# Présentation des SLCI

Renaud Costadoat
Lycée Dorian



## Les S.L.C.I

*Savoir*

Vous êtes capables :

- De décrire un système à l'aide des chaînes d'énergie et d'information,
- De décrire structurellement un système.

*Problematique*

Vous devez être capables

- De modéliser un S.L.C.I.

## Systèmes statiques

Un système est **statique** ou instantané si les grandeurs de sortie dépendent uniquement des grandeurs d'entrée au même instant $t$. La réponse du système est instantanée, elle n'est pas différée dans le temps.


- A tout instant $t$, la relation entre les entrées et les sorties s'écrit : $\forall t, S(t) = f(E(t))$ où $f$ est une fonction de $t$.
- $E(t)$ désigne les grandeurs d'entrée et $S(t)$ les grandeurs de sortie. Il faut alors définir une fonction $f$ qu'il est possible d'expliciter.

*Remarque*

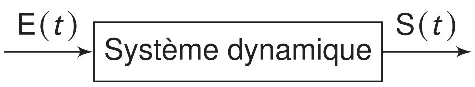
Il existe peu de systèmes réellement statiques. Tout système possède en réalité une certaine inertie (une sorte de retard). Ce type de système est donc une approximation du comportement réel du système qui est formulée au moment de la modélisation à des fins de simplification.





## Systèmes dynamiques et continus

Un système est **dynamique** si les grandeurs de sortie dépendent des grandeurs d'entrée à un même instant $t$ mais également de celles aux instants passés.




- A tout instant $t$, la relation entre les entrées et les sorties s'écrit : $\forall t, S(t) = f(E(t))$ où $f$ est une fonction de $t$.
- $E(t)$ désigne les grandeurs d'entrée et $S(t)$ les grandeurs de sortie. Il faut alors définir une fonction $f$ qu'il est **impossible** d'expliciter.

Un système est **continu** si les grandeurs de sortie et d'entrée sont des fonctions continues du temps. Ces systèmes sont également appelés systèmes analogiques par opposition aux systèmes discrets (numériques ou logiques).

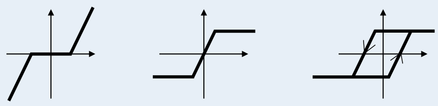
## Systèmes linéaires

Un système est linéaire s'il obéit au principe de superposition défini par les propriétés d'additivité (les causes ajoutent leurs effets) et d'homogénéité (il y a proportionnalité de l'effet à la cause).

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{\text{Système linéaire}} \xrightarrow{y(t)}$$

- Additivité: si $x_1(t)$ a pour sortie $y_1(t)$ et $x_2(t)$ a pour sortie $y_2(t)$ alors $x_1(t)+x_2(t)$ a pour sortie $y_1(t)+y_2(t)$.
- Homogénéité: si $x_1(t)$ a pour sortie $y_1(t)$ alors $k.x_1(t)$ a pour sortie $k.y_1(t)$.
- Le principe de superposition peut donc s'écrire : si $x_1(t)$ a pour sortie $y_1(t)$ et $x_2(t)$ pour sortie $y_2(t)$ alors $k_1.x_1(t)+k_2.x_2(t)$ a pour sortie $k_1.y_1(t)+k_2.y_2(t)$.

*Remarque*

- Non linéarités (seuil, saturation, hystérésis): 
- Il est possible de procéder à une linéarisation autour d'un point donné (étude locale), cela n'est valable que pour des durées faibles.





## Systèmes invariants

Un système est invariant si la relation entre l'entrée et la sortie est indépendante du temps.

$$\xrightarrow{\mathrm{E}(t)} \boxed{\text{Système invariant}} \xrightarrow{\mathrm{S}(t)}$$

- A tout instant $t$, la relation entre les entrées et les sorties s'écrit : $\forall t, \mathrm{S}(t) = f(\mathrm{E}(t))$ où $f$ est une fonction indépendante de $t$.

*Remarque*

- Si $x(t)$ a pour réponse $y(t)$, alors $x(t+\mathrm{D}t)$ pour réponse $y(t+\mathrm{D}t)$,
- Les paramètres du système sont indépendants du temps.

*Definition*

**Systèmes dynamiques Continus Linéaires Invariants ou SCLI** : Un Système dynamique est Linéaire Continu et Invariant s'il vérifie simultanément ces propriétés. On utilise, en général, l'abréviation **S.L.C.I.**. Dans la suite, nous n'étudierons que ce type de système.

## Systèmes Linéaires Continus et Invariants

Un Système Linéaire Continu et Invariant (S.C.L.I.) peut être représentée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.


- A tout instant t, la relation entre l'entrée $E(t)$ et la sortie $S(t)$ s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{m} a_i.e^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{n} b_j.s^{(j)}(t)$$

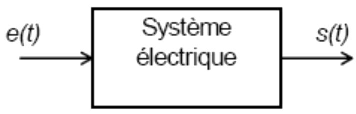
avec $n \geq m$ dans les systèmes physiques.

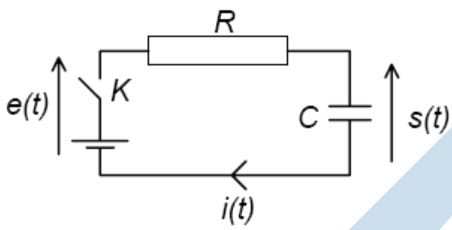
- $e^{(i)}$ est la dérivée i$^{\text{ème}}$ de la fonction $e$ par rapport à une variable réelle temps $t$,
- $a_i$ est le coefficient de rang $i$ constant indépendant du temps,
- $s^{(j)}$ est la dérivée j$^{\text{ème}}$ de la fonction $s$ par rapport à une variable réelle temps $t$,
- $b_j$ est le coefficient de rang $j$ constant indépendant du temps.



Définitions Modélisation de SLCI Transformations de Laplace Réponses temporelles

## Exemple électrique




- A t=0, le contact K se ferme, et le condensateur se charge. Pour prévoir le comportement de ce système, il faut établir une équation différentielle qui traduit son comportement.

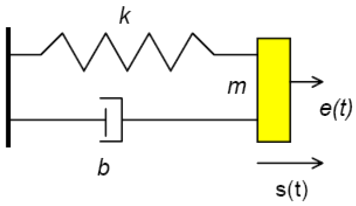
..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

## Exemple mécanique

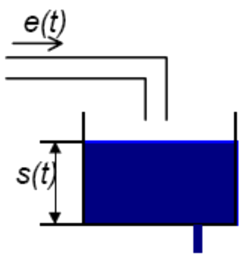



- Soit le système mécanique composé d'une masse en mouvement $m$, attachée à un bâti par ressort de raideur $k$ et un amortisseur de coefficient de viscosité $b$,
- A un instant $t = 0$, un effort extérieur horizontal noté $e(t)$ est appliqué instantanément. Pour prévoir le comportement de ce système, il faut établir une équation différentielle qui traduit son comportement.
- On désigne par $s(t)$ l'écart de position par rapport à la position d'équilibre.





## Exemple hydraulique




- Soit le système hydraulique composé d'un réservoir de section S. On note $s(t)$ la hauteur de liquide dans le réservoir. Elle est alimentée par un conduit dont le débit volumique instantané est noté $e(t)$. Le débit volumique instantané de fuite du réservoir est noté $q(t)$.
- A un instant $t = 0$, le débit instantané prend un valeur finie non nulle $e(t)$.

## Transformations de Laplace

Soit $f(t)$ une fonction de la variable réelle $t$ définie sur $\mathbb{R}$ et supposée nulle pour tout $t < 0$ (« fonction causale »). La **transformée de Laplace** de la fonction $f(t)$ est la fonction complexe $\mathrm{F}(p)$ de la variable complexe $p$, définie par l'intégrale, (si elle converge...):

$$\mathrm{F}(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}.dt$$

*Remarque*

- Notation: $\mathrm{F}(p) = \mathrm{L}[f(t)]$,
- Pour $t < 0$ la fonction $f(t)$ est nulle, les valeurs prises par $f(t)$ pour $t < 0$ n'interviennent pas,
- Pour cela, multiplier la fonction $f(t)$ quelconque par la fonction « échelon »notée $u(t)$,
  - $u(t) = 0$ pour $t < 0$,
  - $u(t) = 1$ pour $t > 0$.
- Si $f(t) = cos(wt)$, calculer la transformée de Laplace de $cos(wt).u(t)$.



Définitions Modélisation de SLCI Transformations de Laplace Réponses temporelles

## Propriétés de la transformation de Laplace

**Unicité**

A $f(t)$ correspond une et une seule fonction $\mathrm{F}(p)$ et inversement.

**Linéarité (ou superposition)**

$$\mathrm{L}[a.f(t)+b.g(t)] = a.\mathrm{L}[f(t)]+b.\mathrm{L}[g(t)].$$

**Théorème de la dérivée première**

$\mathrm{L}[f'(t)] = p.\mathrm{F}(p) - f(0+)$, $f(0+)$ représente la valeur à l'origine de la fonction $f$ (C.I.).

**Théorème de la dérivée seconde**

$$\mathrm{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2.\mathrm{F}(p) - p.f(0+) - f'(0+).$$

**Théorème de l'intégrale première**

$$\mathrm{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{p}.\mathrm{F}(p).$$

## Propriétés de la transformation de Laplace

**Théorème du retard**

$\mathrm{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau . p} . \mathrm{F}(p)$

**Théorème de la valeur initiale**

$\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{p \to +\infty} p . \mathrm{F}(p)$ [1].

**Théorème de la valeur finale**

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0} p . \mathrm{F}(p)$ [1].

[1] Ces résultats n'ont de sens que si les limites existent, elles sont liées à des conditions sur la fonction $\mathrm{F}(p)$.



Définitions | Modélisation de SLCI | Transformations de Laplace | Réponses temporelles

## Exemples de transformées

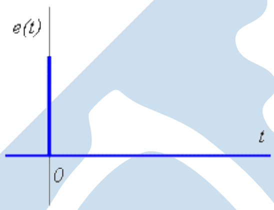
**Fonction impulsion, ou « pic de DIRAC »**

$e(t) > 0$ pour $t = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e(t).dt = 1$

Transformation de Laplace :

En remarquant que $e^{-pt}.\delta(t) = 0$ pour $t \in [\epsilon, +\infty]$ et $e^{-pt}.\delta(t) = \delta(t)$ pour $t \in [0, +\epsilon]$.

$$\mathrm{L}[\delta(t)] = 1$$



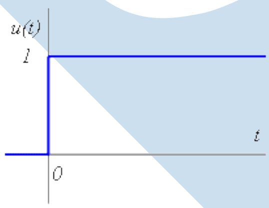

**Fonction échelon**

La fonction échelon est définie par : $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$, $u(t) = 0$ pour $t < 0$.

Transformation de Laplace :

$\mathrm{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} 1.e^{-pt}.dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{p}.e^{-p.\infty} + \frac{1}{p}$

$$\mathrm{L}[u(t)] = \frac{1}{p}$$



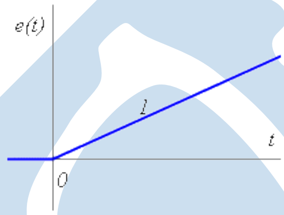
## Exemples de transformées

**Fonction rampe** Définie par $f(t) = t.u(t)$, $\mathrm{L}[t.u(t)] = \int_0^{+\infty} t.e^{-pt}.dt$

Transformation de Laplace (Intégration par parties):

$$\mathrm{L}[t.u(t)] = \left[-t.\frac{1}{p}.e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{p}.e^{-pt}.dt = -\left[\frac{1}{p^2}.e^{-pt}\right]_0^{+\infty}$$

$$\mathrm{L}[t.u(t)] = \frac{1}{p^2}$$

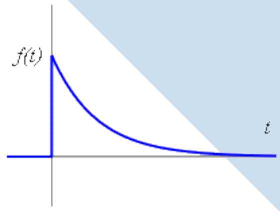



**Fonction décroissance exponentielle** $f(t) = e^{-at}.u(t)$

Transformation de Laplace :

$$\mathrm{L}[e^{-at}.u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.e^{-at}.dt = -\frac{1}{p+a}\left[-e^{-(p+a).t}\right]_0^{+\infty}$$

$$\mathrm{L}[e^{-at}.u(t)] = \frac{1}{p+a}$$






Définitions | Modélisation de SLCI | Transformations de Laplace | Réponses temporelles

## Transformée inverse de Laplace

La fonction $f(t)$ dont $\mathrm{F}(p)$ est la transformée, est appelée **fonction originale** de $\mathrm{F}(p)$.

$\mathrm{F}(p) = \mathrm{L}[f(t)] \Leftrightarrow f(t) = \mathrm{L}^{-1}[\mathrm{F}(p)]$

La résolution du problème dans le « domaine symbolique »fournit une équation en « p ». Il faut identifier cette équation à des transformées (fonctions de « p ») figurant dans le tableau, et dont on connaît donc les transformées inverses. L'équation dans le « domaine temporel »ainsi obtenue est la solution recherchée.

*Remarque*

- La transformée inverse d'une **somme** de fonctions dans le domaine de Laplace **est égale** à la somme des transformées inverses.
  $\mathrm{L}^{-1}[\mathrm{F}_1(p)+\mathrm{F}_2(p)+\ldots+\mathrm{F}_n(p)] =$
  $\mathrm{L}^{-1}[\mathrm{F}_1(p)]+\mathrm{L}^{-1}[\mathrm{F}_2(p)]+\ldots+\mathrm{L}^{-1}[\mathrm{F}_n(p)]$
- La transformée inverse d'un **produit** de fonctions dans le domaine de Laplace **n'est pas égale** au produit des transformées inverses. (Il faut utiliser une décomposition en éléments simples pour transformer le produit en somme.)
  $\cancel{\mathrm{L}^{-1}[\mathrm{F}_1(p)\times\mathrm{F}_2(p)\times\ldots\times\mathrm{F}_n(p)] = \mathrm{L}^{-1}[\mathrm{F}_1(p)]\times\mathrm{L}^{-1}[\mathrm{F}_2(p)]\times\ldots\times\mathrm{L}^{-1}[\mathrm{F}_n(p)]}$

## Résolution d'un cas simple

Soit à résoudre l'équation différentielle donnant la vitesse d'un corps en chute libre dans le vide : $\frac{dv(t)}{dt} = g$. Les conditions initiales sont nulles, c'est à dire que $V_0 = 0$.

1. Le mouvement ne débute qu'à $t = 0$ (l'attraction terrestre ne s'applique qu'a partir de $t = 0$). Ainsi $\frac{dv(t)}{dt} = g.u(t)$,
2. Passage dans le domaine de Laplace: $\mathrm{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right] = p.\mathrm{V}(p) - v(0+) = p.\mathrm{V}(p)$ et à la transformée connue de $u(t)$: $\mathrm{L}[u(t)] = \frac{1}{p}$,
3. Cela donne l'équation symbolique suivante: $p.\mathrm{V}(p) = g.\frac{1}{p}$
4. La résolution se passe dans le domaine symbolique: $\mathrm{V}(p) = g.\frac{1}{p^2}$
5. Calcul de la transformation inverse en sachant que $\frac{1}{p^2}$ est la transformée de $t.u(t)$.

$v(t) = g.t.u(t)$ est la solution de l'équation dans le domaine temporel.





## Représentation par fonction de transfert

Pour caractériser le S.C.L.I., il n'est pas nécessaire de déterminer la **Réponse** $s(t)$ du système à une **Consigne** $e(t)$. En se plaçant dans le cas particulier où les Conditions Initiales sont nulles et en appliquant la méthode de Laplace, on obtient la relation :

$$\left(t \rightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i.e^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{n} b_j.s^{(j)}(t)\right) \rightarrow \left(p \rightarrow \left(\sum_{i=0}^{m} a_i.p^i\right).\mathrm{E}(p) = \left(\sum_{j=0}^{n} b_j.p^j\right)\mathrm{S}(p)\right)$$

D'où: $\frac{\mathrm{S}(p)}{\mathrm{E}(p)} = \mathrm{H}(p) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i.p^i}{\sum_{j=0}^{n} b_j.p^j}$ qui peut s'écrire $\mathrm{S}(p) = \mathrm{H}(p).\mathrm{E}(p)$ avec des C.I. nulles.

Le rapport $\mathrm{H}(p)$ est indépendant de l'entrée de Consigne $e(t)$ et la Réponse de sortie $s(t)$. Cette fraction rationnelle est appelée la **Fonction de Transfert** du S.C.L.I.

Notation, si $z_i$ est le i$^{\text{ème}}$ zéro du numérateur de $\mathrm{H}(p)$ et $p_i$ le i$^{\text{ème}}$ pôle de $\mathrm{H}(p)$ (zéro du polynôme du dénominateur):

$$\mathrm{H}(p) = \frac{k_1.\prod_{i=1}^{m}(z_i - p)}{k_2.\prod_{j=1}^{n}(p_j - p)} = \frac{\mathrm{K}}{p^\alpha}.\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{p}{z_i}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{p}{p_j}\right)}$$

## Représentation par fonction de transfert

La forme canonique de la Fonction de Transfert $H(p)$ est l'écriture suivante de $H(p)$:

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{p}{z_i}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{p}{p_j}\right)} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N^*(p)}{D^*(p)}, \text{ avec } \frac{N^*(0)}{D^*(0)} = 1$$

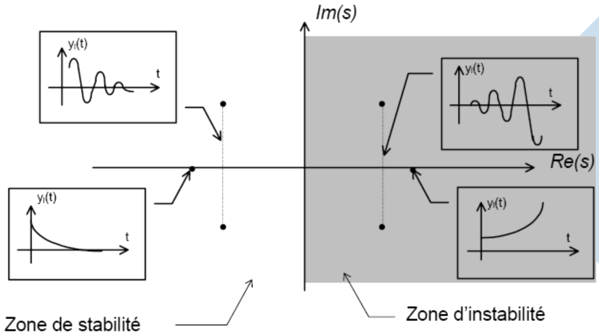
- **Classe** : La Classe de la Fonction de Transfert $H(p)$ est le nombre $\alpha$ de Pôles nuls,
- **Gain** : Le Gain de la Fonction de Transfert $H(p)$ est le coefficient K. Lorsque $\alpha = 0$, ce Gain s'appelle le Gain Statique de la Fonction de Transfert,
- **Ordre** : L'Ordre de la fonction de Transfert est le degré du dénominateur de la Fonction de Transfert,
- Le polynôme au dénominateur est aussi appelé polynôme caractéristique du système.



Définitions | Modélisation de SLCI | Transformations de Laplace | Réponses temporelles

## Pôles et stabilité d'un S.C.L.I.

Si on représente les Pôles (complexes à priori) de la fonction de transfert dans le plan représentant la Partie Imaginaire $Im(p)$ du Pôle $p$ en fonction de sa partie Réelle $Re(p)$, on peut avoir une idée de la réponse à une entrée impulsionnelle.



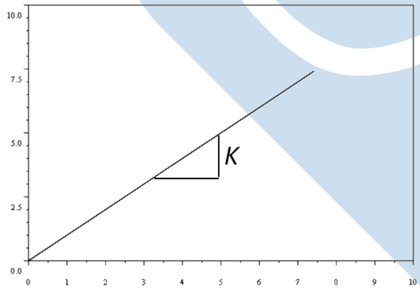

*Remarque*

- Si la partie Réelle du Pôle est **positive** le système est **instable**,
- Si la partie Réelle du Pôle est **nulle**, le système **oscille** sans s'amortir.

# Réponse temporelle d'un système intégrateur (Classe 1 et ordre 1)

- A tout instant $t$, la relation entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ s'écrit : $\dot{s}(t) = \mathrm{K}.e(t)$.
- Il se traduit par la fonction de transfert suivante : $\mathrm{H}(p) = \frac{\mathrm{K}}{p}$, avec le **gain** K en $\frac{[s(t)]}{[e(t)].s}$.
- Si on cherche la **réponse indicielle**, $e(t) = u(t)$ qui a pour transformée de Laplace : $\mathrm{E}(p) = \frac{1}{p}$

La réponse du système est (CI nulles):
$\mathrm{S}(p) = \frac{\mathrm{K}}{p}.\mathrm{E}(p) = \frac{\mathrm{K}}{p}.\frac{1}{p} = \frac{\mathrm{K}}{p^2}$ .
Cette fonction a pour Transformée Inverse :
$s(t) = \mathrm{K}.t,\ t \in [0, +\infty[$.
Réponse indicielle pour un K = 1 en $\frac{[s(t)]}{[e(t)].s}$.








# Réponse temporelle (Système du 1er ordre)

A tout instant $t$, la relation entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ s'écrit : $s(t) + \tau.\dot{s}(t) = \mathrm{K}.e(t)$.

*Résultat*

Il se traduit par la fonction de transfert suivante : $\mathrm{H}(p) = \frac{\mathrm{K}}{1+\tau.p}$.

Avec des **conditions initiales nulles**, c'est-à-dire , la réponse du système est :

$$\mathrm{S}(p) = \mathrm{H}(p).\mathrm{E}(p) = \frac{\mathrm{K}}{1+\tau.p}.\mathrm{E}(p) = \frac{\mathrm{K}}{1+\tau.p}.\frac{1}{p} = \frac{\mathrm{K}}{p(1+\tau.p)} = \mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{A}}{p} + \frac{\mathrm{B}}{1+\tau.p}\right]$$

- Si $p \longrightarrow 0 \Longrightarrow \mathrm{K} = \mathrm{K}.\left[\mathrm{A}+\mathrm{B}.0\right] \Longrightarrow \mathrm{A} = 1$,
- Si $p \longrightarrow +\infty \Longrightarrow 0 = \mathrm{K}.\left[\mathrm{A}.\tau+\mathrm{B}\right] \Longrightarrow \mathrm{B} = -\tau$.

*Résultat*

Donc: $\mathrm{S}(p) = \mathrm{K}.\left[\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau.p}\right] \longrightarrow s(t) = \mathrm{K}.\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right), t \in [0, +\infty[$

Pente à l'origine : $\frac{\mathrm{K}}{\tau}$, la tangente à l'origine est : $y = \frac{\mathrm{K}}{\tau}.t$

# Réponse temporelle (Système du 1er ordre)

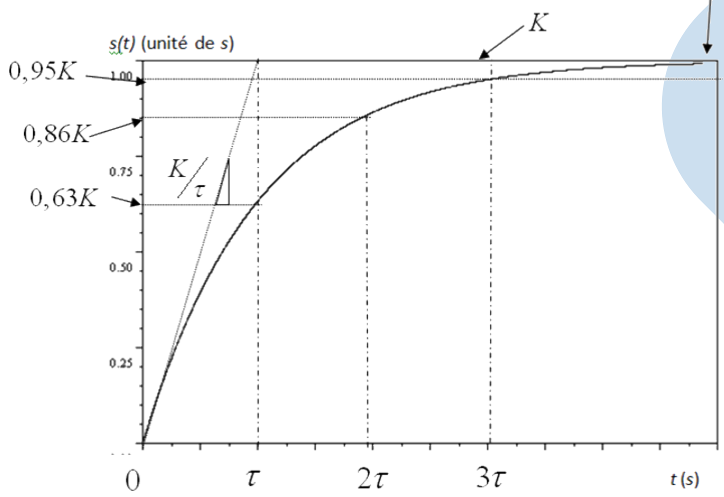
Cette réponse à des valeurs remarquables suivantes :

| t | s(t) |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $\tau$ | $0,63.K$ |
| $2\tau$ | $0,86.K$ |
| $3\tau$ | $0,95.K$ |
| $+\infty$ | $K$ |

Temps de Réponse à 5%

Condition initiale nulle.

Valeur finale




Réponse indicielle d'un système du Premier Ordre à constante de temps.





# Réponse temporelle (Système du 1er ordre)

*Propriété*

La tangente à la courbe à un instant $t_0$ donné intercepte l'asymptote à l'infini un instant $t_0 + \tau$.

L'équation de la tangente à la courbe à un instant $t_0$ est : $y = \dot{s}(t_0)(t - t_0) + s(t_0)$

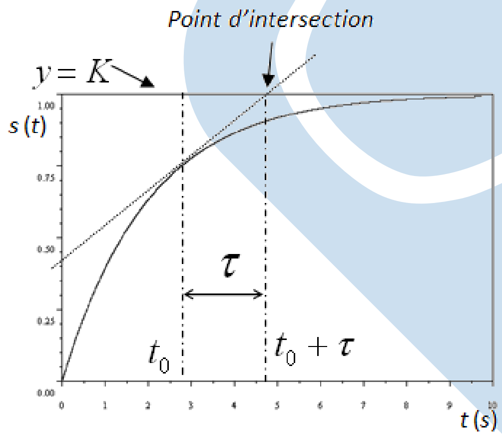
$$\Rightarrow y = \frac{K}{\tau}.e^{\frac{-t_0}{\tau}}(t - t_0) + K.\left(1 - e^{\frac{-t_0}{\tau}}\right)$$

Interception de l'asymptote à l'infini pour: $y = K$.

$$\text{Donc : } K = \frac{K}{\tau}.e^{\frac{-t_0}{\tau}}(t - t_0) + K.\left(1 - e^{\frac{-t_0}{\tau}}\right)$$

*Résultat*

Les deux droites s'interceptent au temps: $t = t_0 + \tau$



## Réponse temporelle (Système du $2^{\text{ème}}$ ordre)

A tout instant t, la relation entre $e(t)$ et $s(t)$ s'écrit :
$\omega_0^2.s(t)+2.\xi.\omega_0.\dot{s}(t)+\ddot{s}(t)=K.\omega_0^2.e(t)$

*Résultat*

Il se traduit par la fonction de transfert suivante : $H(p)=\dfrac{K}{1+\dfrac{2.\xi}{\omega_0}.p+\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2}$

Réponse (CI nulles): $S(p)=H(p).E(p)=\dfrac{K}{1+\dfrac{2.\xi}{\omega_0}.p+\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2}.\dfrac{1}{p}=\dfrac{K.\omega_0^2}{\left(p^2+2.\xi.\omega_0.p+\omega_0^2\right).p}$

*Remarque*

- **K** est le **gain statique** (en $\dfrac{[s(t)]}{[e(t)]}$),
- $\xi$ est le **facteur d'amortissement** (adimensionnel). Si $\xi$ est grand devant 1, le système est très dissipatif,
- $\omega_0$ est la **pulsation propre** (en radian par seconde $rd.s^{-1}$). Si $\omega_0$ est grand devant $1rd.s^{-1}$, le système est rapide.





## Réponse temporelle (Système du $2^{\text{ème}}$ ordre)

Il faut tout d'abord rechercher les pôles de la fonction de transfert. Pour cela, on résout l'équation caractéristique :

$$p^2+2.\xi.\omega_0.p+\omega_0^2=0\Rightarrow\Delta=(2.\xi.\omega_0)^2-4.\omega_0^2=4.\xi^2.\omega_0^2-4.\omega_0^2=4.\omega_0^2.\left(\xi^2-1\right)$$

- Cas 1: $\Delta>0\Leftrightarrow4.\omega_0^2.\left(\xi^2-1\right)>0\Leftrightarrow\xi^2>1\Leftrightarrow\xi>1$,
- Cas 2: $\Delta=0\Leftrightarrow4.\omega_0^2.\left(\xi^2-1\right)=0\Leftrightarrow\xi^2=1\Leftrightarrow\xi=1$,
- Cas 3: $\Delta<0\Leftrightarrow4.\omega_0^2.\left(\xi^2-1\right)<0\Leftrightarrow\xi^2<1\Leftrightarrow\xi<1$,

# Réponse temporelle (Système du 2$^{ème}$ ordre) $\xi > 1$

$H(p)$ admet deux pôles réels strictement négatifs $p_1$ et $p_2$ car leur somme $p_1 + p_2 = -2.\xi.\omega_0 < 0$ et leur produit $p_1.p_2 = \omega_0^2$. Il est donc inutile de les calculer:

$$p_1 = -\omega_0.\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right), \text{ si } T_1 = -\frac{1}{p_1}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{T_1} = \omega_0.\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$
$$p_2 = -\omega_0.\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right), \text{ si } T_2 = -\frac{1}{p_2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{T_2} = \omega_0.\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

*Résultat*

La réponse temporelle est alors:

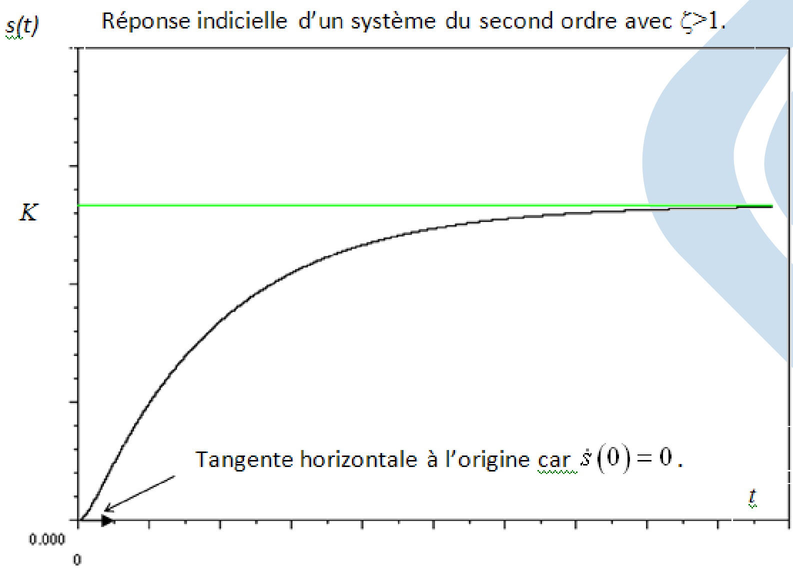
$$s(t) = K.\left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2}.e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}.e^{-\frac{t}{T_2}}\right], \ t \in [0, +\infty[.$$





# Réponse temporelle (Système du 2$^{ème}$ ordre) $\xi > 1$

$$s(t) = K.\left[1 - \frac{e^{-\omega_0.\xi.t}}{2.\sqrt{\xi^2 - 1}}.\left[-\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right).e^{-\omega_0.\sqrt{\xi^2-1}.t} + \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right).e^{\omega_0.\sqrt{\xi^2-1}.t}\right]\right]$$



## Réponse temporelle (Système du 2ème ordre) $\xi = 1$

Dans ce cas, H(p) admet pôle réel double et strictement négatif $p = -\omega_0$.

*Résultat*

La réponse temporelle est alors:
$s(t) = K.\left[1-(1+\omega_0.t).e^{-\omega_0.t}\right]$, $t \in [0,+\infty[$.





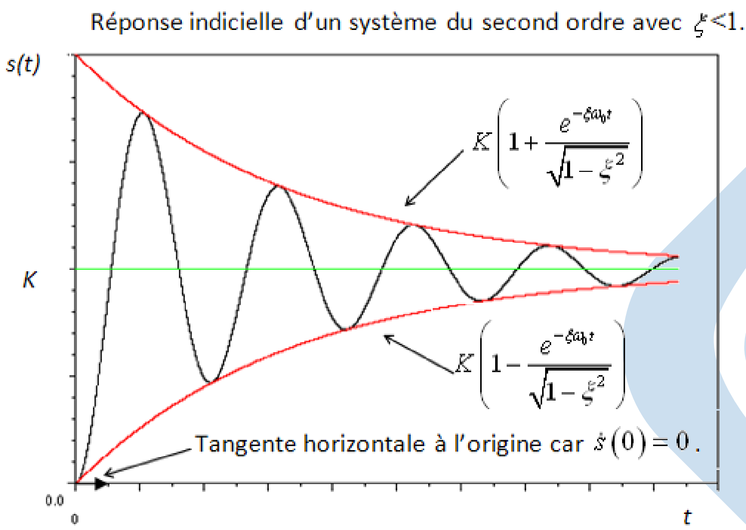
## Réponse temporelle (Système du 2ème ordre) $\xi < 1$

$H(p)$ admet deux pôles complexes conjugués à partie réelle strictement négative $p_1$ et $\overline{p_1}$ car leur somme $p_1+\overline{p_1} = 2.Re(p_1) = -2.\xi.\omega_0 < 0$

*Résultat*

La réponse temporelle est alors:
$s(t) = K.\left[1-\frac{e^{-\omega_0.\xi.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}.cos\left[\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}\right).t - arctan\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\right]\right]$, $t \in [0,+\infty[$.

# Réponse temporelle (Système du 2ème ordre) $\xi < 1$




- **Pseudo oscillations** dont la **pseudo-période** $T_p$ est telle que :

$$\left[\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}\right].T_p = 2.\pi \Rightarrow T_p = \frac{2.\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}$$

- Maximum autour de la demi pseudo-période : $T_{max} = \frac{T_p}{2}$





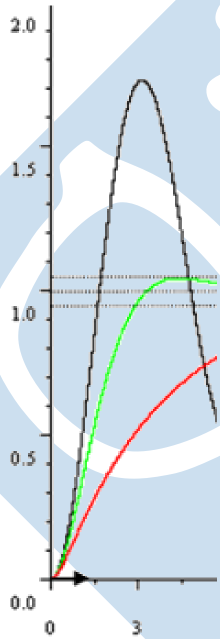
# Réponse temporelle (Système du 2ème ordre) $\xi < 1$

Pour caractériser la précision du système insuffisamment amorti pendant la phase transitoire, on détermine le dépassement exprimé en % qui est donné par la relation :

$$D\% = 100.\frac{S_{max} - s(+\infty)}{s(+\infty)} \Rightarrow D\% = 100.\frac{S(T_{max}) - K}{K}$$

*Résultat*

$$D\% = 100.e^{-\xi.\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$




Tous ces tracés peuvent être réalisés avec le fichier python à télécharger sur mon compte GitHub dans le dossier du cours S02-C01 ici.

## Réponse temporelle (Système du 2$^{ème}$ ordre) $\xi < 1$

Pour déterminer le **temps de réponse à n%**, il faut déterminer l'instant $t_{R,n\%}$ à partir duquel la Réponse $s(t)$ reste dans une bande de plus ou moins $n\%$ de la valeur finale stable $S(+\infty)$ moins la valeur initiale $s(0)$ soit:

*Definition*

Définition de réponse à $n\%$:
$|s(t) - s(+\infty)| \leq n\%.(s(+\infty) - s(0))$

Calcul à partir des équations des courbes enveloppes des oscillations afin d'approximer le résultat :

$$|s(t_{R,n\%}) - s(+\infty)| \simeq \left| K.\left(1 \pm \frac{e^{-\xi.\omega_0.t_{R,n\%}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) - K \right| = n\%.(s(+\infty) - s(0)) = n\%.(K - 0) =$$
$n\%.K$

*Résultat*

Temps de réponse à 5% (valable pour $\xi < 0.7$):
$t_{R,5\%} = \frac{1}{\xi.\omega_0}.ln(20)$



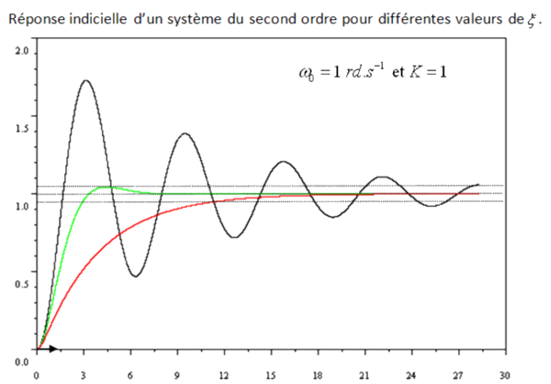


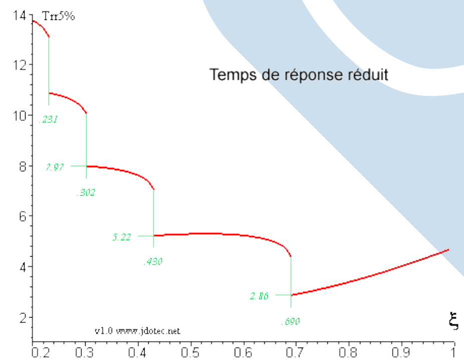
## Réponse temporelle (Système du 2$^{ème}$ ordre)

Comparaison des résultats obtenus pour les différentes valeurs de $\xi$.

*Remarque*

- Si $\xi > 1$, $\searrow \xi \Rightarrow$ (à pulsation propre $\omega_0$ constante) $\nearrow$ rapidité, $\searrow t_R$,
- Si $\xi < 1$, $\searrow \xi \Rightarrow$ (apparition de pseudo-oscillations) $\searrow$ rapidité, $\nearrow t_R$,



## La modélisation des S.L.C.I.

*Savoir*

Vous devez être capables :

- De modéliser un S.L.C.I.

*Problematique*

Il est nécessaire d'utiliser d'autres formes de représentation d'un mécanisme.

- *Problème: Comment représenter la structure d'un SLCI ?*
- **Perspectives**: Trouver un modèle de description d'un S.L.C.I. afin de gérer les systèmes complexes.