position (gestion précise de leurs longueurs λ_i). Comment doit-on piloter le(s) dernier(s) câbles(s) équivalent(s) pour qu'il(s) ne se détende(nt) pas ?

Il y a 3 paramètres (x, y et β) à régler.

En écrivant les relations pour chacun des câbles on obtient 4 équations pour 3 inconnues.

3 équations suffiraient. Cela signifie qu'un des paramètres λ_i est fonction des trois autres.

Il faut donc asservir 3 câbles en position et garder le dernier câble tendu en le pilotant avec un capteur d'effort par exemple.

II - Commande des moteurs pour une évolution rectiligne de la plate-forme dans le plan médian

Objectif : le but de cette partie est d'analyser les évolutions du couple devant être généré par les moteurs lors d'un déplacement centré de la plate-forme selon une loi en triangle de vitesse.

Question 4 En dérivant les deux expressions précédentes, en déduire que

$$\dot{\lambda}_1 = -\dot{y} \cos \alpha_1 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \dot{\alpha}_1 = \dot{y} \sin \alpha_1$$

On dérive chaque expression

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 \sin \alpha_1 + \lambda_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_1 \cos \alpha_1 - \lambda_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 = -\dot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda}_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_1 + \lambda_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 = 0 & (1) \\ \dot{\lambda}_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_1 - \lambda_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = -\dot{y} \cos \alpha_1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \dot{\lambda}_1 (\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1) = -\dot{y} \cos \alpha_1 \Rightarrow \dot{\lambda}_1 = -\cos \alpha_1 \dot{y} \quad (3)$$

On reprend (2) : $\dot{\lambda}_1 \cos \alpha_1 - \lambda_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 = -\dot{y}$ et on remplace $\dot{\lambda}_1$ par $-\cos \alpha_1 \dot{y}$ (3)

$$-\cos \alpha_1 \dot{y} \cos \alpha_1 - \lambda_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 = -\dot{y} \Rightarrow \lambda_1 \dot{\alpha}_1 = \dot{y} \frac{1 - \cos^2 \alpha_1}{\sin \alpha_1} \Rightarrow \lambda_1 \dot{\alpha}_1 = \dot{y} \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin \alpha_1} \Rightarrow \lambda_1 \dot{\alpha}_1 = \dot{y} \sin \alpha_1$$

II.1 - Étude de l'évolution dynamique

Question 5 Donner la relation entre la vitesse d'enroulement du câble $\dot{\lambda}_1$, la vitesse de rotation ω_m , le rapport ρ et le rayon R du tambour d'enroulement.

$$\dot{\lambda}_1 = -R \rho \omega_m$$

Question 6 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne du système $(\Sigma) = \{\text{plate-forme} + \text{quatre ensembles \{moteur + réducteur + tambour d'enroulement + câbles\}}\}$ en mouvement et l'écrire sous la forme $E_C(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_m^2$ où l'inertie équivalente J_{eq} sera exprimée en fonction de J_m d'un des quatre moteurs, de la masse M de la plate-forme, du rayon R du tambour d'enroulement, du rapport ρ du réducteur et de $\cos \alpha_1$.

$$E_C(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + 4 \left(\frac{1}{2} J_m \omega_m^2 \right)$$

$$E_C(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + 4 \left(\frac{1}{2} J_m \omega_m^2 \right)$$

Avec $\dot{\lambda}_1 = -\dot{y} \cos \alpha_1$ et $\dot{\lambda}_1 = -R \rho \omega_m$

$$E_C(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} M \left(\frac{R \rho \omega_m}{\cos \alpha_1} \right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2} J_m \omega_m^2 \right)$$

$$\Rightarrow E_C(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} \left(M \left(\frac{R \rho}{\cos \alpha_1} \right)^2 + 4 J_m \right) \omega_m^2$$

$$J_{eq} = M \left(\frac{R \rho}{\cos \alpha_1} \right)^2 + 4 J_m$$

Question 7 Déterminer la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à l'ensemble (Σ) en mouvement et l'écrire sous la forme $\mathcal{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_0) = \mathcal{C} \omega_m$ où la grandeur \mathcal{C} sera exprimée en fonction du couple C_m d'un des quatre moteurs, de la masse M de la plate-forme, de l'accélération g de la pesanteur, du rayon R du tambour d'enroulement, du rapport ρ du réducteur et de $\cos \alpha_1$

$$\mathcal{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_0) = 4 C_m \omega_m - M g \dot{y}$$

$$\mathcal{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_0) = 4 C_m \omega_m - M g \left(\frac{R \rho \omega_m}{\cos \alpha_1} \right)$$

$$\mathcal{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_0) = \omega_m \left(4 C_m - \frac{M g R \rho}{\cos \alpha_1} \right) \quad \text{donc } \mathcal{C} = 4 C_m - \frac{M g R \rho}{\cos \alpha_1}$$

Question 8 En déduire que le couple moteur C_m d'un des quatre moteurs s'exprime sous la forme $C_m = \frac{1}{4} [(4J_m + M r^2(\alpha_1))\dot{\omega}_m + M \tan \alpha_1 r^2(\alpha_1)\dot{\alpha}_1 \omega_m + M g r(\alpha_1)]$ où $r(\alpha_1) = \frac{R \rho}{\cos \alpha_1}$

$$\frac{dE_C(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(int) \text{ avec } \mathcal{P}(int)=0 \text{ ici}$$

$$J_{eq} \omega_m \dot{\omega}_m + \frac{1}{2} J_{eq} \omega_m^2 = \mathcal{C} \omega_m$$

$$J_{eq} \dot{\omega}_m + \frac{1}{2} J_{eq} \omega_m = \mathcal{C}$$

$$\left(M \left(\frac{R \rho}{\cos \alpha_1} \right)^2 + 4 J_m \right) \dot{\omega}_m + \frac{1}{2} M (R \rho)^2 \left(\frac{2 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1}{\cos^3 \alpha_1} \right) \omega_m = 4 C_m - \frac{M g R \rho}{\cos \alpha_1}$$

On introduit $r(\alpha_1) = \frac{R \rho}{\cos \alpha_1}$: $(M r^2(\alpha_1) + 4 J_m) \dot{\omega}_m + M \dot{\alpha}_1 r^2(\alpha_1) \tan \alpha_1 \omega_m = 4 C_m - M g r(\alpha_1)$

Enfin, on isole C_m :

$$C_m = \frac{1}{4} [(4 J_m + M r^2(\alpha_1)) \dot{\omega}_m + M \tan \alpha_1 r^2(\alpha_1) \dot{\alpha}_1 \omega_m + M g r(\alpha_1)]$$

II.2 - Évolution du couple moteur sur une phase d'accélération / décélération de la plate-forme

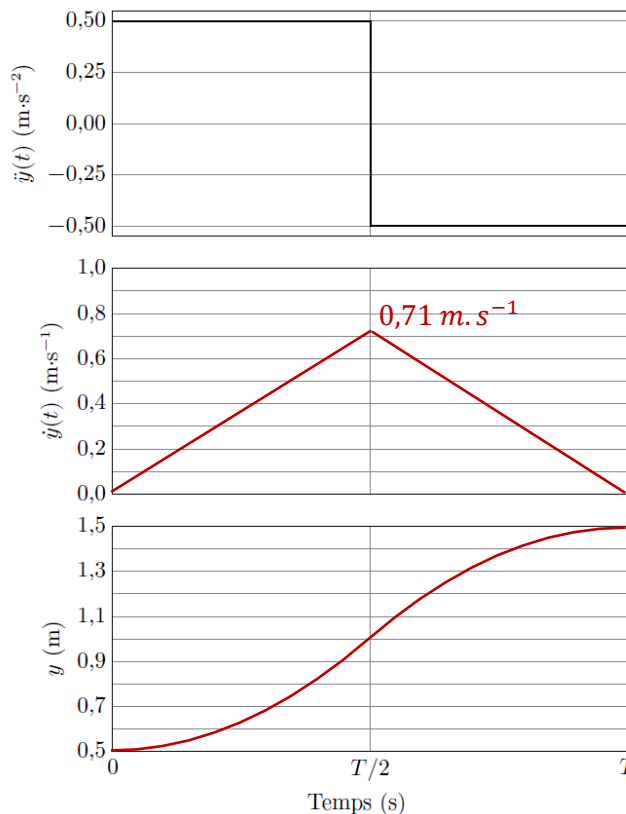
Question 9 Répondre à cette question exclusivement sur la figure B du document réponse. Après avoir déterminé les valeurs du temps total T et la vitesse maximale V_{max} atteinte lors de cette évolution, tracer les allures des courbes d'évolution de la vitesse \dot{y} et la position y du centre de gravité de la plate-forme (confondu avec le centre géométrique de la plate-forme).

Par intégrations successives de \ddot{y} , on obtient $y(t) - y(0) = \frac{1}{2} \ddot{y} t^2$ pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$.

A $t = \frac{T}{2}$, la plate-forme a parcourue la moitié de la distance donc $y(\frac{T}{2}) - y(0) = \frac{d}{2}$. On a alors :

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2} \ddot{y} \left(\frac{T}{2} \right)^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4 d}{\ddot{y}}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4 \times 1}{0,5}} \Rightarrow T = 2,83 \text{ s}$$

$$V_{max} = \ddot{y} \frac{T}{2} \Rightarrow V_{max} = 0,5 \times \frac{2,83}{2} \Rightarrow V_{max} = 0,71 \text{ m.s}^{-1}$$



Question 10 Que devient la relation de la question 8 dans le cas statique ?

Dans l'hypothèse où les vitesses sont très faibles ($\dot{\omega}_m \approx 0$ et $\dot{\alpha}_1 \approx 0$), on a :

$$C_m \approx \frac{1}{4} [M g r(\alpha_1)]$$

Question 11 En utilisant les deux équations scalaires fournies juste avant la question 4, déterminer l'expression de l'effort dans les deux câbles équivalents supérieurs $F_1 = F_3$ en fonction de la masse M , de l'accélération de la pesanteur g , de la géométrie (longueurs ℓ, L et h) et de l'ordonnée y du centre géométrique de la plate-forme.

$$\lambda_1 \sin \alpha_1 = L - \ell \quad \lambda_1 \cos \alpha_1 = 2H - y - h$$

$$F_1 = F_3 = \frac{M g}{2 \cos \alpha_1} = \frac{M g \lambda_1}{2 (2H - y - h)}$$

Avec les 2 équations, on obtient : $\lambda_1 = \sqrt{(L - \ell)^2 + (2H - y - h)^2}$

$$F_1 = F_3 = \frac{M g}{2 \cos \alpha_1} = \frac{M g \sqrt{(L - \ell)^2 + (2H - y - h)^2}}{2 (2H - y - h)} = \frac{M g}{2} \sqrt{\left(\frac{L - \ell}{2H - y - h}\right)^2 + 1}$$

Calcul alternatif donnant un résultat formulé différemment : on divise entre elles les deux équations qui précèdent la question 4 :

$$\tan \alpha_1 = \frac{L - \ell}{2H - y - h} \quad \text{avec } \alpha_1 \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$F_1 = F_3 = \frac{M g}{2 \cos \alpha_1} = \frac{M g}{2 \cos \left(\arctan \frac{L - \ell}{2H - y - h} \right)}$$

III - Analyse de l'influence des différentes sources d'incertitude sur le positionnement de la plate-forme

Objectif : le but de cette partie est d'analyser et de quantifier les différentes sources d'erreur qui pourraient induire des incertitudes dans le positionnement de la plate-forme dans l'espace puis de les comparer aux performances attendues pour ce système à câbles.

III.1 - Analyse de deux sources d'incertitude sur le positionnement de la plate-forme

III.1.a - Estimation de l'incertitude due à la résolution du codeur

Question 12 Déterminer la valeur de $\Delta\theta_{cod}$ (en degrés) de mesure de la position angulaire de l'arbre moteur par le codeur. En déduire la valeur de l'incertitude $\Delta\lambda_{cod}$ (en mm) sur la longueur du câble due à la mesure par le codeur en supposant le réducteur sans jeux.

$$\Delta\theta_{cod} = \frac{1 \text{ tour}}{4 \times \text{résolution}} \Rightarrow \Delta\theta_{cod} = \frac{360}{4 \times 2048} = 0,044^\circ$$

$$\Delta\lambda_{cod} = \Delta\theta_{cod} \times \frac{2\pi R}{360} \times \rho \Rightarrow \Delta\lambda_{cod} = \frac{0,044 \times 2\pi \times 0,06}{360 \times 40} \Rightarrow \Delta\lambda_{cod} = 1,15 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

Question 13 Donner l'incertitude $\Delta\lambda_{red}$ (en mm) sur la longueur du câble due aux jeux dans le réducteur.

$$\Delta\lambda_{red} = 0,17 \times \frac{2\pi R}{360} \Rightarrow 0,17 \times \frac{2\pi \times 0,06}{360} = 0,178 \text{ mm}$$

Question 14 Après avoir identifié et justifié la configuration la plus défavorable pour cette étude, déterminer les valeurs des incertitudes de positionnement vertical Δy_{cod} et Δy_{red} dues à l'erreur de mesure du codeur et à la prise en compte des jeux dans le réducteur. Conclure quant à la nécessité ou non de tenir compte dans le pilotage de l'une et/ou l'autre de ces incertitudes.

$$|\Delta\lambda| \cong |\Delta y| \cos \alpha_1 \Rightarrow |\Delta y| = \frac{|\Delta\lambda|}{\cos \alpha_1}$$

Le cas le plus défavorable correspond à un α_1 s'approchant le plus de 90° . On relève figure B, la valeur maximale de $\alpha_1 = 70^\circ$. On a alors :

$$|\Delta y_{cod}| = \frac{|\Delta\lambda_{cod}|}{\cos \alpha_1} = \frac{1,15 \times 10^{-3}}{\cos(70^\circ)} = 3,3 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$|\Delta y_{red}| = \frac{|\Delta\lambda_{red}|}{\cos \alpha_1} = \frac{0,178}{\cos(70^\circ)} = 0,52 \text{ mm}$$

Ces deux incertitudes sont négligeables devant la précision du positionnement exigée ($\leq 10 \text{ mm}$), il n'est donc pas nécessaire d'en tenir compte dans le pilotage.

III.1.b - Estimation de l'incertitude due à l'allongement des câbles

Question 15 Le matériau étant supposé homogène et isotrope, donner l'expression de l'allongement $\Delta\lambda$ d'un câble de longueur λ en fonction de l'effort de traction F , de la section S et du module d'Young E .

D'après la loi de Hooke : $E \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{F}{S}$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda \times F}{E \times S}$$

Question 16 Après avoir identifié et justifié la position la plus défavorable pour cette étude, en déduire, en tenant compte du doublement de l'effort, l'incertitude maximale $\Delta\lambda_{rdm}$ sur la longueur de chacun des quatre câbles due à la déformation puis en déduire la valeur de Δy_{rdm} due à la déformation du câble. Conclure quant à la nécessité ou non d'en tenir compte dans le pilotage.

On relève sur la figure B, les valeurs de F et λ qui donneront la valeur maxi au numérateur :

$\lambda = 2,92 \text{ m}$ et $F = 4450 \text{ N}$

$$\Delta\lambda_{rdm} = \frac{\lambda \times 2F}{E \times S}$$

$$|\Delta y_{rdm}| = \frac{|\Delta\lambda_{rdm}|}{\cos \alpha_1}$$

Pour les valeurs choisies on a $\alpha_1 = 70^\circ$.

$$\Delta y_{rdm} = \frac{\lambda \times 2F}{\frac{E \times S}{\cos \alpha_1}} = 0,011 \text{ m}$$

L'incertitude est supérieure à la précision de positionnement demandée ($\leq 10 \text{ mm}$), il est donc nécessaire d'en tenir compte dans le pilotage.

III.2 - Détection d'un défaut de positionnement

Question 17 Déterminer, en fonction de K_f et de la variable de Laplace p , les fonctions $H_a(p)$ et $H_g(p)$ telles que $\hat{\Theta}(p) = H_a(p) \Theta_{acc}(p) + H_g(p) \Omega_{gyro}(p)$.

D'après le schéma bloc de la figure 7 :

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}(p) &= \frac{1}{p} \left(\Omega_{gyro}(p) + K_f \left(\Theta_{acc}(p) - \hat{\Theta}(p) \right) \right) \\ p \hat{\Theta}(p) &= \Omega_{gyro}(p) + K_f \left(\Theta_{acc}(p) - \hat{\Theta}(p) \right) \\ \hat{\Theta}(p)(p + K_f) &= \Omega_{gyro}(p) + K_f \Theta_{acc}(p) \\ \hat{\Theta}(p) &= \frac{K_f}{p + K_f} \Theta_{acc}(p) + \frac{1}{p + K_f} \Omega_{gyro}(p) \\ \hat{\Theta}(p) &= \frac{1}{1 + \frac{p}{K_f}} \Theta_{acc}(p) + \frac{1/K_f}{1 + \frac{p}{K_f}} \Omega_{gyro}(p)\end{aligned}$$

On identifie :

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}(p) &= H_a(p) \Theta_{acc}(p) + H_g(p) \Omega_{gyro}(p) \\ H_a(p) &= \frac{1}{1 + \frac{p}{K_f}} \text{ et } H_g(p) = \frac{1/K_f}{1 + \frac{p}{K_f}}\end{aligned}$$

Question 18 Montrer que le schéma bloc de la figure 7 peut être mis sous la forme de la structure de la figure 8 : à cet effet, exprimer les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ en fonction de K_f et de la variable de Laplace p , à écrire sous forme canonique en donnant les expressions et unités des grandeurs canoniques.

Le schéma-bloc de la figure 8 donne :

$$\hat{\Theta}(p) = H_2(p) \Theta_{acc}(p) + \frac{H_1(p)}{p} \Omega_{gyro}(p)$$

Par identification avec la question précédente, on a :

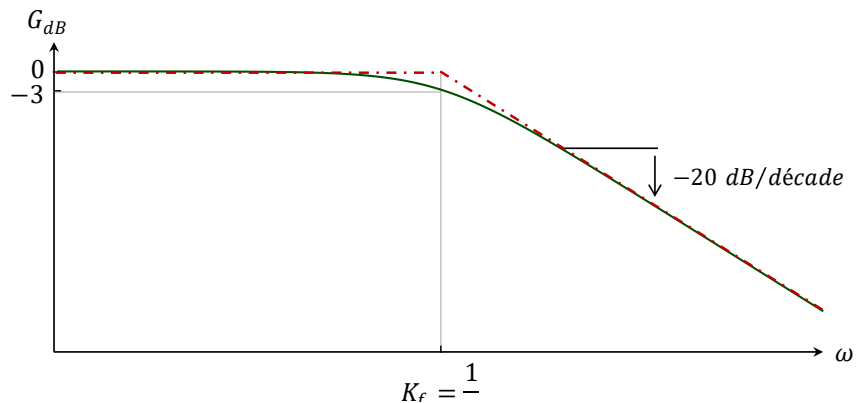
$$H_2(p) = H_a(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_f}} = \frac{K}{1 + \tau_f p} \quad \Rightarrow \quad K = 1 \text{ (sans unités)} \quad \tau_f = \frac{1}{K_f} \text{ (en seconde)}$$

$$H_1(p) = p.H_g(p) = \frac{p/K_f}{1 + \frac{p}{K_f}} = \frac{K \tau_f p}{1 + \tau_f p} \quad K = 1 \text{ (sans unités)} \quad \tau_f = \frac{1}{K_f} \text{ (en seconde)}$$

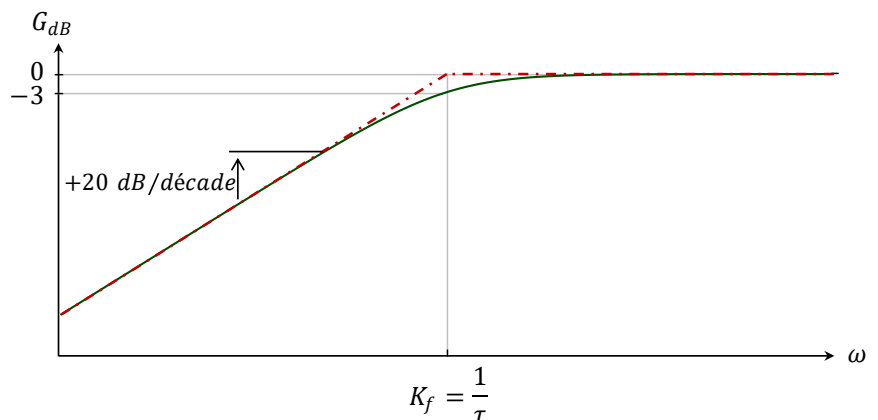
Note : en retenant une forme canonique de forme $H_1(p) = \frac{K p}{1 + \tau_f p}$, on obtient plutôt $K = \frac{1}{K_f}$.

Question 19 Tracer sur la copie la courbe asymptotique de gain et l'allure de la courbe réelle de gain du diagramme de Bode de ces deux fonctions de transfert en indiquant leurs caractéristiques. Analyser alors le type de filtre associé à ces deux fonctions de transfert (« passe-bas », « passe-bande » ou « passe-haut »).

$$H_1(p) = \frac{\frac{p}{K_f}}{1 + \frac{p}{K_f}} \quad \text{Filtre passe - haut}$$



$$H_2(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_f}} \quad \text{Filtre passe - bas}$$



Question 20 En utilisant le résultat de la question 17 et en approchant l'équation dans le domaine temporel par un schéma d'Euler explicite en considérant que la période T_e est très petite, exprimer $\hat{\theta}_n$ sous la forme de l'équation aux différences $\hat{\theta}_n = \mathcal{A} (\hat{\theta}_{n-1} + T_e \omega_{gyro_n}) + \mathcal{B} \theta_{acc_n}$ où les deux constantes \mathcal{A} et \mathcal{B} seront explicitées en fonction du gain K_f et de la période T_e .

$$\hat{\theta}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_f}} \theta_{acc}(p) + \frac{1/K_f}{1 + \frac{p}{K_f}} \Omega_{gyro}(p)$$

$$\hat{\theta}(p) \left(1 + \frac{p}{K_f} \right) = \theta_{acc}(p) + \frac{1}{K_f} \Omega_{gyro}(p)$$

On passe en temporel : $\hat{\theta}(t) + \frac{1}{K_f} \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = \theta_{acc}(t) + \frac{1}{K_f} \omega_{gyro}(t)$

On discrétise l'équation différentielle, avec Euler explicite $\frac{d\hat{\theta}(t=nT_e)}{dt} = \frac{\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{n-1}}{T_e}$:

$$\hat{\theta}_n + \frac{1}{K_f} \frac{\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{n-1}}{T_e} = \theta_{acc_n} + \frac{1}{K_f} \omega_{gyro_n}$$

$$K_f T_e \hat{\theta}_n + \hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{n-1} = K_f T_e \theta_{acc_n} + T_e \omega_{gyro_n}$$

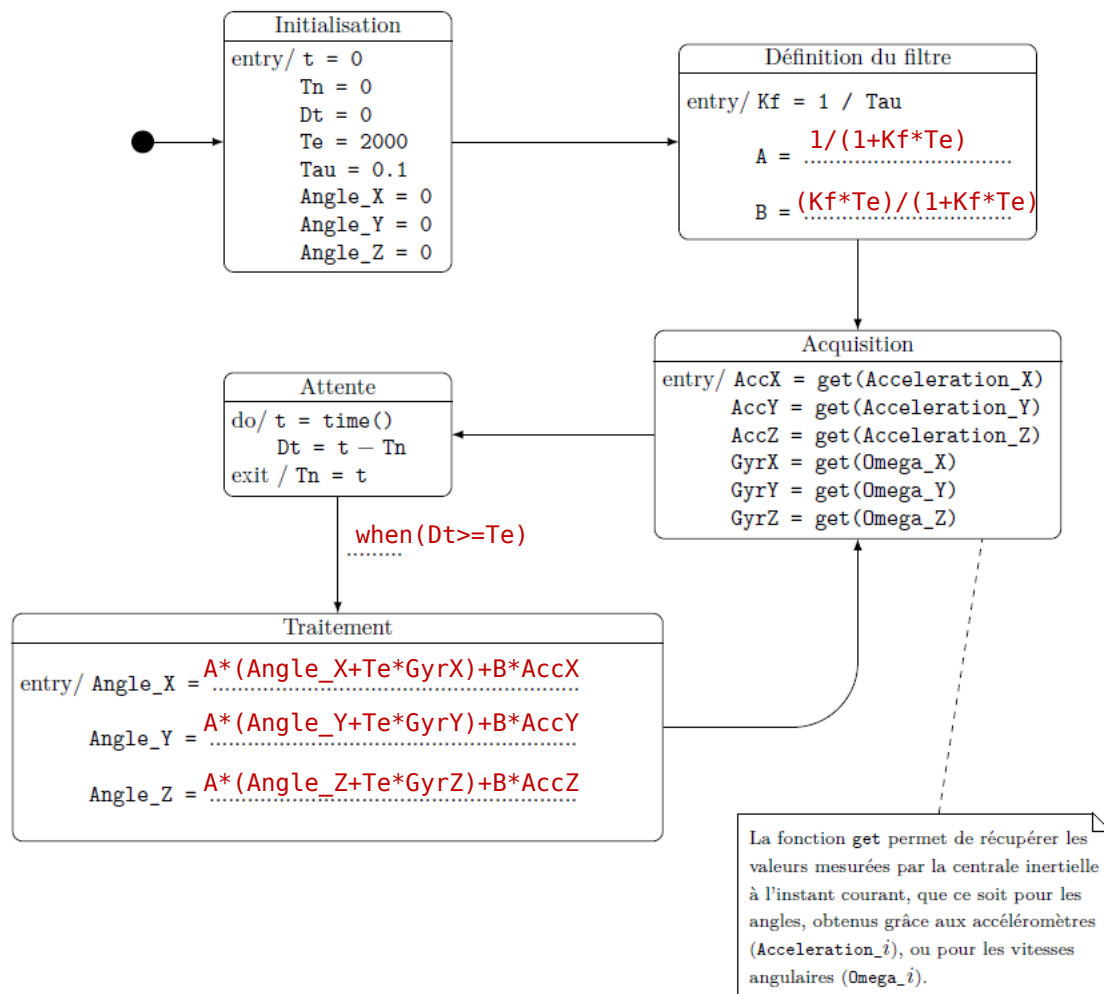
On isole $\hat{\theta}_n$: $\hat{\theta}_n(1 + K_f T_e) = \hat{\theta}_{n-1} + K_f T_e \theta_{acc_n} + T_e \omega_{gyro_n}$

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{1 + K_f T_e} (\hat{\theta}_{n-1} + T_e \omega_{gyro_n}) + \frac{K_f T_e}{1 + K_f T_e} \theta_{acc_n}$$

Il vient alors par identification :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{1 + K_f T_e} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \frac{T_e K_f}{1 + K_f T_e}$$

Question 21 Répondre à cette question exclusivement sur la figure C du document réponse. Compléter les informations manquantes, indiquées par des pointillés, dans le diagramme d'état figure C du document réponse.



IV - Étude de l'exigence « fournir l'énergie électrique aux moteurs »

Objectif : vérifier que la source d'énergie alimentant l'ensemble moto-variateur permet de satisfaire aux exigences de vitesse et de couple lors du déplacement de la plate-forme.

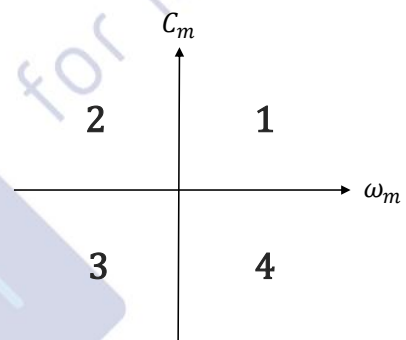
IV.1 - Détermination de la tension d'alimentation du moteur synchrone

Objectif : déterminer la tension d'alimentation du moteur synchrone permettant de satisfaire aux exigences de vitesse et de couple lors du déplacement de la plateforme.

Question 22 Expliquer l'intérêt de ce choix et préciser à quels quadrants de fonctionnement du plan $C_m = f(\omega_m)$ correspondent chacune de ces deux valeurs.

Comme $C_m = k_t I_s \cos \psi$, les valeurs retenues permettent d'avoir le couple maximal (en valeur absolue) pour un courant donné.

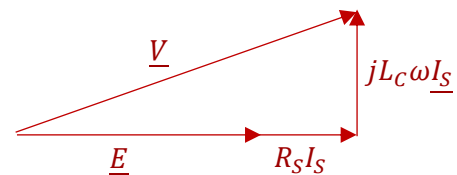
Les quadrants 1 et 2 lorsque $\psi = 0$ ($C_m > 0$) et les quadrants 3 et 4 lorsque $\psi = \pi$ ($C_m < 0$)



Question 23 Pour un angle $\psi = 0$, exprimer la valeur efficace de la tension V_s par phase en fonction de E , R_s , L_c , I_s et ω . Présenter à cet effet un diagramme de Fresnel des grandeurs en jeu.

Loi des mailles : $\underline{V_s} = \underline{E} + R_s \underline{I_s} + jL_c \omega \underline{I_s}$. Comme $\psi = 0$, on a \underline{E} et $R_s \underline{I_s}$ qui sont en phases et $jL_c \omega \underline{I_s}$ en quadrature avec \underline{E} .

$$V_s = \sqrt{(E + R_s I_s)^2 + (L_c \omega I_s)^2}$$



Question 24 Pour un angle $\psi = 0$, une vitesse de rotation $\omega_m = 224,5 \text{ rad.s}^{-1}$ et un couple $C_m = 5 \text{ N.m}$, calculer la valeur efficace de la force électromotrice E par phase, la valeur efficace du courant I_s par phase, la fréquence f des grandeurs électriques, la valeur efficace de la tension V_s par phase et enfin la valeur efficace de la tension U_s entre phases.

$$\text{Comme } E = k_e \omega_s \Rightarrow k_e = \frac{134/\sqrt{3}}{\left(\frac{\pi \times 2200}{30}\right)} \text{ (valeurs du tableau 2, tension à vide entre phases = } E)$$

$$\Rightarrow E = \frac{134/\sqrt{3}}{\left(\frac{\pi \times 1000}{30}\right)} \times \omega_s \Rightarrow E = \frac{134/\sqrt{3}}{\left(\frac{\pi \times 1000}{30}\right)} \times 224,5 \Rightarrow E = 165,9 \text{ V}$$

$$I_s = \frac{C_m}{k_t \cos \psi} = \frac{5}{2,22 \cos 0} = 2,25 \text{ A}$$

$$\omega = p \omega_s \Rightarrow 2\pi f = p \omega_s \Rightarrow f = \frac{p \omega_s}{2\pi} = \frac{4 \times 224,5}{2\pi} = 143 \text{ Hz}$$

$$V_S = \sqrt{(E + R_S I_S)^2 + (L_C p \omega_s I_S)^2}$$

$$V_S = \sqrt{(165,9 + 1,13 \times 2,25)^2 + (0,012 \times 4 \times 224,5 \times 2,25)^2} \Rightarrow V_S = 170,2 \text{ V}$$

$$U_S = \sqrt{3} \times V_S = 294,8 \text{ V}$$

IV.2 - Analyse de la tension délivrée par le variateur

Objectif : Vérifier que la tension d'alimentation du variateur permet de satisfaire aux exigences de vitesse et de couple lors du déplacement de la plate-forme.

Question 25 Montrer que $\langle u_{red} \rangle = U_0$. En déduire que la tension du réseau est suffisante pour alimenter le moteur.

$$u_{red} = u_L + U_0 \Rightarrow \langle u_{red} \rangle = \langle u_L + U_0 \rangle \Rightarrow \langle u_{red} \rangle = \langle u_L \rangle + \langle U_0 \rangle$$

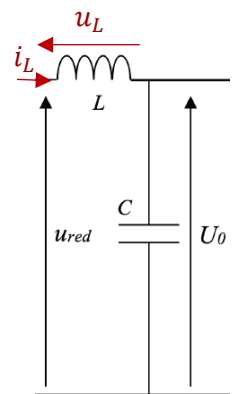
Comme le courant est périodique dans l'inductance, on a $\langle u_L \rangle = 0$

$$\text{Démonstration : } \langle u_L \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T L \frac{di_L(t)}{dt} dt = \frac{L}{T} \int_0^T di_L(t) = \frac{L}{T} (i_L(T) - i_L(0)) = 0$$

Donc $\langle u_{red} \rangle = \langle U_0 \rangle$, si on considère U_0 constante $\langle u_{red} \rangle = U_0$.

Valeur efficace minimale du premier harmonique de la tension MLI :

$$0,67 \times \frac{3\sqrt{2}}{\pi} (400 - 0,1 \times 400) = 325,7 \text{ V} > 295 \text{ V} \text{ donc la tension réseau est suffisante.}$$



IV.3 - Justification de la présence de la résistance de freinage

R_F

Question 26 Expliquer en quelques mots le rôle de cette résistance de freinage.

L'énergie renvoyée par la machine synchrone lors d'un freinage ne peut retourner au réseau d'alimentation car le pont de diode n'est pas réversible en courant. Cette énergie s'accumule dans le condensateur ce qui a pour conséquence d'augmenter la tension aux bornes de celui-ci et de l'endommager si la tension dépasse sa valeur nominale. La résistance de freinage a pour rôle de dissiper par effet Joule l'énergie récupérée lors du freinage. Lorsque la tension U_0 devient trop importante, on commande le transistor de freinage T_F .

Question 27 En négligeant les différentes pertes, estimer la valeur de l'énergie récupérée lors de la descente de la plate-forme, sur une distance de 1 m.

$$W_{récupérée} = \text{masse} \times g \times \Delta h = 154 \times 9,81 \times 1 = 1,51 \text{ kJ}$$

Question 28 Déterminer l'énergie que peut stocker le condensateur C, de valeur égale à 2 mF, sans que la tension à ses bornes ne dépasse 10 % de la tension nominale redressée, égale à 540 V. Conclure quant à la nécessité d'une résistance de freinage.

Avant le freinage, le condensateur a stocké l'énergie

$$W_{stockée} = \frac{1}{2} \times C \times U_0^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-3} \times 540^2 = 291,6 J$$

L'énergie maximale qu'il peut stocker est

$$W_{\max_stockée} = \frac{1}{2} \times C \times (1,1 U_0)^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-3} \times (1,1 \times 540)^2 = 353 J$$

L'énergie récupérable par le condensateur est $353 - 292 = 61 J$

Cette énergie est très inférieure à l'énergie récupérée au freinage. Une résistance de freinage est donc nécessaire.

V - Étude de l'asservissement de la longueur d'un câble pour gérer le mouvement

Objectif : déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs permettant d'assurer l'enroulement adéquat des câbles.

Question 29 Justifier la valeur numérique proposée pour la constante de temps τ .

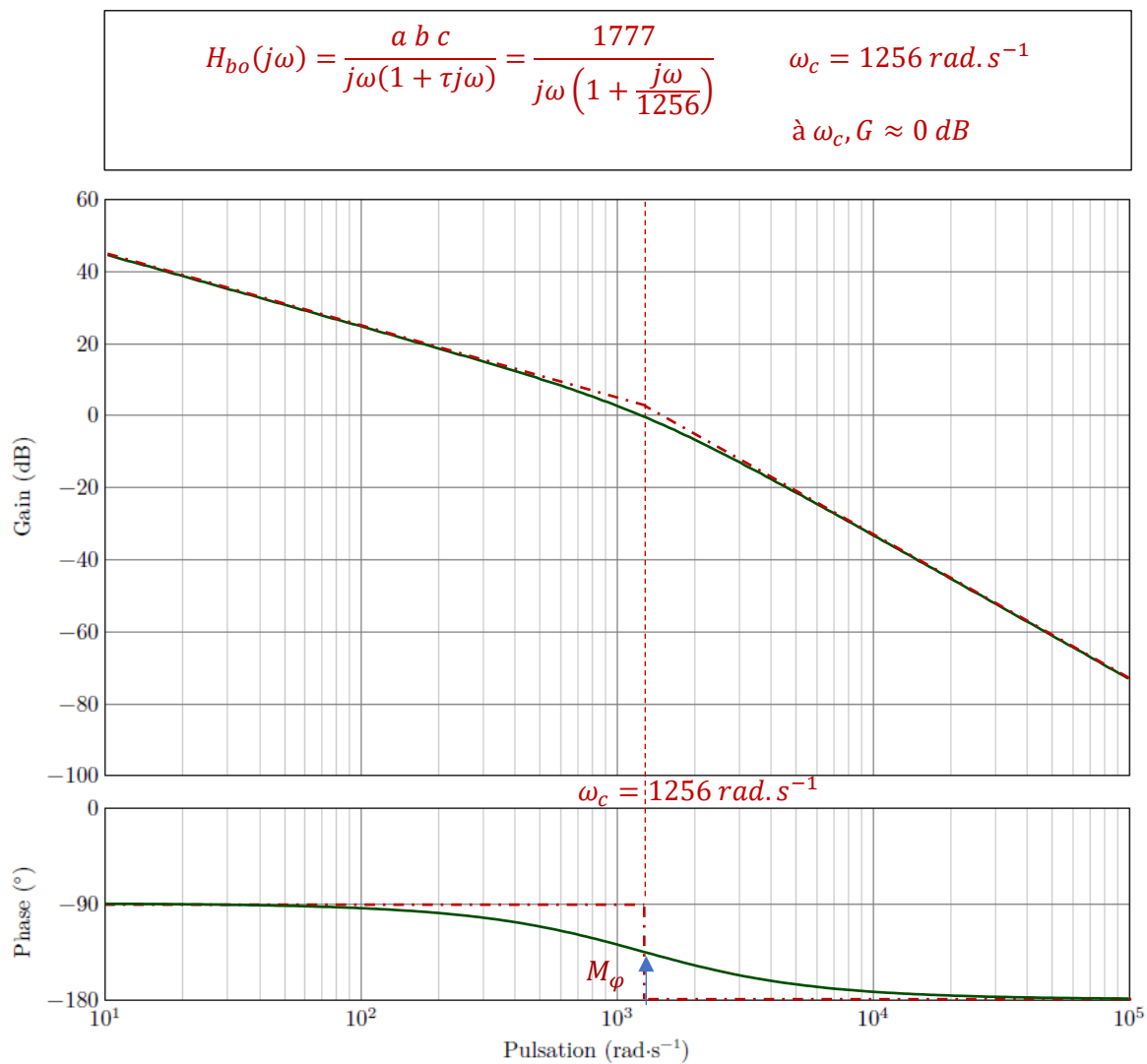
La fréquence de coupure f_0 est de 200 Hz. Pour un premier ordre, la fonction de transfert est

$$\frac{b}{1 + \frac{p}{2\pi f_0}} \text{ donc } \tau = \frac{1}{2\pi f_0} = \frac{1}{2\pi \times 200} = 796 \mu s$$

Question 30 On souhaite que l'erreur $\mu(t)$ soit nulle quand l'écart $\varepsilon(t)$ l'est : en déduire la relation entre K_a et c .

$$K_a = c$$

Question 31 Répondre à cette question exclusivement sur la figure D du document réponse. Après avoir donné l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(j\omega)$, tracer son diagramme asymptotique de Bode (courbes de gain et de phase en précisant la valeur de la cassure et le gain associé) et esquisser le plus précisément l'allure des courbes réelles de réponse fréquentielle.



Question 32 Relever sur la courbe tracée à la question précédente la valeur de la marge de phase M_ϕ . Sachant que l'on souhaite que cette marge soit de $M_\phi = 45^\circ$, conclure quant au réglage de a.

$M_\phi \cong 45^\circ$, le réglage de a est correct.

Question 33 Déterminer l'expression de l'image $\mu(p)$ de l'erreur en fonction de l'image $\Theta_c(p)$ de la consigne angulaire et de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p)$ de l'asservissement.

$$\mu(p) = \Theta_c(p) - \Theta(p) \Rightarrow \mu(p) = \Theta_c(p) - H_{bo}(p) \mu(p) \Rightarrow \mu(p) = \frac{\Theta_c(p)}{1 + H_{bo}(p)}$$

Question 34 Déterminer la valeur de l'erreur statique μ_p . Déterminer l'expression de l'erreur de poursuite μ_v en fonction des gains a, b et c et de la pente ω_0 . Faire l'application numérique et vérifier si les exigences de l'utilisateur sont vérifiées.

$$\mu_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\theta_0}{p(1 + H_{bo}(p))} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\theta_0}{1 + \frac{a b c}{p(1 + \tau p)}} = 0$$

$$\mu_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\omega_0}{p^2(1 + H_{bo}(p))} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\omega_0}{p + p \frac{a b c}{p(1 + \tau p)}} = \frac{\omega_0}{a b c}$$

$$\frac{1}{a b c} = \frac{1}{0,0434 \times 31,4 \times 1304} = 0,56 \times 10^{-3} = 0,056\% < 0,1 \%$$

Les exigences de l'utilisateur sont donc satisfaites.

VI - Synthèse

Question 35 Répondre à cette question exclusivement sur la figure E du document réponse. Compléter le tableau de la figure E avec un unique mot clé ou un nombre pour chaque critère.

Critères	Robot à câbles	Robot portique
Nombre de degrés de liberté du robot	6 (3 rotations + 3 translations)	3 (translations)
Performances dynamiques en translation	Bonnes (les câbles n'ajoutent que peu d'inertie...)	Médiocres (... alors que l'axe entre le bâtiment et le portique doit déplacer une structure conséquente et lourde)
Coût de l'infrastructure génie civil pour implanter le robot	Faible (Seuls plusieurs points de fixations sont à consolider)	Élevé (nécessite de nombreuses poutres, qui plus est, sollicitées en flexion)
Facilité de pilotage manuel (si problème de carte de commande)	Difficile des mouvements simples peuvent être réalisés	Facile

Figure E Tableau bilan