

## Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2021

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](#) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles).

**La distribution et la publication de ce document sont strictement interdites !**

### Conditions de diffusion

Ce document n'a pas vocation à être diffusé, et sa consultation est exclusivement réservée aux adhérents de l'UPSTI.

Les adhérents peuvent en revanche s'en inspirer librement pour toute utilisation pédagogique.

Si vous constatez que ce document est disponible en téléchargement sur un site tiers, veuillez s'il vous plaît nous en informer [à cette adresse](#), afin que nous puissions protéger efficacement le travail de nos adhérents.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

L'équipe UPSTI

# Stabilisateur vertical pour appareil photo

Corrigé UPSTI

## 1 Analyse du mouvement de l'utilisateur et justification du cahier des charges

### - Objectif -

Analyser les mouvements de l'utilisateur lorsqu'il marche ou lorsqu'il court et justifier les critères chiffrés de l'exigence relative à la position de l'appareil photo en mouvement.

**Question 1** Associer chacune des courbes (a) ou (b) à l'enregistrement du mouvement pendant la marche ou la course de l'utilisateur. Il est conseillé d'analyser les caractéristiques de l'harmonique de plus grande amplitude.

Sur la courbe de fréquence (a), l'harmonique la plus grande se trouve à une fréquence de 1,66 Hz.

Sur la courbe de fréquence (b), l'harmonique la plus grande se trouve à une fréquence de 2,66 Hz.

La fréquence la plus basse (a) correspond à la marche. La fréquence la plus haute (b) correspond à la course.

**Question 2** Proposer une méthode de filtrage pour atténuer les perturbations dues à la marche ou à la course de l'utilisateur tout en conservant les mouvements de translation verticale souhaités.

Pour filtrer les perturbations, il serait possible d'utiliser un filtre coupe-bande, atténuant les fréquences au voisinage de la fréquence de déplacement.

## 2 Vérification du respect de l'exigence relative à la position d'équilibre

### - Objectif -

Vérifier le respect de l'exigence relative à la position d'équilibre du système.

**Question 3** Exprimer les coordonnées du centre d'inertie  $G$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$  en fonction de l'angle  $\alpha$  et des paramètres géométriques du système.

Exprimons le vecteur  $\overrightarrow{OG}$  dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} \\ &= y_A \vec{y}_0 + z_{\text{pert}} \vec{z}_0 + L \vec{y}_2 + y_G \vec{y}_0 + z_G \vec{z}_0 \\ &= y_A \vec{y}_0 + z_{\text{pert}} \vec{z}_0 + L (\cos \alpha \vec{y}_0 + \sin \alpha \vec{z}_0) + y_G \vec{y}_0 + z_G \vec{z}_0\end{aligned}$$

Soit au final,  $\vec{OG} = (y_A + y_G + L \cos \alpha) \vec{y}_0 + (z_{\text{pert}} + z_G + L \sin \alpha) \vec{z}_0$ .

**Question 4** En utilisant une fermeture géométrique, donner l'expression de l'angle  $\beta$  en fonction de l'angle  $\alpha$  et des paramètres géométriques  $L$  et  $l$  du système.

Dans le triangle  $AA'B$  on a  $\vec{AA'} + \vec{A'B} + \vec{BA} = \vec{0}$ . En conséquence,  $l\vec{z}_0 + L_r\vec{y}_5 - L\vec{y}_2 = \vec{0}$ .

On projette cette équation dans  $\mathcal{R}_0$  et on a :  $l\vec{z}_0 + L_r(\cos \beta \vec{y}_0 + \sin \beta \vec{z}_0) - L(\cos \alpha \vec{y}_0 + \sin \alpha \vec{z}_0) = \vec{0}$ .

On a donc les équations scalaires suivantes : 
$$\begin{cases} L_r \cos \beta - L \cos \alpha = 0 \\ l + L_r \sin \beta - L \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

On cherche à exprimer  $\beta$  en fonction de  $\alpha$  et donc à supprimer  $L_r$  ; donc : 
$$\begin{cases} L_r \sin \beta = L \sin \alpha - l \\ L_r \cos \beta = L \cos \alpha \end{cases}$$

En conséquence, 
$$\tan \beta = \frac{L \sin \alpha - l}{L \cos \alpha}.$$

**Question 5** Exprimer la longueur  $L_r$  du ressort de traction (5) en fonction de l'angle  $\alpha$  et des paramètres géométriques du système.

En réutilisant le système d'équation précédent, on a  $L_r^2 = (L \sin \alpha - l)^2 + L^2 \cos^2 \alpha$  soit :

$$L_r = \sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll \sin \alpha}$$

## 2.1 Vérification de l'exigence relative à la plage de fonctionnement

**Question 6** Exprimer la composante de résultante d'action mécanique  $F_r$  en fonction de l'angle  $\alpha$ , des paramètres géométriques du système et des paramètres du ressort.

On a avec la définition classique de la force de rappel du ressort de traction (en tension ici) et surtout avec  $L_{r0}$  la longueur à vide du ressort on a  $F_r \vec{y}_5 = -K_r (L_r - L_{r0}) \vec{y}_5$ . En utilisant l'expression précédente :

$$F_r = -K_r (\sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll \sin \alpha} - L_{r0})$$

Avec la définition de l'effort de traction donnée par l'énoncé, on peut aussi être tenté d'écrire

$F_r \vec{y}_5 = -[F_{r0} + K_r (L_r - L_{r0})] \vec{y}_5$ . En utilisant l'expression précédente :

$$F_r = -[F_{r0} + K_r (\sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll \sin \alpha} - L_{r0})]$$

**Question 7** Déterminer la direction des actions mécaniques de liaison exercées par le bras (2) sur la nacelle (3) et par le bras (2') sur la nacelle (3).

Il est fait l'hypothèse que le problème est plan dans le plan  $(0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Les torseurs d'actions mécaniques associés aux liaisons pivot d'axe  $\vec{z}_0$  sont donc des glisseurs.

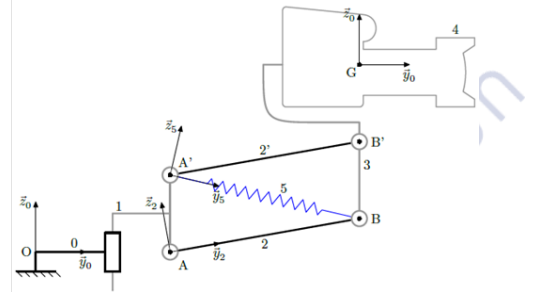
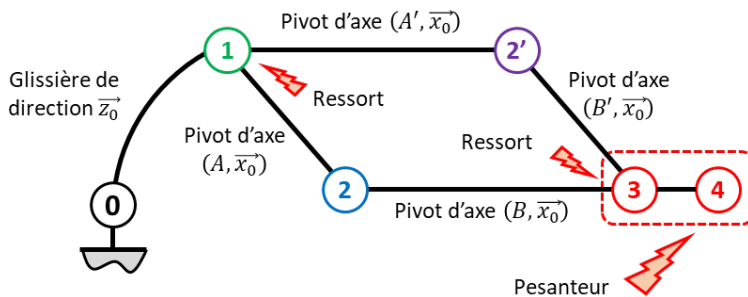
Les solides (2) et (2') sont tous soumis à deux glisseurs :

- d'une part,  $\{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)\}$  (pivot d'axe  $(A, \vec{x}_0)$ ) et  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 2)\}$  (pivot d'axe  $(B, \vec{x}_0)$ ) sont des glisseurs ;
- d'autre part,  $\{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2')\}$  (pivot d'axe  $(A', \vec{x}_0)$ ) et  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 2')\}$  (pivot d'axe  $(B', \vec{x}_0)$ ) sont des glisseurs.

D'après le PFS appliqué successivement à (2) et (2'), solides soumis à deux glisseurs, alors on a  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)\} = \{0\}$  et  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 2')\} + \{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2')\} = \{0\}$ . Les actions mécaniques sont de même norme, de même direction (droites  $(AB)$  et  $(A'B')$  soit vecteur  $\vec{y}_2$ ).

De plus,  $\vec{F}_{23} = F_{23}\vec{y}_2$  et  $\vec{F}_{2'3} = F_{2'3}\vec{y}_2$ .

**Question 8** Afin de déterminer la position d'équilibre de l'ensemble  $\{(3)+(4)\}$ , proposer sans calcul, une démarche claire qui permette d'exprimer l'effort nécessaire du ressort de traction (5) sur la nacelle gyroscopisée (3).



On isole l'ensemble  $\{(3)+(4)\}$ .

On réalise le bilan des actions mécaniques :

- action mécanique de (2') sur (3), de direction  $\vec{y}_2$  ;
- action mécanique de (2) sur (3), de direction  $\vec{y}_2$  ;
- action mécanique de la pesanteur sur  $\{(3)+(4)\}$  ;
- action du ressort sur  $\{(3)+(4)\}$ .

Il faut écrire une équation du PFS permettant de ne pas faire apparaître les actions dans les deux liaisons pivot. Il faut donc réaliser un théorème de la résultante statique en projection sur  $\vec{z}_2$  (perpendiculaire à  $\vec{y}_2$ ).

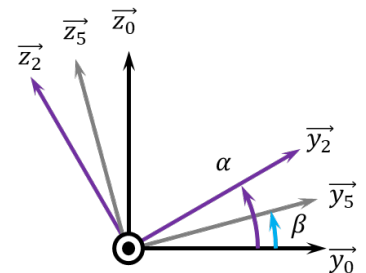
**Question 9** Exprimer l'équation scalaire traduisant l'équilibre du mécanisme en fonction des angles  $\alpha$ ,  $\beta$ , de la masse  $m_{34}$  et de la composante de résultante d'action mécanique  $F_r$ .

Calculons :

- la projection de l'action du ressort sur  $\vec{z}_2$  :  $F_r \vec{y}_5 \cdot \vec{z}_2 = F_r \cos\left(-\beta + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -F_r \sin(\alpha - \beta)$  ;
- la projection de l'action de pesanteur sur  $\vec{z}_2$  :  $-m_{34}g \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 = -m_{34}g \cos \alpha$ .

On applique le TRS en projection sur  $\vec{z}_2$  et on a :

$$\underbrace{\vec{R}_{2' \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_2}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_2}_{\vec{0}} + \vec{R}_{\text{Pes} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_2 + \vec{R}_{\text{Res} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_2 = 0.$$



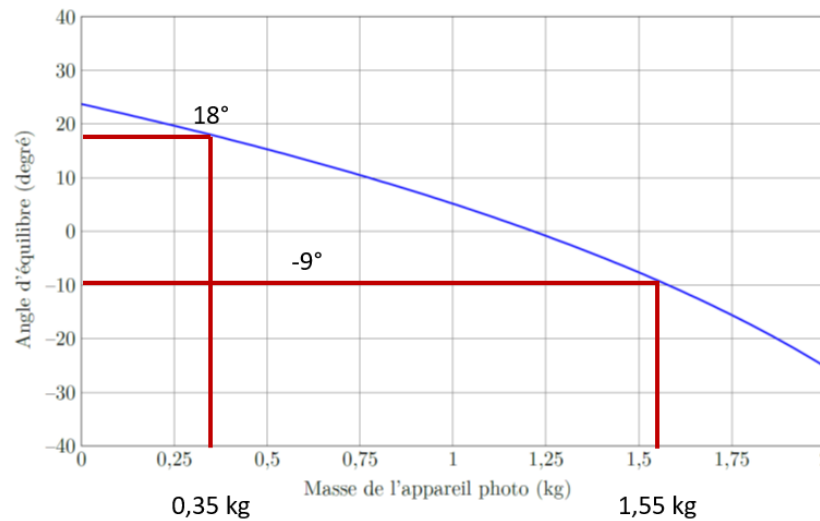
On a donc  $-m_{34}g \cos \alpha - F_r \sin(\alpha - \beta) = 0$  et  $F_r = -m_{34}g \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$ .

**Question 10** Écrire en Python une fonction, `fonction_equilibre(m4, alpha)`, qui renvoie zéro lorsque, pour une valeur de masse  $m_4$  de l'appareil photo donnée, la valeur de l'angle  $\alpha$  vaut l'angle d'équilibre recherché.

```
def fonction_equilibre(m4,alpha):
# On donne alpha en radians
# beta(alpha) retourne un angle en radians
    def fonction_equilibre(m4, alpha):
        return(effort_ressort(alpha)+(m3+m4)*g*(np.cos(alpha)/np.sin(alpha-beta(alpha))))
```

Cette fonction renvoie 0 si `alpha` est bien la position d'équilibre.

**Question 11** En donnant les valeurs des angles d'équilibre pour les deux valeurs extrêmes de masse, vérifier le respect de l'exigence 1.1.1. relative à la plage de fonctionnement.



On peut lire en **Figure 5** que pour une masse d'appareil comprise entre 0,35 et 1,55 kg, l'angle d'équilibre varie de 18 à  $-9^\circ$ . Cet intervalle est compris dans l'intervalle  $[-35^\circ, 45^\circ]$ . L'exigence 1.1.1 est donc satisfaite.

## 2.2 Vérification de l'exigence relative au mouvement de l'appareil photo autour des positions d'équilibre possibles

**Question 12** En étudiant le comportement du système autour des deux positions d'équilibre extrêmes, vérifier le respect de l'exigence 1.1.2. de l'appareil photo autour des positions d'équilibre possibles. Conclure sur le respect de l'exigence 1.1.

On reprend la composante verticale du vecteur  $\vec{OG}$  de la **Question 3** et on regarde ses valeurs extrêmes :

- pour  $\alpha = -9^\circ$  :  $\vec{OG} \cdot \vec{z}_0 = 200 + 52 \cdot \sin(-9) = 191,87 \text{ mm}$  ;
- pour  $\alpha = 18^\circ$  :  $\vec{OG} \cdot \vec{z}_0 = 200 + 52 \cdot \sin(18) = 216,06 \text{ mm}$  ;
- pour  $\alpha = -35^\circ$  :  $\vec{OG} \cdot \vec{z}_0 = 200 + 52 \cdot \sin(-35) = 170,17 \text{ mm}$  ;
- pour  $\alpha = 45^\circ$  :  $\vec{OG} \cdot \vec{z}_0 = 200 + 52 \cdot \sin(45) = 236,77 \text{ mm}$ .

L'amplitude minimale autour de la position d'équilibre  $\alpha = -9^\circ$  est alors  $191,87 - 170,17 = 21,7 \text{ mm}$ , tandis qu'autour de la position d'équilibre  $\alpha = 18^\circ$  l'amplitude minimale est  $236,77 - 216,06 = 20,71 \text{ mm}$ . Ces deux amplitudes sont bien supérieures à 20 mm, ce qui satisfait l'exigence 1.1.2.

D'après la question précédente l'exigence 1.1.1 est satisfaite, donc l'exigence 1.1 est complètement respectée.

## 3 Détermination de la loi de mouvement du système perturbé

### - Objectif -

Élaborer le modèle dynamique et déterminer la loi de mouvement du système perturbé afin de mettre en évidence la nécessité d'ajouter une commande active au système pour assurer le respect de l'exigence 1.2. relative à la position en mouvement du cahier des charges.

### 3.1 Détermination de la loi de mouvement

**Question 13** En isolant l'ensemble constitué de la nacelle gyrostabilisée (3) et de l'appareil photo (4) (formant un seul solide) et en traduisant une équation scalaire issue du principe fondamental de la dynamique, donner l'équation différentielle traduisant la loi de mouvement du système. Écrire l'équation différentielle sous la forme

$$\ddot{\alpha} = C_1 \ddot{z}_{\text{pert}} \cos \alpha + C_2 \cos \alpha + C_3 F_r \sin(\beta - \alpha)$$

en précisant l'expression des trois constantes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  en fonction de  $m_{34}$ ,  $L$  et  $g$ .

En reprenant le raisonnement de la partie précédente, on isole  $\{(3)+(4)\}$  et on applique le TRD en projection sur  $\vec{z}_2$ .

$$\text{Calculons } \overrightarrow{R_{d\,3/0}} = m_{34} \overrightarrow{\Gamma_{3/0}}(G) = m_{34} \left[ \frac{d\overrightarrow{V_{3/0}}(G)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } \overrightarrow{V_{3/0}}(G) &= \left[ \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d(y_A \vec{y}_0 + z_{\text{pert}} \vec{z}_0 + L \vec{y}_2 + y_G \vec{y}_0 + z_G \vec{z}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \left[ \frac{d(z_{\text{pert}} \vec{z}_0 + L \vec{y}_2)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{z}_{\text{pert}} \vec{z}_0 + L \dot{\alpha} \vec{z}_2. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \overrightarrow{\Gamma_{3/0}}(G) = \ddot{z}_{\text{pert}} \vec{z}_0 + L \ddot{\alpha} \vec{z}_2 - L \dot{\alpha}^2 \vec{y}_2.$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{R_{d\,3/0}} \cdot \vec{z}_2 = m_{34} \ddot{z}_{\text{pert}} \cos \alpha + L m_{34} \ddot{\alpha}.$$

$$\text{Le TRD en projection sur } \vec{z}_2 \text{ donne alors } m_{34} \ddot{z}_{\text{pert}} \cos \alpha + L m_{34} \ddot{\alpha} = -m_{34} g \cos \alpha - F_r \sin(\alpha - \beta).$$

Soit

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{L} \cos \alpha + \frac{F_r}{L m_{34}} \sin(\beta - \alpha) - \frac{1}{L} \ddot{z}_{\text{pert}} \cos \alpha$$

$$\text{En identifiant, on a } C_1 = -\frac{1}{L}, C_2 = -\frac{g}{L} \text{ et } C_3 = \frac{1}{L m_{34}}.$$

**Question 14** Écrire en Python une fonction `equation_dynamique(A,t)` qui renvoie le vecteur dérivé  $\dot{A}(t)$  en fonction du vecteur  $A$  et la date  $t$  correspondante.

$$\text{On a } z_{\text{pert}}(t) = Z_0 \sin(\omega t); \text{ donc } \dot{z}_{\text{pert}}(t) = Z_0 \omega \cos(\omega t) \text{ et } \ddot{z}_{\text{pert}}(t) = -Z_0 \omega^2 \sin(\omega t)$$

```
def equation_dynamique(A,t):
    Ap = A[1]
    Zp = -Z0*w*w*np.sin(w*t)
    Fr = effort_ressort(A[0])
    beta = beta(alpha)
    App = C1*Zp+C2*np.cos(A[0])+C3*Fr*np.sin(beta-A[0])
    return np.array([Ap,App])
```

**Question 15** Écrire l'instruction Python permettant de définir la condition initiale  $A_0$ .

Le système est mis en oscillation librement à partir de l'instant initial. On a donc :

$$A_0 = \text{np.array}([\text{angle\_equilibre}(m_4), 0])$$

### 3.2 Validation expérimentale du modèle dynamique

**Question 16** Comparer les performances mesurées et simulées (figure 6). Peut-on valider le modèle dynamique pour la vérification de l'exigence 1.2. relative à la position de l'appareil photo en mouvement ? Quel phénomène physique pourrait-on prendre en compte pour améliorer le modèle ?

Pour des perturbations de fréquence de 1 Hz ou de 2 Hz, la fréquence et les amplitudes des signaux des réponses expérimentales et numériques sont du même ordre de grandeur. (Seule la distorsion du signal est différentes sur les 4 secondes évaluées.)

Au vu des similarités entre les signaux, le modèle dynamique doit donc pouvoir permettre de valider l'exigence 1.2 (Maîtriser la position de l'appareil photo lorsque l'utilisateur marche ou court).

Si vraiment on souhaite améliorer le modèle peut être serait-il possible d'intégrer le frottement éventuel dans les liaisons (qui contribuerait à l'amortissement du système) ou d'intégrer les masses de d'autres pièces.

### 3.3 Conclusion

**Question 17** Conclure sur la satisfaction de l'exigence 1.2. relative à la position de l'appareil photo en mouvement à l'aide des résultats de simulation (figure 7).

D'après l'exigence 1.2.1.1, le système doit pouvoir « Filtrer les signaux de fréquence comprise entre 1,5 Hz et 2,8 Hz avec une atténuation supérieure à 16 dB et conserver les signaux de fréquence inférieure à 0,1 Hz avec une atténuation inférieure à 3 dB. »

- Pour une fréquence de 0,1 Hz, le déplacement vertical mesuré est de 24 mm soit une atténuation de  $20 \log \left( \frac{24}{25} \right) = -0,35 \text{ dB}$ . L'atténuation est donc inférieure à 3 dB. L'exigence est validée.
- Pour une fréquence de 1,5 Hz, le déplacement vertical mesuré est de 30 mm soit une atténuation de  $20 \log \left( \frac{30}{25} \right) = 1,58 \text{ dB}$ . Le signal est amplifié au lieu d'être atténué. L'exigence n'est pas validée.
- Pour une fréquence de 2,8 Hz, le déplacement vertical mesuré est de 60 mm. Le signal est amplifié au lieu d'être atténué. L'exigence n'est pas validée.

L'exigence 1.2 n'est donc pas satisfaite.

## 4 Étude d'avant-projet d'une solution technique avec une commande active

### - Objectif

Modéliser la commande et déterminer le réglage du correcteur. Spécifier la motorisation.

**Question 18** En retenant le schéma simplifié (figure 8) et en modélisant par un glisseur dont la résultante est notée  $\vec{F}_{2 \rightarrow 3} = F_y \vec{y}_0 + F_z \vec{z}_0$  l'action mécanique exercée au point B par le bras (2) sur la nacelle gyrostabilisée (3), exprimer  $C_s$  en fonction de  $F_z$ ,  $F_y$ ,  $\alpha(t)$  et  $L$ . En négligeant  $F_y$  devant  $F_z$  ( $F_y \approx 0$ ) donner alors la relation entre  $C_m$ ,  $F_z$ ,  $\alpha(t)$ ,  $L$  et  $N$ .

On isole le bras (2), il est soumis à :

- l'action de (3) sur (2) au point B :  $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{3 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 3} = -F_y \vec{y}_0 - F_z \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B$  ;
- l'action du couple en sortie de réducteur au point A :  $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_s \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_A$  ;



- l'ensemble des actions mécaniques transmissibles par la liaison pivot en A.

Pour éviter les inconnues de liaison en A, on applique le théorème du moment statique en A projeté selon  $\vec{x}_0$  :

$$C_s + (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_{3 \rightarrow 2}) \cdot \vec{x}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_s + L \cdot F_y \sin(\alpha) - L \cdot F_z \cos \alpha = 0$$

Le rendement de la chaîne de motorisation étant parfait on a  $C_m = \frac{1}{N} C_s$  donc en supposant  $F_y \approx 0$  on obtient finalement :

$$C_m = \frac{L}{N} F_z \cos(\alpha(t))$$

#### 4.1 Choix et réglage du correcteur

**Question 19** Montrer qu'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$  ne permet pas d'assurer la stabilité du système en boucle fermée.

La fonction de transfert en poursuite s'écrit  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta Z^*(p)} = \frac{\frac{KN}{Lm_{34}p^2}}{1 + \frac{KN}{Lm_{34}p^2}} = \frac{KN}{Lm_{34}p^2 + KN} = \frac{1}{\frac{Lm_{34}}{KN}p^2 + 1}$ .

Plusieurs arguments permettent de répondre à la question :

- il s'agit d'un système d'ordre 2 avec un coefficient d'amortissement nul ; donc il s'agit d'un oscillateur harmonique non amorti. La réponse du système à un échelon est donc un sinus, ce qui n'est pas stable ;
- ce système à un pôle double à partie réelle nulle. Il est instable.

Remarque : les fonctions de transfert en régulation ont le même dénominateur que la fonction de transfert en poursuite, l'étude de la stabilité est donc la même.

**Question 20** En déduire les expressions respectives de l'argument et du module de la fonction de transfert du correcteur pour  $\omega = \omega_{c,0dB}$  notées respectivement  $\arg(C(j\omega_{c,0dB}))$  et  $|C(j\omega_{c,0dB})|$  afin de vérifier l'exigence 2.3.1 relative à la stabilité de la commande active en fonction de  $\omega_{c,0dB}$ ,  $m_{34}$ ,  $L$ ,  $N$ ,  $\Delta\varphi$ ,  $m_{34}$ ,  $L$ ,  $N$  et  $\Delta\varphi$ .

On note  $F_{nc}$  la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée. On a  $F_{nc}(p) = \frac{N}{Lm_{34}p^2}$ .

Comme on veut que le gain en boucle ouverte soit nul, on doit avoir  $\left| C(j\omega) \times \frac{N}{L \cdot m_{34}(j\omega)^2} \right| = 1$  donc

$$|C(j\omega_{c,0dB})| = \frac{L \cdot m_{34}\omega_{c,0dB}^2}{N}.$$

La phase de la boucle ouverte non corrigée  $F_{nc}$  est de  $-180^\circ$  pour tout  $\omega$ .

Le cahier des charges demande une marge de phase de  $45^\circ$ . Il faut donc que  $\arg(C(j\omega_{c,0dB})) + \arg(F_{nc}) = -180^\circ + \Delta\varphi$ , soit  $\arg(C(j\omega_{c,0dB})) = \Delta\varphi$ .

**Question 21** Déterminer l'expression littérale du paramètre  $T$  du correcteur. Effectuer l'application numérique.

$$\arg(C(j\omega)) = \arg\left(\frac{K}{2T}\right) + 2\arg(1 + Tj\omega) - \arg(j\omega) = 0 + 2\arctan(T\omega) - \frac{\pi}{2}.$$
 En conséquence :

$$\arg(C(j\omega_{c,0dB})) = 2\arctan(T\omega_{c,0dB}) - \frac{\pi}{2}.$$



Grâce à la question précédente on en déduit la relation suivante : 
$$T = \tan \left( \frac{\Delta\varphi + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \frac{1}{\omega_{c,0\text{dB}}}.$$

D'après le cahier des charges, on souhaite que  $T_{m,\text{BF}} \leq 0,1\text{s}$ . De plus,  $T_{m,\text{BF}} \cdot \omega_{c,0\text{dB}} \approx 3$ ; on veut donc nécessairement que  $\omega_{c,0\text{dB}} \approx 30\text{rad.s}^{-1}$ .

Application numérique :  $T \simeq 0,08\text{s}$ .

**Question 22** Déterminer l'expression littérale du paramètre  $K$  du correcteur. Effectuer l'application numérique avec  $m_{34} = 2,8\text{ kg}$ ,  $L = 52\text{ mm}$  et  $N = 100$ .

$$|C(j\omega)| = \frac{K}{2T} \cdot \frac{1 + T^2\omega^2}{\omega}. \text{ En conséquence : } |C(j\omega_{c,0\text{dB}})| = \frac{K}{2T} \cdot \frac{1 + T^2\omega_{c,0\text{dB}}^2}{\omega_{c,0\text{dB}}}$$

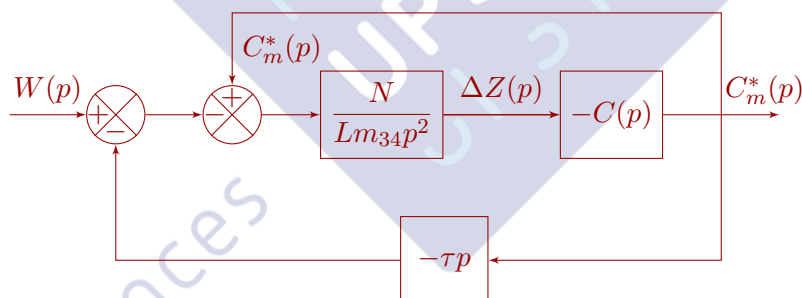
On souhaite d'après la question 21 que  $|C(j\omega_{c,0\text{dB}})| = \frac{L \cdot m_{34}\omega_{c,0\text{dB}}^2}{N}$  donc 
$$K = \frac{2TLm_{34}\omega_{c,0\text{dB}}^3}{N(1 + T^2\omega_{c,0\text{dB}}^2)}.$$

Application numérique :  $K \simeq 0,93$ .

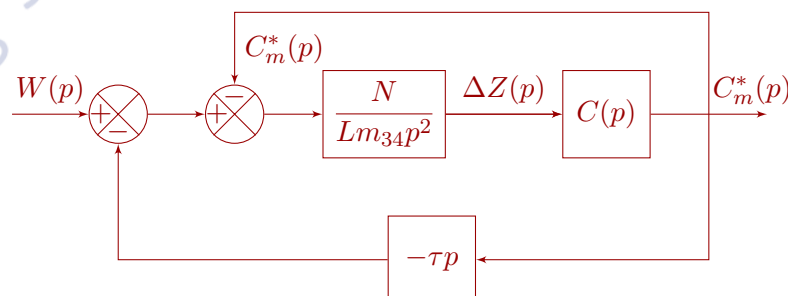
## 4.2 Spécification de l'actionneur

**Question 23** Donner l'expression de la fonction de transfert  $H(p)$  présente dans la forme simplifiée du schéma-blocs (figure 13) en fonction de  $N$ ,  $L$ ,  $m_{34}$  et  $C(p)$ .

Avec l'entrée  $\Delta Z^*(p) = 0$  on peut réorganiser le schéma-bloc de la figure 12 du sujet pour le mettre sous la forme :



On exploite le signe "-" devant  $C(p)$  pour modifier les signes dans le comparateur de droite :



Par formule de Black on déduit 
$$H(p) = \frac{N \cdot C(p)}{L \cdot m_{34}p^2 + N \cdot C(p)}$$

**Question 24** Compléter ces diagrammes sur le document réponse en représentant les diagrammes de Bode de la fonction  $-\tau p$  puis tracer la fonction de transfert en boucle ouverte du système représenté en figure 13.

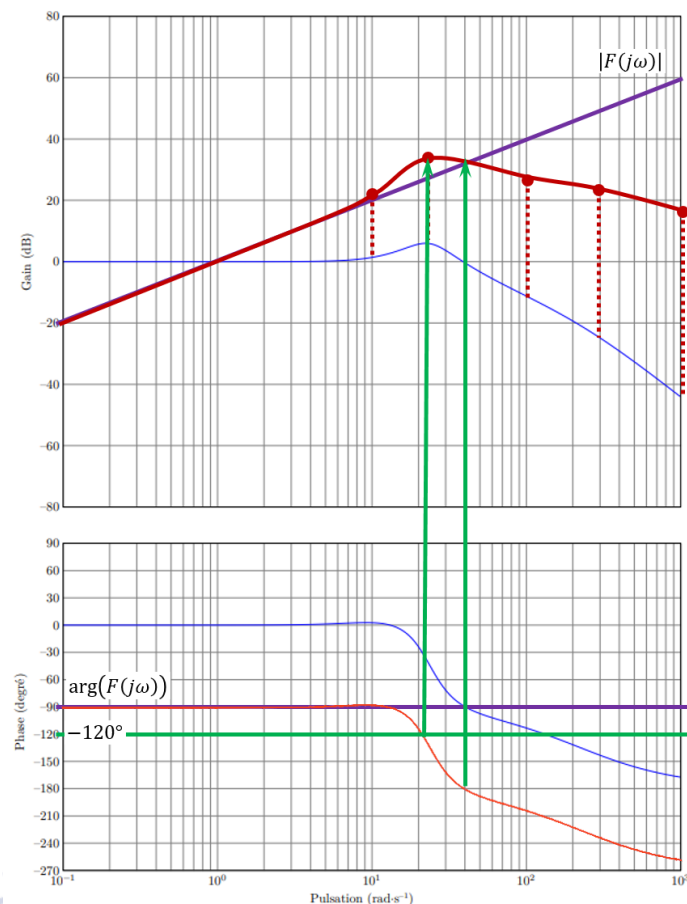
Pour les tracés, prendre  $\tau = 1$  s et faire apparaître clairement les points de construction pour les pulsations  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$ .

On pose  $F(p) = -\tau p$ .

D'une part,  $\arg(F(j\omega)) = \arg(-\tau j\omega) = -\frac{\pi}{2}$ .

D'autre part,  $|F(j\omega)| = 20 \log(\tau\omega)$ .

Pour les pulsations  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$ , le gain vaut donc 0 dB, 20 dB et 40 dB (voir image ci-dessous).



**Question 25** En exploitant le document réponse :

- déterminer la valeur de  $\tau$  qui assure la stabilité ;
- déterminer la valeur de  $\tau$  qui assure un amortissement correct en considérant qu'il est obtenu lorsque la marge de phase est d'au moins  $60^\circ$  ;
- conclure sur une valeur de  $\tau$  maximale admissible à spécifier pour le choix du motoréducteur.

On répond aux différents points dans l'ordre :

- Par critère du revers, le système est stable si :
  - ◊ le gain en dB est négatif pour une phase de  $-180^\circ$ , il faut d'après le diagramme de Bode baisser le gain de 32 dB au minimum, soit  $\tau \leq 10^{-\frac{32}{20}} = 25 \text{ ms}$  ;
  - ◊ la phase est supérieure à  $-180^\circ$  lorsque le gain est nul, c'est le cas quel que soit  $\tau$  ;
- pour avoir une marge de gain de  $60^\circ$ , soit obtenir une phase de  $-120^\circ$ , il faut baisser le gain d'au moins 35 dB. On veut donc  $\tau \leq 10^{-\frac{35}{20}} = 18 \text{ ms}$  ;
- Par conséquent la valeur maximale de  $\tau$  admissible est 18 ms pour répondre au cahier des charges.

### 4.3 Conclusion

**Question 26** Conclure sur la capacité du système à satisfaire les exigences du cahier des charges (figure B).

- Quelle que soit la masse de l'appareil, le premier maximum est atteint pour un temps compris entre 0,05 s et 1 s. L'exigence 2.1 est donc satisfaite.
- Quelle que soit la masse de l'appareil, l'erreur de position de l'appareil photo est nulle en régime permanent. L'exigence 2.2 est donc satisfaite.

Le système satisfait donc les exigences du cahier des charges.

## 5 Synthèse

### - Objectif

Analyser et comparer les deux solutions technologiques étudiées précédemment pour concevoir le stabilisateur.

**Question 27** En étudiant les réponses harmoniques (figure 15), analyser la pertinence de chacune des deux solutions technologiques étudiées à satisfaire l'exigence 1.2.1.

Entre 1,5 Hz et 2,8 Hz, c'est à dire entre  $10 \text{ rad s}^{-1}$  et  $20 \text{ rad s}^{-1}$  l'atténuation doit être supérieure à 16 dB. Seul le dispositif actif permet de respecter cette exigence.

Le dispositif passif atténue la perturbation à partir de  $40 \text{ rad s}^{-1}$  soient 6 pas par seconde, ce qui constitue un rythme de marche élevée.

En conclusion, il semble que le dispositif passif aura des difficultés à stabiliser l'appareil si le preneur de vu marche. En revanche, si les perturbations ont une fréquence plus haute (par exemple si le preneur de vu est sur ou dans un véhicule) le dispositif passif permettra de rejeter les perturbations.

**Question 28** En considérant des critères de respect des performances attendues, d'encombrement, de masse, de coût et de consommation d'énergie, établir un tableau comparatif et argumenter un choix entre les deux solutions.

	Filtrage actif	Filtrage passif	Remarques
Performances CDC	☺	☹	
Encombrement	☹	☺	La motorisation ajoute des composants qui peuvent nuire à l'encombrement.
Masse	☹	☺	La motorisation ajoute des composants qui vont augmenter la masse.
Coût	☹	☺	La motorisation ajoute des composants qui vont augmenter le coût.
Consommation d'énergie	☹	☺	La motorisation consommera davantage d'énergie qu'un système entièrement passif sans actionneur supplémentaire.

Si l'utilisateur est très exigeant sur les performances attendues du produit, il devra opter pour un filtrage actif.