1 Le moteur à courant continu

Soient les équations différentielles du moteur à courant continu suivantes :

$$u(t) = R.i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (1)$$
$$e(t) = K_e \cdot \omega(t) \quad (2)$$
$$C_m(t) = K_c \cdot i(t) \quad (3)$$
$$C_m(t) = J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (4)$$

Avec :

- R en $\Omega \equiv V \cdot A^{-1}$,
- L en $H \equiv V \cdot A^{-1} \cdot s$,
- K_e en $V \cdot rad^{-1} \cdot s$,
- K_c en $N \cdot m \cdot A^{-1}$,
- J en $kg \cdot m^2$,

Question 1 : Écrire ces équations dans le domaine de Laplace.

Question 2 : Écrire une équation liant $\Omega(p)$ et $U(p)$ avec les constantes des équations précédentes.

Question 3 : Écrire la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$ sous la forme canonique, donner son ordre et sa classe.

On donne les formes classiques des fonctions de transfert du premier et du second ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \text{ et } H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0}}$$

Question 4 : Déterminer (K,τ) ou (K,ξ,ω_0) en fonction du modèle qui paraît le plus adapté et des constantes du système d'équation.

Question 5 : Déterminer et justifier les unités de ces valeurs caractéristiques à partir de celles des constantes du système d'équation.

FIN

Question 1 :

$$U(p) = R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) + E(p) \quad (5)$$
$$E(p) = K_e \cdot \Omega(p) \quad (6)$$
$$C_m(p) = K_c \cdot I(p) \quad (7)$$
$$C_m(p) = J \cdot p \cdot \Omega(p) \quad (8)$$

Question 2 :

$U(p) = (R + L \cdot p) \cdot \dfrac{J \cdot p \cdot \Omega(p)}{K_c} + K_e \cdot \Omega(p)$

$U(p) = \left((R + L \cdot p) \cdot \dfrac{J \cdot p}{K_c} + K_e \right) \cdot \Omega(p)$

Question 3 :

$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \dfrac{1}{(R + L \cdot p) \cdot \dfrac{J \cdot p}{K_c} + K_e} = \dfrac{\dfrac{1}{K_e}}{1 + \dfrac{R \cdot J}{K_e \cdot K_c} \cdot p + \dfrac{L \cdot J}{K_e \cdot K_c} \cdot p^2}$. Fonction d'ordre 2 et de classe 0.

Question 4 :

$K = \frac{1}{K_e}$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_e \cdot K_c}{L \cdot J}}$

$\xi = \sqrt{\dfrac{K_e \cdot K_c}{L \cdot J}} \cdot \dfrac{R \cdot J}{2 \cdot K_e \cdot K_c} = \dfrac{R \cdot \sqrt{J}}{2\sqrt{K_e \cdot K_c \cdot L}}$

Question 5 :

$[K] = rad \cdot s^{-1} \cdot V^{-1}$

$[\omega_0] = \sqrt{\dfrac{V \cdot rad^{-1} \cdot s \cdot N \cdot m \cdot A^{-1}}{V \cdot A^{-1} \cdot s \cdot kg \cdot m^2}} = \sqrt{\dfrac{V \cdot rad^{-1} \cdot s \cdot kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m \cdot A^{-1}}{V \cdot A^{-1} \cdot s \cdot kg \cdot m^2}} = s^{-1}$

$[\xi] = \dfrac{V \cdot A^{-1} \cdot \sqrt{kg \cdot m^2}}{\sqrt{V \cdot rad^{-1} \cdot s \cdot N \cdot m \cdot A^{-1} \cdot V \cdot A^{-1} \cdot s}} = \dfrac{V \cdot A^{-1} \cdot \sqrt{kg \cdot m^2}}{\sqrt{V \cdot rad^{-1} \cdot s \cdot kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m \cdot A^{-1} \cdot V \cdot A^{-1} \cdot s}} = 1$